

МИНИСТЕРСТВО СВЯЗИ СССР
Московский ордена Трудового Красного Знамени
электротехнический институт связи

В.К. Мельник, В.М. Разумихин, С.С. Цветков

Учебное пособие
по курсу
ОСНОВЫ ТЕОРИИ СИСТЕМ
АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Часть 1

Линейные системы управления в
многоканальной электросвязи

Москва 1977

МИНИСТЕРСТВО СВЯЗИ СССР
Московский ордена Трудового Красного Знамени
электротехнический институт связи

В.К. Мельник, В.М. Разумихин, С.С. Цветков

УТВЕРЖДЕНО

Ученым советом
института в качестве
учебного пособия

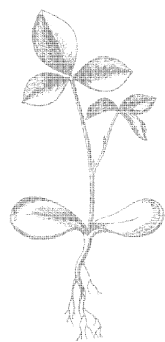
Учебное пособие
по курсу

ОСНОВЫ ТЕОРИИ СИСТЕМ
АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Часть 1
Линейные системы управления в
многоканальной электросвязи

Редакционно-издательский отдел ВЗЭС
Москва 1977





ПРЕДИСЛОВИЕ

Методическое пособие рассчитано на студентов факультета "Многоканальная связь" МЭИС, которым читается курс лекций "Основы теории систем автоматического управления".

В первой части пособия приводятся сведения об объектах и системах автоматического управления и регулирования, анализируются типовые звенья и линейные непрерывные системы. Рассматриваются передаточные и частотные характеристики линейных автоматических систем.

В последующих частях пособия будут рассмотрены вопросы устойчивости, качества систем автоматического управления и регулирования (САУ и Р), дискретные и нелинейные автоматические регуляторы и системы, системы телеуправления и контроля, принципы построения автоматизированных систем управления.

При написании пособия учтены и будут учитываться основные положения новой учебной программы, согласованной в мае 1975 г. а совещании представителей вузов связи.

Кроме основных теоретических сведений, в каждом разделе пособия рассматриваются примеры автоматических устройств и регуляторов, встречающихся в системах многоканальной связи: стабилизация температуры, частоты, напряжения, регуляторы АРУ и различные приборные системы.

I. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ОБЪЕКТАХ И СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ И РЕГУЛИРОВАНИЯ

I.1. Принципы и задачи автоматического управления

Определяющей чертой современного этапа научно-технического прогресса является углубление автоматизации научно-производственной деятельности человека, развитие систем автоматического управления различными техническими устройствами и автоматизированных систем управления предприятиями и целыми отраслями промышленности.

Задачей курса является рассмотрение в рамках программы теоретических методов и основ проектирования систем и приборов автоматического управления, регулирования, телеуправления и телеконтроля, которые используются в многоканальной связи.

Процесс управления в общем случае определяется поведением объекта в многомерном пространстве состояний и сложными законами управления, зачастую при отсутствии или неполной начальной информации об объекте управления и возмущающих внешних воздействиях.

Объекты управления могут быть самыми разнообразными: двигатель постоянного или переменного тока, групповой усилитель аппаратуры связи, магнитный усилитель в устройствах грунтового АРУ, переменный конденсатор (или реактивная лампа) в системах автоматической подстройки частоты радиоприемников, термостат задающего кварцевого генератора и т.д.

Состояние объекта управления определяется влиянием внешней среды и управляющих устройств, а также протеканием процессов внутри объекта.

Внешние воздействия могут носить детерминированный (регулярный) или случайный характер.

Вырабатываемые управляющим устройством управляющие входные воздействия обозначим X (X_1, X_2, \dots, X_n). Воздействия, не контролируемые управляющим устройством, назовем *возмущениями* F (f_1, f_2, \dots, f_n). Это может быть или нагрузка,

всегда воздействующая на ОУ, или помехи, влияние которых стремится свести к минимуму. Управляемые выходные величины обозначим $Y (Y_1, Y_2 \dots Y_n)$. Если известна математическая модель объекта, т.е. заданы начальные условия и система уравнений, связывающая внешние воздействия X и F с управляемыми величинами, то могут быть определены законы изменения выходной величины $Y = \Phi [X, F]$.

В состоянии статики на объект воздействуют величины X и F , не зависящие от времени. Если внешние воздействия являются функциями времени (непрерывными или дискретными) $X(t)$ или $F(t)$, то необходимо изучать динамику объекта управления. Зависимость $Y(t)$ от $X(t)$ и $F(t)$ может быть линейной и нелинейной, поэтому и САУ делятся на линейные и нелинейные. Объект управления называется устойчивым, если после снятия внешнего воздействия он возвращается в исходное состояние, в противном случае он называется неустойчивым.

В САУ добиваются такого целенаправленного протекания процесса управления, при котором параметры объекта управления находились бы в заданных пределах (частотные искажения, температура, усиление усилителя и т.д.).

САУ могут выполняться как с различными обратными связями, так и без них. Система без обратной связи — это обычно или системы контроля и сигнализации или некоторые виды стабилизирующих и программных систем. Процессы управления и регулирования без обратной связи применяются для решения самых простых задач при жестко заданных контролируемых внешних воздействиях. Флуктуации параметров внешней среды и неточности в изготовлении и наладке системы САУ не позволят провести эффективное управление при разомкнутой ОС. Поэтому мы в дальнейшем основное внимание будем уделять системам с замкнутой ОС.

Автоматические системы классифицируются по различным признакам.

- I. По закону изменения управляемой величины системы бывают:
- стабилизирующие, когда заданное значение управляемой величины является постоянным;
 - программные, когда управляемая величина изменяется по наперед заданной программе;

– следящие, когда заданное значение управляемой величины зависит от изменений заранее неизвестной управляющей величины.

По рекомендованной АН СССР терминологии именно эти три класса систем называют системами автоматического управления (САУ). Частным случаем САУ являются системы автоматического регулирования (стабилизации) – САР.

2. По реакции на ступенчатый сигнал автоматические системы бывают: статические – ошибка которых зависит от величины входного сигнала, и астатические – ошибка в управлении не зависит от величины входного сигнала и равна нулю в установившемся состоянии.

3. По виду уравнений, описывающих систему – линейные или нелинейные.

4. По характеру действующих в системе сигналов – непрерывные или дискретные.

5. По используемым для управления преобразователям энергии: электронные, электромеханические, пневматические, гидравлические и т.д.

6. Системы с постоянными или переменными во времени параметрами или структурой.

7. По количеству управляющих и управляемых переменных – одномерные и многомерные системы. Многомерные системы подразделяются на системы невязанного и многосвязанного регулирования.

8. По принципу организации систем – неадаптивные и адаптивные (экстремальные, самонастраивающиеся, самообучающиеся), эти системы обладают свойством приспосабливаться к изменению внешних условий работы и улучшать качество работы, используя накопленный опыт.

1.2. Функциональные и структурные схемы автоматических систем и устройств. Основные функциональные элементы систем автоматики

Для удобства анализа автоматические системы изображаются графически в виде структурных схем устройств (звеньев) и узлов,

соединенных линиями. Каждой линии соответствует операция передачи сигнала, а в узлах и звеньях сигналы подвергаются различным преобразованиям.

Ф у н к ц и о н а л ь н о й называется такая схема, в которой каждое звено схемы выполняет определенную функцию.

Схема называется **структурной**, если каждому изображаемому звену соответствует определенная математическая операция преобразования сигнала. На рис. I.1 приведены основные обозначения, принятые на структурных схемах. Схема, изображенная на рис. I.2, означает, что в прямую цепь включены: безынерционные звенья с

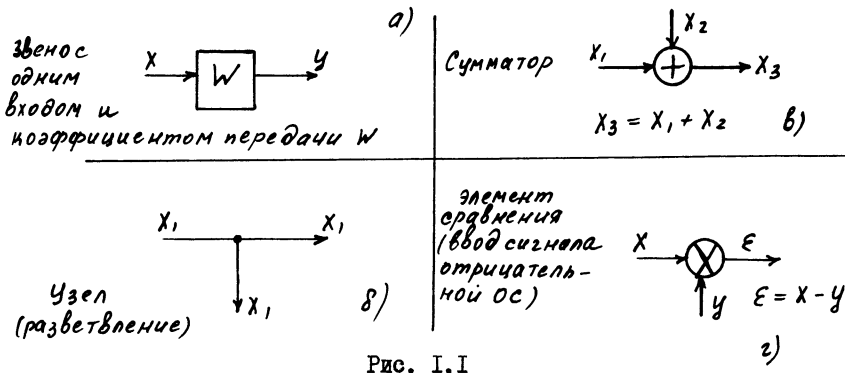


Рис. I.1

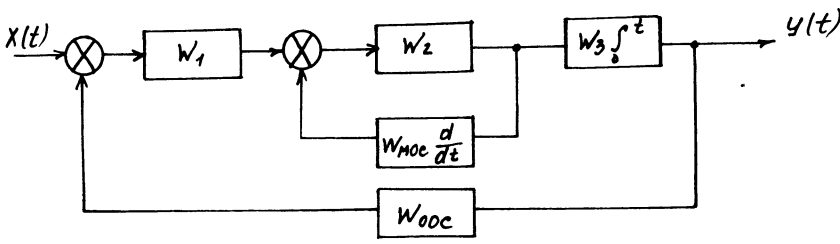


Рис. I.2

коэффициентом передачи W_1 и W_2 (это могут быть делители, умножители, усилители), интегрирующее звено с коэффициентом W_3 ; звено W_2 охвачено местной отрицательной ОС, в цепь которой включено дифференцирующее звено. Вся система охвачена общей отрицательной ОС с коэффициентом передачи W_{oc} .

На рис. 1.3 приведена структура САУ с обозначениями операций звеньев в операторной форме: K, P – дифференцирующее звено;

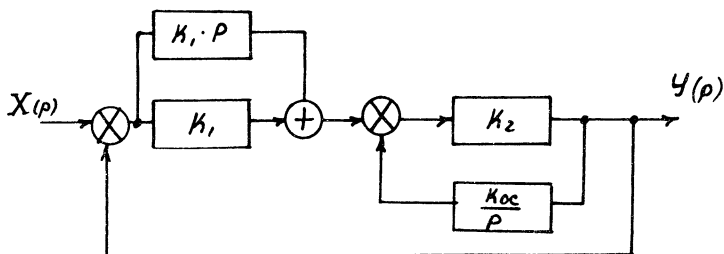


Рис. 1.3

$\frac{K_{oc}}{P}$ – интегрирующее звено в местной обратной связи. Выход системы соединяется непосредственно с входом – это означает, что коэффициент передачи цепи общей ОС равен 1.

Типовая функциональная схема САУ приведена на рис. 1.4. Она

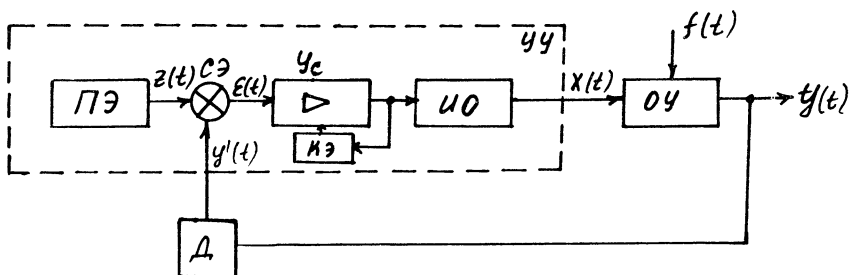


Рис. 1.4

представляет собой совокупность отдельных звеньев (элементов), преобразующих определенным образом поступающий на вход сигнал.

Для упрощения рассмотрения считается, что звенья обладают свойством однонаправленности, т.е. сигнал через звено распространяется только от входа к выходу.

Основные функциональные элементы следующие:

- программирующий (задающий) элемент (ПЭ) - программатор, хранит программу работы САУ или только какой-то эталон (установку) и преобразует эту программу в задающее воздействие $x(t)$. Обычно это бывают устройства магнитной и электрической памяти, функциональные потенциометры, контактные группы, переключаемые коммутатором, перфоленты, перфокарты и пр.;

- сравнивающий элемент (СЭ) выделяет разность $\varepsilon(t) = x(t) - y'(t)$, пропорциональную отклонению $y(t)$ от программы (эталона). Это может быть сумматор Кирхгофа, компаратор тока, напряжений, емкости или индуктивности, рычажное или гидравлическое устройство и т.д.;

- усилитель УС усиливает по мощности сигнал ошибки (отклонения) $\varepsilon(t)$ до величины, необходимой для управления исполнительным органом. В САУ используются самые различные усилители: ламповые, транзисторные, релейные, магнитные, пневматические и др.;

- исполнительный орган под воздействием усилителя вырабатывает сигнал управления $X(t)$ объектом управления. Обычно это бывают различного рода двигатели: гидравлические, постоянного и переменного тока, а также электромагниты;

- корректирующие элементы (КЭ) - специальные цепи, влияющие на качество работы САУ: точность, устойчивость, длительность переходных процессов и т.п.;

- датчик (измерительный элемент) - измеряет и преобразовывает действительное значение управляемой величины $y(t)$ в величину $y'(t)$, которую можно сравнить в СЭ с задающим воздействием $x(t)$. Датчики, или первичные преобразователи, могут быть самые различные: параметрические - потенциометрические, тензодатчики, фотосопротивления, емкостные, индуктивные, магнитоупругие - преобразующие контролируемую величину в изменение параметра электрической цепи;

генераторные - индукционные, термоэлектрические, пьезоэлектрические, электромагнитные, электродинамические -

преобразующие контролируемую величину в ЭДС; датчики перемещения и других типов.

1.3. Автоматические системы и устройства в многоканальной связи

Наиболее массовым примером систем автоматического регулирования (САР) в многоканальной связи являются различные усилители, охваченные общей обратной связью. Функциональная схема усилителя с общей ООС представлена на рис. 1.5. Во входном

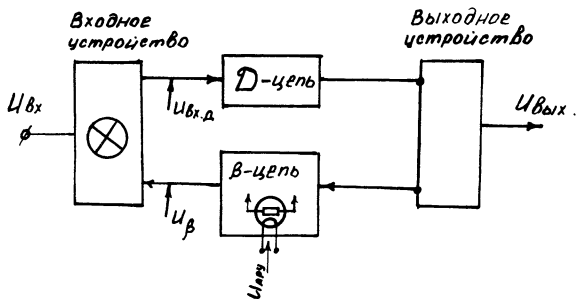


Рис. 1.5

устройстве усилителя (диф. системе или входной цепи усилителя) происходит сравнение задающего сигнала $U_{вх}$ и сигнала U_{β} , приходящего по цепи общей обратной связи. Выделяется сигнал отклонения (ошибки) $U_{вхд} = U_{вх} - U_{\beta}$, который усиливается усилительным звеном — Д-цепью и через выходное устройство подается на нагрузку. Часть выходного сигнала по β -цепи подается в соответствующей фазе на вход усилителя. Таким образом, усилитель с ООС является типичной следящей системой по отклонению. Во всех усилителях линейного тракта в цепи ООС установлены регулируемые сопротивления (терморезисторы), управляемые сигналом АРУ. Такие усилители являются комбинированными системами регулирования — по отклонению и по контролируемому внешнему воздействию (по возмущению).

