

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ



К. А. ПУТКОВ,  
В. И. КАПАЛИН,  
А. С. ЮЩЕНКО

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ  
В ТЕОРИИ  
НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ



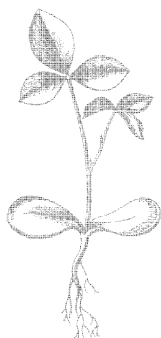


**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ  
ОСНОВЫ  
ТЕХНИЧЕСКОЙ  
КИБЕРНЕТИКИ**

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1976

К. А. ПУПКОВ, В. И. КАПАЛИН, А. С. ЮЩЕНКО

# ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1976

6 Ф6.5

П 88

УДК 62-90

**Функциональные ряды в теории нелинейных систем.** К. А. Пупков, В. И. Капалин, А. С. Ющенко. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», М., 1976, 448 стр.

Монография посвящена актуальной проблеме кибернетики. Она представляет собой систематическое исследование по теории нелинейных систем, основанное на применении функциональных рядов. Рассматриваются задачи анализа, синтеза и идентификации нелинейных систем. Для их решения используются ряды Вольтерра, многомерные преобразования Лапласа, Фурье, многомерные Z-преобразования и ортогональные разложения Винера. Особое внимание уделяется практическому применению указанных методов. Приводятся необходимые сведения из функционального анализа.

Книга предназначена для широкого круга научных работников, специализирующихся в теории систем, инженеров, разрабатывающих системы автоматического управления и системы «человек — машина», аспирантов и студентов вузов.

Табл. 2. Илл. 82. Библ. 155 назв.

*Константин Александрович Пупков, Владимир Иванович Капалин,*

*Аркадий Семенович Ющенко*

#### ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

(Серия «Теоретические основы технической кибернетики»)

М., 1976 г., 448 стр. с илл.

Редакторы *В. А. Горбунов, А. Г. Мордвинцев*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректоры *О. А. Бутусова, Н. Б. Румянцева*

---

Сдано в набор 12/XI 1975 г. Подписано к печати 9/IV 1976 г. Бумага 84×108<sup>1/32</sup>. Физ. печ. л. 14. Условн. печ. л. 23,52. Уч.-изд. л. 24,11. Тираж 5000 экз. Т-05659. Цена книги 1 р. 76 к. Заказ № 709.

---

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы  
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

---

4-я типография издательства «Наука».

630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25

П  $\frac{30501-056}{053(02)-76}$  186-75

© Главная редакция  
физико-математической  
литературы издательства «Наука», 1976.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	7
<b>Глава I. Основные понятия функционального анализа . .</b>	<b>9</b>
§ 1. Функциональные пространства . . . . .	9
§ 2. Функции . . . . .	34
§ 3. Интегрирование функционалов . . . . .	61
<b>Глава II. Методы исследования нелинейных систем во временной области . . . . .</b>	<b>85</b>
§ 1. Элементы математической теории систем . . . . .	85
§ 2. Определение ядер ряда Вольтерра для систем, заданных структурными схемами . . . . .	108
§ 3. Решение дифференциальных уравнений с помощью рядов Вольтерра . . . . .	123
§ 4. Исследование устойчивости систем по отношению к входным сигналам . . . . .	132
§ 5. Идентификация при детерминированных воздействиях . . . . .	151
§ 6. Статистическое исследование нестационарных нелинейных систем . . . . .	160
§ 7. Методы линеаризации и последовательных приближений . . . . .	170
<b>Глава III. Многомерные преобразования Лапласа, Фурье и многомерное Z-преобразование . . . . .</b>	<b>180</b>
§ 1. Элементы теории многомерных преобразований Лапласа и Фурье . . . . .	180
§ 2. Определение изображений ядер ряда Вольтерра . . . . .	204
§ 3. Определение реакции нелинейной стационарной системы на детерминированные воздействия с помощью преобразований Лапласа и Фурье . . . . .	226
§ 4. Применение многомерного преобразования Фурье при статистическом анализе нелинейных систем . . . . .	234
§ 5. Применение многомерного преобразования Лапласа в задаче нелинейной компенсации . . . . .	246
§ 6. Многомерное Z-преобразование и его использование при анализе нелинейных дискретных систем . . . . .	258
§ 7. Решение нелинейных дифференциальных уравнений с помощью интегральных преобразований . . . . .	281
§ 8. Применение преобразования Лапласа в методе равномерной линеаризации . . . . .	289
§ 9. Методы последовательных приближений с использованием аппроксимации функций по Чебышеву . . . . .	302

<b>Глава IV. Синтез нелинейных систем по среднеквадратическому критерию качества</b> . . . . .	313
§ 1. Задача оптимальной фильтрации . . . . .	313
§ 2. Некорректные задачи. Метод регуляризации . . . . .	321
§ 3. Регуляризация и решение уравнений оптимального нелинейного фильтра . . . . .	328
§ 4. Задача нелинейной компенсации . . . . .	339
<b>Глава V. Метод Винера</b> . . . . .	367
§ 1. Ряды Фурье — Эрмита . . . . .	367
§ 2. Ортогональные функционалы Винера . . . . .	395
<b>Приложение. Таблицы перехода к одной переменной в комплексной области</b> . . . . .	427
<b>Литература</b> . . . . .	441

## ПРЕДИСЛОВИЕ

«Если полководец станет применять мои расчеты, усвоив их, он непременно одержит победу. Если он усвоит их с учетом выгоды, они составят мощь, которая поможет и за пределами их».

С у н ь - ц з ы \*). Гл. 1 «Предварительные расчеты».

Эта книга является итогом работы авторов по теории нелинейных систем за последние шесть-семь лет. В ней систематически и с единых методологических позиций излагается теория нелинейных систем на основе рядов Вольтерра и ортогональных разложений Винера. Эта теория, называемая обычно аналитической теорией нелинейных систем, имеет целый ряд привлекательных черт: она применима для решения широкого круга нелинейных задач и опирается на строгий математический аппарат.

Изложение материала книги ведется на основе «системной» точки зрения. Первые два параграфа второй главы посвящены рассмотрению аксиоматики математической теории систем. Здесь вводятся понятия системы, начального состояния, определяются правила действий с системами и дается классификация систем. Исследование устойчивости систем проводится по отношению к входным сигналам. Такой подход, несмотря на его простоту и универсальность, до сих пор мало использовался в отечественной литературе. Задачи синтеза оптимальных систем (в формулировке Н. Винера), идентификации объектов неизвестной структуры и определения реакции нелинейной системы на заданное воздействие трактуются как различные варианты задачи об аппроксимации операторов в соответствующем функциональном пространстве.

---

\*) Перевод академика Н. И. Конрада.



Настоящая монография принадлежит к книгам «замкнутого цикла», т. е. ее можно читать, не прибегая к справочной литературе. Все необходимые сведения из функционального анализа по вопросам аппроксимации, дифференцирования и интегрирования в функциональных пространствах приведены в первой главе.

Часть изложенного в книге материала входит в один из разделов курса лекций «Математическая теория систем», читаемого студентам факультета прикладной математики Московского института электронного машиностроения.

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить члена-корреспондента АН СССР Е. П. Попова, оказавшего поддержку в их работе, и члена-корреспондента АН СССР А. А. Красовского, чья рецензия способствовала улучшению материала книги. Наряду с этим авторы выражают признательность кандидатам физико-математических наук В. Р. Носову, С. Е. Питовранову, А. М. Родионову, давшим ценные замечания по отдельным разделам книги.

*Авторы*

Москва  
декабрь 1974 г.

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Изучение методов исследования нелинейных систем, рассматриваемых в этой книге, требует знания основных понятий функционального анализа. Это и определило содержание первой главы, в которой излагаются в конспективной форме основные сведения о функциональных пространствах, о линейных и нелинейных функционалах и операторах, а также рассматриваются некоторые вопросы дифференцирования и интегрирования в функциональных пространствах. Более подробное изложение этих вопросов можно найти в специальной математической литературе, например, в [36, 45, 56, 92, 93, 146].

## § 1. Функциональные пространства

**1. Метрические пространства.** Исходным понятием функционального анализа является понятие множества. Г. Кантор дал для него такое описание: «Под *«множеством»* мы понимаем объединение в одно целое  $M$  определенных, вполне различаемых нашей интуицией или мыслью объектов  $m$ , называемых *«элементами»*  $M$ ». Примерами множеств математической природы могут служить множества рациональных чисел, непрерывных функций, алгебраических полиномов.

Множества будем обозначать прописными латинскими буквами, а элементы (точки) этих множеств — строчными латинскими буквами. Запись  $x \in X$  ( $x \notin X$ ) означает, что элемент  $x$  принадлежит (не принадлежит) множеству  $X$ . Множество, не содержащее в себе ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом  $\emptyset$ . Запись  $X \subset Y$  означает, что каждый элемент множества  $X$  является элементом множества  $Y$ , т. е. множество  $X$  есть *подмножество* множества  $Y$ . Если условия  $X \subset Y$  и  $Y \subset X$  выполняются одновременно, то это означает, что множества  $X$  и  $Y$  состоят из одних и тех же

элементов. Такие множества называются равными, т. е.  $X=Y$ .

Множество всех подмножеств  $P(X)$  множества  $X$  включает в себя в качестве точек пустое множество  $\emptyset$  и само множество  $X$ . На подмножествах непустого множества  $X$  можно ввести операции дополнения, пересечения и объединения.

*Дополнением* множества  $A \subset X$  относительно множества  $X$  называется совокупность всех элементов  $X$ , не принадлежащих  $A$ . Операцию дополнения обозначают так:  $X \setminus A$ .

*Пересечением (произведением)*  $n$  ( $n \geq 2$ ) подмножеств  $A_i$  множества  $X$  называется совокупность всех точек  $X$ , принадлежащих одновременно всем  $A_i$ . Для обозначения операции пересечения используется символ  $\bigcap_{i=1}^n A_i$ .

Если подмножества  $A_i$  не имеют общих элементов, то  $\bigcap_{i=1}^n A_i = \emptyset$ .

*Объединением (суммой)*  $n$  ( $n \geq 2$ ) подмножеств  $A_i$  множества  $X$  называется совокупность всех точек  $X$ , каждая из которых принадлежит хотя бы одному  $A_i$ . Операцию объединения записывают так:  $\bigcup_{i=1}^n A_i$ .

Множество всех упорядоченных пар элементов, из которых первый принадлежит множеству  $M$ , а второй — множеству  $N$ , называется *декартовым (прямым) произведением* множеств и обозначается  $M \times N$ .

Отметим, что  $M \times N = N \times M$  тогда и только тогда, когда  $M = N$ .

*Бинарным отношением*  $R$ , определенным на множестве  $M \times N$ , называется любое его подмножество, т. е.  $R \subset M \times N$ ). *Сечением* по  $x \in M$  бинарного отношения  $R$ , обозначаемым  $Rx$ , называется множество  $y \in N$  таких, что  $(x, y) \in R$ . Бинарное отношение  $R \subset M \times N$  называется

---

\*) Аналогично вводятся понятия декартова произведения  $n$  множеств и  $n$ -арного отношения. Декартовым произведением  $n$  множеств  $M_1, \dots, M_n$  ( $n=2, 3, \dots$ ) —  $M_1 \times \dots \times M_n$  — называется множество упорядоченных систем из  $n$  элементов, первый из которых принадлежит  $M_1$ , а последний —  $M_n$ .  $n$ -арным ( $n$ -местным) отношением  $R$ , определенным на  $M_1 \times \dots \times M_n$  ( $n=2, 3, \dots$ ), называется любое подмножество  $R \subset M_1 \times \dots \times M_n$ .

ся *функциональным*, если для каждого  $x \in M$  сечение  $R$  по  $x$  содержит один и только один элемент.

Для приложений представляют интерес в основном те множества, в которых устанавливается определенное соотношение между элементами множества. Такое соотношение можно установить, если каждому двум элементам  $x, y$  множества  $X$  поставить в однозначное соответствие неотрицательное число  $\rho(x, y)$ , удовлетворяющее для всех  $x, y, z \in X$  следующим трем аксиомам:

- 1)  $\rho(x, y) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = y$ ;
- 2)  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ ;
- 3)  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ .

Эти аксиомы выполняются, в частности, для расстояния между двумя точками на плоскости, причем первые две аксиомы в этом случае очевидны, а третья соответствует неравенству треугольника. В связи с этим число  $\rho(x, y)$  называется *расстоянием* между точками  $x$  и  $y$  множества  $X$ . Множество  $X$ , в котором введено расстояние, называется *метрическим пространством*, расстояние  $\rho(x, y)$  называется также *метрикой* пространства. Для одного и того же множества  $X$  расстояние  $\rho(x, y)$  может быть введено различными способами. Так, для множества  $X$  упорядоченных групп из  $n$  действительных чисел расстояние между точками

$$x = (x_1, \dots, x_n) \text{ и } y = (y_1, \dots, y_n); \quad x, y \in X$$

можно ввести по формуле

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}, \quad (1.1.1)$$

или положить

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|. \quad (1.1.2)$$

Метрику можно задать различными способами и на множестве  $X$  действительных функций, определенных на

сегменте  $[a, b]$ , так для  $x(t), y(t) \in X$ :

$$\rho(x, y) = \sup_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|^*, \quad (1.1.3)$$

$$\rho(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt, \quad (1.1.4)$$

$$\rho(x, y) = \left[ \int_a^b (x(t) - y(t))^2 dt \right]^{1/2}. \quad (1.1.5)$$

В каждом случае число  $\rho(x, y)$  удовлетворяет аксиомам метрики.

Рассмотрим примеры наиболее употребительных метрических пространств.

1. Множество упорядоченных групп из  $n$  действительных чисел  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , в котором расстояние задается по формуле (1.1.1), называется  $n$ -мерным арифметическим пространством и обозначается  $E^n^{**}$ ). Метрическое пространство, образованное из того же множества введением метрики (1.1.2), обозначается  $E^n$ .

2. Множество непрерывных действительных функций  $x(t)$ , заданных на сегменте  $[a, b]$  с метрикой (1.1.3), образует метрическое пространство, обозначаемое  $C[a, b]^{***}$ . Если функции  $x(t)$  дифференцируемы на  $[a, b]$   $k$  раз, причем их производные  $x^{(i)}$ ,  $i=1, \dots, k$ , непрерывны, метрику можно определить следующим

\*) Точной верхней гранью множества чисел  $\{x_n\}$  называется такое число  $\sup \{x_n\}$ , что для всех  $n$  выполняется неравенство  $x_n \leq \sup \{x_n\}$  и, кроме того, для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такой номер  $n_0$ , что  $\sup \{x_n\} - \varepsilon < x_{n_0} \leq \sup \{x_n\}$ . Точная верхняя грань бесконечного множества может не принадлежать множеству. Наибольший элемент  $\{x_n\}$  в отличие от точной верхней грани обозначается  $\max \{x_n\}$ .

\*\*) Пространство  $E^n$  может рассматриваться как декартово произведение  $\underbrace{E^1 \times E^1 \times \dots \times E^1}_n$ .

\*\*\*) Поскольку функция, непрерывная на отрезке  $[a, b]$ , достигает на нем своей точной верхней грани [17], то метрика (1.1.3) в пространстве  $C[a, b]$  может быть записана и так:

$$\rho(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|.$$

образом:

$$\rho(x, y) = \sum_{i=0}^k \sup_{t \in [a, b]} |x^{(i)}(t) - y^{(i)}(t)|, \quad (1.1.6)$$

где обозначено  $x^{(0)}(t) = x(t)$ ,  $y^{(0)}(t) = y(t)$ . Аксиомы метрики в этом случае также выполняются. Полученное метрическое пространство обозначают  $C^k[a, b]$ .

3. На множестве действительных функций  $x(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , для которых существует интеграл

$$\int_a^b |x(t)| dt,$$

метрику можно ввести по формуле (1.1.4). При этом интеграл следует понимать как интеграл Лебега (см. § 3). Полученное метрическое пространство обозначается  $L[a, b]$ . Если функции  $x(t)$  интегрируемы с квадратом, т. е. существует интеграл (Лебега)

$$\int_a^b x^2(t) dt,$$

то метрику можно ввести по формуле (1.1.5). Соответствующее метрическое пространство обозначают  $L_2[a, b]$ . Для функций  $x(t)$ , абсолютно интегрируемых со степенью  $p$ , вводится метрическое пространство  $L_p[a, b]$  с метрикой

$$\rho(x, y) = \left[ \int_a^b |x(t) - y(t)|^p dt \right]^{1/p}. \quad (1.1.7)$$

4. Для множества бесконечных последовательностей действительных чисел  $x = \{x_k\} = \{x_1, \dots, x_k, \dots\}$ , удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty,$$

расстояние можно ввести по формуле

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2}. \quad (1.1.8)$$

Такое метрическое пространство последовательностей обозначают  $l_2$ .

По аналогии с пространством  $L_p[a, b]$  вводится метрическое пространство  $l_p$  последовательностей  $\{x_k\}$ , для которых сходится ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$ . Метрика в этом пространстве определяется формулой

$$\rho(x, y) = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p \right\}^{1/p}. \quad (1.1.9)$$

Пространства, элементами которых являются функции или бесконечные числовые последовательности, принято называть *функциональными пространствами*. Они и являются основным предметом дальнейшего рассмотрения.

**2. Открытые и замкнутые множества.** Рассмотрим метрическое пространство  $X$  с метрикой  $\rho(x, y)$ . Множество точек  $x \in X$ , удовлетворяющих условию

$$\rho(x, x_0) < \varepsilon \quad (1.1.10)$$

(где  $\varepsilon$  — положительное число,  $x_0$  — некоторая точка пространства  $X$ ), называется *открытым шаром* радиуса  $\varepsilon$  с центром в точке  $x_0$ . Это множество называют также  $\varepsilon$ -*окрестностью* точки  $x_0$  и обозначают  $O_\varepsilon(x_0)$ . В арифметическом пространстве  $E^3$  это множество является внутренностью шара в обычном смысле

$$\sum_{k=1}^3 (x_k - x_{0k})^2 < \varepsilon^2.$$

В пространстве  $E_0^2$  с метрикой (1.1.2) открытый шар

$$\sum_{k=1}^2 |x_k - x_{0k}| < \varepsilon$$

оказывается внутренностью квадрата, изображенного на рис. 1.1.1.

В пространстве  $C[a, b]$   $\varepsilon$ -окрестностью функции  $x_0(t)$  является совокупность функций  $x(t) \in C[a, b]$ , удовлетворяющих условию (рис. 1.1.2)

$$\sup_{t \in [a, b]} |x(t) - x_0(t)| < \varepsilon.$$

В пространстве  $L[a, b]$   $\varepsilon$ -окрестность функции  $x_0(t)$  определяется неравенством

$$\int_a^b |x(t) - x_0(t)| dt < \varepsilon, \quad x(t) \in L[a, b].$$

В пространстве  $L[a, b]$ , в отличие от  $C[a, b]$ , из условия  $x(t) \in O_\varepsilon(x_0(t))$  не следует близость функций  $x(t)$  к  $x_0(t)$  во всех точках отрезка  $[a, b]$ .

Точка  $x_0$ , принадлежащая некоторому множеству  $A$ , называется *внутренней*, если она принадлежит  $A$  вместе с некоторой  $\varepsilon$ -окрестностью, т. е. если найдется такое положительное число  $\varepsilon$ , при котором  $O_\varepsilon(x_0) \subset A$ .

Множество, все точки которого — внутренние, называется *открытым*. Примером открытого множества является открытый шар (1.1.10) в произвольном метрическом пространстве  $X$ . Действительно, если  $x_1$  —

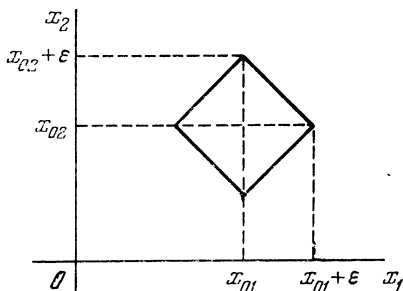


Рис. 1.1.1.

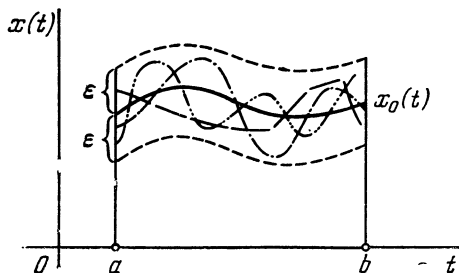


Рис. 1.1.2.

произвольная точка этого шара, то выполняется неравенство (1.1.10):  $\rho(x_1, x_0) < \varepsilon$ . Если построить  $\varepsilon$ -окрестность точки  $x_1$ :  $O_{\varepsilon_1}(x_1)$  при  $\varepsilon_1 = \varepsilon - \rho(x_1, x_0)$ , то, очевидно,  $O_{\varepsilon_1}(x_1) \subset O_\varepsilon(x_0)$ , т. е. точка  $x_1$  — внутренняя. Точка  $x \in X$  называется *предельной* точкой множества  $A \subset X$ , если в



любой ее  $\varepsilon$ -окрестности имеется бесконечно много точек из множества  $A$ . Предельная точка может не принадлежать множеству  $A$ . Например, точка  $x \in X$ , удовлетворяющая равенству  $\rho(x, x_0) = \varepsilon$ , не принадлежит открытому шару  $O_\varepsilon(x_0)$ , хотя и содержит в любой своей  $\varepsilon$ -окрестности бесконечно много точек из  $O_\varepsilon(x_0)$ , т. е. является предельной для множества  $O_\varepsilon(x_0)$ . Внутренние точки множества также являются предельными и принадлежат множеству. Множество  $A$  может содержать также такие точки  $x$ , в достаточно малой окрестности которых  $O_\varepsilon(x)$  уже нет других точек из  $A$ , кроме самой точки  $x$ . Такие точки называются *изолированными*.

Совокупность всех предельных точек множества  $A$  называется его *замыканием* и обозначается  $\bar{A}$ . Множество, содержащее все свои предельные точки, называют *замкнутым* множеством. Примером замкнутого множества в произвольном метрическом пространстве  $X$  может служить замкнутый шар с центром в точке  $x_0 \in X$ , т. е. множество точек  $x \in X$ , для которых

$$\rho(x, x_0) \leq \varepsilon. \quad (1.1.11)$$

Это множество является замыканием открытого шара  $O_\varepsilon(x_0)$ . В пространстве  $C[a, b]$  множество точек  $x$ , для которых  $\sup_{t \in [a, b]} |x(t)| \leq \varepsilon$ , замкнуто и является замыканием открытого множества, определяемого неравенством  $\sup_{t \in [a, b]} |x(t)| < \varepsilon$ . Замкнутый шар, определяемый соотношением (1.1.11), содержит в себе помимо внутренних точек  $O_\varepsilon(x_0)$  предельные точки  $x$ , для которых  $\rho(x, x_0) = \varepsilon$ . Эти точки называются *граничными* точками множества. В общем случае граничной точкой множества  $A$  называется такая предельная точка  $x$ , в любой окрестности которой содержится по крайней мере одна точка, не принадлежащая  $A$ . Совокупность граничных точек называют *границей множества*. В пространстве  $C[a, b]$  границей множества  $\sup_{t \in [a, b]} |x(t)| \leq \varepsilon$  является множество непрерывных функций  $x(t)$ , для которых хотя бы при одном  $t^* \in [a, b]$   $x(t^*) = \varepsilon$  или  $x(t^*) = -\varepsilon$ .

Множество  $A \subset X$  является открытым тогда и только тогда, когда его дополнение  $X \setminus A$  замкнуто. Это утверждение следует из приведенных выше определений. В ча-

стности, множество  $A \subset X$ , состоящее из одной точки  $x \in X$ , или нескольких точек  $x_i \in X$ ,  $i=1, \dots, k$ , является замкнутым и состоит из изолированных точек. Его дополнение  $A$  представляет собой все множество  $X$ , за исключением некоторых (предельных) точек, т. е. является открытым.

**3. Сходимость в метрическом пространстве. Плотные множества.** Рассмотрим последовательность  $\{x_n\}$ ,  $n=1, 2, \dots$  в метрическом пространстве  $X$  с метрикой  $\rho(x, y)$ . Последовательность  $\{x_n\}$  называется *сходящейся* к точке  $x \in X$ , если, начиная с некоторого номера  $n_0$ , все члены последовательности лежат в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $x$ , т. е. для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое число  $n_0(\varepsilon)$ , что при  $n > n_0(\varepsilon)$

$$\rho(x_n, x) < \varepsilon.$$

Точка  $x$  называется *пределом* последовательности  $\{x_n\}$

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Предел последовательности  $\{x_n\}$  можно определить равенством

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = 0. \quad (1.1.12)$$

Например, сходимость последовательности функций  $\{x_n(t)\}$ ,  $n=1, 2, \dots$ , к функции  $x(t)$  в пространстве  $C[a, b]$  означает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [a, b]} |x(t) - x_n(t)| = 0,$$

т. е. последовательность  $x_n(t)$  при  $n \rightarrow \infty$  сходится равномерно к функции  $x(t)$  \*). В пространстве  $C^k[a, b]$  условие (1.1.12) означает равномерную сходимость не только функций  $x_n(t)$  к функции  $x(t)$ , но и производных  $x_n^{(i)}(t)$  к производным  $x^{(i)}(t)$  до порядка  $i=k$  включительно. Сходимость в пространствах  $L_p[a, b]$  имеет иной смысл и будет рассмотрена в § 3.

---

\*) Последовательность  $\{x_n(t)\}$ ,  $t \in [a, b]$  сходится равномерно к  $x(t)$ , если для любого числа  $\varepsilon > 0$  найдется такой номер  $n_0(\varepsilon)$ , что при  $n > n_0$  неравенство  $|x(t) - x_n(t)| < \varepsilon$  выполняется сразу для всех  $t \in [a, b]$ .

Понятие предельной точки, введенное выше, связано с понятием предела следующим утверждением. Для того чтобы точка  $x$  была предельной точкой множества  $A$ , необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность точек  $\{x_n\}$ , составленная из точек множества  $A$ , не совпадающих с  $x$ , пределом которой является  $x$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . В этом определении существенно, чтобы члены последовательности отличались от предела. В противном случае ему будут удовлетворять наряду с предельными и изолированные точки множества  $A$ . Замкнутое множество, таким образом, обладает тем свойством, что для любого его элемента  $x$  существует сходящаяся к нему последовательность  $\{x_n\}$ , принадлежащая множеству.

Введем теперь понятие всюду плотного и сепарабельного множеств. Множество  $A$ , принадлежащее метрическому пространству  $X$ , называется *всюду плотным*, если его замыкание  $\bar{A}$  совпадает со всем пространством  $X$ . Простейшим примером всюду плотного множества является множество рациональных чисел на действительной прямой  $E^1$ . Добавляя к этому множеству его предельные точки, получим всю прямую  $E^1$ .

Понятие всюду плотного множества играет важную роль в теории приближений. Любой элемент пространства  $X$  может быть представлен как предел последовательности  $\{x_n\}$  элементов множества  $A$ , всюду плотного в  $X$ , т. е. для любого  $\varepsilon > 0$ ,  $x \in X$  можно найти элемент  $x_n \in A$  такой, что  $\rho(x_n, x) < \varepsilon$ . Этот элемент можно рассматривать как приближение элемента  $x$  с точностью, определяемой числом  $\varepsilon$ . Примером может служить теорема Вейерштрасса о том, что всякую функцию  $x(t) \in C[a, b]$  можно приблизить с любой наперед заданной степенью точности полиномом  $P_n(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n$  с рациональными коэффициентами  $a_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , т. е. для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое число  $n_0(\varepsilon)$ , что при  $n > n_0$

$$\sup_{t \in [a, b]} |x(t) - P_n(t)| = \rho(x, P_n) < \varepsilon.$$

Это означает, что множество полиномов с рациональными коэффициентами образует всюду плотное множество в пространстве  $C[a, b]$ .

Далее можно показать, что множество всех полиномов с рациональными коэффициентами, как и множество рациональных чисел, счетно \*). Следовательно, метрическое пространство  $C[a, b]$  содержит всюду плотное счетное множество. Такие метрические пространства называются *сепарабельными*. Действительная прямая  $E^1$  тоже является сепарабельным метрическим пространством, поскольку она содержит счетное и всюду плотное множество рациональных чисел. Отсюда следует и сепарабельность  $n$ -мерного арифметического пространства  $E^n$ .

При изучении сходимости последовательностей в метрических пространствах используется *признак Коши*, являющийся необходимым и достаточным условием сходимости последовательности  $\{x_n\}$  на вещественной прямой. Этот признак формулируется так: если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такой номер  $n_0(\varepsilon)$ , что при  $n, m > n_0(\varepsilon)$

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon,$$

то последовательность  $\{x_n\}$  сходится. Выясним, сохраняется ли это утверждение в случае произвольного метрического пространства  $X$ . Если последовательность  $\{x_n\}$  сходится к точке  $x \in X$  при  $n \rightarrow \infty$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такой номер  $n_0(\varepsilon)$ , что при  $n > n_0(\varepsilon)$   $\rho(x_n, x) < \varepsilon/2$ . В соответствии с третьей аксиомой метрики можно записать при  $n, m > n_0(\varepsilon)$

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) < \varepsilon.$$

Таким образом, признак Коши является необходимым условием сходимости и в произвольном метрическом пространстве. Достаточным, однако, он не является. Например, в пространстве рациональных чисел с метрикой  $\rho(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$  последовательность  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  удовлетворяет признаку Коши, но в то же время сходится к иррациональному числу  $e$ , т. е. не имеет предела в рассматриваемом пространстве. Другой важный пример метрического пространства, в котором признак Коши не является достаточным условием сходимости, — это пространство непрерывных функций, заданных на сегменте

---

\*) *Счетным* называют множество, все элементы которого можно занумеровать натуральными числами.

$[a, b]$  с интегральной метрикой (1.1.4) [36]. Метрические пространства, в которых признак Коши является не только необходимым, но и достаточным условием сходимости, называются *полными метрическими пространствами*. Последовательность  $\{x_n\}$ , удовлетворяющая признаку Коши, называется *фундаментальной*. Таким образом, в полных метрических пространствах любая фундаментальная последовательность сходится к элементу этого пространства.

Все метрические пространства, рассмотренные в первом пункте этого параграфа, являются полными. Докажем для примера полноту пространства  $C[a, b]$ . Пусть  $\{x_n(t)\}$  — фундаментальная последовательность. Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такой номер  $n_0(\varepsilon)$ , что при  $n, m > n_0(\varepsilon)$  сразу для всех  $t \in [a, b]$

$$|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon.$$

В частности, при некотором  $t = t_0$

$$|x_n(t_0) - x_m(t_0)| < \varepsilon.$$

Поскольку на действительной прямой фундаментальные последовательности сходятся, то найдется число  $x(t_0)$  такое, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t_0) = x(t_0).$$

Это справедливо для любого значения  $t_0 \in [a, b]$ , т. е. фундаментальная последовательность  $\{x_n(t)\}$  сходится при  $t \in [a, b]$ . Величина  $\varepsilon$  не зависит от  $t$ , поэтому сходимость  $x_n(t) \rightarrow x(t)$  равномерна и, следовательно, пределом  $x_n(t)$  является непрерывная функция, принадлежащая рассматриваемому пространству

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t) \in C[a, b].$$

Таким образом пространство  $C[a, b]$  — полное.

Выше указывалось, что пространство непрерывных функций с интегральной метрикой (1.1.4) не является полным. Так же не является полным и пространство всех функций, интегрируемых на  $[a, b]$  по Риману, поскольку можно построить последовательность функций  $f_n(t)$ , интегрируемых по Риману, но имеющих своим пределом

функцию, для которой интеграл Римана не существует [36]. Построение полного пространства интегрируемых функций возможно лишь при использовании интеграла Лебега. Пространства  $L_p[a, b]$  функций, интегрируемых по Лебегу, являются полными.

Метрическое пространство  $X$ , не являющееся полным, становится таковым, если к нему добавить его предельные точки, т. е. построить замыкание  $\bar{X}$ . Получаемое при этом полное пространство  $\bar{X}$  называется *пополнением*  $X$ . Каждое метрическое пространство имеет единственное пополнение.

**4. Линейные пространства.** Множество элементов  $X$  называется *линейным пространством*, если удовлетворяются следующие условия:

1. Для двух любых элементов  $x, y \in X$  определен третий элемент  $x+y \in X$ , называемый суммой, причем:

а)  $x+y=y+x$ ;

б)  $x+(y+z)=(x+y)+z$  ( $z \in X$ );

в) существует такой элемент в  $X$ , обозначаемый  $0$ , что для любого  $x \in X$   $x+0=x$ ;

г) для каждого  $x \in X$  существует такой элемент  $-x \in X$ , что  $x+(-x)=0$ .

2. Для любого элемента  $x \in X$  и любого числа  $\alpha$  (действительного или комплексного) определен элемент  $\alpha x \in X$ , причем:

а)  $\alpha(\beta x) = \alpha\beta x$ , где  $\beta$  — любое число;

б)  $1 \times x = x$ ;

в)  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ ;

г)  $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$ .

Если, в частности, умножение на число определено только для действительных чисел  $\alpha$ , то линейное пространство называется *действительным*. Если вводится умножение элементов пространства на комплексные числа, то говорят о *комплексном* линейном пространстве.

Для рассмотренных в п. 1 метрических пространств, в которых обычным образом введены операции сложения функций и последовательностей и умножения их на число, сформулированные условия выполняются. Таким

образом, эти пространства являются линейными метрическими пространствами.

Примерами линейных пространств могут также служить:

- а) совокупность действительных  $n$ -мерных векторов;
- б) совокупность всех последовательностей действительных чисел, обычно обозначаемая  $\Omega$ ;
- в) совокупность всех сходящихся последовательностей действительных чисел;
- г) совокупность решений однородного линейного дифференциального уравнения порядка  $n$ .

Весьма важным для приложений является понятие изоморфизма линейных пространств. Пусть  $X$  и  $Y$  — два линейных пространства, между всеми элементами которых  $x$  и  $y$  установлено взаимно однозначное соответствие, которое обозначим  $x \leftrightarrow y$ . Кроме того, положим, что из  $x_1 \leftrightarrow y_1$ ,  $x_2 \leftrightarrow y_2$  ( $x_1, x_2 \in X$ ,  $y_1, y_2 \in Y$ ) следует:  $x_1 + x_2 \leftrightarrow y_1 + y_2$ ,  $\alpha x_1 \leftrightarrow \alpha y_1$  ( $\alpha$  — произвольное число). Тогда пространства  $X$  и  $Y$  называются *изоморфными*. Поскольку свойства линейного пространства определяются операциями сложения и умножения на число, изоморфные пространства можно рассматривать как различные реализации одного и того же пространства. Практически это означает возможность выбирать из двух изоморфных линейных пространств то, которое более удобно для решения данной задачи. Примером изоморфных пространств являются пространство  $E^n$  и пространство всех многочленов степени, не превосходящей  $n-1$ .

Элементы  $x_i$ ,  $i=1, \dots, n$ , линейного пространства  $X$  называются *линейно зависимыми*, если существуют числа  $C_i$ , не все равные нулю, такие, что  $\sum_{i=1}^n C_i x_i = 0$ . В противном случае, т. е. когда  $\sum_{i=1}^n C_i x_i = 0$  только при условии  $C_i = 0$ ,  $i=1, \dots, n$ , элементы  $x_i$  называются *линейно независимыми*. Бесконечная система элементов  $x_i$ ,  $i=1, \dots, n$ , называется линейно независимой, если линейно независима любая ее конечная подсистема. Если в пространстве  $X$  можно найти  $n$  линейно независимых элементов, а любые  $n+1$  элементов — линейно зависи-

мы, то говорят, что линейное пространство  $X$  имеет *размерность*  $n$ . Любая линейно независимая система из  $n$  элементов в пространстве размерности  $n$  носит название *базиса* этого пространства. Если пространство содержит бесконечную линейно независимую систему, оно называется *бесконечномерным*. Например, пространство  $l_2$  содержит бесконечную линейно независимую систему последовательностей  $(x_1, 0, 0, 0, \dots)$ ,  $(0, x_2, 0, 0, \dots)$ ,  $(0, 0, x_3, 0, \dots)$ ,  $\dots$ , т. е. является бесконечномерным. Линейные метрические пространства действительных функций, рассмотренные в п. 1, также являются бесконечномерными.

Любое подмножество  $X'$  линейного пространства  $X$ , содержащее хотя бы один элемент из  $X$ , называется *подпространством*, если оно само образует линейное пространство по отношению к операциям, введенным в пространстве  $X$ . Например, множество всех многочленов с действительными коэффициентами  $P(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , является подпространством пространства непрерывных функций  $C[a, b]$ .

**5. Нормированные пространства.** *Нормированным* называется такое линейное пространство  $X$ , в котором каждому элементу  $x \in X$  ставится в соответствие действительное число  $\|x\|$ , называемое *нормой* этого элемента и удовлетворяющее следующим аксиомам:

а)  $\|x\| \geq 0$ , причем  $\|x\| = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = 0$ ;

б)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  ( $y \in X$ );

в)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ , где  $\lambda$  — произвольное число.

Эти аксиомы обобщают понятие длины вектора в конечномерном арифметическом пространстве. Нормированные пространства можно рассматривать как класс линейных метрических пространств, поскольку в них можно ввести метрику соотношением

$$\rho(x, y) = \|x - y\|. \quad (1.1.13)$$

Легко проверить, что такая метрика будет удовлетворять условиям, сформулированным в п. 1. Таким образом, всякое нормированное пространство — метрическое и на него переносятся все введенные выше понятия метрических пространств. Рассмотрим примеры нормированных пространств:



1. Пространство непрерывных действительных функций, определенных на сегменте  $[a, b]$  с нормой

$$\|x\| = \sup_{t \in [a, b]} |x(t)|. \quad (1.1.14)$$

2. Пространство действительных функций, абсолютно интегрируемых (по Лебегу) на отрезке  $[a, b]$  с нормой

$$\|x\| = \int_a^b |x(t)| dt, \quad (1.1.15)$$

а также пространство действительных функций, интегрируемых по Лебегу с квадратом на  $[a, b]$  с нормой

$$\|x\| = \left[ \int_a^b x^2(t) dt \right]^{1/2}. \quad (1.1.16)$$

3. Пространство ограниченных последовательностей действительных чисел  $\{x_n\}$  с нормой

$$\|x\| = \sup_n |x_n|. \quad (1.1.17)$$

4. Линейное пространство действительных векторов  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , в котором норма определяется по одной из следующих формул:

$$\|x\| = \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2}, \quad (1.1.18)$$

$$\|x\| = \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad (1.1.19)$$

$$\|x\| = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|. \quad (1.1.20)$$

Если определить метрику в перечисленных пространствах по формуле (1.1.13), то получим рассмотренные в п. 1 метрические пространства. В общем случае метрика не может быть использована для определения нормы, т. е. не всякое линейное метрическое пространство является нормированным. Поскольку это не следует из приведенных примеров, рассмотрим еще один пример мет-

рического пространства — произвольное линейное пространство с метрикой

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = y, \\ 1 & \text{при } x \neq y. \end{cases}$$

Эта метрика не определяет нормы, поскольку не выполняется аксиома в).

Полные нормированные пространства называются *банаховыми*. Все рассмотренные выше примеры нормированных пространств являются примерами банаховых пространств. Примером нормированного пространства, не являющегося полным, служит пространство непрерывных функций с интегральной нормой (1.1.15) или (1.1.16).

Рассмотрим теперь операцию *скалярного произведения* в линейном пространстве. Скалярное произведение в линейном пространстве  $X$  — это число, которое по определенному правилу ставится в соответствие каждой паре элементов из  $X$ . В действительном линейном пространстве скалярное произведение — действительное число, в комплексном — комплексное. Ниже приведены аксиоматические условия, которым удовлетворяет скалярное произведение в случае действительного линейного пространства:

1.  $(x, y) = (y, x)$ ,  $x, y \in X$ ;
2.  $(x, y+z) = (x, y) + (x, z)$ ,  $z \in X$ ;
3.  $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ , где  $\lambda$  — действительное число;
4.  $(x, x) \geq 0$ , причем  $(x, x) = 0$  лишь при  $x = 0$ .

Линейное пространство, в котором введено скалярное произведение, называется *евклидовым*.

Скалярное произведение позволяет ввести в любом евклидовом пространстве норму по формуле

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}. \quad (1.1.21)$$

Выполнение аксиом нормы следует при этом из свойств скалярного произведения. Таким образом, всякое евклидово пространство является нормированным. Полное бесконечномерное евклидово пространство принято называть *гильбертовым*. Примером евклидова пространства является арифметическое пространство  $E^n$  со скалярным

произведением

$$(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

Скалярное произведение для последовательностей действительных чисел  $\{x_k\}$ ,  $\{y_k\} \in l_2$  определяется следующим образом:

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k, \quad (1.1.22)$$

а для действительных функций  $x(t)$ ,  $y(t) \in L_2[a, b]$  — по формуле

$$(x, y) = \int_a^b x(t) y(t) dt. \quad (1.1.23)$$

В пространстве действительных функций  $x(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , квадрат которых интегрируем (по Лебегу) с некоторой весовой функцией  $\varphi(t) > 0$

$$\int_a^b x^2(t) \varphi(t) dt < \infty,$$

скалярное произведение можно ввести по формуле

$$(x, y) = \int_a^b \varphi(t) x(t) y(t) dt. \quad (1.1.24)$$

Евклидовы пространства образуют весьма узкий класс нормированных пространств. Например, нормированные пространства  $C[a, b]$ ,  $L_p[a, b]$  при  $p \neq 2$  с нормами, определяемыми их метрикой (1.1.3), (1.1.7), не являются евклидовыми.

В евклидовом пространстве помимо «длины» вектора  $\|x\|$  и «расстояния» между векторами  $\|x-y\|$  можно определить также и «угол» между векторами по формуле

$$\cos(\widehat{x, y}) = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}.$$

В том случае, когда этот угол равен  $\pi/2$ , т. е.  $(x, y) = 0$ , векторы  $x$  и  $y$  называются *ортогональными*.

Рассмотрим систему ненулевых векторов  $x_i$ ,  $i=1, \dots, n$ , которые попарно ортогональны, т. е.

$$(x_i, x_j) = 0 \quad \text{при } i \neq j.$$

Такая система называется *ортогональной*. Векторы ортогональной системы линейно независимы. Действительно, если предположить обратное, т. е.

$$\sum_{i=1}^n C_i x_i = 0$$

и хотя бы один из коэффициентов, например,  $C_k$ , отличен от нуля, то, умножая скалярно обе части равенства на  $x_k$  получаем, что

$$\left( x_k, \sum_{i=1}^n C_i x_i \right) = C_k (x_k, x_k) = 0, \quad \text{т. е. } C_k = 0.$$

Векторы ортогональной системы  $\{x^i\}$  можно нормировать, полагая  $e_i = \frac{x_i}{\|x_i\|}$ ,  $i=1, \dots, n$ . Векторы  $e_i$ ,  $i=1, \dots, n$ , удовлетворяющие условию  $\|e_i\|=1$ , образуют *ортогональную нормированную (ортонормированную) систему*. Таким образом, в евклидовом пространстве (в том числе и бесконечномерном) можно ввести ортогональный базис. В частности, в арифметическом евклидовом пространстве  $E^3$  задание ортогонального базиса соответствует введению системы декартовых координат. Векторы  $e_i$  при этом служат ортами координатных осей, например,

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1).$$

Аналогично можно ввести ортонормированную систему в бесконечномерном пространстве последовательностей  $l_2$   $e_1 = (1, 0, 0, 0, \dots)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0, 0, \dots)$ ,  $e_3 = (0, 0, 1, 0, \dots)$ ,  $\dots$

В пространстве действительных функций  $L_2[0, 2\pi]$  со скалярным произведением (1.1.23), в котором  $a=0$ ,  $b=2\pi$ , можно ввести тригонометрическую ортонормированную систему, состоящую из функций:  $C_0 = 1/\sqrt{2\pi}$ ,  $e_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nt$ ,  $e_m = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin mt$ ,  $n, m=1, 2, \dots$

Ортонормированную систему  $\{e_n\}$  можно построить из любой системы  $\{x_n\}$ ,  $n=1, 2, \dots$ , линейно независимых элементов с помощью процесса ортогонализации Грама — Шмидта, рассмотренного ниже.

Выберем  $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$ . Следующий элемент системы ищем в виде  $e_2 = \frac{g_2}{\|g_2\|}$ , где  $g_2 = x_2 - C_{21}e_1 = x_2 - \frac{C_{21}x_1}{\|x_1\|}$ ,  $C_{21}$  — неизвестный коэффициент. Из ортогональности элементов  $e_1$  и  $e_2$  получим

$$(g_2, e_1) = (x_2, e_1) - C_{21} = 0,$$

откуда

$$C_{21} = (x_2, e_1) = \frac{(x_2, x_1)}{\|x_1\|}.$$

Следующий элемент  $e_3$  ищем в виде

$$e_3 = \frac{g_3}{\|g_3\|}, \quad \text{где } g_3 = x_3 - C_{31}e_1 - C_{32}e_2.$$

Из условий  $(e_1, e_3) = (e_2, e_3) = 0$  находим

$$C_{31} = (x_3, e_1), \quad C_{32} = (x_3, e_2).$$

На  $k$ -м шаге построения ортонормированной системы определим

$$e_k = \frac{g_k}{\|g_k\|}, \quad \text{где } g_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} C_{ki}e_i,$$

$$C_{ki} = (x_k, e_i), \quad i = 1, 2, \dots, k-1.$$

Заметим, что  $\|g_k\| \neq 0$ ,  $k=1, 2, \dots$ , поскольку элементы  $x_k$  линейно независимы.

Широкое практическое применение нашли ортогональные системы полиномов, получаемые путем ортогонализации в гильбертовом пространстве со скалярным произведением (1.1.24) системы линейно независимых функций  $1, t, t^2, \dots, t^n, \dots$ . Так, если в формуле (1.1.24) положить  $\varphi(t) = 1$ ,  $a = -1$ ,  $b = 1$ , т. е. выполнить ортогонализацию в пространстве  $L_2[-1, 1]$  со скалярным произведением

$$(x, y) = \int_{-1}^1 x(t) y(t) dt,$$

то получится система ортонормированных *полиномов Лежандра*  $P_n(t)$ , которые определяются формулой

$$P_n(t) = \frac{\sqrt{2n+1}}{n! 2^n \sqrt{2}} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Выполняя ортогонализацию той же линейно независимой системы  $1, t, t^2, \dots, t^n, \dots$  при  $-\infty < t < \infty$  в пространстве со скалярным произведением

$$(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t) \exp(-t^2) dt,$$

получим систему ортонормированных *полиномов Эрмита*  $H_n(t)$

$$H_n(t) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \exp(t^2) \frac{d^n}{dt^n} \exp(-t^2), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1.25)$$

Наконец, выполняя ортогонализацию при  $0 \leq t < \infty$  в пространстве со скалярным произведением

$$(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t) \exp(-t) dt,$$

получим систему ортонормированных *полиномов Лагерра*  $L_n(t)$

$$L_n(t) = \frac{1}{n!} \exp(t) \frac{d^n}{dt^n} [t^n \exp(-t)], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1.26)$$

Введем теперь понятие *полной системы элементов* в произвольном нормированном пространстве. В любом линейном пространстве система элементов  $\{x_i\}, i=1, \dots, n$ , порождает некоторое подпространство с элементами  $\sum_{i=1}^n C_i x_i$ , где  $C_i$  — произвольные постоянные. В бесконечномерном случае оно может быть не замкнутым. Например, функции  $1, t, t^2, \dots, t^n, \dots, t \in [a, b]$  порождают подпространство полиномов в пространстве непрерывных функций  $C[a, b]$ , которое не является замкнутым. Его замыкание совпадает со всем пространством

$C[a, b]$ . Если замыкание подпространства, порожденно-го системой элементов  $\{x_n\}$  нормированного простран-ства, совпадает со всем пространством  $X$  (т. е. это под-пространство является всюду плотным в  $X$ ), то система элементов  $\{x_n\}$  называется полной. Так, система функ-ций  $1, t, t^2, \dots, t^n, \dots$  является полной в  $C[a, b]$ .

Из сказанного следует, что если система  $\{x_n\}$ ,  $n=1, 2, \dots$ , элементов нормированного пространства  $X$  является полной, то любой элемент  $x \in X$  можно предста-вить как предел последовательности  $\left\{ \sum_{i=1}^n C_i x_i \right\}$ , сходя-щейся при  $n \rightarrow \infty$  к  $x$  по норме этого пространства, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=1}^n C_i x_i - x \right\| = 0.$$

Таким образом, вопрос о полноте системы  $\{x_n\}$  — это и вопрос о возможности ее использования для аппроксими-зации в данном пространстве.

Существование полных систем линейно независимых элементов тесно связано с понятием *сепарабельности пространства*. Гильбертово пространство сепарабельно, если оно содержит счетное всюду плотное множество. Из этого множества всегда можно выделить полную си-стему линейно независимых элементов, которую можно ортогонализировать с помощью описанной выше процеду-ры. Следовательно, сепарабельное гильбертово прост-ранство содержит полную ортонормированную систему. Например, гильбертово пространство  $L_2[a, b]$  сепара-бельно [36].

Сформулируем без доказательства теорему, позволя-ющую судить о том, является ли данная ортонормиро-ванная система полной. Для того чтобы ортонормиро-ванная система  $\{e_n\}$ ,  $n=1, 2, \dots$ , в сепарабельном гиль-бертовом пространстве была полной, необходимо и достаточно, чтобы в этом пространстве не существовало ненулевого элемента, ортогонального всем элементам  $\{e_n\}$ . Другими словами, из условия  $(e_n, x) = 0$  для всех  $n=1, 2, \dots$  должно следовать  $x=0$ . Например, для орто-нормированной системы  $\{e_n\}$ , введенной на стр. 27 в про-странстве  $l_2$ , для произвольного  $x \in l_2$  можно записать

$$(e_1, x) = (x_1, 0, 0, \dots), (e_2, x) = (0, x_2, 0, \dots), \dots$$

Условие  $(e_n, x) = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , влечет за собой равенство нулю всех членов последовательности  $\{x_n\} = x$ , т. е.  $x = 0$ , следовательно, ортонормированная система  $\{e_n\}$  является полной.

Любой элемент гильбертова пространства  $H$ , содержащего полную ортонормированную систему  $\{e_n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , может быть сколь угодно точно приближен по соответствующей норме линейной комбинацией векторов этой системы  $\sum_{k=1}^n C_k e_k$ . Например, функции  $x(t) \in L_2[-1, 1]$  могут быть приближены полиномами Лежандра; функции  $x(t)$  в пространстве с нормой

$$\|x\| = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2) x^2(t) dt \right]^{1/2}$$

— полиномами Эрмита  $H_n(t)$ . В последнем случае имеет место такое предельное равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2) \left[ x(t) - \sum_{k=0}^n C_k H_k(t) \right]^2 dt = 0.$$

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} C_n e_n$ , составленный для произвольной ортонормированной системы  $\{e_n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , в гильбертовом пространстве  $H$ , называется *рядом Фурье* функции  $x(t) \in X$ , если его коэффициенты  $C_n$  определяются по формуле

$$C_n = (x, e_n).$$

В  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $E^n$  это выражение следует непосредственно из формулы

$$x(t) = \sum_{k=1}^n C_k e_k.$$

Скалярно умножая обе части равенства на некоторый элемент  $e_i$  ортонормированной системы, получим

$$(e_i, x) = \sum_{k=1}^n C_k (e_i, e_k) = C_i.$$

Рассмотрим вопрос о сходимости ряда Фурье в произ-



вольном гильбертовом пространстве. Предварительно покажем, что при каждом значении  $n$  частичная сумма ряда  $\sum_{i=1}^n C_i e_i$  дает наилучшее приближение для элемента  $x$  по норме пространства  $X$  сравнительно с другими суммами того же вида  $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ . Действительно, ошибка приближения

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right\|^2 &= \left( x - \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, x - \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right) = \\ &= \|x\|^2 - 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i C_i + \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n C_i^2 + \sum_{i=1}^n (\alpha_i - C_i)^2 \end{aligned}$$

минимальна при  $\alpha_i = C_i$  и равна

$$\left\| x - \sum_{i=1}^n C_i e_i \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n C_i^2. \quad (1.1.27)$$

Геометрическая интерпретация выражения  $\left\| x - \sum_{i=1}^2 \alpha_i e_i \right\|$  в пространстве  $E^3$  — расстояние между вектором  $x$  и элементом  $y = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$  плоскости  $Y$ , натянутой на векторы

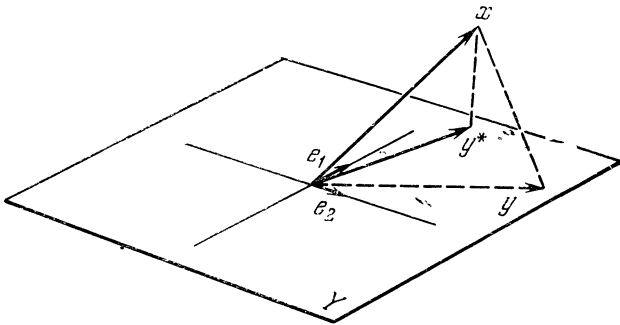


Рис. 1.1.3.

$e_1$  и  $e_2$  (рис. 1.1.3). Это расстояние минимально в направлении перпендикуляра к плоскости. Соответствующий этому направлению вектор, лежащий в плоскости, и есть  $y^* = C_1 e_1 + C_2 e_2$ . Вектор  $y^*$  может быть назван

ортогональной проекцией  $x$  на плоскость  $Y$ . В общем случае вектор  $\sum_{i=1}^n C_i e_i$  называется ортогональной проекцией вектора  $x$  на линейное пространство, порожденное элементами  $(e_1, \dots, e_n)$ .

Из равенства (1.1.27) следует, что

$$\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^n C_i^2.$$

Поскольку число  $n$  здесь произвольно, т. е. все частичные суммы ряда Фурье  $\sum_{i=1}^{\infty} C_i^2$  ограничены, то справедливо неравенство Бесселя

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i^2 \leq \|x\|^2. \quad (1.1.28)$$

Этому неравенству можно придать следующую геометрическую интерпретацию: сумма квадратов длин ортогональных проекций вектора не превосходит квадрата длины вектора.

Если теперь предположить, что система  $\{e_n\}$  полна, то последовательность частичных сумм  $\sum_{i=1}^n C_i e_i$  сходится по норме к элементу  $x \in X$ , т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{i=1}^n C_i e_i \right\| = 0$ .

При этом выполняется равенство Парсеваля

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i^2 = \|x\|^2. \quad (1.1.29)$$

Заметим, что коэффициенты Фурье  $C_n$ , соответствующие элементам  $x$  сепарабельного гильбертова пространства  $H$ , образуют пространство  $l_2$ , что следует из неравенства (1.1.28). Поскольку разложение данного элемента  $x \in H$  в ряд Фурье является единственным, устанавливается взаимно однозначное отображение пространства  $H$  на пространство  $l_2$ . Это отображение согласовано с линейными операциями в  $H$  и  $l_2$  и, следовательно, является изоморфным. В соответствии с равенством Парсеваля нормы соответствующих элементов в  $H$ , и в  $l_2$  совпадают:

$$\|x\|_H = \|y\|_{l_2}, \quad y = \{C_n\} \in l_2.$$

Такое отображение называют *изометричным*. Таким образом, отображение сепарабельного гильбертова пространства  $H$  на пространство  $l_2$  является изометричным. Исследование некоторой функции, заданной на гильбертовом пространстве  $H$ , можно вследствие изоморфизма  $H$  и  $l_2$  заменить исследованием той же функции на пространстве последовательностей  $l_2$ . Это в ряде случаев существенно облегчает решение задачи.

## § 2. Функции

**1. Определения.** Рассмотрим два произвольных множества  $M$  и  $N$ . Установим закон, ставящий в соответствие каждому элементу  $x \in M$  один и только один элемент  $y \in N$ . Такой закон называется *функцией* и обозначается  $y = f(x)$ . Каждому бинарному функциональному отношению  $R \subset M \times N$  (см. § 1) можно сопоставить одну и только одну функцию  $y = f(x)$ ,  $x \in M$ ,  $y \in N$ . Множество  $M$  называется *областью определения* функции  $f(x)$ , а множество  $N$  — *областью ее значений*. В частности, если  $M$  и  $N$  — множества на действительной прямой, то данное определение совпадает с обычным определением функции одного действительного переменного. Если область значений функции  $y = f(x)$  принадлежит действительной прямой, а область определения принадлежит функциональному метрическому пространству, то функцию  $y = f(x)$  называют также *функционалом*. Функцию, для которой область определения  $M$  и область значений  $N$  служат подмножества некоторых функциональных пространств  $X \supset M$ ,  $Y \supset N$ , называют *оператором*, действующим из пространства  $X$  в пространство  $Y$ . Понятие функции целесообразно использовать при рассмотрении общих свойств и определений, справедливых как для функционалов, так и для операторов.

Функция  $f(x)$ , определенная на линейном пространстве  $M$ , называется *линейной*, если она удовлетворяет следующим двум условиям:

а)  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$  для любых  $x_1, x_2 \in M$  (свойство аддитивности);

б)  $f(\alpha x) = \alpha f(x)$  для любого  $x \in M$  и любого числа  $\alpha$  (свойство однородности).

Примером линейной функции является оператор, определенный в  $C[t_0, T]$ :

$$y(t) = \int_{t_0}^T k(t, \tau) x(\tau) d\tau, \quad (1.2.1)$$

где  $k(t, \tau)$  — непрерывная функция двух переменных  $t, \tau$ . Если рассматривать величину  $t$  в выражении (1.2.1), как фиксированный параметр, то это выражение определяет линейный функционал, ставящий в соответствие функции  $x(\tau)$ ,  $\tau \in [t_0, T]$  число  $y(t)$ :

$$y(t) = f[x(\tau), t].$$

Таким образом, оператор (1.2.1) можно задать однопараметрическим семейством функционалов.

Рассмотрим теперь случай, когда функция  $y=f(x)$  задана на метрическом пространстве  $X$  и ее значение  $y$  также принадлежит  $X$ . В этом случае говорят об *отображении пространства  $X$  в себя*. Если оператор, действующий из линейного метрического пространства  $X$  в себя, каждой точке  $x \in X$  ставит в соответствие точку нуль, то такой оператор называется *нулевым*. Оператор  $I$ , действующий из линейного метрического пространства  $X$  в себя и переводящий каждую точку  $x \in X$  в себя в соответствии с равенством  $Ix=x$ , называется *единичным*. Нулевой и единичный операторы линейны.

Введем теперь в линейном метрическом пространстве  $X$  класс *однородных функций*. Для этого используем понятие  *$n$ -линейной функции*. Функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  от  $n$  аргументов, определенная на декартовом произведении  $n$ -линейных пространств  $X_1 \times \dots \times X_n$ , называется  *$n$ -линейной*, если она линейна по каждой из переменных при фиксированных значениях остальных. Например, функционал

$$F[x_1(\tau), \dots, x_n(\tau)] = \int_a^b \dots \int_a^b k_n(\tau_1, \dots, \tau_n) x_1(\tau_1) \dots x_n(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n$$

является  *$n$ -линейным*.

Функция  $f(x) \equiv f(x, \dots, x)$ , получаемая из  *$n$ -линейной функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  при  $x_1 = \dots = x_n = x$* , называется

ся *однородной функцией степени  $n$* . Однородная функция степени  $n$  удовлетворяет соотношению

$$f(\alpha x) = \alpha^n f(x),$$

где  $\alpha$  — некоторое число. Так, линейный функционал

$$F_1[x(\tau)] = \int_a^b k_1(\tau) x(\tau) d\tau$$

является однородным функционалом первой степени. Выражение

$$F_2[x(\tau)] = \int_a^b \int_a^b k_2(\tau_1, \tau_2) x(\tau_1) x(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

определяет однородный функционал второй степени. Однородный функционал степени  $n$  может быть задан формулой

$$F_n[x(\tau)] = \int_a^b \dots \int_a^b k_n(\tau_1, \dots, \tau_n) x(\tau_1) \dots x(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n.$$

(1.2.2)

Функция  $k_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$  называется *ядром функционала  $F_n[x(\tau)]$* . Если эта функция симметрична относительно своих переменных, т. е. ее значения не изменяются при произвольной их перестановке, то функционал (1.2.2) называется *регулярным однородным функционалом степени  $n$* . Если ядро однородного функционала степени  $n$  не симметрично, то его всегда можно симметризовать введением нового ядра  $k^*(\tau_1, \dots, \tau_n)$

$$k^*(\tau_1, \dots, \tau_n) = \frac{1}{n!} \sum k_n(\tau_{i_1}, \dots, \tau_{i_n}),$$

где сумма вычисляется для всех перестановок аргументов  $\tau_j, j=1, \dots, n$ . Это ядро симметрично, причем

$$\begin{aligned} \int_a^b \dots \int_a^b k_n(\tau_1, \dots, \tau_n) x(\tau_1) \dots x(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n = \\ = \int_a^b \dots \int_a^b k_n^*(\tau_1, \dots, \tau_n) x(\tau_1) \dots x(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n. \end{aligned}$$

Сумма регулярных однородных функционалов (1.2.2) степени  $n \leq N$  образует *функциональный полином* (регулярный функционал) степени  $N$

$$G_N[x(\tau)] = F_0 + F_1[x(\tau)] + F_2[x(\tau)] + \dots + F_N[x(\tau)], \quad (1.2.3)$$

где  $F_0 = C_0 = \text{const.}$  Такие полиномы используются для аппроксимации функционалов подобно тому, как обычные полиномы используются для аппроксимации функций (см. п. 5 § 2).

При описании нелинейных динамических систем применяются *полиномы Вольтёрра*, составленные из регулярных однородных функционалов, зависящих от параметра  $t \in [t_0, T]$ , обычно имеющего смысл текущего момента времени,

$$v_n[x(\tau), t] = \int_{t_0}^T \dots \int_{t_0}^T k_n(t, \tau_1, \dots, \tau_n) x(\tau_1) \dots x(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n. \quad (1.2.4)$$

Регулярность этих функционалов понимается как симметричность ядер  $k_n(t, \tau_1, \dots, \tau_n)$  относительно переменных  $\tau_1, \dots, \tau_n$  при всех  $t \in [t_0, T]$ . При этом предполагается выполненным условие

$$k_n(t, \tau_1, \dots, \tau_n) \equiv 0 \text{ при } \tau_i > t, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.2.5)$$

Если величину  $t$  в выражении (1.2.4) рассматривать как переменную, изменяющуюся в пределах от  $t_0$  до  $T$  (в частности, от минуса бесконечности до бесконечности), то полином Вольтерра

$$G_N[x(\tau), t] = \sum_{n=0}^N v_n[x(\tau), t] \quad (1.2.6)$$

задает оператор, действующий из пространства  $X$  функций  $x(\tau)$ ,  $\tau \in [t_0, T]$  в пространство  $Y$  функций  $y(t) = G_N[x(\tau), t]$ ,  $t \in [t_0, T]$ .

**2. Непрерывность и ограниченность. Норма функции.** Пусть функция  $y = f(x)$  отображает метрическое пространство  $X$  в метрическое пространство  $Y$ . Функция называется *непрерывной* в точке  $x_0 \in X$ , если для любого положительного числа  $\varepsilon$  найдется положительное число

$\delta(\varepsilon, x_0)$  такое, что при условии  $\rho_X(x, x_0) < \delta(\varepsilon, x_0)$  будет выполняться также и условие  $\rho_Y(y, y_0) < \varepsilon$ , где  $y_0 = f(x_0)$ ,  $\rho_X$  и  $\rho_Y$  — метрики в пространствах  $X$  и  $Y$  соответственно. Если функция  $y = f(x)$  непрерывна во всех точках некоторой области  $M \subseteq X$ , то она называется *непрерывной в этой области*. Примером непрерывной функции может служить линейный оператор (1.2.1), заданный на множестве непрерывных функций  $C[t_0, T]$ .

В произвольном метрическом пространстве, так же как и в арифметическом пространстве  $E^n$ , из непрерывности линейной функции в одной точке  $x_0 \in X$  следует непрерывность во всем пространстве.

Из данного определения непрерывности следует, что функция  $y = f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$  банахова пространства  $X$  тогда и только тогда, когда последовательность  $y_n = f(x_n)$  сходится к  $f(x_0)$  при  $x_n \rightarrow x_0$ . Таким образом, непрерывная функция отображает сходящуюся последовательность  $\{x_n\}$  в сходящуюся последовательность  $\{y_n\}$ . Это условие удобно использовать для практической проверки непрерывности функций. Докажем, например, что норма в произвольном банаховом пространстве  $X$  является непрерывным функционалом  $f(x) = \|x\|$ . Построим последовательность  $x_n \rightarrow x$  для любой точки  $x \in X$ .

Тогда

$$|f(x_n) - f(x)| = |\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\|.$$

Следовательно,  $f(x_n)$  сходится к  $f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$ , т. е.  $f(x)$  — непрерывный функционал. Использованное при доказательстве неравенство легко получить из третьей аксиомы нормы.

В определении непрерывной функции число  $\delta$  зависит как от  $\varepsilon$ , так и от точки  $x_0$ , в которой определяется непрерывность. Если функция непрерывна в области  $M \subseteq X$ , причем в определении непрерывности число  $\delta$  не зависит от  $x_0$ , т. е. для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta(\varepsilon)$ , что при условии  $\rho_X(x, x_0) < \delta(\varepsilon)$  имеет место  $\rho_Y(y, y_0) < \varepsilon$  для любых  $x, x_0 \in M$ , то функция  $f(x)$  называется *равномерно непрерывной* в области  $M$ . Например, норма  $\|x\|$  в банаховом пространстве  $X$  не только непрерывна, но и равномерно непрерывна.

Функцию  $y=f(x)$ , действующую из банахова пространства  $X$  в банахово пространство  $Y$ , назовем *ограниченной* на множестве  $M \subset X$ , если она отображает каждое ограниченное подмножество  $D \subset M$  в ограниченное множество\*). Для линейной функции  $y=f(x)$ , действующей из банахова пространства  $X$  в банахово пространство  $Y$ , это определение эквивалентно следующему. Для любого  $x \in X$  найдется такая константа  $C$ , что

$$\|f(x)\|_Y \leq C \|x\|_X. \quad (1.2.7)$$

Наименьшее из чисел  $C$  в неравенстве (1.2.7) называется *нормой линейной функции*. Можно показать, что это определение нормы эквивалентно следующему:

$$\|f(x)\| = \sup_{\|x\|_X \neq 0} \frac{\|f(x)\|_Y}{\|x\|_X}. \quad (1.2.8)$$

Определим норму линейного функционала  $f(x) = (a, x)$  в гильбертовом пространстве  $X$  ( $a \in X$ ). По формуле (1.2.8) имеем

$$\|f(x)\| = \sup_{\|x\|_X \neq 0} \frac{|(a, x)|}{\|x\|_X} \leq \sup_{\|x\|_X \neq 0} \frac{\|a\|_X \cdot \|x\|_X}{\|x\|_X} = \|a\|_X,$$

т. е.  $\|f(x)\| = \|a\|_X$ . В частности, в действительном пространстве  $l_2$  норма линейного функционала

$$f(x) = (C, x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i x_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} C_i^2 < \infty$$

равна

$$\|f(x)\| = \|C\|_{l_2} = \left( \sum_{i=1}^{\infty} C_i^2 \right)^{1/2}.$$

В действительном пространстве  $L_2[a, b]$  линейный функционал

$$f(x) = (k, x) = \int_a^b k(\tau) x(\tau) d\tau, \quad k(\tau) \in L_2[a, b]$$

---

\*) Подмножество  $R$  метрического пространства  $X$  называется ограниченным, если оно содержится в некотором замкнутом шаре этого пространства. В частности, подмножество  $R^n$  пространства  $E^n$  ограничено, если ограничено множество декартовых координат всех его точек.



имеет норму

$$\|f(x)\| = \|k(\tau)\|_{L_2} = \left[ \int_a^b |k(\tau)|^2 d\tau \right]^{1/2}.$$

Если  $f(x)$  — непрерывный линейный оператор Вольтерра, действующий в  $C[t_0, T]$ ,

$$\|y(t) = f[x(\tau), t] = \int_{t_0}^t k(t, \tau) x(\tau) d\tau, \quad t \in [t_0, T], \quad (1.2.9)$$

то по формуле (1.2.8) можно найти, что

$$\|f[x(\tau), t]\| = \sup_{t \in [t_0, T]} \int_{t_0}^t |k(t, \tau)| d\tau.$$

Введем теперь понятие ограниченности для однородных функций, которое следует из общего определения (стр. 39). Будем называть однородную функцию степени  $n$  *ограниченной*, если найдется такая константа  $C$ , что

$$\|f(x)\|_Y \leq C \|x\|_X^n \quad (1.2.10)$$

для всех  $x \in X$ .

Норму для однородной функции определим по формуле

$$\|f(x)\| = \sup_{\|x\|_X \neq 0} \frac{\|f(x)\|_Y}{\|x\|_X^n}, \quad (1.2.11)$$

что соответствует наименьшему из чисел  $C$  в формуле (1.2.10). Например, для однородного оператора (1.2.4), действующего из пространства  $C[t_0, T]$  в то же пространство, норма определяется следующим равенством:

$$\|F_n[x(\tau), t]\| = \sup_{t \in [t_0, T]} \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t |k_n(t, \tau_1, \dots, \tau_n)| d\tau_1 \dots d\tau_n. \quad (1.2.12)$$

Назовем полином Вольтерра (1.2.6) *ограниченным*, если ограничены все однородные операторы  $v_n[x(\tau), t]$ . В пространстве  $C[t_0, T]$  имеем следующее неравенство:

$$\|G_N[x(\tau), t]\|_C \leq \sum_{n=0}^N C_n \|x(t)\|_C^n, \quad (1.2.13)$$

где для  $n=0, \dots, N$

$$C_n = \sup_{t \in [t_0, T]} \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t |k_n(t, \tau_1, \dots, \tau_n)| d\tau_1 \dots d\tau_n. \quad (1.2.14)$$

Если регулярные полиномы ограничены на некотором множестве  $M \subset X$ , то они ограничены на всем банаховом пространстве  $X$ . Регулярные полиномы Вольтерра, определенные на всем банаховом пространстве  $X$ , ограничены тогда и только тогда, когда они непрерывны.

Введенные выше нормы для функций позволяют рассматривать нормированные линейные пространства, элементами которых являются функционалы и операторы. Так, совокупность линейных функционалов  $f(x)$ , заданных на нормированном пространстве  $X$ , образует линейное нормированное пространство  $X^*$  с нормой (1.2.8), которое называется *сопряженным* с пространством  $X$ . Сопряженное пространство  $X^*$  является полным независимо от полноты пространства  $X$ .

Если существует предел последовательности  $x_n \in X$  по норме пространства  $X$ , то существует и предел соответствующей последовательности в сопряженном пространстве  $y_n = f(x_n)$ , поскольку

$$|f(x) - f(x_n)| \leq \|f\|_X \cdot \|x - x_n\|_X.$$

Если же существует предел некоторой последовательности  $f(x_n)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x), \quad \text{где } x, x_n \in X \quad (1.2.15)$$

и  $f(x)$  — линейный непрерывный функционал, то последовательность  $\{x_n\}$  называется *слабо сходящейся* к точке  $x \in X$ . Из слабой сходимости в бесконечномерном пространстве не следует сходимости по норме пространства  $X$ , т. е. сильная сходимости. Например, в  $l_2$  последовательность  $e_1 = (1, 0, 0, \dots)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0, \dots)$ ,  $e_3 = (0, 0, 1, \dots)$ , ... сходится слабо. Действительно, линейный функционал в  $l_2$  имеет вид  $f(x) = (C, x)$ , где  $C = \{C_n\}$ ,  $C_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Поскольку  $f(e_n) = C_n$ , то  $f(e_n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , в то время как  $\|e_n\|_{l_2} = 1$  для всех  $n = 1, 2, \dots$ , т. е. последовательность  $\{e_n\}$  не сходится по норме пространства  $l_2$ .

Функция  $y=f(x)$  удовлетворяет условию Липшица на множестве  $M$  метрического пространства  $X$ , если существует такое действительное число  $\alpha$  (константа Липшица), что

$$\rho_Y(y_2, y_1) \leq \alpha \rho_X(x_2, x_1), \quad (1.2.16)$$

где  $x_1, x_2 \in M$ ,  $y_1=f(x_1)$ ,  $y_2=f(x_2)$ . Для банаховых пространств  $X, Y$  условие Липшица может быть записано так:

$$\|y_2 - y_1\|_Y \leq \alpha \|x_2 - x_1\|_X, \quad x_1, x_2 \in X, \quad y_2, y_1 \in Y.$$

Из условия Липшица в банаховом пространстве следует равномерная непрерывность функции  $f(x)$ , а в произвольном метрическом пространстве — лишь непрерывность функции.

**3. Принцип сжимающих отображений.** Рассмотрим функцию  $y=f(x)$ , заданную на полном метрическом пространстве  $X$  и отображающую это пространство в себя. Пусть функция  $f(x)$  удовлетворяет условию Липшица с константой  $\alpha < 1$ . Такое отображение пространства  $X$  в себя называют *сжимающим отображением*, поскольку

$$\rho(f(x_2), f(x_1)) < \rho(x_2, x_1),$$

т. е. расстояние между точками  $x_1, x_2 \in X$  после отображения уменьшается.

*Неподвижной точкой отображения* называется такая точка  $x$ , которая не изменяется при отображении, т. е. является решением уравнения

$$f(x) = x. \quad (1.2.17)$$

Сформулируем *принцип сжимающих отображений*. Всякое сжимающее отображение в полном метрическом пространстве  $X$  имеет единственную неподвижную точку. Докажем это положение.

Взяв произвольную точку  $x_0 \in X$ , построим последовательность отображений  $x_1=f(x_0)$ ,  $x_2=f(f(x_0))=f^2(x_0)$ , ...,  $x_n=f^n(x_0)$ . Эта последовательность

фундаментальна, поскольку при  $m > n$

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_m) &= \rho(f^n(x_0), f^m(x_0)) \leq \\ &\leq \alpha^n \rho(x_0, x_{m-n}) \leq \alpha^n \sum_{i=0}^{m-n-1} \rho(x_i, x_{i+1}) \leq \\ &\leq \alpha^n \rho(x_0, x_1) \sum_{i=0}^{m-n-1} \alpha^i \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \rho(x_0, x_1) \end{aligned}$$

и при  $n \rightarrow \infty$ , ввиду условия  $\alpha < 1$ , получим  $\rho(x_n, x_m) \rightarrow 0$ . Поскольку пространство  $X$  является полным, эта последовательность имеет предел  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Из непрерывности функции  $y = f(x)$  следует существование предела

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x),$$

причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x, \quad \text{т. е. } x = f(x),$$

и пределом последовательности  $x_n$  является неподвижная точка. Предположение о существовании еще одной неподвижной точки  $y = f(y)$  приводит к противоречию, так как

$$\rho(f(x), f(y)) = \rho(x, y) \leq \alpha \rho(x, y), \quad \alpha < 1,$$

т. е.  $\rho(x, y) = 0$ . Следовательно, неподвижная точка единственна.

Из доказательства следует, что решение уравнения  $x = f(x)$  существует и в том случае, когда отображение  $f^n(x)$  становится сжимающим, начиная с некоторого значения  $n$ . В нелинейных задачах функция  $f(x)$  обычно определяет сжимающее отображение не на всем пространстве  $X$ , а на некотором шаре  $D \subset X$ . В этом случае принцип сжимающих отображений необходимо дополнить условием, обеспечивающим отображение шара  $D = \{x: \rho(x, x_0) \leq \varepsilon\}$  в себя с тем, чтобы последовательные отображения принадлежали заданному шару. Таким условием служит неравенство

$$\rho(f(x_0), x_0) \leq (1-\alpha)\varepsilon. \quad (1.2.18)$$

В самом деле, если  $\rho(x, x_0) \leq \varepsilon$ , то из (1.2.16) и (1.2.18) следует

$$\begin{aligned} \rho(f(x), x_0) &\leq \rho(f(x), f(x_0)) + \rho(f(x_0), x_0) \leq \\ &\leq \alpha \rho(x, x_0) + (1-\alpha) \varepsilon \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Итак, если  $f(x)$  является сжимающим отображением на замкнутом шаре  $D$  полного метрического пространства  $X$  и наряду с неравенством (1.2.16) выполняется неравенство (1.2.18), то функция  $f(x)$  имеет в шаре  $D$  единственную неподвижную точку.

Принцип сжимающих отображений используется при доказательстве существования и единственности решения дифференциальных и интегральных уравнений. Рассмотрим, например, линейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$x(t) = \lambda \int_0^t k(t, \tau) x(\tau) d\tau + g(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.2.19)$$

в котором  $g(t)$ ,  $k(t, \tau)$  — заданные функции, непрерывные относительно переменных  $t, \tau \in [0, T]$ ;  $\lambda$  — действительный параметр. Линейный оператор  $f(x)$ , определяемый правой частью уравнения (1.2.19), отображает пространство непрерывных функций  $x(t) \in C[0, T]$  в себя. Учитывая, что в  $C[0, T]$  метрика задается формулой

$$\rho(x_1, x_2) = \sup_{\tau \in [0, T]} |x_1(\tau) - x_2(\tau)|,$$

имеем

$$\begin{aligned} \rho(f(x_1), f(x_2)) &= \\ &= \sup_{t \in [0, T]} \left| \lambda \int_0^t k(t, \tau) (x_1(\tau) - x_2(\tau)) d\tau \right| \leq |\lambda| M t \rho(x_1, x_2), \end{aligned}$$

где  $M = \sup_{t, \tau \in [0, T]} |k(t, \tau)|$ . Аналогично,

$$\begin{aligned} \rho(f^2(x_1), f^2(x_2)) &\leq |\lambda| M \int_0^t |\lambda| M t \rho(x_1, x_2) dt = \\ &= |\lambda|^2 M^2 \frac{t^2}{2} \rho(x_1, x_2). \end{aligned}$$

При произвольном  $n$  получим

$$\rho(f^n(x_1), f^n(x_2)) \leqslant \\ \leqslant |\lambda|^n M^n \frac{l^n}{n!} \rho(x_1, x_2) \leqslant |\lambda|^n M^n \frac{T^n}{n!} \rho(x_1, x_2).$$

Поскольку всегда можно найти значение  $n$ , начиная с которого  $\frac{|\lambda|^n M^n T^n}{n!} < 1$ , то оператор  $f(x)$  удовлетворяет принципу сжимающих отображений и, следовательно, уравнение (1.2.19) имеет единственное решение.

Доказательство принципа сжимающих отображений конструктивно, т. е. содержит способ приближенного решения уравнения  $x=f(x)$ . Этот способ, заключающийся в построении сходящейся последовательности  $x_n=f^n(x_0)$ , широко используется в приложениях и называется *методом последовательных приближений*.

**4. Свойства функций на компактных множествах.** Множество  $K$  метрического пространства  $X$  называется *компактным*, если любое его бесконечное подмножество содержит хотя бы одну предельную точку. Таким образом, из любой бесконечной последовательности элементов компактного множества  $K$  можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому пределу  $x \in X$ . Этот предел может не принадлежать множеству  $K$ , тогда говорят о компактности  $K$  в  $X$ ; если же все предельные точки принадлежат  $K$ , то говорят, что множество  $K$  компактно в себе. Рассмотрим, например, любое ограниченное множество на числовой оси. Любая последовательность  $\{x_n\}$  элементов этого множества будет ограниченной, и поэтому по теореме Больцано—Вейерштрасса [36] из нее можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Таким образом, ограниченное множество на числовой оси компактно в пространстве вещественных чисел. Если рассмотреть ограниченное и замкнутое множество на действительной прямой—отрезок  $[a, b]$ ,—то это множество, очевидно, будет компактно в себе. В то же время вся числовая ось представляет некомпактное множество. Точно так же в арифметическом пространстве  $E^n$  всякое ограниченное множество компактно, хотя все пространство компактным не является. В бесконечномерных пространствах задача о выяснении компактности множества усложняется, так

как в них могут существовать ограниченные, но некомпактные множества. Например, сфера  $\|x\|=1$  в пространстве  $l_2$  является ограниченным множеством. Однако на ней можно выбрать бесконечную последовательность, не имеющую предельной точки:  $x_1=(1, 0, \dots)$ ,  $x_2=(0, 1, \dots)$ ,  $\dots$ . Поскольку  $\|x_n - x_m\|=\sqrt{2}$  при  $n \neq m$ , эта последовательность не сходится, т. е. сфера  $\|x\|=1$  не является компактным множеством. Для компактности множества  $K$  в  $l_2$  необходимо и достаточно, чтобы это множество было ограничено и чтобы для любого  $\varepsilon > 0$  существовал такой номер  $N(\varepsilon)$ , что для любой последовательности  $\{x_n\} \in K$  имело бы место неравенство

$$\sum_{n=N}^{\infty} |x_n|^2 < \varepsilon.$$

Критерий компактности множества  $\Phi$  непрерывных функций в пространстве  $C[a, b]$  определяется *теоремой Арцела*, содержащей следующие два требования:

1) существует такое число  $M$ , что для любой функции  $x(t) \in \Phi$  выполняется  $|x(t)| < M$ ,  $t \in [a, b]$  (условие равномерной ограниченности);

2) для любого  $\varepsilon > 0$  можно найти такое  $\delta > 0$ , что для любой функции  $x(t) \in \Phi$  выполняется неравенство

$$|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon,$$

как только

$$|t_1 - t_2| < \delta, \quad t_1, t_2 \in [a, b]$$

(условие равностепенной непрерывности).

Понятие компактности множества позволяет сформулировать следующие теоремы, обобщающие известные теоремы математического анализа для непрерывных функций, заданных на отрезке.

1. Непрерывная функция  $f(x)$  на компактном в себе множестве  $K$ , принадлежащем полному метрическому пространству  $X$ , ограничена на этом множестве и достигает на нем своей точной верхней и нижней грани.

2. Непрерывная функция, определенная на компактном множестве  $K \in X$ , равномерно непрерывна на  $K$ .

Первая из приведенных теорем используется, в частности, для решения вопроса о существовании экстремума непрерывного функционала  $J(x)$  на некотором мно-

жестве метрического пространства. Экстремум существует, если указанное множество компактно в себе. Последнее можно проверить с помощью теоремы Арцела.

Если функция отображает банахово пространство  $X$  в банахово пространство  $Y$  (в частности, в себя) таким образом, что каждое ограниченное множество переводится в компактное, эта функция называется *вполне непрерывной*. Например, единичный оператор  $I$  в гильбертовом пространстве  $l_2$ :  $Ix = x$ ,  $x = \{x_n\} \in l_2$  — непрерывен, но не вполне непрерывен. Действительно, единичную сферу  $\|x\| = 1$ , являющуюся некомпактным множеством, он переводит в себя, т. е. ограниченное множество переводит в некомпактное. Если же рассмотреть в  $l_2$  оператор

$$Ax = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \dots, \frac{1}{n}x_n, \dots\right),$$

то он будет вполне непрерывным. В частности, единичную сферу  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 = 1$  он переводит во множество  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x_n^2 = 1$ , компактность которого можно легко проверить. В пространстве непрерывных функций  $C[t_0, T]$  примером вполне непрерывного оператора является линейный оператор Вольтерра

$$y(t) = \int_{t_0}^t k(t, \tau) x(\tau) d\tau, \quad t \in [t_0, T]$$

при условии, что функция  $k(t, \tau)$  непрерывна по переменным  $\tau, t$ . Вполне непрерывным является также любой непрерывный линейный оператор, переводящий банахово пространство в его конечномерное подпространство, поскольку ограниченное множество при этом переводится в ограниченное, которое в конечномерном пространстве является также и компактным.

Рассмотрим неоднородный полином Вольтерра

$$y(t) = \sum_{n=1}^N \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t k_n(t, \tau_1, \dots, \tau_n) x(\tau_1) \dots x(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n.$$

Если функции  $k_n(t, \tau_1, \dots, \tau_n)$ ,  $n = 1, \dots, N$ , непрерывны, то этот оператор вполне непрерывен в шаре  $\|x(t)\| \leq R$  пространства  $C[t_0, T]$ .



**5. Аппроксимация непрерывных функционалов.** Согласно теореме Вейерштрасса об аппроксимации любую непрерывную числовую функцию можно приблизить полиномом (§ 1, п. 3). Для функционалов существует аналогичная теорема, доказанная М. Фреше [116], в которой обосновывается возможность аппроксимации произвольного непрерывного функционала регулярными функциональными полиномами. Эта теорема формулируется так.

Если функционал  $F[x(\tau)]$  определен и непрерывен в пространстве  $C[a, b]$ , то на любом ограниченном подмножестве  $R \subset C[a, b]$  его можно представить в виде предела последовательности регулярных функциональных полиномов

$$F[x(\tau)] = \lim_{n \rightarrow \infty} G_{r_n}[x(\tau)].$$

Докажем утверждение этой теоремы для отрезка  $[0, \pi]$ . Введем функцию  $\tilde{x}(\tau)$  соотношением

$$\tilde{x}(\tau) = \begin{cases} x(\tau), & \tau \in [0, \pi], \\ x(-\tau), & \tau \in [-\pi, 0]. \end{cases}$$

Функция  $\tilde{x}(\tau)$  имеет период  $2\pi$ , является четной функцией на отрезке  $[-\pi, \pi]$  и непрерывна на этом отрезке, если  $x(\tau)$  непрерывна на  $[0, \pi]$ . Поэтому ее можно разложить в ряд Фурье по косинусам

$$\frac{1}{\sqrt{2}} a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos i\tau, \quad (1.2.20)$$

где

$$a_i = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\tau) \cos i\tau \, d\tau, \quad a_0 = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\pi} x(\tau) \, d\tau. \quad (1.2.21)$$

Для любой непрерывной периодической функции существует единственный набор коэффициентов ряда Фурье, и наоборот, если ряд (1.2.20) с фиксированными коэффициентами  $a_i$  соответствует непрерывной функции, то только одной. Это соответствие между функцией и рядом Фурье обозначается так:

$$x(\tau) \sim \frac{1}{\sqrt{2}} a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos i\tau. \quad (1.2.22)$$

Если помимо (1.2.22) имеет место соответствие

$$y(\tau) \sim \frac{1}{\sqrt{2}} a'_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a'_i \cos i\tau, \quad (1.2.23)$$

то согласно формуле Парсеваля \*)

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i a'_i = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\tau) y(\tau) d\tau. \quad (1.2.24)$$

Докажем теперь такую лемму. Если  $P$  является однородным полиномом степени  $p$  от  $n+1$  переменных, то ему можно сопоставить непрерывную функцию  $h_p(\tau_1, \dots, \tau_p)$  от  $p$  переменных такую, что для любой функции  $x(\tau) \in C[0, \pi]$

$$\begin{aligned} P(a_0, a_1, \dots, a_n) &= \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \dots \int_0^{\pi} h_p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p) x(\tau_1) x(\tau_2) \dots x(\tau_p) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_p, \end{aligned} \quad (1.2.25)$$

где  $a_i$  определяются формулой (1.2.21). Утверждение леммы следует из формулы Парсеваля, если однородный полином представить в виде

$$P(a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum A a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n}, \quad \sum_{i=0}^n \alpha_i = p$$

и положить

$$\begin{aligned} h_p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p) &= \\ &= \sum A \left(\frac{2}{\pi}\right)^p \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\alpha_0} \cos \tau_{\alpha_0+1} \dots \cos \tau_{\alpha_0+\alpha_1} \cos 2\tau_{\alpha_0+\alpha_1+1} \dots \\ &\quad \dots \cos 2\tau_{\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2} \cos 3\tau_{\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+1} \dots \cos n\tau_p. \end{aligned}$$

Перейдем теперь к доказательству самой теоремы. Прежде всего отметим, что в формулах (1.2.22) и (1.2.23) использовался знак соответствия, а не равенства, по той

---

\*) Формула Парсеваля, выведенная в § 1 для функций с интегрируемым квадратом, справедлива и в пространстве непрерывных функций (см. Унттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, ч. I. Физматгиз, 1963).

причине, что ряд Фурье, построенный для произвольной непрерывной функции, может и не сходиться к ней. С другой стороны, доказано [36], что выражение

$$\sigma_{n,x}(\tau) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} na_0 + (n-1) a_1 \cos \tau + \dots + a_{n-1} \cos(n-1) \tau}{n}, \quad (1.2.26)$$

называемое *суммой Фейера*, равномерно сходится к  $x(\tau)$  на интервале  $[0, \pi]^*$ ). Учитывая, что функционал  $F[x(\tau)]$  по условию непрерывен, получим

$$F[x(\tau)] = \lim_{n \rightarrow \infty} F[\sigma_{n,x}(\tau)]. \quad (1.2.27)$$

Рассмотрим теперь функцию многих переменных

$$\begin{aligned} \varphi_n(\tau, y_0, \dots, y_n) &= \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} ny_0 + (n-1) y_1 \cos \tau + \dots + y_{n-1} \cos(n-1) \tau}{n}, \end{aligned}$$

где  $y_0, \dots, y_{n-1}$  — произвольные постоянные. Значение функционала  $F$  на этой функции зависит только от  $n+1$  числа  $y_0, \dots, y_n$ . Обозначим

$$F[\varphi_n(\tau, y_0, \dots, y_n)] = \Phi(y_0, \dots, y_n). \quad (1.2.28)$$

При фиксированном  $n$  функция  $\Phi(y_0, \dots, y_n)$  является непрерывной функцией от  $(n+1)$  переменных. По теореме Вейерштрасса эту функцию на любом ограниченном подмножестве  $E^{n+1}$  можно приблизить равномерно сходящейся последовательностью полиномов. В частности, для каждого фиксированного  $n > 0$  каждому числу  $M_n > 0$  можно сопоставить полином от  $n+1$  переменных такой, что

$$|P_n(y_0, \dots, y_n) - \Phi(y_0, \dots, y_n)| < \frac{1}{n^2}$$

для  $|y_i| < M_n, i=0, 1, \dots, n$ . Выбрав в качестве  $M_n$

---

\*) Сумма Фейера получается при применении для суммирования расходящихся рядов Фурье метода средних арифметических.

любое число, большее  $M\sqrt{2}$ , где

$$M = \max_{\tau \in [0, \pi]} |x(\tau)|,$$

получим, что для любого  $i$

$$a_i^2 \leq \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2(\tau) d\tau \leq 2M^2 < M_n^2$$

и, значит,

$$|P_n(a_0, \dots, a_n) - \Phi(a_0, \dots, a_n)| < \frac{1}{n^2}. \quad (1.2.29)$$

Записывая (1.2.27) в виде

$$F[x(\tau)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(a_0, \dots, a_n),$$

получим из (1.2.29)

$$F[x(\tau)] = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(a_0, \dots, a_n). \quad (1.2.30)$$

Обозначим через  $P_{n,p}$  однородные слагаемые степени  $p$ , входящие в полином  $P_n$ . По формуле (1.2.25) каждому  $P_{n,p}$  соответствует однородный функционал с ядром  $h_p^n$ . Поэтому, переходя к произвольному отрезку  $[a, b]$  линейной заменой переменного, окончательно получаем

$$\begin{aligned} F[x(\tau)] = \lim_{n \rightarrow \infty} & \left[ h_0^{(n)} + \int_a^b h_1^{(n)}(\tau) x(\tau) d\tau + \right. \\ & + \int_a^b \int_a^b h_2^{(n)}(\tau_1, \tau_2) x(\tau_1) x(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \dots \\ & \left. \dots + \int_a^b \dots \int_a^b h_{r_n}^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_{r_n}) x(\tau_1) \dots x(\tau_{r_n}) d\tau_1 \dots d\tau_{r_n} \right]. \end{aligned} \quad (1.2.31)$$

В формуле (1.2.31) ядра  $h_p^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_p)$  являются некоторыми непрерывными функциями. В качестве ядер могут быть выбраны, например, различные полиномы от  $p$  переменных. Если функционал  $F[x(\tau)]$  рассматривается на компактном подмножестве пространства  $C[a, b]$ , то, используя вторую теорему о поведении

непрерывных функций на компактных множествах (стр. 46), можно показать, что в этом случае имеет место равномерная сходимость последовательности регулярных полиномов. В более общем случае, когда функционал зависит от параметра  $t$ , аппроксимация на отрезке  $[t_0, T]$  производится регулярными полиномами вида

$$y(t) = F[x(\tau), t] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ h_0^{(n)}(t) + \int_{t_0}^T h_1^{(n)}(t, \tau) x(\tau) d\tau + \right. \\ \left. + \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T h_2^{(n)}(t, \tau_1, \tau_2) x(\tau_1) x(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \dots \right. \\ \left. \dots + \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T h_{r_n}^{(n)}(t, \tau_1, \dots, \tau_{r_n}) x(\tau_1) \dots x(\tau_{r_n}) d\tau_1 \dots d\tau_{r_n} \right], \quad (1.2.32)$$

В частности, если функционал  $F[x(\tau), t]$  линеен, то из (1.2.32) получаем *формулу Адамара* [51] для произвольного непрерывного линейного функционала в пространстве  $C[t_0, T]$

$$F[x(\tau), t] = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^T h_1^{(n)}(t, \tau) x(\tau) d\tau.$$

Предел функций  $h_1^{(n)}(t, \tau)$  может и не существовать в обычном смысле. Если считать, что пределом последовательности функций  $h_1^{(n)}(t, \tau)$  может быть обобщенная функция  $h_1(t, \tau)$ , например,  $\delta$ -функция, то формулу Адамара можно записать в виде

$$F[x(\tau), t] = \int_{t_0}^T h_1(t, \tau) x(\tau) d\tau.$$

Так, при фиксированном  $t$  единичный функционал  $Ix(t) = x(t)$  может быть выражен следующим образом:

$$Ix(t) = \int_{t_0}^T \delta(t - \tau) x(\tau) d\tau.$$

Для непрерывного однородного функционала степени  $l$

из (1.2.32) получаем такое представление Фреше:

$$\begin{aligned} F[x(\tau), t] &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T h_l^{(n)}(t_1, \tau_1, \dots, \tau_l) x(\tau_1) \dots x(\tau_l) d\tau_1 \dots d\tau_l = \\ &= \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T h_l(t, \tau_1, \dots, \tau_l) x(\tau_1) \dots x(\tau_l) d\tau_1 \dots d\tau_l. \end{aligned}$$

В частности, для фиксированного  $t$  функционал  $(x(t))^l$  возведения в степень  $l$  может быть записан в виде

$$\begin{aligned} (x(t))^l &= \\ &= \int_{t_0}^T \dots \int_{t_0}^T \delta(t - \tau_1) \dots \delta(t - \tau_l) x(\tau_1) \dots x(\tau_l) d\tau_1 \dots d\tau_l. \end{aligned}$$

**6. Дифференцирование в нормированных пространствах.** Пусть функция  $f(x)$  действует из нормированного пространства  $X$  в нормированное пространство  $Y$ , причем она определена на открытом множестве  $M \subset X$ . Выберем некоторую точку  $x \in M$ , а также элемент  $\delta x \in X$  из условия  $x + \delta x \in M$  и рассмотрим «приращение» функции  $\delta f(x) = f(x + \delta x) - f(x)$ .

Функцию  $f(x)$  называют *дифференцируемой по Фреше*, если существует ограниченный линейный оператор  $f'(x)$ , действующий из пространства  $X$  в пространство  $Y$  такой, что

$$\delta f(x) = f'(x) \delta x + \alpha(x, \delta x), \quad (1.2.33)$$

причем

$$\frac{\|\alpha(x, \delta x)\|}{\|\delta x\|} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|\delta x\| \rightarrow 0.$$

Выражение  $f'(x) \delta x$  называют *сильным дифференциалом* или *дифференциалом Фреше* функции  $f(x)$ . Линейный оператор  $f'(x)$  носит название *сильной производной (производной Фреше)* функции  $f(x)$ . Производная  $f'(x)$  определяется однозначно, если функция  $f(x)$  дифференцируема.

Определение производной по Фреше не дает способа ее вычисления. Такой способ можно получить, если выбрать приращение  $\delta x$  в виде  $\delta x = \gamma h$ , где  $h \in X$ ,  $\gamma$  — действительный параметр. Если устремить параметр  $\gamma$  к

нулю, то  $\|\delta x\| \rightarrow 0$  и остаточный член в формуле (1.2.33) также стремится к нулю. При этом

$$\delta f = f(x + \gamma h) - f(x) = f'(x) \gamma h + \alpha(x, \gamma h) \quad (1.2.34)$$

и

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{f(x + \gamma h) - f(x)}{\gamma} = f'(x) h + \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\alpha(x, \gamma h)}{\gamma} = f'(x) h.$$

Предел (понимаемый в смысле сходимости по норме)

$$df = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\delta f(x)}{\gamma} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{f(x + \gamma h) - f(x)}{\gamma} = \left. \frac{d}{d\gamma} f(x + \gamma h) \right|_{\gamma=0} \quad (1.2.35)$$

называется *слабым дифференциалом* функции  $f$  в точке  $x$ , или *дифференциалом Гато*. Если этот предел определяет линейный ограниченный оператор  $f'(x)$

$$df = f'(x) h,$$

то  $f'(x)$  называется *слабой производной* функции  $f(x)$  (*производной Гато*). Если функция имеет сильную производную, то она имеет и слабую, причем обе производные совпадают, что следует из (1.2.35). Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Однако, если слабая производная  $f'(x)$  существует в некоторой окрестности точки  $x$  и непрерывна в точке  $x$ , то в этой точке существует и сильная производная, совпадающая со слабой.

Рассмотрим несколько примеров определения производной. Для линейного оператора вида (1.2.1), где  $k(t, \tau)$  — непрерывная функция переменных  $t, \tau \in [t_0, T]$ ,

$$df(x) = \left. \frac{d}{d\gamma} \int_{t_0}^T k(t, \tau) [x(\tau) + \gamma h(\tau)] d\tau \right|_{\gamma=0} = \int_{t_0}^T h(\tau) k(t, \tau) d\tau.$$

Полученный линейный оператор определяет производную Гато

$$f'(x) h = \int_{t_0}^T k(t, \tau) h(\tau) d\tau.$$

Ввиду непрерывности этот оператор определяет и производную Фреше.

Для нелинейного оператора вида

$$y = f(x) = \int_{t_0}^T k(t, \tau, x(\tau)) d\tau, \quad (1.2.36)$$

где  $x(\tau) \in [t_0, T]$ , а функция  $k(t, \tau, x)$  непрерывна по переменным  $t, \tau \in [t_0, T]$  и дифференцируема по  $x$ , имеем

$$\begin{aligned} df(x) = f'(x) h &= \frac{d}{d\gamma} \int_{t_0}^T k(t, \tau, x(\tau) + \gamma h(\tau)) d\tau \Big|_{\gamma=0} = \\ &= \int_{t_0}^T k_x(t, \tau, x(\tau)) h(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (1.2.37)$$

где  $k_x(t, \tau, x) = \frac{\partial}{\partial x} k(t, \tau, x)$ ,

Вычислим производную однородного регулярного функционала второй степени

$$F_2[x(\tau), t] = \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T k(t, \tau_1, \tau_2) x(\tau_1) x(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2, \quad (1.2.38)$$

где  $t, \tau_1, \tau_2 \in [t_0, T]$ .

Имеем  $dF_2[x(\tau), t] =$

$$\begin{aligned} &= \frac{d}{d\gamma} \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T k(t, \tau_1, \tau_2) [x(\tau_1) + \gamma h(\tau_1)] [x(\tau_2) + \gamma h(\tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 \Big|_{\gamma=0} = \\ &= \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T k(t, \tau_1, \tau_2) x(\tau_1) h(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\ &+ \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T k(t, \tau_1, \tau_2) x(\tau_2) h(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= \int_{t_0}^T \left[ \int_{t_0}^T [k(t, \tau_1, \tau_2) + k(t, \tau_2, \tau_1)] x(\tau_1) d\tau_1 \right] h(\tau_2) d\tau_2. \end{aligned}$$

Учитывая регулярность функционала  $F_2[x(\tau), t]$ , можно



записать

$$F'_2 [x(\tau), t] h = \int_{t_0}^T \Phi_2 [x(\tau), t] h(\tau) d\tau, \quad (1.2.39)$$

где

$$\Phi_2 [x(\tau), t] = 2 \int_{t_0}^T k(t, \tau_1, \tau) x(\tau_1) d\tau_1.$$

Поскольку по определению производная оператора  $f(x) = F[x(\tau), t]$  является ограниченным линейным оператором, то в пространстве  $C[t_0, T]$ , используя формулу Адамара (п. 5), получим

$$F' [x(\tau), t] h = \int_{t_0}^T \Phi_1(t, \tau, x) h(\tau) d\tau,$$

где ядро  $\Phi_1(t, \tau, x)$  может быть обобщенной функцией и зависит в общем случае от точки  $x \in C[t_0, T]$ , в которой вычисляется производная.

Введем понятие производных высшего порядка функции  $f(x)$ . Если приращение функции  $f(x)$ , дифференцируемой по Фреше, может быть представлено в виде суммы ограниченных линейного и квадратичного относительно  $\delta x$  операторов

$$\delta f(x) = f'(x) \delta x + \frac{1}{2} f''(x) (\delta x)^2 + \alpha(x, \delta x), \quad (1.2.40)$$

причем

$$\frac{\|\alpha(x, \delta x)\|}{\|\delta x\|^2} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|\delta x\| \rightarrow 0, \quad (1.2.41)$$

то функция называется *дважды дифференцируемой по Фреше*. Квадратичный оператор  $f''(x)$  называется *второй сильной производной (второй производной Фреше)* функции  $f(x)$ . Вторую сильную производную функции  $f(x)$  можно также определить как производную Фреше первой производной Фреше. Такое определение совпадает с определением, следующим из равенства (1.2.40), если в этом равенстве второй дифференциал  $f''(x) (\delta x)^2$  непрерывен по  $x$  и предельное соотношение (1.2.41) выполняется равномерно по  $x$  в некоторой окрестности точки  $x$  [56]. При этом условии второй сильный дифференциал

совпадает со *вторым слабым дифференциалом* (*вторым дифференциалом Гаго*), который определяется следующим образом:

$$d^2 f(x) = \frac{d}{d\gamma} \left[ \frac{d}{d\gamma} f(x + \gamma h) \right]_{\gamma=0} = \frac{d^2}{d\gamma^2} f(x + \gamma h) \Big|_{\gamma=0}.$$

Если последнее выражение представляет собой квадратичный ограниченный оператор  $d^2 l(x) = f''(x) h^2$ , то  $f''(x)$  называется *второй слабой производной* (*второй производной Гаго*) функции  $f(x)$  в точке  $x$ .

Вычислим вторую производную оператора (1.2.36). Полагая, что функция  $f(t, \tau, x)$  дважды непрерывно дифференцируема по  $x$ , получим с учетом (1.2.37)

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\gamma} \left[ \int_{t_0}^T k_x(t, \tau, x(\tau) + \gamma h_1(\tau)) h(\tau) d\tau \right]_{\gamma=0} &= \\ &= \int_{t_0}^T k_{xx}(t, \tau, x(\tau)) h_1(\tau) h(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (1.2.42)$$

где  $h_1(\tau), h(\tau) \in X$ ,  $k_{xx}(t, \tau, x) = \frac{\partial}{\partial x} k_x(t, \tau, x)$ . Полагая  $h_1(\tau) = h(\tau)$ , получим квадратичный оператор, определяющий вторую производную

$$d^2 f(x) = f''(x) h^2 = \int_{t_0}^T k_{xx}(t, \tau, x(\tau)) h^2(\tau) d\tau. \quad (1.2.43)$$

Для однородного регулярного функционала (1.2.38) аналогично получим

$$d^2 f(x) = F_2''[x(\tau), t] h^2 = 2 \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T k(t, \tau_1, \tau) h(\tau_1) h(\tau) d\tau_1 d\tau. \quad (1.2.44)$$

При использовании формулы Фреше (см. п. 5) для второй производной оператора  $F[x(\tau), t]$ , действующего в  $C[t_0, T]$ , получим формулу

$$F''[x(\tau), t] h^2 = \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T \Phi_2[t, \tau_1, \tau_2, x] h(\tau_1) h(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (1.2.45)$$

Ядро оператора  $\Phi_2[t, \tau_1, \tau_2, x]$ , зависящее в общем случае от  $x(\tau)$ , симметрично относительно переменных  $\tau_1, \tau_2$ .

Назовем функцию  $f(x)$  *n раз дифференцируемой по Фреше*, если ее приращение  $\delta f(x)$  допускает представление в виде суммы ограниченных однородных относительно  $\delta x$  операторов до степени  $n$  включительно

$$\delta f(x) = f'(x) \delta x + \frac{1}{2} f''(x) (\delta x)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x) (\delta x)^n + \alpha(x, \delta x), \quad (1.2.46)$$

причем

$$\frac{\|\alpha(x, \delta x)\|}{\|\delta x\|^n} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|\delta x\| \rightarrow 0. \quad (1.2.47)$$

Операторы  $f^{(i)}(x)$ ,  $i=1, \dots, n$ , называются *сильными производными функции  $f(x)$  порядка  $i$* . Формула (1.2.46) является аналогом формулы Тейлора для функций действительного переменного.

*Дифференциал Гато порядка  $n$*  можно записать в виде

$$d^n f(x) = \frac{d}{d\gamma} \left[ \dots \left[ \frac{d}{d\gamma} f(x + \gamma h) \right] \dots \right]_{\gamma=0} = \frac{d^n}{d\gamma^n} f(x + \gamma h) \Big|_{\gamma=0}. \quad (1.2.48)$$

Если он может быть представлен в виде однородного ограниченного оператора степени  $n$

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x) h^n,$$

то  $f^{(n)}(x)$  называется *слабой производной (производной Гато) функции  $f(x)$  порядка  $n$* . Сильный дифференциал порядка  $n$   $f^{(n)}(x) (\delta x)^n$  совпадает со слабым дифференциалом, определенным по формуле (1.2.48), если он непрерывен по  $x$  и предельное соотношение (1.2.47) выполняется равномерно по  $x$  в некоторой окрестности точки  $x$  [56]. Если функция  $f(x)$  имеет  $n$  слабых производных в точке  $x$ , то для нее справедлива следующая формула, аналогичная формуле (1.2.46) для сильных производных

$$f(x + \gamma h) = f(x) + \gamma f'(x) h + \frac{\gamma^2}{2} f''(x) h^2 + \dots + \frac{\gamma^n}{n!} f^{(n)}(x) h^n + \alpha(x, \gamma h), \quad (1.2.49)$$

$$\frac{\alpha(x, \gamma h)}{\gamma} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \gamma \rightarrow 0.$$

Назовем функцию  $f(x)$  *аналитической по Фреше* в точке  $x$ , если ее приращение  $\delta f(x)$  можно представить в виде равномерно сходящегося ряда *Тейлора*

$$\delta f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x) (\delta x)^n. \quad (1.2.50)$$

Если существуют ограниченные операторы  $f^{(n)}(x)h^n$  для любой степени  $n$  и в некоторой окрестности точки  $x$  равномерно сходится ряд

$$f(x + \gamma h) - f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma^n}{n!} f^n(x) h^n, \quad (1.2.51)$$

то функция  $f(x)$  называется *аналитической по Гато* в точке  $x$ . Формула (1.2.51) представляет собой ряд Тейлора, записанный для производных Гато.

Рассмотрим теперь оператор  $f(x) = F[t, x(\tau)]$ ,  $t \in [t_0, T]$ , отображающий  $C[t_0, T]$  в себя и дифференцируемый  $n$  раз. Оператор  $F^{(n)}(x)h^n$ , используя формулу Фреше, можно записать в этом случае в виде однородного регулярного оператора степени  $n$

$$\begin{aligned} F^n [x(\tau), t] h^n &= \\ &= \int_{t_0}^T \dots \int_{t_0}^T \Phi_n [t, \tau_1, \dots, \tau_n, x] h(\tau_1) \dots h(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n, \end{aligned} \quad (1.2.52)$$

в котором ядро  $\Phi_n [t, \tau_1, \dots, \tau_n, x]$  симметрично по переменным  $\tau_1, \dots, \tau_n$ . Учитывая это выражение, правую часть формулы (1.2.49) можно записать в виде регулярного полинома степени  $n$

$$\begin{aligned} F[x(\tau) + \gamma h(\tau), t] - F[x(\tau), t] &= \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\gamma^k}{k!} \int_{t_0}^T \dots \int_{t_0}^T \Phi_k [t, \tau_1, \dots, \tau_k, x] h(\tau_1) \dots h(\tau_k) \times \\ &\quad \times d\tau_1 \dots d\tau_k + \alpha(x, \gamma h). \end{aligned} \quad (1.2.53)$$

Если оператор  $F[t, x(\tau)]$  является аналитическим (по Гато), то в соответствии с формулой (1.2.51) его можно представить в окрестности точки  $x(\tau)$ ,  $\tau \in [t_0, T]$  в виде

степенного ряда

$$F[x(\tau) + \gamma h(\tau), t] = F[x(\tau), t] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma^n}{n!} \int_{t_0}^T \dots \int_{t_0}^T \Phi_n[t, \tau_1, \dots, \tau_n, x] h(\tau_1) \dots h(\tau_n) \times \\ \times d\tau_1 \dots d\tau_n. \quad (1.2.54)$$

Эта формула справедлива и для оператора, аналитического по Фреше, если выполняется условие, при котором сильный дифференциал совпадает со слабым. Если  $\Phi_n[t, \tau_1, \dots, \tau_n, x] = 0$ , когда хотя бы одно из  $\tau_i > t$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , то ряд (1.2.54) называется *рядом Вольтерра*. В частности, полином Вольтерра

$$G_N[x(\tau), t] = \\ = \sum_{n=0}^N \int_{t_0}^T \dots \int_{t_0}^T k_n(t, \tau_1, \dots, \tau_n) x(\tau_1) \dots x(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n, \\ t \in [t_0, T], \quad (1.2.55)$$

определяет оператор, аналитический во всем пространстве, причем

$$G_N^{(n)}[x(\tau), t] h^n = \\ = n! \int_{t_0}^T \dots \int_{t_0}^T k_n(t, \tau_1, \dots, \tau_n) h(\tau_1) \dots h(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n, \\ n = 1, 2, \dots, N,$$

и ряд (1.2.54), полученный в окрестности точки  $x \equiv 0$ , совпадает с выражением (1.2.55), т. е. для полинома  $G_N[x(\tau), t]$  формула (1.2.53) является точной при  $n = N$ .

Найдем *область сходимости* ряда (1.2.54), полагая, что  $x(\tau), h(\tau) \in C[t_0, T]$ . Оценим сумму ряда, обозначая

$$\|h(\tau)\| = \sup_{\tau \in [t_0, T]} \|h(\tau)\|. \text{ Тогда} \\ \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_0}^T \dots \int_{t_0}^T \Phi_n[t, \tau_1, \dots, \tau_n, x] \times \right. \\ \left. \times h(\tau_1) \dots h(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \|h(\tau)\|^n, \quad (1.2.56)$$

где

$$a_n = \sup_{t \in [t_0, T]} \frac{1}{n!} \int_{t_0}^T \dots \int_{t_0}^T |\Phi_n [t, \tau_1, \dots, \tau_n, x]| d\tau_1 \dots d\tau_n.$$

Область сходимости мажорирующего ряда, стоящего в правой части неравенства (1.2.56), определяется по формулам Коши — Адамара или Даламбера

$$\|h(\tau)\| < \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}},$$

$$\|h(\tau)\| < \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}},$$

где  $\overline{\lim}$  означает верхний предел \*). Полученные неравенства позволяют оценить окрестность точки  $x(\tau) \in C[t_0, T]$ , в которой рассматриваемый ряд сходится и, следовательно, оператор  $F[x(\tau), t]$  является аналитическим.

### § 3. Интегрирование функционалов

**1. Интеграл Лебега.** Для того чтобы распространить понятие интеграла на произвольные линейные пространства, необходимо ввести определение интеграла по Лебегу. Идея этого определения поясняется на рис. 1.3.1, где изображена функция действительного переменного  $y=f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ . Отрезок  $[c, d]$ , в котором содержится область значений функции  $f(x)$  при  $x \in [a, b]$ , разбит на конечное число отрезков  $[y_{i-1}, y_i]$ ,  $i=1, \dots, N$ ,  $y_0 = c$ ,  $y_N = d$  (на рис. 1.3.1  $N=4$ ). Обозначим через  $l_i$  сумму длин всех отрезков, на которых  $y_{i-1} \leq f(x) < y_i$ , и составим сумму

$$\sum_{i=1}^N y_{i-1} l_i. \quad (1.3.1)$$

Такую сумму можно составить для любого разбиения

---

\*) Число  $x$  называется *верхним пределом последовательности*  $\{x_n\}$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такой номер  $N(\varepsilon)$ , что  $x_n < x + \varepsilon$  при всех  $n > N(\varepsilon)$  и, кроме того, существует последовательность  $\{x_{n_k}\}$ , которая сходится к  $x$  при  $k \rightarrow \infty$ .

отрезка  $[c, d]$ . Точную верхнюю грань этих сумм и называют *интегралом Лебега* функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = \sup \sum_{i=1}^N y_{i-1} l_i. \quad (1.3.2)$$

Особенность построения интеграла по Лебегу заключается в том, что разбиению подвергается не область определения функции, как при построении интеграла Римана, а область ее значений. При этом объединяются

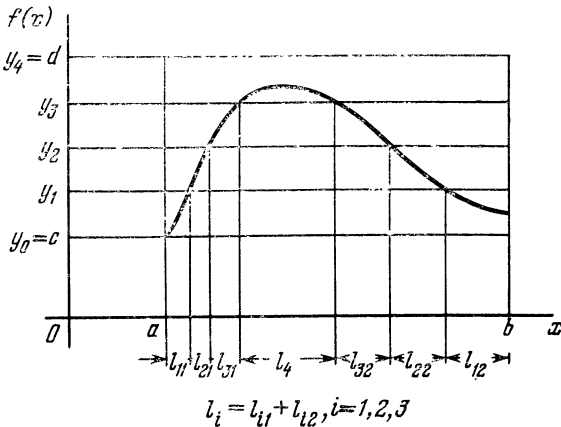


Рис. 1.3.1.

области переменной  $x$ , соответствующие близким значениям функции  $f(x)$ . Поскольку областью значений функционала  $f(x)$ , заданного на линейном пространстве, по-прежнему является действительная прямая, интеграл Лебега можно применить для интегрирования функционалов. Однако в этом случае требуется обобщить для произвольных пространств понятие длины отрезка, использованное в определении (1.3.2). Таким обобщением является мера множества. Прежде чем ввести это понятие, рассмотрим понятие алгебры множеств и  $\sigma$ -алгебры, определенных на множестве  $X$ .

