Р. Габасов,
Ф. М. Кириллова

МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

2

ЧАСТЬ

МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ 2

Р. Габасов,
Ф. М. Кириллова

МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Часть 2

ТРАНСПОРТНЫЕ ЗАДАЧИ

МИНСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО БГУ им. В. И. ЛЕНИНА
1978

517.8
Г 12

УДК 519.82

Рецензент доктор физико-математических наук,
профессор *И. В. Романовский*

Scan AAW

Методы линейного программирования. Ч. 2. Транспортные задачи. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Минск, Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1978.

Основные методы, изложенные в первой части для общей задачи линейного программирования, конкретизируются для транспортных задач, рассматриваются транспортные задачи в матричной и в сетевой формах, закрытые и открытые, однопродуктовые и многопродуктовые, сети и мультисети. При исследовании этих задач значительно больше внимания, чем в общем случае, уделяется безопорным методам. Показывается, что для решения производных задач эффективным методом является динамическое программирование, с помощью которого получается ряд известных методов (венгерский метод, метод контуров и др.). Подробно изучаются вырожденные и квазивырожденные задачи. Анализ решений во второй части более тщателен, чем в первой. Отдельная глава посвящена обобщенной транспортной задаче, которая известна в литературе и как распределительная задача. Наряду с прямыми методами рассматриваются и двойственные, что позволяет эффективно использовать разнообразную априорную информацию.

Табл. 35, рис. 31, библ. 5 назв.

$\text{Г}\ \dfrac{30502\text{-}037}{\text{М}317\text{-}78}\ 49\text{-}78$

© Издательство БГУ им. В. И. Ленина, 1978 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Транспортные задачи линейного программирования представляют собой математические модели важных практических задач, распространенных в различных сферах человеческой деятельности. Кроме задач о перевозках продуктов к ним сводится много других задач (см., например, [1—4]).

С математической точки зрения задачи, исследуемые в данной, второй, части книги, составляют специальный класс общих задач линейного программирования, рассмотренных в первой части [5]. При решении таких задач используются три подхода. Во-первых, каждую специальную задачу можно записать в форме общей задачи и решать ее общими методами. Во-вторых, можно, учитывая специальную структуру задачи, детализировать общий метод и использовать полученную реализацию метода. Если задачи имеют настолько яркую специфику, что оба указанных подхода для них выглядят искусственными, то применим третий подход, при котором непосредственно реализуются идеи (принципы), положенные в основу методов решения общих задач. Первый подход используется, как правило, при решении задач, которые еще не выделены в специальные классы. В связи с распространенностью подобных задач в линейном программировании предложен мультипликативный метод. Достоинства второго подхода наиболее полно проявляются при решении транспортных задач в матричной форме. Из общего курса «Методы оптимизации» видно, насколько упрощаются и тесно связываются с моделью операции симплекс-метода после его реализации в виде метода потенциалов. Эффективность третьего подхода удобно демонстрировать на транспортных задачах в сетевой форме (на задачах о потоках).

Сетевые модели задач оптимизации в последние годы стали широко использоваться в различных областях науки и техники. Выбор адекватной модели для конкретной задачи во многом определяет конечный успех в ее решении. В теории оптимизации получили распространение следующие модели: конечные (в линейном случае — матричные), исследуемые методами нелинейного программирования; дифференциальные модели вариационного исчисления и теории оптимального управления; рекуррентные модели динамического программирования и дискретного оптимального управления. Сетевые модели составляют новый тип моделей, имеющих свою эффективную область приложений. Создание новых типов моделей, охватывающих достаточно широкий класс практических задач и допускающих существенное упрощение оптимизационных алгоритмов по сравнению с известными, представляет собой актуальную проблему.

Цель настоящей книги — изложить идеи и методы решения задач транспортного типа, обоснованные в первой части для общих задач линейного программирования. При реализации второго и третьего из указанных подходов максимально учитывается специфика рассматриваемых задач.

Книга написана на основании лекций, которые читаются на факультете прикладной математики Белгосуниверситета им. В. И. Ленина. Предполагается, что читатель знаком с линейным программированием в объеме учебного пособия «Методы оптимизации» (в дальнейшем сокращено [МО]) и первой части данной книги (сокращено [ч. 1]), написанных авторами и изданных издательством БГУ в 1975 и в 1977 гг. соответственно.

Авторы выражают глубокую благодарность сотрудникам О. И. Костюковой и Л. В. Командиной, предоставившим свои результаты (это отмечается в соответствующих местах книги).

АВТОРЫ

ВВЕДЕНИЕ

В основу алгоритмов решения транспортных задач положены идеи и методы, изложенные в [ч. 1]. Для удобства чтения основного материала приведем их краткое описание.

1. Прямые методы. Прямые методы строятся для улучшения планов *прямой задачи*

$$c'x \to \max, \ Ax = b, \ 0 \leqslant x \leqslant d, \tag{1}$$

где c, x, d — n-векторы, b — m-вектор, $A = \{a_i, i \in I\}$ — $m \times n$-матрица, $I = \{1, \ldots, n\}$. Каждый n-вектор x, удовлетворяющий ограничениям задачи (1), называется *планом*. Решение x^0 задачи — *оптимальный план*.

В качестве основного принципа улучшения планов в [МО] и [ч. 1] взят *принцип допустимых направлений:* для плана x строится *подходящее направление* l и на этом направлении выбирается новый план $\bar{x} = x + \Theta^0 l$, $\Theta^0 \geqslant 0$.

Говорят, что n-вектор l является *допустимым направлением* для плана x по ограничениям задачи (1), если для некоторого числа $\varepsilon_0 > 0$ при всех ε, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, вектор $x + \varepsilon l$ остается планом, т. е. выполняются соотношения

$$A(x + \varepsilon l) = b, \quad 0 \leqslant x + \varepsilon l \leqslant d.$$

Допустимое направление называется подходящим в задаче (1), если $c'l > 0$.

Прямые методы построения подходящих направлений разделяются на *опорные* и *безопорные*.

Опорные методы. Совокупность векторов условий

$$A_{оп} = \{a_i, i \in I_{оп}\}$$

называется *опорой* *) задачи (1), если уравнение

$$\sum_{i \in I_{оп}} a_i x_i = 0$$

*) Иногда опорой удобнее называть множество индексов $I_{оп}$; тогда $A_{оп}$ — опорная матрица.

имеет только тривиальное решение, но при любом $k \in I_н$, $I_н = I \setminus I_{оп}$, существует нетривиальное решение уравнения

$$\sum_{i \in I_{оп}} a_i x_i + a_k x_k = 0.$$

Пара $\{x, A_{оп}\}$ из плана и опоры задачи называется *опорным планом* задачи (1). Опорный план считается *невырожденным*, если его *опорные компоненты* x_i, $i \in I_{оп}$, не принимают граничных значений (0 или d_i).

Пусть $I^н = \{i\colon x_i = 0\}$, $I^в = \{i\colon x_i = d_i\}$, $I^п = \{i\colon 0 < x_i < d_i\}$. Для невырожденного опорного плана $\{x, A_{оп}\}$ каждое допустимое направление имеет вид $l = \{l_{оп}, l_н\}$, $l_{оп} = -A_{оп}^{-1} A_н l_н$, $l_н^н \geqslant 0$, $l_н^в \leqslant 0$, $l_н^п$ — произвольный вектор.

Введем *вектор**) *и потенциалов* $u' A_{оп} = c'_{оп}$. Найдем *вектор оценок неопорных векторов* условий $\Delta'_н = u' A_н - c'_н$. Для каждого допустимого направления справедлива формула $c'l = -\Delta'_н l_н$. Отсюда следует, что допустимое направление является подходящим тогда и только тогда, когда $\Delta'_н l_н < 0$. Ясно, что *критерий отсутствия подходящих направлений* есть

Критерий оптимальности. Соотношения

$$\Delta_j \geqslant 0,\ j \in I_н^н;\quad \Delta_j \leqslant 0,\ j \in I_н^в;$$
$$\Delta_j = 0,\ j \in I_н^п\ (I_н^п = I_н \cap I^п \text{ и т. п.}) \tag{2}$$

достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности плана x.

План x называется *ε-оптимальным*, если $c'x^0 - c'x \leqslant \varepsilon$.

Критерий субоптимальности. Для ε-оптимальности плана x необходимо и достаточно, чтобы при некоторой опоре выполнялось неравенство

$$\sum_{\Delta_j > 0,\ j \in I_н} \Delta_j x_j - \sum_{\Delta_j < 0,\ j \in I_н} \Delta_j (d_j - x_j) \leqslant \varepsilon.$$

Итерация. Если соотношения (2) не выполняются, то для невырожденного плана $\{x, A_{оп}\}$ существуют подходящие направления. *Оптимальные направления* l^0 для плана x получаются при максимизации функции $c'l$ на подходящих направлениях с каким-нибудь условием нормировки. В [МО] и [ч. 1] найдены оптимальные направления для нескольких конкретных *условий нормировки.* При *симплексной нормировке* оптимальное направление имеет вид

$$l^0 = \{l_{оп}^0 = -A_{оп}^{-1} A_н e_{j_0},\ l_н^0 = e_{j_0}\},$$

где e_j — единичный вектор с единицей на j-м месте, $j_0 \in I_н$ — индекс наибольшего по модулю числа Δ_j, для которого не выполняются соотношения (2). Выбор *шага* Θ^0 и построение нового плана $\bar{x}$ осуществляются следующим образом.

---

*) Всюду в книге термин «потенциал» используется как рабочий вне связи с его физическим содержанием.