В схему задающего генератора системы типа В-12-2, предназначенной для уплотнения воздушных линий связи, введена интегрирующая отрицательная ОС по отклонению, которая стабилизирует

колебательное напряжение на кварцевом резонаторе [I] х).

В этом же генераторе, как и в большинстве задающих и опорных генераторов, кварц помещен в термостат, включенный в другую систему регулирования. Спираль термостата греется, пока внутри не будет нужная температура. Электрический термометр размыкает контакты нагревателя. Как только термостат остынет, контакты замыкаются и термостат опять нагревается.

Наиболее сложными автоматическими системами в многоканальной связи являются системы автоматической регулировки уровня на магистралях связи.

На рис. I.6а приведена функциональная схема одиночного регулятора АРУ по току контрольной частоты, устанавливаемого на ОУП.

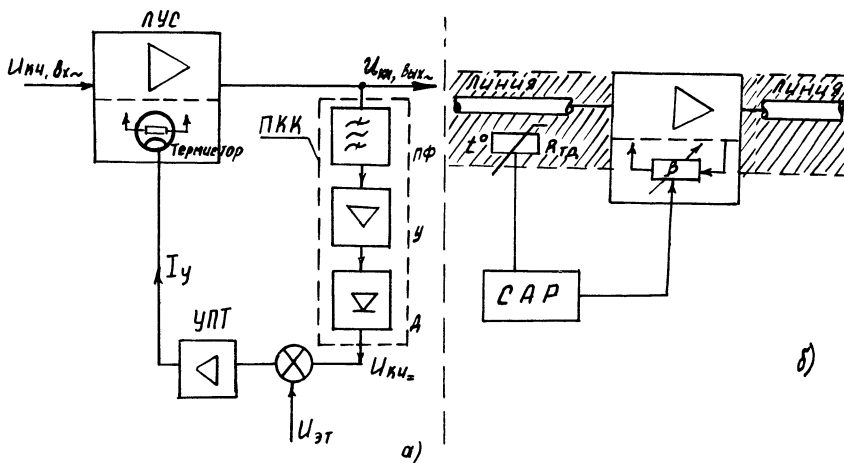


Рис. I.6

Рассматриваемая система является стабилизирующей САР. По магистрали связи передается ток контрольной частоты, уровень которой, несмотря на все колебания и возмущения на линии должен жестко поддерживаться постоянным. С выхода линейного усилителя (ЛУС) напряжение контрольной частоты $U_{кч}$ поступает на приемник контрольного канала (ПКК), где она выделяется полосовым

Х) Дивногорцев Г.П. и др. Аппаратура дальней связи. М., "Связь", 1970, с. 403.

фильтром ПФ, усиливается и выпрямляется детектором Д. Выпрямленное напряжение $U_{кч}$ сравнивается с эталоном $U_{эт}$ и отклонение подается на усилитель постоянного тока УПТ. Ток на выходе УПТ I_y изменяет сопротивление терморезистора, включенного в цепь обратной связи усилителя и соответственно изменяется коэффициент передачи линейного усилителя. Напряжение $U_{кч, вых}$ меняется до тех пор, пока разница $\Delta U_{ПТ} = U_{эт} - U_{кч}$ не станет меньше зоны чувствительности УПТ. Рассмотренная САР является системой статического типа, так как увеличение отклонения уровня тока КЧ вызывает увеличение отклонения $U_{кч, вых}$ на выходе ЛУС.

На рис. 1.66 приведена функциональная схема грунтовой АРУ системы К-1920, которая является следящей САР, управляемой по возмущению. Термодатчик $R_{тд}$, закопанный в грунт рядом с кабелем, измеряет температуру грунта, от которой зависит затухание кабеля. Сигнал с термодатчика является задающим для САР, которая меняет величину переменного сопротивления, установленного в регулирующем четырехпольнике (РЧ). РЧ включен либо в цепь ОС ЛУС"а, либо на его вход и компенсирует измерения затухания кабеля при изменении температуры.

В системе К-60 применена АРУ по первичным группам, которая является САУ программного управления. Она служит для контроля за изменением уровня во времени на выходе трактов первичных групп и автоматической регулировки усиления усилителей УС 60-108. В данной системе АРУ имеется только один приемник контрольного канала (ПКК), который в определенной последовательности подключается к групповым усилителям.

Если уровень тока контрольной частоты на выходе контролируемого приемника не отклонился больше чем на 0,43 дБ, то тракт считается нормальным и ПКК "переходит" на контроль следующей группы.

Если сигнал со схемы сравнения ПКК лежит в пределах от 0,43 дБ до 2,6 дБ, то подается сигнал на регулирование, которое длится 3-5 мин, если только раньше уровень КЧ не пришел в норму. Если этого не произошло или исчерпались пределы регулировки, или произошел резкий скачок, больше чем на 2,6 дБ, то из ПКК поступает сигнал вызова дежурного оператора и ПКК автоматически останавливается на данном тракте.

Можно привести описание еще ряда систем автоматического управления, которые применяются в многоканальной электроосвязи в настоящее время. Автоматизация обслуживания абонентов и совершенствование каналообразующей аппаратуры, а также внедрение автоматических и автоматизированных систем контроля на магистралях и в ЛАЦ"ах МТС приведет к еще большему внедрению САУ в системах МЭС.

1.4. Методы исследования автоматических систем и устройств

В САУ существуют статический, переходный и динамический режимы работы.

Если управляющее воздействие не изменяется во времени, внешние помехи отсутствуют и в системе установилось определенное соотношение между управляющим воздействием и управляемой величиной и наступило равновесие между всеми физическими величинами, определяющими процесс управления – то такой режим называется статическим. А ошибка Δ_c , характеризующая отличие управляемой (выходной) величины от заданного (управляющего) воздействия, называется статической.

Из-за наличия в любой автоматической системе инерционных элементов всякое изменение внешних воздействий (контролируемых и неконтролируемых) приведет к возникновению переходного процесса. При этом возникнут переходные ошибки Δ_n , обусловленные временными задержками в различных частях САУ.

Если на систему действует управляющее воздействие, меняющееся во времени по линейному или более сложному закону, то система будет находиться в динамическом режиме. Точность управления в этом режиме характеризуется динамической ошибкой Δ_d , которая зависит как от коэффициента передачи элементов системы, так и от их инерционности. Например, в стабилизирующих САУ отсутствуют динамические ошибки, в следящих САУ есть все виды ошибок.

Анализ САУ может быть выполнен, если установлено однозначное соответствие между управляющим воздействием и управляемой (выходной) величиной. Связь между этими величинами может быть как линейной, так и нелинейной. Если соответствие между

$Y(t) = \phi[x(t)]$ может быть описано с достаточной точностью линейным дифференциальным уравнением, то для анализа такой линейной САУ можно привлечь аппарат теории линейных дифференциальных уравнений.

Для анализа нелинейных САУ используются различные методы решения нелинейных дифференциальных уравнений.

Описание процессов в САУ существенно отличается при детерминированных и случайных воздействиях.

Кроме исследования точности работы САУ, т.е. выявления величин и характера возникающих ошибок, необходимо выяснить устойчиве ли система и обеспечить условие ее устойчивой работы: переходная ошибка САУ после приложения внешнего воздействия должна уменьшаться с течением времени.

Классический метод исследования САУ с помощью дифференциальных уравнений иногда бывает довольно громоздким и не позволяет выявить существенные стороны протекающих процессов. Поэтому для исследования САУ находят применение операторный, временной и частотный методы описания.

2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ И УСТРОЙСТВ АВТОМАТИКИ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЗВЕНЬЯ

2.1. Математическая модель. Составление дифференциальных уравнений и их линеаризация. Операторная форма записи

Математической моделью процессов, происходящих в САУ, является запись связи между управляющими и управляемыми величинами в форме уравнений в отклонениях или дифференциальных уравнениях (если отклонения малы).

При составлении математической модели САУ сначала описывают процессы в отдельных простых звеньях, а затем процесс управления системой в целом. Если все уравнения звеньев с учетом их структурных связей свести в одно общее уравнение, то получим уравнение динамики процессов в системе:

$$\Phi_2(y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}) = \Phi_1(x_1, x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(m)}; x_2, x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots, x_2^{(k)}; f_1, f_1^{(1)}, f_1^{(2)}, \dots, f_1^{(p)}) \quad (2.1)$$

Здесь $y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}$ — управляемая величина и ее производные;
 $x_1, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(m)}$
 $x_2, x_2^{(1)}, \dots, x_2^{(k)}$ } — управляющие воздействия и их производные;
 $f_1, f_1^{(1)}, \dots, f_1^{(p)}$ — возмущающее воздействие и его производные.

При строгом рассмотрении всей связи в САУ, влияющих на процесс управления, с учетом нелинейности реальных звеньев, описывающее систему уравнение (2.1) является сложным и нелинейным.

Для того, чтобы аналитически получить конечные результаты, приходится учитывать только наиболее существенные связи в системе, а над нелинейными зависимостями проводить операцию линеаризации. Основой линеаризации является предложение русского ученого И.А. Вышнеградского считать, что в нормально протекающем процессе управления имеют место малые отклонения переменных от равновесных или установившихся значений. Обычно управляющие и возмущающие воздействия малы по сравнению с параметрами протекающего процесса^{х)}. Замкнутое регулирование происходит постоянно, поэтому при математическом описании можно допустить линеаризацию нелинейных зависимостей. Заменяя нелинейно зависящие переменные процесса малыми приращениями от носительно точки равновесия (или установившегося состояния), можно перейти к линейным уравнениям в отклонениях Δ с нулевыми начальными условиями. Порядок проведения линеаризации следующий. Исходной считается аналитически (или графически) заданная зависимость $y_0 = \Phi_0(x_0, f_0)$ для состояния равновесия системы, например, статическая характеристика.

^{х)} Колебание сети электропитания + (5-10)% $U_{ном}$; в системах АРУ возмущения не превышают 10-20% тока контрольной частоты, температура грунта в течение суток колеблется на доли градуса и т.д.

Равновесие системы нарушают введением малых приращений в исходный режим. Записывается дифференциальное уравнение переходного процесса. Затем текущие координаты (значения переменных) заменяют суммой значений исходного состояния и приращений $x_i = x_0 + \Delta x_i$.

Если исключить из уравнения динамики уравнение статики, то получим уравнение переходного режима в отклонениях.

Статическая характеристика объекта управления описывается нелинейным выражением

$$y = \Phi(x, f).$$

На рис. 2.1а приведена статическая характеристика для f_1 и f_2 . Разложим нелинейную функцию $\Phi(x; f)$ в ряд Тейлора в окрестности точки "0". Ограничившись первыми членами ряда получим выражение для

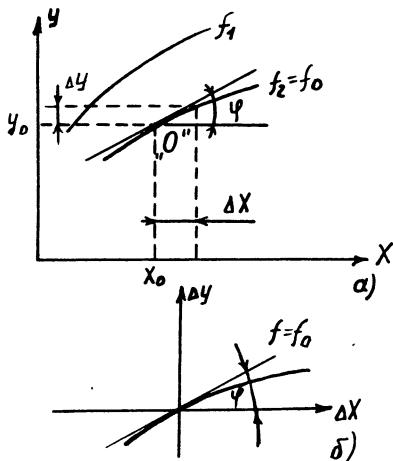


Рис. 2.1

из (2.2) вычтем значения, соответствующие равносному (установившемуся) режиму:

$$\Delta y = \Phi(x, f) - \Phi(x_0, f_0) = K_1 \Delta x + K_2 \Delta f, \quad (2.3)$$

$$y \approx \Phi(x_0, f_0) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial f}\right)_0 \Delta f. \quad (2.2)$$

В (2.2) индекс "0" указывает, что значения переменных взяты для точки равновесия. Чтобы получить уравнение в отклонениях,

где $k_1 = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_0$; $k_2 = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial f} \right|_0$

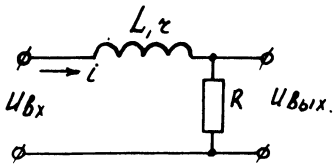
Коэффициенты уравнения (2.3) можно найти графически

$k_1 = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \operatorname{tg} \varphi$ при $f = \text{const}$ (см. рис. 2.1б),

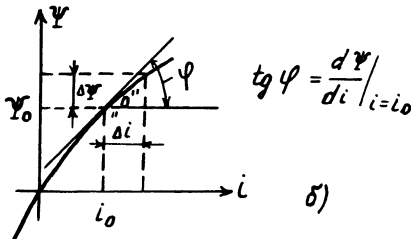
$k_2 = \frac{\Delta Y}{\Delta f} = \operatorname{tg} \theta$ при $x = \text{const}$ (построение аналогично рис. 2.1б).

Видно, что коэффициенты линеаризованного уравнения (2.2) зависят от выбора точки покоя на статической характеристике. Запись уравнения в отклонениях эквивалентна смещению начала координат в т. "0".

Пример. Проведем линеаризацию элемента RL (рис.2.2), у которого индуктивность L и потокоцепление Ψ за-



а)



б)

висят от тока i нелинейно (рис. 2.2б).

Здесь z - активное сопротивление катушки L . Зависимость $\Psi = \Phi(i)$ нелинейна и индуктивность $L = \frac{\Psi}{i}$ - величина переменная.

В установившемся режиме при входном постоянном напряжении U_{bx_0} потокоцепление Ψ_0 также постоянно и $\frac{d\Psi_0}{dt} = 0$. Поэтому можно записать

$$U_{bx_0} = (R + z) i_0 \quad (2.4)$$

Рис. 2.2

Изменение $U_{bx} = U_{bx_0} + \Delta U_{bx}$ ведет к изменению тока $i = i_0 + \Delta i$ и выходного напряжения $U_{bx} = U_{bx_0} + \Delta U_{bx}$.

Разложим функцию $\Psi(i)$ в ряд относительно точки "0", и, считая отклонения ΔU_{bx} , Δi и ΔU_{bx} малыми, ограничимся двумя

первыми членами ряда:

$$\psi(i) = \psi_0 + \left(\frac{d\psi}{di} \right)_{i=i_0} \frac{\Delta i}{1!} + \left(\frac{d^2\psi}{di^2} \right)_{i=i_0} \frac{\Delta i^2}{2!} + \dots \quad (2.5)$$

Величина $\left. \frac{d\psi}{di} \right|_{i=i_0}$ является тангенсом угла φ относительно т. "О". Ее можно считать динамической индуктивностью для тока i_0
 $l_d = \frac{d\psi}{di}$. Отсюда

$$\psi(i) = \psi_0 + l_d \Delta i \quad (2.6)$$

Взяв производную по времени от 2.6 и учтя, что $\frac{d\psi_0}{dt} = 0$, запишем $\frac{d\psi}{dt} = l_d \frac{d\Delta i}{dt}$.

