

А. А. КРАСОВСКИЙ

ФАЗОВОЕ
ПРОСТРАНСТВО
И СТАТИСТИЧЕСКАЯ
ТЕОРИЯ
ДИНАМИЧЕСКИХ
СИСТЕМ



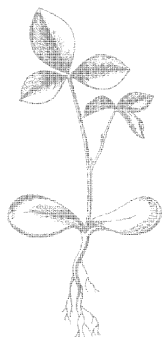


**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ
ОСНОВЫ
ТЕХНИЧЕСКОЙ
КИБЕРНЕТИКИ**

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1974

А. А. КРАСОВСКИЙ

**ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО
И СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1974

6 ф 6.5
К 78
УДК 62-50

Фазовое пространство и статистическая теория динамических систем, А. А. Красовский. Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, М., 1974, 232 стр.

В книге развиваются методы определения распределения вероятности в фазовом пространстве динамической системы путем решения уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова.

На этой основе исследуется ряд общих закономерностей статистической динамики различных классов нелинейных непрерывных систем.

Рассматриваются конкретные системы. Исследуется управление объектами микроскопических размеров и выявляются предельные точности такого управления. Монография предназначена для инженеров, аспирантов и научных работников, специализирующихся в области автоматического управления и статистической теории динамических систем.

Илл. 14. Табл. 1. Библ. 76 назв.

Александр Аркадьевич Красовский

**Фазовое пространство
и статистическая теория динамических систем**

(Серия: «Теоретические основы технической кибернетики»)

М., 1974 г., 232 стр. с илл.

Редактор *Д. С. Фурманов*

Техн. редактор *Н. В. Кошелева*

Корректоры *Т. С. Плетнева, Е. Я. Стрелва*

Сдано в набор 2/IV 1974 г. Подписано к печати 16/VII 1974 г.
Бумага 84 × 108¹/₃₂. Физ. печ. л. 7,25. Условн.
печ. л. 12,18. Уч.-изд. л. 12,57. Тираж 5 700 экз.
Т-09785. Цена книги 79 коп. Заказ № 514.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография издательства «Наука», Москва Г-99,
Шубинский пер., 10

К 30501—101
053 (02) -74 173-74 © Издательство «Наука», 1974.

Предисловие	7
Г л а в а I. Уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова	11
§ 1.1. Вывод ФПК-уравнения	12
§ 1.2. Свободное движение. Первые интегралы исходной системы и решение ФПК-уравнения	22
Г л а в а II. Решение уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова методом степенных рядов. Равновесные распределения	35
§ 2.1. Формализм метода рядов	36
§ 2.2. Частные случаи	46
§ 2.3. Статистическая устойчивость невозмущенного состояния. Равновесные распределения и их устойчивость	60
§ 2.4. Уравнения моментов	77
§ 2.5. Итерационный метод решения ФПК-уравнения	83
Г л а в а III. Решение ФПК-уравнения методом рядов и статистическая динамика конкретных классов систем	87
§ 3.1. Примеры статистического исследования конкретных классов систем	87
§ 3.2. Статистическая динамика свободного движения линейных систем со случайными постоянными коэффициентами	102
§ 3.3. Динамика линейных стохастических систем	116
§ 3.4. Статистическое исследование непрерывных адаптивных систем	139

Г л а в а IV. Равновесные распределения в системах с кусочно-линейными характеристиками. ФПК-уравнение и синтез динамических систем . . .	158
§ 4.1. Равновесные распределения в системах с кусочно-линейными характеристиками . . .	158
§ 4.2. ФПК-уравнение и синтез систем управления и фильтрации	171
Г л а в а V. Основы теории тепловых флуктуационных колебаний. Микроуправление	187
§ 5.1. Флуктуационные тепловые колебания в линейных пассивных системах	187
§ 5.2. Микроуправление	202
Литература	229

Современная теория случайных процессов в непрерывных динамических системах имеет многочисленные направления. Среди них направление, основанное на рассмотрении распределения вероятностей в фазовом пространстве, занимает в определенном отношении особое место. Оно ставит задачу определения текущей плотности вероятности в многомерном фазовом пространстве, т. е. задачу наиболее полного описания случайного движения. Эта плотность вероятности при достаточно общих условиях подчиняется уравнению в частных производных эллиптического типа — уравнению Фоккера — Планка — Колмогорова, или, как мы кратко будем называть, *ФПК-уравнению*. Данное уравнение нередко именуется также *диффузионным, уравнением диффузии вероятности, уравнением Эйнштейна — Фоккера*.

Математической теории непрерывных марковских процессов, связанных с этим уравнением, посвящена обширная литература. Однако до последнего времени вычислительные трудности, возникающие при решении ФПК-уравнения для сложных динамических систем, в частности многомерных нелинейных систем регулирования, считались непреодолимыми. Поэтому данное направление не фигурировало в качестве практического аппарата анализа и синтеза сложных систем. Основным назначением данной книги является разработка способов общего и численного определения плотности вероятности в фазовом пространстве, пригодных для целей анализа сложных динамических систем.

В главе I на физическом уровне строгости выводится ФПК-уравнение и на основе особенностей статистической динамики вводятся некоторые классы динамических систем. Для свободного движения динамической системы (при случайных начальных условиях) указывается связь решения ФПК-уравнения с первыми интегралами исходной системы. Это во многих случаях дает полезные результаты. Так, для многих нелинейных механических систем, для которых известен один или несколько первых интегралов, сразу определяется частное распределение вероятностей свободного движения.

Основной метод приближенного решения ФПК-уравнения для систем с аналитическими функциями — метод степенных рядов — рассматривается в главе II. Здесь сначала излагается формализм метода и частные случаи. Коэффициенты разложения в степенной ряд логарифма плотности вероятности определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений, которой при приближенном решении придается ограниченная размерность. Для случая свободного движения (динамическая система без шумов) коэффициенты указанного ряда удается выразить через начальные значения и элементы фундаментальной матрицы линейного приближения (весовые функции).

Вводится понятие стационарного равновесного распределения вероятности как распределения, не зависящего от времени. Рассматриваются условия существования равновесных распределений как при наличии шумов, так и при их отсутствии.

Метод коэффициентов разложения в степенной ряд логарифмической плотности вероятности сопоставляется в некоторых отношениях с методом моментов. Бесконечная система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений для моментов получена путем решения методом степенных рядов уравнения в частных производных для характеристической функции. Быстрая сходимость метода

коэффициентов получается для систем с большим рассеиванием (размытые распределения вероятностей). В этом смысле метод коэффициентов является более мощным в сравнении с методом моментов, который быстро сходится лишь для концентрированных распределений (малое рассеивание).

Метод коэффициентов наряду с определенными достоинствами обладает недостатками. Это трудность оценки сходимости метода, громоздкость систем уравнений коэффициентов. В работе излагается другой метод приближенного решения ФПК-уравнения, называемый итерационным. Этот метод дает решение в виде ряда по степеням времени, коэффициентами которого служат степени линейного дифференциального оператора, воздействующие на начальное распределение. Хотя возможности упомянутого метода изучены еще недостаточно, он представляется эффективным, особенно при изучении начальной фазы стохастических переходных процессов.

Глава III посвящена конкретным применениям метода коэффициентов при статистическом исследовании динамических систем различных классов. Сначала рассматриваются механические системы без шумов, в частности, осуществляется приближенный анализ статистической динамики либрационного движения искусственного спутника. Далее рассматриваются линейные системы со случайными, постоянными во времени параметрами. С точностью до кубических членов разложения в ряд логарифмической плотности вероятности найдено негауссовское распределение в фазовом пространстве такой системы и обоснованы допуски на некоторые параметры. Аналогичное исследование проведено для линейных стохастических систем, параметры которых являются случайными функциями времени. Заключительная часть главы III посвящена иллюстрациям возможности применения метода для исследования некоторых адаптивных систем.

В главе IV рассматриваются равновесные распределения в системах с кусочно-линейными характеристиками, а также ставятся некоторые задачи синтеза.

Показано, что решение ФПК-уравнения для объекта без шумов подобно решению задачи аналитического конструирования оптимальных управлений при определенном виде минимизируемого функционала.

Заключительная глава работы имеет самостоятельное значение и лишь косвенно связана с предыдущим. В ней рассматриваются вопросы предельной точности управления, обусловленной тепловыми шумами. Здесь обобщены известные результаты для линейных пассивных систем и получены оценки предельной точности стабилизации для систем с обратными связями. Вводится понятие микроуправления для задач управления объектами микроскопических (десятки ангстрем — микроны) размеров. Найдены некоторые оценки предельной точности управления такими объектами. Есть основания предполагать, что эти вопросы имеют принципиальное значение и получают широкое развитие в будущем.

Автор выражает благодарность профессору Ю. А. Кочеткову за замечания, сделанные при рецензировании рукописи книги.

УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА — ПЛАНКА — КОЛМОГОРОВА

Как показывает само наименование, ФПК-уравнение в историческом плане имеет два истока: физический и теоретико-вероятностный.

По-видимому, первой непрерывной динамической системой, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями со случайными функциями, рассмотренной с позиций статистической теории, явилась броуновская частица. Физическая теория броуновского движения была создана Эйнштейном и Смолуховским в 1905—1906 гг. [1.1], [1.2]. Еще раньше Башелье получил закон, которому подчиняется положение частицы, совершающей одномерное броуновское движение [1.3]. ФПК-уравнение (или, как его еще называют, диффузионное уравнение, уравнение диффузии вероятностей) на физической основе было выведено в работах Фоккера [1.4], Планка [1.5]. Строгий вывод принадлежит А. Н. Колмогорову [1.7]. Диффузионные процессы в фазовом пространстве, к которым относится броуновское движение, можно рассматривать как марковские процессы с непрерывными траекториями.

Широкая физическая постановка задачи о статистическом рассмотрении динамических систем, связанная с ФПК-уравнением, была опубликована А. А. Андроновым, Л. С. Понтрягиным, А. А. Виттом в 1933 г. [1.6]. Математической теории диффузионных процессов *) посвящены труды крупнейших математиков: А. Н. Колмогорова [1.7], [1.8], П. Леви [1.9] и др. [1.10], [1.11]. Этот раздел современной математики быстро развивается и содержит глубокие результаты.

В данной главе излагается вывод ФПК-уравнения на основе физических представлений.

*) Как уже отмечалось в предисловии, аспекты строгой математической теории диффузионных процессов совсем не затрагиваются в данной книге.

Для определенного класса динамических систем без шумов рассматривается связь решения ФПК-уравнения с первыми интегралами системы, иллюстрируемая конкретными примерами.

§ 1.1. Вывод ФПК-уравнения

Мы будем рассматривать динамические системы (объекты), описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями вида

$$\dot{x}_i + f_i(x_1, \dots, x_n, t) = \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.1)$$

Здесь x_1, \dots, x_n — координаты, которые называются *фазовыми*; ξ_1, \dots, ξ_n — случайные функции времени типа белых гауссовых шумов с матрицей спектральных плотностей $S = \|S_{ik}\|$, $S_{ik} = \text{const}$, и корреляционной матрицей $R(\tau) = \|R_{ik}(\tau)\| = \|S_{ik}\delta(\tau)\|$; $\delta(\tau)$ — дельта-функция.

Относительно функций f_i , которые часто будут именоваться *характеристиками исходной системы* или объекта, в дальнейшем используются различные предположения. Пока будем считать эти функции дифференцируемыми необходимое число раз во всей рассматриваемой области фазового пространства.

Уравнения в форме (1.1) и их частный вид для свободного движения (система без шумов)

$$\dot{x}_i + f_i(x_1, \dots, x_n, t) = 0 \quad (1.2)$$

настолько часто используются в теории динамических систем и других областях науки, что дальнейшие пояснения, по-видимому, не являются необходимыми.

Начальные значения фазовых координат $x_1(0), \dots, x_n(0)$ считаются случайными, и их распределение характеризуется плотностью вероятности

$$p(x_1, \dots, x_n, 0) = p_0(x_1, \dots, x_n), \quad (1.3)$$

которая по определению удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_0 dx_1 \dots dx_n = 1. \quad (1.4)$$

Требуется найти уравнение, которому подчинено измене-

ние текущей плотности вероятности $p = p(x_1, \dots, x_n, t)$ в фазовом пространстве. Простой и достаточно наглядный, на «физическом уровне строгости», вывод уравнения получается при использовании представления о «фазовом газе». Подобные построения часто применяются в статистической физике. Будем рассматривать уравнения (1.1) или (1.2) как уравнения движения частиц некоторого воображаемого фазового газа. Считаем, что частицы фазового газа не могут исчезать или возникать, их общее число во всем фазовом пространстве постоянно.

Изменение числа частиц в любом элементе объема $dx_1 \dots dx_n$ фазового пространства равно разности числа частиц, поступающих и убывающих из этого элементарного объема. Понятие фазового газа может быть интерпретировано также следующим образом. Допустим, что имеется очень много (или бесконечно много) совершенно одинаковых (с одинаковыми f_i, ξ_i) систем (1.1), отличающихся лишь различными начальными условиями. Изображающая точка каждой системы будет совершать в фазовом пространстве этой системы движения. Совместим все фазовые пространства идентичных систем в одно. Получаем движение в фазовом пространстве множества точек, которые и будут частицами фазового газа.

Выделим в фазовом евклидовом пространстве элементарный объем в виде n -мерного прямоугольного параллелепипеда ϵ центром в точке (x_1, x_2, \dots, x_n) и сторонами dx_1, dx_2, \dots, dx_n , параллельными координатным осям.

Движение частиц фазового газа в каждой точке фазового пространства имеет регулярную составляющую, обусловленную функциями $f_i(x_1, \dots, x_n, t)$, и случайную составляющую, вызываемую шумами $\xi_i(t)$. Поэтому мгновенная плотность фазового газа, т. е. количество частиц на единицу объема в данный момент времени и в данном месте фазового пространства, будет иметь как регулярную составляющую (математическое ожидание) $p(x_1, \dots, x_n, t)$, так и случайную центрированную (с нулевым математическим ожиданием) составляющую $\Delta p(x_1, \dots, x_n, t)$. Математическое ожидание плотности фазового газа равно искомой плотности вероятности в фазовом пространстве.

Скорость изменения количества частиц в выделенном элементарном параллелепипеде равна сумме потоков час-

тиц, проникающих через его грани. Полагая стороны параллелепипеда сколь угодно малыми, с точностью до малых высших порядков записываем это условие неразрывности, или сохранения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [p(x_1, \dots, x_n, t) + \Delta p(x_1, \dots, x_n, t)] dx_1 \dots dx_n = \\ = \sum_{i=1}^n \left\{ \left[p(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i - \frac{1}{2} dx_i, x_{i+1}, \dots, x_n, t) + \right. \right. \\ \left. \left. + \Delta p(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i - \frac{1}{2} dx_i, x_{i+1}, \dots, x_n, t) \right] \times \right. \\ \times \left[-f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i - \frac{1}{2} dx_i, x_{i+1}, \dots, x_n, t) + \xi_i(t) \right] \times \\ \times dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n - \\ - \left[p(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \frac{1}{2} dx_i, x_{i+1}, \dots, x_n, t) + \right. \\ \left. + \Delta p(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \frac{1}{2} dx_i, x_{i+1}, \dots, x_n, t) \right] \times \\ \times \left[-f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \frac{1}{2} dx_i, x_{i+1}, \dots, x_n, t) + \xi_i(t) \right] \times \\ \left. \times dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n \right\} = \\ = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [(p + \Delta p)(f_i - \xi_i)] dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \Delta p}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [(p + \Delta p)(f_i - \xi_i)] = \\ = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (pf_i) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\Delta p \xi_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\Delta p f_i) - \frac{\partial}{\partial x_i} (p \xi_i) \right]. \quad (1.5) \end{aligned}$$

Математические ожидания величин $\frac{\partial \Delta p}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x_i} (\Delta p f_i)$, $\frac{\partial}{\partial x_i} (p \xi_i)$ равны нулю (Δp , ξ_i — центрированные случайные функции, f_i , p — неслучайные функции). В

соответствии с этим из (1.5) вытекает

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} (p f_i) - \frac{\partial}{\partial x_i} M [\Delta p \xi_i] \right\}, \\ \frac{\partial \Delta p}{\partial t} &= \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{\partial}{\partial x_i} (\Delta p \xi_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\Delta p f_i) - \frac{\partial}{\partial x_i} (p \xi_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} M [\Delta p \xi_i] \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

где $M [\]$ — символ математического ожидания.

Второе из этих соотношений с учетом того, что $\frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} = 0$, можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta p}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Delta p}{\partial x_i} (-f_i + \xi_i) &= \frac{\partial \Delta p}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Delta p}{\partial x_i} \dot{x}_i = \Delta \dot{p} = \\ &= \Delta p \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} M [\Delta p \xi_i] - \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial p}{\partial x_i} \end{aligned}$$

или

$$\Delta \dot{p} - \Delta p \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} M [\Delta p \xi_i] - \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial p}{\partial x_i}. \quad (1.7)$$

Здесь $\Delta \dot{p}$ обозначает полную производную по времени функции Δp , полученную в силу дифференциальных уравнений исходной системы (1.1). В каждой заданной точке

фазового пространства величина $\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ является функцией времени, и дифференциальное уравнение (1.7) в этой точке можно рассматривать как линейное относительно Δp .

В начальный момент времени $t = 0$ плотность фазового газа считаем равной заданной начальной плотности распределения и $\Delta p_{t=0} = 0$. Решение линейного уравнения (1.7) при этом условии имеет вид

$$\Delta p = \int_0^t w_{\Delta p}(t, t') \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} M [\Delta p \xi_i] - \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial p}{\partial x_i} \right\} dt', \quad (1.8)$$

где $w_{\Delta p}(t, t')$ — весовая функция, удовлетворяющая условию $w_{\Delta p}(t', t') = 1$. Умножая (1.8) на $\xi_i(t)$ и определяя математическое ожидание, находим

$$\begin{aligned} M[\Delta p \xi_i] &= - \int_0^t w_{\Delta p}(t, t') \left\{ \sum_{j=1}^n M[\xi_j(t') \xi_i(t)] \frac{\partial p}{\partial x_j} \right\} dt' = \\ &= - \int_0^t w_{\Delta p}(t, t') \sum_{j=1}^n \frac{\partial p}{\partial x_j} S_{ij} \delta(t' - t) dt' = - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n S_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Множитель $1/2$ здесь появляется потому, что интегрирование δ -функции ведется в пределах от 0 до $+0$ ($+0$ — бесконечно малая положительная величина), а не от -0 до $+0$, т. е. используется половина «площади» δ -импульса. Подставляя (1.9) в верхнее уравнение (1.6), получаем окончательно

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (pf_i) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n S_{ij} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad (1.10)$$

— уравнение Фоккера—Планка — Колмогорова. Строгий вывод ФПК-уравнения можно найти в работах [1.7], [1.9].

Решение ФПК-уравнения при условии (1.4) автоматически удовлетворяет условию нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int p dx_1 \dots dx_n = 1. \quad (1.11)$$

Покажем это в предположении, что плотность вероятности исчезает в бесконечности и притом так, что

$$(pf_i)_{x_i=\pm\infty} = 0, \left(\frac{\partial p}{\partial x_j} \right)_{x_i=\pm\infty} = 0. \quad (1.12)$$

Проинтегрируем (1.10) по всему фазовому пространству

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \frac{\partial p}{\partial t} dx_1 \dots dx_n - \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \frac{\partial}{\partial x_i} (pf_i) dx_1 \dots dx_n - \\ - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n S_{ij} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} dx_1 \dots dx_n = 0. \end{aligned}$$

Учитывая, что согласно (1.12)

$$\begin{aligned} & \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_i} (pf_i) dx_1 \dots dx_n = \\ & = \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} [(pf_i)_{x_i=\infty} - (pf_i)_{x_i=-\infty}] dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n = 0, \\ & \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} dx_1 \dots dx_n = \\ & = \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x_j} \right)_{x_i=\infty} - \left(\frac{\partial p}{\partial x_j} \right)_{x_i=-\infty} \right] dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n = 0, \end{aligned}$$

получаем

$$\int \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial p}{\partial t} dx_1 \dots dx_n = \frac{\partial}{\partial t} \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} p dx_1 \dots dx_n = 0.$$

Таким образом, величина

$$\int \dots \int_{-\infty}^{\infty} p dx_1 \dots dx_n$$

постоянна и при условии (1.4) равна единице. Если вместо обычной плотности вероятности использовать логарифмическую плотность вероятности $\ln p$, то ФПК-уравнение (1.10) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln p}{\partial t} - \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial \ln p}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n S_{ij} \left(\frac{\partial^2 \ln p}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial \ln p}{\partial x_i} \frac{\partial \ln p}{\partial x_j} \right) = \\ = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}. \quad (1.13) \end{aligned}$$

Эта логарифмическая форма ФПК-уравнения, введенная нами в работах [1.12], [1.13], будет широко использоваться в дальнейшем.

Непосредственно из вида уравнения (1.13) можно ожидать особенностей статистической динамики систем, у

которых

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.14)$$

в любой точке фазового пространства. Такие динамические системы будем называть *обобщенными консервативными*. Если по аналогии со следом матрицы именовать величину (1.14) следом якобиана

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

то можно сказать, что обобщенные консервативные системы — это системы, у которых след якобиана равен нулю. Частным видом обобщенных консервативных систем являются системы, у которых в любой точке фазового пространства

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0. \quad (1.15)$$

Этот класс систем будем называть *системами без прямых связей*. Еще один класс составляют системы, у которых «диагональные» частные производные $\partial f_i / \partial x_i$ постоянны или зависят только от времени. Такие системы будем именовать *системами без прямых нелинейных связей*. Особенности статистической динамики всех этих классов систем будут рассмотрены ниже.

При рассмотрении некоторых вопросов статистической теории динамических систем полезным является понятие общей энтропии системы:

$$H = - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int p \ln p dx_1 \dots dx_n. \quad (1.16)$$

В последующих главах текущая логарифмическая плотность вероятности $\ln p$ часто ищется в форме

сходящегося степенного ряда

$$\ln p = A_0 + \sum_{i=1}^n A_i x_i + \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^n A_{ik} x_i x_k + \\ + \frac{1}{3} \sum_{i, k, l=1}^n A_{ikl} x_i x_k x_l + \dots,$$

где $A_0, A_i, A_{ik}, A_{ikl}, \dots$ — коэффициенты распределения, являющиеся в общем случае функциями времени. Подстановка этого выражения в (1.16) дает

$$H = -A_0 - \sum_{i=1}^n A_i M_i - \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^n A_{ik} M_{ik} - \\ - \frac{1}{3} \sum_{i, k, l=1}^n A_{ikl} M_{ikl} - \dots, \quad (1.17)$$

где

$$M_{\underbrace{ikl\dots s}_N} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{p x_i x_k x_l \dots x_s}_{\underbrace{\quad}_{N}} dx_1 \dots dx_N \quad (N = 1, 2, \dots)$$

— моменты распределения. Для нормального распределения коэффициенты A_{ikl} и все последующие коэффициенты равны нулю и формула энтропии принимает вид

$$H = -A_0 - \sum_{i=1}^n A_i M_i - \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^n A_{ik} M_{ik},$$

а для нормального центрального ($M_i = 0$) распределения

$$H = -A_0 - \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^n A_{ik} M_{ik}.$$

Матрицы $A = \|A_{ik}\|$, $M = \|M_{ik}\|$ в этом случае по отношению друг к другу являются обратными: $M = -A^{-1}$

и $\sum_{i, k=1}^n A_{ik} M_{ik} = -n$. Таким образом, для нормального центрального распределения

$$H = -A_0 + \frac{1}{2} n. \quad (1.18)$$

Для производной энтропии по времени в предположении, что величины pf_i , $pf_i \ln p$, $\frac{\partial p}{\partial x_i} \ln p$ исчезают на бесконечности:

$$(pf_i)_{x_i=\pm\infty} = 0, \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \ln p\right)_{x_i=\pm\infty} = 0,$$

$$(pf_i \ln p)_{x_i=\pm\infty} = 0,$$

нетрудно получить выражение [4.13]

$$\dot{H} = - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_n +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^n S_{ik} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \ln p}{\partial x_i}\right) \left(\frac{\partial \ln p}{\partial x_k}\right) p dx_1 \dots dx_n. \quad (4.19)$$

Действительно, вследствие условия (4.11) производная \dot{H} равна

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t} = - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \ln p + \frac{\partial p}{\partial t}\right) dx_1 \dots dx_n =$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial p}{\partial t} \ln p dx_1 \dots dx_n.$$

Подставляя сюда выражение для $\partial p / \partial t$ из (4.10) и интегрируя по частям, находим

$$\dot{H} = - \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_i} (pf_i) \ln p dx_1 \dots dx_n -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^n S_{ij} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} \ln p dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_i \frac{\partial p}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_n +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n S_{ij} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial \ln p}{\partial x_i} p dx_1 \dots dx_n = \\
& = - \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} p dx_1 \dots dx_n + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n S_{ij} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \ln p}{\partial x_i} \frac{\partial \ln p}{\partial x_j} p dx_1 \dots dx_n.
\end{aligned}$$

В отсутствие шумов (свободное движение системы)

$$\dot{H} = - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) p dx_1 \dots dx_n.$$

Для обобщенных консервативных систем $\dot{H} = 0$, т. е. энтропия обобщенной консервативной системы в отсутствие шумов постоянна.

При наличии шумов энтропия обобщенной консервативной системы всегда нарастает. Действительно, в этом случае

$$\begin{aligned}
\dot{H} & = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n S_{ij} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \ln p}{\partial x_i} \frac{\partial \ln p}{\partial x_j} p dx_1 \dots dx_n = \\
& = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i,j=1}^n S_{ij} \frac{\partial \ln p}{\partial x_i} \frac{\partial \ln p}{\partial x_j} p dx_1 \dots dx_n = \\
& = \frac{1}{2} M \left[\left(\sum_{i=1}^n \eta_i \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)^2 \right], \quad (1.20)
\end{aligned}$$

где η_i — случайные функции, моменты которых равны $M[\eta_i \eta_j] = S_{ij}$. Из (1.20) видно, что $\dot{H} > 0$.

Для систем, не являющихся обобщенными консервативными, при наличии шумов может существовать энтропийное равновесие ($\dot{H} = 0$). Оно наступает при

$$M \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right] = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n S_{ik} M \left[\frac{\partial \ln p}{\partial x_i} \frac{\partial \ln p}{\partial x_k} \right]. \quad (1.21)$$

§ 1.2. Свободное движение. Первые интегралы исходной системы и решение ФПК-уравнения

При отсутствии шумов уравнение (1.13) имеет вид

$$\frac{\partial \ln p}{\partial t} - \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial \ln p}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}. \quad (1.22)$$

Это уравнение описывает изменение плотности распределения в фазовом пространстве при случайных начальных условиях, заданных начальным распределением (1.3).

Допустим, что для исходной системы дифференциальных уравнений, которая при отсутствии шумов имеет вид

$$\dot{x}_i + f_i(x_1, \dots, x_n, t) = 0, \quad (1.23)$$

известно n линейно независимых первых интегралов

$$\psi_j(x_1, \dots, x_n, t) = c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.24)$$

Покажем, что для систем без прямых нелинейных связей, для которых уравнения (1.23) имеют форму

$$\dot{x}_i + \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + \varphi_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0$$

и $\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ есть функция времени или постоянная, общее решение ФПК-уравнения (1.22) имеет вид

$$\ln p = \Psi(\psi_1, \dots, \psi_n) + \int_0^t \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dt, \quad (1.25)$$

где $\Psi(\psi_1, \dots, \psi_n)$ — произвольная функция первых интегралов (1.24). Действительно, полные производные первых интегралов (1.24), определенные с учетом уравнений движения (1.23), равны нулю:

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} f_i = 0. \quad (1.26)$$

Подставляя выражение (1.25) в (1.22) и учитывая (1.26),

получаем тождество

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Psi}{\partial \psi_j} \frac{\partial \psi_j}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n f_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Psi}{\partial \psi_j} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} = \\ = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Psi}{\partial \psi_j} \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} f_i \right) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Решение (1.25) или

$$p = \exp \left[\Psi(\psi_1, \dots, \psi_n) + \int_0^t \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dt \right] \quad (1.27)$$

содержит n линейно независимых первых интегралов и является общим, так как удовлетворяет произвольному начальному распределению. В самом деле, для удовлетворения условия

$$\ln p_0(x_1, \dots, x_n) = \Psi(\psi_1, \dots, \psi_n), \quad \psi_i = \psi_i(x_1, \dots, x_n, 0),$$

достаточно задать Ψ в виде

$$\Psi(\psi_1, \dots, \psi_n) = \ln p_0(z_1, \dots, z_n),$$

где

$$z_i = z_i(\psi_1, \dots, \psi_n).$$

По условию якобиан $\left| \frac{\partial \psi_j}{\partial x_k} \right|$ отличен от нуля и соотношения (1.24) могут быть разрешены относительно x_i ; в частности, при $t = 0$

$$x_i = z_i(c_1, \dots, c_n) = z_i(\psi_1, \dots, \psi_n).$$

Если известно $k < n$ первых интегралов исходной системы уравнений без прямых нелинейных связей, в частности один первый интеграл, то выражение

$$p = \exp \left[\Psi(\psi_1, \dots, \psi_k) + \int_0^t \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dt \right], \quad (1.28)$$

удовлетворяя ФПК-уравнению, является его частным решением.

Распределение (1.28) будет существовать в системе, если начальное распределение имеет вид

$$p_0(x_1, \dots, x_n) = \exp[\Psi(\psi_1, \dots, \psi_n)], \quad \psi_i = \psi_i(x_1, \dots, x_n, 0). \quad (1.29)$$

Если первые интегралы не зависят от времени,

$$\psi_i(x_1, \dots, x_n) = c_i,$$

и система является обобщенной консервативной, $\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0$, то как общее (1.27), так и частное (1.28) решения не зависят от времени. Такие распределения вероятностей будем называть *равновесными стационарными* или просто *равновесными*.

Если уравнения исходной системы имеют каноническую форму:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H_\Gamma}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H_\Gamma}{\partial p_i}, \quad (1.30)$$

где H_Γ — функция Гамильтона (индекс «г» введен для отличия от обозначения энтропии), q_i — обобщенные координаты, p_i — обобщенные импульсы, то ФПК-уравнение принимает вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q_i} \left(p \frac{\partial H_\Gamma}{\partial p_i} \right) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial p_i} \left(p \frac{\partial H_\Gamma}{\partial q_i} \right) = 0,$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial p}{\partial q_i} \frac{\partial H_\Gamma}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial p}{\partial p_i} \frac{\partial H_\Gamma}{\partial q_i} = \\ = \frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial p}{\partial p_i} \dot{p}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial p}{\partial q_i} \dot{q}_i = 0. \end{aligned} \quad (1.31)$$

В статистической физике это соотношение называется *теоремой Лиувилля* [1.14].

Канонические системы (1.30) относятся к классу обобщенно консервативных систем, так как здесь

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 H_\Gamma}{\partial q_i \partial p_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 H_\Gamma}{\partial q_i \partial p_i} = 0.$$

Если функция Гамильтона не зависит явно от времени, то уравнения (1.30) имеют первый интеграл $H_\Gamma = \text{const}$ и согласно предыдущему существуют равновесные стационарные распределения вероятностей

$$p = \exp [\Psi (H_\Gamma)], \quad (1.32)$$

где Ψ — произвольная функция. В этом легко убедиться прямой подстановкой в (1.31).

Рассмотрим теперь несколько примеров нахождения равновесных распределений вероятностей путем использования первых интегралов.

1. Свободное вращательное движение твердого тела описывается уравнениями Эйлера

$$\begin{aligned} J_x \dot{\omega}_x + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z &= 0, \\ J_y \dot{\omega}_y + (J_x - J_z) \omega_x \omega_z &= 0, \\ J_z \dot{\omega}_z + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y &= 0, \end{aligned}$$

для которых известны первые интегралы: интеграл энергии

$$J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2 = c_1$$

и интеграл момента количества движения

$$J_x^2 \omega_x^2 + J_y^2 \omega_y^2 + J_z^2 \omega_z^2 = c_2.$$

При использовании обозначений

$$\left. \begin{aligned} \omega_x = x_1, \quad \omega_y = x_2, \quad \omega_z = x_3, \\ a_{123} = \frac{J_z - J_y}{J_x}, \quad a_{213} = \frac{J_x - J_z}{J_y}, \quad a_{312} = \frac{J_y - J_x}{J_z} \end{aligned} \right\} \quad (1.33)$$

эти выражения принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 + a_{123} x_2 x_3 &= 0, & \psi_1 &= J_x x_1^2 + J_y x_2^2 + J_z x_3^2, \\ \dot{x}_2 + a_{213} x_1 x_3 &= 0, & \psi_2 &= J_x^2 x_1^2 + J_y^2 x_2^2 + J_z^2 x_3^2. \\ \dot{x}_3 + a_{312} x_1 x_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.34)$$

Система является консервативной и согласно предыдущему имеет стационарные равновесные распределения

вероятностей

$$p(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = \exp \{ \Psi (J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2, J_x^2 \omega_x^2 + J_y^2 \omega_y^2 + J_z^2 \omega_z^2) \}, \quad (1.35)$$

где Ψ — произвольная функция, но такая, что условие нормировки (1.11) выполняется.

Таким образом, если начальное распределение компонент угловой скорости твердого тела может быть представлено в виде (1.35), то это распределение сохраняется неограниченно долго.

Для тела с эллипсоидом инерции в виде эллипсоида вращения ($J_y = J_z, J_x \neq J_y$) любое симметричное относительно начала координат и равномерное в экваториальной плоскости (сечение плоскостью yz поверхности $p = \text{const}$ есть окружность) распределение вероятности является равновесным. Действительно, это распределение может быть представлено в виде

$$\exp \{ \Psi [J_x \omega_x^2 + J_y (\omega_y^2 + \omega_z^2), J_x^2 \omega_x^2 + J_y^2 (\omega_y^2 + \omega_z^2)] \}$$

путем подбора функции Ψ . Для аналитических функций это вытекает из того, что при указанных условиях p_0 может быть представлено в виде целого степенного ряда двух аргументов: $y_1 = \omega_x^2$ и $y_2 = \omega_y^2 + \omega_z^2$. С другой стороны, коэффициенты разложения в ряд по степеням y_1, y_2 функции

$$\exp \{ \Psi (J_x y_1 + J_y y_2, J_x^2 y_1 + J_y^2 y_2) \} \quad (1.36)$$

линейно независимых (по условию $J_y \neq J_x$) сумм $J_x y_1 + J_y y_2, J_x^2 y_1 + J_y^2 y_2$ могут быть сделаны любыми путем подбора функции Ψ .

Итак, для тела с эллипсоидом инерции в виде эллипсоида вращения относительно оси x любое распределение вероятностей, симметричное относительно этой оси, является равновесным.

Если телу с $J_y = J_z$ (гироскопу), помимо случайных угловых скоростей, сообщено регулярное вращение со скоростью Ω_x относительно оси x , то согласно предыдущему

$$p = \exp \{ \Psi [J_x (\Omega_x + \omega_x)^2 + J_y (\omega_y^2 + \omega_z^2), J_x^2 (\Omega_x + \omega_x)^2 + J_y^2 (\omega_y^2 + \omega_z^2)] \}.$$

Это решение сохраняет силу общего равновесного распределения для симметричных относительно оси x и точки $\omega_x = \Omega_x$ начальных распределений.

2. Уравнения движения вокруг центра массы искусственного спутника (твердое тело с размерами, малыми в сравнении с расстоянием до центра гравитации) на круговой орбите имеют вид [1.15]

$$\left. \begin{aligned} J_x \dot{\omega}_x + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z - 3\Omega^2 (J_z - J_y) \gamma' \gamma'' &= 0, \\ J_y \dot{\omega}_y + (J_x - J_z) \omega_x \omega_z - 3\Omega^2 (J_x - J_z) \gamma \gamma'' &= 0, \\ J_x \dot{\omega}_z + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y - 3\Omega^2 (J_y - J_x) \gamma \gamma' &= 0. \end{aligned} \right\} (1.37)$$

Здесь $\Omega = \sqrt{\frac{\mu}{R^3}}$ — угловая скорость орбитального движения, μ — гравитационная постоянная, R — расстояние до центра гравитации, $\gamma, \gamma', \gamma''$ — направляющие косинусы между связанными осями (главными осями инерции) и осью орбитальной системы координат, направленной по радиусу-вектору орбиты, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — угловые скорости в связанной системе координат. Направляющие косинусы $\gamma, \gamma', \gamma''$ связаны с шестью другими направляющими косинусами $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta''$ между орбитальными и связанными осями и компонентами угловой скорости кинематическими соотношениями Пуассона:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\gamma} &= \gamma' \omega_z - \gamma'' \omega_y + \alpha \Omega, & \dot{\alpha} &= \alpha' \omega_z - \alpha'' \omega_y - \gamma \Omega, \\ \dot{\gamma}' &= \gamma'' \omega_x - \gamma \omega_z + \alpha' \Omega, & \dot{\alpha}' &= \alpha'' \omega_z - \alpha \omega_x - \gamma' \Omega, \\ \dot{\gamma}'' &= \gamma \omega_y - \gamma' \omega_x + \alpha'' \Omega, & \dot{\alpha}'' &= \alpha \omega_y - \alpha' \omega_x - \gamma'' \Omega, \\ \dot{\beta} &= \beta' \omega_z - \beta'' \omega_y, \\ \dot{\beta}' &= \beta'' \omega_x - \beta \omega_z, \\ \dot{\beta}'' &= \beta \omega_y - \beta' \omega_z. \end{aligned} \right\} (1.38)$$

Тривиальными первыми интегралами уравнений (1.38) являются шесть линейно независимых алгебраических соотношений между направляющими косинусами

$$\left. \begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1, & \alpha \alpha' + \beta \beta' + \gamma \gamma' &= 0, \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 &= 1, & \alpha' \alpha'' + \beta' \beta'' + \gamma' \gamma'' &= 0, \\ \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 &= 1, & \alpha \alpha'' + \beta \beta'' + \gamma \gamma'' &= 0 \end{aligned} \right\} (1.39)$$

или эквивалентные им соотношения. Кроме того, система уравнений (1.37), (1.38) двенадцатого порядка имеет первый интеграл типа Якоби [1.15]:

$$\Psi_1 = \frac{1}{2} (J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2) + \frac{3}{2} \Omega^2 (J_x \gamma^2 + J_y \gamma'^2 + J_z \gamma''^2) - \Omega (J_x \omega_x \beta + J_y \omega_y \beta' + J_z \omega_z \beta'') = c_1. \quad (1.40)$$

Рассматриваемая система является консервативной, и для нее справедливо доказанное положение. Равновесный закон распределения можно строить как функцию всех семи первых интегралов, однако вводить тривиальные интегралы (1.39) нет смысла. Взамен этих соотношений лучше выразить все направляющие косинусы через три независимые величины. Если в качестве этих величин принять угол φ поворота вокруг оси x , угол ϑ поворота вокруг оси y и угол ψ поворота вокруг оси z связанной системы координат, в результате которых (трех последовательных поворотов) система связанных координат совмещается с орбитальной, то

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \cos \vartheta \cos \psi, & \alpha' &= -\cos \vartheta \sin \psi, & \alpha'' &= \sin \vartheta, \\ \beta &= \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \sin \vartheta \cos \psi, \\ \beta' &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \vartheta \sin \psi, \\ \beta'' &= -\sin \varphi \cos \vartheta, \\ \gamma &= \sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \sin \vartheta \cos \psi, \\ \gamma' &= \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \vartheta \sin \psi, \\ \gamma'' &= \cos \varphi \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} (1.41)$$

Равновесное распределение, соответствующее первому интегралу (1.40), имеет вид

$$[p = \exp \{\Psi(\psi_1)\},$$

где Ψ — произвольная функция, при которой удовлетворяется условие нормировки (1.11). Для малых углов φ , ϑ , ψ ,

$$\gamma = -\vartheta, \quad \gamma' = \varphi, \quad \gamma'' = 1, \quad \beta = \psi, \quad \beta' = 1, \quad \beta'' = -\varphi,$$

выражение равновесного распределения можно представить так:

$$p = \exp \{ \Psi' [J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2 + 3\Omega^2 (J_x \vartheta^2 + J_y \varphi^2) - 2\Omega (J_x \omega_x \psi + J_y \omega_y - J_z \omega_z \varphi)] \}. \quad (1.42)$$

Это стационарное равновесное распределение является частным, так как основано лишь на одном первом интеграле.

Поясним физическую причину существования равновесного распределения для рассматриваемого движения спутника, называемого *либрационным*. Члены в уравнениях (1.37), содержащие множитель Ω^2 , соответствуют моментам, создаваемым неоднородным (центральным) гравитационным полем. Эти моменты стремятся ориентировать главные оси инерции по орбитальному трехграннику. Однако в условиях отсутствия рассеяния энергии, которому отвечают уравнения (1.37), затухания либрационных колебаний и вращений не происходит, вследствие чего и возможно равновесное распределение.

3. Движение многих тел с пренебрежимо малыми относительными размерами (материальные точки) под действием потенциальных сил взаимного притяжения или отталкивания в инерциальной декартовой системе координат описывается уравнениями

$$m_i \ddot{x}_i + \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0, \quad m_i \ddot{y}_i + \frac{\partial U}{\partial y_i} = 0, \quad m_i \ddot{z}_i + \frac{\partial U}{\partial z_i} = 0 \quad (1.43)$$

$$(i = 1, 2, \dots, N \geq 2),$$

где U — потенциальная энергия, зависящая от относительных расстояний между телами:

$$U = U [\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}], \quad (1.44)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, N.$$

Для системы (1.43) известен интеграл энергии

$$\psi_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) + U = c_1 \quad (1.45)$$

и три первых интеграла количества движения:

$$\psi_2 = \sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_i = c_2, \quad \psi_3 = \sum_{i=1}^N m_i \dot{y}_i = c_3, \quad \psi_4 = \sum_{i=1}^N m_i \dot{z}_i = c_4. \quad (1.46)$$

Система является консервативной, и согласно предыдущему для нее существует стационарное равновесное

распределение вероятностей

$$\begin{aligned}
 p &= \exp [\Psi (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)] = \\
 &= \exp \left\{ \Psi \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) + U, \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_i, \sum_{i=1}^N m_i \dot{y}_i, \sum_{i=1}^N m_i \dot{z}_i \right] \right\}, \quad (1.47)
 \end{aligned}$$

где Ψ — произвольная функция указанных четырех аргументов, обеспечивающая условие нормировки (1.11).

Система первых интегралов (1.45), (1.46) при записанном условии $N \geq 2$ не является полной. Поэтому, хотя формула (1.47) может выражать разнообразные равновесные распределения, полученное решение является частным. Это можно проиллюстрировать для случая $U = 0$, т. е. при отсутствии потенциальных сил. В этом случае скорости движения тел вообще постоянны и любое распределение скоростей является стационарным равновесным. Между тем формула (1.47) для данного случая принимает форму

$$\begin{aligned}
 p &= \exp \left\{ \Psi \left[\sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2), \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_i, \sum_{i=1}^N m_i \dot{y}_i, \sum_{i=1}^N m_i \dot{z}_i \right] \right\},
 \end{aligned}$$

в которой нельзя выразить любое стационарное распределение.

Частным видом равновесного распределения (1.47) является распределение, при котором плотность вероятности является функцией только энергии системы:

$$p = \exp \left\{ \Psi \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) + U \right] \right\}. \quad (1.48)$$

Для того чтобы p удовлетворяла условию нормировки, функция Ψ должна быть убывающей функцией энергии. Отсюда следует, что если потенциальная энергия U имеет минимум при определенном относительном расположении материальных точек, как, например, имеет место для

атомов в кристаллической решетке, то этому минимуму соответствует максимум плотности вероятности равновесного распределения (1.48).

Если Ψ — линейная функция аргумента, то единственным возможным видом стационарного равновесного распределения (1.48) является

$$p = \exp \left\{ -K \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) + U \right] \right\},$$

где

$$K = \text{const} > 0.$$

При определенном значении K это распределение совпадает с известным в статистической физике распределением Гиббса [1.14].

4. Единственным относительно общим классом систем, для которых можно указать полную совокупность первых интегралов, являются линейные системы

$$\dot{x}_i + \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = 0,$$

или

$$\dot{x} + ax = 0, \quad (1.49)$$

где $a = \| a_{ik} \|$ — квадратная матрица коэффициентов, зависящих в общем случае от времени, x — вектор (матрица-столбец). Фундаментальная матрица системы (1.49) $w(t, t') = \| w_{ik}(t, t') \|$, которую мы часто будем называть *матрицей весовых функций*, удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt} w(t, t') + aw(t, t') = 0, \quad w(t', t') = \mathbf{1}, \quad (1.50)$$

где $\mathbf{1}$ — единичная матрица.

Заметим, что под матрицей весовых функций часто понимается матрица, удовлетворяющая (1.50) при $t > t'$ и равная нулю при $t < t'$. Мы, однако, будем называть фундаментальной матрицей весовых функций просто фундаментальное решение линейной системы уравнений, удовлетворяющее (1.50), без дополнительного условия $w(t, t') = 0$ при $t < t'$.

Общее решение уравнения (1.49) имеет вид

$$x(t) = w(t, t') x(t'),$$

ИЛИ

$$x(t) = w(t, 0) x^0, \quad (1.51)$$

где $x^0 = x(0)$ — вектор начального состояния системы. Заметим, что согласно известному свойству линейных систем

$$w(0, t) w(t, 0) = w(t, 0) \quad w(0, t) = 1.$$

Умножая (1.51) слева на $w(0, t)$, получаем

$$w(0, t)x = x^0. \quad (1.52)$$

Это соотношение в скалярной форме имеет вид

$$\sum_{k=1}^n w_{ik}(0, t) x_k = x_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.53)$$

и представляет собой полную систему первых интегралов линейной системы (1.49). Действительно, число этих первых интегралов равно n и они линейно независимы, так как фундаментальная матрица является неособой.

Согласно (1.53) и предыдущему вообще текущее распределение вероятностей для свободного движения линейной системы выражается формулой

$$p = \exp \left\{ \Psi \left[\sum_{k=1}^n w_{1k}(0, t) x_k, \dots, \sum_{k=1}^n w_{nk}(0, t) x_k \right] + \int_0^t \sum_{k=1}^n a_{kk} dt \right\}.$$

Для начального момента времени $t = 0$ отсюда следует $p(x_1, \dots, x_n, 0) = p^0(x_1, \dots, x_n) = \exp [\Psi(x_1, \dots, x_n)]$.

Таким образом, $\exp \Psi = p^0$ и общая формула плотности вероятности в фазовом пространстве линейной системы без шумов имеет вид

$$p = \exp \left(\int_0^t \sum_{k=1}^n a_{kk} dt \right) p^0 \left[\sum_{k=1}^n w_{1k}(0, t) x_k, \dots, \sum_{k=1}^n w_{nk}(0, t) x_k \right]. \quad (1.54)$$

Легко проверить, что условие нормировки, справедливое для $p = 0$, удовлетворяется при любом t . Плотность

вероятности в начале координат (центре фазового пространства) согласно (1.54) равна

$$p(0, \dots, 0, t) = \exp\left(\int_0^t \sum_{k=1}^n a_{kk} dt\right) p^0(0, \dots, 0) \quad (1.55)$$

и остается неизменной с течением времени только для систем, у которых

$$\sum_{k=1}^n a_{kk} = 0$$

(обобщенные консервативные линейные системы). Заметим, что согласно (1.19) для линейной системы без шумов

$$\dot{H} = - \sum_{k=1}^n a_{kk}$$

и

$$\int_0^t \sum_{k=1}^n a_{kk} dt = H(0) - H(t).$$

Таким образом, множитель в формуле (1.54) выражается через приращение общей энтропии системы

$$p = \exp [H(0) - H(t)] p^0 \left[\sum_{k=1}^n w_{1k}(0, t) x_k, \dots, \sum_{k=1}^n w_{nk}(0, t) w_k \right] \quad (1.56)$$

и

$$H(t) = H(0) + \ln \frac{p^0(0, \dots, 0)}{p(0, \dots, 0, t)}. \quad (1.57)$$

Распределение свободного движения линейной системы, как видим, получается из начального распределения неособым линейным преобразованием координат и обладает определенным консерватизмом: нормальное начальное распределение дает нормальное текущее распределение, равномерное во всем фазовом пространстве начальное распределение (в этом случае $p^0 = \text{const}$ — бесконечно малая величина) дает такое же распределение.

Если, однако, начальное распределение является равномерным в ограниченной области фазового пространства,

то текущее распределение является равномерным в области, получающейся из исходной линейным неособым преобразованием координат. Для устойчивой исходной системы, для которой все функции $w_{ik}(t, 0)$ стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$, текущая область равномерного распределения при $t \rightarrow \infty$ стягивается к началу координат, для неустойчивой системы — расширяется. Это относится также к поверхностям заданной плотности вероятности $p(x_1, \dots, x_n, t) = \text{const}$ для произвольного случая.

Конечно, эти результаты для свободного движения линейной системы можно получить просто прямым рассмотрением фазовых траекторий, однако для нелинейных систем это затруднено или невозможно.

**РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ
ФОККЕРА — ПЛАНКА — КОЛМОГОРОВА
МЕТОДОМ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ.
РАВНОВЕСНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ**

Прямое численное интегрирование ФПК-уравнения, как и любого уравнения в частных производных, для задач высокой размерности затруднено. Это отмечается во многих работах, например в [2.1], [2.2]. Для иллюстрации трудностей численного интегрирования уравнения

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (p f_i) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n S_{ij} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad (2.1)$$

рассмотрим способ замены частных производных по фазовым координатам разностями дискретных значений функций.

Предположим, что рассматриваемая область фазового пространства представляет собой прямоугольный параллелепипед

$$|x_i| \leq L_i$$

и вместо координат x_i введены целочисленные координаты

$$x_i \approx v_i \frac{L_i}{D} \quad (v_i = -D, \dots, 0, 1, \dots, D),$$

где D — целое число. Это означает, что функции $p(x_1, \dots, x_n, t)$, $f_i(x_1, \dots, x_n, t)$ рассматриваются только в конечном числе точек, а именно в $(2D + 1)^n$ точках фазового пространства. Значения функций p , f_i в этих точках обозначим

$$p_{v_1, \dots, v_n}, \quad p_{i, v_1, \dots, v_n}$$

Заменяя частные производные $\frac{\partial}{\partial x_i} (p, f_i)$ первыми разно-

стями, а частные производные $\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j}$ вторыми разностями, вместо (2.1) записываем

$$\begin{aligned} \dot{p}_{v_1, \dots, v_n} - \frac{D}{L_i} \sum_{i=1}^n (p_{v_1, \dots, v_i, \dots, v_n} f_{i, v_1, \dots, v_i, \dots, v_n} - \\ - p_{v_1, \dots, v_{i-1}, \dots, v_n} f_{i, v_1, \dots, v_{i-1}, \dots, v_n}) - \\ - \frac{1}{2} D^2 \sum_{i, j=1}^n \frac{S_{ij}}{L_i L_j} (p_{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n} - p_{v_1, \dots, v_{i-1}, \dots, v_j, \dots, v_n} - \\ - p_{v_1, \dots, v_i, \dots, v_{j-1}, \dots, v_n} + p_{v_1, \dots, v_{i-1}, \dots, v_{j-1}, \dots, v_n}) = 0. \quad (2.2) \end{aligned}$$

Начальные значения p_{v_1, \dots, v_n} при $t = 0$ определяются начальным распределением вероятности и известны. Таким образом, численное интегрирование уравнения (2.1) сводится к интегрированию системы $(2D + 1)^n$ обыкновенных линейных дифференциальных уравнений (2.2). Для получения необходимой точности число целочисленных значений D редко может быть взятым меньше 5. При $2D + 1 = 11$ порядок системы уравнений (2.2) равен 11^n . Если считать, что на современных достаточно мощных ЭВМ можно интегрировать системы уравнений порядка тысячи и несколько более, то приходим к выводу, что путем прямого численного интегрирования ФПК-уравнения можно решать задачи размерности не выше трех ($n = 3$).

Для объектов с аналитическими характеристиками, которые могут быть выражены конечными или бесконечными степенными рядами, в работах [2.3], [2.4] нами предложен метод решения ФПК-уравнения с помощью степенных рядов. В данной главе излагается и развивается этот метод.

§ 2.1. Формализм метода рядов

Пусть функции f_i исходной системы уравнений (1.1) являются аналитическими, т. е. выражаются полиномами или бесконечными степенными рядами

$$f_i = \sum_{k=1}^n a_{i\kappa} x_\kappa + \sum_{k, l=1}^n a_{ikl} x_\kappa x_l + \sum_{k, l, m=1}^n a_{iklm} x_\kappa x_l x_m + \dots \quad (2.3)$$

сходящимися во всей рассматриваемой области фазового пространства. Коэффициенты $\underbrace{a_{ikl\dots s}}_{N+1}$ связаны с частными производными функций f_i в начале координат соотношениями

$$\underbrace{a_{ikl\dots s}}_{N+1} = \frac{1}{N!} \left(\frac{\partial^N f_i}{\partial x_k \partial x_l \dots \partial x_s} \right)_0 \quad (2.4)$$

и симметричны относительно всех индексов, начиная со второго:

$$a_{ikl} = a_{ilk}, \quad a_{ikln} = a_{ikln} = a_{ikln} = \dots = a_{imlk}, \quad \dots$$

Все коэффициенты (2.4) могут быть постоянными (стационарный объект) или функциями времени (нестационарный объект). Полагаем, что логарифм начальной плотности вероятности представлен в виде полинома или сходящегося степенного ряда:

$$\begin{aligned} \ln p(x_1, \dots, x_n, 0) &= \ln p_0(x_1, \dots, x_n) = \\ &= A_0 + \sum_{i=1}^n A_i^0 x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n A_{ik}^0 x_i x_k + \frac{1}{3} \sum A_{ikl}^0 x_i x_k x_l + \dots, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где коэффициенты

$$\underbrace{A_{ikl\dots s}^0}_N = \frac{1}{(N-1)!} \left(\underbrace{\frac{\partial^N \ln p}{\partial x_i \partial x_k \dots \partial x_s}}_N \right)_{x_i=x_k=\dots=x_s=0} \quad (2.6)$$

симметричны относительно всех индексов, т. е. не меняются при любых перестановках индексов.

По определению плотности вероятности

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_0 dx_1 \dots dx_n &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(A_0 + \sum_{i=1}^n A_i^0 x_i + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n A_{ik}^0 x_i x_k + \dots \right) dx_1 \dots dx_n = 1. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Решение ФПК-уравнения, т. е. выражение для текущей логарифмической плотности вероятности $\ln p$, ищем также

в виде степенного ряда

$$\ln p(x_1, \dots, x_n, t) = A_0 + \sum_{i=1}^n A_i x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n A_{ik} x_i x_k + \\ + \frac{1}{3} \sum_{i,k,l=1}^n A_{ikl} x_i x_k x_l + \dots \quad (2.8)$$

Подлежащие определению коэффициенты A_0 , A_i , A_{ik} , A_{ikl} , ... являются в общем случае функциями времени, связаны с частными производными текущей логарифмической плотности вероятности аналогично (2.6):

$$A_{\underbrace{ikl\dots s}_N} = \frac{1}{(N-1)!} \left(\frac{\partial^N \ln p}{\underbrace{\partial x_i \partial x_k \dots \partial x_s}_N} \right)_{x_i = x_k = \dots = x_s = 0}, \quad (2.9)$$

и симметричны относительно всех индексов. Заметим, что мы ищем решение в форме ряда для логарифмической плотности вероятности, подчиненной ФПК-уравнению вида (1.13):

$$\frac{\partial \ln p}{\partial t} - \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial \ln p}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n S_{ij} \left(\frac{\partial^2 \ln p}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial \ln p}{\partial x_i} \frac{\partial \ln p}{\partial x_j} \right) = \\ = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}. \quad (2.10)$$

В принципе можно искать выражение в форме ряда для обычной плотности вероятности p , подчиненной ФПК-уравнению вида (1.10). Однако есть основание предполагать, что в большинстве встречающихся задач степенной ряд логарифмической плотности вероятности сходится значительно быстрее степенного ряда обычной плотности вероятности. Действительно, для такого характерного распределения, как нормальное, логарифмическая плотность вероятности представляет собой квадратичный полином, т. е. ряд обрывается на квадратичных членах, в то время как степенной ряд для плотности нормального распределения является бесконечным.

Подставляя выражения (2.3), (2.8) в уравнение (2.10), собирая и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых произведениях фазовых координат, находим

формально

$$\begin{aligned} \dot{A}_0 - \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^n S_{pq} (A_{pq} + A_p A_q) &= \sum_{p=1}^n a_{pp}, \\ \dot{A}_i - \sum_{p=1}^n a_{pi} A_p - \sum_{p,q=1}^n S_{pq} (A_{pqi} + A_{pi} A_q) &= \\ &= 2 \sum_{p=1}^n a_{ppi}, \\ \dot{A}_{i_k} - \sum_{p=1}^n (a_{pi} A_{pk} + a_{pk} A_{pi}) - 2 \sum_{p=1}^n a_{pik} A_p - \\ - \sum_{p,q=1}^n S_{pq} (3A_{pqik} + 2A_{pik} A_q + A_{pi} A_{qk}) &= \\ &= 6 \sum_{p=1}^n a_{ppik}, \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{A}_{\underbrace{ikl\dots s}_N} - \sum_{p=1}^n (a_{pi} \underbrace{A_{pkl\dots s}}_N + \dots + a_{ps} \underbrace{A_{pikl\dots r}}_N) - \\ - \frac{2!}{N-1} \sum_{p=1}^n (a_{pik} \underbrace{A_{plm\dots s}}_{N-1} + \dots + a_{prs} \underbrace{A_{pik\dots f}}_{N-1}) - \\ - \frac{3!}{(N-1)(N-2)} \sum_{p=1}^n (a_{pikt} \underbrace{A_{pdl\dots s}}_{N-2} + \dots \\ \dots + a_{pfrs} \underbrace{A_{pik\dots m}}_{N-2}) - \dots \\ \dots - \frac{2!}{N-1} \sum_{p=1}^n a_{\underbrace{pik\dots f}}_{N-1} A_{prs} + \dots + a_{\underbrace{plm\dots s}}_{N-1} A_{pik} - \\ - \sum_{p=1}^n (a_{\underbrace{pik\dots r}}_N A_{ps} + \dots + a_{\underbrace{pkl\dots s}}_N A_{pi}) - \\ - N \sum_{p=1}^n a_{\underbrace{ikl\dots s}}_{N+1} A_p - \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^n S_{pq} \times \end{aligned}$$

(2.11)

$$\begin{aligned}
& \times [N(N+1) \underbrace{A_{pqik\dots s}}_{N+2} + 2N \underbrace{A_p A_{qik\dots s}}_{N+1} + \\
& + (\underbrace{A_{pi} A_{qkl\dots s}}_N + \dots + \underbrace{A_{ps} A_{qik\dots r}}_N) + \\
& + \frac{2!}{N-1} (\underbrace{A_{pik} A_{ql\dots s}}_{N-1} + \dots + \underbrace{A_{prs} A_{qik\dots f}}_{N-1}) + \\
& + \frac{3!}{(N-1)(N-2)} (\underbrace{A_{pikl} A_{qr\dots s}}_{N-2} + \dots + \underbrace{A_{pfrs} A_{qi\dots l}}_{N-2}) + \dots \\
& \dots + (\underbrace{A_{pik\dots r} A_{ps}}_N + \dots + \underbrace{A_{pkl\dots s} A_{pi}}_N) = \\
& = N(N+1) \sum_{r=1}^n \underbrace{a_{ppik\dots s}}_{N+2},
\end{aligned}
\quad \left. \vphantom{\sum} \right\} \quad (2.11)$$

Решение этой бесконечной системы дифференциальных уравнений при начальных условиях

$$A_0(0) = A^0, \quad A_i(0) = A_i^0, \quad A_{ik}(0) = A_{ik}^0, \dots \quad (2.12)$$

определяет коэффициенты ряда (2.8).