Пусть задано некоторое множество  $X$ . Рассмотрим систему подмножеств  $X_k \subset X$ ,  $k=1, \dots, n$ . Если любая конечная сумма  $Y_n = \bigcup_{k=1}^n X_k$  и любое конечное пересечение

$Z_n = \bigcap_{k=1}^n X_k$  элементов  $X_k$  системы множеств принадлежат этой системе и, кроме того, в системе существует единица (т. е. такое множество  $E$ , что для любого  $X_k$   $X_k \cap E = X_k$ ), то такая система множеств называется *алгеброй множеств*. В том случае, когда системе  $\{X_k\}$  принадлежат также и любое счетное объединение  $\bigcup_{k=1}^n X_k$

и пересечение  $\bigcap_{k=1}^{\infty} X_k$  множеств  $X_k$ , система множеств называется  $\sigma$ -*алгеброй*. Примером  $\sigma$ -алгебры может служить система множеств, составленная из открытых прямоугольников  $a < x < b$ ,  $c < y < d$ , целиком принадлежащих квадрату  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ . Очевидно, что любое счетное объединение и пересечение таких множеств принадлежат системе. Единицей  $E$  здесь служит сам квадрат.

Введем понятие *меры* на этой  $\sigma$ -алгебре множеств. В качестве меры элементарного прямоугольника  $P$  выберем его площадь:  $m(P) = (d-c)(b-a)$ . Введенная таким образом мера обладает следующими свойствами:

а)  $m(P) \geq 0$ ,

б) если  $X_k = \bigcup_{i=1}^n P_i$ , причем  $P_i \cap P_j = \emptyset$ ,  $i, j = 1, \dots$

$\dots, n$ , то  $m(X_k) = \sum_{i=1}^n m(P_i)$ .

Последнее свойство называется *аддитивностью меры*. Оно позволяет определить меру всех элементов  $\sigma$ -алгебры прямоугольников, поскольку всякое объединение открытых прямоугольников рассматриваемого вида можно представить как объединение непересекающихся открытых прямоугольников. Если свойство аддитивности справедливо для бесконечной счетной системы непересекающихся множеств  $\{P_i\}$ , т. е.

$m\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} P_i\right\} = \sum_{i=1}^{\infty} m\{P_i\}$ ,

то говорят о  $\sigma$ -*аддитивности меры*. Вообще говоря, из



аддитивности не следует  $\sigma$ -аддитивности, однако в рассматриваемом случае  $\sigma$ -аддитивность имеет место [36].

Рассмотрим теперь произвольное множество  $A$ , принадлежащее единичному квадрату, и выберем такое множество  $X_k$  из  $\sigma$ -алгебры прямоугольников, что  $A \subset X_k$  (рис. 1.3.2). Это можно сделать различными способами.

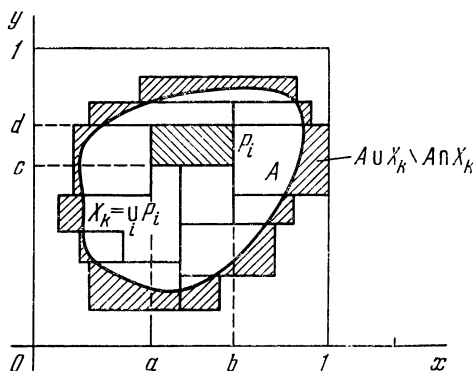


Рис. 1.3.2.

Полагая, что множество  $X_k$  может быть образовано объединением не только конечного, но и счетного множества прямоугольников  $P_i$ , с учетом  $\sigma$ -аддитивности меры, найдем

$$m\{X_k\} = m\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} P_i\right\} = \sum_{i=1}^{\infty} m(P_i).$$

Рассматривая теперь всевозможные множества  $X_k$  такие, что  $X_k \supset A$ , найдем точную нижнюю грань меры  $m\{X_k\}$ :

$$\mu^*(A) = \inf_{X_k \supset A} m\{X_k\}.$$

Величина  $\mu^*(A)$  называется *внешней мерой множества  $A$* .

Если множество  $A$  таково, что его можно приблизить множествами системы  $\{X_k\}$  сколь угодно точно, т. е. для любого  $\varepsilon > 0$  можно найти такое  $X_k$ , что

$$\mu^*((A \cup X_k) \setminus (A \cap X_k)) < \varepsilon$$

(рис. 1.3.2), то множество  $A$  называется *измеримым в смысле Лебега*, а функция  $\mu^*$  — его *мерой Лебега*, обозначаемой в этом случае  $\mu(A)$ . Можно показать, что система измеримых множеств в свою очередь образует  $\sigma$ -алгебру, причем функция  $\mu(A)$  обладает  $\sigma$ -аддитивностью на этой системе множеств [36]. Мера Лебега была введена на действительной плоскости. Описанную процедуру построения меры можно распространить на  $\sigma$ -алгебру множеств произвольной природы.

Меру Лебега  $\mu(A)$  можно определить аксиоматически как счетно-аддитивную неотрицательную функцию множеств, заданную на  $\sigma$ -алгебре и равную нулю на пустом множестве:  $\mu(\emptyset) = 0$ . Примеры построения меры в пространстве вещественных функций и бесконечных последовательностей приводятся ниже, в п. 2 и 3 этого параграфа.

Рассмотрим теперь построение *интеграла Лебега* от функции, заданной на произвольном множестве  $X$  с  $\sigma$ -алгеброй. Предварительно ограничим класс рассматриваемых функций. Функцию  $f(x)$ , определенную на множестве  $X$  с  $\sigma$ -алгеброй и принимающую значения на действительной прямой, называют *измеримой*, если для любого действительного числа  $C$  измеримо множество  $\{x: f(x) < C\}$ . Две измеримые функции  $f(x)$ ,  $g(x)$ , определенные на одном и том же множестве, могут различаться на множестве, мера которого равна нулю:  $\mu\{x: f(x) \neq g(x)\} = 0$ . О таких функциях говорят, что они совпадают *почти всюду*. Аналогично говорят о сходимости последовательности функций  $f_n(x)$  к функции  $f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  почти всюду, если равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

выполняется всюду, за исключением множества меры нуль.

Для измеримых функций, заданных на произвольном линейном пространстве  $X$  с  $\sigma$ -алгеброй множеств и заданной на ней мерой Лебега  $\mu$ , может быть определен интеграл Лебега. Определим вначале интеграл Лебега для случая, когда измеримая функция  $f(x)$  принимает счетное число значений  $y_i$ ,  $i=1, \dots, n, \dots$  ( $y_i \neq y_j$  при  $i \neq j$ ). Такая функция называется *простой*.

Рассмотрим систему множеств  $X_i = \{x: f(x) = y_i\}$ . Можно доказать, что из измеримости функции  $f(x)$  следует измеримость этих множеств.

Определим интеграл Лебега от функции  $f(x)$  по измеримому множеству  $A$  следующим образом:

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} y_i \mu(X_i \cap A). \quad (1.3.3)$$

Если ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} |y_i| \mu(X_i \cap A)$  сходится, то простую функцию  $f(x)$  называют *интегрируемой* или *суммируемой по мере*  $\mu$  на множестве  $A$ , а сумма этого ряда называется интегралом функции  $f(x)$  по множеству  $A$ . В частности, если  $A$  совпадает со всем пространством  $X$ , то

$$\int_X f(x) d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} y_i \mu(X_i). \quad (1.3.4)$$

Рассмотрим теперь такую измеримую функцию  $f(x)$ , которая может быть представлена в виде предела равномерно сходящейся последовательности  $\{f_n(x)\}$  простых функций, интегрируемых на множестве  $A$ . Интегралом от функции  $f(x)$  по множеству  $A$  называется предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu. \quad (1.3.5)$$

В теории меры доказывается, что этот предел существует и не зависит от выбора последовательности  $\{f_n(x)\}$  [92]. Поэтому условие, в силу которого функция  $f(x)$  представима в виде равномерно сходящейся последовательности  $\{f_n(x)\}$ , может быть принято за определение интегрируемой функции  $f(x)$ . В качестве функций  $f_n$  могут быть приняты не только простые, но и любые другие функции, для которых определен интеграл Лебега по множеству  $A$ . При этом возникает вопрос об условиях, которым должны удовлетворять функции  $f_n(x)$  для того, чтобы можно было перейти к пределу под знаком интеграла Лебега, т. е. чтобы выполнялось равенство (1.3.5). Ниже даются три теоремы, устанавливающие условия интегрируемости.

**Теорема Лебега.** Если последовательность  $\{f_n\}$  сходится на множестве  $A$  к  $f$  и при всех  $n$

$$|f_n(x)| \leq \varphi(x),$$

где  $\varphi(x)$  — функция, интегрируемая на  $A$ , то и предельная функция интегрируема на  $A$  и выполняется равенство (1.3.5).

**Теорема Б. Леви.** Пусть на множестве  $A$   $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq f_n(x)$ ; функции  $f_n(x)$  интегрируемы и для любого  $n$

$$\int_A f_n(x) d\mu \leq K,$$

где  $K = \text{const}$ . Тогда на  $A$  почти всюду существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ , функция  $f(x)$  интегрируема на  $A$  и выполняется (1.3.5).

**Теорема Фату.** Если последовательность измеримых и неотрицательных функций  $\{f_n\}$  сходится почти всюду на множестве  $A$  к  $f$  и выполняется условие

$$\int_A f_n(x) d\mu \leq K,$$

где  $K = \text{const}$ , то  $f(x)$  интегрируема на  $A$ , причем

$$\int_A f(x) d\mu \leq K.$$

Укажем другие два условия интегрируемости. Если измеримая функция  $f(x)$  ограничена при  $x \in A$ , то она интегрируема. Если  $|f(x)| \leq \varphi(x)$  почти всюду на множестве  $A$  и функция  $\varphi(x)$  интегрируема на  $A$ , то функция  $f(x)$  также интегрируема.

Перечислим основные свойства интеграла Лебега, предполагая интегрируемость рассматриваемых функций:

$$1. \quad \int_A d\mu = \mu(A). \quad (1.3.6)$$

$$2. \quad \int_A kf(x) d\mu = k \int_A f(x) d\mu, \quad (1.3.7)$$

где  $k$  — произвольное число.

$$3. \quad \int_A [f(x) + g(x)] d\mu = \int_A f(x) d\mu + \int_A g(x) d\mu. \quad (1.3.8)$$

4. Если  $f(x) \geq g(x)$  почти всюду на множестве  $A$ , то

$$\int_A f(x) d\mu \geq \int_A g(x) d\mu, \quad (1.3.9)$$

причем выполнение почти всюду равенства  $f(x) = g(x)$  влечет за собой равенство соответствующих интегралов.

В частности, если почти всюду  $f(x) \geq 0$ , то  $\int_A f(x) d\mu \geq 0$ ; а из выполнения почти всюду условия  $m \leq f(x) \leq M$  следует неравенство

$$m\mu(A) \leq \int_A f(x) d\mu \leq M\mu(A).$$

5. Если  $\mu(A) = 0$ , то  $\int_A f(x) d\mu = 0$ .

6. Если  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset$  при  $i \neq j$ , то

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x) d\mu \quad (1.3.10)$$

(свойство  $\sigma$ -аддитивности).

7. Для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что для каждого измеримого множества  $B \subset A$  такого, что  $\mu(B) < \delta$ , имеет место неравенство

$$\left| \int_B f(x) d\mu \right| < \varepsilon$$

(свойство абсолютной непрерывности).

Рассмотрим множество функций  $f(x)$ , интегрируемых по мере  $\mu$  на линейном пространстве  $X$ . Из второго и третьего свойств интеграла Лебега можно заключить, что эти функции также образуют линейное пространство. В этом пространстве можно ввести норму по формуле

$$\|f(x)\|_L = \int_X |f(x)| d\mu. \quad (1.3.11)$$

Используя перечисленные свойства интеграла Лебега, можно показать, что выражение (1.3.11) удовлетворяет всем аксиомам нормы (см. § 1), причем равенство

$$\|f(x)\|_L = 0$$

может выполняться не только для функции  $f(x) \equiv 0$ , но и для функции  $f(x)$ , равной нулю почти всюду. Для того чтобы сохранить единственность определения нормы, функции, равные нулю почти всюду, следует считать за один элемент пространства. Аналогично любые функции  $f(x)$ , различающиеся только на множестве меры нуль, будем считать одним и тем же элементом пространства. С учетом этого замечания полученное линейное пространство интегрируемых по мере  $\mu$  функций является нормированным с нормой (1.3.11) и обозначается  $L(X)$ . Пространство  $L(X)$  — полное (банахово), т. е. всякая фундаментальная последовательность имеет предел в этом пространстве.

Рассмотрим теперь множество действительных функций  $f(x)$  с интегрируемым квадратом, т. е. функций, для которых существует интеграл Лебега

$$\int_X f^2(x) d\mu.$$

Множество таких функций образует линейное пространство  $L_2(X)$ . Наряду с нормой

$$\|f(x)\|_{L_2} = \left( \int_X f^2(x) d\mu \right)^{1/2} \quad (1.3.12)$$

в этом пространстве можно ввести скалярное произведение:

$$(f, g) = \int_X f(x) g(x) d\mu. \quad (1.3.13)$$

Норма (1.3.12) и скалярное произведение (1.3.13) будут удовлетворять общим аксиомам, если по-прежнему считать функции  $f(x)$ , различающиеся только на множестве меры нуль, одним и тем же элементом пространства. Пространство  $L_2(X)$  является полным и, следовательно, гильбертовым. Для дальнейшего изложения представляет интерес существование в  $L_2(X)$  полных ортогональных систем функций. Если  $\varphi_n(x)$ ,  $n=1, 2, \dots$ , — полная ортонормированная система функций в  $L_2(X)$ , то любая функция  $f(x) \in L_2(X)$  может быть представлена в виде ряда Фурье

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \varphi_n(x), \quad (1.3.14)$$

сходящегося к ней по норме пространства  $L_2(X)$ , т. е. в среднеквадратичном. Коэффициенты ряда  $C_n$  определяются по формуле

$$C_n = \int_X f(x) \varphi_n(x) d\mu, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3.15)$$

Если, в частности,  $\{\varphi_n(x)\}$  — полная ортогональная система функционалов, заданных на пространстве функций действительного переменного  $X[a, b]$ , то формула (1.3.14) позволяет решить задачу об аппроксимации произвольного функционала из  $L_2(X)$ .

**2. Интеграл Гаусса.** Рассмотрим построение меры и интеграла Лебега для бесконечномерного пространства  $\Omega$  последовательностей действительных чисел  $x = \{x_n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Выберем две последовательности чисел  $\{\alpha_m\}$  и  $\{\beta_m\}$ ,  $m = 1, \dots, n$ ,  $\beta_m > \alpha_m$ , и рассмотрим подмножество  $B \subset \Omega$ , определяемое следующим условием:  $B = \{x: \alpha_1 < x_1 \leq \beta_1, \dots, \alpha_n < x_n \leq \beta_n\}$ . На действительной плоскости множество  $B = \{x: \alpha_1 < x_1 \leq \beta_1, \alpha_2 < x_2 \leq \beta_2\}$  представляет собой прямоугольник, выбранный выше в качестве элементарного множества при построении меры на плоскости. Множество  $B$  в  $n$ -мерном арифметическом пространстве представляет прямоугольный параллелепипед или брус. Множества брусков и всевозможных счетных их объединений образуют  $\sigma$ -алгебру в пространстве  $\Omega$ . Единицей  $\sigma$ -алгебры служит само пространство  $\Omega$ .

Определим меру бруса  $B$  следующим образом:

$$\mu B = \prod_{m=1}^n \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha_m}^{\beta_m} \exp(-\xi_m^2) d\xi_m \right\}. \quad (1.3.16)$$

Это выражение удовлетворяет аксиоматическому определению меры (см. стр. 69) и называется *мерой Гаусса* бруса  $B$ . Меру Гаусса произвольного множества  $A \subset \Omega$  можно ввести, используя формулу (1.3.16) аналогично тому, как введена мера Лебега на вещественной плоскости.

Если в (1.3.16) положить  $\alpha_m = -\infty$ ,  $\beta_m = \infty$ ,  $n = \infty$ , т. е. расширить брус  $B$  до всего пространства  $\Omega$ , то

получим

$$\mu\Omega = \prod_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\xi_m^2) d\xi_m \right\} = 1, \quad (1.3.17)$$

т. е. мера всего пространства  $\Omega$  равна единице.

Заметим, что мера множества всех ограниченных последовательностей  $X = \{x: |x_n| < M, n=1, 2, \dots\}$  равна нулю, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{m=1}^n \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-M}^M \exp(-\xi_m^2) d\xi_m \right\} = 0, \quad (1.3.18)$$

поскольку каждый из сомножителей меньше единицы.

Для изучения функционалов, заданных на множествах из пространства  $\Omega$ , необходимо установить, какие из этих множеств имеют меру, совпадающую с мерой всего пространства  $\Omega$  (полную меру). Ответ на этот вопрос дает *признак Колмогорова — Хинчина*. Рассмотрим множество  $X \subset \Omega$  последовательностей  $\{x_n\}$ , для которых

сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n^2$ , где  $a_n$  — некоторые положительные числа. Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, то множество  $X$

имеет меру, равную 1; если же этот ряд расходится, то мера множества  $X$  равна нулю. Отсюда, в частности, следует, что пространство  $l_2 \subset \Omega$  имеет меру Гаусса, равную нулю, так как в этом случае надо положить  $a_n = 1$  и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится.

Мера Гаусса допускает следующую физическую интерпретацию. Если  $\xi = \{\xi_n\}$  — дискретный случайный процесс, принимающий независимые и нормально распределенные значения  $\xi_n$ ,  $n=1, 2, \dots$ , то мера  $\mu(B)$ , определяемая по формуле (1.3.16), — это вероятность события, заключающегося в одновременном выполнении неравенств  $\alpha_m < \xi_m \leq \beta_m$ ,  $m=1, \dots, n$ . Другими словами, это — вероятность того, что реализации случайного процесса  $\xi$  принадлежат области  $B$ .



Рассмотрим функцию  $f(x)$ , заданную в пространстве последовательностей  $x \in \Omega$  и принимающую значения на действительной прямой. Для того чтобы определить интеграл от этой функции по мере Гаусса, выберем совокупность элементарных функций, интегрируемых по мере Гаусса. В качестве таковых рассмотрим функции  $f_n(x) = f_n(x_1, \dots, x_n)$ , определенные на всем множестве  $\Omega$ , но зависящие от конечного числа переменных. Подобные функции называют *цилиндрическими*. Будем считать их непрерывными на соответствующих арифметических пространствах  $E^n$ . Интеграл от элементарной функции  $f_n(x)$  определим по формуле

$$\int_{\Omega} f_n(x) d\mu = \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} \int_{E^n} f_n(\xi_1, \dots, \xi_n) \exp\left(-\sum_{m=1}^n \xi_m^2\right) \prod_{m=1}^n d\xi_m. \quad (1.3.19)$$

Функция  $f(x)$  интегрируема по мере Гаусса, если можно представить ее как предел последовательности элементарных функций  $f_n(x)$ :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

сходящейся почти всюду в пространстве  $\Omega$  и удовлетворяющей одному из условий, обеспечивающих предельный переход под знаком интеграла Лебега (1.3.5) (см. п. 1). Интеграл от функции  $f(x)$  представляется как предел конечнократных интегралов (1.3.19)

$$\int_{\Omega} f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) d\mu. \quad (1.3.20)$$

Если  $\xi = \{\xi_n\}$  — дискретный случайный процесс, принимающий независимые и нормально распределенные значения  $\xi_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , а  $f(x)$  — функционал, вычисляемый на реализациях этого процесса, то интеграл по мере Гаусса (1.3.20) представляет собой математическое ожидание этого функционала.

Функции, заданные на пространстве последовательностей и абсолютно интегрируемые по мере Гаусса, образуют линейное нормированное пространство  $L(\Omega)$  с

нормой

$$\begin{aligned} \|f(x)\|_{L(\Omega)} &= \int_{\Omega} |f(x)| d\mu = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} \int_{E^n} |f_n(\xi_1, \dots, \xi_n)| \exp\left(-\sum_{m=1}^n \xi_m^2\right) \prod_{m=1}^n d\xi_m. \end{aligned} \quad (1.3.21)$$

Функции  $f(x)$ ,  $x \in \Omega$ , интегрируемые по мере Гаусса с квадратом, т. е. функции, для которых существует интеграл

$$\int_{\Omega} f^2(x) d\mu,$$

образуют пространство  $L_2(\Omega)$  с нормой

$$\begin{aligned} \|f(x)\|_{L_2(\Omega)} &= \left( \int_{\Omega} f^2(x) d\mu \right)^{1/2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} \left( \int_{\Omega} f_n^2(\xi_1, \dots, \xi_n) \exp\left(-\sum_{m=1}^n \xi_m^2\right) \prod_{m=1}^n d\xi_m \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.3.22)$$

Возвращаясь к вероятностной интерпретации интеграла Гаусса (1.3.20), заметим, что сходимость последовательности  $f_n(x)$  к функции  $f(x)$  в пространстве  $L_2(\Omega)$  имеет смысл сходимости в среднеквадратичном:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f(x)\|_{L_2}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M} \{ [f_n(x) - f(x)]^2 \} = 0, \quad (1.3.23)$$

где  $\mathbf{M}$  — знак математического ожидания.

Примером последовательностей  $f_n(x)$ , сходящихся по метрике пространств  $L(\Omega)$  и  $L_2(\Omega)$  к элементам этих пространств, служат последовательности элементарных цилиндрических функций  $f_n(x) = f_n(x_1, \dots, x_n)$ , использованные при построении интеграла Гаусса. Эти последовательности образуют плотные множества в пространствах  $L(\Omega)$  и  $L_2(\Omega)$ . Важным примером плотного множества в пространстве  $L_2(\Omega)$  является система всех степеней  $x_1^{k_1}, \dots, x_n^{k_n}$  ( $n=1, 2, \dots, k_j = 0, 1, \dots$ ). Для каждой функции  $f(x) \in L_2(\Omega)$  можно найти такой многочлен от

$n$  переменных

$$P_n(x) = P_n(x_1, \dots, x_n),$$

что для любого заданного числа  $\varepsilon > 0$

$$\|f(x) - P_n(x)\|_{L_2(\Omega)} < \varepsilon. \quad (1.3.24)$$

Доказательство этого утверждения основано на том, что  $f(x)$  можно представить как предел по норме  $L_2(\Omega)$  последовательности цилиндрических функций  $f_n(x) = f_n(x_1, \dots, x_n)$ , интегрируемых с квадратом по мере Гаусса в  $n$ -мерном арифметическом пространстве, т. е. функций, для которых

$$f_n(x_1, \dots, x_n) \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2\right) \in L_2(E^n).$$

Поскольку  $f(x) \in L_2(\Omega)$ , то для данного  $\varepsilon > 0$  можно подобрать функцию  $f_n(x) = f_n(x_1, \dots, x_n)$ , такую, что

$$\|f(x) - f_n(x)\|_{L_2(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1.3.25)$$

Известно, что система функций

$$\exp\left(-\frac{1}{2} x^2\right), x \exp\left(-\frac{1}{2} x^2\right), \dots, x^n \exp\left(-\frac{1}{2} x^2\right)$$

плотна в  $L_2(E^1)$ , система  $x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2\right)$

плотна в  $L_2(E^n)$ , и следовательно, для данного  $\varepsilon > 0$  найдется выражение  $P_n(x) \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2\right)$  такое, что

$$\|f_n(x) - P_n(x)\|_{L_2(E^n)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Функции  $f_n(x)$ ,  $P_n(x)$  можно рассматривать заданными на всем пространстве  $\Omega$  и зависящими от  $n$  значений переменной  $x \in \Omega$ . Тогда

$$\|f_n(x) - P_n(x)\|_{L_2(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.3.26)$$

и из неравенств (1.3.25) и (1.3.26) получим

$$\begin{aligned} \|f(x) - P_n(x)\|_{L_2(\Omega)} &\leq \|f(x) - f_n(x)\|_{L_2(\Omega)} + \\ &+ \|f_n(x) - P_n(x)\|_{L_2(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Заметим, что в качестве многочленов  $P_1(x)$  здесь использованы ортогональные многочлены Эрмита (см. § 1). Таким образом, доказанная теорема устанавливает возможность приближения функционала  $f(x) \in L_2(\Omega)$  последовательностью ортогональных многочленов Эрмита  $H_n(x)$  от  $n$  переменных.

**3. Интеграл Винера.** Определим теперь интеграл от функционала  $f(x)$ , заданного на множестве функций  $x(t)$  действительного переменного  $t$ . Рассмотрим вначале сепарабельное гильбертово пространство  $H$  функций  $x(t)$ . Пространство  $H$  изоморфно пространству последовательностей  $l_2$ . Каждому элементу  $x(t) \in H$  соответствует элемент  $\tilde{x} \in l_2$ , представляющий собой последовательность коэффициентов Фурье функции  $x(t)$  по некоторому ортогональному базису  $\{e_n\}$  в  $H$ :  $\tilde{x} = \{x_n\}$ ,  $x_n = (e_n, x)$ . Мера Гаусса, введенную выше в пространстве последовательностей  $\Omega$ , можно теперь использовать для построения меры в пространстве  $H$ . Поскольку мера Гаусса пространства  $l_2$  равна нулю, выберем последовательность положительных чисел  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$  и поставим в соответствие каждому элементу  $x(t) \in H$  последовательность элементов  $z_n = \lambda_n x_n$ ,  $\{z_n\} \in \Omega$ . Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} z_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$$

сходится. Поэтому в силу принципа Колмогорова — Хинчина множество элементов  $\{z_n\}$  в  $\Omega$  имеет меру (Гаусса),

равную единице, если сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2}$ . Таким обра-

зом, установлено взаимно-однозначное соответствие  $x(t) \leftrightarrow \{z_n\}$  между пространством  $H$  и множеством полной меры в пространстве  $\Omega$ . Элементарное множество в  $H$  определим следующим образом:

$$B_H = \{x \in H: \alpha_1 < x_1 \leq \beta_1, \dots, \alpha_n < x_n \leq \beta_n\}.$$

В пространстве  $\Omega$  ему соответствует элементарное множество

$$B_{\alpha} = \{z \in \Omega: \lambda_1 \alpha_1 < z_1 \leq \lambda_1 \beta_1, \dots, \lambda_n \alpha_n < z_n \leq \lambda_n \beta_n\}.$$

Гауссову меру множества  $B_{\alpha}$  и примем за меру множества  $B_H$

$$\mu(B_{\alpha}) = \tilde{\mu}(B_H).$$

Выбирая различные ортогональные базисы  $\{e_n\}$  и последовательности  $\{\lambda_n\}$ , можно получать различные меры  $\tilde{\mu}(B_H)$ . Мера, соответствующая случаю  $\lambda_n = n$ , называется *абстрактной мерой Винера* и обозначается ниже  $\mu_W$ .

Построим меру Винера в пространстве  $L_2[0, \pi]$ , выбирая полную ортонормированную систему  $e_n(t)$  вида

$$e_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.3.27)$$

Каждому элементу  $x(t) \in L_2[0, \pi]$  поставим в соответствие элемент  $z \in \Omega$

$$z = \{z_n\}, \quad z_n = nx_n = n(e_n, x) = n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} x(t) \sin nt dt. \quad (1.3.28)$$

Используя меру Гаусса в  $\Omega$ , определим меру Винера элементарного множества в  $L_2[0, \pi]$

$$\begin{aligned} \mu_W \{x \in L_2[0, \pi]: \alpha_1 < x_1 \leq \beta_1, \dots, \alpha_n < x_n \leq \beta_n\} &= \\ &= \mu \{z \in \Omega: \alpha_1 < z_1 \leq \beta_1, \dots, n\alpha_n < z_n \leq n\beta_n\} = \\ &= \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{k\alpha_k}^{k\beta_k} \exp(-\xi_k^2) d\xi_k = \frac{n!}{\sqrt{\pi^n}} \prod_{k=1}^n \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \exp(-k^2 \eta_k^2) d\eta_k. \end{aligned} \quad (1.3.29)$$

Для того чтобы построить интеграл по мере  $\mu_W$  в пространстве функционалов  $f(x)$ , определенных на  $L_2[0, \pi]$ , выберем в качестве элементарных функций

$$f_n(x) = f_n(x_1, \dots, x_n) = f_n(z_1, \dots, \frac{z_n}{n}) = \tilde{f}_n(z_1, \dots, z_n).$$

Функции  $\tilde{f}_n(z_1, \dots, z_n)$  зависят от конечного числа переменных и сходятся к соответствующим значениям функционала  $f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на множестве полной меры

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n(z_1, \dots, z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_1, \dots, x_n) = f(x).$$

Заметим, что функции  $f_n(x_1, \dots, x_n)$  сходятся к  $f(x)$  на множестве меры нуль, поскольку  $\{x_n\} \in l_2$ .

Определим теперь интеграл от элементарной функции  $f_n(x)$  по формуле

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f_n(x) d\mu &= \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} \int_{E^n} \tilde{f}_n(z_1, \dots, z_n) \exp\left(-\sum_{k=1}^n z_k^2\right) \prod_{k=1}^n dz_k = \\ &= \frac{n!}{\sqrt{\pi^n}} \int_{E^n} f_n(\xi_1, \dots, \xi_n) \exp\left(-\sum_{k=1}^n k^2 \xi_k^2\right) \prod_{k=1}^n d\xi_k. \end{aligned} \quad (1.3.30)$$

Интеграл (1.3.30) для каждой из функций  $f_n(z_1, \dots, z_n) = \tilde{f}_n(z)$  существует и ограничен одной и той же константой  $K$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} \int_{E^n} \tilde{f}_n(z_1, \dots, z_n) \exp\left(-\sum_{k=1}^n z_k^2\right) \prod_{k=1}^n dz_k = \\ = \int_{\Omega} f_n(z) d\mu \leq K, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (1.3.31)$$

поэтому в силу теоремы Фату (см. п. 1) функция  $f(x)$  интегрируема и

$$\int_{L_2[0, \pi]} f(x) d\mu_W = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \tilde{f}_n(z) d\mu. \quad (1.3.32)$$

Полученное равенство определяет интеграл от функции  $f(x)$ ,  $x \in L_2[0, \pi]$  по мере Винера  $\mu_W$ .

Рассмотрим теперь меру и интеграл в пространстве непрерывных функций  $x(t)$ . Без ограничения общности можно положить  $t \in [0, \pi]$ ,  $x(0) = 0$ . Это пространство обозначим  $C_0[0, \pi]$ .

Прежде всего определим систему элементарных множеств. Рассмотрим множество функций  $x(t) \in C_0[0, \pi]$ , удовлетворяющих заданным ограничениям при  $n$

различных значениях аргумента:

$$Q = \{x(t) : \alpha_1 < x(t_1) \leq \beta_1, \dots, \alpha_n < x(t_n) \leq \beta_n\}.$$

Это множество функций называют *квазиинтервалом*. Множество квазиинтервалов и счетных их объединений образует  $\sigma$ -алгебру в  $C_0[0, \pi]$ . Мера квазиинтервала определяется следующей формулой:

$$\mu_W(Q) = \frac{1}{\sqrt{\pi^n t_1(t_2 - t_1) \dots (t_n - t_{n-1})}} \times \\ \times \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \dots \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \exp \left[ -\frac{\xi_1^2}{t_1} - \sum_{k=2}^n \frac{(\xi_k - \xi_{k-1})^2}{t_k - t_{k-1}} \right] \prod_{k=1}^n d\xi_k. \quad (1.3.33)$$

Это выражение определяет  $\sigma$ -аддитивную меру в рассматриваемом пространстве, называемую (*классической*) *мерой Винера*. Мера Винера всего пространства  $C_0[0, \pi]$  равна единице.

Отметим одну особенность меры Винера [93]. Рассмотрим подмножество непрерывных функций  $x(t)$ , удовлетворяющих условию Гельдера, т. е. таких функций  $x(t)$ , что для любых  $t', t'' \in [0, \pi]$  и некоторого числа  $\gamma > 0$  найдется число  $h$ , для которого

$$|x(t') - x(t'')| < h |t' - t''|^\gamma. \quad (1.3.34)$$

Мера Винера всех функций  $x(t) \in C_0[0, \pi]$ , для которых  $\gamma < 1/2$ , равна 1, а мера всех функций, для которых  $\gamma > 1/2$ , равна нулю. В частности, множество всех функций, удовлетворяющих условию Липшица ( $\gamma = 1$ ), имеет меру нуль. Отсюда следует, что все непрерывные функции, имеющие ограниченную производную, также образуют множество, имеющее меру Винера, равную нулю.

Кратко остановимся на физической интерпретации формулы (1.3.33). Эта формула введена Н. Винером в связи с рассмотрением задачи о движении броуновской частицы [10]. Пусть частица при  $t=0$  находится в начале координат, т. е.  $x(0)=0$ . Смещение частицы  $x(t_i) - x(t_{i-1})$  на интервале  $[t_i, t_{i-1}]$ ,  $i=1, \dots, n$ , подчиняется нормальному закону распределения с нулевым математическим ожиданием и с дисперсией  $(t_i - t_{i-1})/2$ , причем смещения на различных интервалах статистически

независимы. Тогда вероятность обнаружения частицы в момент времени  $t=t_1$  на  $(\alpha_1, \beta_1]$ , т. е. вероятность события  $\alpha_1 < x(t_1) \leq \beta_1$  составит

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t_1}} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \exp\left(-\frac{\xi_1^2}{t_1}\right) d\xi_1.$$

Далее, вероятность совместного выполнения неравенств  $\alpha_1 < x(t_1) \leq \beta_1$  и  $\alpha_2 < x(t_2) \leq \beta_2$  равна [10]

$$\frac{1}{\sqrt{\pi^2 t_1 (t_2 - t_1)}} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \exp\left(-\frac{\xi_1^2}{t_1}\right) \exp\left(-\frac{(\xi_2 - \xi_1)^2}{t_2 - t_1}\right) d\xi_2 d\xi_1.$$

Продолжая эти рассуждения, можно прийти к выводу, что выражение (1.3.33) имеет смысл вероятности события, заключающегося в том, что функция  $x(t)$ , описывающая движение броуновской частицы, принадлежит заданному квазиинтервалу  $Q$ . Рассмотренный случайный процесс называется *винеровским*.

Выберем теперь последовательность элементарных функций, интегрируемых по мере Винера и сходящихся к заданному функционалу  $f(x)$ . Для каждой функции  $x(t) \in C_0[0, \pi]$  построим ломаную  $x_n(t)$ , совпадающую с  $x(t)$  в конечном числе точек  $t_i \in [0, 1]$ ,  $i=1, \dots, n$ ,  $x(t_i) = x_n(t_i) = x_i$ , причем  $x_n(0) = 0$ ,  $x_n(\pi) = x(\pi)$ . В качестве элементарной функции выберем заданный функционал  $f(x)$ , вычисляемый на этих ломаных, т. е. функцию  $n$  переменных  $f_n(x): f(x_n(t)) = f_n(x_1, \dots, x_n) = f_n(x)$ . Если устремить число  $n$  к бесконечности при одновременном стремлении к нулю длин интервалов  $(t_i, t_{i+1})$ , то ломаная  $x_n(t)$  равномерно стремится к непрерывной функции  $x(t)$ , а последовательность  $f_n(x)$  стремится к значению  $f(x)$ . Интеграл от функции  $f_n(x_1, \dots, x_n)$  определим по формуле

$$\int_{E^n} f_n(x) d\mu_W = \frac{1}{\sqrt{\pi^n t_1 (t_2 - t_1) \dots (t_n - t_{n-1})}} \times \\ \times \int_{E^n} f_n(\xi_1, \dots, \xi_n) \exp\left[-\frac{\xi_1^2}{t_1} - \sum_{k=2}^n \frac{(\xi_k - \xi_{k-1})^2}{t_k - t_{k-1}}\right] \prod_{k=1}^n d\xi_k. \quad (1.3.35)$$



Предполагается, что такой интеграл существует для всех функций  $f_n(x)$ .

Интеграл от функционала  $f(x)$ ,  $x \in C_0[0, \pi]$  по мере Винера определяется как предел  $n$ -кратных интегралов (1.3.35) при  $n \rightarrow \infty$

$$\int_{C_0[0, \pi]} f(x) d\mu_W = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E^n} f_n(x) d\mu_W. \quad (1.3.36)$$

При этом необходимо выполнение условий, обеспечивающих предельный переход под знаком интеграла (см. стр. 67).

Функционалы  $f(x)$ , заданные на пространстве  $C_0[0, \pi]$  и интегрируемые по Винеру, а также интегрируемые по Винеру с квадратом, образуют линейные пространства, которые обозначают  $L(C_0)$  и  $L_2(C_0)$ . В этих пространствах норма вводится обычным образом, т. е.

$$\|f(x)\|_{L(C_0)} = \int_{C_0[0, \pi]} -f(x) d\mu_W, \quad (1.3.37)$$

$$\|f(x)\|_{L_2(C_0)} = \left( \int_{C_0[0, \pi]} f^2(x) d\mu_W \right)^{1/2}. \quad (1.3.38)$$

Сходимость по метрике пространства  $L_2(C_0)$ :  $\|f_n(x) - f(x)\|_{L_2(C_0)} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  имеет смысл сходимости в среднеквадратичном последовательности функционалов  $f_n(x)$ , вычисляемых на реализациях винеровского случайного процесса.

Между «абстрактной» и «классической» формой меры Винера имеется непосредственная связь [93]. Для того чтобы установить ее, рассмотрим в  $L_2[0, \pi]$  подпространство  $\tilde{L}_2[0, \pi]$  функций  $x(t)$ , для которых

$$(x, 1) = \int_0^\pi x(t) dt = 0, \quad (1.3.39)$$

и введем полную ортонормированную систему в этом подпространстве

$$e_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.3.40)$$

Построим в  $\Omega$  множество полной меры, изоморфное  $\tilde{L}_2[0, \pi]$ . Таким множеством является совокупность элементов  $z = \{z_n\} \in \Omega$ :

$$z_n = -nx_n = -n(x, e_n) = -n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi \cos nt x(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.3.41)$$

Теперь можно определить, как и выше, «абстрактную» меру Винера для элементарного множества в  $\tilde{L}_2[0, \pi]$ , которое зададим условиями:

$$\alpha_k < -kx_k \leq \beta_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} \{x \in \tilde{L}_2[0, \pi]: \alpha_1 < -x_1 \leq \beta_1, \alpha_2 < -2x_2 \leq \\ \leq \beta_2, \dots, \alpha_n < -nx_n \leq \beta_n\} = \\ = \tilde{\mu} \left\{ x \in \tilde{L}_2[0, \pi]: \alpha_1 < -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi x(t) \cos t dt \leq \beta_1, \alpha_2 < \right. \\ < -2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi x(t) \cos 2t dt \leq \beta_2, \dots, \alpha_n < \\ < \left. -n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi x(t) \cos nt dt \leq \beta_n \right\} = \\ = \mu \{z \in \Omega: \alpha_1 < z_1 \leq \beta_1, \alpha_2 < z_2 \leq \beta_2, \dots, \alpha_n < z_n \leq \beta_n\} = \\ = \prod_{k=1}^n \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \exp(-\xi_k^2) d\xi_k. \quad (1.3.42) \end{aligned}$$

Если функции  $x(t)$  дифференцируемы при  $t \in [0, \pi]$ , то можно записать

$$\begin{aligned} z_n = -n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi x(t) \cos nt dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi \sin nt dx(t) = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi x'(t) \sin nt dt. \quad (1.3.43) \end{aligned}$$

Если, к тому же, производная  $x'(t)$  квадратично интегрируема, т. е.  $x'(t) \in L_2[0, \pi]$ , то величины  $z_n$ ,  $n=1, 2, \dots$ , можно рассматривать как коэффициенты Фурье этой производной по ортонормированной системе

функций  $e_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nt$ ,  $n = 1, 2, \dots$ :

$$z_n = \int_0^{\pi} e_n(t) x'(t) dt = \int_0^{\pi} e_n(t) dx(t). \quad (1.3.44)$$

Выражение  $\int_0^{\pi} e_n(t) dx(t)$  следует рассматривать как интеграл Лебега — Стильтьеса [36].

Для дифференцируемых функций  $x(t)$  величины  $z_n$  ограничены и, следовательно, элементы  $z = \{z_n\}$  образуют в  $\Omega$  множество меры нуль. В связи с этим определим интеграл вида

$$\int_0^{\pi} f(t) dx(t), \quad f(t) \in L_2[0, \pi]$$

для любых функций  $x(t) \in \tilde{L}_2[0, \pi]$ , полагая, что

$$\int_0^{\pi} f(t) dx(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \int_0^{\pi} g_k(t) dx(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k z_k, \quad (1.3.45)$$

где

$$g_k(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kt, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$f_k = (g_k(t), f(t))$  — коэффициенты Фурье функции  $f(t)$  по ортонормальной системе функций  $g_k(t)$ . Условная запись интеграла (1.3.45) для любых, в том числе и недифференцируемых функций  $\tilde{x} \in \tilde{L}_2[0, \pi]$ , называется *интегралом Пэли — Винера — Зигмунда* [93]. Имея в виду это определение, можно записать меру Винера следующим

образом:

$$\mu_W \left\{ x \in \tilde{L}_2[0, \pi]: \alpha_1 < \int_0^\pi e_1(t) dx(t) \leq \beta_1, \dots, \alpha_n < \int_0^\pi e_n(t) dx(t) \leq \beta_n \right\} = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \exp(-\xi_k^2) d\xi_k. \quad (1.3.46)$$

Если  $\{f_n(t)\}$ ,  $n=1, 2, \dots$  — произвольная ортонормированная система функций в  $\tilde{L}_2[0, \pi]$ , то по-прежнему

$$\mu_W \left\{ x \in \tilde{L}_2[0, \pi]: \alpha_1 < \int_0^\pi f_1(t) dx(t) \leq \beta_1, \dots, \alpha_n < \int_0^\pi f_n(t) dx(t) \leq \beta_n \right\} = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \exp(-\xi_k^2) d\xi_k. \quad (1.3.47)$$

Определение меры Винера по формуле (1.3.47) удобно использовать при вычислении интеграла Винера.

«Классическую» меру Винера в пространстве  $C_0[0, \pi]$  можно получить из формулы (1.3.47), если выбрать ортонормированную систему функций

$$f_k(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t_{k-1} < t \leq t_k, \\ 0 & \text{при } t > t_k, t \leq t_{k-1}, \end{cases}$$

где  $k=1, 2, \dots$ ;  $0=t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \pi$ . По (1.3.47)

$$\int_0^\pi f_k(t) dx(t) = \frac{1}{\sqrt{t_k - t_{k-1}}} (x(t_k) - x(t_{k-1})), \quad k=1, 2, \dots \quad (1.3.48)$$

Подставляя (1.3.48) в (1.3.47), получим

$$\begin{aligned} \mu_W \{x \in \tilde{L}_2[0, \pi]: a_1 < x(t_1) - x(t_0) \leq \\ \leq b_1, \dots, a_n < x(t_n) - x(t_{n-1}) \leq b_n\} = \\ = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\pi(t_k - t_{k-1})}} \int_{a_k}^{b_k} \exp\left(-\frac{\eta_k^2}{t_k - t_{k-1}}\right) d\eta_k, \end{aligned} \quad (1.3.49)$$

где

$$a_k = \alpha_k \sqrt{t_k - t_{k-1}}, \quad b_k = \beta_k \sqrt{t_k - t_{k-1}}.$$

Заметим, что почти все (по мере Винера) функции  $x(t) \in \mathcal{L}_2[0, \pi]$ , для которых эта формула справедлива, — непрерывны и удовлетворяют условию (1.3.34) при  $\gamma < 1/2$ . Пространство этих непрерывных функций обозначим  $\mathcal{C}[0, \pi]$ .

Перейдем к непрерывным функциям  $\varphi(t) \in C_0[0, \pi]$ , равным нулю в точке  $t=0$ . Каждой функции  $x(t) \in \mathcal{C}[0, \pi]$  можно однозначно сопоставить функцию

$$\varphi(t) = x(t) - x(0). \quad (1.3.50)$$

С другой стороны, каждой функции  $\varphi(t)$  можно однозначно поставить в соответствие функцию

$$x(t) = \varphi(t) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(\tau) d\tau, \quad (1.3.51)$$

для которой выполняется условие (1.3.39). Соответственно, таким образом, взаимно-однозначно. Выражение (1.3.49) определяет меру множества  $B = \{\varphi \in C_0[0, \pi] : a_1 < \varphi(t_1) \leq b_1, \dots, a_n < \varphi(t_n) - \varphi(t_{n-1}) \leq b_n\}$  в пространстве  $C_0[0, \pi]$ . Из этого выражения нетрудно получить:

$$\begin{aligned} \mu \{ \varphi \in C_0[0, \pi] : a_1 < \varphi(t_1) \leq b_1, a_2 < \varphi(t_2) \leq \\ \leq b_2, \dots, a_n < \varphi(t_n) \leq b_n \} = \\ = \frac{1}{\sqrt{\pi^n t_1(t_2 - t_1) \dots (t_n - t_{n-1})}} \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} \exp\left(-\frac{\xi_1^2}{t_1} - \right. \\ \left. - \frac{(\xi_2 - \xi_1)^2}{t_2 - t_1} - \dots - \frac{(\xi_n - \xi_{n-1})^2}{t_n - t_{n-1}}\right) d\xi_1 \dots d\xi_n. \quad (1.3.52) \end{aligned}$$

Это выражение совпадает с мерой Винера (1.3.33), введенной ранее аксиоматически.

## МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

Первая глава этой книги была посвящена основам функционального анализа и являлась вводной. В настоящей главе начинается изложение методов применения функциональных рядов в теории нелинейных систем. Корректное изложение любой теории неизбежно должно начинаться с перечисления ее аксиом и пояснения смысла употребляемых терминов. Поэтому, прежде чем переходить к рассмотрению конкретных задач и методов теории нелинейных систем, необходимо кратко обсудить ее основы. С этой целью в первом и втором параграфах вводятся понятия системы и ее состояния, дается классификация систем и определяются правила действий с ними. Вид аксиоматики теории систем, принятой в этих двух параграфах, определился ориентацией на применение теории нормированных пространств и поэтому она несколько отличается от аксиоматики работ Л. Задэ [26], Р. Калмана [29] и М. Месаровича [57]. Далее в этой главе рассматриваются вопросы аналитического определения ядер ряда Вольтерра, описывающего систему, исследуется сходимость этого ряда, решается задача нелинейной идентификации при детерминированных пробных сигналах, а также приводится методика вычисления реакции системы на случайные воздействия. Методы анализа нелинейных систем, изложенные в данной главе, не предполагают использование преобразований Лапласа и Фурье, т. е. являются временными. Они применимы как для стационарных, так и для нестационарных нелинейных систем.

### § 1. Элементы математической теории систем

Понятие абстрактной системы занимает в математической теории систем такое же место, как понятие множества в функциональном анализе. Это понятие может быть введено различными способами. (Имеется более

двадцати математических и лингвистических определений понятия абстрактной системы, краткий перечень которых приведен в [123].)

Чтобы пояснить смысл вводимого ниже определения абстрактной системы (кратко — просто системы), рассмотрим *физически существующий объект*  $O$ , над которым производится *эксперимент*  $\mathcal{E}$  с целью описания поведения объекта в заданных условиях. Примерами экспериментов могут служить наблюдения за поведением живого организма, изучение движения летательного аппарата, анализ деятельности предприятия и т. д.

Совокупность физических объектов, взаимодействующих в процессе эксперимента  $\mathcal{E}$  с объектом  $O$ , назовем *окружающей средой*. Взаимодействие между объектом и средой протекает в двух направлениях: во-первых, среда действует на объект и, во-вторых, объект сам оказывает некоторое воздействие на среду. Эксперимент  $\mathcal{E}$  заключается в наблюдении и регистрации при помощи некоторых приборов и устройств физических процессов и величин, характеризующих взаимодействие среды и объекта. Будем предполагать, что эксперимент  $\mathcal{E}$  является *многократным* [60], т. е. в распоряжении экспериментатора имеется любое число тождественных копий объекта  $O$ , над каждой из которых можно провести эксперимент  $\mathcal{E}$  в тех же самых условиях \*).

Нашему рассмотрению подлежат только такие эксперименты, в которых: 1) приборы и устройства наблюдения и регистрации данных не вносят существенных искажений в результаты наблюдений и 2) все наблюдаемые физические величины и процессы могут быть количественно описаны при помощи функций, определенных на действительной прямой  $E^1$  и со значениями в  $E^1$ , т. е. при помощи действительных (скалярных) функций. Предположим, что в условиях данного эксперимента воздействия среды на объект определены во всех точках одного и того же непустого множества  $T \subseteq E^1$ , а ответные действия объекта — во всех точках одного и того же непустого множества  $T^* \subseteq E^1$ . Множества  $T$  и  $T^*$  назовем *множествами моментов времени*. В большинстве рассмат-

---

\*) То есть поведение объекта рассматривается на некотором множестве воздействий и при этом наблюдается некоторое множество реакций.

риваемых ниже задач будет предполагаться, что  $T$  и  $T^*$  совпадают. Примерами множеств моментов времени могут служить: а) вся прямая  $E^1$ , б) множество целых чисел  $I^1$ , в) полупрямая  $[t_0, \infty)$ , г) отрезок  $[t_0, T]$ . Выбор того или иного типа множества моментов времени определяется природой объекта и среды, характером эксперимента  $E$ , а также устройствами наблюдения, регистрации и обработки экспериментальных данных.

Функции  $x(t)$ , определенные на  $T$  и со значениями в  $E^1$ , описывающие действие среды на объект, назовем *входными сигналами* или *воздействиями*, а функции  $y(t)$ , определенные на  $T^*$  и со значениями в  $E^1$ , описывающие действие объекта, — *выходными сигналами* или *реакциями*. Предположим, что все входные сигналы  $x(t)$  являются элементами нормированного пространства  $A(T)$ , а все выходные сигналы  $y(t)$  — элементами нормированного пространства  $B(T^*)$ . Пространства  $A(T)$  и  $B(T^*)$  назовем *пространствами входных* и *выходных сигналов*. В дальнейшем будут использоваться пространства сигналов  $C[t_0, T]$ ,  $C(E^1)$ ,  $l_2$ ,  $L_2(E^1)$  и т. д. Образуем декартово произведение пространств сигналов  $A(T) \times B(T^*)$ . Теперь можно дать такое определение понятия системы (см. также [26], [149]).

*Системой* называется бинарное отношение  $R \subset A(T) \times B(T^*)$ . Для большинства задач, рассматриваемых в этой книге, пространства  $A(T)$  и  $B(T^*)$  совпадают, и система рассматривается как отношение  $R \subset A(T) \times A(T)$ .

Из способа введения этого понятия следует, что система (т. е. математическая модель) строится не на основе изучения природы и внутреннего устройства объекта, а с помощью наблюдения его реакций при действии входных сигналов. Такой подход в математической теории систем называется *макроподходом* [23] в отличие от *микрподхода*, при котором объект рассматривается и «изнутри», т. е. на основе изучения протекающих в нем процессов.

Систему обычно можно рассматривать как совокупность более простых подсистем, каждая из которых задается бинарным отношением на своих (промежуточных) пространствах сигналов. Тогда вся система в целом будет описываться  $n$ -арным отношением. Взаимоотношения подсистем в системе, заданной  $n$ -арным



отношением, можно охарактеризовать, если ввести алгебраические действия с системами.

Рассмотрим множество систем  $K$ , определенных на одном и том же пространстве сигналов  $A(T)$ , и введем алгебраические действия с системами из этого множества, используя для этого понятие сечения  $Rx(t)$  бинарного отношения  $R \subset A(T) \times A(T)$ .

Сумму  $R+S$  систем  $R, S \in K$  определим так:

$$(R+S)x(t) = Rx(t) + Sx(t)^*).$$

Сумма систем обладает коммутативным свойством  $R+S=S+R$  и ассоциативным свойством  $F+(R+S) = (F+R)+S, F \in K$ .

Композицию  $R*S$  систем  $R, S \in K$  введем соотношением

$$(R*S)x(t) = R(Sx(t)).$$

Композиция ассоциативна:  $F*(R*S) = (F*R)*S, F \in K$ , но в общем случае не коммутативна:  $R*S \neq S*R$ .

Композиция и сумма систем обладают левым дистрибутивным свойством  $(F+R)*S = F*S + R*S$ , но в общем случае не обладают правым дистрибутивным свойством  $F*(S+R) \neq F*S + F*R$ .

Произведение  $RS$  систем  $R, S \in K$  определим

$$(RS)x(t) = (Rx(t))(Sx(t)**).$$

Определенное таким образом произведение ассоциативно и коммутативно, но не обладает дистрибутивными свойствами относительно суммы и композиции.

Бинарное отношение (т. е. система) задает собой соответствие между элементами пространств  $A(T)$  и  $B(T^*)$ , т. е. между входными и выходными сигналами. Это соответствие обычно может быть описано аналитическим выражением. Примером отношения, заданного аналитически, может служить линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\dot{y} + y = x \quad (2.1.1)$$

\*) Сумма справа вычисляется между  $Rx(t)$  и  $Sx(t)$  поэлементно. Например, если  $Rx(t) = \{y_1(t), y_2(t)\}$ ,  $Sx(t) = \{z_1(t), z_2(t)\}$ , то  $Rx(t) + Sx(t) = \{y_1(t) + z_1(t), y_1(t) + z_2(t), y_2(t) + z_1(t), y_2(t) + z_2(t)\}$ .

\*\*\*) Произведение  $(Rx(t))(Sx(t))$  вычисляется поэлементно. Так, если  $Rx(t) = \{y(t)\}$ ,  $Sx(t) = \{z_1(t), z_2(t)\}$ , то  $(Rx(t))(Sx(t)) = \{y(t)z_1(t), y(t)z_2(t)\}$ .

при начальном условии  $y(t_0) = s \in E^1$ . Другим примером отношения, заданного аналитически, является линейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$y(t) = x(t) + \int_{t_0}^t h(t, \tau) y(\tau) d\tau. \quad (2.1.2)$$

Если сечение  $R$  по  $x(t)$  содержит для каждого  $x(t) \in A(T)$  только один элемент  $y(t) \in B(T^*)$ , т. е. если каждому входному сигналу  $x(t) \in A(T)$  соответствует один и только один выходной сигнал  $y(t) \in B(T^*)$ , то система называется *функциональной*. Функциональному отношению  $R \subset A(T) \times B(T^*)$  можно сопоставить оператор  $y(t) = \hat{J}x(t)$ , действующий из  $A(T)$  в  $B(T^*)$ . Система (2.1.2) в силу теоремы о существовании и единственности решения уравнения функциональна, и ей соответствует оператор

$$y(t) = x(t) + \int_{t_0}^t \Gamma(t, \tau) x(\tau) d\tau.$$

Резольвента  $\Gamma(t, \tau)$  задается рядом Лиувилля — Неймана

$$\Gamma(t, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} h^{(n)}(t, \tau), \quad (2.1.3)$$

причем повторные ядра  $h^{(n)}(t, \tau)$  последовательно определяются соотношениями [17]

$$\left. \begin{aligned} h^{(1)}(t, \tau) &= h(t, \tau), \\ h^{(2)}(t, \tau) &= \int_{\tau}^t h(t, \sigma) h(\sigma, \tau) d\sigma, \\ h^{(n)}(t, \tau) &= \int_{\tau}^t h(t, \sigma) h^{(n-1)}(\sigma, \tau) d\sigma, \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.1.4)$$

Для функциональных систем правила действий с системами совпадают с правилами действий с операторами. Сумма, композиция и произведение систем  $F, G \in K$  определяются соответственно формулами

$$\begin{aligned} (F+G)x(t) &= Fx(t) + Gx(t), & (F*G)x(t) &= F[Gx(t)], \\ (FG)x(t) &= F[x(t)]G[x(t)]. \end{aligned}$$

Полученные системы, очевидно, тоже функциональны.

Система (2.1.1) при нефиксированных начальных условиях не является функциональной, поскольку одному и тому же входному сигналу  $x(t) \in A(T)$  уравнение (2.1.1) сопоставляет множество выходных сигналов  $y(t)$  в соответствии с решением, записанным в форме Коши:

$$y(t) = s \exp[-(t - t_0)] + \int_{t_0}^t \exp[-(t - \tau)] x(\tau) d\tau. \quad (2.1.5)$$

Определим теперь понятие стационарной системы. Пусть для простоты  $T = E^1$  (или  $T = [t_0, \infty)$ ). Введем на декартовом произведении  $A(T) \times A(T)$  отношение сдвига  $\nabla_\sigma$ ,  $\sigma \in E^1$  ( $\sigma \in [0, \infty)$ ), сопоставляющее каждой функции  $x(t) \in A(T)$  функцию  $x(t + \sigma) \in A(T)$ . Отношение  $\nabla_\sigma$ , очевидно, функционально. Систему  $R \subset A(T) \times A(T)$  назовем *стационарной*, если для всех  $\sigma \in E^1$  ( $\sigma \in [0, \infty)$ ),

$$\nabla_\sigma * R = R * \nabla_\sigma.$$

Система (2.1.1) стационарна в смысле этого определения. В то же время система (2.1.2) в общем случае стационарной не является.

Из введенных правил действий с системами следует, что сумма, композиция и произведение двух стационарных систем являются стационарными системами. Стационарность суммы и произведения очевидна. Докажем стационарность композиции двух стационарных систем.

$$\nabla_\sigma * (F * G) = F * \nabla_\sigma * G = (F * G) * \nabla_\sigma,$$

т. е. композиция стационарна. Функциональная система  $y(t) = f x(t)$ ;  $x(t), y(t) \in A(E^1)$  называется стационарной, если

$$(\nabla_\sigma * f) x(t) = (f * \nabla_\sigma) x(t),$$

где  $\nabla_\sigma$  обозначает оператор сдвига, соответствующий введенному выше отношению сдвига.

Система, заданная  $n$ -арным отношением, стационарна, если все ее подсистемы стационарны, и не стационарна, если хотя бы одна из ее подсистем не стационарна.

Система называется *непрерывной* (по времени), если ее пространства входных и выходных сигналов являются пространствами функций. Примерами непрерывных систем могут служить уравнения (2.1.1) и (2.1.2).

Система называется *дискретной* \*), если хотя бы одно из ее пространств сигналов есть пространство последовательностей, т. е. дискретное по времени пространство. Типичным примером дискретной системы является разностное уравнение

$$\Delta y_k + ay_k = x_k, \quad k=0, 1, \dots$$

при начальном условии  $y_0 = s \in E^1$ . Здесь оба пространства — входное и выходное — дискретны по времени. Другим примером дискретной системы является система, определяемая формулой

$$\begin{aligned} f(t) &= f_1(t) \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\delta}(t - kT) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f_1(kT) \widehat{\delta}(t - kT), \end{aligned}$$

где функция  $\widehat{\delta}(t - kT)$  задается так:

$$\widehat{\delta}(t - kT) = \begin{cases} 1, & t = kT, \\ 0, & t \neq kT, \end{cases}$$

а  $f_1(kT)$  — это решетчатая функция [21], совпадающая с непрерывным сигналом  $f_1(t)$  в дискретные моменты времени  $t = kT$ ,  $k=0, 1, \dots$  (рис. 2.1.1). Для этой системы пространство входных сигналов непрерывно по времени, а пространство выходных сигналов дискретно.

Система, заданная  $n$ -арным отношением, непрерывна, если все ее пространства сигналов являются пространствами функций, и дискретна, если хотя бы одно из пространств сигналов является пространством последовательностей.

Смысл введенного определения системы был пояснен на примере многократного эксперимента с физическим существующим объектом. Однако само это определение имеет более широкий характер и позволяет считать системами математические модели любых ясно

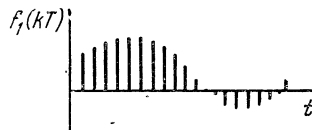
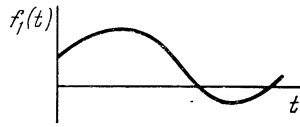


Рис. 2.1.1.

\*) Одному и тому же объекту можно обычно сопоставить как непрерывную так и дискретную модель (систему).

представимых объектов нашего сознания, не обязательно существующих физически, если только поведение этих объектов может быть описано математически и для них можно определить абстрактные пространства сигналов.

Назовем объект *физически возможным*, если он существует, или может быть физически осуществлен. Выясним теперь, какие из всех возможных систем могут являться моделями физически возможных объектов. Отличительным свойством физически возможных объектов является свойство причинности\*). Оно заключается в том, что реакция объекта на воздействие, начинающее поступать в произвольный момент времени, может быть определена однозначно, если известны законы, определяющие поведение объекта и все его прошлое до этого момента времени. Чтобы являться моделью физически возможного объекта, система тоже должна быть причинной, т. е. удовлетворять этому условию. Это условие может быть расчленено на два, в первом из которых требуется, чтобы реакция системы в любой текущий момент времени не зависела от будущих значений сигнала, а во втором — чтобы прошлое однозначно определяло будущее. Первое из этих условий — это условие *неантисипативной связи (связи без упреждения)* между воздействиями и реакциями системы. Назовем системы, удовлетворяющие этому условию, *неантисипативными (без упреждения)*. Системы, выходной сигнал которых хотя бы в один из моментов времени зависит от воздействий, которые будут приложены к системе в будущем, назовем *антисипативными (с упреждением)*. Если выходной сигнал не зависит от прошлых значений входного сигнала, то такую систему назовем *чисто антисипативной*. Очевидно, что обе системы (2.1.1) и (2.1.2) являются неантисипативными.

Дадим теперь математическое определение причинной системы, ограничившись при этом рассмотрением систем, для которых множества входных и выходных сигналов совпадают, т. е.  $R \subset A(T) \times A(T)$ . Введем на

---

\*) Причинность понимается здесь в смысле классической механики (лапласов детерминизм).

$A(T) \times A(T)$  функциональное отношение  $P_\tau$ ,  $\tau \in T$ , сопоставляющее каждой функции  $x(t) \in A(T)$  функцию

$$x_\tau(t) = \begin{cases} x(t), & t \leq \tau, \\ 0, & t > \tau. \end{cases}$$

Отношение  $P_\tau$  назовем *отношением сечения*. Определим, кроме того, отношение сечения  $P^\tau$ ,  $\tau \in T$ , сопоставляющее каждой функции  $x(t) \in A(T)$  функцию

$$x^\tau(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ x(t), & t \geq \tau. \end{cases}$$

Систему  $R \subset A(T) \times A(T)$  назовем *неантисипативной*, если

$$P_\tau * R = P_\tau * R * P_\tau.$$

Если же

$$P^\tau * R = P^\tau * R * P^\tau,$$

то систему назовем *чисто антисипативной*. Из введенных правил действий с системами следует, что сумма, композиция и произведение двух неантисипативных (чисто антисипативных) систем тоже являются неантисипативными (чисто антисипативными) системами. Неантисипативность сумм и произведения очевидна. Докажем неантисипативность композиции:

$$\begin{aligned} P_\tau * (F * G) &= P_\tau * F * P_\tau * G = P_\tau * F * P_\tau * G * P_\tau = \\ &= P_\tau * (F * G) * P_\tau, \end{aligned}$$

т. е. композиция неантисипативна. Система, заданная  $n$ -арным отношением, неантисипативна, если неантисипативны все ее подсистемы, и антисипативна, если хотя бы одна из подсистем антисипативна.

Если система  $R \subset A(T) \times A(T)$  функциональна, то второе условие причинности заведомо выполняется. Сопоставим этому отношению оператор  $y(t) = f x(t)$ , действующий из пространства  $A(T)$  в себя. Отношения  $P_\tau$  и  $P^\tau$ , введенные выше, функциональны и определяют соответствующие операторы, которые будем обозначать теми же символами.

Функциональную систему  $y(t) = f x(t)$  назовем *причинной*, если она неантисипативна, т. е. если для всех

$$x(t) \in A(T) \text{ и } \tau \in T \\ (P_\tau * f)x(t) = (P_\tau * j * P_\tau)x(t), \quad (2.1.6)$$

или, что то же самое, если для любых двух  $x_1(t), x_2(t) \in A(T)$  и любого  $\tau \in T$  из

$$P_\tau x_1(t) = P_\tau x_2(t),$$

следует, что

$$P_\tau y_1(t) = P_\tau y_2(t).$$

Система (2.1.2) причинна, поскольку резольвента  $\Gamma(t, \tau) = 0$ , если  $\tau > t$  и, следовательно, сигнал  $y(t)$  не зависит от будущих значений сигнала  $x(t)$ .

Функциональную систему  $y(t) = fx(t)$  назовем *антипричинной*, если она чисто антисипативна, т. е. если для всех  $x(t) \in A(T)$  и  $\tau \in T$

$$(P^\tau * f)x(t) = (P^\tau * j * P^\tau)x(t),$$

или, что то же самое, если для любых двух  $x_1(t), x_2(t) \in A(T)$  и любого  $\tau \in T$  из

$$P^\tau x_1(t) = P^\tau x_2(t),$$

следует, что

$$P^\tau y_1(t) = P^\tau y_2(t).$$

Примером функциональных антипричинных систем являются сопряженные линейные системы. Для системы

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) x(\tau) d\tau \quad (2.1.7)$$

(где  $h(t, \tau)$  — действительная функция) сопряженной будет линейная система, ядро которой  $h^*(t, \tau)$  удовлетворяет соотношению  $h^*(t, \tau) \equiv h(\tau, t)$ , т. е.

$$y^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\tau, t) x(\tau) d\tau. \quad (2.1.8)$$

Если система (2.1.7) причинна, т. е.  $h(t, \tau) = 0$  при  $\tau > t$ , то сопряженная система (2.1.8) антипричинна, поскольку  $h(\tau, t) = 0$  при  $\tau < t$  и, следовательно, сигнал  $y^*(t)$  не зависит от прошлых значений входного сигнала  $x(t)$ .

Рассмотрим числовую функцию от двух аргументов  $y = f[t, x]$ ,  $t \in T$ ,  $x \in E^1$ . Если система определяется оператором  $y(t) = f[t, x(t)]$ ,  $t \in T$ ,  $x(t) \in A(T)$ , то такая си-

стема называется *безынерционной*. Безынерционная система, очевидно, функциональна. Выходной сигнал безынерционной системы в момент времени  $t \in T$  не зависит от прошлых и будущих значений входного сигнала, и значит, безынерционные системы причинны и антипричинны одновременно. При  $h(t, \tau) = k(t) \delta(t - \tau)$  система (2.1.3) будет безынерционна (безынерционный усилитель), причем

$$y(t) = k(t)x(t); \quad x(t), y(t) \in A(T),$$

где  $k(t)$  — некоторая заданная функция.

Функциональную систему  $y = f x(t); x(t), y(t) \in A(T)$  назовем *линейной*, если оператор  $f$  линеен, и *нелинейной* в противном случае. В пространстве  $C(T)$ , как это следует из формулы Адамара (см. стр. 52), любая линейная система может быть записана в таком виде:

$$y(t) = \int_T h(t, \tau) x(\tau) d\tau. \quad (2.1.9)$$

Сумма и композиция двух линейных систем тоже является из формулы Адамара (см. стр. 52), любая линейной системой не является.

Если система  $H \in K$  линейна, то композиция и сумма обладают правым распределительным свойством относительно нее:

$$H * (G + F) = H * G + H * F.$$

Если же системы  $G$  и  $F$  ( $G, F \in K$ ) линейны и стационарны, то композиция обладает коммутативным свойством

$$G * F = F * G.$$

Функциональная система  $y = f x(t), x(t), y(t) \in A(T)$  называется *однородной степени  $i$* , если оператор  $f$  однороден и имеет степень  $i$ . В пространстве  $C(T)$  однородная система, как это следует из теоремы Фреше, задается формулой

$$y(t) = \int_T \dots \int_T h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) x(\tau_1) \dots x(\tau_i) d\tau_1 \dots d\tau_i. \quad (2.1.10)$$

Линейная система является однородной системой первой степени. Однородная система нулевой степени задается формулой  $y(t) = k(t)$ , где  $k(t)$  — некоторая функция



времени. Назовем функциональную систему  $y(t) = fx(t)$ ,  $x(t)$ ,  $y(t) \in A(T)$ , обладающей свойством сохранения нуля, если  $f\theta(t) = \theta(t)$ , где  $\theta(t)$  — нулевой входной сигнал, т. е. нуль пространства  $A(T)$ . Однородные системы (в частности, линейные), этим свойством обладают. Безынерционные системы обладают свойством сохранения нуля, если  $f[t, 0] = 0$  для всех  $t \in T$ .

Однородная система (2.1.10) причинна тогда и только тогда, когда  $h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) = 0$  при  $\tau_j > t$ ,  $j = 1, \dots, i$ , т. е. когда оператор (2.1.10) является однородным оператором Вольтерра. Установившейся реакцией причинной однородной системы степени  $i$  ( $i \geq 1$ ) назовем предел

$$\begin{aligned} \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) x(\tau_1) \dots x(\tau_i) d\tau_1 \dots d\tau_i = \\ = \int_{-\infty}^t \dots \int_{-\infty}^t h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) x(\tau_1) \dots x(\tau_i) d\tau_1 \dots d\tau_i. \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Формулу (2.1.11), учитывая, что система причинна, будем записывать в сокращенном виде:

$$y(t) = \int_{E^i} h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i x(\tau_r) dv_\tau, \quad (2.1.12)$$

где  $dv_\tau \equiv d\tau_1 \dots d\tau_i$ , знак  $\int_{E^i}$  обозначает  $i$ -кратный интеграл от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Очевидно, формула (2.1.12) определяет не только установившуюся реакцию системы, но также и реакцию на воздействие, поступившее, начиная с момента времени  $t_0$ . В последнем случае входной сигнал можно рассматривать как функцию, тождественно равную нулю до момента времени  $t_0$ . Однако, в целях сокращения обозначений, в дальнейшем обычно будет использоваться более компактная форма записи в виде (2.1.12).

Для того чтобы однородный регулярный оператор Вольтерра был стационарным, необходимо и достаточно, чтобы его ядро зависело бы только от разностей

$t - \tau_j, j=1, \dots, i$ , т. е.

$$y(t) = \int_{E^i} k_i(t - \tau_1, \dots, t - \tau_i) \prod_{r=1}^i x(\tau_r) dv_{\tau}. \quad (2.1.13)$$

Докажем это утверждение. Произведя замену переменных  $t - \tau_j = \xi_j, j=1, \dots, i$ , формулу (2.1.13) можно записать так:

$$y(t) = \int_{E^i} k_i(\xi_1, \dots, \xi_i) \prod_{r=1}^i x(t - \xi_r) dv_{\xi}. \quad (2.1.14)$$

Достаточность следует из того, что

$$\int_{E^i} k_i(\xi_1, \dots, \xi_i) \prod_{r=1}^i x(t + \sigma - \xi_r) dv_{\xi} = y(t + \sigma).$$

Необходимость доказывается так: согласно определению стационарной системы и вследствие регулярности оператора для однородной системы

$$y(t) = \int_{E^i} h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i x(\tau_r) dv_{\tau}$$

выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} \nabla_{\sigma} y(t) &= y(t + \sigma) = \\ &= \int_{E^i} h_i(t + \sigma, \tau_1 + \sigma, \dots, \tau_i + \sigma) \prod_{r=1}^i x(\tau_r + \sigma) dv_{\tau}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{E^i} h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i \nabla_{\sigma} x(\tau_r) dv_{\tau} &= \\ &= \int_{E^i} h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i x(\tau_r + \sigma) dv_{\tau}, \end{aligned}$$

$$h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) = h_i(t + \sigma, \tau_1 + \sigma, \dots, \tau_i + \sigma).$$

Положив  $\sigma = -t$ , найдем

$$h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) = h_i(0, \tau_1 - t, \dots, \tau_i - t).$$

Обозначив  $h_i(0, \tau_1 - t, \dots, \tau_i - t) = k_i(t - \tau_1, \dots, t - \tau_i)$ ,

получим соотношение (2.1.13). Стационарная система (2.1.13) по условию причинна и, значит,  $k_i(t-\tau_1, \dots, t-\tau_i)=0$ , если хотя бы одна из разностей  $t-\tau_j < 0$ ,  $j=1, \dots, i$ . Для соотношения (2.1.14) условия причинности примут вид  $k_i(\xi_1, \dots, \xi_i)=0$ , если  $\xi_j < 0$ ,  $j=1, \dots, i$ ,  $i=1, \dots, N$ , т. е. нижний предел интегрирования ( $-\infty$ ) в формуле (2.1.14) может быть заменен нулем, и установившаяся реакция запишется в виде

$$y(t) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty k_i(\xi_1, \dots, \xi_i) \prod_{r=1}^i x(t-\xi_r) dv_{\xi}. \quad (2.1.15)$$

Если оператор  $f$  является полиномом степени  $N$ , то система называется *полиномиальной системой степени  $N$* . Из теоремы Фреше следует, что причинная полиномиальная система степени  $N$  в пространстве  $C(T)$  задается полиномом Вольтерра

$$y(t) = \sum_{i=0}^N \int_{E^i} h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i x(\tau_r) dv_{\tau}. \quad (2.1.16)$$

Сумма, композиция и произведение двух полиномиальных систем тоже являются полиномиальными системами. Из свойств суммы можно заключить, что для стационарности полиномиальной системы степени  $N$  необходимо и достаточно, чтобы все составляющие ее регулярные однородные операторы были бы стационарны.

Функциональная система

$$y(t) = f x(t)$$

называется *аналитической*, если ее можно представить равномерно сходящимся рядом из однородных систем. В пространстве  $C(T)$  аналитическая причинная система представима в виде ряда Вольтерра

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{E^i} h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i x(\tau_r) dv_{\tau}. \quad (2.1.17)$$

Сумма, композиция и произведение двух аналитических систем тоже являются аналитическими системами, если полученные ряды сходятся.

Формулы (2.1.12), (2.1.16) и (2.1.17) определяют непрерывные причинные системы. Нетрудно записать соответствующие им соотношения для дискретных систем. Так, причинная полиномиальная дискретная система степени  $N$  может быть записана в виде

$$y[n] = \sum_{i=0}^N \sum_{j^i} h_i[n, m_1, \dots, m_i] \prod_{r=1}^i x[m_r]. \quad (2.1.18)$$

Здесь знак  $\sum_{j^i}$  заменяет  $i$ -кратное суммирование по индексам  $m_i$  от  $-\infty$  до  $\infty$ . Из сравнения формул (2.1.16) и (2.1.18) следует, что свойства дискретных систем во многом аналогичны свойствам непрерывных систем. Поэтому дальнейшее изложение будем вести для непрерывных систем\*).

Для безынерционных систем ядра в формулах (2.1.12), (2.1.16) и (2.1.17) можно записать, используя произведения  $\delta$ -функций. В этом случае безынерционная система (2.1.16) может быть представлена формулой

$$y(t) = \sum_{i=0}^N k_i(t) x^i(t), \quad (2.1.19)$$

где  $k_i(t)$  — некоторые функции времени. Безынерционная стационарная полиномиальная система имеет вид

$$y(t) = \sum_{i=0}^N k_i x^i(t),$$

где  $k_i$  — некоторые константы.

Если аналитическая система задана оператором  $y(t) = f x(t)$ ,  $x(t)$ ,  $y(t) \in A(T)$ , то для представления ее рядом нужно вычислить соответствующие производные. Проще всего эта задача решается для безынерционных нелинейностей. Если функция  $y(t) = f[t, x]$  аналитическая по переменной  $x$ , то соответствующий оператор  $y(t) = f[t, x(t)]$ ,  $x(t)$ ,  $y(t) \in C(T)$  тоже будет аналитическим и его можно разложить в окрестности точки  $x(t) = \xi(t) \in C(T)$  в ряд из однородных

---

\*) Вопросы теории дискретных линейных и нелинейных систем рассмотрены в работах [88] и [89].

операторов

$$f[t, \xi(t) + h(t)] = f[t, \xi(t)] + f'[t, \xi(t)] h(t) + \\ + \frac{1}{2} f''[t, \xi(t)] h^2(t) + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}[t, \xi(t)] h^n(t) + \dots,$$

где  $f^{(n)}$  — производная Гато порядка  $n$ . Для рассматриваемого типа операторов производная Гато совпадает с производной Фреше и в точке  $x(t) = \xi(t)$  задается формулой

$$f^{(n)}[t, \xi(t)] h^n(t) = f_x^{(n)}[t, \xi(t)] h^n(t),$$

где  $f_x^{(n)}$  — производная порядка  $n$  числовой функции  $y = f[t, x]$  по переменной  $x$ . Подставляя это соотношение в степенной ряд, получим

$$f[t, \xi(t) + h(t)] = f[t, \xi(t)] + f'_x[t, \xi(t)] h(t) + \\ + \frac{1}{2} f''_x[t, \xi(t)] h^2(t) + \dots + \frac{1}{n!} f_x^{(n)}[t, \xi(t)] h^n(t) + \dots$$

Если разложение (2.1.17) строится в окрестности точки  $\xi(t) = \theta(t)$ , то оно может быть записано так:

$$f[t, h(t)] = f[t, 0] + f'_x[t, 0] h(t) + \\ + \frac{1}{2} f''_x[t, 0] h^2(t) + \dots + \frac{1}{n!} f_x^{(n)}[t, 0] h^n(t) + \dots$$

Полученная формула представляет собой разложение для аналитических безынерционных нелинейностей, и коэффициенты в ней будут коэффициентами ряда Тейлора для числовой функции  $y = f[t, x]$ , вычисленными в точке  $x = 0$ . Если теперь обозначить

$$\frac{1}{i!} f_x^{(i)}[t, 0] = k_i(t),$$

то получим формулу (2.1.19) при  $N = \infty$ .

Аналогично для инерционной функциональной системы

$$y(t) = \int_0^t h(t, \tau) \varphi[\tau, x(\tau)] d\tau, \quad x(t), y(t) \in C(T),$$

образованной композицией линейной системы

$$y(t) = \int_0^t h(t, \tau) z(\tau) d\tau$$

и безынерционной аналитической нелинейности

$$z(t) = \varphi[t, x(t)],$$

разложение в окрестности точки  $x(t) = \theta(t)$  таково:

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^t h(t, \tau) k_i(\tau) x^i(\tau) d\tau,$$

где обозначено:  $\frac{1}{i!} \varphi_x^{(i)}[t, 0] = k_i(t)$ ,  $i = 0, 1, \dots$ .

Выше рассматривались свойства функциональных систем. Пусть теперь неантисипативное отношение  $R \subset \subset A(T) \times A(T)$  нефункционально, причем множество моментов времени  $T$  имеет наименьший элемент  $t_0$ . Предположим, что существует параметр  $s \in S$ , не зависящий от будущих значений входного и выходного сигналов и такой, что каждому значению этого параметра и каждому входному сигналу соответствует один и только один выходной сигнал. В этом случае систему  $R$  можно описать функциональным по паре  $x(t)$ ,  $s(t_0)$  тернарным отношением  $R_s \subset \subset A(T) \times S \times A(T)$ . Действительное нормированное пространство  $S$ , обладающее указанным свойством, назовем *пространством начальных состояний*.

Функциональному тернарному отношению  $R_s$  можно сопоставить однопараметрическое семейство операторов  $y(t) = f[s, x(t)]$ ,  $s \in S$ ,  $x(t)$ ,  $y(t) \in A(T)$ . Из условия неантисипативности следует при этом, что для всех  $\tau \in T$ ,  $s \in S$ ,  $x(t) \in A(T)$

$$P_{\tau} f[s, x(t)] = P_{\tau} f[s, P_{\tau} x(t)].$$

Понятие начального состояния, очевидно, не имеет смысла для систем, у которых множество моментов времени  $T$  не ограничено снизу, т. е. для которых известно все прошлое. Множество начальных состояний можно ввести не для всякой нефункциональной неантисипатив-

ной системы, множество моментов времени  $T$  которой имеет минимальный элемент  $t_0$ .

Рассмотрим уравнение

$$\dot{y} + y + \sqrt{y} = x, \quad (2.1.20)$$

где  $y(t_0) = y_0 \in E^1$ . Эта система, очевидно, неантисипативна, но множество начальных условий  $E^1$  не является пространством начальных состояний, поскольку одному и тому же воздействию  $x$  при начальном условии  $y_0 = 0$  соответствуют два решения уравнения (2.1.20).

Нефункциональную неантисипативную систему  $R \subset \subset A(T) \times A(T)$ , множество элементов времени которой  $T$  имеет минимальный элемент  $t_0$ , назовем *причинной*, если для нее существует пространство начальных состояний. Система (2.1.1) причинна в смысле этого определения и является системой с пространством начальных состояний  $E^1$ . Система (2.1.20) является примером неантисипативной непричинной системы.

Построим теперь для неантисипативной системы  $R$  семейство  $P^*R$  и рассмотрим для  $P^*R$  соответствующее пространство начальных состояний  $S(\tau)$ .

Пусть для всех  $\tau \in T$  эти пространства совпадают. Тогда пространство  $S(\tau) = S(t_0) = S$  назовем *пространством состояний* системы  $R$ . Поскольку  $R$  неантисипативна, то для нее существуют *уравнения состояний*:

$$s(\tau) = \varphi_1[s(t_0), x_\tau(t)], \quad y(\tau) = \varphi_2[s(\tau), x(\tau), \tau].$$

Уравнения состояния могут быть выведены [26] из соотношения  $y(t) = f[s(t_0), x(t)]$ . При микроподходе [29] эти уравнения принимаются за исходные, и система определяется как пара функций  $\varphi_1, \varphi_2$ .

Если пространство  $S$  является арифметическим  $E^n$ , то система  $R \subset \subset A(T) \times A(T)$  называется *системой с конечномерным пространством состояний*. Если же пространство функционально, то система  $R \subset \subset A(T) \times A(T)$  называется *системой с бесконечномерным пространством состояний*.

Для систем, заданных однопараметрическим семейством операторов, можно ввести алгебраические правила действий, которые вытекают из общих правил действий с системами и имеют аналогичные свойства.

Сумма  $F_{S_F} + G_{S_G}$ , композиция  $F_{S_F} * G_{S_G}$  и произведение  $F_{S_F} G_{S_G}$  систем  $F, G \in K$ , находящихся в состояниях  $s_F \in S_F$  и  $s_G \in S_G$  соответственно, определяются так:

$$(F_{S_F} + G_{S_G}) x(t) = [F[s_F, x(t)] + G[s_G, x(t)]], \quad x(t) \in A(T);$$

$$(F_{S_F} * G_{S_G}) x(t) = F[s_F, G[s_G, x(t)]], \quad x(t) \in A(T);$$

$$(F_{S_F} G_{S_G}) x(t) = F[s_F, [x(t)]] G[s_G, x(t)], \quad x(t) \in A(T).$$

Пространством начальных состояний суммы, композиции и произведения этих систем является декартово произведение  $S_F \times S_G$ .

Состояние системы  $R \subset A(T) \times A(T)$ , обозначаемое  $\theta$ , назовем *нулевым*, если  $\theta$  является нулем пространства  $S$ . Для системы (2.1.1)  $S = E^1$ , и нулевым состоянием будет 0. Функциональную систему, множество моментов времени которой имеет наименьший элемент  $t_0$ , можно рассматривать как систему, имеющую одно и только одно начальное состояние — нулевое.

Если система находится в нулевом начальном состоянии, то ее реакцию на входной сигнал  $x(t)$  назовем *реакцией в нулевом состоянии* [26]

$$y(t) = f[\theta, x(t)].$$

Для системы (2.1.1) эта реакция записывается так:

$$y(t) = \int_{t_0}^t \exp[-(t-\tau)] x(\tau) d\tau, \quad t \geq t_0.$$

Если система находится в начальном состоянии  $s \in S$ , то ее реакция на нулевой входной сигнал  $\theta(t)$  называется *реакцией при нулевом сигнале* [26]

$$y(t) = f[s, \theta(t)].$$

Для системы (2.1.1) эта реакция имеет вид

$$y(t) = s \exp[-(t-t_0)], \quad t \geq t_0.$$

Для причинной системы, заданной однопараметрическим семейством операторов  $f[s, x(t)]$ , определение стационарности выглядит так:

$$\nabla_{\sigma} f[s, x(t)] = f[s(t_0 + \sigma), \nabla_{\sigma} x(t)].$$

Система может быть стационарна при нулевом сигнале



и нестационарна в нулевом состоянии, как, например, система

$$y(t) = s \exp[-\alpha(t-t_0)] + \int_{t_0}^t \exp[-\alpha(t-\tau)] b(\tau) x(\tau) d\tau.$$

Возможен и обратный случай, например,

$$y(t) = s \exp\left[-\frac{1}{2}(t^2 - t_0^2)\right] + q \exp[-\alpha(t-t_0)] + \\ + \int_{t_0}^t \exp[-\alpha(t-\tau)] x(\tau) d\tau.$$

Очевидно, что ни одна из этих систем не является стационарной в смысле введенного определения\*).

Систему  $y(t) = f[s, x(t)]$ ,  $s \in S$ ,  $x(t)$ ,  $y(t) \in A(T)$  назовем *обладающей свойством разложения* [26], если для любых  $s \in S$ ,  $x(t) \in A(T)$  ее можно представить в виде

$$f[s, x(t)] = f[\theta, x(t)] + f[s, \theta(t)].$$

Система (2.1.5) обладает свойством разложения.

Систему, заданную однопараметрическим семейством операторов  $y(t) = f[s, x(t)]$ ,  $s \in S$ ,  $x(t)$ ,  $y(t) \in A(T)$ , назовем *линейной* [26], если она:

1) обладает свойством разложения, т. е. для любых  $s \in S$ ,  $x(t) \in A(T)$

$$f[s, x(t)] = f[\theta, x(t)] + f[s, \theta(t)];$$

2) линейна в нулевом состоянии (т. е. оператор  $f[\theta, x(t)]$  линеен по  $x(t)$ ) и при нулевом сигнале (т. е. оператор  $f[s, \theta(t)]$  линеен по  $s$ ). Любая система, не удовлетворяющая одновременно этим двум условиям, называется *нелинейной*.

\*) Первая из этих систем описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{y}(t) + \alpha y(t) = b(t)x(t), \quad y(t_0) = s \in E^1,$$

а вторая — системой уравнений

$$y(t) = z(t) + q(t),$$

$$\dot{z}(t) + tz(t) = 0, \quad z(t_0) = s \in E^1, \quad \dot{q}(t) + \alpha q(t) = x(t), \quad q(t_0) = q \in E^1.$$

Система (2.1.2) является линейной. Нелинейная система

$$y(t) = s \exp(-t) + \int_0^t \exp[-\alpha(t-\tau)] x^2(\tau) d\tau, \quad t \geq 0, \quad (2.1.21)$$

линейна при нулевом воздействии и нелинейна в нулевом начальном состоянии. Наоборот, нелинейная система

$$y(t) = [s \exp(-t)]^2 + q \exp(-\alpha t) + \int_0^t \exp[-\alpha(t-\tau)] x(\tau) d\tau, \quad t \geq 0, \quad (2.1.22)$$

линейна в нулевом начальном состоянии, но нелинейна при нулевом входном сигнале. Отметим, что обе эти системы\*) обладают свойством разложения: В пространстве  $C(T)$  линейная система задается формулой

$$y(t) = g_s(t) + \int_T h(t, \tau) x(\tau) d\tau,$$

где функция  $g_s(t)$  зависит только от начального состояния системы.

Нелинейная система  $y(t) = f[s, x(t)]$ ,  $s \in S$ ,  $x(t)$ ,  $y(t) \in A(T)$  называется *однородной второй степени*, если она:

1) для любых  $s \in S$ ,  $x(t) \in A(T)$  представима в виде  $f[s, x(t)] = f[\theta, x(t)] + f[s, \theta(t)] + 2\varphi[s, x(t)]$ ;

2) однородна второй степени в нулевом состоянии (т. е. функция  $f[\theta, x(t)]$  однородна и второй степени по  $x(t)$ ) и при нулевом сигнале (т. е. функция  $f[\theta, x(t)]$  однородна и второй степени по  $s$ );

3) функция  $\varphi[s, x(t)]$  билинейна.

\*) Системы (2.1.21) и (2.1.22) вполне реальны. Чтобы убедиться в этом, достаточно записать: первую — в виде

$$\dot{y} + \alpha y = x^2, \quad y(0) = s \in E^1,$$

а вторую — в виде

$$\dot{z} + z = 0, \quad z(0) = s \in E^1, \quad \dot{q} + \alpha q = x, \quad q(0) = q, \quad y(t) = z^2(t) + q(t).$$

Например, система

$$f[s, x(t)] = (s \exp [-(t - t_0)])^2 + \\ + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t h_2(t, \tau_1, \tau_2) x(\tau_1) x(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\ + s \exp [-(t - t_0)] \int_{t_0}^t h(t, \tau) x(\tau) d\tau$$

однородна и второй степени.

Нелинейная система  $y(t) = f[s, x(t)]$ ,  $s \in S$ ,  $x(t)$ ,  $y(t) \in A(T)$  называется *однородной третьей степени*, если она:

1) для любых  $s \in S$ ,  $x(t) \in A(T)$  представима в виде  $f[s, x(t)] =$   
 $= f[\theta, x(t)] + f[s, \theta(t)] + 3\varphi_1[s, x(t)] + 3\varphi_2[s, x(t)];$

2) однородна, третьей степени в нулевом состоянии и при нулевом сигнале;

3) функция  $\varphi_1[s, x(t)]$  однородна, второй степени по  $s$  и линейна по  $x(t)$ , а функция  $\varphi_2[s, x(t)]$  однородна, второй степени по  $x(t)$  и линейна по  $s$ .

Для определения однородных систем второй и третьей степени использовались алгебраические тождества

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2,$$

$$(x_1 + x_2)^3 = x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3.$$

Совершенно аналогично определяется однородная система произвольной степени  $n$  ( $n$  — целое число). При этом используется формула бинома Ньютона

$$(x_1 + x_2)^n = x_1^n + nx_1^{n-1}x_2 + \frac{n(n-1)}{2!}x_1^{n-2}x_2^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!}x_1^{n-m}x_2^m + \dots$$

$$\dots + nx_1x_2^{n-1} + x_2^n.$$

Линейная система, очевидно, является однородной системой первой степени. Назовем систему *однородной системой нулевой степени*, если однородная функция

$y(t) = f[s, x(t)]$ ,  $s \in S$ ,  $x(t)$ ,  $y(t) \in A(T)$  имеет нулевую степень по  $x(t)$  и  $s$ . Однородная система нулевой степени представляет собой систему, у которой пространства входных сигналов и начальных состояний имеют только по одному — нулевому — элементу и которая задается уравнением  $y(t) = k(t)$ , где  $k(t)$  — некоторая функция времени.

Систему  $y(t) = f[s, x(t)]$ ,  $s \in S$ ,  $x(t)$ ,  $y(t) \in A(T)$  назовем *обладающей свойством сохранения нуля*, если

$$f[\theta, \theta(t)] = \theta(t).$$

Как следует из определений, однородные системы степени  $i > 0$  (в частности, линейные) обладают этим свойством. *Установившейся реакцией однородной системы*  $f[s, x(t)]$  назовем предел

$$y(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} f[s(t_0), x(t)],$$

если этот предел существует и не зависит от  $s \in S$ . Так, для линейной системы

$$y(t) = s \exp[-(t - t_0)] + \int_{t_0}^t h(t, \tau) x(\tau) d\tau,$$

установившаяся реакция определяется соотношением

$$\begin{aligned} \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \left\{ s \exp[-(t - t_0)] + \int_{t_0}^t h(t, \tau) x(\tau) d\tau \right\} = \\ = \int_{-\infty}^t h(t, \tau) x(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Система  $y(t) = f[s, x(t)]$ ,  $s \in S$ ,  $x(t)$ ,  $y(t) \in A(T)$  называется *полиномиальной степени  $N$* , если она представима в виде суммы однородных систем порядка до  $N$  включительно:

$$f[s, x(t)] = \sum_{i=0}^N f_i[s, x(t)].$$

Полиномиальная система в общем случае свойством сохранения нуля не обладает. Системы (2.1.21) и (2.1.22) являются примерами полиномиальных систем,

обладающими этим свойством. Отметим, что эти две системы обладают и свойством разложения.

Нелинейная система  $y(t) = f[s, x(t)]$ ,  $s \in E^n$ ,  $x(t)$ ,  $y(t) \in A(T)$  называется *аналитической*, если ее можно представить в виде равномерно сходящегося ряда из однородных систем

$$y(t) = f[s, x(t)] = \sum_{i=0}^{\infty} f_i[s, x(t)].$$

Если для причинной системы  $y(t) = f[s, x(t)]$  пространство входных сигналов состоит из одного элемента — нулевого, то система называется *свободной*. Свойства таких систем и правила действий с ним нетрудно получить, если рассматривать их как частный случай систем  $y(t) = f[s, x(t)]$ , заданных однопараметрическим семейством операторов.

## § 2. Определение ядер ряда Вольterra для систем, заданных структурными схемами

В прикладных задачах широкое распространение получил графический способ представления систем, основанный на использовании структурных схем. Этот способ особенно удобен для сложных систем, образованных соединением большого числа подсистем. Каждая подсистема  $y(t) = f[s, x(t)]$  изображается так, как это показано на рис. 2.2.1. Для образования соединений между подсистемами вводятся элементарные системы (элементы): сумматор и умножитель.

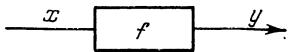


Рис. 2.2.1.

*Сумматором* называется безынерционная система, имеющая  $n$  входов  $x_1, \dots, x_n$  и один выход  $y$  и описываемая соотношением

$$y = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad a_i = \pm 1.$$

Графически сумматор для случая  $n > 2$  изображается так, как показано на рис. 2.2.2, а. При  $n = 2$  изображение сумматора показано на рис. 2.2.2, б ( $a_1 = +1$ ,  $a_2 = +1$ ) и в ( $a_1 = +1$ ,  $a_2 = -1$ ). В последнем случае сум-

матор называют также *устройством сравнения*. Очевидно, сумматор является линейной системой.

*Умножителем* называется безынерционная система, имеющая  $n$  входов  $x_1, \dots, x_n$  и один выход  $y$  и описываемая формулой

$$y = \prod_{i=1}^n x_i.$$

Графически умножитель для случая двух входов изображен на рис. 2.2.2, з. С помощью этих двух элементарных систем сопоставим введенным в § 1 действиям с системами соответствующие структурные схемы.

Сумме двух систем соответствует параллельное соединение, структурная схема которого приведена на

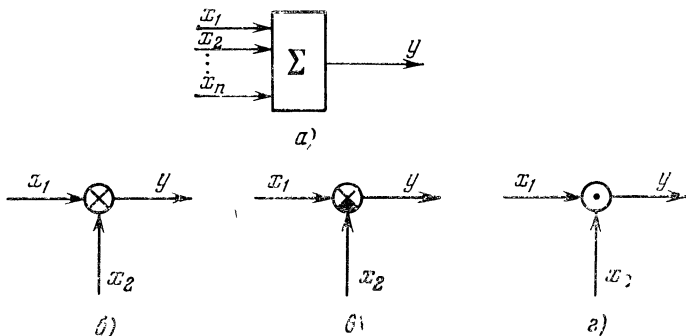


Рис. 2.2.2.

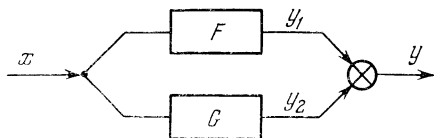


Рис. 2.2.3.

рис. 2.2.3. Композиции соответствует последовательное соединение в соответствии со структурной схемой, показанной на рис. 2.2.4. На рис. 2.2.5 приведен еще один вид

соединения — обратное, образованное с помощью устройства сравнения. Возможен и другой вид обратного соединения, когда вместо устройства сравнения вводится сумматор, приведенный на рис. 2.2.2, б. Первый вид обратного

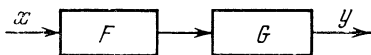


Рис. 2.2.4.

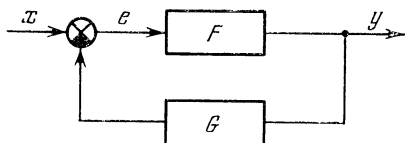


Рис. 2.2.5.

соединения соответствует *отрицательной обратной связи*, а второй — *положительной*. Если  $G \equiv I$ , то обратная связь называется *жесткой*, а при  $G \neq I$  — *гибкой*. Последний вид соединения (рис. 2.2.6) соответствует перемножению двух систем.

Достоинство структурных схем заключается в их наглядности

и простоте методов преобразования, которые служат для перехода от  $n$ -арного отношения, заданного на промежуточных пространствах сигналов, к бинарному, определенному на пространствах входных и выходных сигналов.

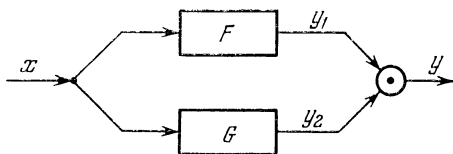


Рис. 2.2.6.

Такой переход позволяет описать всю систему единым аналитическим выражением. Методы преобразования структурных схем особенно просты, если все подсистемы линейны.

Пусть подсистемы  $F$  и  $G$  являются функциональными и линейными. Обозначим ядра линейных операторов Вольтерра через  $h(t, \tau)$  и  $k(t, \tau)$  соответственно. Поскольку параллельное соединение (рис. 2.2.3)

соответствует сумме систем, то

$$y(t) = (F + G)x(t) = \int_{E^1} \{h(t, \tau) + k(t, \tau)\} x(\tau) d\tau = \\ = \int_{E^1} g(t, \tau) x(\tau) d\tau, \quad (2.2.1)$$

где  $g(t, \tau) = h(t, \tau) + k(t, \tau)$ . Если же системы соединены последовательно (рис. 2.2.4), то это соответствует их композиции. Меняя порядок интегрирования, найдем

$$y(t) = (F * G)x(t) = \int_{E^1} h(t, \tau) \int_{E^1} k(\tau, \sigma) x(\sigma) d\sigma d\tau = \\ = \int_{E^1} g(t, \sigma) x(\sigma) d\sigma, \quad (2.2.2)$$

где

$$g(t, \sigma) = \int_{E^1} h(t, \tau) k(\tau, \sigma) d\tau.$$

Рассмотрим теперь структурную схему, приведенную на рис. 2.2.5, в предположении, что обратная связь отрицательная и жесткая. Для этой системы имеем такие уравнения:

$$e(t) = x(t) - y(t), \\ y(t) = \int_{E^1} k(t, \tau) e(\tau) d\tau.$$

Отсюда получаем линейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно выходного сигнала  $y(t)$ :

$$y(t) = \int_{E^1} k(t, \tau) x(\tau) d\tau - \int_{E^1} k(t, \tau) y(\tau) d\tau. \quad (2.2.3)$$

Решение уравнения (2.2.3) будем искать в виде

$$y(t) = \int_{E^1} \Gamma(t, \tau) x(\tau) d\tau,$$

где  $\Gamma(t, \tau)$  — резольвента. Подставляя это выражение в



уравнение (2.2.3), находим

$$\int_{E^1} \Gamma(t, \tau) x(\tau) d\tau = \\ = \int_{E^1} k(t, \tau) x(\tau) d\tau - \int_{E^1} \left\{ \int_{E^1} k(t, \tau) \Gamma(\tau, \sigma) d\tau \right\} x(\sigma) d\sigma.$$

Поскольку полученное равенство должно выполняться для любых входных сигналов  $x(t)$ , то отсюда получаем уравнение (2.2.3), находим

$$\Gamma(t, \tau) = k(t, \tau) - \int_{E^1} k(t, \sigma) \Gamma(\sigma, \tau) d\sigma.$$

Решение этого уравнения можно записать в виде ряда Лиувилля — Неймана

$$\Gamma(t, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} k^{(i)}(t, \tau).$$

Иногда уравнение (2.2.3) требуется разрешить не относительно выходного сигнала  $y(t)$ , а относительно сигнала ошибки  $e(t)$ . Учитывая, что

$$e(t) = x(t) - y(t),$$

получим

$$/ e(t) = \int_{E^1} h(t, \tau) x(\tau) d\tau,$$

где  $h(t, \tau) = \delta(t - \tau) - \Gamma(t, \tau)$ . Для перемножения линейных систем (рис. 2.2.6) имеем

$$y(t) = (GF)x(t) = \left\{ \int_{E^1} h(t, \tau) x(\tau) d\tau \right\} \left\{ \int_{E^1} k(t, \tau) x(\tau) d\tau \right\} = \\ = \int_{E^2} h(t, \tau_1) k(t, \tau_2) x(\tau_1) x(\tau_2) d\nu_{\tau},$$

т. е. вся система описывается регулярным однородным оператором Вольтерра второй степени.

Использование для представления линейных систем функций, заданных в явном виде, позволяет построить описание сложной системы по заданной структурной схеме. Для нелинейных аналитических систем такие же преимущества дает применение рядов Вольтерра, кото-

рые тоже дают явную связь между входным и выходным сигналами.

Покажем, что ряд Вольтерра естественно возникает при описании во временной области функциональной системы, в которой имеется безынерционный нелинейный элемент, представимый рядом Тейлора или полиномом.

Рассмотрим непрерывную нелинейную систему (рис. 2.2.7), образованную последовательным соединени-

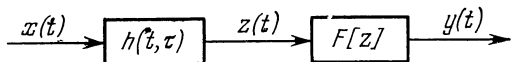


Рис. 2.2.7.

ем линейного инерционного и стационарного полиномиального безынерционного звеньев. Для такой системы соотношения между сигналами  $x(t)$  и  $y(t)$  имеют вид

$$z(t) = \int_{E^1} h(t, \tau) x(\tau) d\tau, \quad (2.2.4)$$

$$y(t) = F[z(t)] = \sum_{i=1}^N a_i z^i(t). \quad (2.2.5)$$

Общее описание системы можно получить, подставив (2.2.4) в (2.2.5):

$$\begin{aligned} y(t) &= F \left[ \int_{E^1} h(t, \tau) x(\tau) d\tau \right] = \sum_{i=1}^N a_i \left[ \int_{E^1} h(t, \tau) x(\tau) d\tau \right]^i = \\ &= \sum_{i=1}^N a_i \prod_{j=1}^i \left[ \int_{E^1} h(t, \tau_j) x(\tau_j) d\tau_j \right] = \\ &= \sum_{i=1}^N a_i \int_{E^i} \prod_{j=1}^i [h(t, \tau_j) x(\tau_j)] dv_{\tau}. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Если обозначить  $\prod_{j=1}^i h(t, \tau_j) = h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , то соотношение (2.2.6) примет вид полинома Вольтерра

$$y(t) = \sum_{i=1}^N a_i \int_{E^i} h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{j=1}^i x(\tau_j) dv_{\tau}. \quad (2.2.7)$$

Пусть, например, линейная нестационарная система имеет весовую функцию  $h(t, \tau) = \exp \left[ -\frac{1}{2} (t^2 - \tau^2) \right]$ . Это

соответствует дифференциальному уравнению [81]

$$\frac{dx(t)}{dt} + tx(t) = f(t).$$

Тогда ядро порядка  $i$  получается в виде

$$h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) = \prod_{j=1}^i \exp \left[ -\frac{1}{2} (t^2 - \tau_j^2) \right].$$

Если линейная система стационарна, то ряд (2.2.6) может быть записан следующим образом:

$$y(t) = \sum_{i=1}^N a_i \int_{E^i} h_i(\tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{j=1}^i x(t - \tau_j) dv_\tau,$$

причем его ядра определяются формулами

$$h_i(\tau_1, \dots, \tau_i) = \prod_{j=1}^i h(\tau_j), \quad i = 1, \dots, N.$$

Если линейная часть системы — аperiodическое звено с

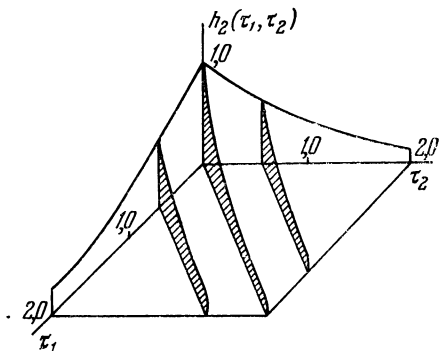


Рис. 2.2.8.

коэффициентом усиления  $K$  и постоянной времени  $T$ , то  $h(\tau) = K \exp\left(-\frac{1}{T} \tau\right)$  и  $h_i(\tau_1, \dots, \tau_i) = K^i \exp\left[-\frac{1}{T} \prod_{j=1}^i \tau_j\right]$ .

Ядро второго порядка для  $K=1$  и  $T=1$  изображено на рис. 2.2.8.

Ядра полинома (2.2.7) *полностью разделимы (сепарабельны)*, т. е. ядро порядка  $i$  представимо в виде произведения  $i$  ядер первого порядка. Другой возможный тип ядер — это *частично разделимые ядра*. Частично разделимое ядро порядка  $i$  представимо в виде произведения  $j$  ядер ( $j < i$ ) низших порядков. Например, ядро третьего порядка вида

$$h_3(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) = h_1(t, \tau_1)h_2(t, \tau_2, \tau_3)$$

будет частично разделимым.

Если ядра частично или полностью разделимы, то это существенно упрощает расчет системы. Однако на практике ядра этого типа встречаются редко. Рассмотрим,

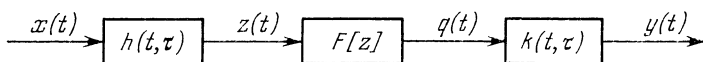


Рис. 2.2.9.

например, непрерывную систему (рис. 2.2.9), образованную последовательным соединением двух линейных инерционных систем, разделенных безынерционной нелинейностью. Ядра этой системы будут уже неразделимыми. Покажем это.

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{E^1} k(t, \tau) F \left[ \int_{E^1} h(\tau, \sigma) x(\sigma) d\sigma \right] d\tau = \\ &= \int_{E^1} k(t, \tau) \sum_{i=1}^N a_i \left[ \int_{E^1} h(\tau, \sigma) x(\sigma) d\sigma \right]^i d\tau = \\ &= \sum_{i=1}^N a_i \int_{E^1} k(t, \tau) \prod_{j=1}^i \left[ \int_{E^1} h(\tau, \sigma_j) x(\sigma_j) d\sigma_j \right] d\tau = \\ &= \sum_{i=1}^N a_i \int_{E^i} g_i(t, \sigma_1, \dots, \sigma_i) \prod_{j=1}^i x(\sigma_j) d\sigma. \quad (2.2.8) \end{aligned}$$

В (2.2.8) для  $i=1, \dots, N$  обозначено

$$g_i(t, \sigma_1, \dots, \sigma_i) = \int_{E^1} k(t, \tau) \prod_{j=1}^i h(\tau, \sigma_j) d\tau. \quad (2.2.9)$$

Выражение (2.2.9) определяет неразделимые ядра Вольтерра.

Предположим, что  $k(t, \tau) = \exp[-(t-\tau)] - \exp[-2 \times (t-\tau)]$ , что соответствует дифференциальному уравнению второго порядка [124]:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 3 \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = f(t).$$

Если  $h(t, \tau) = \exp[-(t-\tau)]$ , то ядро первого порядка всей системы с учетом условий причинности получится из формулы (2.2.9) в таком виде:

$$\begin{aligned} g_1(t - \tau) &= \\ &= \int_{\tau}^t [\exp[-(t - \sigma)] - \exp[-2(t - \sigma)]] \exp[-(\sigma - \tau)] d\sigma = \\ &= (t - \tau) \exp[-(t - \tau)] - \exp[-(t - \tau)] + \exp[-2(t - \tau)]. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Ядро второго порядка будет таким:

$$\begin{aligned} g_2(t - \tau_1, t - \tau_2) &= \\ &= \int_{\max\{\tau_1, \tau_2\}}^t [\exp[-(t - \sigma)] - \exp[-2(t - \sigma)]] \times \\ &\quad \times \prod_{j=1}^2 \exp[-(\sigma - \tau_j)] d\sigma = \\ &= \begin{cases} -\exp[-(t - \tau_1)] \exp[-(t - \tau_2)] + \exp[-(t - \tau_2)] - \\ \quad - (t - \tau_1) \exp[-2t + \tau_1 + \tau_2], & \tau_1 > \tau_2, \\ -\exp[-(t - \tau_1)] \exp[-(t - \tau_2)] + \exp[-(t - \tau_1)] - \\ \quad - (t - \tau_2) \exp[-2t + \tau_1 + \tau_2], & \tau_2 > \tau_1. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Приведенные примеры являются иллюстрацией к общему положению, согласно которому любую функциональную нелинейную систему без обратной связи, образованную соединением инерционных линейных систем и аналитических безынерционных нелинейностей, можно описать рядом Вольтерра. Одновременно эти примеры показывают, как это можно сделать практически.

Предположим, что описания систем в виде рядов Вольтерра уже получены. Выведем правила действий

с этим рядами. Все выкладки, учитывая замечания на стр. 99, проведем для непрерывных нелинейных систем.

Линейные системы можно рассматривать как частный вид полиномиальных систем, у которых все ядра, кроме ядра первого порядка, тождественно равны нулю. Поэтому формальные правила действий с рядами Вольтерра будут содержать, как частный случай, правила формальных преобразований весовых функций линейных систем.

Пусть имеются две функциональные полиномиальные системы  $R_n$  и  $T_m$  с ядрами  $h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i), i=1, \dots, n$ , и  $k_j(t, \tau_1, \dots, \tau_j), j=1, \dots, m$ , соответственно. Соединим их параллельно (рис. 2.2.3), что соответствует сумме систем. Согласно определению суммы

$$\begin{aligned} (R_n + T_m) x(t) &= \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{E^i} \{h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) + k_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i)\} \prod_{j=1}^i x(\tau_j) dv_\tau = \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{E^i} g_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{j=1}^i x(\tau_j) dv_\tau. \quad (2.2.12) \end{aligned}$$

В (2.1.12) обозначено  $N \leq \max\{n, m\}$ ; ядра полинома Вольтерра задаются формулой

$$g_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) = h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) + k_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i),$$

для всех  $i=1, \dots, N$ .

Рассмотрим теперь произведение систем (рис. 2.2.6). Имеем

$$\begin{aligned} y(t) &= (T_m R_n) x(t) = \left\{ \sum_{i=1}^m \int_{E^i} k_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i x(\tau_r) dv_\tau \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ \sum_{j=1}^n \int_{E^j} h_j(t, \tau_1, \dots, \tau_j) \prod_{r=1}^j x(\tau_r) dv_\tau \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \int_{E^{i+j}} k_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) h_j(t, \tau_{i+1}, \dots, \tau_{i+j}) \prod_{r=1}^{i+j} x(\tau_r) dv_\tau = \\ &= \sum_{i=2}^N \int_{E^i} g_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i x(\tau_r) dv_\tau, \end{aligned}$$

где  $N \leq n + m$ , а ядра  $g_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i)$  определяются соотношениями

$$g_2(t, \tau_1, \tau_2) = k_1(t, \tau_1) h_1(t, \tau_2),$$

$$g_3(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) = k_1(t, \tau_1) h_2(t, \tau_2, \tau_3) + k_2(t, \tau_1, \tau_2) h_1(t, \tau_3)$$

и т. д. Соединим системы  $R_n$  и  $T_m$  последовательно (рис 2.2.4). Такое соединение соответствует композиции систем (см. § 1 этой главы). Имеем

$$\begin{aligned} y(t) &= (T_m * R_n) x(t) = \\ &= \sum_{i=1}^m \int_{E^i} k_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{l=1}^i \left[ \sum_{j=1}^n \int_{E^j} h_j(\tau_l, \sigma_1, \dots, \sigma_j) \times \right. \\ &\times \left. \prod_{r=1}^j x(\sigma_r) dv_\sigma \right] dv_\tau = \sum_{i=1}^N \int_{E^i} g_i(t, \sigma_1, \dots, \sigma_i) \prod_{r=1}^i x(\sigma_r) dv_\sigma, \end{aligned}$$

где  $N \leq n \cdot m$ , а ядра Вольтерра таковы:

$$g_1(t, \sigma) = \int_{E^1} k_1(t, \tau) h_1(\tau, \sigma) d\tau, \quad (2.2.13)$$

$$\begin{aligned} g_2(t, \sigma_1, \sigma_2) &= \int_{E^2} k_2(t, \tau_1, \tau_2) \prod_{r=1}^2 h_1(\tau_r, \sigma_r) dv_\tau + \\ &+ \int_{E^1} k_1(t, \tau) h_2(\tau, \sigma_1, \sigma_2) d\tau, \quad (2.2.14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_3(t, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= \\ &= \int_{E^3} k_3(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) \prod_{r=1}^3 h_1(\tau_r, \sigma_r) dv_\tau + \\ &+ \int_{E^2} k_2(t, \tau_1, \tau_2) h_1(\tau_1, \sigma_1) h_2(\tau_2, \sigma_2, \sigma_3) dv_\tau + \\ &+ \int_{E^2} k_2(t, \tau_1, \tau_2) h_2(\tau_1, \sigma_1, \sigma_2) h_1(\tau_2, \sigma_3) dv_\tau + \\ &+ \int_{E^1} k_1(t, \tau) h_3(\tau, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) d\tau \quad (2.2.15) \end{aligned}$$

и т. д. Ядра результирующего ряда получаются несимметричными по отношению к переменным  $\sigma_i$ .

Перейдем теперь к рассмотрению функциональной системы с жесткой обратной связью, представленной на рис. 2.2.10. Для этой системы соотношения между сигналами  $x(t)$ ,  $e(t)$  и  $y(t)$  имеют вид

$$y(t) = R_n e(t), \quad (2.2.16)$$

$$e(t) = x(t) - y(t). \quad (2.2.17)$$

Пусть  $R_n$  — полином Вольтерра степени  $n$ , обладающий свойством сохранения нуля, с ядрами  $h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i)$ .

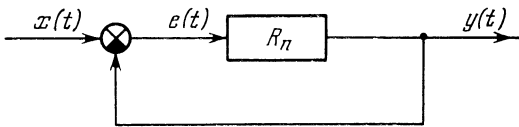


Рис. 2.2.10.

Исключая из (2.2.17) сигнал  $y(t)$ , с помощью уравнения замыкания (2.2.16) получим

$$e(t) = x(t) - R_n e(t). \quad (2.2.18)$$

Уравнение (2.2.18) является нелинейным интегральным уравнением Вольтерра второго рода. Его решение, как это нетрудно показать с помощью принципа сжимающих отображений\*), существует и единственно на интервале времени  $[t_0, T]$ .