Впишем уравнение (2.4) в приращениях

$$U_{\beta x_0} + \Delta U_{\beta x} = (i_0 + \Delta i)(R + \tau) + l_d \frac{d\Delta i}{dt} \quad (2.7)$$

Вычтем из (2.7) уравнение установившегося режима (2.4), получим

$$\Delta U_{\beta x} = (R + \tau) \Delta i + l_d \frac{d\Delta i}{dt}$$

Обозначив

$$T = \frac{l_d}{R + \tau} \quad - \text{ постоянная времени звена,}$$

$$K = \frac{R}{R + \tau} \quad - \text{ коэффициент передачи,}$$

получим линейное дифференциальное уравнение

$$\left(T \frac{d\Delta i}{dt} + 1 \right) \Delta U_{\beta x} = K \Delta U_{\beta x} \quad (2.8)$$

с постоянными коэффициентами, описывающее процессы в RL - звене.

Пример. Составим дифференциальное уравнение режимов работы усилителя постоянного тока (УПТ) с большим коэффициентом усиления $K_{yc} \gg 1$, охваченного отрицательной ОС (рис. 2.3).

Входной ток в УПТ, охваченного глубокой ОС, весьма мал. Из уравнения Кирхгофа для т. I имеем

$$i_1 = i_2 + i_3, \quad (2.9)$$

где $i_1 = \frac{U_{BX} - U_1}{R_1} \approx \frac{U_{BX}}{R_1}$; $i_2 = \frac{U_1 - U_{BX}}{R_0} \approx -\frac{U_{BX}}{R_0}$; $i_3 \approx -C_0 \frac{dU_{BX}}{dt}$.

1. Режим сглаживания. В обратной связи контур $R_0 C_0$.

Подставив в (2.9) значения токов, получим

$$U_{BX} + \frac{dU_{BX}}{dt} R_0 C_0 = -\frac{R_0}{R_1} U_{BX}. \quad (2.10)$$

Обозначив $T = R_0 C_0$ — постоянная времени контура;

$$K = \frac{R_0}{R_1} \quad \text{— коэффициент деления,}$$

перепишем (2.10) в виде

$$T \frac{dU_{BX}}{dt} + U_{BX} = -K U_{BX}. \quad (2.10^I)$$

2. Режим деления (масштабирования). В обратной связи только

$$R_0 (C_0 = 0).$$

Из уравнения (2.10) получим $U_{BX} = -K U_{BX}$.

3. Режим интегрирования. В обратной связи только C_0 ($R_0 = \infty$).

Поделив (2.10) на R_0 , можно найти его предел

$$\lim_{R_0 \rightarrow \infty} \left(\frac{U_{BX}}{R_0} + \frac{dU_{BX}}{dt} C_0 \right) = -\frac{U_{BX}}{R_1}, \text{ т.е. } \frac{dU_{BX}}{dt} R_1 C_0 = -U_{BX}. \quad (2.11)$$

Обозначим постоянную времени цепи интегрирования $T_u = R_1 C_0$
(2.11) перепишем

$$T \frac{dU_{BX}}{dt} = -U_{BX} \quad \text{или} \quad U_{BX} = -\frac{1}{T} \int_{-t_1}^{t_2} U_{BX} dt. \quad (2.12)$$

На системы автоматического управления (САУ), процессы в которых описываются линейными дифференциальными уравнениями, мо-

жет быть распространен принцип суперпозиции.

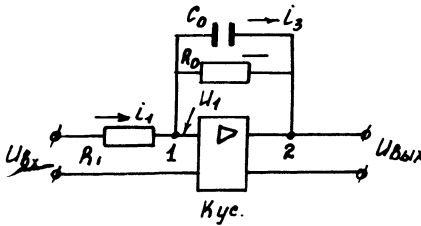


Рис. 2.3

Если сложное входное воздействие является суммой простых воздействий $\Phi_1[x(t), f(t)] = X_1(t) + X_2(t) + \dots + X_m + f_1(t) + f_2(t)$, то выходная величина является суммой откликов (реакций) системы на каждое простое воздействие

$$\Phi_2[y(t)] = y_1(t) + y_2(t) + \dots + y_n(t). \quad (2.13)$$

Считая в дальнейшем, что при составлении исходных уравнений мы всегда будем иметь дело с малыми отклонениями, т.е.

$X \rightarrow \Delta X, y \rightarrow \Delta y, f \rightarrow \Delta f$ и т.д., линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (2.3), описывающее процесс в объекте управления при воздействии на него управляющего $X(t)$ и возмущающего $f(t)$ сигналов в общем виде можно записать так:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x + c_q \frac{d^q f}{dt^q} + c_{q-1} \frac{d^{q-1} f}{dt^{q-1}} + \dots + c_0 f, \quad (2.14)$$

а в сокращенном виде:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^{(i)} y}{dt^{(i)}} = \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^{(k)} x}{dt^{(k)}} + \sum_{\ell=0}^q c_\ell \frac{d^{(\ell)} f}{dt^{(\ell)}}. \quad (2.15)$$

Обычно дифференциальные уравнения, описывающие динамику САУ, записываются так, чтобы выходная величина и ее производные находились в левой части уравнения, причем выходная величина приводится к коэффициенту, равному единице, а внешние возмущения — в правой части. Так именно записаны уравнения (2.8), (2.10¹) и (2.12).

При записи уравнения их приводят к стандартному виду, используя обозначения:

$T_i [c]$ - постоянные времени различных звеньев САУ;
 K_i - коэффициенты передачи, имеют самую различную размерность.

В теории САУ для анализа используют операторную форму записи уравнений (2.14) или (2.15). Вместо функций времени $x(t)$, $f(t)$ и $y(t)$ используют их изображения по Лапласу

$$X(p), F(p), Y(p). \quad (2.16)$$

Применим к обеим частям (2.14) преобразование Лапласа и, принимая нулевые начальные условия (т.е. исключая предшествующий статический режим, как мы это сделали в уравнении 2.3), запишем 2.14 следующим образом:

$$D(p)Y(p) = N(p)X(p) + M(p)F(p), \quad (2.17)$$

где

$$\left. \begin{aligned} D(p) &= a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0 \\ N(p) &= b_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0 \\ M(p) &= c_q p^q + c_{q-1} p^{q-1} + \dots + c_0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{полиномы от } p \text{ в левой} \\ \text{и правой частях урав-} \\ \text{нения (2.17).} \end{array}$$

Здесь оператор $p = \sigma + j\omega$ - комплексная величина для записи уравнений с изображениями функций времени по Лапласу.

$$\left. \begin{aligned} F(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = L[f(t)] \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(p) e^{pt} dp = L^{-1}[F(p)] \end{aligned} \right\} (2.18)$$

где L - знак прямого преобразования;
 L^{-1} - знак обратного преобразования;
 $f(t)$ - оригинал изображения $F(p)$;
 σ - абсцисса интегрирования на плоскости p ;
 $f(t) = 0$ при $t < 0$.

Свойства преобразования Лапласа изложены в курсе ТЛЭЦ^х), там же приводятся таблицы перехода от изображений к оригиналам и наоборот. Алгебраическая операторная форма записи позволяет исключить громоздкие вычисления, необходимые в классическом методе для определения постоянных интегрирования по заданным начальным условиям.

Приведем (2.17) к явной форме записи относительно $Y(p)$. Для этого (2.17) поделим на $D(p)$ и обозначим

$$W_x = \frac{N(p)}{D(p)} \quad \text{и} \quad W_f(p) = \frac{M(p)}{D(p)}, \quad \text{отсюда}$$

$$Y(p) = W_x(p) X(p) + W_f(p) F(p). \quad (2.19)$$

Выражения $W_x(p)$ и $W_f(p)$ называют передаточными функциями объекта управления (или звена системы). Они являются отношениями изображений по Лапласу управляемой (выходной) величины к соответствующему входному возмущению при нулевых начальных условиях

$$W_x(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{Y(p)}{X(p)} \quad \text{при} \quad \Delta f = 0, \quad (2.19^I)$$

$$W_f(p) = \frac{M(p)}{D(p)} = \frac{Y(p)}{F(p)} \quad \text{при} \quad \Delta X = 0 \quad (\text{см. 2.3}).$$

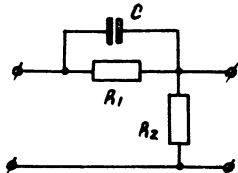
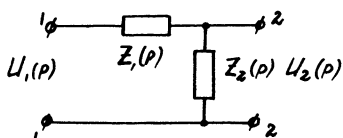


Рис. 2.4

Пример. Передаточная функция звена (рис. 2.4а) имеет вид

$$W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)},$$

где $Z(p)$ — операторное сопротивление $p = j\omega$.

Передаточная функция звена (рис. 2.4б) записывается как:

х) Л.Л. Бессонов. Теоретические основы электротехники. М., "Высшая школа", 1972.

$$W(p) = \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_1 \frac{1}{pC}}{R_1 + \frac{1}{pC}}} = \frac{R_2(Tp+1)}{R_2(Tp+1) + R_1}, \quad \text{где } T = R_1 C.$$

Пр и м е р . Уравнение (2.10¹) в операторной форме имеет вид:

$$Tp U_{\text{вых}}(p) + U_{\text{вых}}(p) = -K U_{\text{вх}}(p),$$

тогда

$$U_{\text{вых}}(p)(Tp+1) = -K U_{\text{вх}}(p); \quad W(p) = \frac{U_{\text{вых}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = -\frac{K}{Tp+1}.$$

Если $U_{\text{вх}}(t) = 1(t)$, а $L[1(t)] = \frac{1}{p}$, то

$$U_{\text{вых}}(p) = -\frac{K}{p(Tp+1)}, \quad \text{а оригинал (из таблиц)} \quad U_{\text{вых}}(t) = K(e^{-\frac{t}{T}} - 1).$$

Пр и м е р . Имеется дифференциальное уравнение:

$$0,5 \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = 20 \frac{dx(t)}{dt} + 20 x(t). \quad (2.20)$$

Определить преобразование Лапласа для управляемой величины $Y(p)$ при заданных начальных условиях:

$$\text{Обозначим } \frac{dy}{dt} \rightarrow \dot{y}(t) \text{ и т.д.}, \quad \ddot{y}(0)=1; \dot{y}(0)=0; y(0)=0.$$

Запишем начальные условия в операторной форме:

$$\ddot{y}(t) \div p^3 Y(p) - p^2 Y(0) - \dot{Y}(0) - p \dot{Y}(0) = p^3 Y(p) - 1$$

$$\dot{y}(t) \div p^2 Y(p) - p Y(0) - \dot{Y}(0) = p^2 Y(p)$$

$$\dot{y}(t) \div p Y(p) - Y(0) = p Y(p)$$

$$y(t) \div Y(p)$$

$$x(t) = 1(t) \div \frac{1}{p}$$

$$\dot{x}(t) = \delta^1(t) \div 1.$$

Поставив начальные условия в (2.20), получим

$$0,5 \rho^3 Y(\rho) - 0,5 + \rho^2 Y(\rho) = 20 \left(1 + \frac{1}{\rho}\right),$$

тогда

$$Y(\rho) = \frac{20,5\rho + 20}{\rho^3(0,5\rho + 1)}.$$

2.2. Стандартные возмущающие сигналы. Основные характеристики динамических звеньев

При рассмотрении структурных схем было показано, что система управления может быть представлена в виде соединений элементарных звеньев, каждое из которых выполняет специфическую математическую операцию. Существует небольшое количество элементарных звеньев, которые образуют достаточную базу для описания самых сложных САУ. При этом существенным для описания и составления структуры САУ является не физическая природа звена – эл.двигатель, транзисторный усилитель, гидронасос или редуктор, а динамические свойства звена – т.е. математическая модель (уравнение), описывающая зависимость между возмущением и реакцией системы.

Для исследования динамических свойств звеньев (и систем) необходимо решить дифференциальное уравнение (2.15), связывающее входные и выходные сигналы объекта управления. Проще всего это сделать, если известна входная величина $x(t)$. В реальных условиях на САУ действуют случайные функции времени. Поэтому для исследования динамических свойств звеньев в качестве входных принимается набор стандартных (типовых) сигналов, позволяющих достаточно полно описать входное воздействие.

На рис. 2.5а изображена ступенчатая функция

$$A \cdot 1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0 \\ A \cdot 1 & \text{при } t > 0 \end{cases}.$$

При $A = 1$ функция $x(t) = 1(t)$ – называется ступенчатой единичной функцией.

На рис. 2.5б изображена импульсная функция (единичный импульс)

$$\delta^1(t) = \frac{d1(t)}{dt} \quad - \text{ дельта-функция.}$$

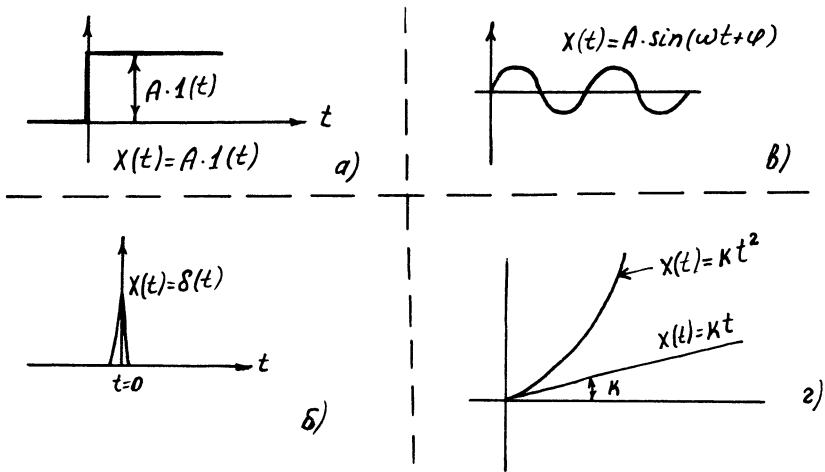


Рис. 2.5

Единичным импульсом называется сигнал

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = 0, \text{ его площадь } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1, \\ 0 & \text{при } t \neq 0. \end{cases}$$

Его можно рассматривать как сигнал, амплитуда которого бесконечно возрастает, время действия $t \rightarrow 0$, а площадь остается равной единице.

Гармоническая функция (рис. 2.5б) изменяется по закону синуса

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi),$$

или косинуса

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Она применяется для частотного анализа САУ.

Степенные функции (рис. 2.5г) – это функции вида: $x(t) = kt$, $x(t) = kt^2$ и т.д. \mathcal{U}_x удобно использовать для исследования динамики следящих систем.

Для описания линейных звеньев используют следующие величины, характеризующие свойства звена:

- комплексный коэффициент передачи;
- передаточную функцию звена;
- переходную функцию;

- импульсную переходную (весовую) функцию.

I. Комплексным коэффициентом передачи (ККП) называется отношение комплексной амплитуды выходного сигнала звена к комплексной амплитуде входного сигнала (см. 2.19^I):

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{A_{\text{вых}} e^{j(\omega t + \varphi_{\text{вых}})}}{A_{\text{вх}} e^{j(\omega t + \varphi_{\text{вх}})}} = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} =$$

$$= \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_0} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \quad (2.21)$$

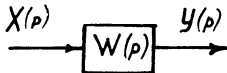
$A(\omega) = |W(j\omega)|$ - модуль ККП, амплитудно-частотная характеристика звена;

$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \varphi_{\text{вых}}(\omega) - \varphi_{\text{вх}}(\omega)$ - аргумент ККП,

фазочастотная характеристика звена.