Для корректности и эффективности метода главным является вопрос о сходимости и скорости сходимости ряда (2.8). Получение общих количественных условий и оценок сходимости здесь, как и во многих других задачах, представляет сложную проблему. Однако следующие соображения указывают на предпосылки сходимости. По условию ряд начального распределения (2.5) сходится. Решение дифференциальных уравнений (2.11) непрерывно и на достаточно малом интервале времени мало отличается от начальных условий. Это дает основание считать, что на начальном интервале времени ряд (2.8) будет сходящимся.

Далее, если исходная система дифференциальных уравнений (1.1) является линейной, шумы отсутствуют ($S_{pq} = 0$) и начальная логарифмическая плотность вероятности выражается полиномом, то текущая логарифмическая плотность вероятности будет выражаться полиномом той же степени.

Действительно, в этом случае система уравнений (2.11) распадается на автономные группы линейных однородных

уравнений, причем каждая группа соответствует коэффициентам членов определенной степени:

$$\underbrace{\dot{A}_{ikl\dots s}}_N - \sum_{p=1}^n (a_{pi} \underbrace{A_{pkl\dots s}}_N + \dots + a_{ps} \underbrace{A_{pkl\dots i}}_N) = 0, \quad (2.13)$$

$$N = 1, 2, \dots$$

По условию начальные значения коэффициентов, начиная с некоторого $N = N_m$, нулевые:

$$\underbrace{A_{ikl\dots s}^0}_N = 0, \quad N = N_m, \quad N_m + 1, \dots$$

Поэтому и решения однородных уравнений (2.13), начиная с $N = N_m$, — нулевые:

$$\underbrace{A_{ikl\dots s}}_N = 0, \quad N = N_m, \quad N_m + 1, \dots,$$

т. е. текущая логарифмическая плотность вероятности выражается полиномом. Если в линейной системе без шумов начальная логарифмическая плотность вероятности выражается степенным рядом, сходящимся в области G_0 фазового пространства, то степенной ряд текущей логарифмической плотности вероятности будет сходиться в области G_1 фазового пространства, получающейся из области G_0 линейным преобразованием координат

$$x(t) = w(t, 0) x(0),$$

где $w(t, 0)$ — фундаментальная матрица системы, x — вектор (матрица-столбец) фазовых координат. Это вытекает из выражения (1.51).

Отметим одно очень важное обстоятельство, которое широко будет использоваться в дальнейшем. Для устойчивой линейной системы область сходимости ряда с течением времени уменьшается (стягивается к началу координат), а для неустойчивой системы — расширяется. Можно полагать, что это справедливо и для нелинейных систем, с устойчивым или неустойчивым невозмущенным состоянием $x = 0$. Действительно, если невозмущенное состояние устойчиво *), то широкое почти равномерное начальное

*) Здесь речь идет, строго говоря, о так называемой статистической устойчивости (см. § 2.3).

распределение, для которого коэффициенты (2.6) малы и быстро убывают с возрастанием N , превращается с течением времени в концентрированное в окрестности начала координат распределение, для которого коэффициенты $\underbrace{A_{ikl\dots s}}_N$ могут быть значительными, вплоть до больших N . Обратная картина имеет место для системы с неустойчивым невозмущенным состоянием. Концентрированное начальное распределение, с возможной малой областью сходимости ряда (2.5), превращается с течением времени в широкое распределение с быстро убывающими с ростом N коэффициентами $\underbrace{A_{ikl\dots s}}_N$.

Из сказанного видно, что неустойчивость системы способствует сходимости ряда (2.8) и, стало быть, благоприятствует применению метода рядов. Однако чаще всего встречаются задачи статистического исследования устойчивых систем. Ниже будет показано, что путем перехода к обратному времени можно для устойчивой системы обеспечить быструю сходимость метода в решении обратной задачи (задано конечное распределение, найти начальное).

При достаточно быстрой сходимости ряда (2.8) можно ограничиться учетом членов до N -го порядка включительно. При этом N целесообразно задавать четным, так как при нечетном N условие нормировки (2.7) выполняться не может. Так вместо бесконечной системы уравнений (2.11) получается замкнутая система конечного порядка

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{A}_i - \sum_{p=1}^n a_{pi} A_p - \sum_{p,q=1}^n S_{pq} (A_{pqi} + A_{pi} A_q) &= \\
 &= 2 \sum_{p=1}^n a_{ppi}, \\
 \dot{A}_{ik} - \sum_{p=1}^n (a_{pi} A_{pk} + a_{pk} A_{pi}) - 2 \sum_{p=1}^n a_{pik} A_p - \\
 - \sum_{p,q=1}^n S_{pq} (3A_{pqi} + 2A_{pik} A_q + A_{pi} A_{qk}) &= \\
 &= 6 \sum_{p=1}^n a_{ppik},
 \end{aligned} \right\} (2.14)$$

A_0 из соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \exp \left(A_0 + \sum_{i=1}^n A_i x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n A_{ik} x_i x_k + \dots \right) \times \\ \times dx_1 \dots dx_n = 1. \quad (2.16)$$

Выше указывалось, что точное решение ФПК-уравнения удовлетворяет условию нормировки автоматически. Поэтому точное решение бесконечной системы уравнений (2.11) при условии (2.7) обращает соотношение (2.16) в тождество. Однако при приближенном решении после определения A_i, A_{ik}, \dots как решения уравнений (2.14) величину A_0 удобнее определять из (2.16), а не (2.15). Это гарантирует выполнение условия нормировки при приближенном решении.

С учетом симметрии коэффициентов общий порядок системы уравнений (2.14) равен

$$n + \frac{n(n+1)}{2!} + \dots + \frac{n(n+1) \dots (n+N-1)}{N!}. \quad (2.17)$$

Этот порядок указан в таблице 1 для различных значений n и N . При $N = 2$ (нормальный закон распределения), $n = 40$ этот порядок составляет 860, при $N = 4, n = 10$ он равен 1000; при $N = 6, n = 6$ равен 923; при $N = 10, n = 4$ порядок равен 1000. Таким образом, хотя для многомерной динамической системы система дифференциальных уравнений (2.14) получается громоздкой, она при не очень больших N, n доступна для численного интегрирования на современных ЭВМ.

Однако, как показано ниже, кроме прямого численного интегрирования существуют многочисленные пути общего исследования уравнений (2.14) и построения на основе этого исследования теорий частного вида систем.

Трудоемкость численного и аналитического исследований во многом зависит от скорости сходимости рядов, которая определяет допустимое значение N .

Выше уже отмечалось, что неустойчивость невозмущенного состояния исходной системы благоприятствует сходимости ряда (2.8) при достаточно больших значениях t , а стало быть позволяет ограничиться невысокими значениями N . Однако в большинстве случаев приходится

Таблица 1

$N \backslash n$	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	5	9	14	20	27	35	44
3	3	9	19	34	55	83	119	164
4	4	14	34	69	125	209	329	494
5	5	20	55	125	251	461	791	1286
6	6	27	83	209	461	923	1715	3002
7	7	35	119	329	791	1715	3431	
8	8	44	164	494	1286	3002		
9	9	54	219	714	2001	5004		
10	10	65	285	1000	3002			

9	10	15	20	25	30	35	40	45
54	65	135	230	350	495	665	860	1080
219	285	815	1770	3275				
714	1000	3059						
2001	3002							

иметь дело с устойчивыми или нейтральными объектами. Система

$$\dot{x}_i + f_i(x_1, \dots, x_n, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

с устойчивым невозмущенным состоянием может быть трансформирована в систему с неустойчивым невозмущенным состоянием путем перехода к обратному течению времени:

$$\tau = -t. \quad (2.18)$$

При этом в уравнениях (2.11), (2.14) изменяются знаки при производных:

$$\dot{A}_{\underbrace{ikl\dots s}_N} = -\frac{d}{d\tau} A_{\underbrace{ikl\dots s}_N}.$$

Это и вызывает сходимость решения уравнений коэффициентов с ростом τ . Необходимо при этом иметь в виду, что начальное распределение во времени τ есть конечное распределение в реальном времени t и наоборот. Это озна-

чает, что если после замены (2.18) мы решаем уравнения коэффициентов, назначая $A_{ikl\dots s}^0$, и находим $A_{ikl\dots s}(\tau)$, то в реальном времени мы тем самым назначаем конечное распределение и определяем предшествующее (на интервал τ) распределение, порождающее заданное конечное. Таким образом, мы решаем обратную задачу. Такой подход оказывается удобным при решении некоторых задач синтеза (см. главу IV).

Задача определения в общем виде числа N , необходимого для получения с заданной точностью текущего распределения вероятностей, столь же сложна, как задача определения общих условий и скорости сходимости рядов — решений уравнений (2.11), (2.14). Вероятно, для практики в данной области, как и во многих других, самым универсальным и доступным будет эмпирический способ, при котором о скорости сходимости и приемлемости приближения судят на основе сравнения решений, полученных при двух или более последовательно увеличивающихся значениях N . Для ряда (2.8), как и любого степенного ряда, сходимость, вообще говоря, ухудшается по мере увеличения аргументов x_i . Это означает, что при любом заданном N «периферийная» часть распределения определяется с ошибкой, могущей неограниченно увеличиваться по мере удаления от центра фазового пространства. Это один из основных недостатков метода рядов. Его можно частично преодолеть, ставя обязательным условием получение приближенного решения для $\ln p$ в виде отрицательно определенного полинома. Тогда на периферии приближенная плотность вероятности будет стремиться к нулю, как и истинная плотность (в большинстве случаев).

§ 2.2. Частные случаи

Для свободного движения исходной системы ($S_{pq} = 0$) уравнения (2.11) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}_0 &= \sum_{p=1}^n a_{pp}, \\ \dot{A}_i - \sum_{p=1}^n a_{pi} A_p &= 2 \sum_{p=1}^n a_{p pi}, \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned}
 \dot{A}_{ik} - \sum_{p=1}^n (a_{pi} A_{pk} + a_{pk} A_{pi}) - 2 \sum_{p=1}^n a_{pik} A_p = \\
 = 6 \sum_{p=1}^n a_{ppik}, \\
 \dots \dots \dots \\
 \underbrace{\dot{A}_{ikl\dots s}}_N - \sum_{p=1}^n (a_{pi} \underbrace{A_{pkl\dots s}}_N + \dots + a_{ps} \underbrace{A_{rkl\dots i}}_N) - \\
 - \frac{2!}{N-1} \sum_{p=1}^n (a_{pik} \underbrace{A_{plm\dots s}}_{N-1} + \dots + a_{prs} \underbrace{A_{pik\dots f}}_{N-1}) - \\
 - \frac{3!}{(N-1)(N-2)} \sum_{p=1}^n (a_{pikl} \underbrace{A_{pjm\dots s}}_{N-2} + \dots + \\
 + a_{pfrs} \underbrace{A_{pi\dots m}}_{N-2}) - \dots - \sum_{p=1}^n (a_{pik\dots r} \underbrace{A_{ps}}_N + \dots + \\
 + a_{pkl\dots s} \underbrace{A_{pi}}_N) - N \sum_{p=1}^n \underbrace{a_{pik\dots s}}_{N+1} A_p = \\
 = N(N+1) \sum_{p=1}^n \underbrace{a_{ppik\dots s}}_{N+2}, \\
 \dots \dots \dots
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Эти уравнения интегрируются в общем виде в том смысле, что их решение выражается через весовые функции линейного приближения исходного объекта. Эти функции удовлетворяют уравнениям линейного приближения

$$\frac{d}{dt} w_{ij}(t, t') + \sum_{k=1}^n a_{ik} w_{kj}(t, t') = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \tag{2.20}$$

и начальным условиям

$$w_{ik}(t', t') = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases} \tag{2.21}$$

Функции с обратным порядком аргументов удовлетворяют сопряженным уравнениям

$$\frac{d}{dt} w_{ij}(t', t) - \sum_{k=1}^n a_{kj} w_{ik}(t', t) = 0 \quad (2.22)$$

при тех же начальных условиях (2.21). Решение уравнений (2.19) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= A_0^0 + \int_0^t \sum_{p=1}^n a_{pp} dt', \\ A_i(t) &= \sum_{\nu=1}^n A_{\nu}^0 w_{\nu i}(0, t) + 2 \sum_{\nu=1}^n \int_0^t \sum_{p=1}^n a_{p\nu} w_{\nu i}(t', t) dt', \\ A_{ij}(t) &= \sum_{\nu, \mu=1}^n A_{\nu\mu}^0 w_{\nu i}(0, t) w_{\mu j}(0, t) + \\ &\quad + 2 \sum_{\nu, \mu=1}^n \int_0^t \left[3 \sum_{p=1}^n a_{p\nu\mu}(t') + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{p=1}^n a_{p\nu\mu}(t') A_p(t') \right] w_{\nu i}(t', t) w_{\mu j}(t', t) dt', \\ &\quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ A_{\underbrace{ijk\dots s}_N}(t) &= \\ &= \sum_{\nu, \mu, \dots, \chi=1}^n A_{\underbrace{\nu\mu\dots\chi}_N}^0 w_{\nu i}(0, t) w_{\mu j}(0, t) \dots w_{\chi s}(0, t) + \\ &\quad + \sum_{\nu, \mu, \dots, \chi=1}^n \int_0^t \left\{ N(N+1) \sum_{p=1}^n a_{\underbrace{p\nu\mu\dots\chi}_{N+2}}(t') + \right. \\ &\quad \left. + N \sum_{p=1}^n a_{\underbrace{p\nu\mu\dots\chi}_{N+1}}(t') A_p(t') + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{p=1}^n [a_{\underbrace{p\mu\dots\chi}_N}(t') A_{p\nu}(t') + \dots + a_{\underbrace{p\nu\dots\sigma}_N}(t') A_{p\chi}(t')] + \right. \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2!}{N-1} \sum_{p=1}^n [a_{p\varepsilon\dots\chi}(t') \underbrace{A_{p\nu\mu}}_{N-1}(t') + \dots \\
& \quad \dots + a_{p\nu\dots\eta}(t') \underbrace{A_{p\varepsilon\chi}}_{N-1}(t')] + \\
& + \frac{3!}{(N-1)(N-2)} \sum_{p=1}^n [a_{p\varepsilon\dots\chi}(t') \underbrace{A_{p\nu\mu\varepsilon}}_{N-2}(t') + \dots \\
& \quad \dots + a_{p\nu\dots\zeta}(t') \underbrace{A_{p\eta\varepsilon\chi}}_{N-2}(t')] + \dots \\
& \dots + \frac{2!}{N-1} \sum_{p=1}^n [a_{p\rho\chi}(t') \underbrace{A_{p\nu\mu\dots\eta}}_{N-1}(t') + \dots \\
& \quad \dots + a_{p\nu\mu}(t') \underbrace{A_{p\varepsilon\psi\dots\chi}}_{N-1}(t')] \} \times \\
& \quad \times w_{\nu_i}(t', t) w_{\mu_j}(t', t) \dots w_{\chi_s}(t', t) dt', \\
& \dots \dots \dots
\end{aligned} \quad (2.23)$$

Непосредственно из этих выражений видно, что начальные условия удовлетворяются. Подстановкой данных выражений в уравнения (2.19) с учетом соотношения (2.22), убеждаемся, что уравнения (2.19) обращаются в тождества.

Выражение искоемых коэффициентов через фундаментальную систему функций линейного приближения для больших n имеет существенные вычислительные преимущества. Действительно, общий порядок системы уравнений (2.23) при ограниченном N (укороченная система) выражается формулой (2.17) (уравнение для A_0 во внимание не принимается) и для значительных n , N , как указывалось, весьма высок.

Между тем фундаментальное решение уравнений линейного приближения, по крайней мере для случая стационарной системы, может быть получено n -кратным интегрированием системы линейных дифференциальных уравнений размерности n . Дальнейшее согласно (2.23) сводится к умножению, сложению и квадратурам.

Для иллюстрации применения формул (2.23) рассмотрим простой пример. Пусть дана система первого порядка

$$\dot{x} + k \sin x = 0,$$

где $k = \text{const}$, и известно, что начальное распределение x (при $t = 0$) является равномерным в интервале от $-\pi$ до π :

$$p_0(x) = p(x, 0) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{при } |x| \leq \pi, \\ 0 & \text{при } |x| > \pi. \end{cases}$$

ФПК-уравнение для логарифмической плотности вероятности в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial \ln p}{\partial t} - k \sin x \frac{\partial \ln p}{\partial x} = k \cos x.$$

Легко проверить, что это уравнение при указанном начальном условии имеет точное решение вида

$$p(x, \tau) = \frac{1}{2\pi (\text{ch } \tau - \cos x \text{ sh } \tau)},$$

где $\tau = kt$ — «безразмерное время».

Найдем теперь приближенное решение описанным методом. Учитывая, что

$$k \sin x = k \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!} x^{2\nu+1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{(2\nu+1)} x^{2\nu+1},$$

$$a_{(2\nu+1)} = a_{\underbrace{11 \dots 1}_{2\nu+1}} = (-1)^\nu \frac{k}{(2\nu+1)!}$$

и что в данном случае

$$A_0^0 = \ln \frac{1}{2\pi}, \quad A_{(N)}^0 = A_{\underbrace{11 \dots 1}_N}^0 = 0 \quad (N = 1, 2, \dots),$$

$$w_{11}(t', t) = w_{11}(t' - t) = \exp(t' - t),$$

по формулам (2.23) последовательно находим

$$A_0(\tau) = \ln \frac{1}{2\pi} + \tau,$$

$$A_{(2)}(\tau) = \frac{1}{2}(1 - \exp 2\tau),$$

$$A_{(4)}(\tau) = \frac{1}{24} - \frac{1}{6} \exp 2\tau + \frac{1}{8} \exp 4\tau,$$

$$A_{(6)}(\tau) = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{15} - \frac{17}{30} \exp 2\tau + \exp 4\tau - \frac{1}{2} \exp 6\tau \right).$$

На рис. 2.1 для нескольких моментов времени представлены точное распределение $p(x, \tau)$ и приближенные

распределения

$$P_{(2)}(x, \tau) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(\tau + \frac{1}{2} A_{(2)} x^2\right),$$

$$P_{(4)}(x, \tau) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(\tau + \frac{1}{2} A_{(2)} x^2 + \frac{1}{4} A_{(4)} x^4\right),$$

$$P_{(6)}(x, \tau) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(\tau + \frac{1}{2} A_{(2)} x^2 + \frac{1}{4} A_{(4)} x^4 + \frac{1}{6} A_{(6)} x^6\right).$$

Видно, что для небольших значений τ приближенные распределения весьма близки к точному, особенно при $N = 4, 6$. Легко проверить, что полученные приближенные

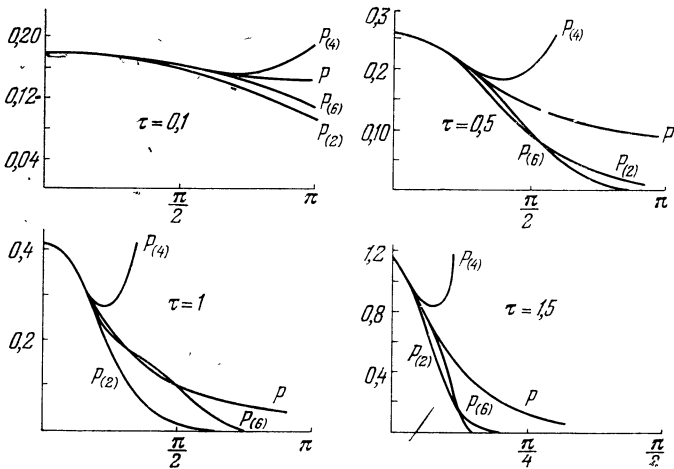


Рис. 2.1.

распределения совпадают с точным в отношении значений производных до соответствующего порядка (N) в начале координат.

Это свойство является общим для систем без шумов. Действительно, уравнения (2.19), а значит и выражения (2.23), получаются из общей бесконечной системы (2.11) без отбрасывания каких-либо членов. Поэтому найденные из (2.23) или (2.19) коэффициенты $A_{ijh\dots s}$ являются точными, т. е. совпадают с соответствующими коэффициентами точного решения.

Итак, данный метод применительно к системам без шумов дает при любом заданном N решение, совпадающее

с точным в отношении всех производных до N -го порядка включительно, вычисленных в начале координат.

Продолжая рассмотрение частных случаев, заметим, что значительное упрощение вычислений получается в том случае, когда фундаментальная матрица линейного приближения $w = \|w_{ik}\|$ является диагональной, т. е. когда «каналы» объекта в линейном приближении автономны. В этом случае выражения (2.23) принимают вид

$$\begin{aligned}
 A_i(t) &= A_i^0 w_{ii}(0, t) + 2 \int_0^t \sum_{p=1}^n a_{ppi}(t') w_{ii}(t', t) dt', \\
 A_{ij}(t) &= A_{ij}^0 w_{ii}(0, t) w_{jj}(0, t) + 2 \int_0^t \left[3 \sum_{p=1}^n a_{ppij}(t') + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{p=1}^n a_{pij}(t') A_p(t') \right] w_{ii}(t', t) w_{jj}(t', t) dt', \\
 &\dots \dots \dots \\
 \underbrace{A_{ijk\dots s}}_N(t) &= A_{ijk\dots s}^0 w_{ii}(0, t) w_{jj}(0, t) \dots w_{ss}(0, t) + \\
 &\quad + \int_0^t \left\{ N(N+1) \sum_{p=1}^n \underbrace{a_{ppij\dots s}}_{N+2}(t') + \right. \\
 &\quad \left. + N \sum_{p=1}^n \underbrace{a_{pij\dots s}}_{N+1}(t') A_p(t') + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{p=1}^n [a_{pj\dots s}(t') A_{pi}(t') + \dots + a_{pi\dots r}(t') A_{ps}(t')] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2!}{N-1} \sum_{p=1}^n [a_{pk\dots s}(t') A_{pij}(t') + \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots + a_{pi\dots f}(t') A_{prs}(t')] + \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots + \frac{2!}{N-1} \sum_{p=1}^n [a_{prs}(t') A_{pi\dots f}(t') + \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots + a_{pij}(t') A_{pk\dots s}(t')] w_{ii}(t', t) \dots w_{ss}(t', t) \right\} dt', \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Вычисления и общий анализ с помощью формул (2.24) настолько упрощаются в сопоставлении с (2.23), что часто выгодно путем преобразования переменных или посредством введения дополнительных фазовых координат (расширение фазового пространства) приводить объект к виду, при котором $w_{ij} = 0$ при $j \neq i$, т. е. искусственным путем обеспечивать автономность уравнений линейного приближения.

Если динамическая система линейна ($a_{ihl} = a_{ihlm} = \dots = 0$), то выражения для коэффициентов логарифмической плотности вероятности свободного движения становятся весьма простыми:

$$\underbrace{A_{ijk\dots s}}_N(t) = \sum_{\nu, \mu, \dots, \chi=1}^n \underbrace{A_{\nu\mu\dots\chi}^0}_N w_{\nu i}(0, t) w_{\mu j}(0, t) \dots w_{\chi s}(0, t). \quad (2.25)$$

Такие же выражения получаются, конечно, при использовании первых интегралов линейной системы (см. главу I). Действительно, согласно (1.53) для получения текущего распределения в свободной линейной системе следует в начальном распределении

$$\ln p_0 = A_0^0 + \sum_{i=1}^n A_i^0 x_i + \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^n A_{ik}^0 x_i x_k + \\ + \frac{1}{3} \sum_{i, k, l=1}^n A_{ikl}^0 x_i x_k x_l + \dots$$

координаты x_i заменить на

$$\sum_{k=1}^n w_{ik}(0, t) x_k.$$

Осуществляя такую замену для коэффициентов текущего распределения, получаем выражение (2.25).

Как уже отмечалось, довольно широким и интересным классом систем являются системы без прямых нелинейных связей. Для таких систем

$$\sum_{p=1}^n a_{pp\nu} = 0, \quad \sum_{p=1}^n a_{pp\nu\mu} = 0, \dots$$

и выражения (2.23) принимают вид

$$\left. \begin{aligned}
 A_i(t) &= \sum_{v=1}^n A_v^0 w_{vi}(0, t), \\
 A_{ij}(t) &= \sum_{v, \mu=1}^n A_{v\mu}^0 w_{vi}(0, t) w_{\mu j}(0, t) + \\
 &+ 2 \sum_{v, \mu=1}^n \int_0^t \left[\sum_{p=1}^n a_{pv\mu}(t') A_p(t') w_{vi}(t', t) w_{\mu j}(t', t) \right] dt', \\
 &\dots \\
 \underbrace{A_{ijk\dots s}}_{\overline{N}}(t) &= \sum_{v, \mu, \dots, \chi=1}^n \underbrace{A_{v\mu\dots\chi}^0}_{\overline{N}} w_{vi}(0, t) w_{\mu j}(0, t) \dots \\
 &\dots w_{\chi s}(0, t) + \sum_{v, \mu, \dots, \chi=1}^n \int_0^t \left\{ N \sum_{p=1}^n \underbrace{a_{pv\mu\dots\chi}(t')}_{\overline{N+1}} A_p(t') + \right. \\
 &+ \sum_{p=1}^n \left[\underbrace{a_{pv\dots\chi}(t')}_{\overline{N}} A_{pv}(t') + \dots + \underbrace{a_{pv\dots p}(t')}_{\overline{N}} A_{px}(t') \right] + \\
 &+ \frac{2!}{N-1} \sum_{p=1}^n \left[\underbrace{a_{p\varepsilon\dots\chi}(t')}_{\overline{N-1}} A_{pv\mu}(t') + \dots \right. \\
 &\dots + \left. \underbrace{a_{pv\dots\eta}(t')}_{\overline{N-1}} A_{p\varepsilon\chi}(t') \right] + \dots \\
 &\dots + \frac{2!}{N-1} \sum_{p=1}^n \left[a_{p\varepsilon\chi}(t') A_{pv\mu\dots\eta}(t') + \dots \right. \\
 &\dots + \left. a_{pv\mu}(t') A_{p\varepsilon\mu\dots\chi}(t') \right] \times \\
 &\quad \times w_{vi}(t', t) w_{\mu j}(t', t) \dots w_{\chi s}(t', t) \left. \right\} dt', \\
 &\dots
 \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

Выражения (2.26) показывают, что для данного класса систем справедливо указанное выше положение, что неустойчивость невозмущенного состояния объекта способствует сходимости ряда (2.8) и вызывает уменьшение $A_{ijk\dots s}(t)$ с течением времени. Действительно, для системы, неустойчивой в линейном приближении (по Ляпунову), функции $w_{ij}(t, t')$, вообще говоря, — нарастающие функции времени t , а функции $w_{ij}(t', t)$ — убы-

вающие функции времени. При этом нарастание и убывание может быть не монотонным, однако все $w_{ij}(0, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Отсюда видно, что первые слагаемые в правых частях формул (2.26) стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$ и притом тем быстрее, чем выше N . Что касается последующих членов в правых частях формул (2.26), то они могут быть представлены в виде

$$\sum_{\nu, \mu, \dots, \chi=1}^n \int_0^t \underbrace{F_{\nu\mu\dots\chi}}_N(t') w_{\nu i}(t', t) w_{\mu j}(t', t) \dots w_{\chi s}(t', t) dt'. \quad (2.27)$$

Из условия неустойчивости следует, что $w_{\nu i}(t', t) \times \dots \times w_{\mu j}(t', t) \dots w_{\chi s}(t', t)$ — нарастающая (не обязательно монотонно) функция t' . Она обращается в единицу при $t' = t$ и становится сколь угодно малой при $t \rightarrow \infty$ на другом конце интервала интегрирования в (2.27), т. е. при $t' = 0$. Отсюда следует, что если $F_{\nu\mu\dots\chi}(t')$ есть убывающая функция t' , стремящаяся к нулю при $t' \rightarrow \infty$, то величина (2.27) — также убывающая функция t , стремящаяся к нулю при $t \rightarrow \infty$. На основе этого и выражений (2.26) при постоянных или убывающих во времени коэффициентах $a_{ijk\dots s}$ последовательно получаем, что $A_i(t), A_{ij}(t), \dots, A_{\underbrace{ijk\dots s}}_N(t)$ суть убывающие функции времени,

стремящиеся к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Обратим внимание на следующее свойство свободного движения систем без прямых нелинейных связей. Рассмотрим два первых выражения (2.26). Если начальное распределение центральное симметричное, т. е. симметричное относительно начала координат, то $A_{\nu}^0 = 0, A_i(t) = 0$ и

$$A_{ij}(t) = \sum_{\nu, \mu=1}^n A_{\nu\mu}^0 w_{\nu i}(0, t) w_{\mu j}(0, t),$$

т. е. то же самое, что в линейной системе. Назовем сумму членов

$$A_0 + \sum_{i=1}^n A_i x_i + \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^n A_{ik} x_i x_k$$

ряда (2.8) *нормальной составляющей логарифмической плотности вероятности*. Можно констатировать, что

при симметричном центральном начальном распределении вероятностей свободное движение в системе без прямых нелинейных связей имеет точно такую же нормальную составляющую логарифмической плотности вероятности, как в линейной системе.

Сходное, но не идентичное положение имеет место для вынужденного движения систем без прямых нелинейных связей. Действительно, первые два из уравнений (2.14) для этого класса систем запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}_i - \sum_{p=1}^n a_{pi} A_p - \sum_{p,q=1}^n S_{pq} (A_{pq\dot{i}} + A_{pi} A_q) &= 0, \\ \dot{A}_{ik} - \sum_{p=1}^n (a_{pi} A_{pk} + a_{pk} A_{pi}) - 2 \sum_{p=1}^n a_{pik} A_p - \\ - \sum_{p,q=1}^n S_{pq} (3A_{pqik} + 2A_{pik} A_q + A_{pi} A_{qk}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

Если ограничиться только квадратическим приближением логарифмической плотности вероятности $N = 2$, т. е. искать приближенное решение в форме нормального распределения, то следует положить

$$A_{pik} = 0, A_{pqik} = 0.$$

При этом

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}_i - \sum_{p=1}^n a_{pi} A_p - \sum_{p,q=1}^n S_{pq} A_{pi} A_q &= 0, \\ \dot{A}_{ik} - \sum_{p=1}^n (a_{pi} A_{pk} + a_{pk} A_{pi}) - \\ - \sum_{p,q=1}^n S_{pq} A_{pi} A_{qk} - 2 \sum_{p=1}^n a_{pik} A_p &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

Если начальное распределение симметрично относительно начал координат, то $A_i(0) = A_i^0 = 0$. При таких начальных условиях первая система уравнений (2.29) имеет тривиальное решение $A_i(t) = 0$ и уравнения для коэффициентов квадратичных членов принимают точно такой же

вид, как в линейной системе:

$$\dot{A}_{ik} - \sum_{p=1}^n (a_{pi}A_{pk} + a_{pk}A_{pi}) - \sum_{p,q=1}^n S_{pq}A_{pi}A_{qk} = 0. \quad (2.30)$$

Таким образом, приближенное решение в виде центрального нормального распределения для системы без прямых нелинейных связей при наличии шумов совпадает с решением для линейной системы.

Уравнения (2.30) в матричной форме имеют вид

$$\dot{A} - Aa - a^T A - ASA = 0, \quad (2.31)$$

где $a = \|a_{ik}\|$, $A = \|A_{ik}\|$, $S = \|S_{ik}\|$ — квадратные матрицы, a^T — транспонированная матрица.

Решение матричного (без правой части) уравнения Риккати (2.31) может быть выражено через квадратуры весовых функций линейного приближения. Соответствующее выражение имеет вид

$$A = \left[w(t, 0) A^{-1}(0) w^T(t, 0) - \int_0^t w(t, t') S w^T(t, t') dt' \right]^{-1}, \quad (2.32)$$

где индекс «-1» обозначает обратную матрицу.

Для доказательства удобно перейти к обратной матрице A^{-1} или матрице вторых моментов

$$M = -A^{-1}. \quad (2.33)$$

Умножая (2.31) слева и справа на A^{-1} и принимая во внимание, что $\dot{A}A^{-1} = -A\dot{A}^{-1}$, получаем

$$\dot{M} + aM + Ma^T = S. \quad (2.34)$$

Решение уравнения (2.34) имеет вид

$$M = w(t, 0) M(0) w^T(t, 0) + \int_0^t w(t, t') S w^T(t, t') dt'. \quad (2.35)$$

В этом можно убедиться, подставляя (2.35) в (2.34) и учитывая, что

$$\dot{w}(t, 0) + aw(t, 0) = 0, \quad \dot{w}^T(t, 0) + w^T(t, 0)a^T = 0.$$

Отсюда и из (2.33) вытекает решение (2.32).

Важным классом систем являются *системы без линейных связей*. Так будем называть системы, описываемые уравнениями

$$\dot{x}_i + \sum_{k,l=1}^n a_{ikl} x_k x_l + \sum_{k,l,m=1}^n a_{iklm} x_k x_l x_m + \dots = \xi_i, \quad (2.36)$$

т. е. системы, характеристики которых f_i не содержат линейных членов. Для таких систем фундаментальная матрица линейного приближения является единичной и формулы (2.23) для коэффициентов распределения при отсутствии шумов упрощаются:

$$\left. \begin{aligned} A_{\underbrace{ijk\dots s}_N}(t) &= A_{\underbrace{ijk\dots s}_N}^0 + \int_0^t \left\{ N(N+1) \sum_{p=1}^n \underbrace{a_{ppij\dots s}}_{N+2}(t') + \right. \\ &+ N \sum_{p=1}^n \underbrace{a_{pij\dots s}}_{N+1}(t') A_p + \sum_{p=1}^n [a_{pj\dots s}(t') A_{pi}(t') + \dots \\ &\dots + \underbrace{a_{pij\dots r}}_N(t') A_{ps}(t')] + \\ &+ \frac{2!}{N-1} \sum_{p=1}^n [a_{pk\dots s}(t') A_{pij}(t') + \dots \\ &\dots + a_{pij\dots f}(t') A_{prs}(t')] + \dots \\ &\dots + \frac{2!}{N-1} \sum_{p=1}^n [a_{pij}(t') \underbrace{A_{pk\dots s}}_{N-1}(t') + \dots \\ &\dots + a_{pfs}(t') \underbrace{A_{pij\dots r}}_{N-1}(t')] \left. \right\} dt', \quad N = 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

Еще более узким, но важным подклассом являются системы вида

$$\dot{x}_i + \sum_{k,l=1}^n a_{ikl} x_k x_l = 0, \quad a_{ppl} = 0. \quad (2.38)$$

Такие системы будем называть *системами с перекрестными квадратичными связями*. Каждое уравнение (2.38), кроме производной \dot{x}_i , содержит попарные произведения координат с индексами, отличными от i . Характерным примером могут служить уравнения Эйлера (1.34). Для

§ 2.3. Статистическая устойчивость невозмущенного состояния.

Равновесные распределения и их устойчивость

Понятие статистической устойчивости невозмущенного состояния, так же как и обычной устойчивости этого состояния, относится к системам без шумов, т. е. к системам вида

$$\dot{x}_i + f_i(x_1, \dots, x_n, t) = 0. \quad (2.40)$$

При рассмотрении статистической устойчивости начальные условия считаются случайными, характеризуемыми плотностью распределения $p_0(x_1, \dots, x_n)$. Невозмущенное состояние $x_1 = \dots = x_n = 0$ обладает полной статистической устойчивостью [1.13], [2.5], если при любом начальном распределении $p_0(x_1, \dots, x_n)$ текущее распределение плотности вероятности $p(x_1, \dots, x_n, t)$ стремится с течением времени к центральному δ -распределению:

$$p(x_1, \dots, x_n, t) \rightarrow \delta(x_1, \dots, x_n) \text{ при } t \rightarrow \infty. \quad (2.41)$$

Здесь

$$\delta(0, \dots, 0) = \infty, \quad \delta(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

если хотя бы одна из координат отлична от нуля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1.$$

Более слабым является требование статистической устойчивости при заданном начальном распределении p_0 .

Невозмущенное состояние является статистически устойчивым при заданном начальном распределении $p_0(x_1, \dots, x_n)$, если при этом распределении текущая плотность вероятности стремится к центральной δ -функции $\delta(x_1, \dots, x_n)$ с течением времени. Необходимым условием статистической устойчивости невозмущенного состояния является отрицательная определенность суммы ряда

$$\sum_{i=1}^n A_i x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n A_{ik} x_i x_k + \dots$$

и стремление с течением времени хотя бы части его коэффициентов четного порядка $k - \infty$.

Наряду с понятием статистической устойчивости невозмущенного состояния важное значение имеет понятие *устойчивости равновесного распределения вероятности*. Как указывалось выше, стационарным равновесным распределением плотности вероятности называется распределение $\rho(x_1, \dots, x_n)$, не зависящее от времени и удовлетворяющее ФПК-уравнению. Равновесное распределение может быть устойчивым и неустойчивым, причем здесь можно различать устойчивость в «большом» и «малом», как для детерминированных систем. Равновесное распределение устойчиво (асимптотически) в большом, если при любом начальном распределении текущее распределение стремится к равновесному с течением времени. Равновесное распределение устойчиво (асимптотически) в малом, если при любом начальном распределении, достаточно мало отличающемся от равновесного (норма отличия должна быть задана), текущее распределение с течением времени стремится к равновесному.

Кроме асимптотически устойчивых и неустойчивых равновесных распределений существуют нейтральные или просто устойчивые (не асимптотически) равновесные распределения. Отклонения от таких распределений не нарастают, но и не уменьшаются во времени.

Вообще говоря, δ -распределение можно также рассматривать как возможный вид равновесного распределения, и тогда между статистической устойчивостью состояния и устойчивостью распределения нет принципиальных отличий. Однако равновесными мы будем в дальнейшем называть установившиеся распределения, выражаемые обычными, не обобщенными функциями. Нахождение равновесных распределений и условий их устойчивости представляет значительный интерес для многих динамических систем.

Рассмотрим сначала систему без шумов, т. е. свободное движение динамической системы с аналитическими характеристиками. Коэффициенты текущего распределения для такой системы согласно предыдущему определяются уравнениями (2.19). Общее решение этой бесконечной системы линейных дифференциальных уравнений представлено в виде (2.23).

Будем считать исходную динамическую систему стационарной, т. е. коэффициенты a_{ik} , a_{ikl} , ... постоянными. Весовые функции линейного приближения в этом случае являются функциями разности двух аргументов: $w_{ik}(t, t') = w_{ik}(t - t')$. Обратим внимание на первое из выражений (2.23):

$$A_0 = A_0^0 + \int_0^t \sum_{p=1}^n a_{pp} dl' = A_0^0 + t \sum_{p=1}^n a_{pp}. \quad (2.42)$$

Для стационарного равновесного распределения все коэффициенты, в том числе A_0 , должны быть постоянными. Отсюда следует, что одним из условий существования стационарного равновесного распределения в системе без шумов является равенство нулю следа матрицы a линейного приближения:

$$\sum_{p=1}^n a_{pp} = 0. \quad (2.43)$$

След матрицы a равен взятой с обратным знаком сумме корней характеристического уравнения линейного приближения

$$|\lambda \mathbf{1} + a| = 0.$$

Таким образом, сумма корней этого уравнения должна быть равной нулю:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 0.$$

Если хотя бы один корень имеет положительную действительную часть, то должен быть один или несколько корней с отрицательной действительной частью. Таким образом, вследствие условия (2.43) корни, не лежащие на мнимой оси комплексной плоскости, располагаются по обе стороны этой оси. Отсюда следует, что в случае наличия корней с ненулевой действительной частью все или часть весовых функций $w_{ik}(0, t) = w_{ik}(-t)$ неограниченно (экспоненциально) нарастают с течением времени и согласно (2.23) равновесного распределения быть не может, так как $A_i(t)$, $A_{ij}(t)$, ... не стремятся к конечным пределам.

Приходим к выводу, что равновесное распределение может существовать только при расположении корней

характеристического уравнения линейного приближения на мнимой оси. На мнимой оси комплексной плоскости могут располагаться мнимые корни и нулевые корни. Мнимые корни порождают незатухающие гармонические составляющие весовых функций w_{ih} . Вследствие этого, как видно из (2.23), при наличии мнимых корней изменение коэффициентов $A_i(t)$, $A_{ih}(t)$, ... носит характер незатухающих колебаний и стационарное равновесное распределение невозможно. Таким образом, стационарное равновесное распределение в системе без шумов может существовать лишь тогда, когда все корни характеристического уравнения линейного приближения нулевые: $\lambda_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). В этом случае фундаментальная матрица линейного приближения есть единичная матрица и выражения (2.23) с учетом постоянства коэффициентов a_{ikl} , a_{iklm} , ... принимают вид

$$\left. \begin{aligned}
 A_0 &= A_0^0, \quad A_i(t) = A_i^0 + 2t \sum_{p=1}^n a_{ppi}, \\
 A_{ij}(t) &= A_{ij}^0 + 2 \int_0^t \left[3 \sum_{p=1}^n a_{ppij} + \sum_{p=1}^n a_{pij} A_p(t') \right] dt', \\
 &\dots \dots \dots \\
 A_{\underbrace{ijk \dots s}_N}(t) &= A_{\underbrace{ijk \dots s}_N}^0 + \int_0^t \left\{ N(N+1) \sum_{p=1}^n \underbrace{a_{ppij \dots s}}_{N+2} + \right. \\
 &+ N \sum_{p=1}^n \underbrace{a_{pij \dots s}}_{N+1} A_p(t') + \\
 &+ \sum_{p=1}^n \left[\underbrace{a_{pj k \dots s}}_N A_{pi}(t') + \dots + \underbrace{a_{p i j \dots r}}_N A_{ps}(t') \right] + \\
 &+ \frac{2!}{N-1} \sum_{p=1}^n \left[\underbrace{a_{pkl \dots s}}_{N-1} A_{pij}(t') + \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots + \underbrace{a_{pij \dots r}}_{N-1} A_{prs}(t') \right] +
 \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

$$\left. \begin{aligned}
 & + \frac{3!}{(N-1)(N-2)} \sum_{p=1}^n [a_{p|m \dots s} A_{pjk}(t') + \dots \\
 & \qquad \qquad \qquad \dots + a_{p|j \dots m} A_{pfi s}(t')] + \dots \\
 & \dots + \frac{2!}{N-1} \sum_{p=1}^n [a_{prs} A_{p|j \dots f}(t') + \dots \\
 & \qquad \qquad \qquad \dots + a_{pij} A_{pkl \dots s}(t')] \} dt', \\
 & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots
 \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

Из второй группы этих уравнений видно, что для того, чтобы величины A_i были постоянными, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{p=1}^n a_{ppi} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

С учетом постоянства $A_i = A_i^0$ на основе третьей группы выражений (2.44) приходим к заключению, что для постоянства A_{ij} необходимо и достаточно выполнение равенства

$$3 \sum_{p=1}^n a_{ppij} + \sum_{p=1}^n a_{pij} A_p^0 = 0.$$

Продолжая подобные рассуждения, убеждаемся в справедливости следующего положения. Необходимыми и достаточными условиями существования в стационарной система n -го порядка без шумов равновесного распределения вероятностей являются:

- наличие у характеристического уравнения линейного приближения n -кратного нулевого корня;
- выполнение равенств

$$\sum_{p=1}^n a_{ppi} = 0,$$

$$\begin{aligned}
 & 6 \sum_{p=1}^n a_{ppij} + 2 \sum_{p=1}^n a_{pij} A_p^0 = 0, \\
 & \dots \\
 & N(N+1) \sum_{p=1}^n \underbrace{a_{ppij\dots s}}_{N+2} + N \sum_{p=1}^n \underbrace{a_{pij\dots s}}_{N+1} A_p^0 + \\
 & + \sum_{p=1}^n (a_{pik\dots s} \underbrace{A_{pi}^0}_N + \dots + a_{pij\dots r} \underbrace{A_{ps}^0}_N) + \\
 & + \frac{2!}{(N-1)} \sum_{p=1}^n (a_{pkl\dots s} \underbrace{A_{pij}^0}_{N-1} + \dots + a_{pij\dots f} \underbrace{A_{prs}^0}_{N-1}) + \\
 & + \frac{3!}{(N-1)(N-2)} \sum_{p=1}^n (a_{plm\dots s} \underbrace{A_{pijk}^0}_{N-2} + \dots \\
 & \dots + a_{pij\dots m} \underbrace{A_{prs}^0}_{N-2}) + \\
 & \dots \\
 & + \frac{2!}{(N-1)} \sum_{p=1}^n (a_{prs} \underbrace{A_{pij\dots f}^0}_{N-1} + \dots + a_{pij} \underbrace{A_{pkl\dots s}^0}_{N-1}) = 0, \\
 & \dots \\
 & (i, j, k, \dots = 1, 2, \dots, n).
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Как видно, условия существования стационарного равновесного распределения в системе без шумов накладывают определенные ограничения как на коэффициенты системы, так и на коэффициенты самого стационарного распределения. Любое распределение, удовлетворяющее этим условиям, сохраняется в системе неограниченно долго. В этом смысле такое равновесное распределение можно считать устойчивым (не асимптотически) или нейтральным. Из этих общих условий существования равновесного распределения можно получить целый ряд условий для частных случаев.

Условия существования симметричного относительно центра фазового пространства равновесного распре-

являются системы без прямых связей, у которых все коэффициенты с двумя одинаковыми первыми индексами равны нулю ($a_{pp} = 0, a_{ppi} = 0, \dots$).

Таким образом, в стационарных обобщенно консервативных системах и системах без прямых связей при наличии n -кратного нулевого корня у характеристического уравнения линейного приближения в отсутствие шумов существует равномерное равновесное распределение вероятностей. Если в таких системах в начальный момент было равномерное распределение, оно сохраняется неограниченно долго.

Согласно тем же соотношениям (2.45) необходимыми и достаточными условиями существования в стационарной системе без шумов равновесного нормального распределения вероятностей являются наличие n -кратного нулевого корня и выполнение равенств

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{p=1}^n a_{ppi} = 0, \quad 6 \sum_{p=1}^n a_{ppij} + 2 \sum_{p=1}^n a_{pij} A_p^0 = 0, \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ & N(N+1) \sum_{p=1}^n \underbrace{a_{ppij\dots s}}_{N+2} + N \sum_{p=1}^n \underbrace{a_{pij\dots s}}_{N+1} A_p^0 + \\ & \quad + \sum_{p=1}^n (\underbrace{a_{pjik\dots s}}_N A_{pi}^0 + \dots + \underbrace{a_{pij\dots r}}_N A_{ps}^0) = 0, \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ & \quad i, j, k, \dots = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (2.48)$$

Рассмотрим конкретный пример — вращательное движение твердого тела, описываемое уравнениями Эйлера (1.37)

$$\dot{x}_1 + a_{123}x_2x_3 = 0, \quad \dot{x}_2 + a_{213}x_1x_3 = 0, \quad \dot{x}_3 + a_{312}x_1x_2 = 0, \quad (249)$$

где x_1, x_2, x_3 — угловые скорости в связанных осях,

$$a_{123} = \frac{J_z - J_y}{J_x}, \quad a_{213} = \frac{J_x - J_z}{J_y}, \quad a_{312} = \frac{J_y - J_x}{J_z}. \quad (2.50)$$

Характеристическое уравнение линейного приближения имеет здесь трехкратный нулевой корень. Условие $\sum_{p=1}^3 a_{ppi} = 0$ выполняется. Кроме того, $a_{ijkl} = a_{ijklm} = \dots = 0$. Поэтому равенства (2.45) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \sum_{p=1}^3 a_{pij} A_p^0 &= 0, \\ \dots & \\ \sum_{p=1}^3 (a_{prs} A_{pij\dots f}^0 + \dots + a_{pij} A_{pkl\dots s}^0) &= 0, \\ \dots & \end{aligned} \right\} (2.51)$$

Видно, что равномерное во всем фазовом пространстве распределение плотности вероятности является в данном случае равновесным. Кроме того, существует множество других равновесных распределений. Раскроем первые две группы ($N = 2, 3$) соотношений (2.51) с учетом того, что все коэффициенты a_{ijk} ($i, j, k = 1, 2, 3$), кроме (2.50) и им симметричных в смысле перестановки двух последних индексов, равны нулю. Получаем

$$\begin{aligned} a_{123} A_1^0 &= 0, & a_{213} A_2^0 &= 0, & a_{312} A_3^0 &= 0, \\ 2a_{312} A_{31}^0 &= 0, & 2a_{213} A_{21}^0 &= 0, & 2a_{312} A_{32}^0 &= 0, \\ a_{123} A_{11}^0 + a_{213} A_{22}^0 + a_{312} A_{33}^0 &= 0, & 2a_{213} A_{23}^0 &= 0, \\ a_{123} A_{12}^0 + 2a_{123} A_{13}^0 &= 0. \end{aligned}$$

Если $a_{123} \neq 0$, $a_{213} \neq 0$, $a_{312} \neq 0$, что имеет место при различных моментах инерции тела относительно главных осей, то из этих выражений вытекает

$$\left. \begin{aligned} A_1^0 = A_2^0 = A_3^0 &= 0, & A_{12}^0 = A_{13}^0 = A_{23}^0 &= 0, \\ \frac{J_z - J_y}{J_x} A_{11}^0 + \frac{J_x - J_z}{J_y} A_{22}^0 + \frac{J_y - J_x}{J_z} A_{33}^0 &= 0. \end{aligned} \right\} (2.52)$$

Таким образом, «нормальная составляющая» равновесного распределения угловых скоростей является центральной канонической. В главе I на основе притяжения первых

интегралов исходной системы уравнений было показано что в данной системе существует множество равновесных распределений, выражаемое формулой

$$\ln p = \Psi (J_x x_1^2 + J_y x_2^2 + J_z x_3^2, J_x^2 x_1^2 + J_y^2 x_2^2 + J_z^2 x_3^2), \quad (2.53)$$

где Ψ — произвольная функция. Ясно, что нормальная составляющая распределения (2.53) имеет вид

$$\begin{aligned} c_1 (J_x x_1^2 + J_y x_2^2 + J_z x_3^2) + c_2 (J_x^2 x_1^2 + J_y^2 x_2^2 + J_z^2 x_3^2) = \\ = \frac{1}{2} A_{11}^0 x_1^2 + \frac{1}{2} A_{22}^0 x_2^2 + \frac{1}{2} A_{33}^0 x_3^2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_{11}^0 &= 2J_x (C_1 + C_2 J_x), \quad A_{22}^0 = 2J_y (C_1 + C_2 J_y), \\ A_{33}^0 &= 2J_z (C_1 + C_2 J_z), \end{aligned}$$

а C_1, C_2 — произвольные постоянные. Подставляя эти выражения для $A_{11}^0, A_{22}^0, A_{33}^0$ в (2.52), получаем тождество

$$\begin{aligned} 2C_1 (J_z - J_y + J_x - J_z + J_y - J_x) + 2C_2 (J_x J_z - J_x J_y + \\ + J_x J_y - J_y J_z + J_y J_z - J_x J_z) = 0. \end{aligned}$$

Аналогичную проверку удовлетворения условиям (2.51) можно выполнить для старших членов распределения (2.53), представленного в форме степенного ряда.

Перейдем к рассмотрению равновесных распределений в стационарных системах с шумами. Обозначим коэффициенты стационарного равновесного распределения, которые по определению постоянны, чертой сверху. В соответствии с (2.11) эти коэффициенты удовлетворяют бесконечной системе нелинейных алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{p, q=1}^n S_{pq} (\bar{A}_{pq} + \bar{A}_p \bar{A}_q) &= - \sum_{p=1}^n a_{pp}, \\ \sum_{p=1}^n a_{pi} \bar{A}_p + \sum_{p, q=1}^n S_{pq} (\bar{A}_{pqi} + \bar{A}_{pi} \bar{A}_q) &= - 2 \sum_{p=1}^n a_{ppi}, \end{aligned} \right\} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{p=1}^n (a_{p_i} \bar{A}_{pk} + a_{pk} \bar{A}_{pi}) + 2 \sum_{p=1}^n a_{pik} \bar{A}_p + \\
& + \sum_{p,q=1}^n S_{pq} (3\bar{A}_{pqi} + 2\bar{A}_{pik} \bar{A}_q + \bar{A}_{pi} \bar{A}_{qk}) = \\
& = -6 \sum_{p=1}^n a_{ppik}, \\
& \dots \\
& \sum_{p=1}^n (a_{p_i} \underbrace{\bar{A}_{pkl \dots s}}_N + \dots + a_{ps} \underbrace{\bar{A}_{pik \dots r}}_N) + \\
& + \frac{2!}{N-1} \sum_{p=1}^n (a_{pik} \underbrace{\bar{A}_{plm \dots s}}_{N-1} + \dots + a_{prs} \underbrace{\bar{A}_{pik \dots f}}_{N-1}) + \dots \\
& \dots + \sum_{p=1}^n (a_{pik \dots r} \underbrace{\bar{A}_{ps}}_N + \dots + a_{pkl \dots s} \underbrace{\bar{A}_{pi}}_N) + \\
& + N \sum_{p=1}^n a_{pikl \dots s} \underbrace{\bar{A}_p}_{N+1} + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^n S_{pq} [N(N+1) \underbrace{\bar{A}_{pqi} \dots s}_{N+2} + \\
& + 2N \bar{A}_p \underbrace{\bar{A}_{qik \dots s}}_{N+1} + (\bar{A}_{pi} \underbrace{\bar{A}_{qkl \dots s}}_N + \dots + \bar{A}_{ps} \underbrace{\bar{A}_{qik \dots r}}_N) + \\
& + \frac{2!}{N-1} (\bar{A}_{pik} \underbrace{\bar{A}_{ql \dots s}}_{N-1} + \dots + \bar{A}_{prs} \underbrace{\bar{A}_{qik \dots f}}_{N-1}) + \dots \\
& \dots + (\bar{A}_{pik \dots r} \underbrace{\bar{A}_{ps}}_N + \dots + \bar{A}_{pkl \dots s} \underbrace{\bar{A}_{pi}}_N)] = \\
& = -N(N+1) \sum_{p=1}^n a_{ppik \dots s}, \\
& \dots
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Эта система уравнений может иметь множество решений, каждое из которых соответствует равновесному распределению. Некоторые из этих распределений могут быть устойчивыми, другие — неустойчивыми. Для исследования устойчивости по Ляпунову равновесного распределения можно осуществлять линеаризацию исходных уравнений (2.11) в окрестности значений, являющихся решением системы (2.54).

Прежде всего обратим внимание на то, что согласно (2.54) равномерное во всем фазовом пространстве равновесное распределение $\bar{A}_i = \bar{A}_{ik} = \bar{A}_{ikl} = \dots = 0$ при наличии шумов (как и при отсутствии шумов) существует только в системах, для которых

$$\sum_{p=1}^n a_{pp} = 0, \quad \sum_{p=1}^n a_{ppi} = 0, \dots,$$

в частности в системах без прямых связей. Для устойчивости по Ляпунову этого распределения тривиальное решение линеаризованных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{A}_0 - \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^n S_{pq} \Delta A_{pq} &= 0, \\ \Delta \dot{A}_i - \sum_{p=1}^n a_{pi} \Delta A_p - \sum_{p,q=1}^n S_{pq} \Delta A_{pqi} &= 0, \\ \Delta \dot{A}_{ik} - \sum_{p=1}^n (a_{pi} \Delta A_{pk} + a_{pk} \Delta A_{pi}) - \\ - 2 \sum_{p=1}^n a_{pik} \Delta A_p - 3 \sum_{p,q=1}^n S_{pq} \Delta A_{pqi k} &= 0, \\ \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.55)$$

должно быть устойчивым. Можно показать, что по крайней мере для случая малых спектральных плотностей шумов S_{pq} устойчивость тривиального решения уравнений (2.55) получается при положительных действительных частях у корней характеристического уравнения линейного приближения исходной системы.

Условием существования нормального стационарного равновесного распределения согласно (2.54) является

наличие действительного решения системы уравнений

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \sum_{p, q=1}^n S_{pq} (\bar{A}_{pq} + \bar{A}_p \bar{A}_q) = - \sum_{p=1}^n a_{pp}, \\
 & \sum_{p=1}^n a_{pi} \bar{A}_p + \sum_{p, q=1}^n S_{pq} \bar{A}_{pi} \bar{A}_q = - 2 \sum_{p=1}^n a_{ppi}, \\
 & \sum_{p=1}^n (a_{pi} \bar{A}_{pk} + a_{pk} \bar{A}_{pi}) + 2 \sum_{p=1}^n a_{pik} \bar{A}_p + \\
 & \quad + \sum_{p, q=1}^n S_{pq} \bar{A}_{pi} \bar{A}_{qk} = - 6 \sum_{p=1}^n a_{ppik}, \\
 & \dots \dots \dots \\
 & \sum_{p=1}^n (\underbrace{a_{pik\dots r}}_N \bar{A}_{ps} + \dots + \underbrace{a_{pk'l\dots s}}_N \bar{A}_{pi}) + \\
 & \quad + N \sum_{p=1}^n \underbrace{a_{pikl\dots s}}_{N+1} \bar{A}_p = - N(N+1) \sum_{p=1}^n \underbrace{a_{ppik\dots s}}_{N+2}, \\
 & \dots \dots \dots \\
 & N = 3, 4, \dots; i, k, l, \dots = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned} \right\} (2.56)$$

Для существования нормального центрального ($A_1 = \dots = A_n = 0$) стационарного равновесного распределения согласно (2.56) необходимо и достаточно, чтобы

$\sum_{p=1}^n a_{ppi} = 0$ и система уравнений

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \sum_{p, q=1}^n S_{pq} \bar{A}_{pq} = - \sum_{p=1}^n a_{pp}, \\
 & \sum_{p=1}^n (a_{pi} \bar{A}_{pk} + a_{pk} \bar{A}_{pi}) + \sum_{p, q=1}^n S_{pq} \bar{A}_{pi} \bar{A}_{qk} = \\
 & \quad = - 6 \sum_{p=1}^n a_{ppik}, \\
 & \dots \dots \dots
 \end{aligned} \right\} (2.57)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_{p=1}^n (a_{pik\dots r} \bar{A}_{ps} + \dots + a_{pkl\dots s} \bar{A}_{pi}) = \\
 = -N(N-1) \sum_{p=1}^n a_{ppi\dots s}, \\
 \dots\dots\dots \\
 N = 3, 4, \dots; \quad i, k, l, \dots = 1, 2, \dots, n,
 \end{aligned} \right\} \quad (2.57)$$

имела действительное решение.