Перепишем уравнение (2.2.18) в виде

$$x(t) = e(t) + R_n e(t). \quad (2.2.19)$$

Соотношение (2.2.19) можно представить в виде полинома Вольтерра  $T_n$  степени  $n$ , т. е.  $x(t) = T_n e(t)$ , у которого все ядра, кроме ядра первого порядка, совпадают с ядрами полинома  $R_n$ , а ядро первого порядка имеет вид

$$h_1^*(t, \tau) = \delta(t - \tau) + h_1(t, \tau). \quad (2.2.20)$$

Решение уравнения (2.2.19) будем искать в виде ряда

\*) Доказательство можно провести так же, как и в линейном случае (см. гл. I, § 1).



Вольтерра

$$e(t) = Wx(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E^i} k_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i x(\tau_r) d\nu_{\tau}. \quad (2.2.21)$$

Подставив (2.2.21) в соотношение

$$x(t) = T_n e(t),$$

получим

$$x(t) = (T_n * W)x(t). \quad (2.2.22)$$

Из (2.2.22) следует, что композиция систем  $T_n$  и  $W$  дает единичный оператор. Ядра последовательного соединения двух систем задаются формулами (2.2.13) — (2.2.15). Из соотношения (2.2.22) вытекает, что все ядра результирующего ряда тождественно равны нулю, кроме ядра первого порядка. Ядро первого порядка — это  $\delta$ -функция. Используя (2.2.13), получаем для ядра первого порядка такое уравнение:

$$\delta(t - \sigma) = \int_{E^1} h_1^*(t, \tau) k_1(\tau, \sigma) d\tau. \quad (2.2.23)$$

Подставив в это уравнение выражение  $h_1^*(t, \tau)$  из формулы (2.2.20), получим

$$\begin{aligned} \delta(t - \sigma) &= \int_{E^1} [\delta(t - \tau) + h_1(t, \tau)] k_1(\tau, \sigma) d\tau = \\ &= k_1(t, \sigma) + \int_{\sigma}^t h_1(t, \tau) k_1(\tau, \sigma) d\tau. \end{aligned}$$

Это равенство является линейным интегральным уравнением относительно  $k_1(t, \sigma)$ . Его решение имеет вид

$$k_1(t, \sigma) = \delta(t - \sigma) - \Gamma(t, \sigma),$$

где  $\Gamma(t, \sigma)$  — резольвента.

Запишем теперь уравнения для определения остальных ядер ряда (2.2.21). Из (2.2.14) и (2.2.15), приравнявая нулю ядра результирующего ряда, получаем

$$\begin{aligned} \int_{E^2} h_2(t, \tau_1, \tau_2) \prod_{r=1}^2 k_1(\tau_r, \sigma_r) d\nu_{\tau} + \\ + \int_{E^1} h_1^*(t, \tau) k_2(\tau, \sigma_1, \sigma_2) d\tau = 0, \quad (2.2.24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{E^3} h_3(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) \prod_{r=1}^3 k_1(\tau_r, \sigma_r) dv_\tau + \\
& + \int_{E^2} h_2(t, \tau_1, \tau_2) k_1(\tau_1, \sigma_1) k_2(\tau_2, \sigma_2, \sigma_3) dv_\tau + \\
& + \int_{E^2} h_2(t, \tau_1, \tau_2) k_2(\tau_1, \sigma_1, \sigma_2) k_1(\tau_2, \sigma_3) dv_\tau + \\
& + \int_{E^1} h_1^*(t, \tau) k_3(\tau, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) d\tau = 0. \quad (2.2.25)
\end{aligned}$$

Если подставить найденное значение  $k_1(t, \tau)$  в (2.2.24), то в этом уравнении останется одна неизвестная функция  $k_2(t, \tau_1, \tau_2)$ . Определим это ядро. Для этого умножим левую и правую часть уравнения (2.2.24) на  $k_1(\gamma, t)$  и проинтегрируем по  $t$ , имея в виду соотношение (2.2.23). Получим

$$\begin{aligned}
& \int_{E^1} \left[ \int_{E^3} h_2(t, \tau_1, \tau_2) \prod_{r=1}^2 k_1(\tau_r, \sigma_r) dv_\tau + \right. \\
& \left. + \int_{E^1} h_1^*(t, \tau) k_2(\tau, \sigma_1, \sigma_2) d\tau \right] k_1(\gamma, t) dt = \\
& = \int_{E^3} k_1(\gamma, t) h_2(t, \tau_1, \tau_2) \prod_{r=1}^2 k_1(\tau_r, \sigma_r) dv_\tau dt + \\
& + \int_{E^2} k_1(\gamma, t) h_1^*(t, \tau) k_2(\tau, \sigma_1, \sigma_2) d\tau dt = \\
& = \int_{E^3} k_1(\gamma, t) h_2(t, \tau_1, \tau_2) \prod_{r=1}^2 k_1(\tau_r, \sigma_r) dv_\tau dt + \\
& + \int_{E^1} \delta(\gamma - \tau) k_2(\tau, \sigma_1, \sigma_2) d\tau = 0.
\end{aligned}$$

И окончательно

$$\begin{aligned}
k_2(\gamma, \sigma_1, \sigma_2) = \\
= - \int_{E^1} k_1(\gamma, t) h_2(t, \tau_1, \tau_2) \prod_{r=1}^2 k_1(\tau_r, \sigma_r) dv_\tau dt. \quad (2.2.26)
\end{aligned}$$

Ядра высших порядков можно найти, используя ту же

процедуру. Так, ядро третьего порядка получается в виде

$$\begin{aligned}
 k_3(\gamma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = & \\
 = & - \int_{E^3} k_1(\gamma, t) h_2(t, \tau_1, \tau_2) k_1(\tau_1, \sigma_1) k_2(\tau_2, \sigma_2, \sigma_3) dv_\tau dt - \\
 & - \int_{E^3} k_1(\gamma, t) h_2(t, \tau_1, \tau_2) k_2(\tau_1, \sigma_1, \sigma_2) k_1(\tau_2, \sigma_3) dv_\tau dt - \\
 & - \int_{E^3} k_1(\gamma, t) h_2(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) \prod_{r=1}^3 k_1(\tau_r, \sigma_r) dv_\tau dt. \quad (2.2.27)
 \end{aligned}$$

Если система  $R_n$  — нечетная, т. е. соответствующий полином Вольтерра имеет ядра только нечетных порядков, то и вся система тоже будет нечетной. В этом случае для ядра третьего порядка получим такую формулу:

$$\begin{aligned}
 h_3(\gamma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = & \\
 = & - \int_{E^3} k_1(\gamma, t) h_3(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) \prod_{r=1}^3 k_1(\tau_r, \sigma_r) dv_\tau dt. \quad (2.2.28)
 \end{aligned}$$

Определим теперь ядра рассмотренной системы с обратной связью по выходному сигналу. Учитывая, что из (2.2.17) и (2.2.21)

$$\begin{aligned}
 y(t) - x(t) = e(t) = x(t) - W[x(t)] = & \\
 = x(t) - \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E^i} k_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i x(\tau_r) dv_\tau, &
 \end{aligned}$$

приходим к выводу, что первое ядро системы по выходному сигналу имеет вид

$$\delta(t-\tau) - k_1(t, \tau) = \Gamma(t, \tau),$$

т. е. оно равно резольвенте линейного уравнения (2.2.3), а все остальные ядра равны ядрам той же самой системы по ошибке, но взятым с противоположным знаком.

Таким образом, ядра системы с обратной связью и по ошибке, и по выходному сигналу всегда могут

быть найдены в явном виде, если найдена резольвента  $\Gamma(t, \tau)$ . Отметим, что ядро  $\Gamma(t, \tau)$  не обязательно искать в виде ряда Лиувилля — Неймана, для этого можно применять также численные методы.

### § 3. Решение дифференциальных уравнений с помощью рядов Вольтерра

Пусть отношение между входным сигналом системы  $x(t)$  и выходным сигналом  $y(t)$  задается нелинейным неоднородным дифференциальным уравнением [62]

$$Ly + F(y) = x \quad (2.3.1)$$

при начальных условиях  $y(t_0) = y_0$ ,  $y^{(1)}(t_0) = y_1$ ,  $\dots$ ,  $y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$ . В уравнении (2.3.1) обозначено:  $L$  — линейный дифференциальный оператор порядка  $n$ :

$L = \sum_{i=0}^n a_i(t) \frac{d^i}{dt^i}$ ;  $F$  — полином от функции  $y(t)$  и ее производных вплоть до  $(n-1)$ -го порядка:

$$F = \sum_{i=2}^N c_i(t) \left( \sum_{j=0}^{n-1} p_j(t) \frac{d^j}{dt^j} \right)^i,$$

линейные члены в  $F$  не входят \*) и  $F(0, \dots, 0) \equiv 0$ ; воздействие  $x(t)$  поступает в момент  $t_0$ , т. е.  $x(t) \equiv 0$  для всех  $t < t_0$ . Поскольку функция  $F$  — полином и обладает свойством сохранения нуля, то она удовлетворяет условиям Липшица в некоторой окрестности начальных условий для  $t \in [t_0, T]$ . Используя принцип сжимающих отображений, можно показать [17], что на интервале  $[t_0, T]$  существует единственное решение уравнения (2.3.1) для заданных начальных условий, и это решение может быть найдено методом последовательных приближений. Таким образом, для фиксированных начальных условий отношение между  $x$  и  $y$ , задаваемое уравнением (2.3.1), функционально и ему можно сопоставить функцию, устанавливающую явную связь между входным сигналом, начальными условиями и выходным сигналом. Задача заключается в определении такой функции.

---

\*) Такое предположение не снижает общности рассмотрения, поскольку если для решаемого дифференциального уравнения в  $F$  имеются линейные члены, то их всегда можно включить в оператор  $L$ .

Рассмотрим сначала случай нулевых начальных условий, т. е. пусть

$$y(t_0) = 0, y^{(1)}(t_0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = 0.$$

Перейдем от (2.3.1) к эквивалентному ему интегральному уравнению. Обозначив через  $h(t, \tau)$  весовую функцию уравнения

$$Ly = x \quad (2.3.2)$$

и учитывая, что в (2.3.1)  $x(t) = 0$  для  $t < t_0$ , получим

$$y(t) = \int_{E^1} h(t, \tau) x(\tau) d\tau - \int_{E^1} h(t, \tau) F[y(\tau)] d\tau.$$

Это интегральное уравнение можно решить методом итераций. Примем за первое приближение решения  $y(t)$  функцию

$$y_1(t) = \int_{E^1} h(t, \tau) x(\tau) d\tau,$$

которая является решением при нулевых начальных условиях уравнения (2.3.2). Остальные приближения определим рекуррентной формулой

$$y_i(t) = y_1(t) - \int_{E^1} h(t, \tau) F[y_{i-1}(\tau)] d\tau, \quad i=2, 3, \dots \quad (2.3.3)$$

Имея в виду замечание на стр. 53, оператор дифференцирования  $y^{(n)}(t)$  можно записать так:

$$y^{(n)}(t) = \int_{E^1} \delta^{(n)}(t - \tau) y(\tau) d\tau,$$

где  $\delta^{(n)}(t - \tau)$  — производная  $\delta$ -функции порядка  $n$  [69]. Поэтому безынерционную систему  $F$  всегда можно записать в виде полинома Вольтерра, и второй член в формуле (2.3.3) может рассматриваться как последовательное соединение полиномиальной системы  $F$  и линейной системы с весовой функцией  $h(t, \tau)$ . Отсюда следует, что для любого  $i$  выражение (2.3.3) может быть преобразовано в полином Вольтерра от входного сигнала  $x(t)$ . Устремив  $i$  к бесконечности, получим ряд Вольтерра, яв-

ляющийся для  $t \in [t_0, T]$  решением уравнения (2.3.1) при нулевых начальных условиях, а именно:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E^i} h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i x(\tau_r) d\nu_{\tau_r}, \quad t \in [t_0, T], \quad (2.3.4)$$

где обозначено  $h_i(t, \tau) = h(t, \tau)$ . Поясним итерационный способ определения ядер Вольтерра на примере нелинейного дифференциального уравнения

$$Ly + y^2 = x \quad (2.3.5)$$

при нулевых начальных условиях. Решая (2.3.5) по схеме (2.3.3), получаем

$$\left. \begin{aligned} y_1(t) &= \int_{E^1} h(t, \tau) x(\tau) d\tau, \\ y_2(t) &= y_1(t) - \int_{E^1} h(t, \tau) y_1^2(\tau) d\tau, \\ y_3(t) &= \int_{E^1} h(t, \tau) x(\tau) d\tau - \int_{E^1} h(t, \tau) (y_1(\tau) - \\ &\quad - \int_{E^1} h(\tau, \sigma) y_1^2(\sigma) d\sigma)^2 d\tau, \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.3.6)$$

Ядро Вольтерра первого порядка определяется первым уравнением системы (2.3.6). Оно равно  $h(t, \tau)$ , т. е. весовой функции линейного оператора  $L$ . Из второго уравнения определим ядро второго порядка. Имеем

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \int_{E^1} h(t, \tau) x(\tau) d\tau - \int_{E^1} h(t, \tau) y_1^2(\tau) d\tau = \\ &= \int_{E^1} h(t, \tau) x(\tau) d\tau - \int_{E^1} h_2(t, \tau_1, \tau_2) \prod_{r=1}^2 x(\tau_r) d\nu_{\tau_r}, \end{aligned}$$

где положено

$$h_2(t, \tau_1, \tau_2) = \int_{E^1} h(t, \sigma) h(\sigma, \tau_1) h(\sigma, \tau_2) d\sigma. \quad (2.3.7)$$

Аналогично определяется ядро третьего порядка и т. д.

Пусть, в частности,  $Ly = \dot{y} + y$ . Тогда дифференциальное уравнение (2.3.5) примет такой вид:

$$\dot{y} + y + y^2 = x.$$

Для этого уравнения  $h(t, \tau) = \exp[-(t-\tau)]$ . Из (2.3.7) имеем

$$h_2(t - \tau_1, t - \tau_2) = \int_{E^1} \exp(\sigma - t) \exp(\tau_1 - \sigma) \exp(\tau_2 - \sigma) d\sigma.$$

Пусть сначала  $\tau_2 < \tau_1$ . Тогда, учитывая, что  $h_2(t - \tau_1, t - \tau_2) = 0$  для  $\min\{t - \tau_1, t - \tau_2\} < 0$  (условие причинности), получим

$$\begin{aligned} h_2(t - \tau_1, t - \tau_2) &= \\ &= \int_{\tau_1}^t \exp(\sigma - t) \exp(\tau_1 - \sigma) \exp(\tau_2 - \sigma) d\sigma = \\ &= \exp(\tau_2 + \tau_1 - t) \int_{\tau_1}^t \exp(-\sigma) d\sigma = \\ &= -\exp[-(t - \tau_1)] \exp[-(t - \tau_2)] + \exp[-(t - \tau_2)]. \end{aligned}$$

Если  $\tau_1 < \tau_2$ , то, произведя аналогичные выкладки, получаем

$$\begin{aligned} h_2(t - \tau_1, t - \tau_2) &= \\ &= -\exp[-(t - \tau_1)] \exp[-(t - \tau_2)] + \exp[-(t - \tau_1)]. \end{aligned}$$

Найдем теперь решение уравнения (2.3.1) при ненулевых начальных условиях. Это решение будем искать в виде [130].

$$y(t) = \tilde{y}_1(t) + y_H(t),$$

где  $\tilde{y}_1(t)$  — решение уравнения (2.3.2) с начальными условиями  $y_1(t_0) = y_0$ ;  $y_1^{(1)}(t_0) = y_1, \dots, y_1^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$ , а  $y_H(t)$  — решение нелинейного однородного уравнения

$$Ly_H(t) + F[\tilde{y}_1(t) + y_H(t)] = 0 \quad (2.3.8)$$

с начальными условиями  $y_H^{(i)}(t_0) = 0, i = 1, 2, \dots, n-1$ .

В уравнении (2.3.8)  $\tilde{y}_1(t)$  можно считать входным сигналом, а  $y_H(t)$  — выходным. Представим (2.3.8) в интегральной форме:

$$y_H(t) = \int_{E^1} h(t, \tau) F [\tilde{y}_1(\tau) + y_H(\tau)] d\tau. \quad (2.3.9)$$

Уравнение (2.3.9) можно решить методом итераций:

$$y_{H_i}(t) = - \int_{E^1} h(t, \tau) F [\tilde{y}_1(\tau) + y_{H_{i-1}}(\tau)] d\tau, \\ i = 2, 3, \dots \quad (2.3.10)$$

В качестве нулевого приближения выбирается величина

$$y_{H_0}(t) = - \int_{E^1} h(t, \tau) F [\tilde{y}_1(\tau)] d\tau. \quad (2.3.11)$$

Построенная итерационная процедура определит последовательность функций  $y_{H_i}(t)$ , сходящуюся к решению  $y_H(t)$ . Сходимость следует из того, что  $F$  удовлетворяет условиям Липшица. Функция  $\tilde{y}_1(t)$  в формулах (2.3.9) — (2.3.11) является решением уравнения (2.3.2) и может быть записана в явном виде так:

$$\tilde{y}_1(t) = l(t) + y_1(t) = l(t) + \int_{E^1} h(t, \tau) x(\tau) d\tau,$$

где  $l(t)$  — решение однородного линейного уравнения  $Ly=0$  при начальных условиях, заданных для уравнения (2.3.1). Для каждого  $i$  соотношение (2.3.10) может быть преобразовано в полином Вольтерра. Учитывая, что в  $F$  не входят члены первого порядка, получаем при  $i$ , стремящемся к бесконечности, выражение вида

$$y_H(t) = \sum_{i=2}^{\infty} \int_{E^i} p_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i \tilde{y}_1(\tau_r) dv_{\tau}. \quad (2.3.12)$$

Решение исходного уравнения (2.3.1) при ненулевых



начальных условиях получается в виде

$$y(t) = \tilde{y}_1(t) + y_H(t) = l(t) + \int_{E^1} h(t, \tau) x(\tau) d\tau + \\ + \sum_{i=2}^{\infty} \int_{E^i} p_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i \tilde{y}_1(\tau_r) dv_{\tau}. \quad (2.3.13)$$

Ряд (2.3.13) можно записать так:

$$y(t) = \\ = l(t) + y_1(t) + \sum_{i=2}^{\infty} \int_{E^i} p_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i \{l(\tau_r) + y_1(\tau_r)\} dv_{\tau}.$$

Это наиболее простое соотношение для определения реакции нелинейной системы при ненулевых начальных условиях, описываемой уравнением (2.3.1). Его можно преобразовать в ряд Вольтерра от двух переменных  $l(t)$  и  $y_1(t)$ , т. е.

$$y(t) = l(t) + \sum_{i=2}^{\infty} \int_{E^i} p_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i l(\tau_r) dv_{\tau} + \\ + y_1(t) + \sum_{i=2}^{\infty} \int_{E^i} p_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i y_1(\tau_r) dv_{\tau} + \\ + \left[ 2 \int_{E^2} p_2(t, \tau_1, \tau_2) l(\tau_1) y_1(\tau_2) dv_{\tau} + \dots \right],$$

причем в слагаемое, находящееся в квадратных скобках, входят интегралы от произведения функций  $l(t)$  и  $y_1(t)$ . Найдем соотношения, связывающие ядра  $p_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i)$  в (2.3.12) и (2.3.13) с ядрами  $h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i)$  в (2.3.4). Если начальные условия — нулевые, то  $l(t) \equiv 0$  и (2.3.12) может быть записано так:

$$y_H(t) = \sum_{i=2}^{\infty} \int_{E^i} p_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i \left[ \int_{E^1} h(\tau_r, \sigma_r) x(\sigma_r) d\sigma_r \right] dv_{\tau}. \quad (2.3.14)$$

Преобразуя это соотношение, получаем

$$y_H(t) = \sum_{i=2}^{\infty} \int_{E^i} g_i(t, \sigma_1, \dots, \sigma_i) \prod_{r=1}^i x(\sigma_r) dv_{\sigma}, \quad (2.3.15)$$

где для  $i=2, 3, \dots$  обозначено

$$g_i(t, \sigma_1, \dots, \sigma_i) = \int_{E^i} p_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i h(\tau_r, \sigma_r) dv_{\tau}.$$

Таким образом, при нулевых начальных условиях из формулы (2.3.13) следует

$$\dot{y}(t) = \int_{E^1} h(t, \tau) x(\tau) d\tau + \sum_{i=2}^{\infty} \int_{E^i} g_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i x(\tau_r) dv_{\tau}. \quad (2.3.16)$$

Сравнивая (2.3.16) с (2.3.4) и учитывая, что решение уравнения (2.3.1) единственно, получаем

$$h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \equiv g_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i)$$

для всех  $i > 1$ . Отсюда находим систему уравнений, устанавливающую связь ядер  $h_i$  и  $p_i$ ,

$$h_i(t, \sigma_1, \dots, \sigma_i) = \int_{E^1} p_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i h(\tau_r, \sigma_r) dv_{\tau} \quad (2.3.17)$$

для всех  $i=2, 3, \dots$

Решение однородного уравнения

$$Ly + F(y) = 0$$

тоже может быть получено из формулы (2.3.16). Для этого достаточно положить  $\tilde{y}_1(t) = l(t)$ . Тогда

$$y(t) = l(t) + \sum_{i=2}^{\infty} \int_{E^i} p_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i l(\tau_r) dv_{\tau}.$$

Выше для построения ряда Вольтерра использовался метод итераций. Для дифференциального уравнения (2.3.1) ядра ряда Вольтерра можно определить и с помощью метода подстановки [144]. Обозначим через  $v_i[\cdot]$  регулярный однородный оператор

Вольтерра степени  $i$ . Тогда ряд Вольтерра можно записать в таком виде:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i[x(t)]. \quad (2.3.18)$$

Процедура определения ядер методом подстановки заключается в подстановке ряда (2.3.18) в уравнение (2.3.1) и приравнении функционалов одинаковых степеней по  $x(t)$ . Поясним эту процедуру, рассмотрев при нулевых начальных условиях уравнение

$$Ly + y^3 = x. \quad (2.3.19)$$

Решение уравнения (2.3.19) будем искать в виде ряда (2.3.18). Подставив (2.3.18) в (2.3.19), получаем

$$L \sum_{i=1}^{\infty} v_i[x] + \left( \sum_{i=1}^{\infty} v_i[x] \right)^3 = x.$$

Приравнявая функционалы одинаковых степеней по  $x(t)$ , получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} Lv_1[x] &= x, \\ Lv_3[x] &= -(v_1[x])^3, \\ \dots & \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.3.20)$$

Из первого уравнения находим ядро первого порядка, равное весовой функции  $h(t, \tau)$ ,

$$v_1[x(t)] = \int_{E^1} h(t, \tau) x(\tau) d\tau. \quad (2.3.21)$$

Из второго уравнения, подставив в него (2.3.21) вместо  $v_1[x]$ , находим ядро третьего порядка

$$\begin{aligned} v_3[x(t)] &= - \int_{E^1} h(t, \tau) \left( \int_{E^1} h(\tau, \sigma) x(\sigma) d\sigma \right)^3 d\tau = \\ &= - \int_{E^3} h_3(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) \prod_{r=1}^3 x(\tau_r) d\tau, \end{aligned}$$

где обозначено

$$h_3(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) = \int_{E^1} h(t, \sigma) h(\sigma, \tau_1) h(\sigma, \tau_2) h(\sigma, \tau_3) d\sigma.$$

Ядра высших порядков находятся аналогично.

Пусть нелинейное дифференциальное уравнение имеет вид

$$\dot{y} + y + y^3 = x$$

и начальные условия — нулевые. Для такого уравнения  $h(t, \tau) = \exp[-(t-\tau)]$ . Вычислим ядро третьего порядка.

Имеем

$$\begin{aligned} h_3(t - \tau_1, t - \tau_2, t - \tau_3) &= \\ &= \int_{\max\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}}^t \exp(\sigma - t) \exp(\tau_1 - \sigma) \exp(\tau_2 - \sigma) \exp(\tau_3 - \sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Пусть сначала  $\tau_3 < \tau_1$ ,  $\tau_2 < \tau_1$ . Поскольку ядро третьего порядка причинно, то

$$\begin{aligned} h_3(t - \tau_1, t - \tau_2, t - \tau_3) &= \\ &= \int_{\tau_1}^t \exp(\sigma - t) \exp(\tau_1 - \sigma) \exp(\tau_2 - \sigma) \exp(\tau_3 - \sigma) d\sigma = \\ &= \exp(\tau_3 + \tau_2 + \tau_1 - t) \int_{\tau_1}^t \exp(-2\sigma) d\sigma = \\ &= -\frac{1}{2} \exp(\tau_3 + \tau_2 + \tau_1 - t) [\exp(-2t) - \exp(-2\tau_1)] = \\ &= \frac{1}{2} \{ \exp[-(t + \tau_1 - \tau_2 - \tau_3)] - \\ &\quad - \exp[-(3t - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3)] \}. \end{aligned}$$

Далее, если  $\tau_3 < \tau_2$ ,  $\tau_1 < \tau_2$ , то

$$\begin{aligned} h_3(t - \tau_1, t - \tau_2, t - \tau_3) &= \\ &= \frac{1}{2} \{ \exp[-(t + \tau_2 - \tau_1 - \tau_3)] - \\ &\quad - \exp[-(3t - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3)] \}. \end{aligned}$$

Если же  $\tau_2 < \tau_3$ ,  $\tau_1 < \tau_3$ , то

$$\begin{aligned} h_3(t - \tau_1, t - \tau_2, t - \tau_3) &= \frac{1}{2} \{ \exp[-(t + \tau_3 - \tau_1 - \tau_2)] - \\ &\quad - \exp[-(3t - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3)] \}. \end{aligned}$$

Из принципа сжимающих отображений следует, что решение уравнения (2.3.1) единственно для заданных начальных условий на некотором интервале времени  $[t_0, T]$ . Таким образом, решения, полученные методами итераций и подстановок, совпадают на этом интервале. В обоих методах объем выкладок при вычислении ядер одинаков. Однако в некоторых случаях метод подстановки может оказаться удобнее, поскольку, как это следует из системы (2.3.20), уравнения для ядер всех порядков получаются в явном виде.

Итак, решение дифференциального уравнения (2.3.1), описывающего непрерывную систему, получено в виде ряда Вольтерра. Если система дискретна и задана разностным уравнением, то его решение строится в виде дискретного ряда Вольтерра. Для определения ядер дискретного ряда тоже можно использовать методы итераций и подстановки [98].

#### § 4. Исследование устойчивости систем по отношению к входным сигналам

Пусть имеется причинная функциональная система, заданная оператором

$$y(t) = Rx(t), \quad (2.4.1)$$

действующим из банахова пространства  $B(E^1)$  в себя и обладающим свойством сохранения нуля. Назовем эту систему *устойчивой в малом* в  $B(E^1)$ , если оператор  $R$  непрерывен в точке  $\theta(t) \in B(E^1)$ , т. е. если для любого числа  $\varepsilon > 0$  можно указать такое число  $\delta(\varepsilon) > 0$ , что из неравенства  $\|x(t)\|_B < \delta(\varepsilon)$  следует  $\|y(t)\|_B < \varepsilon$ .

Эту же систему назовем *устойчивой в большом* в области  $D(E^1) \in B(E^1)$ , содержащей точку  $\theta(t)$ , если оператор  $R$ , во-первых, ограничен в  $D(E^1)$ , т. е. если он отображает каждое ограниченное подмножество  $D(E^1)$  в ограниченное подмножество  $B(E^1)$ , и, во-вторых, непрерывен в  $D(E^1)$ , т. е. если для любого входного сигнала  $x(t) \in D(E^1)$  и любого числа  $\varepsilon > 0$  можно указать такое число  $\delta(\varepsilon, x) > 0$ , что из неравенства

$$\|x(t) - x_1(t)\|_B < \delta(\varepsilon, x), \quad x_1(t) \in D(E^1) \quad (2.4.2)$$

следует

$$\|Rx(t) - Rx_1(t)\|_B < \varepsilon. \quad (2.4.3)$$

Если  $D(E^1) = B(E^1)$ , то система называется *устойчивой в целом*.

Причинную систему  $R$  назовем *равномерно устойчивой* в области  $D(E^1) \subseteq B(E^1)$ , если оператор ограничен и равномерно непрерывен в этой области. Условие равномерной непрерывности означает, что для любого числа  $\varepsilon > 0$  можно указать такое число  $\delta(\varepsilon) > 0$ , что для любых двух сигналов  $x_1(t), x_2(t) \in D(E^1)$ , для которых

$$\|x_1(t) - x_2(t)\|_B < \delta(\varepsilon), \quad (2.4.4)$$

имеет место неравенство

$$\|Rx_1(t) - Rx_2(t)\|_B < \varepsilon. \quad (2.4.5)$$

Если  $D(E^1) = B(E^1)$ , то система называется *равномерно устойчивой в целом*. Очевидно, что если система равномерно устойчива в области  $D(E^1)$ , то она устойчива в целом в этой же области. Обратное утверждение в общем случае несправедливо.

Рассмотрим причинную линейную систему

$$y(t) = Rx(t) = \int_{E^1} h(t, \tau) x(\tau) d\tau. \quad (2.4.6)$$

Для линейного оператора (2.4.6), определенного во всех точках банахова пространства  $B(E^1)$ , непрерывность эквивалентна ограниченности и, кроме того, из непрерывности в точке  $\theta(t)$  следует непрерывность оператора во всем пространстве (см. § 2 гл. 1). Отсюда получаем такой результат.

Для того, чтобы система (2.4.6) была устойчивой в целом в  $C(E^1)$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$\|R\|_C = \sup_{t \in E^1} \int_{E^1} |h(t, \tau)| d\tau = C_1, \quad (2.4.7)$$

где  $C_1 < \infty$  — некоторая положительная величина \*).

---

\*) Простейшим примером неустойчивой в  $C(E^1)$  линейной системы является оператор дифференцирования

$$x'(t) = \int_{E^1} \delta^{(1)}(t - \tau) x(\tau) d\tau,$$

для которого условие (2.4.7) не выполняется. Отметим, что эта же система устойчива в пространстве  $C^\infty(E^1)$  функций, бесконечное число раз дифференцируемых в  $E^1$ .

Поскольку оператор (2.4.6) линеен и ограничен, то

$$\|Rx_1(t) - Rx_2(t)\|_C \leq \|R\|_C \|x_1(t) - x_2(t)\|_C, \quad (2.4.8)$$

откуда следует, что условие (2.4.7) является условием равномерной устойчивости линейной системы в целом в  $C(E^1)$ . Если существуют положительные числа  $B_1$  и  $\alpha_1$  такие, что для всех  $\tau, t \in E^1$

$$|h(t, \tau)| \leq B_1 \exp[-\alpha_1(t-\tau)], \quad \tau \leq t, \quad (2.4.9)$$

то

$$\begin{aligned} C_1 &= \sup_{t \in E^1} \int_{E^1} |h(t, \tau)| d\tau \leq \sup_{t \in E^1} \int_{E^1} B_1 \exp[-\alpha_1(t-\tau)] d\tau = \\ &= \frac{B_1}{\alpha_1}. \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

Поскольку оператор  $R$  ограничен, то имеет место неравенство

$$\|y'(t)\|_C \leq \|R\|_C \|x(t)\|_C \leq \frac{B_1}{\alpha_1} \|x'(t)\|_C, \quad (2.4.11)$$

которое позволяет оценить точную верхнюю грань отклонения выходного сигнала от нуля по заданной точной верхней грани отклонения от нуля входного сигнала. Таким образом, неравенство (2.4.11) дает для системы (2.4.6) решение задачи о накоплении возмущений [3], [16].

Если две устойчивые линейные системы  $R$  и  $R_1$  соединены параллельно, то это соответствует сумме операторов и

$$\|R+R_1\|_C \leq \|R\|_C + \|R_1\|_C. \quad (2.4.12)$$

Последовательное соединение этих же систем соответствует композиции операторов, причем

$$\|R * R_1\|_C \leq \|R\|_C \|R_1\|_C. \quad (2.4.13)$$

Из неравенств (2.4.12) и (2.4.13), а также из свойств суммы и композиции причинных систем (см. § 1 этой главы) следует, что линейная система, образованная с помощью параллельного и последовательного соединения линейных систем, устойчивых в  $C(E^1)$ , устойчива (причем равномерно) в целом в  $C(E^1)$ .

Рассмотрим теперь причинную однородную систему степени  $i$

$$y(t) = Rx(t) = \int_{E^i} h_i^r(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i x(\tau_r) dv_\tau. \quad (2.4.14)$$

Поскольку для однородных систем, определенных во всем банаховом пространстве  $B(E^1)$ , как и для линейных систем, свойства непрерывности и ограниченности эквивалентны, то необходимое и достаточное условие устойчивости в целом в  $C(E^1)$  для системы (2.4.14) запишется в виде

$$\|R\|_C = \sup_{t \in E^1} \int_{E^i} |h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i)| dv_\tau = C_i, \quad (2.4.15)$$

где  $C_i < \infty$  — положительное число. Условие (2.4.15), как это следует из свойств однородных функций, является также необходимым и достаточным условием равномерной устойчивости однородной системы степени  $i$  в любой замкнутой области  $D(E^1) \subset B(E^1)$ .

Если существуют положительные числа  $B_i, \alpha_1, \dots, \alpha_i$  такие, что для всех  $\tau_1, \dots, \tau_i, t \in E^1$

$$\begin{aligned} & |h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i)| \leq \\ & \leq B_i \exp \left[ - \sum_{r=1}^i \alpha_r (t - \tau_r) \right], \quad \tau_r \leq t, \quad r = 1, \dots, i, \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

то

$$\begin{aligned} C_i &= \sup_{t \in E^1} \int_{E^i} |h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i)| dv_\tau \leq \\ & \leq \sup_{t \in E^1} \int_{E^i} B_i \exp \left[ - \sum_{r=1}^i \alpha_r (t - \tau_r) \right] dv_\tau = \frac{B_i}{\alpha_1 \dots \alpha_i}. \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

Решение задачи о накоплении возмущений для однородной системы (2.4.14) дается неравенством

$$\|y(t)\|_C \leq \|R\|_C \|x(t)\|_C^i \leq \frac{B_i}{\alpha_1 \dots \alpha_i} \|x(t)\|_C^i. \quad (2.4.18)$$

Произведение и композиция двух устойчивых однородных (в частности, линейных) систем, как это нетрудно



показать, также являются устойчивыми однородными системами.

Причинная полиномиальная система

$$y(t) = Rx(t) = \sum_{i=1}^N \int_{E^i} h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i x(\tau_r) dv_\tau \quad (2.4.19)$$

может рассматриваться как сумма  $N$  однородных систем (2.4.14). Поэтому необходимое и достаточное условие ее устойчивости в целом в  $C(E^1)$  и, одновременно, равномерной устойчивости в любой замкнутой области  $D(E^1) \subset C(E^1)$  имеет такой вид:

$$\sup_{t \in E^1} \int_{E^i} |h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i)| dv_\tau = C_i < \infty, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.4.20)$$

Решение задачи о накоплении возмущений для системы (2.4.19) задается неравенством

$$\|y\|_C \leq \sum_{i=1}^N C_i \|x\|_C^i \leq \sum_{i=1}^N \frac{B_i}{\alpha_1 \dots \alpha_i} \|x(t)\|_C^i, \quad (2.4.21)$$

где  $B_i, \alpha_1, \dots, \alpha_i, i=1, \dots, N$ , определяются соотношением (2.4.16). Учитывая, что сумма, произведение и композиция двух причинных полиномиальных систем тоже являются причинными полиномиальными системами (см. § 1 этой главы), и используя неравенство (2.4.21), получаем следующее утверждение. Полиномиальная система, образованная с помощью перемножения, последовательного и параллельного соединений из устойчивых в целом в  $C(E^1)$  полиномиальных систем, всегда устойчива в целом в  $C(E^1)$  и равномерно устойчива в любой замкнутой области  $D(E^1) \subset C(E^1)$ .

Рассмотрим причинную аналитическую систему

$$y(t) = Rx(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E^i} h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i x(\tau_r) dv_\tau. \quad (2.4.22)$$

Если выполняются условия

$$\sup_{t \in E^1} \int_{E^i} |h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i)| dv_\tau = C_i < \infty, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (2.4.23)$$

и ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i \|x(t)\|_c^i \quad (2.4.24)$$

сходится для всех  $\|x(t)\|_c \leq r$  ( $r$  — радиус сходимости), то, как это следует из неравенства

$$\left\| \int_{E^i} h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i x(\tau_r) dv_\tau \right\|_c \leq C_i \|x(t)\|_c^i, \quad (2.4.25)$$

ряд (2.4.22) сходится равномерно в любом шаре радиуса  $r_1 < r$ . Отсюда вытекает, что оператор (2.4.22) равномерно непрерывен в этом шаре. Сходимость ряда (2.4.24) является, таким образом, достаточным условием равномерной устойчивости системы (2.4.22).

Ряд (2.4.24) является степенным, и его радиус сходимости  $r$  можно определить по формулам Коши — Адамара или Даламбера (см. § 2 гл. I)

$$r_C = \frac{1}{\lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{C_i}}, \quad r_D = \frac{1}{\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{C_{i+1}}{C_i}}.$$

Из неравенства (2.4.25) следует также, что для всех  $\|x(t)\|_c < r$

$$\|y(t)\|_c \leq \sum_{i=1}^{\infty} C_i \|x(t)\|_c^i \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_i}{\alpha_1 \dots \alpha_i} \|x(t)\|_c^i. \quad (2.4.26)$$

Это соотношение дает решение задачи о накоплении возмущений для аналитической системы (2.4.22).

Пусть теперь имеются две аналитические системы, устойчивые в большом при всех  $\|x(t)\|_c < r_1$  и  $\|x(t)\|_c < r_2$  соответственно. Используя неравенство (2.4.26) и свойства причинных систем (см. § 1 этой главы), получаем такой результат. Система, образованная с помощью параллельного соединения или перемножения двух устойчивых аналитических систем, устойчива в большом при всех  $\|x(t)\|_c < r$ , где  $r = \min\{r_1, r_2\}$ . Соединим эти две системы последовательно и обозначим через  $z(t)$  сигнал на выходе первой системы (т. е. на входе второй).

Для этого случая получаем следующее утверждение. Система, полученная последовательным соединением этих систем, устойчива в большом, если  $\|z\|_c < r_2$  и  $\|x\|_c < r_1$ . В частности, при  $r_2 = \infty$  отпадает первое условие, а при  $r_1 = \infty$  — второе.

Перейдем теперь к исследованию устойчивости функциональных систем с обратной связью. Рассмотрим систему с жесткой обратной связью, структурная схема

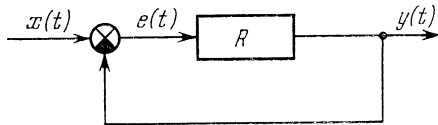


Рис. 2.4.1.

которой приведена на рис. 2.4.1. Эта система задается уравнениями

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= R e(t), \\ e(t) &= x(t) - y(t). \end{aligned} \right\} \quad (2.4.27)$$

Введем операторы, описывающие систему с обратной связью по сигналу ошибки  $e(t) = Wx(t)$  и по выходному сигналу  $y(t) = Gx(t)$ . Тогда от уравнений, связывающих сигналы, можно перейти к уравнениям, связывающим операторы. Имеем

$$\left. \begin{aligned} Gx(t) &= (R * W) x(t), \\ Wx(t) &= (I - R * W) x(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.4.28)$$

и, поскольку уравнения (2.4.28) должны удовлетворяться при любых  $x(t)$ , получаем

$$\left. \begin{aligned} G &= R * W, \\ W &= I - R * W. \end{aligned} \right\} \quad (2.4.29)$$

Запишем второе уравнение этой системы в виде

$$W + R * W = I.$$

Отсюда, используя левое дистрибутивное свойство

суммы и композиции, получаем уравнение

$$(I+R)*W=I,$$

решение которого имеет вид

$$W=(I+R)^{-1}, \quad (2.4.30)$$

где  $(I+R)^{-1}$  — обратный для оператора  $(I+R)$ . Из первого уравнения системы (2.4.29) находим

$$G=R*(I+R)^{-1}. \quad (2.4.31)$$

Таким образом, оператор  $G$  существует тогда и только тогда, когда существует оператор  $W$ . Если оператор  $R$  устойчив в смысле одного из данных выше определений, то из формулы (2.4.31) следует, что оператор  $G$  будет устойчив, если устойчив оператор  $(I+R)^{-1}$ . Следовательно, задача исследования устойчивости системы с обратной связью сводится к исследованию устойчивости оператора  $(I+R)^{-1}$ .

Пусть оператор  $R$  причинен и удовлетворяет в некоторой области  $D(E^1) \subseteq B(E^1)$  условиям Липшица

$$\|Re_1(t) - Re_2(t)\|_B < \alpha \|e_1(t) - e_2(t)\|_B \quad (2.4.32)$$

с константой  $\alpha < 1$ . Из принципа сжимающих отображений следует, что уравнение

$$(I+R)e(t) = x(t) \quad (2.4.33)$$

в этом случае имеет единственное решение в  $D(E^1)$ , т. е. обратный оператор  $(I+R)^{-1}$  существует в  $D(E^1)$ . Докажем, что в этом случае обратный оператор  $(I+R)^{-1}$ , к тому же для всех тех  $x(t) \in B(E^1)$ , для которых сигнал ошибки  $e(t) \in D(E^1)$ , удовлетворяет условию Липшица с константой  $\beta = \frac{1}{1-\alpha}$ . Используя второе уравнение системы (2.4.28), получаем

$$\begin{aligned} \|Wx_1(t) - Wx_2(t)\|_B &= \\ &= \|(I - R*W)x_1(t) - (I - R*W)x_2(t)\|_B \leq \\ &\leq \|x_1(t) - x_2(t)\|_B + \|(R*W)x_1(t) - (R*W)x_2(t)\|_B. \end{aligned} \quad (2.4.34)$$

Учитывая, что  $Wx(t) = e(t)$  и используя условие (2.4.32),

находим

$$\|Wx_1(t) - Wx_2(t)\|_B \leq \|x_1(t) - x_2(t)\|_B + \alpha \|Wx_1(t) - Wx_2(t)\|_B.$$

Поскольку  $\alpha < 1$ , то окончательно получаем [155]

$$\|Wx_1(t) - Wx_2(t)\|_B \leq \frac{1}{1-\alpha} \|x_1(t) - x_2(t)\|_B. \quad (2.4.35)$$

Нетрудно также показать, что обратный оператор  $(I+R)^{-1}$  является причинным, если причинен оператор  $R$ . В самом деле, из принципа сжимающих отображений следует, что оператор  $(I+R)^{-1}$  может быть найден для уравнения (2.4.33) с помощью метода последовательных приближений. Последовательные приближения задаются рекуррентной формулой

$$e_i(t) = R_i x(t) = (I - R * R_{i-1}) x(t),$$

из которой, ввиду свойств композиции систем, следует, что оператор  $R_i$  причинен, если причинен оператор  $R_{i-1}$ . Учитывая, что оператор  $R_1 = (I - R)$  является по предположению причинным, получаем по индукции, что все операторы  $R_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , причинны. Поскольку по условию

$$(I + R)^{-1} = \lim_{i \rightarrow \infty} R_i,$$

приходим к выводу, что причинность оператора  $(I+R)^{-1}$  следует из причинности оператора  $R$ . Учитывая, что если действующий в банаховом пространстве оператор  $R$  удовлетворяет условиям Липшица, то он равномерно непрерывен, окончательно приходим к такому выводу.

Если оператор  $R$  причинен и удовлетворяет в  $D(E^1) \subseteq B(E^1)$  условиям Липшица с константой  $\alpha < 1$ , то система с обратной связью, структурная схема которой приведена на рис. 2.4.1, будет равномерно устойчива в  $D(E^1)$ . Если оператор  $R$  линеен, то из условия (2.4.10) вытекает, что система с обратной связью будет равномерно устойчива в целом в  $C(E^1)$ , если

$$\|R\|_C \leq \frac{B_1}{\alpha_1} < 1^*, \quad (2.4.36)$$

\*) Отметим, что условие (2.4.36) является достаточным, но не необходимым условием устойчивости. Более точные оценки могут быть получены, если вместо нормы оператора использовать его спектральный радиус [145].

причем решение задачи о накоплении возмущений задается неравенством

$$\|e(t)\|_C \leq \beta \|x(t)\|_C, \quad \beta = \frac{1}{1 - \|R\|_C} \leq \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - B_1}. \quad (2.4.37)$$

Пусть теперь оператор  $R$  нелинеен. Если он дифференцируем в каждой точке  $B(E^1)$ , то в качестве константы Липшица можно выбрать величину [40]

$$\alpha = \sup_{e \in D} \|R'e(t)\|_B, \quad (2.4.38)$$

где  $R'$  — производная Фреше оператора  $R$ .

Если  $R$  — причинный полиномиальный оператор Вольтерра

$$Re(t) = \sum_{i=1}^N v_i e(t) = \sum_{i=1}^N \int_{E^i} h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i e(\tau_r) dv_{\tau}, \quad (2.4.39)$$

то уравнение (2.4.33) примет такой вид:

$$\left( I + \sum_{i=1}^N v_i \right) e(t) = x(t). \quad (2.4.40)$$

Производная Фреше оператора (2.4.39) определяется формулой (см. § 2, гл. I)

$$R'e(t) \xi(t) = \sum_{i=1}^N i \int_{E^i} h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^{i-1} e(\tau_r) \xi(\tau_i) dv_{\tau}. \quad (2.4.41)$$

Отсюда, применяя формулы (2.4.38), (2.4.15) и (2.4.21), получаем неравенство, определяющее область  $D(E^1)$ , в которой оператор (2.4.39) удовлетворяет условию Липшица с константой меньше единицы:

$$\begin{aligned} \alpha &= \sup_{e \in D} \|R'e(t)\|_C \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^N i C_i \|e(t)\|_C^{i-1} \leq \sum_{i=1}^N \frac{i B_i}{\alpha_1 \dots \alpha_i} \|e(t)\|_C^{i-1} < 1. \end{aligned} \quad (2.4.42)$$

Если уравнение (2.4.40) исследуется только на устойчивость в малом, то для этого достаточно показать, что в некоторой окрестности точки  $\theta(t)$  константа Липшица

$\alpha < 1$ . Полагая в неравенстве (2.4.42)  $e(t) = \theta(t)$ , получаем условие устойчивости системы в малом

$$C_1 \leq B_1/\alpha_1 < 1.$$

Сравнивая это условие с неравенством (2.4.36), приходим к выводу, что система (2.4.40) устойчива в малом и, соответственно, ее ряд Вольтерра (см. § 2 этой главы) сходится в некоторой окрестности точки  $x(t) = \theta(t)$ , если оператор  $v_1$  линейной системы

$$(I + v_1)e(t) = x(t) \quad (2.4.43)$$

удовлетворяет условию Липшица с  $\alpha < 1$ .

Определим теперь область (равномерной) устойчивости системы (2.4.40). Обозначив  $\|e(t)\|_c = \gamma$ , сопоставим неравенству (2.4.42) алгебраическое уравнение

$$\sum_{i=1}^N i C_i \gamma^{i-1} = 1. \quad (2.4.44)$$

Если  $C_1 < 1$ , то это уравнение имеет наименьший положительный корень  $\gamma$ , определяющий границу области  $D(E^1)$ , в которой  $\alpha \leq 1$ . Таким образом, уравнение (2.4.44) дает оценку для границы области устойчивости системы с обратной связью по сигналу ошибки. Найдем теперь оценку области устойчивости по входному сигналу. Для этого уравнение (2.4.40) запишем в таком виде:

$$e(t) = x(t) - \sum_{i=1}^N v_i e(t). \quad (2.4.45)$$

Это уравнение может быть решено методом последовательных приближений:

$$e_j(t) = x(t) - \sum_{i=1}^N v_i e_{j-1}(t). \quad (2.4.46)$$

Сопоставим последовательности функций  $e_j(t)$  последовательность положительных чисел  $\gamma_j$ , определяемых так:

$$\gamma_j = r + \sum_{i=1}^N C_i \gamma_{j-1}^i, \quad (2.4.47)$$

где  $r = \|x(t)\|_c$ . Для всех  $j=0, 1, \dots \|e_j\|_c \leq \gamma_j$  и поэтому последовательность  $e_j(t)$  сходится, если сходится последовательность  $\gamma_j$ .

Для того чтобы найти условия, при которых последовательность  $\gamma_j$  сходится, рассмотрим алгебраическое уравнение

$$\gamma = r + \sum_{i=1}^N C_i \gamma^i.$$

Из принципа сжимающих отображений следует, что последовательность (2.4.47) сходится к решению этого уравнения для всех  $\gamma < \tilde{\gamma}$ , где  $\tilde{\gamma}$  — наименьший положительный корень уравнения (2.4.44). Найдем из этого уравнения число  $r$ , соответствующее  $\tilde{\gamma}$ :

$$r = \tilde{\gamma} - \sum_{i=1}^N C_i \tilde{\gamma}^i, \quad (2.4.48)$$

которое и дает оценку величины входного сигнала  $x(t)$ , при котором оператор  $R$  преобразует шар в шар и является в нем оператором сжатия. Поэтому система с обратной связью (2.4.40) будет равномерно устойчивой в большом в области  $\|x(t)\|_c < r$ .

Решение задачи о накоплении возмущений для системы (2.4.48) можно получить, подставляя конкретное значение  $r = \|x(t)\|_c$  в уравнение (2.4.48) и решая его относительно  $\gamma$ .

Рассмотрим, например, систему второй степени

$$\left( I + \sum_{i=1}^2 v_i \right) e(t) = x(t). \quad (2.4.49)$$

Уравнение (2.4.44) в этом случае выглядит так:

$$C_1 \gamma + 2C_2 \gamma^2 = 1,$$

и

$$\tilde{\gamma} = \frac{1 - C_1}{2C_2}. \quad (2.4.50)$$

Из уравнения (2.4.48) находим оценку границы области устойчивости системы (2.4.49) по входному сигналу

$$r = \frac{(1 - C_1)^2}{4C_2}. \quad (2.4.51)$$



Рассмотрим теперь вопрос применения изложенного метода исследования устойчивости системы с обратной связью к системам, заданным дифференциальным уравнением. Пусть уравнение имеет вид

$$L(t)y(t) + \varphi[t, y(t)] = x(t),$$

где функция  $\varphi[t, y]$  является полиномом от  $y$  степени  $N$  и  $\varphi[t, 0] = 0$  для всех  $t \in [t_0, \infty)$ . При нулевых начальных условиях этому уравнению соответствует эквивалентное интегральное

$$y(t) = \int_{t_0}^t h(t, \tau) x(\tau) d\tau - \int_{t_0}^t h(t, \tau) \varphi[\tau, y(\tau)] d\tau. \quad (2.4.52)$$

Пусть оператор

$$T_x(t) = \int_{t_0}^t h(t, \tau) x(\tau) d\tau \quad (2.4.53)$$

устойчив в  $C[t_0, \infty)$ . Учитывая, что функция  $\varphi$  — полином, уравнение (2.4.52) можно записать так:

$$y(t) = \int_{t_0}^t h(t, \tau) x(\tau) d\tau - \int_{t_0}^t h(t, \tau) \sum_{i=1}^N k_i(\tau) y^i(\tau) d\tau. \quad (2.4.54)$$

Уравнение (2.4.54) преобразуем к такому виду:

$$y(t) + \int_{t_0}^t h(t, \tau) \sum_{i=1}^N k_i(\tau) y^i(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t h(t, \tau) x(\tau) d\tau. \quad (2.4.55)$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (2.4.33), приходим к выводу, что если положить

$$Ry(t) = \int_{t_0}^t h(t, \tau) \sum_{i=1}^N k_i(\tau) y^i(\tau) d\tau, \quad (2.4.56)$$

то для уравнения (2.4.55) можно будет применить рассмотренный выше метод исследования устойчивости. Производная Фреше оператора (2.4.56) такова:

$$(R'y(t)) \xi(t) = \int_{t_0}^t h(t, \tau) \left\{ \sum_{i=1}^N i k_i(\tau) y^{i-1}(\tau) \right\} \xi(\tau) d\tau. \quad (2.4.57)$$

Отсюда для системы (2.4.54) получаем достаточное условие для устойчивости в малом:

$$\sup_{t \in [t_0, \infty)} \int_{t_0}^t |h(t, \tau) k_1(\tau)| d\tau < 1. \quad (2.4.58)$$

Если функция  $\varphi$  в уравнении (2.4.52) не зависит от  $t$ , то коэффициенты  $k_i$  тоже не будут зависеть от  $t$ . В этом случае условие (2.4.58) примет вид

$$\sup_{t \in [t_0, \infty)} \int_{t_0}^t |h(t, \tau)| d\tau < \frac{1}{|k_1|}. \quad (2.4.59)$$

Используя неравенство (2.4.9), окончательно получим такое достаточное условие для устойчивости в малом системы (2.4.52):

$$B_1 |k_1| - \alpha_1 < 0.$$

Исследование устойчивости системы (2.4.52) в большом можно провести, применив ту же процедуру, что и для системы (2.4.40). Уравнение (2.4.44) при этом заменяется таким:

$$\sum_{i=1}^N i \left( \sup_{t \in [t_0, \infty)} \int_{t_0}^t |h(t, \tau) k_i(\tau)| d\tau \right) \gamma^{i-1} = 1, \quad (2.4.60)$$

которое для стационарного случая принимает вид

$$\sum_{i=1}^N i |k_i| C_1 \gamma^{i-1} = 1. \quad (2.4.61)$$

Оценка границы области устойчивости по входному сигналу  $x(t)$  легко получается из уравнения (2.4.54). В самом деле,

$$y(t) = \int_{t_0}^t h(t, \tau) x(\tau) d\tau - \sum_{i=1}^N \int_{t_0}^t h(t, \tau) k_i(\tau) y^i(\tau) d\tau. \quad (2.4.62)$$

Перейдя к алгебраическому уравнению, получим для оценки области устойчивости системы (2.4.52)

уравнение, соответствующее уравнению (2.4.48):

$$\tilde{\gamma} = \left( \sup_{t \in [t_0, \infty)} \int_{t_0}^t |h(t, \tau)| d\tau \right) r + \sum_{i=1}^N \tilde{\gamma}^i \left( \sup_{t \in [t_0, \infty)} \int_{t_0}^t |h(t, \tau) k_i(\tau)| d\tau \right), \quad (2.4.63)$$

где  $\tilde{\gamma}$  — наименьший положительный корень уравнения (2.4.60). Для стационарной нелинейности  $\varphi$  последнее уравнение может быть записано так:

$$\tilde{\gamma} = C_1 r + C_1 \sum_{i=1}^N |k_i| \tilde{\gamma}^i. \quad (2.4.64)$$

Пусть, например, уравнение системы таково:

$$y(t) = \int_{t_0}^t h(t, \tau) x(\tau) d\tau - \varepsilon \int_{t_0}^t h(t, \tau) y^3(\tau) d\tau. \quad (2.4.65)$$

В этом случае из (2.4.61) и (2.4.64) получаем такие оценки области устойчивости системы:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\gamma} &= \frac{1}{\sqrt{3|\varepsilon|C_1}}, \\ r &= \frac{2}{\sqrt{|\varepsilon|(3C_1)^3}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.4.66)$$

Рассмотренные в этом параграфе методы могут быть использованы и для исследования устойчивости функциональных систем на конечном интервале времени  $[t_0, T]$ . Назовем причинную функциональную систему  $y(t) = Rx(t)$ , обладающую свойством сохранения нуля, *устойчивой в  $B[t_0, T]$  на конечном интервале времени  $[t_0, T]$*  относительно чисел  $\varepsilon > 0$ ,  $K > 0$ , если оператор  $R$  ограничен и непрерывен в  $B[t_0, T]$  и, кроме того, для сигнала  $x(t) \in B[t_0, T]$ , удовлетворяющего условию

$$\|x(t)\|_{B[t_0, T]} < \varepsilon,$$

выходной сигнал удовлетворяет условию

$$\|y(t)\|_{B[t_0, T]} \leq K.$$

Для исследования системы на устойчивость на конечном интервале времени следует применять методы решения задачи о накоплении возмущений в совокупности с вышеизложенными методами исследования устойчивости, заменив при этом нормы на бесконечном интервале времени нормами на конечном интервале. Так, линейная (2.4.6) и однородная (2.4.14) степени  $i$  системы будут устойчивы в  $C[t_0, T]$  на конечном интервале времени  $[t_0, T]$  относительно чисел  $\varepsilon > 0, K > 0$  тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$C_1 = \sup_{t \in [t_0, T]} \int_{t_0}^t |h(t, \tau)| d\tau \leq \frac{K}{\varepsilon}$$

и

$$C_i = \sup_{t \in [t_0, T]} \int_{t_0}^t |h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i)| dv_i \leq \frac{K}{\varepsilon^i}$$

соответственно. Для того чтобы полиномиальная система (2.4.19) была устойчивой в том же самом смысле достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\sum_{i=1}^N C_i \varepsilon^i \leq K,$$

где

$$C_i = \sup_{t \in [t_0, T]} \int_{t_0}^t |h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i)| dv_\tau < \infty, \quad i = 1, \dots, N.$$

Достаточное условие устойчивости аналитической системы (2.4.22) выглядит так:

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i \varepsilon^i \leq K.$$

Достаточные условия устойчивости линейной системы с обратной связью (2.4.33) относительно сигнала ошибки  $e(t)$  на конечном интервале времени  $[t_0, T]$ , очевидно, получаются такими:

$$\|R\|_C = \sup_{t \in [t_0, T]} \int_{t_0}^t |h(t, \tau)| d\tau < 1,$$

$$\beta = \frac{1}{1 - \|R\|_C} \leq \frac{K}{\varepsilon}.$$

Исследование устойчивости нелинейной системы (2.4.40) и системы, заданной интегральным уравнением (2.4.52) на конечном интервале времени, можно провести, решая алгебраические уравнения (2.4.48), (2.4.63) и (2.4.64) соответственно. Отметим, что система может быть устойчивой на конечном интервале времени и неустойчивой в смысле общего определения. Возможен также и обратный случай.

Выше в этом параграфе рассматривались только функциональные системы. Изложенные методы применимы и для исследования устойчивости по входному сигналу нефункциональных систем, находящихся в нулевых начальных состояниях. Если нефункциональная система устойчива по входному сигналу в нулевом состоянии, то из этого, конечно, не следует, что ее реакция будет ограниченной и в ненулевом состоянии. Так, например, линейная система

$$y(t) = s(t_0) \exp(t - t_0) + \int_{t_0}^t \exp[-\alpha(t - \tau)] x(\tau) d\tau$$

устойчива в целом в  $S[t_0, \infty)$  в нулевом состоянии, но в ненулевом состоянии ее реакция становится неограниченной при  $t$ , стремящемся к  $\infty$ .

Поскольку в практических задачах начальное состояние системы может быть ненулевым, то данные выше определения устойчивости по входному воздействию для практических целей недостаточны и их необходимо обобщить. С этой целью рассмотрим причинную нефункциональную систему  $y(t) = f[s, x(t)]$ ,  $s \in S$ ,  $x(t)$ ,  $y(t) \in B[t_0, \infty)$ , обладающую свойством сохранения нуля.

Назовем эту систему *устойчивой в малом* в пространстве  $S \times B[t_0, \infty)$ , если функция  $f$  непрерывна в точке  $(\theta, \theta(t))$ . Если же функция  $f$  непрерывна и ограничена в области  $D \subset S \times B[t_0, \infty)$ , то система называется *устойчивой в большом* в этой области. Если  $D = S \times B[t_0, \infty)$ , то система называется *устойчивой в целом* в  $S \times B[t_0, \infty)$ . Будем называть систему *равномерно устойчивой* в области  $D \subset S \times B[t_0, \infty)$ , если функция ограничена и равномерно непрерывна в  $D$ , причем если  $D = S \times B[t_0, \infty)$ , то будем называть систему *равномерно устойчивой в целом* в  $S \times B[t_0, \infty)$ . Если в этих определениях зафик-

сировать  $s = \theta$ , то получим определения *устойчивости системы по входному сигналу*, а если положить  $x(t) = \theta$ , то получим определение *устойчивости по начальному состоянию*.

Рассуждая точно так же, как и при исследовании устойчивости по входному сигналу, приходим к выводу, что однородная система степени  $i$  (в частности, линейная)

$$y(t) = f[s, \theta(t)] \equiv F_s$$

устойчива в целом в  $C[t_0, \infty)$  при нулевом сигнале тогда и только тогда, когда

$$\|F\|_{s \rightarrow c} = C_i < \infty. \quad (2.4.67)$$

Необходимое и достаточное условие устойчивости в целом в  $C[t_0, \infty)$  полиномиальной системы степени  $N$

$$y(t) = \sum_{i=1}^N f_i[s, \theta(t)] = \sum_{i=1}^N F_i s \quad (2.4.68)$$

выглядит так:

$$\|F_i\|_{s \rightarrow c} = C_i < \infty, \quad (2.4.69)$$

где  $i = 1, \dots, N$ . Для устойчивости аналитической системы

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i[s, \theta(t)] = \sum_{i=1}^{\infty} F_i s \quad (2.4.70)$$

в некоторой области пространства  $C[t_0, \infty)$ , помимо условий (2.4.69), нужно потребовать, чтобы сходился ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i \|s\|_S^i. \quad (2.4.71)$$

Пусть теперь система  $y(t) = f[s, x(t)]$ ,  $s \in S$ ,  $x(t)$ ,  $y(t) \in B[t_0, \infty)$ , находящаяся в ненулевом состоянии и при ненулевом сигнале, обладает свойством разложения:

$$f[s, x(t)] = f[s, \theta(t)] + f[\theta, x(t)]. \quad (2.4.72)$$

Для устойчивости этой системы в смысле одного из трех данных выше определений необходимо и достаточно, чтобы системы

$$y_*(t) = R x(t) = f[\theta, x(t)] \quad (2.4.73)$$

и

$$y_s(t) = Fs = f[s, \theta(t)] \quad (2.4.74)$$

были устойчивы: первая — по входному сигналу, а вторая — по начальному состоянию.

Рассмотрим, наконец, задачу об устойчивости причинной системы с обратной связью, находящейся в ненулевом состоянии и при ненулевом сигнале (рис. 2.4.2). Имеем

$$\left. \begin{aligned} e(t) &= x(t) - y(t), \\ y(t) &= f[s, e(t)]. \end{aligned} \right\} \quad (2.4.75)$$

Пусть система  $f$  обладает свойством разложения. Тогда

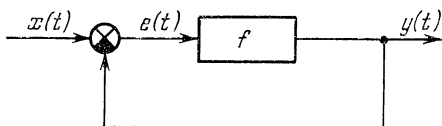


Рис. 2.4.2.

из уравнения (2.4.75) с учетом обозначений (2.4.73) и (2.4.74) получаем

$$e(t) = x(t) - Re(t) - y_s(t) \quad (2.4.76)$$

и

$$x(t) - y_s(t) = (I + R)e(t). \quad (2.4.77)$$

Пусть системы (2.4.73) и (2.4.74) устойчивы в целом. Если обозначить  $x(t) - y_s(t) = x_s(t)$ , то из (2.4.77) получим уравнение

$$x_s(t) = (I + R)e(t), \quad (2.4.78)$$

которое может быть исследовано на устойчивость таким же образом, как и уравнение (2.4.33). В самом деле, решение этого уравнения имеет вид

$$e(t) = (I + R)^{-1}x_s(t) = (I + R)^{-1}x(t) - (I + R)^{-1}y_s(t). \quad (2.4.79)$$

Подставляя сюда выражение (2.4.74), получаем

$$e(t) = (I + R)^{-1}x(t) - [(I + R)^{-1} * F]s, \quad (2.4.80)$$

откуда следует, что система с обратной связью (2.4.75) будет устойчива, если устойчив оператор  $(I+R)^{-1}$ .

Подчеркнем еще раз, что изложенный метод исследования устойчивости систем с обратной связью дает достаточные, но не необходимые условия устойчивости. При этом для систем как с положительными, так и с отрицательными обратными связями получаются одинаковые оценки границы устойчивости системы, что свидетельствует об известной грубости метода \*).

## § 5. Идентификация при детерминированных воздействиях

Задача идентификации заключается в построении математической модели физически существующего объекта на основе наблюдений за его реакциями на некоторые воздействия. Решение этой задачи проводится в два этапа [57]. На первом этапе определяется класс систем  $K$ , в котором ищется решение, а на втором находится система  $k \in K$ , которая является решением этой задачи в классе  $K$ . Поскольку идентифицируемый объект физически существует, то его модель обязательно является причинной системой. Будем предполагать в дальнейшем, что внутренняя структура идентифицируемого объекта неизвестна, и решение задачи идентификации ищется в некотором подклассе класса причинных функциональных систем.

Пусть воздействия на объект описываются детерминированными (т. е. неслучайными) функциями времени \*\*). Предположим, что решение задачи идентификации определяется в классе стационарных линейных систем. Общий вид стационарной линейной системы задается формулой

$$y(t) = \int_{E^1} h_1(\tau) x(t-\tau) d\tau.$$

Весовая функция этой системы может быть определена

\*) В работе [143] была сделана попытка преодолеть это ограничение введением эквивалентной  $\lambda$ -нормы.

\*\*\*) В § 1 гл. IV и в главе V задача идентификации решается при случайных воздействиях.



экспериментально, если в качестве входного сигнала выбрать  $\delta$ -функцию или ступенчатое воздействие амплитуды  $A$ . В первом случае имеем

$$\int_{E^1} h_1(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = h_1(t),$$

а во втором —

$$\int_{E^1} h_1(\tau) A \cdot \mathbf{1}(t - \tau) d\tau = A \int_0^t h_1(\tau) d\tau = g(t).$$

Дифференцируя по верхнему пределу, получим

$$h_1(t) = \frac{1}{A} \frac{dg(t)}{dt}.$$

Пусть теперь задан однородный регулярный оператор второй степени

$$v_2[x(t)] = \int_{E^2} h_2(\tau_1, \tau_2) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (2.5.1)$$

Поскольку ядро  $h_2(\tau_1, \tau_2)$  симметрично, то из определе-

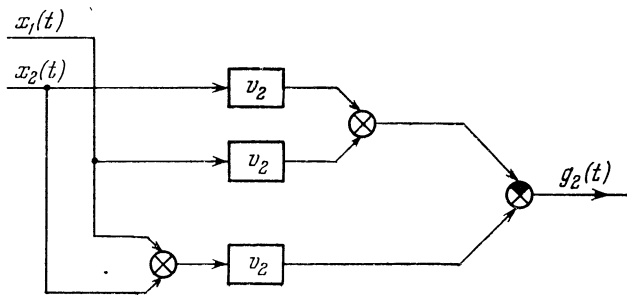


Рис. 2.5.1.

ния однородной функции второй степени следует, что для этого оператора справедливо тождество

$$2v_2[x_1(t), x_2(t)] \equiv \equiv v_2[x_1(t) + x_2(t)] - v_2[x_1(t)] - v_2[x_2(t)], \quad (2.5.2)$$

где через  $v_2[x_1(t), x_2(t)]$  обозначен билинейный

однородный оператор второй степени, т. е.

$$v_2[x_1(t), x_2(t)] = \int_{E^2} h_2(\tau_1, \tau_2) x_1(t - \tau_1) x_2(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

Система  $v_2[x_1(t), x_2(t)]$  может быть получена из системы  $v_2[x(t)]$  с помощью структурной схемы, приведенной на рис. 2.5.1 [138]. Пусть  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  — это  $\delta$ -функции:  $\delta(t - T_1)$  и  $\delta(t - T_2)$ . Тогда из (2.5.1) и (2.5.2) получим  $2v_2[\delta(t - T_1), \delta(t - T_2)] =$

$$\begin{aligned} &= 2 \int_{E^2} h_2(\tau_1, \tau_2) \delta(t - T_1 - \tau_1) \delta(t - T_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= 2h_2(t - T_1, t - T_2). \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

Обозначим  $\tau_1 = t - T_1$ ,  $\tau_2 = t - T_2$ . Без ограничения общности можно положить наименьшее из чисел  $T_1$  и  $T_2$  равным нулю. Пусть это будет  $T_1$ . Тогда имеем  $\tau_1 = t$ ,  $\tau_2 = t - T_2$ . Это — параметрическое уравнение прямой, проходящей под углом  $45^\circ$  в плоскости с координатами  $\tau_1$  и  $\tau_2$  и сдвинутой по оси  $\tau_2$  на  $-T_2$  (рис. 2.5.2). Ядро  $h_2$  будет измеряться на этой прямой. Вследствие условия причинности ядро будет отлично от нуля

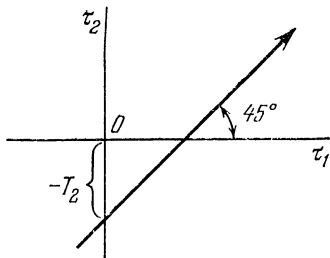


Рис. 2.5.2.

только в первом квадранте плоскости  $\tau_1, \tau_2$ . Меняя время между моментами подачи импульсов  $T_1$  и  $T_2$ , можно таким образом измерить ядро  $h_2(\tau_1, \tau_2)$  на требуемом участке первого квадранта плоскости.

Подадим теперь на вход системы, структурная схема которой приведена на рис. 2.5.1, ступенчатые воздействия с амплитудой  $A$ . Тогда

$$\begin{aligned} &2v_2[A \cdot \mathbf{1}(t - T_1), A \cdot \mathbf{1}(t - T_2)] = \\ &= 2A^2 \int_{E^2} h_2(\tau_1, \tau_2) \cdot \mathbf{1}(t - T_1 - \tau_1) \cdot \mathbf{1}(t - T_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= 2A^2 \int_0^{t-T_1} \int_0^{t-T_2} h_2(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Рассуждая как и выше, приходим к выводу, что измерения будут произведены по прямой в плоскости с координатами  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и проходящей под углом  $45^\circ$  (рис. 2.5.2). Здесь, как и при использовании  $\delta$ -функций, осуществить идентификацию с помощью одного эксперимента невозможно. Повторяя измерения при различных  $T_1$  и  $T_2$ , получим некоторую поверхность  $g_2(\tau_1, \tau_2)$  в трехмерном пространстве. Вследствие условия причинности функция  $g_2(\tau_1, \tau_2)$  будет отличаться от нуля только в первом квадранте. Для определения  $h_2(\tau_1, \tau_2)$  нужно продифференцировать  $g_2(\tau_1, \tau_2)$  по  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , т. е.

$$h_2(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{2A^2} \frac{\partial^2 g_2(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1 \partial \tau_2}.$$

Подчеркнем, что для получения ядра  $h_2(\tau_1, \tau_2)$  следует дифференцировать не вдоль прямой, по которой ведется измерение, а относительно координат  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ . Практически для этого необходимо сначала произвести все измерения в соответствии с формулой (2.5.4), а уже затем полученную функцию двух переменных дифференцировать сперва по одной переменной, а потом результат этого дифференцирования продифференцировать по второй переменной.

Теперь рассмотрим однородный регулярный оператор третьей степени

$$\begin{aligned} y(t) &= v_3[x(t)] = \\ &= \int_{E^3} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) x(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3. \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

Для системы второй степени метод измерения ядер основывался на использовании тождества

$$2x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - (x_1^2 + x_2^2).$$

Аналогичное тождество для системы третьего порядка будет иметь вид

$$\begin{aligned} 3! x_1 x_2 x_3 &= (x_1 + x_2 + x_3)^3 - [(x_1 + x_2)^3 + (x_2 + x_3)^3 + \\ &+ (x_3 + x_1)^3] + (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3). \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Используя это соотношение и учитывая, что ядро третьего порядка симметрично, получаем:

$$\begin{aligned} 3!v_3[x_1, x_2, x_3] = & \\ = v_3[x_1+x_2+x_3] - v_3[x_1+x_2] - v_3[x_2+x_3] - & \\ - v_3[x_3+x_1] + v_3[x_1] + v_3[x_2] + v_3[x_3]. & \quad (2.5.7) \end{aligned}$$

Блок-схема системы, позволяющей получить  $v_3[x_1, x_2, x_3]$  из  $v_3[x]$ , приведена на рис. 2.5.3. Подавая на вход этой

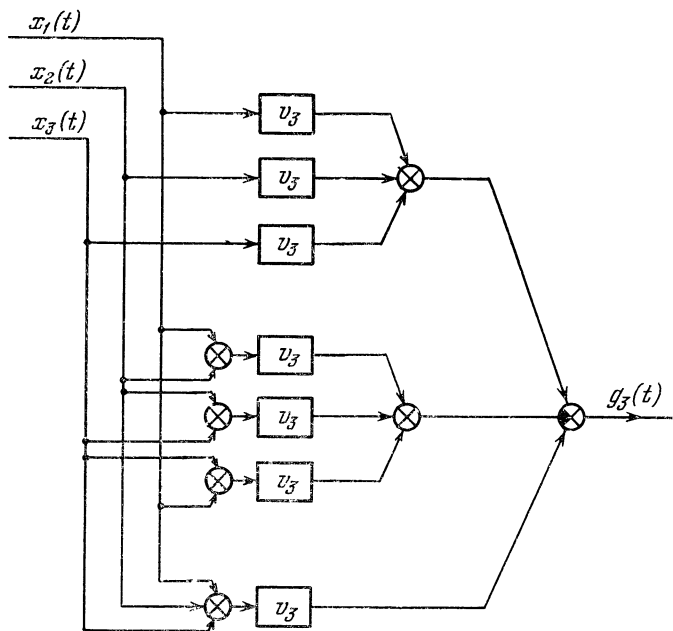


Рис. 2.5.3.

системы  $x_1(t) = \delta(t-T_1)$ ,  $x_2(t) = \delta(t-T_2)$ ,  $x_3(t) = \delta(t-T_3)$ , получим ядро третьего порядка

$$v_3[\delta(t-T_1), \delta(t-T_2), \delta(t-T_3)] = 3!h_3(t-T_1, t-T_2, t-T_3).$$

Подадим теперь на вход системы ступенчатые сигналы

с амплитудой  $A$ . Из (2.5.5) получим

$$\begin{aligned} v_3 [A \cdot \mathbf{1}(t - T_1), A \cdot \mathbf{1}(t - T_2), A \cdot \mathbf{1}(t - T_3)] = \\ = 3! A^3 \int_0^{t-T_1} \int_0^{t-T_2} \int_0^{t-T_3} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3. \end{aligned}$$

Аналогично предыдущему найдем

$$h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \frac{1}{3! A^3} \frac{\partial^3 g_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)}{\partial \tau_1 \partial \tau_2 \partial \tau_3}.$$

Для регулярного однородного оператора степени  $p$  воспользуемся следующим алгебраическим тождеством:

$$\begin{aligned} p! x_1 \dots x_p = (x_1 + \dots + x_p)^p - [(x_1 + \dots + x_{p-1})^p + \\ + \dots] + [(x_1 + \dots + x_{p-2})^p + \dots] + \dots + (-1)^{p-1} \times \\ \times (x_1^p + \dots + x_p^p). \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

Первый член в (2.5.8) — это сумма всех переменных  $x_i$ , возведенная в степень  $p$ . Во втором члене тождества, находящемся в квадратных скобках, каждая из сумм, возводимых в степень  $p$ , образована из  $p-1$  различных переменных  $x_i$ ,  $i=1, \dots, p$ . Всего таких сумм будет  $C_p^{p-1}$ . Каждая сумма третьего члена, возводимая в степень  $p$ , образована из  $p-2$  переменных  $x_i$ ,  $i=1, \dots, p$  с различными индексами  $i$ . Всего таких сумм будет  $C_p^{p-2} = \frac{p(p-1)}{2}$ .

Остальные члены (2.5.8) образованы так же, число их будет  $\sum_{n=1}^p C_p^n = 2^p - 1$ . Сформировав систему, исходя из соотношения (2.5.8), и подав на вход  $\delta$ -функции, получим для ядра порядка  $p$

$$v_p [\delta(t - T_1), \dots, \delta(t - T_p)] = p! h_p(t - T_1, \dots, t - T_p). \quad (2.5.9)$$

Для ступенчатых воздействий амплитуды  $A$  из (2.5.8) следует, что

$$h_p(\tau_1, \dots, \tau_p) = \frac{1}{p! A^p} \frac{\partial^p g_p(\tau_1, \dots, \tau_p)}{\partial \tau_1 \dots \partial \tau_p}.$$

Во всех предыдущих выкладках предполагалось, что система описывается однородным регулярным оператором.

Рассмотрим теперь методику определения ядер для полиномиальных неоднородных систем. Пусть сначала

$$y(t) = v_1[x(t)] + v_2[x(t)]. \quad (2.5.10)$$

Из принципа суперпозиции следует, что

$$v_1[x_1 + x_2] - v_1[x_1] - v_1[x_2] = 0,$$

а значит, система, блок-схема которой приведена на рис. 2.5.1, будет описываться билинейным оператором  $2v_2[x_1, x_2]$ . Поэтому метод измерения ядра второго порядка системы (2.5.10) остается таким же, как и для системы (2.5.1). Ядро первого порядка для системы (2.5.10) может быть подсчитано простым вычитанием после того, как ядро второго порядка определено на линии  $\tau_1 = \tau_2$ , поскольку реакция системы (2.5.10) на  $\delta$ -функцию имеет вид

$$y(t) = h_1(t) + h_2(t, t).$$

Теперь рассмотрим систему третьей степени

$$y(t) = \sum_{i=1}^3 v_i[x(t)]. \quad (2.5.11)$$

Учитывая, что для  $n=1, 2$

$$(x_1 + x_2 + x_3)^n - [(x_1 + x_2)^n + (x_2 + x_3)^n + (x_3 + x_1)^n] - \\ - [x_1^n + x_2^n + x_3^n] = 0,$$

приходим к выводу, что, используя схему на рис. 2.5.3, можно измерить ядро третьего порядка и для системы (2.5.11). Остальные ядра можно измерить так: вычитая из реакции всей системы часть, обусловленную ядром третьего порядка, получим систему второго порядка. Определение ядер системы второго порядка уже обсуждено.

Для полиномиальной системы произвольной степени имеет место формула [138]

$$(x_1 + \dots + x_p)^n - [(x_1 + \dots + x_{p-1})^n + \dots] + \dots + \\ + (-1)^{n-1} [x_1^n + \dots + x_p^n] = 0 \quad \text{для } n = 1, \dots, p-1.$$

Определение ядра порядка  $p-1$  можно провести, вычитая реакцию системы, представимой ядром порядка  $p$ , из выходного сигнала всей системы. Таким образом, все

ядра определяются последовательно, начиная с ядра высшего порядка. Измерение ядер низшего порядка можно упростить, используя схемы, приведенные на рис. 2.5.4. Первая схема удаляет из выходной реакции ту ее часть,

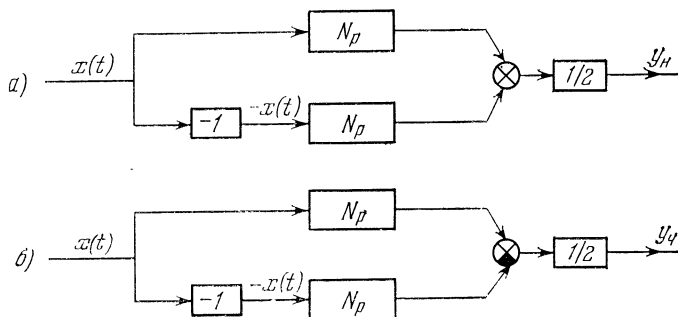


Рис. 2.5.4.

которая обусловлена ядрами нечетного порядка, а вторая — четными. Это следует из того, что

$$\begin{aligned}v_{2n}[x(t)] &= v_{2n}[-x(t)], \\v_{2n-1}[x(t)] &= -v_{2n-1}[-x(t)].\end{aligned}$$

Таким образом, для измерения ядра второго порядка в системе третьего порядка не обязательно сначала определять ядро третьего порядка. Можно, используя схему а) на рис. 2.5.4, удалить из выходной реакции составляющие, обусловленные ядрами нечетного порядка, и сразу измерить требуемое ядро.

При использовании формулы (2.5.8) не обязательно иметь  $2^p - 1$  систем. Все требуемое число измерений можно провести и на одной системе, причем в этом случае число измерений меньше, чем  $2^p - 1$ , поскольку некоторые измерения оказываются излишними.

Рассмотренный метод особенно удобен для нейрофизиологических исследований, поскольку в них воздействия на живой организм обычно имеют импульсный характер. Применение этого метода для построения модели нелинейной системы управления движением зрачка рассматривалось в работе [141].

Задачу идентификации можно решить также с помощью метода ортогональных моментов. Пусть на интервале  $[t_0, T]$  входной сигнал представлен в виде

$$x(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^M a_j \varphi_j(t),$$

где  $\varphi_j(t)$  — ортогональная на  $[t_0, T]$  система функций, а коэффициенты  $a_j$  коэффициенты ряда Фурье вычисляются по формулам

$$a_j = \int_{t_0}^T x(t) \varphi_j(t) \rho(t) dt, \quad (2.5.12)$$

где  $\rho(t)$  — весовая функция ортогональной системы. Подставляя (2.5.12) в (2.1.12), получаем

$$\begin{aligned} y(t) &\approx \sum_{i=1}^N \int_{E^i} h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i \left[ \sum_{j=0}^M a_j \varphi_j(\tau_r) \right] dv_\tau = \\ &= \sum_{i=1}^N \left[ \sum_{j_1=0}^M \dots \sum_{j_i=0}^M a_{j_1} \dots a_{j_i} \int_{E^i} h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \varphi_{j_1}(\tau_1) \dots \right. \\ &\left. \dots \varphi_{j_i}(\tau_i) dv_\tau \right] = \sum_{i=1}^N \left[ \sum_{j_1=0}^M \dots \sum_{j_i=0}^M a_{j_1} \dots a_{j_i} \mu_{j_1 \dots j_i}^{(i)}(t) \right]. \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

Величины

$$\mu_{j_1 \dots j_i}^{(i)}(t) = \int_{E^i} h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \varphi_{j_1}(\tau_1) \dots \varphi_{j_i}(\tau_i) dv_\tau \quad (2.5.14)$$

называются *ортогональными моментами ядер*. Для стационарных систем ортогональные моменты ядер определяются формулой

$$\mu_{j_1 \dots j_i}^{(i)}(t) = \int_{E^i} h_i(t - \tau_1, \dots, t - \tau_i) \varphi_{j_1}(\tau_1) \dots \varphi_{j_i}(\tau_i) \tau dv. \quad (2.5.15)$$



В качестве ортогональных систем функций можно использовать полиномы Лагерра, Лежандра, Чебышева, функции Уолша [10], Каутца [58] и гармонические воздействия. Отметим, что для приближения входного сигнала может быть также использована любая подходящая, не обязательно ортогональная система функций.

Идентификация с использованием ортогональных моментов ядер проводится следующим образом. На объект подаются воздействия  $\varphi_i(t)$ , и с помощью схем выделения однородных функций, рассмотренных выше, записываются ортогональные моменты  $\mu_{i_1 \dots i_l}^{(i)}(t)$ . По формуле (2.5.13) с помощью ортогональных моментов можно определить реакцию объекта на любой входной сигнал, представленный рядом Фурье. При этом вычисление кратных интегралов заменяется перемножением ортогональных моментов и коэффициентов Фурье входного сигнала. Ортогональные моменты  $\mu_{i_1 \dots i_l}^{(i)}(t)$  в свою очередь тоже можно разложить по подходящей системе функций на выбранном интервале времени  $T$ . В отличие от метода идентификации с помощью ступенчатых воздействий и  $\delta$ -функций, метод идентификации с помощью ортогональных моментов ядер применим как для стационарных, так и для нестационарных систем, причем объем работы в обоих случаях одинаков.

Выше предполагалось, что идентифицируемый объект точно описывается полиномом известной степени. Если степень полинома заранее не известна, то необходимо предварительно провести эксперимент для ее определения. Если объект стационарен, то на его вход подается синусоидальный сигнал частоты  $\omega$ , а затем производится спектральный анализ выходного сигнала. Степень полинома  $n$  определяется максимальной кратной частотой  $n\omega$ , присутствующей в выходном сигнале.

## § 6. Статистическое исследование нестационарных нелинейных систем

Введенное в § 1 этой главы определение системы можно перенести на системы со случайными сигналами. Функциональной системой со случайными сигналами назовем функциональное бинарное отношение  $R$ , определенное на декартовом произведении  $A(T) \times B(T^*)$  двух

нормированных пространств, на котором по взаимной функции распределения входных и выходных сигналов введена вероятностная мера (см. § 1 гл. IV). Мера, введенная на декартовом произведении  $A(T) \times B(T^*)$ , индуцирует меры в пространствах  $A(T)$  и  $B(T^*)$ . Очевидно, что основные положения теории детерминированных систем могут быть распространены и на системы со случайными сигналами.

Рассмотрим сначала задачу статистического анализа функциональных систем со случайными сигналами. Задача статистического анализа систем заключается в определении характеристик выходной реакции системы  $y(t)$  по известным характеристикам случайного входного сигнала  $x(t)$ . Пусть имеется полиномиальная система

$$y(t) = \sum_{i=1}^N \int_{E^i} h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i x(\tau_r) dv_{\tau}. \quad (2.6.1)$$

Предположим, что входной случайный процесс с вероятностью единица имеет непрерывные выборочные функции\*). Тогда выражение (2.6.1) существует как сумма интегралов Римана для почти всех выборочных функций.

Обозначим момент\*\*) порядка  $n$  процесса  $x(t)$  так:

$$m_x^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n) = \mathbf{M} \left\{ \prod_{r=1}^n x(\tau_r) \right\}, \quad (2.6.2)$$

где  $\mathbf{M}\{\cdot\}$  — оператор математического ожидания. Момент порядка  $n$  является симметрической функцией  $n$  аргументов  $\tau_1, \dots, \tau_n$ . Для математического ожидания  $x(t)$  будем использовать обозначение  $m_x(t) = \mathbf{M}\{x(t)\}$ .

Корреляционную функцию\*\*\*) процесса  $x(t)$  обозначим

$$K_x(t_1, t_2) = \mathbf{M}\{[x(t_1) - m_x(t_1)][x(t_2) - m_x(t_2)]\}.$$

\*) Условия, которым должен удовлетворять случайный процесс для того, чтобы почти все его выборочные функции были непрерывны, приведены в [39].

\*\*) Если математическое ожидание процесса  $x(t)$  равно нулю, то формула (2.6.2) определяет центральные моменты.

\*\*\*) Здесь имеется в виду ненормированная величина, называемая также ковариационной функцией [39].

Для полиномиальной системы (2.6.1) формула для математического ожидания сигнала  $y(t)$  получится в таком виде:

$$\begin{aligned} m_y(t) = \mathbf{M}\{y(t)\} &= \sum_{i=1}^N \int_{E^i} h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \mathbf{M}\left\{\prod_{r=1}^i x(\tau_r)\right\} dv_\tau = \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{E^i} h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) m_x^{(i)}(\tau_1, \dots, \tau_i) dv_\tau. \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

При выводе соотношения (2.6.3) было использовано свойство линейности оператора  $\mathbf{M}\{\cdot\}$  и предполагалось, что операции интегрирования и усреднения перестановочны [69].

Момент второго порядка для процесса  $y(t)$  определится так:

$$\begin{aligned} m_y^{(2)}(t_1, t_2) &= \mathbf{M}\{y(t_1) y(t_2)\} = \\ &= \mathbf{M}\left\{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{E^{i+j}} h_i(t_1, \tau_1, \dots, \tau_i) h_j(t_2, \tau_{i+1}, \dots, \tau_{i+j}) \times \right. \\ &\times \left. \prod_{r=1}^{i+j} x(\tau_r) dv_\tau\right\} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{E^{i+j}} h_i(t_1, \tau_1, \dots, \tau_i) h_i(t_2, \tau_{i+1}, \dots, \\ &\dots, \tau_{i+j}) \mathbf{M}\left\{\prod_{r=1}^{i+j} x(\tau_r)\right\} dv_\tau = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{E^{i+j}} h_i(t_1, \tau_1, \dots, \\ &\dots, \tau_i) h_i(t_2, \tau_{i+1}, \dots, \tau_{i+j}) m_x^{(i+j)}(\tau_1, \dots, \tau_{i+j}) dv_\tau. \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

В формуле (2.6.4), как и в (2.6.3), использовалось свойство линейности оператора  $\mathbf{M}\{\cdot\}$  и менялась последовательность операций интегрирования и усреднения. Вообще момент порядка  $p$  сигнала  $y(t)$  в (2.6.1) может быть записан в таком виде:

$$\begin{aligned} m_y^{(p)}(t_1, \dots, t_p) &= \mathbf{M}\{y(t_1) \dots y(t_p)\} = \\ &= \sum_{i_1=1}^N \dots \sum_{i_p=1}^N \int_{E^{\sum i_p}} h_{i_1}(t_1, \tau_1, \dots, \tau_{i_1}) \dots h_{i_p}(t_p, \tau_{\sum i_p-1+1}, \dots, \\ &\dots, \tau_{\sum i_p}) m_x^{(\sum i_p)}(\tau_1, \dots, \tau_{\sum i_p}) dv_\tau. \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

Из полученной формулы следует, что для того, чтобы выходной сигнал  $y(t)$  имел конечный момент порядка  $n$ , необходимо и достаточно, чтобы входной сигнал  $x(t)$  имел конечные моменты порядка вплоть до  $N \cdot n$  и система (2.6.1) была устойчива в пространстве непрерывных функций.

Рассмотрим теперь аналитическую систему

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E^i} h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i x(\tau_r) d\nu_{\tau}.$$

Если почти все выборочные функции входного случайного процесса непрерывны и с вероятностью единица принадлежат области сходимости этого ряда в пространстве непрерывных функций, то ряд Вольтерра сходится для почти всех выборочных функций и, значит, по нему можно вычислить моменты всех порядков выходного сигнала системы.

Вычисления по формулам (2.6.3)—(2.6.5) существенно упрощаются, если  $x(t)$  — нормальный случайный процесс с нулевым средним. В этом случае все моменты четного порядка процесса  $x(t)$  равны нулю:

$$m_x^{(i)}(\tau_1, \dots, \tau_i) = 0, \quad i = 1, 3, 5, \dots \quad (2.6.6)$$

Моменты четного порядка представимы через корреляционную функцию следующим образом:

$$m_x^{(i)}(\tau_1, \dots, \tau_i) = \sum \prod K_x(\tau_j, \tau_k), \quad i = 2, 4, 6, \dots \quad (2.6.7)$$

В (2.6.7) суммирование производится по всем разбиениям величин  $x(\tau_1), \dots, x(\tau_i)$  на всевозможные пары, а произведение вычисляется для всех пар в каждом разбиении. Общее число членов суммы равно  $\frac{i!}{2^{i/2}(i/2)!}$  [20].

Пусть, в частности, требуется вычислить статистические характеристики выходного сигнала полиномиальной системы второй степени

$$y(t) = v_1[x(t)] + v_2[x(t)], \quad (2.6.8)$$

при условии, что входной сигнал — это нормальный стационарный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием.

Из формулы (2.6.3) имеем

$$\begin{aligned} m_y(t) &= \int_{E^1} h_1(t, \tau) \mathbb{M}\{x(\tau)\} d\tau + \\ &+ \int_{E^2} h_2(t, \tau_1, \tau_2) \mathbb{M}\{x(\tau_1)x(\tau_2)\} dv_\tau = \\ &= \int_{E^2} h_2(t, \tau_1, \tau_2) K_x(\tau_1, \tau_2) dv_\tau. \end{aligned}$$

Корреляционная функция процесса  $y(t)$  получается в виде

$$\begin{aligned} K_y(t_1, t_2) &= \mathbb{M}\{|y(t_1) - m_y(t_1)| |y(t_2) - m_y(t_2)|\} = \\ &= \int_{E^2} h_1(t_1, \tau_1) h_1(t_2, \tau_2) K_x(\tau_1, \tau_2) dv_\tau + \\ &+ 2 \int_{E^4} h_2(t_1, \tau_1, \tau_2) h_2(t_2, \tau_3, \tau_4) K_x(\tau_1, \tau_3) K_x(\tau_2, \tau_4) dv_\tau. \end{aligned} \quad (2.6.9)$$

Дисперсия  $D_y(t)$ , согласно определению, может быть получена, если положить в последней формуле  $t_1 = t_2 = t$ , а именно:

$$\begin{aligned} D_y(t) &= \int_{E^2} h_1(t, \tau_1) h_1(t, \tau_2) K_x(\tau_1, \tau_2) dv_\tau + \\ &+ 2 \int_{E^4} h_2(t, \tau_1, \tau_2) h_2(t, \tau_3, \tau_4) K_x(\tau_1, \tau_3) K_x(\tau_2, \tau_4) dv_\tau. \end{aligned} \quad (2.6.10)$$

Пусть, в частности, входной процесс  $x(t)$  — это нормальный стационарный белый шум интенсивности  $C$  с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией  $K_x(\tau) = C\delta(\tau)$ , начинающий поступать в момент

$t_0=0$  \*). Тогда математическое ожидание процесса  $y(t)$  получится в виде

$$m_y(t) = C \int_0^t h_2(t, \tau, \tau) d\tau.$$

Корреляционная функция  $K_y(t_1, t_2)$  получится из (2.6.9)

$$\begin{aligned} K_y(t_1, t_2) = & C \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} h_1(t_1, \tau_1) h_1(t_2, \tau_2) \delta(\tau_1 - \tau_2) d\nu_{\tau} + \\ & + 2C^2 \int_0^{t_1} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \int_0^{t_2} h_2(t_1, \tau_1, \tau_2) h_2(t_2, \tau_3, \tau_4) \delta(\tau_1 - \tau_3) \delta(\tau_2 - \tau_4) d\nu_{\tau}. \end{aligned} \quad (2.6.11)$$

Вычислим составляющие суммы (2.6.11). Для первого слагаемого, учитывая, что ядро  $h(t, \tau)$  является причинным, получаем

$$\begin{aligned} C \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} h_1(t_1, \tau_1) h_1(t_2, \tau_2) \delta(\tau_1 - \tau_2) d\nu_{\tau} = \\ = \begin{cases} C \int_0^{t_1} h_1(t_1, \tau) h_1(t_2, \tau) d\tau, & t_1 < t_2, \\ C \int_0^{t_2} h_1(t_1, \tau) h_1(t_2, \tau) d\tau, & t_2 < t_1. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.6.12)$$

Формулы (2.6.12) являются обычными формулами теории линейных нестационарных систем [55]. Вычислим второе слагаемое в (2.6.11). Если  $t_1 < t_2$ , то этот член

---

\*) Выборочные функции процесса типа белый шум не являются непрерывными функциями [39]. Поэтому данное выше определение интеграла от случайного процесса в этом случае неприменимо. Интегралы от белого шума следует понимать как условную форму записи интеграла Пэли — Винера — Зигмунда (см. § 3 гл. I) для винеровского процесса  $\xi(t)$ , т. е.

$$\int_{E^i} h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i x(\tau_r) d\nu_{\tau} = \int_{E^i} h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i d\xi(\tau_r).$$

имеет вид

$$2C^2 \int_0^{t_1} \int_0^{t_1} \int_0^{t_1} h_2(t_1, \tau_1, \tau_2) h_2(t_2, \tau_3, \tau_4) \delta(\tau_1 - \tau_3) \delta(\tau_2 - \tau_4) dv_\tau = 2C^2 \int_0^{t_1} \int_0^{t_1} h_2(t_1, \tau_1, \tau_2) h_2(t_2, \tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

Если же  $t_2 < t_1$ , то

$$2C^2 \int_0^{t_2} \int_0^{t_2} h_2(t_1, \tau_1, \tau_2) h_2(t_2, \tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

Из (2.6.10) получим формулу для дисперсии процесса:

$$D_y(t) = C \int_0^t h_1^2(t, \tau) d\tau + 2C^2 \int_0^t \int_0^t h_2^2(t, \tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

Установившиеся значения этих характеристик на выходе системы можно получить, как это следует из результатов § 1 этой главы, если положить нижний предел равным  $-\infty$ , т. е. считая, что входное воздействие поступило в бесконечно удаленный в прошлом момент времени. Для стационарной системы математическое ожидание и дисперсия неустановившегося процесса принимают вид

$$m_y(t) = C \int_0^t h_2(\tau, \tau) d\tau,$$

$$D_y(t) = C \int_0^t h_1^2(\tau) d\tau + 2C^2 \int_0^t \int_0^t h_2^2(\tau_1, \tau_2) dv_\tau.$$

В практике часто встречаются «нечетные» системы, представленные полиномом Вольтерра вида

$$y(t) = v_1[x(t)] + v_3[x(t)]. \quad (2.6.13)$$

Если  $x(t)$  — процесс с нулевым средним и нулевым моментом третьего порядка, то  $m_y(t)$  будет равно нулю.

Для корреляционной функции из (2.6.8) получаем

$$\begin{aligned}
 K_y(t_1, t_2) &= I_{11}(t_1, t_2) + I_{13}(t_1, t_2) + I_{31}(t_1, t_2) + I_{33}(t_1, t_2) = \\
 &= \int_{E^2} h_1(t_1, \tau_1) h_1(t_2, \tau_2) K_x(\tau_1, \tau_2) dv_\tau + \\
 &+ \int_{E^4} h_1(t_1, \tau_1) h_3(t_2, \tau_2, \tau_3, \tau_4) m_x^{(4)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) dv_\tau + \\
 &+ \int_{E^4} h_1(t_2, \tau_1) h_3(t_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) m_x^{(4)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) dv_\tau + \\
 &+ \int_{E^6} h_3(t_1, \tau_1, \tau_2, \tau_3) h_3(t_2, \tau_4, \tau_5, \tau_6) m_x^{(6)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6) dv_\tau.
 \end{aligned} \tag{2.6.14}$$

Используем формулу (2.6.14), положив для простоты выкладок, что слагаемое  $I_{33}(t_1, t_2)$  мало и им можно пренебречь; получим

$$K_y(t_1, t_2) \approx I_{11}(t_1, t_2) + I_{13}(t_1, t_2) + I_{31}(t_1, t_2). \tag{2.6.15}$$

Пусть  $x(t)$  — нормальный процесс. Первое слагаемое  $I_{11}(t_1, t_2)$  было вычислено выше. Второе слагаемое в (2.6.15) получится в виде

$$\begin{aligned}
 I_{13}(t_1, t_2) &= \\
 &= 3 \int_{E^4} h_1(t_1, \tau_1) h_3(t_2, \tau_2, \tau_3, \tau_4) K_x(\tau_1, \tau_2) K_x(\tau_3, \tau_4) dv_\tau,
 \end{aligned} \tag{2.6.16}$$

а третье — в виде

$$\begin{aligned}
 I_{31}(t_1, t_2) &= \\
 &= 3 \int_{E^4} h_1(t_2, \tau_1) h_3(t_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) K_x(\tau_1, \tau_2) K_x(\tau_3, \tau_4) dv_\tau.
 \end{aligned} \tag{2.6.17}$$

Дисперсия  $D_y(t)$  при этом получится такой:

$$\begin{aligned}
 D_y(t) &\approx \int_{E^2} h_1(t, \tau_1) h_1(t, \tau_2) K_x(\tau_1, \tau_2) dv_\tau + \\
 &+ 6 \int_{E^4} h_1(t, \tau_1) h_3(t, \tau_2, \tau_3, \tau_4) K_x(\tau_1, \tau_2) K_x(\tau_3, \tau_4) dv_\tau.
 \end{aligned} \tag{2.6.18}$$

Пусть теперь процесс  $x(t)$  — это нормальный белый шум с нулевым средним интенсивности  $C$ , начинающий



поступать в момент  $t_0=0$ . Тогда из (2.6.16) получаем для  $I_{13}(t_1, t_2)$

$$\begin{aligned} I_{13}(t_1, t_2) &= \\ &= 3C^2 \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \int_0^{t_2} h_1(t_1, \tau_1) h_3(t_2, \tau_2, \tau_3, \tau_4) \delta(\tau_1 - \tau_2) \delta(\tau_3 - \tau_4) dv_\tau = \\ &= 3C^2 \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \int_0^{t_2} h_1(t_1, \tau_1) h_3(t_2, \tau_2, \tau_3, \tau_3) \delta(\tau_1 - \tau_2) dv_\tau. \end{aligned}$$

Если  $t_1 < t_2$ , то (2.6.16) примет вид

$$I_{13}(t_1, t_2) = 3C^2 \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} h_1(t_1, \tau_1) h_3(t_2, \tau_1, \tau_2, \tau_2) dv_\tau.$$

Если  $t_2 < t_1$ , то

$$I_{13}(t_1, t_2) = 3C^2 \int_0^{t_2} \int_0^{t_2} h_1(t_1, \tau_1) h_3(t_2, \tau_1, \tau_2, \tau_2) dv_\tau.$$

Для  $I_{31}(t_1, t_2)$  получаем аналогично при  $t_1 < t_2$  из (2.6.17)

$$I_{31}(t_1, t_2) = 3C^2 \int_0^{t_1} \int_0^{t_1} h_1(t_2, \tau_1) h_3(t_1, \tau_1, \tau_2, \tau_2) dv_\tau.$$

Если же  $t_2 < t_1$ , то

$$I_{31}(t_1, t_2) = 3C^2 \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} h_1(t_2, \tau_1) h_3(t_1, \tau_1, \tau_2, \tau_2) dv_\tau.$$

Положив в (2.6.14)  $t_1 = t_2 = t$ , получим приближенное выражение для дисперсии процесса

$$D_y(t) \approx C \int_0^t h_1^2(t, \tau) d\tau + 6C^2 \int_0^t \int_0^t h_1(t, \tau_1) h_3(t, \tau_1, \tau_2, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

Установившееся значение дисперсии можно получить, положив нижний предел интегрирования равным  $-\infty$ . Для стационарных систем неустановившееся значение дисперсии процесса на выходе получим в виде

$$D_y(t) \approx C \int_0^t h_1^2(\tau) d\tau + 6C^2 \int_0^t \int_0^t h(\tau_1) h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) d\tau_1 d\tau_2.$$

С помощью рассмотренной методики решаются и более сложные задачи статистического анализа нелинейных систем. Вычисление получившихся интегралов производится либо аналитически, либо с применением цифровых вычислительных машин. В последнем случае следует использовать квадратурные формулы, приведенные в [6].

Рассмотрим теперь определение реакции системы на случайный сигнал с помощью ортогональных моментов. Пусть входной процесс  $x(t)$ ,  $t \in T$ , является нормальным с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией  $K_x(t_1, t_2)$ . Используя метод канонических разложений [69], входной процесс представим в виде ряда

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \varphi_k(t), \quad (2.6.19)$$

где  $\varphi_k(t)$  — координатные функции, а  $\xi_k$  — некоррелированные случайные величины, причем  $M\{|\xi_k|^2\} = \lambda_k^*$ . При этом

$$K_x(t_1, t_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k(t_1) \varphi_k(t_2). \quad (2.6.20)$$

Рассмотрим теперь полиномиальную систему второй степени (2.6.8). Подставляя ряд (2.6.19) в соотношение (2.6.8), получаем

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{E^1} h_1(t, \tau) x(\tau) d\tau + \int_{E^2} h_2(t, \tau_1, \tau_2) x(\tau_1) x(\tau_2) d\nu_{\tau} = \\ &= \int_{E^1} h_1(t, \tau) \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \varphi_k(\tau) d\tau + \\ &+ \int_{E^2} h_2(t, \tau_1, \tau_2) \sum_{k_1=1}^{\infty} \xi_{k_1} \varphi_{k_1}(\tau_1) \sum_{k_2=1}^{\infty} \xi_{k_2} \varphi_{k_2}(\tau_2) d\nu_{\tau} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mu_k^{(1)}(t) + \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \xi_{k_1} \xi_{k_2} \mu_{k_1 k_2}^{(2)}(t), \quad (2.6.21) \end{aligned}$$

\*) В качестве функций  $\varphi_k(t)$  могут быть выбраны собственные функции корреляционной функции  $K_x(t_1, t_2)$ . В этом случае  $\lambda_k$  — собственные числа. Методы построения разложения (2.6.19) приведены в [69].

где  $\mu_k^{(1)}(t)$ ,  $\mu_{k_1, k_2}^{(2)}(t)$  — ортогональные моменты ядер (см. § 5 гл. II) Формула (2.6.21) определяет выходной сигнал полиномиальной системы (2.6.8) при случайном входном сигнале  $x(t)$ . Ортогональные моменты могут быть измерены методом, описанным в § 5.

Если полиномиальная система имеет порядок  $N$ , то выходной сигнал выражается через ортогональные моменты ее ядер по формуле

$$y(t) = \sum_{i=1}^N \left[ \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_i=1}^{\infty} a_{k_1} \dots a_{k_i} \mu_{k_1 \dots k_i}^{(i)}(t) \right], \quad (2.6.22)$$

аналогичной формуле (2.5.13) для детерминированных систем.

## § 7. Методы линеаризации и последовательных приближений

Методы линеаризации являются наиболее распространенными методами теории нелинейных систем. Класс линейных систем хорошо изучен и поэтому переход от нелинейной задачи к линейной существенно упрощает процесс решения. Наиболее часто применяются на практике методы гармонической [66], статистической [28] и совместной [61] линеаризации, метод статистически эквивалентной передаточной функции [71].

Для аналитической системы

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E^i} h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i x(\tau_r) dv_{\tau} \quad (2.7.1)$$

линеаризация заключается в отбрасывании всех однородных операторов степени выше первой. Линеаризованная система примет при этом вид

$$y_1(t) = v_1 x(t) = \int_{E^1} h_1(t, \tau) x(\tau) d\tau. \quad (2.7.2)$$

Ряд Вольтерра (2.7.1) является рядом Тейлора для операторов. Поэтому при достаточно малых входных сигналах  $x(t)$  сигнал  $y_1(t)$  может служить аппроксимацией сигнала  $y(t)$ , и значит, по линеаризованному уравнению

можно приближенно определить выходной сигнал исходной нелинейной системы. Точность полученного приближения может быть оценена по мажорирующему ряду (см. § 4 этой главы).

Если линеаризация не обеспечивает требуемой точности, то при определении сигнала системы (2.7.1) следует использовать полином Вольтерра

$$y(t) = \sum_{i=1}^N v_i x(t) = \sum_{i=1}^N \int_{E^i} h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i x(\tau_r) dv_{\tau}. \quad (2.7.3)$$

Кратные интегралы в полиноме (2.7.3) можно вычислить аналитически лишь в простейших случаях. В общем случае для этого следует использовать приближенные квадратурные формулы [6]. Если аналитическая система безынерционна, то ее разложение в ряд в окрестности точки  $\xi(t)$  задается такой формулой (см. § 1 этой главы):

$$y(t) = f[t, \xi(t) + h(t)] = f[t, \xi(t)] + f'_x[t, \xi(t)] h(t) + \\ + \frac{1}{2} f''_x[t, \xi(t)] h^2(t) + \dots + \frac{1}{n!} f_x^{(n)}[t, \xi(t)] h^{(n)}(t) + \dots, \quad (2.7.4)$$

где  $f^{(n)}$  — производная порядка  $n$ . Пусть входной сигнал — это выборочная функция случайного процесса

$$x(t) = m_x(t) + x_0(t),$$

где  $m_x(t) = \mathbf{M}\{x(t)\}$ ,  $\mathbf{M}\{x_0(t)\} = 0$ . Производя разложение нелинейности  $y = f[t, x]$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $m_x(t)$ , получим

$$y(t) = f[t, m_x(t) + x_0(t)] = \\ = f[t, m_x(t)] + f'_x[t, m_x(t)] x_0(t) + \frac{1}{2} f''_x[t, m_x(t)] x_0^2(t) + \dots \\ \dots + \frac{1}{n!} f_x^{(n)}[t, m_x(t)] x_0^n(t) + \dots$$

Сохраняя только первые два члена ряда, получим

$$y(t) \approx f[t, m_x(t)] + f'_x[t, m_x(t)] x_0(t),$$

что соответствует методу линеаризации, введенному В. С. Пугачевым [69].

Предположим теперь, что система задана дифференциальным уравнением. В этом случае для определения выходного сигнала системы можно, не переходя к ряду Вольтерра, использовать метод последовательных приближений. Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение вида

$$L(t)y(t) + \sum_{i=2}^N k_i(t)y^i(t) = x(t). \quad (2.7.5)$$

Этому уравнению при нулевых начальных условиях сопоставим эквивалентное ему интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$y(t) = z(t) - \int_{t_0}^t h(t, \tau) \sum_{i=2}^N k_i(\tau) y^i(\tau) d\tau. \quad (2.7.6)$$

где обозначено

$$z(t) = \int_{t_0}^t h(t, \tau) x(\tau) d\tau. \quad (2.7.7)$$

Итерационная процедура решения этого уравнения имеет такой вид:

$$\left. \begin{aligned} y_0(t) &= z(t), \\ y_j(t) &= y_0(t) - \int_{t_0}^t h(t, \tau) \sum_{i=2}^N k_i(\tau) y_{j-1}^i(\tau) d\tau, \\ & \quad j=1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.7.8)$$

Если для уравнения (2.7.6) выполняются условия принципа сжимающих отображений в  $C[t_0, T]$ , то последовательность (2.7.8) сходится к решению этого уравнения для всех  $x(t) \in C[t_0, T]^*$ . В простейших случаях итерации  $y_j(t)$  в формуле (2.7.8) могут быть вычислены аналитически. Для их вычисления можно также применять квадратурные формулы [6] и метод сопряженных систем. В последнем случае на каждом шаге итерационного процесса применяется сопряженная весовая функция

---

\*) Выполнение условий Липшица является достаточным, но не необходимым условием сходимости метода последовательных приближений.

$h^*(t, \tau) = h(\tau, t)$ , вычисленная для линейной системы, соответствующей уравнению (2.7.5):

$$L(t)y(t) = x(t)^*. \quad (2.7.9)$$

Пусть теперь дифференциальное уравнение имеет вид

$$L(t)y(t) + \varphi[y(t)] = x(t), \quad (2.7.10)$$

причем функция  $\varphi[y]$  одного действительного переменного удовлетворяет при всех  $y \in E^1$  условиям Липшица с константой  $K$ , т. е.

$$|\varphi[y_1] - \varphi[y_2]| < K|y_1 - y_2|. \quad (2.7.11)$$

Перейдем при нулевых начальных условиях от дифференциального уравнения (2.7.10) к эквивалентному ему интегральному

$$y(t) = \int_{t_0}^t h(t, \tau) x(\tau) d\tau - \int_{t_0}^t h(t, \tau) \varphi[y(\tau)] d\tau. \quad (2.7.12)$$

Используя условие (2.7.11), находим

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{t_0}^t h(t, \tau) \varphi[y_1(\tau)] d\tau - \int_{t_0}^t h(t, \tau) \varphi[y_2(\tau)] d\tau \right\|_C = \\ & = \left\| \int_{t_0}^t h(t, \tau) \{\varphi[y_1(\tau)] - \varphi[y_2(\tau)]\} d\tau \right\|_C \leq \\ & \leq K \sup_{t \in [t_0, \infty)} \int_{t_0}^t |h(t, \tau)| d\tau \|y_1 - y_2\|_C. \end{aligned}$$

Применяя теперь метод исследования устойчивости систем, изложенный в § 4 этой главы, приходим к выводу, что система (2.7.10) равномерно устойчива в целом в  $C[t_0, \infty)$ , если

$$\alpha = K \sup_{t \in [t_0, \infty)} \int_{t_0}^t |h(t, \tau)| d\tau < 1. \quad (2.7.13)$$

Условие (2.7.13) гарантирует также, что решение урав-

\*) Методы определения сопряженной весовой функции  $h(\tau, t)$  для уравнения (2.7.9) приведены в работах [7], [21], [81].

нения (2.7.10) может быть найдено методом последовательных приближений:

$$\left. \begin{aligned} y_0(t) &= z(t), \\ y_i(t) &= z(t) - \int_{t_0}^t h(t, \tau) \varphi [y_{i-1}(t)] d\tau, \quad i=1, 2, \dots, \end{aligned} \right\} \quad (2.7.14)$$

где

$$z(t) = \int_{t_0}^t h(t, \tau) x(\tau) d\tau. \quad (2.7.15)$$

Точность определения решения на  $i$ -м шаге метода последовательных приближений может быть оценена с помощью неравенства

$$\|y_i(t) - y(t)\|_C \leq \frac{\alpha^i}{1 - \alpha} \left\| y_0(t) - \int_{t_0}^t h(t, \tau) \varphi [y_0(\tau)] d\tau \right\|_C,$$

которое вытекает из принципа сжимающих отображений. Можно показать [40], что неравенство  $\|y_i(t) - y(t)\|_C < \delta$  будет заведомо выполнено, если выбрать

$$i > \frac{1}{\ln \alpha} \ln \frac{\delta(1 - \alpha)}{\left\| y_0(t) - \int_{t_0}^t h(t, \tau) \varphi [y_0(\tau)] d\tau \right\|_C}.$$

Скорость сходимости метода последовательных приближений можно увеличить за счет изменения начального приближения (2.7.15) на некоторое другое, более близкое к решению уравнения (2.7.10). Это можно осуществить применив *метод равномерной линеаризации*. Рассмотрим математические основы этого метода.