Если звено состоит из пассивных элементов, то для физически реализуемых звеньев порядок полинома числителя в уравнении (2.21) не больше порядка полинома знаменателя, т.е. $m \leq n$.

Полное представление о частотных свойствах звена дает амплитудно-фазовая характеристика (годограф ККП), которую описывает конец вектора ККП при изменении частоты входного сигнала от 0 до



а) ∞ .

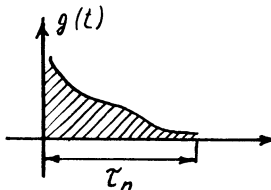


Рис. 2.6

б) 2. Перда точной функцией звена (аналогично выражению 2.19^I) называется отношение изображения по Лапласу управляемой (выходной) величины к изображению управляющей (входной) величины при нулевых начальных условиях:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} \quad (2.22)$$

Переход от передаточной функции к ККП осуществляется заменой p на $j\omega$ в выражении (2.22). Предполагается, что многочлены $N(p)$ и $D(p)$ не имеют общих корней и дробь (2.22) не может быть сокращена. На рис. 2.6а приведено обозначение передаточной функции линейного звена в структурных схемах.

3. Переходной функцией звена $h(t)$ называют сигнал на выходе звена при подаче на его вход единичного скачка $I(t)$. Изображение по Лапласу входного сигнала $X(p) = \frac{1}{p}$, а согласно (2.22), выходного сигнала

$$H(p) = Y(p) = \frac{W(p)}{p} \quad (2.23)$$

Переходя к оригиналу, получаем

$$h(t) = y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{W(p)}{p} \right] \quad (2.24)$$

Если входное выражение не единичная функция, а например, $x(t) = A I(t)$, то $y(t) = A \cdot h(t)$.

4. Импульсная переходная (весовая) функция (ИПФ) является реакцией звена на воздействие единичным импульсом $\delta^r(t)$. Изображение по Лапласу дельта-функции $[\delta^r(t)] = 1$, тогда изображение выходного сигнала $Y(p) = W(p)$.

Переходя к оригиналу, для ИПФ получим:

$$g(t) = y(t) = \mathcal{L}^{-1} [W(p)], \quad (2.25)$$

т.е. ИПФ является оригиналом передаточной функции.

Сравнивая (2.24) и (2.25), замечаем, что изображения переходной и импульсной переходной функций отличаются множителем

$$\frac{1}{p}, \text{ т.е. } g(t) = \frac{d h(t)}{d t}.$$

Зная переходную функцию, можно найти ИПФ и наоборот.

ИПФ удовлетворяет двум условиям:

$$1) \quad g(t) = 0 \text{ при } t < 0,$$

$$2) \quad \int_0^{\infty} |g(t)| dt < \infty. \quad (2.26)$$

Первое условие является условием физической осуществимости или причинности. Показывает, что в реальной системе переходный процесс $g(t)$ возникает только после подачи единичного импульса. Второе условие характеризует устойчивость: для устойчивых систем площадь под кривой, ограниченной координатными осями и кривой $g(t)$ — конечна, т.е. после подачи возмущения со временем реакция затухает. Интервал времени T_n , в течение которого $g(t) \neq 0$ называется памятью системы (рис. 2.66).

При произвольной форме сигнала на входе звена реакцию звена можно определить, зная его характеристики: КЧП, $h(t)$ или $g(t)$. Из курса ТЛЭЦ известно, что используя ряд Фурье для периодических сигналов, преобразование Фурье для непериодических сигналов и интеграл Дюамеля (свертки) — любой сигнал может быть представлен в виде суммы гармонических составляющих, единичных скачков или единичных импульсов. Используя принцип суперпозиции, выходной сигнал для линейных звеньев можно определить как композицию элементарных реакций на элементарные входные возмущения (формула 2.13).

Если управляющий сигнал задан в комплексной форме $X(j\omega)$, то управляемый сигнал находится с помощью КЧП:

$$Y(j\omega) = W(j\omega) X(j\omega). \quad (2.27)$$

Если входной сигнал задан операторным изображением $X(p)$, то изображение управляющего сигнала находится через посредство передаточной функции:

$$Y(p) = W(p) X(p). \quad (2.28)$$

Если входной сигнал задан как функция времени $x(t)$, то

сигнал на выходе находится с помощью переходной или весовой функций.

Используя интеграл свертки для представления $x(t)$ в виде композиции единичных скачков $I(t-\tau)$, где τ — шаг квантования (запаздывания) произвольного сигнала, ищем реакцию на каждый скачок и получаем выходной сигнал в виде

$$y(t) = X(0)h(t) + \int_0^t h(t-\tau) \frac{dx(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (2.29)$$

Разлагая $x(t)$ на композицию единичных импульсов $\delta^*(t-\tau)$, ищем реакцию на каждый импульс и получаем выходной сигнал в виде

$$y(t) = h(0)x(t) + \int_0^t g(t-\tau)x(\tau)d\tau. \quad (2.30)$$

Рассмотренные формулы позволяют найти реакцию на произвольное воздействие при нулевых начальных условиях^{х)}.

2.3. Передаточные и временные характеристики типовых звеньев линейных систем

Типовые звенья линейных САУ являются математической идеализацией реальных устройств в определенном диапазоне частот входных сигналов. Типовые звенья, вне зависимости от их назначения, физической природы и принципа действия описываются линейными дифференциальными уравнениями первого или второго порядка и делятся на:

– простейшие: пропорциональные, интегрирующие и дифференцирующие;

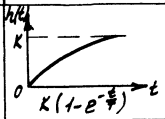
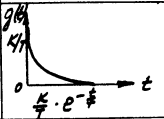
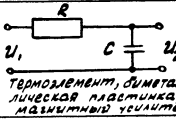
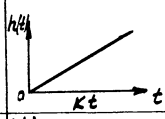
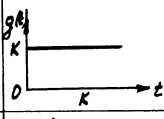

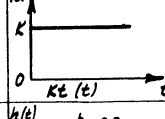
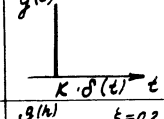
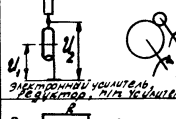
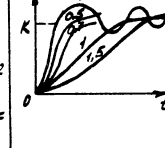
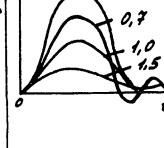
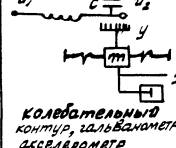
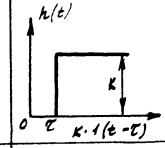
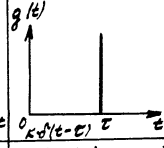
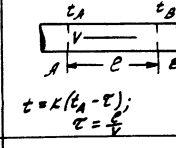
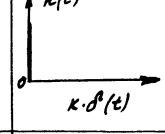
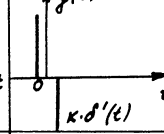
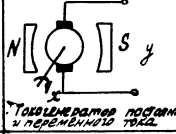
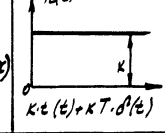
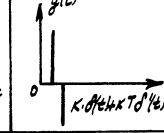
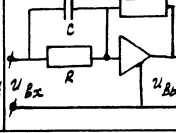
– звенья первого порядка: инерционные, формирующие, инерционно-формирующие;

– звенья второго порядка – аperiodические, колебательные и т.д.

х) При ненулевых начальных условиях расчеты усложняются, они описаны в "Теории автоматического управления", ч. I, под ред. Нетушила Л.В., М., "Высшая школа", 1968.

Таблица 2.1

Временные и передаточные характеристики типовых динамических звеньев

№ п/п	Название звена	Передаточная функция $W(p)$	Переходная функция $h(t)$	Импульсная переход. (вес) функция $g(t)$	Пример техническ. реализации звена
1.	Инерционное звено	$\frac{K}{T_p + 1}$ $y = T \frac{dy}{dt} = Kx$			 Термомомент, динамическая лаборатория, магнитный усилитель
2.	Интегрирующее звено	$\frac{K}{p}$ $y = K \int x dx$			 Гидравлический сервоаппарат
3.	Усилительное звено	K $y = Kx$			 Электронный усилитель, регулятор, пилотажный усилитель
4.	Колебательное звено (звено второго порядка)	$\frac{K}{T_p^2 + 2\xi T_p p + 1}$ $\frac{K \omega_0^2}{p^2 + 2\xi \omega_0 p + \omega_0^2}$ $T^2 y'' + 2\xi T y' + y = Kx$			 Колебательный контур, гальванометр, осциллограф
5.	Звено с постоянным временным запаздыванием	$Ke^{-\tau p}$ $y = Kx(t - \tau)$			 $t = \tau(t_0 - \tau)$ $\tau = \frac{l}{v}$
6.	Дифференцирующее звено	Kp $y = K \frac{dx}{dt}$			 Гальванометр постоянного и переменного тока
7.	Форсирующее звено	$K(T_p + 1)$ $y = K(T \dot{x} + x)$			

Мы рассмотрим самые распространенные типовые звенья:

1. Инерционное (апериодическое I-го порядка).
2. Интегрирующее.
3. Пропорциональное (усилительное, безынерционное).
4. Колебательное (звено 2-го порядка).
5. Звено с постоянным запаздыванием.
6. Дифференцирующее.
7. Форсирующее.

В табл. 2.1 приведены дифференциальное уравнение и передаточная функция $W(p)$, аналитические выражения и графики переходной $h(t)$ и весовой функций $g(t)$, а также примеры технической реализации звена.

3. СТРУКТУРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

3.1. Соединение звеньев в системах автоматики

Любая САУ составляется из звеньев, соединенных между собой определенным образом. Вид соединения звеньев влияет на результирующую передаточную функцию всей САУ. В теории САУ для упрощения анализа считают звенья однонаправленными (детектирующими) и их передаточные функции не меняются от подсоединения других звеньев.

Соединения звеньев бывают трех видов: последовательное (рис. 3.1а), параллельное (рис. 3.1б) и антипараллельное (с обратной связью, рис. 3.1в).

При последовательном соединении выходной сигнал одного звена является входным сигналом следующего звена

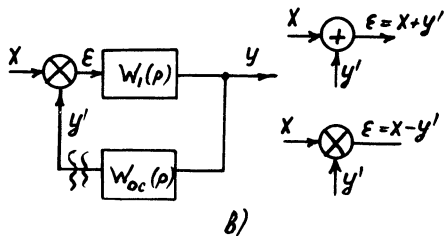
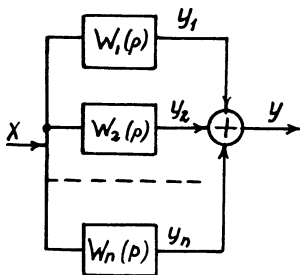
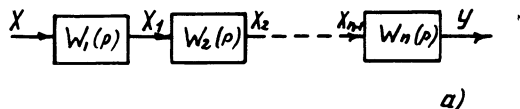
$$W_1 = \frac{X_1(p)}{X(p)}; \quad W_2(p) = \frac{X_2(p)}{X_1(p)}; \quad \dots \quad W_n = \frac{Y(p)}{X_{n-1}(p)}.$$

Если перемножим передаточные функции, то промежуточные сигналы $X_1(p), X_2(p), \dots, X_{n-1}(p)$ сократятся

$$W_1(p)W_2(p)\dots W_n(p) = \frac{X_1(p)}{X(p)} \frac{X_2(p)}{X_1(p)} \frac{X_3(p)}{X_2(p)} \dots \frac{Y(p)}{X_{n-1}(p)} \quad (3.1)$$

и получим
$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \prod_{i=1}^n W_i(p). \quad (3.2)$$

Передающая функция последо-



Р и с . 3 . I

вательно соединенных звеньев равна произведению передаточных функций отдельных звеньев.

При параллельном соединении звеньев (рис.3.1б)

входной сигнал $X(p)$ подается на все звенья сразу, а выходные сигналы суммируются:

$$Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p) + \dots + Y_n(p) = \sum_{i=1}^n Y_i(p). \quad (3.3)$$

Учитывая, что $Y_i(p) = W_i(p) X(p)$, (3.4)

и подставляя (3.4) в (3.3), получим

$$Y(p) = [W_1(p) + W_2(p) + \dots + W_n(p)] X(p), \quad (3.5)$$

или $W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \sum_{i=1}^n W_i(p)$. (3.6)

Передаточная функция параллельно соединенных звеньев равна сумме передаточных функций отдельных звеньев.

Переходная функция $h(t) = \sum_{i=1}^n h_i(t)$.

Импульсная переходная функция $g(t) = \sum_{i=1}^n g_i(t)$.

При антипараллельном соединении звеньев (рис. 3.1в) выходной сигнал $Y(p)$ звена прямой связи $W_1(p)$ подается как на вход звена обратной связи $W_{oc}(p)$, так и является общим выходным сигналом соединения. Если выходной сигнал звена обратной связи $Y'(p)$ суммируется с входным сигналом $X(p)$, то обратная связь называется положительной.

Если знак (фаза) сигнала обратной связи противоположен знаку сигнала $X(p)$, так что в узле происходит вычитание сигналов, то обратная связь называется отрицательной.

Уравнение входа для положительной ОС

$$E(p) = X(p) + Y'(p), \quad (3.7)$$

для отрицательной обратной связи $E(p) = X(p) - Y'(p)$.

Учитывая, что $Y'(p) = W_{oc}(p)Y(p)$ и

$$Y(p) = W_i(p)E(p), \quad (3.8)$$

подставив эти выражения в (3.7) и исключив $E(p)$, получим для ПОС

$$Y(p) = \frac{W_i(p)}{1 - W_i(p)W_{oc}(p)} X(p); \quad W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{W_i(p)}{1 - W_i(p)W_{oc}(p)}, \quad (3.9)$$

для ООС $Y(p) = \frac{W_i(p)}{1 + W_i(p)W_{oc}(p)} X(p); \quad W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{W_i(p)}{1 + W_i(p)W_{oc}(p)}. \quad (3.10)$

Для расчета автогенераторов используется выражение (3.9). В теории управления и регулирования обычно используют отрицательную обратную связь для стабилизации параметров САУ и слежения за входными возмущениями. Поэтому основой для расчетов является уравнение 3.10.

Если в цепь ОС включено пропорциональное (усилительное, безынерционное) звено - $W_{oc}(p) = K_{oc}$, то обратная связь называется жесткой. В частном случае, когда $K_{oc} = 1$, т.е. сигнал с выхода передается сразу на вход, то ОС называется единичной.

Если в цепь обратной связи включено дифференцирующее звено - $W_{oc}(p) = pT$ или $W_{oc} = \frac{pT}{1+pT}$, ОС называется гибкой, или дифференцирующей.

Если в цепь ОС включено интегрирующее звено - $W_{oc} = \frac{1}{pT}$, то ОС называется интегрирующей.