Пусть $\Delta_{j_0}<0$. Вычисляем

$$\Theta^0=\min\{d_{j_0}-x_{j_0},\ \overset{1}{\Theta}_{i_0},\ \overset{2}{\Theta}_{k_0}\},$$

где

$$\overset{1}{\Theta}_{i_0}=x_{i_0}/x_{i_0j_0}=\min x_i/x_{ij_0},\ x_{ij_0}>0;$$

$$\overset{2}{\Theta}_{k_0}=-(d_{k_0}-x_{k_0})/x_{k_0j_0}=\min-(d_i-x_i)/x_{ij_0},\ x_{ij_0}<0;$$

$$\{x_{ij_0},\ i\in I_{\text{оп}}\}=\overset{-1}{A}_{\text{оп}}\,a_{j_0}.$$

При $\Theta^0=d_{j_0}-x_{j_0}$ опора плана x не меняется. При $\Theta^0=\overset{1}{\Theta}_{i_0}(\Theta^0=\overset{2}{\Theta}_{k_0})$ опора $\bar{A}_{\text{оп}}$ плана $\bar{x}$ получается из опоры $A_{\text{оп}}$ плана x после замены вектора $a_{i_0}(a_{k_0})$ на вектор a_{j_0}.

Пусть $\Delta_{j_0}>0$. Вычисляем

$$\Theta^0=\min\{x_{j_0},\ \overset{2}{\Theta}_{i_0},\ \overset{1}{\Theta}_{k_0}\},$$

где

$$\overset{2}{\Theta}_{i_0}=(d_{i_0}-x_{i_0})/x_{i_0j_0}=\min(d_i-x_i)/x_{ij_0},\ x_{ij_0}>0;$$

$$\overset{1}{\Theta}_{k_0}=-x_{k_0}/x_{k_0j_0}=\min-x_i/x_{ij_0},\ x_{ij_0}<0.$$

При $\Theta^0=x_{j_0}$ опора плана x не меняется. При $\Theta^0=\overset{2}{\Theta}_{i_0}(\Theta^0=\overset{1}{\Theta}_{k_0})$ опора $\bar{A}_{\text{оп}}$ плана $\bar{x}$ получается из опоры плана x после замены вектора $a_{i_0}(a_{k_0})$ на вектор a_{j_0}.

Компоненты нового опорного плана $\{\bar{x},\ \bar{A}_{\text{оп}}\}$ равны

$$\bar{x}_{j_0}=x_{j_0}-\Theta^0\operatorname{sign}\Delta_{j_0},\ \bar{x}_j=x_j,\ j\neq j_0,\ j\in I_{\text{н}};$$

$$\bar{x}_i=x_i+\Theta^0x_{ij_0}\operatorname{sign}\Delta_{j_0},\ i\in I_{\text{оп}}.$$

За одну итерацию $x\to\bar{x}$ значение целевой функции задачи (1) возрастает на величину $\Theta^0|\Delta_{j_0}|$.

Безопорные методы. При построении подходящих направлений опора плана x не используется. Из определения допустимого направления следует, что множество допустимых направлений для плана x описывается соотношениями $Al=0$, $l^{\text{н}}\geqslant0$, $l^{\text{в}}\leqslant0$. Наложим на вектор l ограничения $l^{\text{н}}\leqslant f^{\text{н}}$, $l^{\text{в}}\geqslant-f^{\text{в}}$, $-\overset{\text{п}}{f}_-\leqslant l^{\text{п}}\leqslant\overset{\text{п}}{f}_+$ (нормировка). Оптимальное направление l^0 — решение *производной задачи*

$$c'l\to\max,\ Al=0,\ 0\leqslant l^{\text{н}}\leqslant f^{\text{н}},\ -\overset{\text{п}}{f}_-\leqslant l^{\text{п}}\leqslant\overset{\text{п}}{f}_+,\ -f^{\text{в}}\leqslant l^{\text{в}}\leqslant0.$$

Введем задачу, *двойственную к производной*

$$f'z\to\min,\ A^{\text{н}\prime}y+z_{\text{н}}\geqslant c^{\text{н}},\ A^{\text{в}\prime}y-z_{\text{в}}\leqslant c^{\text{в}},\ A^{\text{п}\prime}y+\overset{+}{z}_{\text{п}}-\overset{-}{z}_{\text{п}}=c^{\text{п}},\ z\geqslant0,$$

где $z=\{z_{\text{н}},\ \overset{+}{z}_{\text{п}},\ \overset{-}{z}_{\text{п}},\ z_{\text{в}}\}$, $f=\{f^{\text{н}},\ \overset{\text{п}}{f}_+,\ \overset{\text{п}}{f}_-,\ f^{\text{в}}\}$. При $f>0$ эта задача, а с ней и производная имеют решение. Критерий отсутствия подходящих направлений формулируется как

Критерий оптимальности. Для оптимальности плана x необходимо и достаточно, чтобы двойственная производная задача имела решение с $z=0$.

В производной задаче вектор f может быть выбран с учетом плана x, например $f_i=\min\{x_i, d_i-x_i\}$.

Производная задача является задачей линейного программирования и поэтому может быть решена опорными методами. Введение же безопорных методов связано главным образом с тем, что для специальных задач линейного программирования производная задача принимает настолько простую форму, что для ее решения становятся эффективными методы, безнадежные в общем случае. К примеру, в данной книге при решении производной задачи эффективным оказывается *динамическое программирование.*

Замечание. Безопорные методы фактически описаны на уровне определений. Это оставляет большую свободу проявлению искусства и опыта при решении специальных классов задач.

Описанная схема безопорных методов нацелена на построение оптимального плана. В практических же расчетах зачастую достаточно иметь субоптимальные планы. В связи с этим введем множества

$$I^{\text{н}}(\varepsilon)=\{i\colon 0\leqslant x_i\leqslant\varepsilon\},\ I^{\text{в}}(\varepsilon)=\{i\colon d_i-\varepsilon_i\leqslant x_i\leqslant d_i\},$$
$$I^{\text{п}}(\varepsilon)=\{i\colon \varepsilon<x_i<d_i-\varepsilon\}.$$

При составлении производной задачи заменим на эти множества ранее введенные $I^{\text{н}}$, $I^{\text{в}}$, $I^{\text{п}}$. Решим новую производную задачу. Если в решении $\{y^0(\varepsilon), z^0(\varepsilon)\}$ двойственной к ней задачи вектор $z^0(\varepsilon)=0$, то план x отклоняется от x^0 по целевой функции не более чем на величину

$$\sum_{\delta_i>0}\delta_i x_i-\sum_{\delta_i<0}\delta_i(d_i-x_i),$$

где $\delta=A'y^0(\varepsilon)-c$.

В каждой схеме новый план строится по формуле $\bar{x}=x+\Theta^0 l^0$, где l^0 — решение производной задачи, Θ^0 — шаг итерации, равный наибольшему числу Θ, удовлетворяющему неравенствам $0\leqslant x+\Theta l^0\leqslant d$. При $\Theta^0=\infty$ задача (1) не имеет решений из-за неограниченности сверху целевой функции.

Замечание. Последняя схема связана с α-допустимыми направлениями [ч. 1].

2. Двойственные методы. *Двойственные методы* предназначены для получения оптимальных или субоптимальных планов задачи (1) путем улучшения планов задачи

$$b'y+d'w\to\min,\ A'y+w\geqslant c,\ w\geqslant 0, \tag{3}$$

двойственной к задаче (1).

Вектор $\{y, w\}$, на котором выполняются ограничения задачи (1), называется *двойственным планом.* Если вектор $\{y^0, w^0\}$ — решение задачи (3), то его называют *оптимальным двойственным планом.*

Основной принцип улучшения двойственных планов остается таким же, как в п. 1 с естественной заменой задачи (1) на задачу (3) и множества планов на множество двойственных планов.

Двойственные методы построения подходящих направлений разделяются на опорные и безопорные.

Опорные методы. По вектору y двойственного плана построим *коплан* $\delta = A'y - c$. Будем считать, что вектор w удовлетворяет соотношениям

$$w_i = 0 \text{ при } \delta_i \geqslant 0, \; w_i = -\delta_i \text{ при } \delta_i < 0,$$

которые выполняются на оптимальном двойственном плане.

Пара $\{\delta, A_{\text{оп}}\}$ называется *опорным копланом*. Опорный коплан *невырожденный*, если его неопорные компоненты отличны от нуля.

Использование опор позволяет просто описать множества допустимых, подходящих и оптимальных направлений, соответствующих различным способам нормировки. При симплексной нормировке получается следующий метод [ч. 1]. По опоре коплана $\{\delta, A_{\text{оп}}\}$ строится *псевдоплан* $\varkappa = \{\varkappa_i, i \in I\}$ с компонентами

$$\varkappa_j = 0 \text{ при } j \in I_{\text{н}}^{+}, \; \varkappa_j = d_j \text{ при } j \in I_{\text{н}}^{-};$$

$$\sum_{i \in I_{\text{оп}}} a_i \varkappa_i = b - \sum_{j \in I_{\text{н}}} a_j \varkappa_j.$$

Здесь $I^{+} = \{i: \delta_i > 0\}$, $I^{-} = \{i: \delta_i < 0\}$, $I_{\text{н}}^{+} = I^{+} \cap I_{\text{н}}$.

Критерий отсутствия подходящих направлений в точке формулируется как

Критерий оптимальности. Соотношения

$$\varkappa_i = 0 \text{ при } \delta_i \geqslant 0; \; \varkappa_i = d_i \text{ при } \delta_i \leqslant 0;$$

$$0 \leqslant \varkappa_i \leqslant d_i \text{ при } \delta_i = 0, \; i \in I_{\text{оп}}, \tag{4}$$

достаточны, а в случае невырожденности коплана $\{\delta, A_{\text{оп}}\}$ и необходимы, для того чтобы коплан δ был оптимальным планом задачи (1).

Достаточное условие субоптимальности. Если псевдоплан удовлетворяет соотношениям

$$0 \leqslant \varkappa_i \leqslant d_i, \; i \in I_{\text{оп}};$$

$$\sum_{\delta_i > 0, \, i \in I_{\text{оп}}} \varkappa_i \delta_i - \sum_{\delta_i < 0, \, i \in I_{\text{оп}}} \delta_i (d_i - x_i) = \varepsilon,$$

то он является ε-оптимальным планом задачи (1).