Покажем на примере, что существуют нелинейные динамические системы, для которых эти условия выполняются. Рассмотрим снова вращательное движение твердого тела при наличии моментов демпфирования и шумов (случайных возмущающих моментов в виде белых шумов).

Исходные уравнения имеют вид

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{x}_1 + a_{11}x_1 + a_{123}x_2x_3 = \xi_1, \\
 \dot{x}_2 + a_{22}x_2 + a_{213}x_1x_3 = \xi_2, \\
 \dot{x}_3 + a_{33}x_3 + a_{312}x_1x_2 = \xi_3.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.58)$$

где a_{123} , a_{213} , a_{312} выражаются формулами (2.50), а шумы ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 считаются независимыми. Условие (2.57) принимает вид

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n S_{pp} \bar{A}_{pp} = - \sum_{p=1}^n a_{pp}, \\
 \sum_{p=1}^3 (a_{pi} \bar{A}_{pk} + a_{pk} \bar{A}_{pi}) + \sum_{p=1}^3 S_{pp} \bar{A}_{pi} \bar{A}_{pk} = 0, \\
 \sum_{p=1}^3 (a_{pik} \bar{A}_{pl} + a_{pil} \bar{A}_{pk} + a_{pkl} \bar{A}_{pi}) = 0,
 \end{aligned} \right\} \quad (2.59)$$

остальные уравнения (2.57) обращаются в данном случае в тождества. Вторая группа уравнений, которую с учетом того, что $a_{ik} = 0$ при $i \neq k$, можно записать в виде

$$(a_{ii} + a_{kk}) \bar{A}_{ik} + \sum_{p=1}^3 S_{pp} \bar{A}_{pi} \bar{A}_{qk} = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

имеет действительное решение

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= -\frac{2a_{11}}{S_{11}}, & A_{22} &= -\frac{2a_{22}}{S_{22}}, & A_{33} &= -\frac{2a_{33}}{S_{33}}, \\ A_{12} &= A_{13} = A_{23} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.60)$$

Это решение является единственным и совпадает с решением для линейной системы. Это вытекает из указанного в § 2.2 общего свойства систем без прямых нелинейных связей (см. выражения (2.30) — (2.34)), к которым относится данная система. Величины (2.60) обращают первое из уравнений (2.59) в тождество.

Нижняя группа уравнений (2.59) с учетом (2.60) принимает вид

$$a_{ilk} \bar{A}_{ll} + a_{ikh} \bar{A}_{kk} + a_{ilk} \bar{A}_{ii} = 0, \quad (2.61)$$

$(i, k, l = 1, 2, \dots, n).$

Ненулевыми являются лишь коэффициенты a_{ikh} с различными числовыми индексами. Поэтому соотношения (2.61) сводятся к одному (остальные или выполняются тождественно, или совпадают с данным соотношением):

$$a_{123} \bar{A}_{11} + a_{312} \bar{A}_{33} + a_{213} \bar{A}_{22} = 0,$$

или в раскрытой форме:

$$\frac{J_z - J_y}{J_x} \frac{a_{11}}{S_{11}} + \frac{J_x - J_z}{J_y} \frac{a_{22}}{S_{22}} + \frac{J_y - J_x}{J_z} \frac{a_{33}}{S_{33}} = 0.$$

Спектральные плотности S_{11} , S_{22} , S_{33} связаны со спектральными плотностями S_x , S_y , S_z возмущающих моментов относительно соответствующих осей соотношениями

$$S_{11} = \frac{S_x}{J_x^2}, \quad S_{22} = \frac{S_y}{J_y^2}, \quad S_{33} = \frac{S_z}{J_z^2}.$$

Коэффициенты a_{11} , a_{22} , a_{33} пропорциональны коэффициентам моментов демпфирования:

$$a_{11} = \frac{m_{\omega x}}{J_x}, \quad a_{22} = \frac{m_{\omega y}}{J_y}, \quad a_{33} = \frac{m_{\omega z}}{J_z}.$$

Таким образом, условие существования нормального равновесного распределения в рассматриваемой системе

СВОДИТСЯ К СООТНОШЕНИЮ

$$(J_z - J_y) \frac{m_{\omega x}}{S_x} + (J_x - J_z) \frac{m_{\omega y}}{S_y} + (J_y - J_x) \frac{m_{\omega z}}{S_z} = 0.$$

Это условие выполняется, в частности, тогда, когда спектральные плотности возмущающих моментов пропорциональны (коэффициенты пропорциональности одинаковы) соответствующим коэффициентам моментов демпфирования:

$$\frac{m_{\omega x}}{S_x} = \frac{m_{\omega y}}{S_y} = \frac{m_{\omega z}}{S_z}.$$

Итак, распространенное представление о том, что нелинейным динамическим системам не свойственно нормальное распределение, не является вполне правильным. Существуют специальные условия, при выполнении которых имеют место нормальные стационарные распределения вероятностей как для свободного движения, так и для движения при действии шумов.

Для того чтобы равновесное распределение реализовалось в действительности, оно должно быть устойчивым или нейтральным (устойчивым не асимптотически). Исследование устойчивости в малом равновесных распределений производится на основе линейных уравнений, получающихся из (2.11) линеаризацией в окрестности равновесных значений коэффициентов:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{A}_0 - \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^n S_{pq} (\Delta A_{pq} + \bar{A}_p \Delta A_q + \bar{A}_q \Delta A_p) &= 0, \\ \Delta \dot{A}_i - \sum_{p=1}^n a_{pi} \Delta A_p - \sum_{p,q=1}^n S_{pq} (\Delta A_{pqi} + & \\ & + \bar{A}_{pi} \Delta A_q + \bar{A}_q \Delta A_{pi}) = 0, \\ \Delta \dot{A}_{ik} - \sum_{p=1}^n (a_{pi} \Delta A_{pk} + a_{pk} \Delta A_{pi}) - & \\ - 2 \sum_{p=1}^n a_{pik} \Delta A_p - \sum_{p,q=1}^n S_{pq} (3\Delta A_{pqi} + 2\bar{A}_{pik} \Delta A_q + & \\ + 2\bar{A}_q \Delta A_{pik} + \bar{A}_{pi} \Delta A_{qk} + \bar{A}_{qk} \Delta A_{pi}) &= 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \dots \end{aligned} \right\} (2.62)$$

Нахождение общих условий устойчивости тривиального решения этой бесконечной системы линейных уравнений затруднено. Обычно приходится ограничиваться укороченной системой, в которой, начиная с некоторого значения N ,

$$A_{\underbrace{ikl\dots s}_N} = A_{\underbrace{ikl\dots p}_{N+1}} = \dots = 0. \quad (2.63)$$

Условия устойчивости, найденные таким путем, носят характер приближенных.

Если рассматривать устойчивость нормального центрального равновесного распределения и в (2.63) считать $N = 3$, то уравнения (2.62) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{A}_0 - \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^n S_{pq} \Delta A_{pq} &= 0, \\ \Delta \dot{A}_i - \sum_{p=1}^n \left(a_{pi} + \sum_{q=1}^n S_{pq} \bar{A}_{qi} \right) \Delta A_p &= 0, \\ \Delta \dot{A}_{ik} - \sum_{p=1}^n \left(a_{pi} + \sum_{q=1}^n S_{pq} \bar{A}_{qi} \right) \Delta A_{pk} - \\ &- \sum_{p=1}^n \left(a_{pk} + \sum_{q=1}^n S_{pq} \bar{A}_{qk} \right) \Delta A_{pi} - \\ &- 2 \sum_{p=1}^n a_{pih} \Delta A_p = 0, \\ i, k &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (2.64)$$

Устойчивость тривиального решения этой системы уравнений полностью определяется устойчивостью тривиального решения второй группы уравнений.

Действительно, корни характеристического уравнения третьей группы (A_p полагаем при записи этого характеристического уравнения равными нулю) равны попарным суммам $\lambda_i + \lambda_j$ корней $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ характеристического уравнения второй группы. Это можно показать различными способами, в частности, на основе того, что при соответствующих ограничениях на начальные условия решение уравнений третьей группы (при $\Delta A_p = 0$) равно

произведению решений второй группы уравнений:

$$\Delta A_{i_k} = \Delta A_i \Delta A_k.$$

Таким образом, условия асимптотической устойчивости в отношении коэффициентов A_i , A_{i_k} (коэффициент A_0 в этом случае обладает не асимптотической устойчивостью) сводятся к размещению корней уравнения

$$|\lambda \mathbf{1} - a^\tau - S\bar{A}| = 0, \quad (2.65)$$

где $\mathbf{1}$ — единичная матрица, в левой комплексной полуплоскости.

$$\begin{aligned} \text{Согласно (2.57) при } \sum_{p=1}^n a_{pik} = 0 \\ a^\tau \bar{A} + \bar{A}a + \bar{A}S\bar{A} = 0. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Если $a^\tau \bar{A} = \bar{A}a$, то из (2.66) следует $S\bar{A} = -a - a^\tau$ и согласно (2.65) условие устойчивости равновесного нормального распределения сводится просто к условию устойчивости нулевого решения уравнений линейного приближения.

§ 2.4. Уравнения моментов

По определению моменты N -го порядка равны

$$\begin{aligned} M_{\underbrace{ikl\dots s}_N} &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, \dots, x_n, t) \underbrace{x_i x_k \dots x_s}_N dx_1 \dots dx_n = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(A_0 + \sum_{p=1}^n A_p x_p + \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^n A_{pq} x_p x_q + \dots \right) \times \\ &\quad \times x_i x_k \dots x_s dx_1 \dots dx_n. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Они могут быть вычислены после определения коэффициентов распределения A_p , A_{pq} , ... Для нормального распределения функциональная связь первых и вторых моментов с коэффициентами A_p , A_{pq} выражается в общем виде.

Для распределений произвольного характера (представленных степенным рядом) такая связь в общем явном виде не выражена и, вероятно, не может быть выражена.

Однако можно записать уравнения для моментов, в некоторых отношениях напоминающие уравнения для коэффициентов распределения. Решение этих уравнений в принципе позволяет найти моменты непосредственно, без предварительного определения распределения вероятностей. Возможности практического использования этого способа будут обсуждены дальше.

Уравнения моментов могут быть получены различными способами. Так, для свободного движения системы

$$\dot{x}_i + \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + \sum_{k,l=1}^n a_{ikl} x_k x_l + \dots = 0 \quad (2.68)$$

бесконечная линейная система уравнений моментов получается простой подстановкой выражений для производных \dot{x}_i из (2.68) в тождество

$$\frac{d}{dt} (x_i x_k \dots x_s) = \dot{x}_i x_k \dots x_s + \dots + x_i x_k \dots \dot{x}_s$$

и применением операции вычисления математического ожидания [1.13], [2.8]. Рассматривая систему с шумами

$$\dot{x}_i + f_i = \dot{x}_i + \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + \sum_{k,l=1}^n a_{ikl} x_k x_l + \dots = \xi_i, \quad (2.69)$$

получим уравнения моментов на основе ФПК-уравнения и понятия характеристической функции.

Как известно [2.6], [2.7], *характеристической функцией* называется преобразование Фурье плотности вероятности

$$g(\omega_1, \dots, \omega_n, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, \dots, x_n, t) \times \\ \times \exp [j(\omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n)] dx_1 \dots dx_n. \quad (2.70)$$

Здесь $j = \sqrt{-1}$ — мнимая единица. (Во избежание путаницы в данном параграфе буква j в индексах не используется.) Частные производные характеристической функции в точке $\omega_1 = \dots = \omega_n = 0$ пропорциональны моментам

$$\left(\frac{\partial^N g}{\partial \omega_i \partial \omega_k \dots \partial \omega_s} \right)_{\omega_1 = \dots = \omega_n = 0} = (j)^N M_{\underbrace{ik\dots s}_N}. \quad (2.71)$$

Заметим также, что

$$\int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{px_i x_k \dots x_s}_N \exp \left(j \sum_{\nu=1}^n \omega_{\nu} x_{\nu} \right) dx_1 \dots dx_n = \\ = (j)^N \frac{\partial^N g}{\partial \omega_i \partial \omega_k \dots \partial \omega_s}. \quad (2.72)$$

Продифференцируем характеристическую функцию (2.70) по времени:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial p}{\partial t} \exp \left(j \sum_{i=1}^n \omega_i x_i \right) dx_1 \dots dx_n,$$

и заменим $\partial p / \partial t$ согласно ФПК-уравнению (2.1):

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} (p f_{\nu}) \exp \left(j \sum_{i=1}^n \omega_i x_i \right) dx_1 \dots dx_n + \\ + \frac{1}{2} \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\nu, \mu=1}^n S_{\nu\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial x_{\nu} \partial x_{\mu}} \exp \left(j \sum_{i=1}^n \omega_i x_i \right) dx_1 \dots dx_n. \quad (2.73)$$

Само определение характеристической функции предполагает, что функция плотности вероятности удовлетворяет условиям Дирихле. Предполагаем также, что величины $p f_{\nu}$ стремятся к нулю при неограниченном удалении от центра фазового пространства. Выполняя преобразования (интегрируя по частям), из (2.73) получаем

$$\frac{\partial g}{\partial t} = - \sum_{\nu=1}^n j \omega_{\nu} \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} p f_{\nu} \exp \left(j \sum_{i=1}^n \omega_i x_i \right) dx_1 \dots dx_n - \\ - \frac{1}{2} \sum_{\nu, \mu=1}^n S_{\nu\mu} \omega_{\nu} \omega_{\mu} \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} p \exp \left(j \sum_{i=1}^n \omega_i x_i \right) dx_1 \dots dx_n. \quad (2.74)$$

Учитывая, что

$$f_{\nu} = \sum_{\mu=1}^n a_{\nu\mu} x_{\mu} + \sum_{\mu, \varepsilon=1}^n a_{\nu\mu\varepsilon} x_{\mu} x_{\varepsilon} + \dots,$$

в соответствии с (2.72) находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int p f_{\nu} \exp \left(j \sum_{i=1}^n \omega_i x_i \right) dx_1 \dots dx_n = \\ = j \sum_{\mu=1}^n a_{\nu\mu} \frac{\partial g}{\partial \omega_{\mu}} + j^2 \sum_{\mu, \varepsilon=1}^n a_{\nu\mu\varepsilon} \frac{\partial^2 g}{\partial \omega_{\mu} \partial \omega_{\varepsilon}} + \\ + j^3 \sum_{\mu, \varepsilon, \zeta=1}^n a_{\nu\mu\varepsilon\zeta} \frac{\partial^3 g}{\partial \omega_{\mu} \partial \omega_{\varepsilon} \partial \omega_{\zeta}} + \dots$$

Учитывая это, уравнение (2.74) преобразуем к виду

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{2} g \sum_{\nu, \mu=1}^n S_{\nu\mu} \omega_{\nu} \omega_{\mu} + \sum_{\nu=1}^n \omega_{\nu} \left(\sum_{\mu=1}^n a_{\nu\mu} \frac{\partial g}{\partial \omega_{\mu}} + \right. \\ \left. + j \sum_{\mu, \varepsilon=1}^n a_{\nu\mu\varepsilon} \frac{\partial^2 g}{\partial \omega_{\mu} \partial \omega_{\varepsilon}} + j^2 \sum_{\mu, \varepsilon, \zeta=1}^n a_{\nu\mu\varepsilon\zeta} \frac{\partial^3 g}{\partial \omega_{\mu} \partial \omega_{\varepsilon} \partial \omega_{\zeta}} + \dots \right) = 0. \quad (2.75)$$

Это уравнение в частных производных определяет характеристическую функцию распределения, подобно тому как ФПК-уравнение определяет плотность вероятности. Уравнение (2.75) линейное. Порядок частных производных здесь соответствует порядку (степени) членов в разложении функций f . Для линейных систем порядок равен единице, а для систем с трансцендентными характеристиками бесконечно высок.

Будем искать решение уравнения (2.75) в форме ряда

$$g = g_0 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial \omega_i} \right)_0 \omega_i + \frac{1}{2!} \sum_{i, k=1}^n \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \omega_i \partial \omega_k} \right)_0 \omega_i \omega_k + \\ + \frac{1}{3!} \sum_{i, k, l=1}^n \left(\frac{\partial^3 g}{\partial \omega_i \partial \omega_k \partial \omega_l} \right)_0 \omega_i \omega_k \omega_l + \dots = \\ = g_0 + j \sum_{i=1}^n M_i \omega_i + \frac{j^2}{2!} \sum_{i, k=1}^n M_{ik} \omega_i \omega_k + \\ + \frac{j^3}{3!} \sum_{i, k, l=1}^n M_{ikl} \omega_i \omega_k \omega_l + \dots, \quad (2.76)$$

где $g_0 = 1$. Предполагается, что ряд (2.76) и его производные до второго порядка включительно сходятся во всей рассматриваемой области изменения $\omega_1, \dots, \omega_n$. Подставляя (2.76) в уравнение (2.75), выполняя дифференцирование, собирая и приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых произведениях аргументов $\omega_1, \dots, \omega_n$, получаем следующую систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений моментов:

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{M}_i + \sum_{\nu=1}^n a_{i\nu} M_\nu + \sum_{\nu, \mu=1}^n a_{i\nu\mu} M_{\nu\mu} + \\
 + \sum_{\nu, \mu, \epsilon=1}^n a_{i\nu\mu\epsilon} M_{\nu\mu\epsilon} + \dots = 0, \\
 \dot{M}_{ik} + \sum_{\nu=1}^n (a_{i\nu} M_{\nu k} + a_{k\nu} M_{\nu i}) + \\
 + \sum_{\nu, \mu=1}^n (a_{i\nu\mu} M_{\nu\mu k} + a_{k\nu\mu} M_{\nu\mu i}) + \\
 + \sum_{\nu, \mu, \epsilon=1}^n (a_{i\nu\mu\epsilon} M_{\nu\mu\epsilon k} + a_{k\nu\mu\epsilon} M_{\nu\mu\epsilon i}) + \dots = S_{ik}, \\
 \dot{M}_{ikl} + \sum_{\nu=1}^n (a_{i\nu} M_{\nu kl} + a_{k\nu} M_{\nu il} + a_{l\nu} M_{\nu ik}) + \\
 + \sum_{\nu, \mu=1}^n (a_{i\nu\mu} M_{\nu\mu kl} + a_{k\nu\mu} M_{\nu\mu il} + a_{l\nu\mu} M_{\nu\mu ik}) + \\
 + \sum_{\nu, \mu, \epsilon=1}^n (a_{i\nu\mu\epsilon} M_{\nu\mu\epsilon kl} + a_{k\nu\mu\epsilon} M_{\nu\mu\epsilon il} + a_{l\nu\mu\epsilon} M_{\nu\mu\epsilon ik}) + \dots = \\
 = S_{ik} M_l + S_{il} M_k + S_{kl} M_i, \\
 \dots \\
 \dot{\overline{M}_{ik\dots s}} + \sum_{\nu=1}^n (a_{i\nu} \overline{M}_{\nu k\dots s} + \dots + a_{s\nu} \overline{M}_{\nu i\dots r}) + \\
 + \sum_{\nu, \mu=1}^n (a_{i\nu\mu} \overline{M}_{\nu\mu k\dots s} + \dots + a_{s\nu\mu} \overline{M}_{\nu\mu i\dots r}) +
 \end{aligned} \right\} (2.77)$$

$$\begin{array}{l}
 + \sum_{\nu, \mu, \varepsilon=1}^n (a_{i\nu\mu\varepsilon} \underbrace{M_{\nu\mu\varepsilon k \dots s}}_{N+2} + \dots + a_{s\nu\mu\varepsilon} \underbrace{M_{\nu\mu\varepsilon i \dots r}}_{N+2}) + \dots \\
 \dots = S_{ik} \underbrace{M_{i \dots s}}_{N-2} + \dots + S_{rs} \underbrace{M_{i \dots f}}_{N-2} \\
 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots
 \end{array} \quad \left. \vphantom{\sum} \right\} (2,77)$$

В отличие от уравнений коэффициентов распределения, уравнения моментов (2.77) линейны как при отсутствии шумов, так и при их наличии. Однако структура системы уравнений здесь менее благоприятна для численного интегрирования. Даже для случая свободного движения нелинейной системы здесь нельзя интегрировать группы уравнений последовательно и необходимо решать всю систему уравнений целиком. Вообще говоря, интегрированию для случая нелинейной исходной системы поддается лишь «укороченная» система уравнений типа системы (2.77), получающаяся из (2.77) отбрасыванием высших моментов, начиная с некоторого момента $(N + 1)$ -го порядка.

Не следует данный метод моментов противопоставлять развитому выше методу коэффициентов разложения. У них для нелинейных систем как бы разные области целесообразного применения. Действительно, если рассеивание в системе велико, отклонения большие, распределение приближается к равномерному, то ряд (2.8) сходится быстро, а ряд (2.76) — медленно или даже расходится. Следует применять метод коэффициентов распределения. Если рассеивание невелико, отклонения малы, распределение плотности вероятности приближается к центральному δ -распределению, то ряд (2.76) сходится быстро, можно использовать укороченную систему уравнений типа (2.77) при невысоком максимальном N и метод моментов здесь эффективен. В целом метод коэффициентов распределения (логарифмической плотности вероятности) обладает большей мощностью в сравнении с методом моментов, так как позволяет исследовать более сложные случаи (большие отклонения, сильные нелинейности), а также, как уже отмечалось, обеспечивает наиболее полное статистическое описание в виде текущего многомерного распределения.

§ 2.5. Итерационный метод решения ФПК-уравнения

Недостатком подробно изложенного выше метода степенных рядов по x_i , помимо ограниченности функций f_i классом аналитических функций, является трудность получения общих оценок сходимости решения. Кратко рассмотрим другой метод приближенного решения ФПК-уравнения, который может быть назван итерационным [2.9].

В интересах простоты метод излагается для случая, когда функции f_i и величины S_{ik} не зависят явным образом от времени t (стационарная динамическая система). Обобщение на случай нестационарной системы несложно.

Запишем ФПК-уравнение в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} + Lp = 0, \tag{2.78}$$

где

$$L = - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i} + f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n S_{ik} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \tag{2.79}$$

— линейный оператор. Плотность вероятности в начальный момент времени $t = 0$ задана:

$$p(x_1, \dots, x_n, 0) = p_0(x_1, \dots, x_n). \tag{2.80}$$

Допустим, что функции $f = (f_1, \dots, f_n)$, p_0 таковы, что для области G фазового пространства можно указать такое положительное число D и целые числа $d \geq 0$ и $\mu > d$, что для любого $x = (x_1, \dots, x_n) \in G$ и натурального ряда чисел $\nu \geq \mu$ справедливо неравенство

$$|L^\nu p_0| \leq \frac{\nu! p_0}{(\nu - d)!} D^\nu. \tag{2.81}$$

Тогда решение ФПК-уравнения (2.78) может быть представлено в виде

$$p = \left(1 - \frac{t}{1!} L + \frac{t^2}{2!} L^2 - \dots \right) p_0 = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{t^\nu}{\nu!} L^\nu p_0 \tag{2.82}$$

или символически:

$$p = \exp(-tL) p_0. \tag{2.83}$$

При условии (2.81), которое, конечно, является только достаточным, но не необходимым, ряд (2.82) равномерно сходится в области G . Равномерно сходятся и ряды, получающиеся дифференцированием $\partial p/\partial t$, Lp .

Подставляя (2.82) в уравнение (2.78), убеждаемся, что оно удовлетворяется. Выполняется также начальное условие (2.80). Итак, (2.82) действительно является искомым решением.

В случае отсутствия шумов ($S_{ih} = 0$) в точке равновесия ($f = 0$) оператор (2.80) вырождается в след якобиана

$$L = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}. \quad (2.84)$$

При непрерывных функциях f_i в достаточно малой окрестности равновесной точки

$$L \approx - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}. \quad (2.85)$$

В данном случае можно принять $d = 0$, а величину D задать равной наибольшему в области G значению модуля величины (2.84):

$$D = \max_G \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right|.$$

Из (2.85), (2.82) или (2.84) вытекает приближенное выражение текущей плотности вероятности в малой окрестности равновесной точки системы без шумов:

$$p = p_0 \exp \left(t \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right). \quad (2.86)$$

Для обобщенно консервативной системы, у которой $\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0$, в окрестности равновесной точки при наличии шумов

$$L \approx - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n S_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Ряд (2.82) в данном случае имеет вид

$$p = p_0 + \frac{1}{2} \frac{1}{1!} \sum_{i,j=1}^n S_{ij} \frac{\partial^2 p_0}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2^2} \frac{1}{2!} \sum_{i,j,k,l=1}^n S_{ij} S_{kl} \frac{\partial^4 p_0}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} + \dots$$

Если этот ряд сходится, то он сходится к функции

$$p = \frac{1}{(\sqrt{2\pi t} \det S)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\eta_1, \dots, \eta_n) \times \exp \left[-\frac{1}{2t} \sum_{i,j=1}^n S_{ij}^{(-1)} (x_i - \eta_i)(x_j - \eta_j) \right] d\eta_1 \dots d\eta_n, \quad (2.87)$$

которая является точным решением уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n S_{ij} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} = 0,$$

в которое вырождается ФПК-уравнение при указанных условиях. В формуле (2.87) $S_{ij}^{(-1)}$ — элементы обратной матрицы $S^{-1} = \|S_{ij}\|^{-1}$, $\det S$ — определитель матрицы S .

Суммирование бесконечного ряда (2.82) в общем виде возможно лишь в особых случаях. Ограничиваясь суммой первых μ членов ряда, получим приближенное решение

$$p_* = \sum_{\nu=0}^{\mu-1} (-1)^\nu \frac{t^\nu}{\nu!} L^\nu p_0, \quad p = p_* + R_\nu.$$

Модуль остатка ряда $|R_\nu|$ в области G , в соответствии с (2.81), не превышает величины

$$R_{d,\mu}(Dt) = p_0 \sum_{\nu=\mu}^{\infty} t^\nu \frac{D^\nu}{(\nu-d)!} = p_0 (Dt)^d \left[\exp(Dt) - 1 - \frac{Dt}{1!} - \dots - \frac{(Dt)^{\mu-d-1}}{(\mu-d-1)!} \right]. \quad (2.88)$$

При $d = 0$, $\tau = Dt = 1$ $R_{d,\mu} \leq 0,05p_0$, если $\mu > 4$.

При $d = 1$, $\tau = 1$ $R_{d,\mu} \leq 0,05p_0$, если $\mu > 5$.

При $d = 2$, $\tau = 1$. $R_{d,\mu} \leq 0,05p_0$, если $\mu > 6$.

При больших τ для достижения заданной точности может потребоваться вычисление большого числа членов ряда (2.82). В этом случае более экономной может оказаться следующая процедура. Все время переходного процесса в статистически устойчивой динамической системе разбивается на интервалы. Для первого интервала приближенное решение строится описанным образом. Полученное в конце интервала приближенное распределение вероятности принимается за начальное для второго интервала, и процедура повторяется для всех последующих интервалов. Изложенный метод легко обобщается на уравнение вида

$$\frac{\partial^m p}{\partial t^m} + Lp = 0, \quad (2.89)$$

где L — произвольный линейный стационарный оператор по x ,

$$p_{t=0} = p_0, \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{t=0} = \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_0, \dots, \left(\frac{\partial^{m-1} p}{\partial t^{m-1}}\right)_{t=0} = \left(\frac{\partial^{m-1} p}{\partial t^{m-1}}\right)_0 \quad (2.90)$$

— заданные начальные условия. Если ряд

$$p = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{t^{m\nu+\mu}}{(m\nu+\mu)!} L^\nu \left(\frac{\partial^\mu p}{\partial t^\mu}\right)_0 \quad (2.91)$$

равномерно сходится в области G с его производными, входящими в (2.89), то он сходится к решению уравнения (2.89), удовлетворяющему начальным условиям (2.90).

РЕШЕНИЕ ФПК-УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ РЯДОВ И СТАТИСТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА КОНКРЕТНЫХ КЛАССОВ СИСТЕМ

Решение уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова методом рядов открывает довольно широкие возможности построения приближенных статистических теорий различных классов динамических систем. В этой главе на основе описанного метода будет продолжено рассмотрение либрационного движения спутника и движения многих тел, описана приближенная теория систем со случайными вариациями параметров, осуществлен приближенный статистический анализ некоторых непрерывных адаптивных систем.

§ 3.1. Примеры статистического исследования конкретных классов систем

Выше было показано, что если известна полная система первых интегралов уравнений объекта, то для широкого класса обобщенно консервативных систем известно и общее решение ФПК-уравнения для свободного движения объекта.

Однако полную систему первых интегралов для нелинейных объектов можно указать лишь в отдельных редких случаях. Если известна неполная система первых интегралов, в частности, один первый интеграл, то известно лишь частное решение ФПК-уравнения для свободного движения, удовлетворяющее граничным условиям определенного вида.

Решение, удовлетворяющее произвольному начальному распределению, приходится строить на основе метода рядов.

Либрационное движение искусственного спутника. Правильнее говорить не об искусственном спутнике, а о твердом теле, размеры которого малы в сравнении с расстоянием до центра тяготения. К таким телам относятся не только искусственные спутники, но и различные осколки космических объектов. Статистическое рассмотрение

либрационного движения для осколков является еще более естественным, чем для спутника.

Учтем рассеяние энергии в либрационном движении в виде квадратичной диссипативной функции (линейного демпфирования). Подобное демпфирование может иметь место за счет вихревых токов, наводимых магнитным полем, за счет разреженной атмосферы, а также за счет жидкостных демпферов (для искусственного спутника). Орбиту будем считать круговой ($\Omega = \text{const}$), однако высоту орбиты полагаем случайной, так что $\Omega = \text{const}$ — случайная величина. Вводя обозначения

$$\begin{aligned} \omega_x = x_1, \omega_y = x_2, \omega_z = x_3, \alpha = x_4, \alpha' = x_5, \alpha'' = x_6, \\ \beta = x_7, \beta' = x_8, \beta'' = x_9, \gamma = x_{10}, \gamma' = x_{11}, \gamma'' = x_{12}, \\ \Omega^2 = x_{13}, \end{aligned}$$

уравнения свободного либрационного движения запишем в виде (см. главу I)

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 + \frac{r_1}{J_x} x_1 + \frac{J_z - J_y}{J_x} x_2 x_3 - 3 \frac{J_z - J_y}{J_x} x_{11} x_{12} x_{13} &= 0, \\ \dot{x}_2 + \frac{r_2}{J_y} x_2 + \frac{J_x - J_z}{J_y} x_1 x_3 - 3 \frac{J_x - J_z}{J_y} x_{10} x_{12} x_{13} &= 0, \\ \dot{x}_3 + \frac{r_3}{J_z} x_3 + \frac{J_y - J_x}{J_z} x_1 x_2 - 3 \frac{J_y - J_x}{J_z} x_{10} x_{11} x_{13} &= 0, \\ \dot{x}_4 + x_{10} x_{13} - x_3 x_5 + x_2 x_6 &= 0, \quad \dot{x}_7 - x_3 x_8 + x_2 x_9 = 0, \\ \dot{x}_5 + x_{11} x_{13} - x_1 x_6 + x_3 x_4 &= 0, \quad \dot{x}_8 - x_1 x_9 + x_3 x_7 = 0, \\ \dot{x}_6 + x_{12} x_{13} - x_2 x_4 + x_1 x_5 &= 0, \quad \dot{x}_9 - x_2 x_7 + x_1 x_8 = 0, \\ \dot{x}_{10} - x_4 x_{13} - x_3 x_{11} + x_2 x_{12} &= 0, \\ \dot{x}_{11} - x_5 x_{13} - x_1 x_{12} + x_3 x_{10} &= 0, \\ \dot{x}_{12} - x_6 x_{13} - x_2 x_{10} + x_1 x_{11} &= 0, \quad \dot{x}_{13} = 0, \end{aligned} \right\} (3.1)$$

где r_1, r_2, r_3 — коэффициенты демпфирования. При буквенных обозначениях коэффициентов эти уравнения принимают форму

$$\begin{aligned} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^{13} a_{ik} x_k + \sum_{k,l=1}^{13} a_{ikl} x_k x_l + \\ + \sum_{k,l,m=1}^{13} a_{iklm} x_k x_l x_m = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 13, \end{aligned} \quad (3.2)$$

ГДЕ

$$\left. \begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{r_1}{J_x}, \quad a_{22} = \frac{r_2}{J_y}, \quad a_{33} = \frac{r_3}{J_z}, \\
 \text{ОСТАЛЬНЫЕ} \\
 a_{ik} &= 0; \\
 a_{123} &= \frac{J_z - J_y}{J_x}, \quad a_{213} = \frac{J_x - J_z}{J_y}, \quad a_{312} = \frac{J_y - J_x}{J_z}, \\
 a_{4, 10, 13} &= a_{426} = a_{5, 11, 13} = a_{534} = a_{6, 12, 13} = a_{615} = \\
 &= a_{729} = a_{837} = a_{918} = a_{10, 2, 12} = a_{11, 3, 10} = \\
 &= a_{12, 1, 11} = 1, \\
 a_{435} &= a_{516} = a_{624} = a_{738} = a_{819} = a_{927} = a_{10, 4, 13} = \\
 &= a_{10, 3, 11} = a_{11, 5, 13} = a_{11, 1, 12} = a_{12, 6, 13} = \\
 &= a_{12, 2, 10} = -1, \\
 \text{ОСТАЛЬНЫЕ } a_{ikl} &= 0; \\
 a_{1, 11, 12, 13} &= -3 \frac{J_z - J_y}{J_x}, \\
 a_{2, 10, 12, 13} &= -3 \frac{J_x - J_z}{J_y}, \\
 a_{3, 10, 11, 13} &= -3 \frac{J_y - J_x}{J_z},
 \end{aligned} \right\} (3.3)$$

остальные $a_{iklmr} = 0$. Фундаментальная система весовых функций линейного приближения здесь весьма проста, а именно:

$$\left. \begin{aligned}
 w_{11}(t) &= \exp\left(-\frac{r_1}{J_x} t\right), \\
 w_{22}(t) &= \exp\left(-\frac{r_2}{J_y} t\right), \\
 w_{33}(t) &= \exp\left(-\frac{r_3}{J_z} t\right), \\
 \text{ОСТАЛЬНЫЕ} \\
 w_{ik} &= \begin{cases} 1 & \text{при } i = k \quad (i = 4, 5, \dots, 13), \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases}
 \end{aligned} \right\} (3.4)$$

Выражения (2.23) для данного случая принимают вид

$$\left. \begin{aligned}
 A_0 &= A_0^0 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})t, \quad A_i = A_i^0 w_{ii}(-t), \\
 A_{ij}(t) &= A_{ij}^0 w_{ii}(-t) w_{jj}(-t) + \\
 &\quad + 2 \sum_{p=1}^{13} \int_0^t a_{pij} A_p(t') w_{ii}(t' - t) w_{jj}(t' - t) dt', \\
 A_{ijk}(t) &= A_{ijk}^0 w_{ii}(-t) w_{jj}(-t) w_{kk}(-t) + \sum_{p=1}^{13} \int_0^t \times \\
 &\quad \times \{3a_{pijk} A_p(t') + [a_{pj\bar{k}} A_{pi}(t') + a_{pik} A_{pj}(t') + \\
 &\quad + a_{pij} A_{pk}(t')]\} w_{ii}(t' - t) w_{jj}(t' - t) w_{kk}(t' - t) dt', \\
 \dots & \dots \dots \dots \\
 A_{ijk\dots s}(t) &= A_{ijk\dots s}^0 w_{ii}(-t) w_{jj}(-t) \dots w_{ss}(-t) + \\
 &\quad + \sum_{p=1}^{13} \int_0^t \left\{ \frac{3!}{(N-1)(N-2)} [a_{pijk\dots s} A_{p\dots l\dots s}(t') + \dots \right. \\
 &\quad \dots + a_{pqrs} A_{pi\dots f}(t')] + \frac{2!}{N-1} [a_{pij} A_{pk\dots s}(t') + \dots \\
 &\quad \dots + a_{prs} A_{pi\dots j}(t')] w_{ii}(t' - t) w_{jj}(t' - t) \dots w_{ss}(t' - t) \Big\} dt', \\
 \dots & \dots \dots \dots
 \end{aligned} \right\} (3.5)$$

В соответствии с выражениями весовых функций (3.4) формулы можно представить в более развернутом виде *):

$$\left. \begin{aligned}
 A_i(t) &= A_i^0 \exp(a_{ii}t) \quad \text{при } i = 1, 2, 3; \\
 A_i(t) &= A_i^0 \quad \quad \quad \text{при } i = 4, 5, \dots, 13; \\
 A_{ij}(t) &= A_{ij}^0 \exp[(a_{ii} + a_{jj})t] + \\
 &\quad + 2 \sum_{p=1}^3 A_p^0 a_{pij} \frac{\exp(a_{pp}t) - \exp[(a_{ii} + a_{jj})t]}{a_{pp} - a_{ii} - a_{jj}} \\
 &\quad \text{при } i, j = 1, 2, 3;
 \end{aligned} \right\} (3.6)$$

*) Здесь считаем $a_{pp} \neq a_{ii} + a_{jj}$, в случае $a_{pp} = a_{ii} + a_{jj}$ результат получается предельным переходом.

$$A_{ij}(t) = A_{ij}^0 \exp(a_{ii}t) + 2 \sum_{p=4}^{13} A_p^0 a_{pij} \frac{\exp(a_{ii}t) - 1}{a_{ii}}$$

при $i = 1, 2, 3; j = 4, 5, \dots, 13;$

$$A_{ij}(t) = A_{ij}^0 + 2t \sum_{p=4}^{13} A_p^0 a_{pij} \quad \text{при } i, j = 4, 5, \dots, 13;$$

$$A_{ijk}(t) = A_{ijk}^0 \exp[(a_{ii} + a_{jj} + a_{kk})t] +$$

$$+ \sum_{p=1}^3 \int_0^t [a_{pjk} A_{pi}(t') + a_{pik} A_{pj}(t') + a_{pij} A_{pk}(t')] \times$$

$$\times \exp[(a_{ii} + a_{jj} + a_{kk})(t-t')] dt' \quad \text{при } i, j, k = 1, 2, 3;$$

$$A_{ijk}(t) = A_{ijk}^0 \exp[(a_{ii} + a_{jj})t] +$$

$$+ \sum_{p=1}^{13} \int_0^t [a_{pjk} A_{pi}(t') + a_{pik} A_{pj}(t') + a_{pij} A_{pk}(t')] \times$$

$$\times \exp[(a_{ii} + a_{jj})(t-t')] dt'$$

при $i, j = 1, 2, 3; k = 4, 5, \dots, 13;$

$$A_{ijk}(t) = A_{ijk}^0 \exp(a_{ii}t) + \sum_{p=1}^{13} \int_0^t [a_{pjk} A_{pi}(t') +$$

$$+ a_{pik} A_{pj}(t') + a_{pij} A_{pk}(t')] \exp[a_{ii}(t-t')] dt'$$

при $i = 1, 2, 3; j, k = 4, 5, \dots, 13;$

$$A_{ij;i}(t) = A_{ij;i}^0 + \sum_{p=1}^{13} \int_0^t [3a_{pij;k} A_p(t') +$$

$$+ a_{pjk} A_{pi}(t') + a_{pik} A_{pj}(t') + a_{pij} A_{pk}(t')] dt'$$

при $i, j, k = 4, 5, \dots, 13;$

.....

(3.6)

Для конкретного решения задачи необходимо задать начальное распределение вероятностей. Рассмотрим

начальное распределение, при котором

$$\left. \begin{aligned} A_i^0 &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 12), \quad A_{13}^0 = \frac{2\Omega_0^2}{\sigma_\Omega^2}, \\ A_{11}^0 &= -\frac{J_x}{\sigma_T^2}, \quad A_{22}^0 = -\frac{J_y}{\sigma_T^2}, \quad A_{33}^0 = -\frac{J_z}{\sigma_T^2}, \\ A_{44}^0 &= A_{55}^0 = \dots = A_{12,12}^0 = 0, \quad A_{13,13}^0 = -\frac{1}{\sigma_\Omega^2}, \\ A_{ik}^0 &= 0 \quad \text{при } k \neq i, \\ A_{ikl}^0 &= A_{iklm}^0 = \dots = 0, \end{aligned} \right\} (3.7)$$

где σ_T^2 , σ_Ω^2 , Ω_0^2 — заданные положительные величины. Такое начальное распределение является нормальным независимым распределением по угловым скоростям и равно мерным распределением по угловым координатам, а именно:

$$p_0 = \exp \left[A_0^0 - \frac{1}{2\sigma_T^2} (J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2) - \frac{(\Omega^2 - \Omega_0^2)^2}{2\sigma_\Omega^2} \right].$$

Подставляя начальные условия (3.7) в формулы (3.5) или (3.6) и полагая дополнительно

$$a_{11} = \frac{r_1}{J_x} = a_{22} = \frac{r_2}{J_y} = a_{33} = \frac{r_3}{J_z} = \alpha_0,$$

находим

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= A_0^0 + 3\alpha_0 t, \quad A_{ii} = A_{ii}^0 \exp(2\alpha_0 t), \quad i = 1, 2, 3; \\ A_i(t) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, 12; \\ A_{ii}(t) &= A_{ii}^0 = 0, \quad i = 4, 5, \dots, 12; \\ A_{13,13}(t) &= A_{13,13}^0 = -\frac{1}{\sigma_\Omega^2}; \\ A_{ijk}(t) &= 0, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, 13; \\ A_{1,11,12,13} &= 3 \frac{J_z - J_y}{\alpha_0 \sigma_T^2} [\exp(2\alpha_0 t) - \exp(\alpha_0 t)], \\ A_{2,10,12,13} &= 3 \frac{J_x - J_z}{\alpha_0 \sigma_T^2} [\exp(2\alpha_0 t) - \exp(\alpha_0 t)], \\ A_{3,10,11,13} &= 3 \frac{J_y - J_x}{\alpha_0 \sigma_T^2} [\exp(2\alpha_0 t) - \exp(\alpha_0 t)], \end{aligned} \right\} (3.8)$$

все остальные $A_{ijhl}(t) = 0$;

$$A_{2,3,11,12,13} = \frac{3}{2} \frac{(J_x - J_y)^2}{\alpha_0 \sigma_T^2 J_x} \left[\left(t - \frac{1}{\alpha_0} \right) \exp(2\alpha_0 t) + \frac{1}{\alpha_0} \exp(\alpha_0 t) \right],$$

$$A_{1,3,10,12,13} = \frac{3}{2} \frac{(J_x - J_z)^2}{\alpha_0 \sigma_T^2 J_y} \left[\left(t - \frac{1}{\alpha_0} \right) \exp(2\alpha_0 t) + \frac{1}{\alpha_0} \exp(\alpha_0 t) \right],$$

$$A_{1,2,10,11,13} = \frac{3}{2} \frac{(J_y - J_z)^2}{\alpha_0 \sigma_T^2 J_z} \left[\left(t - \frac{1}{\alpha_0} \right) \exp(2\alpha_0 t) + \frac{1}{\alpha_0} \exp(\alpha_0 t) \right],$$

.....

На основе этих выражений коэффициентов представим текущую логарифмическую плотность вероятности с точностью до четвертых степеней аргументов:

$$\begin{aligned} \ln p = & A_0^0 + 3\alpha_0 t - \\ & - \frac{1}{2\sigma_T^2} (J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2) \exp(2\alpha_0 t) + \frac{\Omega_0^2}{\sigma_\Omega^2} x_{13} - \frac{x_{13}^2}{2\sigma_\Omega^2} + \\ & + \frac{3}{\alpha_0 \sigma_T^2} [(J_z - J_y) \omega_x \gamma' \gamma'' x_{13} + (J_x - J_z) \omega_y \gamma \gamma'' x_{13} + \\ & + (J_y - J_x) \omega_z \gamma \gamma' x_{13}] [\exp(2\alpha_0 t) - \exp(\alpha_0 t)], \end{aligned}$$

где $x_{13} = \Omega^2$. Нас интересует прежде всего распределение по направляющим косинусам или углам. Плотность распределения $p_\gamma(\gamma, \gamma', \gamma'')$ получается путем интегрирования плотности $p(\gamma, \gamma', \gamma'', \omega_x, \omega_y, \omega_z, \Omega^2)$:

$$\begin{aligned} p_\gamma(\gamma, \gamma', \gamma'') = & \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int p d\omega_x d\omega_y d\omega_z dx_{13} = \\ = & c_1 \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \exp \left\{ - \frac{1}{2\sigma_T^2} (J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2) \exp(2\alpha_0 t) + \right. \\ & + \frac{\Omega_0^2}{\sigma_\Omega^2} x_{13} - \frac{x_{13}^2}{2\sigma_\Omega^2} + \frac{3}{\alpha_0 \sigma_T^2} [(J_z - J_y) \omega_x \gamma' \gamma'' x_{13} + \\ & + (J_x - J_z) \omega_y \gamma \gamma'' x_{13} + (J_y - J_x) \omega_z \gamma \gamma' x_{13}] \times \\ & \left. \times [\exp(2\alpha_0 t) - \exp(\alpha_0 t)] \right\} d\omega_x d\omega_y d\omega_z dx_{13}, \quad (3.9) \end{aligned}$$

где $c_1 = c_1(t)$. Если разброс по орбитальной угловой скорости Ω мал, то величину Ω^2 можно считать детерминированной, $\Omega^2 = \Omega_0^2$, и выражение для p_γ можно записать в виде

$$p_\gamma(\gamma, \gamma', \gamma'') = c_2(t) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_T^2} (J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2)\right\} \times \\ \times \exp(2\alpha_0 t) + \frac{3\Omega_0^2}{2\sigma_T^2} [(J_z - J_y) \omega_x \gamma' \gamma'' + (J_x - J_z) \omega_y \gamma \gamma'' + \\ + (J_y - J_x) \omega_z \gamma \gamma'] [\exp(2\alpha_0 t) - \exp(\alpha_0 t)] d\omega_x d\omega_y d\omega_z.$$

Определяя этот интеграл по известной формуле [3.1], находим

$$p_\gamma(\gamma, \gamma', \gamma'') = c_3(t) \exp\left\{\frac{9\Omega_0^4}{2\sigma_0^2\sigma_T^2} [\exp(\alpha_0 t) - 1]^2 \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{(J_z - J_y)^2}{J_x} \gamma'^2 \gamma''^2 + \frac{(J_x - J_z)^2}{J_y} \gamma^2 \gamma''^2 + \frac{(J_y - J_x)^2}{J_z} \gamma^2 \gamma'^2\right]\right\}. \quad (3.10)$$

При анализе этого выражения следует иметь в виду, что оно определено с учетом небольшого числа членов ряда и поэтому имеет силу для начального этапа переходного процесса изменения распределения вероятностей. Для этого этапа $\alpha_0 t < 1$ и $\exp(\alpha_0 t) - 1 \approx \alpha_0 t$. Таким образом, для данного этапа

$$p_\gamma \approx c_3(t) \exp\left\{\frac{9\Omega_0^2}{2\sigma_T^2} \Omega_0^2 t^2 \left[\frac{(J_z - J_y)^2}{J_x} \gamma'^2 \gamma''^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(J_x - J_z)^2}{J_y} \gamma^2 \gamma''^2 + \frac{(J_y - J_x)^2}{J_z} \gamma^2 \gamma'^2\right]\right\}. \quad (3.11)$$

Кроме того, необходимо учитывать, что направляющие косинусы связаны соотношением

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1.$$

Поэтому любой из трех аргументов $\gamma, \gamma', \gamma''$ может быть исключен.

Рассмотрим случай, когда $I_x = I_y \gg I_z$. Это соответствует телу в виде тонкого стержня с осью z , направленной

по продленной оси стержня. Для данного случая

$$p_{\gamma} \approx c_3(t) \exp \left[\frac{9\Omega_0^4 J_x}{2\sigma_T^2} t^2 (\gamma'^2 \gamma''^2 + \gamma^2 \gamma''^2) \right] = \\ = c_3(t) \exp \left[\frac{9\Omega_0^4 J_x}{2\sigma_T^2} t^2 (\gamma''^2 - \gamma'^4) \right]. \quad (3.12)$$

Согласно этому выражению плотность распределения имеет максимум при

$\gamma'' = \pm 1/\sqrt{2}$, т. е. в

положении, когда продольная ось стержня образует с радиусом-вектором орбиты (вертикалью) угол 45° или 135° .

Характер изменения *)

плотности вероятности p_{γ}

по углу ν между продольной осью стержня

и вертикалью ($\cos \nu = \gamma''$) на рассматриваемом этапе

переходного процесса поясняет

рис. 3.1. Здесь представлена в полярных координатах

зависимость p_{γ} от ν для четырех значений

безразмерного времени

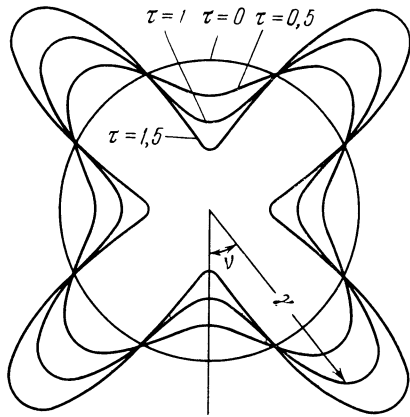


Рис. 3.1.

$$\tau = 3 \sqrt{\frac{J_x \Omega_0^2}{8\sigma_T^2}} \Omega_0 t.$$

Характер полученного распределения нетрудно объяснить, если принять во внимание, что учтены лишь члены ряда до четвертых степеней и вследствие этого найденная функция соответствует начальному этапу переходного процесса. Этот процесс начинается с равномерного (кругового) распределения по углам и начального вращения, характеризуемого дисперсией σ_T^2 .

*) Для получения распределения собственно по углу следует согласно общим правилам умножить p_{γ} на модуль якобиана преобразования координат, который в данном случае равен $|\sin \nu|$.

Градиентный гравитационный момент при плоском вращении спутника относительно горизонтальной оси изменяется с периодом π . Этот момент по мере гашения скорости начального вращения заставляет спутник качаться относительно вертикали. Концентрация вероятности, сопутствующая подобному движению, отображается рис. 3.1. Чтобы обнаружить эффект сокращения амплитуды качаний и установления главных осей инерции спутника по трехграннику орбитальной системы координат, необходимо вычислить следующие члены ряда.

Оценка точности прогнозирования движения многих тел. Если движение N тел в пространстве происходит под действием потенциальных сил, зависящих от расстояний между центрами масс тел, то уравнения движения могут быть записаны в виде

$$\sum_{k=1}^{3N} m_{ik} \ddot{q}_k + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0,$$

где $q_i (i = 1, 2, \dots, 3N)$ — обобщенные координаты, $U = U(q_1, \dots, q_{3N})$ — потенциальная функция. В форме Гамильтона эти уравнения имеют вид

$$\dot{p}_i + \frac{\partial H_\Gamma}{\partial q_i} = 0, \quad \dot{q}_i - \frac{\partial H_\Gamma}{\partial p_i} = 0, \quad (3.14)$$

где

$$H_\Gamma = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{3N} \mu_{ik} p_i p_k + U, \quad p_i = \sum_{k=1}^{3N} m_{ik} \dot{q}_k,$$

матрица $\mu = \|\mu_{ik}\|$ есть обратная матрица масс:

$$\mu = m^{-1} = \|m_{ik}\|^{-1}.$$

Допустим, что до момента времени $t = 0$ ведется наблюдение за движением тел с некоторой точностью, характеризуемой распределением плотности вероятности ошибок

$$p_0(\Delta q_1, \dots, \Delta q_{3N}, \Delta p_1, \dots, \Delta p_{3N}),$$

и известны значения обобщенных координат и обобщенных импульсов в этот начальный момент времени. Здесь $\Delta q_i = q_i - M[q_i]$, $\Delta p_i = p_i - M[p_i]$ — ошибки, $M[q_i]$, $M[p_i]$ — математические ожидания обобщенных координат

импульсов. На основе знания математических ожиданий $M[q_i(0)]$, $M[p_i(0)]$ в начальный момент времени путем интегрирования уравнений (3.14) для этих начальных условий осуществляется прогнозирование движения (определяются $q_i^0(t)$, $p_i^0(t)$). Требуется оценить точность прогноза в произвольный момент времени $t > 0$ в виде текущего распределения плотности вероятности

$$p(\Delta q_1, \dots, \Delta q_{3N}, \Delta p_1, \dots, \Delta p_{3N}, t).$$

Используем подход теории малых возмущений, рассматривая движение $p_i^0(t)$, $q_i^0(t)$ как невозмущенное. Считая функцию Гамильтона H_Γ , точнее, потенциальную функцию U аналитической относительно q_i (относительно p_i функция H_Γ — квадратичная форма) в окрестности невозмущенного (прогнозируемого) движения, записываем

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{p}_i + \sum_{k=1}^{3N} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_k} \right)_0 \Delta q_k + \\ + \frac{1}{2!} \sum_{k,l=1}^{3N} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial q_i \partial q_k \partial q_l} \right)_0 \Delta q_k \Delta q_l + \dots = 0, \\ \Delta \dot{q}_i - \sum_{k=1}^{3N} \mu_{ik} \Delta p_k = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

Линейное приближение представим в матричной форме:

$$\Delta \dot{p} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right)_0 \Delta q = 0, \quad \Delta \dot{q} - m^{-1} \Delta p = 0, \quad (3.16)$$

где Δp , Δq — векторы-столбцы,

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right)_0 = \left\| \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_k} \right)_0 \right\|, \quad m = \|m_{ik}\|$$

— квадратные матрицы. Используя блочные матрицы

$$x = \begin{Bmatrix} \Delta p \\ \Delta q \end{Bmatrix}, \quad a = \begin{Bmatrix} 0 & \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right)_0 \\ -m^{-1} & 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.17)$$

эти уравнения можно также представить в стандартной форме:

$$\dot{x} + ax = 0. \quad (3.18)$$

Фундаментальная матрица весовых функций, удовлетворяющая уравнению

$$\dot{w} + aw = 0, \quad w(t', t') = \mathbf{1} \quad (3.19)$$

($\mathbf{1}$ — единичная $6N \times 6N$ -матрица), может быть представлена также в виде блочной матрицы с блоками вида $3N \times 3N$:

$$w(t, t') = \begin{vmatrix} w^{pp}(t, t') & w^{pq}(t, t') \\ w^{qp}(t, t') & w^{qq}(t, t') \end{vmatrix}.$$

В этом случае уравнение (3.19) принимает форму

$$\begin{vmatrix} \dot{w}^{pp} & \dot{w}^{pq} \\ \dot{w}^{qp} & \dot{w}^{qq} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right)_0 \\ -m^{-1} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w^{pp} & w^{pq} \\ w^{qp} & w^{qq} \end{vmatrix} = 0, \\ w^{pp}(t', t') = w^{qq}(t', t') = \mathbf{1}, \\ w^{pq}(t', t') = w^{qp}(t', t') = 0.$$

Отсюда следует

$$\left. \begin{aligned} w^{pp} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right)_0 w^{qp} = 0, & \quad \dot{w}^{pq} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right)_0 w^{qq} = 0, \\ \dot{w}^{qp} - m^{-1}w^{pp} = 0, & \quad \dot{w}^{qq} - m^{-1}w^{pq} = 0 \end{aligned} \right\} (3.20)$$

или ($m = \text{const}$)

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{w}^{qq} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right)_0 w^{qq} = 0, & \quad w^{qq}(0, 0) = \mathbf{1}, \\ \dot{w}^{qq}(0, 0) = 0, & \quad w^{pq} = m\dot{w}^{qq}, \\ m\ddot{w}^{qp} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right)_0 w^{qp} = 0, & \quad w^{qp}(0, 0) = 0, \\ \dot{w}^{qp}(0, 0) = m^{-1}, & \quad w^{pp} = m\dot{w}^{qp}. \end{aligned} \right\} (3.21)$$

Рассмотрим теперь случай, когда начальные, а значит, и текущие ошибки достаточно малы для того, чтобы можно было ограничиться первым членом ряда в уравнениях (3.15), т. е. ограничиться линейным приближением.

Согласно изложенному в главе I, в этом случае текущее распределение определяется в общем виде. А именно, если $p(x_1, \dots, x_n, 0) = p_0(x_1, \dots, x_n)$ — начальное распределение для координат системы (3.18), то текущее

распределение для этих координат равно

$$p = p_0 \left[\sum_{k=1}^n w_{1k}(0, t) x_k, \dots, \sum_{k=1}^n w_{nk}(0, t) x_k \right], \quad (3.22)$$

где матрица $w = \|w_{ik}\|$ определяется уравнением (3.19). В векторной форме

$$p(x, t) = p_0[w(0, t)x]. \quad (3.23)$$

Заметим, что матрица $w(0, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{w}(0, t) - w(0, t)a(t) = 0. \quad (3.24)$$

Определение фундаментальной матрицы w требует $n = 6N$ -кратного интегрирования (при n различных условиях) системы линейных уравнений n -го порядка.

Если время прогнозирования достаточно мало, то вместо интегрирования уравнений (3.20) или (3.19) можно воспользоваться приближенным решением уравнения (3.20) в виде конечного числа первых членов ряда

$$w(0, t) = 1 + \int_0^t a(t') dt' + \int_0^t \int_0^{t'} a(t'') a(t') dt'' dt' + \dots \quad (3.25)$$

Действительно, если этот ряд равномерно сходится вместе с рядом производной, что заведомо имеет место при достаточно малом t и ограниченной норме матрицы a , то он сходится к решению уравнения (3.24). В этом можно убедиться прямой подстановкой выражения (3.25) в (3.24).

Во многих случаях достаточной характеристикой точности является корреляционная матрица ошибок — матрица вторых моментов

$$M = \begin{vmatrix} M_{pp} & M_{pq} \\ M_{qp} & M_{qq} \end{vmatrix}, \quad (3.26)$$

где

$$M_{pp} = M[pp^T], \quad M_{pq} = M_{qp}^T = M[pq^T], \quad M_{qq} = M[qq^T].$$

В соответствии с линейными уравнениями (3.16), (3.18) эта матрица удовлетворяет соотношению

$$\dot{M} + aM + Ma^T = 0 \quad (3.27)$$

и выражается формулой

$$M(t) = w(t, 0) M(0) w^T(t, 0). \tag{3.28}$$

Если начальные ошибки столь велики, что необходимо учитывать старшие члены рядов в уравнениях (3.15), то решение задачи оценки точности прогноза может быть получено на основе формул (2.23).