Пример. Определим передаточную функцию САУ, приведенную на рис. 3.2а:

$$W(p) = W_i(p) W_2(p) [W_3(p) + W_4(p)].$$

Передаточная функция параллельного соединения

$$W_n(p) = W_3(p)W_2(p) = \frac{K_3}{p} + K_4 = \frac{K_3 + K_4 p}{p} = \frac{K_3(1 + \frac{K_4}{K_3} p)}{p} = \frac{K_3(1 + pT_n)}{p}, \quad \text{где } T_n = \frac{K_4}{K_3}. \quad (3.11)$$

$$W(p) = \frac{K_1}{p} \frac{K_2}{(1+pT_2)} \frac{K_3(1+pT_n)}{p} = \frac{K(1+pT_n)}{p(1+pT_2)}, \quad \text{где } K = K_1 K_2 K_3.$$

Пример. Определим передаточную функцию САУ, состоя-

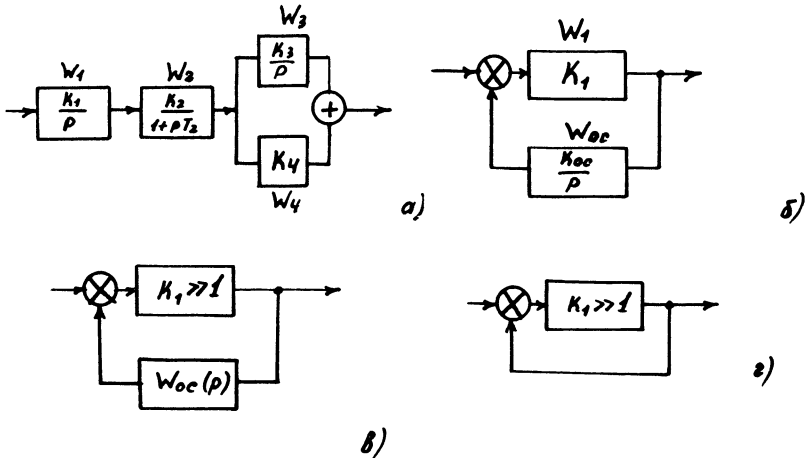


Рис. 3.2

щую из усилительного звена, охваченного интегрирующей обратной связью (рис. 3.2б)

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_{00}(p)} = \frac{K_1}{1 + \frac{K_1 K_{00}}{p}} = \frac{K_1 p}{p + K_1 K_{00}} = \frac{K p}{1 + pT},$$

$$\text{где } K = \frac{1}{K_{00}}, \quad T = \frac{1}{K_1 K_{00}}.$$

Пример На рис. 3.2в приведен усилитель с большим коэффициентом усиления $K_1 \gg 1$, охваченный отрицательной ОС с передаточной функцией $W_{oc}(p)$.

Передаточная функция такого соединения

$$W(p) = \frac{K_1}{1 + K_1 W_{oc}(p)} = \frac{1}{W_{oc}(p)} \quad K_1 \rightarrow \infty$$

Таким образом, пользуясь методами анализа САУ, мы показали известный из теории усилителей факт, что при высоком коэффициенте усиления прямого звена свойства усилителя целиком определяются характером цепи ОС.

Пример. На рис. 3.2г приведен усилитель с большим коэффициентом усиления $K_1 \gg 1$, охваченный единичной ОС.

$$W(p) = \frac{K_1}{1 + K_1 \cdot 1} \approx 1.$$

В зависимости от фазы снимаемого сигнала относительно входного мы получим или инвертор с коэффициентом передачи $K_{\mu} = -1$ или повторитель $K_{\eta} = 1$.

3.2. Структурные преобразования систем.

Перенос точек разветвления и суммирования

Часто структурные схемы реальных САУ оказываются достаточно сложными и к ним нельзя непосредственно применить правила преобразования трех типов соединений звеньев: последовательное, параллельное и антипараллельное. Например, структурная схема, приведенная на рис. 3.3а, кроме контура главной ОС имеет два контура местной обратной связи, которые перекрещиваются, контур суммирования, четыре узла суммирования и вычитания, три точки разветвления сигналов. Для эквивалентного преобразования этой схемы воспользуемся правилами эквивалентных структурных преобразований, приведенными в таблице 3.1. Здесь мы для сокращения записи вместо обозначения " $W(p)$ " будем применять " \hat{W} ",

Пример. Имея в виду табл. 3.1, определить передаточную функцию САУ по рис. 3.3а.

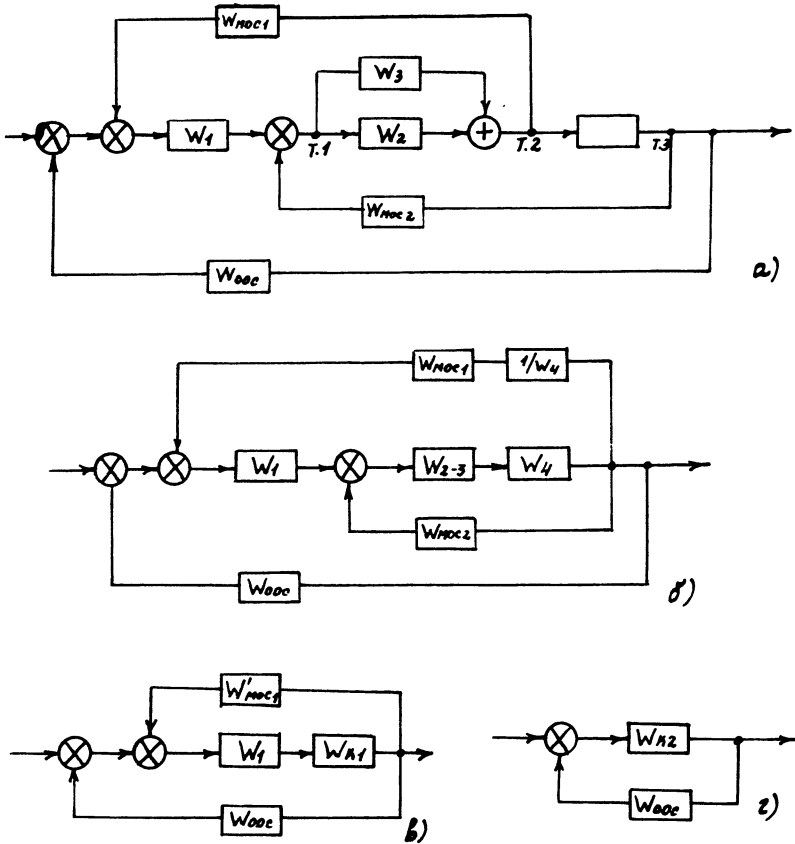


Рис. 3.3

Передаточная функция параллельного соединения звеньев W_2 и W_3

$$W_{2-3} = W_2 + W_3 .$$

Перенесем сигнал разветвления из т. 2 в т. 3, добавив в цепь местной обратной связи звено $1/W_4$. Преобразованная схема представлена рис. 3.3б. Вычислим передаточную функцию контура

Таблица 3.1

Правила эквивалентных структурных преобразований

Операция	Исходная схема	Эквивалентная схема
Перенос узла	<p>По направлению сигнала</p>	
	<p>Против</p>	
Перенос точки разветвления	<p>По направлению сигнала</p>	
	<p>Против</p>	
Добавление звена		
	<p>В обратную связь</p>	
Замена звеньев прямой и обратной цепей		
Переход к единичной обратной связи		

$$W_{K1} = \frac{W_{2-3} W_4}{1 + W_{2-3} W_4 W_{MOC2}} .$$

Передаточная функция контура К2 (см. рис. 3.3в)

$$W_{K2} = \frac{W_1 \cdot W_{K1}}{1 + W_1 W_{K1} W_{MOC1}} , \text{ где } W_{MOC1}' = \frac{W_{MOC1}}{W_4} .$$

После проведенных преобразований схема свелась к соединению звеньев W_{K2} и W_{OOC} по схеме с обратной связью (рис.3.3г):

$$W_{CAU} = \frac{W_{K2}}{1 + W_{K2} W_{OOC}} .$$

3.3. Передаточные функции и дифференциальные уравнения САУ

В системах автоматики различают следующие виды передаточных функций: разомкнутой системы $W_p(p)$, замкнутой системы $W_j(p)$ и по сигналу ошибки (рассогласования) $W_E(p)$.

Передаточная функция разомкнутой САУ запишется:

$$\text{для рис. 3.1а: } W_p(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = W_1(p) W_2(p) \dots W_n(p) ,$$

$$\text{для рис. 3.1б: } W_p(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = W_1(p) + W_2(p) + \dots + W_n(p) .$$

Чтобы найти $W_p(p)$ для САУ по рис. 3.1в разорвем обратную связь и, считая, что сигналы в схеме не изменились, напишем

$$W_p(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} . \quad (3.12)$$

Передаточная функция замкнутой системы $W_3(p)$ по управляемому воздействию $X(p)$ устанавливает связь между выходной величиной $Y(p)$ и управляющим воздействием $X(p)$ при замкнутой обратной связи и отсутствии внешних возмущений. Учитывая, что $W_1(p) = W_p(p)$ - см. рис. 3.1в

$$W_3(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)W_{oc}(p)} \quad (3.13)$$

В частном случае, при $W_{oc}(p) = 1$, а к единичной обратной связи САУ всегда можно привести (см. табл. 3.1)

$$W_3(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)} \quad (3.14)$$

Рассмотрим передаточные функции замкнутой системы при воздействии управляющего сигнала $X(t)$ и возмущающего сигнала $f(t)$ - рис. 3.4.

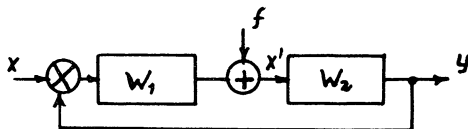


Рис. 3.4

Учитывая принцип суперпозиции для линейных систем, управляемая величина

$$Y(p) = Y_x(p) + Y_f(p) = W_{3x}(p) \cdot X(p) + W_{3f}(p) \cdot F(p).$$

Так как сигналы $x(t)$ и $f(t)$ приложены в разные точки системы, то и передаточные функции будут разными:

$$W_{3x}(p) = \frac{W_1(p)W_2(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)} = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)} \quad \text{здесь в цепи прямой связи}$$

находятся $W_1(p)$ и $W_2(p)$,
а $W_{oc}(p) = 1$;

$$W_{3f}(p) = \frac{W_2(p)}{1+W_1(p)W_2(p)} = \frac{W_2(p)}{1+W_p(p)} \quad \text{— здесь в цепи прямой связи стоит } W_2(p), \text{ а}$$

$$W_{oc}(p) = W_1(p).$$

Передаточная функция $W_3(p)$ определяет дифференциальное уравнение замкнутой системы

$$Y(p) = W_3(p) X(p), \quad (3.15)$$

учитывая (3.14)

$$Y(p) [1+W_p(p)] = W_p(p) X(p). \quad (3.15^I)$$

Пример. Задано $W_p(p) = \frac{K}{p(1+pT_1)}$; $W_{oc} = 1$.
Найти дифференциальные уравнения замкнутой и разомкнутой САУ, если $K = 20$, $T = 0,5$ с

$$W_3(p) = \frac{\frac{K}{p(1+pT_1)}}{1 + \frac{K}{p(1+pT_1)}} = \frac{K}{p(1+pT_1) + K}.$$

$$(p^2T_1 + p + K) Y(p) = K X(p),$$

$0,5 \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 20y(t) = 20x(t)$ — дифференциальное уравнение замкнутой системы.

Для разомкнутой системы $Y(p) = W_p(p) \cdot X(p)$.

$$(p^2T_1 + p) Y(p) = K X(p),$$

$$0,5 \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = 20X(t).$$

Для оценки точности работы САУ используется передаточная функция $W_E(p)$ по сигналу ошибки (расоогласования) — см. рис. 3.1в. По определению $W_E(p) = \frac{E(p)}{X(p)}$; для единичной отрицательной ОС $E(p) = X(p) - Y(p)$.

Учитывая, что $Y(p) = W_3(p) \cdot X(p)$, получим

$$E(p) = [1 - W_3(0)] X(p),$$

тогда

$$W_\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{X(p)} = 1 - W_3(p). \quad (3.16)$$

Подставив вместо $W_3(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)}$, получим связь между передаточными функциями разомкнутой системы и по сигналу ошибки:

$$W_\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + W_p(p)}. \quad (3.17)$$

4. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

4.1. Определение частотных характеристик

В ряде случаев для управления в системах многоканальной электросвязи используются гармонические или квазигармонические сигналы. При этом анализ систем автоматического управления (САУ) может быть выполнен более простым методом, чем метод преобразования Лапласа, особенно, если рассматривается поведение САУ в установившемся режиме. Метод, позволяющий сравнительно просто анализировать поведение САУ при гармонических воздействиях, базируется на применении преобразования Фурье ко входному воздействию и к отклику на выходе, и называется частотным методом анализа, или методом анализа с помощью частотных характеристик. Отметим, что частотным методом можно анализировать любые САУ (линейные и нелинейные, стационарные и нестационарные, непрерывные и импульсные), однако существенное упрощение частотный метод дает при анализе линейных стационарных непрерывных систем.

При частотном методе, как известно, входной гармонический сигнал вида:

$$x(t; \omega) = X_m \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (4.1)$$

заменяется на обобщенный гармонический сигнал

$$x(t; \omega) = \dot{X} e^{j\omega t}, \quad (4.2)$$

где $\dot{X} = X_m e^{j\varphi_0}$ – комплексная амплитуда сигнала $x(t; \omega)$.
 В линейной системе при гармоническом воздействии на входе отклик является также гармонической функцией такой же частоты ω , т.е.

$$y(t; \omega) = \dot{Y} e^{j\omega t}, \quad (4.3)$$

где \dot{Y} – комплексная амплитуда отклика $y(t; \omega)$.

Если теперь взять отношение отклика системы к входному воздействию, то полученный результат называется комплексным коэффициентом передачи:

$$\dot{K}(j\omega) = \frac{y(t; \omega)}{x(t; \omega)} = \frac{\dot{Y}}{\dot{X}}. \quad (4.4)$$

Поскольку $\dot{K}(j\omega)$ – отношение векторных величин, то очевидно, что комплексный коэффициент передачи (ККП) – вектор. Учитывая, что комплексная амплитуда отклика \dot{Y} определяется в общем виде как:

$$\dot{Y} = \dot{Y}_m e^{j(\varphi_0 + \varphi_k)}, \quad (4.5)$$

где φ_k – сдвиг фаз, вносимый САУ, получим для $\dot{K}(j\omega)$:

$$\dot{K}(j\omega) = |\dot{K}(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = \frac{\dot{Y}_m}{\dot{X}_m} e^{j\varphi_k}. \quad (4.6)$$

Последнее выражение позволяет легко получить связь модуля и фазы $\dot{K}(j\omega)$ с модулями и фазами отклика и воздействия, а именно

$$K(\omega) = |K(j\omega)| = \frac{Y_m}{X_m}, \quad (4.7)$$

и называется амплитудно-частотной характеристикой САУ (АЧХ);

$$\varphi(\omega) = \varphi_k = \operatorname{arg} \{K(j\omega)\} \quad (4.8)$$

называется фазочастотной характеристикой САУ (ФЧХ). Зависимость $K(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ получается вследствие того, что Y и X комплексная амплитуда отклика и воздействия являются одновременно Фурье-преобразованием исходных временных функций $y(t)$ и $x(t)$, т.е. Y и X являются функциями частоты ω . Замена исходного синусоидального сигнала на обобщенный гармонический вида (4.2) может быть выполнена всегда на основании формулы Эйлера. Эта замена позволяет существенно упростить анализ, так как операции с экспоненциальными функциями, как правило, проще, чем с тригонометрическими.