Симплексная нормировка подходящих направлений обладает тем свойством, что движение вдоль оптимального направления изменяет среди опорных лишь одну компоненту коплана δ_{i_0}. Индекс i_0 и последующие операции таковы. При $\delta_i > 0$ или $\delta_i = 0$, $\varkappa_i < 0$, $i \in I_{\text{оп}}$, отметим максимальную по модулю компоненту $\varkappa_i$, не удовлетворяющую соотношениям (4). При $\delta_i < 0$ или $\delta_i = 0$, $\varkappa_i > d_i$, $i \in I_{\text{оп}}$, отметим максимальное по модулю число $\varkappa_i - d_i$ для компонент $\varkappa_i$, не удовлетворяющих соотношениям (4). Максимальное из отмеченных чисел обозначим через v^0. Пусть i_0 — индекс элемента $\varkappa_i$, входящего в v^0.

Найдем числа $\sigma_{i_0} = |\delta_{i_0}|$ при $0 \leqslant \varkappa_{i_0} \leqslant d_{i_0}$; $\sigma_j = \delta_j / x_{i_0 j} \operatorname{sign} v^0$, $j \in I_{\text{н}}$, при $\delta_j x_{i_0 j} \operatorname{sign} v^0 > 0$; $\sigma_j = 0$ при $\delta_j = 0$ и $x_{i_0 j} \operatorname{sign} v^0 < 0$, $\varkappa_j \neq 0$ или $x_{i_0 j} \operatorname{sign} v^0 > 0$, $\varkappa_j \neq d_j$, $j \in I_{\text{н}}$. Минимальное из этих чисел обозначим через σ^0. Если числа σ_{i_0}, σ_j отыскать не удается, то полагаем $\sigma^0=\infty$. Компоненты нового коплана равны

$$\overline{\delta}_{i_0}=\delta_{i_0}-\sigma^0 \operatorname{sign} v^0,\ \overline{\delta}_i=\delta_i,\ i\neq i_0,\ i\in I_{\text{оп}};$$

$$\overline{\delta}_j=\delta_j-\sigma^0 x_{i_0 j} \operatorname{sign} v^0,\ j\in I_{\text{н}}.$$

При $\sigma^0=\infty$ задача (1) не имеет планов. Опора $\bar{A}_{\text{оп}}$ коплана $\bar{\sigma}$ совпадает с $A_{\text{оп}}$, если $\sigma^0=\sigma_{i_0}$. При $\sigma^0=\sigma_{j_0}$, $j_0\neq i_0$, опора $\bar{A}_{\text{оп}}$ получается из $A_{\text{оп}}$ после замены вектора a_{i_0} на вектор a_{j_0}. За итерацию $\delta\to\bar{\delta}$ значение целевой функции двойственной задачи убывает на величину $\sigma^0|v^0|$.

Безопорные методы. По определению, $(m+n)$-вектор $\{p, q\}$ является *допустимым направлением для двойственного плана* $\{y, w\}$, если при некотором $\varepsilon_0>0$ для всех ε, $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, вектор $\{y+\varepsilon p, w+\varepsilon q\}$ остается двойственным планом, т. е. $A'(y+\varepsilon p)+w+\varepsilon q\geqslant c$, $w+\varepsilon q\geqslant 0$. Отсюда следует, что множество допустимых направлений задается соотношениями

$$q^+\geqslant 0,\ A^{-\prime}p+q^-\geqslant 0,\ A^{*\prime}p+q^*\geqslant 0,\ q^*\geqslant 0.$$

Допустимое направление является *подходящим* тогда и только тогда, когда $b'p+d'q<0$.

Для построения *оптимального направления* следует минимизировать функцию $b'p+d'q$, выбрав ту или иную нормировку подходящих направлений. Если в качестве нормировочного условия взять неравенство $\underline{g}\leqslant p\leqslant-\bar{g}$, то получим следующую *производную задачу* для построения оптимального направления $\{p^0, q^0\}$:

$$b'p+d'q\to\min,\ A^{-\prime}p+q^-\geqslant 0,\ A^{*\prime}p+q^*\geqslant 0,\ q^+\geqslant 0,\ q^*\geqslant 0,\ \underline{g}\leqslant p\leqslant-\bar{g}.$$

Задача, *двойственная к производной*, имеет вид

$$g'z\to\max,\ A^*x^*+\underline{z}-\bar{z}=b-A^-d^-,\ 0\leqslant x^*\leqslant d^*,\ z\geqslant 0,$$

где $g=\{\bar{g}, \underline{g}\}$, $z=\{\bar{z}, \underline{z}\}$. При $g<0$ последняя задача имеет решение. Следовательно, имеет решение и производная задача. Критерий отсутствия подходящих направлений сформулируем как

Критерий оптимальности. Для оптимальности двойственного плана необходимо и достаточно, чтобы двойственная производная задача имела решение с $z=0$.

Вектор g в производной задаче может быть *согласован* с двойственным планом $\{y, w\}$. При $g=-e$ получается метод одновременного решения прямой и двойственной задач, предложенный Данцигом, Фордом и Фалкерсоном. Значение описанного безопорного метода состоит в том, что для многих специальных задач (и в частности для транспортных) производная задача или двойственная к ней имеют весьма простую структуру и эффективно решаются без использования опор.

Приведенная схема допускает естественную модификацию, нацеленную на построение субоптимальных планов. Введем множества

$$I^+(\alpha)=\{i\colon\ \delta_i>\alpha\},\ I^-(\alpha)=\{i\colon\ \delta_i<-\alpha\},\ I^*(\alpha)=\{i\colon\ |\delta_i|\leqslant\alpha\}.$$

При формировании производной задачи используем эти множества вместо множеств I^+, I^-, I^*. Если в решении $\{x^*, z\}$ задачи, двойственной к новой производной, вектор $z(\alpha)=0$, то вектор $\{x^*, x^+=0, d^-\}$ является ε-оптимальным планом задачи (1) с

$$\varepsilon = \sum_{\delta_i>0,\ i\in I^*} \delta_i x_i - \sum_{\delta_i<0,\ i\in I^*} \delta_i (d_i - x_i).$$

В каждой схеме новый двойственный план строится по формуле

$$\{\bar{y}, \bar{w}\} = \{y, w\} + \sigma^0 \{p^0, q^0\},$$

где $\{p^0, q^0\}$ — решение производной задачи, σ^0 — шаг итерации, равный наибольшему числу σ, удовлетворяющему неравенствам

$$A(y+\sigma p^0) + w + \sigma q^0 \geqslant 0,\ w + \sigma q^0 \geqslant 0.$$

При $\sigma^0 = \infty$ задача (1) не имеет решений из-за пустоты множества планов.

Глава I

ПРЯМОЙ ОПОРНЫЙ МЕТОД

В этой главе для транспортных задач в матричной форме конкретизируется прямой опорный метод из [ч. 1]; непосредственно строится для сетевых транспортных задач аналог прямого опорного метода.

§ 1. Транспортная задача в матричной форме

В общем курсе [МО] установлена связь между транспортной и общей задачами линейного программирования. Там же исходя из этой связи обоснован метод потенциалов как реализация симплекс-метода. В данном параграфе по аналогичной схеме на транспортную задачу с ограничениями на пропускные способности коммуникаций переносятся операции прямого опорного метода.

1. Постановка задачи. Опорный план перевозок. Имеется n пунктов производства $A_1, \ldots, A_n$ и m пунктов потребления $B_1, \ldots, B_m$. В A_i производится a_i единиц, а в B_j потребляется b_j единиц некоторого продукта. Каждый пункт производства связан с каждым пунктом потребления. Пропускная способность коммуникации $A_i \to B_j$ равна d_{ij}. Обратные перевозки не допускаются. Стоимость перевозки единицы продукта из A_i в B_j равна c_{ij}. Требуется найти такой план перевозок продукта, при котором продукт из всех пунктов производства вывозится полностью, запросы каждого пункта потребления полностью удовлетворяются и транспортные расходы минимальны.

Обозначим через x_{ij} количество продукта, перевозимого из A_i в B_j. Следуя [МО], легко получить математическую модель поставленной задачи:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i, \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, \quad 0 \leqslant x_{ij} \leqslant d_{ij}, \tag{1}$$

$$i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Исходные данные для задачи (1) удобно записать в виде табл. I.1, которая называется *транспортной таблицей.* Матричная запись транспортной задачи и дала название математической модели (1).

Таблица I.1

	B_1	B_2	...	B_m	
A_1	d_{11} c_{11} x_{11}	d_{12} c_{12} x_{12}	...	d_{1m} c_{1m} x_{1m}	a_1
A_2	d_{21} c_{21} x_{21}	d_{22} c_{22} x_{22}	...	d_{2m} c_{2m} x_{2m}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_n	d_{n1} c_{n1} x_{n1}	d_{n2} c_{n2} x_{n2}	...	d_{nm} c_{nm} x_{nm}	a_n
	b_1	b_2	...	b_m	

Совокупность чисел $x = \{x_{ij},\ i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, m}\}$, удовлетворяющих ограничениям задачи (1), называется *планом перевозок.* Из теоремы существования потоков (см. § 4) следует, что в задаче (1) имеется хотя бы один план перевозок тогда и только тогда, когда при любых $N' \subset N = \{1, \ldots, n\}$, $M' \subset M = \{1, \ldots, m\}$ выполняются соотношения

$$\sum_{i \in N} a_i = \sum_{j \in M} b_j,$$

$$\sum_{i \in M'} a_i - \sum_{j \in N'} b_j \leqslant \sum_{i \in M',\ j \in N \setminus N'} d_{ij}. \tag{2}$$

План перевозок x^0 называется *оптимальным*, если на нем транспортные расходы (целевая функция задачи (1)) минимальны. Поскольку множество планов перевозок компактно [МО], то соотношения (2) доставляют критерий существования оптимальных планов перевозок.

В основе прямого опорного метода [ч. 1] лежит понятие опоры, которое тесно связано с базисом, составленным из векторов условий задачи. В [МО] доказывается, что в транспортной задаче эквивалентом базиса является *базисное множество клеток* транспортной таблицы. Множество из $n+m-1$ клетки составляет базисное множество тогда и только тогда, когда в него входит хотя бы по одной клетке из каждой строки и каждого столбца транспортной таблицы и из элементов множества невозможно построить ни одного цикла *).