В данном случае

$$\left. \begin{aligned} a_{\nu\nu} &= \begin{cases} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_\nu^2} \right)_0 & \text{при } \nu = 1, 2, \dots, 3N, \\ 0 & \text{при } \nu > 3N, \end{cases} \\ a_{\nu\mu\varepsilon} &= \begin{cases} \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial q_\nu \partial q_\mu \partial q_\varepsilon} \right)_0 & \text{при } \nu, \mu, \varepsilon = 1, 2, \dots, 3N \\ 0 & \text{при других значениях } \nu, \mu, \varepsilon, \end{cases} \\ \dots & \dots \\ \underbrace{a_{\nu\mu\dots\chi}}_L &= \begin{cases} \frac{1}{(L-1)!} \left(\frac{\partial^L U}{\partial q_\nu \partial q_\mu \dots \partial q_\chi} \right)_0 & \text{при } \nu, \mu, \dots \\ \dots, \chi = 1, 2, \dots, 3N, \\ 0 & \text{при других значениях } \nu, \mu, \dots, \chi. \end{cases} \end{aligned} \right\} \tag{3.29}$$

Приведенные выше выражения являются общими для задачи определения распределения вероятностей при движении многих тел и могут использоваться в различных частных случаях.

В случае небесных тел, размеры которых малы в сравнении с расстояниями между телами, энергия гравитационного взаимодействия, определенная с точностью до аддитивной постоянной, выражается формулой

$$U = -\frac{1}{2} f \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{\sqrt{(x_i^M - x_j^M)^2 + (y_i^M - y_j^M)^2 + (z_i^M - z_j^M)^2}}, \tag{3.30}$$

где x_i^M, y_i^M, z_i^M — координаты центров массы тел в прямоугольной инерциальной системе координат, f — гравитационная постоянная. Суммирование осуществляется по всем i, j в пределах от 1 до N , кроме $i = j$. Уравнения (3.16) в скалярной форме в данном случае будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta \dot{p}_{xi} + \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^M \partial x_k^M} \right)_0 \Delta x_k^M + \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^M \partial y_k^M} \right)_0 \Delta y_k^M + \\
 + \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^M \partial z_k^M} \right)_0 \Delta z_k^M = 0, \\
 \Delta \dot{p}_{yi} + \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y_i^M \partial x_k^M} \right)_0 \Delta x_k^M + \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y_i^M \partial y_k^M} \right)_0 \Delta y_k^M + \\
 + \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y_i^M \partial z_k^M} \right)_0 \Delta z_k^M = 0, \\
 \Delta \dot{p}_{zi} + \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z_i^M \partial x_k^M} \right)_0 \Delta x_k^M + \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z_i^M \partial y_k^M} \right)_0 \Delta y_k^M + \\
 + \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z_i^M \partial z_k^M} \right)_0 \Delta z_k^M = 0, \\
 \Delta x_i^M - \Delta p_{xi}/m_i = 0, \quad \Delta y_i^M - \Delta p_{yi}/m_i = 0, \\
 \Delta z_i^M - \Delta p_{zi}/m_i = 0.
 \end{aligned} \right\} (3.31)$$

Вторые производные гравитационного потенциала в соответствии с (3.30) выражаются формулами

$$\left. \begin{aligned}
 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^M \partial x_i^M} \right)_0 &= fm_i \sum_{\mu \neq i} m_\mu \left[\frac{r_{i\mu}^2 - 3(x_i^M - x_\mu^M)^2}{r_{i\mu}^5} \right]_0, \\
 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^M \partial x_k^M} \right)_0 &= -fm_i m_k \left[\frac{r_{ik}^2 - 3(x_i^M - x_k^M)^2}{r_{ik}^5} \right]_0, \quad k \neq i, \\
 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^M \partial x_k^M} \right)_0 &= -3fm_i \sum_{\mu \neq i} m_\mu \left[\frac{(x_i^M - x_\mu^M)(y_i^M - y_\mu^M)^2}{r_{i\mu}^5} \right]_0, \\
 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^M \partial y_k^M} \right)_0 &= 3fm_i m_k \left[\frac{(x_i^M - x_k^M)(y_i^M - y_k^M)}{r_{ik}^5} \right]_0, \\
 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^M \partial z_i^M} \right)_0 &= -3fm_i \sum_{\mu \neq i} m_\mu \left[\frac{(y_i^M - y_\mu^M)(z_i^M - z_\mu^M)}{r_{i\mu}^5} \right]_0, \\
 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^M \partial z_k^M} \right)_0 &= 3fm_i m_k \left[\frac{(x_i^M - x_k^M)(z_i^M - z_k^M)}{r_{ik}^5} \right]_0, \\
 \dots \dots \dots
 \end{aligned} \right\} (3.32)$$

где индексом «0», как и раньше, обозначаются значения, соответствующие невозмущенному (прогнозируемому) движению.

Если рассматривается задача прогнозирования относительного движения малого тела, например космического корабля в Солнечной системе, то движение других тел (планет) целесообразно считать заданным. В этом случае уравнения линейного приближения (3.34) превращаются в уравнения для одного тела:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{p}_x + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_0 \Delta x^M + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)_0 \Delta y^M + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \right)_0 \Delta z^M &= 0, \\ \Delta \dot{p}_y + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \right)_0 \Delta x^M + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_0 \Delta y^M + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \right)_0 \Delta z^M &= 0, \\ \Delta \dot{p}_z + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} \right)_0 \Delta x^M + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} \right)_0 \Delta y^M + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)_0 \Delta z^M &= 0, \\ \Delta \dot{x}^M - \frac{1}{m} \Delta p_x &= 0, \quad \Delta \dot{y}^M - \frac{1}{m} \Delta p_y = 0, \\ \Delta \dot{z}^M - \frac{1}{m} \Delta p_z &= 0. \end{aligned} \right\} (3.33)$$

Вторые производные потенциала — «градиенты» везде определяются вдоль траектории невозмущенного движения. За исключением тривиальных частных случаев (спутник в центральном поле на круговой орбите, тело вне гравитационного поля), эти производные являются функциями времени.

Поэтому определение фундаментальной системы решений (матрицы весовых функций) возможно или в численном виде, или по приближенным формулам типа (3.28) (для относительно небольших времен прогноза).

§ 3.2. Статистическая динамика свободного движения линейных систем со случайными постоянными коэффициентами

На практике довольно часто встречается следующая задача. Выпускаются (серийное, массовое производство) однотипные системы, переходные процессы в которых с достаточной точностью описываются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными во времени, но изменяющимися от изделия к изделию коэффициентами

(параметрами). Разброс параметров носит случайный характер и ограничивается допусками. Разброс параметров порождает разброс переходных процессов вплоть до возможной неустойчивости некоторых из выпускаемых систем. Требуется обосновать допуски на разброс параметров систем. Подобная же задача возникает, если имеется одна система, описываемая линейными дифференциальными уравнениями, многократно запускаемая. В каждом пуске параметры могут считаться постоянными, но от пуска к пуску происходят случайные изменения параметров.

Влиянием изменения параметров на переходные процессы занимается теория чувствительности [3.2] — [3.8], которой посвящено довольно большое число работ. Однако теория чувствительности обычно рассматривает системы с малыми вариациями параметров.

Переходные процессы при случайных начальных значениях координат и случайных параметрах наиболее полно характеризуются текущей плотностью вероятности в пространстве координат $p_x(x_1, \dots, x_n, t)$. Поэтому естественно при рассмотрении указанной задачи использовать ФПК-уравнение и методы его решения. Сама задача в этом случае заключается в определении допусков на параметры системы, при удовлетворении которых распределение $p_x(x_1, \dots, x_n, t)$ отличается от распределения $p_n(x_1, \dots, x_n, t)$, соответствующего номинальным значениям параметров, не более чем на заданную определенным образом величину.

Запишем уравнения системы в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k &= 0, \\ a_{ik} &= \bar{a}_{ik} + \Delta a_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

где $a_{ik} = M[a_{ik}]$ — математическое ожидание (номинальные значения) коэффициентов, Δa_{ik} — случайные центрированные ($M[\Delta a_{ik}] = 0$) отклонения коэффициентов. По условию

$$\bar{a}_{ik} = \text{const}, \quad \Delta a_{ik} = \text{const}, \quad \Delta \dot{a}_{ik} = 0. \quad (3.35)$$

Введем для основных координат и коэффициентов

обозначения с двумя индексами:

$$x_i = x_{i0}, \quad \Delta a_{ik} = x_{ik}.$$

Тогда уравнения системы запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{i0} + \sum_{k=1}^n \bar{a}_{ik} x_{k0} + \sum_{k=1}^n x_{ik} x_{k0} &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \dot{x}_{ik} &= 0, \quad i, k = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{ii'} + \sum_{k=1, k'=0}^n a_{ii', kk'} x_{kk'} + \sum_{k=l=1, k', l'=0}^n a_{ii', kk', ll'} x_{kk'} x_{ll'} &= 0, \\ i' &= 0, 1, \dots, n; \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_{i0, k0} &= \bar{a}_{ik}, & i, k &= 1, 2, \dots, n, \\ & & \text{остальные } a_{ii', kk'} &= 0, \\ a_{i0, ik, k0} &= a_{i0, k0, ik} = \frac{1}{2}, & i, k &= 1, 2, \dots, n, \\ & & \text{остальные } a_{ii', kk', ll'} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

Уравнения линейного приближения

$$\dot{x}_{ii'} + \sum_{k=1, k'=0}^n a_{ii', kk'} x_{kk'} = 0 \quad (3.39)$$

представляют собой совокупность уравнений номинальной системы

$$\dot{x}_{i0} + \sum_{k=1}^n \bar{a}_{ik} x_{k0} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

и коэффициентов

$$\dot{x}_{ik} = 0, \quad i, k = 1, 2, \dots, n.$$

Фундаментальная система весовых функций $w_{ii', jj'}(t)$ линейного приближения, удовлетворяющая уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{w}_{ii', jj'} + \sum_{k, k'=0}^n a_{ii', kk'} w_{kk', jj'} &= 0, \\ w_{ii', jj'}(0) &= \begin{cases} 1 & \text{при } j = i, & j' = i', \\ 0 & \text{при } j \neq i \text{ или } j' \neq i', \end{cases} \end{aligned}$$

состоит из весовых функций номинальной системы

$$\dot{w}_{i_0, j_0}(t) = w_{ij}(t), \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.40)$$

и постоянных

$$w_{ii', jj'}(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } j = i, \quad j' = i', \\ 0 & \text{при } j \neq i \text{ или } j' \neq i'. \end{cases} \quad (3.41)$$

ФПК-уравнение, записанное для логарифмической плотности вероятности $\ln p(x_{10}, \dots, x_{nn}, t)$, в фазовом пространстве системы (3.37) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \ln p - \sum_{i=1, i'=0}^n \frac{\partial \ln p}{\partial x_{ii'}} \left(\sum_{k=1, k'=0}^n a_{ii', kk'} x_{kk'} + \right. \\ \left. + \sum_{k, l=1, k', l'=0}^n a_{ii', kk', ll'} x_{kk'} x_{ll'} \right) = \sum_{i=1, i'=0}^n a_{ii', ii'}. \end{aligned}$$

Согласно методу, изложенному в главе II, решение ФПК-уравнения ищется в форме степенного ряда

$$\begin{aligned} \ln p = A_0 + \sum_{i=1, i'=0}^n A_{ii'} x_{ii'} + \frac{1}{2} \sum_{i, k=1, i', k'=0}^n A_{ii', kk'} x_{ii'} x_{kk'} + \\ + \frac{1}{3} \sum_{i, k, j=1; i', k', j'=0}^n A_{ii', kk', jj'} x_{ii'} x_{kk'} x_{jj'} + \dots \quad (3.42) \end{aligned}$$

При этом предполагается, что плотность начального распределения может быть представлена в аналогичной форме:

$$\begin{aligned} \ln p_0 = \ln p(x_{10}, \dots, x_{nn}, 0) = \\ = A_0^0 + \sum_{i=1, i'=0}^n A_{ii'} x_{ii'} + \frac{1}{2} \sum_{i, k=1; i', k'=0}^n A_{ii', kk'}^0 x_{ii'} x_{kk'} + \dots \quad (3.43) \end{aligned}$$

Коэффициенты ряда (3.42) определяются как решение

линейных дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{A}_0 &= \sum_{p,p'} a_{pp',pp'}, \quad \dot{A}_{ii'} - \sum_{p,p'} a_{pp',ii'} A_{pp'} = 0 \\
 &\qquad\qquad\qquad \text{при } i' \neq i, \\
 \dot{A}_{ii',kk'} - \sum_{p,p'} (a_{pp',ii'} A_{pp',kk'} + a_{pp',kk'} A_{pp',ii'}) - \\
 &\qquad\qquad\qquad - 2 \sum_{p,p'} a_{pp',ii',kk'} A_{pp'} = 0, \\
 \dots \dots \dots \\
 \dot{A}_{\underbrace{ii',kk',\dots,ss'}_{2N}} - \sum_{p,p'} (a_{pp',ii'} \underbrace{A_{pp',kk',\dots,ss'}}_{2N} + \dots \\
 \dots + a_{pp',ss'} \underbrace{A_{pp',kk',\dots,ii'}}_{2N}) - \\
 - \frac{2!}{N-1} \sum_{p,p'} (a_{pp',ii',kk'} \underbrace{A_{pp',ll',\dots,ss'}}_{2N-2} + \dots \\
 \dots + a_{pp',rr',ss'} \underbrace{A_{pp',ii',\dots,mm'}}_{2N-2}) = 0 \\
 \dots \dots \dots
 \end{aligned} \right\} (3.44)$$

при начальных условиях

$$A_0(0) = A_0^0, \quad A_{ii'}(0) = A_{ii'}^0, \quad A_{ii',kk'}(0) = A_{ii',kk'}^0,$$

Здесь все индексы со штрихом принимают значения 0, 1, ..., n, а индексы без штриха — значения 1, 2, ..., n. Согласно формулам (2.23) решение уравнений (3.44) может быть выражено через квадратуры весовых функций

$$\left. \begin{aligned}
 A_{ii'}(t) &= \sum_{v,v'} A_{vv'}^0 w_{vv',ii'}(-t) + \\
 &\quad + 2 \sum_{v,v'} \int_0^t \sum_{p,p'} a_{pp',pp',vv'} w_{vv',ii'}(t'-t) dt', \\
 A_{ii',jj'}(t) &= \sum_{vv',\mu,\mu'} A_{vv',\mu\mu'}^0 w_{vv',ii'}(-t) w_{\mu\mu',jj'}(-t) + \\
 &\quad + 2 \sum_{vv',\mu,\mu'} \int_0^t \sum_{p,p'} a_{pp',vv',\mu\mu'} A_{pp'}(t') w_{vv',ii'}(t'-t) \times \\
 &\qquad\qquad\qquad \times w_{\mu\mu',jj'}(t'-t) dt', \\
 \dots \dots \dots
 \end{aligned} \right\} (3.45)$$

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{A_{ii', jj', \dots, ss'}}_{2N}(t) = \\
 & = \sum_{\nu, \nu', \mu, \mu', \dots, \chi, \chi'} \underbrace{A_{\nu\nu', \mu\mu', \dots, \chi\chi'}^0}_{2N} w_{\nu\nu', ii'}(-t) \dots \\
 & \dots w_{\chi\chi', ss'}(-t) + \frac{2!}{N-1} \sum_{\nu, \nu', \mu, \mu', \dots, \chi, \chi'} \times \\
 & \times \int_0^t \sum_{p, p'} [a_{pp', p\rho', \chi\chi'} \underbrace{A_{pp', \nu\nu', \dots, \eta\eta'}}_{2N-2}(t') + \dots \\
 & \dots + a_{pp', \nu\nu', \mu\mu'} \underbrace{A_{pp', \epsilon\epsilon', \dots, \chi\chi'}}_{2N-2}(t')] w_{\nu\nu', ii'}(t' - t) \dots, \\
 & \dots w_{\chi\chi', ss'}(t' - t) dt'
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

Коэффициенты распределения можно разбить на три группы. Коэффициенты первой группы относятся к основным координатам $x_{i0} = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) и имеют в качестве индекса со штрихом нуль. Для этой группы коэффициентов согласно (3.45), (3.40), (3.41), (3.38)

$$\begin{aligned}
 & A_{i0}(t) = \sum_{\nu} A_{\nu 0}^0 w_{\nu 0, i0}(-t) = \sum_{\nu} A_{\nu 0}^0 w_{\nu i}(-t), \\
 & A_{i0, j0}(t) = \sum_{\nu, \mu} A_{\nu 0, \mu 0}^0 w_{\nu i}(-t) w_{\mu j}(-t), \\
 & \dots \dots \dots \\
 & \underbrace{A_{i0, j0, \dots, s0}}_{2N}(t) = \\
 & = \sum_{\nu, \mu, \dots, \chi} A_{\nu 0, \mu 0, \dots, \chi 0}^0 w_{\nu i}(-t) \dots w_{\chi s}(-t), \\
 & \dots \dots \dots
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Эти выражения совпадают с формулами для коэффициентов распределения $\ln p_n$ при номинальных значениях параметров. Коэффициенты второй группы относятся только к постоянным во времени случайным параметрам и имеют индексы со штрихом, отличные от нуля. Из (3.45),

(3.41), (3.38) следует, что для этой группы параметров

$$\begin{aligned}
 A_{ii'}(t) &= A_{ii'}^0 = 0 \quad \text{при } i \neq i', \quad A_{ii} = t \\
 A_{ii', jj'}(t) &= A_{ii', jj'}^0, \\
 &\dots \dots \dots \\
 A_{ii', jj', \dots, ss'}(t) &= A_{ii', jj', \dots, ss'}^0, \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

т. е., как и должно быть, коэффициенты распределения параметров остаются неизменными во времени и равными начальным значениям.

Существует третья группа коэффициентов распределения, которая соответствует членам, содержащим как основные координаты $x_{i_0} = x_i$, так и параметры x_{ik} , $k \neq 0$. Для этих коэффициентов часть индексов со штрихом равна нулю, а другие индексы со штрихом отличны от нуля. Для этой группы коэффициентов, отражающей весь эффект случайных параметров, из формул (3.45), (3.41), (3.38) следует

$$\left. \begin{aligned}
 &A_{ii', j_0}(t) = \\
 &= \sum_{\mu=1}^n A_{ii', \mu_0} w_{\mu j}(-t) + 2 \int_0^t A_{i_0}(t') w_{i' j}(t' - t) dt', \\
 &A_{ii', j_0, k_0}(t) = \\
 &= \sum_{\mu, \epsilon=1}^n A_{ii', \mu_0, \epsilon_0} w_{\mu j}(-t) w_{\epsilon k}(-t) + \\
 &+ \int_0^t \sum_{\mu=1}^n A_{i_0, \mu_0}(t') [w_{\mu j}(t' - t) w_{i' k}(t' - t) + \\
 &\quad + w_{\mu k}(t' - t) w_{i' j}(t' - t)] dt', \\
 &A_{ii', jj', k_0}(t) = \sum_{\epsilon=1}^n A_{ii', jj', \epsilon_0} w_{\epsilon k}(-t) + \\
 &\quad + \int_0^t [A_{j_0, ii'}(t') w_{j' k}(t' - t) + \\
 &\quad + A_{i_0, jj'}(t') w_{i' k}(t' - t)] dt', \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned} \right\} \quad (3.47)$$

Нас в основном интересует текущее распределение основных фазовых координат $x_i = x_{i0}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Поэтому от плотности вероятности в объединенном пространстве параметров и основных фазовых координат

$$p(x_1, \dots, x_n, x_{11}, \dots, x_{nn}, t)$$

целесообразно перейти к плотности вероятности в пространстве основных фазовых координат

$$\begin{aligned} p_x(x_1, \dots, x_n, t) &= \\ &= \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, \dots, x_n, x_{11}, \dots, x_{nn}) dx_{11} \dots dx_{nn}. \end{aligned}$$

Согласно предыдущему

$$\begin{aligned} p &= p_{\text{н}}(x_1, \dots, x_n, t) p_{\text{п}}^0(x_{11}, \dots, x_{nn}) \times \\ &\times \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{i, i', j=1}^n A_{ii', j0} x_{ii'} x_j + \frac{1}{3} \sum_{i, i', j, k=1}^n A_{ii', j0, k0} x_{ii'} x_j x_k + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \sum_{i, i', j, j', k=1}^n A_{ii', jj', k0} x_{ii'} x_{jj'} x_k + \dots\right). \end{aligned}$$

Здесь $p_{\text{н}}$ — плотность вероятности для номинальной системы, $p_{\text{п}}^0$ — плотность распределения параметров. Таким образом,

$$\begin{aligned} p_x(x_1, \dots, x_n, t) &= \\ &= p_{\text{н}}(x_1, \dots, x_n, t) \times \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{i, i', j=1}^n A_{ii', j0} x_{ii'} x_j + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \sum_{i, i', j, k=1}^n A_{ii', j0, k0} x_{ii'} x_j x_k + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \sum_{i, i', j, j', k=1}^n A_{ii', jj', k0} x_{ii'} x_{jj'} x_k + \dots\right) \times \\ &\quad \times p_{\text{п}}^0(x_{11}, \dots, x_{nn}) dx_{11} \dots dx_{nn}. \quad (3.48) \end{aligned}$$

Если требования к текущей плотности вероятности p_x заданы в виде

$$\frac{p_x(x_1, \dots, x_n, t)}{p_{\text{н}}(x_1, \dots, x_n, t)} \leq d(x_1, \dots, x_n, t),$$

где d — заданная функция, то неявной формой решения поставленной задачи служит

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int p_{\Pi}^0(x_{11}, \dots, x_{nn}) \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{i, i', j=1}^n A_{ii', j0} x_{ii'} x_j + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \sum_{i, i', j, k=1}^n A_{ii', j0, k0} x_{ii'} x_j x_k + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \sum_{i, i', j, j', k=1}^n A_{ii', jj', k0} x_{ii'} x_{jj'} x_k + \dots \right) dx_{11} \dots dx_{nn} \leq \\ \leq d(x_1, \dots, x_n, t). \quad (3.49)$$

Для частных случаев могут быть получены решения в явной форме.

Приближенное решение в явной форме. Если ограничиться квадратичными и кубическими членами представления совместной логарифмической плотности вероятности и считать начальное распределение параметров p_{Π}^0 нормальным, то интеграл в формулах (3.48), (3.49) можно вычислить в общем виде. Действительно, в этом случае

$$p_x(x_1, \dots, x_n, t) = c p_{\Pi}(x_1, \dots, x_n, t) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{i, i', j, j'=1}^n \left(A_{ii', jj'}^0 + \frac{2}{3} \sum_{k=1}^n A_{ii', jj', k0} x_k \right) x_{ii'} x_{jj'} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{i, i'=1}^n \left(\sum_{j=1}^n A_{ii', j0} x_j + \frac{2}{3} \sum_{j, k=1}^n A_{ii', j0, k0} x_j x_k \right) x_{ii'} \right] dx_{11} \dots dx_{nn}, \quad (3.50)$$

где $c = \text{const}$. Матрицы, составленные из элементов с двойными индексами, можно рассматривать как блочные матрицы или обычные матрицы с двойной нумерацией строк и столбцов.

Обозначим матрицу, обратную

$$\left\| A_{ii', jj'}^0 + \frac{2}{3} \sum_{k=1}^n A_{ii', jj', k0} x_k \right\|,$$

через $-M^{-1}$:

$$M = \|M_{ii', jj'}\| = - \left\| A_{ii', jj'}^0 + \frac{2}{3} \sum_{k=1}^n A_{ii', jj', k0} x_k \right\|^{-1}.$$

Применяя к (3.50) известную формулу для интегралов рассматриваемого типа [2.6], получаем

$$\begin{aligned} p_x(x_1, \dots, x_n, t) = c_1 p_{II}(x_1, \dots, x_n, t) \sqrt{|M|} \times \\ \times \exp \left[\frac{1}{8} \sum_{i, i', j, j'=1}^n M_{ii', jj'} \left(\sum_{p=1}^n A_{ii', p0} x_p + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{3} \sum_{p, q=1}^n A_{ii', p0, q0} x_p x_q \right) \left(\sum_{r=1}^n A_{jj', r0} x_r + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{3} \sum_{r, f=1}^n A_{jj', r0, f0} x_r x_f \right) \right], \quad (3.51) \end{aligned}$$

где $c_1 = \text{const.}$ Для того типичного случая, когда начальные распределения основных координат и параметров независимы,

$$A_{ii', \mu_0}^0 = 0, \quad A_{ii', \mu_0, \epsilon_0}^0 = 0, \quad A_{ii', jj', \epsilon_0}^0 = 0,$$

и начальное распределение основных координат является центральным, $A_{v_0}^0 = 0$, из (3.46), (3.47) вытекает

$$\left. \begin{aligned} A_{i_0}(t) = 0, \quad A_{ii', j_0}(t) = 0, \quad A_{ii', jj', k_0}(t) = 0, \\ A_{ii, j_0, k_0}(t) = \int_0^t \sum_{\mu=1}^n A_{i_0, \mu_0}(t') [w_{\mu j}(t'-t) w_{i' k}(t'-t) + \\ + w_{\mu k}(t'-t) w_{i' j}(t'-t)] t dt', \\ A_{i_0, \mu_0}(t') = \sum_{\nu, \epsilon=1}^n A_{v_0, \epsilon_0}^0 w_{\nu i}(-t') w_{\epsilon \mu}(-t'). \end{aligned} \right\} \quad (3.52)$$

Матрица M при этом равна начальной корреляционной матрице параметров

$$M = \|M_{ii', jj'}^0\| = - \|A_{ii', jj'}^0\|.$$

Формула (3.51) в данном случае приобретает вид

$$p_x(x_1, \dots, x_n, t) = c_2 p_H(x_1, \dots, x_n, t) \exp \left[\frac{1}{18} \sum_{i, i', j, j'=1}^n M_{ii', jj'}^0 \times \right. \\ \left. \times \sum_{p, q, r, f=1}^n A_{ii', p_0, q_0} A_{jj', r_0, f_0} x_p x_q x_r x_f \right]. \quad (3.53)$$

Из этой формулы, как и из предшествующих (3.48), (3.50), видно, что, даже если начальные распределения основных координат и параметров являются нормальными, текущее распределение основных координат не является нормальным.

Из (3.52) видно, что при $t = 0$ $A_{ii', p_0, q_0} = 0$. С другой стороны, очевидно, что $p_x(x_1, \dots, x_n, 0) = p_H(x_1, \dots, x_n, 0)$. Поэтому $c_2 = 1$.

Если ввести обозначение

$$y_{ii'} = \sum_{p, q=1}^n A_{ii', p_0, q_0} x_p x_q, \quad (3.54)$$

то формулу (3.53) можно записать так:

$$p_x = p_H \exp \left(\frac{1}{18} \sum_{i, i', j, j'=1}^n M_{ii', jj'}^0 y_{ii'} y_{jj'} \right). \quad (3.55)$$

Таким образом, в показателе экспоненты мы имеем квадратичную форму, составленную из квадратичных форм основных фазовых координат. Квадратичная форма

$$\sum_{i, i', j, j'=1}^n M_{ii', jj'}^0 y_{ii'} y_{jj'} = M \left[\left(\sum_{i, i'=1}^n \Delta \alpha_{ii'} y_{ii'} \right)^2 \right]_{t=0}$$

положительно определенная и

$$\exp \left(\frac{1}{18} \sum_{i, i', j, j'=1}^n M_{ii', jj'}^0 y_{ii'} y_{jj'} \right) \geq 1.$$

Таким образом, как и следовало ожидать, случайность параметров может только увеличивать рассеивание основных фазовых координат *) ($p_x \geq p_H$).

*) Все это справедливо лишь в окрестности начала координат, где имеет место достаточно быстрая сходимость ряда.

Для того чтобы получить ограничения (допуски) для моментов $M_{ii', jj'}^0$ случайных составляющих параметров, необходимо задаться некоторыми условиями для x_p или $y_{ii'}$. В интересах простоты конечных выражений (см. ниже) заменим величины $y_{ii'}$ в формуле (3.55) их математическими ожиданиями

$$\bar{y}_{ii'} = \sum_{p, q=1}^n A_{ii', p_0, q_0} M[x_p x_q] \quad (3.56)$$

при условии, что x_p, x_q суть фазовые координаты в номинальной системе. Тем самым мы строим оценку отклонений распределений в области фазового пространства, «населенной» при номинальных значениях параметров. Такой подход представляется достаточно естественным. Его дополнительное преимущество, как сейчас увидим, является независимостью допусков на параметры от величин начальных отклонений фазовых координат, характеризуемых моментами $M[x_p x_q]_{t=0}$ или коэффициентами A_{p_0, q_0}^0 . Для доказательства последнего утверждения и получения удобных выражений $\bar{y}_{ii'}$ подставим в (3.56) выражение A_{ii', p_0, q_0} согласно (3.52). Введя обозначение $m_{pq}(t) = M[x_p x_q]$, находим

$$\begin{aligned} \bar{y}_{ii'} &= \sum_{p, q=1}^n m_{pq}(t) \int_0^t \sum_{\mu=1}^n A_{i_0, \mu_0}(t') \times \\ &\times [w_{\mu p}(t' - t) w_{i' q}(t' - t) + w_{\mu q}(t' - t) w_{i' p}(t' - t)] dt' = \\ &= 2 \int_0^t \sum_{\mu, p, q=1}^n A_{i_0, \mu_0}(t') w_{\mu p}(t' - t) m_{pq}(t) w_{i' q}(t' - t) dt'. \end{aligned}$$

В матричной форме это соотношение запишется так:

$$\bar{y} = 2 \int_0^t A(t') w(t' - t) m(t) w^T(t' - t) dt', \quad (3.57)$$

где $\bar{y} = \|\bar{y}_{ii'}\|$, $A(t') = \|A_{i_0, \mu_0}(t')\|$,
 $m(t) = \|m_{pq}(t)\|$, $w = \|w_{ij}\|$

— квадратные матрицы, индекс «т» обозначает транспонирование. Согласно (3.46)

$$A(t) = w^T(-t) A^0 w(-t), \quad A(t') = w^T(-t') A^0 w(-t'), \quad (3.58)$$

где $A^0 = A(0)$. Подставляя это выражение для $A(t')$ в (3.57) и учитывая, что согласно теории линейных дифференциальных уравнений

$$w(-t') w(t' - t) = w(-t),$$

получаем

$$\bar{y} = 2 \int_0^t w^T(-t') A^0 w(-t) m(t) w^T(t' - t) dt'. \quad (3.59)$$

Для номинальной системы нормальное вначале распределение остается нормальным и

$$A(t) m(t) = -\mathbf{1},$$

где $\mathbf{1}$ — единичная матрица. Из этого соотношения и выражения (3.58) для $A(t)$ вытекает

$$m(t) = -A^{-1}(t) = -w^{-1}(-t)(A^0)^{-1}[w^T(-t)]^{-1}.$$

Подстановка в (3.59) дает

$$\bar{y} = -2 \int_0^t w^T(-t') [w^T(-t)]^{-1} w^T(t' - t) dt'.$$

Но

$$w^T(t) w^T(-t) = \mathbf{1}, \quad [w^T(-t)]^{-1} = w^T(t).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \bar{y} &= -2 \int_0^t w^T(-t') w^T(t) w^T(t' - t) dt' = \\ &= -2 \int_0^t [w(t) w(-t')]^T w^T(t' - t) dt = \\ &= -2 \int_0^t [w(t' - t) w(t - t')]^T dt' = -2 \int_0^t \mathbf{1} dt' = -2t\mathbf{1}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

где $\mathbf{1}$ — единичная матрица. Таким образом, при принятых условиях \bar{y} действительно не зависит от начальных значений моментов основных фазовых координат и имеет исключительно простое выражение.

Согласно (3.60)

$$\bar{y}_{ii'} = \begin{cases} -2t & \text{при } i' = i, \\ 0 & \text{при } i' \neq i, \end{cases}$$

и формула (3.55) при указанных условиях принимает вид

$$p_x = p_H \exp \left(\frac{2}{9} t^2 \sum_{i,j=1}^n M_{ii,jj}^0 \right). \quad (3.61)$$

Отклонение от номинального распределения, характеризуемое в данном случае множителем

$$\exp \left(\frac{2}{9} t^2 \sum_{i,j=1}^n M_{ii,jj}^0 \right),$$

целесообразно вычислять для времени t , связанного с временем регулирования (временем затухания переходных процессов) T_p в номинальной системе. При этом подходящим значением является $t = 1/2 T_p$, т. е. отклонение определяется в середине переходных процессов в номинальной системе.

Вводя логарифмический показатель отклонения κ и учитывая выражение

$$\sum_{i,j=1}^n M_{ii,jj}^0 = \sum_{i,j=1}^n \overline{\Delta a_{ii} \Delta a_{jj}} = \overline{\left(\sum_{i=1}^n \Delta a_{ii} \right)^2},$$

где чертой обозначено математическое ожидание, записываем окончательное выражение:

$$\kappa = \ln \left(\frac{p_x}{p_H} \right)_H = \frac{1}{18} T_p^2 \sum_{i,j=1}^n \overline{\Delta a_{ii} \Delta a_{jj}} = \frac{T_p^2}{18} \overline{\left(\sum_{i=1}^n \Delta a_{ii} \right)^2}, \quad (3.62)$$

где

$$\left(\frac{p_x}{p_H} \right)_H = \left[\frac{p_x \left(x_1, \dots, x_n, \frac{1}{2} T_p \right)}{p_H \left(x_1, \dots, x_n, \frac{1}{2} T_p \right)} \right]_{x_p x_q = m_{pq}}$$

Для того чтобы логарифмический показатель отклонения κ не превосходил заданного значения κ_3 , разброс параметров должен согласно (3.62) удовлетворять условию

$$\overline{\left(\sum_{i=1}^n \Delta a_{ii} \right)^2} \leq \frac{18 \kappa_3}{T_p^2}. \quad (3.63)$$

Коэффициенты a_{ii} в теории регулирования обычно называются коэффициентами самовыравнивания, а обратные им величины — постоянными времени. Таким образом, условие (3.63) ограничивает допустимый разброс коэффициентов самовыравнивания или постоянных времени рассматриваемой системы. То, что из общего числа n^2 коэффициентов уравнения (3.34) в условие (3.63) входит лишь n диагональных коэффициентов, следует отнести за счет приближенности рассматриваемого частного решения задачи. Если коэффициенты самовыравнивания независимы, то условие (3.63) ограничивает сумму их дисперсий:

$$\sum_{i=1}^n \overline{\Delta a_{ii}^2} \leq \frac{18\kappa_3}{T_p^2}. \quad (3.64)$$

При малых случайных отклонениях

$$\Delta a_{ii} \approx -\frac{\Delta T_i}{T_i^2},$$

где $T_i = 1/\bar{a}_{ii}$ — номинальное значение постоянной времени, ΔT_i — случайное отклонение этой постоянной. В соответствии с этим соотношение для допусков (3.64) может быть представлено в виде

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i^2} \frac{\Delta T_i^2}{T_i^2} \leq \frac{18\kappa_3}{T_p^2}.$$

Отсюда видно, что наиболее жесткие требования в смысле относительных отклонений должны предъявляться к звеньям с минимальными постоянными времени. По-видимому, это положение сохраняет силу не при сколь угодно малых T_i . Однако для выяснения этого необходимо более точное решение задачи (3.49), учитывающее старшие члены рядов.

§ 3.3. Динамика линейных стохастических систем

Под линейными стохастическими системами будем понимать линейные системы со случайно изменяющимися во времени коэффициентами (параметрами) вне зависимости от того, имеются аддитивные шумы или нет.

В случае отсутствия аддитивных шумов линейная стохастическая система описывается уравнениями

$$\dot{x}_i + \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = 0, \quad a_{ik} = \bar{a}_{ik} + \Delta a_{ik}, \quad (3.65)$$

где $\Delta a_{ik} = \Delta a_{ik}(t)$ — центрированные случайные функции времени, некоторые Δa_{ik} могут быть тождественно равными нулю.

В случае присутствия аддитивных шумов

$$\dot{x}_i + \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = \xi_i,$$

где $\xi_i = \xi_i(t)$ — случайные функции времени. Для всех шумов, представимых с помощью линейных формирующих фильтров, шумы $\xi_i(t)$ можно считать белыми (или равными нулю), так как уравнения формирующих фильтров можно присоединить к уравнениям исходного объекта.

Если «параметрические шумы» $\Delta a_{ik}(t)$ также представлены с помощью линейных формирующих фильтров, то полную систему уравнений линейной стохастической системы можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^n \bar{a}_{ik} x_k + \sum_{k=1}^n \Delta a_{ik} x_k &= \xi_i, \\ \Delta \dot{a}_{ik} + \sum_{l,m=1}^n \alpha_{ik,lm} \Delta a_{lm} &= \xi_{ik}, \\ i, k &= 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \right\} \quad (3.66)$$

где $\xi_{ik} = \xi_{ik}(t)$, как и ξ_i , — белые шумы, а $\alpha_{ik,lm}$ для стационарных параметрических шумов — постоянные коэффициенты.

Можно указать много задач, которые приводят к линейным стохастическим уравнениям. В частности, полет любого летательного аппарата в турбулентной атмосфере описывается стохастическими уравнениями, в линейном приближении — линейными. Действительно, турбулентность создает не только аддитивные возмущающие воздействия, но и случайные пульсации коэффициентов членов, выражающих приращения аэродинамических сил и моментов.

Строго говоря, стохастическими уравнениями описывается также движение спутника всякой реальной планеты. Действительно, помимо гравитационного поля, отраженного в правильной «фигуре» планеты, существуют материковые, региональные и местные гравитационные аномалии, которые на движущийся спутник оказывают воздействия случайного характера.

Уравнения малых отклонений, вызванных этими воздействиями, в прямоугольных координатах имеют вид (3.33), но с правыми частями:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{p}_x + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_0 \Delta x^M + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)_0 \Delta y^M + \\ + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \right)_0 \Delta z^M = - \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \right)_0, \\ \Delta \dot{p}_y + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \right)_0 \Delta x^M + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_0 \Delta y^M + \\ + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \right)_0 \Delta z^M = - \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} \right)_0, \\ \Delta \dot{p}_z + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} \right)_0 \Delta x^M + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} \right)_0 \Delta y^M + \\ + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)_0 \Delta z^M = - \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} \right)_0, \\ \Delta \dot{x}^M - \frac{1}{m} \Delta p_x = 0, \quad \Delta \dot{y}^M - \frac{1}{m} \Delta p_y = 0, \\ \Delta \dot{z}^M - \frac{1}{m} \Delta p_z = 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.67)$$

где $\left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \right)_0$, $\left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} \right)_0$, $\left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} \right)_0$ — производные «аномальной» составляющей гравитационного потенциала вдоль траектории невозмущенного движения. Коэффициенты уравнений (3.67) — вторые производные гравитационного потенциала вдоль невозмущенной траектории — вследствие наличия аномалий являются случайными функциями времени, как и правые части уравнений (3.67). Таким образом, налицо стохастическая система, хотя случайные составляющие коэффициентов, по крайней мере для движения искусственных спутников Земли, весьма малы. Для приближенного исследования стохастических динамических систем предложен ряд методов [3.6], [3.9] — [3.12].

Рассмотрим методику исследования линейных стохастических систем путем решения ФПК-уравнения. Обращаясь к уравнениям (3.66), введем, как в предыдущем параграфе, обозначения с двумя индексами:

$$x_{i_0} = x_i, \quad \xi_{i_0} = \xi_i, \quad x_{i_k} = \Delta a_{i_k}.$$

Параметрические шумы x_{i_k} в общем случае считаем зависимыми, но так, что матрица вторых моментов (корреляционная матрица)

$$\|M_{ii', kk'}\| = \|M[x_{ii'} x_{kk'}]\|$$

является неособой. Уравнения (3.66) записываем в виде

$$\dot{x}_{ii'} + \sum_{k, k'} a_{ii', kk'} x_{kk'} + \sum_{k, k', l, l'} a_{ii', kk', ll'} x_{kk'} x_{ll'} = \xi_{ii'}, \quad (3.68)$$

где все индексы без штрихов принимают значения 1, 2, ..., n, индексы со штрихами — значения 0, 1, ..., n. Коэффициенты уравнений (3.68) постоянны и равны

$$\left. \begin{aligned} a_{ii', kk'} = & \left\{ \begin{array}{l} \bar{a}_{ik} \quad \text{при } i' = 0, \quad k' = 0, \\ 0 \quad \text{при } i' = 0, \quad k' \neq 0 \quad \text{или} \\ \quad \quad \quad k' = 0, \quad i' \neq 0, \\ a_{ii', kk'} \quad \text{при } i' \neq 0, \quad k' \neq 0, \end{array} \right\} \\ a_{ii', kk', ll'} = & \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \text{ при } i' = 0, \quad k = i, \\ \quad \quad \quad k' = l, \quad l' = 0 \quad \text{или} \\ \quad \quad \quad i' = 0, \quad l = i, \\ \quad \quad \quad l' = k, \quad k' = 0, \\ 0 \quad \text{при всех других значениях} \\ \quad \quad \quad \text{индексов.} \end{array} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.69)$$

Уравнения (2.11) коэффициентов текущего распределения запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}_{ii'} - \sum_{p, p'} a_{pp', ii'} A_{pp'} - \sum_{p, p', q, q'} S_{pp', qq'} \times \\ \times (A_{pp', qq', ii'} + A_{pp', ii', qq'}) = 2 \sum_{p, p'} a_{pp', pp', ii'}, \end{aligned} \right\} \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned}
& \dot{A}_{ii', kk'} - \sum_{p, p'} (a_{pp', ii'} A_{pp', kk'} + a_{pp', kk'} A_{pp', ii'}) - \\
& - 2 \sum_{p, p'} a_{pp', ii', kk'} A_{pp'} - \sum_{p, p', q, q'} S_{pp', qq'} \times \\
& \quad \times (3A_{pp', qq', kk', ii'} + 2A_{pp', ii', kk'} A_{qq'} + \\
& \quad \quad \quad + A_{pp', ii'} A_{qq', kk'}) = 0, \\
& \dot{A}_{ii', kk', ll'} - \sum_{p, p'} (a_{pp', ii'} A_{pp', kk', ll'} + \\
& \quad + a_{pp', kk'} A_{pp', ii', ll'} + a_{pp', ll'} A_{pp', ii', kk'}) - \\
& - \sum_{p, p'} (a_{pp', ii', kk'} A_{pp', ll'} + a_{pp', ii', ll'} A_{pp', kk'} + \\
& \quad + a_{pp', kk', ll'} A_{pp', ii'}) - \sum_{p, p', q, q'} S_{pp', qq'} \times \\
& \quad \times (6A_{pp', qq', ii', kk', ll'} + 3A_{qq', ii', kk', ll'} A_{pp'} + \\
& \quad + A_{pp', ii', kk'} A_{qq', ll'} + A_{pp', ii', ll'} A_{qq', kk'} + \\
& \quad \quad \quad + A_{qq', kk', ll'} A_{pp', ii'}) = 0, \\
& \dots \dots \dots \\
& \dot{A}_{\underbrace{ii', kk', \dots, ss'}_{2N}} - \sum_{p, p'} (a_{pp', ii'} \underbrace{A_{pp', kk', \dots, ss'}}_{2N} + \dots \\
& \quad \dots + a_{pp', ss'} \underbrace{A_{pp', ii', \dots, rr'}}_{2N}) - \\
& - \frac{2!}{N-1} \sum_{p, p'} (a_{pp', ii', kk'} \underbrace{A_{pp', ll', \dots, ss'}}_{2N-2} + \dots \\
& \quad \dots + a_{pp', rr', ss'} \underbrace{A_{pp', ii', \dots, ll'}}_{2N-2}) - \\
& - \frac{1}{2} \sum_{p, p', q, q'} S_{pp', qq'} [N(N+1) \underbrace{A_{pp', qq', ii', \dots, ss'}}_{2N+4} + \\
& + 2N \underbrace{A_{pp'} A_{qq', ii', \dots, ss'}}_{2N+2} + (A_{pp', ii'} \underbrace{A_{qq', kk', \dots, ss'}}_{2N} + \dots \\
& \quad \dots + A_{pp', ss'} \underbrace{A_{qq', ii', \dots, rr'}}_{2N}) + \\
& \quad + \frac{2!}{N-1} (A_{pp', ii', kk'} \underbrace{A_{qq', ll', \dots, ss'}}_{2N-2} + \dots
\end{aligned} \tag{3.70}$$

то уравнения старших коэффициентов (3.72) примут форму

$$\begin{aligned} & \dot{A}_{\overbrace{ii', kk', \dots, ss'}^{2N}} - \\ & - \sum_{p, p'} (a_{pp', ii'} \underbrace{A_{pp', kk', \dots, ss'}}_{2N} + \dots + a_{pp', ss'} \underbrace{A_{pp', kk', \dots, ii'}}_{2N}) - \\ & - \frac{2!}{N-1} \sum_{p, p'} (a_{pp', ii', kk'} \underbrace{A_{pp', ll', \dots, ss'}}_{2N-2} + \dots + a_{pp', rr', ss'} \times \\ & \times \underbrace{A_{pp', ii', \dots, ff'}}_{2N-2}) = 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения ничем не отличаются от уравнений коэффициентов для случая свободного движения ($S_{pp', qq'} = 0$) рассматриваемой системы. По условию система без шумов устойчива и в свободном движении $A_{ii', kk', ss'}$ стремятся к бесконечности при $t \rightarrow \infty$ (см., например, выражения (2.23)).

Спускаясь от уравнений старших коэффициентов к уравнениям коэффициентов с $2N - 2, 2N - 4, \dots$ индексами, убеждаемся, что, вообще говоря, все эти коэффициенты стремятся к бесконечности при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, для устойчивой без шумов системы решение (3.71) неустойчиво по Ляпунову.

Для того чтобы найти другое, хотя бы приближенное, решение, необходимо проинтегрировать уравнения (3.70) при обычном предположении (3.73). Однако предварительно целесообразно осуществить следующий анализ и преобразования.

Как и в предыдущей задаче постоянных параметрических воздействий (см. § 3.2), все коэффициенты целесообразно разбить на три группы: коэффициенты со штриховыми индексами, равными нулю, коэффициенты со штриховыми индексами, не равными нулю, и коэффициенты, часть штриховых индексов которых равна нулю, а другая часть этих индексов отлична от нуля.

Рассмотрим сначала уравнения коэффициентов второй группы, т. е. уравнения коэффициентов членов, содержащих только параметрические координаты $x_{ii'}, i' > 0$. Для них в соответствии с (3.69) $a_{pp', ii', kk'} = 0$ и уравнения (3.70) ничем не отличаются от уравнений коэффициентов для случая линейной стационарной системы, находящейся

под воздействием аддитивных белых шумов. Так и должно быть, так как нижняя группа уравнений (3.66), по существу, автономна. Очевидно, что при нормальном центральном начальном распределении текущее распределение для параметрических координат является нормальным центральным, а установившееся распределение для этих координат всегда нормально. Поэтому уравнения (3.70) для коэффициентов данной группы сводятся к уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{A}_{ii', kk'} - \sum_{p, p'} (a_{pp', ii'} A_{pp', kk'} + a_{pp', kk'} A_{pp', ii'}) - \\ - \sum_{p, p', q, q'} S_{pp', qq'} A_{pp', ii'} A_{qq', kk'} = 0, \\ i, i', k, k' = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \dot{A}_{ii', kk'} - \sum_{p, p'=1}^n (a_{pp', ii'} A_{pp', kk'} + a_{pp', kk'} A_{pp', ii'}) - \\ - \sum_{p, p', q, q'=1}^n S_{pp'qq'} A_{pp', ii'} A_{qq', kk'} = \\ = \sum_{p, q=1}^n S_{p0, q0} A_{p0, ii'} A_{q0, kk'} + 2 \sum_{p, q, q'=1}^n S_{p0, qq'} A_{p0, ii'} A_{qq', kk'}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Если $A_{p0, ii'} = 0$, что, как увидим ниже, имеет место, то система уравнений (3.74) замкнута, при переходе к обратной матрице $\|A_{ii', kk'}\|^{-1}$ (корреляционной матрице) становится линейной и решается обычным способом (см. формулу (2.32)).

Таким образом, коэффициенты $A_{ii', kk'}$ ($i, i', k, k' = 1, 2, \dots, n$) будем считать определенными.

Перейдем к рассмотрению уравнений коэффициентов первой группы, соответствующих членам с основными координатами x_{i0} . Для этой группы уравнений

$$a_{pp', ii', kk'} = a_{pp', i0, k0} = 0,$$

и опять уравнения (3.70) ничем не отличаются от аналогичных уравнений для линейной системы, находящейся под воздействием аддитивных шумов. Решение естественно искать в виде коэффициентов нормального

центрального распределения. Уравнения (3.70) при этом сводятся к уравнениям вида

$$\begin{aligned} \dot{A}_{i_0, k_0} - \sum_{p=1}^n (a_{p_0, i_0} A_{p_0, k_0} + a_{p_0, k_0} A_{p_0, i_0}) - \\ - \sum_{p, p', q, q'} S_{pp', qq'} A_{pp', i_0} A_{qq', k_0} = 0, \quad (3.75) \\ i, k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

При уже использовавшемся предположении, что $A_{pp', i_0} = 0$ при $p' > 0$, система уравнений (3.75) замкнута и обычным простым способом позволяет определить корреляционную матрицу

$$\| M_{i_0, k_0} \| = - \| A_{i_0, k_0} \|^{-1}$$

или матрицу коэффициентов $\| A_{i_0, k_0} \|$. Основную трудность составляет определение коэффициентов третьей группы, соответствующих произведениям как основных координат x_{i_0} , так и параметров x_{i_k} , $k > 0$. Уравнения (3.70), соответствующие этим коэффициентам:

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}_{i_0, kk'} - \sum_{p=1}^n a_{p_0, i_0} A_{p_0, kk'} - \sum_{p, p'=1}^n a_{pp', kk'} A_{pp', i_0} - \\ - \sum_{p, p', q, q'} S_{pp' qq'} (3A_{pp', qq', i_0, kk'} + A_{pp', i_0} A_{qq', kk'}) = 0, \\ \dot{A}_{i_0, kk', l'} - \sum_{p=1}^n a_{p_0, i_0} A_{p_0, kk', l'} - \sum_{p, p'=1}^n a_{pp', kk'} \times \\ \times A_{pp', i_0, l'} - \sum_{p, p'=1}^n a_{pp', l'} A_{pp', i_0, kk'} - \\ - \sum_{p, p'} (a_{pp', i_0, kk'} A_{pp', l'} + a_{pp', i_0, l'} A_{pp', kk'} + \\ + a_{pp', kk', l'} A_{pp', i_0}) - \sum_{p, p', q, q'} S_{pp' qq'} \times \\ \times (6A_{pp', qq', i_0, kk', l'} + 3A_{qq', i_0, kk', l'} A_{pp'} + \\ + A_{pp', i_0, kk'} A_{qq', l'} + A_{pp', i_0, l'} A_{qq', kk'} + \\ + A_{qq', kk', l'} A_{pp', i_0}) = 0, \end{aligned} \right\} (3.76)$$

$$\begin{aligned}
 \dot{A}_{i_0, k_0, l l'} - \sum_{p=1}^n a_{p_0, i_0} A_{p_0, k_0, l l'} - \sum_{p=1}^n a_{p_0, k_0} A_{p_0, i_0, l l'} - \\
 - \sum_{p, p'=1}^n a_{pp', ll'} A_{pp', i_0, k_0} - \sum_{p, p'} (a_{pp', i_0, k_0} A_{pp', ll'} + \\
 + a_{pp', i_0, ll'} A_{pp', k_0} + a_{pp', k_0, ll'} A_{pp', i_0}) - \\
 - \sum_{p, p', q, q'} S_{pp', qq'} (6A_{pp', qq', i_0, k_0, ll'} + \\
 + 3A_{qq', i_0, k_0, ll'} A_{pp'} + A_{pp', i_0, k_0} A_{qq', ll'} + \\
 + A_{pp', i_0, ll'} A_{qq', k_0} + A_{qq', k_0, ll'} A_{pp', i_0}) = 0. \quad (3.76)
 \end{aligned}$$

Если спектральные плотности параметрических шумов равны нулю, а начальное распределение нормально, то текущее и установившееся распределения нормальны и все старшие коэффициенты, начиная с третьего порядка, равны нулю. Считая спектральные плотности параметрических шумов достаточно малыми, будем определять логарифмическую плотность распределения с точностью до кубических членов, т. е. будем полагать

$$A_{ii', kk', ll', mm'} = A_{ii', kk', ll', mm', ff'} = \dots = 0. \quad (3.77)$$

В соответствии с этим первая группа уравнений (3.76) запишется в виде

$$\begin{aligned}
 \dot{A}_{i_0, kk'} - \sum_{p=1}^n a_{p_0, i_0} A_{p_0, kk'} - \sum_{p, p'=1}^n a_{pp', kk'} A_{pp', i_0} - \\
 - \sum_{p, p', q, q'} S_{pp', qq'} A_{pp', i_0} A_{qq', kk'} = 0. \quad (3.78)
 \end{aligned}$$

Если параметрические и аддитивные шумы независимы, т. е. при $q' > 0$

$$S_{p_0, qq'} = 0, \quad (3.79)$$

то эти уравнения можно представить так:

$$\begin{aligned}
 \dot{A}_{i_0, kk'} - \sum_{p=1}^n a_{p_0, i_0} A_{p_0, kk'} - \sum_{p, p'=1}^n a_{pp', kk'} A_{pp', i_0} - \\
 - \sum_{p, p', q, q'=1}^n S_{pp', qq'} A_{pp', i_0} A_{qq', kk'} - \sum_{p, q=1}^n S_{p_0, q_0} A_{p_0, i_0} A_{q_0, kk'} = 0. \quad (3.80)
 \end{aligned}$$

Эти уравнения имеют нулевое решение

$$A_{i_0, k k'} = 0, \quad i, k, k' = 1, 2, \dots, n, \quad (3.81)$$

использованное в предыдущем рассмотрении. Нулевое решение

$$A_{i_0, k k', l l'} = 0, \quad i, k, l, k', l' = 1, 2, \dots, n, \quad (3.82)$$

имеет и вторая группа уравнений (3.76), которую с учетом соотношений (3.77), (3.79), (3.81), (3.69) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \dot{A}_{i_0, k k', l l'} - \sum_{p=1}^n a_{p_0, i_0} A_{p_0, k k', l l'} - \sum_{p, p'=1}^n a_{p p', k k'} A_{p p', i_0, l l'} - \\ - \sum_{p, p'=1}^n a_{p p', l l'} A_{p p', i_0, k k'} - \sum_{p, p', q, q'=1}^n S_{p p', q q'} (A_{p p', i_0, k k'} A_{q q', l l'} + \\ + A_{p p', i_0, l l'} A_{q q', k k'}) - \sum_{p, q=1}^n S_{p_0, q_0} A_{q_0, k k', l l'} A_{p_0, i_0} = 0. \end{aligned}$$

Остается третья группа уравнений (3.76), которая с учетом (3.77), (3.79), (3.81), (3.82) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{A}_{i_0, k_0, l l'} - \sum_{p=1}^n (a_{p_0, i_0} A_{p_0, k_0, l l'} + a_{p_0, k_0} A_{p_0, i_0, l l'}) - \\ - \sum_{p, p'=1}^n a_{p p', l l'} A_{p p', i_0, k_0} - \sum_{p=1}^n (a_{p_0, i_0, l l'} A_{p_0, k_0} + \\ + a_{p_0, k_0, l l'} A_{p_0, i_0}) - \sum_{p, p', q, q'=1}^n S_{p p', q q'} A_{p p', i_0, k_0} A_{q q', l l'} - \\ - \sum_{p, q=1}^n S_{p_0, q_0} \times (A_{p_0, i_0, l l'} A_{q_0, k_0} + A_{q_0, k_0, l l'} A_{p_0, i_0}) = 0, \quad (3.83) \end{aligned}$$

$$i, k, l, l' = 1, 2, \dots, n.$$

Заметим, что уравнения (3.83) являются линейными относительно искомым величин $A_{i_0, k_0, l l'}$. Величины A_{p_0, k_0} , $A_{q q', l l'}$ ($p, k, q, l, q', l' = 1, 2, \dots, n$), весьма просто определяемые описанным выше способом, в уравнениях (3.83) следует считать заданными. Подводя итог

изложенному, заключаем, что логарифмическая плотность вероятности в фазовом пространстве системы (3.68), определенная с точностью до кубических членов при нормальных центральных начальных распределениях основных координат и параметров $x_{ii'}$ ($i' > 0$) и независимости аддитивных шумов от параметрических шумов, равна

$$\ln p = A_0 + \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^n A_{i_0, k_0} x_{i_0} x_{k_0} + \frac{1}{2} \sum_{i, i', k, k'=1}^n A_{ii', kk'} \times x_{ii'} x_{kk'} + \\ + \frac{1}{3} \sum_{i, k, l, l'=1}^n A_{i_0, k_0, ll'} x_{i_0} x_{k_0} x_{ll'}. \quad (3.84)$$

Здесь A_{i_0, k_0} — коэффициенты распределения в стационарной (только с аддитивными шумами) системе, определяемые уравнениями (3.75); $A_{ii', kk'}$ ($i, i', k, k' = 1, 2, \dots, n$) — коэффициенты распределения параметров (см. уравнения (3.74)).