АЧХ и ФЧХ САУ могут быть построены графически как обычные функции одной переменной, т.е. по оси абсцисс откладывается значение частоты ω , а по оси ординат значения $K(\omega)$ для АЧХ или $\varphi(\omega)$ для ФЧХ. Зависимость $K(j\omega)$ может быть также построена графически. Однако, так как $K(j\omega)$ — вектор, то графическое построение $K(j\omega)$ производится на плоскости комплексного переменного. Если построение $K(j\omega)$ производится по имеющимся данным АЧХ и ФЧХ САУ, то целесообразно пользоваться полярными координатами. При изменении частоты ω от 0 до ∞ конец вектора $K(j\omega)$ описывает на плоскости комплексного переменного некоторую кривую. Эта кривая называется годографом вектора $K(j\omega)$. Поскольку годограф $K(j\omega)$ показывает для САУ одновременно как изменение амплитуды, так и фазы, то иногда годограф $K(j\omega)$ называют амплитудно-фазо-частотной характеристикой САУ (АФЧХ).

П р и м е р.

Определить АЧХ и ФЧХ САУ, имеющей

$$W(p) = \frac{K}{1 + 2\xi T_0 p + p^2 T_0^2}.$$

Используя (4.9), найдем, что

$$\dot{K}(j\omega) = W(p=j\omega) = \frac{K}{(1-\omega^2 T_0^2) + j 2 \xi T_0 \omega} ;$$

или, обозначая $\omega_0 = \frac{1}{T_0}$ - резонансная частота, получим:

$$\dot{K}(j\omega) = \frac{K}{[1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2] + j \frac{2\xi\omega}{\omega_0}} .$$

Выражение для АЧХ и ФЧХ получим, если воспользуемся (4.7) и (4.8), т.е.:

$$K(\omega) = |\dot{K}(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{[1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2]^2 + (\frac{2\xi\omega}{\omega_0})^2}} ;$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_K = \arg \left\{ \dot{K}(j\omega) \right\} = -\arctg \frac{2\xi\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} .$$

Графическое изображение $K(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ для разных ξ по-

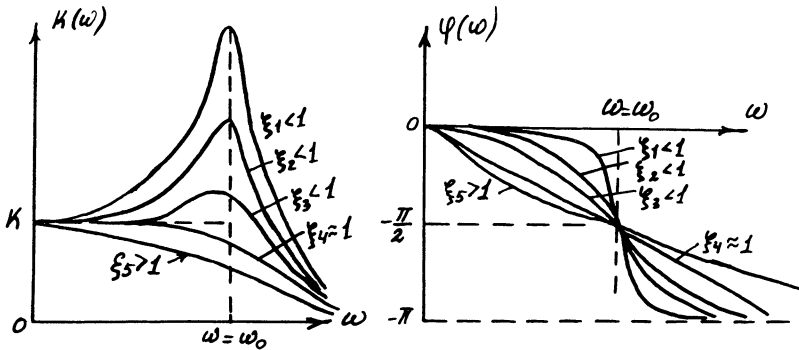


Рис. 4.1

казано на рис. 4.1.

В ряде случаев для определения частотных характеристик целесообразно использовать представление вектора $\dot{K}(j\omega)$ не в

полярных, а в декартовых координатах, а именно:

$$K(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega). \quad (4.9)$$

$U(\omega)$ — называют частотной характеристикой действительной части $K(j\omega)$ (или просто действительной частотной характеристикой); $V(\omega)$ — называют частотной характеристикой мнимой части $K(j\omega)$ (или мнимой частотной характеристикой). По определенным $U(\omega)$ и $V(\omega)$ можно найти АЧХ и ФЧХ системы как:

$$\left. \begin{aligned} K(\omega) &= \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} \\ \varphi(\omega) &= \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)} \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

Для рассмотренного примера (см. стр. 44) легко найти:

$$U(\omega) = \operatorname{Re}[K(j\omega)] = \frac{K \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]^2 + \left(2 \frac{\xi \omega}{\omega_0} \right)^2};$$

$$V(\omega) = \operatorname{Im}[K(j\omega)] = \frac{-K \frac{2\xi\omega}{\omega_0}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0} \right)^2}.$$

Пример.

Для САУ, рассмотренной в примере на стр. 44, построить АФХ, если $\xi = 1$; $T_0 = 0,01$ с; $K = 10$. Учитывая, что при $\xi = 1$, знаменатель $W(p)$ представляет полный квадрат $(1 + pT_0)^2$ (см. предыдущий пример), упростим полученные выражения:

$$W(p) = \frac{K}{(1 + pT_0)^2} = \frac{K}{(1 + pT_0)(1 + pT_0)};$$

$$K(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\omega T_0)^2} = \frac{K}{(1 + j\omega T_0)(1 + j\omega T_0)};$$

$$K(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1+\omega^2 T_0^2} \sqrt{1+\omega^2 T_0^2}} = \frac{K}{1+\omega^2 T_0^2};$$

$$\varphi(\omega) = -\text{arctg} \frac{2 T_0 \omega}{1-\omega^2 T_0^2};$$

$$U(\omega) = \frac{K [1-\omega^2 T_0^2]}{[1+\omega^2 T_0^2]^2};$$

$$V(\omega) = -\frac{2 \omega T_0 K}{[1+\omega^2 T_0^2]}.$$

Числовые данные $K(\omega)$; $\varphi(\omega)$ и $U(\omega)$; $V(\omega)$, необходимые для построения АФХ САУ, приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

ωT_0	0	0,1	1,0	10	100
$K(\omega)$	10	9,9	5	0,099	~ 0
$\varphi(\omega)$	0	-11,4°	-90°	-169°	-180°
$U(\omega)$	10	9,7	0	-0,097	~ 0
$V(\omega)$	0	-1,96	-5	-0,02	~ 0

Графическое изображение АФХ рассмотренной САУ показано на

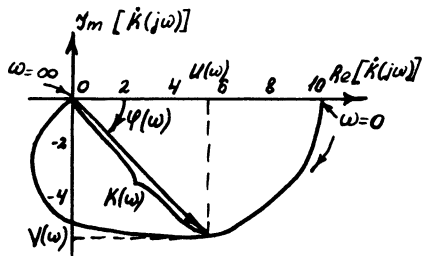


Рис. 4.2

рис. 4.2. Естественно,

что для построения АФХ достаточно данных $K(\omega)$ и $\varphi(\omega)$, либо $U(\omega)$ и $V(\omega)$. На рис. 4.2 показано значение $K(j\omega)$, соответствующее $\omega T_0 = 0,5$. При этом $U(\omega) = V(\omega)$, $\varphi(\omega) = -45^\circ$, а $K(\omega) = 7,76$.

Частотные характеристики САУ связаны с другими характеристическими функциями. В разделах 2.1 и 2.2 по-

называется связь $\dot{K}(j\omega)$ с передаточной функцией САУ $W(p)$:

$$\dot{K}(j\omega) = W(p) \Big|_{p=j\omega} = W(j\omega). \quad (4.11)$$

Тогда АЧХ определяется как:

$$K(\omega) = |\dot{K}(j\omega)| = |W(j\omega)| \quad ; \quad (4.12)$$

а ФЧХ как:

$$\varphi(\omega) = \varphi_K = \operatorname{arg} \left\{ W(j\omega) \right\}, \quad (4.13)$$

т.е. КЧП, АЧХ и ФЧХ САУ могут быть найдены из передаточной функции системы путем замены комплексного аргумента преобразования Лапласа p на чисто мнимый аргумент Фурье-преобразования $-j\omega$. В литературе [2] ^{х)} показывается также связь между частотными и временными функциями САУ. Так можно показать, что комплексный коэффициент передачи и импульсная переходная (весовая) функция системы связаны друг с другом парой преобразования Фурье, а именно:

$$\left. \begin{aligned} \dot{K}(j\omega) &= \int_0^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \\ g(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{K}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

Связь $\dot{K}(j\omega)$ с переходной функцией $h(t)$ можно получить, учитывая, что:

$$h(t) = W(p=0) + \int_0^{\infty} g(t) dt, \quad (4.15)$$

или

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}, \quad (4.16)$$

х) Гитис Э.И. Техническая кибернетика. М., "Энергия", 1968.

где $W(p=0)$ – значение передаточной функции при $p = 0$.

Исходя из свойств интегрального преобразования Фурье, можно отметить, что операции дифференцирования (интегрирования) во временной области соответствуют умножению (делению) на $j\omega$ в частотной области. Кроме этого, вследствие известного соотношения для линейных систем

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau) x(\tau) d\tau, \quad (4.17)$$

называемого интегралом Дюамеля и представляющего собой свертку $g(t)$ и $x(t)$ во временной области, получим на основании теоремы о свертке следующую формулу для частотной области:

$$\dot{y}(j\omega) = \dot{x}(j\omega) K(j\omega), \quad (4.18)$$

где $\dot{y}(j\omega)$ – спектр отклика САУ;
 $\dot{x}(j\omega)$ – спектр входного воздействия.

(4.18) очевидно совпадает с полученным ранее выражением (4.4).

П р и м е р .

Определить АЧХ и ФЧХ САУ, если известно, что $g(t) = K\delta^2(t)$, где $\delta^2(t)$ – дельта функции Дирака.

Используя прямое преобразование Фурье (4.14), получим:

$$K(j\omega) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} K\delta^2(t) e^{-j\omega t} dt = K.$$

Следовательно, $K(\omega) = K = const$; $\varphi(\omega) = 0$.

4.2. Частотные характеристики элементарных звеньев и их соединений

Аналитические выражения для частотных характеристик элементарных звеньев приведены в табл. 4.2. В табл. 4.3 приведены графические изображения частотных характеристик. Их вывод и построение элементарны и пояснений не требуют.

Остановимся на определении частотных характеристик при различных соединениях элементарных звеньев.

а. Последовательное соединение.

Как было показано, передаточная функция при последователь-

Таблица 4.2.

№ п/п	Наименование звена	$W(p)$	$K(j\omega)$	$K(\omega)$	$\varphi(\omega)$	$u(\omega)$	$v(\omega)$
1.	Усилительное	K	K	K	0	K	0
2.	Инерционное	$\frac{1}{1+pT}$	$\frac{1}{1+j\omega T}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}$	$-\arctg \omega T$	$\frac{1}{1+\omega^2 T^2}$	$-\frac{\omega T}{1+\omega^2 T^2}$
3.	Интегрирующее	$\frac{1}{pT}$	$\frac{1}{j\omega T}$	$\frac{1}{\omega T}$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{1}{\omega T}$
4.	Формирующее	$1+pT$	$1+j\omega T$	$\sqrt{1+\omega^2 T^2}$	$\arctg \omega T$	1	ωT
5.	Дифференцирующее	pT	$j\omega T$	ωT	$\frac{\pi}{2}$	0	ωT
6.	Келесотельное (при $\xi < 1$)	$\frac{1}{1+2\xi pT+p^2 T^2}$	$\frac{1}{(1-\omega^2 T^2)+j2\xi \omega T}$	$\frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2 T^2)^2+4\xi^2 \omega^2 T^2}}$	$-\arctg \frac{2\xi \omega T}{1-\omega^2 T^2}$	$\frac{1-\omega^2 T^2}{(1-\omega^2 T^2)^2+4\xi^2 \omega^2 T^2}$	$\frac{2\xi \omega T}{(1-\omega^2 T^2)^2+4\xi^2 \omega^2 T^2}$
7.	Консервативное (при $\xi = 0$)	$\frac{1}{1+p^2 T^2}$	$\frac{1}{1-\omega^2 T^2}$	$\frac{1}{1-\omega^2 T^2}$	$\begin{cases} 0 \text{ при } \omega < \frac{1}{T_0} \\ -\frac{\pi}{2} \text{ при } \omega = \frac{1}{T_0} \\ \pi \text{ при } \omega > \frac{1}{T_0} \end{cases}$	$\frac{1}{1-\omega^2 T_0^2}$	0

Таблица 4.3

№	Наимен.	$K(j\omega)$	$K(\omega)$	$\varphi(\omega)$
1	Усилительное			
2	Инерционное			
3	Интегрирующее			
4	Формирующее			
5	Дифференцирующее			
6	Колесательное			
7	Консервативное			

ном соединении равна произведению $W_i(p)$ звеньев, следовательно, согласно (4.11) получим:

$$K(j\omega) = W(p=j\omega) = \prod_{i=1}^n W_i(p=j\omega) = \prod_{i=1}^n K_i(j\omega). \quad (4.19)$$

Представляя в (4.19) векторы $K_i(j\omega)$ через модуль и фазу, получим:

$$\begin{aligned} K(j\omega) &= K(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = \prod_{i=1}^n [K_i(\omega) e^{j\varphi_i(\omega)}] = \\ &= \left[\prod_{i=1}^n K_i(\omega) \right] e^{j \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega)} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Очевидно, что АЧХ при последовательном включении звеньев определяется из (4.20) как:

$$K(\omega) = \prod_{i=1}^n K_i(\omega); \quad (4.21)$$

а ФЧХ как:

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega). \quad (4.22)$$

б. Параллельное соединение.

При параллельном соединении $W(p)$ равна сумме $W_i(p)$ звеньев, следовательно:

$$K(j\omega) = \sum_{i=1}^n W_i(p=j\omega) = \sum_{i=1}^n K_i(j\omega). \quad (4.23)$$

Для определения векторной суммы в правой части (4.23) целесообразно $K_i(j\omega)$ представить в декартовых координатах, т.е.:

$$\begin{aligned} K(j\omega) &= U(\omega) + jV(\omega) = \sum_{i=1}^n [U_i(\omega) + jV_i(\omega)] = \\ &= \sum_{i=1}^n U_i(\omega) + j \sum_{i=1}^n V_i(\omega). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Из (4.24) легко определить выражения для действительной и мнимой частотных характеристик при параллельном включении звеньев:

$$\begin{aligned} U(\omega) &= \sum_{i=1}^n U_i(\omega) ; \\ V(\omega) &= \sum_{i=1}^n V_i(\omega) . \end{aligned} \quad (4.25)$$

АЧХ и ФЧХ можно получить, пользуясь выражениями (4.10), по определенным величинам $U(\omega)$ и $V(\omega)$. Следует отметить, что получаемое таким образом выражение для АЧХ оказывается, как правило, громоздким и его анализ обычно затруднителен. Поэтому анализируют параллельное включение либо по характеристикам $U(\omega)$ и $V(\omega)$, либо по ним строят годограф $K(j\omega)$ на плоскости комплексного переменного и по этому годографу анализируют свойства системы с параллельным включением звеньев. Существуют в литературе номограммы для пересчета характеристик $U(\omega)$ и $V(\omega)$ в характеристики $K(\omega)$ и $\varphi(\omega)$, однако они пригодны только для численных построений, а не для получения АЧХ и ФЧХ в общем виде.

в. Соединение с обратной связью.