Определение 1. Базисное множество клеток $I_{оп}$ назовем *опорой* транспортной таблицы.

Элементы из $I_{оп}$ называются *опорными клетками*. Остальные клетки транспортной таблицы — *неопорные*. Множество неопорных клеток обозначим через $I_н$.

Определение 2. Совокупность $\{x, I_{оп}\}$ плана перевозок и опоры транспортной таблицы называется *опорным планом перевозок*.

Перевозки x_{ij}, $(i, j)\in I_{оп}$,— *опорные*, x_{ij}, $(i, j)\in I_н$,— *неопорные* перевозки.

Замечание. В классическом аналоге симплекс-метода (методе потенциалов) при решении транспортных задач используются базисные планы перевозок, у которых все неопорные перевозки принимают только граничные значения (0 или d_{ij}).

Определение 3. Опорный план перевозок называется *невырожденным*, если опорные перевозки удовлетворяют неравенствам $0<x_{ij}<d_{ij}$, $(i, j)\in I_{оп}$.

2. Критерий оптимальности. Пусть $\{x, I_{оп}\}$ — опорный план перевозок. С помощью опоры $I_{оп}$ построим *потенциалы* u_i, v_j строк i и столбцов j транспортной таблицы как решение системы уравнений

$$u_i+v_j=c_{ij},\quad (i, j)\in I_{оп}. \qquad (3)$$

Если произвольно задать потенциал каких-нибудь строки или столбца, то потенциалы остальных строк и столбцов

---

*) Напомним: совокупность различных клеток таблицы (i_1, j_1), (i_2, j_1), (i_2, j_2), ..., (i_s, j_{s-1}), (i_s, j_s), (i_1, j_s), где $i_k\neq i_t$, $j_k\neq j_t$, $t=\overline{1, s}$, $k=\overline{1, s}$, $t\neq k$, называется циклом.

найдутся из (3) однозначно [МО]. Потенциалы u_i, v_j, $i=\overline{1, n}$, $j=\overline{1, m}$, позволяют вычислить оценки Δ_{ij} неопорных клеток:

$$\Delta_{ij}=u_i+v_j-c_{ij}, \quad (i, j)\in I_{\text{н}}. \tag{4}$$

Рассмотрим соотношения

$$\Delta_{ij}\leqslant 0, \ x_{ij}=0; \quad \Delta_{ij}\geqslant 0, \ x_{ij}=d_{ij};$$
$$\Delta_{ij}=0, \ 0<x_{ij}<d_{ij}, \quad (i, j)\in I_{\text{н}}. \tag{5}$$

Теорема (*критерий оптимальности*). Соотношения (5) достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности опорного плана перевозок $\{x, I_{\text{оп}}\}$.

Критерий оптимальности проверяется просто на транспортной таблице. Для удобства вычислений опорные перевозки обведем кружками. Строке или столбцу с наибольшим числом опорных клеток припишем нулевой потенциал. Потенциалы остальных строк и столбцов находятся последовательно с помощью равенств (3). По известным потенциалам u_i, v_j легко подсчитать в силу (4) оценки Δ_{ij} неопорных клеток. Число Δ_{ij} заносится в свободную часть неопорной клетки. Проверка соотношений (5) свелась таким образом к анализу трех чисел Δ_{ij}, x_{ij}, d_{ij} из каждой неопорной клетки.

Замечание. Совокупность оценок $\{\Delta_{ij}, i=\overline{1, n}, j=\overline{1, m}\}$, удовлетворяющих критерию оптимальности (5), составляет, по терминологии § 1 гл. II, *базисный коплан перевозок*. Общий случай, когда совокупность оценок является опорным копланом, будет рассмотрен в гл. V.

3. Достаточное условие субоптимальности. План перевозок x^{ε} называется ε-*оптимальным*, если

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}^{\varepsilon}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}^{0}\leqslant\varepsilon.$$

Теорема. Опорный план перевозок $\{x, I_{\text{оп}}\}$ является ε-оптимальным планом с числом ε, равным

$$\varepsilon=-\sum_{\Delta_{ij}<0,\ (i, j)\in I_{\text{н}}}\Delta_{ij}x_{ij}+\sum_{\Delta_{ij}>0,\ (i, j)\in I_{\text{н}}}\Delta_{ij}(d_{ij}-x_{ij}).$$

Для проверки плана перевозок на субоптимальность достаточно данных, полученных на предыдущем этапе проверки его на оптимальность.

4. Итерация. В транспортных задачах множество планов перевозок компактно. Поэтому здесь процедура проверки прямого опорного метода на неограниченность целевой функции отпадает.

Перейдем к описанию операций по улучшению опорного плана перевозок $\{x, I_{оп}\}$, который не удовлетворяет соотношениям (5).

В каждой неопорной клетке, элементы которой не удовлетворяют соотношениям (5), отметим оценку Δ_{ij}. Пусть $\Delta_{i_0j_0}$ — максимальное по модулю число среди отмеченных оценок. Ясно, что $\Delta_{i_0j_0}\neq 0$. С помощью клетки (i_0, j_0) и клеток опоры построим цикл из чередующихся горизонтальных и вертикальных звеньев [МО]. Первое звено из клетки (i_0, j_0) — горизонтальное. Рассмотрим два случая:

а) $\Delta_{i_0j_0}>0$. Припишем горизонтальным звеньям цикла числа $\Theta_{ij}=x_{ij}$, вертикальным — $\Theta_{ij}=d_{ij}-x_{ij}$, где x_{ij} — перевозки, лежащие на концах этих звеньев. Пусть $\Theta_{i_*j_*}$ — минимальное из приписанных чисел. Компоненты $(x_{ij})_{нов}$ нового плана перевозок получаются следующим образом. Из старых перевозок, лежащих на концах горизонтальных звеньев цикла, вычитаем число $\Theta_{i_*j_*}$, а к старым перевозкам, лежащим на концах вертикальных звеньев, добавляем число $\Theta_{i_*j_*}$. Остальные перевозки остаются без изменения.

б) $\Delta_{i_0j_0}<0$. Припишем горизонтальным звеньям цикла числа $\Theta_{ij}=d_{ij}-x_{ij}$, вертикальным — $\Theta_{ij}=x_{ij}$. Минимальное $\Theta_{i_*j_*}$ из приписанных чисел добавляем к старым перевозкам, лежащим на концах горизонтальных звеньев, и вычитаем из перевозок, лежащих на концах вертикальных звеньев. Остальные перевозки сохраняем. В результате получаем новый план перевозок $x_{нов}$.

Ясно, что $\Theta_{i_*j_*}>0$, если опорный план $\{x, I_{оп}\}$ невырожден.

В обоих случаях при $(i_*, j_*)=(i_0, j_0)$ опора $I_{оп}$ не меняется. Если $(i_*, j_*)\neq(i_0, j_0)$, то из старой опоры удаляем клетку (i_*, j_*) и добавляем (i_0, j_0). Полученное множество клеток образует новую опору $(I_{оп})_{нов}$.

За одну итерацию $\{x, I_{оп}\}\to\{x, I_{оп}\}_{нов}$ транспортные расходы уменьшаются на величину $|\Delta_{i_0j_0}|\Theta_{i_*j_*}$.

5. Построение начального опорного плана перевозок. Приступая к решению конкретной задачи, имеющей математическую модель транспортной задачи (1), можно кроме значений параметров c_{ij}, a_i, b_j, d_{ij} иметь различную дополнительную информацию. В прямых методах предполагается, что дополнительная информация связана с планами перевозок. Рассмотрим три возможности.

1) Перед началом решения задачи нет никакой информации о планах перевозок или имеющиеся рекомендации и догадки не заслуживают доверия. Эта ситуация типична для классической постановки транспортных задач. В частном случае, когда нет ограничений на пропускные способности коммуникаций ($d_{ij}\equiv\infty$), предложен ряд методов (*метод северо-западного угла* [МО], *метод минимального элемента* [1, 3] и др.). В общем случае ($d_{ij}\not\equiv\infty$) нет методов построения базисных *) планов перевозок, не использующих *искусственных* перевозок. Опишем аналоги упомянутых методов построения начальных планов перевозок.

Метод северо-западного угла. Начинаем с клетки (1, 1). Сравниваем три числа a_1, b_1, d_{11}. Если минимальным из них оказалось a_1, то полагаем $x_{11}=a_1$. Клетку (1, 1) делаем опорной, строку A_1 вычеркиваем, из b_1 вычитаем a_1. Аналогично, если минимальным оказалось число b_1, то $x_{11}=b_1$, клетка (1, 1) — опорная, столбец B_1 вычеркиваем, из a_1 вычитаем b_1. Пусть минимальным оказалось число d_{11} ($d_{11}<a_1$, $d_{11}<b_1$). Полагаем $x_{11}=d_{11}$, из чисел a_1, b_1 вычитаем d_{11}, клетку (1, 1) не вводим в опору. Переходим к клетке (1, 2). Повторяем описанные операции. Если опять реализовался третий случай, то переходим к клетке (1, 3). Продолжив процесс, обязательно в первой строке найдем опорную клетку, в которой реализуется один из первых двух случаев или реализуется третий случай, но клетка будет последней в строке (столбце). В противном случае задача (1) не имеет планов перевозок. Таким образом, после конечного числа операций транспортная таблица уменьшается на один столбец или на одну строку и при этом будет построена опорная клетка.

С новой таблицей поступаем так же, как с исходной. В отличие от частного случая с $d_{ij}\equiv\infty$ теперь на некотором шаге может возникнуть такая ситуация: заполняем последнюю клетку в строке i (столбце j) (в остальные клетки строки (столбца) уже занесены перевозки), однако ограничение на пропускную способность последней

---

*) Базисным называется опорный план перевозок, у которого неопорные перевозки равны 0 или d_{ij}.