Нас интересует распределение основных координат. Оно получается интегрированием совместного распределения по пространству параметров

$$p_x = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(A_0 + \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^n A_{i_0, k_0} x_{i_0} x_{k_0} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{i, i', k, k'=1}^n A_{ii', kk'} x_{ii'} x_{kk'} + \frac{1}{3} \sum_{i, k, l, l'=1}^n A_{i_0, k_0, ll'} x_{i_0} x_{k_0} x_{ll'} \right) \times \\ \times dx_{11} \dots dx_{nn} = c_1 \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^n A_{i_0, k_0} x_{i_0} x_{k_0} \right) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(\frac{1}{3} \sum_{l, l'=1}^n x_{ll'} \sum_{i, k=1}^n A_{i_0, k_0, ll'} x_{i_0} x_{k_0} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{i, i', k, k'=1}^n A_{ii', kk'} x_{ii'} x_{kk'} \right) dx_{11} \dots dx_{nn}.$$

Обозначим, как и ранее, корреляционную матрицу параметров, обратную матрице коэффициентов распределения параметров $\|A_{ii', kk'}\|$, через $-M$:

$$-M = -\|M_{ii', kk'}\| = \|A_{ii', kk'}\|^{-1}, \quad i, i', k, k' = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(\frac{1}{3} \sum_{l, l'=1}^n y_{ll'} x_{ll'} + \frac{1}{2} \sum_{i, i', k, k'=1}^n A_{ii', kk'} x_{ii'} x_{kk'} \right) \times \\ \times dx_{11} \dots dx_{nn} = |M| \exp \left(\frac{1}{18} \sum_{i, i', k, k'=1}^n M_{ii', kk'} y_{ii'} y_{kk'} \right).$$

Таким образом,

$$p_x = c_2 p_{\text{ст}}(x_1, \dots, x_n, t) \exp \left(\frac{1}{18} \sum_{i, i', k, k'=1}^n M_{ii', kk'} y_{ii'} y_{kk'} \right), \quad (3.85)$$

$$y_{ll'} = \sum_{i, k=1}^n A_{i0, k0, ll'} x_i x_k,$$

где

$$p_{\text{ст}} = \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^n A_{i, k0} x_i x_k \right)$$

— распределение в стационарной (без параметрических шумов) системе. Коэффициенты $A_{i0, k0, ll'}$ определяются уравнениями (3.83), которые с учетом выражений (3.69) можно представить так:

$$\dot{A}_{i0, k0, ll'} - \sum_{p=1}^n (\bar{a}_{pi} A_{p0, k0, ll'} + \bar{a}_{pk} A_{p0, i0, ll'}) - \\ - \sum_{p, p'=1}^n \alpha_{pp', ll'} A_{pp', i0, k0} - \sum_{p, p', q, q'=1}^n S_{pp', qq'} A_{qq', ll'} A_{pp', i0, k0} - \\ - \sum_{p, q=1}^n S_{p, q} (A_{q0, k0} A_{p0, i0, ll'} + A_{p0, i0} A_{q0, k0, ll'}) = \\ = \kappa_{il'} A_{l0, k0} + \kappa_{kl'} A_{l0, i0}, \quad (3.86)$$

где

$$\kappa_{\nu\mu} = \begin{cases} 1 & \text{при } \nu = \mu, \\ 0 & \text{при } \nu \neq \mu. \end{cases}$$

Итак, в рамках рассматриваемой «кубической теории» (аппроксимация совместной логарифмической плотности

вероятности полиномом третьей степени) динамика стохастической системы практически полностью определяется путем решения системы уравнений (3.86). Если все n^2 параметров являются случайными, то порядок системы линейных дифференциальных уравнений (3.86) с учетом симметрии коэффициентов $A_{i_0, k_0, l'}$ равен $n^4/4!$ и при больших n весьма велик. Однако обычно число случайных (флуктуирующих) параметров значительно меньше n^2 и большинство коэффициентов $A_{i_0, k_0, l'}$ тождественно равно нулю. Это сразу упрощает систему уравнений (3.86).

Для установившегося режима уравнения (3.86) обращаются в линейные алгебраические. Устойчивость решения уравнений (3.86) определяет устойчивость равновесного распределения в исходной стохастической системе для случая устойчивости этой системы без шумов.

Действительно, пусть система без параметрических шумов устойчива. Тогда при любых начальных условиях величины A_{i_0, k_0} стремятся при $t \rightarrow \infty$ к определенным конечным значениям. Если при этом решение системы линейных уравнений (3.86) устойчиво, то величины $A_{i_0, k_0, l'}$ также стремятся к определенным конечным значениям. Таким образом, при указанных условиях распределение вероятности p_x (3.85) стремится с течением времени к стационарному (не зависящему от времени) распределению и наличие статистическая устойчивость.

Если же при прочих равных условиях решение уравнений (3.86) неустойчиво, то коэффициенты $A_{i_0, k_0, l'}$ неограниченно нарастают с течением времени. Квадратичная форма

$$\sum_{i, i', k, k'=1}^n M_{ii', kk'} y_{ii'} y_{kk'}$$

квадратичных форм

$$y_{jj'} = \sum_{i, k=1}^n A_{i_0, k_0, jj'} x_i x_j$$

положительно определена, и неограниченное нарастание $A_{i_0, k_0, jj'}$ вызывает неограниченное нарастание плотности вероятности на периферии фазового пространства. Имеет место статистическая неустойчивость стохастической системы.

Следует еще раз отметить, что все это справедливо в рамках «кубической теории».

Рассмотрим простой пример.

П р и м е р. Стохастическая система первого порядка ($n = 1$) описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 + \bar{a}_{11}x_1 + \Delta a_{11}x_1 = \xi_1, \quad \Delta \dot{a}_{11} + \alpha_{11,11}\Delta a_{11} = \xi_{11}$$

или

$$\dot{x}_{10} + \bar{a}_{11}x_{10} + x_{11}x_{10} = \xi_{10}, \quad \dot{x}_{11} + \alpha_{11,11}x_{11} = \xi_{11},$$

где

$$x_{10} = x_1, \quad x_{11} = \Delta a_{11}, \quad \xi_{10} = \xi_1.$$

Система уравнений (3.86) в данном случае сводится к одному уравнению

$$\begin{aligned} \dot{A}_{10,10,11} - 2\bar{a}_{11}A_{10,10,11} - \alpha_{11,11}A_{11,10,10} - S_{11,11}A_{11,11} \times \\ \times A_{11,10,10} - 2S_{10,10}A_{10,10}A_{10,10,11} = 2A_{10,10}. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Коэффициенты $A_{10,10}$, $A_{11,11}$, определяемые согласно изложенному для линейной стационарной системы, в установившемся режиме равны

$$A_{10,10} = -\frac{1}{M_{10,10}} = -\frac{2\bar{a}_{11}}{S_{10,10}}, \quad A_{11,11} = -\frac{1}{M_{11,11}} = -\frac{2\alpha_{11,11}}{S_{11,11}}.$$

Подставляя эти выражения в (3.87), получаем

$$\dot{A}_{10,10,11} + (2\bar{a}_{11} + \alpha_{11,11})A_{10,10,11} = -4\frac{\bar{a}_{11}}{S_{10,10}}$$

или для установившегося режима

$$A_{10,10,11} = -\frac{4\bar{a}_{11}}{2\bar{a}_{11} + \alpha_{11,11}} \frac{1}{S_{10,10}}.$$

Формула (3.85) в данном случае имеет вид

$$p_x = c_2 p_{ст}(x_1) \exp\left(\frac{1}{18} M_{11,11} y_{11}^2\right), \quad y_{11} = A_{10,10,11} x_1^2.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} p_x = c_2 p_{ст}(x_1) \exp\left[\frac{1}{18} \frac{S_{11}}{2\alpha_{11,11}} \frac{16a_{11}^2}{(2\bar{a}_{11} + \alpha_{11,11})^2} \frac{x_1^4}{S_{10,10}^2}\right] = \\ = c_2 p_{ст}(x_1) \exp\left[\frac{4}{9} \frac{S_{11}}{S_{10,10}^2} \frac{a_{11}^2 x_1^4}{(2\bar{a}_{11} + \alpha_{11,11})^2 \alpha_{11,11}}\right]. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Эта формула в рамках кубической теории дает исчерпывающее представление о влиянии флуктуации параметра в установившемся режиме.

Случай линейно зависимых флуктуирующих параметров. В рассмотренной задаче предполагалось, что параметрические шумы хотя и зависимы друг от друга, но их корреляционная матрица неособая. Между тем важным частным случаем является тот, когда все флуктуирующие параметры пропорциональны одной случайной функции $\eta(t)$:

$$\Delta a_{ik} = \pi_{ik} \eta(t),$$

где π_{ik} — постоянные коэффициенты. Сама случайная функция $\eta(t)$ определяется как выходная величина некоторого стационарного линейного фильтра:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} + \bar{a}_{n+1, n+1}\eta + \bar{a}_{n+1, n+2}x_{n+2} + \dots + \bar{a}_{n+1, n+m}x_{n+m} &= \xi_{n+1}, \\ \dot{x}_{n+2} + \bar{a}_{n+2, n+1}\eta + \bar{a}_{n+2, n+2}x_{n+2} + \dots + \bar{a}_{n+2, n+m}x_{n+m} &= \xi_{n+2}, \\ \dots & \\ \dot{x}_{n+m} + \bar{a}_{n+m, n+1}\eta + \bar{a}_{n+m, n+2}x_{n+2} + \dots + \bar{a}_{n+m, n+m}x_{n+m} &= \xi_{n+m}, \end{aligned}$$

где $\xi_{n+1}, \dots, \xi_{n+m}$ — белые шумы. В данном случае нет смысла вводить координаты с двойными индексами. Лучше обозначить $\eta = x_{n+1}$. Тогда уравнения данной стохастической системы запишутся в виде

$$\dot{x}_i + \sum_{k=1}^n \bar{a}_{ik}x_k + \sum_{k=1}^n \pi_{ik}x_kx_{n+1} = \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\dot{x}_{n+i} + \sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{a}_{n+i, k}x_k = \xi_{n+i}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

или

$$\dot{x}_i + \sum_{k=1}^{n+m} a_{ik}x_k + \sum_{k=1}^{n+m} a_{i, k, n+1}x_kx_{n+1} = \xi_i, \quad (3.89)$$

$$i = 1, 2, \dots, n + m,$$

где

$$a_{ik} = \left. \begin{array}{l} \hat{a}_{ik} \quad \text{при} \quad k \leq n, \quad i \leq n \text{ и} \\ \quad \quad \text{при} \quad i > n, \quad k > n, \\ 0 \quad \quad \text{во всех других случаях,} \end{array} \right\} \quad (3.90)$$

$$a_{i, k, n+1} = \left. \begin{array}{l} \pi_{ik} \quad \text{при} \quad i \leq n, \quad k \leq n, \\ 0 \quad \quad \text{при} \quad k > n, \\ 0 \quad \quad \text{при} \quad i > n. \end{array} \right\}$$

Уравнения (2.14) для данного случая имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}_i - \sum_{p=1}^{n+m} a_{pi} A_i - \sum_{p, q=1}^{n+m} S_{pq} (A_{pqi} + A_{pi} A_q) &= 2 \sum_{p=1}^n a_{ppi}, \\ \dot{A}_{ik} - \sum_{p=1}^{n+m} (a_{pi} A_{pk} + a_{pk} A_{pi}) - 2 \sum_{p=1}^{n+m} a_{pik} A_p - \\ &- \sum_{p, q=1}^{n+m} S_{pq} (3A_{pqi} + 2A_{pik} A_q + A_{pi} A_{qk}) = 0, \\ \dot{A}_{ikl} - \sum_{p=1}^{n+m} (a_{pi} A_{pkl} + a_{pk} A_{pil} + a_{pl} A_{pik}) - \\ &- \sum_{p=1}^{n+m} (a_{pik} A_{pl} + a_{pil} A_{pk} + a_{pkl} A_{pi}) - \\ &- \sum_{p, q=1}^{n+m} S_{pq} (6A_{pqi} + 3A_p A_{qikl} + A_{pi} A_{qkl} + \\ &\quad + A_{pk} A_{qil} + A_{pl} A_{qik}) = 0, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.91)$$

При определении логарифмической плотности с точностью до кубических членов следует полагать

$$A_{pqi} = A_{pikl} = \dots = 0.$$

Кроме того, при центральном начальном распределении и $\sum a_{ppi} = 0$ имеет место решение $A_i(t) = 0$.

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}_{ik} - \sum_{p=1}^{n+m} (a_{pi}A_{pk} + a_{pk}A_{pi}) - \sum_{p,q=1}^{n+m} S_{pq}A_{pi}A_{qk} &= 0, \\ \dot{A}_{ikl} - \sum_{p=1}^{n+m} (a_{pi}A_{pkl} + a_{pk}A_{pil} + a_{pl}A_{pik}) - \\ &- \sum_{p=1}^{n+m} (a_{pik}A_{pl} + a_{pil}A_{pk} + a_{pkl}A_{pi}) - \\ &- \sum_{p=1}^{n+m} S_{pq}(A_{pi}A_{qkl} + A_{pk}A_{qil} + A_{pl}A_{qik}) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.92)$$

$i, k, l = 1, 2, \dots, n + m.$

Верхняя группа уравнений ничем не отличается от уравнений коэффициентов квадратичных членов для линейной стационарной системы и легко решается по формулам (2.32), (2.35). При этом, так как в линейном приближении исходные системы уравнений для координат и параметров автономны, то и уравнения для коэффициентов A_{ik} или вторых моментов распадаются на две автономные группы. Если при этом аддитивные шумы $\xi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) не коррелированы с шумами $\xi_i(t)$ ($i = n + 1, \dots, n + m$), то

$$A_{hi} = A_{ik} = 0 \text{ при } i \leq n, k > n. \quad (3.93)$$

После нахождения A_{ik} задача сводится к решению второй группы уравнений (3.92). Непосредственной проверкой с учетом условий независимости аддитивных и параметрических шумов ($S_{pq} = S_{qp} = 0$ при $p \leq n, q > n$) и (3.93), (3.90) убеждаемся, что уравнения (3.92) имеют решение

$$\begin{aligned} A_{ihl}(t) = A_{kil}(t) = A_{lki}(t) = A_{ilk}(t) = A_{kli}(t) = \\ = A_{lih}(t) = 0 \end{aligned} \quad (3.94)$$

при

- 1) $i, k, l = 1, 2, \dots, n$;
- 2) $i, k, l = n + 1, n + 2, \dots, n + m$;
- 3) $i = 1, 2, \dots, n$; $k, l = n + 1, n + 2, \dots, n + m$.

Оставшаяся группа коэффициентов A_{ihl} , у которых два

индекса $\leq n$, а один индекс $> n$, подчиняется уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{A}_{ikl} - \sum_{p=1}^n (\bar{a}_{pi} A_{pkl} + \bar{a}_{pk} A_{pil}) - \sum_{p=n+1}^{n+m} a_{pl} A_{pik} - \\ - \sum_{p,q=1}^n S_{pq} (A_{pi} A_{qkl} + A_{pk} A_{qil}) - \sum_{p,q=n+1}^{n+m} S_{pq} A_{pl} A_{qik} = \\ = \kappa_{l, n+1} \sum_{p=1}^n (\pi_{pi} A_{pk} + \pi_{pk} A_{pi}), \quad (3.95) \end{aligned}$$

$$i, k = 1, 2, \dots, n; \quad l = n + 1, \dots, n + m,$$

где

$$\kappa_{l, n+1} = \begin{cases} 1 & \text{при } l = n + 1, \\ 0 & \text{при } l \neq n + 1. \end{cases}$$

Сопоставляя эти уравнения с уравнениями (3.86), можно убедиться, что они отличаются, в основном, правыми частями. Выражение (3.85) в данном случае, очевидно, принимает вид

$$P_x = c_2 P_{\text{ст}}(x_1, \dots, x_n, t) \exp\left(\frac{1}{18} \sum_{l, j=n+1}^{n+m} M_{lj} y_l y_j\right), \quad (3.96)$$

где

$$y_l = \sum_{i, k=1}^n A_{ikl} x_i x_k, \quad M_{lj} = M[x_l x_j], \quad l, j = n + 1, \dots, n + m,$$

— вторые моменты координат формирующего фильтра.

Рассмотрим практический пример, иллюстрирующий данный вариант стохастических процессов.

Пример. Линеаризованные уравнения короткопериодического углового продольного движения летательного аппарата в турбулентной атмосфере без учета силы тяжести и запаздывания скоса потока могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} mV\dot{\theta} &= \frac{1}{2} \rho (V + U_x)^2 c_y^{\alpha} \left(\alpha_{\text{п}} + \frac{U_y}{V} \right), \\ J_z \ddot{\nu} &= \frac{1}{2} \rho (V + U_x)^2 m_{mz}^{\omega z} \dot{\nu} + \frac{1}{2} \rho (V + U_x)^2 m_{mz}^{\alpha} \left(\alpha_{\text{п}} + \frac{U_y}{V} \right), \\ v &= \theta + \alpha_{\text{п}}, \end{aligned} \right\} \quad (3.97)$$

где V — путевая скорость, U_x — составляющая скорости ветра вдоль касательной к траектории (встречный ветер), U_y — составляющая скорости ветра вдоль нормали к траектории, ρ — плотность воздуха, m — масса летательного аппарата, J_z — момент инерции относительно поперечной оси, θ — угол наклона траектории, v — угол тангажа, α_{Π} — угол между вектором путевой скорости и продольной осью, c_y^α , $m_{mz}^{\omega z}$, m_{mz}^α — аэродинамические коэффициенты.

Предполагаем, что скорость ветра существенно меньше скорости полета V , и сохраняем только первые степени компонент ветра. Уравнения (3.97) преобразуются к виду

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta} + \frac{1}{T_\theta} \theta - \frac{1}{T_\theta} v + \frac{2U_x}{T_\theta V} \theta - \frac{2U_x}{T_\theta V} v &= \frac{U_y}{T_\theta V}, \\ \dot{\omega}_z + a_{mz}^{\omega z} \omega_z + a_{mz}^\alpha v - a_{mz}^\alpha \theta + \frac{2a_{mz}^{\omega z} U_x}{V} \omega_z + \\ &+ \frac{2a_{mz}^\alpha U_x}{V} v - \frac{2a_{mz}^\alpha U_x}{V} \theta = -\frac{a_{mz}^\alpha U_y}{V}, \\ \dot{v} - \omega_z &= 0, \end{aligned} \right\} (3.98)$$

где

$$T_\theta = \frac{2m}{\rho V c_y^\alpha}, \quad a_{mz}^{\omega z} = -\frac{\rho V^2 m_{mz}^{\omega z}}{2J_z}, \quad a_{mz}^\alpha = -\frac{\rho V^2 m_{mz}^\alpha}{2J_z}.$$

Для случая изотропной атмосферной турбулентности U_x , U_y являются некоррелированными случайными функциями времени. Согласно общепринятым представлениям, эти функции могут быть записаны в виде выходных величин линейных формирующих фильтров, на входе которых действуют белые шумы.

В частности, типовыми являются следующие формирующие фильтры:

$$\dot{U}_x + \frac{V}{L} U_x = \xi_x, \quad (3.99)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_y + \frac{V}{L} U_y + \frac{V}{L} U'_y &= \xi_y, \\ \dot{U}'_y + \frac{V}{L} U'_y &= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \xi_y, \end{aligned} \right\} (3.100)$$

где L — так называемый *масштаб атмосферной турбулентности* (линейная величина), ξ_x , ξ_y — некоррелированные белые шумы со спектральными плотностями

$$S_{\xi_x} = 2 \frac{V}{L} \sigma_U^2, \quad S_{\xi_y} = 3 \frac{V}{L} \sigma_U^2, \quad (3.101)$$

σ_U^2 — дисперсия скорости ветра. Введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \vartheta - \theta = x_1, \quad \omega_z = x_2, \quad U_y = x_3, \quad U'_y = x_4, \\ \xi_y &= \xi_3, \quad \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \xi_y = \xi_4, \quad \xi_x = \xi_5, \quad \bar{a}_{11} = \frac{1}{T_0}, \\ \bar{a}_{12} &= -1, \quad \pi_{11} = \frac{2}{T_0 V}, \quad \bar{a}_{13} = \frac{1}{T_0 V}, \quad \bar{a}_{21} = a_{mz}^\alpha, \\ \bar{a}_{22} &= a_{mz}^{\omega z}, \quad \bar{a}_{23} = \frac{a_{mz}^\alpha}{V}, \quad \pi_{21} = \frac{2a_{mz}^\alpha}{V}, \\ \pi_{22} &= \frac{2a_{mz}^{\omega z}}{V}, \quad \bar{a}_{33} = \bar{a}_{34} = \bar{a}_{44} = \bar{a}_{55} = \frac{V}{L}. \end{aligned} \right\} (3.102)$$

Уравнения (3.98) — (3.100) с учетом этих обозначений дают

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 + \bar{a}_{11}x_1 + \bar{a}_{12}x_2 + \bar{a}_{13}x_3 + \pi_{11}x_1x_5 &= 0, \\ \dot{x}_2 + \bar{a}_{21}x_1 + \bar{a}_{22}x_2 + \bar{a}_{23}x_3 + \pi_{21}x_1x_5 + \pi_{22}x_2x_5 &= 0, \\ \dot{x}_3 + \bar{a}_{33}x_3 + \bar{a}_{34}x_4 &= \xi_3, \\ \dot{x}_4 + \bar{a}_{44}x_4 &= \xi_4, \\ \dot{x}_5 + \bar{a}_{55}x_5 &= \xi_5. \end{aligned} \right\} (3.103)$$

В данном случае $n = 4$, $m = 1$, т. е. действует лишь один независимый параметрический шум. Формула (3.96) для данного случая принимает вид

$$\left. \begin{aligned} p_x &= p_{ст}(x_1, \dots, x_4, t) \exp\left(\frac{M_{55}}{18} y_5^2\right), \\ y_5 &= \sum_{i,k=1}^4 A_{ik5} x_i x_k. \end{aligned} \right\} (3.104)$$

Система уравнений (3.95) для данного случая выглядит так:

$$\begin{aligned} \dot{A}_{ik5} - \sum_{p=1}^4 (\bar{a}_{pi} A_{pk5} + \bar{a}_{pk} A_{pi5}) - \bar{a}_{55} A_{ik5} - \\ - \sum_{p,q=1}^4 S_{pq} (A_{pi} A_{qk5} + A_{pk} A_{qi5}) - S_{55} A_{55} A_{ik5} = \\ = \sum_{p=1}^4 (\pi_{pi} A_{pk} + \pi_{pk} A_{pi}). \end{aligned} \quad (3.105)$$

Из выражений (3.102), (3.101) следует:

$$\left. \begin{aligned} S_{33} &= 3 \frac{V}{L} \sigma_U^2, & S_{44} &= (V\bar{3} - 1)^2 \sigma_U^2, \\ S_{34} &= S_{43} = (3 - V\bar{3}) \sigma_U^2, & S_{55} &= 2 \frac{V}{L} \sigma_U^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.106)$$

Все остальные $S_{pq} = 0$. Кроме того,

$$A_{55} = -\frac{1}{M_{55}} = -\frac{2\bar{a}_{55}}{S_{55}} = -\frac{2\bar{a}_{55}}{S_{\xi_x}} = -\frac{\bar{a}_{55}L}{V\sigma_U^2}. \quad (3.107)$$

При учете этих соотношений уравнения (3.105) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{A}_{ik5} + \bar{a}_{55} A_{ik5} - \sum_{p=1}^4 (\bar{a}_{pi} A_{pk5} + \bar{a}_{pk} A_{pi5}) - \\ - S_{33} (A_{3i} A_{3k5} + A_{3k} A_{3i5}) - S_{34} (A_{3i} A_{4k5} + A_{3k} A_{4i5} + \\ + A_{4i} A_{3k5} + A_{4k} A_{3i5}) - S_{44} (A_{4i} A_{4k5} + A_{4k} A_{4i5}) = \\ = \pi_{1i} A_{1k} + \pi_{1k} A_{1i} + \pi_{2i} A_{2k} + \pi_{2k} A_{2i}. \end{aligned} \quad (3.108)$$

Матрица вторых моментов $M = \| M_{ik} \|$ размерности 4×4 , обратная (и противоположная по знаку) матрице коэффициентов

$$M = \| M_{ik} \| = - \| A_{ik} \|^{-1},$$

удовлетворяет уравнению

$$\dot{M} + aM + Ma^T = S, \quad (3.109)$$

где

$$a = \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} & 0 \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{a}_{33} & \bar{a}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{a}_{44} \end{vmatrix}, \quad S = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} & S_{34} \\ 0 & 0 & S_{43} & S_{44} \end{vmatrix}.$$

В раскрытой форме это уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{M}_{11} + 2\bar{a}_{11}M_{11} + 2\bar{a}_{12}M_{12} + 2\bar{a}_{13}M_{13} &= 0, \\ \dot{M}_{12} + (\bar{a}_{11} + \bar{a}_{22})M_{12} + \bar{a}_{12}M_{22} + \bar{a}_{13}M_{23} + \\ &+ \bar{a}_{21}M_{11} + \bar{a}_{23}M_{13} = 0, \\ \dot{M}_{13} + (\bar{a}_{11} + \bar{a}_{33})M_{13} + \bar{a}_{12}M_{23} + \bar{a}_{13}M_{33} + \bar{a}_{34}M_{14} &= 0, \\ \dot{M}_{14} + (\bar{a}_{11} + \bar{a}_{44})M_{14} + \bar{a}_{12}M_{24} + \bar{a}_{13}M_{34} &= 0, \\ \dot{M}_{22} + 2\bar{a}_{21}M_{12} + 2\bar{a}_{22}M_{22} + 2\bar{a}_{23}M_{23} &= 0, \\ \dot{M}_{23} + \bar{a}_{21}M_{13} + (\bar{a}_{22} + \bar{a}_{33})M_{23} + \bar{a}_{23}M_{33} + \bar{a}_{34}M_{24} &= 0, \\ \dot{M}_{24} + \bar{a}_{21}M_{14} + (\bar{a}_{22} + \bar{a}_{44})M_{24} + \bar{a}_{23}M_{34} &= 0, \\ \dot{M}_{33} + 2\bar{a}_{33}M_{33} + 2\bar{a}_{34}M_{34} &= S_{33}, \\ \dot{M}_{34} + (\bar{a}_{33} + \bar{a}_{44})M_{34} + \bar{a}_{34}M_{44} &= S_{34}, \\ \dot{M}_{44} + 2\bar{a}_{44}M_{44} &= S_{44}. \end{aligned}$$

После нахождения M коэффициенты A_{ik} определяются по формуле

$$A_{ik} = -\frac{M^{ki}}{|M|},$$

где M^{ki} — алгебраическое дополнение элемента k -й строки, i -го столбца определителя $|M|$. После подстановки найденных коэффициентов A_{ik} в уравнения (3.108) коэффициенты A_{ikh} определяются путем решения системы $0,5n(n+1) = 10$ линейных относительно A_{ikh} уравнений.

Расчет был проведен при следующих значениях параметров:

$$T_0 = 1,25 \text{ сек}^{-1}, \quad a_{mz}^\alpha = 4,2 \text{ сек}^{-2}, \quad a_{mz}^{\omega z} = 1,5 \text{ сек}^{-1},$$

$$V = 100 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}, \quad L = 200 \text{ м},$$

при которых коэффициенты уравнений равны

$$\bar{a}_{11} = 0,8, \quad \bar{a}_{12} = -1, \quad \pi_{11} = 1,610^{-2} \text{ м}^{-1}, \quad \bar{a}_{13} = 0,810^{-2} \text{ м}^{-1},$$

$$\bar{a}_{21} = 4,2 \text{ сек}^{-2}, \quad \bar{a}_{22} = 1,5 \text{ сек}^{-1}, \quad \bar{a}_{23} = 4,210^{-2} \text{ м}^{-1} \text{ сек}^{-1},$$

$$\pi_{21} = 8,410^{-2} \text{ м}^{-1} \text{ сек}^{-1}, \quad \pi_{22} = 310^{-2} \text{ м}^{-1},$$

$$\bar{a}_{33} = \bar{a}_{34} = \bar{a}_{44} = \bar{a}_{55} = 0,5 \text{ сек}^{-1},$$

$$\frac{S_{23}}{\sigma_U^2} = 1,5 \text{ сек}^{-1}, \quad \frac{S_{34}}{\sigma_U^2} = 1,27 \text{ сек}^{-1}, \quad \frac{S_{44}}{\sigma_U^2} = 0,535 \text{ сек}^{-1},$$

и значениях $S_{55}/\sigma_U^2 = 1,0$, $\sigma_U^2 = 25 \text{ м}^2 \text{ сек}^{-2}$. Функция y_5 при этом в установившемся режиме равна

$$y_5 = -47,6x_1^2 - 52,4x_1x_2 - 0,8x_1x_3 - \\ - 0,034x_1x_4 + 106,7x_2^2 + 1,4x_2x_3 - 0,52x_2x_4 + 0,0024x_3^2 - \\ - 0,004x_3x_4 + 0,0024x_4^2$$

На рис. 3.2 представлены сечения полученного распределения (3.104) без учета условия нормировки. Видно, что учет флуктуаций параметров дает заметную поправку

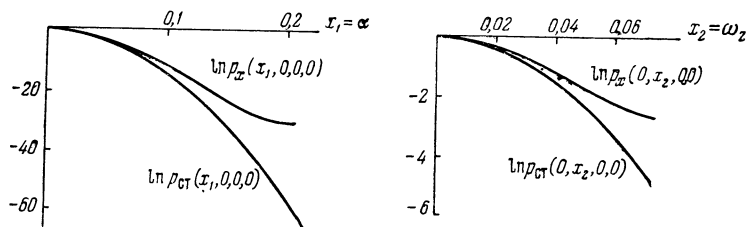


Рис. 3.2.

распределения. Как и в общем случае, полученное распределение является приближенным и теряет достоверность в области больших значений аргументов.

§ 3.4. Статистическое исследование непрерывных адаптивных систем

Широко известно, что непрерывные адаптивные системы, в частности непрерывные системы экстремального регулирования, поисковые и беспойсковые системы параметрической настройки, описываются в общем случае не-

линейными и нестационарными дифференциальными уравнениями [3.13]—[3.16]. Сколько-нибудь общая теория этих систем была создана лишь для квазистационарных режимов, при которых процессы адаптации или движения к экстремуму протекают достаточно медленно. Довольно многочисленные попытки [3.13], [3.17] — [3.19] аналитического исследования форсированных процессов адаптации наталкивались на значительные трудности и были успешными лишь в отдельных частных случаях.

Изложенный метод решения ФПК-уравнения, по-видимому, открывает определенные возможности в развитии теории непрерывных адаптивных систем.

Идеальная градиентная система при действии аддитивных белых шумов. Для поиска экстремума (экстремумов) функции часто используется метод градиента. Рассмотрим систему, подчиняющуюся уравнениям [3.23] — [3.26]

$$\dot{x}_i = -k_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.110)$$

где $F = F(x_1, \dots, x_n)$ — экстремальная (многоэкстремальная) функция, ξ_i — некоррелированные белые шумы, спектральные плотности которых S_i пропорциональны коэффициентам k_i :

$$S_i = \frac{k_i}{\alpha}, \quad \alpha = \text{const}, \quad k_i = \text{const}.$$

Коэффициенты $k_i > 0$ при поиске экстремумов-минимумов и $k_i < 0$ при поиске экстремумов-максимумов. Для установившегося режима в данном случае может быть указано точное частное решение ФПК-уравнения. Действительно, ФПК-уравнение в данном случае принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln p}{\partial t} - \sum_{i=1}^n k_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial \ln p}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n S_i \left[\frac{\partial^2 \ln p}{\partial x_i^2} + \left(\frac{\partial \ln p}{\partial x_i} \right)^2 \right] = \\ = \sum_{i=1}^n k_i \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}. \end{aligned}$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что оно имеет решение

$$\ln p = -2\alpha F + c, \quad (3.111)$$

где $c = \text{const}$ определяется условием нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p dx_1 \dots dx_n = \\ = \exp(c) \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-2\alpha F(x_1, \dots, x_n)] dx_1 \dots dx_n = 1.$$

Решение (3.111) является исключительно простым. Рис. 3.3 иллюстрирует это решение для одномерного случая.

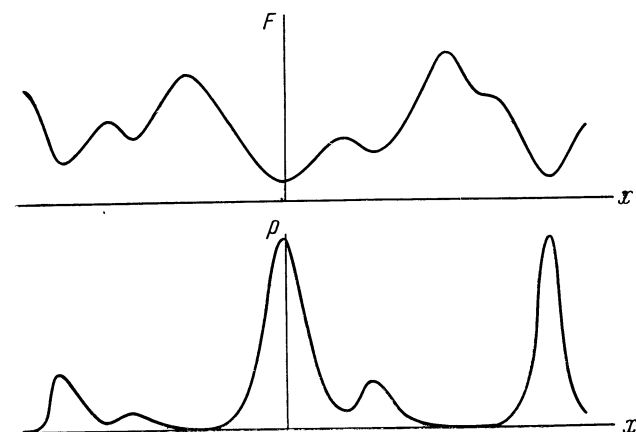


Рис. 3.3.

Верхний график изображает функцию $F(x)$, нижний — установившуюся плотность вероятности. Многоэкстремальной функции F соответствует многоэкстремальное (многомодальное) равновесное распределение, причем экстремумы функции F «подчеркнуты» в распределении вероятности *). Однако возникает вопрос об устойчивости частного решения (3.111) и о том, каким начальным распределением это решение соответствует. Для ответа на эти вопросы воспользуемся методом рядов.

*) При $\alpha \rightarrow \infty$ ($S_i \rightarrow \theta$) распределение концентрируется в точке наиболее «глубокого» экстремума, что соответствует теореме Бернштейна [3.23].

$$\begin{aligned}
& - \frac{3!}{(N-1)(N-2)} \sum_{p=1}^n k_p (\alpha_{pikl} \underbrace{A_{pmq\dots s}}_{N-2} + \dots \\
& \dots + \alpha_{pfrs} \underbrace{A_{pik\dots d}}_{N-2}) - \dots - \frac{2!}{N-1} \sum_{p=1}^n k_p \times \\
& \times (\alpha_{\underbrace{pik\dots f}_{N-1}} A_{prs} + \dots + \alpha_{\underbrace{pjr\dots s}_{N-1}} A_{pik}) - \\
& - \sum_{p=1}^n k_p (\alpha_{\underbrace{pik\dots r}_{N-1}} A_{ps} + \dots + \alpha_{\underbrace{plk\dots r}_{N-1}} A_{pi}) - \\
& - N \sum_{p=1}^n k_p \alpha_{\underbrace{pik\dots s}_{N+1}} A_p - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n S_p \left[N(N-1) \times \right. \\
& \times \underbrace{A_{ppik\dots s}}_{N+2} + 2N A_p \underbrace{A_{pik\dots s}}_{N+1} + (A_{pi} \underbrace{A_{pkl\dots s}}_N + \dots \\
& \dots + A_{ps} \underbrace{A_{qik\dots r}}_N) + \frac{2!}{N-1} (A_{pik} \underbrace{A_{pl\dots s}}_{N-1} + \dots \\
& \dots + A_{prs} \underbrace{A_{pik\dots j}}_{N-1}) + \frac{3!}{(N-1)(N-2)} (A_{pikl} \underbrace{A_{qr\dots s}}_{N-2} + \dots \\
& \dots + A_{pfrs} \underbrace{A_{qi\dots l}}_{N-2}) + \dots + (A_{\underbrace{pik\dots r}_N} A_{ps} + \dots \\
& \dots + A_{\underbrace{pk\dots s}_N} A_{pi}) \left. \right] = N(N+1) \sum_{p=1}^N k_p \alpha_{\underbrace{ppik\dots s}_{N+2}}.
\end{aligned} \tag{3.112}$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что при $S_i = k_i/\alpha$ эти уравнения имеют решение

$$\begin{aligned}
A_0 = 0, \quad A_i = 0, \quad A_{ik} = -2\alpha\alpha_{ik}, \quad A_{ihl} = -2\alpha\alpha_{ihl}, \dots \\
\dots, \quad A_{ikl\dots s} = -2\alpha\alpha_{ikl\dots s}, \dots, \tag{3.113}
\end{aligned}$$

что соответствует решению (3.111). Для исследования устойчивости этого решения по Ляпунову производим линеаризацию уравнений (3.112) в окрестности этого решения, т. е. записываем уравнения первого

приближения:

$$\begin{aligned}
 & \Delta \dot{A}_0 - \frac{1}{2\alpha} \sum_{p=1}^n k_p \Delta A_{pp} = 0, \\
 & \Delta \dot{A}_1 + \sum_{p=1}^n k_p \alpha_{pi} \Delta A_p - \frac{1}{\alpha} \sum_{p=1}^n k_p \Delta A_{ppi} = 0, \\
 & \Delta \dot{A}_{ik} + \sum_{p=1}^n k_p (\alpha_{pi} \Delta A_{pk} + \alpha_{pk} \Delta A_{pi}) + \\
 & \quad + 2 \sum_{p=1}^n k_p \alpha_{pik} \Delta A_p - \frac{3}{\alpha} \sum_{p=1}^n k_p \Delta A_{ppik} = 0, \\
 & \dots \\
 & \Delta \dot{A}_{\underbrace{ikl\dots s}_N} + \sum_{p=1}^n k_p (\alpha_{pi} \Delta A_{\underbrace{pkl\dots s}_N} + \dots + \alpha_{ps} \Delta A_{\underbrace{pik\dots r}_N}) + \\
 & + \frac{2!}{N-1} \sum_{p=1}^n k_p (\alpha_{pik} \Delta A_{\underbrace{plm\dots s}_{N-1}} + \dots + \alpha_{prs} \Delta A_{\underbrace{pik\dots j}_{N-1}}) + \\
 & + \frac{3!}{(N-1)(N-2)} \sum_{p=1}^n k_p (\alpha_{pikl} \Delta A_{\underbrace{pd\dots s}_{N-2}} + \dots \\
 & \quad \dots + \alpha_{pfrs} \Delta A_{\underbrace{pik\dots m}_{N-2}}) + \dots \\
 & \dots + \frac{2!}{N-1} \sum_{p=1}^n k_p (\alpha_{\underbrace{pik\dots j}_{N-1}} \Delta A_{prs} + \dots \\
 & \dots + \alpha_{\underbrace{plm\dots s}_{N-1}} \Delta A_{pik}) + \sum_{p=1}^n k_p (\alpha_{\underbrace{pik\dots r}_N} \Delta A_{ps} + \dots \\
 & \dots + \alpha_{\underbrace{pkl\dots s}_N} \Delta A_{pi}) + N \sum_{p=1}^n k_p \alpha_{\underbrace{pik\dots s}_{N+1}} \Delta A_p - \\
 & \quad - \frac{N(N+1)}{2\alpha} \sum_{p=1}^n k_p \Delta A_{\underbrace{ppik\dots s}_{N+2}} = 0, \\
 & \dots
 \end{aligned} \tag{3.114}$$

Рассмотрим случай малых спектральных плотностей шумов, когда величина α велика. В этом случае члены

располагается экстремум-максимум функции F , то тривиальное решение уравнений (3.115) и распределение вероятностей (3.111), (3.113) устойчивы.

Действительно, пусть функция F имеет в начале координат экстремум-минимум и $k_i > 0$. Квадратичная форма

$$\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \alpha_{ik} x_i x_k$$

при этом положительно определена и все корни λ_i характеристического уравнения первой группы уравнений (3.115)

$$\begin{vmatrix} \lambda + k_1 \alpha_{11} & k_2 \alpha_{21} & \dots & k_n \alpha_{n1} \\ k_1 \alpha_{12} & \lambda + k_2 \alpha_{22} & \dots & k_n \alpha_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1 \alpha_{1n} & k_2 \alpha_{2n} & \dots & \lambda + k_n \alpha_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.116)$$

отрицательны:

$$\lambda_i < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.117)$$

Как следствие, все переменные $\Delta A_i(t)$ первой группы уравнений (3.115) стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Перенесем

члены $2 \sum_{p=1}^n k_p \alpha_{pik} \Delta A_p$ второй группы уравнений (3.115) в правую часть и будем рассматривать как правые части неоднородной системы уравнений. Корни характеристического уравнения, соответствующего второй группе уравнений (3.115), равны попарным суммам величин (3.117):

$$\lambda_{ij} = \lambda_i + \lambda_j, \quad (3.118)$$

и отрицательны. Отсюда и из стремления к нулю величин $\Delta A_i(t)$ следует, что все $\Delta A_{ik}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Аналогично для N -й группы уравнений (3.115), в которой все члены, кроме содержащих переменные с N индексами ($\Delta A_{\underbrace{ik\dots s}_N}$), перенесены в правую часть, корни характеристического уравнения равны

$$\lambda_{\underbrace{ij\dots s}_N} = \lambda_i + \lambda_j + \dots + \lambda_s \quad (3.119)$$

и отрицательны. Поэтому все $\Delta A_{\underbrace{ij\dots s}_N}(t)$ стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$.

лен на рис. 3.4. Уравнения (3.120) принимают вид

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{A}_1 - 2k_1 A_1 - S_1 (A_{111} + A_{11} A_1) &= 0, \\
 \dot{A}_{11} - 4k_1 A_{11} - S_1 (3A_{1111} + 2A_{111} A_1 + A_{11}^2) &= \\
 &= -4,46k_1, \\
 \dot{A}_{111} - 3k_1 (2A_{1111} - 0,744A_1) - 3S_1 (2A_{11111} + \\
 &+ A_1 A_{1111} + A_{11} A_{111}) &= 0, \\
 \dot{A}_{1111} - 4k_1 (2A_{11111} - 0,744A_{11}) - 2S_1 (5A_{111111} + \\
 &+ 2A_1 A_{11111} + 2A_{11} A_{1111} + A_{111}^2) &= 1,2k_1, \\
 \dot{A}_{11111} - 5k_1 (2A_{111111} - 0,744A_{111} + 0,06A_1) - \\
 &- 5S_1 (3A_{1111111} + A_1 A_{111111} + A_{11} A_{11111} + \\
 &+ A_{111} A_{1111}) &= 0, \\
 \dot{A}_{111111} - 6k_1 (2A_{1111111} + 2A_1 A_{111111} + 2A_{11} A_{11111} + \\
 &+ 2A_{111} A_{1111} + A_{1111}^2) &= 0, \\
 \dots \dots \dots &
 \end{aligned} \right\} (3.121)$$

Если начальное распределение симметрично, так что

$$A_1(0) = A_{11}(0) = A_{1111}(0) = \dots = 0,$$

то уравнения (3.121) имеют решение

$$A_1(t) = A_{11}(t) = A_{1111}(t) = \dots = 0$$

и с учетом этого принимают форму

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{A}_{11} - 4k_1 A_{11} - S_1 (3A_{1111} + A_{11}^2) &= -4,46k_1, \\
 \dot{A}_{1111} - 4k_1 (2A_{11111} - 0,744A_{11}) - \\
 &- 2S_1 (5A_{111111} + 2A_{11} A_{1111}) &= 1,2k_1, \\
 \dot{A}_{111111} - 6k_1 (2A_{1111111} - 0,744A_{1111} + 0,06A_{11}) - \\
 &- 3S_1 (7A_{11111111} + 2A_{11} A_{111111} + A_{1111}^2) &= 0, \\
 \dots \dots \dots &
 \end{aligned} \right\} (3.122)$$

Будем искать распределение с точностью до членов шестой степени, т. е. будем полагать $A_{11111111} = \dots = 0$. Система уравнений (3.122) становится при этом замкнутой. Для сокращения числа параметров уравнений введем безразмерное время $\tau = k_1 t$. Тогда уравнения принимают

ВИД

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA_{11}}{d\tau} - 4A_{11} - \frac{1}{\alpha}(A_{11}^2 + 3A_{1111}) &= -4,46, \\ \frac{dA_{1111}}{d\tau} - 8A_{1111} + 2,976A_{11} - \\ &\quad - \frac{2}{\alpha}(5A_{111111} + 2A_{11}A_{1111}) = 1,2, \\ \frac{dA_{111111}}{d\tau} - 12A_{111111} + 4,464A_{1111} - 0,36A_{11} - \\ &\quad - \frac{3}{\alpha}(2A_{11}A_{111111} + A_{1111}^2) = 0, \end{aligned} \right\} (3.123)$$

где $\alpha = k_1/S_1$. Если начальное распределение является равномерным, то

$$A_{11}(0) = A_{1111}(0) = A_{111111}(0) = 0.$$

Для этих начальных условий и $\alpha = 1$ уравнения (3.123)

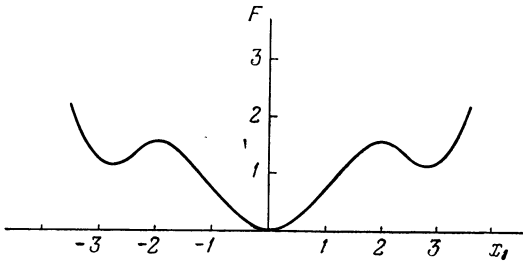


Рис. 3.4.

были численно проинтегрированы. На рис. 3.5 представлена динамика изменения распределения вероятности во времени. Несмотря на большие начальные отклонения, распределение плотности вероятности с течением времени стремится к

$$p = c \exp(-2x_1 + 0,372x_1^4 - 0,02x_1^6),$$

что соответствует решению (3.111), (3.113).

Как уже отмечалось, алгоритм (3.110) можно рассматривать как алгоритм случайно-детерминированного метода поиска экстремума. Из полученного решения (3.111) видно, что если функция имеет много экстремумов, но «главный» (искомый) экстремум сильно отличается от

других по величине, то подбором α можно, по крайней мере для начальных распределений, близких к (3.111), добиться высокой вероятности нахождения главного экстремума и малой вероятности прихода к неглавному экстремуму. В этом случае данный алгоритм поиска может применяться без дополнительных процедур. Если

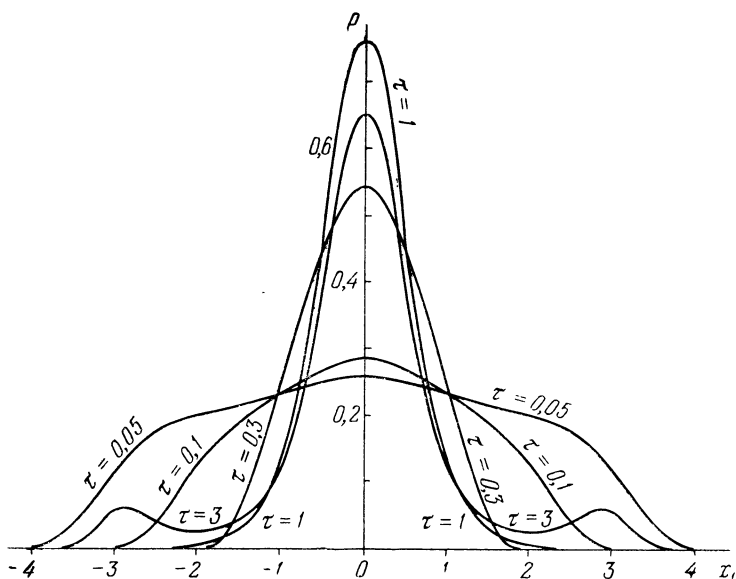


Рис. 3.5.

же экстремумы близки по величине, то согласно полученному решению вероятности прихода в окрестности этих экстремумов будут сопоставимы по величине. В этом случае путем статистической обработки можно выполнить анализ найденного экстремума и в случае его отличия от искомого, осуществить перебор начальной точки поиска в соседний «квадрат» (заранее выбранный район поиска). Подобные операции «глобального» поиска широко известны [3.20], [3.13], [3.21].

Заметим, что, помимо задачи поиска экстремума, уравнениям (3.110) и изложенной теории можно дать совершенно другую интерпретацию. Действительно, уравнения

(3.110) при $n = 3$ представляют собой уравнения движения броуновской заряженной частицы в электростатическом поле с потенциалом F . В этом случае x_1, x_2, x_3 — геометрические координаты частицы, $k_1 = k_2 = k_3$ — величина, пропорциональная заряду частицы и обратно пропорциональная коэффициенту вязкого трения (силой инерции в сравнении с силой Стокса пренебрегаем), $S_1 = S_2 = S_3$ — спектральные плотности флуктуационного теплового воздействия среды.

Решение (3.111) означает, что плотность распределения частиц соответствует экспоненциальной функции потенциала. Это может использоваться, например, при рассмотрении электростатических улавливающих фильтров (электроулавливания), электроокрашивания, электросепарации (о данных технологических процессах см., например, [3.22]).

Система экстремального регулирования с синхронным детектированием при случайных сигналах поиска. Известная структура системы экстремального регулирования с синхронным детектированием изображена на рис. 3.6. Если объект безынерционный и описывается квадратичной формой, то уравнения системы запишутся в виде

$$\Delta \dot{x}_i^* = -k_i \sum_{j,k=1}^n \alpha_{jk} (\Delta x_j^* + \delta x_j) (\Delta x_k^* + \delta x_k) \delta x_i - \dot{x}_{i0}, \quad (3.124)$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

где $\Delta x_i^* = x_i^* - x_{i0}^*$ — отклонения от экстремума, x_i^* — выходные величины интегрирующих звеньев, \dot{x}_{i0} — скорости дрейфа экстремума, δx_i — поисковые составляющие, k_i — коэффициенты усиления каналов, α_{jk} — постоянные величины. Будем считать, что поисковые колебания представимы с помощью формирующих фильтров типа апериодических звеньев:

$$T_{iп} \delta \dot{x}_i + \delta x_i = \xi_{iп}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.125)$$

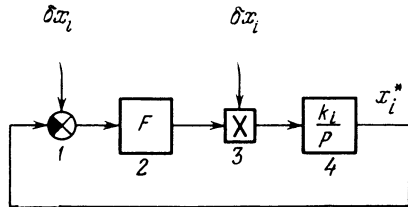


Рис. 3.6.

где $\xi_{i\pi}$ — некоррелированные белые шумы, $T_{i\pi}$ — заданные постоянные величины. Компоненты скорости дрейфа точки экстремума также полагаем случайными и подчиняющимися уравнениям вида

$$T_{i\vartheta} \dot{x}_{i\vartheta} + \dot{x}_{i\vartheta} = \xi_{i\vartheta}, \quad (3.126)$$

где $\xi_{i\vartheta}$ — белые шумы, не коррелированные с $\xi_{i\pi}$, $T_{i\vartheta}$ — постоянные. Используем обозначения:

$$x_i = \Delta x_i + \delta x_i, \quad x_{i+n} = \delta x_i, \quad x_{i+2n} = \dot{x}_{i\vartheta}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.127)$$

Тогда уравнения (3.124), (3.126) можно представить в виде

$$\dot{x}_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{j,k,l=1}^{3n} a_{ijkl} x_j x_k x_l = \xi_i, \quad (3.128)$$

где

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{T_{i\pi}} & \text{при } i \leq n, \quad j = i + n, \\ 1 & \text{при } i \leq n, \quad j = i + 2n, \\ \frac{1}{T_{i\pi}} & \text{при } n < i = j \leq 2n, \\ \frac{1}{T_{i\vartheta}} & \text{при } 2n < i = j \leq 3n \end{cases} \quad (3.129)$$

и все остальные $a_{ij} = 0$,

$$\left. \begin{aligned} a_{ijkl} &= k_i a_{kl} & \text{при } i, k, l \leq n, \quad j = i + n, \\ a_{ikjl} &= a_{iklj} = a_{ijlk} = a_{ilkj} = a_{iljk} = a_{ijkl} \end{aligned} \right\} \quad (3.130)$$

и все остальные $a_{ijkl} = 0$,

$$\xi_i = \begin{cases} \frac{\xi_{i\pi}}{T_{i\pi}} & \text{при } i \leq n, \\ \frac{\xi_{i\pi}}{T_{i\pi}} & \text{при } n < i \leq 2n, \\ \frac{\xi_{i\vartheta}}{T_{i\vartheta}} & \text{при } 2n < i \leq 3n. \end{cases} \quad (3.131)$$

Уравнения (2.14), записанные для $N = 4$, т. е. для пред-

ставления искомой логарифмической плотности полиномом четвертой степени, в данном случае имеют вид

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{A}_i - \sum_{p=1}^{3n} a_{pi} A_p - \sum_{p,q=1}^{3n} S_{pq} (A_{pqi} + A_{pi} A_q) &= 0, \\
 \dot{A}_{ik} - \sum_{p=1}^{3n} (a_{pi} A_{pk} + a_{pk} A_{pi}) - \\
 - \sum_{p,q=1}^{3n} S_{pq} (3A_{pqi} + 2A_{pik} A_q + A_{pi} A_{qk}) &= 6 \sum_{p=1}^n a_{ppik}, \\
 \dot{A}_{ikl} - \sum_{p=1}^{3n} (a_{pi} A_{pkl} + a_{pk} A_{pil} + a_{pl} A_{pik}) - \\
 - 3 \sum_{p=1}^n a_{pikl} A_p - \sum_{p,q=1}^n S_{pq} [3A_p A_{qikl} + \\
 + (A_{pi} A_{qkl} + A_{pk} A_{qil} + A_{pl} A_{qik})] &= 0, \\
 \dot{A}_{ikls} - \sum_{p=1}^{3n} (a_{pi} A_{pkl} + a_{pk} A_{pils} + a_{pl} A_{piks} + a_{ps} A_{pikl}) - \\
 - \sum_{p=1}^{3n} (a_{pikl} A_{ps} + a_{piks} A_{pl} + a_{pils} A_{pk} + a_{pkl} A_{pi}) - \\
 - \sum_{p,q=1}^n S_{pq} [A_{pi} A_{qkls} + A_{pk} A_{qils} + A_{pl} A_{qiks} + \\
 + A_{ps} A_{qikl} + \frac{1}{3} (A_{pik} A_{qls} + A_{plk} A_{qis} + A_{psk} A_{qil} + \\
 + A_{pil} A_{qks} + A_{pis} A_{qlk} + A_{pls} A_{qik})] &= 0.
 \end{aligned} \right\} (3.132)$$

Если начальное распределение является симметричным, так что

$$A_i(0) = A_i^0 = 0, \quad A_{ikl}(0) = A_{ikl}^0 = 0,$$

эти уравнения имеют решение, при котором

$$A_i(t) = 0, \quad A_{ikl}(t) = 0,$$

а A_{ik} , A_{ikls} определяются уравнениями

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{A}_{ik} - \sum_{p=1}^{3n} (a_{pi}A_{pk} + a_{pk}A_{pi}) - \\
 - \sum_{p,q=1}^{3n} S_{pq} (3A_{pqi}k + A_{pi}A_{qk}) = 6 \sum_{p=1}^{3n} a_{ppik}, \\
 \dot{A}_{ikls} - \sum_{p=1}^{3n} (a_{pi}A_{pkl}s + a_{pk}A_{pils} + a_{pl}A_{piks} + \\
 + a_{ps}A_{pikl}) - \sum_{p=1}^{3n} (a_{pikl}A_{ps} + a_{piks}A_{pl} + a_{pils}A_{pk} + \\
 + a_{pkl}sA_{pi}) - \sum_{p,q=1}^{3n} S_{pq} (A_{pi}A_{qkls} + A_{pk}A_{qils} + \\
 + A_{pl}A_{qiks} + A_{ps}A_{qikl}) = 0.
 \end{aligned} \right\} (3.133)$$

Дальнейшие конкретизация и упрощение уравнений возможны на основе учета выражений (3.129)—(3.131).

Как и в задачах, рассмотренных в двух предшествующих параграфах, коэффициенты A_{ik} , A_{ikls} разделим на три группы. К первой группе относятся коэффициенты, соответствующие только основным фазовым координатам

$$x_i = \Lambda x_i^* + \delta x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Для этой группы коэффициентов согласно (3.129), (3.130), (3.132)

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{A}_{ik} - \sum_{p,q=1}^{3n} S_{pq} (3A_{pqi}k + A_{pi}A_{qk}) = 0, \\
 \dot{A}_{ikls} - \sum_{p,q=1}^{3n} S_{pq} (A_{pi}A_{qkls} + A_{pk}A_{qils} + \\
 + A_{pl}A_{qiks} + A_{ps}A_{qikl}) = 0, \\
 i, k, l, s \leq n.
 \end{aligned} \right\} (3.134)$$

Ко второй группе относятся коэффициенты, имеющие индексы $> n$, т. е. соответствующие поисковым состав-

ляющим δx_i и компонентам скорости дрейфа $\dot{x}_{i\alpha}$. Для этой группы коэффициентов согласно тем же выражениям

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}_{ik} - (a_{ii} + a_{kk}) A_{ik} - \\ - \sum_{p,q=1}^{3n} S_{pq} (3A_{pqi k} + A_{pi} A_{qk}) = 0, \\ \dot{A}_{ikls} - (a_{ii} + a_{kk} + a_{ll} + a_{ss}) A_{ikls} - \\ - \sum_{p,q=1}^{3n} S_{pq} (A_{pi} A_{qkls} + A_{qk} A_{qils} + \\ + A_{pl} A_{qiks} + A_{ps} A_{qikl}) = 0, \\ 3n \geq i, k, l, s > n. \end{aligned} \right\} (3.135)$$

Третью группу коэффициентов составляют величины A_{ik} , A_{ikls} , у которых часть индексов $\leq n$, а другие индексы $> n$. Уравнения для этой группы коэффициентов оставим в прежнем виде (3.133).

Анализ полученных уравнений в общем виде затруднен. Основной способ исследования — численное интегрирование этих уравнений. Самое простое, но наиболее грубое приближение получается при учете лишь квадратных членов, т. е. когда решение ищется в виде нормального распределения. В этом случае

$$\begin{aligned} \dot{A}_{ik} - \sum_{p=1}^n (a_{pi} A_{pk} + a_{pk} A_{pi}) - \sum_{p,q=1}^{3n} S_{pq} A_{pi} A_{qk} = \\ = 6 \sum_{p=1}^{3n} a_{ppik}, \end{aligned} \quad (3.136)$$

$$i, k = 1, 2, \dots, 3n.$$

Эти уравнения в матричной форме имеют вид

$$\dot{A} - Aa - a^T A - ASA = \rho, \quad (3.137)$$

где

$$A = \| A_{ik} \|, \quad a = \| a_{ik} \|, \quad S = \| S_{ik} \|, \quad \rho = \| 6 \sum_{p=1}^n a_{ppik} \|$$

— матрицы размерности $3n \times 3n$. Если перейти к обратной матрице — матрице вторых моментов

$$M = -A^{-1},$$

то вместо (3.137) получаем

$$\dot{M} + aM + Ma^T - M\rho M = S, \tag{3.138}$$

т. е. матричное уравнение Риккати для ковариационной матрицы. Система в рассматриваемом приближении сохраняет работоспособность, если решение, соответствующее установившемуся состоянию

$$aM_y + M_y a^T - M_y \rho M_y = S, \tag{3.139}$$

устойчиво. Линеаризуя уравнение (3.138) в окрестности установившегося состояния, получаем

$$\Delta \dot{M} + (a - M_y \rho) \Delta M + \Delta M (a^T - \rho M_y) = 0. \tag{3.140}$$

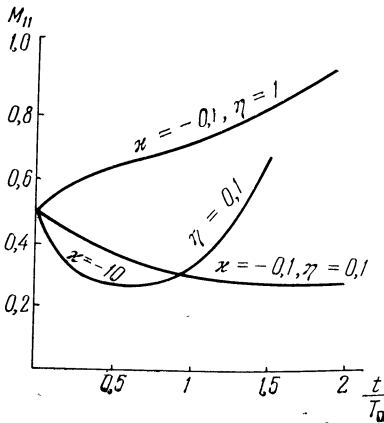


Рис. 3.7.

Для того чтобы решение $\Delta M = 0$ этого линейного уравнения было устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы характеристические числа матрицы $a - M_y \rho$ имели отрицательные действительные части.