Согласно теореме Фреше всякий непрерывный оператор  $F$  может быть приближен на замкнутом множестве  $D \in C(T)$  с любой наперед заданной степенью точности регулярным полиномом  $P$ , т. е. для всех  $x(t), y(t) \in D(T)$  будет выполняться неравенство

$$\|y(t) - y^*(t)\|_C = \|F[x(t)] - P[x(t)]\|_C < \varepsilon. \quad (2.7.16)$$

Для рассматриваемого здесь круга проблем задача об аппроксимации формулируется как задача об отыскании полинома наилучшего приближения, а именно: сре-

ди всех регулярных полиномов заданной степени  $n$  найти полином  $P_n^*$  такой, что имеет место соотношение

$$\|F[x(t)] - P_n^*[x(t)]\|_C = \min_{P_n} \|F[x(t)] - P_n[x(t)]\|_C. \quad (2.7.17)$$

Если регулярный полином  $P_n^*$ , удовлетворяющий этому условию, существует, то он называется *полиномом наилучшего равномерного приближения*. Для безынерционных нелинейных систем этот полином можно построить таким образом. Аппроксимируем числовую функцию  $y=f[x]$  на отрезке  $[a, b]$  полиномом степени  $n$  по критерию Чебышева [6], т. е.

$$\Delta = \max_{x \in [a, b]} |f[x] - P_n^*[x]| = \min. \quad (2.7.18)$$

Пусть  $\max_{t \in T} x(t) = b$ ,  $\min_{t \in T} x(t) = a$ . Тогда для соответствующего оператора из (2.7.18) получаем

$$\|\Delta(t)\|_C = \max_{t \in T} |f[x(t)] - P_n^*[x(t)]| = \|y(t) - y^*(t)\|_C = \min,$$

т. е. полученный полином дает решение поставленной задачи. Покажем, что если все реализации случайного входного сигнала с вероятностью единица ограничены по модулю, то тогда также можно применять приближение функций по Чебышеву. В самом деле, если для всех  $t \in T$  случайный процесс почти наверное «укладывается» в интервал  $[a, b]$ , то при выполнении (2.7.18) будем иметь

$$\text{п. н. sup } |f[x] - P_n^*[x]| = \text{п. н. sup } |y - y^*| = \min, \quad (2.7.19)$$

где п. н. sup означает почти наверное верхнюю грань случайного сигнала. Это равенство означает, что при всех  $t \in T$   $y^*$  почти наверное близко к  $y$ . В практических задачах требуется определить не только почти наверное верхнюю грань выходного сигнала, но также и его дисперсию. Поскольку (2.7.19) малó, то будет малó и

$$\delta = \left\{ \int_a^b [f[x] - P_n^*[x]]^2 d\tilde{F}(x) \right\}^{1/2},$$



где  $F(x)$  — это функция распределения процесса  $x$ , т. е. аппроксимация по критерию (2.7.18) обеспечивает хорошее приближение по дисперсии.

Рассмотрим способ определения параметров аппроксимирующей функции  $f^*[x]$ , которая, вообще говоря, может быть произвольной, например, тригонометрическим многочленом. Здесь в качестве функции  $f^*[x]$  взят полином степени  $n$ , т. е.

$$f^*[x] = P_n^*[x] = \sum_{i=0}^n a_i x^i. \quad (2.7.20)$$

Если для (2.7.20) выполняется условие (2.7.18), то функция  $f^*[x]$  называется *многочленом наилучшего приближения*. Для каждой функции  $f[x] \in C[a, b]$  существует единственный многочлен  $f^*[x]$  наилучшего приближения степени  $n$ .

Условия, при которых некоторый многочлен  $f^*[x]$  будет многочленом наилучшего приближения, дает *теорема Чебышева* [6].

Для того чтобы многочлен  $f^*[x]$  степени  $n$  был многочленом наилучшего приближения для функции  $f[x] \in C[a, b]$ , необходимо и достаточно, чтобы в  $n+2$  точках отрезка  $[a, b]$  поочередно выполнялось соотношение

$$f[x_i] - f^*[x_i] = \pm E, \\ i = 1, \dots, n+2, \quad E = \sup_x |f[x] - f^*[x]|.$$

При линеаризации оператора  $y(t) = F[x(t)]$  приближение ведется полиномом первой степени

$$y = k_0 + k_1 x.$$

В этом случае коэффициенты многочлена наилучшего приближения можно довольно просто найти графически на основе применения теоремы Чебышева. Пусть, например, имеется нелинейная функция типа насыщения [63]

$$f[y] = \begin{cases} 1,5y, & |y| < 20, \\ 30, & |y| > 20. \end{cases}$$

График этой функции показан на рис. 2.7.1. Построим линейное приближение для этой функции на интервале  $[-a, a]$ . Из теоремы Чебышева следует, что функция  $z = k_1 y$  ( $k_0 = 0$ , поскольку функция  $f[y]$  — нечетная) будет полиномом наилучшего равномерного приближения первой степени, если разность  $\Delta = f[y] - k_1 y$  будет принимать равные по модулю, но противоположные по знаку значения в точках  $-a, -20, 20, a$ . Изменяя величину  $|a|$ , получаем график  $k_1 = \psi[-a, a]$  (рис. 2.7.2). Произведем теперь аппроксимацию той же функции на несимметричном интервале. Зафиксируем для простоты левый конец интервала аппроксимации и построим полином наилучшего

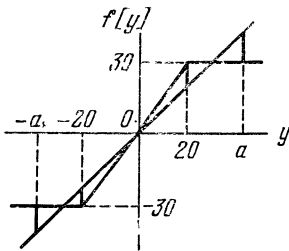


Рис. 2.7.1.

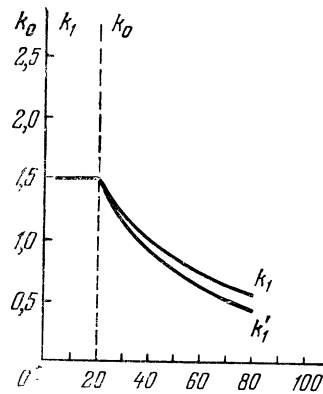


Рис. 2.7.2.

равномерного приближения для отрезка  $[0, a]$ . Производя графические построения, как и выше, получим графики  $k_0 = \psi_1[0, a]$ ,  $k'_1 = \psi_2[0, a]$  (рис. 2.7.2). Аналогично рассматриваются и более сложные случаи\*).

Применяя теорию равномерного приближения нелинейностей для расчета нелинейных инерционных систем, построим приближенный метод расчета — метод равномерной линеаризации [73, 75]. Линеаризованное урав-

\*) Вместо коэффициентов  $k_0$  и  $k_1$  полинома наилучшего равномерного приближения могут быть использованы соответствующие коэффициенты метода гармонической линеаризации. Доказательство этого факта приведено в § 8 гл. III.

нение, соответствующее уравнению (2.7.10), имеет вид

$$L(t)y_{\text{л}}(t) + k_1 y_{\text{л}}(t) = x(t) - k_0. \quad (2.7.21)$$

Его решение дается интегралом

$$y_{\text{л}}(t) = \int_{t_0}^t h_{\text{л}}(t, \tau) [x(\tau) - k_0] d\tau, \quad (2.7.22)$$

где  $h_{\text{л}}(t, \tau)$  — весовая функция, соответствующая линеаризованному уравнению (2.7.21). Задавая некоторые значения коэффициентов  $k_0$  и  $k_1$ , определяем сопряженную весовую функцию  $h_{\text{л}}^*(t, \tau)$  для уравнения (2.7.21). Далее, методом сопряженных систем вычисляем интеграл (2.7.22) и определяем максимальное и минимальное значение выходного сигнала  $y(t)$ , уточняем значения коэффициентов  $k_0$  и  $k_1$ , находим новое значение  $h_{\text{л}}^*(t, \tau)$  и т. д. до практического совпадения результатов двух последующих шагов.

Обозначив

$$\begin{aligned} \varepsilon[y] &= \varphi[y] - (k_0 + k_1 y), \\ L^*(t) &= L(t) + k_1, \end{aligned}$$

запишем уравнение (2.7.10) в таком виде:

$$L^*(t)y(t) + \varepsilon[y] = x(t) - k_0. \quad (2.7.23)$$

Решая уравнение (2.7.23) методом последовательных приближений, получаем такое рекуррентное соотношение:

$$\left. \begin{aligned} y_0(t) &= y_{\text{л}}(t), \\ y_i(t) &= y_{\text{л}}(t) - \int_{t_0}^t h(t, \tau) \varepsilon[y_{i-1}(\tau)] d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (2.7.24)$$

Ввиду эквивалентности уравнений (2.7.10) и (2.7.23) формула (2.7.24) дает решение уравнения (2.7.10), причем за счет удачного выбора первого приближения скорость сходимости последовательности (2.7.24) выше, чем скорость сходимости последовательности (2.7.14). Во многих практических задачах уже приближение, полученное «методом» равномерной линеаризации, дает удовлетворительное по точности решение уравнения.

Линеаризованное уравнение (2.7.21) позволяет также получить приближенное решение задачи о накоплении возмущений для нелинейной системы (2.7.10). Из формулы (2.7.22) получаем для симметричной нелинейности такую оценку для рассматриваемого интервала времени  $[t_0, T]$ :

$$\|y_{\text{л}}(t)\|_C \leq \|x(t)\|_C \sup_{t \in [t_0, T]} \int_{t_0}^t |h_{\text{л}}(t, \tau)| d\tau. \quad (2.7.25)$$

Весовая функция  $h_{\text{л}}(t, \tau)$ , входящая в неравенство (2.7.25), вычисляется с помощью метода последовательных приближений, а интегрирование производится методом сопряженных систем.

## МНОГОМЕРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА, ФУРЬЕ И МНОГОМЕРНОЕ Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Многомерные интегральные преобразования Лапласа, Фурье и многомерное Z-преобразование значительно упрощают решение многих задач теории непрерывных и дискретных нелинейных систем. Это упрощение наиболее существенно для стационарных систем и достигается за счет алгебраизации задач, т. е. за счет перехода от интегралов и сумм во временной области к произведениям в комплексной области. Строгое изложение теории многомерных интегральных преобразований требует привлечения теории аналитических функций многих переменных, поэтому для упрощения изложения доказательства некоторых теорем опущены.

### § 1. Элементы теории многомерных преобразований Лапласа и Фурье

Пусть имеется функция  $f(t)$  одного действительного переменного такая, что она:

1) определена и имеет (самое большее) разрывы первого рода \*) в конечном числе точек на  $E^1$ ;

2) равна нулю, если  $t < 0$ ;

3) растет на бесконечности не быстрее экспоненциальной функции, т. е. существуют числа  $M > 0$  и  $\sigma^0$  (показатель роста) такие, что для всех  $t \in E_+^1$ , где  $E_+^1 = [0, \infty)$ ,

$$|f(t)| \leq M \exp(\sigma^0 t).$$

Функцию  $f(t)$ , удовлетворяющую одновременно всем трем условиям, называют *оригиналом*.

*Изображением функции  $f(t)$  по Лапласу* называют функцию  $F(s)$  одного комплексного переменного  $s = \sigma +$

---

\*) Функция  $y = f(x)$ ,  $y, x \in E^1$ , имеет *разрыв первого рода* в точке  $x_0$ , если предел  $f(x_0 + 0)$  при стремлении  $x$  к  $x_0$  справа не равен пределу  $f(x_0 - 0)$  при стремлении  $x$  к  $x_0$  слева.

$+j\omega$ , где  $j$  — мнимая единица, определяемую интегралом

$$F(s) = \int_{E_+^1} \exp(-st) f(t) dt. \quad (3.1.1)$$

Согласно теореме существования [50] для всякого оригинала  $f(t)$  в полуплоскости, определяемой неравенством  $\text{Re } s > \sigma^0$ , существует изображение  $F(s)$ , которое является аналитической функцией переменного  $s$ . Теорема об обращении [50] утверждает, что если функция  $f(t)$  — оригинал, а  $F(s)$  — его изображение, то в точках непрерывности функции  $f(t)$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{Br_1} \exp(st) F(s) ds, \quad (3.1.2)$$

причем интеграл вычисляется по контуру Бромвича, т. е. вдоль любой прямой  $(c - j\infty, c + j\infty)$ , удовлетворяющей условию  $\text{Re } s = c > \sigma^0$  [1].

Преобразование Лапласа от функции нескольких действительных переменных (многомерное преобразование Лапласа) определяется аналогично одномерному преобразованию.

Пусть имеется функция  $f(t_1, \dots, t_n)$  от  $n$  действительных переменных такая, что она:

1) определена и имеет (самое большее) разрывы первого рода на конечном числе гладких\*) кривых в  $E^n$ ;

2) равна нулю, если хотя бы один из аргументов  $t_i$ ,  $i=1, \dots, n$ , меньше нуля;

3) растет на бесконечности не быстрее экспоненциальной функции, т. е. существует число  $M > 0$  и числа  $\{\sigma_i^0\}$ ,  $i=1, \dots, n$  (показатели роста), такие, что в

$$E_+^n = \underbrace{E_+^1 \times \dots \times E_+^1}_n |f(t_1, \dots, t_n)| \leq M \exp\left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^0 t_i\right).$$

---

\*) Пространственная прямая, заданная параметрическими уравнениями  $t_1 = \varphi_1(\xi), \dots, t_n = \varphi_n(\xi)$ , называется *гладкой*, если все функции  $\varphi_i$ ,  $i=1, \dots, n$ , дифференцируемы.

Функцию  $f(t_1, \dots, t_n)$  от  $n$  переменных, удовлетворяющую этим трем условиям, назовем *оригиналом*. Изображением функции  $f(t_1, \dots, t_n)$  по Лапласу назовем функцию  $F(s_1, \dots, s_n)$  от  $n$  комплексных переменных

$$s_i = \sigma_i + j\omega_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

вида \*)

$$F(s_1, \dots, s_n) = \int_{E_+^n} \exp\left(-\sum_{i=1}^n s_i t_i\right) f(t_1, \dots, t_n) dv_t, \quad (3.1.3)$$

где  $dv_t = \prod_{r=1}^n dt_r$ .

Сформулируем теорему существования изображения для многомерного преобразования Лапласа.

Если  $f(t_1, \dots, t_n)$  — оригинал, то в полупространстве, определяемом неравенствами  $\operatorname{Re} s_i > \sigma_i^0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , существует изображение  $F(s_1, \dots, s_n)$ , которое является аналитической функцией от  $n$  переменных. При этом  $n$ -кратный интеграл в формуле (3.1.3) может быть вычислен через  $n$  повторных интегралов, которые можно брать в любой последовательности.

Существование изображения  $F(s_1, \dots, s_n)$  в полупространстве, определяемом неравенствами  $\operatorname{Re} s_i = \sigma_i > \sigma_i^0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , следует из оценки

$$\left| \int_{E_+^n} \exp\left(-\sum_{i=1}^n s_i t_i\right) f(t_1, \dots, t_n) dv_t \right| \leqslant \int_{E_+^n} M \exp\left[-\sum_{i=1}^n (\sigma_i - \sigma_i^0) t_i\right] dv_t = M \frac{1}{\prod_{i=1}^n (\sigma_i - \sigma_i^0)}.$$

Продифференцируем теперь правую часть формулы (3.1.3) по одной из переменных, например по  $s_1$ , при

---

\*) Эта формула определяет одностороннее преобразование Лапласа. Двустороннее преобразование Лапласа по  $n$  переменным рассматривалось в работе [8].

фиксированных значениях остальных. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_{E_+^n} (-t_1) \exp\left(-\sum_{i=1}^n s_i t_i f(t_1, \dots, t_n)\right) dv_t \right| &\leq \\ &\leq \int_{E_+^n} M t_1 \exp\left[-\sum_{i=1}^n (\sigma_i - \sigma_i^0) t_i\right] dv_t = \\ &= \frac{1}{(\sigma_1 - \sigma_1^0)^2 \prod_{i=2}^n (\sigma_i - \sigma_i^0)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что интеграл, полученный дифференцированием формулы (3.1.3) по  $s_1$  при фиксированных значениях остальных переменных, сходится равномерно по этой переменной для  $\text{Re } s_1 \geq \sigma_1 > \sigma_1^0$ . Поэтому [50]  $F(s_1, \dots, s_n)$  является аналитической функцией от  $s_1$  при фиксированных значениях остальных переменных. Проводя аналогичные рассуждения для  $i=2, \dots, n$ , приходим к выводу, что  $F(s_1, \dots, s_n)$  является аналитической функцией по каждой переменной при фиксированных значениях остальных. Отсюда вытекает [17], [87], что  $F(s_1, \dots, s_n)$  является аналитической функцией от  $n$  переменных. Утверждение теоремы о вычислении  $n$ -кратного интеграла через повторные интегралы следует из первого условия, наложенного на оригинал.

Рассмотрим теперь пример применения формулы (3.1.3).

Если  $f(t_1, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n \mathbf{1}(t_i)$ , то

$$\begin{aligned} \int_{E_+^n} \exp\left(-\sum_{i=1}^n s_i t_i\right) \prod_{i=1}^n \mathbf{1}(t_i) dv_t &= \\ &= \prod_{i=1}^n \left\{ \int_{E_+^1} \exp(-s_i t_i) \mathbf{1}(t_i) dt_i \right\} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{s_i}. \end{aligned}$$

Функцию  $f(t_1, \dots, t_n)$ , не удовлетворяющую только второму условию, наложенному на оригинал, можно пре-



образовать в оригинал, умножая ее на  $\prod_{i=1}^n 1(t_i)$ . В дальнейшем, для простоты обозначений, произведение единичных функций будет опускаться, и вместо  $\left\{ f(t_1, \dots, t_n) \times \prod_{i=1}^n 1(t_i) \right\}$  будем писать просто  $f(t_1, \dots, t_n)$ . Пусть, например, нужно найти изображение для функции  $\prod_{i=1}^n (1(t_i) \exp(-\alpha_i t_i))$ . Это изображение в сокращенных обозначениях запишем так:

$$\int_{E_+^n} \exp\left(-\sum_{i=1}^n s_i t_i\right) \prod_{i=1}^n \exp(-\alpha_i t_i) dv_i = \\ = \prod_{i=1}^n \left\{ \int_{E_+^1} \exp[-(s_i + \alpha_i) t_i] dt_i \right\} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{s_i + \alpha_i}.$$

Теорема об обращении для многомерного преобразования Лапласа формулируется следующим образом (доказательство не приводится).

Если  $f(t_1, \dots, t_n)$  — оригинал, а  $F(s_1, \dots, s_n)$  — его изображение, то во всех точках непрерывности функции  $f(t_1, \dots, t_n)$  имеет место равенство

$$f(t_1, \dots, t_n) = \left(\frac{1}{2\pi j}\right)^n \int_{Br_n} \exp\left(\sum_{i=1}^n s_i t_i\right) F(s_1, \dots, s_n) dv_s, \quad (3.1.4)$$

где  $dv_s = \prod_{r=1}^n ds_r$ , а  $n$ -кратный интеграл вычисляется по  $n$ -мерному контуру Бромвича, т. е. вдоль прямых  $(c_i - j\infty, c_i + j\infty)$ ,  $i=1, \dots, n$ , удовлетворяющих условиям  $\text{Re } s_i = c_i > \sigma_i^0$ ,  $i=1, \dots, n$ , и  $n$ -кратный интеграл (3.1.4) сводится к  $n$ -повторным интегралам, которые берутся в любой последовательности.

В дальнейшем связь между оригиналом и изображением будем записывать так:

$$f(t_1, \dots, t_n) \stackrel{\text{def}}{=} F(s_1, \dots, s_n),$$

причем не будем придавать значения направленности знака.

Рассмотрим свойства преобразования Лапласа по  $n$  переменным, используемые в теории нелинейных систем. Отметим, прежде всего, два простых следствия из определения изображения по Лапласу и из формулы обращения.

1° Следствие из формулы преобразования Лапласа. Если для оригинала  $f(t_1, \dots, t_n)$  имеют место неравенства  $\sigma_i^0 < 0$ , т. е.  $f \in L_1(E_+^n)$ , то в формуле (3.1.3) можно положить  $s_i = 0, i = 1, \dots, n$ , и

$$F(0, \dots, 0) = \int_{E_+^n} f(t_1, \dots, t_n) dv_t. \quad (3.1.5)$$

Пусть, например,

$$f(t_1, \dots, t_n) \doteq F(s_1, \dots, s_n) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n s_i + \alpha\right) \prod_{i=1}^n (s_i + \beta_i)}.$$

Тогда по формуле (3.1.5) находим

$$\int_{E_+^n} f(t_1, \dots, t_n) dv_t = \frac{1}{\alpha \prod_{i=1}^n \beta_i}.$$

2° Следствие из формулы обращения. При тех же условиях, при которых рассматривалось следствие 1, положив в формуле обращения  $t_i = 0, i = 1, \dots, n$ , получаем

$$f(0, \dots, 0) = \left(\frac{1}{2\pi j}\right)^n \int_{Br_n} F(s_1, \dots, s_n) dv_s. \quad (3.1.6)$$

Приведенные два свойства многомерного преобразования Лапласа дуальны, т. е. одно из них справедливо для изображений, а другое — аналогичное — для оригиналов. Все свойства и теоремы многомерного преобразования Лапласа, за исключением свойств 3 и 4, являются дуальными в этом смысле. При формулировке этих свойств будет всегда предполагаться, что  $f(t_1, \dots, t_n)$  — оригинал, а  $F(s_1, \dots, s_n)$  — его изображение.

3° Свойство линейности. Для любых (комплексных) чисел  $a$  и  $b$  имеет место соотношение

$$af_1(t_1, \dots, t_n) + bf_2(t_1, \dots, t_n) \doteq aF_1(s_1, \dots, s_n) + bF_2(s_1, \dots, s_n). \quad (3.1.7)$$

В самом деле, подставив левую часть соотношения (3.1.7) в (3.1.3), получим

$$\begin{aligned} \int_{E_+^n} \exp\left(-\sum_{i=1}^n s_i t_i\right) [af_1(t_1, \dots, t_n) + bf_2(t_1, \dots, t_n)] dv_t = \\ = a \int_{E_+^n} \exp\left(-\sum_{i=1}^n s_i t_i\right) f_1(t_1, \dots, t_n) dv_t + \\ + b \int_{E_+^n} \exp\left(-\sum_{i=1}^n s_i t_i\right) f_2(t_1, \dots, t_n) dv_t = \\ = aF_1(s_1, \dots, s_n) + bF_2(s_1, \dots, s_n). \quad (3.1.8) \end{aligned}$$

4° Теорема подобия. Для любых постоянных  $a_i > 0$ ,  $i=1, \dots, n$ ,

$$f(a_1 t_1, \dots, a_n t_n) \doteq \frac{1}{\prod_{r=1}^n a_r} F\left(\frac{s_1}{a_1}, \dots, \frac{s_n}{a_n}\right). \quad (3.1.9)$$

Действительно, обозначая  $a_i t_i = \tau_i$ ,  $i=1, \dots, n$ , получаем

$$\begin{aligned} \int_{E_+^n} \exp\left(-\sum_{i=1}^n s_i t_i\right) f(a_1 t_1, \dots, a_n t_n) dv_t = \\ = \frac{1}{\prod_{r=1}^n a_r} \int_{E_+^n} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{s_i}{a_i} \tau_i\right) f(\tau_1, \dots, \tau_n) dv_\tau = \\ = \frac{1}{\prod_{r=1}^n a_r} F\left(\frac{s_1}{a_1}, \dots, \frac{s_n}{a_n}\right). \end{aligned}$$

5° Теорема запаздывания. Для любых  $\tau_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,

$$f(t_1 - \tau_1, \dots, t_n - \tau_n) \doteq F(s_1, \dots, s_n) \exp\left(-\sum_{i=1}^n s_i \tau_i\right). \quad (3.1.10)$$

Учитывая, что  $f(t_1 - \tau_1, \dots, t_n - \tau_n) = 0$ , если хотя бы одно  $\tau_i > t_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , и делая замену переменных  $t_i - \tau_i = T_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , получаем из (3.1.3)

$$\begin{aligned} \int_{\tau_1}^{\infty} \dots \int_{\tau_n}^{\infty} f(t_1 - \tau_1, \dots, t_n - \tau_n) \exp\left(-\sum_{i=1}^n s_i t_i\right) dv_t = \\ = \int_{E_+^n} f(T_1, \dots, T_n) \exp\left[-\sum_{i=1}^n s_i (T_i + \tau_i)\right] dv_T = \\ = F(s_1, \dots, s_n) \exp\left(-\sum_{i=1}^n s_i \tau_i\right). \end{aligned}$$

6°. Теорема смещения. Для любых комплексных чисел  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,

$$F(s_1 + a_1, \dots, s_n + a_n) \doteq f(t_1, \dots, t_n) \exp\left(-\sum_{i=1}^n a_i t_i\right). \quad (3.1.11)$$

Функция в правой части равенства (3.1.11) является оригиналом. Ее изображение определим по формуле (3.1.3)

$$\begin{aligned} \int_{E_+^n} f(t_1, \dots, t_n) \exp\left(-\sum_{i=1}^n a_i t_i\right) \exp\left(-\sum_{i=1}^n s_i t_i\right) dv_t = \\ = \int_{E_+^n} f(t_1, \dots, t_n) \exp\left[-\sum_{i=1}^n (a_i + s_i) t_i\right] dv_t = \\ = F(s_1 + a_1, \dots, s_n + a_n), \end{aligned}$$

что и доказывает утверждение теоремы.

7° Теорема о дифференцировании оригинала. Если частная производная  $\frac{\partial}{\partial t_i} f(t_1, \dots, t_i, \dots, t_n)$  является оригиналом, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_i} f(t_1, \dots, t_i, \dots, t_n) &\doteq \\ &\doteq s_i F(s_1, \dots, s_i, \dots, s_n) - F^*(s_1, \dots, 0, \dots, s_n), \quad (3.1.12) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} F^*(s_1, \dots, s_{i-1}, t_i, s_{i+1}, \dots, s_n) &= \\ &= \int_{E_+^{n-1}} f(t_1, \dots, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \dots, t_n) \times \\ &\times \exp(-s_1 t_1 - \dots - s_{i-1} t_{i-1} - s_{i+1} t_{i+1} - \dots - s_n t_n) dv_i, \end{aligned}$$

т. е. *частичное преобразование Лапласа по  $n-1$  аргументу от функции  $n$ -аргументов  $f(t_1, \dots, t_n)$ .*

Для упрощения обозначений докажем теорему для  $i=1$ . Учитывая, что  $n$ -кратный интеграл (3.1.3) можно вычислить через повторные интегралы, получаем, применив формулу интегрирования по частям [17],

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_1} f(t_1, \dots, t_n) &\doteq \\ &\doteq \int_{E_+^1} \frac{\partial}{\partial t_1} F^*(t_1, s_2, \dots, s_n) \exp(-s_1 t_1) dt_1 = \\ &= [F^*(t_1, s_2, \dots, s_n) \exp(-s_1 t_1)]_{0^+}^{\infty} + \\ &+ s_1 \int_{E_+^1} F^*(t_1, s_2, \dots, s_n) \exp(-s_1 t_1) dt_1 = \\ &= s_1 F(s_1, \dots, s_n) - F^*(0, s_2, \dots, s_n)^*. \end{aligned}$$

Аналогично для второй смешанной производной в предположении, что  $\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} f(t_1, t_2, \dots, t_n)$  является

---

\*) Подстановка  $t_1 = \infty$  дает нуль для  $\text{Re } s_1 > \sigma_1^0$  вследствие третьего свойства оригиналов.

оригиналом, находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} f(t_1, t_2, \dots, t_n) &\doteq \\ &\doteq \int_{E_+^1} \frac{\partial}{\partial t_2} [s_1 F^*(s_1, t_2, s_3, \dots, s_n) - F^*(0, t_2, s_3, \dots, s_n)] \times \\ &\quad \times \exp(-s_2 t_2) dt_2 = \{[s_1 F^*(s_1, t_2, s_3, \dots, s_n) - \\ &\quad - F^*(0, t_2, s_3, \dots, s_n)] \exp(-s_2 t_2)\}_0^\infty + \\ &+ s_2 \int_{E_+^1} \{s_1 F^*(s_1 t_2, s_3, \dots, s_n) - F^*(0, t_2, s_3, \dots, s_n)\} \times \\ &\times \exp(-s_2 t_2) dt_2 = s_1 s_2 F(s_1, \dots, s_n) - s_1 F(s_1, 0, s_3, \dots, s_n) - \\ &\quad - s_2 F^*(0, s_2, \dots, s_n) + F^*(0, 0, s_3, \dots, s_n). \end{aligned}$$

В частном случае нулевых начальных условий получим для смешанной производной порядка  $n$  такое выражение:

$$\frac{\partial^n}{\partial t_1 \dots \partial t_n} f(t_1, \dots, t_n) \doteq s_1 \dots s_n F(s_1, \dots, s_n). \quad (3.1.13)$$

8° Теорема о дифференцировании изображения. Для производной функции  $F(s_1, \dots, s_n)$  имеет место соотношение

$$\frac{\partial^{\sum_{i=1}^n m_i}}{\partial s_1^{m_1} \dots \partial s_n^{m_n}} F(s_1, \dots, s_n) \doteq (-t_1)^{m_1} \dots (-t_n)^{m_n} f(t_1, \dots, t_n). \quad (3.1.14)$$

Из аналитичности функции  $F(s_1, \dots, s_n)$  следует, что формулу (3.1.3) можно дифференцировать в любом порядке по каждой из переменных. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{\sum_{i=1}^n m_i}}{\partial s_1^{m_1} \dots \partial s_n^{m_n}} F(s_1, \dots, s_n) &= \\ &= \int_{E_+^n} (-t_1)^{m_1} \dots (-t_n)^{m_n} f(t_1, \dots, t_n) \exp\left(-\sum_{i=1}^n s_i t_i\right) dv_t, \end{aligned}$$

что эквивалентно соотношению (3.1.14).

9° Теорема об интегрировании оригинала. Интегрирование оригинала по переменной  $t_i$  эквивалентно делению изображения на соответствующую комплексную переменную, т. е. на  $s_i$ :

$$\int_0^{t_i} f(t_1, \dots, t_i, \dots, t_n) dt_i \doteq \frac{1}{s_i} F(s_1, \dots, s_i, \dots, s_n). \quad (3.1.15)$$

Обозначим

$$\varphi(t_1, \dots, t_i, \dots, t_n) = \int_0^{t_i} f(t_1, \dots, t_i, \dots, t_n) dt_i.$$

Если функция  $f$  — оригинал, то и функция  $\varphi$  будет оригиналом. Из теоремы о дифференцировании оригинала, учитывая, что  $\varphi(t_1, \dots, 0, \dots, t_n) = 0$ , получим

$$\begin{aligned} f(t_1, \dots, t_i, \dots, t_n) &= \frac{\partial}{\partial t_i} \varphi(t_1, \dots, t_i, \dots, t_n) \doteq \\ &\doteq s_i \Phi(s_1, \dots, s_i, \dots, s_n), \end{aligned}$$

где обозначено:

$$\varphi(t_1, \dots, t_i, \dots, t_n) \doteq \Phi(s_1, \dots, s_i, \dots, s_n),$$

Отсюда получаем

$$F(s_1, \dots, s_i, \dots, s_n) = s_i \Phi(s_1, \dots, s_i, \dots, s_n)$$

и окончательно

$$\Phi(s_1, \dots, s_i, \dots, s_n) = \frac{1}{s_i} F(s_1, \dots, s_i, \dots, s_n).$$

В общем случае имеем такую формулу:

$$\int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_r} f(t_1, \dots, t_n) dv_t \doteq \frac{1}{\prod_{i=1}^n s_i} F(s_1, \dots, s_n).$$

10° Теорема об интегрировании изображения. Интегрирование по всем переменным в области изображений соответствует делению  $f(t_1, \dots, t_n)$

на  $\prod_{i=1}^n t_i$ , т. е.

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^n t_i} f(t_1, \dots, t_n) \doteq \int_{s_1}^{\infty} \dots \int_{s_n}^{\infty} F(s_1, \dots, s_n) dv_s, \quad (3.1.16)$$

где интеграл справа вычисляется по контуру, принадлежащему области  $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg s_i < \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \operatorname{Re} s_i \geq c >$   
 $> \sigma_i^0, i = 1, \dots, n$ . Докажем это утверждение. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{s_1}^{\infty} \dots \int_{s_n}^{\infty} F(s_1, \dots, s_n) dv_s &= \\ &= \int_{s_1}^{\infty} \dots \int_{s_n}^{\infty} \left\{ \int_{E_+^n} f(t_1, \dots, t_n) \exp\left(-\sum_{i=1}^n s_i t_i\right) dv_t \right\} dv_s = \\ &= \int_{E_+^n} f(t_1, \dots, t_n) \left\{ \int_{s_1}^{\infty} \dots \int_{s_n}^{\infty} \exp\left(-\sum_{i=1}^n s_i t_i\right) dv_s \right\} dv_t = \\ &= \int_{E_+^n} \frac{1}{\prod_{i=1}^n t_i} f(t_1, \dots, t_n) \exp\left(-\sum_{i=1}^n s_i t_i\right) dv_t. \quad (3.1.17) \end{aligned}$$

Последнее соотношение получено ввиду того, что  $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg s_i < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$  и следовательно,  $s_i \rightarrow \infty$  таким образом, что одновременно  $\operatorname{Re} s_i \rightarrow \infty$ . Поскольку контур интегрирования лежит в полупространстве, определяемом неравенствами  $\operatorname{Re} s_i \geq c > \sigma_i^0, i = 1, \dots, n$ , при выводе соотношения (3.1.17) можно было изменить порядок интегрирования [1].

11° Теорема свертки. Произведение  $n$ -мерных изображений  $F_1(s_1, \dots, s_n)$  и  $F_2(s_1, \dots, s_n)$  тоже является изображением, причем

$$\begin{aligned} F_1(s_1, \dots, s_n) F_2(s_1, \dots, s_n) &\doteq \\ &\doteq \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_n} f_1(\tau_1, \dots, \tau_n) f_2(t_1 - \tau_1, \dots, t_n - \tau_n) dv_{\tau}. \quad (3.1.18) \end{aligned}$$



Докажем сначала, что интеграл в правой части формулы (3.1.18), называемый *интегралом многомерной свертки*, является оригиналом. Выполнение первых двух условий, наложенных на оригинал, очевидно. Докажем, что третье условие тоже выполняется. Выберем числа  $\sigma_i^0$ ,  $i=1, \dots, n$ , являющиеся наибольшими из показателей роста функций  $f_1$  и  $f_2$ . Тогда получим такую оценку:

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_n} f_1(\tau_1, \dots, \tau_n) f_2(t_1 - \tau_1, \dots, t_n - \tau_n) d\tau \right| < \\ & < M \left| \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_n} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \sigma_i^0 \tau_i\right) \exp\left[-\sum_{i=1}^n \sigma_i^0 (t_i - \tau_i)\right] d\tau \right| = \\ & = M \prod_{i=1}^n t_i \exp\left(-\sum_{i=1}^n \sigma_i^0 t_i\right) < M \exp\left[-\sum_{i=1}^n (\sigma_i^0 + \varepsilon_i) t_i\right], \end{aligned}$$

где  $\varepsilon_i$  — сколь угодно малые числа.

Из этой оценки следует, что интеграл многомерной свертки растет на бесконечности не быстрее экспоненциальной функции, т. е. интеграл свертки действительно является оригиналом. Докажем теперь справедливость формулы (3.1.18). Учитывая, что  $f_2(t_1 - \tau_1, \dots, t_n - \tau_n) = 0$ , если хотя бы одна из разностей  $t_i - \tau_i < 0$ ,  $i=1, \dots, n$ , и умножая обе части формулы (3.1.3) на  $F_1(s_1, \dots, s_n)$ , получим, применив теорему запаздывания,

$$\begin{aligned} & F_1(s_1, \dots, s_n) F_2(s_1, \dots, s_n) = \\ & = \int_{E_+^n} f_1(\tau_1, \dots, \tau_n) \exp\left(-\sum_{i=1}^n s_i \tau_i\right) F_2(s_1, \dots, s_n) d\tau \doteq \\ & \doteq \int_{E_+^n} f_1(\tau_1, \dots, \tau_n) f_2(t_1 - \tau_1, \dots, t_n - \tau_n) d\tau, \end{aligned}$$

12° Теорема о свертке в комплексной области. Произведение двух оригиналов  $f_1(t_1, \dots, t_n)$  и  $f_2(t_1, \dots, t_n)$  с показателями роста  $\{\sigma_i^0\}$  и  $\{\gamma_i^0\}$ ,  $i=1, \dots, n$ , тоже является оригиналом и соответствует свертке

изображений, т. е.

$$f_1(t_1, \dots, t_n) f_2(t_1, \dots, t_n) \doteq \left(\frac{1}{2\pi j}\right)^n \int_{Br_n} F_1(p_1, \dots, p_n) F_2(s_1 - p_1, \dots, s_n - p_n) dv_p, \tag{3.1.19}$$

где интеграл берется вдоль прямых  $(c_i - j\infty, c_i + j\infty)$  таких, что  $c_i > \sigma_i^0$  и  $\text{Re } s_i > \gamma_i^0 + c_i$ .

Утверждение, что произведение  $f_1(t_1, \dots, t_n) f_2(t_1, \dots, t_n)$  является оригиналом,—очевидно и в доказательстве не нуждается.

Выведем формулу (3.1.19). Имеем с учетом теоремы обращения

$$\begin{aligned} \int_{E_+^n} f_1(t_1, \dots, t_n) f_2(t_1, \dots, t_n) \exp\left(-\sum_{i=1}^n s_i t_i\right) dv_t &= \\ &= \int_{E_+^n} \left\{ \left(\frac{1}{2\pi j}\right)^n \int_{Br_n} F_1(p_1, \dots, p_n) \exp\left(-\sum_{i=1}^n p_i t_i\right) dv_p \right\} \times \\ &\quad \times f_2(t_1, \dots, t_n) \exp\left(-\sum_{i=1}^n s_i t_i\right) dv_t = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi j}\right)^n \int_{Br_n} \left\{ F_1(p_1, \dots, p_n) \int_{E_+^n} f_2(t_1, \dots, t_n) \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp\left[-\sum_{i=1}^n (s_i - p_i) t_i\right] dv_t \right\} dv_p = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi j}\right)^n \int_{Br_n} F_1(p_1, \dots, p_n) F_2(s_1 - p_1, \dots, s_n - p_n) dv_p. \end{aligned}$$

При выводе этого соотношения предполагалось, что  $\text{Re } s_i > \gamma_i^0 + c_i$ . Поскольку все  $c_i$  могут быть выбраны сколь угодно близкими к  $\sigma_i^0$ , то формула (3.1.19) определена в полупространстве  $\text{Re } s_i > \gamma_i^0 + \sigma_i^0, i=1, \dots, n$ .

13° Формула Парссваля. Если в (3.1.19) можно положить  $s_i=0, i=1, \dots, n$ , получим формулу

Парсеваля

$$\int_{E_+^n} f_1(t_1, \dots, t_n) f_2(t_1, \dots, t_n) dv_t = \\ = \left(\frac{1}{2\pi j}\right)^n \int_{Br_n} F_1(p_1, \dots, p_n) F_2(-p_1, \dots, -p_n) dv_p. \quad (3.1.20)$$

Если  $f_1(t_1, \dots, t_n) \equiv f_2(t_1, \dots, t_n) \equiv f(t_1, \dots, t_n)$ , то из последней формулы получим

$$\int_{E_+^n} f^2(t_1, \dots, t_n) dv_t = \left(\frac{1}{2\pi j}\right)^n \int_{Br_n} F(p_1, \dots, p_n) \times \\ \times F(-p_1, \dots, -p_n) dv_p. \quad (3.1.21)$$

Во многих задачах, рассматриваемых в этой книге, требуется вычислить не сам многомерный оригинал  $f(t_1, \dots, t_n)$ , а величину

$$f(t, \dots, t) = f(t_1, \dots, t_n) \Big|_{t_1=\dots=t_n=t}. \quad (3.1.22)$$

Это можно сделать, произведя обращение по формуле (3.1.4) и положив в полученном оригинале  $t_1 = \dots = t_n = t$  в соответствии с формулой (3.1.22). Обращение выполняется при этом либо аналитически, либо по таблицам, приведенным в работе [24], либо с помощью цифровых вычислительных машин (см. стр. 199). Во многих задачах удобнее, однако, осуществлять переход к одной переменной в комплексной области, что сразу дает оригинал при  $t_1 = \dots = t_n = t$ .

14° Теорема о переходе к одной переменной в области изображений. Сформулируем эту теорему сначала для функций двух аргументов.

Если

$$F(s_1, s_2) \stackrel{\equiv}{=} f(t_1, t_2),$$

то

$$f(t, t) \stackrel{\equiv}{=} \frac{1}{2\pi j} \int_{Br_1} F(s_1, s - s_1) ds_1 = \frac{1}{2\pi j} \int_{Br_1} F(s - s_2, s_2) ds_2. \quad (3.1.23)$$

Докажем это утверждение. Положив в формуле (3.1.4)  $n=2$  и  $t_1=t_2=t$ , получим

$$\begin{aligned} f(t, t) &= \left(\frac{1}{2\pi j}\right)^2 \int_{Br_2} F(s_1, s_2) \exp[t(s_1 + s_2)] dv_s = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{Br_1} \left\{ \frac{1}{2\pi j} \int_{Br_1} F(s_1, s - s_1) \exp(ts) ds \right\} ds_1 = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{Br_1} \exp(ts) \left\{ \frac{1}{2\pi j} \int_{Br_1} F(s_1, s - s_1) ds_1 \right\} ds, \end{aligned}$$

что равносильно формуле (3.1.23). При выводе последнего соотношения была произведена замена переменных  $s_1 + s_2 = s$  и изменен порядок интегрирования, что допустимо ввиду равномерной сходимости интегралов.

Рассмотрим теперь переход к одной переменной для функции трех переменных  $F(s_1, s_2, s_3)$ . Обозначив  $p = s_2 + s_3$ , получаем из (3.1.23) такую формулу:

$$f(t_1, t, t) \doteq \frac{1}{2\pi j} \int_{Br_1} F(s_1, s_2, p - s_2) ds_2,$$

что соответствует переходу к одной переменной по аргументам  $s_2$  и  $s_3$ . Обозначим

$$\Phi(s_1, p) = \frac{1}{2\pi j} \int_{Br_1} F(s_1, s_2, p - s_2) ds_2$$

и, применив к  $\Phi(s_1, p)$  формулу (3.1.23), окончательно получаем

$$f(t, t, t) \doteq \frac{1}{2\pi j} \int_{Br_1} \Phi(s_1, s - s_1) ds_1,$$

т. е. формула (3.1.23) применяется два раза. Для функций  $n$  переменных  $F(s_1, \dots, s_n)$  формула (3.1.23) должна применяться последовательно  $n-1$  раз. Для дробно-рациональных двумерных изображений вычисления по формуле (3.1.23) сводятся к однократному применению теоремы о вычетах [1]. Для  $n$ -мерных дробно-рациональных изображений теорема о вычетах применяется

$n-1$  раз\*). Для упрощения записи операцию перехода к одной переменной будем обозначать символом  $\{ \ }^*$ , т. е.

$$f(t, \dots, t) \doteq \{F(s_1, \dots, s_n)\}^*. \quad (3.1.24)$$

Рассмотрим следствия из доказанной теоремы.

15° Следствия из теоремы о переходе к одной переменной в комплексной области.

а) Если оригинал имеет вид  $F(s_1, \dots, s_n) \equiv F\left(\sum_{i=1}^n s_i\right)$ ,

то, обозначив  $\sum_{i=1}^n s_i = s$ , получим

$$f(t, \dots, t) \doteq F(s), \quad (3.1.25)$$

т. е. переход к одной переменной в этом случае осуществляется заменой  $\sum_{i=1}^n s_i = s$ . Пусть, например,

$$F(s_1, \dots, s_n) = \frac{1}{T_1 \left(\sum_{i=1}^n s_i\right)^2 + T_2 \left(\sum_{i=1}^n s_i\right) + 1}.$$

Тогда

$$F(s) = \frac{1}{T_1 s^2 + T_2 s + 1}.$$

б) Если изображение имеет вид  $F(s_1, \dots, s_n) = \Phi\left(\sum_{i=1}^n s_i\right) F_1(s_1, \dots, s_n)$ , то

$$f(t, \dots, t) \doteq \Phi(s) \{F_1(s_1, \dots, s_n)\}^*, \quad (3.1.26)$$

т. е. оператор перехода к одной переменной следует применять только к  $F_1(s_1, \dots, s_n)$ . Это утверждение вытека-

---

\*) Дуальной к теореме о переходе к одной переменной в комплексной области является теорема о переходе к одной переменной во временной области, которая для функции двух аргументов формулируется так. Если  $F(s_1, s_2) \doteq f(t_1, t_2)$ , то

$$F(s, s) \doteq \int_0^T f(t_1, T-t_1) dt_1 = \int_0^T f(T-t_2, t_2) dt_2 \quad [133].$$

ет из предыдущего следствия. Важной для приложений является формула

$$\Phi(s) \{F_1(s_1, \dots, s_n)\}^* = \left\{ \Phi \left( \sum_{i=1}^n s_i \right) F(s_1, \dots, s_n) \right\}^*. \quad (3.1.27)$$

в) Если изображение имеет вид

$$F(s_1, \dots, s_n) = \Phi \left( \sum_{i=1}^n s_i \right) \prod_{i=1}^n F_i(s_i),$$

то из формулы (3.1.26) получаем

$$f(t, \dots, t) \doteq \Phi(s) \left\{ \prod_{i=1}^n F_i(s_i) \right\}^* = \Phi(s) \int_{E_+^1} \exp(-st) \times \\ \times \prod_{i=1}^n f_i(t) dt. \quad (3.1.28)$$

При выводе формулы (3.1.28) учитывалось, что изображение сепарабельного оригинала сепарабельно, т. е.

$$\prod_{i=1}^n f_i(t_i) \doteq \prod_{i=1}^n F_i(s_i). \quad (3.1.29)$$

Из формулы (3.1.28) следует, что для рассматриваемого типа изображений переход к одной переменной может быть осуществлен так: 1) определяются одномерные оригиналы  $f_i(t)$  и перемножаются, т. е. находится  $\prod_{i=1}^n f_i(t)$ ; 2) находится одномерное изображение произведения и умножается на  $\Phi(s)$ .

Пусть, в частности,

$$F(s_1, \dots, s_n) = \frac{1}{\left( \sum_{i=1}^n s_i + \alpha \right) \prod_{i=1}^n (s_i + \beta_i)}.$$

Тогда, учитывая, что  $\frac{1}{s_i + \beta_i} \doteq \exp(-\beta_i t)$  и

$$\prod_{i=1}^n \exp(-\beta_i t) \doteq \frac{1}{s + \sum_{i=1}^n \beta_i},$$

получим

$$F(s) = \left\{ \frac{1}{\left( \sum_{i=1}^n s_i + \alpha \right) \prod_{i=1}^n (s_i + \beta_i)} \right\} = \frac{1}{s + \alpha} \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^n (s_i + \beta_i)} \right\}^* =$$

$$= \frac{1}{(s + \alpha) \left( s + \sum_{i=1}^n \beta_i \right)}.$$

г) Если изображение задается формулой  $F(s_1, \dots, s_n) = \Phi(s_1, \dots, s_n) \exp\left(-\tau \sum_{i=1}^n s_i\right)$ , то, применив следствие б) и теорему запаздывания, находим

$$\left\{ \Phi(s_1, \dots, s_n) \exp\left(-\tau \sum_{i=1}^n s_i\right) \right\}^* \doteq f(t - \tau, \dots, t - \tau). \quad (3.1.30)$$

д) Если изображение таково, что  $F(s_1, \dots, s_n) = \Phi(s_1 + a_1, \dots, s_n + a_n)$ , то, положив в формуле (3.1.10)  $t_1 = \dots = t_n = t$ , найдем

$$\{\Phi(s_1 + a_1, \dots, s_n + a_n)\}^* \doteq f\left(t, \dots, t\right) \exp\left(-t \sum_{i=1}^n a_i\right). \quad (3.1.31)$$

В приближении приведены таблицы перехода к одной переменной [127] для некоторых видов изображений, встречающихся при расчете систем.

Приведем без доказательства формулировку еще двух теорем, часто применяемых в приложениях.

16° Теорема о конечном значении. Если  $f(t_1, \dots, t_n)$  и  $\frac{\partial^n}{\partial t_1 \dots \partial t_n} f(t_1, \dots, t_n)$  являются оригиналами и, кроме того, существует предел  $\lim_{t_1, \dots, t_n \rightarrow \infty} f(t_1, \dots, t_n)$ ,

$$\lim_{s_1, \dots, s_n \rightarrow 0} s_1 \dots s_n F(s_1, \dots, s_n) = \lim_{t_1, \dots, t_n \rightarrow \infty} f(t_1, \dots, t_n). \quad (3.1.32)$$

17° Теорема о начальном значении. Если  $f(t_1, \dots, t_n)$  и  $\frac{\partial^n}{\partial t_1 \dots \partial t_n} f(t_1, \dots, t_n)$  являются оригиналами, то

$$\lim_{s_1, \dots, s_n \rightarrow \infty} s_1 \dots s_n F(s_1, \dots, s_n) = f(0, \dots, 0), \quad (3.1.33)$$

где обозначено  $f(0, \dots, 0) = \lim_{t_1, \dots, t_n \rightarrow +0} f(t_1, \dots, t_n)$ .

18° Вычисление многомерных оригиналов по их изображениям с помощью вычетов. Обратимся к формуле (3.1.4). Из теоремы о существовании изображения  $F(s_1, \dots, s_n)$  можно получить так же, как и в случае одномерного преобразования Лапласа, что

$$\lim_{s_j \rightarrow \infty} F(s_1, \dots, s_n) = 0,$$

$$j = 1, \dots, n, \quad \operatorname{Re} s_j > \sigma_j^0, \quad -\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg s_j < \frac{\pi}{2} - \varepsilon.$$

Это предельное соотношение дает возможность применить для вычисления повторных интегралов в правой части формулы обращения (3.1.4) лемму Жордана [1], [27]. При этом, однако, возникают специфические трудности, обусловленные многомерностью преобразования. Вопрос решается наиболее просто, если изображение  $F(s_1, \dots, s_n)$  имеет вид

$$F(s_1, \dots, s_n) = \frac{P(s_1, \dots, s_n)}{\prod_{i=1}^n Q_i(s_i)},$$

где  $Q_i$  — полиномы от переменных  $s_i$ ,  $P$  — полином от  $n$  переменных. Полюсами  $F(s_1, \dots, s_n)$  являются нули полиномов  $Q_i$ . Пусть, например,  $n=2$  и изображение по Лапласу имеет такой вид. Тогда оригинал равен

$$\begin{aligned} f(t_1, t_2) &= \frac{1}{(2\pi j)^2} \int_{c_2 - j\infty}^{c_2 + j\infty} \int_{c_1 - j\infty}^{c_1 + j\infty} F_2(s_1, s_2) \exp(s_1 t_1 + s_2 t_2) ds_1 ds_2 = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c_2 - j\infty}^{c_2 + j\infty} \left\{ \sum_{v=1}^k \operatorname{Res} F(s_1, s_2) \exp(s_1 t_1) \Big|_{s_1 = s_v} \right\} \exp(s_2 t_2) ds_2, \end{aligned}$$



где вычеты  $\text{Res } F(s_1, s_2)$  определяются в полюсах  $s_v$  функции  $F(s_1, s_2)$  по переменной  $s_1$ . Обозначая

$$\text{Res}_v F(s_1, s_2) \exp(s_1 t_1) |_{s_1=s_v} = R_v(s_2, s_v; t_1) \exp(s_v t_1),$$

перепишем последнее выражение в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \int_{c_2-j\infty}^{c_2+j\infty} \sum_{v=1}^k R_v(s_2, s_v, t_1) \exp(s_v t_1 + s_2 t_2) ds_2 = \\ = \frac{1}{2\pi j} \sum_{v=1}^k \int_{c_2-j\infty}^{c_2+j\infty} R_v(s_2, s_v, t_1) \exp(s_v t_1 + s_2 t_2) ds_2. \end{aligned}$$

Каждый из интегралов, стоящих под знаком суммы, вновь может быть вычислен методом вычетов. Получим

$$\begin{aligned} f(t_1, t_2) = \sum_{v=1}^k \sum_{\mu=1}^m \text{Res } R_v(s_2, s_v, t_1) \exp(s_v t_1 + s_2 t_2) |_{s_2=s_\mu} = \\ = \sum_{v=1}^k \sum_{\mu=1}^m Q_{v\mu}(s_\mu, s_v, t_1, t_2) \exp(s_v t_1 + s_\mu t_2), \end{aligned}$$

где  $s_\mu$  — полюса функции  $R_v(s_2, s_v, t_1)$  по переменной  $s_2$ ,  $Q_{v\mu}(s_\mu, s_v, t_1, t_2) \exp(s_\mu t_2) = \text{Res } R_v(s_2, s_v, t_1) \exp(s_2 t_2) |_{s_2=s_\mu}$ .

Рассмотрим более сложный случай, полагая

$$F(s_1, s_2) = \frac{P(s_1, s_2)}{Q(s_1) Q(s_2) Q(s_1 + s_2)}.$$

Полюсами этого выражения, помимо нулей  $s_v$ ,  $v=1, \dots, k$ , полиномов  $Q(s)$ , являются значения  $s_1, s_2$ , удовлетворяющие равенству  $s_1 + s_2 = s_v$ ,  $v=1, \dots, k$ . Пусть  $F(s_1, s_2)$  — аналитическая функция при  $\text{Re } s_1, \text{Re } s_2 \geq 0$ , т. е.  $\sigma_1^0, \sigma_2^0 < 0$  и корни  $s_v$  — простые. Полагая в этом случае в формуле обращения  $c_1 = c_2 = 0$ , получим

$$\begin{aligned} f(t_1, t_2) = \frac{1}{(2\pi j)^2} \int_{-j\infty}^{j\infty} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{P(s_1, s_2) \exp(s_1 t_1 + s_2 t_2)}{Q(s_1) Q(s_2) Q(s_1 + s_2)} ds_1 ds_2 = \\ = \frac{1}{(2\pi j)^2} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{\exp(s_2 t_2)}{Q(s_2)} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{P(s_1, s_2) \exp(s_1 t_1)}{Q(s_1) Q(s_1 + s_2)} ds_1 ds_2. \end{aligned}$$

Определим внутренний интеграл с помощью вычетов, учитывая, что полюсами подынтегральной функции, лежащими в левой полуплоскости  $\operatorname{Re} s_1 < 0$ , являются  $s_1 = s_\nu$  и  $s_1 = -s_2 + s_\nu$ ,  $\nu = 1, \dots, k$ , причем в последнем случае  $\operatorname{Re} s_2 > \operatorname{Re} s_\nu$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{P(s_1, s_2)}{Q(s_1)Q(s_1, s_2)} \exp(s_1 t_1) ds_1 &= \\ &= \sum_{\nu=1}^k \operatorname{Res} \frac{P(s_1, s_2) \exp(s_1 t_1)}{Q(s_1)Q(s_1 + s_2)} \Big|_{\substack{s_1=s_\nu \\ s_1=-s_2+s_\nu}} = \\ &= \sum_{\nu=1}^k \frac{P(s_\nu, s_2) \exp(s_\nu t_1)}{Q'(s_\nu)Q(s_\nu + s_2)} + \sum_{\nu=1}^k \frac{P(s_\nu - s_2, s_2) \exp[(s_\nu - s_2) t_1]}{Q(s_\nu - s_2)Q'(s_\nu)}. \end{aligned}$$

Здесь  $\operatorname{Re}(s_\nu - s_2) < 0$ ,  $Q'(s)$  — производная полинома  $Q(s)$ .

Переходим к вычислению интеграла по переменной  $s_2$ . Он равен сумме двух интегралов, соответствующих двум слагаемым в последнем равенстве. Запишем первый из них:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{\exp(s_2 t_2)}{Q(s_2)} \sum_{\nu=1}^k \frac{P(s_\nu, s_2) \exp(s_\nu t_1)}{Q'(s_\nu)Q(s_\nu + s_2)} ds_2 &= \\ &= \frac{1}{2\pi j} \sum_{\nu=1}^k \frac{\exp(s_\nu t_1)}{Q'(s_\nu)} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{P(s_\nu, s_2) \exp(s_2 t_2)}{Q(s_\nu + s_2)Q(s_2)} ds_2. \end{aligned}$$

Полюсами подынтегральной функции являются  $s_2 = s_\mu$ ,  $\mu = 1, \dots, k$ , а также  $s_2 = s_\mu - s_\nu$ . В последнем случае полюса могут лежать и в правой полуплоскости, однако при вычислении интеграла следует брать только те из них, для которых  $\operatorname{Re} s_2 = \operatorname{Re}(s_\mu - s_\nu) < 0$ , т. е.  $\operatorname{Re} s_\mu < \operatorname{Re} s_\nu$ . Получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \sum_{\nu=1}^k \frac{\exp(s_\nu t_1)}{Q'(s_\nu)} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{P(s_\nu, s_2) \exp(s_2 t_2)}{Q(s_\nu + s_2)Q(s_2)} ds_2 &= \\ &= \sum_{\nu=1}^k \frac{\exp(s_\nu t_1)}{Q'(s_\nu)} \left( \sum_{\mu=1}^k \operatorname{Res} \frac{P(s_\nu, s_2) \exp(s_2 t_2)}{Q(s_\nu + s_2)Q(s_2)} \Big|_{s_2=s_\mu} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\operatorname{Re} s_{\mu} < \operatorname{Re} s_{\nu}} \operatorname{Res} \frac{P(s_{\nu}, s_2) \exp(s_2 t_2)}{Q(s_{\nu} + s_2) Q(s_2)} \Big|_{s_2 = s_{\mu} - s_{\nu}} = \\
& = \sum_{\nu=1}^k \frac{\exp(s_{\nu} t_1)}{Q'(s_{\nu})} \left[ \sum_{\mu=1}^k \frac{P(s_{\nu}, s_{\mu}) \exp(s_{\mu} t_2)}{Q'(s_{\mu}) Q(s_{\nu} + s_{\mu})} + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{\operatorname{Re} s_{\mu} < \operatorname{Re} s_{\nu}} \frac{P(s_{\nu}, s_{\mu} - s_{\nu}) \exp[(s_{\mu} - s_{\nu}) t_2]}{Q'(s_{\mu}) Q(s_{\mu} - s_{\nu})} \right].
\end{aligned}$$

Аналогично вычисляя второе слагаемое при  $t_2 > t_1$ , получим

$$\begin{aligned}
f(t_1, t_2) = & \sum_{\nu; \mu=1}^k \left[ \frac{P(s_{\nu}, s_{\mu}) \exp(s_{\nu} t_1 + s_{\mu} t_2)}{Q'(s_{\mu}) Q'(s_{\nu}) Q(s_{\nu} + s_{\mu})} + \right. \\
& + \sum_{\operatorname{Re} s_{\mu} < \operatorname{Re} s_{\nu}} \frac{P(s_{\nu}, s_{\mu} - s_{\nu}) \exp[(s_{\mu} - s_{\nu}) t_2 + s_{\nu} t_1]}{Q'(s_{\nu}) Q'(s_{\mu}) Q(s_{\mu} - s_{\nu})} + \\
& + \sum_{\operatorname{Re} s_{\mu} > \operatorname{Re} s_{\nu}} \frac{P(s_{\mu}, s_{\nu} - s_{\mu}) \exp[(s_{\nu} - s_{\mu}) t_2 + s_{\mu} t_1]}{Q'(s_{\nu}) Q'(s_{\mu}) Q(s_{\nu} - s_{\mu})} + \\
& \left. + \frac{P(s_{\nu} - s_{\mu}, s_{\nu}) \exp[s_{\mu} (t_2 - t_1) + s_{\nu} t_1]}{Q'(s_{\mu}) Q'(s_{\nu}) Q(s_{\nu} - s_{\mu})} \right]. \quad (3.1.34)
\end{aligned}$$

Если в формуле обращения начать с вычисления интеграла по переменной  $s_2$ , то получим выражение  $f(t_1, t_2)$ , справедливое при  $t_1 > t_2$  и отличающееся от найденного тем, что переменные  $t_1$  и  $t_2$  в нем надо поменять местами.

Аналогично используется теорема о вычетах и для определения оригинала, соответствующего изображению, зависящему от  $n > 2$  переменных. При этом достаточно найти значения оригинала  $f(t_1, \dots, t_n)$  в области  $t_1 > t_2 > \dots > t_n$ , поскольку значения оригинала в остальных областях, задаваемых различными неравенствами  $t_1 < t_2, t_2 > \dots > t_n; t_1 > t_2, t_2 < t_3, t_3 > \dots > t_n$  и т. д., могут быть получены из  $f(t_1, \dots, t_n)$  всевозможными перестановками переменных  $t_1, \dots, t_n$ .

Следует отметить большую трудоемкость вычисления оригинала по формуле обращения с помощью вычетов. Это обстоятельство требует разработки специализированных программ для цифровых вычислительных ма-

шин, позволяющих автоматизировать процедуру определения оригинала по многомерному изображению.

Преобразование Лапласа, введенное формулой (3.1.3), определено для функций  $f(t_1, \dots, t_n)$ , которые равны нулю, если хотя бы один из аргументов  $t_i < 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Однако во многих задачах встречаются функции, не удовлетворяющие этому условию\*). В этом случае используется *многомерное преобразование Фурье*, которое вводится формулой

$$F(j\omega_1, \dots, j\omega_n) = \int_{E^n} f(t_1, \dots, t_n) \exp \left[ -j \sum_{i=1}^n \omega_i t_i \right] dv_t. \quad (3.1.35)$$

Для сходимости интеграла (3.1.35) требуется, чтобы функция  $f(t_1, \dots, t_n)$  была определена и имела (самое большее) разрывы первого рода на конечном числе гладких кривых в  $E^n$  и

$$\int_{E^n} |f(t_1, \dots, t_n)| dv_t = C < \infty.$$

*Обратное преобразование Фурье* определяется соотношением

$$f(t_1, \dots, t_n) = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^n \int_{E^n} F(j\omega_1, \dots, j\omega_n) \exp \left[ j \sum_{i=1}^n \omega_i t_i \right] dv_\omega. \quad (3.1.36)$$

Многомерное преобразование Фурье может быть получено из преобразования Лапласа заменой  $s_i$  на  $j\omega_i$  при условии, что  $\sigma_i^0 < 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Поэтому все теоремы и свойства, доказанные ранее для преобразования Лапласа, могут быть распространены и на преобразование Фурье. Так, например, важная в приложениях формула Парсеваля имеет для преобразования Фурье

---

\*) Примером таких функций являются многомерные моменты случайного процесса (см. § 4 этой главы).

такой вид:

$$\int_{E^n} f(t_1, \dots, t_n) f_1(t_1, \dots, t_n) dv_t = \\ = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{E^n} F(j\omega_1, \dots, j\omega_n) F_1(-j\omega_1, \dots, -j\omega_n) dv_\omega \quad (3.1.37)$$

для  $f(t_1, \dots, t_n), f_1(t_1, \dots, t_n) \in L(E^n)$ . В том случае, когда  $f(t_1, \dots, t_n) \equiv f_1(t_1, \dots, t_n)$ , формула (3.1.37) запишется так:

$$\int_{E^n} f^2(t_1, \dots, t_n) dv_t = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{E^n} |F(j\omega_1, \dots, j\omega_n)|^2 dv_\omega. \quad (3.1.38)$$

## § 2. Определение изображений ядер ряда Вольтерра

Использование свойств одномерного преобразования Лапласа существенно упрощает расчет и проектирование стационарных линейных систем. Согласно теореме о свертке, интегралу во временной области

$$y(t) = \int_{E_+^1} h(\tau) x(t - \tau) d\tau$$

соответствует произведение изображений в комплексной плоскости

$$Y(s) = H(s)X(s).$$

Изображение по Лапласу весовой функции  $h(\tau)$ , т. е.

$$H(s) = \int_{E_+^1} \exp(-s h\tau)(\tau) d\tau,$$

называется *передаточной функцией системы*.

Передаточная функция представляет собой дробно-рациональную функцию \*) от  $s$  с действительными ко-

---

\*) Для систем с распределенными параметрами передаточная функция является трансцендентной функцией переменного  $s$ , а для систем с запаздыванием она содержит трансцендентную функцию  $\exp(-ts)$  [43].

эффициснтами

$$H(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}.$$

Рассматриваемая функциональная стационарная линейная система будет устойчива, т. е.  $\int_0^{\infty} |h(\tau)| d\tau = C_1 < \infty$ , если, во-первых, степень числителя ее передаточной функции меньше или равна степени знаменателя, т. е.  $m \leq n$  (условие физической реализуемости) и, во-вторых, все корни *характеристического уравнения*

$$D(\lambda) = \sum_{i=0}^n a_i \lambda^i = 0,$$

соответствующего передаточной функции этой системы, находятся в левой полуплоскости.

Выполнение второго условия может быть проверено, например, с помощью критерия Гурвица [16]. Для уравнений первого, второго и третьего порядка этот критерий дает такие системы неравенств:

- 1) для  $n=1$   $a_j > 0$  ( $j=0, 1$ );
- 2) для  $n=2$   $a_j > 0$  ( $j=0, 1, 2$ );
- 3) для  $n=3$   $a_j > 0$  ( $j=0, \dots, 3$ ),  $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$ .

Если характеристические уравнения, соответствующие передаточным функциям  $H(s)$  и  $\frac{1}{H(s)}$ , имеют корни только в левой полуплоскости, то линейная система с передаточной функцией  $H(s)$  называется *минимально-фазовой* [17].

Вследствие того, что интегралу свертки во временной области соответствует произведение изображений в комплексной области, последовательное соединение двух стационарных систем с передаточными функциями  $H(s)$  и  $K(s)$  описывается передаточной функцией

$$G(s) = H(s)K(s),$$

причем  $G(s)$  не меняется от перемены порядка соединения систем. Параллельному соединению этих же систем, вследствие линейности преобразования Лапласа, соответствует система с передаточной функцией

$$G(s) = H(s) + K(s),$$

а соединению с обратной связью, как в этом нетрудно убедиться,— передаточная функция по сигналу ошибки \*)

$$G(s) = \frac{1}{1 + H(s)K(s)}$$

и передаточная функция по выходному сигналу

$$W(s) = G(s)H(s) = \frac{H(s)}{1 + H(s)K(s)}.$$

Аналогичные упрощения при преобразовании структурных схем стационарных нелинейных аналитических и полиномиальных систем дает применение многомерного преобразования Лапласа, основные положения которого были рассмотрены в предыдущем параграфе. Здесь есть, однако, существенное отличие, заключающееся в том, что однородный регулярный функционал Вольтерра степени  $i$

$$y(t) = \int_{E_+^i} h_i(\tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i x(t - \tau_r) dv_\tau \quad (3.2.1)$$

не является, как это следует из сравнения с формулой (3.1.18), многомерной сверткой. Сопоставим интегралу (3.2.1) свертку от  $i$  переменных

$$y(t_1, \dots, t_i) = \int_{E_+^i} h_i(\tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i x(t_r - \tau_r) dv_\tau. \quad (3.2.2)$$

Теперь, применяя формулы (3.1.18) и (3.1.29), получим

$$Y(s_1, \dots, s_i) = H_i(s_1, \dots, s_i) \prod_{r=1}^i X(s_r), \quad (3.2.3)$$

---

\*) Соответствующие структурные схемы приведены в § 2, гл. II.

где обозначено

$$Y(s_1, \dots, s_i) \doteq y(t_1, \dots, t_i),$$

$$H_i(s_1, \dots, s_i) \doteq h_i(\tau_1, \dots, \tau_i).$$

Изображение ядра  $h_i(\tau_1, \dots, \tau_i)$  является обычно дробно-рациональной функцией от  $i$  переменных с действительными коэффициентами, т. е.

$$H_i(s_1, \dots, s_i) = \frac{\sum_{r_1=0}^m \dots \sum_{r_i=0}^m b_{r_1, \dots, r_i} s_1^{r_1} \dots s_i^{r_i}}{\sum_{r_1=0}^n \dots \sum_{r_i=0}^n a_{r_1, \dots, r_i} s_1^{r_1} \dots s_i^{r_i}}.$$

Однородная система (3.2..1) степени  $i$  будет устойчивой, т. е.

$$\int_{E_+^i} |h_i(\tau_1, \dots, \tau_i)| d\nu_\tau = C_i < \infty,$$

тогда и только тогда, когда, во-первых, степень числителя изображения ядра по каждой переменной  $s_1, \dots, s_i$  меньше или равна степени знаменателя по той же переменной (условие физической реализуемости) и, во-вторых, все корни характеристического уравнения

$$D(\lambda_1, \dots, \lambda_i) = \sum_{r_1=0}^n \dots \sum_{r_i=0}^n a_{r_1, \dots, r_i} \lambda_1^{r_1} \dots \lambda_i^{r_i} = 0$$

имеют отрицательные действительные части. Для проверки устойчивости однородной системы степени  $i$  можно воспользоваться обобщенным критерием Гурвица [8]. Выведем этот критерий для системы второй степени. В этом случае

$$H_2(s_1, s_2) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m b_{ij} s_1^i s_2^j}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_{ij} s_1^i s_2^j}.$$

Поскольку ядро симметрично, то  $a_{ij} = a_{ji}$  и  $b_{ij} = b_{ji}$ . Харак-



теристическое уравнение для изображения ядра имеет вид

$$D(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_{ij} \lambda_1^i \lambda_2^j - 0.$$

Пусть  $n \leq 3$ . Составим из коэффициентов этого характеристического уравнения таблицу 3.2.1. Пусть сначала

Таблица 3.2.1

	$\lambda_2^0$	$\lambda_2^1$	$\lambda_2^2$	$\lambda_2^3$	$\lambda_2^4$
$\lambda_1^0$	$a_{00}$	$a_{01}$	$a_{02}$	$a_{03}$	
$\lambda_1^1$	$a_{10}$	$a_{11}$	$a_{12}$		
$\lambda_1^2$	$a_{20}$	$a_{21}$			
$\lambda_1^3$	$a_{30}$				
$\lambda_1^4$					

$n=1$ . Тогда, обозначив  $A_0 = a_{00} + a_{01}\lambda_2$ ,  $A_1 = a_{10}$ , получим из построенной таблицы характеристический полином от  $\lambda_1$

$$D(\lambda_1) = A_0 + A_1\lambda_1.$$

Критерий Гурвица дает такие условия устойчивости:  $A_0 > 0$ ,  $A_1 > 0$ . Поскольку  $A_0$  и  $A_1$  являются функциями от  $\lambda_2$ , то эти два неравенства должны выполняться при всех  $\lambda_2$ . Пусть  $a_{00} > 0$ . Тогда условие  $A_0 > 0$  означает, что уравнение

$$a_{00} + a_{01}\lambda_2 = 0$$

не имеет корней с положительной действительной частью. Применение критерия Гурвица дает неравенства:  $a_{00} > 0$ ,  $a_{01} > 0$ . Второе условие  $A_1 > 0$  выполняется, если  $a_{10} > 0$ . Отсюда получаем такие условия ус-

тойчивости  $n=1$ :

$$a_{ij} > 0 \quad (i, j=0, 1).$$

Для  $n=2$ , обозначив

$$A_0 = a_{00} + a_{01}\lambda_2 + a_{02}\lambda_2^2, \quad A_1 = a_{10} + a_{11}\lambda_2, \quad A_2 = a_{20},$$

получим характеристическое уравнение

$$D(\lambda_1) = A_0 + A_1\lambda_1 + A_2\lambda_1^2 = 0.$$

Учитывая, что по критерию Гурвица должны выполняться неравенства  $A_i > 0$  ( $i=0, 1, 2$ ), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} a_{00} + a_{01}\lambda_2 + a_{02}\lambda_2^2 &= 0, \\ a_{10} + a_{11}\lambda_2 &= 0, \end{aligned}$$

каждое из которых не может иметь корней с положительной действительной частью. Вновь применяя критерий Гурвица, получим условия устойчивости при  $n=2$ :  $a_{ij} > 0$  ( $i, j=0, 1, 2$ ). Произведя выкладки для  $n=3$ , получим такие условия устойчивости [8]:

$$\begin{aligned} a_{ij} &> 0 && (i, j=0, \dots, 3), \\ a_{12}a_{21} - a_{30}a_{03} &> 0; && a_{11}a_{21} + a_{20}a_{12} - a_{30}a_{02} > 0; \\ a_{10}a_{21} + a_{11}a_{20} - a_{30}a_{01} &> 0; && a_{10}a_{20} - a_{30}a_{00} > 0; \\ (a_{11}a_{21} + a_{20}a_{12} - a_{30}a_{02}) &(a_{10}a_{21} + a_{11}a_{20} - a_{30}a_{01}) - \\ &- (a_{12}a_{21} + a_{30}a_{03}) &(a_{10}a_{20} - a_{30}a_{00}) > 0. \end{aligned}$$

Вернемся к рассмотрению системы (3.2.3). Используя оператор перехода к одной переменной в комплексной области, из соотношения (3.2.3) получим

$$Y(s) = \left\{ H_i(s_1, \dots, s_i) \prod_{r=1}^i X(s_r) \right\}^*. \quad (3.2.4)$$

Теперь полиномиальной нелинейной системе

$$y(t) = \sum_{i=1}^N \int_{E_+^i} h_i(\tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i x(t - \tau_r) dv_\tau \quad (3.2.5)$$

может быть сопоставлено выражение в комплексной области

$$Y(s) = \sum_{i=1}^N \left\{ H_i(s_1, \dots, s_i) \prod_{r=1}^i X(s_r) \right\}^* \quad (3.2.6)$$

Изображения ядер  $H_i(s_1, \dots, s_i)$  полностью характеризуют систему\*) (3.2.5) точно так же, как передаточная функция является исчерпывающей характеристикой линейной стационарной системы в нулевом начальном состоянии.

Рассмотрим, как определяются изображения ядер  $H_i(s_1, \dots, s_i)$  системы, образованной соединением стационарных линейных инерционных и безынерционных нелинейных элементов. Пусть система имеет структурную схему, приведенную на рис. 3.2.1. Из формулы (3.2.6) и

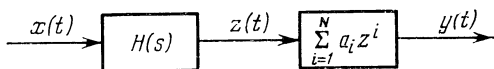


Рис. 3.2.1.

учитывая, что ядра полиномиальной безынерционной нелинейности — это  $\delta$ -функции, поскольку

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{i=1}^N a_i z^i(t) = \\ &= \sum_{i=1}^N a_i \int_{\varepsilon_+} \prod_{j=1}^i \delta(\tau_j) \prod_{j=1}^i z(t - \tau_j) dv_\tau \doteq \sum_{i=1}^N a_i \left\{ \prod_{j=1}^i Z(s_j) \right\}^*, \end{aligned}$$

получаем

$$\left. \begin{aligned} Y(s) &= \sum_{i=1}^N a_i \left\{ \prod_{j=1}^i Z(s_j) \right\}^*, \\ Z(s) &= H(s) X(s). \end{aligned} \right\} \quad (3.2.7)$$

\*) По этой причине изображения ядер  $H_i(s_1, \dots, s_i)$  в работах [25], [73] были названы многомерными передаточными функциями.

Отсюда

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \sum_{i=1}^N a_i \left\{ \prod_{j=1}^i H(s_j) X(s_j) \right\}^* = \\
 &= \sum_{i=1}^N a_i \left\{ H_i(s_1, \dots, s_i) \prod_{j=1}^i X(s_j) \right\}^*, \quad (3.2.8)
 \end{aligned}$$

где обозначено

$$H_i(s_1, \dots, s_i) = \prod_{j=1}^i H(s_j). \quad (3.2.9)$$

Пусть, например, линейная часть системы — аperiodическое звено с коэффициентом усиления  $K$  и постоянной

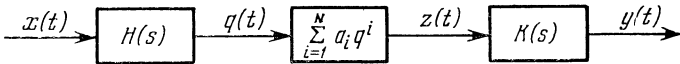


Рис. 3.2.2.

времени  $T$ , т. е.  $H(s) = \frac{K}{Ts+1}$ . Тогда из (3.2.8) получаем

$$H_i(s_1, \dots, s_i) = K^i \prod_{j=1}^i \frac{1}{Ts_j + 1}.$$

Рассмотрим теперь систему, структурная схема которой приведена на рис. 3.2.2. Для этой системы имеем такие уравнения:

$$\left. \begin{aligned}
 Y(s) &= K(s) Z(s), \\
 Z(s) &= \sum_{i=1}^N a_i \left\{ \prod_{j=1}^i Q(s_j) \right\}^*, \\
 Q(s) &= H(s) X(s).
 \end{aligned} \right\} \quad (3.2.10)$$

Применяя формулы (3.2.8) и (3.2.9), получаем

$$Z(s) = \sum_{i=1}^N a_i \left\{ H_i(s_1, \dots, s_i) \prod_{j=1}^i X(s_j) \right\}^*. \quad (3.2.11)$$

Теперь, используя формулу (3.1.27), находим

$$\begin{aligned}
 Y(s) = K(s)Z(s) &= \\
 &= \sum_{i=1}^N a_i K(s) \left\{ H_i(s_1, \dots, s_i) \prod_{j=1}^i X(s_j) \right\}^* = \\
 &= \sum_{i=1}^N a_i \left\{ K \left( \sum_{j=1}^i s_j \right) H_i(s_1, \dots, s_i) \prod_{j=1}^i X(s_j) \right\}^* = \\
 &= \sum_{i=1}^N a_i \left\{ G_i(s_1, \dots, s_i) \prod_{j=1}^i X(s_j) \right\}^*,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 G_i(s_1, \dots, s_i) &= K \left( \sum_{j=1}^i s_j \right) H_i(s_1, \dots, s_i) = \\
 &= K \left( \sum_{j=1}^i s_j \right) \prod_{j=1}^i H(s_j). \quad (3.2.12)
 \end{aligned}$$

В частном случае, когда  $H(s) \equiv 1$ ,

$$G_i(s_1, \dots, s_i) = K \left( \sum_{j=1}^i s_j \right). \quad (3.2.13)$$

Пусть, например  $H(s) = \frac{K}{Ts+1}$ ,  $K(s) = \frac{K_1}{T_1s^2 + T_2s + 1}$ . Тогда по формуле (3.2.12) получаем такие изображения ядер всей системы:

$$G_i(s_1, \dots, s_i) = \frac{K_1 K^i}{T_1 \left( \sum_{j=1}^i s_j \right)^2 + T_2 \left( \sum_{j=1}^i s_j \right) + 1} \prod_{j=1}^i \frac{1}{T s_j + 1}.$$

Если же  $H(s) \equiv 1$ , то по формуле (3.2.13) получим

$$G_i(s_1, \dots, s_i) = \frac{K_1}{T_1 \left( \sum_{j=1}^i s_j \right)^2 + T_2 \left( \sum_{j=1}^i s_j \right) + 1}.$$

С помощью аналогичных преобразований можно определить изображение ядер любого числа последовательных соединений линейных инерционных и нелинейных безынерционных стационарных систем.

Перейдем к общим методам определения изображений ядер систем при преобразовании структурных схем в предположении, что изображения ядер подсистем, состоящих из линейных инерционных и нелинейных безынерционных систем без обратной связи, уже получены.

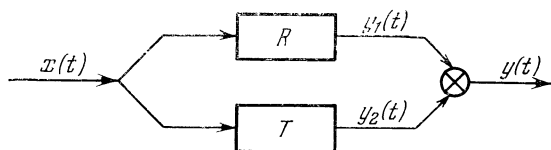


Рис. 3.2.3.

Пусть имеются две системы  $R$  и  $T$  с изображениями ядер

$H_i(s_1, \dots, s_i)$ ,  $i=1, \dots, n$ , и  $K_j(s_1, \dots, s_j)$ ,  $j=1, \dots, m$ .

Соединим их параллельно в соответствии со структурной схемой, приведенной на рис. 3.2.3. Вследствие линейности многомерного преобразования Лапласа получим такой результат:

$$G_i(s_1, \dots, s_i) = H_i(s_1, \dots, s_i) + K_i(s_1, \dots, s_i).$$

Определим теперь изображения ядер произведения этих систем (рис. 3.2.4). Для стационарных систем, применяя теорему о переходе к одной переменной, запишем,

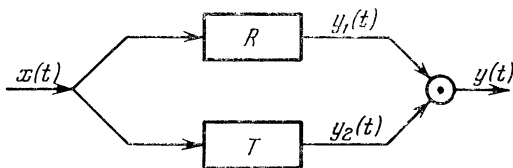


Рис. 3.2.4.

используя символ  $\{ \}_{p=s1}$ , обозначающий оператор перехода к одной переменной  $p$  с последующим

отождествлением  $p = s_i$ :

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \{Y(s_1)Y(s_2)\}^* = \\
 &= \left\{ \sum_{i=1}^m \left\{ K_i(s_1, \dots, s_i) \prod_{r=1}^i X(s_r) \right\}^* \sum_{s=s_1}^n \left\{ H_j(s_1, \dots, s_j) \times \right. \right. \\
 &\times \left. \left. \prod_{r=1}^j X(s_r) \right\}^* \right\}^* = \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left\{ K_i(s_1, \dots, s_i) \prod_{r=1}^i X(s_r) \right\}^* \times \right. \\
 &\times \left. \left\{ H_j(s_1, \dots, s_j) \prod_{r=1}^j X(s_r) \right\}^* \right\}^* = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left\{ K_i(s_1, \dots, s_i) \times \right. \\
 &\times \left. H_j(s_{i+1}, \dots, s_{i+j}) \prod_{r=1}^{i+j} X(s_r) \right\}^*. \quad (3.2.14)
 \end{aligned}$$

Соотношение (3.2.14) можно записать в обычном виде

$$Y(s) = \sum_{i=2}^N \left\{ G_i(s_1, \dots, s_i) \prod_{r=1}^i X(s_r) \right\}^*, \quad N \leq n + m,$$

если сгруппировать изображения ядер одинакового порядка, т. е.

$$\begin{aligned}
 G_2(s_1, s_2) &= K_1(s_1)H_1(s_2), \\
 G_3(s_1, s_2, s_3) &= K_1(s_1)H_2(s_2, s_3) + K_2(s_1, s_2)H_1(s_3),
 \end{aligned}$$

и т. д.

Соединим теперь системы

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= T[Z(s)] = \sum_{i=1}^m \left\{ K_i(s_1, \dots, s_i) \prod_{l=1}^i Z(s_l) \right\}^*, \\
 Z(p) &= R[X(p)] = \sum_{j=1}^n \left\{ H_j(p_1, \dots, p_j) \prod_{r=1}^j X(p_r) \right\}^*
 \end{aligned}$$

последовательно, в соответствии со структурной схемой на рис. 3.2.5. Получим

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \sum_{i=1}^m \left\{ K_i(s_1, \dots, s_i) \prod_{l=1}^i \left[ \sum_{j=1}^n \left\{ H_j(p_1, \dots, p_j) \times \right. \right. \right. \\
 &\times \left. \left. \left. \prod_{r=1}^j X(p_r) \right\}^* \right] \right\}^*. \quad (3.2.15)
 \end{aligned}$$

Запишем формулу (3.2.15) подробнее:

$$\begin{aligned}
 Y(s) = & K_1(s) \sum_{j=1}^n \left\{ H_j(p_1, \dots, p_j) \prod_{r=1}^j X(p_r) \right\}_{p=s}^* + \\
 & + \left\{ K_2(s_1, s_2) \left( \sum_{j=1}^n \left\{ H_j(p_1, \dots, p_j) \prod_{r=1}^j X(p_r) \right\}_{p=s_1}^* \right) \times \right. \\
 & \quad \times \left. \left( \sum_{j=1}^n \left\{ H_j(p_1, \dots, p_j) \prod_{r=1}^j X(p_r) \right\}_{p=s_2}^* \right) \right\}^* + \\
 & + \left\{ K_3(s_1, s_2, s_3) \left( \sum_{j=1}^n \left\{ H_j(p_1, \dots, p_j) \prod_{r=1}^j X(p_r) \right\}_{p=s_1}^* \right) \times \right. \\
 & \quad \times \left. \left( \sum_{j=1}^n \left\{ H_j(p_1, \dots, p_j) \prod_{r=1}^j X(p_r) \right\}_{p=s_2}^* \right) \times \right. \\
 & \quad \times \left. \left. \left( \sum_{j=1}^n \left\{ H_j(p_1, \dots, p_j) \prod_{r=1}^j X(p_r) \right\}_{p=s_3}^* \right) \right) \right\} + \dots \quad (3.2.16)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим последовательно все слагаемые в (3.2.16).

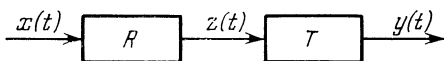


Рис. 3.2.5.

Первое слагаемое, учитывая формулу (3.1.27), преобразуем к такому виду:

$$\begin{aligned}
 K_1(s) \sum_{j=1}^n \left\{ H_j(p_1, \dots, p_j) \prod_{r=1}^j X(p_r) \right\}_{p=s}^* = \\
 = \sum_{j=1}^n \left\{ K_1 \left( \sum_{r=1}^j s_r \right) H_j(s_1, \dots, s_j) \prod_{r=1}^j X(s_r) \right\}^*, \quad (3.2.17)
 \end{aligned}$$

т. е. получим такую последовательность изображения ядер:

$$\begin{aligned}
 & K_1(s_1) H_1(s_1); \quad K_1 \left( \sum_{r=1}^2 s_r \right) H_2(s_1, s_2); \\
 & K_1 \left( \sum_{r=1}^3 s_r \right) H_3(s_1, s_2, s_3); \quad \dots,
 \end{aligned}$$



характеризующую последовательное соединение нелинейной системы с изображениями ядер  $H_i(p_1, \dots, p_i)$  и линейной системы, имеющей передаточную функцию  $K(s)$ .

Второе слагаемое в формуле (3.2.16) представляет собой последовательное соединение нелинейной системы с изображениями ядер  $H_i(p_1, \dots, p_i)$  и нелинейной однородной системы второго порядка с изображениями ядра  $K_2(s_1, s_2)$ . Применяя формулу (3.1.27) по каждой из переменных  $s_1$  и  $s_2$ , получим

$$\begin{aligned} & \left\{ K_2(s_1, s_2) \left( \sum_{j=1}^n \left\{ H_j(p_1, \dots, p_j) \prod_{r=1}^j X(p_r) \right\}_{p=s_1}^* \right) \times \right. \\ & \quad \times \left. \left( \sum_{j=1}^n \left\{ H_j(p_1, \dots, p_j) \prod_{r=1}^j X(p_r) \right\}_{p=s_2}^* \right) \right\}^* = \\ & = \{ K_2(s_1, s_2) H_1(s_1) H_1(s_2) X(s_1) X(s_2) \}^* + \\ & \quad + \left\{ [K_2(s_1 + s_2, s_3) H_2(s_1, s_2) H_1(s_3) + \right. \\ & \quad \left. + K_2(s_1, s_2 + s_3) H_1(s_1) H_2(s_2, s_3)] \prod_{r=1}^3 X(s_r) \right\}^* + \\ & \quad + \left\{ [K_2(s_1 + s_2, s_3 + s_4) H_2(s_1, s_2) H_2(s_3, s_4) + \right. \\ & \quad \left. + K_2(s_1, s_2 + s_3 + s_4) H_1(s_1) H_3(s_2, s_3, s_4) + K_2(s_1 + s_2 + \right. \\ & \quad \left. + s_3, s_4) H_3(s_1, s_2, s_3) H_1(s_4)] \prod_{r=1}^4 X(s_r) \right\}^* + \dots, \quad (3.2.18) \end{aligned}$$

т. е. такую последовательность изображений ядер:

$$\begin{aligned} & K_2(s_1, s_2) \prod_{r=1}^2 H_1(s_r); \quad K_2 \left( s_1, \sum_{r=2}^3 s_r \right) H_1(s_1) H_2(s_2, s_3) + \\ & \quad + K_2 \left( \sum_{r=1}^2 s_r, s_3 \right) H_2(s_1, s_2) H_1(s_3); \dots \quad (3.2.19) \end{aligned}$$

Аналогично вычисляются и остальные слагаемые в сумме (3.2.16). Так, для третьего члена получаем

$$K_2(s_1, s_2, s_3) \prod_{r=1}^3 H_1(s_r); \dots \quad (3.2.20)$$

Группируя в (3.2.17)—(3.2.20) члены одинаковой размерности, получим изображения первых трех ядер всей системы:

$$G_1(s_1) = K_1(s_1)H_1(s_1), \quad (3.2.21)$$

$$G_2(s_1, s_2) = K_1\left(\sum_{r=1}^2 s_r\right)H_2(s_1, s_2) + K_2(s_1, s_2)\prod_{r=1}^2 H_1(s_r), \quad (3.2.22)$$

$$\begin{aligned} G_3(s_1, s_2, s_3) = \\ = K_1\left(\sum_{r=1}^3 s_r\right)H_3(s_1, s_2, s_3) + K_2\left(s_1, \sum_{r=2}^3 s_r\right)H_1(s_1)H_2(s_2, s_3) + \\ + K_2\left(\sum_{r=1}^2 s_r, s_3\right)H_2(s_1, s_2)H_1(s_3) + K_3(s_1, s_2, s_3)\prod_{r=1}^3 H_1(s_r). \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

Если обе системы, соединенные последовательно, «нечетны», то и результирующая система будет «нечетной», т. е.  $G_i \equiv 0$ , если  $i$  — четное. Для «нечетной» системы изображение ядра третьего порядка имеет вид

$$\begin{aligned} G_3(s_1, s_2, s_3) = \\ = K_1\left(\sum_{r=1}^3 s_r\right)H_3(s_1, s_2, s_3) + K_3(s_1, s_2, s_3)\prod_{r=1}^3 H_1(s_r). \end{aligned}$$

Отметим, что формулы (3.2.21)—(3.2.23) могут быть получены, если непосредственно преобразовать по Лапласу формулы (2.2.13)—(2.2.15) [73], [100].

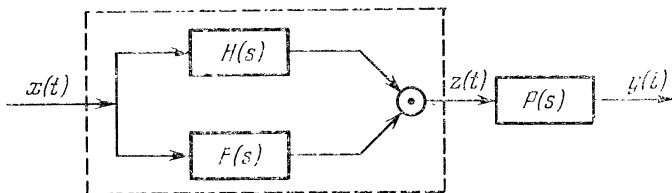


Рис. 3.2.6.

Пусть, например, нелинейная система задается структурной схемой, приведенной на рис. 3.2.6, где

$$H(s) = \frac{K_1}{T_1 s + 1}, \quad F(s) = \frac{K_2}{T_2 s + 1}, \quad P(s) = \frac{K_3}{T_3 s^2 + T_4 s + 1}.$$

Согласно формулам для произведения двух линейных систем, часть системы, обведенная на структурной схеме пунктирной линией, имеет ядро второго порядка, изображение которого таково:

$$W_2(s_1, s_2) = H(s_1)F(s_2) = \frac{K_1 K_2}{(T_1 s_1 + 1)(T_2 s_2 + 1)}.$$

Теперь рассматриваемой системе будет соответствовать структурная схема, приведенная на рис. 3.2.7.

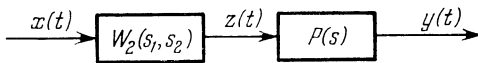


Рис. 3.2.7.

Используя формулы для последовательного соединения линейной и нелинейной систем, получаем окончательно

$$\begin{aligned} G_2(s_1, s_2) &= P(s_1 + s_2)W_2(s_1, s_2) = \\ &= \frac{K_1 K_2 K_3}{(T_3(s_1 + s_2)^2 + T_4(s_1 + s_2) + 1)(T_1 s_1 + 1)(T_2 s_2 + 1)}. \end{aligned}$$

Аналогично решаются и более сложные задачи по определению изображений ядер систем без обратной связи.

Рассмотрим теперь метод получения изображений ядер для систем с обратной связью. Пусть структурная

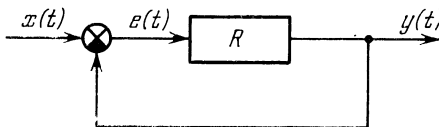


Рис. 3.2.8.

схема системы такова, как показано на рис. 3.2.8, причем система  $R$ , находящаяся в прямой цепи,

описывается соотношением

$$Y(s) = \sum_{i=1}^n \left\{ H_i(s_1, \dots, s_i) \prod_{r=1}^i E(s_r) \right\}^* \quad (3.2.24)$$

Уравнение замыкания имеет вид

$$E(s) = X(s) - Y(s). \quad (3.2.25)$$

Выразив  $Y(s)$  из (3.2.25) через  $X(s)$  и  $E(s)$  и подставив это значение в (3.2.24), получаем уравнение замкнутой системы, записанное относительно сигнала ошибки  $\bar{E}(s)$ :

$$X(s) = [1 + H_1(s)] E(s) + \sum_{i=2}^n \left\{ H_i(s_1, \dots, s_i) \prod_{r=1}^i E(s_r) \right\}^* \quad (3.2.26)$$

Решение уравнения (3.2.26) будем искать в виде ряда

$$E(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ K_i(s_1, \dots, s_i) \prod_{r=1}^i X(s_r) \right\}^* \quad (3.2.27)$$

Если ряд (3.2.27) поставить теперь в уравнение (3.2.26), то это будет соответствовать последовательному соединению этих систем. Изображения первых трех ядер последовательного соединения определяются формулами (3.2.21) — (3.2.23). Для рассматриваемого случая, учитывая, что последовательное соединение систем (3.2.26) и (3.2.27) дает в итоге линейную систему с единичной передаточной функцией, получаем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 1 &= [1 + H_1(s)] K_1(s), \\ 0 &= [1 + H_1(s_1 + s_2)] K_2(s_1, s_2) + H_2(s_1, s_2) K_1(s_1) K_1(s_2), \\ 0 &= [1 + H_1(s_1 + s_2 + s_3)] K_3(s_1, s_2, s_3) + \\ &\quad + H_2(s_1, s_2 + s_3) K_1(s_1) K_2(s_2, s_3) + \\ &\quad + H_2(s_1 + s_2, s_3) K_2(s_1, s_2) K_1(s_3) + \\ &\quad + H_3(s_1, s_2, s_3) K_1(s_1) K_1(s_2) K_1(s_3), \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.2.28)$$

Отсюда находим

$$\left. \begin{aligned}
 K_1(s) &= \frac{1}{1 + H_1(s)}, \\
 K_2(s_1, s_2) &= \frac{-H_2(s_1, s_2)}{[1 + H_1(s_1 + s_2)] \prod_{r=1}^2 [1 + H_1(s_r)]}, \\
 K_3(s_1, s_2, s_3) &= \frac{1}{[1 + H_1(s_1 + s_2 + s_3)] \prod_{r=1}^3 [1 + H_1(s_r)]} \times \\
 &\times \left[ \frac{H_2(s_1, s_2 + s_3) H_2(s_2, s_3)}{1 + H_1(s_2 + s_3)} + \frac{H_2(s_1 + s_2, s_3) H_2(s_1, s_2)}{1 + H_1(s_1 + s_2)} - \right. \\
 &\quad \left. - H_3(s_1, s_2, s_3) \right], \dots
 \end{aligned} \right\} \quad (3.2.29)$$

Для «нечетной» системы ядро третьего порядка имеет вид

$$K_3(s_1, s_2, s_3) = \frac{-H_3(s_1, s_2, s_3)}{\left[ 1 + H_1\left(\sum_{r=1}^3 s_r\right) \right] \prod_{r=1}^3 [1 + H_1(s_r)]}.$$

Для изображений ядер этой же системы по выходному

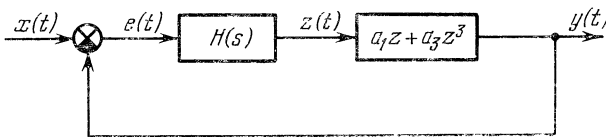


Рис. 3.2.9.

сигналу, учитывая связь ядер по ошибке и выходному сигналу (см. § 2 гл. II), можно записать

$$\left. \begin{aligned}
 W_1(s) &= H_1(s) K_1(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)}, \\
 W_i(s_1, \dots, s_i) &= -K_i(s_1, \dots, s_i), \quad i = 2, 3, \dots
 \end{aligned} \right\} \quad (3.2.30)$$

Рассмотрим для примера часто встречающуюся в приложениях «нечетную» систему с обратной связью, структурная схема которой приведена на рис. 3.2.9.

В прямую цепь этой системы включены: линейная система с передаточной функцией  $H(s)$  и безынерционная нелинейность с характеристикой  $y = a_1 z + a_3 z^3$ . Согласно формулам для последовательного соединения, изображения ядер прямой цепи этой системы имеют вид

$$H_1(s) = a_1 H(s),$$

$$H_3(s_1, s_2, s_3) = a_3 \prod_{r=1}^3 H(s_r),$$

а изображения первых двух ядер системы по сигналу ошибки получаются из формул (3.2.29) такими:

$$\left. \begin{aligned} K_1(s) &= \frac{1}{1 + a_1 H(s)}, \\ K_3(s_1, s_2, s_3) &= \frac{-a_3 \prod_{r=1}^3 H(s_r)}{\left[ 1 + a_1 H\left(\sum_{r=1}^3 s_r\right) \right] \prod_{r=1}^3 [1 + a_1 H(s_r)]}. \end{aligned} \right\} (3.2.31)$$

Пусть, например,  $H(s) = \frac{k}{T_1 s^2 + T_2 s + 1}$ . Тогда из формулы (3.2.31), обозначив  $\beta = 1 + a_1 k$ , найдем

$$K_1(s) = \frac{T_1 s^2 + T_2 s + 1}{T_1 s^2 + T_2 s + \beta},$$

$$K_3(s_1, s_2, s_3) = \frac{-a_3 k^3 \left[ T_1 \left( \sum_{r=1}^3 s_r \right)^2 + T_2 \left( \sum_{r=1}^3 s_r \right) + 1 \right]}{\left[ T_1 \left( \sum_{r=1}^3 s_r \right)^2 + T_2 \left( \sum_{r=1}^3 s_r \right) + \beta \right] \prod_{r=1}^3 [T_1 s_r^2 + T_2 s_r + \beta]}.$$

Для ядер той же системы по входному сигналу получаем из соотношений (3.2.30) такие изображения ядер:

$$W_1(s) = \frac{a_1 k}{T_1 s^2 + T_2 s + \beta},$$

$$W_3(s_1, s_2, s_3) = \frac{a_3 k^3 \left[ T_1 \left( \sum_{r=1}^3 s_r \right)^2 + T_2 \left( \sum_{r=1}^3 s_r \right) + 1 \right]}{\left[ T_1 \left( \sum_{r=1}^3 s_r \right)^2 + T_2 \left( \sum_{r=1}^3 s_r \right) + \beta \right] \prod_{r=1}^3 [T_1 s_r^2 + T_2 s_r + \beta]}.$$

Перейдем теперь к определению изображений ядер для систем, заданных дифференциальным уравнением. В § 3 гл. II было показано, что решение неоднородного нелинейного уравнения

$$Ly + F(y) = x, \quad (3.2.32)$$

где  $L$  — дифференциальный оператор порядка  $n$  с постоянными коэффициентами, а  $F$  — полином, может быть получено для заданных начальных условий в виде ряда Вольтерра. Для стационарной системы этот ряд имеет такой вид:

$$y(t) = y_1(t) + \sum_{i=2}^{\infty} \int_{E_+^i} p_i(t - \tau_1, \dots, t - \tau_i) \prod_{r=1}^i y_1(\tau_r) dv_{\tau}, \quad (3.2.33)$$

где  $y_1(t)$  — это решение неоднородного линейного уравнения

$$Ly_1 = x$$

при начальных условиях, заданных при  $t=0$  для уравнения (3.2.32), т. е.

$$y_1(t) = g(t) + \int_{E_+^1} h(t - \tau) x(\tau) d\tau, \quad (3.2.34)$$

а функция  $g(t)$  определяется начальными условиями.

Ядра ряда (3.2.33) связаны с ядрами ряда

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_+^i} h_i(t - \tau_1, \dots, t - \tau_i) \prod_{r=1}^i x(\tau_r) dv_{\tau}, \quad (3.2.35)$$

полученного для уравнения (3.2.32) при нулевых начальных условиях, уравнениями (2.3.17), которые в рассматриваемом случае имеют такой вид:

$$h_i(\gamma_1, \dots, \gamma_i) = \int_{E_+^i} p_i(\tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i h(\gamma_r - \tau_r) dv_{\tau}, \quad (3.2.36)$$

$$i = 2, \dots, n.$$

Преобразуя обе части равенства (3.2.33) по Лапласу,

получим

$$Y(s) = Y_1(s) + \sum_{i=2}^{\infty} \left\{ P_i(s_1, \dots, s_i) \prod_{r=1}^i Y_1(s_r) \right\}^*, \quad (3.2.37)$$

причем изображение функции  $Y_1(s)$  запишется для начальных условий  $y_\lambda$  в виде [26]

$$Y_1(s) = \frac{\sum_{\lambda=1}^n (a_n s^{n-\lambda} + \dots + a_\lambda) y_{\lambda-1}}{L(s)} + \frac{1}{L(s)} X(s). \quad \cdot$$

Соответственно для ряда (3.2.35) в комплексной области получим

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ H_i(s_1, \dots, s_i) \prod_{r=1}^i X(s_r) \right\}^*. \quad (3.2.38)$$

Ввиду того, что ядра ряда — причинны, соотношение (3.2.36) является сверткой от  $i$  переменных. Определяя преобразование Лапласа от обеих его частей, получаем

$$H_i(s_1, \dots, s_i) = P_i(s_1, \dots, s_i) \prod_{r=1}^i H(s_r), \quad (3.2.39)$$

или, учитывая, что  $H(s) = \frac{1}{L(s)}$ ,

$$P_i(s_1, \dots, s_i) = \frac{H_i(s_1, \dots, s_i)}{\prod_{r=1}^i H(s_r)} = H_i(s_1, \dots, s_i) \prod_{r=1}^i L(s_r), \quad (3.2.40)$$

$$i = 2, \dots, n.$$

Изображения ядер  $H_i(s_1, \dots, s_i)$  могут быть получены методом итераций или подстановки с использованием формулы для последовательного соединения нелинейных систем (см. § 3 гл. II).

Рассмотрим метод итераций. Нелинейность  $F$  по предположению (см. § 3 гл. II) имеет вид  $F(y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}) = \sum_{i=2}^N c_i \left( \sum_{j=0}^{n-1} p_j \frac{d^j y}{dt^j} \right)$ . Следовательно, для уравнения (3.2.32) при нулевых начальных условиях можно



записать следующую итерационную схему решения:

$$\left. \begin{aligned} y_1(t) &= \int_{E_1}^+ h(t-\tau) x(\tau) d\tau, \\ y_i(t) &= y_1(t) - \int_{E_1}^+ h(t-\tau) \sum_{i=2}^N c_i \left( \sum_{l=0}^{i-1} p_l \frac{d^l}{d\tau^l} y_{i-1}(\tau) \right)^i d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.41)$$

Вторую формулу в системе (3.2.41) преобразуем к виду

$$y_i(t) = y_1(t) - \sum_{i=2}^N c_i \int_{E_1}^+ h(t-\tau) \left( \sum_{l=0}^{i-1} p_l \frac{d^l}{d\tau^l} y_{i-1}(\tau) \right)^i d\tau. \quad (3.2.42)$$

Из соотношений (3.2.41) и (3.2.42) получаем итерационную формулу, определяющую изображения ядер системы (3.2.32) при нулевых начальных условиях:

$$\left. \begin{aligned} Y_1(s) &= H(s) X(s), \\ Y_i(s) &= Y_1(s) - \\ &- \sum_{i=2}^N c_i \left\{ H \left( \sum_{r=1}^i s_r \right) \prod_{r=1}^i \left( \sum_{l=0}^{i-1} p_l s_r^l Y_{i-1}(s_r) \right) \right\}^* \end{aligned} \right\} \quad (3.2.43)$$

Пусть, например, требуется решить нелинейное дифференциальное уравнение

$$y^{(3)} + a_2 y^{(2)} + a_1 y^{(1)} + a_0 y + \varepsilon (y^{(1)})^3 = x$$

при нулевых начальных условиях. Из формул (3.2.43) находим

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}, \\ H_3(s_1, s_2, s_3) &= -\varepsilon \frac{1}{\left( \sum_{i=1}^3 s_i \right)^3 + a_2 \left( \sum_{i=1}^3 s_i \right)^2 + a_1 \left( \sum_{i=1}^3 s_i \right) + a_0} \times \\ &\quad \times \prod_{i=1}^3 \frac{s_i}{s_i^3 + a_2 s_i^2 + a_1 s_i + a_0}. \end{aligned}$$

Пусть теперь начальные условия — ненулевые. Тогда по формуле (3.2.40) определяем

$$P_3(s_1, s_2, s_3) = -\varepsilon \frac{\prod_{i=1}^3 s_i}{\left(\sum_{i=1}^3 s_i\right)^3 + a_3 \left(\sum_{i=1}^3 s_i\right)^2 + a_1 \left(\sum_{i=1}^2 s_i\right) + a_0}.$$

Методы преобразования структурных схем стационарных систем, рассмотренные выше, в некоторых случаях могут быть применены и для анализа нестационарных систем с помощью введения «замороженных» коэффициентов [7]. Предполагается, что в линейном нестационарном дифференциальном уравнении

$$Ly = Mx,$$

где

$$L = \sum_{i=0}^n a_i(t) \frac{d^i}{dt^i}, \quad M = \sum_{i=0}^m b_i(t) \frac{d^i}{dt^i}, \quad m \leq n,$$

коэффициенты дифференциальных операторов являются медленно меняющимися функциями времени и передаточная функция определяется так:

$$H(s, t) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i(t) s^i}{\sum_{i=0}^n a_i(t) s^i}. \quad (3.2.44)$$

Пусть нелинейная нестационарная система имеет структурную схему, приведенную на рис. 3.2.10, причем

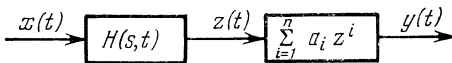


Рис. 3.2.10.

нестационарная линейная часть характеризуется передаточной функцией, полученной методом «замороженных» коэффициентов. Применив формальные правила



Рассмотрим нелинейную стационарную систему, заданную двумя изображениями ядер

$$\left. \begin{aligned} H_1(s) &= \frac{1}{s+1}, \\ H_3(s_1, s_2, s_3) &= \frac{-a}{\left(\sum_{i=1}^3 s_i + 1\right) \prod_{i=1}^3 (s_i + 1)} \end{aligned} \right\} \quad (3.3.3)$$

Имеем равенство

$$Y(s) = H_1(s) X(s) + \left\{ H_3(s_1, s_2, s_3) \prod_{i=1}^3 X(s_i) \right\}^*$$

Подставляя в него  $X(s) = 1$  и выражения для изображений ядер (3.3.3), находим изображение реакции системы на  $\delta$ -функцию

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s+1} - a \left\{ \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^3 s_i + 1\right) \prod_{i=1}^3 (s_i + 1)} \right\}^* = \\ &= \frac{1}{s+1} - \frac{a}{s+1} \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^3 (s_i + 1)} \right\}^*. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Применяя следствие в) из теоремы о переходе к одной переменной в комплексной области (см. § 1) и учитывая, что  $\frac{1}{s+1} \doteq \exp(-t)$ ,  $\prod_{i=1}^3 \exp(-t) = \exp(-3t) \doteq \frac{1}{s+3}$ , находим

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s+1} - \frac{a}{(s+1)(s+3)} \cdot \\ &\doteq \exp(-t) - \frac{a}{2} [\exp(-t) - \exp(-3t)]. \end{aligned}$$

Если на вход системы поступает ступенчатое воздействие  $x(t) = A\mathbf{1}(t)$ , то тогда  $X(s) = A/s$  и из (3.3.1) получим

$$Y(s) = \sum_{i=1}^N A_i \left\{ \frac{H_i(s_1, \dots, s_i)}{\prod_{r=1}^i s_r} \right\}^*. \quad (3.3.5)$$

Рассмотрим при нулевых начальных условиях дифференциальное уравнение

$$\dot{y} + y + ay^2 = x.$$

Изображения первых двух ядер этой системы получаются такими:

$$H_1(s) = \frac{1}{s+1}, \quad H_2(s_1, s_2) = \frac{-a}{(s_1 + s_2 + 1)(s_1 + 1)(s_2 + 1)}.$$

Определим реакцию системы на единичное ступенчатое воздействие\*). Учитывая формулу (3.3.1) и применяя следствие б) из теоремы о переходе к одной переменной в комплексной области, найдем

$$\begin{aligned} Y(s) &\simeq \frac{1}{(s+1)s} - \left\{ \frac{a}{(s_1 + s_2 + 1)(s_1 + 1)(s_2 + 1)s_1 s_2} \right\}^* = \\ &= \frac{1}{(s+1)s} - \frac{a}{s+1} \left\{ \frac{1}{(s_1 + 1)s_1(s_2 + 1)s_2} \right\}^*. \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Выражение

$$\left\{ \frac{1}{(s_1 + 1)s_1(s_2 + 1)s_2} \right\}^* = \frac{1}{2\pi j} \int_{Br_1} \frac{ds_1}{s_1(s_1 + 1)(s - s_1)(s - s_1 + 1)} \quad (3.3.7)$$

легко вычисляется с помощью теоремы о вычетах [1]. Корни равны  $s_1 = 0$ ,  $s_1 = -1$ . Отсюда получаем

$$Y(s) \simeq \frac{1}{(s+1)s} - \frac{a}{s+1} \left[ \frac{1}{s(s+1)} - \frac{1}{(s+1)(s+2)} \right]. \quad (3.3.8)$$

Интеграл (3.3.7) можно вычислить и по-другому, применив следствие в) из теоремы о переходе к одной переменной в комплексной области. Учитывая, что оригинал от  $\frac{1}{(s+1)s}$  имеет вид  $f(t) = 1 - \exp(-t)$ , получим

$$f(t) f(t) = 1 - 2\exp(-t) + \exp(-2t) \doteq \frac{1}{s} - \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s+2}$$

---

\*) В предположении, что радиус сходимости ряда Вольтерра больше единицы (используя материал § 4 гл. II, нетрудно показать, что для этого должно выполняться условие  $a < 1/4$ ).

И

$$Y(s) \simeq \frac{1}{(s+1)s} - \frac{a}{(s+1)} \left[ \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2} \right]. \quad (3.3.9)$$

Нетрудно заметить, что формулы (3.3.8) и (3.3.9) тождественно совпадают. Окончательно получаем

$$y(t) \simeq (1 - \exp(-t)) - a \left[ (1 - \exp(-t)) + (\exp(-t) - \exp(-2t)) - 2t \exp(-t) \right]. \quad (3.3.10)$$

Для определения установившейся реакции системы (3.3.1) на ступенчатое воздействие  $A1(t)$ , используя теорему об установившемся значении, получим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^N A^i \left\{ \lim_{s_1, \dots, s_n \rightarrow 0} \frac{\prod_{r=1}^i s_r H_i(s_1, \dots, s_i)}{\prod_{r=1}^i s_r} \right\}^* = \sum_{i=1}^N A^i H_i(0, \dots, 0).$$

Пользуясь аналогичной методикой, можно определить реакцию нелинейной системы на произвольное регулярное воздействие, имеющее преобразование Лапласа. При переходе к одной переменной используются следствия а) — д) из теоремы о переходе к одной переменной, теорема о вычетах, или таблицы, приведенные в приложении.

Одномерный оригинал выходного сигнала системы (3.3.1) можно определить и не используя теорему о переходе к одной переменной в комплексной области, по формуле, следующей из равенства (3.1.22):

$$y(t) = \sum_{i=1}^N y_i(t_1, \dots, t_i) \Big|_{t_1 = \dots = t_i = t},$$

где  $y_i(t_1, \dots, t_i) \doteq H_i(s_1, \dots, s_i) \prod_{r=1}^i X(s_r)$ .

В этом случае используется метод определения многомерных оригиналов, рассмотренный в § 1 этой главы \*)

\*) Помимо этого метода существует метод получения многомерных оригиналов с помощью систем ортогональных функций. Этот метод подробно рассмотрен в работе [25].

и затем производится отождествление переменных  $t_1 = \dots = t_i = t$ .