клетки не позволяет добиться баланса по строке (столбцу). В этом случае вводим опорную искусственную клетку $(i, m+1)$ в строку (клетку $(n+1, j)$ в столбец), для которой $c_{i\,m+1}=M$, $d_{i\,m+1}=\infty$ $(c_{n+1\,j}=M$, $d_{n+1\,j}=\infty)$, искусственную перевозку $x_{i\,m+1}$ $(x_{n+1\,j})$ вычисляем из условия баланса по строке (столбцу). За счет некоторого расширения транспортной таблицы получаем начальный базисный план с искусственными перевозками. Задача решается прямым опорным методом с достаточно большими значениями M. Анализ результата стандартен для M-метода [МО].

Метод минимального элемента. Начинаем с клетки (i_1, j_1), содержащей минимальную стоимость $c_{i_1j_1}$. В клетке сравниваем три числа $a_{i_1}, b_{j_1}, d_{i_1j_1}$. Если минимальными оказались a_{i_1} или b_{j_1}, то поступаем так же, как в методе северо-западного угла. При $d_{i_1j_1}<a_{i_1}$, $d_{i_1j_1}<b_{j_1}$ полагаем $x_{i_1j_1}=d_{i_1j_1}$ и ищем клетку со следующим минимальным значением $c_{i_2j_2}$. Продолжив процесс, можем снова столкнуться с необходимостью введения нескольких искусственных клеток. Остальные операции такие же, как в предыдущем методе.

2) Пусть перед началом решения транспортной задачи известен план перевозок x, воплотивший в себя опыт и интуицию специалистов по физическому прототипу задачи (1). Для применения прямого опорного метода нужно указать опору таблицы. От конкретной начальной опоры зависит эффективность метода. До сих пор нет обоснованных правил построения наилучших опор для планов перевозок. Простейший способ — случайный выбор множества опорных клеток. Другая рекомендация: опорные клетки выбирать среди тех, в которых перевозки удовлетворяют неравенствам $0<x_{ij}<d_{ij}$. В общем случае предлагается ввести по одному *фиктивному пункту производства* $A_ф$ и *пункту потребления* $B_ф$ и рассмотреть задачу

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}\to\min,\ \sum_{j=1}^{m} x_{ij}+x_{iф}=a_i,\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij}+x_{фj}=b_j,$$

$$0\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij},\ 0\leqslant x_{iф}\leqslant d_{iф},\ 0\leqslant x_{фj}\leqslant d_{фj},\ d_{iф}=d_{фj}=0,$$

$$i=\overline{1,n},\quad j=\overline{1,m}.$$

Начальный план перевозок для новой задачи получается из старого добавлением нулевых фиктивных перевозок. Начальная опора состоит из фиктивных клеток.

На первой фазе прямого опорного метода из опоры удаляются фиктивные клетки. Поскольку перевозки в исходных клетках при этом не меняются, то все операции первой фазы можно осуществить на начальной таблице (см. ниже пример).

3) При решении больших практических задач, которые могут быть сведены к математической модели (1), реален случай, когда указанные специалистами начальные перевозки x_{ij}, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, не составляют в совокупности плана перевозок из-за невязок при учете баланса по пунктам производства и потребления. Такую совокупность перевозок назовем *квазипланом перевозок.* Занесем квазиплан в транспортную таблицу. Рассмотрим произвольную i-ю строку. Если сумма квазиперевозок не равна a_i, то добавляем искусственную клетку $(i, m+1)$. Параметры клетки $c_{i\,m+1}=M>0$, $d_{i\,m+1}=+\infty$, если $a_i>\sum_{j=1}^{m} x_{ij}$. При $\sum_{j=1}^{m} x_{ij}>a_i$ полагаем $c_{i\,m+1}=-M$, $d_{i\,m+1}=-\infty$. Начальная перевозка в искусственной клетке равна

$$x_{i\,m+1}=a_i-\sum_{j=1}^{m} x_{ij}.$$

В первом случае она положительна, во втором — отрицательна. Ограничения на перевозки: в первом случае — $x_{i\,m+1}\geqslant 0$, во втором — $x_{i\,m+1}\leqslant 0$. Нетрудно проверить, что наличие отрицательных перевозок не сказывается существенно на обосновании метода потенциалов. Единственное изменение: для оптимальной перевозки при выборе шага учитываем, что верхняя граница для перевозок равна нулю, а нижняя равна $-\infty$, т. е. $x_{i\,m+1}=0$ соответствует неравенство $\Delta_{i\,m+1}\geqslant 0$. Аналогичные построения делаем и в случае, когда на начальном квазиплане не выполнено условие баланса по столбцам. В результате получится транспортная таблица, на которой выполняется условие баланса. Для этой таблицы находим опору и решаем транспортную задачу при достаточно больших $M>0$. Анализ результата стандартен для *М-метода* [МО].

6. Примеры. Пример 1. Рассмотрим транспортную задачу, в которой нет информации о начальном плане перевозок. Параметры задачи занесены в табл. I.2. Методом минимального элемента в таблице построен начальный план перевозок. Введены три искусственные клетки, из которых клетка (4, 5) вспомогательная. Прямым методом, который в данном случае совпадает с методом потенциалов, ибо начальный план перевозок базисный, будем преобразовывать таблицу

Таблица I.2

	3		12		M		8		M		a_i
−M+4	3	2	1	3	8	4	2	1			
	3	−M+5	1	−M+13	4		2	−M+11			10
−1	7	10	2	1	3	5	8	7			
		−8	2	10	3	M−6	5				10
0	5	3	∞	12	2	6	15	8	∞	M	
	2		32		2	M−6	8		1		45
0					∞	M			∞	M	
					1				M		1
b_j	5		35		10		15		1		

до тех пор, пока не получим шесть неискусственных опорных клеток. Одна итерация приводит к такой ситуации (табл. I.3). В клетках, в которых оканчиваются звенья цикла, построенного для клетки (1, 1),

Таблица I.3

	3		12		5		8	
−1	3	2	1	3	8	4	2	1
	2		1	8	5		2	6
−1	7	10	2	1	3	5	8	7
		−8	2	10	3	−1	5	
0	5	3	∞	12	2	6	15	8
	3		32		2	−1	8	

помещены числа, равные ограничениям на шаг Θ, наложенным этими клетками. Еще одна итерация приводит к оптимальному плану перевозок: $x_{11}=0$, $x_{12}=1$, $x_{13}=7$, $x_{14}=2$, $x_{21}=0$, $x_{22}=2$, $x_{23}=1$, $x_{24}=7$, $x_{31}=5$, $x_{32}=32$, $x_{33}=2$, $x_{34}=6$.

П р и м е р 2. Рассмотрим задачу с данными из табл. I.4, где наряду с параметрами имеется начальный план перевозок. Методом фиктивных переменных построим опору. Поскольку фиктивные клетки содержат предельно простую информацию ($c_{i5}=c_{4j}=d_{i5}=d_{4j}=$ $=x_{i5}=x_{4j}=x_{45}=d_{45}=c_{45}=0$) и считаются вначале опорными, то достаточно к каждой строке и к каждому столбцу приписать знак «—» и менять в ходе итераций этот знак на «+», как только фиктивная клетка из строки или столбца становится неопорной. Все итерации, в результате которых построена опора плана, осуществлены на одной табл. I.4. После одной итерации прямого метода получается оптимальный план перевозок: $x_{11}=0$, $x_{12}=1$, $x_{13}=8$, $x_{14}=2$, $x_{21}=0$, $x_{22}=2$, $x_{23}=1$, $x_{24}=7$, $x_{31}=5$, $x_{32}=33$, $x_{33}=1$, $x_{34}=6$.

Таблица I.4

	3		12		5		8		a_i	0
−1	3	2	1	3	8	4	2	1		
	1		1		7		2		11	+
−1	7	10	2	1	3	5	8	7		
			2		2		6		10	+
0	5	3	∞	12	2	6	15	8		
	4		33		1		7		45	+
b_j	5		36		10		15			
0	+		+		−		+			

Таблица I.5

3	2	1	3	8	4	2	1	
		1		8		2		10
7	10	2	1	3	5	8	7	
		2		1		7		10
5	3	∞	12	2	6	15	8	
5		33		1		6		45
5		35		10		15		

П р и м е р 3. Рассмотрим транспортную задачу с известным начальным квазипланом (табл. I.5). Введением двух искусственных клеток с неположительными перевозками добиваемся выполнения условий баланса (табл. I.6). Клетка (4, 5) — вспомогательная. Одна итерация прямого метода приводит к оптимальному плану перевозок: $x_{11}=0$, $x_{12}=1$, $x_{13}=7$, $x_{14}=2$, $x_{21}=0$, $x_{22}=2$, $x_{23}=2$, $x_{24}=6$, $x_{31}=5$, $x_{32}=32$, $x_{33}=1$, $x_{34}=7$.

Таблица I.6

	3		12		6		8		M+12	
−2M−12	3	2	1	3	8	4	2	1		−M
		−2M −11	1	−2M −3	8	−2M −10	2	−2M −5	−1	
−1	7	10	2	1	3	5	8	7		
		−8	2	10	1		7			
0	5	3	∞	12	2	6	15	8		
	5		33		1	0	6			
				−M					∞	0
			−1						M	

Замечание. В данном параграфе рассмотрен только один опорный метод решения транспортной задачи, в котором на каждой итерации при улучшении плана перевозок изменялась перевозка только в одной неопорной клетке, что вело к изменению опорных перевозок. Такой способ заимствован из классического метода потенциалов, где он единственно возможный в силу специальной структуры базисных планов перевозок. В [ч. 1, гл. III] для решения общей задачи линейного программирования предложены три модификации прямого метода. В качестве несложного упражнения можно порекомендовать перенести операции упомянутых модификаций на транспортные задачи. Каждая новая нормировка неопорных переменных порождает новый опорный метод решения транспортных задач. Для выяснения достоинств и недостатков новых методов необходим достаточно хороший экспериментальный материал.

§ 2. Открытые транспортные задачи

Открытые модели транспортных задач возникают, например, в тех случаях, когда или из пунктов производства вывозится не весь продукт, или в пункты потребления завозится продукт в объеме, который превышает потребление.