Для одномерной системы при отсутствии дрейфа экстремума, как видно из выражений (3.129)—(3.131),

$$a = \left\| \left\| \begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{T_{\Pi}} \\ 0 \\ \frac{1}{T_{\Pi}} \end{array} \right\| \right\|, \quad \rho = \left\| \left\| \begin{array}{cc} 0 & k_1 \alpha_{11} \\ k_1 \alpha_{11} & 0 \end{array} \right\| \right\|, \quad S = \left\| \left\| \begin{array}{cc} \frac{S_{\xi}}{T_{\Pi}^2} & \frac{S_{\xi}}{T_{\Pi}^2} \\ \frac{S_{\xi}}{T_{\Pi}^2} & \frac{S_{\xi}}{T_{\Pi}^2} \end{array} \right\| \right\|.$$

Уравнение (3.138) в скалярной форме в данном случае

имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{M}_{11} + \frac{2}{T_{\Pi}} M_{12} - 2k_1\alpha_{11}M_{12}M_{11} &= \frac{S_{\xi}}{T_{\Pi}^2}, \\ \dot{M}_{12} + \frac{1}{T_{\Pi}} M_{22} + \frac{1}{T_{\Pi}} M_{12} - \\ &\quad - k_1\alpha_{11}(M_{12}^2 + M_{11}M_{22}) = \frac{S_{\xi}}{T_{\Pi}^2}, \\ \dot{M}_{22} + \frac{2}{T_{\Pi}} M_{22} - 2k_1\alpha_{11}M_{12}M_{22} &= \frac{S_{\xi}}{T_{\Pi}^2}. \end{aligned} \right\} (3.141)$$

Для установившегося состояния

$$\begin{aligned} \frac{2}{T_{\Pi}} M_{y12} - 2k_1\alpha_{11}M_{y12}M_{y11} &= \frac{S_{\xi}}{T_{\Pi}^2}, \\ \frac{1}{T_{\Pi}} M_{y22} + \frac{1}{T_{\Pi}} M_{y12} - k_1\alpha_{11}(M_{y12}^2 + M_{y11}M_{y22}) &= \frac{S_{\xi}}{T_{\Pi}^2}, \\ \frac{2}{T_{\Pi}} M_{y22} - 2k_1\alpha_{11}M_{y12}M_{y22} &= \frac{S_{\xi}}{T_{\Pi}^2}. \end{aligned}$$

На рис. 3.7 представлены кривые изменения дисперсии $M_{11} = (\Delta x_1^* + \delta x_1)^2$ во времени при различных значениях постоянных $\varkappa = k_1\alpha_{11}T_{\Pi}$, $\eta = S_{\xi}/T_{\Pi}$, полученные путем численного интегрирования уравнений (3.141). Видно, что увеличение спектральной плотности случайного поискового сигнала, так же как и увеличение коэффициента усиления («форсирование» процесса), неизбежно приводит к потере устойчивости.

РАВНОВЕСНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В СИСТЕМАХ С КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ. ФПК-УРАВНЕНИЕ И СИНТЕЗ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В данной главе рассматриваются относительно разнородные вопросы статистической теории динамических систем. Сначала выводятся условия существования кусочно-нормального равновесного распределения в системах с кусочно-линейными характеристиками при наличии шумов.

Затем рассматриваются постановки задач синтеза систем управления и оценивания и пути решения этих задач. Часть затрагиваемых вопросов носит проблемный характер и не имеет исчерпывающего решения.

§ 4.1. Равновесные распределения в системах с кусочно-линейными характеристиками

Предположим, что n -мерное фазовое пространство динамической системы может быть разбито на конечное число областей G_ν , в каждой из которых характеристики системы линейны:

$$f_i^{(\nu)}(x_1, \dots, x_n, t) = a_i^{(\nu)} + \sum_{k=1}^n a_{ik}^{(\nu)} x_k, \quad (4.1)$$

где $a_i^{(\nu)}$, $a_{ik}^{(\nu)}$ — заданные постоянные или функции времени. Области G_ν в совокупности занимают все фазовое пространство и разделены заданными непрерывными гиперповерхностями

$$F_\mu(x_1, \dots, x_n) = c_\mu = \text{const}. \quad (4.2)$$

В дальнейшем в качестве таких граничных гиперповерхностей чаще всего будут рассматриваться гиперплоскости

$$\sum_{i=1}^n a_i^\mu x_i = c_\mu. \quad (4.3)$$

Поверхности (4.2), (4.3) будут именоваться *поверхностями переключений*.

Будем полагать, что шумы, действующие на систему, одинаковы для всех областей фазового пространства. Тогда уравнения движения в ν -й области будут иметь вид

$$\dot{x}_i + a_i^{(\nu)} + \sum_{k=1}^n a_{ik}^{(\nu)} x_k = \xi_i, \quad (4.4)$$

где ξ_i — белые шумы. Системы данного вида обычно называются *системами с кусочно-линейными характеристиками*. Подклассом этих систем являются релейные системы вида

$$\dot{x}_i + a_i^{(\nu)} + \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = \xi_i, \quad (4.5)$$

в которых при переходе из одной области в другую меняется скачком «постоянная составляющая» $a_i^{(\nu)}$.

Другим подклассом кусочно-линейных систем являются системы с переменной структурой, исследованные С. В. Емельяновым и его учениками [4.1]—[4.5]. Для этого подкласса $a_i^{(\nu)} = 0$, а граничными поверхностями служат гиперплоскости, проходящие через начало координат. Часто используемая аппроксимация характеристик элементов систем управления в виде ломаных также приводит к уравнениям вида (4.4). Достаточно очевидно, что использование концепции фазового газа для систем с кусочно-линейными характеристиками правомерно.

Ввиду локального характера ФПК-уравнения оно справедливо внутри каждой из областей G_ν :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln p^{(\nu)}}{\partial t} - \sum_{i=1}^n f_i^{(\nu)} \frac{\partial \ln p^{(\nu)}}{\partial x_i} - \\ - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n S_{ij} \left(\frac{\partial^2 \ln p^{(\nu)}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial \ln p^{(\nu)}}{\partial x_i} \frac{\partial \ln p^{(\nu)}}{\partial x_j} \right) = \\ = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i^{(\nu)}}{\partial x_i} = \frac{\partial \ln p^{(\nu)}}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \left(a_i^{(\nu)} + \sum_{k=1}^n a_{ik}^{(\nu)} x_k \right) \frac{\partial \ln p^{(\nu)}}{\partial x_i} - \\ - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n S_{ij} \left(\frac{\partial^2 \ln p^{(\nu)}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial \ln p^{(\nu)}}{\partial x_i} \frac{\partial \ln p^{(\nu)}}{\partial x_j} \right) = \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(\nu)}, \quad (4.6) \end{aligned}$$

где $p^{(v)}$ — текущая плотность вероятности в области G_v . Однако для решения задачи определения текущей плотности вероятности этого недостаточно. Необходимы предположения о поведении фазового газа на поверхностях переключения. Другими словами, система уравнений (4.6) должна быть доопределена условиями на поверхностях переключения. Здесь возможны различные предположения. Можно допустить существования концентрации фазового газа на поверхностях переключения и возникновение бесконечной плотности на этих поверхностях по отношению к остальной части n -мерного пространства. Можно предполагать течение фазового газа вдоль поверхностей переключения и определенные законы этого течения. Это естественно сделать для динамических систем без шумов с так называемыми скользящими режимами. Соответствующая теория еще ждет разработки и здесь не затрагивается.

Единственной задачей из данной области, которую мы рассмотрим, будет задача о существовании равновесного распределения в системе с кусочно-линейными характеристиками при отсутствии скользящего режима, т. е. отсутствии течения фазового газа по поверхностям переключения.

Для равновесного распределения $\partial p / \partial t = 0$ и уравнение (4.6) принимает вид

$$\sum_{i=1}^n \left(a_i^{(v)} + \sum_{k=1}^n a_{ik}^{(v)} x_k \right) \frac{\partial \ln p^{(v)}}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^n S_{ik} \left(\frac{\partial^2 \ln p^{(v)}}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial \ln p^{(v)}}{\partial x_i} \frac{\partial \ln p^{(v)}}{\partial x_k} \right) = - \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(v)}. \quad (4.7)$$

Пусть

$$F_v(x_1, \dots, x_n) = \text{const}$$

— поверхность переключения, разделяющая v -ю и $(v+1)$ -ю области фазового пространства. Для равновесного распределения при отсутствии течения фазового газа по поверхности переключения плотность потока (математическое ожидание мгновенной плотности потока фазового газа) по нормали к поверхности, притекающего из области G_v , должна быть равна плотности потока, уходящего

в область G_{v+1} , в каждой точке поверхности переключения. Компоненты плотности потока в v -й области равны

$$\begin{aligned} p^{(v)} f_i^{(v)} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n S_{ik} \frac{\partial p^{(v)}}{\partial x_k} &= \\ &= p^{(v)} \left(a_i^{(v)} + \sum_{k=1}^n a_{ik}^{(v)} x_k \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n S_{ik} \frac{\partial p^{(v)}}{\partial x_k} = \\ &= p^{(v)} \left(a_i^{(v)} + \sum_{k=1}^n a_{ik}^{(v)} x_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n S_{ik} \frac{\partial \ln p^{(v)}}{\partial x_k} \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Нормальная к поверхности составляющая потока получается как скалярное произведение вектора с компонентами (4.8) на вектор нормали к поверхности, компоненты которого $\partial F_v / \partial x_i$. В соответствии с этим указанное условие равенства нормальных составляющих потоков запишется в виде

$$\begin{aligned} p^{(v)} \sum_{i=1}^n \left(a_i^{(v)} + \sum_{k=1}^n a_{ik}^{(v)} x_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n S_{ik} \frac{\partial \ln p^{(v)}}{\partial x_k} \right) \frac{\partial F_v}{\partial x_i} &= \\ = p^{(v+1)} \sum_{i=1}^n \left(a_i^{(v+1)} + \sum_{k=1}^n a_{ik}^{(v+1)} x_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n S_{ik} \frac{\partial \ln p^{(v+1)}}{\partial x_k} \right) \frac{\partial F_v}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (4.9)$$

в любой точке поверхности $F_v = \text{const}$. Распределения, удовлетворяющие уравнениям (4.7), (4.9) и условию нормировки

$$\sum_v \int_{G_v} \dots \int p^{(v)} dx_1 \dots dx_n = 1,$$

являются равновесными.

Рассмотрим случай, когда имеются лишь две области (полупространства), разделенные одной гиперплоскостью

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0. \quad (4.10)$$

В этом случае в уравнениях (4.7) $v = 1, 2$, а условие

(4.9) принимает вид

$$\begin{aligned}
 p^{(1)} \sum_{i=1}^n \left(a_i^{(1)} + \sum_{k=1}^n a_{ik}^{(1)} x_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n S_{ik} \frac{\partial \ln p^{(1)}}{\partial x_k} \right) \alpha_i = \\
 = p^{(2)} \sum_{i=1}^n \left(a_i^{(2)} + \sum_{k=1}^n a_{ik}^{(2)} x_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n S_{ik} \frac{\partial \ln p^{(2)}}{\partial x_k} \right) \alpha_i \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

на гиперплоскости (4.10). Уравнения (4.7) имеют точное частное решение в виде нормального распределения

$$\ln p^{(v)} = A_0^{(v)} + \sum_{i=1}^n A_i^{(v)} x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n A_{ik}^{(v)} x_i x_k, \quad (4.12)$$

где коэффициенты $A_i^{(v)}$, $A_{ik}^{(v)}$ удовлетворяют соотношениям

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_{p=1}^n a_p^{(v)} A_p^{(v)} + \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^n S_{pq} (A_{pq}^{(v)} + A_p^{(v)} A_q^{(v)}) &= - \sum_{p=1}^n a_{pp}^{(v)}, \\
 \sum_{p=1}^n (a_p^{(v)} A_{pi}^{(v)} + a_{pi}^{(v)} A_p^{(v)}) + \sum_{p,q=1}^n S_{pq} A_{pi}^{(v)} A_q^{(v)} &= 0, \\
 \sum_{p=1}^n (a_{pi}^{(v)} A_{pk}^{(v)} + a_{pk}^{(v)} A_{pi}^{(v)}) + \sum_{p,q=1}^n S_{pq} A_{pi}^{(v)} A_{qk}^{(v)} &= 0 \\
 i, k = 1, 2, \dots, n,
 \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

а коэффициенты $A_0^{(v)}$ остаются свободными и могут выбираться из условия нормировки. При $a_p^{(v)} = 0$ соотношения (4.13), естественно, совпадают с первыми тремя группами общих уравнений коэффициентов (2.11), записанных для линейной системы ($a_{ikh} = a_{ikhlm} = \dots = 0$) установившегося режима ($A_0 = A_i = A_{ih} = 0$) и нормального распределения ($A_{ikh} = A_{ikhlm} = \dots = 0$).

Пусть $\alpha_n \neq 0$. Без ограничения общности можно принять $\alpha_n = 1$ и вместо (4.10) записать

$$x_n = - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i. \quad (4.14)$$

Подставим выражение (4.12) в условие (4.11) и заменим

x_n согласно (4.14). После преобразований находим

$$\begin{aligned} \exp \left\{ \left[A_0^{(1)} + \sum_{i=1}^{n-1} (A_i^{(1)} - \alpha_i A_n^{(1)}) x_i + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n-1} (A_{ik}^{(1)} - 2\alpha_k A_{in}^{(1)} + \alpha_i \alpha_k A_{nn}^{(1)}) x_i x_k \right] - \right. \\ \left. - \left[A_0^{(2)} + \sum_{i=1}^{n-1} (A_i^{(2)} - \alpha_i A_n^{(2)}) x_i + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n-1} (A_{ik}^{(2)} - 2\alpha_k A_{in}^{(2)} + \alpha_i \alpha_k A_{nn}^{(2)}) x_i x_k \right] \right\} = \\ = \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i \left(a_i^{(2)} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n S_{ik} A_k^{(2)} \right) + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \left[a_{ik}^{(2)} - \alpha_k a_{in}^{(2)} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n S_{ip} (A_{pk}^{(2)} - \alpha_k A_{pn}^{(2)}) \right] \right\} x_k \right] \times \\ \times \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i \left(a_i^{(1)} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n S_{ik} A_k^{(1)} \right) + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \left[a_{ik}^{(1)} - \alpha_k a_{in}^{(1)} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n S_{ip} (A_{pk}^{(1)} - \alpha_k A_{pn}^{(1)}) \right] \right\} x_k \right]^{-1}. \quad (4.15) \end{aligned}$$

В одной части равенства здесь экспонента от квадратичной формы, в другой части — дробно-линейная функция. Это равенство может выполняться тождественно, только если обе части постоянны и при $A_0^{(1)} = A_0^{(2)}$ равны единице, т. е.

$$\left. \begin{aligned} A_0^{(1)} + \sum_{i=1}^{n-1} (A_i^{(1)} - \alpha_i A_n^{(1)}) x_i + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n-1} (A_{ik}^{(1)} - 2\alpha_k A_{in}^{(1)} + \alpha_i \alpha_k A_{nn}^{(1)}) x_i x_k = \\ = A_0^{(2)} + \sum_{i=1}^{n-1} (A_i^{(2)} - \alpha_i A_n^{(2)}) x_i + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n-1} (A_{ik}^{(2)} - 2\alpha_k A_{in}^{(2)} + \alpha_i \alpha_k A_{nn}^{(2)}) x_i x_k, \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(a_i^{(1)} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n S_{ik} A_k^{(1)} \right) + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \left[a_{ik}^{(1)} - \alpha_k a_{in}^{(1)} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n S_{ip} (A_{pk}^{(1)} - \alpha_k A_{pn}^{(1)}) \right] \right\} x_k = \\
 & = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(a_i^{(2)} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n S_{ik} A_k^{(2)} \right) + \\
 & \quad + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \left[a_{ik}^{(2)} - \alpha_k a_{in}^{(2)} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n S_{ip} (A_{pk}^{(2)} - \alpha_k A_{pn}^{(2)}) \right] \right\} x_k.
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Координаты x_1, \dots, x_{n-1} на гиперплоскости являются не зависимыми, и из соотношений (4.16) следует:

$$\begin{aligned}
 & A_0^{(1)} = A_0^{(2)}, \\
 & A_i^{(1)} - \alpha_i A_n^{(1)} = A_i^{(2)} - \alpha_i A_n^{(2)}, \\
 & A_{ik}^{(1)} - \alpha_k A_{in}^{(1)} - \alpha_i A_{kn}^{(1)} + \alpha_i \alpha_k A_{nn}^{(1)} = \\
 & \quad = A_{ik}^{(2)} - \alpha_k A_{in}^{(2)} - \alpha_i A_{kn}^{(2)} + \alpha_i \alpha_k A_{nn}^{(2)},
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{p=1}^n \alpha_p \left(a_p^{(1)} + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^n S_{pq} A_q^{(1)} \right) = \\
 & \quad = \sum_{p=1}^n \alpha_p \left(a_p^{(2)} + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^n S_{pq} A_q^{(2)} \right), \\
 & \sum_{q=1}^n \alpha_q \left[a_{qk}^{(1)} - \alpha_k a_{qn}^{(1)} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n S_{qp} (A_{pk}^{(1)} - \alpha_k A_{pn}^{(1)}) \right] = \\
 & = \sum_{q=1}^n \alpha_q \left[a_{qk}^{(2)} - \alpha_k a_{qn}^{(2)} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n S_{qp} (A_{pk}^{(2)} - \alpha_k A_{pn}^{(2)}) \right], \\
 & \quad i, k = 1, 2, \dots, n-1.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Соотношения (4.18) в совокупности с соотношениями (4.13), где $\nu = 1, 2$, являются условиями существования кусочно-нормального равновесного распределения в рассма-

триваемой системе с кусочно-линейными характеристиками.

Прежде всего необходимо проанализировать совместимость этих условий. Спектральные плотности шумов будем считать заданными, а коэффициенты уравнений $a_i^{(1)}$, $a_i^{(2)}$, $a_{ik}^{(1)}$, $a_{ik}^{(2)}$, коэффициенты гиперплоскости переключений $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ и коэффициенты распределений $A_i^{(1)}$, $A_i^{(2)}$, $A_{ik}^{(1)}$, $A_{ik}^{(2)}$ — подчиненными только условиям существования (4.13), (4.18). Общее число этих параметров без учета симметрии $A_{ik}^{(v)} = A_{ki}^{(v)}$ равно

$$2n + 2n^2 + n - 1 + 2n + 2n^2 = 4n^2 + 5n - 1.$$

Между тем общее число уравнений (4.13) ($v = 1, 2$) и (4.18) равно

$$\begin{aligned} 2 + 2n + 2n^2 + (n - 1) + (n - 1)^2 + (n - 1) = \\ = 3n^2 + 2n + 1. \end{aligned}$$

Таким образом, при любом порядке исходной системы число параметров больше числа уравнений (4.13), (4.18) и есть надежда удовлетворить условиям существования равновесного кусочно-нормального распределения. Более того, логично предположить, что за счет оставшейся свободы выбора параметров можно придать равновесному кусочно-нормальному распределению желаемые характеристики.

Для получения условий существования в явной форме, т. е. в форме соотношений между коэффициентами уравнений и коэффициентами гиперплоскости переключений, целесообразно поступать следующим образом. Находится решение нижней группы уравнений (4.13). Для этого решается сначала система линейных уравнений вторых моментов

$$\sum_{p=1}^n (a_{ip}^{(v)} M_{pk}^{(v)} + a_{kp}^{(v)} M_{pi}^{(v)}) = S_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n, \quad (4.19)$$

и далее коэффициенты A_{ik} определяются как элементы обратной матрицы моментов, взятой со знаком минус:

$$A_{ik}^{(v)} = - \frac{M_{ki}^{(v)}}{|M_{ik}^{(v)}|}, \quad (4.20)$$

где $M_{(v)}^{ki}$ — алгебраическое дополнение элемента k -й строки, i -го столбца определителя $|M_{ik}^{(v)}|$. После определения коэффициентов $A_{ik}^{(v)}$ они подставляются во вторую (среднюю) группу уравнений (4.13), линейных относительно $A_p^{(v)}$:

$$\sum_{p=1}^n \left(a_{pi}^{(v)} + \sum_{q=1}^n S_{pq} A_{qi}^{(v)} \right) A_p^{(v)} = - \sum_{p=1}^n a_p^{(v)} A_{pi}^{(v)}, \quad (4.21)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Решая эти уравнения, определяем $A_i^{(v)}$. Верхнее уравнение (4.13) после подстановки найденных $A_{ik}^{(v)}$, $A_i^{(v)}$ должно обращаться в тождество. Подставляя полученные выражения для $A_i^{(v)}$, $A_{ik}^{(v)}$ в уравнения (4.18), получаем условия существования в явной форме.

Целесообразно рассмотреть условия существования кусочно-нормального равновесного распределения отдельно для релейных систем и систем с переменной структурой.

Под релейными системами здесь понимаются системы, описываемые уравнениями (4.5). У этих систем коэффициенты $a_{ik}^{(v)} = a_{ik}$ одинаковы в полупространствах, а величины $a_i^{(v)}$ различны для рассматриваемых полупространств.

Из третьей группы уравнений (4.13) или соотношений (4.19), (4.20) видно, что в данном случае коэффициенты $A_{ik}^{(v)} = A_{ik}$ одинаковы для обоих полупространств и вторая и четвертая группы условий существования (4.18) удовлетворяется тождественно. Таким образом, для релейных систем условия существования кусочно-нормального равновесного распределения принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \sum_{p=1}^n (a_{ip} M_{pk} + a_{kp} M_{pi}) &= S_{ik}, \\ A_{ik} &= - \frac{M^{ki}}{|M_{ik}|}, \\ \sum_{p=1}^n \left(a_{pi} + \sum_{q=1}^n S_{pq} A_{qi} \right) A_p^{(1)} &= - \sum_{p=1}^n a_p^{(1)} A_{pi}, \\ \sum_{p=1}^n \left(a_{pi} + \sum_{q=1}^n S_{pq} A_{qi} \right) A_p^{(2)} &= - \sum_{p=1}^n a_p^{(2)} A_{pi}, \\ i, k &= 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

$$\left. \begin{aligned}
 A_i^{(1)} - \alpha_i A_n^{(1)} &= A_i^{(2)} - \alpha_i A_n^{(2)}, \\
 \sum_{p=1}^n \alpha_p \left(a_p^{(1)} + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^n S_{pq} A_q^{(1)} \right) &= \\
 &= \sum_{p=1}^n \alpha_p \left(a_p^{(2)} + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^n S_{pq} A_q^{(2)} \right), \\
 i &= 1, 2, \dots, n-1.
 \end{aligned} \right\} (4.22)$$

Иную форму условия существования имеют для систем с переменной структурой (СПС) вида (4.4), у которых $a_i^{(v)} = 0$. Из выражений (4.21) видно, что для таких систем, вообще говоря, $A_p^{(v)} = 0$, т. е. равновесное кусочно-нормальное распределение для СПС является центральным. Первая и третья группы условий (4.18) при этом удовлетворяются тождественно и условия существования кусочно-нормального равновесного распределения для СПС с одной гиперплоскостью переключения имеют вид

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_{p=1}^n (a_{ip}^{(1)} M_{pk}^{(1)} + a_{kp}^{(1)} M_{pi}^{(1)}) &= S_{ik}, \\
 \sum_{p=1}^n (a_{ip}^{(2)} M_{pk}^{(2)} + a_{kp}^{(2)} M_{pi}^{(2)}) &= S_{ik}, \\
 A_{ik}^{(1)} = -\frac{M_{(1)}^{ki}}{|M_{ik}^{(1)}|}, \quad A_{ik}^{(2)} = -\frac{M_{(2)}^{ki}}{|M_{ik}^{(2)}|}, \\
 i, k &= 1, 2, \dots, n, \\
 A_{ik}^{(1)} - \alpha_k A_{in}^{(1)} - \alpha_i A_{kn}^{(1)} + \alpha_i \alpha_k A_{nn}^{(1)} &= \\
 &= A_{ik}^{(2)} - \alpha_k A_{in}^{(2)} - \alpha_i A_{kn}^{(2)} + \alpha_i \alpha_k A_{nn}^{(2)}, \\
 \sum_{q=1}^n \alpha_q \left[a_{qk}^{(1)} - \alpha_k a_{qn}^{(1)} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n S_{pq} (A_{pk}^{(1)} - \alpha_k A_{pn}^{(1)}) \right] &= \\
 = \sum_{q=1}^n \alpha_q \left[a_{qk}^{(2)} - \alpha_k a_{qn}^{(2)} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n S_{pq} (A_{pk}^{(2)} - \alpha_k A_{pn}^{(2)}) \right], \\
 i, k &= 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned} \right\} (4.23)$$

В качестве конкретных примеров рассмотрим релейную систему и СПС второго порядка.

1. Релейная система второго порядка описывается уравнениями

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = -a_1^{(1)} + \xi_1, \\ \dot{x}_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = -a_2^{(1)} \\ \text{при } \alpha_1 x_1 + x_2 > 0, \\ \dot{x}_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = -a_1^{(2)} + \xi_1, \\ \dot{x}_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = -a_2^{(2)} \\ \text{при } \alpha_1 x_1 + x_2 < 0. \end{array} \right\} \quad (4.24)$$

(В целях упрощения выкладок выражение для шума введено здесь лишь в верхние уравнения.) Запишем условия существования (4.22) для данного случая. Уравнения моментов имеют вид

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}M_{11} + a_{12}M_{12} = \frac{1}{2} S_{11}, \\ a_{21}M_{11} + (a_{11} + a_{22})M_{12} + a_{12}M_{22} = 0, \\ a_{21}M_{12} + a_{22}M_{22} = 0. \end{array} \right\} \quad (4.25)$$

Решая эти уравнения и определяя A_{ik} по формуле (4.20), находим

$$\left. \begin{array}{l} A_{11} = -2 \frac{a_{11} + a_{22}}{S_{11}}, \quad A_{12} = -2 \frac{(a_{11} + a_{22}) a_{22}}{S_{11} a_{21}}, \\ A_{22} = -2 \frac{(a_{11} a_{22} + a_{22}^2 - a_{12} a_{21}) (a_{11} + a_{22})}{S_{11} a_{21}^2}. \end{array} \right\} \quad (4.26)$$

Уравнения для $A_p^{(1)}$, $A_p^{(2)}$ (см. (4.22)) в данном случае имеют вид

$$\left. \begin{array}{l} (a_{11} + S_{11} A_{11}) A_1^{(1)} + a_{21} A_2^{(1)} = -a_1^{(1)} A_{11} - a_2^{(1)} A_{12}, \\ (a_{12} + S_{11} A_{12}) A_1^{(1)} + a_{22} A_2^{(1)} = -a_1^{(1)} A_{12} - a_2^{(1)} A_{22}, \\ (a_{11} + S_{11} A_{11}) A_1^{(2)} + a_{21} A_2^{(2)} = -a_1^{(2)} A_{11} - a_2^{(2)} A_{12}, \\ (a_{12} + S_{11} A_{12}) A_1^{(2)} + a_{22} A_2^{(2)} = -a_1^{(2)} A_{12} - a_2^{(2)} A_{22}. \end{array} \right\} \quad (4.27)$$

Подставляя сюда выражения (4.26) и решая (4.27) в предположении $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \neq 0$, что соответствует преобра-

зованному условию линейной независимости уравнений, находим

$$\left. \begin{aligned} A_1^{(1)} &= -2a_2^{(1)} \frac{a_{11} + a_{22}}{S_{11}a_{21}}, & A_2^{(1)} &= 2 \frac{a_{11} + a_{22}}{S_{11}a_{21}} \left(a_1^{(1)} - a_2^{(1)} \frac{a_{11} + a_{22}}{a_{21}} \right), \\ A_1^{(2)} &= -2a_2^{(2)} \frac{a_{11} + a_{22}}{S_{11}a_{21}}, & A_2^{(2)} &= 2 \frac{a_{11} + a_{22}}{S_{11}a_{21}} \left(a_1^{(2)} - a_2^{(2)} \frac{a_{11} + a_{22}}{a_{21}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

Последние две группы условий (4.22) в данном случае имеют вид

$$\left. \begin{aligned} A_1^{(1)} - \alpha_1 A_2^{(1)} &= A_1^{(2)} - \alpha_1 A_2^{(2)}, \\ \alpha_1 \left(a_1^{(1)} + \frac{1}{2} S_{11} A_1^{(1)} \right) + a_2^{(1)} &= \\ &= \alpha_1 \left(a_1^{(2)} + \frac{1}{2} S_{11} A_1^{(2)} \right) + a_2^{(2)}. \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

Подставляя сюда выражения (4.28) и полагая $a_{11} + a_{22} \neq 0$, получаем, что оба равенства (4.29) сводятся к одному:

$$a_2^{(1)} + \alpha_1 \left(a_1^{(1)} - a_2^{(1)} \frac{a_{11} + a_{22}}{a_{21}} \right) = a_2^{(2)} + \alpha_1 \left(a_1^{(2)} - a_2^{(2)} \frac{a_{11} + a_{22}}{a_{21}} \right) \quad (4.30)$$

или

$$a_2^{(1)} - a_2^{(2)} + \alpha_1 \left[a_1^{(1)} - a_1^{(2)} - (a_2^{(1)} - a_2^{(2)}) \frac{a_{11} + a_{22}}{a_{21}} \right] = 0. \quad (4.31)$$

Выражение (4.31) можно считать окончательной формой условия существования кусочно-нормального равновесного распределения вероятности для рассматриваемой релейной системы. Если величины $a_1^{(1)}$, $a_1^{(2)}$, $a_2^{(1)}$, $a_2^{(2)}$, a_{11} , a_{22} , a_{21} заданы, то условие (4.31) определяет коэффициент наклона α_1 линии переключения, при котором существует равновесное кусочно-нормальное распределение.

Если $a_2^{(1)} = a_2^{(2)} = 0$, $a_1^{(1)} - a_1^{(2)} \neq 0$, то из (4.31) следует, что $\alpha_1 = 0$. Таким образом, если «релейное управление» имеется лишь в одном уравнении, а именно в том, где присутствует шум, то равновесное кусочно-нормальное распределение существует лишь при линии переключений, совпадающей с координатной осью $x_2 = 0$. Это имеет место, в частности, для простейшей релейной

следящей системы, описываемой уравнениями

$$\dot{x}_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = \pm a_1 + \xi_1, \quad \dot{x}_2 - x_1 = 0, \quad (4.32)$$

где знак минус — при $x_2 > 0$ и знак плюс — при $x_2 < 0$. Роль шума ξ_1 здесь может играть случайный момент на валу двигателя следящей системы.

Если $a_1^{(1)} = a_1^{(2)} = 0$, $a_2^{(1)} - a_2^{(2)} \neq 0$, т. е. релейное управление присутствует в уравнении, в котором нет шума, то согласно (4.31) условие существования кусочно-нормального распределения имеет вид

$$\alpha_1 = \frac{a_{21}}{a_{11} + a_{22}}.$$

2. Система с переменной структурой второго порядка с одной линией переключения описывается уравнениями

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1 + a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 = \xi_1, \\ \dot{x}_2 + a_{21}^{(1)}x_1 + a_{22}^{(1)}x_2 = 0 \\ \text{при } \alpha x_1 + x_2 > 0, \\ \dot{x}_1 + a_{11}^{(2)}x_1 + a_{12}^{(2)}x_2 = \xi_2, \\ \dot{x}_2 + a_{21}^{(2)}x_1 + a_{22}^{(2)}x_2 = 0 \\ \text{при } \alpha x_1 + x_2 < 0. \end{array} \right\} \quad (4.33)$$

Так же как в предыдущем случае, определяем коэффициенты с двумя индексами:

$$\left. \begin{array}{l} A_{11}^{(v)} = -2 \frac{a_{11}^{(v)} + a_{22}^{(v)}}{S_{11}}, \quad A_{12}^{(v)} = -2 \frac{(a_{11}^{(v)} + a_{22}^{(v)}) a_{22}^{(v)}}{S_{11} a_{21}^{(v)}}, \\ A_{22}^{(v)} = -2 \frac{[a_{11}^{(v)} a_{22}^{(v)} + (a_{22}^{(v)})^2 - a_{12}^{(v)} a_{21}^{(v)}] (a_{11}^{(v)} + a_{22}^{(v)})}{S_{11} (a_{22}^{(v)})^2}, \\ v = 1, 2. \end{array} \right\} \quad (4.34)$$

Последние две группы условий существования (4.23) для данного случая имеют вид

$$\left. \begin{array}{l} A_{11}^{(1)} - 2\alpha_1 A_{12}^{(1)} + A_{22}^{(1)} = A_{11}^{(2)} - 2\alpha_1 A_{12}^{(2)} + A_{22}^{(2)}, \\ \alpha_1 \left[a_{11}^{(1)} - \alpha_1 a_{12}^{(1)} + \frac{1}{2} S_{11} (A_{11}^{(1)} - \alpha_1 A_{12}^{(1)}) \right] + \\ + (a_{21}^{(1)} - \alpha_1 a_{22}^{(1)}) = \alpha_1 \left[a_{11}^{(2)} - \alpha_1 a_{12}^{(2)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} S_{11} (A_{11}^{(2)} - \alpha_1 A_{12}^{(2)}) \right] + (a_{21}^{(2)} - \alpha_1 a_{22}^{(2)}). \end{array} \right\} \quad (4.35)$$

Подставляя сюда выражения (4.34), после преобразований получаем

$$\left. \begin{aligned} 2\alpha_1 [a_{21}^{(1)} a_{22}^{(1)} (a_{11}^{(1)} + a_{22}^{(1)}) (a_{21}^{(2)})^2 - a_{21}^{(2)} a_{22}^{(2)} (a_{11}^{(2)} + a_{22}^{(2)}) (a_{21}^{(1)})^2] = \\ = (a_{21}^{(1)})^2 (a_{11}^{(2)} + a_{22}^{(2)}) [a_{12}^{(2)} a_{21}^{(2)} - a_{11}^{(2)} a_{22}^{(2)} - (a_{22}^{(2)})^2 - (a_{21}^{(2)})^2] - \\ - (a_{21}^{(2)})^2 (a_{11}^{(1)} + a_{22}^{(1)}) [a_{12}^{(1)} a_{21}^{(1)} - a_{11}^{(1)} a_{22}^{(1)} - (a_{22}^{(1)})^2 - (a_{21}^{(1)})^2], \\ \alpha_1^2 \left[\frac{(a_{11}^{(1)} + a_{22}^{(1)}) a_{22}^{(1)} - a_{12}^{(1)} a_{21}^{(1)}}{a_{21}^{(1)}} - \frac{(a_{11}^{(2)} + a_{22}^{(2)}) a_{22}^{(2)} - a_{12}^{(2)} a_{21}^{(2)}}{a_{21}^{(2)}} \right] = \\ = a_{21}^{(2)} - a_{21}^{(1)}. \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

В отличие от рассмотренной релейной системы, условия (4.36) существования кусочно-нормального равновесного распределения в СПС включают два соотношения. Условиям существования (4.36) можно удовлетворить, подбирая коэффициент наклона α_1 прямой переключений и обеспечивая дополнительно одно соотношение между коэффициентами уравнений в обоих полупространствах.

Если $a_{21}^{(2)} = a_{21}^{(1)}$, а выражение в квадратных скобках второго из условий (4.36) отлично от нуля, то условия существования упрощаются: $\alpha_1 = 0$,

$$\begin{aligned} (a_{11}^{(2)} + a_{22}^{(2)}) [a_{12}^{(2)} a_{21}^{(2)} - a_{11}^{(2)} a_{22}^{(2)} - (a_{22}^{(2)})^2 - (a_{21}^{(2)})^2] = \\ = (a_{11}^{(1)} + a_{22}^{(1)}) [a_{12}^{(1)} a_{21}^{(1)} - a_{11}^{(1)} a_{22}^{(1)} - (a_{22}^{(1)})^2 - (a_{21}^{(1)})^2]. \end{aligned} \quad (4.37)$$

В данном случае линия переключений совпадает с осью x_1 . При других предположениях о коэффициентах уравнений в обоих полупространствах из (4.36) можно получить большое число частных форм условий существования равновесного кусочно-нормального распределения в рассматриваемой системе.]

§ 4.2. ФПК-уравнение и синтез систем управления и фильтрации

В теории аналитического конструирования систем управления доказаны следующие положения [4.6] — [4.8]. Для объекта, описываемого уравнениями

$$\dot{x}_i + f_i(x_1, \dots, x_n, t) = u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.38)$$

где u_i — синтезируемые управления, могущие быть функциями всех фазовых координат x_1, \dots, x_n (полная степень наблюдаемости), оптимальными в смысле минимума функционала

$$I = V_3 [x_1(t_2), \dots, x_n(t_2)] + \int_{t_1}^{t_2} Q(x_1, \dots, x_n, t) dt + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{u_i}{k_i} \right)^2 dt, \quad (4.39)$$

где V_3 — заданная функция значений фазовых координат в момент времени $t = t_2 > t_1$, Q — заданная функция фазовых координат и времени, k_i — заданные коэффициенты, являются управления

$$u_i = -k_i^2 \frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad (4.40)$$

где $V(x_1, \dots, x_n, t)$ — решение уравнения в частных производных

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(k_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2 = -Q \quad (4.41)$$

при граничном условии

$$V(x_1, \dots, x_n, t_2) = V_3(x_1, \dots, x_n). \quad (4.42)$$

Далее, для того же объекта (4.38) оптимальными в смысле минимума функционала

$$I = V_3 [x_1(t_2), \dots, x_n(t_2)] + \int_{t_1}^{t_2} Q(x_1, \dots, x_n, t) dt + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{u_i}{k_i} \right)^2 dt + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left(k_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2 dt \quad (4.43)$$

являются управления (4.40), где V , однако, определяется линейным уравнением в частных производных

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial V}{\partial x_i} = -Q \quad (4.44)$$

при том же граничном условии (4.42).

Синтез систем управления. Сопоставим уравнение (4.44) с ФПК-уравнением (1.22) для свободного движения ($u_i = 0$) того же объекта:

$$\frac{\partial \ln p}{\partial t} - \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial \ln p}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}. \quad (4.45)$$

Пусть для момента $t = t_2$ задана логарифмическая плотность распределения:

$$\ln p(x_1, \dots, x_n, t_2) = \ln p_3(x_1, \dots, x_n) = -V_3(x_1, \dots, x_n) \quad (4.46)$$

в виде отрицательно определенной функции, могущей служить оценкой (нормой) приближения к невозмущенному состоянию и удовлетворяющей условию нормировки. Пусть определено решение ФПК-уравнения (4.45) при условии (4.46). Тогда, как видно из (4.42)–(4.46), справедливо следующее положение.

Если для неуправляемого объекта ($u_i = 0$) без шумов известно текущее распределение плотности вероятности в фазовом пространстве $p(x_1, \dots, x_n, t)$, обращающееся в

$$p_3(x_1, \dots, x_n) = \exp[-V_3(x_1, \dots, x_n)]$$

в момент времени $t = t_2$, то оптимальными в смысле минимума функционала

$$I = V_3[x_1(t_2), \dots, x_n(t_2)] + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dt + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{u_i}{k_i}\right)^2 dt + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left(k_i \frac{\partial \ln p}{\partial x_i}\right)^2 dt \quad (4.47)$$

являются управления

$$u_i = k_i^2 \frac{\partial \ln p}{\partial x_i}. \quad (4.48)$$

Функционал (4.47) является полуопределенным в том смысле, что назначаемыми по желанию конструктора являются составляющие V_3 и

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{u_i}{k_i}\right)^2 dt.$$

Составляющая

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dt$$

определяется характеристиками f_i исходного объекта, а составляющая

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left(k_i \frac{\partial \ln p}{\partial x_i} \right)^2 dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(k_i \frac{\partial \ln p}{\partial x_i} \right)^2 dt$$

раскрывается после решения задачи об определении логарифмической плотности вероятности в фазовом пространстве неуправляемого объекта. Однако сумма

$$\sum_{i=1}^n \left(k_i \frac{\partial \ln p}{\partial x_i} \right)^2$$

заведомо является неотрицательной функцией фазовых координат, а сумма $\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ для объектов с устойчивым невозмущенным состоянием чаще всего также неотрицательна. Об этом свидетельствует, в частности, выражение (1.19) для производной общей энтропии, которое для свободного движения неуправляемого объекта имеет вид

$$\dot{H} = -M \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right].$$

Для обобщенно консервативных систем $\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0$ и минимизируемый функционал принимает форму

$$I = V_3[x_1(t_2), \dots, x_n(t_2)] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{u_i}{k_i} \right)^2 dt + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left(k_i \frac{\partial \ln p}{\partial x_i} \right)^2 dt. \quad (4.49)$$

Для линейных систем величина $\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ постоянна или является заданной функцией времени и наличие соответ-

ствующего члена в минимизируемом функционале никакой роли не играет, так что этот функционал также сводится к (4.49).

В работах [4.7]—[4.9] практическая процедура аналитического конструирования рассматривается как итерационная. При таком подходе сначала на основе технических соображений ориентировочно задается назначаемая часть функционала и определяются оптимальные для данного функционала управления. Далее тем или иным путем, но обычно посредством интегрирования уравнений замкнутой системы на ЭВМ определяются процессы в синтезированной системе. Если эти процессы оказываются в каком-либо отношении неудовлетворительными, производится более или менее целеустремленная трансформация назначаемой части функционала и вновь осуществляется синтез. Процедура повторяется до получения приемлемых результатов. При такой трактовке задачи аналитического конструирования синтез на основе минимизации функционала (4.47) оказывается целесообразным.

Для получения оптимальных управлений в явной форме необходимо решить уравнение (4.45) при граничном условии (4.46). Если неуправляемый объект ($u_i = 0$) относится к классу систем без прямых нелинейных связей и известна полная система первых интегралов для этого объекта, то согласно (1.25) общее решение уравнения (4.45) имеет вид

$$\ln p = \Psi(\psi_1, \dots, \psi_n) - \int \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dt,$$

где произвольная функция определяется из условия

$$\Psi(\psi_1, \dots, \psi_n)_{t=t_2} = -V_3(x_1, \dots, x_n). \quad (4.50)$$

Таким образом, в данном случае оптимальные управления равны

$$u_i = k_i^2 \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} = k_i^2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \psi_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial \psi_n} \frac{\partial \psi_n}{\partial x_i} \right). \quad (4.51)$$

Если для объекта того же класса известно $p < n$ линейно независимых первых интегралов, но условие

$$\Psi(\psi_1, \dots, \psi_p)_{t=t_2} = -V_3(x_1, \dots, x_n) \quad (4.52)$$

может быть удовлетворено подбором функции Ψ , то оптимальные управления имеют вид

$$u_i = k_i^2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \psi_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial \psi_p} \frac{\partial \psi_p}{\partial x_i} \right).$$

Если первые интегралы не зависят от времени, что бывает для обобщенно консервативных систем, то при удовлетворении граничного условия (4.50) или (4.52) равенство $\Psi = -V_3$ имеет место при любом t и управления равны

$$u_i = -k_i^2 \frac{\partial V_3}{\partial x_i}.$$

В этом случае весь синтез управлений сводится к назначению функции Ляпунова V_3 .

Для случая линейного исходного объекта согласно (1.53) решение уравнения (4.45), удовлетворяющее условию (4.50), имеет вид

$\ln p =$

$$= -V_3 \left[\sum_{k=1}^n w_{1k}(t_2, t) x_k, \dots, \sum_{k=1}^n w_{nk}(t_2, t) x_k \right] - \int_t^{t_2} \sum_{k=1}^n a_{kk} dt.$$

Таким образом, оптимальные в указанном смысле управления для линейного объекта равны

$$u_i = -k_i^2 \frac{\partial}{\partial x_i} V_3 \left[\sum_{k=1}^n w_{1k}(t_2, t) x_k, \dots, \sum_{k=1}^n w_{nk}(t_2, t) x_k \right]. \quad (4.53)$$

Если V_3 задана в виде канонической квадратичной формы

$$V_3 = \sum_{p=1}^n \rho_{pp} x_p^2,$$

то

$$u_i = -2k_i^2 \sum_{k=1}^n x_k \sum_{p=1}^n w_{pi}(t_2, t) \rho_{pp} w_{pk}(t_2, t). \quad (4.54)$$

Если рассматривать всю совокупность нелинейных динамических систем, то знание первых интегралов яв-

ляется редким исключением. В общем случае, когда эти интегралы неизвестны, для отыскания решения уравнения (4.45) можно использовать изложенный выше метод рядов. Уравнения для коэффициентов логарифмической плотности вероятности и выражения этих коэффициентов через квадратуры весовых функций линейного приближения представлены выше (см. (2.19), (2.23)).

Особенность рассматриваемой задачи заключается в том, что граничное условие (4.46) записано для конечного момента времени $t = t_2$. Будем полагать, что функция V_3 задана в виде некоторого полинома или сходящегося во всей рассматриваемой области фазового пространства ряда

$$V_3 = \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^n \rho_{ik} x_i x_k + \frac{1}{4} \sum_{i, k, l, m=1}^n \rho_{iklm} x_i x_k x_l x_m + \dots$$

По условию функция V_3 должна быть положительно определенной, поэтому в разложении присутствуют лишь члены четных степеней. Коэффициенты $\rho_{ik}, \rho_{iklm}, \dots$, симметричные относительно всех индексов, считаются заданными величинами. Тогда, в соответствии с (2.8), (2.19), (4.46), коэффициенты ряда логарифмической плотности вероятности получаются как решение бесконечной системы линейных уравнений (2.19) при граничных условиях следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} A_i(t_2) = 0, & \quad A_{ik}(t_2) = -\rho_{ik}, \\ A_{ikl}(t_2) = 0, & \quad A_{iklm}(t_2) = -\rho_{iklm}, \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.55)$$

Интегрирование уравнений при подобных граничных условиях удобно производить в обратном времени $\tau = -t$. При этом момент t_2 считается за начальный. Для устойчивых по линейному приближению объектов это выгодно с точки зрения сходимости метода. Соответствующие соображения приведены в главе II.

Для выражения коэффициентов оптимальных управлений через квадратуры весовых функций линейного приближения можно использовать выражения (2.23), заменив в них момент времени 0 на t_2 и начальные значения

$A_{\nu\mu\dots\chi}^0$ на $\rho_{\nu\mu\dots\chi}$. Получаем

$$\begin{aligned}
 A_i(t) &= -2 \sum_{\nu=1}^n \int_t^{t_2} \sum_{p=1}^n a_{pp\nu}(t') w_{\nu i}(t', t) dt', \\
 A_{ij}(t) &= - \sum_{\nu, \mu=1}^n \rho_{\nu\mu} w_{\nu i}(t_2, t) w_{\mu j}(t_2, t) - \\
 &\quad - 2 \sum_{\nu, \mu=1}^n \int_t^{t_2} \left[3 \sum_{p=1}^n a_{pp\nu\mu}(t') + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{p=1}^n a_{p\nu\mu}(t') A_p(t') \right] w_{\nu i}(t', t) w_{\mu j}(t', t) dt', \\
 &\dots \dots \dots \\
 \underbrace{A_{ijk\dots s}}_N(t) &= \\
 &= - \sum_{\nu, \mu, \dots, \chi=1}^n \underbrace{\rho_{\nu\mu\dots\chi}}_N w_{\nu i}(t_2, t) w_{\mu j}(t_2, t) \dots w_{\chi s}(t_2, t) - \\
 &\quad - \sum_{\nu, \mu, \dots, \chi=1}^n \int_t^{t_2} \left\{ N(N+1) \sum_{p=1}^n \underbrace{a_{pp\nu\mu\dots\chi}}_{N+2}(t') + \right. \\
 &\quad \left. + N \sum_{p=1}^n \underbrace{a_{p\nu\mu\dots\chi}}_{N+1}(t') A_p(t') + \right. \\
 &+ \sum_{p=1}^n \left[\underbrace{a_{p\mu\dots\chi}}_N(t') A_{p\nu}(t') + \dots + \underbrace{a_{p\nu\dots\rho}}_N(t') A_{p\chi}(t') \right] + \\
 &\quad + \frac{2!}{N-1} \sum_{p=1}^n \left[\underbrace{a_{p\varepsilon\dots\chi}}_{N-1}(t') A_{p\nu\mu}(t') + \dots \right. \\
 &\quad \quad \quad \left. \dots + \underbrace{a_{p\nu\dots\eta}}_{N-1}(t') A_{p\rho\chi}(t') \right] + \dots \\
 &\quad \dots + \frac{2!}{N-1} \sum_{p=1}^n \left[\underbrace{a_{p\rho\chi}}(t') A_{p\nu\mu\dots\eta}(t') + \dots \right. \\
 &\quad \quad \left. \dots + \underbrace{a_{p\nu\mu}}(t') A_{p\varepsilon\phi\dots\chi}(t') \right] \times \\
 &\quad \quad \quad \times w_{\nu i}(t', t) w_{\mu j}(t', t) \dots w_{\chi\rho}(t', t) dt', \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

где t изменяется от $t_1 < t_2$ до t_2 . Сами оптимальные в смысле минимума функционала (4.47) управления имеют вид

$$u_i = -k_i^2 \left(A_i + \sum_{k=1}^n A_{ik} x_k + \sum_{k,l=1}^n A_{ikl} x_k x_l + \dots \right) \quad (4.57)$$

Этот ряд при $t = t_2$ по условию сходится.

Для объектов без прямых нелинейных связей и обобщенно консервативных объектов выражения для коэффициентов оптимальных управлений принимают вид

$$\left. \begin{aligned} A_i(t) &= 0, \\ A_{ij}(t) &= - \sum_{\nu, \mu=1}^n \rho_{\nu\mu} w_{\nu i}(t_2, t) w_{\mu j}(t_2, t), \\ A_{ijk}(t) &= - \sum_{\nu, \mu, \varepsilon=1}^n \int_t^{t_2} \left\{ \sum_{p=1}^n [a_{p\mu\varepsilon}(t') A_{p\nu}(t') + \right. \\ &\quad \left. + a_{p\nu\varepsilon}(t') A_{p\mu}(t') + a_{p\nu\mu}(t') A_{p\varepsilon}(t')] \right\} \times \\ &\quad \times w_{\nu i}(t', t) w_{\mu j}(t', t) w_{\varepsilon k}(t', t) dt', \\ A_{ijkl}(t) &= \\ &= - \sum_{\nu, \mu, \varepsilon, \eta=1}^n \rho_{\nu\mu\varepsilon\eta} w_{\nu i}(t_2, t) w_{\mu j}(t_2, t) w_{\varepsilon k}(t_2, t) \times \\ &\quad \times w_{\eta l}(t_2, t) - \sum_{\nu, \mu, \varepsilon, \eta=1}^n \int_t^{t_2} \left\{ \sum_{p=1}^n [a_{p\mu\varepsilon\eta}(t') A_{p\nu}(t') + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + a_{p\nu\mu\varepsilon}(t') A_{p\eta}(t')] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} \sum_{p=1}^n [a_{p\varepsilon\eta}(t') A_{p\nu\mu}(t') + \dots + a_{p\nu\mu}(t') A_{p\varepsilon\eta}(t')] \right\} \times \\ &\quad \times w_{\nu i}(t', t) w_{\mu j}(t', t) w_{\varepsilon k}(t', t) w_{\eta l}(t', t) dt', \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.58)$$

Если невозмущенное состояние исходного объекта при $u_i = 0$ асимптотически устойчиво по Ляпунову, т. е. $w_{ih}(t_2, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то для ограниченных по модулю коэффициентов

$$a_{ijk}, a_{ijkl}, \dots$$

все величины $A_{ij}(t)$, $A_{ijk}(t)$, ... стремятся к нулю при $t \rightarrow -\infty$. Это является предпосылкой быстрой сходимости ряда (4.57) при $t_1 \ll t_2$ для данного случая.

Синтез систем оценивания. Пусть процесс, координаты которого $x_{iп}$ должны быть оценены с максимальной возможной точностью, описывается уравнениями

$$\dot{x}_{iп} + f_{iп}(x_{1п}, \dots, x_{nп}, t) = \varepsilon_{iп}, \quad (4.59)$$

где $f_{iп}$ — известные функции, ξ_i — белые шумы. Координаты $x_{iп}$ измеряются с помощью датчиков, имеющих ошибки или шумы $x_{iш}$:

$$x_{iд} = x_{iп} + x_{iш}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.60)$$

В задаче фильтрации Калмана непосредственно измеримыми считаются некоторые линейные комбинации координат $x_{iп}$ в совокупности с шумами. Однако предполагается полная наблюдаемость по Калману, что равносильно возможности косвенного измерения всех фазовых координат. Здесь рассматриваем более простой случай прямого измерения всех координат контролируемого процесса в совокупности с аддитивными шумами. Считаем, что ошибки или шумы датчиков могут быть представлены как выходные величины формирующих фильтров, на выходы которых действуют белые шумы:

$$\dot{x}_{iш} + f_{iш}(x_{1ш}, \dots, x_{nш}, t) = \xi_{iш}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.61)$$

Требуется построить систему оценивания (фильтр) вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_{iф} + f_{iф}(x_{1ф}, \dots, x_{nф}, x_{1д}, \dots, x_{нд}, t) &= 0, \\ i &= 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (4.62)$$

выходные величины которой $x_{iф}$ в определенном смысле наименьшим образом отличались бы от истинных значений координат $x_{iп}$ контролируемого процесса по истечении определенного времени наблюдения. При линейных функциях $f_{iп}$, $f_{iш}$, $f_{iф}$ квадратичном критерии приближения и известном нормальном начальном распределении координат эта задача имеет решение в виде фильтра Калмана [5.11], [5.12].

Представим систему уравнений (4.59)–(4.62) в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{i\Pi} + f_{i\Pi}(x_{1\Pi}, \dots, x_{n\Pi}, t) &= \xi_{i\Pi}, \\ \dot{x}_{i\text{ш}} + f_{i\text{ш}}(x_{1\text{ш}}, \dots, x_{n\text{ш}}, t) &= \xi_{i\text{ш}}, \\ \dot{x}_{i\Phi} + f_{i\Phi}(x_{1\Phi}, \dots, x_{n\Phi}, x_{1\Pi} + x_{1\text{ш}}, \dots, x_{n\Pi} + \\ &\quad + x_{n\text{ш}}, t) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.63)$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

и запишем для этой системы ФПК-уравнение в виде (1.13):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln p}{\partial t} - \sum_{i=1}^n f_{i\Pi} \frac{\partial \ln p}{\partial x_{i\Pi}} - \sum_{i=1}^n f_{i\text{ш}} \frac{\partial \ln p}{\partial x_{i\text{ш}}} - \\ - \sum_{i=1}^n f_{i\Phi} \frac{\partial \ln p}{\partial x_{i\Phi}} - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n S_{ij}^{\Pi} \left(\frac{\partial^2 \ln p}{\partial x_{i\Pi} \partial x_{j\Pi}} + \frac{\partial \ln p}{\partial x_{i\Pi}} \frac{\partial \ln p}{\partial x_{j\Pi}} \right) - \\ - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n S_{ij}^{\text{ш}} \left(\frac{\partial^2 \ln p}{\partial x_{i\text{ш}} \partial x_{j\text{ш}}} + \frac{\partial \ln p}{\partial x_{i\text{ш}}} \frac{\partial \ln p}{\partial x_{j\text{ш}}} \right) = \\ = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_{i\Pi}}{\partial x_{i\Pi}} + \frac{\partial f_{i\text{ш}}}{\partial x_{i\text{ш}}} + \frac{\partial f_{i\Phi}}{\partial x_{i\Phi}} \right), \end{aligned} \quad (4.64)$$

где S_{ij}^{Π} — спектральные плотности шумов $\xi_{i\Pi}$, $S_{ij}^{\text{ш}}$ — спектральные плотности шумов $\xi_{i\text{ш}}$, причем шумы $\xi_{i\Pi}$ считаются некоррелированными по отношению к шумам $\xi_{i\text{ш}}$. Обозначим векторы

$$\left. \begin{aligned} x_{\Pi} &= (x_{1\Pi}, \dots, x_{n\Pi}), \\ x_{\text{ш}} &= (x_{1\text{ш}}, \dots, x_{n\text{ш}}), \\ x_{\Phi} &= (x_{1\Phi}, \dots, x_{n\Phi}). \end{aligned} \right\} \quad (4.65)$$

Если бы при заданном начальном распределении

$$p(x_{\Pi}, x_{\Phi}, x_{\text{ш}}, t_1) = p_1(x_{\Pi}, x_{\Phi}, x_{\text{ш}})$$

удалось найти такие функции $f_{i\Phi}$, при которых распределение x_{Π} , x_{Φ} в момент времени $t_2 > t_1$

$$p_2(x_{\Pi}, x_{\Phi}, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_{\Pi}, x_{\Phi}, x_{\text{ш}}, t_2) dx_{\text{ш}}$$

(здесь интегрирование ведется по пространству ошибок датчиков) приближалось бы в определенном смысле

наилучшим образом к δ -распределению $\delta(x_{\Pi} - x_{\Phi})$, то задача синтеза оптимальной системы оценивания была бы решена. Однако в такой общей постановке решение задачи встречает существенные трудности и в настоящее время не известно.

Представляя заданные функции $f_{i\Pi}$, $f_{i\Phi}$ и неизвестные функции $f_{i\Phi}$ указанных аргументов в форме полиномов или рядов, можно решать уравнение (4.46) описанным выше методом рядов. При этом получается бесконечная система уравнений типа (2.11), в которой коэффициенты $a_{ikh} \dots_s$, относящиеся к функциям $f_{i\Pi}$, $f_{i\Phi}$, заданы, а относящиеся к $f_{i\Phi}$ — свободны, с учетом, однако, связей, накладываемых составом аргументов этой функции. Если ограничиться конечным числом членов разложения текущей логарифмической плотности, то указанная система обыкновенных дифференциальных уравнений становится замкнутой. Далее необходимо в пространстве коэффициентов разложения $\ln p$ назначить критерий или функционал точности оценивания. Если начальное распределение задано, т. е. известны начальные значения коэффициентов разложения $\ln p$, то после всего этого задача сводится к выбору варьируемых параметров $a_{ikh} \dots_s$ из условия экстремизации заданного функционала. Эта задача в принципе разрешимая, но трудная. Одна из трудностей заключается в том, что желаемое распределение является обычно концентрированным относительно $x_{i\Phi} - x_{i\Pi}$ (малые ошибки оценивания). Это может вызывать плохую сходимость разложения $\ln p$ в ряд, необходимость учета большого числа членов ряда и чрезмерную громоздкость системы уравнений типа (2.14). В связи с этим возникает мысль о решении той же задачи методом моментов, т. е. использовании линейных уравнений моментов типа (2.77). При концентрированном распределении разложение характеристической функции (2.76) быстро сходится и можно ограничиться учетом моментов невысокого порядка. Однако начальное распределение может быть не концентрированным по всем фазовым координатам. В этом случае возникают те же трудности, связанные с громоздкостью уравнений моментов.

Можно поставить задачу синтеза оптимальной системы оценивания как задачу аналитического конструирования. В этом случае синтезируемые функции $f_{i\Phi}$ без огра-

ничения общности представляем в векторном изображении в форме

$$f_{\phi} = f_{\Pi} (x_{\phi}, t) - u_{\phi} (x_{\phi}, x_{\Pi} + x_{\text{ш}}, t) \quad (4.66)$$

и рассматриваем u_{ϕ} как синтезируемые управления. Такая задача решается в работе [4.8]. Трудность здесь заключается прежде всего в том, что имеет место неполная степень непосредственной наблюдаемости: в управлениях могут использоваться лишь выходные сигналы синтезируемого фильтра и датчиков. Для неполной степени наблюдаемости в общем случае разработан лишь приближенный метод аналитического конструирования [4.8].