Соединение с обратной связью – случай, наиболее трудно поддающийся анализу частотным методом. Действительно, передаточная функция в этом случае определяется выражением (3.10). Если в нем заменить p на $j\omega$, то получим:

$$K(j\omega) = W(j\omega) = \frac{K_1(j\omega)}{1 + K_1(j\omega)K_{oc}(j\omega)} . \quad (4.26)$$

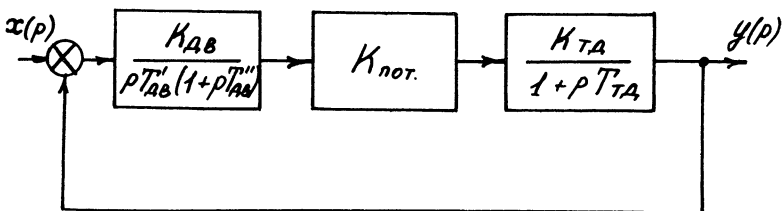
В частном случае в цепи ОС может быть включено звено с $W_{oc}(p)=1$. Тогда передаточная функция замкнутой системы (при замыкании ОС) определяется через передаточную функцию разомкнутой системы (при разомкнутой ОС) по выражению (3.14). Следовательно, $K(j\omega)$ замкнутой системы определится как:

$$K_{зам}(j\omega) = \frac{K_{раз}(j\omega)}{1 + K_{раз}(j\omega)} . \quad (4.27)$$

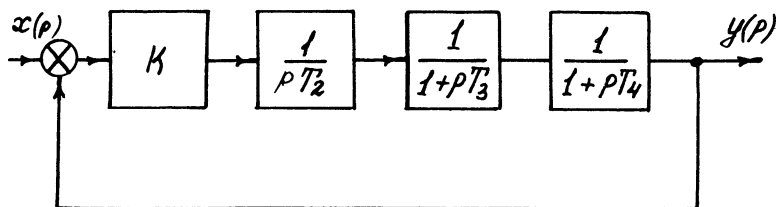
В заключение отметим, что для численных построений частотных характеристик САУ с обратной связью также существуют в литературе номограммы.

Пример.

Определить частотные характеристики системы термостатирования кварца задающего генератора. Функциональная схема линеаризованной системы приведена на рис. 4.3. На схеме рис. 4.3а



а)



б)

Рис. 4.3

термодатчик заменен инерционным звеном, потенциометр – усиленным, электродвигатель – соединением звеньев интегрирующего с инерционным (интегрирующее с замедлением). Найдем АФХ разомкнутой системы:

$$K_{раз}(j\omega) = \frac{K_y \cdot K_{пот} \cdot K_{тд}}{j\omega T_{дв}' (1 + j\omega T_{дв}''') (1 + j\omega T_{тд})}$$

Разомкнутая система состоит из следующих элементарных звеньев (рис. 4.3б):

1) усилительное $K_1(j\omega) = K = K_y \cdot K_{\text{пор}} \cdot K_{\text{ТД}}$;

2) интегрирующее $K_2(j\omega) = \frac{1}{j\omega T_{\text{гб}}} = \frac{1}{j\omega T_2}$;

3) инерционное $K_3(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T_{\text{гб}}} = \frac{1}{1+j\omega T_3}$

4) инерционное $K_4(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T_{\text{Д}}} = \frac{1}{1+j\omega T_4}$.

Нетрудно видеть, что $K_{\text{раз}}(j\omega) = K_1(j\omega) \cdot K_2(j\omega) \cdot K_3(j\omega) \cdot K_4(j\omega)$.

Воспользовавшись (4.21) и (4.22), найдем АЧХ и ФЧХ разомкнутой системы:

$$K_{\text{раз}}(\omega) = |K_{\text{раз}}(j\omega)| = \prod_{i=1}^n K_i(\omega) = \frac{K}{\omega T_2 \sqrt{1+\omega^2 T_3^2} \sqrt{1+\omega^2 T_4^2}};$$

$$\varphi_{\text{раз}}(\omega) = \sum_{i=1}^4 \varphi_i(\omega) = 0 - \frac{\pi}{2} - \arctg \omega T_3 - \arctg \omega T_4.$$

АФХ замкнутой системы согласно (4.27) определится как:

$$\begin{aligned} K_{\text{зам}}(j\omega) &= \frac{K_{\text{раз}}(j\omega)}{1+K_{\text{раз}}(j\omega)} = \frac{\frac{K}{j\omega T_2(1+j\omega T_3)(1+j\omega T_4)}}{1 + \frac{K}{j\omega T_2(1+j\omega T_3)(1+j\omega T_4)}} = \\ &= \frac{K}{j\omega T_2(1+j\omega T_3)(1+j\omega T_4) + K} = \\ &= \frac{K}{[K - \omega^2 T_2(T_3 + T_4)] + j\omega [T_2 - \omega^2 T_2 T_3 T_4]} \end{aligned}$$

Следовательно, АЧХ и ФЧХ замкнутой САУ определяются как:

$$K_{\text{зам}}(\omega) = |K_{\text{зам}}(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{[K - \omega^2 T_2(T_3 + T_4)]^2 + \omega^2 T_2^2(1 - \omega^2 T_3 T_4)^2}};$$

$$\varphi_{\text{зам}}(\omega) = \arg K_{\text{зам}}(j\omega) = -\arctg \frac{\omega T_2(1 - \omega^2 T_3 T_4)}{K - \omega^2 T_2(T_3 + T_4)}.$$

4.3. Логарифмические частотные характеристики

В большинстве практических случаев необходимо проанализировать поведение САУ в достаточно широком диапазоне частот. При этом использование обычных частотных характеристик $K(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ неудобно при линейном масштабе по оси частот, так как область низких частот получается чрезвычайно сжатой. Чтобы устранить этот недостаток либо используют несколько АЧХ и ФЧХ, построенных в прилегающих полосах частотного диапазона с различным масштабом в каждой из полос, либо применяют логарифмический масштаб по оси частот. Наибольшее распространение получил второй способ сжатия диапазона частот, вследствие явной простоты. Логарифмическая шкала частот имеет и существенный недостаток, заключающийся в отсутствии точки $\omega = 0$ ($\varphi 0 = -\infty$). Однако в большинстве практических случаев этот недостаток легко устраняется выбором ω_{min} такой величины, что значения $K(\omega_{min})$ и $\varphi(\omega_{min})$ мало отличаются от значений $K(0)$ и $\varphi(0)$ (понятие мало конкретизируется соображениями необходимой точности практического анализа систем). При логарифмической шкале ось частот разбивается равномерно на такие отрезки, что верхняя частота отрезка кратна нижней частоте с некоторым коэффициентом ℓ , т.е. $\omega_{max i} = \ell \omega_{min i}$, где $\omega_{max i}$ и $\omega_{min i}$ — максимальная и минимальная частоты i -го отрезка. Коэффициент ℓ (коэффициент кратности, являющийся согласно основному логарифмическому тождеству основанием логарифма в логарифмической шкале) выбирается также из соображений удобства практического анализа. На практике в основном получили распространение две логарифмические шкалы для оси частот: а) $\ell = 10$ — при этом ось ω разбивается на декады частоты, что соответствует десятичным логарифмам шкалы частот; б) $\ell = 2$ — ось разбивается на октавы, что соответствует бинарному логарифмированию шкалы. Первый случай применяется чаще вследствие большого распространения десятичных логарифмов в вычислениях и таблицах. Однако представление оси частот в октавах в ряде случаев предпочтительнее (например, при рассмотрении поведения САУ в области звуковых частот). Следует отметить, что, хотя при логарифмической шкале ось частот разби-

вается равномерно на отрезки, пропорциональные $\log \omega$, оцифровка оси наносится в абсолютных значениях частоты (в рад/с или в Гц), поэтому для логарифмической шкалы характерна неравномерная (логарифмическая) сетка масштаба.

Если при анализе САУ есть возможность свести ее структуру к последовательному включению элементарных звеньев, то существенного упрощения анализа такой системы частотным методом можно добиться, применяя так называемые логарифмические частотные характеристики (ЛЧХ). Как и обычные частотные характеристики (АЧХ и ФЧХ), ЛЧХ принято разделять на логарифмическую амплитудно-частотную (ЛАЧХ или ЛАХ) и на логарифмическую фазо-частотную (ЛФЧХ) характеристики. ЛАЧХ отличается от АЧХ с логарифмической шкалой по оси ω тем, что согласно определению ЛАЧХ равна:

$$L(\omega) = \log K(\omega), \quad (4.28)$$

т.е. логарифмический масштаб берется не только по оси абсцисс, но и по оси ординат. При этом обычно используются одна из двух логарифмических шкал: 1) с основанием e ($\log_e K(\omega)$) – при этом ось ординат представляется в неперах; 2) с основанием 10 – при этом ось ординат представляется в децибелах (дБ). Масштаб в H_n или дБ наносится равномерно.

Следует отметить, что ЛФЧХ ничем не отличается от ФЧХ с логарифмической шкалой по оси частот. Применение ЛЧХ для анализа последовательно соединенных звеньев позволяет заменить перемножение АЧХ на суммирование ЛАЧХ отдельных звеньев. Действительно, если подставить в (4.28) выражение для $K(\omega)$ при последовательном включении звеньев (4.21), то получим для $L(\omega)$ в децибелах:

$$L(\omega) = 20 \lg K(\omega) = 20 \lg \prod_{i=1}^n K_i(\omega) = \sum_{i=1}^n 20 \lg K_i(\omega) = \sum_{i=1}^n L_i(\omega). \quad (4.29)$$

Так как ЛФЧХ, как было указано, не отличается от ФЧХ с логарифмической частотной осью, то при последовательном соединении ЛФЧХ определится по выражению (4.22), т.е. также суммированием ЛФЧХ отдельных звеньев.

Пример.

Определить аналитический вид ЛЧХ для САУ, рассмотренной в предыдущем примере (рис. 4.3), при разомкнутой обратной связи.

Напомним выражения АЧХ и ФЧХ разомкнутой САУ (рис. 4.3), полученные в предыдущем примере:

$$K_{раз}(\omega) = \prod_{i=1}^n K_i(\omega) = K \cdot \frac{1}{j\omega T_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T_3^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T_4^2}} ;$$

$$\varphi_{раз}(\omega) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega) = 0 - \frac{\pi}{2} - \arctg \omega T_3 - \arctg \omega T_4 .$$

Тогда аналитический вид ЛАЧХ разомкнутой САУ найдем, используя (4.29),

$$L_{раз}(\omega) = 20 \lg K_{раз}(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \omega T_2 - 20 \lg \sqrt{1+\omega^2 T_3^2} - 20 \lg \sqrt{1+\omega^2 T_4^2} .$$

Аналитический вид ЛФЧХ разомкнутой системы записывается так же, как $\varphi_{раз}(\omega)$.

Аналитические выражения для ЛАЧХ и ЛФЧХ элементарных звеньев приведены в табл. 4.4. Обычно методика графического построения ЛАЧХ базируется на понятии асимптотических ЛАЧХ. Асимптотические ЛАЧХ для звеньев показывают поведение действительной ЛАЧХ звена при $\omega \ll \omega_c$ или $\omega \gg \omega_c$, где $\omega_c = \frac{1}{T}$ - параметр звена, обратный постоянной времени T и называемый собственной частотой звена. С помощью асимптотических ЛАЧХ можно представить в первом приближении исходную ЛАЧХ, используя линейно-ломаную аппроксимацию. ЛАЧХ усилительного, дифференцирующего и интегрирующего звеньев согласно табл. 4.4. являются прямыми в плоскости с логарифмическими координатами и, следовательно, в аппроксимации не нуждаются.

ЛАЧХ инерционного и форсирующего звеньев имеют две асимптоты, т.е. для инерционного звена:

$$L_{ин}(\omega) = L(\omega \ll \omega_c) = -10 \lg [1 + (\omega T)^2] =$$

$$= -10 \lg [1 + (\frac{\omega}{\omega_c})^2] \approx -10 \lg 1 \equiv 0 ; \quad (4.30)$$

Таблица 4.4

№ п/п	Наименование звена	$\varphi(\omega)$	$L(\omega)$	$L_{\text{нч}}(\omega)$ ($\omega < \frac{1}{T} = \omega_0$)	$L_{\text{вч}}(\omega)$ ($\omega > \omega_0 = \frac{1}{T}$)
1.	Усилительное	0	20 Бг К	20 Бг К	20 Бг К
2.	Инерционное	$-\arctg \omega T$	$-20 \text{ Бг} \sqrt{1+\omega^2 T^2}$	0	$-20 \text{ Бг} \omega T$
3.	Интегрирующее	$-\frac{\pi}{2}$	$-20 \text{ Бг} \omega T$	$-20 \text{ Бг} \omega T$	$-20 \text{ Бг} \omega T$
4.	Форсирующее	$\arctg \omega T$	$20 \text{ Бг} \sqrt{1+\omega^2 T^2}$	0	$20 \text{ Бг} \omega T$
5.	Дифференцирующее	$\frac{\pi}{2}$	$20 \text{ Бг} \omega T$	$20 \text{ Бг} \omega T$	$20 \text{ Бг} \omega T$
6.	Коллебабельное	$-\arctg \frac{2\xi \omega T_0}{1-\omega^2 T_0^2}$	$-20 \text{ Бг} \sqrt{(1-\omega^2 T_0^2)^2 + 4\xi^2 \omega^2 T_0^2}$	$(\omega < \omega_0)$ 0	$(\omega > \omega_0)$ $-40 \text{ Бг} \omega T_0$
7.	Консервативное	$\begin{cases} 0 & \text{при } \omega < \omega_0 = \frac{1}{T_0} \\ -\frac{\pi}{2} & \text{при } \omega = \omega_0 \\ -\pi & \text{при } \omega > \omega_0 \end{cases}$	$-20 \text{ Бг} (1-\omega^2 T_0^2)$	$(\omega < \omega_0)$ 0	$(\omega > \omega_0)$ $-40 \text{ Бг} \omega T_0$

$$\begin{aligned} k_{вч}(\omega) &= k(\omega \gg \omega_c) = -10 \lg [1 + (\omega T)^2] = \\ &= -10 \lg \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \right] \approx -20 \lg \frac{\omega}{\omega_c} = -20 \lg \omega T; \end{aligned} \quad (4.31)$$

для форсирующего звена:

$$\begin{aligned} k_{нч} &= k(\omega \ll \omega_c) = 10 \lg [1 + (\omega T)^2] = \\ &= 10 \lg \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \right] \approx 10 \lg 1 \equiv 0; \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} k_{вч} &= k(\omega \gg \omega_c) = 10 \lg [1 + (\omega T)^2] = \\ &= 10 \lg \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \right] \approx 20 \lg \frac{\omega}{\omega_c} = 20 \lg \omega T. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Выражения (4.30) и (4.32) показывают, что низкочастотные асимптоты $k_{нч}(\omega)$ для инерционного и дифференцирующего звеньев одинаковы и совпадают с осью частот. Высокочастотные асимптоты $k_{вч}(\omega)$ для всех звеньев согласно (4.31) и (4.33) являются прямыми в логарифмическом масштабе осей, причем $k_{вч}(\omega)$ для инерционного звена имеет спад, а для форсирующего звена — подъем. Наклон $k_{вч}(\omega)$ легко определить, как:

$$k_{вч}(\omega = 10\omega_c) = 20 \lg \frac{10\omega_c}{\omega_c} = 20 \text{ дБ};$$

$$k_{вч}(\omega = 100\omega_c) = 20 \lg \frac{100\omega_c}{\omega_c} = 40 \text{ дБ};$$

$$\frac{\Delta k_{вч}}{\text{декада}} = k_{вч}(100\omega_c) - k_{вч}(10\omega_c) = 20 \text{ дБ/декада}.$$

Аналогично, у инерционного звена опад равен также 20 дБ/декада.