Пусть теперь на стационарную систему, представленную рядом Вольтерра, действует сигнал  $x(\tau)$ , являющийся аналитической функцией. Разложим его в окрестности точки  $t$  в ряд Тейлора

$$x(t - \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \frac{d^i x(t)}{dt^i} \tau^i. \quad (3.3.11)$$

Установившийся сигнал в системе можно, используя формулу (3.3.11), записать так:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{E_+^1} h_1(\tau) x(t - \tau) d\tau + \int_{E_+^2} h_2(\tau_1, \tau_2) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\nu_{\tau} + \\ &+ \int_{E_+^3} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) x(t - \tau_3) d\nu_{\tau} + \dots = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \frac{d^i x(t)}{dt^i} \int_{E_+^1} \tau^i h_i(\tau) d\tau + \\ &+ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+j}}{i! j!} \frac{d^i x(t)}{dt^i} \frac{d^j x(t)}{dt^j} \int_{E_+^2} \tau_1^i \tau_2^j h_2(\tau_1, \tau_2) d\nu_{\tau} + \\ &+ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+j+k}}{i! j! k!} \frac{d^i x(t)}{dt^i} \frac{d^j x(t)}{dt^j} \frac{d^k x(t)}{dt^k} \times \\ &\quad \times \int_{E_+^3} \tau_1^i \tau_2^j \tau_3^k h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) d\nu_{\tau} + \dots \quad (3.3.12) \end{aligned}$$

Величины

$$\mu_{ij\dots l}^n = \int_{E_+^n} \tau_1^i \tau_2^j \dots \tau_n^l h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) d\nu_{\tau} \quad (3.3.13)$$

называются *моментами ядер системы*. Их можно

вычислить, дифференцируя соотношение (3.1.3), т. е.

$$\frac{\partial^i \partial^j \dots \partial^l \{H_n(s_1, s_2, \dots, s_n)\}}{\partial s_1^i \partial s_2^j \dots \partial s_n^l} = (-1)^{+j+\dots+l} \times$$

$$\times \int_{E_+^n} \tau_1^i \tau_2^j \dots \tau_n^l h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \exp\left(-\sum_{k=1}^n s_k \tau_k\right) d\nu_\tau. \quad (3.3.14)$$

Положим теперь в (3.3.14)  $s_k=0, k=1, \dots, n$ . Тогда

$$\mu_{ij\dots l}^n = (-1)^{i+j+\dots+l} \left. \frac{\partial^i \partial^j \dots \partial^l \{H_n(s_1, s_2, \dots, s_n)\}}{\partial s_1^i \partial s_2^j \dots \partial s_n^l} \right|_{\substack{s_k=0 \\ k=1, \dots, n}} \quad (3.3.15)$$

Определив моменты  $\mu_{ij\dots l}^n$  можно вычислить реакцию  $y(t)$  на воздействие  $x(t)$  по формуле

$$y_{i_1, \dots, i_l}^l = \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{j_1=0}^{\infty} \dots \sum_{j_l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\sum j_i}}{j_1! \dots j_l!} \mu_{i_1 \dots i_l}^l \right\}. \quad (3.3.16)$$

Определим теперь установившуюся реакцию полиномиальной системы на входной сигнал, являющийся периодической функцией, представленной рядом Фурье

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(j\omega n t). \quad (3.3.17)$$

Пусть, в частности,

$$x(t) = C_1 \exp(j\omega t) + C_{-1} \exp(-j\omega t). \quad (3.3.18)$$

Будем считать, что все ядра имеют изображения по Фурье. Выходной сигнал системы при воздействии типа (3.3.18) получится в виде

$$Y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n(j\omega) \exp(j\omega n t). \quad (3.3.19)$$

Для определения в формуле (3.3.19) коэффициентов  $d_n(j\omega)$ , зависящих от частоты  $\omega$ , произведем следующие



выкладки:

$$v_1[\exp(j\omega t)] = \int_{E^1} h_1(\tau) \exp(j\omega t - j\omega\tau) d\tau = H_1(j\omega) \exp(j\omega t), \quad (3.3.20)$$

$$v_2[\exp(j\omega t)] = \int_{E^2} h_2(\tau_1, \tau_2) \exp(j2\omega t - j\omega\tau_1 - j\omega\tau_2) dv_\tau = \\ = H_2(j\omega, j\omega) \exp(j2\omega t), \quad (3.3.21)$$

$$v_3[\exp(j\omega t)] = \int_{E^3} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \exp(j3\omega t - j\omega\tau_1 - j\omega\tau_2 - j\omega\tau_3) dv_\tau = \\ = H_3(j\omega, j\omega, j\omega) \exp(j3\omega t), \quad (3.3.22)$$

$$v_1[\exp(-j\omega t)] = \int_{E^1} h_1(\tau) \exp(-j\omega t + j\omega\tau) d\tau = \\ = H_1(-j\omega) \exp(-j\omega t), \quad (3.3.23)$$

$$v_2[\exp(-j\omega t)] = \int_{E^2} h_2(\tau_1, \tau_2) \exp(-j2\omega t + j\omega\tau_1 + j\omega\tau_2) d\tau = \\ = H_2(-j\omega, -j\omega) \exp(-j2\omega t), \quad (3.3.24)$$

$$v_3[\exp(-j\omega t)] = \int_{E^3} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \exp(-j3\omega t + j\omega\tau_1 + j\omega\tau_2 + j\omega\tau_3) dv_\tau = \\ = H_3(-j\omega, -j\omega, -j\omega) \exp(-j3\omega t). \quad (3.3.25)$$

Вычислим следующие выражения:

$$\int_{E^2} h_2(\tau_1, \tau_2) \exp(j\omega t - j\omega\tau) \exp(-j\omega t + j\omega\tau) dv_\tau = \\ = H_2(j\omega, -j\omega), \quad (3.3.26)$$

$$\int_{E^3} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \exp(j\omega t - j\omega\tau_1) \exp(j\omega t - j\omega\tau_2) \times \\ \times \exp(-j\omega t + j\omega\tau_3) dv_\tau = H_3(j\omega, j\omega, -j\omega) \exp(j\omega t). \quad (3.3.27)$$

Пусть все ядра системы симметричны, а система «нечет-

на» и имеет пятую степень. Тогда коэффициент  $d_1(j\omega)$  в (3.3.19) после группировки соответствующих членов в (3.3.20) — (3.3.27) и аналогичных выкладок для ядра пятого порядка, которые здесь не приводятся, получится в таком виде:

$$d_1(j\omega) = C_1 H_1(j\omega) + 3C_1^2 C_{-1} H_3(-j\omega, j\omega, j\omega) + \\ + 10C_1^3 C_1^2 H_5(-j\omega, -j\omega, j\omega, j\omega, j\omega). \quad (3.3.28)$$

Разделив  $d_1(j\omega)$  на  $C_1$ , получим эквивалентную амплитудно-фазовую частотную характеристику  $G_3(j\omega)$  нелинейной полиномиальной системы пятой степени

$$G_3(j\omega) = H_1(j\omega) + 3(C_1 C_{-1}) H_3(-j\omega, j\omega, j\omega) + \\ + 10(C_1 C_{-1})^2 H_5(-j\omega, -j\omega, j\omega, j\omega, j\omega). \quad (3.3.29)$$

Из (3.3.29) видно, что, в отличие от частотной характеристики линейной системы,  $G_3(j\omega)$  зависит от  $C_1 C_{-1}$ . В частности, для системы третьей степени (3.3.3) получаем

$$G_3(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega} - \frac{3a(C_1 C_{-1})}{(1 + j\omega)^2 (1 - \omega^2)}.$$

Для нечетной аналитической системы  $G_3(j\omega)$  является степенным рядом от  $(C_1 C_{-1})$ . Числовые коэффициенты при ядрах в этом ряду задаются формулой

$$\frac{n!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)! \left(\frac{n+1}{2}\right)!}.$$

В общем случае, когда система имеет и ядра четного порядка, получим из формул (3.3.20) — (3.3.27) такие коэффициенты  $d_n(j\omega)$  в (3.3.19):

$$d_0(j\omega) = 2C_1 C_{-1} H_2(j\omega, -j\omega) + \dots,$$

$$d_1(j\omega) = C_1 H_1(j\omega) + 3C_1^2 C_{-1} H_3(-j\omega, j\omega, j\omega) + \dots,$$

$$d_{-1}(j\omega) = C_{-1} H_1(-j\omega) + 3C_{-1}^2 C_1 H_3(-j\omega, -j\omega, j\omega) + \dots,$$

$$d_2(j\omega) = C_1^2 H_2(j\omega, j\omega) + \dots,$$

$$d_{-2}(j\omega) = C_{-1}^2 H_2(-j\omega, -j\omega) + \dots,$$

$$d_3(j\omega) = C_1^3 H_3(j\omega, j\omega, j\omega) + \dots,$$

$$d_{-3}(j\omega) = C_{-1}^3 H_3(-j\omega, -j\omega, -j\omega) + \dots$$

Числовые коэффициенты при  $H_i$  являются соответствующими коэффициентами бинома Ньютона. Отметим, что коэффициенты ряда (3.3.19)  $d_n(j\omega)$  и  $d_{-n}(j\omega)$  являются комплексно сопряженными величинами.

#### § 4. Применение многомерного преобразования Фурье при статистическом анализе нелинейных систем

Использование теории многомерного преобразования Фурье существенно упрощает статистический анализ стационарных нелинейных систем за счет перехода из временной области в частотную и использования многомерных спектральных плотностей. *Спектральная плотность порядка  $n$  ( $n$ -мерная спектральная плотность)* стационарного случайного процесса  $x(t)$  с нулевым математическим ожиданием определяется как преобразование Фурье по  $n$  переменным от момента порядка  $n$ , т. е.

$$\Phi_x^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_n) = \int_{E^n} m_x^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n) \exp\left(-j \sum_{i=1}^n \omega_i \tau_i\right) dv_\tau.$$

Применяя формулу обратного многомерного преобразования Фурье по  $n$  переменным от функции  $\Phi_x^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_n)$ , получим

$$\begin{aligned} m_x^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n) &= \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{E^n} \Phi_x^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_n) \exp\left(j \sum_{i=1}^n \omega_i \tau_i\right) dv_\omega. \end{aligned}$$

Аналогичными соотношениями связаны и многомерные взаимные спектральные плотности и моменты, т. е.

$$\begin{aligned} \Phi_{xy}^{(il)}(\omega_1, \dots, \omega_n) &= \\ &= \int_{E^n} m_{xy}^{(il)}(\tau_1, \dots, \tau_n) \exp\left(-j \sum_{i=1}^n \omega_i \tau_i\right) dv_\tau, \quad i + l = n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{yx}^{(il)}(\tau_1, \dots, \tau_n) &= \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{E^n} \Phi_{xy}^{(il)}(\omega_1, \dots, \omega_n) \exp\left(j \sum_{i=1}^n \omega_i \tau_i\right) dv_\omega, \quad i + l = n. \end{aligned}$$

Пусть, например, нелинейная система задается полиномом Вольтерра второй степени

$$y(t) = \int_{E^1} h_1(\tau) x(t-\tau) d\tau + \int_{E^2} h_2(\tau_1, \tau_2) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) dv_{\tau}, \quad (3.4.1)$$

а  $x(t)$  — это выборочная функция стационарного случайного процесса, имеющего нулевое математическое ожидание. Определим установившееся значение математического ожидания выходного сигнала этой системы. Имеем согласно определению математического ожидания

$$\begin{aligned} m_y &= \int_{E^1} h_1(\tau) \overline{x(t-\tau)} d\tau + \int_{E^2} h_2(\tau_1, \tau_2) \overline{x(t-\tau_1) x(t-\tau_2)} dv_{\tau} = \\ &= \int_{E^2} h_2(\tau_1, \tau_2) K_x(\tau_1 - \tau_2) dv_{\tau}. \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

Используя выражение для обычной спектральной плотности

$$\Phi_x(\omega) = \int_{E^1} K_x(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau,$$

найдем сопряженное преобразование Фурье от корреляционной функции  $K_x(\tau_1 - \tau_2)$

$$\begin{aligned} \int_{E^2} K_x(\tau_1 - \tau_2) \exp\left(j \sum_{i=1}^2 \omega_i \tau_i\right) dv_{\tau} &= \\ &= \int_{E^2} K_x(T) \exp\left(j\tau_1 \sum_{i=1}^2 \omega_i\right) \exp(-j\omega_2 T) d\tau_1 dT = \\ &= \Phi_x(\omega_2) 2\pi \delta(\omega_1 + \omega_2). \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

В (3.4.3) было обозначено  $\tau_1 - \tau_2 = T$  и учитывалось, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{E^1} \exp(j\omega\tau) d\tau = \delta(\omega). \quad (3.4.4)$$

Используя соотношение (3.4.3) и формулу Парсеваля

для правой части (3.4.2), запишем:

$$\begin{aligned} \int_{E^2} h_2(\tau_1, \tau_2) K_x(\tau_1 - \tau_2) dv_\tau &= \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{E^2} H_2(j\omega_1, j\omega_2) \Phi_x(\omega_2) 2\pi\delta(\omega_1 + \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{E^1} H_2(-j\omega, j\omega) \Phi_x(\omega) d\omega, \end{aligned}$$

т. е.

$$m_y = \frac{1}{2\pi} \int_{E^1} H_2(-j\omega, j\omega) \Phi_x(\omega) d\omega. \quad (3.4.5)$$

Подсчитаем теперь корреляционную функцию выходного сигнала системы (3.4.1). Согласно определению этой функции получим

$$K_y(\tau) = \overline{(y(t) - m_y)(y(t + \tau) - m_y)} = \overline{y(t)y(t + \tau)} - m_y^2. \quad (3.4.6)$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \overline{y(t)y(t + \tau)} &= \int_{E^2} h_1(\tau_1) h_1(\tau_2) \overline{x(t - \tau_1)x(t + \tau - \tau_2)} dv_\tau + \\ &+ \int_{E^3} h_1(\tau_1) h_2(\tau_2, \tau_3) \overline{x(t - \tau_1)x(t + \tau - \tau_2)x(t + \tau - \tau_3)} dv_\tau + \\ &+ \int_{E^3} h_2(\tau_1, \tau_2) h_1(\tau_3) \overline{x(t - \tau_1)x(t - \tau_2)x(t + \tau - \tau_3)} dv_\tau + \\ &+ \int_{E^4} h_2(\tau_1, \tau_2) h_2(\tau_3, \tau_4) \times \\ &\quad \times \overline{x(t - \tau_1)x(t - \tau_2)x(t + \tau - \tau_3)x(t + \tau - \tau_4)} dv_\tau + \\ &= \int_{E^2} h_1(\tau_1) h_1(\tau_2) K_x(\tau - \tau_2 + \tau_1) dv_\tau + \\ &+ \int_{E^3} h_1(\tau_1) h_2(\tau_2, \tau_3) m_x^{(3)}(\tau - \tau_2 + \tau_1, \tau - \tau_3 + \tau_1) dv_\tau + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{E^3} h_2(\tau_1, \tau_2) h_1(\tau_3) m_x^{(3)}(\tau_3 - \tau - \tau_1, \tau_2 - \tau - \tau_1) dv_\tau + \\
& + \int_{E^4} h_2(\tau_1, \tau_2) h_2(\tau_3, \tau_4) m_x^{(4)}(\tau_1 - \tau_2, \tau - \tau_3 + \tau_1, \tau - \tau_4 + \tau_1) dv_\tau.
\end{aligned} \tag{3.4.7}$$

Вычислим все слагаемые в (3.4.7). Применяя формулу Парсеваля и фильтрующее свойство  $\delta$ -функции с учетом того, что по теореме запаздывания для многомерного преобразования Фурье

$$\begin{aligned}
m_x^{(n)}(\tau + \xi_1, \dots, \tau + \xi_n) & \doteq \Phi_x^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_n) \exp\left(j\tau \sum_{i=1}^n \omega_i\right), \\
m_x^{(n)}(\xi_1 - \tau, \dots, \xi_n - \tau) & \doteq \Phi_x^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_n) \exp\left(-j\tau \sum_{i=1}^n \omega_i\right),
\end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned}
\int_{E^2} h_1(\tau_1) h_1(\tau_2) K_x(\tau - \tau_2 + \tau_1) dv_\tau = \\
= \frac{1}{2\pi} \int_{E^1} H_1(j\omega) H_1(-j\omega) \Phi_x(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega, \tag{3.4.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{E^3} h_1(\tau_1) h_2(\tau_2, \tau_3) m_x^{(3)}(\tau - \tau_2 + \tau_1, \tau - \tau_3 + \tau_1) dv_\tau = \\
= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{E^2} H_1(-j\omega_2 - j\omega_3) H_2(j\omega_2, j\omega_3) \Phi_x^{(3)}(\omega_2, \omega_3) \times \\
\times \exp[j\tau(\omega_2 + \omega_3)] d\omega_2 d\omega_3, \tag{3.4.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{E^3} h_2(\tau_1, \tau_2) h_1(\tau_3) m_x^{(3)}(\tau_3 - \tau - \tau_1, \tau_3 - \tau - \tau_1) dv_\tau = \\
= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{E^2} H_2(j\omega_1, j\omega_2) H_1(-j\omega_1 - j\omega_2) \Phi_x^{(3)}(\omega_1, \omega_2) \times \\
\times \exp[-j\tau(\omega_1 + \omega_2)] d\omega_1 d\omega_2, \tag{3.4.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{E^4} h_2(\tau_1, \tau_2) h_2(\tau_3, \tau_4) m_x^{(4)}(\tau_1 - \tau_2, \tau - \tau_3 + \tau_1, \tau - \tau_4 + \tau_1) dv_\tau = \\
= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{E^3} H_2(-j\omega_2 - j\omega_3 - j\omega_4, j\omega_2) H_2(j\omega_3, j\omega_4) \times \\
\times \Phi_x^{(4)}(\omega_2, \omega_3, \omega_4) \exp[j\tau(\omega_3 + \omega_4)] dv_\omega. \tag{3.4.11}
\end{aligned}$$

Аналогично выводятся формулы и для моментов высших порядков \*).

Для практики важным является случай, когда входной сигнал представляет собой стационарный процесс:

$$\begin{aligned}x(t) &= m_x + x_0(t), \\m_x &= \text{const}, \\M\{x_0(t)\} &= 0,\end{aligned}\tag{3.4.12}$$

и имеет нормальное распределение.

Исследуем сначала полиномиальные системы второй степени (3.4.1) в предположении, что ядро второго порядка симметрично. Подставив (3.4.12) в (3.4.1) и меняя порядок усреднения и интегрирования, получим такое выражение для математического ожидания реакции системы:

$$\begin{aligned}m_y &= \int_{E^1} h_1(\tau) \overline{x(t-\tau)} d\tau + \int_{E^2} h_2(\tau_1, \tau_2) \overline{x(t-\tau_1) x(t-\tau_2)} dv_\tau = \\&= \int_{E^1} h_1(\tau) m_x d\tau + \int_{E^2} h_2(\tau_1, \tau_2) m_x^2 dv_\tau + \\&+ \int_{E^2} h_2(\tau_1, \tau_2) K_x(\tau_1 - \tau_2) dv_\tau.\end{aligned}\tag{3.4.13}$$

Применяя формулу (3.1.5) из § 1 этой главы, первые два интеграла в (3.4.13) можно записать так:

$$\begin{aligned}\int_{E^1} h_1(\tau) m_x d\tau &= m_x H_1(0), \\ \int_{E^2} h_2(\tau_1, \tau_2) m_x^2 dv_\tau &= m_x^2 H_2(0, 0).\end{aligned}$$

Последнее слагаемое в (3.4.13) было вычислено ранее (формула (3.4.5)). Окончательно математическое

---

\*) Некоторые формулы для этих характеристик имеются в работах [73], [100].

ожидание сигнала принимает такой вид:

$$m_y = H_1(0) m_x + H_2(0, 0) m_x^2 + \frac{1}{2\pi} \int_{E^1} H_2(-j\omega, j\omega) \Phi_x(\omega) d\omega. \quad (3.4.14)$$

Найдем взаимно-корреляционную функцию входного и выходного сигналов для системы (3.4.1). Согласно определению и учитывая, что процесс — нормальный, а ядро второго порядка симметрично, получаем

$$\begin{aligned} K_{xy}(\xi) &= \overline{x_0(t) y(t + \xi)} = \int_{E^1} h_1(\tau) \overline{x_0(t) (m_x + x_0(t + \xi - \tau))} d\tau + \\ &+ \int_{E^2} h_2(\tau_1, \tau_2) \overline{x_0(t) (m_x + x_0(t + \xi - \tau_1)) (m_x + x_0(t + \xi - \tau_2))} dv_\tau = \\ &= \int_{E^1} h_1(\tau) K_x(\xi - \tau) d\tau + 2 \int_{E^2} h_2(\tau_1, \tau_2) m_x K_x(\xi - \tau_2) dv_\tau. \end{aligned}$$

Снова, применив соотношение (3.1.5) и формулу Парсеваля, получим

$$K'_{xy}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{E^1} \{H_1(j\omega) + 2m_x H_2(0, j\omega)\} \Phi_x(\omega) \exp(j\omega\xi) d\omega. \quad (3.4.15)$$

Вычислим автокорреляционную функцию сигнала  $y(t)$ . Имеем

$$\begin{aligned} K_y(\xi) &= \overline{(y(t) - m_y)(y(t + \xi) - m_y)} = \\ &= \int_{E^2} h_1(\tau_1) h_1(\tau_2) \overline{x_0(t - \tau_1) x_0(t + \xi - \tau_2)} dv_\tau + \\ &+ 2m_x \int_{E^3} h_1(\tau_1) h_2(\tau_2, \tau_3) \overline{x_0(t - \tau_1) x_0(t + \xi - \tau_2)} dv_\tau + \\ &+ 2m_x \int_{E^3} h_1(\tau_1) h_2(\tau_2, \tau_3) \overline{x_0(t - \xi - \tau_1) x_0(t - \tau_2)} dv_\tau + \\ &+ 4m_x^2 \int_{E^4} h_2(\tau_1, \tau_2) h_2(\tau_3, \tau_4) \overline{x_0(t - \tau_1) x_0(t - \xi - \tau_3)} dv_\tau + \\ &+ \int_{E^4} h_2(\tau_1, \tau_2) h_2(\tau_3, \tau_4) \left[ \overline{x_0(t - \tau_1) x_0(t - \tau_2) x_0(t + \xi - \tau_3)} \times \right. \\ &\quad \left. \times \overline{x_0(t + \xi - \tau_4)} - K_x(\tau_1 - \tau_2) K_x(\tau_3 - \tau_4) \right] dv_\tau. \quad (3.4.16) \end{aligned}$$

Вычислим каждый член выражения (3.4.16), применяя,



как и выше, формулу Парсеваля и формулу (3.1.5):

$$\int_{\dot{E}^2} h_1(\tau_1) h_1(\tau_2) \overline{x_0(t - \tau_1) x_0(t + \xi - \tau_2)} dv_\tau = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{\dot{E}^1} H_1(j\omega) H_1(-j\omega) \Phi_x(\omega) \exp(j\omega\xi) d\omega,$$

$$2m_x \int_{\dot{E}^2} h_1(\tau_1) h_2(\tau_2, \tau_3) \overline{x_0(t - \tau_1) x_0(t + \xi - \tau_2)} dv_\tau = \\ = \frac{m_x}{\pi} \int_{\dot{E}^1} H_1(j\omega) H_2(-j\omega, 0) \Phi_x(\omega) \exp(-j\omega\xi) d\omega,$$

$$4m_x^2 \int_{\dot{E}^4} h_2(\tau_1, \tau_2) h_2(\tau_3, \tau_4) \overline{x_0(t - \tau_1) x_0(t + \xi - \tau_3)} dv_\tau = \\ = \frac{2m_x^2}{\pi} \int_{\dot{E}^1} H_2(j\omega, 0) H_2(-j\omega, 0) \Phi_x(\omega) \exp(j\omega\xi) d\omega,$$

$$2m_x \int_{\dot{E}^2} h_1(\tau_1) h_2(\tau_1, \tau_2) \overline{x_0(t + \xi - \tau_1) x_0(t - \tau_2)} dv_\tau = \\ = \frac{m_x}{\pi} \int_{\dot{E}^1} H_1(j\omega) H_2(-j\omega, 0) \Phi_x(\omega) \exp(-j\omega\xi) d\omega.$$

Учитывая, что случайный процесс  $x_0(t)$  — нормальный, имеем (см. § 6 гл. I)

$$\overline{x_0(t - \tau_1) x_0(t - \tau_2) x_0(t - \xi - \tau_3) x_0(t - \xi - \tau_4)} = \\ = K_x(\tau_1 - \tau_2) K_x(\tau_3 - \tau_4) + K_x(\tau_1 - \tau_3 + \xi) K_x(\tau_2 - \tau_4 + \xi) + \\ + K_x(\tau_1 - \tau_4 + \xi) K_x(\tau_2 - \tau_3 + \xi).$$

Сопряженные преобразования Фурье от произведения корреляционных функций имеют вид

$$\int_{\dot{E}^4} K_x(\tau_1 - \tau_3 + \xi) K_x(\tau_2 - \tau_4 + \xi) \exp\left(j \sum_{i=1}^4 \omega_i \tau_i\right) dv_\tau = \\ = \Phi_x(\omega_3) 2\pi\delta(\omega_1 + \omega_3) \Phi_x(\omega_4) 2\pi\delta(\omega_2 + \omega_4) \exp[j\xi(\omega_3 + \omega_4)], \\ \int_{\dot{E}^4} K_x(\tau_1 - \tau_4 + \xi) K_x(\tau_2 - \tau_3 + \xi) \exp\left(j \sum_{i=1}^4 \omega_i \tau_i\right) dv_\tau = \\ = \Phi_x(\omega_4) 2\pi\delta(\omega_1 + \omega_4) \Phi_x(\omega_3) 2\pi\delta(\omega_2 + \omega_3) \exp[j\xi(\omega_3 + \omega_4)],$$

поэтому последний член в (3.4.16) преобразуется к такому виду:

$$\int_{E^4} h_2(\tau_1, \tau_2) h_2(\tau_3, \tau_4) \times \\ \times \overline{[x_0(t-\tau_1) x_0(t-\tau_2) x_0(t+\xi-\tau_3) x_0(t+\xi-\tau_4) - \\ - K_x(\tau_1 - \tau_2) K_x(\tau_3 - \tau_4)]} dv_\tau = \frac{1}{2\pi^2} \int_{E^2} H_2(j\omega_1, j\omega_2) \times \\ \times H_2(-j\omega_1, -j\omega_2) \Phi_x(\omega_1) \Phi_x(\omega_2) \exp(j\omega_1\xi + j\omega_2\xi) dv_\omega.$$

Окончательно автокорреляционная функция выходного сигнала получается такой:

$$K_y(\xi) = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{E^1} [H_1(j\omega) H_1(-j\omega) + 4m_x^2 H_2(j\omega, 0) H_2(-j\omega, 0)] \times \\ \times \Phi_x(\omega) \exp(j\omega\xi) d\omega + \\ + \frac{m_x}{\pi} \int_{E^1} H_1(j\omega) H_2(-j\omega, 0) \Phi_x(\omega) [\exp(j\omega\xi) + \exp(-j\omega\xi)] d\omega + \\ + \frac{1}{2\pi^2} \int_{E^2} H_2(j\omega_1, j\omega_2) H_2(-j\omega_1, -j\omega_2) \Phi_x(\omega_1) \Phi_x(\omega_2) \times \\ \times \exp[j\xi(\omega_1 + \omega_2)] dv_\omega.$$

Если математическое ожидание входного сигнала равно нулю, то формулы для вычисления статистических характеристик реакции системы принимают такой вид:

$$m_y = \frac{1}{2\pi} \int_{E^1} H_2(-j\omega, j\omega) \Phi_x(\omega) d\omega,$$

$$K_{xy}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{E^1} H_1(j\omega) \Phi_x(\omega) \exp(j\omega\xi) d\omega,$$

$$K_y(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{E^1} H_1(j\omega) H_1(-j\omega) \Phi_x(\omega) \exp(j\omega\xi) d\omega + \\ + \frac{1}{2\pi^2} \int_{E^2} H_2(j\omega_1, j\omega_2) H_2(-j\omega_1, -j\omega_2) \Phi_x(\omega_1) \Phi_x(\omega_2) \times \\ \times \exp[j\xi(\omega_1 + \omega_2)] dv_\omega.$$

Если входной сигнал — нормальный белый шум интенсивности  $C$ , то формулы вычисления статистических характеристик еще более упрощаются:

$$m_y = \frac{C}{2\pi} \int_{E^1} H_2(-j\omega, j\omega) d\omega,$$

$$K_{xy}(\xi) = \frac{C}{2\pi} \int_{E^1} H_1(j\omega) \exp(j\xi\omega) d\omega,$$

$$K_y(\xi) = \frac{C}{2\pi} \int_{E^1} H_1(j\omega) H_1(-j\omega) \exp(j\xi\omega) d\omega +$$

$$+ \frac{C^2}{2\pi^2} \int_{E^2} H_2(j\omega_1, j\omega_2) H_2(-j\omega_1, -j\omega_2) \exp[j\xi(\omega_1 + \omega_2)] dv_\omega.$$

Если требуется вычислить лишь дисперсии выходного сигнала при нормальном белом шуме, то в полученных формулах следует положить  $\xi = 0$ :

$$D_{xy} = \frac{C}{2\pi} \int_{E^1} H_1(j\omega) d\omega,$$

$$D_y = \frac{C}{2\pi} \int_{E^1} H_1(j\omega) H_1(-j\omega) d\omega +$$

$$+ \frac{C^2}{2\pi^2} \int_{E^2} H_2(j\omega_1, j\omega_2) H_2(-j\omega_1, -j\omega_2) dv_\omega.$$

Теперь найдем статистические характеристики выходного сигнала систем, представимых полиномом Вольтерра третьей степени:

$$y(t) = \int_{E^1} h_1(\tau) x(t - \tau) d\tau + \int_{E^2} h_2(\tau_1, \tau_2) \prod_{r=1}^2 x(t - \tau_r) dv_\tau \quad (3.4.17)$$

в предположении, что сигнал  $x(t)$  нормален и имеет вид (3.4.12). Будем считать, что ядро третьего порядка симметрично. Математическое ожидание выходной реакции

системы в этом случае получается таким:

$$\begin{aligned}
 m_y &= \int_{E^1} h_1(\tau) \overline{x(t-\tau)} d\tau + \int_{E^3} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \overline{\prod_{r=1}^3 x(t-\tau_r)} dv_\tau = \\
 &= \int_{E^1} h_1(\tau) m_x d\tau + \int_{E^3} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) m_x^3 dv_\tau + \\
 &\quad + 3m_x \int_{E^3} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) K_x(\tau_1 - \tau_2) dv_\tau. \quad (3.4.18)
 \end{aligned}$$

Применяя формулу (3.1.5) и формулу Парсеваля, получим

$$\begin{aligned}
 m_y &= H_1(0) m_x + H_3(0, 0, 0) m_x^3 + \\
 &\quad + 3 \frac{m_x}{2\pi} \int_{E^1} H_3(-j\omega, j\omega, 0) \Phi(\omega) d\omega.
 \end{aligned}$$

Взаимно-корреляционная функция входного и выходного сигналов определяется по формуле

$$\begin{aligned}
 K_{xy}(\xi) &= \overline{x_0(t) y(t + \xi)} = \\
 &= \int_{E^1} h_1(\tau) K_x(\xi - \tau) d\tau + 3 \int_{E^1} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) m_x^2 K_x(\xi - \tau_1) dv_\tau + \\
 &\quad + 3 \int_{E^1} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) K_x(\xi - \tau_1) K_x(\tau_2 - \tau_3) dv_\tau.
 \end{aligned}$$

Производя те же выкладки, что и раньше, получаем

$$\begin{aligned}
 K_{xy}(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{E^1} \{H_1(j\omega) + 3m_x^2 H_3(j\omega, 0, 0)\} \Phi_x(\omega) \exp(j\omega\xi) d\omega + \\
 &\quad + 3 \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{E^2} H_3(j\omega_1, j\omega_2, -j\omega_2) \Phi_x(\omega_1) \Phi_x(\omega_2) \times \\
 &\quad \times \exp(j\omega_1\xi) d\omega_1 d\omega_2.
 \end{aligned}$$

Определим теперь автокорреляционную функцию выходного сигнала для системы (3.4.17).

Имеем приближенное равенство

$$\begin{aligned}
 K_y(\xi) &= \overline{(y(t+\xi) - m_y)(y(t) - m_y)} \simeq \\
 &\simeq \int_{E^2} h_1(\tau_1) h_1(\tau_2) \overline{x_0(t-\tau_1)x_0(t+\xi-\tau_2)} dv_\tau + \\
 &+ \int_{E^4} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) h_1(\tau_4) \{3m_x^2 \overline{x_0(t-\tau_1)x_0(t-\tau_4+\xi)} + \\
 &+ x_0(t-\tau_1)x_0(t-\tau_2)x_0(t-\tau_3)x_0(t+\xi-\tau_4)\} dv_\tau + \\
 &+ \int_{E^4} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) h_1(\tau_4) \{3m_x^2 \overline{x_0(t-\tau_1+\xi)x_0(t-\tau_4)} + \\
 &+ x_0(t-\tau_1+\xi)x_0(t-\tau_2+\xi)x_0(t-\tau_3+\xi)x_0(t-\tau_4)\} dv_\tau = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{E^1} H_1(j\omega) H_1(-j\omega) \Phi_x(\omega) \exp(j\omega\xi) d\omega + \\
 &+ 3m_x^2 \frac{1}{2\pi} \int_{E^1} H_1(j\omega) H_3(-j\omega, 0, 0) \Phi_x(\omega) |\exp(-j\omega\xi) + \\
 &+ \exp(j\omega\xi)| d\omega + 3 \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{E^2} H_3(j\omega_1, -j\omega_1, j\omega_2) \times \\
 &\times H_1(-j\omega_2) \Phi_x(\omega_1) \Phi_x(\omega_2) [\exp(j\omega_2\xi) + \exp(-j\omega_2\xi)] dv_\omega.
 \end{aligned}$$

Если математическое ожидание входного сигнала равно нулю, то, как это следует из (3.4.18), математическое ожидание выходного сигнала тоже будет нулевое. Функции  $K_{xy}(\xi)$  и  $K_y(\xi)$  принимают при этом вид

$$\begin{aligned}
 K_{xy}(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{E^1} H_1(j\omega) \Phi_x(\omega) \exp(j\omega\xi) d\omega + \\
 &+ 3 \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{E^2} H_3(j\omega_1, j\omega_2, -j\omega_2) \Phi_x(\omega_1) \Phi(\omega_2) \exp(j\omega_1\xi) dv_\omega, \\
 K_y(\xi) &\simeq \frac{1}{2\pi} \int_{E^1} H_1(j\omega) H_1(-j\omega) \Phi_x(\omega) \exp(j\omega\xi) d\omega + \\
 &+ 3 \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{E^2} H_3(j\omega_1, -j\omega_1, j\omega_2) H_1(-j\omega_2) \Phi_x(\omega_1) \Phi_x(\omega_2) \times \\
 &\times [\exp(j\omega_2\xi) + \exp(-j\omega_2\xi)] dv_\omega.
 \end{aligned}$$

Если входной сигнал — белый шум интенсивности  $C$ , то

$$K_{xy}(\xi) = \frac{C}{2\pi} \int_{E^1} H_1(j\omega) \exp(j\omega\xi) d\omega + \\ + 3 \frac{C^2}{(2\pi)^2} \int_{E^2} H_3(j\omega_1, j\omega_2, -j\omega_2) \exp(j\omega_1\xi) dv_{\omega},$$

$$K_y(\xi) \simeq \frac{C}{2\pi} \int_{E^1} H_1(j\omega) H_1(-j\omega) \exp(j\omega\xi) d\omega + \\ + 3 \frac{C^2}{(2\pi)^2} \int_{E^2} H_3(j\omega_1, -j\omega_1, j\omega_2) H_1(-j\omega_2) \times \\ \times [\exp(j\omega_2\xi) + \exp(-j\omega_2\xi)] dv_{\omega}.$$

Для вычисления дисперсий в этом случае положим в последних формулах  $\xi=0$ . Имеем

$$D_{xy} = \frac{C}{2\pi} \int_{E^1} H_1(j\omega) d\omega + 3 \frac{C^2}{(2\pi)^2} \int_{E^2} H_3(j\omega_1, j\omega_2, -j\omega_2) dv_{\omega},$$

$$D_y \simeq \frac{C}{2\pi} \int_{E^1} H_1(j\omega) H_1(-j\omega) d\omega + \\ + 6 \frac{C^2}{(2\pi)^2} \int_{E^2} H_3(j\omega_1, -j\omega_1, j\omega_2) H_1(-j\omega_2) dv_{\omega}.$$

Полученные формулы можно обобщить и на случай нестационарных нормальных воздействий типа

$$x(t) = m_x(t) + x_0(t), \quad \mathbb{M}\{x_0(t)\} = 0.$$

Очевидно, например, что формула (3.4.14) в этом случае должна быть заменена такой:

$$M_y(j\omega) = H_1(j\omega) M_x(j\omega) + \{H_2(j\omega_1, j\omega_2) M_x(j\omega_1) M_x(j\omega_2)\}^* + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{E^1} H_2(-j\omega, j\omega) \Phi_{x_0}(\omega) d\omega,$$

где  $M_x(j\omega) \doteq m_x(t)$ ,  $M_y(j\omega) \doteq m_y(t)$ . Аналогично изменяются и другие формулы.

## § 5. Применение многомерного преобразования Лапласа в задаче нелинейной компенсации

Задачу компенсации рассмотрим на примере системы с обратной связью, структурная схема которой приведена на рис. 3.5.1. Сигнал  $x(t)$  — это некоторая детерминированная функция времени или стационарный случайный процесс с непрерывными выборочными функциями.

Задача компенсации заключается в конструировании компенсирующих устройств (компенсаторов) таким образом, чтобы вся система в целом обладала бы желаемыми динамическими характеристиками. Решать задачу

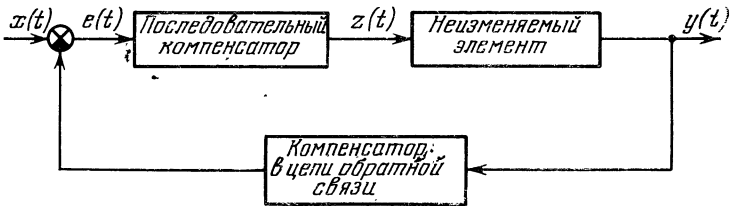


Рис. 3.5.1.

компенсации будем в предположении, что неизменяемые элементы системы образованы соединением линейных инерционных и нелинейных безынерционных звеньев. При этом линейные элементы предполагаются минимально-фазовыми, а нелинейные — аналитическими функциями, имеющими обратные для всех возможных входных воздействий. Компенсация систем с такими неизменяемыми элементами может быть произведена с помощью методов преобразования структурных схем, приведенных в § 2 этой главы. Если желаемые характеристики системы заданы полиномом Вольтерра (желаемая система), то компенсатор в общем случае получается в виде ряда Вольтерра [8].

Рассмотрим последовательную компенсацию в соответствии со структурной схемой, приведенной на рис. 3.5.2. Обозначим изображения ядер компенсатора через  $C_i(s_1, \dots, s_i)$ , неизменяемого элемента — через  $H_i(s_1, \dots, s_i)$  и желаемой системы — через  $H_d(s_1, \dots, s_i)$ .

Обозначив через  $G_i(s_1, \dots, s_i)$ ,  $i=1, 2, \dots$ , изображения ядер прямой цепи системы, т. е. последовательного соединения компенсатора и неизменяемого элемента,

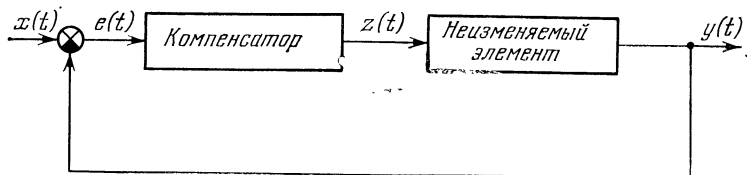


Рис. 3.5.2.

получим такие формулы для изображения ядер замкнутой системы  $K_i(s_1, \dots, s_i)$ :

$$\left. \begin{aligned} K_1(s) &= \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)}, \\ K_2(s_1, s_2) &= \frac{G_2(s_1, s_2)}{[1 + G_1(s_1 + s_2)] \prod_{r=1}^2 [1 + G_1(s_r)]}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (3.5.1)$$

Положив  $K_i(s_1, \dots, s_i) \equiv H_{d_i}(s_1, \dots, s_i)$ ,  $i = 1, \dots, p$ , получим систему уравнений для определения изображения ядер  $G_i(s_1, \dots, s_i)$ :

$$\left. \begin{aligned} H_{d_1}(s) &= \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)}, \\ H_{d_2}(s_1, s_2) &= \frac{G_2(s_1, s_2)}{[1 + G_1(s_1 + s_2)] \prod_{r=1}^2 [1 + G_1(s_r)]}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (3.5.2)$$

Решая эту систему уравнений, получаем изображения ядер прямой цепи:

$$\left. \begin{aligned} G_1(s) &= \frac{H_{d_1}(s)}{1 - H_{d_1}(s)}, \\ G_2(s_1, s_2) &= \frac{H_{d_2}(s_1, s_2)}{[1 - H_{d_1}(s_1 + s_2)] \prod_{r=1}^2 [1 - H_{d_1}(s_r)]}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (3.5.3)$$



С другой стороны, изображения ядер  $G_1(s_1, \dots, s_i)$  получены последовательным соединением компенсатора и неизменяемого элемента. Используя формулы (3.2.21) — (3.2.23) получим такую систему уравнений относительно изображения ядер компенсатора:

$$\left. \begin{aligned} C_1(s) H_1(s) &= \frac{H_{d_1}(s)}{1 - H_{d_1}(s)}, \\ H_2(s_1, s_2) C_1(s_1) C_1(s_2) + H_1(s_1 + s_2) C_2(s_1, s_2) &= \\ &= \frac{H_{d_2}(s_1, s_2)}{[1 - H_{d_1}(s_1 + s_2)] \prod_{r=1}^2 [1 - H_{d_1}(s_r)]}, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.5.4)$$

Из уравнений (3.5.4) находим

$$\left. \begin{aligned} C_1(s) &= \frac{H_{d_1}(s)}{H_1(s) [1 - H_{d_1}(s)]}, \\ C_2(s_1, s_2) &= \frac{H_{d_2}(s_1, s_2)}{H_1(s_1 + s_2) [1 - H_{d_1}(s_1 + s_2)] \prod_{r=1}^2 [1 - H_{d_1}(s_r)]} - \\ &= \frac{H_2(s_1, s_2) \prod_{r=1}^2 H_{d_1}(s_r)}{H_1(s_1 + s_2) \prod_{r=1}^2 [1 - H_{d_1}(s_r)] \prod_{r=1}^2 H_1(s_r)}, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.5.5)$$

Реализованная по такой методике система не будет в точности желаемой ввиду того, что при определении изображений ядер компенсатора дважды производилось усечение ряда Вольтерра (в первый раз — при переходе от уравнений (3.5.1) к (3.5.2) и во второй — при определении из уравнений (3.5.4) изображений ядер компенсатора).

Совершенно аналогично решается задача компенсации и в случае, когда компенсатор включен в цепь об-

ратной связи (рис. 3.5.3). Какую из схем компенсации применить, определяется условиями задачи. Иногда и та, и другая схема дают плохой результат, и поэтому применяется общая схема с двумя компенсаторами (рис. 3.5.1)\*).



Рис. 3.5.3.

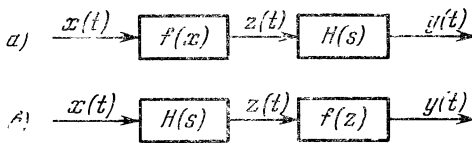


Рис. 3.5.4.

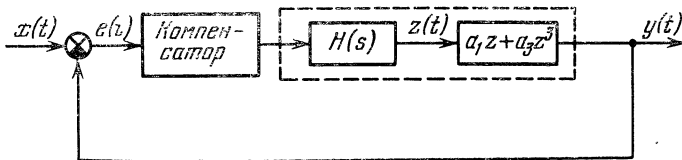


Рис. 3.5.5.

Неизменяемый элемент системы часто описывается одной из структурных схем, приведенных на рис. 3.5.4. Пусть система имеет структурную схему, показанную на рис. 3.5.5, причем нелинейность задается функцией

\*) Решение, полученное методом, рассмотренным в этом параграфе, может оказаться физически нереализуемым из-за того, что степень числителя изображения ядер компенсатора по каждой переменной может получиться выше степени знаменателя. В этом случае следует использовать методику регуляризации задачи компенсации, рассмотренную в § 4 гл. IV.

$y=f(z)=a_1z+a_3z^3$ . Для последовательного соединения компенсатора и линейной системы можно записать такие изображения ядер:

$$C_1(s)H(s); \quad C_3(s_1, s_2, s_3)H\left(\sum_{r=1}^3 s_r\right); \dots$$

Определим теперь изображения ядер всей прямой ветви. Они будут такими:

$$a_1 C_1(s)H(s); \\ a_3 \prod_{r=1}^3 \{C_1(s_r)H(s_r)\} + a_1 C_3(s_1, s_2, s_3)H\left(\sum_{i=1}^3 s_r\right); \dots$$

Система уравнений получается такой:

$$a_1 C_1(s)H(s) = \frac{H_{d_1}(s)}{1 - H_{d_1}(s)}, \\ a_3 \prod_{r=1}^3 \{C_1(s_r)H(s_r)\} + a_1 C_3(s_1, s_2, s_3)H\left(\sum_{i=1}^3 s_r\right) = \\ = \frac{H_{d_3}(s_1, s_2, s_3)}{\left[1 - H_{d_1}\left(\sum_{r=1}^3 s_r\right)\right] \prod_{r=1}^3 [1 - H_{d_1}(s_r)]}, \dots,$$

и изображения ядер компенсатора получаются в виде

$$\left. \begin{aligned} C_1(s) &= \frac{H_{d_1}(s)}{a_1 H(s) [1 - H_{d_1}(s)]}, \\ C_3(s_1, s_2, s_3) &= \frac{H_{d_3}(s_1, s_2, s_3)}{a_1 H\left(\sum_{r=1}^3 s_r\right) \left[1 - H_{d_1}\left(\sum_{r=1}^3 s_r\right)\right] \prod_{r=1}^3 [1 - H_{d_1}(s_r)]} \\ &\quad - \frac{a_3 \prod_{r=1}^3 H_{d_1}(s_r)}{a_1^4 H\left(\sum_{r=1}^3 s_r\right) \prod_{r=1}^3 [1 - H_{d_1}(s_r)]}, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (3.5.6)$$

Если желаемая система линейна, то ядра компенсатора

принимают вид

$$\left. \begin{aligned} C_1(s) &= \frac{H_{d_1}(s)}{a_1 H(s) [1 - H_{d_1}(s)]}, \\ C_3(s_1, s_2, s_3) &= \frac{-a_3 \prod_{r=1}^3 H_{d_1}(s_r)}{a_1^4 H\left(\sum_{r=1}^3 s_r\right) \prod_{r=1}^3 [1 - H_{d_1}(s_r)]}, \\ &\dots \end{aligned} \right\} (3.5.7)$$

Из формул (3.5.7) следует, что компенсатор представим последовательным соединением безынерционной нелинейности  $\varphi$ , обратной к  $f$ , т. е.  $\varphi = f^{-1}$ , и инерционных линейных звеньев с передаточными функциями

$$L_1(s) = \frac{H_{d_1}(s)}{[1 - H_{d_1}(s)]}, \quad L_2(s) = \frac{1}{H(s)}.$$

Структурная схема скомпенсированной системы приведена на рис. 3.5.6.

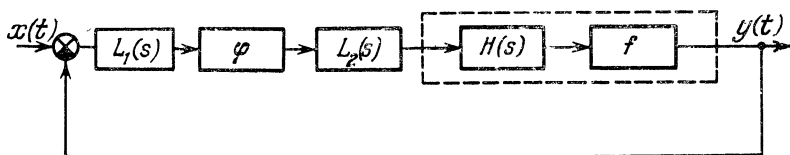


Рис. 3.5.6.

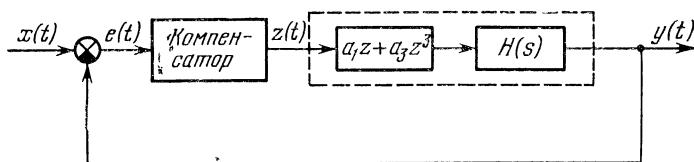


Рис. 3.5.7.

Рассмотрим теперь систему со структурной схемой, показанной на рис. 3.5.7. Изображения ядер последовательного соединения компенсатора и нелинейности

получаются в виде

$$a_1 C_1(s); \quad a_1 C_3(s_1, s_2, s_3) + a_3 \prod_{r=1}^3 C_1(s_r); \dots,$$

и изображения ядер всей прямой цепи — такими:

$$a_1 C_1(s) H(s);$$

$$a_1 C_3(s_1, s_2, s_3) H\left(\sum_{r=1}^3 s_r\right) + a_3 \prod_{r=1}^3 C_1(s_r) H\left(\sum_{r=1}^3 s_r\right); \dots$$

Отсюда получаем

$$C_1(s) = \frac{H_{d_1}(s)}{a_1 H(s) [1 - H_{d_1}(s)]},$$

$$C_3(s_1, s_2, s_3) = \frac{H_{d_3}(s_1, s_2, s_3)}{a_1 H\left(\sum_{r=1}^3 s_r\right) \left[1 - H_{d_1}\left(\sum_{r=1}^3 s_r\right)\right] \prod_{r=1}^3 [1 - H_{d_1}(s_r)]} -$$

$$- \frac{a_3 \prod_{r=1}^3 H_{d_1}(s_r)}{a_1^4 \prod_{r=1}^3 H(s_r) \prod_{r=1}^3 [1 - H_{d_1}(s_r)]},$$

. . . . .

Пусть, в частности, желаемая система линейна. Тогда формулы для изображения ядер компенсатора принимают такой вид:

$$\left. \begin{aligned} C_1(s) &= \frac{H_{d_1}(s)}{a_1 H(s) [1 - H_{d_1}(s)]}, \\ &\dots \\ C_3(s_1, s_2, s_3) &= \frac{-a_3 \prod_{r=1}^3 H_{d_1}(s_r)}{a_1^4 \prod_{r=1}^3 H(s_r) \prod_{r=1}^3 [1 - H_{d_1}(s_r)]}, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (3.5.8)$$

Нетрудно заметить, что формулы (3.5.8) определяют систему, образованную последовательным соединением

линейной системы с передаточной функцией

$$L(s) = \frac{H_{d_1}(s)}{H(s)[1 - H_{d_1}(s)]}$$

и безынерционной нелинейности  $\varphi$ , обратной к функции  $y=f(z)=a_1z+a_3z^3$ , т. е.  $\varphi \circ f=1$ . А значит, компенсатор можно реализовать так, как показано на рис. 3.5.8.

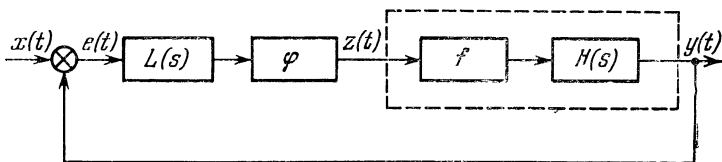


Рис. 3.5.8.

Таким образом, если неизменяемая часть системы образована последовательным соединением линейной инерционной и безынерционной нелинейности, а желаемая система линейна, то компенсатор реализуется последовательным соединением линейных инерционных и нелинейных безынерционных звеньев.

Функцию  $\varphi$  можно определить либо аналитически, либо графически. Если нелинейность  $f(z)$  задана степенным рядом (или полиномом)  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i$ , то коэффициенты ряда, описывающего функцию  $\varphi$ , определяются с помощью формул обращения степенного ряда [17], а именно:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{a_1}; \\ b_2 &= -\frac{a_2}{a_1^3}; \\ b_3 &= \frac{2a_2^2 - a_1 a_3}{a_1^5}; \dots \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

Если функция  $\varphi$  определяется аналитически с помощью обращения степенного ряда, то соответствующий элемент системы реализуется так, как показано на рис.

3.5.9. В ряде случаев [8] по виду коэффициентов ряда  $b_i$  удается определить функцию  $\varphi$ , разложением которой он является, и решение задачи компенсации получается в замкнутой форме (если функцию  $\varphi$  можно реализовать с помощью функционального преобразователя).

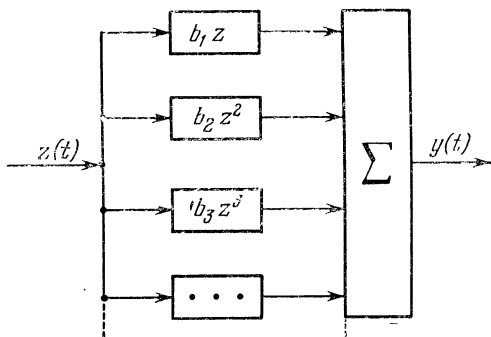


Рис. 3.5.9.

Если функция  $\varphi$  полностью компенсирует нелинейность, то передаточная функция прямой цепи скомпенсированной системы получится в виде

$$G_1(s) = G(s)H(s).$$

Желаемая передаточная функция в этом случае определяется одним из методов теории линейных систем, выбираемым исходя из условий решаемой задачи, например, из условий улучшения качества регулирования, повышения быстродействия системы, увеличения запаса устойчивости [7]. Исползованный метод компенсации можно применять для определения изображений ядер порядка не выше третьего-четвертого, поскольку уравнения для определения ядер высших порядков получаются очень сложными. Если требуется определить ядра более высокого порядка, то следует использовать специальный алгоритм компенсации, предложенный в работе [8]. При построении компенсатора в виде полинома Вольтерра необходимо после определения изображений ядер проверить устойчивость скомпенсированной системы.

Рассмотрев метод определения изображений ядер компенсатора, перейдем к вопросу об их реализации. В частных случаях систем со структурными схемами, приведенными на рис. 3.5.5 и 3.5.7, реализация компенсатора очевидна. В общем случае необходимо иметь специальный метод реализации компенсатора [90].

Рассмотрим систему второго порядка, синтезированную с помощью только одного устройства умножения (рис. 3.5.10). Согласно методам преобразования струк-

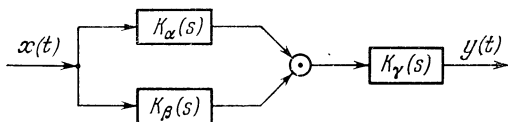


Рис. 3.5.10.

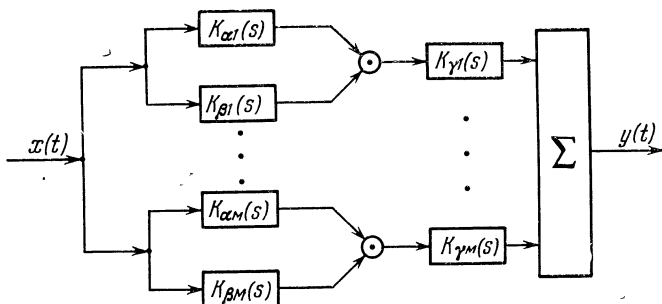


Рис. 3.5.11.

турных схем, изложенным в § 2 этой главы, изображение ядра  $K_2(s_1, s_2)$  этой системы может быть записано:

$$K_2(s_1, s_2) = K_\gamma(s_1 + s_2) K_\alpha(s_1) K_\beta(s_2).$$

Назовем систему на рис. 3.5.10 *элементарной системой второго порядка*. Ядро второго порядка, имеющее изображение

$$K_2(s_1, s_2) = \sum_{m=1}^M K_{\gamma m}(s_1 + s_2) K_{\alpha m}(s_1) K_{\beta m}(s_2), \quad (3.5.10)$$

можно реализовать с помощью  $M$  элементарных систем второго порядка (рис. 3.5.11).



Таким образом, вопрос о реализации ядра второго порядка с помощью элементарных систем сводится к вопросу: представимо ли изображение этого ядра в виде (3.5.10)?

Как следует из изложенного выше метода компенсации, изображения ядер компенсатора второго порядка получаются именно в таком виде. Однако произвольное ядро второго порядка реализовать по такой методике в общем случае нельзя [90].

Рассмотрим теперь элементарную систему третьего порядка (рис. 3.5.12), реализованную с помощью двух

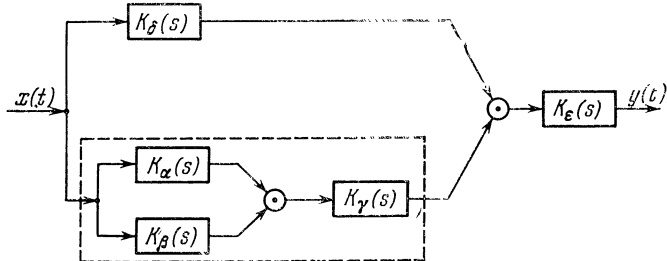


Рис. 3.5.12.

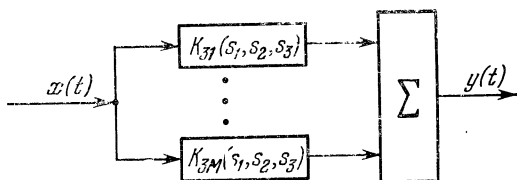


Рис. 3.5.13.

устройств умножения. Изображение ядра Вольterra этой системы выражается формулой

$$K_3(s_1, s_2, s_3) = K_\epsilon(s_1 + s_2 + s_3) K_\delta(s_3) K_\gamma(s_1 + s_2) K_\alpha(s_1) K_\beta(s_2) \dots$$

Ядро третьего порядка, имеющее изображение

$$K_3(s_1, s_2, s_3) = \sum_{m=1}^M K_{\epsilon m}(s_1 + s_2 + s_3) K_{\delta m}(s_3) K_{\gamma m}(s_1 + s_2) K_{\alpha m}(s_1) K_{\beta m}(s_2),$$

может быть реализовано с помощью  $M$  элементарных систем в виде, показанном на рис. 3.5.13.

Описанный метод синтеза позволяет реализовать ядра Вольтерра и более высокого порядка. Однако при этом увеличивается число элементарных систем, из которых конструируется ядро. Для ядра четвертого порядка следует использовать две элементарные системы (рис. 3.5.14).

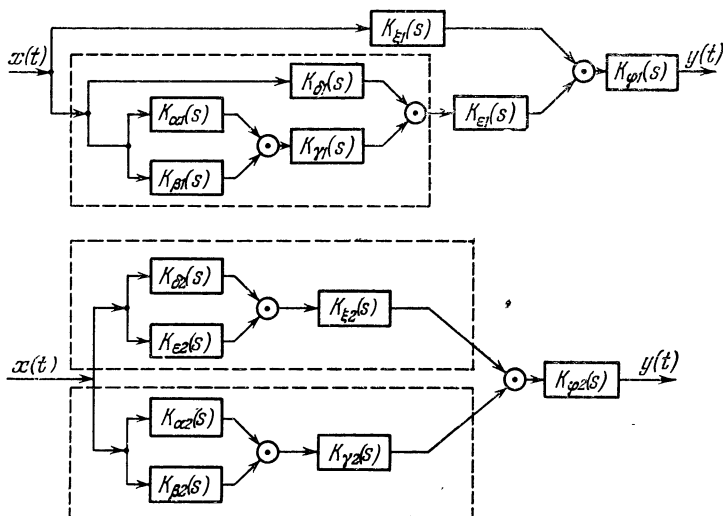


Рис. 3.5.14.

Используя теорию преобразования структурных схем, получаем выражения для изображения ядра элементарной системы первого типа:

$$K_{41}(s_1, \dots, s_4) = K_{\alpha 1}(s_1) K_{\beta 1}(s_2) K_{\gamma 1}(s_1+s_2) K_{\delta 1}(s_3) \times \\ \times K_{\epsilon 1}(s_1+s_2+s_3) K_{\zeta 1}(s_4) K_{\eta 1}(s_1+s_2+s_3+s_4)$$

и второго типа:

$$K_{42}(s_1, \dots, s_4) = K_{\alpha 2}(s_1) K_{\beta 2}(s_2) K_{\gamma 2}(s_1+s_2) K_{\delta 2}(s_3) \times \\ \times K_{\epsilon 2}(s_4) K_{\zeta 2}(s_3+s_4) K_{\eta 2}(s_1+s_2+s_3+s_4).$$

С помощью этих двух элементарных систем можно синтезировать ядра четвертого порядка, имеющие

изображения

$$H_4(s_1, \dots, s_4) = \sum_{m=1}^{M_1} K_{41}(s_1, \dots, s_4) + \sum_{m=1}^{M_2} K_{42}(s_1, \dots, s_4).$$

Число элементарных систем быстро растет с ростом порядка ядер, как это видно из табл. 3.5.1. Поэтому прак-

Таблица 3.5.1

Порядок ядра	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Число элементарных систем	1	1	1	2	3	6	11	24	47	103

тически таким методом можно синтезировать ядра порядка не выше пятого.

## § 6. Многомерное $Z$ -преобразование и его использование при анализе нелинейных дискретных систем

Для исследования и синтеза линейных стационарных дискретных систем применяется  $Z$ -преобразование [7], [88], которое определяется формулой

$$Z\{f[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} f[n], \quad (3.6.1)$$

где  $z$  — комплексный параметр преобразования. По аналогии с многомерным преобразованием Лапласа для исследования нелинейных дискретных систем было введено *многомерное  $Z$ -преобразование*

$$Z^m\{f[n_1, \dots, n_m]\} = \sum_{n_1, \dots, n_m=0}^{\infty} z_1^{-n_1} \dots z_m^{-n_m} f[n_1, \dots, n_m]. \quad (3.6.2)$$

Использование такого преобразования позволяет в ряде случаев существенно упростить описание нелинейных дискретных систем. Условимся называть решетчатые функции  $f[n_1, \dots, n_m]$ , для которых существует  $Z^m$ -пре-

образование, т. е. сходится ряд (3.6.2), оригиналами, а результат преобразования — изображениями и обозначать

$$F^*(z_1, \dots, z_m) = Z^m \{f[n_1, \dots, n_m]\}, \quad (3.6.3)$$

или

$$F^*(z_1, \dots, z_m) \Leftrightarrow f[n_1, \dots, n_m].$$

Пространство, в котором определена функция  $F^*(z_1, \dots, z_m)$ , обозначим  $C^m$ ; задание этого пространства комплексных переменных  $z_1, \dots, z_m$  эквивалентно заданию действительного пространства  $E^{2m}$ .

Определим область сходимости ряда (3.6.2). Этот ряд является рядом Лорана с неположительными степенями по каждой комплексной переменной  $z_n$ . Поэтому он сходится во внешности некоторого круга

$$|z_n| > R_n, \quad (3.6.4)$$

если зафиксировать остальные переменные. Область сходимости  $D$  ряда (3.6.2) представляет собой пересечение множеств вида (3.6.4) в пространстве  $C^m$ , т. е.

$$D = \bigcap_{j=1}^m \{z: |z_j| > R_j\}. \quad (3.6.5)$$

Такую область можно назвать внешностью поликруга [87]. Связь между оригиналами  $f[n_1, \dots, n_m]$  и постоянными  $R_n$ , определяющими область сходимости, дается следующей теоремой.

1° Теорема о существовании изображения. Пусть

$$|f[n_1, \dots, n_m]| < MR_1^{n_1} R_2^{n_2} \dots R_m^{n_m} \quad (3.6.6)$$

при  $n_i \geq 0, i=1, \dots, m$ , где  $M, R_1, \dots, R_m$  — некоторые положительные постоянные. Тогда изображение  $F^*(z_1, \dots, z_m)$  существует в области (3.6.5) и является в этой области аналитической функцией \*).

---

\*) Условие (3.6.6), таким образом, является свойством, определяющим оригинал. Будем также предполагать, что оригинал тождественно равен нулю при отрицательных значениях аргументов  $n_i$ .

Докажем эту теорему. С учетом (3.6.6) имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n_1, \dots, n_m=0}^{\infty} z_1^{-n_1} \dots z_m^{-n_m} f[n_1, \dots, n_m] \right| &\leq \\ &\leq \sum_{n_1, \dots, n_m=0}^{\infty} |z_1|^{-n_1} \dots |z_m|^{-n_m} |f[n_1, \dots, n_m]| < \\ &< M \sum_{n_1, \dots, n_m=0}^{\infty} \left( \frac{R_1}{|z_1|} \right)^{n_1} \dots \left( \frac{R_m}{|z_m|} \right)^{n_m}. \end{aligned}$$

При выполнении условия (3.6.4) полученный ряд сходится по каждому из индексов  $n_i$  как геометрическая прогрессия со знаменателем  $\frac{R_i}{|z_i|} < 1$ . Ряд (3.6.2) сходится по доказанному абсолютно и, следовательно, равномерно в каждой области  $|z_i| \geq R_i > R_i$  при фиксированных значениях других переменных. Поэтому сумма ряда является аналитической функцией по каждому из переменных, когда другие переменные фиксированы. Отсюда следует аналитичность функции  $F^*(z_1, \dots, z_n)$  в области  $D$  [87].

Для аналитических функций нескольких комплексных переменных так же, как и для аналитических функций одной комплексной переменной, справедливо утверждение о том, что аналитическая функция может быть разложена в степенной ряд. Чтобы применить его к рассматриваемому случаю, заметим, что если функция  $\Phi(z_1, \dots, z_m)$ , аналитическая в поликруге

$E = \bigcap_{j=1}^m \left\{ z: |z_j| < \frac{1}{R_j} \right\}$ , разлагается в нем в степенной ряд

$$\Phi(z_1, \dots, z_m) = \sum_{n_1, \dots, n_m=0}^{\infty} a_{n_1 \dots n_m} z_1^{n_1} \dots z_m^{n_m}, \quad (3.6.7)$$

то функция

$$F(z_1, \dots, z_m) = \Phi(z_1^{-1}, \dots, z_m^{-1})$$

является аналитической в области (3.6.5) и разлагается в ней в ряд следующего вида:

$$F(z_1, \dots, z_m) = \sum_{n_1, \dots, n_m=0}^{\infty} a_{n_1 \dots n_m} z_1^{-n_1} \dots z_m^{-n_m}. \quad (3.6.8)$$

В этом нетрудно убедиться, выполнив в выражении (3.6.7) замену переменных по формуле  $\xi_i = 1/z_i$ ,  $i=1, \dots, m$ . С учетом сделанного замечания можно сформулировать теорему, которая следует из теоремы о разложении аналитической функции многих комплексных переменных в степенной ряд [87]. Приведем ее без доказательства.

2° Теорема о разложении изображения  $F^*(z_1, \dots, z_m)$  в степенной ряд. Если функция  $F^*(z_1, \dots, z_m)$  аналитична во внешности поликруга (3.6.5), то она разлагается в этой области в ряд (3.6.8), причем коэффициенты ряда определяются следующей формулой:

$$a_{n_1, \dots, n_m} = \left(\frac{1}{2\pi j}\right)^m \int_{|z_m|=R_m} \dots \int_{|z_1|=R_1} z_1^{n_1-1} \dots z_m^{n_m-1} \times \\ \times F^*(z_1, \dots, z_m) dz_1 \dots dz_m. \quad (3.6.9)$$

Из сопоставления формул (3.6.9), (3.6.2), (3.6.8) следует формула обращения многомерного Z-преобразования:

$$Z^{-m} \{F^*(z_1, \dots, z_m)\} = f[n_1, \dots, n_m] = \\ = \left(\frac{1}{2\pi j}\right)^m \int_{|z_m|=R_m} \dots \int_{|z_1|=R_1} F^*(z_1, \dots, z_m) z_1^{n_1-1} \dots z_m^{n_m-1} \times \\ \times dz_1 \dots dz_m. \quad (3.6.10)$$

Таким образом, Z<sup>-m</sup>-преобразование можно рассматривать как последовательное применение обратного Z-преобразования по каждой из комплексных переменных  $z_i$ ,  $i=1, \dots, m$ .

Рассмотрим основные свойства многомерного Z-преобразования.

3° Теорема линейности. Для любых (комплексных) чисел  $\lambda_i$

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i f_i[n_1, \dots, n_m] \Leftrightarrow \sum_{i=1}^k \lambda_i F_i^*(z_1, \dots, z_m). \quad (3.6.11)$$

Эта теорема следует из определения Z<sup>m</sup>-преобразования,

4° Теорема запаздывания. Для любых положительных целых чисел  $k_i$ ,  $i=1, \dots, m$ ,

$$f[n_1 - k_1, \dots, n_m - k_m] \Leftrightarrow z_1^{-k_1} \dots z_m^{-k_m} F^*(z_1, \dots, z_m). \quad (3.6.12)$$

Здесь, как и в соответствующей теореме о преобразовании Лапласа, подразумевается выполненным условие  $f[n_1 - k_1, \dots, n_m - k_m] \equiv 0$ , если  $n_i - k_i < 0$  хотя бы при одном значении  $i=1, \dots, m$ .

С учетом этого условия будем иметь

$$\begin{aligned} Z^m \{f[n_1 - k_1, \dots, n_m - k_m]\} &= \\ &= \sum_{n_1, \dots, n_m=0}^{\infty} z_1^{-n_1} \dots z_m^{-n_m} f[n_1 - k_1, \dots, n_m - k_m] = \\ &= \sum_{n_1=k_1, \dots, n_m=k_m}^{\infty} z_1^{-n_1} \dots z_m^{-n_m} f[n_1 - k_1, \dots, n_m - k_m] = \\ &= \sum_{l_1, \dots, l_m=0}^{\infty} z_1^{-l_1 - k_1} \dots z_m^{-l_m - k_m} f[l_1, \dots, l_m] = \\ &= z_1^{-k_1} \dots z_m^{-k_m} F^*(z_1, \dots, z_m), \end{aligned}$$

что соответствует равенству (3.6.12).

Теорема смещения (см. § 1 этой главы) не имеет места для  $Z^m$ -преобразования. Ей соответствует следующая теорема.

5° Теорема об умножении комплексных переменных на постоянные. Для любых (комплексных) чисел  $a_i$ ,  $i=1, \dots, m$ ,

$$F^*(z_1 a_1, \dots, z_m a_m) \Leftrightarrow \frac{f[n_1, \dots, n_m]}{a_1^{n_1} \dots a_m^{n_m}}. \quad (3.6.13)$$

Действительно, из определения  $Z^m$ -преобразования получим

$$\begin{aligned} F^*(z_1 a_1, \dots, z_m a_m) &= \\ &= \sum_{n_1, \dots, n_m=0}^{\infty} (z_1 a_1)^{-n_1} \dots (z_m a_m)^{-n_m} f[n_1, \dots, n_m] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n_1, \dots, n_m=0}^{\infty} z_1^{-n_1} \dots z_m^{-n_m} \{a_1^{-n_1} \dots a_m^{-n_m} f[n_1, \dots, n_m]\} = \\
&= Z^m \left\{ \frac{f[n_1, \dots, n_m]}{a_1^{n_1} \dots a_m^{n_m}} \right\}.
\end{aligned}$$

6° Теорема о дифференцировании изображения.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F^*(z_1, \dots, z_m)}{\partial z_k} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow -(n_k + 1) f[n_1, \dots, n_{k-1}, n_k + 1, n_{k+1}, \dots, n_m]. \quad (3.6.14)
\end{aligned}$$

Докажем это соотношение для  $k=1$ . Из равномерной сходимости ряда (3.6.2), определяющего многомерное Z-преобразование, следует, что ряд можно почленно дифференцировать по каждому из переменных.

Имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1} F^*(z_1, \dots, z_m) = \\
&= \sum_{n_1, \dots, n_m=0}^{\infty} (-n_1) z_1^{-(n_1-1)} z_2^{-n_2} \dots z_m^{-n_m} f[n_1, n_2, \dots, n_m] = \\
&= \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2, \dots, n_m=0}^{\infty} (-n_1) z_1^{-(n_1-1)} z_2^{-n_2} \dots z_m^{-n_m} f[n_1, n_2, \dots, n_m] = \\
&= \sum_{l_1, n_2, \dots, n_m=0}^{\infty} -(l_1 + 1) z_1^{-l_1} z_2^{-n_2} \dots z_m^{-n_m} f[l_1 + 1, n_2, \dots, n_m].
\end{aligned}$$

Обозначая  $l_1 = n_1$ , получим окончательно

$$\frac{\partial}{\partial z_1} F^*(z_1, \dots, z_m) = -Z^m \{(n_1 + 1) f[n_1 + 1, n_2, \dots, n_m]\},$$

что соответствует (3.6.14).

Доказанная теорема может быть легко обобщена на случай, когда берется производная  $k$ -го порядка по одному из переменных, например,

$$\frac{\partial^k}{\partial z_1^k} F^*(z_1, \dots, z_m) \Leftrightarrow (-1)^k (n_1 + k)^k f[n_1 + k, n_2, \dots, n_m], \quad (3.6.15)$$



где

$$(n_1+k)^{(k)} = (n_1+k)(n_1+k-1)\dots(n_1+1).$$

Нетрудно распространить эту теорему и на случай, когда вычисляется смешанная производная, в частности,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^l}{\partial z_1 \partial z_2 \dots \partial z_l} F^*(z_1, z_2, \dots, z_l, \dots, z_m) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (-1)^l (n_1+1)(n_2+1)\dots(n_l+1) f[n_1+1, n_2+1, \dots \\ \dots, n_l+1, n_{l+1}, \dots, n_m]. \end{aligned} \quad (3.6.16)$$

Перейдем к теореме об интегрировании изображений. Предварительно заметим, что при почленном интегрировании ряда (3.6.2) по одной из переменных  $z_k$  в пределах от  $z_k$  до  $\infty$  по любому пути, принадлежащему области сходимости  $|z_k| > R$ , слагаемые, соответствующие  $n_k=0$  и  $n_k=1$ , будут неограниченно возрастать. Поэтому необходимо потребовать, чтобы функция  $f[n_1, \dots, n_m]$  равнялась нулю при  $n_k=0, 1$ .

С учетом этого замечания сформулируем следующую теорему.

7° Теорема об интегрировании изображений. Если функция  $f[n_1, \dots, n_m]$  является оригиналом и равняется нулю при  $n_k=0, 1$ , то

$$\begin{aligned} \int_{z_k}^{\infty} F^*(z_1, \dots, z_m) dz_k \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{f[n_1, \dots, n_{k-1}, n_k+1, n_{k+1}, \dots, n_m]}{n_k}, \end{aligned} \quad (3.6.17)$$

где интегрирование осуществляется по любому контуру, соединяющему точку  $z_k$  с бесконечно удаленной точкой и принадлежащему области, в которой функция  $F^*(z_1, \dots, z_m)$  является аналитической.

Докажем эту теорему для  $k=1$ . Воспользуемся тем, что ряд (3.6.2), определяющий  $Z^m$ -преобразование, сходится равномерно, и следовательно, его можно интегрировать почленно по каждому переменному.

Получим

$$\begin{aligned}
 & \int_{z_1}^{\infty} F^*(z_1, z_2, \dots, z_m) dz_1 = \\
 & = \sum_{\substack{n_1=2, \\ n_2, \dots, n_m=0}}^{\infty} f[n_1, n_2, \dots, n_m] \int_{z_1}^{\infty} z_1^{-n_1} dz_1 z_2^{-n_2} \dots z_m^{-n_m} = \\
 & = \sum_{\substack{n_1=2, \\ n_2, \dots, n_m=0}}^{\infty} f[n_1, n_2, \dots, n_m] \frac{z_1^{-(n_1-1)}}{n_1-1} z_2^{-n_2} \dots z_m^{-n_m} = \\
 & = \sum_{\substack{l_1=0 \\ n_2, \dots, n_m=0}}^{\infty} f[l_1+1, n_2, \dots, n_m] \frac{z_1^{-l_1}}{l_1} z_2^{-n_2} \dots z_m^{-n_m}. \quad (3.6.18)
 \end{aligned}$$

Заменяя индекс  $l_1$  на  $n_1$  и учитывая, что при  $l_1=0$   $f[1, n_2, \dots, n_m]=0$  по условию теоремы, можно записать окончательно

$$\int_{z_1}^{\infty} F^*(z_1, z_2, \dots, z_m) dz_1 = Z^m \left\{ \frac{1}{n_1} f[n_1+1, n_2, \dots, n_m] \right\}.$$

При доказательстве было использовано условие, что выражение (3.6.18) стремится к нулю при  $z_1 \rightarrow \infty$ . Это также требует обоснования. Имеем

$$\begin{aligned}
 & \lim_{z_1 \rightarrow \infty} \left| \sum_{\substack{n_1=2, \\ n_2, \dots, n_m=0}}^{\infty} f[n_1, n_2, \dots, n_m] \frac{z_1^{-(n_1-1)}}{n_1-1} z_2^{-n_2} \dots z_m^{-n_m} \right| \ll \\
 & \ll \lim_{z_1 \rightarrow \infty} \sum_{\substack{n_1=2, \\ n_2, \dots, n_m=0}}^{\infty} |f[n_1, n_2, \dots, n_m]| \frac{|z_1|^{-(n_1-1)}}{n_1-1} |z_2|^{-n_2} \dots \\
 & \dots |z_m|^{-n_m} < \lim_{z_1 \rightarrow \infty} \sum_{\substack{n_1=2 \\ n_2, \dots, n_m=0}}^{\infty} MR_1^{n_1} \dots R_m^{n_m} |z_1|^{-(n_1-1)} \times \\
 & \quad \times |z_2|^{-n_2} \dots |z_m|^{-n_m}.
 \end{aligned}$$

Учитывая неравенство  $|z_k| > R_k$ ,  $k=1, 2, \dots, m$ , получим, что этот предел равен

$$\lim_{z_1 \rightarrow \infty} M \prod_{k=2}^m \frac{R_1^2}{|z_1| \left(1 - \frac{R_k}{|z_k|}\right) \left(1 - \frac{R_1}{|z_1|}\right)} = 0.$$

Заметим также, что

$$\left| \frac{f[n_1+1, n_2, \dots, n_m]}{n_1} \right| < |f[n_1+1, n_2, \dots, n_m]| < MR_1^{n_1} R_2^{n_2} \dots R_m^{n_m}, \quad n_1 = 2, 3, \dots$$

Отсюда следует, что ряд (3.6.18) сходится в той же области, что и ряд (3.6.2), определяющий  $Z^m$ -преобразование функции  $f[n_1, \dots, n_m]$ . Этим завершено доказательство теоремы.

Рассмотрим теперь  $Z^m$ -преобразование конечных разностей. Конечная разность первого порядка по переменной  $n_k$  решетчатой функции  $f[n_1, \dots, n_k, \dots, n_m]$  определяется так:

$$\Delta_k f[n_1, \dots, n_k, \dots, n_m] = f[n_1, \dots, n_k+1, \dots, n_m] - f[n_1, \dots, n_k, \dots, n_m]. \quad (3.6.19)$$

Конечная разность второго порядка равна

$$\begin{aligned} \Delta_k^2 f[n_1, \dots, n_k, \dots, n_m] &= \Delta_k \{ \Delta_k f[n_1, \dots, n_k, \dots, n_m] \} = \\ &= f[n_1, \dots, n_k+2, \dots, n_m] - 2f[n_1, \dots, n_k+1, \dots, n_m] + \\ &\quad + f[n_1, \dots, n_k, \dots, n_m]. \end{aligned}$$

Применяя последовательно формулу (3.6.19)  $q$  раз, можно получить выражение конечной разности порядка  $q$  функции  $f[n_1, \dots, n_k, \dots, n_m]$  относительно переменной  $n_k$ , которую будем обозначать  $\Delta_k^q f[n_1, \dots, n_k, \dots, n_m]$ . Аналогично можно определить и смешанные конечные разности. Например,

$$\begin{aligned} \Delta_{1,2}^2 f[n_1, n_2, \dots, n_m] &= \Delta_1 \{ \Delta_2 f[n_1, n_2, \dots, n_m] \} = \\ &= \Delta_1 \{ f[n_1, n_2+1, \dots, n_m] - f[n_1, n_2, \dots, n_m] \} = \\ &= f[n_1+1, n_2+1, \dots, n_m] - f[n_1+1, n_2, \dots, n_m] - \\ &\quad - f[n_1, n_2+1, \dots, n_m] + f[n_1, n_2, \dots, n_m]. \end{aligned}$$

8° Теорема об изображении конечной разности.

$$\Delta_k f [n_1, \dots, n_k, \dots, n_m] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (z_k - 1) F^* (z_1, \dots, z_m) - z_k F_{0k}^* (z_1, \dots, z_m), \quad (3.6.20)$$

где

$$F_{0k}^* (z_1, \dots, z_m) = Z^{m-1} \{f [n_1, \dots, n_{k-1}, 0, n_{k+1}, \dots, n_m]\}.$$

Докажем эту теорему для  $k=1$ . Имеем по определению

$$\begin{aligned} Z^m \{ \Delta_1 f [n_1, n_2, \dots, n_m] \} &= \\ &= Z^m \{ f [n_1 + 1, n_2, \dots, n_m] \} - Z^m \{ f [n_1, n_2, \dots, n_m] \} = \\ &= \sum_{n_1, \dots, n_m=0}^{\infty} z_1^{-n_1} z_2^{-n_2} \dots z_m^{-n_m} f [n_1 + 1, n_2, \dots, n_m] - \\ &\quad - F^* (z_1, z_2, \dots, z_m) = \\ &= z_1 \left[ \sum_{\substack{m_1=1, \\ n_2, \dots, n_m=0}}^{\infty} z_1^{-m_1} z_2^{-n_2} \dots z_m^{-n_m} f [m_1, n_2, \dots, n_m] \right] - \\ &\quad - F^* (z_1, z_2, \dots, z_m) = \\ &= z_1 \left[ \sum_{n_1, n_2, \dots, n_m=0}^{\infty} z_1^{-n_1} z_2^{-n_2} \dots z_m^{-n_m} f [n_1, n_2, \dots, n_m] - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n_2, \dots, n_m=0}^{\infty} z_2^{-n_2} \dots z_m^{-n_m} f [0, n_2, \dots, n_m] \right] - \\ &\quad - F^* (z_1, z_2, \dots, z_m) = (z_1 - 1) F^* (z_1, z_2, \dots, z_m) - \\ &\quad - z_1 F_{01}^* (z_2, \dots, z_m), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Формулу (3.6.20) нетрудно обобщить на случай конечной разности произвольного порядка, например,

$$\begin{aligned} Z^m \{ \Delta_1^2 f [n_1, n_2, \dots, n_m] \} &= Z^m \{ \Delta_1 [\Delta_1 f [n_1, n_2, \dots, n_m]] \} = \\ &= (z_1 - 1) Z^m \{ \Delta_1 f [n_1, n_2, \dots, n_m] \} - \\ &- z_1 Z^{m-1} \{ \Delta_1 f [0, n_2, \dots, n_m] \} = (z_1 - 1)^2 F^* (z_1, z_2, \dots, z_m) - \\ &\quad - z_1 (z_1 - 1) F_{01}^* (z_2, \dots, z_m) - z_1 F_{11}^* (z_2, \dots, z_m), \end{aligned}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} F_{11}^*(z_2, \dots, z_m) &= Z^{m-1} \{\Delta_1 f[0, n_2, \dots, n_m]\} = \\ &= Z^{m-1} \{f_{\cdot}[1, n_2, \dots, n_m] - f[0, n_2, \dots, n_m]\}. \end{aligned}$$

Последовательно применяя формулу (3.6.20)  $q$  раз, получим  $Z^m$ -преобразование конечной разности порядка  $q$ :

$$\begin{aligned} Z^m \{\Delta_1^q f[n_1, \dots, n_m]\} &= (z_1 - 1)^q F^*(z_1, \dots, z_m) - \\ &- z_1 \sum_{\nu=0}^{q-1} (z_1 - 1)^{q-1-\nu} F_{\nu 1}^*(z_2, \dots, z_m), \quad (3.6.21) \end{aligned}$$

где  $F_{\nu 1}^*(z_2, \dots, z_m) = Z^{m-1} \{\Delta_1^\nu f[0, n_2, \dots, n_m]\}$ .

Формула (3.6.20) в равной мере применима и для вычисления смешанных разностей. Например,

$$\begin{aligned} Z^m \{\Delta_{1,2}^2 f[n_1, n_2, \dots, n_m]\} &= Z^m \{\Delta_1 \{\Delta_2 f[n_1, n_2, \dots, n_m]\}\} = \\ &= (z_1 - 1) Z^m \{\Delta_2 f[n_1, n_2, \dots, n_m]\} - \\ &- z_1 Z^m \{\Delta_2 f[0, n_2, \dots, n_m]\} = \\ &= (z_1 - 1)(z_2 - 1) F^*(z_1, z_2, \dots, z_m) - \\ &- (z_1 - 1) z_2 F_{02}^*(z_1, z_3, \dots, z_m) - z_1 (z_2 - 1) F_{01}^*(z_2, \dots, z_m) - \\ &- z_1 z_2 F_{012}^*(z_3, \dots, z_m), \end{aligned}$$

где обозначено

$$F_{012}^*(z_3, \dots, z_m) = Z^m \{f[0, 0, n_3, \dots, n_m]\}.$$

Для введенных выше функций  $F_{0k}^*(z_1, \dots, z_m)$  справедлива следующая формула:

$$F_{0k}^*(z_1, \dots, z_m) = \lim_{z_k \rightarrow \infty} F^*(z_1, \dots, z_m), \quad (3.6.22)$$

где переход к пределу осуществляется по любой линии, лежащей в области аналитичности изображения:  $|z_k| > R_k$ . Для доказательства этой формулы используется тот же прием, что и при доказательстве теоремы. Полагая  $k=1$ , запишем изображение  $F^*(z_1, z_2, \dots, z_m)$  в виде

$$\begin{aligned} F^*(z_1, z_2, \dots, z_m) &= F_{01}^*(z_2, \dots, z_m) + \\ &+ \sum_{\substack{n_1=1, \\ n_2, \dots, n_m=0}}^{\infty} z_1^{-n_1} z_2^{-n_2} \dots z_m^{-n_m} f[n_1, n_2, \dots, n_m]. \end{aligned}$$

Оценим второе слагаемое

$$\left| \sum_{\substack{n_1=1, \\ n_2, \dots, n_m=0}}^{\infty} z_1^{-n_1} z_2^{-n_2} \dots z_m^{-n_m} f[n_1, n_2, \dots, n_m] \right| \leq \\ \leq M \sum_{\substack{n_1=1, \\ n_2, \dots, n_m=0}}^{\infty} R_1^{-n_1} R_2^{-n_2} \dots R_m^{-n_m} |z_1|^{-n_1} |z_2|^{-n_2} \dots \\ \dots |z_m|^{-n_m} = M \frac{R_1}{|z_1|} \prod_{i=2}^m \frac{1}{1 - \frac{R_i}{|z_i|}}.$$

При  $|z_1| \rightarrow \infty$  это выражение стремится к нулю. Следовательно,

$$\lim_{z_1 \rightarrow \infty} F^*(z_1, z_2, \dots, z_m) = F_{01}^*(z_2, \dots, z_m).$$

Учитывая равенство (3.6.22), формулу (3.6.20) можно записать следующим образом:

$$\Delta_k f[n_1, \dots, n_k, \dots, n_m] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (z_k - 1) F^*(z_1, \dots, z_m) - z_k \lim_{z_k \rightarrow \infty} F^*(z_1, \dots, z_m). \quad (3.6.23)$$

Операцией, обратной взятию конечной разности, является суммирование. Нетрудно видеть, что

$$\sum_{k=0}^{n_1-1} \Delta_1 f[k, n_2, \dots, n_m] = f[n_1, n_2, \dots, n_m] - f[0, n_2, \dots, n_m].$$

В связи с этим представляет интерес следующая теорема.

9° Теорема об изображении сумм. Если функция  $f[n_1, \dots, n_k, \dots, n_m]$  является оригиналом, то сумма  $\sum_{l=0}^{n_k-1} f[n_1, \dots, l, \dots, n_m]$  также является оригиналом и справедливо соотношение

$$\sum_{l=0}^{n_k-1} f[n_1, \dots, l, \dots, n_m] \Leftrightarrow \frac{F^*(z_1, \dots, z_m)}{(z_k - 1)}. \quad (3.6.24)$$

Доказательство этой теоремы проведем для случая  $k=1$ . Обозначим

$$\varphi [n_1, n_2, \dots, n_m] = \sum_{l=0}^{n_1-1} f [l, n_2, \dots, n_m]$$

и заметим, что

$$\begin{aligned} \Delta_1 \varphi [n_1, n_2, \dots, n_m] &= f [n_1, n_2, \dots, n_m], \\ \varphi [0, n_2, \dots, n_m] &= 0. \end{aligned}$$

По формуле (3.6.20)

$$Z^m \{ \Delta_1 \varphi [n_1, \dots, n_m] \} = (z_1 - 1) \Phi^* (z_1, \dots, z_m),$$

где

$$\Phi^* (z_1, \dots, z_m) = Z^m \{ \varphi [n_1, \dots, n_m] \}.$$

С другой стороны, это выражение равно

$$F^* (z_1, \dots, z_m) = Z^m \{ f [n_1, \dots, n_m] \}.$$

Следовательно,

$$\Phi^* (z_1, \dots, z_m) = \frac{F^* (z_1, \dots, z_m)}{(z_1 - 1)}.$$

Заметим также, что с учетом условия (3.6.6)

$$\begin{aligned} \left| \sum_{l=0}^{n_1-1} f [l, n_2, \dots, n_m] \right| &\leq \sum_{l=0}^{n_1-1} |f [l, n_2, \dots, n_m]| < \\ &< M \sum_{l=0}^{n_1-1} R_1^l R_2^{n_2} \dots R_m^{n_m} = M \frac{R_1^{n_1} - 1}{R_1 - 1} R_2^{n_2} \dots R_m^{n_m} < \\ &< M_1 R_1^{n_1} R_2^{n_2} \dots R_m^{n_m}, \end{aligned}$$

если

$$M_1 = \frac{M}{R_1 - 1}, \quad R_1 > 1.$$

Таким образом, сумма преобразуема в смысле  $Z^m$ -преобразования и имеет ту же область сходимости, что и функция  $f [n_1, \dots, n_m]$ , если  $R_1 > 1$ .

Формулу (3.6.24) можно применять для многократного суммирования, например,

$$\begin{aligned} Z^m \left\{ \sum_{r=0}^{n_1-1} \sum_{l=0}^{r-1} f[l, n_2, \dots, n_m] \right\} = \\ = \frac{1}{z_1-1} Z^m \left\{ \sum_{l=0}^{r-1} f[l, n_2, \dots, n_m] \right\} = \frac{1}{(z_1-1)^2} F^*(z_1, \dots, z_m). \end{aligned}$$

Она может использоваться и при суммировании по различным переменным, в частности,

$$\begin{aligned} Z^m \left\{ \sum_{l_1=0}^{n_1-1} \sum_{l_2=0}^{n_2-1} f[l_1, l_2, n_3, \dots, n_m] \right\} = \\ = \frac{1}{(z_1-1)(z_2-1)} F^*(z_1, \dots, z_m). \end{aligned}$$

Перейдем к теореме о свертке. Определим свертку многомерных решетчатых функций  $f_1[n_1, \dots, n_m]$  и  $f_2[n_1, \dots, n_m]$  выражением

$$\begin{aligned} f_1[n_1, \dots, n_m] * f_2[n_1, \dots, n_m] = \\ = \sum_{k_1, \dots, k_m=0}^{n_1, \dots, n_m} f_1[n_1 - k_1, \dots, n_m - k_m] f_2[k_1, \dots, k_m]. \end{aligned}$$

Заметим, что для оригиналов, т. е. решетчатых функций, для которых определено  $Z^m$ -преобразование, верхний предел суммы можно заменить бесконечным, поскольку эти функции равны нулю при отрицательных значениях аргумента.

10° Теорема свертки. Свертка оригиналов является оригиналом и соответствует произведению изображений:

$$\begin{aligned} f_1[n_1, \dots, n_m] * f_2[n_1, \dots, n_m] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow F_1^*(z_1, \dots, z_m) F_2^*(z_1, \dots, z_m). \quad (3.6.25) \end{aligned}$$

Вначале докажем, что свертка является оригиналом. Учитывая условие (3.6.6), получим

$$\begin{aligned} |f_1[n_1, \dots, n_m] * f_2[n_1, \dots, n_m]| \leq \\ \leq \sum_{k_1, k_2, \dots, k_m=0}^{n_1, n_2, \dots, n_m} |f_1[n_1 - k_1, \dots, n_m - k_m]| |f_2[k_1, \dots, k_m]| < \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &< M_1 M_2 R_{11}^{n_1} \dots R_{1m}^{n_m} \sum_{k_1, \dots, k_m=0}^{n_1, \dots, n_m} \left( \frac{R_{21}}{R_{11}} \right)^{k_1} \dots \left( \frac{R_{2m}}{R_{1m}} \right)^{k_m} = \\
 &= M_1 M_2 \prod_{i=1}^m \frac{R_{2i}^{n_i+1} - R_{1i}^{n_i+1}}{R_{2i} - R_{1i}}.
 \end{aligned}$$

Полагая для определенности  $R_{2i} > R_{1i}$ , запишем это выражение в виде

$$\frac{M_1 M_2}{\prod_{i=1}^m (R_{2i} - R_{1i})} \prod_{i=1}^m (R_{2i}^{n_i+1} - R_{1i}^{n_i+1}) < M \prod_{i=1}^m R_{2i}^{n_i},$$

где

$$M = \frac{M_1 M_2}{\prod_{i=1}^m (R_{2i} - R_{1i}) R_{2i}^{-1}}.$$

Из последнего неравенства следует, что свертка является оригиналом, т. е. условие (3.6.6) выполняется.

Для доказательства формулы (3.6.25) воспользуемся соответствием (3.6.12)

$$\begin{aligned}
 &Z^m \left\{ \sum_{k_1, \dots, k_m=0}^{\infty} f_1[n_1 - k_1, \dots, n_m - k_m] f_2[k_1, \dots, k_m] \right\} = \\
 &= \sum_{k_1, \dots, k_m=0}^{\infty} Z^m \{ f_1[n_1 - k_1, \dots, n_m - k_m] \} f_2[k_1, \dots, k_m] = \\
 &= \sum_{k_1, \dots, k_m=0}^{\infty} z_1^{-k_1} \dots z_m^{-k_m} F_1^*(z_1, \dots, z_m) f_2[k_1, \dots, k_m] = \\
 &= F_1^*(z_1, \dots, z_m) F_2^*(z_1, \dots, z_m).
 \end{aligned}$$

Здесь опущено обоснование справедливости почленного выполнения  $Z^m$ -преобразования, т. е. изменения порядка суммирования. Это обоснование делается так же, как и в одномерном случае.

В частном случае, когда одна из функций  $f_1, f_2$  является произведением решетчатых одномерных функций,

формула свертки приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \sum_{k_1, k_2, \dots, k_m=0}^{\infty} f_1[n_1 - k_1, \dots, n_m - k_m] \varphi[k_1] \dots \varphi[k_m] = \\ = Z^m \{f_1[n_1, \dots, n_m]\} Z^m \{\varphi[n_1] \dots \varphi[n_m]\} = \\ = F_1^*(z_1, \dots, z_m) \Phi^*(z_1) \dots \Phi^*(z_m), \end{aligned}$$

где  $\Phi^*(z) = Z\{\varphi[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \varphi[n]$ .

Кратко остановимся на применении многомерного  $Z^m$ -преобразования для описания нелинейных дискретных систем.

Наряду с общими свойствами  $Z^m$ -преобразования, рассмотренными в этом параграфе, при исследовании нелинейных систем используются некоторые специальные правила. Рассмотрение этого вопроса начнем с определения реакции нелинейной дискретной стационарной системы на заданное воздействие  $x[n]$ . Будем предполагать, что эта система задана дискретным полиномом Вольтерра (см. § 1 гл. II)

$$y[n] = F_N[x[n]].$$

Для того чтобы воспользоваться теоремой свертки, введем функцию  $y[n_1, \dots, n_k]$ , равную  $y[n]$  при  $n_1 = \dots = n_k = n$ :

$$\begin{aligned} y[n_1, \dots, n_k] = \\ = \sum_{k=0}^N \sum_{m_1, \dots, m_k=0}^{\infty} h_k[n_1 - m_1, \dots, n_k - m_k] x[m_1] \dots x[m_k]. \end{aligned}$$

Применяя к обеим частям этого равенства  $Z^k$ -преобразование, получим

$$Y^*(z_1, \dots, z_k) = \sum_{k=0}^N H_k^*(z_1, \dots, z_k) X^*(z_1) \dots X^*(z_k).$$

Функцию  $y[n_1, \dots, n_k]$  можно вычислить по формуле обратного  $Z^k$ -преобразования:

$$y[n_1, \dots, n_k] = Z^{-k} \{Y^*(z_1, \dots, z_k)\}$$

и положить в полученном выражении  $n_1 = \dots = n_k = n$ . Однако можно поступить иначе — преобразовать выражение  $Y^*(z_1, \dots, z_k)$  таким образом, чтобы оно зависело только от одной переменной и соответствовало оригиналу  $y[n]$ . Эту операцию по аналогии с § 1 будем называть *переходом к одной переменной в комплексной области* и обозначать символом  $\{ \ }^*$ . Таким образом,

$$y[n] \Leftrightarrow \{Y^*(z_1, \dots, z_k)\}^*.$$

Рассмотрим указанную операцию более подробно. Полагая в формуле обратного  $Z^k$ -преобразования  $n_1 = \dots = n_k = n$ , получим

$$y[n] = \left(\frac{1}{2\pi j}\right)^k \int_{C_k} \dots \int_{C_1} Y^*(z_1, \dots, z_k) \prod_{i=1}^k z_i^{n-1} dz_i, \quad (3.6.26)$$

где  $C_i, i=1, \dots, k$  — окружности  $|z_i| = R_i$ .

Обозначим  $z = \prod_{i=1}^k z_i$  и выразим через  $z$  одну из переменных, например,  $z_k$ :

$$z_k = \frac{z}{\prod_{i=1}^{k-1} z_i}$$

Поскольку  $|z| = \prod_{i=1}^k |z_i|$ , областью аналитичности функции  $F^*\left(z_1, \dots, z / \prod_{i=1}^{k-1} z_i\right)$  по переменной  $z$  будет  $|z| > \prod_{i=1}^k R_i$ ; обозначим через  $C$  окружность  $|z| = R > \prod_{i=1}^k R_i$ .

Теперь выражение (3.6.26) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} y[n] &= \\ &= \frac{1}{(2\pi j)^k} \int_C \int_{C_{k-1}} \dots \int_{C_1} Y^*\left(z_1, \dots, z_{k-1}, \frac{z}{\prod_{i=1}^{k-1} z_i}\right) \frac{z^{n-1} dz}{\prod_{i=1}^{k-1} z_i} \prod_{i=1}^{k-1} dz_i. \end{aligned}$$

Поскольку порядок интегрирования по  $z$  и по остальным переменным можно изменить, это выражение представляет собой обратное  $Z$ -преобразование от функции

$$\begin{aligned} Y^*(z) = \{Y^*(z_1, \dots, z_k)\}^* = \\ = \frac{1}{(2\pi j)^{k-1}} \int_{C_{k-1}} \dots \int_{C_1} Y^* \left( z_1, \dots, z_{k-1}, \frac{z}{\prod_{i=1}^{k-1} z_i} \right) \prod_{i=1}^{k-1} \frac{dz_i}{z_i}, \end{aligned} \quad (3.6.27)$$

зависящей только от переменной  $z$ . Таким образом, имеет место следующая теорема.

11<sup>0</sup> Теорема о переходе к одной переменной в области изображений.

$$y[n] \Leftrightarrow \frac{1}{(2\pi j)^{k-1}} \int_{C_{k-1}} \dots \int_{C_1} Y^* \left( z_1, \dots, z_{k-1}, \frac{z}{\prod_{i=1}^{k-1} z_i} \right) \prod_{i=1}^{k-1} \frac{dz_i}{z_i}. \quad (3.6.28)$$

Если  $y[n]$  — реакция рассматриваемой дискретной нелинейной системы на воздействие  $x[n]$ :  $y[n] = F_N[x[n]]$ , то  $Y^*(z)$  определяется формулой (3.6.27), в которой надо положить

$$Y^*(z_1, \dots, z_k) = H^*(z_1, \dots, z_k) X^*(z_1) \dots X^*(z_k).$$

Представляет интерес частный случай, когда изображение  $F^*(z_1, \dots, z_k)$  зависит только от произведения аргументов:

$$F^*(z_1, \dots, z_k) = F^*(z_1 \dots z_k).$$

В этом случае из формулы (3.6.27) следует

$$\{F^*(z_1, \dots, z_k)\}^* = \frac{1}{(2\pi j)^{k-1}} \int_{C_{k-1}} \dots \int_{C_1} F^*(z) \prod_{i=1}^{k-1} \frac{dz_i}{z_i} = F^*(z). \quad (3.6.29)$$

Таким образом, для определения оригинала  $y[n]$ , зависящего только от одного переменного, достаточно положить  $z = \prod_{i=1}^k z_i$  и определить обратное  $Z$ -преобразование

от функции  $F^*(z)$ . Если изображение  $F^*(z_1, \dots, z_k)$  равно произведению изображения  $F^*(z_1, \dots, z_k) = F_1^*(z_1, \dots, z_k)$ , зависящего только от произведения аргументов, и некоторого произвольного изображения  $F_2^*(z_1 \cdot \dots \cdot z_k)$ , то имеет место следующее соотношение:

$$\{F_1^*(z_1, \dots, z_k) F_2^*(z_1, \dots, z_k)\}^* = \{F_1^*(z_1 \cdot \dots \cdot z_k) \times \\ \times F_2^*(z_1, \dots, z_k)\}^* = F_1^*(z) \{F_2^*(z_1, \dots, z_k)\}^*. \quad (3.6.30)$$

Иногда оказывается полезным обратное утверждение, т. е. изображение  $F^*(z)$  можно вносить под знак  $\{ \}^*$ , заменяя  $z$  на  $\prod_{i=1}^k z_i$ .

Рассмотрим теперь некоторые особенности применения многомерного  $Z$ -преобразования при описании нелинейных дискретных систем в области изображений. Применим  $Z^m$ -преобразование для описания последовательного соединения двух дискретных систем\*) (рис. 3.6.1). Предположим вначале, что одна из дискретных

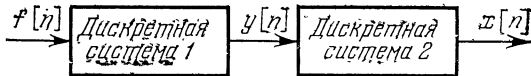


Рис. 3.6.1.

систем на рис. 3.6.1 — например, первая — является линейной, а вторая — описывается дискретным полиномом Вольтерра, т. е.

$$y[n] = \sum_{m=0}^{\infty} g[n-m] f[m],$$

$$x[n] = \sum_{k=1}^N \sum_{m_1, \dots, m_k=0}^{\infty} h_k[n-m_1, \dots, n-m_k] y[m_1] \dots y[m_k].$$

\*) В частности, если это импульсные системы с амплитудно-импульсной модуляцией, то они предполагаются синфазными и синхронными [88].

Применим к этим уравнениям Z-преобразование:

$$Y^*(z) = G^*(z)F^*(z),$$

$$X^*(z) = \sum_{k=1}^N \{H_k^*(z_1, \dots, z_k) Y^*(z_1) \dots Y^*(z_k)\}^*.$$

Из этих равенств получаем уравнение системы в области изображений:

$$\begin{aligned} X^*(z) &= \sum_{k=1}^N \left\{ H_k^*(z_1, \dots, z_k) \prod_{i=1}^k G^*(z_i) F^*(z_i) \right\}^* = \\ &= \sum_{k=1}^N \{K_k^*(z_1, \dots, z_k) F^*(z_1) \dots F^*(z_k)\}^*. \end{aligned} \quad (3.6.31)$$

Изображения ядер полинома Вольтерра, описывающего систему, равны

$$\begin{aligned} K_k^*(z_1, \dots, z_k) &= H_k^*(z_1, \dots, z_k) G^*(z_1) \dots G^*(z_k), \\ k &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.6.32)$$

Поменяем местами линейную и нелинейную части системы, изображенной на рис. 3.6.1, т. е. положим

$$y[n] = \sum_{k=1}^N \sum_{m_1, \dots, m_k=0}^{\infty} h_k[n - m_1, \dots, n - m_k] f[m_1] \dots f[m_k],$$

$$x[n] = \sum_{m=0}^{\infty} g[n - m] y[m].$$

Определим уравнение системы в области изображений в этом случае. Имеем

$$\begin{aligned} Y^*(z) &= \sum_{k=1}^N \left\{ H_k^*(z_1, \dots, z_k) \prod_{i=1}^k F^*(z_i) \right\}^*, \\ X^*(z) &= G^*(z) Y^*(z). \end{aligned}$$

Из соотношения (3.6.30) получим уравнение всей

СИСТЕМЫ:

$$\begin{aligned} X^*(z) &= G^*(z) \sum_{k=1}^N \left\{ H_k^*(z_1, \dots, z_k) \prod_{i=1}^k F^*(z_i) \right\}^* = \\ &= \sum_{k=1}^N \left\{ H_k^*(z_1, \dots, z_k) G^*(z_1 \cdot \dots \cdot z_k) \prod_{i=1}^k F^*(z_i) \right\}^* = \\ &= \sum_{k=1}^N \left\{ K_k^*(z_1, \dots, z_k) \prod_{i=1}^k F^*(z_i) \right\}^*, \quad (3.6.33) \end{aligned}$$

где

$$K_k^*(z_1, \dots, z_k) = H_k^*(z_1, \dots, z_k) G^*(z_1 \cdot \dots \cdot z_k). \quad (3.6.34)$$

Пусть теперь обе дискретные системы на рис. 3.6.1, соединенные последовательно, описываются дискретными полиномами Вольтерра

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=1}^M \sum_{m_1, \dots, m_k=0}^{\infty} h_k[n - m_1, \dots, n - m_k] \prod_{i=1}^k f[m_i], \\ x[n] &= \sum_{k=1}^N \sum_{l_1, \dots, l_k=0}^{\infty} g_k[n - l_1, \dots, n - l_k] \prod_{i=1}^k y[l_i]. \end{aligned}$$

В области изображений получим

$$\begin{aligned} Y^*(z) &= \sum_{k=1}^M \left\{ H_k^*(z_1, \dots, z_k) \prod_{i=1}^k F^*(z_i) \right\}^*, \\ X^*(z) &= \sum_{k=1}^N \left\{ G_k^*(z_1, \dots, z_k) \prod_{i=1}^k Y^*(z_i) \right\}^*. \end{aligned}$$

Подставляя  $Y^*(z)$  из первого равенства во второе, будем иметь

$$\begin{aligned} X^*(z) &= \\ &= \sum_{k=1}^N \left\{ G_k^*(z_1, \dots, z_k) \prod_{i=1}^k \left\{ \sum_{k=1}^M H_k^*(z_1, \dots, z_k) \prod_{j=1}^k F^*(z_j) \right\}_{z=z_i}^* \right\}^*, \quad (3.6.35) \end{aligned}$$

где символ  $\left\{ \right\}_{z=z_i}^*$  означает операцию перехода к одной переменной в плоскости комплексных переменных при

условии, это эта переменная обозначается  $z_i$ . Преобразуем выражение (3.6.35), используя формулу (3.6.30):

$$\begin{aligned}
 X^*(z) &= \{G_1^*(z_1) [H_1^*(z_1) F^*(z_1)] + \\
 &\quad + \{H_2^*(z_1, z_2) F^*(z_1) F^*(z_2)\}_{z=z_1}^* + \dots\}^* + \\
 &\quad + \{G_2^*(z_1, z_2) [H_1^*(z_1) F^*(z_1) + \{H_2^*(z_1, z_2) F^*(z_1) \times \\
 &\quad \times F^*(z_2)\}_{z=z_1}^* + \dots] [H_1^*(z_2) F^*(z_2) + \{H_2^*(z_1, z_2) F^*(z_1) \times \\
 &\quad \times F^*(z_2)\}_{z=z_2}^* + \dots]\}^* + \dots = \{G_1^*(z_1) H_1^*(z_1) F^*(z_1)\}^* + \\
 &\quad + \{G_1^*(z_1 \cdot z_2) H_2^*(z_1, z_2) F^*(z_1) F^*(z_2)\}^* + \\
 &\quad + \{G_2^*(z_1, z_2) H_1^*(z_1) H_1^*(z_2) F^*(z_1) F^*(z_2)\}^* + \dots = \\
 &= \sum_{k=1}^N \{K_k^*(z_1, z_2, \dots, z_k) F^*(z_1) F^*(z_2) \dots F^*(z_k)\}^*,
 \end{aligned}$$

где

$$K_1^*(z) = H_1^*(z) G_1^*(z),$$

$$\begin{aligned}
 K_2^*(z_1, z_2) &= H_2^*(z_1, z_2) G_1^*(z_1 \cdot z_2) + \\
 &\quad + G_2^*(z_1, z_2) H_1^*(z_1) H_1^*(z_2), \dots \quad (3.6.36)
 \end{aligned}$$

Таким образом, многомерное Z-преобразование позволяет определить изображение ядер любого порядка для полинома Вольтерра, описывающего дискретную систему, изображенную на рис. 3.6.1. С помощью этих формул можно описать и замкнутую дискретную систему

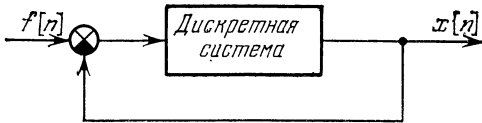


Рис. 3.6.2.

(рис. 3.6.2). Уравнение этой системы во временной области имеет вид

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^N \sum_{m_1, \dots, m_k=0}^{\infty} g_k[n - m_1, \dots, n - m_k] \times \\
 \times \prod_{i=1}^k (f[m_i] - x[m_i]) = x[n],
 \end{aligned}$$



где  $g[n_1, \dots, n_k]$  — ядра дискретного полинома Вольтерра, описывающего разомкнутую систему. Переходя в область изображений, получим

$$\left\{ \sum_{k=1}^N G_k^*(z_1, \dots, z_k) \prod_{i=1}^k [F^*(z_i) - X^*(z_i)] \right\}^* = X^*(z). \quad (3.6.37)$$

Будем искать изображение решения в виде

$$X^*(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ K_k^*(z_1, \dots, z_k) \prod_{i=1}^k F^*(z_i) \right\}^*.$$

Подставляя это выражение в (3.6.37), получим

$$\left\{ \sum_{k=1}^N G_k^*(z_1, \dots, z_k) \prod_{i=1}^k \left[ F^*(z_i) - \sum_{l=1}^{\infty} K_l^*(z_1, \dots, z_k) \prod_{i=1}^k F^*(z_i) \right]_{z=z_i} \right\}^* = X^*(z). \quad (3.6.38)$$

Обозначим

$$H_1^*(z) = 1 - K_1^*(z),$$

$$H_i^*(z_1, \dots, z_i) = -K_i^*(z_1, \dots, z_i), \quad i = 2, 3, \dots.$$

Тогда уравнение (3.6.38) можно записать следующим образом:

$$\left\{ \sum_{k=1}^N G_k^*(z_1, \dots, z_k) \prod_{i=1}^k \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} H_l^*(z_1, \dots, z_k) \prod_{i=1}^k F^*(z_i) \right\}_{z=z_i} \right\}^* = X^*(z), \quad (3.6.39)$$

что совпадает с уравнением (3.6.35) при  $M = \infty$ . С учетом введенных обозначений и равенств (3.6.36) можно записать систему уравнений, связывающих изображения ядер ряда Вольтерра для замкнутой и для разомкнутой системы:

$$\left. \begin{aligned} K_1^*(z) &= (1 - K_1^*(z)) G_1^*(z), \\ K_2^*(z_1, z_2) &= -K_2^*(z_1, z_2) G_1^*(z_1 \cdot z_2) + \\ &\quad + G_2^*(z_1, z_2) (1 - K_1^*(z_1)) (1 - K_2^*(z_2)), \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (3.6.40)$$

Полученные формулы аналогичны формулам § 2 гл. II, описывающим замкнутую непрерывную систему.

### § 7. Решение нелинейных дифференциальных уравнений с помощью интегральных преобразований

Интегральные преобразования Лапласа, Фурье и Z-преобразование могут быть использованы в совокупности с рассмотренным в § 7 гл. II методом последовательных приближений для решения нелинейных уравнений. Снова рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$L(t)y(t) + \sum_{i=2}^N k_i(t)y^i(t) = x(t). \quad (3.7.1)$$

В § 7 гл. II было показано, что метод последовательных приближений позволяет получить следующую рекуррентную формулу для решения этого уравнения:

$$\left. \begin{aligned} y_0(t) &= \int_{E_+^1} h(t, \tau) x(\tau) d\tau, \\ y_j(t) &= y_0(t) - \int_{E_+^1} h(t, \tau) \sum_{i=2}^N k_i(\tau) y_{j-1}^i(\tau) d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (3.7.2)$$

Перейдем в область изображений, используя для этого параметрическую передаточную функцию нестационарной линейной системы  $H(s, t)$ .

Согласно определению [21]

$$\begin{aligned} H(s, t) &= \int_{-\infty}^t h(t, \tau) \exp[-s(t - \tau)] d\tau = \\ &= \int_0^{\infty} h(t, t - \tau) \exp(-s\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.7.3)$$

Используя параметрическую передаточную функцию,

формулы (3.7.2) можно записать так:

$$\left. \begin{aligned} y_0(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{Br_1} H(s, t) X(s) \exp(st) ds, \\ y_j(t) &= y_0(t) - \\ &- \frac{1}{2\pi j} \int_{Br_1} H(s, t) \sum_{i=2}^N \left\{ K_i(s_1) \prod_{r=2}^{i+1} Y_{j-1}(s_r) \right\}^* \exp(st) ds, \end{aligned} \right\} \quad (3.7.4)$$

где обозначено  $K_i(s) \doteq k_i(t)$ .

Если нелинейный оператор в левой части уравнения (3.7.1) стационарен, т. е. все  $k_i(t) \equiv k_i$ , то формулы (3.7.4) можно записать в виде

$$\begin{aligned} y_0(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{Br_1} H(s, t) X(s) \exp(st) ds, \\ y_j(t) &= y_0(t) - \\ &- \frac{1}{2\pi j} \int_{Br_1} H(s, t) \sum_{i=2}^N k_i \left\{ \prod_{r=1}^i Y_{j-1}(s_r) \right\}^* \exp(st) ds. \end{aligned}$$

Если же, наоборот, линейный дифференциальный оператор стационарен, а нелинейность нестационарна, то, заменяя параметрическую передаточную функцию обычной передаточной функцией, получим такую систему формул:

$$\left. \begin{aligned} Y_0(s) &= H(s) X(s), \\ Y_j(s) &= Y_0(s) - H(s) \sum_{i=2}^N \left\{ K_i(s_1) \prod_{r=2}^{i+1} Y_{j-1}(s_r) \right\}^* \end{aligned} \right\} \quad (3.7.5)$$

причем  $H(s) = \frac{1}{L(s)}$ .

В случае, когда и линейная, и нелинейная части уравнения (3.7.1) стационарны, то

$$\left. \begin{aligned} Y_0(s) &= H(s) X(s), \\ Y_j(s) &= Y_0(s) - H(s) \sum_{i=2}^N k_i \left\{ \prod_{r=1}^i Y_{j-1}(s_r) \right\}^* \end{aligned} \right\} \quad (3.7.6)$$

Из последней формулы можно получить изображения ядер ряда Вольтерра (см. § 2 этой главы) для уравнения (3.7.1). Если начальные условия для уравнения (3.7.1) ненулевые, то первое равенство в системах (3.7.5) и (3.7.6) следует заменить таким:

$$Y_0(s) = H(s) (W(s) + X(s)),$$

где функция  $W(s)$  определяется через начальные условия  $y_\lambda$  так [26]:

$$W(s) = \sum_{\lambda=1}^n (a_n s^{n-\lambda} + \dots + a_\lambda) y_{\lambda-1}.$$

Вычисления по формулам (3.7.4) — (3.7.6) несложно провести, если изображение входного сигнала системы является дробно-рациональной функцией аргумента  $s$ . Параметрическую передаточную функцию следует определить обычными методами теории линейных систем [7].

При построении итерационной процедуры для нелинейных нестационарных систем используется также и многомерное преобразование Лапласа. Рассмотрим нестационарное нелинейное неоднородное уравнение

$$L(t)y + f[y] = x, \quad (3.7.7)$$

где  $L(t)$  — линейный нестационарный дифференциальный оператор порядка  $n$  вида

$$L(t) = \sum_{i=0}^n (a_{0i} + a_{1i}(t)) \frac{d^i}{dt^i}, \quad (3.7.8)$$

причем  $a_{1n}(t) \equiv 0$ ,  $a_{0n} \neq 0$  и все функции  $a_{1i}(t)$  имеют преобразование Лапласа  $A_{1i}(s)$ .