Кроме этих сложных путей синтеза существуют более простые, но, конечно, менее совершенные пути. Так, можно задаться равновесным распределением, найти условия его существования и связь параметров равновесного распределения с параметрами фильтра. Далее параметры фильтра выбираются так, чтобы обеспечить желаемый характер и параметры равновесного распределения. Рассмотрим этот путь, задавшись нормальным центральным относительно $\Delta x_i = x_{i\phi} - x_{i\Pi}$, $x_{i\Pi}$, $x_{i\text{ш}}$ равновесным распределением

$$\begin{aligned} \ln p = A_0 + \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^n [A_{ik}^{\Pi} x_{i\Pi} x_{k\Pi} + A_{ik}^{\text{ш}} x_{i\text{ш}} x_{k\text{ш}} + \\ + A_{ik}^{\Delta} (x_{i\phi} - x_{i\Pi}) (x_{k\phi} - x_{k\Pi}) + 2A_{ik}^{\text{ш}\Delta} x_{i\Pi} x_{k\text{ш}} + \\ + 2A_{ik}^{\Pi\Delta} x_{i\Pi} (x_{k\phi} - x_{k\Pi}) + 2A_{ik}^{\text{ш}\Delta} x_{i\text{ш}} (x_{k\phi} - x_{k\Pi})] \quad (4.67) \end{aligned}$$

и представлением функций $f_{i\Pi}$, $f_{i\text{ш}}$ в форме полиномов или рядов

$$\left. \begin{aligned} f_{i\Pi} = \sum_{j=1}^n a_{ij}^{\Pi} x_{j\Pi} + \sum_{j, k=1}^n a_{ijk}^{\Pi} x_{i\Pi} x_{k\Pi} + \\ + \sum_{j, k, l=1}^n a_{ijkl}^{\Pi} x_{j\Pi} x_{k\Pi} x_{l\Pi} + \dots, \\ f_{i\text{ш}} = \sum_{j=1}^n a_{ij}^{\text{ш}} x_{j\text{ш}} + \sum_{j, k=1}^n a_{ijk}^{\text{ш}} x_{j\text{ш}} x_{k\text{ш}} + \\ + \sum_{j, k, l=1}^n a_{ijkl}^{\text{ш}} x_{j\text{ш}} x_{k\text{ш}} x_{l\text{ш}} + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (4.68)$$

где $a_{ij}^{\text{II}}, a_{ij}^{\text{III}}, a_{ijk}^{\text{II}}, a_{ijk}^{\text{III}}, a_{ijkl}^{\text{II}}, a_{ijkl}^{\text{III}}, \dots$ — заданные коэффициенты, а также представлением неизвестных функций в виде ряда, который с учетом (4.66) записывается в форме

$$\begin{aligned}
 f_{i\Phi} = & \sum_{j=1}^n a_{ij}^{\text{II}} x_{j\Phi} + \sum_{j,k=1}^n a_{ijk}^{\text{II}} x_{j\Phi} x_{k\Phi} + \sum_{j,k,l=1}^n a_{ijkl}^{\text{II}} x_{j\Phi} x_{k\Phi} x_{l\Phi} + \dots \\
 & - \sum_{j=1}^n a_{ij}^{\text{u}\Phi} x_{j\Phi} - \sum_{j,k=1}^n a_{ijk}^{\text{u}\Phi} x_{j\Phi} x_{k\Phi} - \sum_{j,k,l=1}^n a_{ijkl}^{\text{u}\Phi} x_{j\Phi} x_{k\Phi} x_{l\Phi} - \dots \\
 & \dots - \sum_{j=1}^n a_{ij}^{\text{u}\Pi} (x_{j\Pi} + x_{j\text{III}}) - \sum_{j,k=1}^n a_{ijk}^{\text{u}\Pi} (x_{j\Pi} + x_{j\text{III}}) (x_{k\Pi} + x_{k\text{III}}) - \\
 & - \sum_{j,k,l=1}^n a_{ijkl}^{\text{u}\Pi} (x_{j\Pi} + x_{j\text{III}}) (x_{k\Pi} + x_{k\text{III}}) (x_{l\Pi} + x_{l\text{III}}) - \\
 & - 2 \sum_{j,k=1}^n a_{ijk}^{\text{u}\Phi\Pi} x_{j\Phi} (x_{k\Pi} + x_{k\text{III}}) - \\
 & - \sum_{j,k,l=1}^n a_{ijkl}^{\text{u}\Phi\Pi} x_{j\Phi} (x_{k\Pi} + x_{k\text{III}}) (x_{l\Pi} + x_{l\text{III}}) - \\
 & - \sum_{j,k,l=1}^n a_{ijkl}^{\text{u}\Phi\Pi} x_{j\Phi} x_{k\Phi} (x_{l\Pi} + x_{l\text{III}}) - \dots \quad (4.69)
 \end{aligned}$$

Все коэффициенты здесь считаются постоянными, т. е. рассматривается стационарный контролируемый процесс, стационарные шумы. Подставляя выражения (4.65)—(4.67) в (4.64), собирая и приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых произведениях независимых аргументов, находим

$$\left. \begin{aligned}
 & \sum_{p=1}^n [a_{pj}^{\text{II}} (A_{pk}^{\text{II}} + A_{pk}^{\Delta} + A_{pk}^{\text{II}\Delta}) + \\
 & \quad + a_{pk}^{\text{II}} (A_{pj}^{\text{II}} + A_{pj}^{\Delta} + A_{pj}^{\text{II}\Delta})] + \\
 & + \sum_{p=1}^n [a_{pj}^{\text{u}\Pi} (A_{pk}^{\Delta} - A_{pk}^{\text{II}\Delta}) + a_{pk}^{\text{u}\Pi} (A_{pj}^{\Delta} - A_{pj}^{\text{II}\Delta})] +
 \end{aligned} \right\} \quad (4.70)$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{p, q=1}^n S_{pq}^{\Pi} (A_{pj}^{\Pi} + A_{pj}^{\Delta} - A_{pj}^{\Pi\Delta}) (A_{qk}^{\Pi} + A_{qk}^{\Delta} - A_{qk}^{\Pi\Delta}) - \\
 & \quad - 2 \sum_{p, q=1}^n S_{pq}^{\text{III}} A_{pj}^{\text{III}\Delta} A_{qk}^{\text{III}\Delta} + 6 \sum_{p=1}^n a_{ppik}^{\Pi} - \\
 & \quad - 2 \sum_{p=1}^n a_{ppik}^{\text{U}\Phi\Pi\Pi} = 0, \\
 & \sum_{p=1}^n a_{pj}^{\Pi} (A_{pk}^{\Pi\Delta} - A_{pk}^{\Delta}) + \\
 & \quad + \sum_{p=1}^n (a_{pk}^{\Pi} - a_{pk}^{\text{U}\Phi}) (A_{pj}^{\Pi\Delta} + A_{pj}^{\text{III}\Delta} - A_{pj}^{\Delta}) + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{p, q=1}^n S_{pq} (A_{pj}^{\Pi} + A_{pj}^{\Delta} - A_{pj}^{\Pi\Delta}) (A_{qk}^{\Pi\Delta} - A_{qk}^{\Delta}) + \\
 & \quad + \sum_{p, q=1}^n S_{pq}^{\text{III}} A_{pj}^{\text{III}\Delta} A_{qk}^{\text{III}\Delta} = 0, \quad (4.70) \\
 & \sum_{p=1}^n [a_{pj}^{\Pi} (A_{pk}^{\text{III}\Pi} - A_{pk}^{\text{III}\Delta}) + a_{pk}^{\text{III}} (A_{pj}^{\text{III}\Pi} - A_{pj}^{\text{III}\Delta})] - \\
 & \quad - \sum_{p=1}^n [a_{pj}^{\text{U}\Pi} A_{pk}^{\text{III}\Delta} + a_{pk}^{\text{U}\Pi} (A_{pj}^{\Pi\Delta} - A_{pj}^{\Delta})] + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{p, q=1}^n S_{pq} (A_{pj}^{\Pi} + A_{pj}^{\Delta} - A_{pj}^{\Pi\Delta}) (A_{qk}^{\text{III}\Pi} - A_{qk}^{\text{III}\Delta}) - \\
 & \quad - 2 \sum_{p, q=1}^n S_{pq} (A_{pk}^{\text{III}} + A_{pk}^{\text{III}\Pi}) A_{qj}^{\text{III}\Delta} - 2 \sum_{p=1}^n a_{ppjk}^{\text{U}\Phi\Pi\Pi} = 0, \\
 & \sum_{p=1}^n (a_{pj}^{\text{III}} A_{pk}^{\text{III}} + a_{pk}^{\text{III}} A_{pj}^{\text{III}}) - \sum_{p=1}^n a_{pj}^{\text{U}\Pi} A_{ik}^{\text{III}\Delta} + \\
 & \quad + \frac{1}{2} \sum_{p, q=1}^n S_{pq} (A_{pk}^{\text{III}\Pi} - A_{pk}^{\text{III}\Delta}) (A_{pj}^{\text{III}\Pi} - A_{pj}^{\text{III}\Delta}) -
 \end{aligned}$$

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТЕПЛОВЫХ ФЛУКТУАЦИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ. МИКРОУПРАВЛЕНИЕ

Статистическая природа процессов микромира определяет предельную потенциально достижимую точность управления. Это отчетливо проявляется как при попытках управления отдельно взятой микроскопической частицей, даже состоящей из множества атомов, так и при управлении макрообъектами с предельно высокой точностью. Вопросы, относящиеся к этой области, нередко лежат на границе статистической физики и теории управления и в ряде направлений еще слабо разработаны. Как уже отмечалось, истоки ФПК-уравнения связаны с теорией броуновского движения — раздела статистической физики. Естественно ожидать, что методы решения ФПК-уравнения могут быть применены к исследованию предельной в указанном смысле точности управления. Однако это далеко не исчерпывает потребности теоретического рассмотрения данной области, особенно в части управления с квантовым взаимодействием контролирующей системы и объекта.

Изложение в данной главе начинается с наиболее хорошо разработанной теории тепловых флуктуационных шумов в пассивных линейных системах.

§ 5.1. Флуктуационные тепловые колебания в линейных пассивных системах

Уравнения линейной пассивной системы, находящейся под воздействием собственных тепловых шумов, могут быть записаны в форме уравнений Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = -F_i + \Phi_i, \quad (5.1)$$

где q_i , \dot{q}_i — обобщенные координаты и обобщенные

скорости,

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n m_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k - \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n c_{ik} q_i q_k$$

— функция Лагранжа, $F_i = \sum_{k=1}^n r_{ik} \dot{q}_k$ — диссипативные и другие силы, линейно зависящие от обобщенных скоростей, $\varphi_i = \varphi_i(t)$ — центрированные случайные функции времени, соответствующие собственным тепловым шумам. Матрицы коэффициентов $m = \|m_{ik}\|$, $c = \|c_{ik}\|$ симметричны, матрица $r = \|r_{ik}\|$ может быть несимметричной ($r^T \neq r$).

Подставляя в (5.1) выражения для L , φ_i и используя матричную форму уравнений, записываем

$$m\ddot{q} + r\dot{q} + cq = \varphi, \quad (5.2)$$

где q , φ — матрицы-столбцы. Симметричную матрицу $r = r^T$ имеют, в частности, пассивные электрические цепи, в которых m_{ik} — индуктивности и взаимоиндуктивности, r_{ik} — активные (омические) сопротивления, c_{ik} — емкости.

Для пассивной системы с симметричной матрицей при условии теплового равновесия, когда все элементы системы имеют одинаковую абсолютную температуру T , на основе формулы Найквиста [5.1], [5.2] можно записать следующее выражение для матрицы спектральных плотностей тепловых шумов:

$$S_\varphi = \|S_{ik}^\varphi\| = 2kTr, \quad (5.3)$$

где k — постоянная Больцмана. В этой формуле не учтен так называемый квантовый множитель Планка [5.2], [5.4]. Однако изменение спектральной плотности, вызываемое этим множителем, наступает обычно лишь в области частот инфракрасного излучения.

Таким образом, тепловые шумы в подавляющем большинстве случаев с полным основанием можно считать белыми шумами, что отражает формула (5.3) и последующие формулы.

Примером пассивных систем с несимметричной матрицей могут служить механические системы с гироскопиче-

скими силами, электромеханические системы и др. Для таких систем в состоянии теплового равновесия [5.5], [5.7]

$$S_{\varphi} = kT (r + r^T). \quad (5.4)$$

Опираясь на эти положения при рассмотрении более общего случая неравновесного состояния пассивной нестационарной системы (элементы системы имеют разные значения температуры), полагаем

$$S_{ik}^{\varphi} = k (T_{ik} r_{ik} + T_{ki} r_{ki}). \quad (5.5)$$

При тепловом равновесии, когда $T_{ik} = T_{ki} = T$, выражение (5.5) в матричной форме обращается в (5.4) и (при $r = r^T$) в (5.3). Для системы с автономными степенями свободы, для которой $r_{ik} = 0$ при $k \neq i$, формула (5.5) обращается в формулу Найквиста $S_{ii} = 2kT_{ii} r_{ii}$.

Считая матрицу m неособой, запишем уравнение (5.2) в форме Коши, введя обозначения блочных матриц

$$x = \begin{Bmatrix} m\dot{q} \\ q \end{Bmatrix}, \quad \xi = \begin{Bmatrix} \varphi \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad a = \begin{Bmatrix} rm^{-1} & c \\ -m^{-1} & 0 \end{Bmatrix}. \quad (5.6)$$

Получаем

$$\dot{x} + ax = \xi. \quad (5.7)$$

Блочная матрица спектральных плотностей ξ равна

$$S = \begin{Bmatrix} S_{\varphi} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad S_{\varphi} = \|S_{ik}^{\varphi}\|, \quad (5.8)$$

где S_{ik}^{φ} по предположению выражается формулой (5.5). Если распределение начальных значений $x(0)$ является нормальным, то решение ФПК-уравнения, составленного для линейного уравнения (5.7), также будет давать нормальное текущее распределение *)

$$p(x, t) = d \exp\left(\frac{1}{2} x^T A x\right) = d \exp\left(-\frac{1}{2} x^T M^{-1} x\right).$$

Здесь d — скалярная постоянная, а матрица A и обратная ей матрица вторых моментов

$$M = -A^{-1}$$

*) Начальное нормальное распределение считается центральным.

определяются уравнениями (2.31), (2.34):

$$\dot{A} - Aa - a^T A - ASA = 0, \quad (5.9)$$

$$\dot{M} + aM + Ma^T - S = 0. \quad (5.10)$$

Введем следующие обозначения для квадратных матриц моментов (ковариационных матриц) размерности $n \times n$:

$$\left. \begin{aligned} M_{qq} &= \|M[q_i q_k]\|, \\ M_{pq} &= M_{qp}^T = \|M\left[\sum_{l=1}^n m_{il} \dot{q}_l q_k\right]\| = \\ &= \left\| \sum_{l=1}^n m_{il} M[\dot{q}_l q_k] \right\|, \\ M_{pp} &= \|M\left[\sum_{l=1}^n m_{il} \dot{q}_l \sum_{s=1}^n m_{ks} \dot{q}_s\right]\| = m M_{\dot{q}\dot{q}} m, \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

где

$$M_{\dot{q}\dot{q}} = \|M[\dot{q}_i \dot{q}_k]\|.$$

Матрицу M представим в виде блочной матрицы:

$$M = \begin{vmatrix} M_{pp} & M_{pq} \\ M_{qp} & M_{qq} \end{vmatrix}.$$

Уравнение (5.10) можно записать в форме

$$\begin{aligned} \left\| \begin{matrix} \dot{M}_{pp} & \dot{M}_{pq} \\ \dot{M}_{qp} & \dot{M}_{qq} \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} rm^{-1} & c \\ -m^{-1} & 0 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} M_{pp} & M_{pq} \\ M_{qp} & M_{qq} \end{matrix} \right\| + \\ + \left\| \begin{matrix} M_{pp} & M_{pq} \\ M_{qp} & M_{qq} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} m^{-1} r^T & -m^{-1} \\ c & 0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} S_p & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\| \end{aligned}$$

или в раскрытой до матриц-блоков форме:

$$\left. \begin{aligned} \dot{M}_{pp} + rm^{-1}M_{pp} + cM_{qp} + M_{pp}m^{-1}r^T + M_{pq}c &= S_p, \\ \dot{M}_{pq} + rm^{-1}M_{pq} + cM_{qq} - M_{pp}m^{-1} &= 0, \\ \dot{M}_{qp} - m^{-1}M_{pp} + M_{qp}m^{-1}r^T + M_{qq}c &= 0, \\ \dot{M}_{qq} - m^{-1}M_{pq} - M_{qp}m^{-1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

Для случая системы, находящейся в тепловом равновесии, когда справедлива формула (5.4), эти уравне-

ния в установившемся режиме ($\dot{M}_{pp} = \dot{M}_{pq} = \dot{M}_{qq} = 0$) имеют исключительно простое решение [5.5], [5.6]:

$$M_{qq} = kTc^{-1}, \quad M_{pp} = kTm, \quad M_{pq} = M_{qp} = 0. \quad (5.13)$$

При этом

$$M_{\dot{q}\dot{q}} = kTm^{-1}. \quad (5.14)$$

Средние кинетическая и потенциальная энергии флуктуационных колебаний такой системы равны

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n m_{ik} M[\dot{q}_i \dot{q}_k] &= \frac{1}{2} nkT, \\ \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n c_{ik} M[q_i q_k] &= \frac{1}{2} nkT, \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

что находится в полном согласии с положениями кинетической теории. Согласно (5.13), (5.14) матрицы коэффициентов распределения равновесной системы равны

$$A_{qq} = -M_{qq}^{-1} = -\frac{1}{kT}c, \quad A_{\dot{q}\dot{q}} = -M_{\dot{q}\dot{q}}^{-1} = -\frac{1}{kT}m.$$

Поэтому плотность равновесного распределения может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} p &= d \exp\left(\frac{1}{2} q^T A_{qq} q + \frac{1}{2} \dot{q}^T A_{\dot{q}\dot{q}} \dot{q}\right) = \\ &= d \exp\left[-\frac{1}{2kT} (q^T c q + \dot{q}^T m \dot{q})\right]. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Величина

$$\frac{1}{2} (q^T c q + \dot{q}^T m \dot{q})$$

есть энергия системы (флуктуационных колебаний), и распределение (5.16) есть распределение Гиббса [1.16].

В ряде случаев в динамической системе нет потенциальных сил. В этих случаях $c = 0$ и уравнения (5.12) принимают форму

$$\left. \begin{aligned} \dot{M}_{pp} + rm^{-1}M_{pp} + M_{pp}m^{-1}r^T &= S_y, \\ \dot{M}_{pq} + rm^{-1}M_{pq} - M_{pp}m^{-1} &= 0, \\ \dot{M}_{qp} + M_{qp}m^{-1}r^T - m^{-1}M_{pp} &= 0, \\ \dot{M}_{qq} - m^{-1}M_{pq} - M_{qp}m^{-1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

Здесь нет установившегося состояния в смысле $M_{qq} = \text{const}$, однако есть установившееся состояние, при котором $M_{pp} = \text{const}$, M_{pq} , $M_{qp} = \text{const}$, $\dot{M}_{qq} = \text{const}$, т. е. вторые моменты обобщенных координат линейно изменяются во времени. Соответствующее решение для системы, находящейся в термодинамическом равновесии (справедлива формула (5.4)), имеет вид

$$\left. \begin{aligned} M_{pp} &= kTm, & M_{pq} &= kTmr^{-1}, \\ M_{qp} &= kT(r^T)^{-1}m, & \dot{M}_{qq} &= kT[r^{-1} + (r^T)^{-1}]. \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

В этом можно убедиться прямой подстановкой выражений (5.4), (5.18) в (5.17).

Для неравновесной системы, температуры различных составных частей которой различны, а также для переходных режимов формулы для коэффициентов распределения сложнее указанных. Однако и для этих случаев можно записать общие выражения для $A = -M^{-1}$ и получить некоторые общие выводы.

Матрицу фундаментальной системы решений, удовлетворяющую уравнению

$$\dot{w} + aw = 0, \quad w(t', t') = 1$$

(1 — единичная матрица), представим в блочной форме:

$$w(t, t') = \left\| \begin{array}{cc} w_{pp}(t, t') & w_{pq}(t, t') \\ w_{qp}(t, t') & w_{qq}(t, t') \end{array} \right\|,$$

где

$$\begin{aligned} w_{pp}(t', t') &= 1, & w_{pq}(t', t') &= 0, \\ w_{qp}(t', t') &= 0, & w_{qq}(t', t') &= 1. \end{aligned}$$

В последних выражениях через 1 обозначены единичные матрицы размерности $n \times n$.

Уравнение $\dot{w} + aw = 0$ в раскрытой до матриц-блоков форме имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{w}_{pp} + rm^{-1}w_{pp} + cw_{qp} &= 0, & \dot{w}_{pq} + rm^{-1}w_{pq} + cw_{qq} &= 0, \\ \dot{w}_{qp} - m^{-1}w_{qp} &= 0, & \dot{w}_{qq} - m^{-1}w_{qp} &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает

$$\left. \begin{aligned} mi\dot{w}_{qp} + ri\dot{w}_{qp} + ciw_{qp} &= 0, & w_{qp}(t', t') &= \theta, \\ \dot{w}_{qp}(t', t') &= m^{-1}, & w_{pp} &= m\dot{w}_{qp}. \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

Решение уравнения (5.10) запишем в виде (2.35):

$$M(t) = w(t, 0) M(0) w^T(t, 0) + \int_0^t w(t, t') S w^T(t, t') dt'. \quad (5.20)$$

Необходимо различать понятия термодинамического равновесия и равновесного или установившегося состояния в смысле уровней шумов. Если элементы системы имеют различные температуры, то термодинамическое состояние неравновесное. Для поддержания такого состояния (поддержания различных температур) необходимы, вообще говоря, подвод и отвод тепла.

Допустим, что за счет подвода и отвода тепла поддерживается неизменное неравновесное термодинамическое состояние, т. е. различные значения $T_{ik} = \text{const}$. Параметры системы считаем постоянными: $m = \text{const}$, $c = \text{const}$, $r = \text{const}$. Такую систему будем называть *неравновесной* (в термодинамическом смысле) *стационарной*. Весовые функции стационарной системы суть функции разности аргументов:

$$w(t, t') = w(t - t').$$

Если невозмущенное движение системы асимптотически устойчиво, т. е. $w(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то как в равновесной, так и неравновесной (в термодинамическом смысле) стационарных системах с течением времени устанавливаются определенные уровни флуктуационных тепловых колебаний:

$$\begin{aligned} M(\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} M(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t w(t - t') S w^T(t - t') dt' = \\ &= \int_0^{\infty} w(\tau) S w^T(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

При блочном представлении матриц имеем

$$\left\| \begin{array}{cc} M_{pp} & M_{pq} \\ M_{qp} & M_{qq} \end{array} \right\| = \int_0^{\infty} \left\| \begin{array}{cc} w_{pr}(\tau) & w_{pq}(\tau) \\ w_{qr}(\tau) & w_{qq}(\tau) \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} S_{\varphi} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} w_{pp}^T(\tau) & w_{qp}^T(\tau) \\ w_{pq}^T(\tau) & w_{qq}^T(\tau) \end{array} \right\| d\tau.$$

Отсюда следует

$$M_{pp} = \int_0^{\infty} w_{pp}(\tau) S_{\varphi} w_{pp}^T(\tau) d\tau, \quad (5.21)$$

$$M_{qq} = \int_0^{\infty} w_{qp}(\tau) S_{\varphi} w_{qp}^T(\tau) d\tau. \quad (5.22)$$

Первая из этих формул с учетом выражений

$$M_{pp} = m M_{\dot{q}\dot{q}}, \quad w_{pp} = m \dot{w}_{qp}$$

дает

$$M_{\dot{q}\dot{q}} = \int_0^{\infty} \dot{w}_{qp}(\tau) S_{\varphi} \dot{w}_{qp}(\tau) d\tau. \quad (5.23)$$

Обозначая элементы матрицы $w_{qp}(\tau)$ просто через $w_{ih}(\tau)$, на основании (5.22), (5.23), (5.5) записываем:

$$M[qi qj] = k \sum_{\nu, \mu=1}^n (T_{\nu\mu} r_{\nu\mu} + T_{\mu\nu} r_{\mu\nu}) \int_0^{\infty} w_{i\nu}(\tau) w_{j\mu}(\tau) d\tau, \quad (5.24)$$

$$M[\dot{q}_i \dot{q}_j] = k \sum_{\nu, \mu=1}^n (T_{\nu\mu} r_{\nu\mu} + T_{\mu\nu} r_{\mu\nu}) \int_0^{\infty} \dot{w}_{i\nu}(\tau) \dot{w}_{j\mu}(\tau) d\tau, \quad (5.25)$$

где $w_{ij}(t)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\sum_{\nu=1}^n m_{i\nu} \ddot{w}_{\nu j} + \sum_{\nu=1}^n r_{i\nu} \dot{w}_{\nu j} + \sum_{\nu=1}^n c_{i\nu} w_{\nu j} = 0 \quad (5.26)$$

при начальных условиях

$$\dot{w}_{\nu j}(0) = \frac{m^{j\nu}}{|m|}, \quad w_{\nu j}(0) = 0, \quad (5.27)$$

$|m|$ — определитель матрицы m , $m^{j\nu}$ — алгебраическое дополнение элемента $m_{j\nu}$ этого определителя.

Широко известны [5.8] формулы для вычисления интегральных квадратичных оценок вида

$$\int_0^{\infty} w_{i\nu}(\tau) w_{j\mu}(\tau) d\tau, \quad \int_0^{\infty} \dot{w}_{i\nu}(\tau) \dot{w}_{j\mu}(\tau) d\tau.$$

Если преобразования Лапласа функций $w_{i\nu}(t)$, $w_j(t)$, являющиеся дробно-рациональными функциями параметра

преобразования s , представлены в виде

$$W_{iv}(s) = \int_0^{\infty} w_{iv}(t) \exp(-st) dt = \frac{b_1^{vi} + b_2^{vi}s + \dots + b_n^{vi}s^{n-1}}{a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n},$$

то

$$\int_0^{\infty} w_{iv}(t) w_{j\mu}(t) dt = \frac{1}{2a_n \Delta} \sum_{q=1}^n \Delta_q B_q^{vi\mu j}, \quad (5.28)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & -a_2 & a_4 & \dots \\ 0 & a_1 & -a_3 & \dots \\ 0 & -a_0 & a_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_{n-1} \end{vmatrix};$$

Δ_q — алгебраическое дополнение элемента n -й строки, q -го столбца определителя Δ ;

$$\begin{aligned} B_1^{vi\mu j} &= b_1^{vi} b_1^{\mu j}, \quad B_2^{vi\mu j} = b_2^{vi} b_2^{\mu j} - b_1^{vi} b_3^{\mu j} - b_3^{vi} b_1^{\mu j}, \\ B_3^{vi\mu j} &= b_3^{vi} b_3^{\mu j} - b_2^{vi} b_4^{\mu j} - b_4^{vi} b_2^{\mu j} + b_5^{vi} b_1^{\mu j} + b_1^{vi} b_5^{\mu j}, \\ &\dots \\ B_n^{vi\mu j} &= b_n^{vi} b_n^{\mu j}. \end{aligned}$$

Обычно основным интерес представляют дисперсии обобщенных координат и скоростей

$$\left. \begin{aligned} M[q_i^2] &= k \sum_{\nu, \mu=1}^n (T_{\nu\mu} r_{\nu\mu} + T_{\mu\nu} r_{\mu\nu}) \int_0^{\infty} w_{iv}(t) w_{i\mu}(t) dt, \\ M[\dot{q}_i^2] &= k \sum_{\nu, \mu=1}^n (T_{\nu\mu} r_{\nu\mu} + T_{\mu\nu} r_{\mu\nu}) \int_0^{\infty} \dot{w}_{iv}(t) \dot{w}_{i\mu}(t) dt. \end{aligned} \right\} \quad (5.29)$$

Формулы (5.29), даже без использования выражений для интегральных квадратичных оценок (5.28), позволяют сделать следующий общий вывод. Допустим, что температуры различных элементов системы находятся в границах

$$T_{\min} < T_{ik} < T_{\max}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n;$$

тогда уровень тепловых шумов в любой точке данной не равновесной системы больше уровня шумов равновесной системы с температурой T_{\min} и меньше уровня шумов равновесной системы с температурой T_{\max} .

Для доказательства обратим внимание на то, что в пассивных системах интегралы

$$\int_0^{\infty} w_{i\nu}(t) w_{i\mu}(t) dt, \quad \int_0^{\infty} \dot{w}_{i\nu}(t) \dot{w}_{i\mu}(t) dt \quad (5.30)$$

всегда положительны. Действительно, всегда можно задать такую воображаемую систему, в которой все величины $T_{\nu\mu}r_{\nu\mu} + T_{\mu\nu}r_{\mu\nu}$, кроме одной, равны нулю или за счет равенства нулю активных сопротивлений $r_{\nu\mu}$, или за счет равенства нулю абсолютных температур $T_{\nu\mu}$ (третье начало термодинамики в подобном воображаемом эксперименте можно во внимание не принимать).

Для подобной системы согласно (5.29)

$$M[q_i^2] = k(T_{\nu\mu}r_{\nu\mu} + T_{\mu\nu}r_{\mu\nu}) \int_0^{\infty} w_{i\nu}(t) w_{i\mu}(t) dt,$$

$$M[\dot{q}_i^2] = k(T_{\nu\mu}r_{\nu\mu} + T_{\mu\nu}r_{\mu\nu}) \int_0^{\infty} \dot{w}_{i\nu}(t) \dot{w}_{i\mu}(t) dt.$$

Величины $M[\dot{q}_i^2]$, $M[q_i^2]$, $T_{\nu\mu}r_{\nu\mu} + T_{\mu\nu}r_{\mu\nu}$ по своей природе и условиям положительны, поэтому положительны и интегралы (5.30).

Таким образом, дисперсии (5.29) в любой точке неравновесной системы представляют собой в отношении температур элементов $T_{\nu\mu}$ линейные формы с положительными коэффициентами. Такая форма принимает наименьшее значение на нижней границе аргументов (температур) и наибольшее значение на верхней границе аргументов. Положение доказано.

Для равновесных систем справедливы весьма простые формулы (5.13), (5.14) вторых моментов флуктуационных колебаний. Эти формулы в сочетании с доказанным положением позволяют для неравновесной системы записать следующие неравенства:

$$\left. \begin{aligned} kT_{\min} \frac{c^{ii}}{|c|} < M[q_{ii}^2] < kT_{\max} \frac{c^{ii}}{|c|}, \\ kT_{\min} \frac{m^{ii}}{|m|} < M[\dot{q}_{ii}^2] < kT_{\max} \frac{m^{ii}}{|m|}, \end{aligned} \right\} \quad (5.31)$$

где $|m|$ — определитель матрицы m , m^{ii} — алгебраическое дополнение диагонального элемента m_{ii} этого определителя, $|c|$ — определитель матрицы c , c^{ii} — алгебраическое дополнение диагонального элемента c_{ii} этого определителя.

Перейдем к рассмотрению конкретных примеров.

Тепловые шумы в многообмоточном трансформаторе.

Несколько обмоток с коэффициентами индуктивности L_{Ti} ($i = 1, 2, \dots, n$) и взаимоиндуктивности $M_{T_{ik}}$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$) подсоединены к активным сопротивлениям R_i ($i = 1, 2, \dots, n$) с температурами $T_i = \text{const}$ (рис. 5.1), находящимися в пределах

$$T_{\min} < T_i < T_{\max}.$$

Ферромагнитный сердечник отсутствует, так что источниками шумов служат только активные сопротивления.

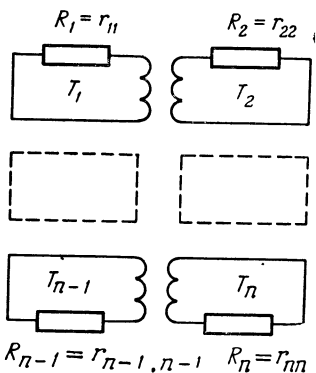


Рис. 5.1.

Уравнения цепей обмоток

$$L_{Ti} \frac{di_i}{dt} + R_i i + M_{T_{i1}} \frac{di_1}{dt} + M_{T_{i2}} \frac{di_2}{dt} + \dots + M_{T_{in}} \frac{di_n}{dt} = \Phi_i, \\ i = 1, 2, \dots, n,$$

можно записать в виде (5.2):

$$m\ddot{q} + r\dot{q} = \Phi,$$

где

$$m = \begin{vmatrix} L_{T1} & M_{T12} & \dots & M_{T1n} \\ M_{T21} & L_{T22} & \dots & M_{T2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{Tn1} & M_{Tn2} & \dots & L_{Tn} \end{vmatrix}, \quad \dot{q} = \begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_n \end{vmatrix}, \\ r = \begin{vmatrix} R_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & R_n \end{vmatrix}.$$

В отношении токов (матрица \dot{q}) данная система устойчива, и в ней устанавливается равновесное (в смысле шумов) состояние. Согласно (5.29) для этого состояния

$$M[i_i^2] = 2k \sum_{j=1}^n T_j R_j \int_0^{\infty} \dot{w}_{ij}^2(t) dt, \quad (5.32)$$

а матрица $w(t) = \|w_{ij}(t)\|$ удовлетворяет уравнению

$$m\dot{w} + r\dot{w} = 0, \quad \dot{w}(0) = m^{-1}.$$

Дисперсии токов согласно (5.31) находятся в пределах

$$kT_{\min} \frac{m^{jj}}{|m|} < M[i_j^2] < kT_{\max} \frac{m^{jj}}{|m|}, \quad (5.33)$$

где

$$|m| = \begin{vmatrix} L_{T1} & M_{T12} & \dots & M_{T1n} \\ M_{T21} & L_{T22} & \dots & M_{T2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{Tn1} & M_{Tn2} & \dots & L_{Tn} \end{vmatrix},$$

m^{jj} — алгебраические дополнения диагональных членов этого определителя.

Для системы с одинаковыми температурами сопротивлений

$$M[i_j^2] = kT \frac{m^{jj}}{|m|}.$$

В частности, при $n = 3$ выражения в развернутой форме имеют вид

$$M[i_1^2] = \frac{kT}{L_{T1}} \frac{1 - \mu_{23}^2}{1 + 2\mu_{12}\mu_{13}\mu_{23} - \mu_{12}^2 - \mu_{13}^2 - \mu_{23}^2},$$

$$M[i_2^2] = \frac{kT}{L_{T2}} \frac{1 - \mu_{13}^2}{1 + 2\mu_{12}\mu_{13}\mu_{23} - \mu_{12}^2 - \mu_{13}^2 - \mu_{23}^2},$$

$$M[i_3^2] = \frac{kT}{L_{T3}} \frac{1 - \mu_{12}^2}{1 + 2\mu_{12}\mu_{13}\mu_{23} - \mu_{12}^2 - \mu_{13}^2 - \mu_{23}^2},$$

где

$$\mu_{12} = \frac{M_{T12}}{\sqrt{L_{T1}L_{T2}}}, \quad \mu_{13} = \frac{M_{T13}}{\sqrt{L_{T1}L_{T3}}}, \quad \mu_{23} = \frac{M_{T23}}{\sqrt{L_{T2}L_{T3}}}$$

— коэффициенты связи.

При наличии лишь двух обмоток

$$\mu_{13} = 0, \quad \mu_{23} = 0,$$

$$M[i_1^2] = \frac{kT}{LT_1} \frac{1}{1 - \mu_{12}^2}, \quad M[i_2^2] = \frac{kT}{LT_2} \frac{1}{1 - \mu_{12}^2}.$$

При стремлении коэффициента связи в последних формулах к единице, что соответствует исчезновению потоков рассеяния, дисперсии шумовых токов неограниченно возрастают. Так и должно быть, ибо при отсутствии потоков рассеяния эквивалентная схема двух связанных обмоток вырождается в цепь с чисто активными сопротивлениями, дисперсии шумовых токов в которой по формуле Найквиста (без квантового множителя) бесконечно велики.

Рассмотрим теплообмен за счет тепловых шумов. Допустим, что обмотки и сопротивления имеют абсолютную тепловую изоляцию, так что обмен тепловой энергией может происходить только за счет шумовых токов. Очевидно, что формулами (5.29), а значит, и (5.32) можно пользоваться не только при постоянных температурах сопротивлений, но и при медленно (в сравнении с электрическими переходными процессами) изменяющихся температурах.

Энергия, выделяемая в единицу времени в сопротивлении R_i за счет шумовых токов, создаваемых всеми другими сопротивлениями, согласно (5.32) равна

$$2kR_i \left[\sum_{j=1}^n T_j R_j \int_0^{\infty} w_{ij}^2(t) dt - T_i R_i \int_0^{\infty} \dot{w}_{ii}^2(t) dt \right].$$

Энергия в единицу времени, расходуемая сопротивлением на создание шумовых токов в остальных элементах схемы, равна

$$2kR_i T_i \left[\sum_{j=1}^n R_j \int_0^{\infty} \dot{w}_{ji}^2(t) dt - R_i \int_0^{\infty} \dot{w}_{ii}^2(t) dt \right].$$

Разность этих энергий равна произведению теплоемкости c_i i -го сопротивления (точнее, i -й теплоизолированной цепи) на производную температуры T_i :

$$c_i \dot{T}_i = 2kR_i \left[\sum_{j=1}^n (T_j - T_i) R_j \int_0^{\infty} \dot{w}_{ij}^2(t) dt \right]. \quad (5.34)$$

Здесь учтено, что вследствие симметричности матриц m , r матрица w также симметрична.

Уравнения (5.34) показывают, что чем выше активные сопротивления, тем интенсивнее теплообмен за счет шумовых токов.

Тепловые флуктуационные колебания гальванометра. Рассмотрим тепловые колебания гальванометра со струнным подвесом при условии, что цепь гальванометра замкнута на активное сопротивление. Уравнения этой электромеханической системы имеют вид

$$J_{\Gamma} \frac{d^2\alpha}{dt^2} + r_{\Gamma} \frac{d\alpha}{dt} + c_{\Gamma}\alpha = k_1 i + \Phi_1,$$

$$L_{\Gamma} \frac{di}{dt} + R_{\Gamma} i + k_1 \frac{d\alpha}{dt} = \Phi_2,$$

или

$$m_{11}\ddot{q}_1 + r_{11}\dot{q}_1 + c_{11}q_1 + r_{12}\dot{q}_2 = \Phi_1,$$

$$m_{22}\ddot{q}_2 + r_{22}\dot{q}_2 + r_{21}\dot{q}_1 = \Phi_2,$$

где $q_1 = \alpha$ — угол поворота подвижной системы гальванометра, $i_2 = i$ — ток в цепи гальванометра, $m_{11} = J_{\Gamma}$ — момент инерции подвижной системы, $r_{11} = r_{\Gamma}$ — коэффициент момента вязкого трения, $c_{11} = c_{\Gamma}$ — коэффициент упругости подвеса, $m_{22} = L_{\Gamma}$ — индуктивность цепи гальванометра, $r_{22} = R_{\Gamma}$ — активное сопротивление этой цепи, $r_{12} = -r_{21} = -k_1 = \text{const.}$

Полагаем, что температура T_1 газа (или жидкости), окружающего подвижную систему и создающего вязкое трение $r_{\Gamma} \frac{d\alpha}{dt}$, отлична от температуры T_2 сопротивления R_{Γ} . Таким образом, система является неравновесной в термодинамическом отношении и для определения установившихся дисперсий следует пользоваться формулами (5.29), которые в данном случае принимают вид

$$\begin{aligned} M[\alpha^2] = M[q_1^2] = & \left. \begin{aligned} &= 2k \left[T_1 r_{11} \int_0^{\infty} w_{11}^2 dt + (T_{12} r_{12} + \right. \\ & \left. + T_{21} r_{21}) \int_0^{\infty} w_{11} w_{12} dt + T_2 r_{22} \int_0^{\infty} w_{12}^2 dt \right], \end{aligned} \right\} \quad (5.35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M[i^2] &= M[\dot{q}^2] = \\
 &= 2k \left[T_1 r_{11} \int_0^\infty \dot{w}_{21}^2 dt + (T_{12} r_{12} + \right. \\
 &\quad \left. + T_{21} r_{21}) \int_0^\infty \dot{w}_{21} \dot{w}_{22} dt + T_2 r_{22} \int_0^\infty \dot{w}_{22}^2 dt \right], \quad (5.35)
 \end{aligned}$$

Здесь T_{12} , T_{21} — шумовые температуры, соответствующие коэффициентам r_{12} , r_{21} . Эти коэффициенты соответствуют закону электромагнитной индукции, и следует принять $T_{12} = T_{21}$. Формулы (5.35) упрощаются:

$$\begin{aligned}
 M[\alpha^2] &= 2k \left(T_1 r_{11} \int_0^\infty w_{11}^2 dt + T_2 r_{22} \int_0^\infty w_{12}^2 dt \right), \\
 M[i^2] &= 2k \left(T_1 r_{11} \int_0^\infty \dot{w}_{21}^2 dt + T_2 r_{22} \int_0^\infty \dot{w}_{22}^2 dt \right). \quad (5.36)
 \end{aligned}$$

Вычисление интегральных квадратичных оценок по формуле (5.28) и подстановка исходных обозначений параметров дает следующие выражения:

$$M[\alpha^2] = \frac{kT_1}{c_r} \frac{(r_r R_r + k_1^2 T_2 / T_1) (r_r L_r + R_r J_r) + c_r r_r L_r^2}{(r_r R_r + k_1^2) (r_r L_r + R_r J_r) + c_r r_r L_r^2},$$

$$M[i^2] = \frac{kT_2}{L_r} \frac{r_r R_r (r_r L_r + R_r J_r) + k_1^2 \left(r_r L_r \frac{T_1}{T_2} + R_r J_r \right) + c_r r_r L_r^2}{(r_r R_r + k_1^2) (r_r L_r + R_r J_r) + c_r r_r L_r^2}.$$

Для случая одинаковых температур $T_1 = T_2 = T$ выражения резко упрощаются в соответствии с изложенной теорией:

$$M[\alpha^2] = \frac{kT}{c_r}, \quad M[i^2] = \frac{kT}{L_r}.$$

Броуновское движение заряженной частицы в магнитном поле. Рассмотрим броуновское движение сферической заряженной частицы в жидкости или газе при наличии однородного магнитного поля. Обозначая прямоугольные координаты частицы q_1 , q_2 , q_3 и считая, что вектор напряженности магнитного поля направлен вдоль оси q_3 ,

записываем:

$$\left. \begin{aligned} m_p \ddot{q}_1 + r_p \dot{q}_1 - e_p H \dot{q}_2 &= \Phi_1, \\ m_p \ddot{q}_2 + r_p \dot{q}_2 + e_p H \dot{q}_1 &= \Phi_2, \\ m_p \ddot{q}_3 + r_p \dot{q}_3 &= \Phi_3, \end{aligned} \right\} \quad (5.37)$$

где m_p — масса частицы, $r_p = 6\pi\eta\rho$ — коэффициент вязкого трения (η — коэффициент вязкости жидкости, ρ — радиус частицы), e_p — заряд частицы, H — напряженность магнитного поля. Таким образом, здесь

$$r = \begin{vmatrix} r_p & -e_p H & 0 \\ e_p H & r_p & 0 \\ 0 & 0 & r_p \end{vmatrix}. \quad (5.38)$$

В данном случае $c = 0$ и следует использовать формулы (5.18). Согласно этим формулам и выражению (5.38)

$$\begin{aligned} \dot{M}[q_1^2] = \dot{M}[q_2^2] &= \frac{2kTr_p}{r_p^2 + e^2 H^2} = \frac{kT}{3\pi\eta\rho \left(1 + \frac{e_p^2 H^2}{36\pi^2 \eta^2 r_p^2}\right)}, \\ \dot{M}[q_3^2] &= \frac{kT}{3\pi\eta\rho}. \end{aligned}$$

При отсутствии заряда ($e_p = 0$) или магнитного поля ($H = 0$)

$$\dot{M}[q_1^2] = \dot{M}[q_2^2] = \dot{M}[q_3^2] = \frac{kT}{3\pi\eta\rho}.$$

Это — закон Эйнштейна [5.9].

§ 5.2. Микроуправление

Микроуправлением будем называть управление объектами микроскопических размеров (от десятков ангстрем до десятков микрон) и управление макрообъектами с предельно высокой точностью, обусловленной статистической природой процессов микромира. Самому понятию управления в этом определении придается обычный смысл целенаправленных действий, основанных на использовании информации.

Несомненно, что микроуправление играет большую роль в живых организмах. В связи с развитием микроэлек-

троники, миниатюризации и приближением в ряде задач современной науки и техники к предельно достижимой точности, микроуправление становится актуальным для многих областей возможного применения.

По самому определению для микроуправления определяющими являются случайные возмущающие воздействия, связанные с хаотическим движением микрочастиц. Поэтому теория микроуправления может быть только статистической. Ввиду того, что в задачах микроуправления фигурируют объекты «надмолекулярного уровня», состоящие из множества атомов или молекул и совершающие движения, частотный спектр которых обычно даже не достигает инфракрасного диапазона волн, описание объектов микроуправления часто можно осуществлять в рамках классической физики. Однако контроль координат, измерение в ряде случаев выгодно осуществлять с помощью излучения, корпускулярная, квантовая природа которого оказывает доминирующее влияние. В этих случаях классический аппарат является недостаточным. Здесь мы ограничимся задачами микроуправления, в которых дискретность, связанная с квантовой природой взаимодействия, или отсутствует, или настолько мала, что подходящим аппаратом описания являются дифференциальные уравнения и уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова.

Хорошо известно, что возможности управления на микроуровне ограничены. Классическим примером, иллюстрирующим эту ограниченность, является воображаемый эксперимент с «демоном» Максвелла [5.9]. Поэтому первым вопросом, который целесообразно здесь рассмотреть, являются предельные возможности управления. Проиллюстрируем постановку и решение этого вопроса на конкретных, но довольно общих примерах.

Стабилизация электрической цепи. Пусть имеется произвольная пассивная электрическая цепь, состоящая из индуктивностей, активных сопротивлений и емкостей (рис. 5.2).

Если обозначить контурные токи через $i_j = \zeta_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$), то уравнения подобной цепи можно записать в виде (5.2), где m — матрица индуктивностей (взаимоиндуктивностей), r — матрица активных сопротивлений, s — матрица емкостей, φ — матрица-столбец контурных э.д.с. тепловых шумов.

Для случая термодинамического равновесия матрица моментов шумовых токов в пассивной цепи с неособой матрицей m определяется формулой (5.14), а при разных температурах элементов — формулой (5.25). Возникает вопрос, нельзя ли создать активную электрическую цепь

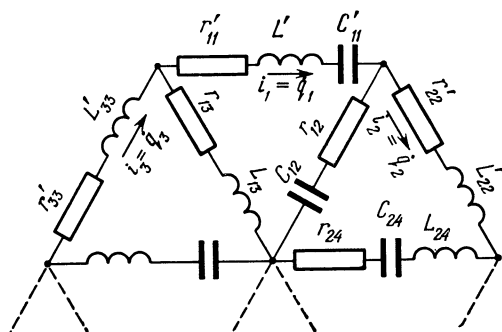


Рис. 5.2.

(цепь, содержащую усилители), которая при той же температуре пассивных элементов и прежних динамических свойствах, т. е. прежних уравнениях свободного движения

$$m\ddot{q} + r\dot{q} + cq = 0,$$

обладала бы меньшими уровнями шумов, чем пассивная цепь. То, что при идеальных усилителях с нулевыми шумовыми температурами это сделать можно, следует из таких рассуждений. Уменьшим все активные сопротивления в $d > 1$ раз, но подключим идеальные усилители так, чтобы они усиливали в $d - 1$ раз составляющие контурных напряжений

$$\frac{1}{d} \sum_{k=1}^n r_{ik} i_k = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^n r_{ik} \dot{c}_k. \quad (5.39)$$

Векторный сигнал на выходах подобных усилителей будет равен

$$u = \frac{d-1}{d} r q.$$

Компоненты векторного сигнала-напряжения u с выходов усилителей подаются в виде дополнительных контурных

э. д. с. в рассматриваемую цепь, образуя отрицательные обратные связи. Уравнение замкнутой системы с подобными идеальными усилителями принимает вид

$$m\ddot{q} + \frac{1}{d} r\dot{q} + cq = -\frac{d-1}{d} r q + \varphi^*,$$

или

$$m\ddot{q} + r\dot{q} + cq = \varphi^*. \quad (5.40)$$

Так как усилители считаются идеальными, то шумы φ^* создаются только в сопротивлениях $\frac{1}{d}r$ и их спектральные плотности в $\frac{1}{d}$ раз меньше, чем в исходной системе.

В динамическом отношении исходная и полученная системы идентичны, и дисперсии всех флуктуационных тепловых колебаний в полученной системе в d раз ниже, чем в исходной.

Однако всякий реальный усилитель имеет шумовую температуру, отличную от нуля, и конечное входное сопротивление. Допустим, что имеются реальные (в смысле наличия шумов) безынерционные усилители с одинаковой шумовой температурой T_y (по отношению к выходным сигналам). Посредством таких усилителей измеряются контурные напряжения (5.39). Полагаем, что это измерение включает измерение каждой из составляющих $\frac{1}{d} r_{ik} i_k$ или $\frac{1}{d} r_{ik} (i_i + i_k)$ усилителем с согласованным входом, т. е. усилителем, входное сопротивление которого равно $\frac{1}{d} r_{ik}$. Входные пассивные цепи усилителей имеют температуру, равную температуре контролируемой цепи. Поэтому уравнение контролируемой цепи после уменьшения всех активных сопротивлений в d раз и подключения согласованных входов усилителей будет иметь вид

$$m\ddot{q} + \frac{1}{2d} r\dot{q} + cq = -u + \varphi^*, \quad (5.44)$$

причем матрица S_{φ^*} спектральных плотностей шумов φ^* равна $\frac{kT}{d} r$. Коэффициенты усиления всех усилителей из условия сохранения динамических свойств зададим равными $2d - 1$. Вектор выходных сигналов системы усили-

телей образуется как вектор усиленных контурных напряжений и равен

$$u = (2d - 1) \left(\frac{1}{2d} r \dot{q} + \varphi_y \right), \quad (5.42)$$

где φ_y — вектор шумов усилителей, спектральная матрица которого по условию равна

$$S_{\varphi_y} = \frac{2kT_y}{d} r.$$

Подставляя (5.42) в (5.41), находим

$$m\ddot{q} + r\dot{q} + cq = \varphi^* + (2d - 1)\varphi_y.$$

Шумы φ^* и $(2d - 1)\varphi_y$ независимы, и матрица спектральных плотностей их суммы равна сумме матриц спектральных плотностей S_{φ^*} и $(2d - 1)^2 S_{\varphi_y}$.

Итак, построение активной системы с динамическими свойствами, эквивалентными исходной системе, приводит к уравнению

$$m\ddot{q} + r\dot{q} + cq = \varphi_{ш}, \quad (5.43)$$

где матрица спектральных плотностей $\varphi_{ш}$ равна

$$2 \frac{kT}{d} \left[\frac{1}{2} + (2d - 1)^2 \frac{T_y}{T} \right] r.$$

Эквивалентная шумовая температура в активной системе равна

$$T_{ш} = \frac{1}{2d} [T + 2(2d - 1)^2 T_y]. \quad (5.44)$$

Соответствующие графики в логарифмическом масштабе приведены на рис. 5.3.

Для случая отрицательных обратных связей, когда $2d - 1 > 0$, и шумовой температуры усилителей T_y , превышающей половину температуры T исходной цепи,

$$T_y \geq \frac{1}{2} T, \quad (5.45)$$

эквивалентная шумовая температура в активной системе выше $0,83T$.

Условие (5.45) надо считать заведомо выполненным, так как мы приняли, что входные цепи усилителей имеют температуру T . Активную систему с обратными связями можно рассматривать как систему управления (стабилизации).

Из изложенного следует, что с помощью рассмотренного управления посредством усилителей с шумовой температурой, превышающей температуру элементов цепи, невозможно заметно снизить уровень тепловых флуктуационных колебаний в этой цепи.

Стабилизация электро-механической системы. Рассмотрим систему, которая состоит из масс, линейных упругих связей и элементов линейного трения, а также связанных с массами индуктивных и емкостных датчиков, предназначенных для контроля положения масс. В цепи датчиков включены источники напряжения (как правило, переменного).

Источниками тепловых шумов в механической части системы являются механические сопротивления r_{ik}^M , а в электрической части — активные электрические сопротивления цепей датчиков r_{ik}^E . Индуктивности $m_{ik}^E(q_1^M, \dots, q_n^M)$ и емкости $c_{ik}^E(q_1^M, \dots, q_n^M)$ цепей датчиков являются функциями геометрических координат q_i^M .

Функция Лагранжа для данной системы запишется в виде

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n [m_{ik}^M \dot{\zeta}_i^M \dot{\zeta}_k^M + m_{ik}^E(q_1^M, \dots, q_n^M) \dot{\zeta}_i^E \dot{\zeta}_k^E] - \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n [c_{ik}^M q_i^M q_k^M + c_{ik}^E(q_1^M, \dots, q_n^M) q_i^E q_k^E], \quad (5.46)$$

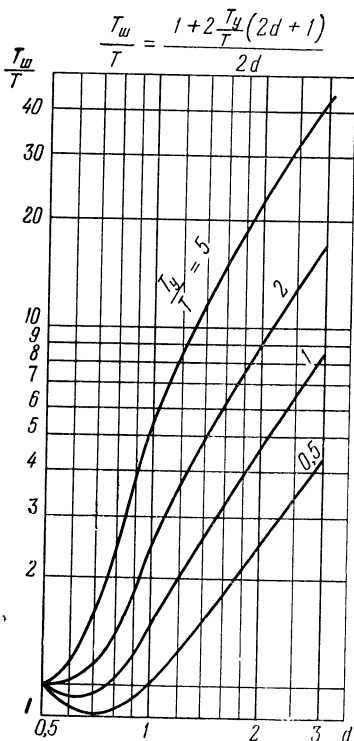


Рис. 5.3.