Легко заметить, что общей точкой $k_{нч}(\omega)$ и $k_{вч}(\omega)$ является $\omega = \omega_c$. Поэтому эта точка иногда называется точкой сопряжения, а ω_c — частотой сопряжения асимптотических характеристик. Определим погрешность представления действительной ЛАЧУ с помощью аппроксимирующих асимптот. Анализируя выражения

(4.30) + (4.33), легко заметить, что наибольшую погрешность аппроксимирующая ЛАЧХ имеет в точке $\omega = \omega_c$, действительно:

$$h_{нч}(\omega_c) = h_{вч}(\omega_c) = 0,$$

тогда как для инерционного звена:

$$h(\omega = \omega_c) = -10 \lg \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \right] = -10 \lg [1 + 1] \approx -3 \text{ дБ},$$

а для форсирующего звена:

$$h^*(\omega = \omega_c) = 10 \lg \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \right] = 10 \lg 2 \approx 3 \text{ дБ}.$$

Такая погрешность в ряде случаев позволяет анализировать САУ приближенно по аппроксимирующей ЛАЧХ, не прибегая к построению точной.

Если же необходимо построить точную ЛАЧХ, то ее можно построить из аппроксимирующей, пользуясь данными кривой поправок. Числовые данные для построения кривой поправок ЛАЧХ форсирующего или инерционного звеньев приведены в табл. 4.5. Очевидно, поправки для этих звеньев по абсолютной величине одинаковы, но различны по знаку.

ЛФЧХ инерционного или форсирующего звеньев также различны только знаком (см. табл. 4.4). Для построения ЛФЧХ этих звеньев пользуются обычно шаблонами. Числовые данные для построения шаблона ЛФЧХ форсирующего или инерционного звеньев приведены в табл. 4.5. Там же приведены данные для приближенного построения ЛФЧХ по 5 точкам внутри декады. Расстояние между точками по оси φ равно $\frac{\pi}{16}$.

Таблица 4.5

ωT	0,1	0,2	0,25	0,4	0,5	0,8	1,0	2,5	5,0	10
$\delta \text{ дБ}$	0,04	0,17	0,32	0,65	0,97	2,15	3,01	0,65	0,17	0,04
φ°	5,7	11,3	14,0	21,8	26,6	38,7	45	68,2	78,7	84,3
$\varphi_{\text{рад}}$	—	$\sim \frac{\pi}{16}$	—	$\sim \frac{\pi}{8}$	—	—	$\frac{\pi}{4}$	$\sim \frac{3\pi}{8}$	$\sim \frac{7\pi}{16}$	—

В табл. 4.6 даны значения φ^0 для малых ωT , необходимые для точных построений ЛАЧХ.

Таблица 4.6

ωT	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,9
φ^0	0,6	1,1	1,7	2,3	2,9	3,4	4	4,6	5,1

Пример.

Построить ЛАЧХ инерционного звена при $T = 0,01$ с точностью не хуже 0,5 дБ. Разобьем ось частот на декады. Согласно табл. 4.5 для выполнения требуемой точности построения ЛАЧХ необходимо иметь на графике по крайней мере по две декады частот.

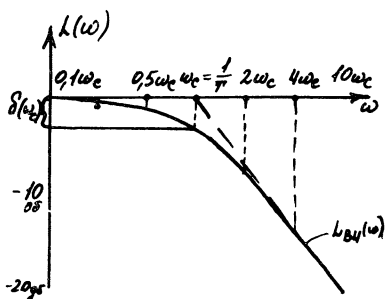


Рис. 4.4

Тогда в качестве ω_{min} (искусственное начало координат ЛАЧХ) возьмем частоту $\omega_c/10$. Так как $\omega_c = \frac{1}{T} = 100$ Гц, то $\omega_{min} = 10$ Гц. В качестве ω_{max} на оси частот достаточно взять частоту $10 \omega_c$, т.е. $\omega_{max} = 1000$ Гц. Нанесем эти точки на ось частот (рис. 4.4). По оси ординат при $\omega_{max} = 10 \omega_c$ достаточно иметь масштаб до 20 дБ. Построим аппроксимирующую ЛАЧХ согласно выражениям (4.30) и (4.31). $L_{нч}(\omega)$, как было указано, совпадает с осью ω , а $L_{бч}(\omega)$ — прямая с наклоном -20 дБ/декаду. Общей точкой $L_{бч}$ и $L_{нч}$ является точка $\omega = \omega_c$. Аппроксимирующая ЛАЧХ показана на рис. 4.4 пунктиром. Отложим от аппроксимирующей ЛАЧХ значения поправок согласно табл. 4.5. ЛАЧХ с требуемой точностью 0,5 дБ показана на рис. 4.4 сплошной кривой.

Для колебательного звена также можно найти аппроксимирующую ЛАЧХ, используя асимптотические характеристики. Однако общей точкой асимптот для колебательного звена является точка $\omega = \omega_0 = \frac{1}{T_0}$ — соответствующая резонансной частоте звена.

Действительно, из табл. 3 получим:

$$k_{нч}(\omega) = k(\omega \ll \omega_0) = -20 \lg \sqrt{[1 - (\omega T_0)^2]^2 + (2\xi T_0 \omega)^2} = \quad (4.34)$$

$$= -20 \lg \sqrt{[1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2]^2 + (2\xi \frac{\omega}{\omega_0})^2} \approx -20 \lg 1 \equiv 0 ;$$

$$k_{вч}(\omega) = k(\omega \gg \omega_0) = -20 \lg \sqrt{[1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2]^2 + (2\xi \frac{\omega}{\omega_0})^2} \approx \quad (4.35)$$

$$\approx -20 \lg \sqrt{(\frac{\omega}{\omega_0})^4 (1 + 4\xi^2 \frac{\omega_0^2}{\omega^2})} \approx -40 \lg \frac{\omega}{\omega_0} = -40 \lg \omega T_0.$$

$k_{вч}(\omega)$ очевидно, — прямая с наклоном 40 дБ/дек.

Для построения точной ЛАЧХ колебательного звена также пользуются кривыми поправок.

Числовые данные для построения кривой поправок к аппроксимирующей ЛАЧХ колебательного звена приведены в табл. 4.7.

Таблица 4.7

	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,1	0,086	0,35	0,8	1,48	2,43	3,73	5,53	8,1	11,6	14,0
0,2	0,08	0,325	0,744	1,36	2,2	3,31	4,71	6,35	7,81	8,0
0,3	0,071	0,29	0,66	1,18	1,86	2,68	3,6	4,44	4,85	4,44
0,4	0,059	0,24	0,53	0,93	1,414	1,94	2,41	2,68	2,56	1,94
0,5	0,044	0,17	0,37	0,63	0,9	1,14	1,25	1,14	0,73	0,0
0,6	0,024	0,09	0,19	0,29	0,35	0,33	0,156	0,22	0,8	1,58
0,7	0,001	0,0	0,0019	0,08	0,22	0,47	0,87	1,41	2,1	2,92
0,8	0,025	0,1	0,245	0,474	0,8	1,24	1,8	2,47	3,24	4,1
0,9	0,052	0,22	0,49	0,88	1,37	1,97	2,66	3,43	4,25	5,11
1,0	0,086	0,34	0,75	1,29	1,94	2,67	3,46	4,3	5,15	6,02

Следует отметить, что кривые поправок для аппроксимирующей

ЛАЧХ колебательного звена симметричны относительно значения $\omega = \omega_0$. Следовательно, вторую половину численных значений кривых поправок приводить нецелесообразно, так как, например, $\delta^s(0,1\omega_0) = \delta^s(10\omega_0)$; $\delta^s(0,2\omega_0) = \delta^s(5\omega_0)$; $\delta^s(0,5\omega_0) = \delta^s(2\omega_0)$ и т.д.

Для построения ЛФЧХ колебательного звена также пользуются шаблонами. Численные значения $\varphi^s(\omega)$ при различных значениях ξ и ωT_0 приведены в табл. 4.8. Очевидно, что значения $\varphi(\omega)$ при $\omega T_0 > 1$ легко определить, пользуясь следующей рекуррентной формулой:

$$\varphi(K\omega_0) = 180^\circ - \varphi\left(\frac{\omega_0}{K}\right).$$

Например,

$$\xi = 0,5 ; \quad \varphi(0,1\omega_0) = 5,8^\circ.$$

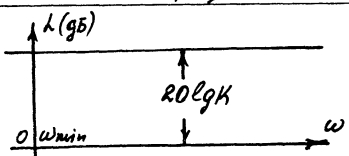
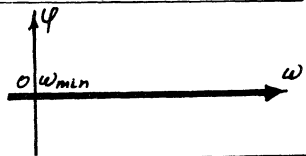
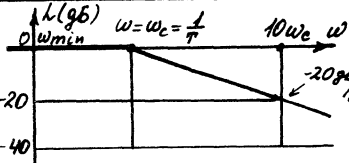
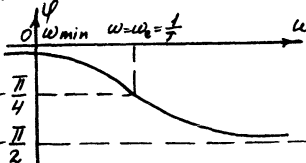
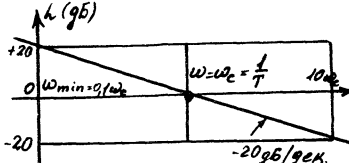
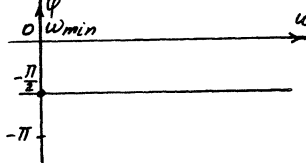
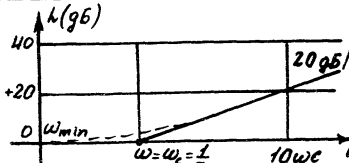
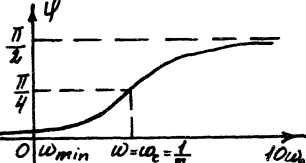
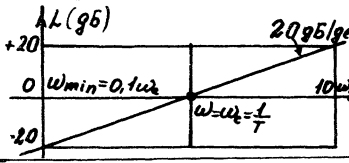
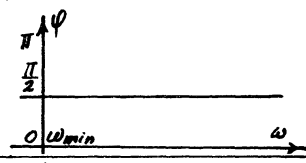
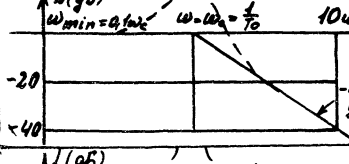
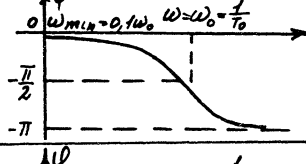
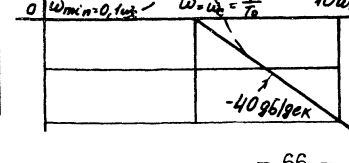
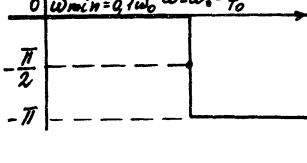
$$\varphi(10\omega_0) = 180^\circ - \varphi(0,1\omega_0) = 180^\circ - 5,8^\circ = 174,2^\circ.$$

В таблице 4.9 для справок приведены графические изображения ЛАЧХ и ЛФЧХ элементарных звеньев.

Таблица 4.8

$\frac{a}{b}$	0,01	0,04	0,06	0,08	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,1	0,1	0,5	0,7	0,9	1,2	2,4	3,8	5,4	7,6	10,6	15,4	23,9	43,5	90
0,2	0,2	0,9	1,3	1,8	2,3	4,8	7,5	10,8	14,9	20,6	28,8	41,7	62,2	90
0,3	0,3	1,3	2,1	2,8	3,5	7,1	11,2	16,0	21,8	29,4	39,5	53,1	70,6	90
0,4	0,5	1,8	2,8	3,7	4,6	9,5	14,8	20,9	28,1	36,9	47,7	60,6	75,2	90
0,5	0,6	2,3	3,4	4,6	5,8	11,8	18,3	25,4	33,7	43,1	53,9	65,8	78,1	90
0,6	0,7	2,7	4,1	5,5	6,9	14,0	21,6	29,8	38,7	48,4	58,7	69,4	80,0	90
0,7	0,8	3,2	4,8	6,4	8,1	16,3	24,8	33,7	43,0	52,7	62,5	72,2	81,4	90
0,8	0,9	3,7	5,5	7,4	9,2	18,4	27,8	37,3	46,9	56,3	65,6	74,3	82,5	90
0,9	1,0	4,1	6,2	8,3	10,3	20,6	30,7	40,6	50,2	59,4	68,0	76,0	83,3	90
1,0	1,1	4,6	6,9	9,1	11,4	22,6	33,4	43,6	53,1	61,9	70,0	77,3	84,0	90

Таблица 4.9

№	Наимен	$L(\omega)$	$\varphi(\omega)$
I	Усилитель- НОВ		
2	Инерционное		
3	Интегрирующее		
4	Форсирующее		
5	Дифференци- рующее		
6	Колесатель- НОВ		
7	Консерватив- НОВ		

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
ПРЕДИСЛОВИЕ	3
1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ОБЪЕКТАХ И СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ И РЕГУЛИРОВАНИЯ	4
1.1. Принципы и задачи автоматического управления	4
1.2. Функциональные и структурные схемы автоматических систем и устройств. Основные функциональные элементы систем автоматики	6
1.3. Автоматические системы и устройства в многоканальной связи	10
1.4. Методы исследования автоматических систем и устройств	13
2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ЗВЕНЬЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ И УСТРОЙСТВ АВТОМАТИКИ . ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЗВЕНЬЯ	14
2.1. Математическая модель. Составление дифферен- циальных уравнений и их линеаризация. Опе- раторная форма записи	14
2.2. Стандартные возмущающие сигналы. Основные характеристики динамических звеньев	24
2.3. Передаточные и временные характеристики типовых звеньев линейных систем	29
3. СТРУКТУРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ	31
3.1. Соединение звеньев в системах автоматике. . . .	31
3.2. Структурные преобразования систем. Перенос точек разветвления и суммирования	36
3.3. Передаточные функции и дифференциальные уравнения САУ	39
4. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ	42
4.1. Определение частотных характеристик	42
4.2. Частотные характеристики элементарных звеньев и их соединений	49
4.3. Логарифмические частотные характеристики . . .	56

Владислав Константинович Мельник,
Виктор Михайлович Разумихин,
Сергей Сергеевич Цветков

Учебное пособие
по курсу

"Основы теории систем автоматического
управления"

Часть I

Линейные системы управления в
многоканальной электросвязи

Редактор Л.И. Колосова
Корректор Л.А. Носова

Подписано к печати 16.05.1977г., Л. 23807, п.л. 3,7,
тир. 730, зак. 284, изд. № 332. Цена 25 коп.

Типография ВЭИС. Москва, III024, Авиамоторная, 8.

Цена 25 коп.