1. Постановка задачи. Сохранив физическую интерпретацию, приведенную в § 1, рассмотрим математическую модель открытой транспортной задачи в матричной форме

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}\to\min,$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij}\leqslant a_i,\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij}\geqslant b_j,\ 0\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij}, \tag{1}$$

$$i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}.$$

Планом перевозок называется совокупность чисел $x=\{x_{ij},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}\}$, удовлетворяющая ограничениям задачи. Для каждого плана x выполняются неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\geqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}\geqslant\sum_{j=1}^{m} b_j.$$

Поэтому будем предполагать, что

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\geqslant\sum_{j=1}^{m} b_j. \tag{2}$$

Для плана x подсчитаем числа

$$x_{i\,m+1}=a_i-\sum_{j=1}^{m} x_{ij},\quad x_{n+1\,j}=b_j-\sum_{i=1}^{n} x_{ij},$$

$$i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m},$$

которые характеризуют излишки в пунктах производства и потребления. Обычно хранение излишков (на складах) связано с расходами. Пусть $c_{i\,m+1}$, $c_{n+1\,j}$ — расходы на хранение единицы продукта в A_i, B_j; $d_{i\,m+1}$, $-d_{n+1\,j}$ — емкости складов в A_i, B_j. В задаче (1) неявно предполагается, что $c_{i\,m+1}\equiv c_{n+1\,j}\equiv 0$, $d_{i\,m+1}\equiv -d_{n+1\,j}\equiv\infty$. Поскольку условий баланса на склады не налагается, то можно положить $c_{n+1\,m+1}=0$, $d_{n+1\,m+1}=\infty$, $x_{n+1\,m+1}$, a_{n+1}, b_{m+1} — нефиксированные числа. Таким образом, расширенная модель задачи (1) имеет вид (табл. I.7)

$$\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{m+1} c_{ij}x_{ij}\to\min,\ \sum_{j=1}^{m+1} x_{ij}=a_i,\ \sum_{i=1}^{n+1} x_{ij}=b_j,$$

$$i=\overline{1,n+1},\ j=\overline{1,m+1}, \tag{3}$$

$$0\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij},\ 0\leqslant x_{i\,m+1}\leqslant d_{i\,m+1},\ d_{n+1\,j}\leqslant x_{n+1\,j}\leqslant 0,$$

$$i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}.$$

Эта задача отличается от задачи (1) § 1 тем, что, во-первых, переменные $x_{n+1\,j}$, числа $c_{n+1\,j}$, $d_{n+1\,j}$, $j=\overline{1, m}$, — неположительные, во-вторых, на переменную $x_{n+1\,m+1}$ не наложено ограничений, в-третьих, нет, по существу, условий баланса по дополнительным «пунктам» A_{n+1}, B_{m+1}. Подобная ситуация уже встречалась в пп. 5 и 6 из § 1.

Таблица I.7

	B_1	...	B_m	B_{m+1}	
A_1	d_{11} c_{11}	...	d_{1m} c_{1m}	d_{1m+1} c_{1m+1}	a_1
⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
A_n	d_{n1} c_{m1}	...	d_{nm} c_{nm}	d_{nm+1} c_{nm+1}	a_n
A_{n+1}	$d_{n+1\,1}$ $c_{n+1\,1}$	...	d_{n+1m} c_{n+1m}	∞ 0 M	
	b_1	...	b_m		

2. Решение. Основные определения для задачи (3) остаются такими же, как в § 1. Проанализировав связь между транспортной задачей и общей задачей линейного программирования [МО], нетрудно убедиться, что особенности задачи (3) вносят непринципиальные изменения в операции прямого метода. Оставив соответствующие элементарные вычисления читателям в качестве упражнения, приведем описание прямого метода для задачи (3).

Пусть $\{x, I_{оп}\}$ — опорный план задачи (3), где $I_{оп}$ — опора (см. табл. I.7), причем клетка $(n+1, m+1)$ — опорная. По опоре $I_{оп}$ вычислим потенциалы u_i, v_j:

$$u_i+v_j-c_{ij}=0, \quad (i, j)\in I_{оп}, \quad u_{n+1}=0.$$

Найдем оценки неопорных клеток

$$\Delta_{ij}=u_i+v_j-c_{ij}, \quad (i, j)\in I_{н}.$$

Критерий оптимальности. Соотношения $\Delta_{ij} \leqslant 0$ при $x_{ij}=0$; $\Delta_{ij} \geqslant 0$ при $x_{ij}=d_{ij}$; $\Delta_{ij}=0$ при $0<x_{ij}<d_{ij}$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m+1}$; $\Delta_{n+1\,j} \geqslant 0$ при $x_{n+1\,j}=0$; $\Delta_{n+1\,j} \leqslant 0$ при $x_{n+1\,j}=$ $=d_{n+1\,j}$; $\Delta_{n+1\,j}=0$ при $d_{n+1\,j}<x_{n+1\,j}<0$, $j=\overline{1,m}$, достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности плана x.

Для плана x выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} c_{ij}x_{ij} - \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} c_{ij}x_{ij}^{0} \leqslant \varepsilon,$$

где x^0 — оптимальный план;

$$\varepsilon = -\sum_{\Delta_{ij}x_{ij}<0} \sum \Delta_{ij}x_{ij} +$$
$$+\sum_{\substack{\Delta_{ij}>0,\ x_{ij}\geqslant 0,\\ i\neq n+1}} \sum \Delta_{ij}(d_{ij}-x_{ij}) + \sum_{\substack{\Delta_{n+1\,j}<0,\\ x_{n+1\,j}\leqslant 0}} \sum \Delta_{ij}(d_{ij}-x_{ij}).$$

Итерация по улучшению плана x состоит из следующих операций. Среди неопорных оценок, не удовлетворяющих критерию оптимальности, найдем оценку $\Delta_{i_0j_0}$ с наибольшим модулем. Для клетки (i_0, j_0) строим цикл (первое звено горизонтальное). Пусть $\Delta_{i_0j_0}>0$. На концах горизонтальных звеньев цикла отмечаем отклонение (по модулю) компоненты x_{ij} в клетке, лежащей на конце звена, от своей нижней границы. На концах вертикальных звеньев отмечаем отклонение x_{ij} от верхней границы. Минимальное из этих отклонений обозначим через Θ^0, а клетку, в которой оно реализовалось,— через (i_*, j_*). Компоненты нового плана $x_{\text{нов}}$ равны

$(x_{ij})_{\text{нов}}=x_{ij}-\Theta^0$, если клетка (i, j) лежит на конце горизонтального звена цикла;

$(x_{ij})_{\text{нов}}=x_{ij}+\Theta^0$, если клетка (i, j) лежит на конце вертикального звена цикла;

$(x_{ij})_{\text{нов}}=x_{ij}$ — для остальных клеток.

В обоих случаях опора сохраняется при $(i_*, j_*)=$ $=(i_0, j_0)$. Если $(i_*, j_*)\neq(i_0, j_0)$, то из опоры $I_{\text{оп}}$ удаляем клетку (i_0, j_0) и добавляем клетку (i_*, j_*). Новое множество клеток составляет опору $(I_{\text{оп}})_{\text{нов}}$ нового плана.

За итерацию $x \to x_{\text{нов}}$ расходы по транспортировке и хранению уменьшаются на $\Theta^0\,|\Delta_{i_0j_0}|$.

Построение начального плана проводится по правилам, описанным в п. 5 § 1.

3. Снабжение в условиях дефицита. Рассмотрим транспортную задачу (1), для которой условие (2) не выполняется. В этом случае естественно говорить о *дефиците*

$$\alpha = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i > 0$$

продукта в рассматриваемой системе. Введем фиктивный пункт производства A_{n+1} с объемом производства не меньшим чем a_{n+1}, $a_{n+1} \geqslant \alpha$. Перевозка $x_{n+1\,j}$, найденная из равенства

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + x_{n+1\,j} = b_j,$$

означает количество продукта, которое планируется недоставить в пункт B_j. Обозначим через $c_{n+1\,j}$ расходы, связанные с недоставкой единицы продукта пункту B_j. Пусть $d_{n+1\,j}$ — предельно допустимый объем непоставки продукта пункту B_j. При этих соглашениях задача снабжения с минимальными расходами в условиях дефицита принимает вид

$$\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min, \quad \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leqslant a_i,$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_{ij} = b_j, \quad 0 \leqslant x_{ij} \leqslant d_{ij}, \quad i = \overline{1, n+1}, \quad j = \overline{1, m},$$

и является частным случаем задачи (3).

§ 3. Задача с фиксированными перевозками

В некоторых практических задачах транспортного типа объемы перевозок между определенными пунктами заданы и не допускают изменений. Ниже рассматривается математическая модель подобных задач.

Транспортной задачей с фиксированными перевозками назовем задачу

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} z_{ij} \to \min, \quad \sum_{j=1}^{m} z_{ij} = a_i^*, \quad \sum_{i=1}^{n} z_{ij} = b_j^*,$$

$$i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \tag{1}$$

$$z_{ij} = z_{ij}^*, \quad (i, j) \in I^*,$$

$$0 \leqslant z_{ij} \leqslant d_{ij}, \quad (i, j) \in I \setminus I^*,$$

где z_{ij}^* — заданные объемы перевозок между пунктами из множества I^*, $I=\{(i, j):\ i=\overline{1, n},\ j=\overline{1, m}\}$.

Введем новые переменные

$$x_{ij}=z_{ij},\ (i, j)\in I\setminus I^*;\quad x_{ij}=z_{ij}-z_{ij}^*,\ (i, j)\in I^*,$$

и обозначим

$$a_i=a_i^*-\sum_{(i,\ j)\in I^*} z_{ij}^*,\quad b_j=b_j^*-\sum_{(i,\ j)\in I^*} z_{ij}^*.$$

Тогда вместо задачи (1) получим

$$\sum_{(i,\ j)\in I\setminus I^*} c_{ij}x_{ij}\to\min,\quad \sum_{(i,\ j)\in I\setminus I^*} x_{ij}=a_i,\quad \sum_{(i,\ j)\in I\setminus I^*} x_{ij}=b_j,$$

$$i=\overline{1, n},\ j=\overline{1, m}; \tag{2}$$

$$0\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij},\ (i, j)\in I\setminus I^*.$$

Если данные задачи (2) занести в транспортную таблицу, получится табл. I.8, в которой заштрихованы клетки

Таблица I.8

	B_1	B_2	...	B_m	
A_1	d_{11} c_{11} / x_{11}	d_{12} c_{12} / x_{12}	...		a_1
A_2	d_{21} c_{21} / x_{21}		...		a_2
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
A_n		d_{n2} c_{n2} / x_{n2}	...	d_{nm} c_{nm} / x_{nm}	a_n
	b_1	b_2	...	b_m	

из множества I^*. Перевозки из заштрихованных клеток называются *запрещенными*.