Пусть нелинейность  $f[y]$  имеет вид

$$f[y] = \sum_{l=1}^m b_l y^l. \quad (3.7.9)$$

Используя теорему о переходе к одной переменной в комплексной области, соотношение (3.7.9) можно записать в виде

$$f[y(t)] \doteq \sum_{l=1}^m b_l \left\{ \prod_{r=1}^l Y(s_r) \right\}^*, \quad (3.7.10)$$

Пусть для уравнения (3.7.7) заданы начальные условия  $y(0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$ . Имея в виду соотношение (3.7.8) и теорему о переходе к одной переменной в комплексной области, изображение выражения  $L(t)y(t)$  можно записать так:

$$L(t)y(t) \doteq \sum_{i=0}^n a_{0i} s^i Y(s) + \sum_{i=0}^n \{A_{1i}(s_1) s_2^i Y(s_2)\}^* - W(s), \quad (3.7.11)$$

где составляющая  $W(s)$  определяется начальными условиями

$$W(s) = \sum_{\lambda=1}^n (a_{0n} s^{n-\lambda} + \dots + a_{0\lambda}) y_{\lambda-1}.$$

Переходя в комплексную область, подставим (3.7.10) и (3.7.11) в (3.7.7):

$$\sum_{i=0}^n a_{0i} s^i Y(s) + \sum_{i=0}^n \{A_{1i}(s_1) s_2^i Y(s_2)\}^* + \sum_{l=1}^m b_l \left\{ \prod_{r=1}^l Y(s_r) \right\}^* = X(s) + W(s). \quad (3.7.12)$$

Если начальные условия — нулевые, то  $W(s) \equiv 0$ . Преобразуем уравнение (3.7.12) к такой форме:

$$Y(s) = \frac{1}{\sum_{i=0}^n a_{0i} s^i} \left[ X(s) + W(s) - \sum_{i=0}^n \{A_{1i}(s_1) s_2^i Y(s_2)\}^* - \sum_{l=1}^m b_l \left\{ \prod_{r=1}^l Y(s_r) \right\}^* \right]. \quad (3.7.13)$$

Уравнение (3.7.13) является уравнением в изображениях относительно  $Y(s)$ , и его решение можно искать

методом последовательных приближений по следующей схеме:

$$\left. \begin{aligned}
 Y_0(s) &= \frac{1}{\sum_{i=0}^n a_{0i}s^i} [X(s) + W(s)], \\
 Y_j(s) &= Y_0(s) - \frac{1}{\sum_{i=0}^n a_{0i}s^i} \left[ \sum_{i=0}^n \{A_{1i}(s_1) s_2^i Y_{j-1}(s_2)\}^* + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{l=1}^m b_l \left\{ \prod_{r=1}^l Y_{j-1}(s_r) \right\}^* \right].
 \end{aligned} \right\} \quad (3.7.14)$$

Начальное приближение в этой процедуре  $Y_0(s)$  — это решение уравнения (3.7.7) для заданных начальных условий, если нелинейная и нестационарная части не учитываются. Сама итерационная процедура задается вторым уравнением системы (3.7.14), и в ней на каждом шаге учитывается одновременно и нелинейная, и нестационарная части уравнения (3.7.7). Вычисления по второй формуле можно произвести, применяя теоремы § 1 гл. III и таблицу приложения. Процедура решения и сходимость метода не изменяются, если нелинейность системы будет полиномом (может быть с переменными коэффициентами) от выходного сигнала  $y(t)$  и его производных вплоть до  $n-1$ -го порядка.

Если считать, что нелинейность в уравнении (3.7.7) отсутствует, то решение этого уравнения с помощью системы (3.7.14) является решением линейной нестационарной задачи по методу свертки [83], [136].

Рассмотренные выше итерационные методы решения уравнения (3.7.1) применимы, когда сигнал  $x(t)$  — некоторая детерминированная функция времени. Пусть теперь сигнал  $x(t)$  — выборочная функция случайного процесса с известными статистическими характеристиками.

Требуется определить статистические характеристики выходного сигнала  $y(t)$ . Методику решения этой задачи изложим на примере нелинейной нестационарной

системы

$$L(t)y(t) + y^3(t) = x(t). \quad (3.7.15)$$

Пусть входной сигнал  $x(t)$  — нестационарный случайный процесс с симметричным распределением, нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией  $K_x(t_1, t_2)$ . Решим (3.7.15) итерационно. Имеем

$$y_0(t) = \int_{-\infty}^t h(t, \tau) x(\tau) d\tau. \quad (3.7.16)$$

Математическое ожидание процесса  $y_0(t)$  равно нулю, а корреляционная функция определится соотношением

$$K_{y_0}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} h(t_1, \tau_1) h(t_2, \tau_2) K_x(\tau_1, \tau_2) d\tau. \quad (3.7.17)$$

Для того чтобы перейти из временной области в частотную, используем понятие двумерной спектральной плотности  $\Phi_x^{(2)}(\omega_1, \omega_2)$  нестационарного случайного сигнала [5]

$$\Phi_x^{(2)}(\omega_1, \omega_2) = \int_{E^2} K_x(t_1, t_2) \exp\left(-j \sum_{i=1}^2 \omega_i t_i\right) dv_t. \quad (3.7.18)$$

Пусть, в частности,  $K_x(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^n \varphi_{1i}(t_1) \varphi_{2i}(t_2)$ , где  $\varphi_{1i}(t), \varphi_{2i}(t) \in L(E^1)$ . Тогда по формуле (3.7.18) получим, обозначив  $\Phi_{1i}(\omega) \doteq \varphi_{1i}(t), \Phi_{2i}(\omega) \doteq \varphi_{2i}(t)$ ,

$$\Phi_x^{(2)}(\omega_1, \omega_2) = \sum_{i=1}^n \Phi_{1i}(\omega_1) \Phi_{2i}(\omega_2).$$

Если случайный процесс стационарен, то его двумерная спектральная плотность равна (см. § 4 этой главы)

$$\Phi_x^{(2)}(\omega_1, \omega_2) = \Phi_x(\omega_2) \delta(\omega_1 + \omega_2) 2\pi.$$

Из последующих двух формул следует, что для нестационарного процесса  $x(t)$  с корреляционной функцией  $K(t_1, t_2) = K_1(t_1)K_2(t_2)K(t_1 - t_2)$  двумерную спект-

ральную плотность можно вычислить по формуле двумерной свертки в частотной области, а именно:

$$\Phi_x^{(2)}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{E^1} \Phi_1(\omega_1 - p) \Phi_2(\omega_2 + p) \Phi(p) dp. \quad (3.7.19)$$

Теперь, используя параметрическую передаточную функцию  $H(t, s)$ , перейдем от формулы (3.7.17) к такому соотношению:

$$\begin{aligned} K_{y_0}(t_1, t_2) &= \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{E^2} H(t_1, j\omega_1) H(t_2, j\omega_2) \Phi_x^{(2)}(\omega_1, \omega_2) \exp\left(j \sum_{i=1}^2 \omega_i t_i\right) dv_\omega. \end{aligned} \quad (3.7.20)$$

Вычисления по формуле (3.7.20) проводятся с помощью методов обращения двумерного преобразования Фурье.

Если входной сигнал стационарен, то, подставляя (3.7.19) в (3.7.20), получим

$$\begin{aligned} K_{y_0}(t_1, t_2) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{E^1} H(t_1, j\omega) H(t_2, -j\omega) \Phi_x^{(2)}(\omega) \exp[j\omega(t_1 - t_2)] d\omega. \end{aligned}$$

Если же, наоборот, система стационарна, но сигнал не стационарен, то формула (3.7.20) принимает такой вид:

$$\begin{aligned} K_{y_0}(t_1, t_2) &= \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{E^2} H(j\omega_1) H(j\omega_2) \Phi_x^{(2)}(\omega_1, \omega_2) \exp\left(j \sum_{i=1}^2 \omega_i t_i\right) dv_\omega, \end{aligned} \quad (3.7.21)$$

или в частотной области

$$\Phi_{y_0}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) = H(j\omega_1) H(j\omega_2) \Phi_x^{(2)}(\omega_1, \omega_2).$$

Если требуется определить только дисперсию выходного сигнала, то в формуле (3.7.21) следует положить  $t_1 = t_2$ , и вычисления можно проводить с помощью теоремы о переходе к одной переменной.

Формула (3.7.16) задает начальное приближение в методе последовательных приближений. Для первого



шага итерационного процесса имеем такую формулу:

$$y_1(t) = y_0(t) - g(t), \quad (3.7.22)$$

где обозначено

$$g(t) = \int_{-\infty}^t h_1^*(t, \tau) y_0^3(\tau) d\tau.$$

Математическое ожидание процесса  $y_1(t)$ , вследствие нечетности нелинейной характеристики, тоже будет равно нулю. Поэтому корреляционная функция процесса  $y_1(t)$  будет выглядеть так:

$$K_{y_1}(t_1, t_2) = K_{y_0}(t_1, t_2) - K_{y_0g}(t_1, t_2) - K_{gy_0}(t_1, t_2) + K_g(t_1, t_2). \quad (3.7.23)$$

Первое слагаемое суммы (3.7.23) уже было вычислено. Второе слагаемое получится в таком виде:

$$K_{y_0g}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} h(t_1, \tau_1) h(t_2, \tau_2) K_{y_0^3}(\tau_1, \tau_2) d\tau,$$

а третье и четвертое слагаемые — такими:

$$K_{gy_0}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} h(t_1, \tau_1) h(t_2, \tau_2) K_{y_0^3x}(\tau_1, \tau_2) d\tau,$$

$$K_g(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} h(t_1, \tau_1) h_1^*(t_2, \tau_2) K_{y_0^3}(\tau_1, \tau_2) d\tau.$$

Используя преобразование Фурье, формулу (3.7.23) можно записать так:

$$\begin{aligned} K_{y_1}(t_1, t_2) = & \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{E^2} H(t_1, j\omega_1) H(t_2, j\omega_2) \{ \Phi_x^{(2)}(\omega_1, \omega_2) - \\ & - \Phi_{x_0^3}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) - \Phi_{y_0^3x}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) + \Phi_{y_0^3}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) \} \times \\ & \times \exp\left(j \sum_{i=1}^2 \omega_i t_i\right) d\omega. \quad (3.7.24) \end{aligned}$$

Если процесс  $x(t)$  стационарен и сама система стационарна, то (3.7.24) преобразуется к виду

$$K_{y_1}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{E^1} H(j\omega) H(-j\omega) \{ \Phi_x(\omega) - 2 \operatorname{Re} \Phi_{xy_0^3}(\omega) + \Phi_{y_0^3}(\omega) \} \exp(j\omega\tau) d\omega, \quad (3.7.25)$$

или в частотной области —

$$\Phi_{y_1}(\omega) = |H(j\omega)|^2 \{ \Phi_x(\omega) - 2 \operatorname{Re} \Phi_{xy_0^3}(\omega) + \Phi_{y_0^3}(\omega) \}. \quad (3.7.26)$$

Процесс последовательных приближений обычно быстро сходится, и одной-двух итераций часто оказывается вполне достаточно для получения практически точного решения нелинейной задачи.

## § 8. Применение преобразования Лапласа в методе равномерной линеаризации

Одномерное преобразование Лапласа может быть применено совместно с методом равномерной линеаризации, основные положения которого изложены в § 7 гл. II, для определения реакции нелинейных систем, заданных дифференциальным или интегральным уравнением.

Пусть стационарная система задана уравнением

$$Ly(t) + \varphi[y(t)] = x(t), \quad (3.8.1)$$

а нелинейная функция  $\varphi[y]$  в  $E^1$  удовлетворяет условиям Липшица, т. е.

$$|\varphi[y_1] - \varphi[y_2]| < K|y_1 - y_2|. \quad (3.8.2)$$

Прежде чем переходить к определению выходного сигнала  $y(t)$ , исследуем устойчивость системы (3.8.1). Пусть начальные условия — нулевые. Перейдем от дифференциального уравнения (3.8.1) к эквивалентному

ему интегральному

$$y(t) = \int_0^t h(\tau) x(t - \tau) d\tau - \int_0^t h(\tau) \varphi[y(t - \tau)] d\tau, \quad (3.8.3)$$

где  $h(\tau) \doteq \frac{1}{L(s)}$ .

Пусть характеристическое уравнение  $D(\lambda) = 0$  имеет корни только в левой полуплоскости, т. е. линейная система

$$y_n(t) = v_1 x(t) = \int_0^t h(\tau) x(t - \tau) d\tau \quad (3.8.4)$$

устойчива в  $C(E^1)$ . Тогда, как это следует из формулы (2.7.13), достаточное условие устойчивости системы (3.8.3) в целом в  $C(E^1)$  будет таким:

$$\alpha = K \int_0^{\infty} |h(\tau)| d\tau < 1. \quad (3.8.5)$$

Интеграл от модуля весовой функции  $I = \int_0^{\infty} |h(\tau)| d\tau$  может быть выражен через коэффициенты линейного оператора  $L$  [16], [101]. Для системы первого и второго порядка получено, что, если  $L(s) = s + a_1$ , то при  $a_1 > 0$  (условие устойчивости линейной системы (3.8.3))  $I = 1/a_1$ , если же  $L(s) = s^2 + a_1 s + a_2$ , то при  $a_2, a_1 > 0$  (условие устойчивости системы (3.8.3)) и при  $a_1^2 \geq 4a_2$   $I = \frac{1}{a_1}$ , а при  $a_1^2 < 4a_2$   $I = \frac{1}{a_2} \operatorname{cth} \left( \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \Phi \right)$ , где  $\Phi$  — угол, соответствующий паре комплексных корней характеристического уравнения  $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$ . Для системы произвольного порядка  $n$  имеем оценку [101]

$$I \leq \frac{1}{a_n} \prod_{\Phi} \operatorname{cth} \left( \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \Phi \right), \quad (3.8.6)$$

где произведение вычисляется для всех углов комплексных корней  $\Phi$ .

Перейдем теперь к определению выходного сигнала системы (3.8.1) с помощью метода равномерной линеаризации. Пусть сначала функция  $\varphi[y]$  нечетно-симмет-

рична относительно начала координат, а сигнал  $y(t)$  удовлетворяет такому условию:

$$\sup_{t \in T} y(t) = - \inf_{t \in T} y(t). \quad (3.8.7)$$

Используя метод равномерной линеаризации, сопоставим уравнению (3.8.1) линеаризованное уравнение, которое в рассматриваемом случае будет иметь вид

$$Ly^*(t) + k_1 y^*(t) = x(t). \quad (3.8.8)$$

Используя преобразование Лапласа, уравнение линеаризованной системы (3.8.8) можно записать так:

$$Y^*(s) = \frac{1}{L_1(s) + k_1} X(s). \quad (3.8.9)$$

В этом уравнении два неизвестных  $k_1$  и  $Y^*(s)$ . Для  $k_1$ , используя теорию чебышевского приближения функции  $f[y]$  на отрезке  $[-a, a]$  функцией  $f^*[y] = k_1 y$ , можно построить график

$$k_1 = \psi_1[\|y^*\|_c]. \quad (3.8.10)$$

С другой стороны, задавая в (3.8.8) различные значения  $k_1$ , можно определить соответствующие значения  $Y_1^*(s)$  и, значит, построить график функции

$$k_1 = \psi_2[\|y^*\|_c]. \quad (3.8.11)$$

Найдя точку пересечения графиков (3.8.10) и (3.8.11), тем самым определим параметры линейной модели системы. Совершенно аналогично производятся вычисления и при использовании параметрической передаточной функции, когда оператор  $L$  зависит от  $t$ . В этом случае для дифференциального уравнения определяем  $H(s, t)$ , вычисляем при заданном значении  $k_1$  выходной сигнал  $y(t)$ , находим его максимум и минимум и строим график. Далее поступаем точно так же, как и в предыдущем случае.

Рассмотрим систему, структурная схема которой представлена на рис. 3.8.1\*). Передаточная функция

---

\*) Расчет примеров этого параграфа произведен Е. С. Чемодановым.

линейной части этой системы имеет вид

$$H(s) = \frac{1}{s+1},$$

а нелинейный элемент  $f[y]$  описывается функцией вида

$$f[y] = \begin{cases} ky & \text{при } -20 \leq y \leq 20, \\ 20 & \text{при } -20 > y > 20, \end{cases} \quad (3.8.12)$$

где  $k=1$ , или функцией

$$f[y] = \begin{cases} 0 & \text{при } -h \leq y \leq h, \\ Ky + h & \text{при } h \leq y \leq r, \\ Ky - h & \text{при } -r \leq y \leq -h, \\ \pm L & \text{при } y > r, \quad y < -r, \end{cases} \quad (3.8.13)$$

где  $h=10$ ,  $r=30$ ,  $L=30$ .

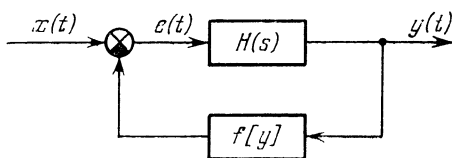


Рис. 3.8.1.

Требуется вычислить реакцию системы на воздействие

$$x(t) = \begin{cases} A & \text{при } 0 \leq t < \tau, \\ 0 & \text{при } t = \tau, \\ -A & \text{при } \tau < t < 2\tau, \\ 0 & \text{при } t > 2\tau, \end{cases} \quad (3.8.14)$$

где  $A=30$ ,  $40$ ,  $60$ ,  $80$ ,  $\tau=1$ . Преобразование Лапласа от сигнала (3.8.14) имеет вид  $X(s) = A[1 - \exp(-\tau s)]^2/s$ . Согласно (3.8.9) имеем

$$Y^*(s) = \frac{A[1 - \exp(-\tau s)]^2}{s(s+\alpha)} = \frac{A}{\alpha} \frac{[1 - \exp(-\tau s)]^2}{s} - \frac{A}{s+\alpha} + \frac{2A \exp(-\tau s)}{s+\alpha} - \frac{A \exp(-2\tau s)}{s+\alpha}, \quad (3.8.15)$$

где  $\alpha = 1 + k_1$ .

Взяв обратное преобразование Лапласа от (3.8.15), определим норму выходного сигнала

$$\|y^*(t)\|_c = \left\| \frac{A}{\alpha} - 2 \frac{A}{\alpha} u(t-\tau) + \frac{A}{\alpha} u(t-2\tau) - \frac{A}{\alpha} \exp(-\alpha t) + \right. \\ \left. + 2 \frac{A}{\alpha} \gamma(t-\tau) - \frac{A}{\alpha} \gamma(t-2\tau) \right\|_c = \frac{A}{2} [1 - \exp(-\alpha t)],$$

где

$$u(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } (t-\tau) \leq 0, \\ 1 & \text{при } (t-\tau) > 0, \end{cases}$$

$$\gamma(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < t < \tau, \\ \exp[-\alpha(t-\tau)] & \text{при } \tau \leq t. \end{cases}$$

Графики зависимости  $k_1 = \psi_2[\|y^*\|_c]$  при различных значениях  $A$  представлены на рис. 3.8.2. На этом же

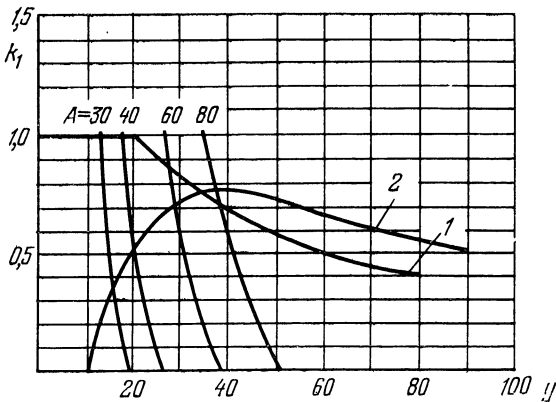


Рис. 3.8.2.

рисунке представлены графики  $k_1 = \psi_1[\|y^*\|_c]$  для нелинейности (3.8.12) (кривая 1) и нелинейности (3.8.13) (кривая 2). Из рис. 3.8.2 видно, что для нелинейности (3.8.12) имеем  $k_1 = 1,0; 1,0; 0,85; 0,69$  для  $A = 30, 40, 60, 80$  соответственно, а для нелинейности (3.8.13) имеем  $k_1 = 0,35; 0,5; 0,71; 0,78$  для  $A = 30, 40, 60, 80$  соответственно.

Выходной сигнал при этом получится в виде

$$y^*(t) = \frac{A}{1+k_1} [1 - 2u(t-\tau) + u(t-2\tau) - \exp[-(1+k_1)t] + 2\gamma(t-\tau) - \gamma(t-2\tau)].$$

На рис. 3.8.3 и 3.8.4 для нелинейностей (3.8.12) и

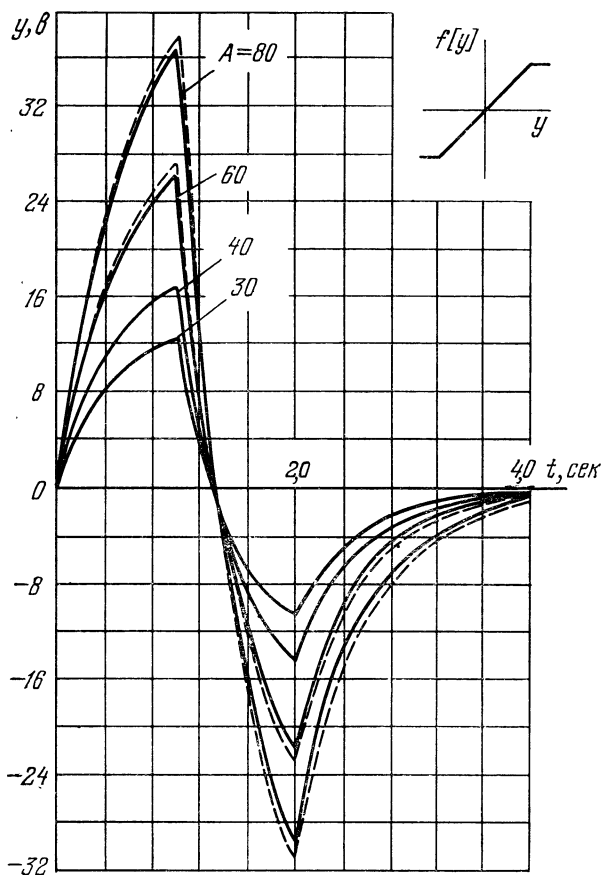


Рис. 3.8.3.

3.8.13) соответственно построены графики сигнала  $y^*(t)$  для  $A=30, 40, 60, 80$  (пунктирные линии). На

этих же рисунках сплошными линиями построены графики сигнала  $y(t)$ , полученные экспериментально

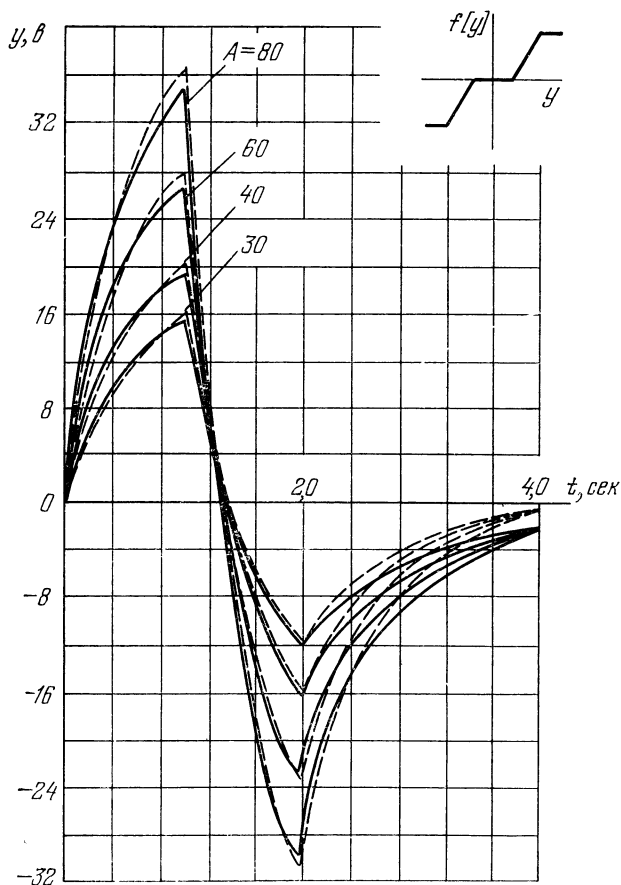


Рис. 3.8.4.

моделированием системы на цифровой вычислительной машине.

Пусть теперь  $f[y]$  — несимметричная функция. Тогда для (3.8.1) можно записать такое линеаризованное



уравнение:

$$L_1 y' + k_0 + k_1 y^* = x. \quad (3.8.16)$$

Используя преобразование Лапласа, перейдем от (3.8.16) к уравнению

$$Y^*(s) = \frac{1}{L_1(s) + k_1} X(s) - \frac{k_0}{(L_1(s) + k_1)s}. \quad (3.8.17)$$

Поступая, как и выше, получим следующие зависимости:

$$\left. \begin{aligned} k_0 &= \psi_1 [\|y^*\|_c], \\ k_1 &= \psi_2 [\|y^*\|_c]. \end{aligned} \right\} \quad (3.8.18)$$

С другой стороны, в соответствии с теорией равномерного приближения значения  $k_0$  и  $k_1$  определяются функциями

$$\left. \begin{aligned} k_0 &= \psi_3 [\|y^*\|_c], \\ k_1 &= \psi_4 [\|y^*\|_c]. \end{aligned} \right\} \quad (3.8.19)$$

Решая совместно эти уравнения, определим  $k_0$  и  $k_1$ .

Рассмотрим, наконец, случай, когда входной сигнал системы не удовлетворяет условию (3.8.7). В этом случае, определяя интервал аппроксимации  $[a, b]$ , следует положить  $a = -c$ ,  $b = c$ , где  $c = \sup_{t \in T} |y^*(t)|$ . Если необхо-

димо получить более точную модель системы, учитывающую несимметричность входного сигнала, то в (3.8.18) и (3.8.19) аргументом функций  $\psi_1$ — $\psi_4$  будет не  $\|y^*\|_c$ , а интервал  $[a, b]$  изменения выходного сигнала  $y(t)$ .

Определим реакцию системы, рассмотренной в предыдущем примере, на воздействие

$$x(t) = \begin{cases} A \frac{t}{\tau} & \text{при } 0 < t \leq \tau, \\ -A \frac{t}{\tau} + 2A & \text{при } \tau < t \leq 2\tau, \\ 0 & \text{при } t > 2\tau, \end{cases} \quad (3.8.20)$$

где  $A = 40, 60, 80$ ,  $\tau = 1$ .

Преобразование Лапласа от сигнала (3.8.20) таково:

$$X(s) = \frac{A[1 - \exp(-\tau s)]^2}{s^2 \tau}.$$

Нелинейность будем приближать выражением

$$f^*[y] = k_0 + k'_1 y.$$

Расчет коэффициентов  $k_0$  и  $k'_1$  дает результаты, пока-

Таблица 3.8.1

Для $A=40$		Для $A=60$		Для $A=80$	
$k_0=5$	$k'_1=0,62$	$k_0=7$	$k'_1=0,45$	$k_0=7,5$	$k'_1=0,34$
$k_0=2$	$k'_1=0,9$	$k_0=5,5$	$k'_1=0,59$	$k_0=7,2$	$k'_1=0,405$
$k_0=0$	$k'_1=1,0$	$k_0=5$	$k'_1=0,64$	$k_0=7,0$	$k'_1=0,44$

занные в табл. 3.8.1. Выходной сигнал при этом получается в виде

$$\begin{aligned}
 y^*(t) = & -\frac{A}{(1+k'_1)^2\tau} f(t) + \frac{1}{(1+k'_1)} x(t) + \\
 & + \frac{1}{(1+k'_1)^2\tau} \exp[-(1+k'_1)t] - \frac{2A}{(1+k'_1)^2\tau} \gamma(t-\tau) + \\
 & - \frac{A}{(1+k'_1)^2\tau} \gamma(t-2\tau) - \frac{k_0}{1+k'_1} [1 - \exp[-(1+k'_1)t]],
 \end{aligned}
 \tag{3.8.21}$$

где

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq t < \tau, \\ 0 & \text{при } t = \tau, \\ -1 & \text{при } \tau < t < 2\tau, \\ 0 & \text{при } t \geq 2\tau, \end{cases}$$

$$\gamma(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < t < \tau, \\ \exp[-\alpha(t-\tau)] & \text{при } t \geq \tau. \end{cases}$$

На рис. 3.8.5 для нелинейности вида (3.8.12) и входного сигнала (3.8.20) построены графики сигнала  $y(t)$  для  $A=40, 60, 80$ , полученные моделированием систе-

мы на цифровой вычислительной машине (сплошные линии). На этом же рисунке построены графики сигнала  $y^*(t)$  при коэффициентах  $k_0=0, k_1=1$  для  $A=40$ ;  $k_0=5, k_1=0,64$  для  $A=60$ ;  $k_0=7, k_1=0,44$  для  $A=80$  (пунктирные линии).

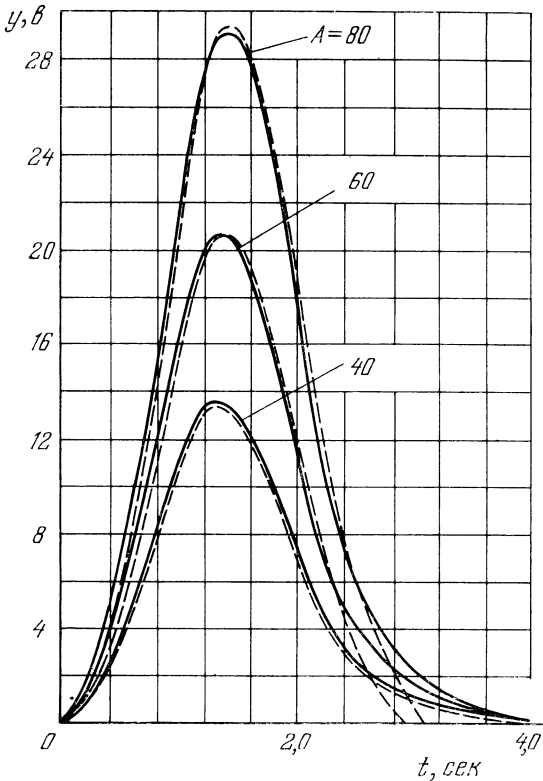


Рис. 3.8.5.

Рассмотрим теперь уравнение (3.8.1) при ненулевых начальных условиях, которые задаются так:

$$y(t_0) = y_0, y'(t) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}. \quad (3.8.22)$$

Обозначив

$$W(s) = \sum_{\lambda=1}^n (a_n s^{n-\lambda} + \dots + a_\lambda) y_{\lambda-1}, \quad (3.8.23)$$

переходим от (3.8.1) к линеаризованному уравнению. Используя (3.8.23), получаем

$$Y^*(s) = \frac{1}{L_1(s) + k'_1} X(s) + \frac{1}{L_1(s) + k'_1} \left( W(s) - \frac{k_0}{s} \right). \quad (3.8.24)$$

Уравнение (3.8.24) решается так же, как и в случае с нулевыми начальными условиями. Для однородного уравнения, соответствующего уравнению (3.8.1), соотношение (3.8.24) принимает вид

$$Y^*(s) = \frac{1}{L(s) + k'_1} \left( W(s) - \frac{k_0}{s} \right). \quad (3.8.25)$$

Рассмотрим систему, структурная схема которой показана на рис. 3.8.1. Передаточная функция линейной части этой системы имеет вид

$$H(s) = \frac{1}{s+1},$$

а нелинейный элемент описывается функцией

$$f[y] = \begin{cases} k & \text{при } -20 \leq y \leq 20, \\ 20 & \text{при } -20 > y > 20, \end{cases}$$

где  $k=1$ . Требуется вычислить реакцию системы на нулевой входной сигнал. Имеем

$$\begin{aligned} Y^*(s) &= \frac{W(s)H(s)}{1 + k'_1 H(s)} - \frac{k_0 H(s)}{[1 + k'_1 H(s)]s} = \\ &= \frac{W(s)}{s + \alpha} - \frac{k_0}{(s + \alpha)s} = \frac{W(s)}{s + \alpha} - \frac{k_0}{\alpha s} + \frac{k_0}{\alpha(s + \alpha)}, \end{aligned}$$

где  $\alpha = 1 + k'_1$ . Расчет коэффициентов  $k_0$  и  $k'_1$  методом последовательных приближений дает: для  $y_0=40$ ,  $k_0=5$ ,  $k'_1=0,83$ ; для  $y_0=60$   $k_0=7, k'_1=0,45$ ; для  $y_0=100$   $k_0=8$ ,  $k'_1=0,28$ . Выходной сигнал при этом имеет вид

(рис. 3.8.6, сплошные линии)

$$y^*(t) = \left[ y_0 + \frac{k_0}{1+k_1} \right] \exp [-(1+k_1)t] - \frac{k_0}{1+k_1}.$$

Пунктирные линии на схеме показывают результат моделирования задачи на аналоговой вычислительной машине.

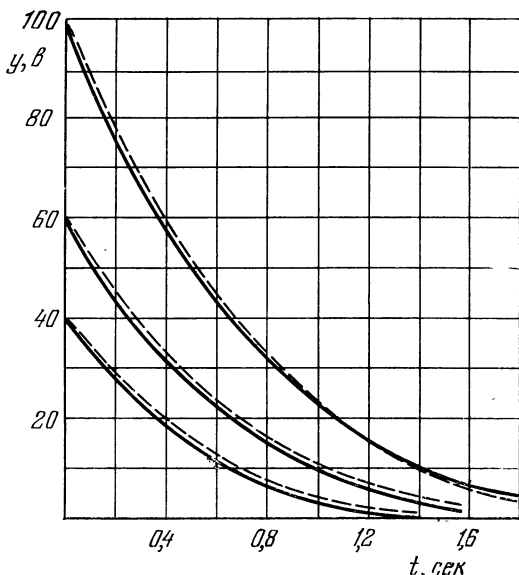


Рис. 3.8.6.

Пусть теперь на вход системы поступает случайный процесс

$$x(t) = m_x(t) + x_0(t), \quad \mathbb{M}\{x(t)\} = m_{x_0}(t), \quad \mathbb{M}\{x_0(t)\} = 0,$$

причем центрированный случайный процесс  $x_0(t)$  почти наверное ограничен по модулю числом  $M$ , т. е.

$$\text{п. н. } \sup |x_0(t)| = M.$$

Решение линеаризованного уравнения (3.8.16) будем

искать в виде

$$y^*(t) = m_y(t) + y_0(t), \mathbf{M}\{x(t)\} = m_x(t), \mathbf{M}\{y_0(t)\} = 0.$$

Из уравнения (3.8.16) находим

$$m_y(t) + y_0(t) = \int_{t_0}^t h_{\perp}(\tau) \{m_x(t - \tau) + x_0(t - \tau) + k_0\} d\tau, \quad (3.8.26)$$

где  $h_{\perp}(\tau) \doteq \frac{1}{L(s) + k_1}$ .

Вычислив математическое ожидание от обеих частей равенства (3.8.26), получим

$$m_y(t) = \int_{t_0}^t h_{\perp}(\tau) \{m_x(t - \tau) - k_0\} d\tau \quad (3.8.27)$$

или в комплексной области

$$\mathbf{M}_y(s) = \frac{sM_x(s) - k_0}{(L(s) + k_1)s}, \quad (3.8.28)$$

где обозначено  $M_y(s) \doteq m_y(t)$ ,  $M_x(s) \doteq m_x(t)$ . Если процесс  $x(t)$  стационарен, то формула (3.8.28) принимает такой вид:

$$M_y(s) = \frac{m_x - k_0}{(L(s) + k_1)s}. \quad (3.8.29)$$

Вычитая (3.8.27) из (3.8.26), получаем

$$y_0(t) = \int_{t_0}^t h_{\perp}(\tau) x_0(t - \tau) d\tau. \quad (3.8.30)$$

Для определения п. н. верхней грани процесса  $y_0(t)$  используется оценка

$$D = \text{п. н. sup } |y_0(t)| \leq M \int_{t_0}^t |h_{\perp}(\tau)| d\tau. \quad (3.8.31)$$

Уравнения (3.8.30) и (3.8.20) (или (3.8.28)) решаются совместно. Интервал аппроксимации  $[a, b]$  выбирается таким:

$$a = \inf m_y(t) - D, \quad b = \sup m_y(t) + D.$$

Корреляционная функция или дисперсия процесса  $y(t)$  определяется обычными формулами теории линейных систем (см. § 7 этой главы, а также [55], [69]).

## § 9. Методы последовательных приближений с использованием аппроксимации функций по Чебышеву

Результаты расчета нелинейной системы, полученные методом равномерной линеаризации, могут быть уточнены за счет выбора соответствующего варианта метода последовательных приближений с использованием аппроксимации функций по Чебышеву. В этом случае приближение нелинейных функций ведется степенными полиномами степени выше первой. Полином наилучшего равномерного приближения функции может быть получен с помощью следующей процедуры [6]. Сначала функция  $f[x]$  аппроксимируется с помощью какой-либо ортогональной системы полиномов по критерию минимума среднего квадрата ошибки, а затем полученный полином наилучшего среднеквадратичного приближения преобразуется посредством специальной итерационной процедуры в полином наилучшего равномерного приближения.

Рассмотрим сначала процедуру получения полинома наилучшего среднеквадратичного приближения. При этом может использоваться в принципе любая ортогональная на конечном отрезке система полиномов. Однако для сокращения объема вычислений важно, чтобы полученный полином был как можно ближе (в смысле Чебышева) к полиному наилучшего равномерного приближения.

Это условие будет выполнено, если использовать для аппроксимации *полиномы Чебышева*  $T_n[x]$ , которые задаются соотношением

$$T_n[x] = \cos(n \arccos x), \quad |x| \leq 1. \quad (3.9.1)$$

Выбор полиномов Чебышева обусловлен тем, что среди всех полиномов они обеспечивают наилучшее равномерное распределение погрешности по интервалу аппроксимации [6].

Покажем, что формула (3.9.1) действительно определяет степенные полиномы. Положив в (3.9.1)  $n=0$  получим

$$T_0[x] = 1. \quad (3.9.2)$$

Для  $n=1$  формула (3.9.1) дает

$$T_1[x] = \cos(\arccos x) = x,$$

а для  $n=2$

$$T_2[x] = \cos(2 \arccos x) = 2 \cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1.$$

Используя тождество [6]

$$\cos(n+1)\theta = 2 \cos \theta \cos n\theta - \cos(n-1)\theta$$

и полагая  $\theta = \arccos x$ , получаем рекуррентное соотношение для определения полиномов Чебышева:

$$T_{n+1}[x] = 2xT_n[x] - T_{n-1}[x].$$

Первые шесть полиномов Чебышева имеют такой вид:

$$T_0[x] = 1, \quad T_1[x] = x, \quad T_2[x] = 2x^2 - 1,$$

$$T_3[x] = 4x^3 - 3x, \quad T_4[x] = 8x^4 - 8x^2 + 1,$$

$$T_5[x] = 16x^5 - 20x^3 + 5x.$$

Коэффициент полинома Чебышева при старшей степени  $x$  равен  $2^{n-1}$  и полином  $T_n[x]$  степени  $n$  имеет

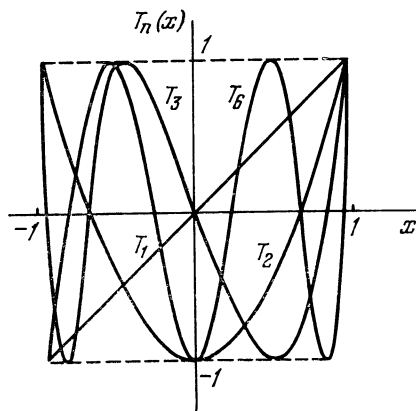


Рис. 3.9.1.

ровно  $n$  корней, заключенных на отрезке  $[-1, 1]$ . На рис. 3.9.1 приведены графики 1—6-го полиномов Чебышева.



Полиномы Чебышева  $T_n[x]$  ортогональны на отрезке  $[-1, 1]$  с весом

$$p[x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (3.9.3)$$

Коэффициенты разложения функции  $F[x]$  в ряд по полиномам Чебышева определяются по формулам

$$C_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 F[x] \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi F[\cos \theta] d\theta,$$

$$C_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 F[x] T_k[x] \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F[\cos \theta] \cos k\theta d\theta. \quad (3.9.4)$$

Здесь  $x = \cos \theta$ . Среднее квадратичное отклонение полинома

$$P_n[x] = C_0 + C_1 T_1[x] + \dots + C_n T_n[x]$$

от функции  $F[x]$  определяется по формуле

$$\delta^2 = \int_{-1}^{+1} [F[x] - P_n[x]]^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \int_{-1}^{+1} \frac{F^2[x] dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\pi}{2} [2C_0^2 + C_1^2 + \dots + C_n^2].$$

Если приближение производится на произвольном отрезке  $[a, b]$ , то линейной заменой переменного

$$x = \frac{1}{2} [(b-a) \cos \theta + b + a], \quad (3.9.5)$$

$$\cos \theta = \frac{1}{b-a} [2x - b - a] \quad (3.9.6)$$

его можно перевести в отрезок  $[-1, 1]$ .

Если же приближение производится на интервале  $[-A, A]$ , то для сведения его к единичному интервалу  $[-1, 1]$  надо рассматривать полином  $T_k[x/A]$  с весом

$1/\sqrt{A^2-x^2}$ ; при этом получим

$$C_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A F\left[\frac{x}{A}\right] \frac{dx}{\sqrt{A^2-x^2}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi F[\cos \theta] d\theta,$$

$$C_k = \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A F\left[\frac{x}{A}\right] T_k\left[\frac{x}{A}\right] \frac{dx}{\sqrt{A^2-x^2}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi F[\cos \theta] \cos k\theta d\theta.$$

(3.9.7)

Введем в формулах (3.9.4) новую переменную интегрирования  $\varphi = \theta + \pi/2$ . Получим

$$C_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi F[\cos \theta] d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} F[\sin \varphi] d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F[\sin \varphi] d\varphi,$$

$$C_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F[\cos \theta] \cos k\theta d\theta =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} F[\sin \varphi] \sin k\varphi d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F[\sin \varphi] \sin k\varphi d\varphi.$$

Таким образом, коэффициенты разложения функции в ряд по полиномам Чебышева  $C_0, C_1, C_3$  совпадают с коэффициентами метода гармонической линейаризации при многочастотном входном сигнале [66]. Формулы и графики для этих коэффициентов при  $k=1,3$  приведены в работах [7], [66].

Можно показать, что полученный таким образом аппроксимирующий многочлен уже будет многочленом наилучшего приближения в случае, если  $f[x]$  — степенная функция [1]. Если же  $f[x]$  — произвольная (но не степенная) непрерывная на  $[a, b]$  функция, то полученный для нее полином можно преобразовать в полином наилучшего равномерного приближения следующим образом

[6]. Введем такое обозначение для полинома наилучшего среднеквадратичного приближения:

$$P_{n,0}[x] = \sum_{i=0}^n a_i^{(0)} x^i. \quad (3.9.8)$$

Примем его за полином начального приближения и построим поправочный полином  $P_0[x]$ , как полином наилучшего равномерного приближения степени не выше  $n$  для функции  $\Delta_0[x] = F[x] - P_{n,0}[x]$  на множестве точек  $x_1^{(0)} < x_2^{(0)} < \dots < x_{n+2}^{(0)}$ , на котором  $\Delta_0$  имеет чередующиеся знаки. Для этого используется система

$$(-1)^{i-1} \{\Delta_0[x_i^{(0)}] - P_0[x_i^{(0)}]\} = \alpha \rho_0, \quad (3.9.9)$$

где  $i=1, 2, \dots, n+2$ ;  $\alpha = \text{sign } \Delta_0[x_1^{(0)}]$ . Значение  $\rho_0$  определяется по формуле

$$\rho_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n+2} d_{n,i}^{(0)} |\Delta_0[x_i^{(0)}]|}{\sum_{i=1}^{n+2} d_{n,i}^{(0)}}, \quad (3.9.10)$$

где

$$d_{n,i}^{(0)} =$$

$$= \frac{1}{(x_i^{(0)} - x_1^{(0)})(x_i^{(0)} - x_2^{(0)}) \dots (x_i^{(0)} - x_{i-1}^{(0)})(x_{i+1}^{(0)} - x_i^{(0)}) \dots (x_{n+2}^{(0)} - x_i^{(0)})}. \quad (3.9.11)$$

Полином  $P_{n,1}[x] = P_{n,0}[x] + P_0[x]$  является первым приближением полинома наилучшего равномерного приближения. Далее исследуется на экстремум функция

$$\Delta_1[x] = F[x] - P_{n,1}[x] = \Delta_0[x] - P_0[x], \quad (3.9.12)$$

где  $P_{n,1}[x] = P_{n,0}[x] + P_0[x]$ , и снова находится множество точек, на которых  $\Delta_1[x_i^{(1)}]$  имеет чередующиеся знаки. Для найденного множества  $x_1^{(1)} < x_2^{(1)} < \dots < x_{n+2}^{(1)}$  строится поправочный полином  $P[x]$  по формулам (3.9.10) — (3.9.11), в которых  $x_i^{(0)}$  заменяется на  $x_i^{(1)}$ . Получаем следующее приближение искомого полинома  $P_{n,2}[x] = P_{n,0}[x] + P_{n,1}[x]$ . Аналогичным образом строятся и остальные поправочные полиномы  $P_2[x], \dots, P_m[x]$ .

Точность полученного приближения можно оценить по формуле

$$\varepsilon = \max_{x \in [a, b]} |F[x] - P_{n, m}[x]|, \quad (3.9.13)$$

где

$$P_{n, m}[x] = P_{n, 0} + P_0[x] + P_1[x] + \dots + P_m[x]. \quad (3.9.14)$$

Помимо изложенного метода построения полинома наилучшего равномерного приближения, существуют и другие методы, приведенные в работах [6], [78]. Для функций, не имеющих резких скачков, полином наилучшего равномерного приближения мало отличается от полинома среднеквадратичного приближения  $P_{n, 0}[x]$ , которым он и может быть заменен при вычислениях.

Перейдем теперь к соответствующим итерационным методам расчета нелинейных систем. Пусть задана при нулевых начальных условиях нелинейная система, изображенная на рис. 3.9.2. Интегральное уравнение этой системы имеет вид

$$y(t) = \int_0^t h(t, \tau) \{x(\tau) - f[y(\tau)]\} d\tau. \quad (3.9.15)$$

Для простоты выкладок предположим, что  $f[y]$  — нечетная функция, а сигнал  $y(t)$  удовлетворяет условию

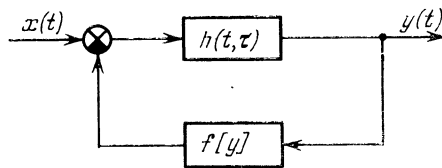


Рис. 3.9.2.

(3.8.7). Решая уравнение (3.9.15) методом равномерной линеаризации, получим линейную модель исследуемой системы:

$$y_0(t) = \int_0^t h(t, \tau) \{x(\tau) - k_1^{(0)} y_0(\tau)\} d\tau. \quad (3.9.16)$$

Обозначим

$$\varepsilon[y] = f[y] - k_1^{(0)}y. \quad (3.9.17)$$

Теперь, используя (3.9.16) и (3.9.17), уравнение (3.9.15) можно записать так:

$$y(t) = \int_0^t k(t, \tau)x(\tau) d\tau - \int_0^t k(t, \tau)\varepsilon[y(\tau)] d\tau, \quad (3.9.18)$$

где  $k(t, \tau)$  — весовая функция линеаризованной системы (3.9.16). В сокращенной форме это уравнение имеет вид

$$y = \beta[x] - \beta\{\varepsilon[y]\}, \quad (3.9.19)$$

где

$$\beta[x] = \int_0^t k(t, \tau)x(\tau) d\tau.$$

Решим теперь уравнение (3.9.19) методом последовательных приближений с использованием аппроксимации функции  $\varepsilon[y]$  полиномами по критерию Чебышева. Общая схема метода последовательных приближений такова:

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= \beta[x], \\ y_i &= \beta[x] - \beta\{\varepsilon[y_{i-1}]\}, \quad i=1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.9.20)$$

Примем, учитывая, что интервал аппроксимации симметричен,

$$a_1 = \sup_{t \in T} |y_0(t)|,$$

где  $T$  — интервал времени, на котором ищется решение уравнения (3.9.19).

На интервале  $[-a_1, a_1]$  аппроксимируем функцию  $\varepsilon[y]$  полиномом степени  $N_1$  и подставим полученный полином в выражение (3.9.20) для  $y_1$ . Получим полином Вольтерра степени  $N_1$

$$y_1 = y_0 - \beta \left\{ \sum_{i_1=1}^{N_1} a_{i_1}^{(1)} y_0^{i_1} \right\} = y_0 - \sum_{i_1=1}^{N_1} a_{i_1}^{(1)} \beta[y_0^{i_1}]. \quad (3.9.21)$$

Теперь положим

$$a_2 = \sup_{t \in T} |y_1(t)|.$$

На интервале  $[-a_2, a_2]$  аппроксимируем  $\varepsilon[y_1]$  полиномом степени  $N_2 > N_1$  и получим полином Вольтерра степени  $N_1 N_2$

$$y_2 = y_0 - \sum_{i_2=1}^{N_2} a_{i_2}^{(2)} \beta \left\{ y_0 - \sum_{i_1=1}^{N_1} a_{i_1}^{(1)} \beta [y_0^{i_1}] \right\}^{i_2}.$$

В общем случае определим

$$a_r = \sup_{t \in T} |y_{r-1}(t)|.$$

Аппроксимируя  $\varepsilon[y_{r-1}]$  на интервале  $[-a_r, a_r]$  полиномом степени  $N_r (N_r > N_{r-1})$ , получим полином Вольтерра степени  $\prod_{j=1}^r N_j$ :

$$y_r = y_0 - \sum_{i_r=1}^{N_r} a_{i_r}^{(r)} \beta \left\{ y_0 - \sum_{i_{r-1}=1}^{N_{r-1}} a_{i_{r-1}}^{(r-1)} \beta [y_{r-1}^{i_{r-1}}] \right\}^{i_r}. \quad (3.9.22)$$

Если интервал аппроксимации принимается несимметричным, то следует использовать формулы

$$a_r = \inf_{t \in T} y_{r-1}(t), \quad b_r = \sup_{t \in T} y_{r-1}(t).$$

Аппроксимация функции  $\varepsilon[y_{r-1}]$  при этом будет производиться на интервале  $[a_r, b_r]$ .

Пусть решение, полученное итерационным методом по формулам (3.9.20), сходится равномерно к решению уравнения (3.9.15). Из условия приближения функций по Чебышеву последовательность полиномов, входящих в уравнение (3.9.22), сходится при  $N_r \rightarrow \infty$  равномерно к  $\varepsilon[y]$ . Значит, и последовательность (3.9.22) при  $r \rightarrow \infty$  будет равномерно сходиться на интервале  $T$  к решению уравнения (3.9.15), т. е. к решению исходного уравнения.

Метод равномерной линеаризации обеспечивает хороший выбор нулевого шага итерационного процесса, благодаря чему этот процесс быстро сходится, и обычно одна-две итерации обеспечивают практически точное решение нелинейной задачи. Изложенный вариант метода последовательных приближений целесообразно применять и в том случае, когда нелинейность системы описывается аналитической функцией, поскольку скорость схо-

димости здесь выше, чем в методе последовательных приближений, изложенном в § 1 этой главы. Методы преобразования ряда Тейлора для аналитической функции в соответствующий полином наилучшего приближения приведены в работах [6], [78]. Для нестационарных систем вычисления по формуле (3.9.22) проводятся методом сопряженных систем или с помощью параметрической передаточной функции  $K(s, t)$ . В последнем случае первые три итерации решения выглядят так:

$$y_0(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{Br_1} K(s, t) X(s) \exp(st) ds,$$

$$y_1(t) = y_0(t) - \frac{1}{2\pi j} \int_{Br_1} K(s, t) \sum_{i_1=1}^{N_1} a_{i_1}^{(1)} \left\{ \prod_{j=1}^{i_1} Y_0(s_j) \right\}^* \exp(st) ds,$$

$$y_2(t) = y_0(t) - \frac{1}{2\pi j} \int_{Br_1} K(s, t) \sum_{i_2=1}^{N_2} a_{i_2}^{(2)} \left\{ \prod_{j=1}^{i_2} Y_1(s_j) \right\}^* \exp(st) ds.$$

Для стационарных систем используется обычная передаточная функция, и первые три итерации решения можно записать в виде

$$Y_0(s) = K(s)X(s),$$

$$Y_1(s) = Y_0(s) - K(s) \sum_{i_1=1}^{N_1} a_{i_1}^{(1)} \left\{ \prod_{j=1}^{i_1} Y_0(s_j) \right\}^*,$$

$$Y_2(s) = Y_0(s) - K(s) \sum_{i_2=1}^{N_2} a_{i_2}^{(2)} \left\{ \prod_{j=1}^{i_2} Y_1(s_j) \right\}^*.$$

Если начальные условия — ненулевые, то первая формула должна быть соответствующим образом изменена (см. стр. 299).

Рассмотрим теперь нестационарную нелинейную систему

$$L(t)y + \varphi[y] = x, \quad (3.9.23)$$

где  $L(t)$  — нестационарный линейный дифференциальный оператор порядка  $m$  с коэффициентами  $b_i(t) = a_{0i} + a_{1i}(t)$ ,  $b_m = a_{0m} \neq 0$ , причем  $a_{0i}$  — заданные постоянные, не все равные нулю;  $a_{1i}(t)$  — заданные функции време-

ни, имеющие преобразование Лапласа; функция  $\varphi[y] \in C(E_1)$  и  $\varphi[0] = 0$ .

Итерационный метод решения уравнения (3.9.23) может быть построен таким образом. Выделим в операторе  $L(t)$  стационарную часть  $L^* = \sum_{i=1}^m a_{0i} \frac{d^i}{dt^i}$ , т. е. запишем уравнение (3.9.23) так:

$$L^* y(t) + \sum_{i=0}^{m-1} a_{1i}(t) \frac{d^i}{dt^i} y(t) + \varphi[y(t)] = x(t). \quad (3.9.24)$$

Преобразуем уравнение (3.9.24) к виду

$$L^* y(t) + \varphi[y(t)] = x(t) - \sum_{i=0}^{m-1} a_{1i}(t) \frac{d^i}{dt^i} y(t). \quad (3.9.25)$$

Правую часть (3.9.25) можно считать модифицированным входным сигналом  $z(t)$  стационарной системы

$$L^* y_0(t) + \varphi_0[y_0(t)] = z(t). \quad (3.9.26)$$

Положим сначала  $z(t) \equiv x(t)$  и найдем решение уравнения (3.9.26) методом равномерной линеаризации. Получим, считая для простоты, что нелинейность симметрична,

$$Y_0(s) = H(s) [X(s) + W(s)], \quad (3.9.27)$$

где  $H(s) = \frac{1}{L^*(s) + k_1^{(0)}}$ , а составляющая  $W(s)$  определяется через начальные условия обычным образом.

Теперь, приняв  $Y_0(s)$ , определяемое уравнением (3.9.27), за нулевое приближение итерационного уравнения (3.9.25), получим, используя метод последовательных приближений,

$$\left. \begin{aligned} Y_0(s) &= H(s) [X(s) + W(s)], \\ Y_p(s) &= Y_0(s) - H(s) \sum_{i=0}^{m-1} \{A_i(s_1) s_2^i Y_{p-1}(s_2)\}^* - \\ &\quad - H(s) \sum_{i_p=1}^{N_p} k_{i_p}^{(p)} \left\{ \prod_{l=1}^{i_p} Y_{p-1}(s_l) \right\}^* \end{aligned} \right\} \quad (3.9.28)$$



где  $k_{i_p}^{(p)}$  — коэффициенты приближения нелинейной функции  $\varepsilon[y]$ , определяемой равенством

$$\varepsilon[y] = \varphi[y] - k_1^{(0)}y.$$

Вычисления по формуле (3.9.28) проводятся так. Сначала вычисляется  $Y_0(s)$ , и полученное значение подставляется во второе уравнение. Далее определяются коэффициенты  $k_{i_1}^{(1)}$  полинома наилучшего приближения, и находится значение  $Y_1(s)$ . Полученное значение подставляется опять во второе уравнение, и вновь определяются значения коэффициентов полинома наилучшего приближения. Вычисляется  $Y_2(s)$ . Вычисления производятся до тех пор, пока два последующих шага не дадут близкие результаты. Итерационный процесс, очевидно, сходится к решению, если для уравнения (3.9.24) выполняются условия принципа сжимающих отображений.

## СИНТЕЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПО СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОМУ КРИТЕРИЮ КАЧЕСТВА

В этой главе рассматриваются вопросы применения полиномов и рядов Вольтерра в задачах синтеза нелинейных систем по критерию минимума среднеквадратической ошибки. Обычно выделяют две взаимосвязанные задачи синтеза. Во-первых, задачу определения системы, обеспечивающей оптимальное преобразование сигнала. Во-вторых, задачу определения корректирующих устройств, обеспечивающих наилучшее приближение системы с заданной структурой к оптимальной. Такое разделение задачи синтеза на две подзадачи является, в известной мере, условным. Обе задачи могут быть объединены в одну задачу синтеза нелинейной системы с заданной структурой. Однако такой подход имеет некоторые преимущества с точки зрения упрощения процедуры расчета.

### § 1. Задача оптимальной фильтрации

Рассмотрим задачу определения системы, обеспечивающей оптимальное преобразование случайного сигнала. Будем предполагать, что случайный сигнал  $x(t)$  представляет собой аддитивную смесь полезного сигнала  $s(t)$  и помехи  $n(t)$

$$x(t) = s(t) + n(t),$$

причем случайные функции  $s(t)$ ,  $n(t)$  стационарны в узком смысле [69] и стационарно связаны. Требуется, измеряя сигнал  $x(t)$ , осуществить преобразование полезного сигнала  $s(t)$ , заданное функцией  $\Phi[\cdot]$ :

$$z(t) = \Phi[s(t)].$$

Другими словами, надо определить такое преобразование  $F[\cdot]$  сигнала  $x(t)$ :

$$y(t) = F[x(t)],$$

при котором процессы  $z(t)$  и  $y(t)$  оказались бы близкими по некоторому критерию. В качестве такого критерия выберем минимум среднеквадратического отклонения сигнала  $y$  от сигнала  $z$ , т. е.

$$\mathbf{M}\{[y(t) - z(t)]^2\} = \mathbf{M}\{(F[x(t)] - \Phi[s(t)])^2\} = \min. \quad (4.1.1)$$

Если, в частности,  $\Phi[\cdot]$  — единичный оператор:  $\Phi = I$ , то приходим к задаче оптимальной фильтрации. Эта задача состоит в выделении полезного сигнала  $s(t)$  из аддитивной смеси его с помехой  $n(t)$  по критерию минимума среднеквадратической ошибки

$$\mathbf{M}\{(F[x(t)] - s(t))^2\} = \min. \quad (4.1.2)$$

Задачу об оптимальном преобразовании сигнала (4.1.1) целесообразно сформулировать как задачу минимизации в гильбертовом пространстве функций  $F, \Phi$ , определенных на множестве реализаций случайного процесса. Такое пространство уже рассматривалось в § 3 гл. I для случая, когда функции определялись на множестве реализаций винеровского случайного процесса. Аналогично оно может быть построено и в рассматриваемом случае.

Рассмотрим прямое произведение  $Z = X \times S$  пространств  $X, S$  реализаций случайных процессов  $x(t)$  и  $s(t)$ .

Предполагая известной совместную плотность вероятности

$$p_{x, s, n, m}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, t_1, \dots, t_n, \tau_1, \dots, \tau_m),$$

построим вероятностную меру в пространстве  $Z$ .

Для этого выделим систему множеств  $B_{n+m}$ :

$$B_{n+m} = \{z: z(t_1) \in Z_1, \dots, z(t_{n+m}) \in Z_{n+m}\},$$

где  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n+m} < T$ ,  $Z_i, i=1, \dots, n+m$ , — открытые множества в  $E_1$ . Такие множества называются *цилиндрическими*. Меру этих множеств определим по формуле

$$\mu(B_{n+m}) = \int_{Z_1} \dots \int_{Z_{n+m}} p_{x, s, n, m}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, t_1, \dots, t_n, \tau_1, \dots, \tau_m) \prod_{i=1}^n dx_i \prod_{j=1}^m dy_j.$$

Мера цилиндрического множества  $B_n \subset X$  равна

$$\begin{aligned} \mu_x(B_n) &= \int_{z_1} \dots \int_{z_n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_{x,s,n,m}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, \\ &\quad t_1, \dots, t_n, \tau_1, \dots, \tau_m) \prod_{i=1}^n dx_i \prod_{j=1}^m dy_j = \\ &= \int_{z_1} \dots \int_{z_n} p_{x,n}(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) \prod_{i=1}^n dx_i, \end{aligned}$$

где  $p_{x,n}(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)$  — плотность вероятности случайного процесса  $x(t)$ . Аналогично для цилиндрического множества  $B_m \subset S$  можно получить

$$\mu_s(B_m) = \int_{z_{n+1}} \dots \int_{z_{n+m}} p_{s,m}(y_1, \dots, y_m, \tau_1, \dots, \tau_m) \prod_{j=1}^m dy_j,$$

где  $p_{s,m}(y_1, \dots, y_m, \tau_1, \dots, \tau_m)$  — плотность вероятности процесса  $y(t)$ . Выбранные цилиндрические множества образуют  $\sigma$ -алгебру в пространстве  $Z$ , что позволяет определить меру любого множества в этом пространстве так же, как в § 3 гл. I. В частности, мера всего пространства равна единице. Пространство  $Z$  с заданной на нем  $\sigma$ -алгеброй множеств, а также мерой  $\mu$ , определенной на  $\sigma$ -алгебре и удовлетворяющей условию  $\mu(Z) = 1$ , называется *вероятностным пространством*. С учетом вышеприведенных формул можно заключить, что вероятностные пространства  $X, S$  являются подпространствами вероятностного пространства  $Z$ .

Предположим теперь, что функции  $F, \Phi$ , заданные на пространствах  $X, S$  с введенной мерой, интегрируемы по этой мере с квадратом, т. е. существуют интегралы

$$\int_X F^2[x(t)] d\mu_x, \quad \int_S \Phi^2[s(t)] d\mu_s.$$

Тогда функции  $F, \Phi$  принадлежат гильбертовым пространствам  $L_2(X), L_2(S)$  соответственно, квадрат нормы в которых определяется этими интервалами. Пространства  $L_2(X), L_2(S)$  являются подпространствами пространства  $L_2(Z)$ , в котором норма определяется

по формуле

$$\|F[x(t), y(t)]\|_{L_2(Z)} = \left[ \int_Z F^2[x(t), y(t)] d\mu \right]^{1/2}.$$

Скалярное произведение в этом пространстве имеет вид

$$(F_1[x, y], F_2[x, y]) = \int_Z F_1[x, y] F_2[x, y] d\mu,$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \|F[x, y]\|_{L_2(Z)} &= [\mathbf{M}\{F^2[x, y]\}]^{1/2}, \\ (F_1[x, y], F_2[x, y])_{L_2(Z)} &= \mathbf{M}\{F_1[x, y]F_2[x, y]\}, \end{aligned}$$

сформулируем задачу (4.1.1) как задачу о минимизации нормы разности функций  $F[x]$  и  $\Phi[s]$  в пространстве  $L_2[Z]$ :

$$\|F[x] - \Phi[s]\|_{L_2(Z)} = \min. \quad (4.1.3)$$

Такая задача уже рассматривалась в § 1 гл. I. Ее решение выражается равенством

$$(F[x] - \Phi[s], F[x])_{L_2(Z)} = 0, \quad (4.1.4)$$

выполняющимся для любых  $F[x] \in L_2(X)$  и выражающим условие ортогональности вектора  $F[x] - \Phi[s]$  подпространству  $L_2(X)$ .

Решение уравнения (4.1.4) будем искать в виде полинома Вольтерра степени  $N$ :

$$\begin{aligned} F[x] &= F_N[x] = \\ &= \sum_{n=0}^N \int_{E_+^n} k_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{r=1}^n x(t - \tau_r) d\nu_{\tau}. \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Условие  $F_N[x] \in L_2(X)$  выполняется, если предположить, что  $k_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \in L_2(E_+^n)$ . Подставляя (4.1.5) в (4.1.4), будем иметь

$$(F_N[x], F_N[x])_{L_2(Z)} = (\Phi[s], F_N[x])_{L_2(Z)}, \quad (4.1.6)$$

или, более подробно,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N \int_{E_+^{n+m}} k_n(\tau_1, \dots, \tau_n) k_m(\xi_1, \dots, \xi_m) \times \\ & \times \overline{x(t - \tau_1) \dots x(t - \tau_n) x(t - \xi_1) \dots x(t - \xi_m)} dv_\tau dv_\xi = \\ & = \sum_{n=0}^N \int_{E_+^n} k_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \overline{\Phi[s(t)] x(t - \tau_1) \dots x(t - \tau_n)} dv_\tau. \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

Отсюда найдем систему  $N+1$  уравнений относительно неизвестных ядер  $k_0, k_1, \dots, k_N$  [30, 52, 53] для  $\tau_1, \dots, \dots, \tau_n \geq 0$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^N \int_{E_+^m} k_m(\xi_1, \dots, \xi_m) \times \\ & \times \overline{x(t - \tau_1) \dots x(t - \tau_n) x(t - \xi_1) \dots x(t - \xi_m)} dv_\xi = \\ & = \overline{\Phi[s(t)] x(t - \tau_1) \dots x(t - \tau_n)}, \quad n = 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

В частности, для задачи оптимальной фильтрации  $\Phi[s] = I[s]$ ; при этом получим

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^N \int_{E_+^m} k_m(\xi_1, \dots, \xi_m) \times \\ & \times \overline{x(t - \tau_1) \dots x(t - \tau_n) x(t - \xi_1) \dots x(t - \xi_m)} dv_\xi = \\ & = \overline{s(t) x(t - \tau_1) \dots x(t - \tau_n)}, \quad n = 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Учитывая, что случайные процессы стационарны и стационарно связаны, и используя обозначения для моментов случайного процесса, введенные в § 6 гл. II, эти уравнения можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^N \int_{E_+^m} k_m(\xi_1, \dots, \xi_m) \times \\ & \times m_x^{(n+m)}(\tau_1 - \tau_2, \dots, \tau_1 - \tau_n, \tau_1 - \xi_1, \dots, \tau_1 - \xi_m) dv_\xi = \\ & = m_{sx}^{(1,n)}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n). \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

Система, определяемая уравнениями (4.1.10), называется *оптимальным нелинейным фильтром*. Среднеквадратическая ошибка  $\delta$ , соответствующая этому фильтру, является минимальной для всех полиномиальных систем степени не выше  $N$ . Учитывая условие (4.1.4), которое для задачи фильтрации примет вид

$$(F[x] - s, F[x])_{L_2(Z)} = 0,$$

можно записать следующее выражение, определяющее ошибку  $\delta$ :

$$\begin{aligned} \delta^2 &= \|F[x] - s\|_{L_2(Z)}^2 = (F[x] - s, F[x])_{L_2(Z)} - (F[x] - s, s)_{L_2(Z)} = \\ &= \|s\|_{L_2(Z)}^2 - (F[x], s)_{L_2(Z)} = \\ &= \|s\|_{L_2(Z)}^2 - \sum_{m=0}^N \int_{E_+^m} k_m(\xi_1, \dots, \xi_m) \overline{s(t) x(t - \xi_1) \dots x(t - \xi_m)} dv_{\xi}. \end{aligned}$$

В частном случае, когда  $x(t)$ ,  $s(t)$  — нормальные случайные процессы, из уравнений (4.1.9) следует известный результат [8], что оптимальный фильтр линеен. Убедимся в этом, полагая для простоты рассуждений  $N=2$ ,  $m_s=m_x=0$ . Система уравнений оптимального стационарного фильтра (4.1.9) в этом случае может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} k_0 + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} k_2(\xi_1, \xi_2) K_x(\xi_1 - \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 &= 0, \\ \int_0^{\infty} k_1(\xi) K_x(\tau - \xi) d\xi + \\ + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} k_2(\xi_1, \xi_2) m_x^{(3)}(\tau - \xi_1, \tau - \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 &= K_{sx}(\tau), \\ k_0 K_x(\tau_1 - \tau_2) + \int_0^{\infty} k_1(\xi) m_x^{(3)}(\tau_1 - \tau_2, \tau_1 - \xi) d\xi + \\ + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} k_2(\xi_1, \xi_2) m_x^{(4)}(\tau_1 - \tau_2, \tau_1 - \xi_1, \tau_1 - \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 &= \\ &= m_{sx}^{(1,2)}(\tau_1, \tau_2). \end{aligned}$$

Учитывая, что для стационарных и стационарно связанных нормальных процессов  $s$ ,  $x$

$$m_x^{(3)} = m_{sx}^{(1,2)} = 0,$$

$$\begin{aligned} m_x^{(4)}(\tau_1 - \tau_2, \tau_1 - \xi_1, \tau_1 - \xi_2) &= \\ &= \overline{x(t - \tau_1)x(t - \tau_2)x(t - \xi_1)x(t - \xi_2)} = \\ &= K_x(\tau_1 - \tau_2)K_x(\xi_1 - \xi_2) + K_x(\tau_1 - \xi_1)K_x(\tau_2 - \xi_2) + \\ &\quad + K_x(\tau_1 - \xi_2)K_x(\tau_2 - \xi_1), \end{aligned}$$

из первого и третьего уравнений получим

$$\int_0^\infty \int_0^\infty k_2(\xi_1, \xi_2) [K_x(\tau_1 - \xi_1)K_x(\tau_2 - \xi_2) + K_x(\tau_1 - \xi_2)K_x(\tau_2 - \xi_1)] d\xi_1 d\xi_2 = 0.$$

Поскольку корреляционная функция  $K_x(\tau)$  предполагается отличной от нуля, отсюда вытекает, что

$$k_2(\xi_1, \xi_2) \equiv 0, \quad k_0 = 0.$$

Оставшееся второе уравнение представляет собой *уравнение Винера—Хопфа* [69], определяющее *оптимальный линейный фильтр*:

$$\int_0^\infty k_1(\xi) K_x(\tau - \xi) d\xi = K_{sx}(\tau). \quad (4.1.11)$$

Уравнения (4.1.10) могут быть использованы не только для решения задачи оптимальной фильтрации, но и для решения задачи статистической идентификации. Эта задача заключается в определении математической модели объекта по известным статистическим характеристикам его входного и выходного сигналов. Полагая, что идентифицируемый объект стационарен, в качестве входного сигнала  $x(t)$  выберем стационарный случайный процесс; обозначим через  $s(t)$  случайный процесс на выходе объекта. Поставим задачу определения ядер полинома Вольтерра степени  $N$ :  $y(t) = F_N[x(\tau)]$ ,  $\tau \in [0, t]$ , описывающего объект: из условия минимума среднеквадратической ошибки

$$\mathbf{M}\{(s(t) - y(t))^2\} = \mathbf{M}\{(s(t) - F_N[x(\tau)])^2\} = \min.$$



Задача идентификации в рассматриваемой постановке формально не отличается от задачи оптимальной фильтрации (4.1.2). Уравнения для ядер  $k_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ ,  $n=0, 1, \dots, N$ , полинома  $F_N[x(\tau)]$  совпадают с уравнениями (4.1.10).

В отличие от задачи оптимальной фильтрации, когда случайный сигнал  $x(t)$  на входе системы был задан, в задаче идентификации этот сигнал может быть подобран с учетом реальных условий работы системы и возможных упрощений решения задачи. Такое упрощение, в частности, достигается, если в качестве входного сигнала  $x(t)$  использовать нормальный стационарный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием [13], [14], [34].

Решение систем интегральных уравнений (4.1.8) и (4.1.10) в общем случае связано со значительными трудностями.

Аналитические методы, основанные на преобразовании Фурье, которые используются при решении уравнения Винера—Хопфа [69], в общем случае не могут быть применены для решения системы уравнений стационарного нелинейного фильтра (4.1.10). Это связано с тем, что интегралы в левой части уравнений (4.1.10) в отличие от уравнения (4.1.11) не являются интегралами свертки. Преобразование Фурье может быть использовано для решения этих уравнений лишь в частном случае [119], когда моменты  $m_x^{(n+m)}$  представимы в виде

$$\begin{aligned} m_x^{(n+m)}(\tau_1 - \tau_2, \dots, \tau_1 - \tau_n, \tau_1 - \xi_1, \dots, \tau_1 - \xi_m) = \\ = m_{x1}(\tau_1 - \tau_2, \dots, \tau_1 - \tau_n) m_{x2}(\tau_1 - \xi_1, \dots, \tau_1 - \xi_m). \end{aligned}$$

Применение численных методов для решения систем интегральных уравнений (4.1.8), (4.1.10) затруднено тем, что такая задача является некорректно поставленной. Незначительным погрешностям в задании моментов  $m_x^{(n+m)}$ ,  $m_{sx}^{(n)}$ , неизбежным в приближенных вычислениях, могут соответствовать значительные отклонения решения. Поэтому необходимо использовать специальные методы, обеспечивающие получение устойчивых вычислительных процедур.

Понятие о некорректных задачах уточняется в следующем параграфе.

## § 2. Некорректные задачи. Метод регуляризации

Рассмотрим операторное уравнение

$$Ax = y, \quad (4.2.1)$$

где  $A$  — непрерывный, ограниченный оператор;  $x(t)$ ,  $y(t)$  — функции, принадлежащие нормированным пространствам  $X$  и  $Y$  соответственно; функция  $y(t)$  задана. Требуется найти из уравнения (4.2.1) функцию  $x(t)$ . Решение уравнений такого рода может оказаться неустойчивым к изменению данных задачи. Примером здесь может служить интегральное уравнение Фредгольма I рода

$$\int_a^b K(t, \tau) x(\tau) d\tau = y(t), \quad t \in [c, d]. \quad (4.2.2)$$

Пусть функция  $K(t, \tau)$  абсолютно интегрируема по переменной  $\tau \in [a, b]$  и непрерывна по  $t \in [c, d]$ . Изменим правую часть уравнения (4.2.2) на величину  $y_m(t) = \int_a^b K(t, \tau) \sin m\tau d\tau$ , которая стремится к нулю при  $m \rightarrow \infty$ ,  $t \in [c, d]$ :

$$\int_a^b K(t, \tau) \sin m\tau d\tau \rightarrow 0.$$

Решением уравнения (4.2.2) с правой частью  $y(t) + y_m(t)$  будет функция  $x(t) + \sin mt$ , если правой части  $y(t)$  соответствовало решение  $x(t)$ . При  $m \rightarrow \infty$  приращение функции  $x(t)$  остается конечным, хотя  $y_m(t) \rightarrow 0$  в  $C[c, d]$ . Другими словами, сколь угодно малые ошибки в задании функции  $y(t)$  приводят к конечным ошибкам в решении  $x(t)$ .

Решение уравнения (4.2.2) может не существовать в том функциональном пространстве, в котором требуется его определить. Если, например,  $y(t)$  имеет меньший порядок гладкости, чем  $K(t, \tau)$  по переменной  $t$ , решение  $x(t)$  не существует в пространстве  $L_2[a, b]$ . Дадим теперь определение корректности задачи (4.2.1) [84].

Задача об определении решения  $x \in X$  по заданной функции  $y \in Y$  из уравнения (4.2.1) называется *корректно поставленной*, если:

- 1) решение  $x$  существует для некоторого множества функций  $y \in Y_A \subset Y$  и принадлежит множеству  $X_A \subset X$ ;
- 2) решение единственно в этом множестве;
- 3) решение непрерывно зависит от  $y$  в области  $Y_A$ , т. е. бесконечно малым вариациям  $y \in Y_A$ , не выводящим решение за пределы  $X_A$ , соответствуют бесконечно малые вариации решения  $x$ .

Если хотя бы одно из этих условий нарушается, то задача называется *некорректной*. В частности, задача о решении уравнения (4.2.2) некорректна потому, что нарушается третье условие, обеспечивающее устойчивость решения к ошибкам в правой части.

Условия корректности обеспечивают существование в области  $Y_A$  непрерывного обратного оператора  $A^{-1}$ . Если заранее известно, что множество решений  $X_A$  компактно, то, условие 3, обеспечивающее непрерывность обратного оператора, следует из первых двух условий.

Некорректными являются многие прикладные задачи, в том числе задачи управления [9], [94], [31]. Задача о решении систем интегральных уравнений (4.1.8), (4.1.10), определяющих оптимальный нелинейный фильтр, в общем случае также поставлена некорректно.

Рассмотрим метод регуляризации, предложенный А.Н. Тихоновым для решения некорректных задач [84].

Пусть для некоторой функции  $y = \bar{y}$  существует решение уравнения (4.2.1)  $x = \bar{x}$ . Введем понятие регуляризованного семейства решений для уравнения (4.2.1). Семейство функций  $x_\alpha$ , зависящих от параметра  $\alpha$ , называется *регуляризованным семейством приближенных решений*, если выполняются следующие условия:

$$1) \quad \|Ax_\alpha - \bar{y}\|_Y \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \alpha \rightarrow 0;$$

2) функции  $x_\alpha$  при любом  $\alpha$  принадлежат компактно-му множеству, содержащему точное решение  $\bar{x}$ .

Выполнение этих условий влечет за собой сходимость функций  $x_\alpha$  к точному решению задачи (4.2.1):

$$\|x_\alpha - \bar{x}\|_X \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \alpha \rightarrow 0.$$

Таким образом, задача о решении уравнений (4.2.1) сводится к построению регуляризованного семейства.

Для широкого класса задач применим следующий метод построения регуляризованного семейства решений. Выбирается непрерывный и неотрицательный функционал  $\Omega(x)$ , определенный в пространстве  $X$  (*регуляризирующий функционал*), и строится функционал

$$M^\alpha(x, \bar{y}) = \|Ax - \bar{y}\|_Y^2 + \alpha\Omega(x), \quad (4.2.3)$$

который называется *сглаживающим*; параметр  $\alpha > 0$  называется *параметром регуляризации*. Далее решается задача о минимизации функционала  $M^\alpha(x, \bar{y})$  по  $x \in X_A \subset X$ .

Положим, например,

$$Y = X = L_2, \quad \Omega(x) = \|x\|_{L_2}^2.$$

Тогда необходимое условие минимума функционала

$$M^\alpha(x, \bar{y}) = \|Ax - \bar{y}\|_{L_2}^2 + \alpha\|x\|_{L_2}^2$$

можно записать в виде уравнения Эйлера. В частности, для линейного оператора  $A$  получим:

$$A^*Ax + \alpha x = A^*\bar{y}, \quad (4.2.4)$$

где  $A^*$  — оператор, сопряженный к  $A$  в  $L_2$ . Решая это уравнение, получим семейство приближенных решений  $x_\alpha$  для уравнения (4.2.1). Доказано, что это семейство является регуляризованным семейством решений и при  $\alpha \rightarrow 0$  выполняется предельное соотношение

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|x_\alpha - \bar{x}\|_{L_2} = 0,$$

если  $\bar{x} \in L_2$  — точное решение (4.2.1),  $A$  — вполне непрерывный оператор [4].

В более общем случае, когда регуляризация осуществляется с помощью сглаживающего функционала (4.2.3), для метрических пространств  $X, Y$  справедливо следующее утверждение. Если  $A$  — вполне непрерывный оператор, а регуляризирующий функционал  $\Omega(x)$  выбран таким образом, что множества

$$X_c = \{x \in X; \Omega(x) \leq C\}, \quad C = \text{const},$$

компактны, то минимум функционала  $M^\alpha(x, \bar{y})$  единственен и достигается на функциях  $x_\alpha$ , образующих регуляризованное семейство приближенных решений уравнения (4.2.1).

Рассмотрим более подробно регуляризацию задачи о решении уравнения Фредгольма I рода (4.2.2). Будем полагать, что  $y(t) \in L_2[c, d]$ , а ядро  $K(t, \tau)$  непрерывно по обоим переменным при  $t \in [c, d]$ ,  $\tau \in [a, b]$ . Регулярирующий функционал  $\Omega(x)$  выберем квадратичным:

$$\Omega(x) = \int_a^b x^2(\tau) d\tau.$$

В этом случае сглаживающий функционал может быть записан в виде

$$M^\alpha(x, \bar{y}) = \int_c^d \left[ \int_a^b K(t, \tau) x(\tau) d\tau - \bar{y}(t) \right]^2 dt + \alpha \int_a^b x^2(\tau) d\tau. \quad (4.2.5)$$

Приравнивая к нулю первую вариацию функционала  $M^\alpha(x, \bar{y})$  относительно  $x(\tau)$ , получим уравнение (4.2.4):

$$\int_a^b H(\tau, \xi) x(\xi) d\xi + \alpha x(\tau) = h(\tau), \quad \tau \in [a, b], \quad (4.2.6)$$

где обозначено

$$H(\tau, \xi) = \int_c^d K(t, \tau) K(t, \xi) dt,$$

$$h(\tau) = \int_c^d \bar{y}(t) K(t, \tau) dt.$$

Решение  $x_\alpha$  уравнения Фредгольма II рода (4.2.6) для любой функции  $\bar{y} \in L_2[c, d]$  существует и единственно. Это следует из того, что однородное интегральное уравнение, соответствующее (4.2.6), имеет только тривиальное решение [36].

Поскольку минимум функционала  $M^\alpha(x, \bar{y})$  достигается на функциях  $x_\alpha$ , можно записать:

$$M^\alpha(x_\alpha, \bar{y}) \leq M^\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \|A\bar{x} - \bar{y}\|_{L_2}^2 + \alpha \Omega(\bar{x}) = \alpha C,$$

где  $C = \Omega(\bar{x}) = \text{const}$ ,  $A\bar{x} = \int_a^b K(t, \tau) \bar{x}(\tau) d\tau$ . Таким образом,

$$\|Ax_\alpha - \bar{y}\|_{L_2}^2 + \alpha\Omega(x_\alpha) \leq \alpha C. \quad (4.2.7)$$

Следовательно, при  $\alpha \rightarrow 0$

$$\|Ax_\alpha - \bar{y}\|_{L_2}^2 \rightarrow 0. \quad (4.2.8)$$

Учитывая, что  $A$  — вполне непрерывный оператор, можно заключить: если точное решение  $\bar{x}$  уравнения (4.2.1) принадлежит пространству  $L_2$ , то  $\|x_\alpha - \bar{x}\|_{L_2}^2 \rightarrow 0$ , где  $x_\alpha$  — регуляризованное семейство приближенных решений этого уравнения.

Задача усложняется, если  $\bar{x} \in C[a, b]$  и требуется построить регуляризованное семейство решений  $x_\alpha$ , сходящихся к  $\bar{x}$  равномерно, т. е. по норме пространства  $C[a, b]$ . При сделанных предположениях решение уравнения (4.2.6)  $x_\alpha(t) \in C[a, b]$  и условие (4.2.7) по-прежнему выполняется, однако равномерная сходимость не имеет места. Пусть, например,  $\bar{y} = \int_a^b K(t, \tau) d\tau$  и при некотором  $\tau_0 \in [a, b]$   $K(t, \tau_0) \equiv 0$ . Тогда решение уравнения (4.2.2)  $\bar{x}(t) \equiv 1$ . В то же время  $h(\tau_0) = 0$ ,  $H(\tau_0, \xi) \equiv 0$  и, следовательно,  $x_\alpha(\tau_0) = 0$  для любого  $\alpha > 0$ . Это исключает равномерную сходимость. Равномерную сходимость можно обеспечить, выбирая другой регуляризующий функционал. Положим

$$\Omega(x) = \int_a^b [q(\tau) [x'(\tau)]^2 + p(\tau) x^2(\tau)] d\tau,$$

где  $p(\tau), q(\tau) > 0$  при  $\tau \in [a, b]$ . Тогда

$$M^\alpha(x, \bar{y}) = \int_0^d \left[ \int_a^b K(t, \tau) x(\tau) d\tau - \bar{y}(t) \right]^2 dt + \alpha \int_a^b [q(\tau) [x'(\tau)]^2 + p(\tau) x^2(\tau)] d\tau. \quad (4.2.9)$$

Необходимое условие минимума этого функционала, как и в предыдущем случае, может быть записано в виде интегрального уравнения Фредгольма II рода. Решения  $x_\alpha(t)$  этого уравнения, на которых достигается минимум  $M^\alpha(x, \bar{y})$ , образуют регуляризованное семейство приближенных решений уравнения (4.2.2). Если точное решение  $\bar{x}(t)$  — непрерывная и дифференцируемая на  $[a, b]$  функция, то  $\|x_\alpha(t) - \bar{x}(t)\|_C \rightarrow 0$  при  $\alpha \rightarrow 0$ , т. е.  $x_\alpha(t)$  сходятся к  $\bar{x}(t)$  равномерно [84].

Вообще, выбирая тот или иной вид функционала  $\Omega(x)$ , можно получить регуляризованное семейство решений, имеющее заданный порядок гладкости, т. е. дифференцируемых заданное число раз. В связи с этим регуляризация с помощью сглаживающего функционала (4.2.5) называется *регуляризацией нулевого порядка (слабой регуляризацией)*. Регуляризация при использовании функционала (4.2.9) называется *регуляризацией первого порядка (равномерной регуляризацией)*.

До сих пор предполагалось, что правая часть уравнения (4.2.1)  $y = \bar{y}$  задана точно. При практических вычислениях она может быть задана лишь приближенно. Обозначим через  $y_\delta$  правую часть, заданную с погрешностью  $\delta$ :

$$\|\bar{y} - y_\delta\|_X \leq \delta.$$

Регуляризованное семейство приближенных решений уравнения

$$Ax = y_\delta \quad (4.2.10)$$

обозначим через  $x_\alpha^\delta$ . Если теперь считать погрешность  $\delta$  малой, но фиксированной величиной, а параметр регуляризации устремить к нулю, то последовательность  $x_\alpha^\delta$  может выйти из  $\varepsilon$ -окрестности решения  $\bar{x}$  при некотором значении  $\alpha$ . Практически с уменьшением  $\alpha$  погрешности в правой части все сильнее влияют на точность приближенного решения  $x_\alpha^\delta$ . Таким образом, погрешность  $\delta$  связана с параметром регуляризации  $\alpha$ . Если семейство приближенных решений определяется в пространстве  $L_2$  и оператор  $A$  — вполне непрерывный, то справедлива следующая теорема [4]:

для сходимости регуляризованного семейства  $x_\alpha^\delta$  решений уравнения (4.2.10), найденных из уравнения

(4.2.4) при  $y = y^\delta$ :

$$\|x_\alpha^\delta - \bar{x}\|_{L_2} \rightarrow 0 \quad \text{при } \alpha \rightarrow 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\delta}{\alpha} = 0. \quad (4.2.11)$$

С уменьшением параметра  $\alpha$  необходимо повышать точность задания правой части  $y$  в соответствии с равенством (4.2.11).

Такая же зависимость имеет место между параметром  $\alpha$  и точностью  $h$  задания оператора  $A$ :

$$\|A_h - A\| \leq h,$$

где  $A_h$  — приближенное значение оператора  $A$ . Если  $x_\alpha^h$  — решение уравнения (4.2.4) для случая  $A = A_h$ ,  $y = \bar{y}$ , то достаточным условием сходимости регуляризованного семейства

$$\|x_\alpha^h - \bar{x}\|_{L_2} \rightarrow 0 \quad \text{при } \alpha \rightarrow 0$$

является условие [4]

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{h}{\alpha} = 0.$$

Для того чтобы получить регуляризованное семейство решений при наличии погрешности как в задании оператора  $h$ , так и в задании правой части  $\delta$ , необходимо согласовать эти погрешности [59]. В частности, если оператор допускает оценку

$$\|Ax - A_h x\|_Y \leq \xi(h) \|x\|_X, \quad (4.2.12)$$

причем  $\xi(h) \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ , то при  $\alpha \rightarrow 0$  должны выполняться следующие предельные соотношения:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\xi}{\alpha} = 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\delta^2}{\alpha} = 0.$$

Для сходимости регуляризованного семейства  $x_\alpha^\delta$ , полученного при помощи сглаживающего функционала (4.2.9), равномерная сходимость

$$\|x_\alpha^\delta - \bar{x}\|_C \rightarrow 0$$



обеспечивается при условии  $\gamma_1 \leq \delta^2/\alpha \leq \gamma_2$ , где  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — некоторые константы  $0 < \gamma_1 < \gamma_2$  [84].

Практически подходящее значение параметра регуляризации определяют чаще всего путем подбора, т. е. многократными вычислениями  $x_\alpha$  для различных значений параметра  $\alpha$ . Известны некоторые способы оптимизации выбора параметра регуляризации при решении задач идентификации [9] и оптимальной фильтрации.

В заключение этого параграфа заметим, что при использовании численных методов непосредственная минимизация функционала (4.2.3) по  $x \in X_A$  может оказаться не менее эффективным способом, чем решение уравнений, определяющих необходимые условия его минимума.

### § 3. Регуляризация и решение уравнений оптимального нелинейного фильтра

Рассмотрим задачу решения системы интегральных уравнений (4.1.10), определяющих оптимальный нелинейный фильтр. Предварительно запишем эти уравнения в матричной форме. Обозначим:

$$\eta_{n,m}(\tau_1, \dots, \tau_n, \xi_1, \dots, \xi_m) = m_x^{(n+m)}(\tau_1 - \tau_2, \dots, \tau_1 - \xi_m),$$

$$\gamma_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = m_{sx}^{(1,n)}(\tau_1, \dots, \tau_n).$$

Система уравнений (4.1.10) примет в этих обозначениях следующий вид:

$$\sum_{m=0}^N \int_{E_+^m} k_m(\xi_1, \dots, \xi_m) \eta_{n,m}(\tau_1, \dots, \tau_n, \xi_1, \dots, \xi_m) dv_\xi = \gamma_n(\tau_1, \dots, \tau_n). \quad (4.3.1)$$

Введем матрицу

$$A(\tau, \xi) = [\eta_{n,m}(\tau_1, \dots, \tau_n, \xi_1, \dots, \xi_m)],$$

$$n, m = 0, 1, \dots, N, \quad \eta_{0,0} = 1,$$

и векторы-столбцы

$$\Gamma(\tau) = [\gamma_0, \gamma_1(\tau_1), \dots, \gamma_N(\tau_1, \dots, \tau_N)]',$$

$$K(\xi) = [k_0, k_1(\xi_1), \dots, k_N(\xi_1, \dots, \xi_N)]',$$

символ  $[\ ]'$  обозначает транспонирование;  $\tau, \xi \in E^N$ . Теперь систему уравнений (4.3.1) можно записать в виде

одного матричного уравнения

$$\int_{E_+^N} A(\tau, \xi) K(\xi) dv_\xi = \Gamma(\tau).$$

Таким образом, задача сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма I рода в пространстве  $E^N$ . Из результатов предыдущего параграфа следует, что эта задача является некорректно поставленной. Применим для ее решения метод регуляризации. С этой целью задачу о минимизации функционала  $\mathcal{M}\{[F_N[x(t)] - s(t)]^2\}$  заменим задачей о минимизации сглаживающего функционала

$$M^\alpha\{k_0, k_1, \dots, k_N\} = \mathcal{M}\{[F_N[x(t)] - s(t)]^2\} + \alpha \Omega^N\{k_0, k_1, \dots, k_N\}, \quad (4.3.2)$$

$$\text{где } \Omega^N\{k_0, k_1, \dots, k_N\} = \sum_{n=0}^N \int_{E_+^n} k_n^2(\tau_1, \dots, \tau_n) dv_\tau.$$

Эту задачу, в свою очередь, нетрудно свести к минимизации нормы в гильбертовом пространстве. Введем стационарный случайный процесс  $y(t)$ , имеющий нулевое математическое ожидание, дисперсию  $\alpha \Omega^N$  и некоррелированный с ошибкой фильтрации  $F_N[x] - s$ . Обозначив  $Y$  — пространство реализаций этого процесса, построим так же, как в § 1, пространство  $L_2(Z \times Y) = L_2(X \times S \times Y)$ . Поставленная задача соответствует в пространстве  $L_2(Z \times Y)$  задаче о минимизации нормы

$$\|F_N[x] - s + y\|_{L_2(Z \times Y)}, \quad (4.3.3)$$

причем

$$\|y\|_{L_2(Y)} = \alpha^{1/2} [\Omega^N]^{1/2}.$$

Действительно,

$$\|F_N[x] - s + y\|_{L_2(Z \times Y)}^2 = \|F_N[x] - s\|_{L_2(X \times S)}^2 + \|y\|_{L_2(Y)}^2,$$

что совпадает с функционалом (4.3.2). Условие минимума нормы (4.3.3) аналогично условию (4.1.4):

$$(F_N[x] + y - s, F_N[x] + y) = 0,$$

откуда следует

$$(F_N[x] - s, F_N[x]) + \|y\|_{L_2(Y)}^2 = 0.$$

Это и есть условие минимума функционала  $M^\alpha$ . Переходя к прежним обозначениям, будем иметь

$$(F_N[x(t)], F_N[x(t)]) + \alpha \Omega^N = (s(t), F_N[x(t)]). \quad (4.3.4)$$

Последнее равенство эквивалентно системе  $N+1$  интегральных уравнений, соответствующих уравнениям (4.1.10) (см. также [82]):

$$\sum_{m=0}^N \int_{E_+^m} k_m(\xi_1, \dots, \xi_m) \eta_{n,m}(\tau_1, \dots, \tau_n, \xi_1, \dots, \xi_m) dv_\xi + \\ + \alpha k_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = \gamma_n(\tau_1, \dots, \tau_n), \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (4.3.5)$$

или, в матричных обозначениях,

$$\int_{E_+^N} A(\tau, \xi) K(\xi) dv_\xi + \alpha K(\tau) = \Gamma(\tau). \quad (4.3.6)$$

Задача о решении интегрального уравнения (4.3.6) второго рода в пространстве  $E^N$  является корректно поставленной. При каждом значении параметра  $\alpha$  решения  $K_\alpha(\xi)$  единственны и образуют регуляризованное семейство. Наиболее просто они определяются в том случае, когда система уравнений (4.3.5) приводится к диагональному виду, и, таким образом, эти уравнения могут быть решены последовательно. В качестве примера рассмотрим регуляризованные уравнения оптимального нелинейного фильтра второго порядка, полагая случайные процессы  $x(t)$  и  $s(t)$  нормальными,  $m_x = m_s = 0$ . В этом случае систему уравнений (4.3.5) можно записать следующим образом:

$$k_0 + \int_0^\infty \int_0^\infty k_2(\xi_1, \xi_2) K_x(\xi_1 - \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 + \alpha k_0 = 0,$$

$$\int_0^\infty k_1(\xi_1) K_x(\tau_1 - \xi_1) d\xi_1 + \alpha k_1(\tau_1) = \gamma_1(\tau_1),$$

$$k_0 K_x(\tau_1 - \tau_2) + \int_0^\infty \int_0^\infty k_2(\xi_1, \xi_2) \eta_{2,2}(\tau_1, \tau_2, \xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 + \\ + \alpha k_2(\tau_1, \tau_2) = 0.$$

Выражая  $k_0$  из первого уравнения и подставляя его в третье уравнение, будем иметь:

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{1+\alpha} \int_0^\infty \int_0^\infty k_2(\xi_1, \xi_2) K_x(\xi_1 - \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \\
 & \int_0^\infty \int_0^\infty k_2(\xi_1, \xi_2) \left[ K_x(\tau_1 - \xi_1) K_x(\tau_2 - \xi_2) + K_x(\tau_1 - \xi_2) K_x(\tau_2 - \xi_1) + \right. \\
 & \left. + \frac{\alpha}{1+\alpha} K_x(\tau_1 - \tau_2) K_x(\xi_1 - \xi_2) \right] d\xi_1 d\xi_2 + \alpha k_2(\tau_1, \tau_2) = 0.
 \end{aligned}$$

Из последнего уравнения, как и раньше, следует

$$k_2(\xi_1, \xi_2) \equiv 0.$$

Оставшееся уравнение — это интегральное уравнение второго рода относительно неизвестного ядра  $k_1(\xi_1)$ . Таким образом, система уравнений решается последовательно.

В общем случае каждое из уравнений системы (4.3.5) содержит  $n$  неизвестных ядер, в связи с чем необходимо применять те или иные приближенные методы.

Один из таких методов был предложен в работе [30] для решения системы уравнений (4.1.10). Этот метод может быть применен также и для решения системы (4.3.5), полученной в результате регуляризации. В отличие от [30] на каждом этапе итеративной процедуры будет решаться корректно поставленная задача. Метод заключается в следующем. Вначале из первого уравнения системы (4.3.5) при  $k_i=0$ ,  $i=1, \dots, N$  определяется ядро первого приближения  $k_{0\alpha}^1$ , затем из второго уравнения при  $k_0=k_{0\alpha}^1$ ,  $k_i=0$ ,  $i=2, 3, \dots, N$ , определяется  $k_{1\alpha}^1$ ; из третьего при  $k_0=k_{0\alpha}^1$ ,  $k_1=k_{1\alpha}^1$ ,  $k_i=0$ ,  $i=3, 4, \dots, N$ , — определяется  $k_{2\alpha}^1$  и т. д. вплоть до последнего уравнения, в котором оказываются уже известными  $N$  ядер  $k_i = k_{i\alpha}^1$ ,  $i=0, 1, \dots, N-1$ , и остается определить последнее  $k_N = k_{N\alpha}^1$ . Этим завершается процедура определения ядер первого приближения  $k_{m\alpha}^1$ ,  $m=0, 1, \dots, N$ , на  $n$ -м шаге которой решается одно интегральное уравнение

второго рода

$$\int_{E_+^n} k_n(\xi_1, \dots, \xi_n) \eta_{n,n}(\tau_1, \dots, \tau_n, \xi_1, \dots, \xi_n) dv_\xi + \\ + \alpha k_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = f_n^1(\tau_1, \dots, \tau_n), \quad (4.3.7)$$

где

$$f_n^1(\tau_1, \dots, \tau_n) = \gamma_n(\tau_1, \dots, \tau_n) - \sum_{m=0}^{n-1} \int_{E_+^m} k_{m\alpha}^1(\xi_1, \dots, \xi_m) \times \\ \times \eta_{n,m}(\tau_1, \dots, \tau_n, \xi_1, \dots, \xi_m) dv_\xi.$$

Нелинейный фильтр с ядрами  $k_{m\alpha}^1$ ,  $m=0, 1, \dots, N$ , не будет оптимальным фильтром порядка  $N$ , хотя первое приближение может оказаться достаточным из практических соображений. Рассмотрим процедуру получения второго приближения. В первом уравнении системы (4.3.5) положим  $k_i = k_{i\alpha}^1$ ,  $i=1, \dots, N$ , и найдем  $k_{0\alpha}^2$ ; из второго уравнения при  $k_i = k_{i\alpha}^1$ ,  $i=2, \dots, N$ ,  $k_0 = k_{0\alpha}^2$  найдем  $k_{1\alpha}^2$  и т. д. На  $n$ -м шаге итеративной процедуры потребуется решить уравнение такого же вида, что и (4.3.7), но с другой правой частью, которая будет равна

$$f_n^2(\tau_1, \dots, \tau_n) = \gamma_n(\tau_1, \dots, \tau_n) - \\ - \sum_{m=0}^{n-1} \int_{E_+^m} k_{m\alpha}^2(\xi_1, \dots, \xi_m) \eta_{n,m}(\tau_1, \dots, \tau_n, \xi_1, \dots, \xi_m) \times \\ \times dv_\xi - \sum_{m=n+1}^N \int_{E_+^m} k_{m\alpha}^1(\xi_1, \dots, \xi_m) \times \\ \times \eta_{n,m}(\tau_1, \dots, \tau_n, \xi_1, \dots, \xi_m) dv_\xi, \quad n=0, 1, \dots, N.$$

Полученное второе приближение  $k_{m\alpha}^2$ ,  $m=0, 1, \dots, N$ , можно уточнить с помощью последующих приближений, процедура построения которых не отличается от процедуры построения второго приближения.

Заметим, что в том случае, когда система (4.3.5) приводится к диагональному виду и, следовательно, имеет точное решение  $k_{m\alpha}$ ,  $n=0, 1, \dots, N$ , при каждом значении

параметра  $\alpha$ , описанная итеративная процедура обеспечивает получение этого решения, в чем нетрудно убедиться, рассматривая приведенные выше уравнения для оптимального фильтра второго порядка. В общем случае можно доказать сходимость итеративной процедуры при каждом значении  $\alpha$  к точному решению  $k_{n\alpha}$ ,  $n=0, 1, \dots, N$  [30]. Если  $k_{n\alpha}^m$ ,  $n=0, 1, \dots, N$ , — приближенное решение, зависящее от параметра регуляризации  $\alpha$ ,  $\bar{k}_n$  — точное решение системы уравнений (4.1.10), то

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ m \rightarrow \infty}} \mathcal{M} \left\{ \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_+^n} k_{n\alpha}^m(\tau_1, \dots, \tau_n) x(t-\tau_1) \dots \right. \right. \\ \left. \left. \dots x(t-\tau_n) dv_{\tau} - s(t) \right]^2 \right\} = \\ = \mathcal{M} \left\{ \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_+^n} \bar{k}_n(\tau_1, \dots, \tau_n) x(t-\tau_1) \dots x(t-\tau_n) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times dv_{\tau} - s(t) \right]^2 \right\} = \min.$$

Изложенный метод решения системы интегральных уравнений (4.3.5) сводится к последовательному решению уравнений вида (4.3.7), каждое из которых содержит одну неизвестную функцию  $k_n$ . Для этой цели могут быть использованы известные численные методы решения интегральных уравнений. Рассмотрим этот вопрос несколько подробнее.

Запишем уравнение (4.3.7) в виде

$$\int_{E_+^n} k_n(\xi) \eta_{n,n}(\tau, \xi) dv_{\xi} + \alpha k_n(\tau) = f_n(\tau), \quad \tau \in E_+^n.$$

Поскольку функции  $k_n(\xi)$  предполагаются абсолютно интегрируемыми, а функции  $\eta_{n,n}(\tau, \xi)$  — ограниченными, для приближенных вычислений можно заменить верхний предел интегрирования в (4.3.7) конечным числом  $M$ . Обозначим  $D^n = \{\xi : 0 \leq \xi_i \leq M, i=1, \dots, n\}$ . Таким образом, нужно решить уравнение

$$\int_{D^n} k_n(\xi) \eta_{n,n}(\tau, \xi) dv_{\xi} + \alpha k_n(\tau) = f_n(\tau). \quad (4.3.8)$$

Для вычисления интеграла в левой части этого уравнения можно использовать ту или иную квадратурную формулу:

$$\int_{D^n} k_n(\xi) \eta_{n,n}(\tau, \xi) dv_\xi \approx \sum_{k=1}^p a_k k_n(\xi_k) \eta_{n,n}(\tau, \xi_k), \quad (4.3.9)$$

где  $\xi_k \in D^n$  — узлы,  $a_k$  — коэффициенты квадратурной формулы,  $k=1, \dots, p$ . Уравнение (4.3.8) заменяется системой линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^p a_k k_n(\xi_k) \eta_{n,n}(\tau_l, \xi_k) + \alpha k_n(\tau_l) = f_n(\tau_l), \quad l = 1, \dots, p. \quad (4.3.10)$$

Решив эту систему, можно найти значение  $k_n(\tau)$  в любой точке  $\tau \in D^n$  по формуле

$$k_n(\tau) = \frac{1}{\alpha} \left[ f_n(\tau) - \sum_{k=1}^p a_k k_n(\xi_k) \eta_{n,n}(\tau, \xi_k) \right]. \quad (4.3.11)$$

Заметим, что при использовании квадратурных формул для решения уравнений (4.3.10), полученных в результате регуляризации, требуемая точность аппроксимации оказывается связанной с параметром регуляризации  $\alpha$  [84]. При уменьшении значений  $\alpha$  точность аппроксимации интеграла, стоящего в левой части уравнения (4.3.8), а следовательно, и число  $p$  узлов квадратурной формулы должны возрастать. Число уравнений системы (4.3.10) равно числу  $p$  узлов квадратурной формулы (4.3.9). При использовании прямоугольной сетки узлов число  $p=r^n$ , если  $r$  — размерность сетки по каждой из переменных  $\xi_i$ ,  $i=1, \dots, N$ . Таким образом, число уравнений в этом случае быстро возрастает с увеличением числа неизвестных. В связи с этим при достаточно большом числе переменных рассмотренный способ требует более рационального выбора узлов  $\xi_k$ . Этого можно добиться, если известен предполагаемый характер решения, или используя способы интегрирования с автоматическим выбором шага. В частном случае, когда функции  $\eta_{n,n}$ ,  $f_n$  допускают разложение в аб-

солютно сходящиеся ряды Фурье, можно найти оптимальные коэффициенты  $a_k$ , при которых достигается наибольшая точность решения [37].

Поскольку скорость сходимости рассмотренного выше итеративного способа решения системы интегральных уравнений (4.3.5) заранее неизвестна, то повышение точности за счет квадратурной формулы может оказаться нецелесообразным. При неудовлетворительной сходимости итеративного способа можно применить тот или иной численный метод решения интегральных уравнений непосредственно к системе (4.3.5). Используя векторные обозначения и заменяя, как и выше, верхний предел интегрирования достаточно большим числом  $M$ , перепишем эту систему следующим образом:

$$\sum_{m=0}^N \int_{D^m} k_m(\xi) \eta_{n,m}(\tau, \xi) dv_\xi + \alpha k_n(\tau) = \gamma_n(\tau),$$

$$n = 0, 1, \dots, N; \tau \in D^n. \quad (4.3.12)$$

Воспользуемся одной и той же системой узлов  $\xi_k$ ,  $k=1, \dots, p_N$ , для приближенного вычисления всех интегралов в левой части равенства (4.3.12). Для функций, определенных на подпространстве размерности меньшей, чем  $N$ , выбираются только те узлы, которые принадлежат этому подпространству. Заменяем систему интегральных уравнений (4.3.12) системой алгебраических уравнений, используя квадратурную формулу (4.3.9),

$$\sum_{m=0}^N \sum_{k=1}^{p_m} a_k^m k_m(\xi_k) \eta_{n,m}(\tau_l, \xi_k) + \alpha k_n(\tau_l) = \gamma_n(\tau_l),$$

$$n=0, 1, \dots, N; l=1, \dots, p_N. \quad (4.3.13)$$

Общее число уравнений в системе (4.3.13) составляет

$$\sum_{i=0}^N r^i = \frac{1-r^{N+1}}{1-r};$$

при достаточно большом  $r$  оно близко к  $r^N$ , т. е. растет по мере роста числа переменных с той же скоростью, что и в предыдущем случае.



Значения функций  $k_n(\tau)$  в любой точке  $\tau \in D^n$  могут быть найдены по формуле, аналогичной (4.3.11),

$$k_n(\tau) = \frac{1}{\alpha} \left[ \gamma_n(\tau) - \sum_{m=0}^N \sum_{k=1}^{p_m} \alpha_k^m k_n(\xi_k) \eta_{n,m}(\tau, \xi_k) \right]. \quad (4.3.14)$$

Другой подход к решению уравнений оптимального фильтра (4.3.1) состоит в использовании ортогональных систем функций. Ради упрощения выкладок предположим, что  $\gamma_0 = k_0 = 0$  и, таким образом, число уравнений системы равно  $N$ :

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^N \int_{E_+^m} k_m(\xi_1, \dots, \xi_m) \eta_{n,m}(\tau_1, \dots, \tau_n, \xi_1, \dots, \xi_m) d\nu_{\xi} = \\ = \gamma_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n), \quad n=1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

Выберем на полупрямой  $[0, \infty)$  систему функций  $\{\psi_n(t)\}$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$ , ортогональных с весом  $\omega(t)$  и нормированных, т. е.

$$\int_0^{\infty} \psi_n(t) \psi_m(t) \omega(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{при } n = m, \\ 0 & \text{при } n \neq m. \end{cases}$$

Такой системой, в частности, могут служить ортогональные полиномы Лагерра  $\{L_n(t)\}$ ; в этом случае  $\omega(t) = \exp(-t)$  (см. § 1 гл. 1). Функции  $\eta_{n,m}$ ,  $\gamma_n$ , входящие в уравнения (4.3.15), аппроксимируем рядами Фурье по системе функций  $\{\psi_n(t)\}$ :

$$\begin{aligned} \eta_{n,m}(\tau_1, \dots, \tau_n, \xi_1, \dots, \xi_m) \approx \\ \approx \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n \\ j_1, \dots, j_m}}^{p-1} \xi_{i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_m} \psi_{i_1}(\tau_1) \dots \psi_{i_n}(\tau_n) \cdot \psi_{j_1}(\xi_1) \dots \psi_{j_m}(\xi_m); \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

$$\gamma_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \approx \sum_{i_1, \dots, i_n}^{p-1} \kappa_{i_1, \dots, i_n} \psi_{i_1}(\tau_1) \dots \psi_{i_n}(\tau_n). \quad (4.3.17)$$

Суммирование в формулах (4.3.16), (4.3.17) ведется по всевозможным последовательностям индексов  $i_1, \dots, i_n$ ;  $j_1, \dots, j_m$ ;  $m, n=1, \dots, N$ ;  $i, j=0, 1, \dots, p-1$ ; приняты

обозначения

$$\begin{aligned} \zeta_{i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_m} &= \\ &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \psi_{i_1}(\tau_1) \dots \psi_{i_n}(\tau_n) \psi_{j_1}(\xi_1) \dots \psi_{j_m}(\xi_m) \times \\ &\quad \times \eta_{n,m}(\tau_1, \dots, \tau_n, \xi_1, \dots, \xi_m) \prod_{i=1}^n \omega(\tau_i) d\tau_i \prod_{j=1}^m \omega(\xi_j) d\xi_j, \\ \varkappa_{i_1, \dots, i_n} &= \\ &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \psi_{i_1}(\tau_1) \dots \psi_{i_n}(\tau_n) \gamma_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^n \omega(\tau_i) d\tau_i. \end{aligned}$$

Решение системы уравнений (4.3.15) будем искать в виде

$$\begin{aligned} k_m(\xi_1, \dots, \xi_m) &= \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_m}^{p-1} C_{j_1, \dots, j_m} \psi_{j_1}(\xi_1) \dots \psi_{j_m}(\xi_m) \prod_{k=1}^m \omega(\xi_k). \quad (4.3.18) \end{aligned}$$

Подставляя выражения (4.3.16), (4.3.17), (4.3.18) в систему уравнений (4.3.15), получим следующие уравнения относительно неизвестных коэффициентов  $C_{j_1, \dots, j_m}$  [33]:

$$\sum_{m=1}^N \sum_{j_1, \dots, j_m}^{p-1} C_{j_1, \dots, j_m} \zeta_{i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_m} = \varkappa_{i_1, \dots, i_n}. \quad (4.3.19)$$

Число уравнений, совпадающее с числом неизвестных, равно числу всевозможных последовательностей  $j_1, \dots, j_n$ , где  $n=1, \dots, N$ ,  $j_i=0, 1, \dots, p-1$ , т. е.

$$\sum_{i=1}^N p^i = \frac{p(1-p^N)}{1-p}. \text{ При } k_0 \neq 0 \text{ число уравнений увеличи-}$$

вается на единицу и становится равным  $\frac{1-p^{N+1}}{1-p}$ . Такое же число уравнений содержится в системе (4.3.13), полученной при использовании квадратурных формул, если  $p$  — число узлов по каждой переменной. При удачном выборе ортогональной системы функций  $\{\psi_n(t)\}$  размерность системы (4.3.19) может быть значительно ниже, чем системы (4.3.13). Верхний предел интегриро-

вания в левой части уравнения (4.3.15) может быть, как и выше, заменен конечным числом  $M$ . Поэтому для решения этих уравнений могут быть использованы также системы функций  $\{\psi_i(t)\}$ , ортогональные на конечном отрезке  $[0, M]$ .

Уравнение оптимального фильтра, определенное с помощью рассмотренной процедуры, можно записать следующим образом:

$$y(t) = \sum_{m=1}^N \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_m}^{p-1} C_{j_1, \dots, j_m} \psi_{j_1}(\xi_1) \dots \psi_{j_m}(\xi_m) \prod_{i=1}^m \omega(\xi_i) \times \\ \times x(t - \xi_i) d\xi_i = \sum_{m=1}^N \sum_{j_1, \dots, j_m}^{p-1} C_{j_1, \dots, j_m} \prod_{k=1}^m \chi_{j_k}(t),$$

где

$$\chi_{j_k}(t) = \int_0^{\infty} \psi_{j_k}(\xi) x(t - \xi) \omega(\xi) d\xi. \quad (4.3.20)$$

Такой фильтр нетрудно реализовать с помощью аналоговых или цифровых устройств, поскольку функции  $\chi_{j_k}(t)$  связаны со входным сигналом  $x(t)$  линейным преобразованием.

Среднеквадратичную ошибку фильтра (4.3.20) можно оценить по следующей формуле:

$$\delta^2 = \|s\|_{L_2(S)}^2 - (s, y) = \|s\|_{L_2(S)}^2 - \sum_{m=1}^N \sum_{j_1, \dots, j_m}^{p-1} C_{j_1, \dots, j_m} \chi_{j_1, \dots, j_m}. \quad (4.3.21)$$

В заключение этого параграфа следует упомянуть еще об одном подходе к решению уравнений оптимального фильтра. Решение системы уравнений (4.3.15) можно искать в виде

$$k_m(\xi_1, \dots, \xi_m) = \sum_{j_1, \dots, j_m}^p h_{j_1, \dots, j_m} \varphi_{j_1}(\xi_1) \dots \varphi_{j_m}(\xi_m), \quad (4.3.22)$$

где  $\varphi_{j_k}(\xi_k)$ ;  $j_k = 0, 1, \dots, p$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , — некоторая система функций, удовлетворяющих условию физической

реализуемости, но не обязательно ортогональных. Необходимые условия минимума (4.1.2) позволяют записать в этом случае систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $h_{j_1, \dots, j_m}$ , аналогичную системе (4.3.19)

$$\sum_{m=1}^N \sum_{j_1, \dots, j_m}^p h_{j_1, \dots, j_m} \tilde{\xi}_{i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_m} = \tilde{\chi}_{i_1, \dots, i_n}, \quad (4.3.23)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_{i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_m} &= \\ &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \varphi_{i_1}(\tau_1) \dots \varphi_{i_n}(\tau_n) \varphi_{j_1}(\xi_1) \dots \varphi_{j_m}(\xi_m) \times \\ &\quad \times \eta_{n,m}(\tau_1, \dots, \tau_n, \xi_1, \dots, \xi_m) \prod_{i=1}^n d\tau_i \prod_{j=1}^m d\xi_j; \\ \tilde{\chi}_{i_1, \dots, i_n} &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \varphi_{i_1}(\tau_1) \dots \varphi_{i_n}(\tau_n) \gamma_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^n d\tau_i. \end{aligned}$$

При этом среднеквадратическая ошибка фильтра равна

$$\delta^2 = \|s\|_{L_2(S)}^2 - \sum_{m=0}^N \sum_{j_1, \dots, j_m}^p h_{j_1, \dots, j_m} \tilde{\chi}_{j_1, \dots, j_m}. \quad (4.3.24)$$

Выбор системы весовых функций  $\varphi_{i_k}(\xi_k)$  определяется условиями задачи.