где $q_i^{\mathfrak{a}}$ — «электрические» координаты — количества электричества, $\zeta_i^{\mathfrak{a}}$ — электрические токи, $m_{ik}^{\mathfrak{M}}$ — массы, $c_{ik}^{\mathfrak{M}}$ — коэффициенты жесткости. Уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i^{\mathfrak{M}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i^{\mathfrak{M}}} = \Phi_i^{\mathfrak{M}} - \sum_{k=1}^n r_{ik}^{\mathfrak{M}} \dot{\zeta}_k^{\mathfrak{M}},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i^{\mathfrak{a}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i^{\mathfrak{a}}} = u_i^{\mathfrak{a}} + \Phi_i^{\mathfrak{a}} - \sum_{k=1}^n r_{ik}^{\mathfrak{a}} \dot{\zeta}_k^{\mathfrak{a}}$$

в раскрытой форме имеют вид

$$\sum_{k=1}^n (m_{ik}^{\mathfrak{M}} \ddot{q}_k^{\mathfrak{M}} + r_{ik}^{\mathfrak{M}} \dot{q}_k^{\mathfrak{M}} + c_{ik}^{\mathfrak{M}} q_k^{\mathfrak{M}}) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j, k=1}^n \frac{\partial c_{jk}^{\mathfrak{a}}}{\partial q_i^{\mathfrak{M}}} q_j^{\mathfrak{a}} q_k^{\mathfrak{a}} - \frac{1}{2} \sum_{j, k=1}^n \frac{\partial m_{jk}^{\mathfrak{a}}}{\partial q_i^{\mathfrak{M}}} \zeta_j^{\mathfrak{a}} \zeta_k^{\mathfrak{a}} = \Phi_i^{\mathfrak{M}},$$

$$\sum_{k=1}^n (m_{ik}^{\mathfrak{a}} \ddot{q}_k^{\mathfrak{a}} + r_{ik}^{\mathfrak{a}} \dot{q}_k^{\mathfrak{a}} + c_{ik}^{\mathfrak{a}} q_k^{\mathfrak{a}}) + \sum_{j, k=1}^n \frac{\partial m_{ik}^{\mathfrak{a}}}{\partial q_j^{\mathfrak{M}}} \dot{q}_j^{\mathfrak{M}} \dot{q}_k^{\mathfrak{a}} = u_i^{\mathfrak{a}} + \Phi_i^{\mathfrak{a}},$$

где $u_i^{\mathfrak{a}}$ — э.д.с. питания индуктивно-емкостных датчиков, $\Phi_i^{\mathfrak{a}}$ — тепловые шумы. За невозмущенное движение примем движение без шумов (шумы источника питания включены в $u_i^{\mathfrak{a}}$), удовлетворяющее уравнениям

$$\sum_{k=1}^n (m_{ik}^{\mathfrak{M}} \ddot{q}_{0k}^{\mathfrak{M}} + r_{ik}^{\mathfrak{M}} \dot{q}_{0k}^{\mathfrak{M}} + c_{ik}^{\mathfrak{M}} q_{0k}^{\mathfrak{M}}) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j, k=1}^n \frac{\partial c_{jk}^{\mathfrak{a}}}{\partial q_{0i}^{\mathfrak{M}}} q_{0j}^{\mathfrak{a}} q_{0k}^{\mathfrak{a}} - \frac{1}{2} \sum_{j, k=1}^n \frac{\partial m_{jk}^{\mathfrak{a}}}{\partial q_{0i}^{\mathfrak{M}}} \dot{q}_{0j}^{\mathfrak{a}} \dot{q}_{0k}^{\mathfrak{a}} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n (m_{ik}^{\mathfrak{a}} \ddot{q}_{0k}^{\mathfrak{a}} + r_{ik}^{\mathfrak{a}} \dot{q}_{0k}^{\mathfrak{a}} + c_{ik}^{\mathfrak{a}} q_{0k}^{\mathfrak{a}}) + \sum_{j, k=1}^n \frac{\partial m_{ik}^{\mathfrak{a}}}{\partial q_{0j}^{\mathfrak{M}}} \dot{q}_{0j}^{\mathfrak{M}} \dot{q}_{0k}^{\mathfrak{a}} = u_i^{\mathfrak{a}},$$

где

$$c_{ik}^{\mathfrak{a}} = c_{ik}^{\mathfrak{a}}(q_{01}^{\mathfrak{a}}, \dots, q_{0n}^{\mathfrak{a}}),$$

$$m_{ik}^{\mathfrak{a}} = m_{ik}^{\mathfrak{a}}(q_{01}^{\mathfrak{a}}, \dots, q_{0n}^{\mathfrak{a}}).$$

Ввиду того, что тепловые флуктуационные колебания весьма малы, линеаризуем исходные уравнения относительно

отклонений от невозмущенного движения:

$$\Delta q_i^M = q_i^M - q_{0i}^M, \quad \Delta q_i^{\partial} = q_i^{\partial} - q_{0i}^{\partial}.$$

Получаем

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n (m_{ik}^M \Delta \ddot{q}_k^M + r_{ik}^M \Delta \dot{q}_k^M + c_{ik}^{*M} \Delta q_k^M) + \\ + \sum_{k=1}^n (r_{ik}^{\partial*} \Delta \dot{q}_k^{\partial} + c_{ik}^{\partial*} \Delta q_k^{\partial}) = \Phi_i^M, \\ \sum_{k=1}^n (m_{ik}^{\partial} \Delta \ddot{q}_k^{\partial} + r_{ik}^{\partial*} \Delta \dot{q}_k^{\partial} + c_{ik} \Delta q_k^{\partial}) + \\ + \sum_{k=1}^n (r_{ik}^{*M} \Delta \dot{q}_k^M + c_{ik}^{*M} \Delta q_k^M) = \Phi_i^{\partial}, \end{aligned} \right\} (5.47)$$

где

$$\left. \begin{aligned} c_{ik}^{*M} = c_{ik}^M + \frac{1}{2} \sum_{k, l=1}^n \left[\left(\frac{\partial^2 c_{jl}^{\partial}}{\partial q_i^M \partial q_k^M} \right)_0 q_{0j}^{\partial} q_{0l}^{\partial} - \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial^2 m_{jl}^{\partial}}{\partial q_i^M \partial q_k^M} \right)_0 \zeta_{0j}^{\partial} \zeta_{0l}^{\partial} \right], \\ c_{ik}^{\partial} = \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial c_{kl}^{\partial}}{\partial q_i^M} \right)_0 q_{0l}^{\partial}, \quad r_{ik}^{\partial*} = - \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial m_{kl}^{\partial}}{\partial q_i^M} \right)_0 \zeta_{0l}^{\partial}, \\ r_{ik}^{\partial*} = r_{ik}^{\partial} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial m_{ik}^{\partial}}{\partial q_j^M} \right)_0 \zeta_{0j}^M, \\ c_{ik}^{*M} = \sum_{j, l=1}^n \left(\frac{\partial^2 m_{il}}{\partial q_j^M \partial q_k^M} \right)_0 \zeta_{0j}^M \zeta_{0l}^{\partial}, \\ r_{ik}^{*M} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial m_{ij}^{\partial}}{\partial q_k^M} \right)_0 q_{0j}^{\partial}. \end{aligned} \right\} (5.48)$$

Введем обозначения квадратных матриц вида $n \times n$:

$$\begin{aligned} m^M &= \|m_{ik}^M\|, & r^M &= \|r_{ik}^M\|, & c^M &= \|c_{ik}^{*M}\|, & r^{M\partial} &= \|r_{ik}^{\partial*}\|, \\ c^{M\partial} &= \|c_{ik}^{M\partial}\|, & m^{\partial} &= \|m_{ik}^{\partial}\|, & r^{\partial} &= \|r_{ik}^{\partial}\|, & c^{\partial} &= \|c_{ik}^{\partial}\|, \\ r^{\partial M} &= \|r_{ik}^{\partial M}\|, & c^{\partial M} &= \|c_{ik}^{\partial M}\|, \end{aligned}$$

и матриц-столбцов:

$$q^M = \|\Delta q_k^M\|, \quad q^{\partial} = \|\Delta q_k^{\partial}\|, \quad \Phi^M = \|\Phi_k^M\|, \quad \Phi^{\partial} = \|\Phi_k^{\partial}\|.$$

Уравнения (5.47) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} m^M \ddot{q}^M + r^M \dot{q}^M + c^M q^M + r^{M\partial} \dot{q}^{\partial} + c^{M\partial} q^{\partial} &= \Phi^M, \\ m^{\partial} \ddot{q}^{\partial} + r^{\partial} \dot{q}^{\partial} + c^{\partial} q^{\partial} + r^{\partial M} \dot{q}^M + c^{\partial M} q^M &= \Phi^{\partial}, \end{aligned} \right\} \quad (5.49)$$

или

$$m\dot{q} + r\dot{q} + cq = \Phi, \quad (5.50)$$

где

$$m = \begin{vmatrix} m^M & 0 \\ 0 & m^{\partial} \end{vmatrix}, \quad r = \begin{vmatrix} r^M & r^{M\partial} \\ r^{\partial M} & r^{\partial} \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} c^M & c^{M\partial} \\ c^{\partial M} & c^{\partial} \end{vmatrix},$$

$$q = \begin{vmatrix} q^M \\ q^{\partial} \end{vmatrix}, \quad \Phi = \begin{vmatrix} \Phi^M \\ \Phi^{\partial} \end{vmatrix}$$

— блочные матрицы.

Если невозмущенное движение рассматриваемой электромеханической системы устойчиво, а слабой нестационарностью, вносимой индуктивно-емкостными датчиками с переменным напряжением питания (см. выражения (5.48)), можно пренебречь, то дисперсии тепловых флуктуационных колебаний в системе (5.50) выражаются формулами (5.29). Эти формулы при одинаковой температуре элементов электромеханической системы имеют вид

$$\left. \begin{aligned} M[q_i^2] &= kT \sum_{\nu, \mu=1}^{2n} (r_{\nu\mu} + r_{\mu\nu}) \int_0^{\infty} w_{i\nu}(t) w_{i\mu}(t) dt, \\ M[\dot{q}_i^2] &= kT \sum_{\nu, \mu=1}^n (r_{\nu\mu} + r_{\mu\nu}) \int_0^{\infty} \dot{w}_{i\nu}(t) \dot{w}_{i\mu}(t) dt. \end{aligned} \right\} \quad (5.51)$$

Фундаментальная матрица $w = \|w_{ij}\|$ определяется уравнением

$$m\dot{w} + r\dot{w} + cw = 0$$

при начальных условиях

$$w(0) = 0, \quad \dot{w}(0) = m^{-1}.$$

Допустим, что имеются безынерционные усилители с шумовой температурой T_y . С помощью этих усилителей можно усиливать сигналы индуктивно-емкостных датчи-

ков, а именно векторный сигнал $r^{*3}q^{*3}$. Усиленные сигналы датчиков можно вводить в цепи питания тех же датчиков.

Попытаемся, подобно тому как было описано выше, уменьшить тепловые флуктуационные колебания путем уменьшения «естественных» сопротивлений в системе с одновременным созданием «искусственных» сопротивлений за счет отрицательных обратных связей. Суммарные сопротивления $r_{\nu\mu}$, фигурирующие в уравнениях свободного движения системы, при этом должны оставаться неизменными. Неизменными остаются также весовые функции $w_{i\nu}$.

Легко видеть, что, как и в предшествующем случае, с помощью усилителей с шумовой температурой T_y , превышающей температуру T исходной системы, невозможно сколько-либо существенно уменьшить уровни флуктуационных тепловых колебаний. Доказательство такое же, как в предыдущем случае. Пусть сопротивление $r_{ik}^{*3} = r_{ki}^{*3}$ уменьшено в d раз и к нему подключен согласованный вход безынерционного усилителя с температурой входного сопротивления T и общей шумовой температурой T_y . Сигнал усиливается этим усилителем в $2d - 1$ раз и подается на вход соответствующей цепи индуктивно-емкостного датчика, образуя отрицательную безынерционную обратную связь. В результате восстанавливается сопротивление

$$\frac{r_{ik}^{*3}}{2d} + (2d - 1) \frac{r_{ik}^{*3}}{2d} = r_{ik}^{*3},$$

а спектральная плотность шумов становится равной

$$k \frac{r_{ik}^{*3}}{d} T + 2k \frac{(2d - 1)^2 r_{ik}^{*3}}{d} T_y = 2kr_{ik}^{*3} T \frac{1 + 2(2d - 1)^2 T_y/T}{2d},$$

что при $T_y > T$, $2d - 1 > 0$ больше 90% исходной спектральной плотности $2kr_{ik}^{*3} T$.

Выше показано, что интегральные квадратичные оценки вида

$$\int_0^{\infty} w_{i\nu}(t) w_{i\mu}(t) dt$$

положительны и увеличение любого из элементов матрицы спектральных плотностей ведет к увеличению дисперсий (см. (5.21), (5.22), (5.51)).

Предельная точность управления пассивным объектом при некантовом взаимодействии с контролирующей системой. В рассмотренных задачах стабилизации вопрос об оптимальной обработке информации, оптимальной фильтрации сигналов датчиков информации, не ставился. Поэтому эти примеры, несмотря на их относительную общность, не являются вполне убедительными в смысле предельной возможной точности управления.

Попытаемся хотя бы для одного класса пассивных объектов решить ту же задачу о предельной точности управления с позиций оптимальной фильтрации сигналов. Ввиду того, что априорная информация о контролируемом процессе представлена в виде дифференциальных уравнений, естественно привлечь теорию фильтрации Калмана [5.11], [5.12].

Хорошо известно [5.11], что если есть линейный объект

$$\dot{x} + ax = \xi_x, \quad (5.52)$$

где ξ_x — вектор-столбец белых шумов с матрицей спектральных плотностей S_x , a — квадратная ($n \times n$) матрица коэффициентов, и вектор наблюдения (измерения) имеет вид

$$z = h_z x + \xi_z, \quad (5.53)$$

где ξ_z — вектор-столбец белых шумов с неособой спектральной матрицей S_z , h_z — заданная квадратная или прямоугольная матрица, то оптимальной в смысле минимума математического ожидания квадратов ошибок оценивания является система (фильтр Калмана)

$$\dot{y} + ay = k_\Phi (z - h_z y), \quad (5.54)$$

где $k_\Phi = Rh_z^T S_z^{-1}$, $R = M[(x - y)(x - y)^T]$ — ковариационная матрица ошибок, определяемая уравнением

$$\dot{R} + aR + Ra^T + Rh_z^T S_z^{-1} h_z R = S_x \quad (5.55)$$

при начальном условии $R(t_0) = R_0$.

Рассмотрим задачу оптимального контроля линейной пассивной стационарной системы, описываемой уравнением (5.2) со спектральной матрицей тепловых шумов (5.4). Будем полагать, что вектор наблюдения имеет вид

$$z = (r + r^T) \dot{q} + \xi_{\text{и}}, \quad (5.56)$$

где $\xi_{\text{и}}$ — вектор белых шумов со спектральной матрицей

$$S_{\text{и}} = 2kT_{\text{и}} (r + r^T), \quad (5.57)$$

$T_{\text{и}}$ — шумовая температура измерителей. Если считать, что уравнение (5.2) описывает объект вместе с входными «цепями» измерителей, то эти предположения являются достаточно общими. Действительно, для электрической цепи $r = r^T$ и $(r + r^T) \dot{q} = 2r \dot{q}$ — удвоенная матрица напряжений на активных сопротивлениях. Эти напряжения измеряются с помощью усилителей с согласованными входами, матрица входных сопротивлений которых равна $2r$, а шумовая температура $T_{\text{и}}$. Поэтому матрица спектральных плотностей шумов усилителей имеет вид (5.57). Если объект является пассивной электромеханической системой, то матрица r может быть кососимметричной. В этом случае для измерения доступны, как правило, диагональные члены матрицы $r \dot{q}$, что отвечает выражению (5.56).

Полагаем матрицы m , c , $r + r^T$ неособыми. Введем блочные матрицы

$$a = \begin{vmatrix} m^{-1}r & m^{-1}c \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad x = \begin{vmatrix} \dot{q} \\ q \end{vmatrix}, \quad h_z = \|r + r^T 0\|, \quad \xi_x = \begin{vmatrix} m^{-1}\varphi \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (5.58)$$

Уравнения (5.2), (5.56) запишутся в форме (5.52), (5.53):

$$\dot{x} + ax = \xi_x, \quad z = h_z x + \xi_z. \quad (5.59)$$

Оптимальный фильтр будет иметь вид (5.54), и ковариационная матрица ошибок

$$R = M[(y - x)(y - x)^T] = \begin{vmatrix} R_{\xi\xi} & R_{\xi\epsilon} \\ R_{\epsilon\xi} & R_{\epsilon\epsilon} \end{vmatrix}, \quad (5.60)$$

где $R_{\xi\xi}$, $R_{\xi\epsilon}$, $R_{\epsilon\xi}$, $R_{\epsilon\epsilon}$ — матрицы-блоки размером $n \times n$ (при размерности матрицы a $2n \times 2n$), определяется уравнением

$$\dot{R} + aR + Ra^T + Rh_z^T S_{\text{и}}^{-1} h_z R = S_x. \quad (5.61)$$

В развернутой до блоков форме это уравнение дает

$$\left. \begin{aligned} \dot{R}_{\varepsilon\varepsilon} + m^{-1}rR_{\varepsilon\varepsilon} + m^{-1}cR_{\varepsilon\varepsilon} + R_{\varepsilon\varepsilon}r^Tm^{-1} + R_{\varepsilon\varepsilon}cm^{-1} + \\ + \frac{1}{2kT_{\text{ш}}} R_{\varepsilon\varepsilon} (r + r^T) R_{\varepsilon\varepsilon} = kTm^{-1} (r + r^T) m^{-1}, \\ \dot{R}_{\varepsilon\varepsilon} + m^{-1}rR_{\varepsilon\varepsilon} + m^{-1}cR_{\varepsilon\varepsilon} - R_{\varepsilon\varepsilon} + \\ + \frac{1}{2kT_{\text{ш}}} R_{\varepsilon\varepsilon} (r + r^T) R_{\varepsilon\varepsilon} = 0, \\ \dot{R}_{\varepsilon\varepsilon} - R_{\varepsilon\varepsilon} + R_{\varepsilon\varepsilon}r^Tm^{-1} + R_{\varepsilon\varepsilon}cm^{-1} + \\ + \frac{1}{2kT_{\text{ш}}} R_{\varepsilon\varepsilon} (r + r^T) R_{\varepsilon\varepsilon} = 0, \\ \dot{R}_{\varepsilon\varepsilon} - R_{\varepsilon\varepsilon} - R_{\varepsilon\varepsilon} + \frac{1}{2kT_{\text{ш}}} R_{\varepsilon\varepsilon} (r + r^T) R_{\varepsilon\varepsilon} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.62)$$

Эти уравнения для стационарной системы имеют весьма простое частное решение

$$R_{\varepsilon\varepsilon} = kT_{\text{ш}}c^{-1}, \quad R_{\varepsilon\varepsilon} = kT_{\text{ш}}m^{-1}, \quad R_{\varepsilon\varepsilon} = R_{\varepsilon\varepsilon} = 0. \quad (5.63)$$

Действительно, подставляя (5.63) в (5.62), убеждаемся, что три нижних уравнения обращаются в тождества, а верхнее уравнение приобретает вид

$$\begin{aligned} kT_{\text{ш}}m^{-1}rm^{-1} + kT_{\text{ш}}m^{-1}r^Tm^{-1} + \frac{kT_{\text{ш}}^2}{2T_{\text{ш}}} m^{-1} (r + r^T) m^{-1} + \\ = kTm^{-1} (r + r^T) m^{-1}, \end{aligned}$$

откуда следует:

$$T_{\text{ш}} + \frac{T_{\text{ш}}^2}{2T_{\text{ш}}} = T, \quad (5.64)$$

$$T_{\text{ш}} = T_{\text{ш}} \left(\sqrt{1 + 2\frac{T}{T_{\text{ш}}}} - 1 \right) \quad (5.65)$$

(второй корень уравнения (5.64) отрицателен и не имеет физического смысла). Рассматриваемая система вполне наблюдаема по Калману. Действительно, легко проверить, что при неособых матрицах m , c , $r + r^T$ ранг матрицы

$$\| h_z^T \quad a^T h_z^T \dots (a^T)^{n-1} h_z^T \| \quad (5.66)$$

равен $2n$. Из теории фильтра Калмана известно, что решение (5.63) в этом случае является единственным в том отношении, что к нему при $t \rightarrow \infty$ стремятся все другие решения, соответствующие произвольным начальным условиям.

Итак, в установившемся состоянии корреляционные матрицы ошибок оптимального оценивания равны

$$\left. \begin{aligned} R_{\varepsilon\varepsilon} &= kT_{\text{и}} \left(\sqrt{1 + 2\frac{T}{T_{\text{и}}}} - 1 \right) c^{-1}, \\ R_{\ddot{\varepsilon}\ddot{\varepsilon}} &= kT_{\text{и}} \left(\sqrt{1 + 2\frac{T}{T_{\text{и}}}} - 1 \right) m^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (5.67)$$

Эти выражения следует рассматривать как характеристики предельной возможной точности контроля пассивной системы при рассматриваемом некантовом взаимодействии с измерителями. Они допускают простую интерпретацию. Рассмотрим пассивную систему, аналогичную контролируемой, но с абсолютной температурой.

$$T_{\text{ш}} = T_{\text{и}} \left(\sqrt{1 + 2\frac{T}{T_{\text{и}}}} - 1 \right). \quad (5.68)$$

Согласно (5.13), (5.14) ковариационные матрицы тепловых флуктуационных колебаний в такой системе равны

$$M_{qq} = kT_{\text{ш}}c^{-1}, \quad M_{\dot{q}\dot{q}} = kT_{\text{ш}}m^{-1},$$

что совпадает с выражениями (5.67). Таким образом, предельная возможная точность контроля пассивной системы при рассматриваемом некантовом взаимодействии характеризуется ошибками, равными уровням тепловых флуктуационных колебаний этой системы при температуре $T_{\text{ш}}$. Что касается формулы для $T_{\text{ш}}$, то здесь целесообразно рассмотреть три случая:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } T_{\text{и}} &\ll T, & T_{\text{ш}} &\approx \sqrt{2T_{\text{и}}T}; \\ \text{б) } T_{\text{и}} &= T, & T_{\text{ш}} &= 0,732T; \\ \text{в) } T_{\text{и}} &\gg T, & T_{\text{ш}} &\approx T. \end{aligned} \right\} \quad (5.69)$$

Наибольший интерес представляют случаи б) и в). В случае б), когда шумовая температура измерителей равна температуре T контролируемой системы, предельная

достижимая точность контроля соответствует тепловым флуктуационным колебаниям при температуре $0,732T$. В случае $T_{\text{и}} \gg T$ предельная достижимая точность контроля практически не зависит от $T_{\text{и}}$ и соответствует уровням тепловых флуктуационных колебаний при температуре T . Здесь проявляется явный выигрыш от оптимальной фильтрации, однако и он не позволяет получить точность оценивания выше, чем соответствующая температуре T . Этот результат можно отнести не только к точности оценивания, но и к точности управления. Действительно, точность управления может превосходить точность измерения (оценивания) лишь в случае дополнительной фильтрации шумов в замкнутой системе. Однако фильтр Калмана уже осуществляет фильтрацию шумов и при этом сам фильтр является некоторой моделью контролируемой системы.

Действительно, вводя обозначение блочной матрицы

$$y = \begin{vmatrix} \dot{q}_{\Phi} \\ q_{\Phi} \end{vmatrix},$$

на основе (5.54), (5.58), (5.63) уравнение оптимального фильтра представляем в виде

$$m\ddot{q}_{\Phi} + r\dot{q}_{\Phi} + cq_{\Phi} + \frac{T_{\text{ш}}}{2T_{\text{и}}}(r + r^x)q_{\Phi} = \frac{T_{\text{ш}}}{2T_{\text{и}}}z. \quad (5.70)$$

Таким образом, стационарный оптимальный фильтр представляет собой некоторую модель контролируемой системы, отличающуюся от последней, по существу, лишь диссипативными членами. Эти члены слабо влияют на собственные частоты. Кроме того, при $T_{\text{и}} \gg T$, когда согласно предыдущему

$$\frac{T_{\text{ш}}}{2T_{\text{и}}} \approx \frac{T}{2T_{\text{и}}} \ll 1,$$

отличие левых частей уравнений (5.2), (5.70) вообще мало. Приходим к заключению, что оптимальный фильтр осуществляет фильтрацию шумов вплоть до низших собственных частот контролируемой системы. Дальнейшее подавление шумов измерителей в замкнутой системе невозможно, так как собственные частоты замкнутой системы для осуществления стабилизации, как правило, должны пре-

вышать собственные частоты разомкнутой системы. Более строгое доказательство этого положения о предельной точности управления можно получить на основе теоремы разделения или стохастической эквивалентности [5.15]. Указанный порог, или барьер, управления становится особенно заметным в задачах контроля микроскопических объектов. Есть, однако, основания предполагать, что с помощью квантового взаимодействия с контролируемым объектом можно получить существенно более высокую точность контроля в сравнении с рассмотренным «классическим» случаем. К такому выводу приводят, в частности, следующие рассуждения. Пусть мы имеем систему (5.2), но с одной степенью свободы. Тогда m, r, c, q, φ — скалярные величины и формулы (5.67) дают выражения для дисперсий ошибок оценивания координаты и ее производной:

$$R_{\varepsilon\varepsilon} = M[\varepsilon^2] = \frac{kT_{\text{ш}}}{c}, \quad R_{\dot{\varepsilon}\dot{\varepsilon}} = M[\dot{\varepsilon}^2] = \frac{kT_{\text{ш}}}{m}.$$

Величина

$$m^2 M[\dot{\varepsilon}^2] = M[(m\dot{\varepsilon})^2] = kT_{\text{ш}}m$$

есть дисперсия ошибки оценивания импульса. Таким образом,

$$M[\varepsilon^2] M[(m\dot{\varepsilon})^2] = \overline{\varepsilon^2} \overline{(m\dot{\varepsilon})^2} = k^2 T_{\text{ш}}^2 \frac{m}{c},$$

$$\sqrt{\overline{\varepsilon^2}} \sqrt{\overline{(m\dot{\varepsilon})^2}} = kT_{\text{ш}} \sqrt{\frac{m}{c}} = \frac{kT_{\text{ш}}}{\omega_0},$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$ — собственная частота контролируемой системы. Между тем соотношение неопределенности Гейзенберга [5.16], рассматривающее квантовое взаимодействие с контролируемым процессом, может быть записано в виде

$$\sqrt{\overline{\varepsilon^2}} \sqrt{\overline{(m\dot{\varepsilon})^2}} \approx \frac{h}{2\pi},$$

где h — постоянная Планка.

Для задач, в которых собственная частота объекта намного меньше частот инфракрасного диапазона (именно в этих задачах справедлива формула Найквиста и формула

(1.2) без квантового множителя), имеет место сильное *) неравенство

$$kT_{\text{ш}} \gg h \frac{\omega_0}{2\pi}. \quad (5.71)$$

Приходим к заключению, что оценка предельной точности при классическом взаимодействии может на много порядков превышать оценку предельной точности согласно принципу неопределенности (5.71) при квантовом взаимодействии. Дальнейшее подтверждает это.

Предельная точность контроля координат посредством квантового излучения. Рассмотрим случай оптического контроля координат механической или электромеханической системы посредством света с длиной волны, достаточной короткой для того, чтобы его можно было считать потоком фотонов. Изменение компонент вектора q вызывает изменение световых потоков, улавливаемых фотоэлектронными умножителями (ФЭУ) или эквивалентными им по чувствительности фотодатчиками. Известно [5.13], [5.14], что чувствительность ФЭУ к слабым световым потокам может быть сделана настолько высокой, что с большой вероятностью регистрируется каждый квант (фотон) излучения. Световые потоки будем считать слабыми, но настолько, что число n_ν фотонов, поступающих в приемник излучения в единицу времени, остается большим в сравнении со спектром контролируемого процесса. Это позволяет рассматривать процессы контроля как непрерывные. Будем предполагать, что фотодатчики устроены так, что световой поток (математическое ожидание энергии, поступающей за единицу времени), регистрируемый каждым датчиком, изменяется на полную величину $E_\nu = h\nu n_\nu$ (ν — частота) при изменении соответствующей координаты на δ . Величина δ , конечно, больше длины волны λ , используемого света. Таким образом, крутизна характеристики каждого фотодатчика считается равной $h\nu \frac{n_\nu}{\delta}$. Вследствие «дробового эффекта» потока фотонов энергия, улавливаемая фотодатчиком за единицу времени, флуктуирует. Согласно известному правилу дисперсия

*) При $T = 500$ град, $\omega_0 = 2\pi \cdot 1000$, $\frac{kT_{\text{ш}}}{h\omega_0} 2\pi = 1,66 \cdot 10^9$.

этих флуктуаций выражается формулой

$$\overline{\Delta E_{\nu}^2} = h\nu E_{\nu}. \quad (5.72)$$

В диапазоне частот сигнала, существенно меньших $n_{\nu} = E_{\nu}/h\nu$, флуктуации светового потока можно считать белыми шумами со спектральной плотностью (5.72). Однако нас интересует шум, приведенный к контролируемой координате. Спектральная плотность приведенного шума определяется как величина (5.72), поделенная на квадрат крутизны преобразования:

$$\frac{\overline{\Delta E_{\nu}^2}}{\left(h\nu \frac{n_{\nu}}{\delta}\right)^2} = \frac{\delta^2}{n_{\nu}}. \quad (5.73)$$

Шум, свойственный самому фотоприемнику (ФЭУ), как уже отмечалось, может быть исчезающе малым, и им пренебрегаем. Световые потоки фотодатчиков считаем независимыми. Таким образом, вектор наблюдения в данном случае имеет вид

$$z = q + \xi_{и}, \quad (5.74)$$

где $\xi_{и}$ — векторный белый шум с матрицей спектральных плотностей

$$S_{и} = \frac{\delta^2}{n_{\nu}} \mathbf{1}, \quad (5.75)$$

$\mathbf{1}$ — единичная матрица размерности $n \times n$. Флуктуации светового давления создают некоторое обратное шумовое воздействие на контролируемый объект. Спектральная плотность флуктуаций светового давления имеет следующий порядок величины:

$$\frac{\overline{\Delta E_{\nu}^2}}{c_{св}^2} = \left(\frac{h}{\lambda_{\nu}}\right)^2 n_{\nu}, \quad (5.76)$$

где $c_{св}$ — скорость света. Уравнения контролируемого процесса запишутся в виде

$$m\dot{j} + r\dot{q} + cq = \varphi + \varphi_{д}, \quad (5.77)$$

где φ — тепловые шумы с матрицей спектральных плотностей (5.4), $\varphi_{д}$ — шумы, создаваемые флуктуациями

светового давления, с матрицей спектральных плотностей

$$S_{\Phi_D} = \left(\frac{h}{\lambda_\nu}\right)^2 n_\nu \mathbf{1}. \quad (5.78)$$

Вводя обозначения блочных матриц:

$$\left. \begin{aligned} x &= \begin{vmatrix} \dot{q} \\ q \end{vmatrix}, & a &= \begin{vmatrix} m^{-1}r & m^{-1}c \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, & h_z &= \|0 \ 1\|, \\ \xi_{\Phi} &= \begin{vmatrix} m^{-1}(\varphi + \Phi_D) \\ 0 \end{vmatrix}, \\ S_{\xi\Phi} &= \begin{vmatrix} m^{-1}(S_\varphi + S_{\Phi_D}) & m^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} (5.79)$$

(матрица m считается неособой), уравнения (5.74), (5.77) запишем в виде

$$\dot{x} + ax = \xi_\Phi, \quad z = h_z x + \xi_D. \quad (5.80)$$

Фильтр Калмана будет иметь вид (5.54), $k_\Phi = R h_z^T S_z^{-1}$, где ковариационная матрица R ошибок оценивания вида (5.60) удовлетворяет уравнению

$$\dot{R} + aR + Ra^T + R h_z^T S_z^{-1} h_z R = S_{\xi\Phi}. \quad (5.81)$$

Подставляя сюда выражения (5.79), находим уравнения для матриц-блоков:

$$\left. \begin{aligned} \dot{R}_{\xi\xi} + m^{-1}r R_{\xi\xi} + m^{-1}c R_{\xi\xi} + R_{\xi\xi} r^T m^{-1} + R_{\xi\xi} c m^{-1} + \\ + \frac{n_\nu}{\delta^2} R_{\xi\xi} R_{\xi\xi} = m^{-1}(S_\varphi + S_{\Phi_D}) m^{-1}, \\ \dot{R}_{\xi\epsilon} + m^{-1}r R_{\xi\epsilon} + m^{-1}c R_{\xi\epsilon} - R_{\xi\epsilon} + \frac{n_\nu}{\delta^2} R_{\xi\epsilon} R_{\xi\epsilon} = 0, \\ \dot{R}_{\epsilon\xi} - R_{\epsilon\xi} + R_{\epsilon\xi} r^T m^{-1} + R_{\epsilon\xi} c m^{-1} + \frac{n_\nu}{\delta^2} R_{\epsilon\xi} R_{\epsilon\xi} = 0, \\ \dot{R}_{\epsilon\epsilon} - R_{\epsilon\epsilon} - R_{\epsilon\epsilon} + \frac{n_\nu}{\delta^2} R_{\epsilon\epsilon}^2 = 0. \end{aligned} \right\} (5.82)$$

Второе и третье из этих уравнений идентичны, если принять во внимание соотношение $R_{\xi\epsilon}^T = R_{\epsilon\xi}$. В

установившемся режиме стационарной системы

$$\left. \begin{aligned} m^{-1}rR_{\varepsilon\varepsilon} + R_{\varepsilon\varepsilon}r^T m^{-1} + m^{-1}cR_{\varepsilon\varepsilon} + R_{\varepsilon\varepsilon}cm^{-1} + \\ + \frac{n_v}{\delta^2} R_{\varepsilon\varepsilon}R_{\varepsilon\varepsilon} = m^{-1}(S_\varphi + S_{\varphi Д})m^{-1}, \\ R_{\varepsilon\varepsilon} = m^{-1}rR_{\varepsilon\varepsilon} + m^{-1}cR_{\varepsilon\varepsilon} + \frac{n_v}{\delta^2} R_{\varepsilon\varepsilon}R_{\varepsilon\varepsilon}, \\ R_{\varepsilon\varepsilon} + R_{\varepsilon\varepsilon} = \frac{n_v}{\delta^2} R_{\varepsilon\varepsilon}^2. \end{aligned} \right\} \quad (5.83)$$

Полагаем

$$R_{\varepsilon\varepsilon} = R_{\varepsilon\varepsilon} = \frac{n_v}{2\delta^2} R_{\varepsilon\varepsilon}^2, \quad (5.84)$$

два верхних уравнения (5.83) преобразуем к виду

$$R_{\varepsilon\varepsilon} = m^{-1}cR_{\varepsilon\varepsilon} + \frac{n_v}{2\delta^2} m^{-1}rR_{\varepsilon\varepsilon}^2 + \frac{n_v^2}{2\delta^4} R_{\varepsilon\varepsilon}^3, \quad (5.85)$$

$$\begin{aligned} mR_{\varepsilon\varepsilon}^4 m + \frac{2\delta^2}{n_v} (mR_{\varepsilon\varepsilon}^3 r^T + rR_{\varepsilon\varepsilon}^3 m) + \frac{2\delta^4}{n_v^2} (cR_{\varepsilon\varepsilon}^2 m + mR_{\varepsilon\varepsilon}^2 c) + \\ + \frac{4\delta^4}{n_v^2} rR_{\varepsilon\varepsilon}^2 r^T + \frac{4\delta^6}{n_v^3} (cR_{\varepsilon\varepsilon} r^T + rR_{\varepsilon\varepsilon} c) = \frac{4\delta^6}{n_v^3} (S_\varphi + S_{\varphi Д}). \end{aligned} \quad (5.86)$$

Если эти уравнения имеют решение, то оно является единственным в том смысле, что все другие решения, соответствующие произвольным начальным условиям, стремятся к данному решению при $t \rightarrow \infty$. Это вытекает из того, что ранг матрицы (5.66) и в данном случае равен $2n$.

Рассмотрим важные частные случаи.

1. Высокая крутизна характеристик фотодатчиков, значительные массы. В этом случае естественно в левой части уравнения (5.86) сохранить лишь первый член:

$$mR_{\varepsilon\varepsilon}^4 m = \frac{4\delta^6}{n_v^3} (S_\varphi + S_{\varphi Д}), \quad (5.87)$$

а в правой части выражения (5.85) — последний член:

$$R_{\varepsilon\varepsilon} = \frac{n_v^2}{2\delta^4} R_{\varepsilon\varepsilon}^3. \quad (5.88)$$

Из этих выражений и (5.77), (5.78) вытекает

$$R_{\varepsilon\varepsilon}^4 = \frac{4\delta^6 kT}{n_\nu^3} m^{-1} (r + r^T) m^{-1} \pm \frac{4h^2\delta^6}{n_\nu^2 \lambda_\nu^2} m^{-2}, \quad (5.89)$$

$$mR_{\varepsilon\varepsilon} R_{\varepsilon\varepsilon} m = \frac{2\delta^2 kT}{n_\nu} (r + r^T) + 2 \frac{\delta^2}{\lambda_\nu^2} h^2 \mathbf{1}. \quad (5.90)$$

Числовые расчеты по этим формулам показывают, что предельная достижимая точность контроля координат здесь может быть на много порядков выше, чем в рассматриваемом классическом случае. В частности, при исчезающе малом рассеивании энергии (движение в вакууме), низких температурах и больших значениях n_ν из (5.90) следует

$$mR_{\varepsilon\varepsilon} R_{\varepsilon\varepsilon} m = 2 \frac{\delta^2}{\lambda_\nu^2} h^2 \mathbf{1}.$$

Для объекта с одной степенью свободы это дает

$$V_{\varepsilon^2} V_{(\dot{m}\varepsilon)^2} = V_2 \frac{\delta}{\lambda_\nu} h.$$

При $\delta \approx \lambda_\nu$,

$$V_{\varepsilon^2} V_{(\dot{m}\varepsilon)^2} \approx h,$$

что практически совпадает с соотношением неопределенности Гейзенберга.

2. Малые массы, малые жесткости. В этом случае уравнение (5.86) уступает место приближенному

$$\frac{4\delta^4}{n_\nu^2} r R_{\varepsilon\varepsilon}^2 r^T = \frac{4\delta^6}{n_\nu^3} (S_\varphi + S_{\varphi Д}).$$

Отсюда с учетом (5.78), (5.79) следует

$$R_{\varepsilon\varepsilon}^2 = \frac{\delta^2}{n_\nu} kT [r^{-1} + (r^T)^{-1}] + \frac{h^2\delta^2}{\lambda_\nu^2} r^{-1} (r^T)^{-1}.$$

Здесь также можно получить предельную точность контроля координат, существенно превышающую точность в классическом случае.

3. Низкая крутизна характеристик фотодатчиков. В этом случае величина δ^2/n_v велика и уравнения (5.86), (5.85) вырождаются в следующие:

$$cR_{\varepsilon\varepsilon}r^T + rR_{\varepsilon\varepsilon}c = S_\varphi = kT(r + r^T),$$

$$R_{\varepsilon\varepsilon} = m^{-1}cR_{\varepsilon\varepsilon}.$$

Они имеют решение

$$R_{\varepsilon\varepsilon} = kTc^{-1}, \quad R_{\varepsilon\varepsilon} = kTm^{-1},$$

практически совпадающее с классическим случаем.

Пример. Рассмотрим устройство, аналогичное по конструкции шлейфу осциллографа или зеркальному гальванометру с миниатюрной подвижной системой.

Уравнение движения подвижной системы прибора запишем в виде

$$J_\Gamma \ddot{\alpha} + r_\Gamma \dot{\alpha} + c_\Gamma \alpha = \varphi_\Gamma, \quad (5.91)$$

где J_Γ — момент инерции, c_Γ — коэффициент крутильной жесткости, r_Γ — коэффициент вязкого трения, φ_Γ — тепловой шум, α — угол поворота.

Рассмотрим два случая. В первом (классическом) случае с помощью безынерционного усилителя контролируется э.д.с., наводимая в шлейфе (обмотке) при колебаниях подвижной системы в магнитном поле. По сигналу этого усилителя с помощью фильтра Калмана оцениваются тепловые флуктуационные колебания шлейфа и их скорость. Предполагая индуктивность шлейфа пренебрежимо малой, сигнал наблюдения записываем в виде

$$u_z = k_1 \dot{\alpha} + \xi_n, \quad (5.92)$$

где ξ_n — шум усилителя, приведенный ко входу. Данная система является электромеханической, однако удобнее все переменные приводить к одним, например механическим, величинам. Вводя обозначения

$$x = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \\ \alpha \end{Bmatrix}, \quad a = \begin{Bmatrix} r_\Gamma & c_\Gamma \\ J_\Gamma & J_\Gamma \end{Bmatrix}, \quad \xi_x = \begin{Bmatrix} \varphi_\Gamma \\ J_\Gamma \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad h_z = \|r_\Gamma \ 0\|, \quad (5.93)$$

записываем уравнения в виде (5.52), (5.53):

$$\dot{x} + ax = \xi_x, \quad z = h_z x + \xi_z. \quad (5.94)$$

Согласно предыдущему, для элементов ковариационной матрицы ошибок оптимального оценивания справедливой формулы (5.67), принимающие в данном случае скалярную форму:

$$\left. \begin{aligned} R_{\epsilon\epsilon} &= \bar{\epsilon}^2 = \frac{kT_{\text{и}}}{c} \left(\sqrt{1 + 2 \frac{T}{T_{\text{и}}}} - 1 \right), \\ R_{\dot{\epsilon}\dot{\epsilon}} &= \bar{\dot{\epsilon}}^2 = \frac{kT_{\text{и}}}{m} \left(\sqrt{1 + 2 \frac{T}{T_{\text{и}}}} - 1 \right), \\ R_{\epsilon\dot{\epsilon}} &= R_{\dot{\epsilon}\epsilon} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.95)$$

Фильтр Калмана будет иметь форму (5.70), которая для данного случая преобразуется к виду

$$\begin{aligned} J_{\Gamma} \ddot{\alpha}_{\Phi} + r_{\Gamma} \sqrt{1 + 2 \frac{T}{T_{\text{и}}}} \dot{\alpha}_{\Phi} + c_{\Gamma} \alpha_{\Phi} = \\ = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 2 \frac{T}{T_{\text{и}}}} - 1 \right) (r_{\Gamma} \dot{\xi} + \xi_z). \end{aligned} \quad (5.96)$$

Из изложенной общей теории и выражений (5.95) следует, что при $T_{\text{и}} > T$ получить точность оценивания α , $\dot{\alpha}$, существенно превышающую уровень естественных тепловых флукуационных колебаний шлейфа, нельзя. Выше утверждалось, что это относится и к точности стабилизации управления. Для иллюстрации этого положения замкнем систему, снабдив ее дополнительным шлейфом (обмоткой), электрически не связанным с первым. В этот управляющий шлейф (обмотку) поступает усиленный сигнал α_{Φ} . Уравнения замкнутой системы запишем в скалярном виде:

$$\left. \begin{aligned} J_{\Gamma} \ddot{\alpha} + r_{\Gamma} \dot{\alpha} + c_{\Gamma} \alpha &= -k_y \alpha_{\Phi} + \Phi_{\Gamma}, \\ J_{\Gamma} \ddot{\alpha}_{\Phi} + r_{\Gamma} \sqrt{1 + 2 \frac{T}{T_{\text{и}}}} \dot{\alpha}_{\Phi} + c_{\Gamma} \alpha_{\Phi} &= \\ &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 2 \frac{T}{T_{\text{и}}}} - 1 \right) (r_{\Gamma} \dot{\xi} + \xi_z), \end{aligned} \right\} \quad (5.97)$$

где k_y — коэффициент усиления.

Структуру системы поясняет рис. 5.4, где $У$ — усилитель, $ОФ$ — оптимальный фильтр. Для оценки точно-

сти стабилизации в замкнутой системе (5.97) достаточно выполнить обычные расчеты по определению дисперсий

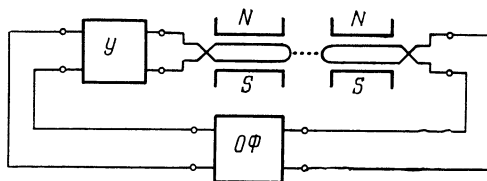


Рис. 5.4.

в стационарной линейной системе. Прделав эти расчеты, для $\overline{\alpha^2}$ находим

$$\overline{\alpha^2} = \frac{kT}{c_r} \frac{1 + 2 \frac{T_{и}}{T} k_y^* \left(1 + d - \frac{1}{2} dk_y^*\right)}{1 + k_y^* - dk_y^{*2}}, \quad (5.98)$$

$$d = \frac{J_r c_r}{r_r}, \quad k_y^* = k_y \frac{T}{4c_r T_{и}}.$$

Легко проверить, что при $T_{и} > T$, $k_y^* > 0$ всегда $\overline{\alpha^2} > \frac{kT}{c_r}$, т. е. в этих условиях невозможна стабилизация подвижной системы с точностью, превышающей уровень естественных тепловых флуктуационных колебаний свободной системы.

Рассмотрим теперь случай оптического контроля положения подвижной системы. Допустим, что на шлейфе или другой подвижной системе гальванометра укреплено зеркальце, отражающее концентрированный пучок света и посылающее его на неподвижные ФЭУ. Сигналы ФЭУ поступают в систему оптимального оценивания — фильтр Калмана $ФФ$ (рис. 5.5). Налицо условия, соответствующие рассмотренному выше случаю контроля координат посредством квантового излучения. Рассматриваемая контролируемая система имеет одну степень свободы. Поэтому все соотношения вида (5.82)—(5.90) здесь скалярные. Считая крутизну фотоэлектрического датчика достаточно высокой, используем приближенное решение

вида (5.89), (5.88), (5.84). В данном случае $\delta = \delta_r$ выражает угловое отклонение подвижной системы, при котором вы-

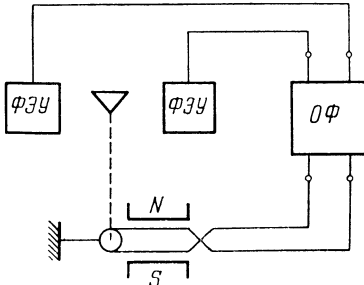


Рис. 5.5.

рабатывается максимальный сигнал фотодатчика. В выражение для спектральной плотности шума, создаваемого флуктуациями светового давления, в данном случае необходимо ввести множитель ρ^2 , где ρ — некоторый характерный линейный размер зеркала. Матрицы t и r здесь уступают место скалярным величинам J_r , r_r . Таким образом, формулы (5.84),

(5.88), (5.89) в данном случае запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} R_{\varepsilon\varepsilon} &= R_{\varepsilon\varepsilon} = \frac{n_\nu}{2\delta^2} \overline{\varepsilon^2}, \quad \overline{\varepsilon^2} = R_{\varepsilon\varepsilon} = \frac{n_\nu^2}{2\delta^4} R_{\varepsilon\varepsilon}^3 = \frac{n_\nu^2}{2\delta^4} (\overline{\varepsilon^2})^3, \\ R_{\varepsilon\varepsilon}^4 &= (\overline{\varepsilon^2})^4 = \frac{4\delta^6}{n_\nu^2 J_r^2} \left(\frac{2kTr_r}{n_\nu} + \frac{h^2}{\lambda_\nu^2} \rho^2 \right), \end{aligned} \right\} \quad (5.99)$$

откуда следует:

$$\sqrt{\overline{\varepsilon^2}} = \left(\frac{2\delta^3}{n_\nu J_r} \right)^{1/4} \left(\frac{2kTr_r}{n_\nu} + \frac{h^2}{\lambda_\nu^2} \rho^2 \right)^{1/8}, \quad (5.100)$$

$$\sqrt{\overline{\varepsilon^2}} = \left(\frac{2n_\nu \delta}{J_r^3} \right)^{1/4} \left(\frac{2kTr_r}{n_\nu} + \frac{h^2}{\lambda_\nu^2} \rho^2 \right)^{3/8}. \quad (5.101)$$

При $\delta = 10^{-4}$, $n_\nu = 10^{16} \text{ сек}^{-1}$, $r_r = 10^{-6} \text{ эрг} \cdot \text{сек}$, $T = 300 \text{ град}$, $\rho = 10^{-1} \text{ см}$, $\lambda_\nu = 0,710^{-4} \text{ сек}$, $J_r = 10^{-7} \text{ г} \cdot \text{см}^2$, среднеквадратические ошибки оценивания согласно формулам (5.99), (5.100) имеют значения

$$\sqrt{\overline{\varepsilon^2}} = 4,5 \cdot 10^{-10}, \quad \sqrt{\overline{\varepsilon^2}} = 1,35 \cdot 10^{-5} \text{ сек}^{-1}.$$

Это приблизительно на три порядка меньше уровней собственных тепловых флуктуационных колебаний шлейфа, которые при частоте шлейфа $\omega_0 = 1000 \text{ рад} \cdot \text{сек}^{-1}$ имеют

значения

$$\sqrt{\bar{\alpha}^2} = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{kT}{J_r}} = 6,45 \cdot 10^{-7},$$

$$\sqrt{\bar{\dot{\alpha}}^2} = \sqrt{\frac{kT}{J_r}} = 6,45 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^{-1}.$$

Точность, существенно превышающая уровень свободных тепловых флуктуационных колебаний, может быть достигнута и в задаче стабилизации подвижной системы. Действительно, подадим усиленный выходной сигнал оптимального фильтра на шлейф (обмотку) гальванометра (рис. 5.5).

Уравнения замкнутой системы согласно (5.91), (5.54), (5.75), (5.79), (5.99) будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} J_r \ddot{\alpha} + r_r \dot{\alpha} + c_r \alpha &= -k_y y_2 + \varphi_r, \\ \dot{y}_1 + \frac{r_r}{J_r} y_1 + \frac{c_r}{J_r} y_2 &= \frac{n_y^2}{2\delta^4} \bar{\varepsilon}^2 (\alpha - y_2 + \xi_n), \\ \dot{y}_2 - y_1 &= \frac{n_y}{\delta^2} \bar{\varepsilon}^2 (\alpha - y_2 + \xi_n). \end{aligned} \right\} (5.102)$$

Определяя обычным путем дисперсии, находя оптимальное значение коэффициента усиления k_y при указанных значениях других параметров, получаем $\sqrt{\bar{\alpha}^2} = 1,7 \times 10^{-8}$. При такой точности стабилизации сигнал y_2 в замкнутой системе будет отображать значительную часть случайного воздействия φ_r , что можно использовать для различных целей.

Однако практическое осуществление подобной системы связано с трудностями обеспечения малых параметров, высокого коэффициента усиления и пренебрежимо малой индуктивности шлейфа. Более удачным в этом отношении является прибор, схема которого представлена на рис. 5.6. Этот прибор состоит из световодного волоска 1 с металлическим покрытием, двух (для одномерного варианта прибора) или четырех (для двумерного варианта) приемных световодов 2, фотоприемников и усилителей 3, источника света 4 и электродов обратной связи 5. Элементы 1, 2, 5 и др. могут располагаться в вакууме, сжатом или

разреженном газе, жидкости. Размеры этих элементов предполагаются микроскопическими (микрон, доли микрон), но такими, что диаметры светопроводящих волокон больше длины волны используемого света. Последнее необходимо для выполнения функции световодов. Если вместо волоска 1

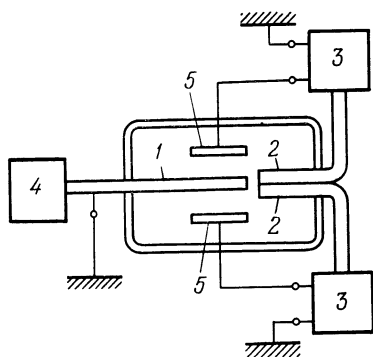


Рис. 5.6.

при записи уравнения движения рассматривать осциллятор с сосредоточенными параметрами, то только что изложенная теория полностью распространяется на данный вариант прибора. При такой конструкции можно обеспечить необходимые малые параметры и высокий коэффициент замкнутого контура. Прибор с обратной связью может быть использован для регистрации флуктуационных воздействий среды на

волосок. Удары броуновских частиц или даже тяжелых молекул могут регистрироваться по выбросам на общем фоне тепловых флуктуаций. Это следует из того, что хотя средние энергии броуновской частицы и обычной молекулы в тепловом движении одинаковы, импульс броуновской частицы относится к импульсу молекулы как корень квадратный из отношения масс.

ЛИТЕРАТУРА

- 1.1. Эйнштейн А., Собрание научных трудов, т. III, изд-во «Наука», 1966.
- 1.2. Эйнштейн А., Смолуховский М., Броуновское движение. Сб. статей, перев. с нем., Гостехиздат, 1936.
- 1.3. V a s c h e l i e r L., Théorie de la spèculation. Ann. Sci. Norm. Sup., 17, 1900.
- 1.4. F o k k e r A., Die mittlere Energie rotierender electrischer Dipole in Strahlungsfeld. Ann. Phys., Н. 5., 1914.
- 1.5. А й з е н ш и ц Р., Статистическая теория необратимых процессов, перев. с англ., ИЛ, 1963.
- 1.6. А н д р о н о в А. А., В и т т А. А., П о н т р я г и н Л. С., О статистическом рассмотрении динамических систем. ЖЭТФ, 3, 1933.
- 1.7. К о л м о г о р о в А. Н., Об аналитических методах теории вероятностей, УМН 5, 1938.
- 1.8. К о л м о г о р о в А. Н., П е т р о в с к и й И. Г., П и с к у н о в И. С., Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме. Бюллетень МГУ, сер. матем. и мех., 1, 1937.
- 1.9. Л е в и П., Стохастические процессы и броуновское движение, перев. с франц., изд-во «Наука», 1972.
- 1.10. Д ы н к и н Е. Б., Марковские процессы, Физматгиз, 1963.
- 1.11. И т о К., М а к к и н Г., Диффузионные процессы и их траектории, перев. с англ., изд-во «Мир», 1968.
- 1.12. К р а с о в с к и й А. А., Уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова и синтез релейных систем управления. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 5, 1967.
- 1.13. К р а с о в с к и й А. А., Статистическая теория переходных процессов в системах управления, изд-во «Наука», 1968.
- 1.14. К е р з о н Х у а н г, Статистическая механика, перев. с англ., изд-во «Мир», 1966.
- 1.15. Б е л е ц к и й В. В., Движение искусственного спутника относительно центра масс, изд-во «Наука», 1965.
- 1.16. Г и б б с, Дж. В., Основные принципы статистической механики, перев. с англ., Гостехиздат, 1946.
- 2.1. Б а р р е т Д. Ф. Применение уравнений Колмогорова для исследования систем автоматического управления со случайными возмущениями. Труды I Международного конгресса ИФАК. Статистические методы исследования. Теория структур, моделирование, терминология, образование, Изд-во АН СССР, 1961.
- 2.2. М е р к л и н г е р К. Дж., Численный анализ нелинейных систем управления с помощью уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова. Труды II Международного конгресса ИФАК. Оптимальные системы. Статистические методы, изд-во «Наука», 1965.

- 2.3. Красовский А. А., Решение уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова методом рядов. ДАН, 205, №3, 1972.
- 2.4. Красовский А. А., Решение уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова для динамических систем с аналитическими характеристиками. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 6, 1972.
- 2.5. Красовский А. А., Об энтропийной устойчивости динамических систем. Автоматика и телемеханика, № 3, 1965.
- 2.6. Пугачев В. С., Теория случайных функций, Физматгиз, 1962.
- 2.7. Лозв М., Теория вероятностей, перев. с англ., ИЛ, 1962.
- 2.8. Красовский А. А., Статистическая устойчивость движения нелинейных динамических систем и интегральные оценки моментов. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 4, 1965.
- 2.9. Красовский А. А., Буков В. Н., Итерационное решение уравнения Колмогорова в статистической динамике непрерывных систем. ДАН, 246, № 3 1974.
- 3.1. Пугачев В. С., Теория случайных функций, 1962.
- 3.2. Быховский М. Л., Основы динамической точности электрических и механических цепей, АН СССР, 1958.
- 3.3. Кокотович П. В., Метод точек чувствительности в исследовании и оптимизации линейных систем управления. Автоматика и телемеханика, № 12, 1964.
- 3.4. Кокотович П. В., Рутман Р. С., Чувствительность систем автоматического управления. Автоматика и телемеханика, № 4, 1963.
- 3.5. Траксел Дж., Синтез систем автоматического регулирования, перев. с англ., ИЛ, 1959.
- 3.6. Физматгиз, изд-во «Машиностроение», 1967.
- 3.7. Петров Б. Н., Крутько П. Д., Применение теории чувствительности в задачах автоматического управления. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 2, 1970.
- 3.8. Розенвассер Е. Н., Юсупов Р. М., Чувствительность систем автоматического управления, «Энергия», 1969.
- 3.9. Федосов Е. А., Серебряков Г. Г., Методы исследования систем со случайными параметрами. Сб. «Автоматическое управление и вычислительная техника», Машгиз, № 7, 1967.
- 3.10. Матвеев П. С., Синицин А. С., Динамическая точность систем автоматического управления со случайными параметрами. Сб. «Автоматическое управление и вычислительная техника», «Машгиз», № 6, 1964.
- 3.11. Zadeh L. A., On a class of stochastic operators. J. Math. Phys., № 1, 1953.
- 3.12. Серебряков Г. Г., Чернышев А. П., Приближенный метод анализа линейных и нелинейных систем со случайными параметрами. Сб. «Теория автоматического управления», изд-во «Наука», 1972.
- 3.13. Красовский А. А., Динамика непрерывных самонастраивающихся систем, Физматгиз, 1963.

- 3.14. Первозванский А. А., Случайные процессы в нелинейных автоматических системах, Физматгиз, 1963.
- 3.15. Козлов Ю. М., Юсупов Р. М., Беспорядочные самонастраивающиеся системы, изд-во «Наука», 1969.
- 3.16. Петров Б. Н., Рутковский В. Ю., Крутова И. Н., Земляков С. Д., Принципы построения и проектирования самонастраивающихся систем управления, изд-во «Машиностроение», 1972.
- 3.17. Кронер Р. И., Дрю П. Ж., Исследование цепи самонастройки в системах с параметрической самонастройкой. В сб. «Теория самонастраивающихся систем». Труды II Международного симпозиума ИФАК по самонастраивающимся системам, изд-во «Наука», 1969.
- 3.18. Алимов Ю. И., Приближенный расчет быстродействующих систем автоматической стабилизации параметров при гармонических пробном и поисковых сигналах. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 1, 1963.
- 3.19. Алимов Ю. И., Обабков В. К., К теории форсированных процессов в самонастраивающихся системах с вспомогательным оператором. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 5, 1966.
- 3.20. Бочаров И. Н., Фельдбаум А. А., Глобальный оптимизатор. Автоматика и телемеханика, № 3, 1962.
- 3.21. Поиск экстремума. Труды III Всесоюзного симпозиума по экстремальным задачам, Изд-во Томского университета, 1969.
- 3.22. Автоматизация производства и промышленная электроника, т. 4., изд-во «Советская энциклопедия», 1965.
- 3.23. Бернштейн С. Н., Собрание сочинений, т. IV, изд-во «Наука», 1964.
- 3.24. Хазен Э. М., Метод оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления, «Сов. радио», 1968.
- 3.25. Хасьминский Р. З., Применение случайного шума в задачах оптимизации и опознавания. Проблемы передачи информации, вып. 3, 1965.
- 3.26. Юдин Д. Б., Хазен Э. М., Некоторые математические аспекты статистических методов поиска. Автоматика и вычислительная техника, 31, Рига, 1966.
- 3.27. Хасьминский Р. З., Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, изд-во «Наука», 1969.
- 4.1. Емельянов С. В., Способ получения сложных законов регулирования с использованием лишь сигнала ошибки или регулируемой координаты и ее первой производной. Автоматика и телемеханика, № 10, 1957.
- 4.2. Емельянов С. В., Таран В. В., Об одном классе САР с переменной структурой. Изв. АН СССР, Энергетика и автоматика, № 3, 1962.
- 4.3. Емельянов С. В., Системы автоматического управления с переменной структурой, изд-во «Наука», 1967.
- 4.4. Емельянов С. В., Уткин В. И., Применение систем автоматического регулирования с переменной структурой для

- управления объектами, параметры которых изменяются в широких пределах. ДАН СССР, № 2, 1963.
- 4.5. Теория систем с переменной структурой, под ред. С. В. Емельянова, изд-во «Наука», 1970.
 - 4.6. Весткотт Д. Г., Флорентин Д. Д., Пирсон Д. О., Приближенные методы теории оптимальных и самонастраивающихся систем. Труды II конгресса ИФАК. Оптимальные системы. Статистические методы, «Наука», 1965.
 - 4.7. Красовский А. А., A New Solution to the Problem of Control System Analytical Design. Automatica, № 1, 1971.
 - 4.8. Красовский А. А., Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование, изд-во «Наука», 1973.
 - 4.9. Красовский А. А., Аналитическое конструирование контуров управления летательными аппаратами, изд-во «Машиностроение», 1969.
 - 5.1. Nyquist H., Thermal agitation of Electric Charge in Conductors. Phys. Rev., July, 1928.
 - 5.2. Ван-дер-Зил А., Флуктуации в радиотехнике и физике, перев. с англ., Госэнергоиздат, 1958.
 - 5.3. Пороговые сигналы, перев. с англ., «Советское радио», 1952.
 - 5.4. Callen H. B., Welton T., Irreversibility and Generalised Noise. Phys. Rev., July, 1951.
 - 5.5. Красовский А. А., Линейные пассивные системы, находящиеся под действием внутренних тепловых шумов. Автоматика и телемеханика, № 6, 1965.
 - 5.6. Красовский А. А., Тепловые колебания линейных пассивных систем. Журнал техн. физики, № 9, 1965.
 - 5.7. Теория связи, перев. с англ., «Связь», 1972.
 - 5.8. Теория автоматического регулирования, под ред. В. В. Солодовникова, кн. I, Изд-во «Машиностроение», 1967.
 - 5.9. Бриллюэн Л., Наука и теория информации, перев. с англ., Физматгиз, 1960.
 - 5.10. Эйнштейн А., Смолуховский М., Броуновское движение, Сб. статей, перев. с нем., Гостехиздат, 1936.
 - 5.11. Kalman R. E., Bucy R. S., New Results in Linear Filtering and Prediction Theory. J. Basic Eng., 1961.
 - 5.12. Ройтенберг Я. Н., Автоматическое управление, изд-во «Наука», 1971.
 - 5.13. Гартман В., Бернгард Ф., Фотоэлектронные умножители, перев. с нем., Госэнергоиздат, 1961.
 - 5.14. Чечик Н. О., Файнштейн С. М., Лифшиц Т. М., Электронные умножители, Гостехиздат, 1957.
 - 5.15. Брайсон А., Хо-Ю-ши, Прикладная теория оптимального управления, перев. с англ. под ред. А. М. Летова, изд-во «Мир», 1972.
 - 5.16. Блохинцев Д. И., Основы квантовой механики, Физматгиз, 1961.

Цена 79 коп.