На задачу (2) переносятся все определения, введенные в § 1. Нетрудно понять, что наличие запрещенных перевозок не сказывается на связи между транспортной задачей и общей задачей линейного программирования. Теперь возникают дополнительные трудности при построении начального опорного плана перевозок, так как уменьшилось число клеток (коммуникаций). Однако в связи с уменьшением количества неопорных клеток сократилось и число операций прямого метода на каждой итерации. В целом большой процент заштрихованных клеток транспортной таблицы свидетельствует о несоответствии матричной модели изучаемой физической задаче. В подобных ситуациях часто адекватное описание транспортных задач достигается на сетевых моделях.

§ 4. Транспортная задача в сетевой форме

Сетевые модели и связанные с ними сетевые (потоковые) методы являются эффективным аппаратом решения многих практических задач. Сетевую транспортную задачу нетрудно записать в матричной форме, но иногда этот переход из-за большого процента заштрихованных клеток в полученной транспортной таблице нецелесообразен. Сетевые методы имеют самостоятельное значение. В данном параграфе, пользуясь только сетевыми понятиями и исходя непосредственно из основной идеи прямого опорного метода, строится его сетевой аналог.

1. Сеть. Основные понятия. Пусть $I=\{A_1, \ldots, A_n\}$ — совокупность точек, которую для краткости запишем только с помощью индексов $I=\{1, \ldots, n\}$. Элементы $i\in I$ множества I назовем *узлами*. Предположим, что некоторые пары узлов $i, j\in I$, $i\neq j$ упорядочены. Эту связь обозначим символом (i, j), на рисунках будем изображать линией со стрелкой и назовем *дугой* с началом в узле i и концом в узле j. Множество дуг, определенных на I, обозначим через U. Совокупность $S=\{I, U\}$ называется *сетью (ориентированной)*. Каждой дуге $(i, j)\in U$ поставим в соответствие пару точек $\{i, j\}$, которую назовем *ребром с граничными узлами* i, j. Последовательность различных ребер $\{i_1, i_2\}, \{i_2, i_3\}, \ldots, \{i_{k-1}, i_k\}$, в которой соседние ребра имеют общие граничные узлы, называется *цепью (простой)*, соединяющей узлы i_1, i_k. Иногда цепь записывается с помощью граничных узлов $\{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i_k\}$. Пусть цепь $\{i_1, i_2\}, \ldots, \{i_{k-1}, i_k\}$ просматривается в направлении от узла i_1 к узлу i_k. Если это направление совпадает с направлением $i\to j$ дуги (i, j) в цепи, то дуга (i, j) называется *прямой*. Дуга с противоположным направлением — *обратной*. Если в этой записи узлы не встречаются дважды, то цепь называется *элементарной*.

В дальнейшем рассматриваются, как правило, только простые элементарные цепи.

Сеть назовем *связной*, если любые ее два узла можно соединить цепью. В дальнейшем рассматриваются только связные сети.

Цепь $\{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i_k\}$ с совпадающими узлами i_1, i_k называется *циклом*. Узел сети называется *висячим*, если он граничен для единственного ребра сети, который также назван *висячим*.

Лемма 1. Каждая связная сеть без циклов содержит висячее ребро.

Действительно, выбираем произвольный узел i_1. Если он не является висячим, то в силу связности сети найдется ребро $\{i_1, i_2\}$. Если и узел i_2 не является висячим, то найдется ребро $\{i_2, i_3\}$, причем $i_3 \neq i_1$, так как в сети нет циклов. Продолжив этот процесс, через конечное число шагов (множество узлов конечно!) обнаружим висячий узел.

Лемма 2. Удаление любого висячего ребра вместе с висячим узлом или любого ребра из цикла не нарушает связности сети.

Обозначим через $|I|$ количество элементов множества I. Связная сеть $S = \{I, U\}$ называется *деревом*, если $|I| = |U| + 1$.

Лемма 3. Связная сеть является деревом тогда и только тогда, когда она не содержит циклов.

Доказательство. *Достаточность.* По лемме 1 в сети найдется висячее ребро. Удалим его вместе с соответствующим висячим узлом. Оставшаяся сеть, согласно лемме 2, опять будет связной и, понятно, без циклов. У нее удалим висячее ребро и висячий узел. Через $|I| - 2$ шага останутся два узла, граничных для единственного ребра. Таким образом, $|I| = |U| + 1$.

Необходимость. Предположим, что у дерева есть цикл. Этот цикл не может составить все дерево, так как у него число ребер равно числу узлов. Среди узлов и ребер, не входящих в рассматриваемый цикл, удалим все висячие узлы и соответствующие им висячие ребра. Если оставшиеся ребра образуют еще один цикл, то удалим в нем ребро, не входящее в рассматриваемый цикл. При этом число узлов не изменится, а число ребер сократится на единицу. Продолжив этот процесс, через конечное число шагов из исходной сети выделим рассматриваемый цикл. В нем число узлов равно числу ребер. Следовательно, в исходной сети-дереве число ребер было не меньше числа узлов: $|U| \geqslant |I|$. Противоречие доказывает лемму.

Лемма 4. Каждая пара узлов дерева связана единственной цепью.

Для сети $S=\{I, U\}$ сеть $S^*=\{I, U^*\}$, где $U^* \subset U$, называется *частичной сетью*. Частичная сеть, являющаяся деревом, называется *деревом сети* S.

Лемма 5. Пусть S^* — дерево сети. При любой дуге $(i, j) \in U$, $(i, j) \overline{\in} U^*$ частичная сеть $S_1=\{I, U_1\}$, $U_1=U^* \cup (i, j)$ содержит ровно один цикл.

Доказательство. Существование циклов в S_1 следует из леммы 3. Если их больше одного, то удалим в одном, фиксированном, цикле ребро, не входящее хотя бы в один из других циклов. Для оставшейся частичной сети $S_2=\{I, U_2\}$ имеем $|I|=|U_2|+1$, т. е. S_2 — дерево с циклами. Противоречие доказывает лемму.

Объект $S=\{I, U\}$, наделенный только геометрическими характеристиками типа приведенных выше, называется *графом*. Сеть характеризуется и дополнительными *метрическими параметрами*.

Каждому узлу $i \in I$ припишем число a_i, которое назовем *интенсивностью узла*. Если $a_i>0$, то i — *источник*, если $a_i<0$, то i — *сток*. При $a_i=0$ узел i называется *промежуточным (нейтральным)*. При графическом изображении источник изображается стрелкой, входящей в узел, сток — стрелкой, выходящей из узла. Около стрелок помещается число, равное абсолютной величине интенсивности. Промежуточные узлы на рисунках не отмечаются стрелками. Каждой дуге $(i, j) \in U$ сети припишем неотрицательное число d_{ij} — *пропускную способность дуги*. При $d_{ij}=\infty$ говорят о дуге (i, j) *без ограничения пропускной способности*.

2. Поток на сети. Рассмотрим сеть $S=\{I, U\}$. Обозначим

$$I^+(i)=\{j\colon (i, j) \in U\}, \quad I^-(i)=\{j\colon (j, i) \in U\},$$

т. е. $I^+(i)$ — совокупность узлов сети, соединенных с i дугами из U, имеющими начало в i, $I^-(i)$ — совокупность узлов, соединенных с i дугами, которые оканчиваются в i.

Совокупность чисел $x=\{x_{ij}, (i, j) \in U\}$ называется *потоком* на сети S, если

$$\sum_{j \in I^+(i)} x_{ij} - \sum_{j \in I^-(i)} x_{ji} = a_i, \quad i \in I, \tag{1}$$

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant d_{ij}, \quad (i, j) \in U. \tag{2}$$

Равенства (1) выражают *баланс* в каждом узле, условие непрерывности потока: количество вещества, втекающего в узел, равно количеству вещества, вытекающего из него.

Компонента x_{ij} называется *дуговым потоком (потоком по дуге (i, j))*.

Если на совокупности чисел $x=\{x_{ij}, (i, j)\in U\}$ выполняются только равенства (1), то x — *псевдопоток*. Если же x удовлетворяет только неравенствам (2), то говорят о *квазипотоке*.

Лемма 6. Сеть с нулевыми интенсивностями узлов, содержащая цикл, допускает бесконечное число псевдопотоков.

Доказательство. Пусть $x_{ij}=0$, если (i, j) не входит в цикл. Выберем направление обхода цикла по направлению дуги (i_0, j_0) цикла. Положим $x_{ij}=\Theta$, если дуга (i, j) в цикле прямая, $x_{ij}=-\Theta$, если дуга (i, j) — обратная. При любом Θ построенная совокупность чисел x_{ij} удовлетворяет равенствам (1).

Псевдопоток, построенный в лемме 6, назовем (i_0, j_0)-*циркуляцией* со значением Θ.

Пусть $I^*\subset I$ — некоторое множество узлов сети. Множество дуг $U(I^*)=\{(i, j)\colon i\in I^*, j\overline{\in} I^*, (i, j)\in U\}$ называется *разрезом сети*, соответствующим множеству I^*. Число $a(I^*)=\sum_{i\in I^*} a_i$ называется *интенсивностью множества* I^*. Число $d(I^*)=\sum_{(i, j)\in U(I^*)} d_{ij}$ — *пропускная способность (значение) разреза* $U(I^*)$.

Теорема 1. Сеть $S=\{I, U\}$ допускает поток тогда и только тогда, когда $a(I)=0$ и для каждого множества $I^*\subset I$ его интенсивность не превосходит значения порожденного разреза:

$$a(I^*)\leqslant d(I^*).$$

Достаточность будет доказана в гл. VII.