#### § 4. Задача нелинейной компенсации

При рассмотрении в §§ 1, 3 этой главы задачи оптимального преобразования сигнала не предполагалось каких-либо ограничений, налагаемых на ядра  $k_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$  полинома  $F_N[x]$ , описывающего синтезируемую систему, за исключением условия  $k_n \in L_2(E_+^n)$ . Однако при решении практических задач необходимо считаться с тем, что часть элементов системы и ее структура могут быть заданы заранее. В связи с этим возникает вопрос о возможности применения изложенных выше методов для синтеза систем, имеющих неизменяемую часть.

Постановка задачи сохраняется здесь такой же, как и в § 1 этой главы. Измеряя аддитивную смесь  $x(t)$  полезного сигнала  $s(t)$  и помехи  $n(t)$ , требуется осуществить заданное преобразование полезного сигнала  $\Phi(s(t))$ . Критерием качества системы является минимум среднеквадратического отклонения выходного сигнала системы от желаемого. Структуру системы и уравнения части ее элементов будем считать заданными; задача состоит в выборе некоторых, нелинейных в общем случае, корректирующих устройств в соответствии с заданным критерием качества. Эти устройства в § 5 гл. III были названы *компенсаторами*, а поставленная задача — *задачей нелинейной компенсации*.

Рассмотрим частный случай задачи нелинейной компенсации — задачу оптимальной фильтрации полезного

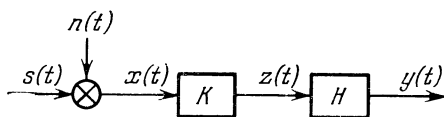


Рис. 4.4.1.

сигнала  $s(t)$  системой, структурная схема которой показана на рис. 4.4.1, где  $H$  — неизменяемая часть системы,  $K$  — компенсатор. Уравнение компенсатора  $K$  будем искать в виде полинома Вольterra

$$\begin{aligned} z(t) &= F_N[x(t)] = \\ &= \sum_{n=1}^N \int_{E_+^n} k_n(\xi_1, \dots, \xi_n) x(t - \xi_1) \dots x(t - \xi_n) dv_{\xi} \quad (4.4.1) \end{aligned}$$

из условия наилучшей фильтрации системой полезного сигнала:

$$\delta^2 = \mathbf{M}\{(y-s)^2\} = \min. \quad (4.4.2)$$

Неизменяемую часть вначале будем считать линейной:

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(t - \tau) z(\tau) d\tau. \quad (4.4.3)$$

Всюду в этом параграфе неизменяемая часть системы предполагается устойчивой в  $C[0, \infty)$  и причинной. Следовательно, ядро  $h(t)$  абсолютно интегрируемо на  $[0, \infty)$  и выполняется условие

$$h(t) \equiv 0 \text{ при } t < 0.$$

Случайные процессы  $s(t)$ ,  $n(t)$  считаются стационарными и стационарно связанными.

Запишем уравнение системы:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^{\infty} h(t-\tau) F_N[x(\tau)] d\tau = \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^N \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} k_n(\xi_1, \dots, \xi_n) h(t-\tau) \prod_{i=1}^n x(\tau-\xi_i) d\xi_i d\tau = \\ &= \sum_{n=1}^N \int_{E_+^n} k_n(\xi_1, \dots, \xi_n) \sigma_n(t-\xi_1, \dots, t-\xi_n) dv_{\xi}, \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

где

$$\sigma_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = \int_0^{\infty} h(\xi) x(\tau_1-\xi) \dots x(\tau_n-\xi) d\xi. \quad (4.4.5)$$

Подставляя выражение (4.4.4) в уравнение (4.1.4) при

$$\Phi[s] = I[s], \quad F[x] = y,$$

получим систему уравнений относительно неизвестных ядер  $k_m(\xi_1, \dots, \xi_m)$ ,  $m=1, \dots, N$ , нелинейного компенсатора:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^N \int_{E_+^m} k_m(\xi_1, \dots, \xi_m) \times \\ \times \overline{\sigma_n(t-\tau_1, \dots, t-\tau_n) \sigma_m(t-\xi_1, \dots, t-\xi_m)} dv = \\ = \overline{s(t) \sigma_n(t-\tau_1, \dots, t-\tau_n)}, \quad n=1, \dots, N, \quad (4.4.6) \\ \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n \geq 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями оптимального

фильтра (4.3.1), если положить в последних  $k_0 = \gamma_0 = 0$ ,

$$\begin{aligned} \eta_{n,m}(\tau_1, \dots, \tau_n, \xi_1, \dots, \xi_m) &= \\ &= \overline{\sigma_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n) \sigma_m(t - \xi_1, \dots, t - \xi_m)} = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \overline{h(\zeta_1) h(\zeta_2) x(t - \tau_1 - \zeta_1) \dots x(t - \tau_n - \zeta_1) x(t - \xi_1 - \zeta_2) \dots} \\ &\quad \dots x(t - \xi_m - \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2 = \int_0^\infty \int_0^\infty h(\zeta_1) h(\zeta_2) \times \\ &\quad \times m_x^{(n+m)}(\tau_1 - \tau_2, \tau_1 - \tau_3, \dots, \tau_1 - \tau_n, \tau_1 - \xi_1 + \\ &\quad + \zeta_1 - \zeta_2, \dots, \tau_1 - \xi_m + \zeta_1 - \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2; \\ \gamma_n(\tau_1, \dots, \tau_n) &= \overline{s(t) \sigma_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n)} = \\ &= \int_0^\infty \overline{h(\zeta) s(t) x(t - \tau_1 - \zeta) \dots x(t - \tau_n - \zeta)} d\zeta = \\ &= \int_0^\infty h(\zeta) m_{sx}^{(1,n)}(\tau_1 + \zeta, \tau_2 + \zeta, \dots, \tau_n + \zeta) d\zeta, \\ &\quad n, m = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Таким образом, задача нелинейной компенсации сведена к задаче нелинейной оптимальной фильтрации, рассмотренной выше. Ядра компенсирующего устройства  $k_m(\xi_1, \dots, \xi_m)$  могут быть найдены одним из приближенных способов, описанных в § 3.

Рассмотрим другой подход к решению задачи нелинейной компенсации. Пусть известно для данных случайных процессов  $s(t)$ ,  $n(t)$  решение задачи оптимальной фильтрации (4.1.10), т. е. найдены ядра оптимального фильтра  $g_n^0(\tau_1, \dots, \tau_n)$ ,  $n = 1, \dots, N$ . Система, изображенная на рис. 4.4.1, может быть описана полиномом Вольтерра следующего вида (см. гл. I, § 2):

$$y(t) = \sum_{n=1}^N \int_{E_+^n} g_n(t - \xi_1, \dots, t - \xi_n) \prod_{i=1}^n x(\xi_i) dv_{\xi}, \quad (4.4.7)$$

где

$$g_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = \int_0^\infty h(\eta) k_n(\tau_1 - \eta, \tau_2 - \eta, \dots, \tau_n - \eta) d\eta.$$

Следовательно, ядра  $k_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$  оптимального компенсатора можно определить из решения системы интегральных уравнений

$$g_n^0(\tau_1, \dots, \tau_n) = \int_0^{\infty} h(\eta) k_n(\tau_1 - \eta, \tau_2 - \eta, \dots, \tau_n - \eta) d\eta, \quad n = 1, \dots, N. \quad (4.4.8)$$

В частном случае, когда процессы  $s(t)$ ,  $n(t)$  имеют нормальное распределение, оптимальный фильтр является линейным,  $g_n^0(\tau_1, \dots, \tau_n) \equiv 0$  при  $n \geq 2$ , и задача сводится к выбору последовательного корректирующего устройства в линейной системе, т. е. к решению уравнения

$$g_n^0(\tau) = \int_0^{\infty} h(\eta) k_1(\tau - \eta) d\eta. \quad (4.4.9)$$

Такой путь решения задачи оптимальной фильтрации может оказаться предпочтительным, если задача синтеза решается многократно для систем с различной неизменяемой частью, но при наличии одних и тех же случайных воздействий, т. е. для одного и того же «желаемого» оператора системы, определяемого ядрами  $g_n^0(\tau_1, \dots, \tau_n)$ .

Уравнения (4.4.8) позволяют решить и более общую задачу. Пусть желаемое преобразование сигнала  $x(t)$  системой, имеющей структурную схему рис. 4.4.1, задано в виде полинома Вольтерра  $Q_N[x(t)]$  с ядрами  $g_n^0(\tau_1, \dots, \tau_n)$ ,  $n=1, \dots, N$ . Тогда, решая уравнения (4.4.8), можно определить компенсатор, обеспечивающий оптимальное выполнение системой заданного преобразования. Заметим, что такая постановка задачи в общем случае некорректна, поскольку система (4.4.8) состоит из интегральных уравнений первого рода. Однако, применяя метод регуляризации, можно получить приближенное решение этой системы.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда неизменяемая часть системы (рис. 4.4.1) нелинейна и описывается полиномом Вольтерра степени  $N$

$$y(t) = G_N(z(t)) = \sum_{k=1}^N \int_{E_+^k} h_k(t - \tau_1, t - \tau_2, \dots, t - \tau_k) \prod_{i=1}^k z(\tau_i) d\tau. \quad (4.4.10)$$



Система в целом описывается теперь уравнением

$$y(t) = G_N [F_N [x(\tau)]] = \sum_{k=1}^N \int_{E_+^k} h_k(t - \tau_1, \dots, t - \tau_k) \prod_{i=1}^k F_N [x(\tau_i)] d\tau_i. \quad (4.4.11)$$

Запишем подробнее слагаемые, соответствующие  $k=1, 2$ :

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^\infty h_1(t - \tau) F_N [x(\tau)] d\tau + \\ &+ \int_0^\infty \int_0^\infty h_2(t - \tau_1, t - \tau_2) F_N [x(\tau_1)] F_N [x(\tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 + \dots \\ &\dots = \sum_{n=1}^N \int_0^\infty \dots \int_0^\infty k_n(\xi_1, \dots, \xi_n) \sigma_n(t - \xi_1, \dots, t - \xi_n) \prod_{i=1}^n d\xi_i + \\ &+ \sum_{n,m=1}^N \int_0^\infty \dots \int_0^\infty k_n(\xi_1, \dots, \xi_n) k_m(\zeta_1, \dots, \zeta_m) \times \\ &\times \sigma_{nm}(t - \xi_1, \dots, t - \xi_n, t - \zeta_1, \dots, t - \zeta_m) \prod_{i=1}^n d\xi_i \prod_{j=1}^m d\zeta_j. \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

Здесь функции  $\sigma_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$  определяются по формуле (4.4.5) и функции  $\sigma_{nm}(\tau_1, \dots, \tau_{n+m})$  — по формуле

$$\begin{aligned} \sigma_{nm}(\tau_1, \dots, \tau_{n+m}) &= \int_0^\infty \int_0^\infty h_2(\zeta_1, \zeta_2) x(\tau_1 - \zeta_1) \dots \\ &\dots x(\tau_n - \zeta_1) x(\tau_{n+1} - \zeta_2) \dots x(\tau_{n+m} - \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2. \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

Выражение в правой части равенства (4.4.12), в отличие от (4.4.4), представляет собой нелинейную функцию относительно ядер компенсирующего устройства  $k_n$ . Используя уравнение (4.1.4), можно, как и выше, найти систему уравнений, определяющих оптимальный компенсатор, которая будет нелинейной относительно искомого ядер  $k_n$ . В связи с этим рассмотренные выше методы решения подобных систем здесь неприменимы.

Поставленную задачу можно решить, разделяя ее на задачу оптимальной фильтрации и задачу аппроксимации оптимального фильтра. Запишем с этой целью уравнение рассматриваемой нелинейной системы в виде полинома Вольтерра

$$y(t) = \sum_{n=1}^N \int_{E_+^n} g_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n) x(\tau_1) \dots x(\tau_n) dv_{\tau}. \quad (4.4.14)$$

Ядра этого полинома  $g_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ ,  $n=1, \dots, N$ , могут быть найдены по формулам последовательного соединения двух полиномиальных систем (см. § 1 гл. II)

$$\left. \begin{aligned} g_1(\tau) &= \int_0^{\infty} h_1(\eta) k_1(\tau - \eta) d\eta, \\ g_2(\tau_1, \tau_2) &= \int_0^{\infty} h_1(\eta) k_2(\tau_1 - \eta, \tau_2 - \eta) d\eta + \\ &+ \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_2(\eta_1, \eta_2) k_1(\tau_1 - \eta_1) k_1(\tau_2 - \eta_2) d\eta_1 d\eta_2, \\ g_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= \int_0^{\infty} h_1(\eta) k_3(\tau_1 - \eta, \tau_2 - \eta, \tau_3 - \eta) d\eta + \\ &+ \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_2(\eta_1, \eta_2) k_1(\tau_1 - \eta_1) k_2(\tau_2 - \eta_2, \tau_3 - \eta_2) d\eta_1 d\eta_2 + \\ &+ \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_2(\eta_1, \eta_2) k_2(\tau_1 - \eta_1, \tau_2 - \eta_2) k_1(\tau_3 - \eta_2) d\eta_1 d\eta_2 + \\ &+ \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_3(\eta_1, \eta_2, \eta_3) k_1(\tau_1 - \eta_1) k_1(\tau_2 - \eta_2) k_1(\tau_3 - \eta_3) \times \\ &\quad \times d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (4.4.15)$$

Обозначим через  $g_n^0(\tau_1, \dots, \tau_n)$ ,  $n=1, \dots, N$ , решение уравнений оптимального фильтра (4.1.10), найденное для

данных случайных процессов  $s(t)$ ,  $n(t)$ . Подставляя функции  $g_i^0(\tau_1, \dots, \tau_n)$  в левые части уравнений (4.4.15), получим систему интегральных уравнений относительно неизвестных ядер оптимального компенсатора  $k_n$ . Эта система имеет треугольный вид, благодаря чему все уравнения могут быть последовательно решены, начиная с первого. При этом каждый раз будет решаться уравнение с одной неизвестной функцией  $k_n$  вида

$$\int_0^{\infty} h_1(\eta) k_n(\tau_1 - \eta, \dots, \tau_n - \eta) d\eta = f_n(\tau_1, \dots, \tau_n),$$

$$n = 1, \dots, N, \quad (4.4.16)$$

где  $f_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$  — известные функции, определяемые решением предыдущих  $n-1$  уравнений:

$$\left. \begin{aligned} f_1(\tau) &= g_1^0(\tau), \\ f_2(\tau_1, \tau_2) &= g_2^0(\tau_1, \tau_2) - \\ &\quad - \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_2(\eta_1, \eta_2) k_1(\tau_1 - \eta_1) k_1(\tau_2 - \eta_2) d\eta_1 d\eta_2, \\ f_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= g_3^0(\tau_1, \tau_2, \tau_3) - \\ &\quad - \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_2(\eta_1, \eta_2) k_1(\tau_1 - \eta_1) k_2(\tau_2 - \eta_2, \tau_3 - \eta_2) d\eta_1 d\eta_2 - \\ &\quad - \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_2(\eta_1, \eta_2) k_2(\tau_1 - \eta_1, \tau_2 - \eta_2) k_1(\tau_3 - \eta_2) d\eta_1 d\eta_2 - \\ &\quad - \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_3(\eta_1, \eta_2, \eta_3) k_1(\tau_1 - \eta_1) k_1(\tau_2 - \eta_2) k_1(\tau_3 - \eta_3) \times \\ &\quad \times d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.4.17)$$

Если случайные процессы  $s(t)$ ,  $n(t)$  имеют нормальные распределения, то эти выражения упрощаются, поскольку  $g_n^0(\tau_1, \dots, \tau_n) \equiv 0$  при  $n \geq 2$ . В общем случае под  $g_n^0(\tau_1, \dots, \tau_n)$  можно подразумевать ядра любого же-

лаемого оператора, представленного в виде полинома Вольтерра  $Q_N[x(t)]$ . Система уравнений (4.4.16) имеет ту же структуру, что и система уравнений (4.4.8), полученная для случая линейной неизменяемой части с весовой функцией  $h(\tau)$ . Это обстоятельство позволяет использовать те же методы для ее решения.

Рассмотрим другие постановки задачи нелинейной компенсации, представляющие практический интерес. Для структурной схемы, изображенной на рис. 4.4.2, тре-

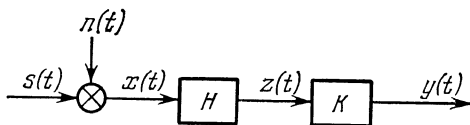


Рис. 4.4.2.

буется синтезировать устройство  $K$ , обеспечивающее наилучшее в среднеквадратическом выделение полезного сигнала  $s(t)$  из случайного процесса

$$z(t) = G_N[x(t)] = \sum_{k=1}^N \int_{E_+^k} h_k(t - \tau_1, \dots, t - \tau_k) \prod_{i=1}^k x(\tau_i) dv_{\tau},$$

$$x(t) = s(t) + n(t).$$

Здесь  $z(t)$  — результат нелинейного преобразования помехи  $n(t)$  и полезного сигнала  $s(t)$ , относительно которых примем те же предположения, что и выше. Формально эта задача отличается от рассмотренной лишь порядком расположения блоков  $K$  и  $H$ . Компенсирующее устройство будем искать в виде полинома Вольтерра  $y(t) = F_N[z(t)]$ . Таким образом, уравнение системы в целом имеет вид

$$\begin{aligned} y(t) &= F_N[G_N[x(t)]] = \\ &= \sum_{n=1}^N \int_{E_+^n} k_n(t - \tau_1, t - \tau_2, \dots, t - \tau_n) \prod_{i=1}^n G_N[x(\tau_i)] dv_{\tau}. \end{aligned} \quad (4.4.18)$$

Подставляя это выражение в уравнение (4.1.4) вместо

$F(x)$  и полагая  $\Phi(s) = I(s)$ , получим

$$\sum_{m=1}^N \int_{E_{\mp}^m} k_m(\xi_1, \dots, \xi_m) \overline{G_N[x(t-\tau_1)] \dots G_N[x(t-\tau_n)]} \times \\ \times \overline{G_N[x(t-\xi_1)] \dots G_N[x(t-\xi_m)]} \prod_{i=1}^m dv_{\xi_i} = \\ = \overline{s(t) G_N[x(t-\tau_1)] \dots G_N[x(t-\tau_n)]}, \quad n=1, \dots, N. \quad (4.4.19)$$

Эти уравнения имеют такой же вид, как и уравнения оптимального фильтра (4.3.1). Моменты нелинейного преобразования случайного процесса  $x(\tau)$  могут быть вычислены по заданным статистическим характеристикам процессов  $s(t)$ ,  $n(t)$  с использованием формул, полученных в § 6 гл. II. Таким образом, задача сводится к задаче оптимальной нелинейной фильтрации.

Вернемся к задаче нелинейной компенсации системы, имеющей структурную схему рис. 4.4.1. Эту задачу можно обобщить, потребовав, чтобы система осуществляла заданное преобразование  $\Phi(s(t))$  полезного сигнала  $s(t)$ . Критерий оптимизации в этом случае можно записать в виде

$$\mathbf{M}\{(\Phi[s(t)] - G_N[F_N[x(t)]])^2\} = \min.$$

Ядра оптимального фильтра  $g_n^0(\tau_1, \dots, \tau_n)$ ,  $n=1, \dots, N$ , в этом случае находятся из системы уравнений (4.1.8). Затем решается система интегральных уравнений (4.4.15), в которой полагают  $g_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = g_n^0(\tau_1, \dots, \tau_n)$ .

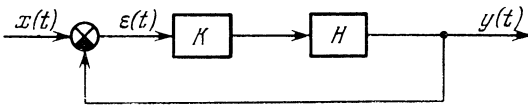


Рис. 4.4.3.

Таким образом, обобщенная постановка задачи сводится к рассмотренной.

Остановимся теперь на задаче последовательной компенсации в нелинейной системе с обратной связью (рис. 4.4.3). Здесь  $H$  — неизменяемая часть системы,

$K$  — компенсирующее устройство, подлежащее определению. Обозначим  $g_m^0(\xi_1, \dots, \xi_m)$ ,  $m=1, \dots, N$ , ядра полинома Вольтерра, описывающего желаемое преобразование сигнала  $x(t)$  замкнутой системой  $y=F_N[x(t)]$ . Запишем теперь уравнения, связывающие ядра  $k_n$  полинома Вольтерра, описывающего разомкнутую систему:

$$K[\varepsilon] = \sum_{n=1}^N \int_{E_+^n} k_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n) \varepsilon(\tau_1) \dots \varepsilon(\tau_n) d\nu_{\tau},$$

$$\varepsilon(t) = x(t) - y(t),$$

и ядра  $h_n$  соответствующего ряда для замкнутой системы:

$$H[x] = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_+^n} h_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n) x(\tau_1) \dots x(\tau_n) d\nu_{\tau}.$$

Подставляя  $y=H[x]$  в уравнение системы

$$K[x-y]=y,$$

получим

$$K[x-H[x]]=H[x].$$

Приравнявая члены, соответствующие одинаковым степеням функциональных рядов, стоящих в левой и правой частях этого равенства, найдем систему интегральных уравнений, связывающих ядра  $k_n$  и  $h_n$ ,  $n=1, 2, \dots, N$ :

$$k_1(\tau) = h_1(\tau) + \int_0^{\infty} h_1(\xi) k_1(\tau - \xi) d\xi,$$

$$k_2(\tau_1, \tau_2) = h_2(\tau_1, \tau_2) + \int_0^{\infty} h_1(\xi) k_2(\tau_1 - \xi, \tau_2 - \xi) d\xi +$$

$$+ \int_0^{\infty} h_2(\tau_1, \xi) k_1(\tau_2 - \xi) d\xi + \int_0^{\infty} h_2(\xi, \tau_2) k_1(\tau_1 - \xi) d\xi +$$

$$+ \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_2(\xi_1, \xi_2) k_1(\tau_1 - \xi_1) k_1(\tau_2 - \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \dots \quad (4.4.20)$$

Задачу об определении ядер  $k_n$  разомкнутой системы по известным ядрам замкнутой системы  $h_n$  можно решать для уравнений (4.4.20) последовательно, начиная с первого уравнения. Поскольку система имеет треугольный вид, на каждом этапе требуется решить интегральное уравнение, содержащее только одну неизвестную функцию. Такая задача является корректно поставленной, так как она сводится к решению интегральных уравнений второго рода. Если в системе уравнений (4.4.20) положить

$$h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \equiv g_n^0(\tau_1, \dots, \tau_n), \quad n = 1, \dots, N,$$

т. е. выбрать в качестве ядер замкнутой системы ядра оптимального преобразования, то из первых  $N$  уравнений системы (4.4.20) можно определить ядра разомкнутой системы  $k_n^0(\tau_1, \dots, \tau_n)$ ,  $n = 1, \dots, N$ , приближенно реализующие оптимальное преобразование сигнала  $x(t)$  замкнутой системой. Таким образом, задача свелась к синтезу корректирующего устройства, обеспечивающего наилучшую аппроксимацию желаемого преобразования в разомкнутой полиномиальной системе (рис. 4.4.1). Эта задача рассмотрена выше. Она сводится к решению интегральных уравнений (4.4.16) относительно ядер корректирующего устройства. Процедура синтеза должна быть дополнена проверкой устойчивости замкнутой системы с выбранным компенсатором. Для этого используются методы, изложенные в § 4 гл. I.

Итак, установлено, что различные постановки задачи синтеза нелинейной системы приводят к системе интегральных уравнений вида (4.4.16). Рассмотрим некоторые методы решения этой системы. Относительно функций  $g_n^0(\tau_1, \dots, \tau_n)$ ,  $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ ,  $n = 1, \dots, N$ , определяющих соответственно ядра желаемого преобразования сигнала и ядра неизменяемой части, будем предполагать выполненными условия устойчивости в  $L_2(E_+^n)$  и причинности. Кроме того, предположим, что функции  $f_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$  интегрируемы с квадратом, т. е.  $f_n \in L_2(E_+^n)$ . Для краткости обозначим  $L_2(E_+^n) = L_2^n$ . Решение задачи — ядра  $k_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ ,  $n = 1, \dots, N$ , оптимального компенсатора — будем искать в классе функций, удовлетворя-

ющих условие причинности и интегрируемых с квадратом

Задача о решении уравнений (4.4.16) поставлена в общем случае некорректно. Рассмотрим применение для ее решения метода регуляризации. Начнем с первого уравнения системы

$$\int_0^{\infty} h_1(\eta) k_1(\tau - \eta) d\eta = f_1(\tau), \quad \tau \in [0, \infty). \quad (4.4.21)$$

Введем сглаживающий функционал (4.2.3)

$$M^\alpha \{k_1(\tau)\} = \left\| \int_0^{\infty} h_1(\eta) k_1(\tau - \eta) d\eta - f_1(\tau) \right\|_{L_2}^2 + \alpha \|k_1(\tau)\|_{L_2}^2. \quad (4.4.22)$$

Приравнявая к нулю вариацию этого функционала относительно  $k_1(\tau)$ ,  $\tau \in [0, \infty)$ , получим следующее уравнение:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(\tau) k_1(t - \tau) d\tau + \alpha k_1(t) = g(t), \quad (4.4.23)$$

где

$$H(\tau) = \int_{\max[0, -\tau]}^{\infty} h_1(\xi) h_1(\tau + \xi) d\xi, \quad \tau \in (-\infty, \infty),$$

$$g(t) = \int_0^{\infty} f_1(t + \eta) h_1(\eta) d\eta.$$

Для решения уравнения (4.4.23) можно использовать преобразование Фурье. Обозначая через  $K_1(j\omega)$ ,  $H_1(j\omega)$ ,  $F_1(j\omega)$  изображения по Фурье функций  $k_1(t)$ ,  $h_1(t)$  и  $f_1(t)$  соответственно, запишем уравнение относительно изображений, следующее из (4.4.23):

$$|H_1(j\omega)|^2 K_1(j\omega) + \alpha K_1(j\omega) = F_1(j\omega) H_1(-j\omega).$$

Отсюда получим

$$K_1(j\omega) = \frac{F_1(j\omega) H_1(-j\omega)}{|H_1(j\omega)|^2 + \alpha} = F_1(j\omega) R_\alpha(j\omega), \quad (4.4.24)$$

где  $R_\alpha(j\omega) = \frac{H_1(-j\omega)}{|H_1(j\omega)|^2 + \alpha}$ .



Решение  $k_1(t) = k_{1\alpha}(t)$  уравнения (4.4.23), удовлетворяющее условию  $k_{1\alpha}(t) \equiv 0$  при  $t < 0$ , т. е. условию причинности, может быть найдено методом факторизации [69]. Соответствующее этому решению изображение по Фурье определяется формулой

$$K_{1\alpha}(j\omega) = \frac{1}{2\pi\Psi(j\omega)} \times \\ \times \int_0^{\infty} \exp(-j\omega t) dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_1(j\omega) H_1(-j\omega)}{\Psi(-j\omega)} \exp(j\omega t) d\omega, \quad (4.4.25)$$

где  $|\Psi(j\omega)|^2 = |H_1(j\omega)|^2 + \alpha$ , причем все нули и полюсы функции  $\Psi(j\omega)$  расположены в верхней полуплоскости, а нули и полюсы функции  $\Psi(-j\omega)$  — в нижней. Функцию

$$\beta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_1(j\omega) H_1(-j\omega)}{\Psi(-j\omega)} \exp(j\omega t) d\omega, \quad t \geq 0,$$

можно найти с помощью теоремы о вычетах [27], суммируя только те вычеты, которые соответствуют полюсам  $\omega_v$  подынтегральной функции  $\left[ \frac{F_1(j\omega) H_1(-j\omega)}{\Psi(-j\omega)} \right]$ , расположенным в верхней полуплоскости:

$$\beta(t) = \sum_{v=1}^k \operatorname{Res} \left[ \frac{F_1(j\omega) H_1(-j\omega)}{\Psi(-j\omega)} \exp(j\omega t) \right]_{\omega=\omega_v}.$$

Определив  $\beta(t)$ , найдем

$$K_{1\alpha}(j\omega) = \frac{1}{\Psi(j\omega)} \int_0^{\infty} \exp(-j\omega t) \beta(t) dt.$$

Формулу (4.4.25) удобно записывать в виде

$$K_{1\alpha}(j\omega) = \frac{1}{\Psi(-j\omega)} \left[ \frac{F_1(j\omega) H_1(-j\omega)}{\Psi(-j\omega)} \right]_+.$$

Знак  $[\cdot]_+$  означает, что в разложении на простейшие дроби выражения, стоящего в квадратных скобках, надо отбросить целую часть разложения и слагаемые, соответствующие полюсам в нижней полуплоскости.

Регуляризация остальных уравнений системы (4.4.16) может быть выполнена аналогично. Обозначая через  $\tilde{f}_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$  правые части уравнений (4.4.16), определяемые по формулам (4.4.17), при подстановке в них приближенных решений  $k_{m\alpha}(t_1, \dots, t_m)$ ,  $m \leq n-1$ , и вводя векторные обозначения  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ ;  $\tau - \eta = (\tau_1 - \eta, \tau_2 - \eta, \dots, \tau_n - \eta)$ ,  $0 \leq \tau_i < \infty$ ,  $i = 1, \dots, n$ , запишем эти уравнения в виде

$$\int_0^{\infty} h_1(\eta) k_n(\tau - \eta) d\eta = \tilde{f}_n(\tau), \quad n = 2, \dots, N. \quad (4.4.26)$$

Введем сглаживающий функционал

$$M^\alpha \{k_n(\tau)\} = \left\| \int_0^{\infty} h_1(\eta) k_n(\tau - \eta) d\eta - \tilde{f}_n(\tau) \right\|_{L_2^n}^2 + \alpha \|k_n(\tau)\|_{L_2^n}^2. \quad (4.4.27)$$

Необходимое условие минимума этого функционала приводит к уравнению, аналогичному (4.4.23):

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(\tau) k_n(t - \tau) d\tau + \alpha k_n(t) = \tilde{g}_n(t), \quad (4.4.28)$$

где

$$\tilde{g}_n(t) = \int_0^{\infty} \tilde{f}_n(t + \eta) h_1(\eta) d\eta, \quad (4.4.29)$$

$$t = (t_1, \dots, t_n), \quad 0 \leq t_i < \infty, \quad i = 1, \dots, n.$$

Последовательно решая уравнения (4.4.28) при  $n = 2, 3, \dots, N$ , получим регуляризованное семейство решений  $k_{n\alpha}(t)$  для каждого из уравнений (4.4.26). Покажем, что эти решения образуют регуляризованное семейство решений и для исходной системы уравнений (4.4.16), т. е. выполняются предельные соотношения (см. § 2)

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\| f_n(t) - \int_0^{\infty} h_1(\eta) k_{n\alpha}(t - \eta) d\eta \right\|_{L_2^n} = 0, \quad (4.4.30)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|k_{n\alpha}(t) - k_n(t)\|_{L_2^n} = 0, \quad (4.4.31)$$

где  $k_n(t)$ ,  $n=1, \dots, N$ , — точное решение задачи. При  $n=1$  эти предельные соотношения выполняются, так как  $k_{1\alpha}(t)$  — регуляризованное семейство решений для уравнения (4.4.21). Предположим, что они выполняются при  $n=2, 3, \dots, m-1$ ; покажем, что они выполняются тогда и при  $n=m$ . Рассмотрим оценку

$$\left\| f_m(t) - \int_0^{\infty} h_1(\eta) k_{m\alpha}(t-\eta) d\eta \right\|_{L_2^m} \leq \left\| \tilde{f}_m(t) - \int_0^{\infty} h_1(\eta) k_{m\alpha}(t-\eta) d\eta \right\|_{L_2^m} + \|f_m(t) - \tilde{f}_m(t)\|_{L_2^m}. \quad (4.4.32)$$

Первое из слагаемых в правой части стремится к нулю, поскольку  $k_{m\alpha}(t)$  — регуляризованное семейство решений уравнения (4.4.26) при  $n=m$ . Поскольку  $\tilde{f}_m$ , рассматриваемая как функция от переменных  $k_{n\alpha}(t)$ ,  $n=1, 2, \dots, m-1$ , непрерывна в метрике пространства  $L_2^m$ , то из соотношения (4.4.31), выполняющегося при  $n=1, 2, \dots, m-1$ , следует, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|f_m(t) - \tilde{f}_m(t)\|_{L_2^m} = 0. \quad (4.4.33)$$

Таким образом, и второе слагаемое в правой части неравенства (4.4.32) стремится к нулю. Следовательно, предельное соотношение (4.4.30) выполняется.

Правая часть уравнения (4.4.26) при  $n > 1$  задается приближенно, причем погрешность приближения

$$\delta_n = \|\tilde{f}_n(t) - f(t)\|_{L_2^n}$$

зависит от параметра регуляризации  $\alpha$ . Для того чтобы решение  $k_{n\alpha}$  уравнения (4.4.28) ( $n=m$ ) сходилось при этом к точному решению уравнения

$$\int_0^{\infty} h(\eta) k_m(\tau - \eta) d\eta = f_m(\tau) \quad (4.4.34)$$

по норме пространства  $L_2$ , надо потребовать (см. § 2), чтобы соблюдалось условие

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\delta_m}{\alpha} = 0, \quad m \geq 2. \quad (4.4.35)$$

При  $m=1$  обозначим

$$\left\| \int_0^\infty h_1(\eta) [k_{1\alpha}(\tau - \eta) - k_1(\tau - \eta)] d\eta \right\|_{L_2} = \delta_1$$

Независимо от конкретного вида функций  $h_1(\eta)$  имеем

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\delta_1}{\alpha} = 0.$$

Оценим теперь погрешность  $\delta_2$ :

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \|\tilde{f}_2(\tau) - f_2(\tau)\|_{L_2} \leq \\ &\leq \|f'_2(\tau)(k_{1\alpha}(\tau) - k_1(\tau))\|_{L_2} + o(\|k_{1\alpha}(\tau) - k_1(\tau)\|_{L_2}) = \\ &= \left\| \int_0^\infty \int_0^\infty h_2(\eta_1, \eta) k_1(\tau_1 - \eta_1) (k_{1\alpha}(\tau - \eta) - k_1(\tau - \eta)) \times \right. \\ &\quad \left. \times d\eta_1 d\eta \right\|_{L_2} + o(\|k_{1\alpha}(\tau) - k_1(\tau)\|_{L_2}) = \\ &= \left\| \int_0^\infty \tilde{h}_2(\eta) (k_{1\alpha}(\tau - \eta) - k_1(\tau - \eta)) d\eta \right\|_{L_2} + \\ &\quad + o(\|k_{1\alpha}(\tau) - k_1(\tau)\|_{L_2}), \end{aligned}$$

где

$$\tilde{h}_2(\eta) = \left[ \int_0^\infty \left[ \int_0^\infty h_2(\eta_1, \eta) k_1(\tau_1 - \eta_1) d\eta_1 \right]^2 d\tau_1 \right]^{1/2}.$$

Следовательно, при  $\alpha \rightarrow 0$

$$\delta_2 = O(\delta_1)$$

и требуемое предельное соотношение соблюдается при  $m=2$ , т. е.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\delta_2}{\alpha} = 0.$$

Полагая теперь

$$\|k_{n\alpha}(\tau) - k_n(\tau)\|_{L_2} = O(\delta_1)$$

при  $n=1, 2, \dots, m-1$  и проводя аналогичные оценки, можно получить, что  $\delta_m = O(\delta_1)$ , т. е. условие (4.4.35)

соблюдается. Итак,  $k_{n\alpha}(t)$  — регуляризованное семейство приближенных решений системы уравнений (4.4.34), сходящееся к точному решению в пространстве  $L_2^n = L_2(E_+^n)$ .

Рассмотрим теперь некоторые способы решения системы регуляризованных интегральных уравнений (4.4.28). Вначале используем многомерное преобразование Фурье, применяя которое к обеим частям уравнения (4.4.28), получим

$$\begin{aligned} |H_1(j(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n))|^2 K_n(j\omega_1, j\omega_2, \dots, j\omega_n) + \\ + \alpha K_n(j\omega_1, j\omega_2, \dots, j\omega_n) = H_1(-j(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n)) \times \\ \times \tilde{F}_n(j\omega_1, j\omega_2, \dots, j\omega_n), \quad (4.4.36) \end{aligned}$$

где  $K_n(j\omega_1, j\omega_2, \dots, j\omega_n)$ ,  $\tilde{F}_n(j\omega_1, j\omega_2, \dots, j\omega_n)$  — изображения по Фурье функций  $k_n(t)$  и  $\tilde{f}_n(t)$  соответственно. Из уравнения (4.4.36) найдем

$$\begin{aligned} K_n(j\omega_1, j\omega_2, \dots, j\omega_n) = \\ = \frac{\tilde{F}_n(j\omega_1, j\omega_2, \dots, j\omega_n) H_1(-j(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n))}{|H_1(j(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n))|^2 + \alpha} = \\ = \tilde{F}_n(j\omega_1, j\omega_2, \dots, j\omega_n) R_\alpha(j(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n)). \quad (4.4.37) \end{aligned}$$

Таким образом, изображение по Фурье искомого решения определяется функцией  $R_\alpha(j\omega)$ , найденной при решении первого уравнения системы (4.4.16) методом регуляризации. Оригинал  $k_{n\alpha}(t)$ , удовлетворяющий условию причинности, может быть найден с использованием многомерной факторизации [119]. Такой способ, однако, является весьма трудоемким; в рассматриваемой задаче он может быть существенно упрощен.

В соответствии с методом регуляризации для заданного класса функций  $f_1(t)$  существует непрерывный в  $L_2$  оператор  $A_\alpha^{-1}$  такой, что

$$k_{1\alpha}(t) = A_\alpha^{-1} f_1(t)$$

и

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|A A_\alpha^{-1} f_1 - f_1\|_{L_2} = 0, \quad (4.4.38)$$

где  $A$  — оператор, определяемый левой частью уравнения (4.4.21). Этот линейный оператор можно

представить в виде

$$k_{1\alpha}(t) = \int_0^{\infty} f_1(t - \tau) \tilde{r}_\alpha(\tau) d\tau,$$

где функция  $\tilde{r}_\alpha(\tau) \in L_2$  и удовлетворяет условию причинности. Изображение по Фурье функции  $\tilde{r}_\alpha(\tau)$  таково:

$$\tilde{R}_\alpha(j\omega) = \frac{K_{1\alpha}(j\omega)}{F_1(j\omega)} = \frac{1}{\Psi(j\omega) F_1(j\omega)} \left[ \frac{F_1(j\omega) H_1(-j\omega)}{\Psi(-j\omega)} \right]_+.$$

Если условие причинности не принимать во внимание, то  $\tilde{R}_\alpha(j\omega) = R_\alpha(j\omega)$  и функция  $r_\alpha(t) = \mathcal{F}^{-1}\{R_\alpha(j\omega)\}$  совпадает с  $\tilde{r}_\alpha(t)$  при  $t \geq 0$ . Формулу (4.4.37) можно переписать следующим образом в области оригиналов:

$$k_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_n(t - \tau) r_\alpha(\tau) d\tau.$$

Полагая в этой формуле  $r_\alpha(\tau) = \tilde{r}_\alpha(\tau)$ , получим функцию  $k_{n\alpha}(t)$ , удовлетворяющую условию причинности:

$$k_{n\alpha}(t) = \int_0^{\infty} \tilde{f}_n(t - \tau) \tilde{r}_\alpha(\tau) d\tau. \quad (4.4.39)$$

Заметим теперь, что условие (4.4.38) следует из (4.4.30) и имеет в данном случае следующий вид:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\| f_1(t) - \int_0^{\infty} f_1(t - \xi) \kappa_\alpha(\xi) d\xi \right\|_{L_2} = 0,$$

где  $\kappa_\alpha(\xi) = \int_0^{\infty} h_1(\eta) \tilde{r}_\alpha(\xi - \eta) d\eta$ , т. е. оператор

$$AA_\alpha^{-1}f_1 = \int_0^{\infty} f_1(t - \xi) \kappa_\alpha(\xi) d\xi$$

при  $\alpha \rightarrow 0$  сходится к оператору тождественного преобразования в  $L_2$  (ядро  $\kappa_\alpha(\xi)$  этого оператора слабо сходится в  $L_2(E_+^1)$  к  $\delta$ -функции  $\delta(\xi)$ ). Отсюда следует также, что при  $\alpha \rightarrow 0$  будет выполняться предельное

соотношение

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\| \tilde{f}_n(t) - \int_0^{\infty} h_1(\eta) k_{n\alpha}(t - \eta) d\eta \right\|_{L_2^n} &= \\ = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\| \tilde{f}_n(t) - \int_0^{\infty} \kappa_{\alpha}(\xi) \tilde{f}_n(t - \xi) d\xi \right\|_{L_2^n} &= 0, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

С учетом этого соотношения можно аналогично предыдущему показать, что  $k_{n\alpha}(t)$  — регуляризованное семейство решений системы интегральных уравнений (4.4.16).

Итак, выполнив регуляризацию первого уравнения системы (4.4.16) и определив функцию  $\tilde{f}_{\alpha}(\tau)$ , удовлетворяющую условию причинности, можно построить регуляризованное семейство приближенных решений для остальных уравнений этой системы по формуле (4.4.39). Применяя преобразование Фурье к уравнению (4.4.39), найдем изображение по Фурье нелинейного компенсатора, удовлетворяющего условию причинности:

$$K_{n\alpha}(j\omega_1, \dots, j\omega_n) = \tilde{F}_n(j\omega_1, \dots, j\omega_n) \tilde{R}_{\alpha} \left( j \sum_{i=1}^n \omega_i \right). \quad (4.4.40)$$

Эта формула часто дает возможность определить структуру оптимального компенсатора (см. пример, рассмотренный ниже).

Прежде чем использовать формулу (4.4.40), необходимо проверить, являются ли в действительности эти уравнения при  $n \geq 2$  некорректными. Во многих случаях, благодаря особенностям постановки задачи, упомянутые уравнения корректны. Тогда достаточно регуляризовать первое уравнение, определить  $\tilde{f}_2$  и далее решать непосредственно уравнения (4.4.16). При использовании преобразования Фурье получим следующее выражение для изображения искомых ядер компенсатора  $k_n(\bar{t})$ ,  $n = 2, 3, \dots, N$ :

$$K_n(j\omega_1, \dots, j\omega_n) = \frac{\tilde{F}_n(j\omega_1, \dots, j\omega_n)}{H_1 \left( j \sum_{k=1}^n \omega_k \right)}. \quad (4.4.41)$$

Рассмотрим пример решения задачи нелинейной компенсации. Пусть требуется найти оптимальный компенсатор.

сатор для нелинейной системы (рис. 4.4.1), неизменяемая часть которой описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 3y + y^2 = z.$$

Желаемое преобразование сигнала описывается полиномом Вольтерра второго порядка с ядрами:

$$g_1^0(\tau) = 0,1 \exp(-0,1\tau);$$

$$g_2^0(\tau_1, \tau_2) = 0,01 \exp[-0,1(\tau_1 + \tau_2)].$$

Вначале найдем изображения по Фурье ядер  $h_1(\tau)$ ,  $h_2(\tau_1, \tau_2)$  полинома Вольтерра (4.4.10) второго порядка, описывающего неизменяемую часть системы:

$$H_1(j\omega) = \frac{1}{D(j\omega)},$$

$$H_2(j\omega_1, j\omega_2) = -\frac{1}{D(j\omega_1)D(j\omega_2)D(j(\omega_1 + \omega_2))},$$

$$D(j\omega) = (j\omega)^2 + 4j\omega + 3.$$

Теперь определим изображение по Фурье ядра первого порядка компенсатора  $k_{1\alpha}(t)$  методом регуляризации. Положим  $\alpha = 0,001$ . В соответствии с использованными выше обозначениями

$$|\Psi(j\omega)|^2 = \frac{0,001(\omega^4 + 10\omega^2 + 1009)}{(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 9)},$$

$$\Psi(-j\omega) = \frac{0,001(j\omega - 0,964j - 5,6)(j\omega + 0,964j - 5,6)}{(j\omega - 1)(j\omega - 3)},$$

$$\left[ \frac{G_1(j\omega)H_1(-j\omega)}{\Psi(-j\omega)} \right]_+ =$$

$$= \left[ \frac{100}{(j\omega + 0,1)(j\omega - 0,964j - 5,6)(j\omega + 0,964j - 5,6)} \right]_+ = \frac{2,99}{j\omega + 0,1};$$

$$K_{1\alpha}(j\omega) = \frac{2,99(j\omega + 1)(j\omega + 3)}{(j\omega + 0,1)((j\omega)^2 + 11,2j\omega + 32,4)}.$$

Эта формула определяет физически реализуемое ядро первого порядка искомого компенсатора.



Заметим, что это выражение можно представить в виде

$$K_{1\alpha}(j\omega) = \frac{G_1(j\omega)}{H_1(j\omega)} \frac{0,92}{0,031(j\omega)^2 + 0,35j\omega + 1},$$

$$G_1(j\omega) = \frac{0,1}{0,1 + j\omega},$$

т. е. регуляризация приводит к появлению в передаточной функции компенсатора колебательного звена, коэффициент усиления которого при  $\alpha \rightarrow 0$  стремится к единице, а постоянная времени — к нулю. Поскольку можно также записать, что

$$K_{1\alpha}(j\omega) = G_1(j\omega) \frac{29,9(j\omega + 1)(j\omega + 3)!}{((j\omega)^2 + 11,2j\omega + 32,4)},$$

то

$$\tilde{R}_\alpha(j\omega) = \frac{29,9(j\omega + 1)(j\omega + 3)}{((j\omega)^2 + 11,2j\omega + 32,4)}.$$

Перейдем к решению второго уравнения системы (4.4.16). В данном случае можно воспользоваться формулой (4.4.40). Предварительно определим  $F_2(j\omega_1, j\omega_2)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{F}_2(j\omega_1, j\omega_2) &= \\ &= G_2(j\omega_1, j\omega_2) - H_2(j\omega_1, j\omega_2) K_{1\alpha}(j\omega_1) K_{1\alpha}(j\omega_2) = \\ &= G_1(j\omega_1) G_1(j\omega_2) + \frac{K_{1\alpha}(j\omega_1) K_{1\alpha}(j\omega_2)}{D(j\omega_1) D(j\omega_2) D(j(\omega_1 + \omega_2))}. \end{aligned}$$

По формуле (4.4.40) получим

$$\begin{aligned} K_{2\alpha}(j\omega_1, j\omega_2) &= \\ &= \frac{0,299(j(\omega_1 + \omega_2) + 1)(j(\omega_1 + \omega_2) + 3)}{(j(\omega_1 + \omega_2)^2 + 11,2j(\omega_1 + \omega_2) + 32,4)(0,1 + j\omega_1)(0,1 + j\omega_2)} + \\ &+ \frac{8100}{(j\omega_1 + 0,1)(j\omega_2 + 0,1)((j(\omega_1 + \omega_2))^2 + 11,2j(\omega_1 + \omega_2) + 32,4)} \times \\ &\times \frac{1}{((j\omega_1)^2 + 11,2j\omega_1 + 32,4)((j\omega_2)^2 + 11,2j\omega_2 + 32,4)}. \end{aligned}$$

Эта формула определяет физически реализуемое ядро второго порядка. Схема найденного нелинейного компенсатора показана на рис. 4.4.4, где,  $W_1(s) = 0,1/(s+0,1)$ ;  $W_2(s) = 29,9/(s^2 + 11,2s + 32,4)$ ;  $W(s) = W_1(s) W_2(s)$ .

Рассмотрим частную постановку задачи, когда желаемое преобразование сигнала  $x(t)$  системой является линейным и определяется весовой функцией  $g_1^0(t)$ . В этом случае второе уравнение оказывается корректным, так

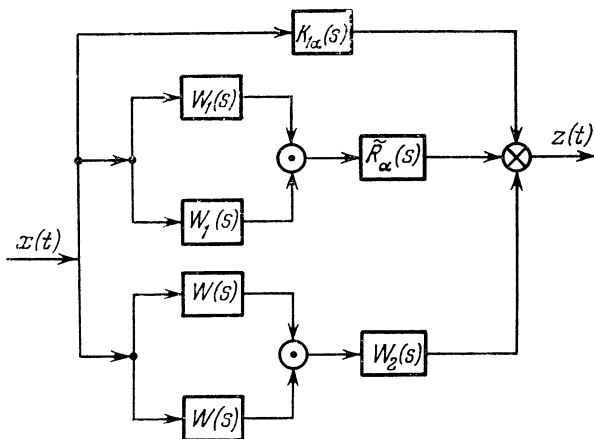


Рис. 4.4.4.

что решение его можно получить по формуле (4.4.41).  
Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{F}_2(j\omega_1, j\omega_2) &= -H_2(j\omega_1, j\omega_2) K_{1\alpha}(j\omega_2) K_{1\alpha}(j\omega_2) = \\ &= \frac{K_{1\alpha}(j\omega_1) K_{1\alpha}(j\omega_2)}{D(j\omega_1) D(j\omega_2) D(j(\omega_1 + \omega_2))}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{2\alpha}(j\omega_1, j\omega_2) &= \\ &= \frac{K_{1\alpha}(j\omega_1) K_{1\alpha}(j\omega_2)}{D(j\omega_1) D(j\omega_2)} = \frac{9}{(j\omega_1 + 0,1)(j\omega_2 + 0,1)} \times \\ &\times \frac{1}{((j\omega_1)^2 + 11,2j\omega_1 + 32,4)((j\omega_2)^2 + 11,2j\omega_2 + 32,4)}. \end{aligned}$$

Схема нелинейного компенсатора для этого случая изображена на рис. 4.4.5.

Как показано выше, задача синтеза замкнутой нелинейной системы сводится к задаче синтеза для разомкну-

той системы и может быть решена тем же способом. Однако при этом нужно иметь в виду, что выбор параметра регуляризации  $\alpha$  оказывает влияние и на устойчивость системы. При  $\alpha \rightarrow 0$  это влияние будет уменьшаться, однако возможности уменьшения параметра регуляризации в реальных системах всегда ограничены.

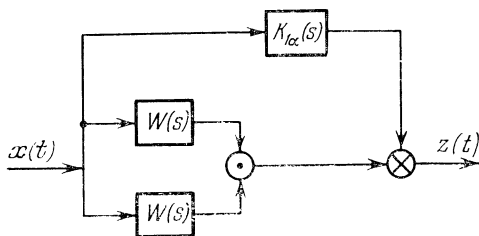


Рис. 4.4.5.

В заключение этого параграфа остановимся на особенностях применения численных методов для решения системы регуляризованных уравнений (4.4.28). Вначале рассмотрим первое уравнение ( $n=1$ ), т. е. уравнение (4.4.23). Полагая, что решение  $k_1(t)$  удовлетворяет условию причинности, можно записать:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(\tau) k_1(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t H(\tau) k_1(t - \tau) d\tau = \\ = \int_0^{\infty} H(t - \tau) k_1(\tau) d\tau.$$

Уравнение (4.4.23) можно переписать в форме

$$\int_0^{\infty} H(t - \tau) k_1(\tau) d\tau + \alpha k_1(t) = g(t), \quad (4.4.42)$$

более удобной для применения численных методов. Функция

$$H(t - \tau) = \int_{\max(t, \tau)}^{\infty} h(\eta - \tau) h(\eta - t) d\eta$$

является симметричной относительно переменных  $t, \tau$ , т. е.  $H(t-\tau) = H(\tau-t)$ . Таким образом, уравнение (4.4.42) является уравнением Фредгольма II рода с симметричным ядром. Заметим, что уравнение (4.4.21) являлось уравнением Вольтерра I рода. Ограничиваясь конечным интервалом  $t \in [0, T]$ , можно применять для уравнения

$$\int_0^T H(t-\tau) k_1(\tau) d\tau + \alpha k_1(t) = g(t), \quad t \in [0, T],$$

известные численные методы решения уравнений Фредгольма. Некоторые из этих методов упоминались в предыдущем параграфе. Используя, в частности, метод квадратурных формул, получим систему алгебраических уравнений

$$\sum_{i=0}^p a_i H(\tau_j - \tau_i) k_1(\tau_i) + \alpha k_1(\tau_j) = g(\tau_j), \quad j = 0, 1, \dots, p$$

где  $0 \leq \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_p \leq T$  — узлы квадратурной формулы;  $a_i$  — соответствующие коэффициенты. Решив эту систему и подставив значения  $k_1(\tau_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , в уравнение

$$k_1(t) = \frac{1}{\alpha} \left( g(t) - \sum_{i=0}^n a_i H(t - \tau_i) k_1(\tau_i) \right),$$

получим приближенное решение уравнения (4.4.23). Оценивая погрешность решения  $\delta$  по формуле

$$\delta = \left\| \int_0^\infty h_1(\eta) k_{1\alpha}(t - \eta) d\eta - f_1(t) \right\|_{L_2(E_+^1)},$$

можно подобрать значения параметров  $T, \alpha$ , соответствующие заданной точности. Решение остальных уравнений (4.4.28) теперь легко может быть получено. Полагая  $n=2$ , т. е. рассматривая второе из уравнений этой системы, можно с учетом условия причинности для

$k_2(t_1, t_2)$  записать:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(\tau) k_2(t_1 - \tau, t_2 - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\min(t_1, t_2)} H(\tau) k_2(t_1 - \tau, t_2 - \tau) d\tau = \int_{\max(0, t_1 - t_2)}^{\infty} H(t_1 - \tau) k_2(\tau, t_2 - t_1 + \tau) d\tau.$$

Таким образом, второе уравнение имеет следующий вид:

$$\int_{\max(0, t_1 - t_2)}^{\infty} H(t_1 - \tau) k_2(\tau, t_2 - t_1 + \tau) d\tau + \alpha k_2(t_1, t_2) = \tilde{g}_2(t_1, t_2).$$

Воспользовавшись прежней квадратурной формулой, получим для  $t_1, t_2 \in [0, T]$

$$\sum_{i=\max(0, j-k)}^n a_i H(\tau_j - \tau_i) k_2(\tau_i, \tau_k - \tau_j + \tau_i) + \alpha k_2(\tau_j, \tau_k) = \tilde{g}_2(\tau_j, \tau_k), \quad k, j = 0, 1, \dots, n.$$

Из этой системы, содержащей  $(n+1)^2$  алгебраических уравнений, можно определить значения  $k_2(\tau_i, \tau_j)$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, n$ . Выберем, в частности, равномерное расположение узлов:

$$\tau_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad h = \text{const}.$$

В этом случае систему уравнений

$$\sum_{i=\max(0, j-k)}^n a_i H((j-i)h) k_2(ih, (k-j+1)h) + \alpha k_2(jh, kh) = \tilde{g}_2(jh, kh), \quad j, k = 0, 1, \dots, n,$$

можно решить последовательно, используя трапецидальный вид подсистем, соответствующих значениям  $k = 0, 1, \dots, n$ , начиная с уравнения для  $k = 0, j = n$ :

$$a_n H(0) k_2(nh, 0) + \alpha k_2(nh, 0) = \tilde{g}_2(nh, 0),$$

из которого находится значение

$$k_2(nh, 0) = \frac{1}{a_n H(0) + \alpha} \tilde{g}_2(nh, 0).$$

Следует отметить, что такой путь решения системы интегральных уравнений является весьма трудоемким, поскольку число решаемых алгебраических уравнений быстро возрастает с ростом размерности ядра  $k_n$ . Рассмотрим другой подход, позволяющий решить лишь одно интегральное уравнение, после чего могут быть последовательно вычислены все приближенные решения  $k_{n\alpha}$ .

Предположим, что семейство решений  $k_{1\alpha}(t)$  уравнения (4.4.23) (без учета условия причинности) может быть выражено следующей формулой:

$$k_{1\alpha}(t) = \int_0^{\infty} \tilde{f}_1(t + \tau) \varphi_{\alpha}(\tau) d\tau, \quad (4.4.43)$$

где  $\varphi_{\alpha}(\tau) \in L_2(E^1)$ . Подставляя  $k_{1\alpha}(t)$  в уравнение (4.4.23), будем иметь:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_1(t + \xi) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} H(\tau) \varphi_{\alpha}(\xi + \tau) d\tau + \alpha \varphi_{\alpha}(\xi) - h_1(\xi) \right] d\xi \equiv 0.$$

Поскольку это соотношение выполняется для любых функций  $\tilde{f}_1$ , принадлежащих рассматриваемому классу, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(\tau) \varphi_{\alpha}(\xi + \tau) d\tau + \alpha \varphi_{\alpha}(\xi) = h_1(\xi); \quad (4.4.44)$$

полученное уравнение определяет функцию  $\varphi_{\alpha}(\xi)$ . Семейство  $k_{n\alpha}(t)$  решений остальных уравнений системы (4.4.28) при  $n \geq 2$  может быть представлено в виде

$$k_{n\alpha}(t) = \int_0^{\infty} \tilde{f}_n(t + \tau) \varphi_{\alpha}(\tau) d\tau, \quad n = 2, 3, \dots \quad (4.4.45)$$

Действительно, подставляя это выражение в уравнение

(4.4.28), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t + \xi) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\alpha(\xi + \tau) H(\tau) d\tau + \alpha \varphi_\alpha(\xi) - h_1(\xi) \right] d\xi \equiv \equiv 0.$$

Итак, для получения решений  $k_{n\alpha}(t)$  необходимо предварительно решить уравнение Фредгольма II рода (4.4.44). В частности, для этого можно использовать рассмотренный метод квадратурных формул. Далее используется формула (4.4.45), в которой надо положить  $t_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Заметим, что преобразование Фурье  $\Phi_\alpha(j\omega)$  функции  $\varphi_\alpha(\tau)$ , найденное из уравнения (4.4.44), равно

$$\Phi_\alpha(j\omega) = \frac{H_1(j\omega)}{|H_1(j\omega)|^2 + \alpha}.$$

Преобразуя по Фурье равенство (4.4.45), получим

$$K_{n\alpha}(j\omega_1, \dots, j\omega_n) = \frac{\tilde{F}_n(j\omega_1, \dots, j\omega_n) H_1\left(-j \sum_{i=1}^n \omega_i\right)}{\left|H_1\left(j \sum_{i=1}^n \omega_i\right)\right|^2 + \alpha},$$

что совпадает с выражением (4.4.37) для изображения по Фурье ядра компенсатора  $n$ -го порядка, полученным выше. При этом

$$R_\alpha(j\omega) = \Phi_\alpha(-j\omega),$$

и, таким образом, оба подхода дают один и тот же результат.

В этой главе рассматриваются методы анализа нелинейных систем, основанные на аппроксимации функционалов с помощью ортогональных рядов. Основы этих методов были заложены в работах Н. Винера. Изложение опирается на материал § 3 гл. I, в котором введено пространство  $L_2(X)$  функционалов  $f(x)$ , интегрируемых с квадратом по мере в функциональном пространстве  $X$ . Пространство  $L_2(X)$  содержит полную ортогональную и нормированную систему функционалов  $E_n(x)$ ,  $n=1, 2, \dots$ . Следовательно, любой функционал  $f(x) \in L_2(X)$  можно представить в виде ряда, составленного из элементов ортонормированной системы  $\{E_n(x)\}$ . Полученный ряд является аналогом ряда Фурье. В этом и состоит теоретическая предпосылка рассматриваемых методов. Практическая их реализация предусматривает построение ортогональной системы  $\{E_n(x)\}$ , что может быть выполнено различными способами. Один из них заключается в использовании систем ортогональных многочленов в пространстве функций многих переменных, другой — в ортогонализации системы линейно-независимых функций в  $L_2(X)$ . Эти два способа и рассматриваются ниже.

### § 1. Ряды Фурье—Эрмита

В данном параграфе рассматриваются вопросы аппроксимации функционалов  $f(x) \in L_2(X)$  ортогональными многочленами. В отличие от следующего параграфа, здесь применяются обычные ортогональные многочлены в евклидовом пространстве  $E^n$ . Функционалы  $f(x)$  могут характеризовать некоторый реальный объект, например, систему управления. Если модель объекта непрерывна, то в качестве пространства  $X$  нужно рассматривать про-



пространство действительных функций. Если модель дискретна, то  $X$  — это пространство последовательностей. Последний случай является наиболее простым, поэтому начнем рассмотрение вопросов аппроксимации функционалов именно с этого случая. Далее будет показано, каким образом полученные результаты можно применить для аппроксимации функционалов, заданных в пространстве непрерывных функций.

Рассмотрим пространство функционалов, интегрируемых с квадратом по мере Гаусса, т. е. пространство  $L_2(\Omega)$  (см. § 3 гл. I). Построим ортонормированную систему функций

$$\tilde{E}_n(z) \in L_2(\Omega), \quad n = 1, 2, \dots,$$

для которых

$$\int_{\Omega} \tilde{E}_n(z) \tilde{E}_m(z) d\mu = \delta_{n,m}, \quad (5.1.1)$$

где  $\mu$  — мера Гаусса,  $\delta_{n,m}$  — символ Кронекера.

Так же, как и при построении интеграла по мере Гаусса (§ 3 гл. I), в качестве функций  $\tilde{E}_n(z)$  будем выбирать цилиндрические функции, которые определены на всем пространстве  $\Omega$ , но зависят лишь от конечного числа координат вектора  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n, \dots)$ .

Воспользуемся системой многочленов Эрмита  $H_m(z)$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , ортогональных на действительной прямой, которые определяются формулой (см. § 1 гл. I)

$$H_m(z) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{2^m m!}} \exp(z^2) \frac{d^m}{dz^m} \exp(-z^2), \quad m = 0, 1, \dots$$

Первые три полинома Эрмита имеют следующий вид:

$$H_0(z) = 1, \quad H_1(z) = \sqrt{2}z, \quad H_2(z) = \sqrt{2}z^2 - 1/\sqrt{2}.$$

Заметим, что

$$\int_{E^1} H_m^2(z) \exp(-z^2) dz = \sqrt{\pi}.$$

Построим теперь систему многомерных полиномов Эрмита:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{E}_i(z) &= H_i(z), \quad i = 0, 1, 2, \dots; \\ \tilde{E}_{i_1 i_2}(z_1, z_2) &= H_{i_1}(z_1) H_{i_2}(z_2), \\ &\quad i_1, i_2 = 0, 1, 2, \dots; \\ \tilde{E}_{i_1 i_2 i_3}(z_1, z_2, z_3) &= H_{i_1}(z_1) H_{i_2}(z_2) H_{i_3}(z_3), \\ &\quad i_1, i_2, i_3 = 0, 1, 2, \dots; \\ \tilde{E}_{i_1 i_2 \dots i_n}(z_1, z_2, \dots, z_n) &= H_{i_1}(z_1) H_{i_2}(z_2) \dots H_{i_n}(z_n), \\ &\quad i_1, i_2, \dots, i_n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} (5.1.2)$$

Функции  $\tilde{E}_{i_1, \dots, i_n}(z) = \tilde{E}_{i_1, \dots, i_n}(z_1, \dots, z_n)$  образуют ортонормированную систему в пространстве  $L_2(\Omega)$ . Покажем это, полагая для определенности  $n \geq m$ :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \tilde{E}_{i_1, \dots, i_n}(z) \tilde{E}_{j_1, \dots, j_m}(z) d\mu = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} \int_{E^n} \tilde{E}_{i_1, \dots, i_n}(z_1, \dots, z_n) \times \\ & \times \tilde{E}_{j_1, \dots, j_m}(z_1, \dots, z_m) \exp\left(-\sum_{i=1}^n z_i^2\right) \prod_{i=1}^n dz_i = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} \int_{E^n} H_{i_1}(z_1) H_{i_2}(z_2) \dots H_{i_n}(z_n) H_{j_1}(z_1) \dots \\ & \dots H_{j_m}(z_m) \exp\left(-\sum_{i=1}^n z_i^2\right) \prod_{i=1}^n dz_i = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi^m}} \int_{E^m} H_{i_1}(z_1) H_{i_2}(z_2) \dots H_{i_m}(z_m) H_{j_1}(z_1) H_{j_2}(z_2) \dots \\ & \dots H_{j_m}(z_m) \exp\left(-\sum_{i=1}^m z_i^2\right) \prod_{i=1}^m dz_i \frac{1}{\sqrt{\pi^{n-m}}} \int_{E^{n-m}} H_{i_{m+1}}(z_{m+1}) \times \\ & \times H_{i_{m+2}}(z_{m+2}) \dots H_{i_n}(z_n) \exp\left(-\sum_{i=m+1}^n z_i^2\right) \prod_{i=m+1}^n dz_i. \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

Если  $n > m$ , то это выражение равно нулю. Действительно, учитывая, что  $H_0(z) = 1$ , получим

$$\frac{1}{\sqrt{\pi^{n-m}}} \int_{E^{n-m}} H_{i_{m+1}}(z_{m+1}) \dots H_{i_n}(z_n) \exp\left(-\sum_{i=m+1}^n z_i^2\right) \times \\ \times \prod_{i=m+1}^n dz_i = \prod_{j=m+1}^n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{E^1} H_{i_j}(z_j) H_0(z_j) \exp(-z_j^2) dz_j = 0,$$

если хотя бы один из индексов  $i_j$  отличен от нуля. Если  $n = m$ , то выражение (5.1.3) можно переписать следующим образом:

$$\prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{E^1} H_{i_k}(z_k) H_{j_k}(z_k) \exp(-z_k^2) dz_k = \prod_{k=1}^n \delta_{i_k, j_k}. \quad (5.1.4)$$

Если хотя бы для одного числа  $k$  индексы  $i_k$  и  $j_k$  различны, то соответствующее  $\delta_{i_k, j_k}$ , а вместе с ним и все выражение (5.1.4), равно нулю. Итак, интеграл (5.1.3) отличен от нуля лишь в том единственном случае, когда последовательности индексов  $i_1, \dots, i_n$  и  $j_1, \dots, j_n$  совпадают; при этом он равен единице. Таким образом, выбранная система функций ортонормирована. Если занумеровать все последовательности индексов  $i_1, \dots, i_n$  числами  $n = 1, 2, \dots$  и использовать обозначение  $\tilde{E}_n(z)$ , где  $n$  — номер последовательности, то условие ортонормированности примет вид (5.1.1). Система функций  $\tilde{E}_n(z)$  является полной в пространстве функций  $L_2(E^n)$ , интегрируемых с квадратом по мере Гаусса в пространстве  $E^n$ . В п. 2 § 3, гл. I показано, что отсюда следует полнота ортонормированной системы  $\tilde{E}_n(z)$  и в пространстве  $L_2(\Omega)$ . Другими словами, для любой функции  $f(z) \in L_2(\Omega)$  и любого числа  $\varepsilon > 0$  можно найти такой многочлен от  $n$  переменных:

$$\tilde{P}_n(z) = \sum_{i_1, \dots, i_n=0}^n C_{i_1, \dots, i_n} \tilde{E}_{i_1, \dots, i_n}(z),$$

для которого выполняется неравенство

$$\|f(z) - \tilde{P}_n(z)\|_{L_2(\Omega)} < \varepsilon.$$

Поскольку для полных ортонормированных систем понятия замкнутости и полноты совпадают, то последовательность полиномов  $\tilde{P}_n(z)$  сходится при  $n \rightarrow \infty$  к  $f(z)$  по норме пространства  $L_2(\Omega)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} [f(z) - \tilde{P}_n(z)]^2 d\mu = 0. \quad (5.1.5)$$

При этом коэффициенты  $C_{i_1, \dots, i_n}$  полинома  $\tilde{P}_n(z)$  определяются по формуле

$$C_{i_1, \dots, i_n} = \int_{\Omega} \tilde{E}_{i_1, \dots, i_n}(z) f(z) d\mu. \quad (5.1.6)$$

Ряд

$$f(z) = \sum_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty} C_{i_1, \dots, i_n} \tilde{E}_{i_1, \dots, i_n}(z) \quad (5.1.7)$$

является рядом Фурье для функционалов  $f(z) \in L_2(\Omega)$ .

Погрешность  $\delta$  аппроксимации функционала  $f(z)$  многочленом  $\tilde{P}_n(z)$  можно найти по формуле

$$\delta^2 = \int_{\Omega} [f(z) - \tilde{P}_n(z)]^2 d\mu = \int_{\Omega} f^2(z) d\mu - \sum_{i_1, \dots, i_n=0}^n C_{i_1, \dots, i_n}^2. \quad (5.1.8)$$

При  $n \rightarrow \infty$  из этой формулы следует

$$\int_{\Omega} f^2(z) d\mu = \sum_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty} C_{i_1, \dots, i_n}^2 \quad (5.1.9)$$

(равенство Парсеваля).

Для того чтобы практически получить разложение функционала  $f(z)$  в ряд (5.1.7), нужно определить коэффициенты  $C_{i_1, \dots, i_n}$ . Воспользуемся тем же принципом, который применялся в § 3 гл. I при доказательстве полноты системы  $E_n(z)$  в  $L_2(\Omega)$ . Функционал  $f(z)$  представим как предел последовательности цилиндрических функций  $f_n(z)$ , каждая из которых аппроксимируется многочленом  $\tilde{P}_n(z)$  в пространстве  $E^n$ . Выбирая в качестве  $f_n(z)$  значения функционала  $f(z)$  на множестве последовательностей  $z \in \Omega$ , у которых отличны от нуля

только первые  $n$  компонент, т. е.  $z = (z_1, \dots, z_n, 0, \dots)$ , получим следующую приближенную формулу для определения коэффициентов  $C_{i_1, \dots, i_n}$ :

$$\begin{aligned} C_{i_1, \dots, i_n} &\approx \tilde{C}_{i_1, \dots, i_n} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} \int_{E^n} f_n(z_1, \dots, z_n) \tilde{E}_{i_1, \dots, i_n}(z_1, \dots, z_n) \prod_{k=1}^n \exp(-z_k^2) dz_k. \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(z) - \tilde{P}_n(z)\|_{L_2(\Omega)} &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|f(z) - f_n(z)\|_{L_2(\Omega)} &= 0, \end{aligned}$$

то выполняется и условие (5.1.5), т. е. ряд

$$\sum_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty} \tilde{C}_{i_1, \dots, i_n} \tilde{P}_n(z)$$

сходится при  $n \rightarrow \infty$  к функционалу  $f(z)$  по норме пространства  $L_2(\Omega)$ .

При большом числе переменных интегрирования в формуле (5.1.10) для вычисления коэффициентов  $\tilde{C}_{i_1, \dots, i_n}$  может быть использован метод статистических испытаний. При этом предполагается, что значения  $f(z)$  могут быть вычислены для любой заданной последовательности  $z \in \Omega$ . Если  $z = (z_1, \dots, z_n)$  — последовательность случайных, статистически независимых и нормально распределенных величин  $z_k$ ,  $\mathbf{M}\{z_k\} = 0$ ,  $D\{z_k\} = \frac{1}{2}$ , то выражение, стоящее в правой части равенства (5.1.10), является математическим ожиданием от функции  $f_n(z_1, \dots, z_n) \tilde{E}_{i_1, \dots, i_n}(z_1, \dots, z_n)$ , т. е.

$$\tilde{C}_{i_1, \dots, i_n} = \mathbf{M}\{f_n(z) \tilde{E}_{i_1, \dots, i_n}(z)\}.$$

Оценка  $C_{i_1, \dots, i_n}^*$  коэффициента  $\tilde{C}_{i_1, \dots, i_n}$  может быть найдена по формуле

$$C_{i_1, \dots, i_n}^* = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_n(z^k) \tilde{E}_{i_1, \dots, i_n}(z^k), \quad (5.1.11)$$

где  $N$  — число испытаний,  $z^k$  — реализация случайной последовательности  $z$ .

Отметим, что математическое ожидание оценки (5.1.11) равно искомому коэффициенту

$$M \{C_{i_1, \dots, i_n}^*\} = \tilde{C}_{i_1, \dots, i_n},$$

а дисперсия определяется по формуле

$$D \{C_{i_1, \dots, i_n}^*\} = \frac{1}{N} \left\{ \int_{E^n} (\tilde{f}_n(z) E_{i_1, \dots, i_n}(z))^2 d\mu - \tilde{C}_{i_1, \dots, i_n}^2 \right\}. \quad (5.1.12)$$

Из последней формулы следует, что при  $N \rightarrow \infty$  дисперсия оценки (5.1.11) стремится к нулю. Оценка является, таким образом, несмещенной и состоятельной. Поскольку дисперсию (5.1.12) невозможно определить до эксперимента, задаются максимально допустимым значением дисперсии:

$$D \{C_{i_1, \dots, i_n}^*\} \leq \varepsilon \quad (5.1.13)$$

и определяют ее значения в процессе эксперимента. Для этого одновременно с оценкой (5.1.11) при каждом значении  $N$  вычисляют оценку дисперсии

$$\begin{aligned} D \{C_{i_1, \dots, i_n}^*\} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\tilde{f}_n(z^i) \tilde{E}_{i_1, \dots, i_n}(z^i))^2 - C_{i_1, \dots, i_n}^{*2} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\tilde{f}_n(z^i) \tilde{E}_{i_1, \dots, i_n}(z^i))^2 - \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{f}_n(z^i) \tilde{E}_{i_1, \dots, i_n}(z^i) \right)^2. \end{aligned}$$

Условие (5.1.13) определяет число испытаний  $N$ , при котором желаемая точность будет достигнута, и процедуру статистических испытаний можно прекратить.

Перейдем к задаче аппроксимации функционалов, заданных в пространстве непрерывных функций  $x(t)$ , определенных на отрезке  $[0, T]$  и равных нулю при  $t=0$ :  $x(t) \in C_0[0, T]$ . Будем предполагать, что функционалы  $f(x)$  интегрируемы в этом пространстве с квадратом по мере Винера, т. е.  $f(x) \in L_2(C_0[0, T])$ .

Построение ортогональной системы функционалов в  $C_0[0, T]$  опирается на следующее соотношение, определяющее интеграл по мере Винера для функционалов частного вида в  $L_2(C_0[0, T])$ :

$$\begin{aligned} \int_{C_0[0, T]} f_n \left( \int_0^T e_1(t) dx(t), \dots, \int_0^T e_n(t) dx(t) \right) d\mu_W = \\ = \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} \int_{E^n} f_n(z_1, \dots, z_n) \exp \left( - \sum_{i=1}^n z_i^2 \right) \prod_{i=1}^n dz_i. \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

Здесь  $\{e_n(t)\}$  — ортонормированная система функций в  $L_2[0, T]$ , а интегралы  $\int_0^T e_n(t) dx(t)$  определяются как интегралы Пэли—Винера—Зигмунда (§ 3 гл. I) почти для всех  $x(t) \in C_0[0, T]$ . Соотношение (5.1.14) было получено Винером и Пэли [11], [93]. Подразумевается, что для функций  $f_n(z_1, \dots, z_n)$  выполняется условие

$$f_n(z_1, \dots, z_n) \exp \left( - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n z_i^2 \right) \in L_2(E^n).$$

Выберем в пространстве  $L_2(C_0[0, T])$  следующую систему функционалов:

$$\begin{aligned} E_{i_1, \dots, i_n}(x) = \tilde{E}_{i_1, \dots, i_n} \left( \int_0^T e_1(t) dx(t), \dots, \int_0^T e_n(t) dx(t) \right) = \\ = \prod_{j=1}^n H_{i_j} \left( \int_0^T e_j(t) dx(t) \right), \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

которую принято называть *системой Фурье—Эрмита*. Используя соотношение (5.1.14), нетрудно показать, что эта система ортогональна и нормирована в  $L_2(C_0[0, T])$ .

Действительно, полагая  $n \geq m$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{C_0[0, T]} E_{i_1, \dots, i_n}(x) E_{j_1, \dots, j_m}(x) d\mu_W &= \\ &= \int_{C_0[0, T]} \tilde{E}_{i_1, \dots, i_n} \left( \int_0^T e_1(t) dx(t), \dots, \int_0^T e_n(t) dx(t) \right) \times \\ &\times \tilde{E}_{j_1, \dots, j_m} \left( \int_0^T e_1(t) dx(t), \dots, \int_0^T e_m(t) dx(t) \right) d\mu_W = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} \int_{E^n} \tilde{E}_{i_1, \dots, i_n}(z_1, \dots, z_n) \tilde{E}_{j_1, \dots, j_m}(z_1, \dots, z_m) \times \\ &\times \exp \left( - \sum_{i=1}^n z_i^2 \right) \prod_{i=1}^n dz_i = \prod_{k=1}^n \delta_{i_k j_k} \end{aligned}$$

(см. формулу (5.1.4)).

Можно так же доказать [107], что система Фурье—Эрмита является полной в  $L_2(C_0[0, T])$ , т. е. для любого функционала  $f(x) \in L_2(C_0[0, T])$  можно найти такой многочлен:

$$P_n(x) = \sum_{i_1, \dots, i_n=0}^n C_{i_1, \dots, i_n} E_{i_1, \dots, i_n}(x), \quad (5.1.16)$$

где

$$\begin{aligned} C_{i_1, \dots, i_n} &= \\ &= \int_{C_0[0, T]} f(x) \tilde{E}_{i_1, \dots, i_n} \left( \int_0^T e_1(t) dx(t), \dots, \int_0^T e_n(t) dx(t) \right) d\mu_W, \end{aligned} \quad (5.1.17)$$

что для заданного числа  $\varepsilon > 0$  выполняется неравенство

$$\|f(x) - P_n(x)\|_{L_2(C_0)}^2 = \int_{C_0[0, T]} |f(x) - P_n(x)|^2 d\mu_W < \varepsilon.$$

Итак, любой функционал  $f(x) \in L_2(C_0[0, T])$  может быть аппроксимирован последовательностью ортогональных



многочленов Фурье — Эрмита (5.1.16), т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_0[0, T]} \left| \sum_{i_1, \dots, i_n=0}^n C_{i_1, \dots, i_n} E_{i_1, \dots, i_n}(x) - f(x) \right|^2 d\mu_W = 0. \quad (5.1.18)$$

Ряд

$$f(x) = \sum_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty} C_{i_1, \dots, i_n} E_{i_1, \dots, i_n}(x) \quad (5.1.19)$$

является аналогом обычного ряда Фурье для функционалов из пространства  $L_2(C_0[0, T])$ .

В качестве следствия из соотношения (5.1.18) можно получить равенство Парсеваля

$$\int_{C_0[0, T]} f^2(x) d\mu_W = \sum_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty} C_{i_1, \dots, i_n}^2,$$

а также формулу для оценки погрешности аппроксимации

$$\begin{aligned} \delta^2 &= \int_{C_0[0, T]} [f(x) - P_n(x)]^2 d\mu_W = \\ &= \int_{C_0[0, T]} f^2(x) d\mu_W - \sum_{i_1, \dots, i_n=0}^n C_{i_1, \dots, i_n}^2. \end{aligned} \quad (5.1.20)$$

Заметим, что аппроксимация функционала  $f(x)$  рядом по системе многочленов Фурье — Эрмита является наилучшей в среднеквадратическом. В общем случае при этом не обеспечивается сходимость ряда в каждой точке  $x_0 \in C_0[0, T]^*$ .

Рассмотрим теперь некоторые практические способы построения рядов Фурье — Эрмита. Вначале остановимся на способе, использующем построение последовательности функционалов

$$f_n \left( \int_0^T e_1(t) dx(t), \dots, \int_0^T e_n(t) dx(t) \right), \quad (5.1.21)$$

\*) Условия, при которых ряд Фурье — Эрмита сходится в точке, а также во всех точках пространства  $C_0[0, T]$ , получены в работе [132].

сходящейся в  $L_2(C_0[0, T])$  к функционалу  $f(x)$ . Применяя разложение в ряд Фурье — Эрмита к функционалам  $f_n$ , можно с учетом равенства (5.1.14) свести задачу к аппроксимации в пространстве  $\Omega$ . Положим  $T$  равным  $\pi$  и рассмотрим пространство  $\hat{L}_2[0, \pi]$  квадратично интегрируемых на отрезке  $[0, \pi]$  функций, которые удовлетворяют дополнительному условию

$$\int_0^{\pi} \hat{x}(t) dt = 0. \quad (5.1.22)$$

Выберем в  $\hat{L}_2[0, \pi]$  полную ортонормированную систему функций

$$e_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nt, \quad n = 1, 2, \dots,$$

и обозначим

$$x_n = (e_n(t), \hat{x}(t))$$

коэффициенты Фурье функции  $\hat{x}(t)$  по выбранной ортонормированной системе. Каждому элементу  $\hat{x}(t) \in \hat{L}_2[0, \pi]$  поставим в соответствие последовательность

$$z_n = -nx_n,$$

которая определяет взаимно-однозначное соответствие между пространством  $\hat{L}_2[0, \pi]$  и множеством полной меры в пространстве  $\Omega$  последовательностей  $z = \{z_n\}$ . Введем теперь последовательность функций

$$f_n(z_1, \dots, z_n) = f\left(-\sum_{k=1}^n \frac{z_k}{k} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos kt\right), \quad (5.1.23)$$

сходящуюся на множестве полной меры при  $n \rightarrow \infty$  к соответствующим значениям функционала

$$f(\hat{x}) = f\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k(t)\right).$$

Имеет место равенство

$$z_k = -k \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \cos kt \hat{x}(t) dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \sin kt d\hat{x}(t),$$

причем для произвольных  $\hat{x}(t) \in \widehat{L}_2[0, \pi]$  под интегралом, стоящим в правой части последнего равенства, следует понимать интеграл Пэли — Винера — Зигмунда. Учитывая, что система функций  $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nt$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , ортонормирована в  $L_2[0, \pi]$ , приходим к выводу, что функционалы (5.1.23) имеют вид (5.1.21)

$$f_n(z_1, \dots, z_n) = \\ = f_n \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi \sin t d\hat{x}(t), \dots, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi \sin kt d\hat{x}(t) \right). \quad (5.1.24)$$

Заметим теперь, что почти все (по мере Винера) функции пространства  $\widehat{L}_2[0, \pi]$  непрерывны и удовлетворяют условию Гельдера с показателем  $\gamma < 1/2$  (см. § 3 гл. I), причем для таких функций по-прежнему сходится ряд Фурье по выбранной системе функций  $\{e_n(t)\}$  [93]. Таким образом, последовательность функционалов (5.1.24) сходится к  $f(x)$  на множестве полной меры Винера в пространстве  $\widehat{C}[0, \pi]$  функций, непрерывных на отрезке  $[0, \pi]$  и удовлетворяющих условию (5.1.22). Пространство  $\widehat{C}[0, \pi]$  связано с пространством  $C_0[0, \pi]$  взаимно-однозначным соответствием, определяемым равенствами (1.3.50), (1.3.51) § 3 гл. I. Поскольку функции  $\hat{x}(t) \in \widehat{C}[0, \pi]$  и соответствующие им функции  $x(t) \in C_0[0, \pi]$  различаются на постоянную величину, то они имеют одинаковые коэффициенты Фурье. Однако  $x(t)$  имеет еще и нулевой коэффициент

$$x_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x(t) dt,$$

соответствующий  $e_0(t) = 1$ . Поэтому для сохранения без изменения построенной системы функционалов  $f_n(z_1, \dots, z_n)$  нужно предварительно вычесть из каждой функции  $x(t)$  ее коэффициент  $x_0$ , т. е. перейти к пространству  $\widehat{C}[0, \pi]$ :

$$\hat{x}(t) = x(t) - x_0.$$

Коэффициенты ряда Фурье — Эрмита для функционала  $f(\hat{x}) \in L_2(\hat{C}[0, \pi])$  могут быть найдены по приближенной формуле, следующей из (5.1.24), (5.1.14):

$$\begin{aligned} C_{i_1, \dots, i_n} &= \\ &= \int_{\hat{C}[0, \pi]} f(\hat{x}) \tilde{E}_{i_1, \dots, i_n} \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi \sin t d\hat{x}, \dots, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi \sin nt d\hat{x} \right) \times \\ &\quad \times d\mu_W \approx \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} \int_{E^n} f_n(z_1, \dots, z_n) \tilde{E}_{i_1, \dots, i_n}(z_1, \dots, z_n) \times \\ &\quad \times \exp\left(-\sum_{i=1}^n z_i^2\right) \prod_{i=1}^n dz_i, \quad (5.1.25) \end{aligned}$$

где функции  $f_n(z_1, \dots, z_n)$  определяются формулами (5.1.23), (5.1.24).

Выражение (5.1.25) совпадает с интегралом (5.1.10), определяющим коэффициент ряда по ортонормированной системе функций  $\tilde{E}_{i_1, \dots, i_n}(z)$  в пространстве  $\Omega$ . Итак, задача аппроксимации функционала  $f(x)$  в пространстве  $L_2(\hat{C}[0, \pi])$  сведена к аналогичной задаче в пространстве  $L_2(\Omega)$ .

Рассмотренный метод предполагал использование системы функций  $\{e_n(t)\}$ , для которых ряд Фурье сходится в пространстве  $C_0[0, \pi]$ . В более общем случае для вычисления коэффициентов ряда Фурье — Эрмита по формуле (5.1.17) необходимо применять приближенные методы вычисления интегралов по мере Винера. Эти методы требуют приближенного моделирования винеровского процесса с помощью аналоговых или цифровых вычислительных машин.

При использовании цифровых вычислительных машин целесообразно аппроксимировать выборочную функцию винеровского процесса  $x(t)$  ломаной  $\tilde{x}(t)$ , принимающей значения  $x(t_i)$  в дискретные моменты времени  $0 = t_0 < t_1 \dots < t_n = \pi$ . Если обозначить  $\xi(t_i) = x(t_{i+1}) - x(t_i)$ ,  $x(t_0) = 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , то при  $t \in [t_k, t_{k+1}]$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ,

$$\tilde{x}(t) = \sum_{i=0}^{k-1} \xi(t_i) + \frac{\xi(t_k)}{t_{k+1} - t_k} (t - t_k), \quad (5.1.26)$$

причем случайные величины  $\xi(t_i)$  статистически независимы и имеют нормальное распределение (см. § 3 гл. I). Функционал  $f(x)$ , вычисленный на выборочных функциях  $\tilde{x}(t)$ , обозначим через  $f_n(x)$ :

$$f_n(x) = f(\tilde{x}(t)) = f_n(x(t_1), \dots, x(t_n)).$$

Равенство (5.1.17) можно теперь заменить следующей приближенной формулой (см. также § 3 гл. I):

$$\begin{aligned} C_{i_1, \dots, i_n} \approx & \frac{1}{\sqrt{\pi^n t_1 (t_2 - t_1) \dots (t_n - t_{n-1})}} \int_{E^n} f_n(x_1, \dots, x_n) \times \\ & \times \prod_{j=1}^n H_{i_j} \left( \sum_{k=0}^{n-1} e_j(t_k) (x_{k+1} - x_k) \right) \times \\ & \times \exp \left( -\frac{x_1^2}{t_1} - \frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1} - \dots - \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{t_n - t_{n-1}} \right) \prod_{i=1}^n dx_i. \end{aligned} \quad (5.1.27)$$

В частности, выбирая равноотстоящие значения переменной  $t$ :  $t_i = \Delta i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , будем иметь

$$\begin{aligned} C_{i_1, \dots, i_n} \approx & \frac{1}{\sqrt{\pi^n \Delta^n}} \int_{E^n} f_n(x_1, \dots, x_n) \prod_{j=1}^n H_{i_j} \left( \sum_{k=0}^{n-1} e_j(t_k) \times \right. \\ & \left. \times (x_{k+1} - x_k) \exp \left( -\frac{1}{\Delta} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)^2 \right) \prod_{i=1}^n dx_i. \end{aligned} \quad (5.1.28)$$

Предел интеграла, стоящего в правой части этого равенства, при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\Delta \rightarrow 0$  совпадает с интегралом Винера (5.1.17) [80]. Таким образом, задача сводится к вычислению многократного интеграла (5.1.28).

Для практического вычисления коэффициентов  $C_{i_1, \dots, i_n}$  целесообразно применять метод статистических испытаний, поскольку формула (5.1.17) может быть записана в виде

$$C_{i_1, \dots, i_n} = \mathbf{M} \left\{ f(x) E_{i_1, \dots, i_n} \left( \int_0^T e_1(t) dx(t) \dots \int_0^T e_n(t) dx_i^*(t) \right) \right\}, \quad (5.1.29)$$

где  $x(t)$  — винеровский процесс. Если  $x^k(t)$  — выборочные функции винеровского процесса, то оценку коэффициента  $C_{i_1, \dots, i_n}$  можно найти по формуле:

$$C_{i_1, \dots, i_n}^* = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x^k(t)) \prod_{j=1}^n H_{ij} \left( \int_0^T e_j(t) dx^k(t) \right). \quad (5.1.30)$$

Аппроксимируя выборочные функции винеровского процесса  $x(t)$  ломаными, совпадающими с ними в равноотстоящих точках, получим формулу для вычисления методом статистических испытаний интеграла (5.1.28):

$$C_{i_1, \dots, i_n}^* = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_n(x_1^k, \dots, x_n^k) \times \\ \times \prod_{j=1}^n H_{ij} \left( \sum_{m=0}^{n-1} e_j(t_m) (x_{m+1}^k - x_m^k) \right). \quad (5.1.31)$$

Заметим, что функционал  $f_n(\tilde{x}(t))$  может быть представлен в виде

$$f_n(\tilde{x}(t)) = \tilde{f}_n(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)),$$

где  $\xi(t_k) = x(t_{k+1}) - x(t_k)$ . Если  $x(t_k)$  — значение выборочной функции винеровского процесса при  $t = t_k$ , то  $\xi(t_k)$  — нормально распределенная случайная величина, математическое ожидание которой равно нулю, а дисперсия

$$D\{\xi(t_k)\} = \frac{1}{2} [t_k - t_{k-1}] = \frac{\Delta t_k}{2}. \quad (5.1.32)$$

Выбирая такую последовательность случайных величин [80], можно вычислить оценку коэффициента  $C_{i_1, \dots, i_n}$  по формуле

$$C_{i_1, \dots, i_n}^* = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tilde{f}_n(\xi_1, \dots, \xi_n) \prod_{j=1}^n H_{ij} \left( \sum_{m=0}^n e_j(t_m) \xi_m \right). \quad (5.1.33)$$

До сих пор в качестве области определения аппроксимируемых функционалов рассматривалось пространство непрерывных функций, заданных на отрезке. Однако изложенная методика в равной мере применима и

тогда, когда функции заданы на полупрямой  $[0, \infty)$ . В этом случае в качестве системы Фурье используют ортонормированную на полупрямой систему функций Лагерра

$$\hat{L}_n(t) = \exp\left(-\frac{t}{2}\right) L_n(t),$$

где

$$L_n(t) = \frac{1}{n!} \exp t \frac{d^n}{dt^n} (t^n \exp(-t)), \quad n = 0, 1, \dots,$$

— система многочленов Лагерра (см. § 1 гл. I). Первые три многочлена имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} L_0 &= 1, & L_1(t) &= 1 - t, \\ L_2(t) &= \frac{1}{2} t^2 - 2t + 1. \end{aligned}$$

Соответствующая ортонормированная система Фурье — Эрмита

$$E_{i_0, \dots, i_n}(x) = \prod_{k=0}^n H_{i_k} \left( \int_0^{\infty} \hat{L}_k(t) dx(t) \right), \quad (5.1.34)$$

$$i_k = 0, 1, \dots; \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

называется *системой Лагерра — Эрмита*.

Ограничиваясь достаточно большим значением верхнего предела  $T$  в интеграле  $\int_0^T \hat{L}_k(t) dx(t)$ , можно для

вычисления коэффициентов ряда Лагерра — Эрмита применить изложенные численные способы. Другой подход к вычислению коэффициентов ряда Лагерра — Эрмита заключается в использовании нормального белого шума. Этот подход обычно используется при вычислениях с помощью аналоговых вычислительных машин, а также в задачах идентификации непрерывных систем.

Связь между нормальным белым шумом и винеровским процессом можно установить следующим образом. Рассмотрим приближенное представление выборочных функций винеровского процесса ломаными

(5.1.26) и запишем формулу (5.1.26) при  $t=t_n$  в виде

$$\tilde{x}(t_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\xi(t_i) \Delta t_i}{\Delta t_i} = \sum_{i=0}^{n-1} \eta(t_i) \Delta t_i, \quad (5.1.35)$$

где

$$\eta(t_i) = \frac{\xi(t_i)}{\Delta t_i}, \quad \Delta t_i = t_{i+1} - t_i.$$

Случайные величины  $\eta(t_i)$  имеют нормальное распределение и нулевое математическое ожидание; с учетом формулы (5.1.32) их дисперсия равна

$$D\{\eta(t_i)\} = \frac{D\{\xi(t_i)\}}{(\Delta t_i)^2} = \frac{1}{2\Delta t_i}.$$

Таким образом,  $D\{\eta(t_i)\} \rightarrow \infty$  при  $\Delta t_i \rightarrow 0$ . В то же время при сколь угодно малом  $\Delta t_i$  величины  $\eta(t_i)$  и  $\eta(t_{i+1})$  статистически независимы. Более строгие рассуждения\*) приводят к выводу, что корреляционная функция нормального случайного процесса  $\eta(t)$  при  $\Delta t_i \rightarrow 0$  стремится к  $\delta(t)$  и, следовательно, процесс  $\eta(t)$  приближается к нормальному белому шуму. Выражение (5.1.35) при  $\Delta t_i \rightarrow 0$  может формально рассматриваться как интегральная сумма. Таким образом, из приведенных рассуждений следует формальное равенство

$$x(t) = \int_0^t \eta(t) dt, \quad (5.1.36)$$

где  $x(t)$  — винеровский процесс, а  $\eta(t)$  — нормальный белый шум с единичной интенсивностью.

Теперь интеграл  $\int_0^{\pi} \hat{L}_k(t) dx(t)$  может быть представлен следующим образом:

$$l_k = \int_0^{\infty} \hat{L}_k(t) dx(t) = \int_0^{\infty} \hat{L}_k(t) \eta(t) dt. \quad (5.1.37)$$

\*) См. Хазен Э. М., Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления, «Советское радио», 1968, стр. 31.



Коэффициенты  $C_{i_0, \dots, i_n}$ , можно найти по формуле

$$C_{i_0, \dots, i_n} = \mathbb{M} \left\{ (\tilde{f}(\eta(t))) \prod_{k=0}^n H_{i_k} \left( \int_0^{\infty} \hat{L}_k(t) \eta(t) dt \right) \right\}, \quad (5.1.38)$$

где  $\tilde{f}(\eta(t)) = f \left( \int_0^t \eta(t) dt \right)$ .

Усреднение здесь производится по множеству реализаций  $\eta(t)$  нормального белого шума. Строго говоря, такой случайный процесс не может быть получен экспериментально. Однако, используя датчики, воспроизводящие близкий к нему случайный процесс, можно осуществить приближенное вычисление коэффициентов  $C_{i_0, \dots, i_n}$  с помощью аналоговых устройств [10].

Трудность, возникающая при вычислении интеграла (5.1.37) с помощью аналоговых устройств, состоит в том, что этот интеграл не является интегралом свертки,

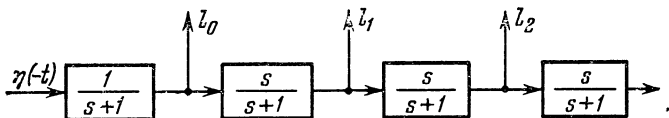


Рис. 5.1.1.

и, следовательно, результат не может быть получен непосредственно на выходе линейного устройства, моделирующего функции Лагерра. На выходе такого устройства (рис. 5.1.1) можно получить сигналы

$$y_k(t) = \int_0^{\infty} \eta(t - \tau) \hat{L}_k(\tau) \exp\left(-\frac{\tau}{2}\right) d\tau, \quad k = 0, 1, \dots$$

При  $t=0$  будем иметь

$$y_k(0) = \int_0^{\infty} \eta(-\tau) \hat{L}_k(\tau) \exp\left(-\frac{\tau}{2}\right) d\tau = l_k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

т. е. для вычисления интегралов (5.1.37) требуется предварительная запись функции  $\eta(\tau)$ , которую нужно затем

подать на вход системы, показанной на рис. 5.1.1 в «обратном» времени. Этому недостатка лишена схема, изображенная на рис. 5.1.2 [58].

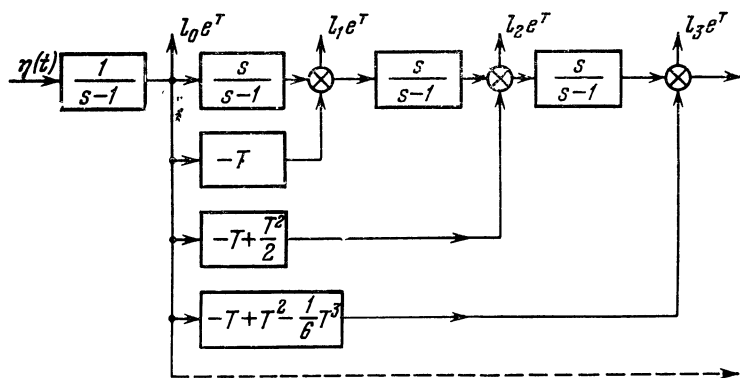


Рис. 5.1.2.

Вычисление производится по формуле

$$l_k = \int_0^{\infty} \hat{L}_k(\tau) \eta(\tau) \exp\left(-\frac{\tau}{2}\right) d\tau \approx$$

$$\approx \int_0^T \hat{L}_k(\tau) \eta(\tau) \exp\left(-\frac{\tau}{2}\right) d\tau = \int_0^T \eta(\tau) h_k(T-\tau) d\tau,$$

где  $h_k(\tau) = \hat{L}_k(T-\tau) \exp[-(T-\tau)/2]$ ,  $k=0, 1, \dots$

Изображения по Лапласу функции  $h_k(\tau)$  равны

$$H_0(s) = \frac{\exp(-T)}{s-1};$$

$$H_1(s) = H_0(s) \frac{s}{s-1} - T H_0(s);$$

$$H_2(s) = H_1(s) \frac{s}{s-1} + \left(\frac{1}{2} T^2 - T\right) H_0(s);$$

.....

В соответствии с этими формулами составлена схема вычисления на рис. 5.1.2.

Для винеровского процесса  $x(t)$  и связанного с ним белого шума  $\eta(t)$  справедлива эргодическая гипотеза [10], позволяющая заменить усреднение по множеству в формуле (5.1.38) усреднением по времени. Обозначая

$$\eta_t(\tau) = \begin{cases} \eta(\tau) & \text{при } \tau \in [0, t], \\ 0 & \text{при } \tau > t, \end{cases}$$

$$y(t) = \tilde{f}(\eta_t(\tau)),$$

можно записать следующую оценку для искомым коэффициентов:

$$C_{i_0, \dots, i_n}^* = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) \prod_{k=0}^n H_{i_k} \left( \int_0^t \hat{L}_k(\tau) \eta(\tau) d\tau \right) dt, \quad (5.1.39)$$

где  $T$  — достаточно большое время эксперимента \*).

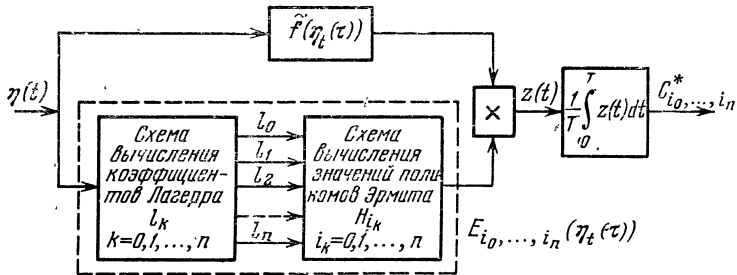


Рис. 5.1.3.

Схема вычисления оценок  $C_{i_0, \dots, i_n}^*$  показана на рис. 5.1.3. Нормальный белый шум  $\eta(t)$  используется одновременно для вычисления значений функционала

\*) Предполагается, что функция  $\tilde{f}(\eta_t(\tau)) = f(x_t(\tau))$  определяет стационарное преобразование и интегрируема по мере Винера. Тогда почти для всех  $y(t)$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} C_{i_0, \dots, i_n}^* = C_{i_0, \dots, i_n}.$$

$\tilde{f}(\eta_t(\tau))$  и значений функционалов Лагерра — Эрмита

$$E_{i_0, \dots, i_n}(\eta_t(\tau)) = \prod_{k=0}^n H_{i_k} \left( \int_0^t \widehat{L}_k(\tau) \eta(\tau) d\tau \right).$$

Для вычисления коэффициентов Лагерра  $l_k$  по формуле (5.1.37) может быть, например, использована схема, показанная на рис. 5.1.2. Заметим, однако, что в

этом случае вычисление значений  $l_k(t) = \int_0^t \widehat{L}_k(\tau) \eta(\tau) dt$

нужно производить заново для каждого значения  $t$ , т. е. изменив коэффициенты в обратных связях схемы рис. 5.1.2, нужно снова подать на ее вход сигнал  $\eta(\tau)$ ,  $\tau \in [0, t]$ . Схема вычисления значений полиномов Эрмита  $H_{i_k}(l_k(t))$  предусматривает операции умножения на постоянное число и возведения числа в степень в соответствии с видом полинома Эрмита.

Усредняя сигнал

$$z(t) = E_{i_0, \dots, i_n}(\eta_t(\tau)) \tilde{f}(\eta_t(\tau))$$

по времени, получим искомую оценку в соответствии с формулой (5.1.39).

Остановимся на некоторых особенностях применения рядов Фурье — Эрмита для решения задачи идентификации. Эту задачу можно поставить как определение семейства функционалов, описывающих объект идентификации в различные моменты времени  $t$ :

$$y(t) = f(t, x_t(\tau)).$$

Здесь  $y(t)$  — сигнал на выходе объекта идентификации, а  $x_t(\tau)$  — на его входе.

Для того чтобы перейти от произвольных функционалов, заданных в пространстве  $C_0[0, \pi]$ , к функционалам, описывающим физические объекты, требуется перейти в формулах (5.1.17), (5.1.19) от винеровского процесса к белому шуму по формуле (5.1.36). Формула (5.1.17) для вычисления коэффициентов ряда Фурье — Эрмита для функционала  $\tilde{f}(T, \eta(\tau))$ , описывающего

физический объект, может быть записана так:

$$C_{i_0, \dots, i_n}(T) = \\ = \mathcal{M} \left\{ \tilde{f}(T, \eta(\tau)) E_{i_1, \dots, i_n} \left( \int_0^T e_1(t) \eta(t) dt, \dots, \int_0^T e_n(t) \eta(t) dt \right) \right\}. \quad (5.1.40)$$

Это выражение может быть вычислено, если подавать на вход объекта нормальный белый шум  $\eta(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , измерять на выходе объекта сигнал  $y(T) = \tilde{f}(T, \eta(\tau))$  и усреднять полученные результаты в соответствии с формулой (5.1.40). Для того чтобы определить математическую модель объекта для различных значений  $t \in [0, T]$ , можно применить эту же формулу.

Выбирая систему функций  $e_{it}(\tau) = \left\{ \sqrt{\frac{T}{t}} e_i\left(\frac{T}{t}\tau\right) \right\}$ , ортогональную на отрезке  $[0, t]$ , запишем

$$C_{i_0, \dots, i_n}(t) = \\ = \mathcal{M} \left\{ \tilde{f}(t, \eta(\tau)) \prod_{k=0}^n H_{i_k} \left( \sqrt{\frac{T}{t}} \int_0^t e_i\left(\frac{T}{t}\tau\right) \eta(\tau) d\tau \right) \right\}. \quad (5.1.41)$$

Значения  $C_{i_0, \dots, i_n}(t)$  можно найти по этой формуле последовательно для различных  $t \in [0, T]$ . Математическая модель объекта идентификации может быть описана частной суммой ряда Фурье — Эрмита:

$$\tilde{f}(t, \eta(\tau)) \approx \\ \approx \sum_{i_0, \dots, i_n=0}^n C_{i_0, \dots, i_n}(t) \prod_{k=1}^n H_{i_k} \left( \int_0^t e_k(\tau) \eta(\tau) d\tau \right). \quad (5.1.42)$$

Аналогично для целей идентификации используются ряды Лагерра — Эрмита. При достаточно большом времени наблюдения  $T$  коэффициенты ряда определяются по формуле

$$C_{i_0, \dots, i_n}(T) = \\ = \mathcal{M} \left\{ \tilde{f}(T, \eta(\tau)) \prod_{k=0}^n H_{i_k} \left( \int_0^T \hat{L}_k(\tau) \eta(\tau) d\tau \right) \right\}. \quad (5.1.43)$$

Оценки этих коэффициентов целесообразно вычислять с использованием эргодической гипотезы, т. е. по формуле (5.1.39). Схема вычислений соответствует рис. 5.1.3, где  $\tilde{f}(\eta_t(\tau))$  — функционал, описывающий объект идентификации. Если объект стационарен\*), его математическая модель может быть записана в виде

$$\tilde{f}(t, \eta_t(\tau)) = \sum_{i_0, \dots, i_n=0}^n C_{i_0, \dots, i_n} \prod_{k=0}^n H_{i_k} \left( \int_0^t \hat{L}_k(\tau) \eta(\tau) d\tau \right). \quad (5.1.44)$$

Для нестационарных объектов коэффициенты ряда Лагерра — Эрмита зависят от времени:

$$C_{i_0, \dots, i_n}(t) = M \left\{ \tilde{f}(t, \eta_t(\tau)) \prod_{k=0}^n H_{i_k} \left( \int_0^t \hat{L}_k(\tau) \eta(\tau) d\tau \right) \right\}. \quad (5.1.45)$$

В формуле (5.1.44) теперь надо положить  $C_{i_0, \dots, i_n} = C_{i_0, \dots, i_n}(t)$ . Следует иметь в виду, однако, что среднеквадратическая сходимость ряда (5.1.44) имеет место, если одновременно  $n \rightarrow \infty$ ,  $t \rightarrow \infty$ . Поэтому получаемая модель является хорошим приближением объекта идентификации лишь при достаточно большом времени наблюдения.

Поскольку значение  $T$  определяется длительностью переходных процессов в системе и может быть оценено предварительно, целесообразно использовать при решении задачи идентификации полиномы Лагерра, ортонормированные с весом  $\exp[-\alpha\tau]$ , где число  $\alpha$  обратно пропорционально длительности переходного процесса  $T_1$ .

Обсудим некоторые особенности построения математических моделей физических объектов, полученных с помощью рядов Фурье — Эрмита и Лагерра — Эрмита (5.1.42), (5.1.44). Поскольку модель объекта описывается как линейная комбинация функций Фурье — Эрмита  $E_{i_0, \dots, i_n}(\eta_t(\tau))$ , для ее реализации могут быть использованы те же аналоговые вычислительные устройства,

---

\*) Физический объект считается стационарным, если он может быть описан стационарной математической моделью.

что и для решения задачи идентификации. В частности, при использовании функций Лагерра — Эрмита может использоваться схема вычисления  $E_{i_0, \dots, i_n}(\eta_t(\tau))$ , обведенная пунктиром на рис. 5.1.3, включающая схему рис. 5.1.2. Однако, как уже отмечалось, такое устройство не обеспечивает непрерывное преобразование сигнала  $\eta_t(\tau)$ . Для каждого временного интервала  $[0, t]$  вычисления должны выполняться заново. Это обстоятельство делает весьма неудобным применение подобных моделей в тех случаях, когда идентифицируемый объект является частью сложной системы физических объектов, работающих в реальном времени. Полученные математические модели следует рассматривать как алгоритм вычисления значений выходного сигнала  $y(t)$ , соответствующих значениям входного сигнала  $\eta_t(\tau)$  для некоторой последовательности значений аргумента  $t$ . Этот алгоритм можно реализовать на цифровой вычислительной машине. Для функционалов от винеровского процесса формулы, аналогичные соотношениям (5.1.42) и (5.1.44), таковы:

$$f(t, x(t)) \approx \sum_{i_0, \dots, i_n=0}^{n-1} C_{i_0, \dots, i_n}(t) \prod_{k=0}^n H_{i_k} \left( \int_0^t e_{i_t}(\tau) dx(\tau) \right),$$

$$t \in [0, T],$$

$$f(t, x(t)) \approx \sum_{i_0, \dots, i_n=0}^n C_{i_0, \dots, i_n}(t) \prod_{k=0}^n H_{i_k} \left( \int_0^t \tilde{L}_i(\tau) dx(\tau) \right),$$

$$t \in [0, \infty).$$

Значения функционала могут быть приближенно вычислены по этим формулам для любой непрерывной функции  $x(t)$  при любом значении  $t$ . Используемая для этого вычислительная схема тоже может быть реализована на цифровой вычислительной машине.

Надо иметь в виду, что полученная модель аппроксимирует объект идентификации в среднеквадратическом. Поэтому, если не выполнены условия сходимости ряда Фурье — Эрмита в каждой точке пространства  $S_0[0, T]$ , то отдельные реакции модели и реального объ-

екта на одно и то же воздействие будут различаться. В связи с этим рассмотренный метод идентификации целесообразно применять в задачах со случайными входными воздействиями, когда представляет интерес задача идентификации в среднеквадратическом.

Полученные выше формулы (5.1.40), (5.1.44) позволяют построить математическую модель стационарного объекта для любого стационарного нормального случайного процесса, имеющего дробно-рациональную спектральную плотность \*).

Методы, изложенные в этом параграфе, могут применяться при исследовании различных объектов с неизвестной структурой, в том числе биологических и биотехнических. В качестве примера применения рядов Лагерра — Эрмита рассмотрим задачу об исследовании характеристик человека — оператора в системе управления манипулятором двустороннего действия [2].

Блок-схема биотехнической системы управления манипулятором показана на рис. 5.1.4. Оператор через телевизионную систему наблюдает за перемещением исполнительного органа (манипулятора). С помощью системы передачи усилия оператор получает информацию об усилиях  $M_{\text{ис}}$ , развиваемых исполнительным органом. Эта информация воспринимается человеком как усилие  $M_{\text{в}}$  на задающем органе, формируемое указанной системой. Прикладывая усилие  $M_{\text{о}}$  к задающему органу, человек-оператор перемещает его; перемещение

\*) Для стационарного гауссова процесса  $z(t)$  с дробно-рациональной спектральной плотностью  $\Phi_z(\omega)$  система Лагерра — Эрмита имеет вид

$$E_{i_0, \dots, i_n}(z) = \prod_{k=0}^n H_{i_k} \left( \int_0^{\infty} G_k(t) z(t) dt \right),$$

где

$$G_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{E^1} \frac{\hat{L}_i(j\omega)}{\Phi_z(j\omega)} \exp(j\omega t) d\omega,$$

$\hat{L}_i(j\omega) \doteq \hat{L}_i(\tau)$ ; функция  $\Phi_z(j\omega)$  получена методом факторизации спектра (см. ниже стр. 415):  $\Phi_z(j\omega) = \Phi_z(j\omega) \Phi_z(-j\omega)$ . Используя систему  $E_{i_0, \dots, i_n}(z)$  в формулах (5.1.40), (5.1.44), получим модель идентифицируемого объекта.



задающего органа обрабатывается исполнительной следящей системой. Эта система в свою очередь перемещает исполнительный орган, к которому приложен внешний момент нагрузки  $M_n$ .

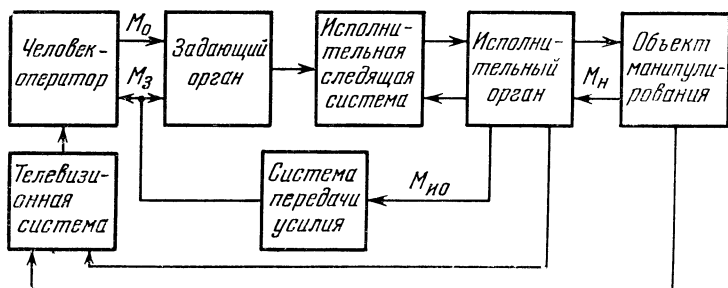


Рис. 5.1.4.

Особенность работы человека-оператора в системе управления манипулятором двустороннего действия состоит в том, что усилия, воспринимаемые оператором в процессе выполнения некоторой рабочей операции, являются случайными функциями. Связь между моментом  $M_n$  и соответствующим управляющим сигналом человека-оператора (перемещением задающего органа)  $\alpha_0(t)$  выражается в общем случае нелинейным функционалом

$$\alpha_0(t) = f(M_n(t), \alpha_n(t)),$$

зависящим также от выполняемой операции  $\alpha_n(t)$ . При исследовании установившихся случайных процессов  $\alpha_0(t)$  для заданных рабочих операций  $\alpha_n(t)$  была использована аппроксимация функционала  $f(M_n(t), \alpha_n(t)) = f_1(M_n(t))$  многочленом Эрмита — Лагерра:

$$\alpha_0(t) = \sum_{i_0, \dots, i_n=0}^N C_{i_0, \dots, i_n} \prod_{k=0}^n H_{i_k} \left( \int_0^t \hat{L}_k(\tau) M_n(\tau) d\tau \right), \quad (5.1.46)$$

где  $t \geq T$ ;  $T$  — достаточно большое (по сравнению с дли-

тельностью переходных процессов в системе) время эксперимента \*).

Коэффициенты  $C_{i_0, \dots, i_n}$  определялись по формуле (5.1.39):

$$C_{i_0, \dots, i_n} \approx \frac{1}{T} \int_0^T \alpha_0(t) \prod_{k=0}^n H_{i_k} \left( \int_0^t \hat{L}_k(\tau) \eta(\tau) d\tau \right) dt,$$

где  $\eta(\tau)$  — реализации нормального белого шума.

Коэффициент  $C_{0, \dots, 0}$  равен  $M\{\alpha_0(t)\}$ . Таким образом, выражение

$$\alpha_0(t) - M\{\alpha_0(t)\} = \varepsilon(t) =$$

$$= \sum_{i_0, \dots, i_n=0}^N C_{i_0, \dots, i_n} \prod_{k=0}^n H_{i_k} \left( \int_0^t \hat{L}_k(\tau) M_n(\tau) d\tau \right),$$

где штрих у знака суммы означает отсутствие слагаемого  $C_{0, \dots, 0}$ , характеризует случайную ошибку

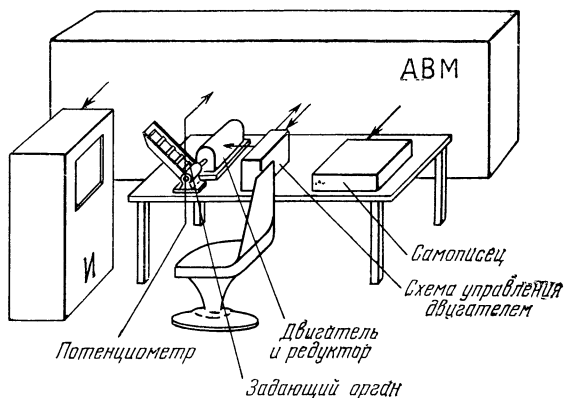


Рис. 5.1.5.

оператора  $\varepsilon(t)$  в установившемся режиме за счет действия случайного усилия  $M_n$ .

На рис. 5.1.5 показана схема лабораторной установки, предназначенной для исследования процесса управления

\*) Процесс  $\alpha_0(t)$ ,  $t > T$ , приближенно можно считать стационарным, если оператор обучен выполнению данных операций.

ления манипулятором двустороннего действия по одной степени подвижности \*). Установка включает в себя моментный загрузочный механизм, воспроизводящий на задающем органе момент  $M_n$ . Управление осуществляется движением в локтевом суставе; предплечье оператора при этом прикрепляется к задающему органу. Цель движения  $\alpha_n(t)$ , т. е. исследуемая операция задается перемещением точки на экране индикатора (И). Другая точка представляет собой координату исполнительного органа, соответствующую выбранному оператором управлению. Моделирование исполнительного органа и системы управления осуществлялось на аналоговой вычислительной машине (АВМ). Задача оператора состояла в возможно более точном выполнении заданного движения при наличии случайных моментных воздействий. Схема определения коэффициентов ряда Эрмита — Лагерра  $C_{i_0}, \dots, i_n$  с помощью этой установки приведена на рис. 5.1.6. В качестве случайных воздействий  $M_n$  применялся

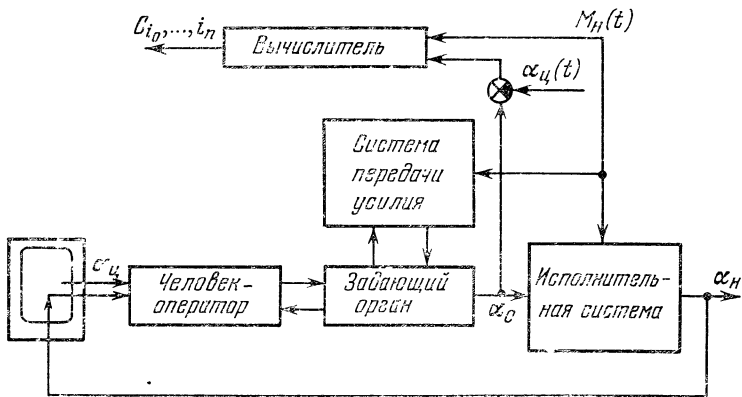


Рис. 5.1.6.

случайный сигнал, имеющий постоянную спектральную плотность в полосе пропускания человека-оператора. Использовались полиномы Лагерра и Эрмита третьего и четвертого порядков соответственно, что потребовало

\*) Лабораторная установка и методика исследований разработаны В. Л. Афониним.

определения 64 коэффициентов ряда Лагерра — Эрмита. Сравнительный анализ работы построенной математической модели (5.1.44) и работы человека-оператора при различных случайных моментных воздействиях показал хорошее совпадение получаемых характеристик. Одним из результатов этих исследований было установление границ применимости линейных моделей человека-оператора в рассматриваемой задаче. Так, при случайных моментных воздействиях со спектральной плотностью

$$S_{M_H}(\omega) = \frac{2TD}{T^2\omega^2 + 1},$$

$$D = 100 \div 1600 \text{ [кгс} \cdot \text{см]}^2,$$

$$T = 0,01 \div 1 \text{ [сек]},$$

было установлено, что при  $T > 0,1$  [сек] вполне удовлетворительные результаты (по среднеквадратическому критерию) дает линейная модель человека-оператора. При высокочастотных воздействиях проявляются нелинейные свойства оператора.

## § 2. Ортогональные функционалы Винера

В предыдущем параграфе для построения ортогональных систем функционалов использовалась система многомерных ортогональных многочленов Эрмита. Однако в пространстве квадратично интегрируемых функционалов  $L_2(X)$  можно непосредственно построить систему ортогональных функционалов, используя процесс ортогонализации Грама — Шмидта, описанный в § 2 гл. I. Воспользуемся этой процедурой для построения ортонормированной системы функционалов в пространстве  $L_2(C_0[0, T])$  с мерой Винера [10].

Вероятностная интерпретация интеграла по мере Винера, данная в § 3 гл. I, позволяет рассматривать этот интеграл как математическое ожидание функционала  $f(x)$ , вычисленного на множестве реализаций винеровского процесса  $x(t)$ :

$$\int_{C_0[0, T]} f(x) d\mu_W = M\{f(x)\}. \quad (5.2.1)$$

Таким образом, норма и скалярное произведение в

пространстве  $L_2(C_0[0, T])$  выражаются формулами

$$\|f(x)\|_{L_2(C_0)}^2 = \mathbf{M}\{f^2(x)\},$$

$$(f(x), \varphi(x)) = \mathbf{M}\{f(x), \varphi(x)\}.$$

В предыдущем параграфе было показано, что интеграл по мере Винера может быть вычислен с привлечением понятия нормального белого шума  $\eta(t)$ . Если

$$\tilde{f}(\eta(t)) = f(x(t)) = f\left(\int_0^t \eta(\tau) d\tau\right),$$

то

$$\|f(x)\|_{L_2(C_0)}^2 = \mathbf{M}\{\tilde{f}^2(\eta)\}, \quad (5.2.2)$$

$$(f(x), \varphi(x)) = \mathbf{M}\{\tilde{f}(\eta), \tilde{\varphi}(\eta)\}. \quad (5.2.3)$$

Такая вероятностная интерпретация пространства квадратично-интегрируемых функционалов более удобна для использования в этом параграфе. Будем рассматривать задачу об аппроксимации функционала  $f(\eta)$  в гильбертовом пространстве, в котором норма и скалярное произведение определяются формулами (5.2.2), (5.2.3). Из этих формул следует, что такая задача эквивалентна исходной и заключается в построении функционального многочлена  $P_N(\eta)$ , приближающего функционал  $f(\eta)$  в среднеквадратическом:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\tilde{f}(\eta) - P_N(\eta)\|^2 = \mathbf{M}\{[\tilde{f}(\eta) - P_N(\eta)]^2\}.$$

В качестве системы линейно-независимых функций  $f_n(\eta)$  в пространстве квадратично-интегрируемых функционалов выберем систему регулярных однородных функционалов

$$\left. \begin{aligned} f_0(\eta) &= k_0, \\ f_1(\eta) &= \int_0^T k_1(\tau) \eta(\tau) d\tau, \\ &\dots \dots \dots \\ f_n(\eta) &= \int_0^T \dots \int_0^T k_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^n \eta(\tau_i) d\tau_i. \end{aligned} \right\} \quad (5.2.4)$$

Здесь предполагается, что функции  $k_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$  интегрируемы с квадратом.

Если интенсивность белого шума обозначить через  $C^*$ , то

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \{f_n(\eta)\} &= \int_0^T \dots \int_0^T k_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \mathbf{M} \left\{ \prod_{i=1}^n \eta(\tau_i) \right\} d\nu_\tau = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ C^m \sum_0^T \int_0^T \dots \int_0^T k_n(\tau_1, \tau_1, \tau_2, \tau_2, \dots, \tau_m, \tau_m) d\nu_\tau, & \text{если } n \text{ четно,} \end{cases} \end{aligned}$$

где  $m=n/2$  и сумма берется для всех разбиений элементов  $\tau_1, \dots, \tau_n$  на пары; всего таких разбиений существует  $N=(n-1)(n-3)\dots 1$ . Это утверждение следует из формулы (см. § 6 гл. I)

$$\mathbf{M} \left\{ \prod_{i=1}^n \eta(\tau_i) \right\} = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ C^m \sum \prod \delta(\tau_i - \tau_j), & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases}$$

Используя полученное соотношение для  $\mathbf{M} \{f_n(\eta)\}$ , можно показать, что для существования  $\mathbf{M} \{f_n^2(\eta)\}$ , достаточно выполнения условия  $k_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \in L_2(E_+^n)$ .

Приступим к построению ортонормированной системы функционалов. Положим  $f_0(\eta) = e_0(\eta) = 1$  и найдем функционал первой степени

$$g_1(\eta) = k_{01} + \int_0^T k_1(\tau) \eta(\tau) d\tau, \quad (5.2.5)$$

ортogonalный к  $e_0(\eta)$ :

$$(g_1, e_0) = k_{01} + \int_0^T k_1(\tau) \mathbf{M} \{\eta(\tau)\} d\tau = k_{01} = 0. \quad (5.2.6)$$

Из (5.2.6) следует, что любой однородный функционал

---

\*) Для формул (5.2.2) и (5.2.3)  $C=1$ . Здесь же рассматривается более общий случай, когда  $C$  может быть не равным 1.

первой степени

$$f_1(\eta) = \int_0^T k_1(\tau) \eta(\tau) d\tau$$

ортогонален к  $e_0(x) = 1$ , а, следовательно, и ко всем однородным функционалам нулевой степени. Квадрат нормы функционала  $f_1(\eta)$  равен

$$\begin{aligned} \|f_1(\eta)\|^2 &= \int_0^T \int_0^T k_1(\tau_1) k_1(\tau_2) M\{\eta(\tau_1) \eta(\tau_2)\} d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= C \int_0^T k_1^2(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Полагая, что ядро  $k_1(\tau)$  выбрано из условия

$$\int_0^T k_1^2(\tau) d\tau = \frac{1}{C}, \quad (5.2.7)$$

получаем нормированный функционал первой степени

$$e_1(\eta) = \int_0^T k_1(\tau) \eta(\tau) d\tau, \quad (5.2.8)$$

ортогональный к функционалу нулевой степени  $e_0$ :

$$(e_1, e_0) = 0, \quad (e_1, e_1) = 1.$$

Определим функционал второй степени

$$g_2(\eta) = k_{02} + \int_0^T k_{12}(\tau) \eta(\tau) d\tau + \int_0^T \int_0^T k_2(\tau_1, \tau_2) \eta(\tau_1) \eta(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

из условия ортогональности функционалам  $e_0$  и  $e_1$ ; получим

$$(e_0, g_2) = M\{g_2(\eta)\} = k_{02} + C \int_0^T k_2(\tau, \tau) d\tau = 0,$$

откуда

$$k_{02} = -C \int_0^T k_2(\tau, \tau) d\tau. \quad (5.2.9)$$

Далее,

$$\begin{aligned} (e_1, g_2) = & \\ = & \int_0^T k_1(\tau) M \{ \eta(\tau) \} k_{02} d\tau + \int_0^T \int_0^T k_1(\tau_1) k_{12}(\tau_2) \times \\ & \times M \{ \eta(\tau_1) \eta(\tau_2) \} d\nu_\tau + \\ & + \int_0^T \int_0^T \int_0^T k_2(\tau_1, \tau_2) k_1(\tau_3) M \{ \eta(\tau_1) \eta(\tau_2) \eta(\tau_3) \} d\nu_\tau = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_0^T k_1(\tau_1) k_{12}(\tau_1) d\tau_1 = 0.$$

Поскольку  $k_1(\tau)$  — любая функция из  $L_2[0, T]$ , удовлетворяющая условию (5.2.7), то

$$k_{12}(\tau) \equiv 0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} g_2(\eta) = & k_{02} + \int_0^T \int_0^T k_2(\tau_1, \tau_2) \eta(\tau_1) \eta(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \\ = & \int_0^T \int_0^T k_2(\tau_1, \tau_2) \eta(\tau_1) \eta(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 - C \int_0^T k_2(\tau, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

Этот функционал ортогонален  $e_1(\eta)$  и  $e_0(\eta)$ , а следовательно, и любым неоднородным регулярным многочленам первой степени. Найдем квадрат нормы  $g_2(\eta)$ :

$$\begin{aligned} \|g_2(\eta)\|^2 = & \int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_0^T k_2(\tau_1, \tau_2) k_2(\tau_3, \tau_4) M \{ \eta(\tau_1) \eta(\tau_2) \eta(\tau_3) \times \\ & \times \eta(\tau_4) \} d\nu_\tau - \\ - & 2C \int_0^T \int_0^T \int_0^T k_2(\tau_1, \tau_2) k_2(\tau_3, \tau_3) M \{ \eta(\tau_1) \eta(\tau_2) \} d\nu_\tau + \\ & + C^2 \int_0^T \int_0^T k_2(\tau_1, \tau_1) k_2(\tau_2, \tau_2) d\nu = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= C^2 \int_0^T \int_0^T k_2(\tau_1, \tau_1) k_2(\tau_3, \tau_3) d\tau_1 d\tau_3 + \\
&\quad + C^2 \int_0^T \int_0^T k_2(\tau_1, \tau_2) k_2(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\
&\quad + C^2 \int_0^T \int_0^T k_2(\tau_1, \tau_2) k_2(\tau_2, \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 - \\
&\quad - 2C^2 \int_0^T \int_0^T k_2(\tau_1, \tau_1) k_2(\tau_3, \tau_3) d\tau_1 d\tau_3 + \\
&\quad + C^2 \int_0^T \int_0^T k_2(\tau_1, \tau_1) k_2(\tau_2, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \\
&\quad = 2C^2 \int_0^T \int_0^T k_2^2(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \tag{5.2.11}
\end{aligned}$$

Выбирая функцию  $k_2(\tau_1, \tau_2)$  из условия

$$\int_0^T \int_0^T k_2^2(\tau_1, \tau_2) d\tau = \frac{1}{2C^2}, \tag{5.2.12}$$

получим ортонормированный функционал второй степени

$$e_2(\eta) = \int_0^T \int_0^T k_2(\tau_1, \tau_2) \eta(\tau_1) \eta(\tau_2) d\tau - C \int_0^T k_2(\tau, \tau) d\tau. \tag{5.2.13}$$

В формуле (5.2.13) предполагается дополнительно, что  $\int_0^T k_2(\tau, \tau) d\tau < \infty$ , поскольку этот интеграл может не существовать, если функция  $k_2(\tau_1, \tau_2)$  интегрируема с квадратом.

Аналогично можно определить и другие элементы ортонормированной последовательности. В частности,

$$e_3(\eta) = \int_0^T \int_0^T \int_0^T k_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \eta(\tau_1) \eta(\tau_2) \eta(\tau_3) dv_{\tau} - \\ - 3C \int_0^T \int_0^T k_3(\tau_1, \tau_1, \tau_2) \eta(\tau_2) dv_{\tau}, \quad (5.2.14)$$

где

$$\int_0^T \int_0^T \int_0^T k_3^2(\tau_1, \tau_2, \tau_3) dv_{\tau} = \frac{1}{3!C^3}. \quad (5.2.15)$$

Несмотря на то, что здесь использовалась обычная процедура ортогонализации, результаты получаются более общими, поскольку каждое выражение  $e_n(\eta)$  определяет не один функционал, а класс нормированных функционалов. Каждый такой функционал ортогонален всем неоднородным регулярным функционалам степени  $n-1$ . Именно это обстоятельство и позволяет использовать функционалы  $e_n(\eta)$  для аппроксимации произвольного функционала  $\tilde{f}(\eta)$ .

Элементы построенной ортонормированной системы функционалов будем обозначать также  $e_n(\eta) = G_n[k_n, \eta(t)]$  и называть их *полиномами Винера*.

Остановимся на вопросе о полноте полученной ортонормированной системы функционалов  $\{e_n(\eta)\}$ . В предыдущем параграфе было показано, что любой квадратично интегрируемый функционал  $f(x) \in L_2(C_0[0, T])$  может быть приближен в среднеквадратическом последовательностью ортогональных многочленов Фурье — Эрмита  $P_n(x)$  (5.1.16). Отсюда следует, что функционал  $\tilde{f}(\eta(t))$ , соответствующий функционалу  $f(x)$ , может быть аппроксимирован многочленом

$$\tilde{P}_n(\eta) = \\ = \sum_{i_1, \dots, i_n=0}^n C_{i_1, \dots, i_n} \tilde{E}_{i_1, \dots, i_n} \left( \int_0^T e_1(t) \eta(t) dt, \dots, \int_0^T e_n(t) \times \right. \\ \left. \times \eta(t) dt \right) = \sum_{i_1, \dots, i_n=0}^n C_{i_1, \dots, i_n} \prod_{k=1}^n H_{i_k} \left( \int_0^T e_k(t) \eta(t) dt \right).$$

Раскрывая это выражение, нетрудно убедиться, что оно представляет собой регулярный многочлен. Например, при  $n=2$  получим

$$\tilde{P}_n(\eta) = \sum_{i=0}^4 \int_0^T \dots \int_0^T g_i(\tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{i=1}^4 \eta(\tau_i) d\tau_i,$$

где обозначено

$$g_0 = C_{00} - \frac{C_{20} + C_{02}}{\sqrt{2}} + \frac{C_{22}}{2},$$

$$g_1(\tau_1) = (C_{10}\sqrt{2} - C_{12}) e_1(\tau_1) + (C_{01}\sqrt{2} - C_{21}) e_2(\tau_1),$$

$$g_2(\tau_1, \tau_2) = (C_{20}\sqrt{2} - C_{22}) e_1(\tau_1) e_1(\tau_2) + \\ + (C_{02}\sqrt{2} - C_{22}) e_2(\tau_1) e_2(\tau_2) + C_{11} e_1(\tau_1) e_2(\tau_2),$$

$$g_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \\ = 2(C_{12} e_1(\tau_1) e_2(\tau_2) e_2(\tau_3) + C_{21} e_1(\tau_1) e_1(\tau_2) e_2(\tau_3)), \\ g_4(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) = 2C_{22} e_1(\tau_1) e_1(\tau_2) e_2(\tau_3) e_2(\tau_4).$$

Заметим теперь, что всякий неоднородный регулярный многочлен  $\tilde{P}_n(\eta)$  можно представить с помощью построенной выше ортонормированной последовательности  $\{e_m(\eta)\}$  в виде

$$\tilde{P}_n(\eta) = \sum_{m=0}^n e_m(\eta).$$

Следовательно, для любого квадратично интегрируемого функционала  $\tilde{f}(\eta)$  найдется последовательность  $e_m(\eta)$ , сходящаяся к  $\tilde{f}(\eta)$  в среднеквадратическом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \tilde{f}(\eta) - \sum_{m=0}^n e_m(\eta) \right\| = 0,$$

что и доказывает полноту построенной ортонормированной системы.

Для того чтобы вернуться к задаче аппроксимации в пространстве  $L_2(C_0[0, T])$ , нужно переписать полученную ортонормированную систему (при  $C=1$ )

следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} e_0 &= 1, \\ e_1(x) &= \int_0^T k_1(\tau) dx(\tau), \\ e_2(x) &= \int_0^T \int_0^T k_2(\tau_1, \tau_2) dx(\tau_1) dx(\tau_2) - \int_0^T k_2(\tau, \tau) d\tau, \\ e_3(x) &= \int_0^T \int_0^T \int_0^T k_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) dx(\tau_1) dx(\tau_2) dx(\tau_3) - \\ &\quad - 3 \int_0^T \int_0^T k_3(\tau_1, \tau_1, \tau_2) dx(\tau_2) d\tau_1, \\ &\dots \end{aligned} \right\} (5.2.16)$$

Интегралы в этих формулах являются интегралами Пэли — Винера — Зигмунда.

Система (5.2.16) является полной, и поэтому для любого функционала  $f(x) \in L_2(C_0[0, T])$  можно записать:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f(x) - \sum_{m=0}^n e_m(x) \right\|_{L_2(C_0[0, T])} = 0.$$

Рассмотрим теперь вопрос об определении ядер ортонормированной системы функционалов  $G_m[k_m, \eta(t)]$ , аппроксимирующих в среднеквадратическом функционал  $\tilde{f}[\eta(t)]$ :

$$\tilde{f}[\eta(t)] = \sum_{m=0}^{\infty} G_m[k_m, \eta(t)]. \quad (5.2.17)$$

Пусть  $f_n(\eta)$  — некоторый однородный многочлен степени  $n$ . Учитывая, что

$$(G_m[k_m, \eta], f_n(\eta)) = 0 \text{ при } m > n,$$

из (5.2.17) получим

$$(\tilde{f}(\eta), f_n(\eta)) = \left( \sum_{m=0}^n G_m[k_m, \eta], f_n(\eta) \right). \quad (5.2.18)$$

В качестве  $f_n(\eta)$  могут быть, в частности, использованы однородные функционалы следующего вида [54]:

$$\begin{aligned} f_n(\eta) &= \\ &= \int_0^T \dots \int_0^T \delta(\tau_1 - \sigma_1) \delta(\tau_2 - \sigma_2) \dots \delta(\tau_n - \sigma_n) \prod_{i=1}^n \eta(\tau_i) d\tau = \\ &= \prod_{i=1}^n \eta(\sigma_i), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.2.19) \end{aligned}$$

В этом случае при  $n=0$  из (5.2.18) получим

$$G_0[k_0, \eta] = \mathbf{M}\{\tilde{f}(\eta)\} = k_0.$$

При  $n=1$  будем иметь

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\eta), f_1(\eta) &= (G_0[k_0, \eta], f_1(\eta)) + (G_1[k_1, \eta], f_1(\eta)) = \\ &= \mathbf{M}\{\eta(\sigma)\} + \int_0^T k_1(\tau) \mathbf{M}\{\eta(\tau) \eta(\sigma)\} d\tau = Ck_1(\sigma). \quad (5.2.20) \end{aligned}$$

Выбирая различные значения  $\sigma_1$  и вычисляя для каждого из них значения

$$(\tilde{f}(\eta), f_1(\eta)) = (\tilde{f}(\eta), \eta(\sigma)) = \mathbf{M}\{\tilde{f}(\eta), \eta(\sigma)\},$$

получим ядро первого порядка  $k_1(\sigma)$ .

При  $n=2$  формула (5.2.18) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\eta), f_2(\eta) &= \\ &= (G_0[k_0, \eta], f_2(\eta)) + (G_1[k_1, \eta], f_2(\eta)) + (G_2[k_2, \eta], f_2(\eta)) = \\ &= k_0 \mathbf{M}\{\eta(\sigma_1) \eta(\sigma_2)\} + \int_0^T k_1(\tau) \mathbf{M}\{\eta(\sigma_1) \eta(\sigma_2) \eta(\tau)\} d\tau + \\ &+ \int_0^T \int_0^T k_2(\tau_1, \tau_2) \mathbf{M}\{\eta(\tau_1) \eta(\tau_2) \eta(\sigma_1) \eta(\sigma_2)\} d\tau_1 d\tau_2 - \\ &- C \int_0^T k_2(\tau, \tau) d\tau \mathbf{M}\{\eta(\sigma_1) \eta(\sigma_2)\} = k_0 C \delta(\sigma_1 - \sigma_2) + \\ &+ C^2 \int_0^T \int_0^T k_2(\tau_1, \tau_2) [\delta(\tau_1 - \tau_2) \delta(\sigma_1 - \sigma_2) + \\ &+ \delta(\tau_1 - \sigma_1) \delta(\tau_2 - \sigma_2) + \delta(\tau_1 - \sigma_2) \delta(\tau_2 - \sigma_1)] d\tau_1 d\tau_2 - \\ &- C^2 \delta(\sigma_1 - \sigma_2) \int_0^T k_2(\tau, \tau) d\tau = 2C^2 k_2(\sigma_1, \sigma_2) + k_0 C \delta(\sigma_1 - \sigma_2). \end{aligned}$$

При  $\sigma_1 \neq \sigma_2$  отсюда получим

$$k_2(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2C^2} \mathfrak{M} \left\{ \tilde{f}(\eta) \prod_{i=1}^2 \eta(\sigma_i) \right\}.$$

Пользуясь аналогичной методикой, для произвольно-го  $n=1, 2, \dots$  нетрудно вывести такую формулу:

$$k_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \frac{1}{n!C^n} \mathfrak{M} \left\{ \tilde{f}(\eta) \prod_{i=1}^n \eta(\sigma_i) \right\} \quad (5.2.21)$$

при  $\sigma_1 \neq \dots \neq \sigma_n$ .

Ограничение  $\sigma_1 \neq \dots \neq \sigma_n$  при практических расчетах обычно не является существенным, поскольку значения  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ , при которых вычисляется ядро  $k_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ , могут быть выбраны сколь угодно близко к значениям, соответствующим условию  $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_n$ . Если же требуется найти значения ядра и при  $\sigma_1 = \dots = \sigma_n = \sigma_n$ , то в формуле (5.2.18) вместо  $\tilde{f}(\eta)$  надо положить  $\tilde{f}(\eta) - \sum_{m=0}^{n-1} G_m[k_m, \eta]$ . В этом случае

$$\left( \tilde{f}(\eta) - \sum_{m=0}^{n-1} G_m[k_m, \eta], f_n(\eta) \right) \in (G_n[k_n, \eta], f_n(\eta)).$$

Выбирая однородный функционал вида (5.2.19), получим следующую формулу для определения ядер:

$$\begin{aligned} k_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) &= \\ &= \frac{1}{n!C^n} \mathfrak{M} \left\{ \left( \tilde{f}(\eta) - \sum_{m=0}^{n-1} G_m[k_m, \eta] \right) \prod_{i=1}^n \eta(\sigma_i) \right\}. \end{aligned} \quad (5.2.22)$$

В общем случае, обозначив ядро однородного функционала  $f_n(\eta)$  через  $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ , будем иметь такое соотношение:

$$\begin{aligned} &\int_0^T \dots \int_0^T k_n(\tau_1, \dots, \tau_n) h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) d\tau = \\ &= \frac{1}{n!C^n} \mathfrak{M} \left\{ \left( \tilde{f}(\eta) - \sum_{m=0}^{n-1} G_m[k_m, \eta] \right) f_n(\eta) \right\}. \end{aligned} \quad (5.2.23)$$

Если положить [10]

$$h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = \varphi_{i_1}(\tau_1) \dots \varphi_{i_n}(\tau_n),$$

где  $\varphi_i(\tau)$  — ортонормальная система функций на отрезке  $[0, T]$ , то из последней формулы найдем коэффициенты Фурье  $\alpha_{i_1, \dots, i_n}$  разложения ядра  $k_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$  в ряд Фурье

$$\begin{aligned} \alpha_{i_1, \dots, i_n} = & \frac{1}{n!C^n} \mathfrak{M} \left\{ \left( \tilde{f}(\eta) - \sum_{m=0}^{n-1} G_m[k_m, \eta] \right) \times \right. \\ & \left. \times \int_0^T \dots \int_0^T \varphi_{i_1}(\tau_1) \dots \varphi_{i_n}(\tau_n) \eta(\tau_1) \dots \eta(\tau_n) d\nu_\tau \right\}. \end{aligned} \quad (5.2.24)$$

При этом ядро  $k_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$  будет аппроксимировано частной суммой ряда Фурье

$$k_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \simeq \sum_{i_1, \dots, i_n=0}^N \alpha_{i_1, \dots, i_n} \varphi_{i_1}(\tau_1) \dots \varphi_{i_n}(\tau_n).$$

Функцию  $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$  можно определить также следующим образом [10]:

$$\begin{aligned} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = & \\ = & \begin{cases} 1 & \text{при } \tau_k (1 \leq k \leq n), \text{ таких, что } t_k < \tau_k < t_k + \varepsilon; \\ 0 & \text{при всех остальных } \tau_k (1 \leq k \leq n). \end{cases} \end{aligned} \quad (5.2.25)$$

Функция  $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ , очевидно, симметрична. Подставляя эту функцию в формулу (5.2.23), получим, применяя теорему о среднем,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!C^n} \mathfrak{M} \left\{ \left( \tilde{f}(\eta) - \sum_{m=0}^{n-1} G_m[k_m, \eta] \right) f_n(\eta) \right\} = \\ = \int_{t_1}^{t_1+\varepsilon} \dots \int_{t_n}^{t_n+\varepsilon} k_n(\tau_1, \dots, \tau_n) d\nu_\tau = \varepsilon^n \mu_\varepsilon, \end{aligned} \quad (5.2.26)$$

где  $\mu_\varepsilon$  — это среднее значение ядра  $k_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$  в области интегрирования.

Принимая во внимание, что  $k_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \in L_2(E_+^n)$ , нетрудно показать, что эти средние значения сходятся к ядру в среднем и, значит, последнее соотношение позволяет найти аппроксимацию искомого ядра.

Если функционал рассматривается в пространстве  $L_2(C_0[0, T])$ , то учитывая связь функционалов (5.2.16) с функционалами от белого шума, нетрудно получить формулы, аналогичные соотношениям (5.2.22), (5.2.24) и (5.2.26), а именно:

$$\left. \begin{aligned}
 k_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) &= \\
 &= \frac{1}{n!} \mathbb{M} \left\{ \left( f(x) - \sum_{m=0}^{n-1} e_m(x) \right) \times \right. \\
 &\times \int_0^T \dots \int_0^T \delta(\tau_1 - \sigma_1) \dots \delta(\tau_n - \sigma_n) dx(\tau_1) \dots dx(\tau_n) \Big\}, \\
 \alpha_{i_1, \dots, i_n} &= \frac{1}{n!} \mathbb{M} \left\{ \left( f(x) - \sum_{m=0}^{n-1} e_m(x) \right) \times \right. \\
 &\times \int_0^T \dots \int_0^T \varphi_{i_1}(\tau_1) \dots \varphi_{i_n}(\tau_n) dx(\tau_1) \dots dx(\tau_n) \Big\}, \\
 \mu_\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon^n n!} \mathbb{M} \left\{ \left( f(x) - \sum_{m=0}^{n-1} e_m(x) \right) f_n(x) \right\},
 \end{aligned} \right\} \quad (5.2.27)$$

причем в последней формуле ядро однородного функционала  $f_n(x)$  определяется соотношением (5.2.25).

Получим оценку точности приближения функционалов системой ортогональных полиномов Винера. С этой целью определим математическое ожидание от квадрата функционала  $\tilde{f}(\eta)$

$$\tilde{f}(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n[k_n, \eta(t)]. \quad (5.2.28)$$



Учитывая ортогональность полиномов Винера

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \{G_n [k_n, \eta(t)] G_m [k_m, \eta(t)]\} = \\ = \begin{cases} n! C^n \int_0^T \dots \int_0^T k_n^2(\tau_1, \dots, \tau_n) d\mathbf{v}_\tau, & n = m, \\ 0, & n \neq m, \end{cases} \end{aligned}$$

получим формулу, являющуюся аналогом равенства Парсеваля для полиномов Винера

$$\mathbb{M} \{\tilde{f}^2(\eta)\} = \sum_{n=0}^{\infty} n! C^n \int_0^T \dots \int_0^T k_n^2(\tau_1, \dots, \tau_n) d\mathbf{v}_\tau. \quad (5.2.29)$$

Из этой формулы следует оценка среднеквадратической ошибки, возникающей при сохранении в ряде (5.2.28) только  $N$  первых членов

$$\Delta^2 = \mathbb{M} \{\tilde{f}^2(\eta)\} - \sum_{n=0}^N n! C^n \int_0^T \dots \int_0^T k_n^2(\tau_1, \dots, \tau_n) d\mathbf{v}_\tau. \quad (5.2.30)$$

С учетом равенства (5.1.36) при использовании ортонормированной системы функционалов (5.2.16) аналогичную формулу можно записать в виде

$$\Delta^2 = \mathbb{M} \{f^2(x(t))\} - \sum_{n=0}^N n! \int_0^T \dots \int_0^T k_n^2(\tau_1, \dots, \tau_n) d\mathbf{v}_\tau, \quad (5.2.31)$$

где  $\mathbb{M} \{f^2(x(t))\}$  — среднее от квадрата функционала  $f(x)$  по множеству реализаций винеровского процесса  $x(t)$ .

Если ядра  $k_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$  разлагаются в ряд Фурье и для определения коэффициентов  $\alpha_{i_1, \dots, i_n}$  этого ряда используется формула (5.2.24), то в этом случае формула (5.2.29) примет такой вид:

$$\mathbb{M} \{\tilde{f}^2(\eta)\} = \sum_{n=0}^{\infty} n! C^n \left( \sum_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty} \alpha_{i_1, \dots, i_n}^2 \right)$$

и оценка ошибки аппроксимации может быть вычислена так:

$$\Delta^2 = M \{ \tilde{f}^2(\eta) \} - \sum_{n=0}^N n! C^n \left( \sum_{i_1, \dots, i_n=0}^M \alpha_{i_1, \dots, i_n}^2 \right).$$

Рассмотрим теперь применение метода Винера для решения задачи идентификации. Как уже отмечалось, оператор, описывающий соответствие между входным и выходным процессами в рассматриваемом объекте, может быть задан однопараметрическим семейством функционалов. Если эти функционалы могут быть аппроксимированы полиномами Винера, то тем самым будет получена аппроксимация оператора.

Пусть искомым оператор является стационарным. Тогда, если входной процесс является нормальным белым шумом интенсивности  $C$ , этот оператор может быть аппроксимирован с помощью ортогональной системы

$$\left. \begin{aligned} G_0 &= k_0, \\ G_1[k_1, \eta(t)] &= \int_{E^1} k_1(\tau) \eta(t - \tau) d\tau, \\ G_2[k_2, \eta(t)] &= \int_{E^2} k_2(\tau_1, \tau_2) \eta(t - \tau_1) \eta(t - \tau_2) d\nu_{\tau} - \\ &\quad - C \int_{E^1} k_2(\tau, \tau) d\tau, \\ G_3[k_3, \eta(t)] &= \\ &= \int_{E^3} k_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \eta(t - \tau_1) \eta(t - \tau_2) \eta(t - \tau_3) d\nu_{\tau} - \\ &\quad - 3C \int_{E^2} k_3(\tau_1, \tau_1, \tau_2) \eta(t - \tau_2) d\nu_{\tau}, \dots, \end{aligned} \right\} \quad (5.2.32)$$

которая получается из построенной выше системы заменой аргументов  $\tau_i$  у функций  $\eta(\tau_i)$  на  $t - \tau_i$ . Система (5.2.32), очевидно, тоже ортогональна и, кроме того,

некоррелирована, т. е.

$$\begin{aligned} & \mathbb{M} \{G_m [k_m, \eta(t)] G_n [k_n, \eta(t + \sigma)]\} = \\ & = \begin{cases} n! C^n \int_{E^n} k_n(\tau_1, \dots, \tau_n) k_n(\tau_1 + \sigma, \dots, \tau_n + \sigma) dv_\tau & \text{при } n = m, \\ 0 & \text{при } n \neq m. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.2.33)$$

Из последнего свойства вытекает, что корреляционная функция  $K_{yy}(\sigma)$  сигнала на выходе объекта идентификации

$$y(t) = \tilde{f}[\eta(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} G_n [k_n, \eta(t)] \quad (5.2.34)$$

может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} K_{yy}(\sigma) &= \mathbb{M} \{ \tilde{f}[\eta(t)] \tilde{f}[\eta(t + \sigma)] \} - [\mathbb{M} \{ \tilde{f}[\eta(t)] \}]^2 = \\ &= \mathbb{M} \{ \tilde{f}[\eta(t)] \tilde{f}[\eta(t + \sigma)] \} - m_y^2 = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n! C^n \int_{E^n} k_n(\tau_1, \dots, \tau_n) k_n(\tau_1 + \sigma, \dots, \tau_n + \sigma) dv_\tau; \end{aligned}$$

соответственно, дисперсия  $D_y$  равна

$$D_y = K_{yy}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} n! C^n \int_{E^n} k_n^2(\tau_1, \dots, \tau_n) dv_\tau. \quad (5.2.35)$$

Оценка ошибки аппроксимации теперь записывается так:

$$\Delta^2 = D_y - \sum_{n=1}^N n! C^n \int_{E^n} k_n^2(\tau_1, \dots, \tau_n) dv_\tau. \quad (5.2.36)$$

Ядра  $k_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$  полиномов Винера могут быть определены по формулам, которые легко получаются из соотношений (5.2.21), (5.2.22), (5.2.24) и (5.2.26):

$$k_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \frac{1}{n! C^n} \mathbb{M} \left\{ \tilde{f}[\eta(t)] \prod_{i=1}^n \eta(t - \sigma_i) \right\}, \quad (5.2.37)$$

при  $\sigma_1 \neq \dots \neq \sigma_2$  (схема измерений, соответствующая этой формуле, приведена на рис. 5.2.1),

$$k_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \frac{1}{n! C^n} M \left\{ \left( \tilde{f}[\eta(t)] - \sum_{m=0}^{n-1} G_m[k_m, \eta(t)] \right) \prod_{i=1}^n \eta(t - \sigma_i) \right\}, \quad (5.2.38)$$

$$\alpha_{i_1, \dots, i_n} = \frac{1}{n! C^n} M \left\{ \left( \tilde{f}[\eta(t)] - \sum_{m=0}^n G_m[k_m, \eta(t)] \right) \times \right. \\ \left. \times \int_0^T \dots \int_0^T \varphi_{i_1}(\tau_1) \dots \varphi_{i_n}(\tau_n) \eta(t - \tau_1) \dots \eta(t - \tau_n) d\nu_\tau \right\}, \quad (5.2.39)$$

$\mu_\varepsilon =$

$$= \frac{1}{n! C^n} M \left\{ \left( \tilde{f}[\eta(t)] - \sum_{m=0}^n G_m[k_m, \eta(t)] \right) f_n[\eta(t)] \right\}. \quad (5.2.40)$$

В последней формуле ядро оператора  $f_n[\eta(t)]$  определяется формулой (5.2.25).

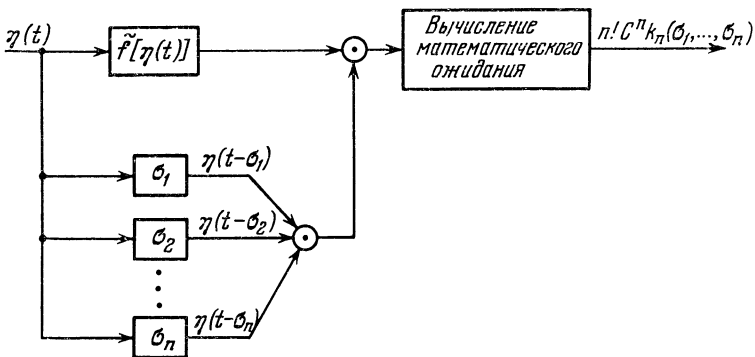


Рис. 5.2.1.

Совершенно аналогично можно получить ортогональную систему, оценку точности и формулы определения ядер для операторов, заданных на винеровском процессе.

Для этого достаточно в формулах (5.2.16) заменить аргументы  $\tau_i$  у  $x(\tau_i)$  на  $t - \tau_i$ . Ввиду эргодичности белого шума и винеровского процесса для стационарных систем в установившихся режимах в полученных формулах можно перейти к усреднению по времени.

Для исследования стационарных систем, описываемых рядами Вольтерра, применяется многомерное преобразование Фурье (гл. III). Поэтому представляет интерес непосредственное получение изображений по Фурье ядер нелинейной системы  $k_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ . Рассмотрим возможность применения для этой цели так называемого «быстрого преобразования Фурье» [117].

Обозначим через  $y_T(t)$  «усеченную» реализацию случайного процесса  $y(t) = f[\eta(t)]$ :

$$y_T(t) = P_T y(t),$$

где  $P_T$  — оператор сечения (см. § 1 гл. I). Соответственно обозначим

$$Y_T(j\omega) = \int_0^T y_T(t) \exp(-j\omega t) dt,$$

$$H_T^*(j\omega) = \int_0^T \eta_T(t) \exp(j\omega t) dt.$$

Используя формулу (5.2.37) и применяя гипотезу эргодичности, для некоторого конечного значения времени усреднения  $T$  можно получить оценки для изображений по Фурье ядер  $k_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ . Применяя преобразование Фурье к обеим частям равенств (5.2.37), будем иметь:

$$\tilde{K}_n(j\omega_1, \dots, j\omega_n) = \frac{1}{T^n! C^n} Y_T \left( j \sum_{i=1}^n \omega_i \right) \prod_{i=1}^n H_T^*(j\omega_i), \quad (5.2.41)$$

$$\omega_1 \neq \dots \neq \omega_n.$$

При этом функции  $H_T^*(j\omega)$ ,  $V_T(j\omega)$  могут быть вычислены с помощью «быстрого преобразования Фурье» [5].

Полученные формулы позволяют определить изображения по Фурье ядер ряда Вольтерра для исследуемой системы без предварительных вычислений во временной области.

Использование «быстрого преобразования Фурье» существенно уменьшает объем вычислений, необходимый для определения характеристик системы. Можно показать [117], что снижение объема вычислений по сравнению с методом, рассмотренным выше, выражается величиной приблизительно  $\frac{n!}{2} N$ , где  $n$  — порядок ядра, а  $N$  — число точек по каждой из  $n$  переменных, в которых вычисляется ядро. Эта величина, а значит, и эффективность метода «быстрого преобразования Фурье» по сравнению с другими, изложенными выше, методами быстро возрастает с ростом порядка измеряемого ядра.

Однако следует обратить внимание на то, что оценки (5.2.41) не являются в общем случае состоятельными [55]. Для того чтобы получить состоятельные оценки для изображений по Фурье, необходимо ввести процедуру усреднения по множеству. Заметим, что формула (5.2.37) для ядра первого порядка в силу несмещенности оценки может быть переписана в виде

$$k_1(\sigma) \simeq \frac{1}{CT} \int_0^T M \{y(t) \eta(t - \sigma)\} dt.$$

Переходя к изображениям по Фурье при каждом конечном значении  $T$ , будем иметь:

$$K_1(j\omega) \simeq \frac{1}{CT} M \{Y_T(j\omega) N_T^*(j\omega)\} = \frac{1}{T} M \{\tilde{K}_1(j\omega)\}.$$

Аналогично при  $\omega_1 \neq \omega_2 \neq \dots \neq \omega_n$

$$K_n(j\omega_1, \dots, j\omega_n) \simeq \frac{1}{T} M \{\tilde{K}_n(j\omega_1, \dots, j\omega_n)\}.$$

Полагая здесь  $T$  достаточно большим, получим изображения ядер  $K_n(j\omega_1, \dots, j\omega_n)$  как математическое ожидание величин  $\tilde{K}_n(j\omega_1, \dots, j\omega_n)$ .

При вычислении изображений ядер по Фурье  $K_n(j\omega_1, \dots, j\omega_n)$  целесообразно воспользоваться формулой, определяющей среднеквадратическую ошибку аппроксимации через эти изображения. Предварительно найдем автокорреляционную функцию сигнала на выходе системы, описываемой рядом из полиномов Винера с помощью формулы Парсевала для многомерного

преобразования Фурье [102]:

$$\begin{aligned} K_{yy}(\sigma) &= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n! C^n \int_{E^n} k_n(\tau_1, \dots, \tau_n) k_n(\tau_1 + \sigma, \dots, \tau_n + \sigma) dv_{\tau} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{C}{2\pi}\right)^n \int_{E^n} |K_n(j\omega_1, \dots, j\omega_n)|^2 \exp\left(j\sigma \sum_{i=1}^n \omega_i\right) dv_{\omega}. \end{aligned}$$

Обозначив

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{E^n} |K_n(j\omega_1, \dots, j\omega_n)|^2 \exp\left(j\sigma \sum_{i=1}^n \omega_i\right) dv_{\omega} &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{E^1} \Gamma_n(j\omega) \exp(j\omega\sigma) d\omega, \end{aligned}$$

где положено  $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i$  и  $\Gamma_n(j\omega) = \{|K_n(j\omega_1, \dots, j\omega_n)|^2\}^*$ , получим следующее выражение для автокорреляционной функции:

$$K_{yy}(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{E^1} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n! C^n \Gamma_n(j\omega) \right\} \exp(j\omega\sigma) d\omega. \quad (5.2.42)$$

Дисперсию выходного сигнала  $y(t)$  можно определить, положив в последней формуле  $\sigma=0$ :

$$D_y = K_{yy}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{E^1} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n! C^n \Gamma_n(j\omega) \right\} d\omega.$$

Заметим, что спектральную плотность сигнала  $y(t)$  можно определить по формуле

$$\Phi_y(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} n! C^n \Gamma_n(j\omega).$$

Ошибка, получающаяся при сохранении в ряде Винера (5.2.17)  $N$  первых членов, может быть записана

следующим образом:

$$\Delta^2 = M \{j^2 [\eta(t), t]\} - \frac{1}{2\pi} \int_{E'} \sum_{n=1}^N n! C^n \Gamma_n(j\omega) d\omega,$$

В этом параграфе была рассмотрена процедура построения систем ортогональных функционалов, заданных в некотором условном пространстве, образованном выборочными функциями нормального белого шума. При этом среднеквадратическая ошибка между значениями заданного функционала и аппроксимирующего полинома является минимальной, если усреднение происходит по множеству реализаций нормального белого шума. В практических задачах может оказаться, что сигнал на входе исследуемой системы хотя и является нормальным процессом, но считать этот сигнал белым шумом нельзя. Приведем обобщение изложенной методики на этот случай [54]. Рассмотрим систему  $N$ , структурная схема которой изображена на рис. 5.2.2, с входным

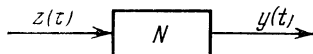


Рис. 5.2.2.

сигналом  $z(t)$ , представляющим собой нормальный процесс с дробно-рациональной спектральной плотностью  $\Phi_z(\omega)$ . Дробно-рациональную спектральную плотность  $\Phi_z(\omega)$  можно записать в таком виде:

$$\Phi_z(\omega) = \Phi_z(j\omega) \Phi_z(-j\omega), \quad (5.2.43)$$

где функция  $\Phi_z(j\omega)$  имеет все полюса и нули в верхней полуплоскости и обладает всеми свойствами амплитудно-фазовой частотной характеристики линейного фильтра [69].

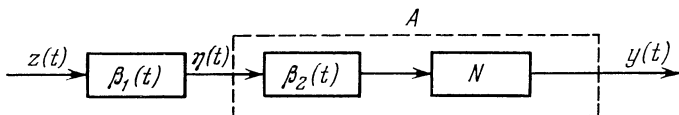


Рис. 5.2.3.

Систему на рис. 5.2.2 можно представить тогда в эквивалентной форме (рис. 5.2.3), где амплитудно-фа-



зовые частотные характеристики двух линейных систем с весовыми функциями  $\beta_1(t)$  и  $\beta_2(t)$  имеют вид

$$W_1(j\omega) = \frac{1}{\Phi_z(j\omega)}, \quad W_2(j\omega) = \Phi_z(j\omega). \quad (5.2.44)$$

Таким образом, система  $A$  образуется последовательным соединением линейной системы с импульсной переходной функцией  $\beta_2(t)$  и исходной системы  $N$ . Тогда  $\eta(t)$  — входной сигнал системы  $A$  — представляет собой нормальный белый шум с единичной интенсивностью.

В соответствии с (5.2.37) ядра Винера будут иметь вид

$$k_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = \frac{1}{n!} \mathbb{M} \{y(t) \eta(t - \tau_1) \dots \eta(t - \tau_n)\}, \quad (5.2.45)$$

за исключением случая, когда два или более значений  $\tau_i$  равны. Из (5.2.45) видно, что для определения  $k_n$  необходимо знать функцию

$$m_{y\eta}^{(1,n)}(\tau_1, \dots, \tau_n) = \mathbb{M} \{y(t) \eta(t - \tau_1) \dots \eta(t - \tau_n)\}. \quad (5.2.46)$$

Выразим искомую функцию  $m_{y\eta}^{(1,n)}$  через взаимный момент порядка  $n$  между выходным сигналом  $y(t)$  и сигналом  $z(t)$ .

При подстановке соотношения

$$\eta(t) = \int_{E^1} \beta_1(\sigma) z(t - \sigma) d\sigma \quad (5.2.47)$$

в уравнение для  $m_{y\eta}^{(1,n)}$  получим следующую формулу:

$$m_{y\eta}^{(1,n)}(\tau_1, \dots, \tau_n) = \int_{E^1_+} \beta_1(\sigma_1) d\sigma_1 \dots \int_{E^1_+} \beta_1(\sigma_n) d\sigma_n m_{yz}^{(1,n)}(\tau_1 - \sigma_1, \dots, \tau_n - \sigma_n), \quad (5.2.48)$$

где обозначено

$$m_{yz}^{(1,n)}(\tau_1, \dots, \tau_n) = \mathbb{M} \{y(t) z(t + \tau_1) \dots z(t + \tau_n)\}.$$

В частотной области равенство (5.2.48) можно представить в виде

$$\Phi_{y\eta}^{(1,n)}(\omega_1, \dots, \omega_n) = W_1(j\omega_1) \dots W_1(j\omega_n) \Phi_{yz}^{(1,n)}(\omega_1, \dots, \omega_n), \quad (5.2.49)$$

где  $\Phi_{yz}^{(1,n)}(\omega_1, \dots, \omega_n)$  и  $\Phi_{y\eta}^{(1,n)}(\omega_1, \dots, \omega_n)$  — взаимные спектральные плотности, а амплитудно-фазовая частотная характеристика  $W_1(j\omega)$  определяется формулой

$$W_1(j\omega) = \int_{E^1} \beta_1(t) \exp(-j\omega t) dt.$$

Подставив  $W_1(j\omega)$  в формулу (5.2.49), получим искомое выражение в частотной области

$$\Phi_{y\eta}^{(1,n)}(\omega_1, \dots, \omega_n) = \frac{\Phi_{yz}^{(1,n)}(\omega_1, \dots, \omega_n)}{\Phi_z(j\omega_1) \dots \Phi_z(j\omega_n)}. \quad (5.2.50)$$

Для определения ядер  $k_n$  или их изображений по Фурье в уравнении (5.2.45) через измеренную функцию  $m_{yz}^{(1,n)}$  можно использовать равенство (5.2.48) или (5.2.50).

После того как ядра  $k_n$  определены, система  $N$  имеет вид, изображенный на рис. 5.2.4. Модифицированное представление этой системы показано на рис. 5.2.5.

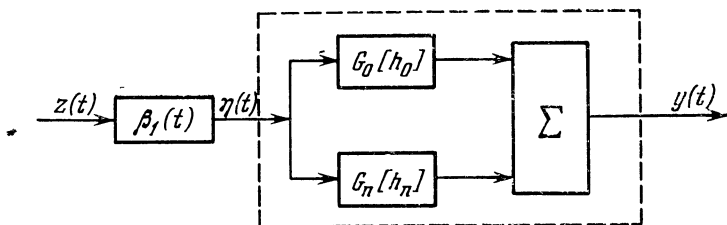


Рис. 5.2.4.

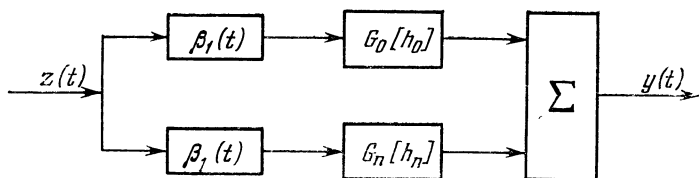


Рис. 5.2.5.

Таким образом, нелинейная система  $N$  разложена в ряд из функционалов, которые ортогональны для

гауссовых входных сигналов со спектральной плотностью  $\Phi_z(\omega)$ .

Покажем, каким образом можно построить функционалы, ортогональные относительно  $z(t)$ , не прибегая к построению дополнительных линейных систем с весовыми функциями  $\beta_1(t)$  и  $\beta_2(t)$ . Это можно сделать подстановкой формулы (5.2.47) в (5.2.32). Обозначим эти функционалы через  $\kappa_n$ . Первые три функционала имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \kappa_0 [k_0, z(t)] &= k_0, \\ \kappa_1 [k_1, z(t)] &= \int_{E^2} k_1(\sigma) \beta_1(\tau - \sigma) z(t - \tau) d\sigma d\tau, \\ \kappa_2 [k_2, z(t)] &= \int_{E^4} k_2(\sigma_1, \sigma_2) \beta_1(\tau_1 - \sigma_1) \beta_1(\tau_2 - \sigma_2) \times \\ &\quad \times z(t - \tau_1) z(t - \tau_2) d\sigma_1 d\sigma_2 d\tau_1 d\tau_2 - \\ &\quad - \int_{E^2} k_2(\sigma, \sigma) d\sigma, \end{aligned} \right\} (5.2.51)$$

где

$$\beta_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{E^1} \frac{1}{\Phi_z(j\omega)} \exp(j\omega t) dt.$$

Выходной сигнал системы  $N$ , выраженный через эти функционалы, при входном сигнале  $z(t)$  может быть представлен ортогональным разложением

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \kappa_n [k_n, z(t)], \quad (5.2.52)$$

причем, как и в формуле (5.2.17), сходимость здесь среднеквадратичная.

Для проверки того, может ли реальный нормальный процесс, поступающий на объект, считаться белым шумом, можно применить следующий простой эксперимент. На вход объекта последовательно подаются гармонические воздействия с различной частотой и амплитудой и определяется «полоса пропускания» объекта так же, как это осуществляется в теории линейных систем [55]. Если спектральная плотность входного сигнала постоянна в пределах этой «полосы пропускания», то сигнал можно считать белым шумом.



образуют полную ортонормированную систему в  $L_2(X)$ . Полученная выше система ортонормированных функционалов Винера может быть также получена с помощью этих формул.

Разложения по ортогональным полиномам Винера, как и ряды Фурье — Эрмита (см. § 1 этой главы), могут быть использованы для исследования сложных технических, биологических и биотехнических систем.

Рассмотрим методику лабораторного эксперимента для определения ядер Винера, характеризующего поведение человека-оператора в следящей системе [134]. При этом необходимо, во-первых, сформировать в лабораторных условиях случайный процесс  $x(t)$ , удовлетворяющий заданным свойствам, во-вторых, найти способ предъявления человеку процесса  $x(t)$  и, в-третьих, найти способ регистрации реакции человека  $y(t)$  на процесс  $x(t)$ .

Прежде всего рассмотрим формирование случайного процесса  $x(t)$ . Этот процесс должен иметь постоянную спектральную плотность и нормальный закон распределения. Для многих практических задач представляет интерес случайный процесс с спектральной плотностью, постоянной в полосе частот  $\omega = 0 \div 50 \cdot 2\pi$  рад/сек. Для получения реализации случайного процесса можно использовать электронный генератор, основанный на применении дробового эффекта тиратрона. Схема такого генератора может быть представлена следующим образом (рис. 5.2.6).

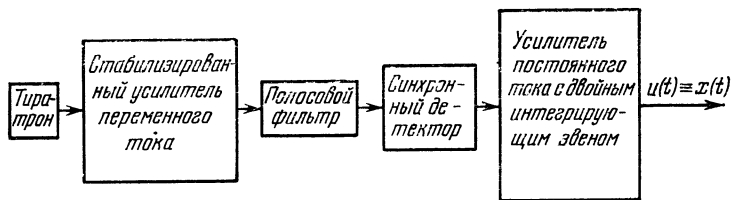


Рис. 5.2.6.

Переменная составляющая напряжения, снимаемого с анода тиратрона, имеет постоянный уровень спектральной плотности лишь на частотах выше 300 гц, и поэтому после усиления сигнала с тиратрона он подается на по-

лосовой фильтр с частотной характеристикой, вид которой показан на рис. 5.2.7.

Сигнал на выходе полосового фильтра детектируется с помощью синхронного детектора с частотой  $f=400$  гц.

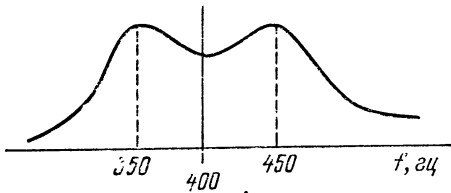


Рис. 5.2.7.

В результате детектирования получаем частотную характеристику, представленную на рис. 5.2.8.

Добротность полосового фильтра выбирается таким образом, чтобы превышение резонансного пика частотной характеристики над уровнем 0 дб было равно 12 дб.

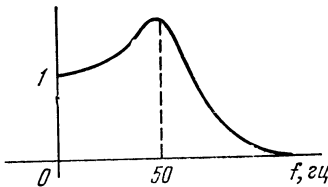


Рис. 5.2.8.

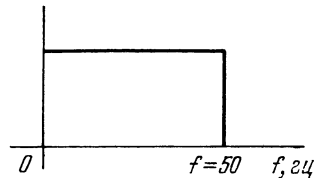


Рис. 5.2.9.

Тогда использование операционного усилителя постоянного тока с двумя интегрирующими цепями с одинаковой постоянной времени  $1/50$  сек обеспечивает равномерность частотной характеристики в полосе  $0 \div 50$  гц и ее наклон  $80$  дб/сек, что практически соответствует частотной характеристике, изображенной на рис. 5.2.9.

Следовательно, на выходе такого генератора случайного процесса получается сигнал, спектральная плотность которого имеет постоянный уровень  $C$  в полосе частот от 0 до 50 гц. При необходимости эта полоса может быть расширена уменьшением постоянной времени полосового фильтра.

Таким образом, с помощью генератора можно получить реализации случайного процесса, зафиксированные на осциллографической бумаге, либо каким-то другим способом.

Теперь рассмотрим, каким образом в лабораторных условиях можно предъявить случайный процесс  $x(t)$  человеку и зарегистрировать его реакцию  $y(t)$ . Здесь возможны различные варианты, например, отслеживание реализации процесса с помощью пишущего визирного устройства, осциллографа и т. д.

Рассмотрим способ, который позволяет предъявить человеку-оператору реализацию процесса  $x(t)$  и зарегистрировать его реакцию с помощью пишущего устройства.

Опишем устройство прибора, который позволяет реализовать требуемые операции. Схема этого прибора приведена на рис. 5.2.10.

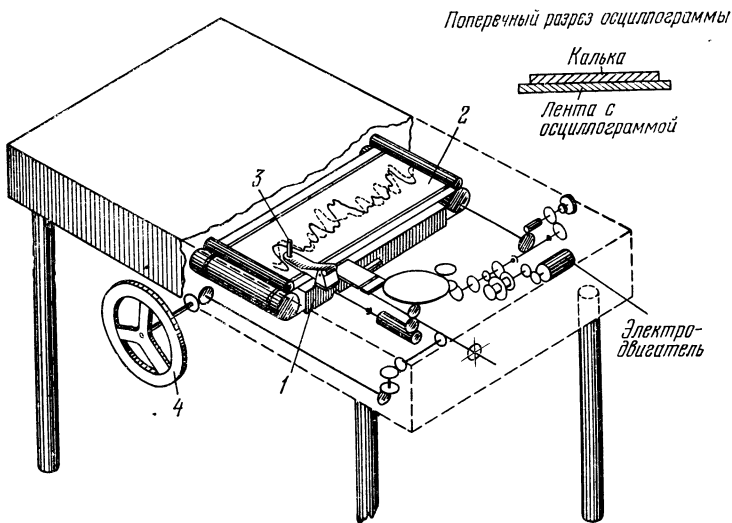


Рис. 5.2.10.

Будем называть этот прибор механическим измерителем реакции человека. Этот прибор является устройством для предъявления человеку в качестве теста осцил-

лограммы, представляющей собой реализацию стационарного случайного процесса, и для регистрации его реакции. Он состоит из лентопротяжного механизма 1, перемещающего осциллограмму с наложенным на нее прозрачным материалом (например, калькой) 2, пишущего визирного устройства 3 и его привода — маховика 4.

Лентопротяжный механизм 1 перемещает осциллограмму в направляющих с помощью ведущего валика с прижимным устройством. Этот валик через редуктор приводится во вращение электрическим двигателем. Наблюдая реализацию случайного процесса через прозрачный материал, отслеживая кривую, человек фиксирует на нем с помощью пишущего визира собственную реакцию. В результате этого отслеживания на прозрачном материале, жестко скрепленном с осциллограммой, получается запись процесса  $y(t)$ . Заметим, что изменяя скорость перемещения осциллограммы, можно получить желаемую полосу частот входного сигнала. Таким образом формируются реализации  $x(t)$  и  $y(t)$ , необходимые для дальнейших исследований.

Рассмотрим теперь алгоритм обработки реализаций для получения ядер Винера взаимно-корреляционным методом, т. е. по формуле (5.2.37).

Для определения ядер Винера необходимо иметь входной сигнал (эталон) —  $x(t)$  и соответствующую ему выходную реакцию человека-оператора —  $y(t)$ . Алгоритм обработки можно условно разбить на первичную и вторичную обработку входных реализаций: эталона  $x[n]$ ,  $n=0, 1, 2, \dots, N$ , полученного дискретизацией процесса  $x(t)$ , и реакции человека-оператора  $y(n)$ , полученной дискретизацией процесса  $y(t)$ .

Первичная обработка заключается в получении математических ожиданий, дисперсий и центрировании последовательностей значений входных реализаций (блок 1, рис. 5.2.11).

Вторичная обработка включает определение ядер Винера нулевого, первого, второго и более высоких порядков (блоки 2, 3). Алгоритм обработки содержит ряд логических операторов, подключающих или отключающих, в соответствии с заданием, необходимые блоки. Кроме того, ряд блоков также содержит логические опе-



раторы, разбивающие данные задачи на подзадачи. Блок-схема алгоритма приведена на рис. 5.2.11. Данный алгоритм был реализован на ЭВМ, каждая рассчитываемая точка являлась результатом усреднения  $2000 \div 3000$  выборочных значений.

При расчете ядер Винера выше второго порядка с помощью универсальных вычислительных машин тре-

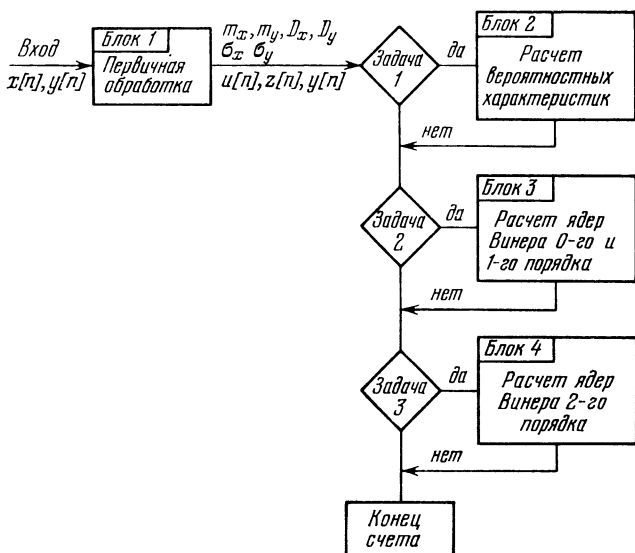


Рис. 5.2.11.

буются значительные затраты времени, и поэтому для этой цели желательно использовать специализированные вычислители.

Теперь приведем некоторые результаты расчета, полученные по экспериментальным данным. Эксперимент проводился по методике, описанной выше. С помощью описанного прибора испытуемым предъявлялась последовательно реализации случайного процесса и регистрировались реакции этих людей.

На рис. 5.2.12 приведены ядра Винера первого порядка, подсчитанные описанным методом.

Анализ показал, что эти ядра хорошо аппроксимируются функциями

$$k_1(t) = A [\exp(-a|t-\tau_3|)] (\cos \omega |t-\tau_3| + B \sin \omega |t-\tau_3|), \quad (5.2.53)$$

где  $\tau_3$  — время запаздывания или, в комплексной плоскости,

$$K_1(s) = A \frac{(T_1 s + 1)}{(T_2 s^2 + T_3 s + 1)} \exp(-s\tau_3).$$

Конкретно для кривой 1, приведенной на рис. 5.2.12, имеем

$$k_1(t) = 0,74 [\exp(-1,45|t-0,16|)] [\cos(2,01|t-0,16| + 0,64 \sin(2,01|t-0,16|)], \quad (5.2.54)$$

а для кривой 2—

$$k_1(t) = 0,73 [\exp(-2,04|t-0,22|)] [\cos(3,18|t-0,22| + 0,64 \sin(3,18|t-0,22|)]. \quad (5.2.55)$$

Параметры ядер различны для различных лиц и, следовательно, характеризуют динамические свойства человека-оператора. Их можно использовать при отборе

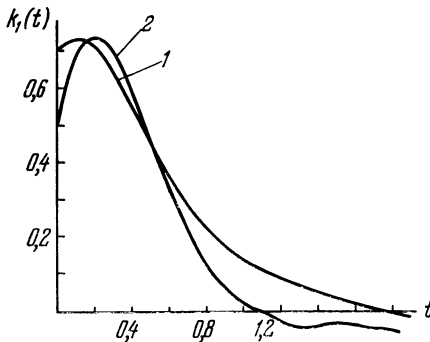


Рис. 5.2.12.

людей для работы в качестве оператора, работающего в режиме слежения, для оценки готовности этих лиц

для работы в системе, и, наконец, для технической и медицинской диагностики. Кроме того, возможно исследование степени влияния внешних возмущающих факторов (шумов, вибраций и т. д.) на качество

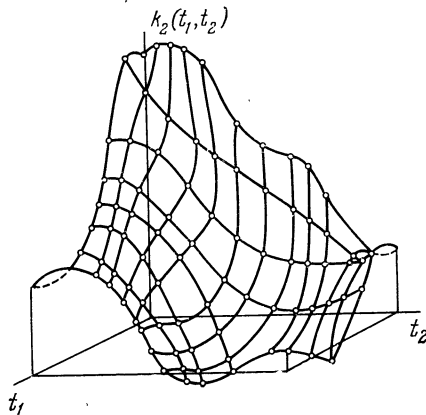


Рис. 5.2.13.

работы человека-оператора. Ядро второго порядка человека-оператора, полученное по указанной методике, приведено на рис. 5.2.13.

Таблицы перехода к одной переменной  
в комплексной области [127]\*)

$\frac{k}{s_1 s_2}$
$\frac{k}{s}$
$\frac{k}{(s_1 + \alpha)(s_2 + \beta)}$
$\frac{k}{(s + \alpha + \beta)}$
$\frac{k}{s_1 s_2 (s_1 + s_2)}$
$\frac{k}{s^2}$
$\frac{k}{(s_1 + \beta)(s_2 + \gamma)(s_1 + s_2 + \alpha)}$
$\frac{k}{(s + \alpha)(s + \beta + \gamma)}$
$\frac{k}{(s_1 + a_1) \dots (s_m + a_m)(s_1 + \dots + s_m + \alpha)}$
$\frac{k}{(s + \alpha)(s + a_1 + \dots + a_m)}$
$\frac{k}{s_1 \dots s_m (s_1 + a_1) \dots (s_m + a_1)(s_1 + \dots + s_m + a_1)}$

\*) Верхнее выражение в каждой клетке таблицы представляет собой многомерное изображение, а нижнее — соответствующее одномерное изображение.

Продолжение

$\frac{k}{a} \left\{ \frac{1}{s_1 \dots s_{m-1} (s_1 + a_1) (s_{m-1} + a_1) (s_1 + \dots + s_{m-1} + a_1)} - \frac{1}{s_1 \dots s_{m-2} (s_1 + a_1) \dots (s_{m-1} + 2a_1) (s_{m-1} + a_1)} \times \frac{1}{(s_1 + \dots + s_{m-1} + a_1)} \right\}$
$\frac{k}{s_1^2 s_2^2}$
$\frac{2k}{s^3}$
$\frac{k}{s_1^2 s_2^2 (s_1 + s_2)}$
$\frac{2k}{s^4}$
$\frac{k}{(s_1 + \alpha) (s_2^2 + \beta^2)}$
$\frac{k}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$
$\frac{k s_2}{(s_1 + \alpha) (s_2^2 + \beta^2)}$
$\frac{k (s + \alpha)}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$
$\frac{k}{(s_1 + \alpha) (s_2 + \beta)^2}$
$\frac{k}{(s + \alpha + \beta)^2}$
$\frac{k}{(s_1 + \alpha)^m (s_2 + \beta)^n}$
$\frac{k (m + n - 2)!}{(m - 1)! (n - 1)! (s + \alpha + \beta)^{m+n-1}}$
$\frac{k}{(s_1 + \alpha)^2 (s_2^2 + \beta^2)}$

Продолжение

$\frac{2(s + \alpha)}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$
$\frac{k s_1 s_2}{(s_1^2 + \alpha^2)(s_2^2 + \beta^2)}$
$\frac{k}{2} s \left\{ \frac{1}{s^2 + (\alpha - \beta)^2} + \frac{1}{s^2 + (\alpha + \beta)^2} \right\}$
$\frac{k}{(s_1 + \alpha)^m (s_2^2 + \beta^2)^n}$
$\frac{k(m+n-2)!}{(m-1)!(n-1)!} \frac{1}{\{(s + \alpha)^2 + \beta^2\}^{m+n-1}} \times$
$\times 2 \left( \sum_{\Omega=0}^{m/2} \frac{(m+n-2-\Omega)!(m-\Omega)!(n-\Omega-1)!}{(m-2\Omega)!\Omega!(n-1)!} \times \right.$
$\left. \times \operatorname{Re} \left\{ (s + \alpha) + j\beta \right\}^\Omega \left\{ (s + \alpha) - j\beta \right\}^{m-\nu-1} \right\}$
$\frac{k}{\{(s_1 + a)^2 + \alpha^2\} \{(s_2 + b)^2 + \beta^2\}}$
$\frac{k(s+a+b)}{2\alpha\beta} \left\{ \frac{1}{(s+a+b)^2 + (\alpha - \beta)^2} - \frac{1}{(s+a+b)^2 + (\alpha + \beta)^2} \right\}$
$\frac{k}{(s_1^2 + \alpha^2)(s_2^2 + \beta^2)}$
$\frac{ks}{2\alpha\beta} \left\{ \frac{1}{s^2 + (\alpha - \beta)^2} - \frac{1}{s^2 + (\alpha + \beta)^2} \right\}$
$\frac{k(s_1 + a)(s_2 + b)}{\{(s_1 + a)^2 + \alpha^2\} \{(s_2 + b)^2 + \beta^2\}}$
$\frac{k(s+a+b)}{2} \left\{ \frac{1}{(s+a+b)^2 + (\alpha - \beta)^2} + \frac{1}{(s+a+b)^2 + (\alpha + \beta)^2} \right\}$
$\frac{k s_1}{(s_1^2 + \alpha^2)(s_2^2 + \beta^2)}$
$\frac{k}{2\beta} \left\{ \frac{\alpha + \beta}{s^2 + (\alpha + \beta)^2} + \frac{(\beta - \alpha)}{s^2 + (\beta - \alpha)^2} \right\}$

$\frac{k}{s_1^2 s_2^2 s_3^2}$ $\frac{6k}{s^4}$
$\frac{k}{s_1^2 s_2^2 s_3^2 (s_1 + s_2 + s_3)}$ $\frac{6k}{s^5}$
$\frac{k}{(s_1 + a)^2 (s_2 + a)^2 (s_3 + a)^2}$ $\frac{6k}{(s + 3a)^4}$
$\frac{k}{(s_1 + s_2 + s_3 + a) (s_1 + a)^2 (s_2 + a)^2 (s_3 + a)^2}$ $\frac{6k}{(s + a) (s + 3a)^4}$
$\frac{k}{(s_1 + \alpha) (s_2 + \beta) (s_3^2 + \gamma^2)}$ $\frac{k}{(s + \alpha + \beta)^2 + \gamma^2}$
$\frac{k}{(s_1 + \alpha) (s_2^2 + \beta^2) (s_3^2 + \gamma^2)}$ $\frac{k}{2\beta\gamma (s + \alpha) \left\{ \frac{1}{(s + \alpha)^2 + (\beta - \gamma)^2} - \frac{1}{(s + \alpha)^2 + (\beta + \gamma)^2} \right\}}$
$\frac{k}{s_1 + s_2 + a}$ $\frac{k}{s + a}$
$\frac{k}{(s_1 + s_2 + a) (s_1 + a) (s_2 + a)}$ $\frac{k}{(s + a) (s + 2a)}$

Продолжение

$\frac{k}{s_1 s_2 (s_1 + s_2 + a)}$ $\frac{k}{s (s + a)}$
$\frac{k}{s_1 s_2 (s_1 + s_2 + a) (s_1 + a) (s_2 + a)}$ $\frac{2k}{s (s + a)^2 (s + 2a)}$
$\frac{k}{(s_1 + \alpha) (s_2 + \alpha) (s_1 + s_2 + a) (s_2 + a) (s_1 + a)}$ $\frac{2k}{(s + 2\alpha) (s + a) (s + a + \alpha) (s + 2a)}$
$\frac{k}{(s_1 + \alpha) (s_2 + \alpha) (s_1 + s_2 + a)}$ $\frac{k}{(s + 2\alpha) (s + a)}$
$\frac{k}{(s_1 + s_2 + s_3) + a}$ $\frac{k}{s + a}$
$\frac{k}{\{(s_1 + s_2 + s_3) + a\} (s_1 + a) \{(s_2 + s_3) + a\}}$ $\frac{k}{(s + a) (s + 2a)}$
$\frac{k}{\{(s_1 + s_2 + s_3) + a\} (s_1 + a) (s_2 + a) (s_3 + a) \{(s_2 + s_3) + a\}}$ $\frac{k}{(s + a) (s + 2a) (s + 3a)}$
$\frac{k}{\{(s_1 + s_2 + s_3) + a\} (s_1 + a) (s_2 + a) (s_3 + a)}$ $\frac{k}{(s + a) (s + 3a)}$



Продолжение

$\frac{k}{s_1 s_2 s_3 \{(s_1 + s_2 + s_3) + a\}}$ $\frac{k}{s(s+a)}$
$\frac{k}{s_1 s_2 s_3 \{(s_1 + s_2 + s_3) + a\} (s_1 + a) \{(s_2 + s_3) + a\}}$ $\frac{k}{a} \left\{ \frac{1}{s(s+a)^2} - \frac{1}{(s+2a)(s+a)^2} \right\}$
$\frac{k}{s_1 s_2 s_3 \{(s_1 + s_2 + s_3 + a)\} (s_1 + a) (s_2 + a) (s_3 + a) \{(s_2 + s_3) + a\}}$ $\frac{k}{a^2} \left\{ \frac{1}{s(s+a)^3} - \frac{1}{(s+a)^2 (s+2a)^2} - \frac{1}{(s+a)^3 (s+2a)} + \right.$ $\left. + \frac{1}{(s+a)(s+2a)^2 (s+3a)} \right\}$
$\frac{k}{s_1 s_2 s_3 \{(s_1 + s_2 + s_3) + a\} (s_1 + a) (s_2 + a) (s_3 + a)}$ $\frac{k}{a^2} \left\{ \frac{1}{s(s+a)^2} - \frac{2}{(s+a)^2 (s+2a)} + \frac{1}{(s+a)(s+2a)(s+3a)} \right\}$
$\frac{k}{(s_1 + \gamma)(s_2 + \gamma)(s_3 + \gamma) \{(s_1 + s_2 + s_3) + a\}}$ $\frac{k}{(s+3\gamma)(s+a)}$
$\frac{k}{(s_1 + \gamma)(s_2 + \gamma)(s_3 + \gamma) \{(s_1 + s_2 + s_3) + a\} (s_1 + a) \{(s_2 + s_3) + a\}}$ $\frac{k}{a - \gamma} \left\{ \frac{1}{(s+3\gamma)(s+a+\gamma)(s+a)} - \frac{1}{(s+a+2\gamma)(s+a)(s+2a)} \right\}$
$\frac{k}{(s_1 + \gamma)(s_2 + \gamma)(s_3 + \gamma) \{(s_1 + s_2 + s_3) + a\}} \times$ $\times \frac{1}{(s_1 + a)(s_2 + a)(s_3 + a) \{(s_2 + s_3) + a\}}$ $\frac{k}{(a - \gamma)^2} \left\{ \frac{1}{(s+3\gamma)(s+a+\gamma)(s+a+2\gamma)(s+a)} - \right.$

Продолжение

$  \begin{aligned}  & - \frac{1}{(s+a)(s+2a+\gamma)(s+a+2\gamma)(s+2a)} - \\  & - \frac{1}{(s+a)(s+a+\gamma)(s+2a+\gamma)(s+a+2\gamma)} + \\  & + \frac{1}{(s+a)(s+2a)(s+3a)(s+2a+\gamma)} \Big\}  \end{aligned}  $
$  \frac{k}{(s_1+\gamma)(s_2+\gamma)(s_3+\gamma)\{(s_1+s_2+s_3)+a\}(s_1+a)(s_2+a)(s_3+a)}  $
$  \frac{k}{(a-\gamma)^2} \left\{ \frac{1}{(s+3\gamma)(s+a+2\gamma)(s+a)} - \right.  $
$  \left. - \frac{2}{(s+a)(s+2a+\gamma)(s+a+2\gamma)} + \frac{1}{(s+a)(s+3a)(s+2a+\gamma)} \right\}  $
$  \frac{k}{\{(s_1+s_2)^2+b(s_1+s_2)+c\}}  $
$  \frac{k}{s^2+bs+c}  $
$  \frac{k}{\{(s_1+s_2)^2+b(s_1+s_2)+c\}(s_1^2+bs_1+c)(s_2^2+bs_2+c)}  $
$  \frac{2k}{(s^2+bs+c)(s+\alpha+\beta)(s+2\alpha)(s+2\beta)},  $
<p>где <math>u^2+bu+c=(u+\alpha)(u+\beta)</math></p>
$  \frac{k}{s_1s_2\{(s_1+s_2)^2+b(s_1+s_2)+c\}}  $
$  \frac{k}{s(s^2+bs+c)}  $
$  \frac{k}{s_1s_2\{(s_1+s_2)^2+b(s_1+s_2)+c\}(s_1^2+bs_1+c)(s_2^2+bs_2+c)}  $
$  \frac{k}{(s^2+bs+c)} \left\{ \frac{1}{\alpha\beta s(s+\alpha)(s+\beta)} + \right.  $

Продолжение

$$+ \frac{1}{\alpha(\alpha - \beta)(s + \alpha)(s + 2\alpha)(s + \alpha + \beta)} +$$

$$+ \frac{1}{\beta(\beta - \alpha)(s + \beta)(s + \alpha + \beta)(s + 2\beta)}, \text{ где } u^2 + bu + c = (u + \alpha)(u + \beta)$$

$$\frac{k}{(s_1 + \gamma)(s_2 + \gamma) \{(s_1 + s_2)^2 + b(s_1 + s_2) + c\}}$$

$$\frac{k}{(s + 2\gamma)(s^2 + bs + c)}$$

$$\frac{k}{(s_1 + \gamma)(s_2 + \gamma) \{(s_1 + s_2)^2 + b(s_1 + s_2) + c\}} \times$$

$$\times \frac{1}{(s_2^2 + bs_2 + c)}$$

$$\frac{k}{(s^2 + bs + c)} \left\{ \frac{1}{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(s + 2\gamma)(s + \alpha + \gamma)(s + \beta + \gamma)} + \right.$$

$$+ \frac{1}{(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)(s + \alpha + \gamma)(s + 2\alpha)(s + \alpha + \beta)} +$$

$$\left. + \frac{1}{(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)(s + \beta + \gamma)(s + 2\beta)(s + \alpha + \beta)} \right\},$$

где  $u^2 + bu + c = (u + \alpha)(u + \beta)$ 

$$\frac{k}{\{(s_1 + s_2 + s_3)^2 + b(s_1 + s_2 + s_3) + c\}}$$

$$\frac{k}{s^2 + bs + c}$$

$$\frac{k}{\{(s_1 + s_2 + s_3)^2 + b(s_1 + s_2 + s_3) + c\}} \times$$

$$\times \frac{1}{(s_1^2 + bs_1 + c) \{(s_2 + s_3)^2 + b(s_2 + s_3) + c\}}$$

$$\frac{2k}{(s^2 + bs + c)(s + \alpha + \beta)(s + 2\alpha)(s + 2\beta)},$$

где  $u^2 + bu + c = (u + \alpha)(u + \beta)$ 

$$\frac{k}{\{(s_1 + s_2 + s_3)^2 + b(s_1 + s_2 + s_3) + c\}} \times$$

Продолжение

$$\begin{aligned} & \times \frac{1}{(s_2^2 + bs_2 + c)(s_3^2 + bs_3 + c) \{(s_2 + s_3)^2 + b(s_2 + s_3) + c\}} \\ & \frac{k}{(\beta - \alpha)^2} \frac{1}{(s^2 + bs + c)} \left[ \frac{1}{\{(s + \alpha)^2 + b(s + \alpha) + c\}} \times \right. \\ & \quad \times \frac{1}{\{(s + 2\alpha)^2 + b(s + 2\alpha) + c\}} - \\ & \quad \frac{1}{\{(s + \beta)^2 + b(s + \beta) + c\} \{(s + \alpha + \beta)^2 + b(s + \alpha + \beta) + c\}} - \\ & \quad \frac{1}{\{(s + \alpha)^2 + b(s + \alpha) + c\} \{(s + \alpha + \beta)^2 + b(s + \alpha + \beta) + c\}} + \\ & \quad \left. + \frac{1}{\{(s + \beta)^2 + b(s + \beta) + c\} \{(s + 2\beta)^2 + b(s + 2\beta) + c\}} \right], \\ & \text{где } u^2 + bu + c = (u + \alpha)(u + \beta) \\ & \frac{k}{\{(s_1 + s_2 + s_3)^2 + b(s_1 + s_2 + s_3) + c\}} \times \\ & \quad \times \frac{1}{(s_1^2 + bs_1 + c)(s_2^2 + bs_2 + c)(s_3^2 + bs_3 + c)} \\ & \frac{k}{(\beta - \alpha)^2} \frac{1}{(s^2 + bs + c)} \left[ \frac{1}{\{(s + 2\alpha)^2 + b(s + 2\alpha) + c\}} - \right. \\ & \quad - \frac{2}{\{(s + \alpha + \beta)^2 + b(s + \alpha + \beta) + c\}} + \\ & \quad \left. + \frac{1}{\{(s + 2\beta)^2 + b(s + 2\beta) + c\}} \right], \text{ где } u^2 + bu + c = (u + \alpha)(u + \beta) \\ & \frac{k}{s_1 s_2 s_3 \{(s_1 + s_2 + s_3)^2 + b(s_1 + s_2 + s_3) + c\}} \\ & \quad \frac{k}{s(s^2 + bs + c)} \\ & \frac{k}{s_1 s_2 s_3 \{(s_1 + s_2 + s_3)^2 + b(s_1 + s_2 + s_3) + c\}} \times \\ & \quad \times \frac{1}{(s_1^2 + bs_1 + c) \{(s_2 + s_3)^2 + b(s_2 + s_3) + c\}} \\ & \frac{k}{s^2 + bs + c} \left\{ \frac{1}{\alpha \beta s (s + \alpha)(s + \beta)} + \right. \end{aligned}$$

Продолжение

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\alpha(\alpha - \beta)(s + \alpha)(s + 2\alpha)(s + \alpha + \beta)} + \\
& \left. + \frac{1}{\beta(\beta - \alpha)(s + \beta)(s + 2\beta)(s + \alpha + \beta)} \right\}, \\
\text{где } u^2 + bu + c &= (u + \alpha)(u + \beta) \\
\frac{k}{s_1 s_2 s_3 \{(s_1 + s_2 + s_3)^2 + b(s_1 + s_2 + s_3) + c\}} & \times \\
& \times \frac{1}{(s_1^2 + bs_1 + c)(s_2^2 + bs_2 + c)(s_3^2 + bs_3 + c)} \times \\
& \times \frac{1}{\{(s_2 + s_3)^2 + b(s_2 + s_3) + c\}} \\
\frac{k}{s^2 + bs + c} & \left[ \frac{1}{\alpha^2 \beta^2 s (s^2 + bs + c)^2} + \right. \\
& + \frac{1}{\alpha^2 \beta (\alpha - \beta)(s + \alpha) \{(s + \alpha)^2 + b(s + \alpha) + c\}^2} + \\
& + \frac{1}{\alpha \beta^2 (\beta - \alpha)(s + \beta) \{(s + \beta)^2 + b(s + \beta) + c\}} + \\
& + \frac{1}{\alpha^2 \beta (\alpha - \beta)(s + \alpha)(s^2 + bs + c) \{(s + \alpha)^2 + b(s + \alpha) + c\}} + \\
& + \frac{1}{\alpha^2 (\alpha - \beta)^2 (s + 2\alpha) \{(s + 2\alpha)^2 + b(s + 2\alpha) + c\}} \times \\
& \times \frac{1}{\{(s + \alpha)^2 + b(s + \alpha) + c\}} + \frac{1}{\alpha \beta (\alpha - \beta)(\beta - \alpha)(s + \alpha + \beta)} \times \\
& \times \frac{1}{\{(s + \beta)^2 + b(s + \beta) + c\} \{(s + \alpha + \beta)^2 + b(s + \alpha + \beta) + c\}} + \\
& + \frac{1}{\alpha \beta^2 (\beta - \alpha)(s + \beta)(s^2 + bs + c) \{(s + \beta)^2 + b(s + \beta) + c\}} + \\
& + \frac{1}{\alpha \beta (\alpha - \beta)(\beta - \alpha)(s + \alpha + \beta) \{(s + \alpha)^2 + b(s + \alpha) + c\}} \times \\
& \times \frac{1}{\{(s + \alpha + \beta)^2 + b(s + \alpha + \beta) + c\}} + \\
& + \frac{1}{\beta^2 (\beta - \alpha)^2 (s + 2\beta) \{(s + \beta)^2 + b(s + \beta) + c\}} \times \\
& \times \left. \frac{1}{\{(s + 2\beta)^2 + b(s + 2\beta) + c\}} \right], \text{ где } u^2 + bu + c = (u + \alpha)(u + \beta)
\end{aligned}$$

Продолжение

$$\frac{k}{s_1 s_2 s_3 \{(s_1 + s_2 + s_3)^2 + b(s_1 + s_2 + s_3) + c\}} \times$$

$$\times \frac{1}{(s_1^2 + bs_1 + c)(s_2^2 + bs_2 + c)(s_3^2 + bs_3 + c)}$$


---


$$\frac{k}{s^2 + bs + c} \left[ \frac{1}{\alpha^2 \beta^2 s (s^2 + bs + c)} + \right.$$

$$+ \frac{1}{\alpha^2 \beta (\alpha - \beta) (s + \alpha) \{(s + \alpha)^2 + b(s + \alpha) + c\}} +$$

$$+ \frac{1}{\alpha \beta^2 (\beta - \alpha) (s + \beta) \{(s + \beta)^2 + b(s + \beta) + c\}} +$$

$$+ \frac{1}{\alpha^2 \beta (\alpha - \beta) (s + \alpha) \{(s + \alpha)^2 + b(s + \alpha) + c\}} +$$

$$+ \frac{1}{\alpha^2 (\alpha - \beta)^2 (s + 2\alpha) \{(s + 2\alpha)^2 + b(s + 2\alpha) + c\}} +$$

$$+ \frac{1}{\alpha \beta (\alpha - \beta) (\beta - \alpha) (s + \alpha + \beta) \{(s + \alpha + \beta)^2 + b(s + \alpha + \beta) + c\}} +$$

$$+ \frac{1}{\alpha \beta^2 (\beta - \alpha) (s + \beta) \{(s + \beta)^2 + b(s + \beta) + c\}} +$$

$$+ \frac{1}{\alpha \beta (\alpha - \beta) (\beta - \alpha) (s + \alpha + \beta) \{(s + \alpha + \beta)^2 + b(s + \alpha + \beta) + c\}} +$$

$$\left. + \frac{1}{\beta^2 (\beta - \alpha)^2 (s + 2\beta) \{(s + 2\beta)^2 + b(s + 2\beta) + c\}} \right],$$

где  $u^2 + bu + c = (u + \alpha)(u + \beta)$

---


$$\frac{k}{(s_1 + \gamma)(s_2 + \gamma)(s_3 + \gamma) \{(s_1 + s_2 + s_3)^2 + b(s_1 + s_2 + s_3) + c\}}$$

$$\frac{k}{(s + 3\gamma)(s^2 + bs + c)}$$


---


$$\frac{k}{(s_1 + \gamma)(s_2 + \gamma)(s_3 + \gamma) \{(s_1 + s_2 + s_3)^2 + b(s_1 + s_2 + s_3) + c\}} \times$$

$$\times \frac{1}{(s_1^2 + bs_1 + c) \{(s_2 + s_3)^2 + b(s_2 + s_3) + c\}}$$

$$\frac{k}{(s^2 + bs + c)} \left[ \frac{1}{(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)(s + \alpha + 2\gamma) \{(s + \alpha)^2 + b(s + \alpha) + c\}} + \right.$$

Продолжение

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)(s + \beta + 2\gamma) \{(s + \beta)^2 + b(s + \beta) + c\}} + \\
& + \frac{1}{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(s + 3\gamma) \{(s + \gamma)^2 + b(s + \gamma) + c\}} \Big], \\
& \text{где } u^2 + bu + c = (u + \alpha)(u + \beta) \\
& \frac{k}{(s_1 + \gamma)(s_2 + \gamma)(s_3 + \gamma) \{(s_1 + s_2 + s_3)^2 + b(s_1 + s_2 + s_3) + c\}} \times \\
& \quad \times \frac{1}{(s_1^2 + bs_1 + c)(s_2^2 + bs_2 + c)(s_3^2 + bs_3 + c)} \times \\
& \quad \quad \quad \times \frac{1}{\{(s_2 + s_3)^2 + b(s_2 + s_3) + c\}} \\
& \frac{k}{(s^2 + bs + c)} \left[ \frac{1}{(\gamma - \alpha)^2(\beta - \alpha)^2(s + 2\alpha + \gamma)} \times \right. \\
& \quad \times \frac{1}{\{(s + \alpha)^2 + b(s + \alpha) + c\} \{(s + 2\alpha)^2 + b(s + 2\alpha) + c\}} + \\
& + \frac{1}{(\alpha - \beta)(\gamma - \alpha)(\beta - \alpha)(\gamma - \beta)(s + \alpha + \beta + \gamma)} \times \\
& \times \frac{1}{\{(s + \beta)^2 + b(s + \beta) + c\} \{(s + \alpha + \beta)^2 + b(s + \alpha + \beta) + c\}} + \\
& + \frac{1}{(\gamma - \alpha)(\beta - \alpha)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(s + \alpha - 2\gamma)} \times \\
& \times \frac{1}{\{(s + \gamma)^2 + b(s + \gamma) + c\} \{(s + \alpha + \gamma)^2 + b(s + \alpha + \gamma) + c\}} + \\
& \quad + \frac{1}{(\gamma - \beta)(\alpha - \beta)(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)(s + \alpha + \beta + \gamma)} \times \\
& \times \frac{1}{\{(s + \alpha)^2 + b(s + \alpha) + c\} \{(s + \alpha + \beta)^2 + b(s + \alpha + \beta) + c\}} + \\
& + \frac{1}{(\gamma - \beta)(\alpha - \beta)(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)(s + 2\beta + \gamma)} \times \\
& \quad \times \frac{1}{\{(s + \beta)^2 + b(s + \beta) + c\} \{(s + 2\beta)^2 + b(s + 2\beta) + c\}} + \\
& + \frac{1}{(\gamma - \beta)(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(s + \beta + 2\gamma)} \times \\
& \quad \times \frac{1}{\{(s + \gamma)^2 + b(s + \gamma) + c\} \{(s + \beta + \gamma)^2 + b(s + \beta + \gamma) + c\}} +
\end{aligned}$$

Продолжение

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)(s + \alpha + 2\gamma)} \times \\
& \times \frac{1}{\{(s + \alpha)^2 + b(s + \alpha) + c\} \{(s + \alpha + \gamma)^2 + b(s + \alpha + \gamma) + c\}} + \\
& + \frac{1}{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)(s + \beta + 2\gamma)} \times \\
& \times \frac{1}{\{(s + \beta)^2 + b(s + \beta) + c\} \{(s + \beta + \gamma)^2 + b(s + \beta + \gamma) + c\}} + \\
& + \frac{1}{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(s + 3\gamma)} \times \\
& \times \frac{1}{\{(s + \gamma)^2 + b(s + \gamma) + c\} \{(s + 2\gamma)^2 + b(s + 2\gamma) + c\}} \Big],
\end{aligned}$$

где  $u^2 + bu + c = (u + \alpha)(u + \beta)$ 

$$\begin{aligned}
& \frac{k}{(s_1 + \gamma)(s_2 + \gamma)(s_3 + \gamma) \{(s_1 + s_2 + s_3)^2 + b(s_1 + s_2 + s_3) + c\}} \times \\
& \times \frac{1}{(s_1^2 + bs_1 + c)(s_2^2 + bs_2 + c)(s_3^2 + bs_3 + c)} \\
& \frac{k}{s^2 + bs + c} \left[ \frac{1}{(\gamma - \alpha)^2(\beta - \alpha)^2(s + 2\alpha + \gamma)} \times \right. \\
& \quad \times \frac{1}{\{(s + 2\alpha)^2 + b(s + 2\alpha) + c\}} + \\
& + \frac{1}{(\gamma - \alpha)(\beta - \alpha)(\gamma - \beta)(\alpha - \beta)(s + \alpha + \beta + \gamma)} \times \\
& \times \frac{1}{\{(s + \alpha + \beta)^2 + b(s + \alpha + \beta) + c\}} + \\
& \quad + \frac{1}{(\gamma - \alpha)(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)(\beta - \alpha)(s + \alpha + 2\gamma)} \times \\
& \times \frac{1}{\{(s + \alpha + \gamma)^2 + b(s + \alpha + \gamma) + c\}} + \\
& + \frac{1}{(\gamma - \beta)(\alpha - \beta)(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)(s + \alpha + \beta + \gamma)} \times \\
& \quad \times \frac{1}{\{(s + \alpha + \beta)^2 + b(s + \alpha + \beta) + c\}} + \\
& \quad + \frac{1}{(\gamma - \beta)(\alpha - \beta)(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)(s + 2\beta + \gamma)} \times
\end{aligned}$$



Продолжение

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{\{(s+2\beta)^2 + b(s+2\beta) + c\}} + \\
& \quad + \frac{1}{(\gamma - \beta)(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(s + \beta + 2\gamma)} \times \\
& \quad \quad \times \frac{1}{\{(s + \beta + \gamma)^2 + b(s + \beta + \gamma) + c\}} + \\
& + \frac{1}{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)(s + \alpha + 2\gamma)} \times \\
& \quad \quad \times \frac{1}{\{(s + \alpha + \gamma)^2 + b(s + \alpha + \gamma) + c\}} + \\
& + \frac{1}{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)(s + \beta + 2\gamma)} \times \\
& \quad \quad \times \frac{1}{\{(s + \beta + \gamma)^2 + b(s + \beta + \gamma) + c\}} + \\
& + \frac{1}{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha - \gamma)(s + 3\gamma)} \times \\
& \quad \quad \quad \times \frac{1}{\{(s + 2\gamma)^2 + b(s + 2\gamma) + c\}} \Big], \\
& \text{где } u^2 + bu + c = (u + \alpha)(u + \beta)
\end{aligned}$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Анго А., Математика для электро- и радиоинженеров, «Наука», 1965.
2. Афонин В. Л., Кузьмин И. Н., Лакота Н. А., Ющенко А. С., Применение функциональных рядов для математического моделирования динамических характеристик человека-оператора. «Механика машин», вып. 46, «Наука», 1974.
3. Барбашин Е. А., Введение в теорию устойчивости, «Наука», 1967.
4. Бакушинский А. Б., Некоторые свойства регуляризирующих алгоритмов, ЖВМ и МФ, т. 8, № 2, 1968.
5. Бендат Дж., Пирсол А., Измерение и анализ случайных процессов, «Мир», 1974.
6. Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, т. I, Физматгиз, 1959.
7. Бесекерский В. А., Попов Е. П., Теория систем автоматического регулирования, изд. 3-е «Наука», 1975.
8. Ван Трис Г., Синтез оптимальных нелинейных систем управления, «Мир», 1964.
9. Виленкин С. Я., Виленкин Е. С., Применение регуляризатора при оценке импульсной переходной функции стационарного линейного объекта, Автоматика и телемеханика, № 8, 1968.
10. Винер Н., Нелинейные задачи в теории случайных процессов, ИЛ, 1961.
11. Винер Н., Пэли Р., Преобразование Фурье в комплексной области, «Наука», 1964.
12. Владимиров В. С., О приближенном вычислении винеровских интегралов, УМН, т. 15, № 4, 1960.
13. Воробьев Н. М., О задачах идентификации объектов и нелинейной фильтрации при гауссовых входных сигналах, Автоматика и телемеханика, № 8, 1968.
14. Воробьев Н. М., Медведев Г. С., Об оптимальной фильтрации нелинейных функционалов от гауссовых процессов, Автоматика и телемеханика, № 11, 1966.
15. Гельфанд И. М., Фролов А. С., Ченцов Н. Н., Вычисление континуальных интегралов методом Монте-Карло, Изв. вузов, «Математика», № 5, 1958.
16. Гноенский Л. С., Каменский Г. А., Эльсгольц Л. Э., Математические основы теории управляемых систем, «Наука», 1969.
17. Гурса Э., Курс математического анализа, Гостехиздат, 1934.
18. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, «Наука», 1970.

19. Дейч Г., Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования, «Наука», 1971.
20. Дейч Р., Нелинейные преобразования случайных процессов, «Советское радио», 1965.
21. Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч., Пространство состояний в теории управления, «Наука», 1970.
22. Дехтяренко П. И., Коваленко В. П., Определение характеристик звеньев систем автоматического регулирования, «Энергия», 1973.
23. Директор С., Рорер Р., Введение в теорию систем, «Мир», 1974.
24. Диткин В. А., Прудников А. П., Операционное исчисление по двум переменным, Физматгиз, 1965.
25. Дмитриев А. Н., Егупов Н. Д., Анализ и синтез нелинейных систем автоматического регулирования при помощи рядов Вольтерра и ортогональных операторов. В кн. «Техническая кибернетика», под ред. Солодовникова В.В., кн. 3, ч. II, «Машиностроение», 1969.
26. Заде Л., Дезоер Ч., Теория линейных систем, «Наука», 1970.
27. Иванов В. А., Чемоданов Б. К., Медведев В. С., Ющенко А. С., Математические основы теории автоматического регулирования, «Высшая школа», 1971.
28. Казаков И. Е., Доступов Б. Г., Статистическая динамика нелинейных автоматических систем, Физматгиз, 1962.
29. Калман Р., Арбиб М., Фалб П., Очерки по математической теории систем, «Мир», 1971.
30. Каснелльсон Дж., Гулд Л., Конструирование нелинейных фильтров и систем управления. В кн. Ван Трис Г., Синтез оптимальных нелинейных систем управления, «Мир», 1964.
31. Кириллова Л. С., Пионтковский А. А., Некорректные задачи в теории управления, Автоматика и телемеханика, № 10, 1968.
32. Киселев О. Н., Условия физической реализуемости при статистической оптимизации нелинейных систем управления, Автоматика и телемеханика, № 9, 1967.
33. Киселев О. Н., Попков Ю. С., Некоторые вопросы синтеза одного класса нелинейных фильтров, Автоматика и телемеханика, № 11, 1966.
34. Кичатов Ю. Ф., Определение нелинейных характеристик объектов управления при гауссовых входных воздействиях, Автоматика и телемеханика, № 3, 1965.
35. Ковальчик И. М., Интеграл Винера, УМН, т. XVIII, № 1 (103), 1963.
36. Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, «Наука», 1963.
37. Коробов Н. М., О приближенном решении интегральных уравнений, ДАН СССР, т. 128, № 2, 1959.
38. Коробов Н. М., Приближенное вычисление кратных интегралов с помощью методов теории чисел, ДАН СССР, т. 115, № 6, 1957.

39. Крамер Г., Лидбеттер М., Стационарные случайные процессы, «Мир», 1969.
40. Красносельский М. А., Ваиникко Г. М., Забрейко П. П., Рутцкий Я. Б., Стеценко В. Я., Приближенное решение операторных уравнений, «Наука», 1969.
41. Красовский А. А., Статистическая теория переходных процессов в системах управления, «Наука», 1968.
42. Красовский А. А., Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование, «Наука», 1973.
43. Красовский А. А., Поспелов Г. С., Основы автоматизации и технической кибернетики, Госэнергоиздат, 1962.
44. Красовский Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, Физматгиз, 1959.
45. Крейн С. Г. (ред.), Функциональный анализ, «Наука», 1964.
46. Кү И., Вольф А., Применение функционалов Вольтерра — Винера для анализа нелинейных систем. В кн. «Техническая кибернетика за рубежом», «Машиностроение», 1968.
47. Кудревич Я., Устойчивость нелинейных систем с обратной связью, Автоматика и телемеханика, № 8, 1964.
48. Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И., Прохождение случайных функций через нелинейные системы, Автоматика и телемеханика, № 4, 1953, № 3, 1954.
49. Куратовский К., Мостовский А., Теория множеств, «Мир», 1970.
50. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, «Наука», 1965.
51. Леви П., Конкретные проблемы функционального анализа, «Наука», 1965.
52. Левин Б. Р., Теоретические основы статистической радиотехники, кн. 2, «Советское радио», 1968.
53. Леондес К. Т. (ред.), Современная теория систем управления, «Наука», 1970.
54. Ли Ю., Щецен М., Определение ядер Винера — Хопфа методом взаимной корреляции. В кн. «Техническая кибернетика за рубежом», «Машиностроение», 1968.
55. Лившиц Н. А., Пугачев В. Н., Вероятностный анализ систем автоматического управления, «Советское радио», 1963.
56. Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, «Наука», 1965.
57. Месарович М., Основания общей теории систем. В кн. «Общая теория систем», «Мир», 1966.
58. Мишкин Э., Браун Л., Приспосабливающиеся автоматические системы, ИЛ, 1963.
59. Морозов В. А., О принципе невязки при решении операторных уравнений методом регуляризации, ЖВМ и МФ, № 2, 1968.
60. Мур Э., Умозрительные эксперименты с последовательными машинами. В кн. «Автоматы», под ред. Шеннона Р. и Маккарти Дж., ИЛ, 1956.
61. Первозванский А. А., Случайные процессы в нелинейных автоматических системах, Физматгиз, 1962.

62. Петров Б. Н., Дифференциальные уравнения систем автоматического регулирования. В кн. «Техническая кибернетика», под ред. Солодовникова В. В., кн. 1, «Машиностроение», 1967.
63. Петров В. В., Типичные нелинейные статические характеристики типовых звеньев систем автоматического регулирования. В кн. «Техническая кибернетика», под ред. Солодовникова В. В., кн. 1, «Машиностроение», 1967.
64. Попков Ю. С., Стохастические модели нелинейных систем, Автоматика и телемеханика, № 10, 1967.
65. Попков Ю. С., Достаточные характеристики нелинейных систем, Автоматика и телемеханика № 3, 1970.
66. Попов Е. П., Пальтов И. П., Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем, Физматгиз, 1960.
67. Портер У., Современные основания общей теории систем, «Наука», 1971.
68. Преснухин Л. Н., Соломонов Л. А., Четвериков В. Н., Шаньгин В. Ф., Основы теории и проектирования вычислительных приборов и машин управления, «Высшая школа», 1970.
69. Пугачев В. С., Теория случайных функций, Физматгиз, 1962.
70. Пупков К. А. (ред.), Основы кибернетики, «Высшая школа», 1974.
71. Пупков К. А., Статистический расчет нелинейных систем автоматического управления, «Машиностроение», 1965.
72. Пупков К. А., Статистическая динамика нелинейных систем автоматического регулирования. В кн. «Техническая кибернетика», под ред. Солодовникова В. В., кн. 3, ч. II, «Машиностроение», 1969.
73. Пупков К. А., Капалин В. И., Применение многомерных преобразований Лапласа для анализа нелинейных систем автоматического управления, I, II, Труды МИЭМ, вып. 14 и 23, 1970, 1971.
74. Пупков К. А., Капалин В. И., Применение рядов Вольterra для исследования нелинейных систем, Problems of Control and Information Theory, vol. 3(2), 1974.
75. Пупков К. А., Капалин В. И., Чемоданов Е. С., О методе равномерной линеаризации, Изв. вузов, «Приборостроение», т. XVI, № 10, 1973.
76. Раевский В. Я., Ортогональные представления случайных функций, Автоматика и телемеханика, № 4, № 6, 1965.
77. Раевский В. Я., О динамической точности следящей системы, содержащей нелинейное звено с полиномиальной характеристикой, Автоматика и телемеханика, № 11, 1957.
78. Ремез Е. А., Основы численных методов чебышевского приближения, «Наукова думка», 1969.
79. Семенов В. В., Спектральный анализ и анализ линейных систем с переменными параметрами на конечных нестационарных интервалах времени. В кн. «Техническая кибернетика», под ред. Солодовникова В. В., т. 3, ч. I, «Машиностроение», 1969.
80. Соболев И. М., Многомерные интегралы и метод Монте-Карло, ДАН СССР, т. 114, № 4, 1957.
81. Солодов В. А., Петров Ф. С., Линейные автоматические системы с переменными параметрами, «Наука», 1971.

82. Солодовников В. В., Ленский В. Л., Синтез оптимальных систем и корректирующих устройств минимальной сложности. В сб. «Современные методы проектирования систем автоматического управления» под ред. Петрова Б. Н., Солодовникова В. В. Толчеева Ю. И., «Машиностроение», 1967.
83. Солодовников В. В., Бородин Ю. И., Ионнисан А. Б., Частотные методы анализа и синтеза нестационарных нелинейных систем, «Советское радио», 1972.
84. Тихонов А. Н., О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации. ДАН СССР, т. 151, № 3, 1963.
85. Флейк Р., Теория рядов Вольterra и ее приложение к нелинейным системам с переменными параметрами, Труды II Конгресса ИФАК, 1965.
86. Фор Р., Кофман А., Дени-Папен М., Современная математика, «Мир», 1966.
87. Хермандер Л., Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных, «Мир», 1968.
88. Цыпкин Я. З., Теория линейных импульсных систем, Физматгиз, 1963.
89. Цыпкин Я. З., Попков Ю. С., Теория нелинейных импульсных систем, «Наука», 1973.
90. Шецен М., Синтез нелинейных систем в одном специальном случае. В кн. «Техническая кибернетика за рубежом», «Машиностроение», 1968.
91. Шилов Г. Е., Интегрирование в бесконечных пространствах и интеграл Винера, УМН, т. 18, № 2, 1963.
92. Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л., Интеграл, мера и производная, «Наука», 1964.
93. Шилов Г. Е., Фан-Дык Тынь, Интеграл, мера и производная на линейных пространствах, «Наука», 1967.
94. Ющенко А. С., Судакова Е. С., Зарецкая Т. К., Синтез корректирующих устройств в системах автоматического регулирования методом регуляризации, Изв. вузов, «Приборостроение», № 10, 1971.
95. Яновский Г. Г., Спектр процесса на выходе нелинейной системы, описываемой по методу Винера, Труды научно-технической конференции ЛЭИС, вып. 1, 1967.
96. Яновский Г. Г., Разложение характеристики детектора  $n$ -й степени по полиному Эрмита, Труды научно-технической конференции ЛЭИС, вып. I, 1967.
97. Яновский Г. Г., Функциональные методы анализа нелинейных систем при случайных входных воздействиях. Труды II Всесоюзного совещания по статистическим методам теории управления, 1970.
98. Alper P., Consideration of discrete Volterra series, IEEE Trans. on Autom. Control. March, 1965.
99. Balakrishnan A., Determination of nonlinear systems from input-output data. Proc. Princeton University Conf., Princeton, New York, 1963.
100. Barrett J., Use of functionals in the analysis of nonlinear physical systems, J. Electr. Control, № 15, 1963.
101. Barrett J., Use of Volterra series to find region of stability of a nonlinear differential equation, J. Electr. Control, № 2, 1965.

102. Barrett J., Hermite functional expansions and the calculation of output autocorrelation and spectrum for any time-invariant nonlinear system with noise input. «Nonlinear stochastic control systems». Ed. by Fuller A., Taylor and Francis, 1970.
103. Bertalanffy L., The history and status of general systems theory. «Trends in general systems theory». Ed. by Klir G., Wiley-Interscience, 1972.
104. Bose A., Nonlinear systems characterisation and optimization, IRE Trans., Circuit Theory, Sp. Supplement, 1959.
105. Brick D., Wiener nonlinear expansion procedure applied to cybernetic problems, IEEE Trans. on system science and cyb., v. 1, № 2, 1965.
106. Cameron R., Simson rule for the numerical evaluation of Wiener integrals in function space, Duke Mathem. J., № 18, 1951.
107. Cameron R., Martin N., The Orthogonal development of nonlinear functionals in series of Fourier-Hermite functionals, Annals. of Math., v. 48, № 2, 1947.
108. Chesler D., Optimum multiple-input nonlinear system with gaussian inputs, IRE Trans. on inf. theory, v. 8, № 5, 1962.
109. Christensen G., On the convergence of Volterra series, IEEE Trans. Autom Control, v. 13, 1968.
110. Christensen G., Trott G., On the inclusion of initial conditions in Volterra series, Int. J. Control, v. 12, № 5, 1970.
111. Cornacchio J., Topological concepts in the mathematical theory of general systems. «Trends in general systems theory», Ed. by Klir G., Wiley-Interscience, 1972.
112. Damborg M., Fundamental structure of input-output stability of feedback systems, IEEE Trans., syst. science, cybern, v. 6, № 2, 1970.
113. Desoer C., Stability criterion obtained by a method of comparison, IEEE Trans. Autom. Control., April, 1965.
114. Deutsch R., On a method of Wiener for noise through nonlinear devices, IRE Conv. Rec., p. 4, 1955.
115. Flake R., Volterra series representation of nonlinear systems, IEE Trans., part II (Appl. and Ind.), January, 1963.
116. Frechet M., Sur les fonctionnelles continues, Ann. de l'Ecole Normale Sup. 3-me sér., v. 27, 1910.
117. French A., Butz E., Measuring the Wiener kernels of a nonlinear system using the fast Fourier transform algorithm. Int. J. Control, v. 17, № 3, 1973.
118. Halme A., Polinomial operators for nonlinear systems analysis, Helsinki, 1972.
119. Katzenelson J., Gould L., A spectrum factorisation method for the calculation nonlinear filters of Volterra type, Inf. and Control, v. 8, № 3, 1965.
120. Kielkiewics M., Synthesis of a class of Volterra kernels, Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. tech., v. 16, № 4, 1963.
121. Kielkiewics M., On stability of nonlinear systems, Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. tech., v. 16, № 4, 1963.
122. Kielkiewics M., Cascad connection of nonlinear systems, Int. J. Control, v. 11, № 6, 1970.
123. Klir G., An approach to system theory, Van Nostrand Reingold, 1969.

124. Ku Y., Su Ch., Volterra functional analysis of nonlinear time-varying systems, J. Franklin Inst., v. 284, № 6, 1967.
125. Lee Y. W., Synthesis of electric networks by means of Fourier transforms of Laguerre functions, J. Math. Phys., v. 2, 1932.
126. Lepschy A., Marchesini G., Picci A., Functional approach the stability of non-linear systems by use of the comparison theorem, Int. J. Control, v. 11, № 2, 1970.
127. Lubbock J., and Bansal V., Multidimensional Laplace transforms for solution of nonlinear equations, Proc. Inst. Electr. Eng., v. 116, № 12, 1969.
128. Mac Fee R., Determining the response of nonlinear system to arbitrary inputs, AIEE Trans, pt. II (Appl. and Ind.), v. 8, 1961.
129. Marchesini G., Picci G., On the functional identification of nonlinear systems from input-output data records, IEEE Trans. Autom. Control, December, 1969.
130. Marchesini G., Picci G., On the evaluation of the response of nonlinear systems by functionals series expansion of forced and free responses, J. Franklin Ints., v. 288, № 6, 1969.
131. Mesarovic M., A mathematical theory of general systems. «Trends in general systems theory». Ed. by Klir G., Wiley-Interscience, 1972.
132. Owchar M., Tingley A., On the absolute convergence of Fourier — Hermite expansion of nonlinear functionals, Proc. Amer. Math. Soc., v. 5, № 1, 1954.
133. Poli L., Delerue P., Le calcul symbolique a deux variables, Gauthier-Villars, Paris, 1954.
134. Poupkov C. A., Mathematical description of the dynamics of a man as cybernetic system with the help of measuring Wiener kernels, VII-th Intern. Congress on Cybern. Namur, 10—15 septembre, 1973.
135. Rao R., Christensen G., A criterion for the bounded input-bounded output stability of discrete data system with the slope restricted nonlinearity, Int. J. Control, v. 12, № 4, 1970.
136. Ridings R., Higgins., The transient response analysis of a class of continuous non-linear time-varying automatic control systems by functional techniques and multidimensional Laplace transforms, ISA Trans., v. 7, № 2, 1968.
137. Sandberg I., A survey of the theory of some systems governed by nonlinear functional. «System theory». Ed. by Zadeh and Pollak, McGraw-Hill, 1969.
138. Schetzen M., Measurement of kernels of a nonlinear system of finite order, Intern. J. of Control, v. 1, № 3, 1965.
139. Schetzen M., Determination of optimum nonlinear systems for generalized error criteria based on the use of gate functions, IEEE Trans. Inf. theory, v. 1—11, № 1, January, 1965.
140. Smets H., Analysis and synthesis of nonlinear systems, IRE Trans. Circuit Theory, december, 1960.
141. Stark L., The pupillary control system, its nonlinear adaptive and stochastic engineering design characteristics, Automatica, v. 5, 1969.
142. Trott G., Christensen G., On the uniqueness of Volterra series, IEEE Trans. Autom. Control, december 1969.



143. Trott G., Christensen G., A larger region of convergence for the Volterra series, *Int. J. Control*, v. 14, № 2, 1971.
144. Van Trees H., Functional techniques for the analysis of nonlinear behaviour of phase locked loops, *Proc. IEEE*, v. 52, № 8, 1964.
145. Vidyasagar M., Some applications of the spectral-radius concept to nonlinear feedback stability, *IEEE Trans. Circuit Theory*, v. 19, № 6, 1972.
146. Volterra V., *Theory of functionals and integral and integrō-differential equations*. Dover Publications, New York, 1959.
147. Wiener N., *Differential space*, *Journ. of Math. Phys.*, № 3, 1923.
148. Willem's J., *The analysis of feedback systems*, MIT Press, 1971.
149. Windeknecht T., *Mathematical system theory-causality*, *Math. system theory*, v. 1, № 4, 1967.
150. Zabor'sky J., Flake R., On fitting with functional polynomials, *Trans ASME, J. Basic Eng.*, 1967.
151. Zadeh L., A contribution to the theory of nonlinear systems, *Journal of Franklin Inst.*, v. 255, 1953.
152. Zadeh L., On the representation of nonlinear operators, *Wesc. Con. Rec.*, pt. 2, 1957.
153. Zadeh L., Optimum nonlinear filtering, *J. Appl. Phys.*, 24, 1953.
154. Zadeh L., *The concepts of system aggregate and state in system theory*. «System theory». Ed. by Zadeh and Pollak, McGraw-Hill, 1969.
155. Zames C., Functional analysis applied to nonlinear feedback systems, *IEEE Trans. Circuit Theory*, September, 1963.