Необходимость. Поскольку

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in I^+(i)} x_{ij}=\sum_{i\in I}\sum_{j\in I^-(i)} x_{ji}=\sum_{(i, j)\in U} x_{ij},$$

то, просуммировав для потока x обе части равенств (1) по $i\in I$, получим $a(I)=0$.

Пусть I^* — произвольное множество узлов сети,

$U(I^*)$ — соответствующий ему разрез. Просуммируем равенства (1) на потоке x по множеству I^*:

$$a(I^*) = \sum_{i \in I^*} a_i = \sum_{i \in I^*} \sum_{j \in I^+(i)} x_{ij} - \sum_{i \in I^*} \sum_{j \in I^-(i)} x_{ji}.$$

Поскольку

$$\sum_{i \in I^*} \sum_{j \in I^+(i),\ j \in I^*} x_{ij} = \sum_{i \in I^*} \sum_{j \in I^-(i),\ j \in I^*} x_{ji},$$

$$\sum_{i \in I^*} \sum_{j \in I^-(i),\ j \overline{\in} I^*} x_{ji} \geqslant 0,$$

то имеем

$$a(I^*) = \sum_{i \in I^*} \sum_{j \in I^+(i),\ j \overline{\in} I^*} x_{ij} + \sum_{i \in I^*} \sum_{j \in I^+(i),\ j \in I^*} x_{ij} -$$

$$- \sum_{i \in I^*} \sum_{j \in I^-(i),\ j \in I^*} x_{ji} - \sum_{i \in I^*} \sum_{j \in I^-(i),\ j \overline{\in} I^*} x_{ji} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i \in I^*} \sum_{j \in I^+(i),\ j \overline{\in} I^*} d_{ij} = \sum_{(i,\ j) \in U(I^*)} d_{ij} = d(I^*).$$

Теорема доказана.

С помощью теоремы получим критерий существования плана перевозок в транспортной задаче § 1. Сетевая модель транспортной задачи, имеющей матричную форму, изображена на рис. I.1. Из теоремы следует: в матричной

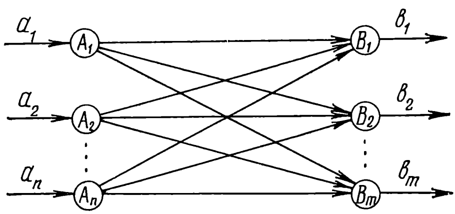


Рис. I.1

транспортной задаче § 1 существует план перевозок тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$$

и для любых совокупностей пунктов производства

$A_{i_1}, \ldots, A_{i_p}$ и пунктов потребления $B_{j_1}, \ldots, B_{j_q}$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{p} a_{i_k} - \sum_{l=1}^{q} b_{j_l} \leqslant \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1,\ j\neq j_1, \ldots, j_q}^{m} d_{i_k j}.$$

3. Задача о потоке минимальной стоимости. Двойственная задача. В дополнение к введенным характеристикам сети припишем каждой дуге $(i, j) \in U$ число c_{ij} — *стоимость единичного потока* по дуге (i, j). *Сетевым аналогом* транспортной задачи § 1 является *задача о потоке минимальной стоимости*

$$\sum_{(i,\ j)\in U} c_{ij}x_{ij} \to \min, \quad \sum_{j\in I^+(i)} x_{ij} - \sum_{j\in I^-(i)} x_{ji} = a_i, \qquad (3)$$
$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant d_{ij}, \quad i\in I, \quad (i, j)\in U.$$

Решение этой задачи $x^0 = \{x_{ij},\ (i, j)\in U\}$ называется *оптимальным потоком.*

При $c_{ij} \geqslant 0$, $(i, j)\in U$, критерии существования оптимального потока сводятся к критериям существования потока в сети.

Транспортная задача в матричной форме (§ 1) легко сводится (п. 2) к задаче (3). При этом получается сеть с $n+m$ узлами и nm дугами. При больших n, m число nm заметно превосходит $n+m$, что затрудняет операции на сети. Сетевые модели наглядны и удобны в тех случаях, когда число дуг незначительно превосходит число узлов. Такие случаи возникают, например, при исследовании транспортных задач с фиксированными перевозками.

Нетрудно видеть, что задача (3) является задачей линейного программирования. Составим для нее двойственную задачу [МО]. Функция Лагранжа имеет вид

$$F(x, y, w) = \sum_{(i,\ j)\in U} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i\in I} y_i \Big(\sum_{j\in I^+(i)} x_{ij} - \sum_{j\in I^-(i)} x_{ji} - a_i\Big) +$$
$$+ \sum_{(i,\ j)\in U} w_{ij}x_{ij} - \sum_{(i,\ j)\in U} w_{ij}d_{ij}.$$

Согласно теореме Куна — Таккера, для оптимального потока x^0 найдутся числа y_i^0, $i\in I$; w_{ij}^0, $(i, j)\in U$, такие, что для функции $F(x, y, w)$ выполняются *условия седла:*

$$F(x^0, y, w) \leqslant F(x^0, y^0, w^0) \leqslant F(x, y^0, w^0) \qquad (4)$$

для всех $x_{ij} \geqslant 0$, y_i, $w_{ij} \geqslant 0$, $i\in I$, $(i, j)\in U$.

Для выполнения второго неравенства из (4) необходимо, чтобы коэффициенты при x_{ij} в функции Лагранжа были неотрицательными:

$$y_i - y_j + w_{ij} + c_{ij} \geqslant 0, \quad (i, j) \in U,$$

и выполнялись равенства

$$x^0_{ij}(y^0_i - y^0_j + w^0_{ij} + c_{ij}) = 0, \quad (i, j) \in U. \tag{5}$$

Для выполнения первого неравенства из (4) необходимо

$$w^0_{ij}(x^0_{ij} - d_{ij}) = 0, \quad (i, j) \in U. \tag{6}$$

Таким образом, в силу первого неравенства из (4) числа y^0_i, w^0_{ij} — решение задачи

$$-\sum_{i \in I} a_i y_i - \sum_{(i, j) \in U} w_{ij} d_{ij} \to \max, \tag{7}$$

$$y_i - y_j + w_{ij} \geqslant -c_{ij}, \quad w_{ij} \geqslant 0,$$

которая называется *двойственной задачей* для задачи о потоке минимальной стоимости.

Равенства (5), (6) — суть *условия дополняющей нежесткости.*

Теорема двойственности. Для существования оптимального потока необходимо и достаточно, чтобы имела решение задача (7). При этом

$$\sum_{(i, j) \in U} c_{ij} x^0_{ij} = -\sum_{i \in I} a_i y^0_i - \sum_{(i, j) \in U} w^0_{ij} d_{ij}.$$

4. Опора сети. Опорный поток. Следуя общему определению опоры задачи линейного программирования [ч. 1], частичную сеть $S_{оп} = \{I, U_{оп}\}$ назовем *опорой сети* $S = \{I, U\}$, если она при $a_i \equiv 0$, $i \in I$, допускает лишь тривиальный псевдопоток $x = \{x_{ij} \equiv 0, (i, j) \in U_{оп}\}$, но для любой дуги $(i_0, j_0) \in U$, $(i_0, j_0) \bar{\in} U_{оп}$ частичная сеть $S_1 = \{I, U_1\}$, $U_1 = U_{оп} \cup (i_0, j_0)$ допускает нетривиальный псевдопоток $x = \{x_{ij} \not\equiv 0, (i, j) \in U_1\}$.

Дуги $(i, j) \in U_{оп}$ называются *опорными*, $(i, j) \in U_{н}$, $U_{н} = U \setminus U_{оп}$ — *неопорные* дуги.

Теорема 2. Опора сети является деревом сети, и каждое дерево сети можно считать опорой.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $S_{оп}$ — опора сети. Тогда она не может содержать циклов, ибо, согласно лемме 6, на каждом цикле существует бесконечное число нетривиальных псевдопотоков. Опора — связная частичная сеть, ибо в противном случае добавление к ней дуги $(i_0, j_0) \in U$ без образования циклов (что в несвязной сети всегда возможно) ведет к равенству $x_{i_0 j_0}=0$, которое следует из условия баланса в узле, принадлежащем опоре.

Достаточность. Пусть S^* — дерево сети. Найдем висячий узел. Из условия баланса в этом узле следует, что вдоль соответствующего висячего ребра течет нулевой псевдопоток. Удалим висячее ребро и повторим операции. Через $|I|-1$ шаг получим нулевой псевдопоток на S^*. Если к S^* добавить любую дугу из U, то, согласно лемме 5, получится цикл, а значит, в силу леммы 6 можно построить ненулевой псевдопоток. Теорема доказана.

Пару $\{x, S_{оп}\}$ из потока и опоры сети назовем *опорным потоком.* Поток вдоль опорной дуги называется *опорным дуговым потоком.* Остальные дуговые потоки сети — *неопорные.*

Дуговой поток x_{ij} называется *критическим*, если дуга (i, j) *свободна* $(x_{ij}=0)$ или *насыщена* $(x_{ij}=d_{ij})$. Опорный поток называем *невырожденным*, если все его опорные дуговые потоки некритические.

5. Потенциалы узлов, оценки дуг. Приращение стоимости потока. Пусть $\{x, S_{оп}\}$ — опорный поток. Узлам $i \in I$ припишем числа u_i так, чтобы на каждой дуге $(i, j) \in U_{оп}$ выполнялось равенство

$$u_i-u_j-c_{ij}=0, \quad (i, j) \in U_{оп}. \tag{8}$$

Поскольку $|I|=|U_{оп}|+1$, то одно из чисел u_i зададим произвольно. Остальные найдутся из (8) однозначно, ибо каждая пара узлов в дереве соединена единственной цепью (см. лемму 4). Построенные числа u_i, $i \in I$, назовем *потенциалами узлов* сети.

Имея потенциалы узлов, найдем *оценки* *) неопорных дуг сети

$$\Delta_{ij}=u_i-u_j-c_{ij}, \quad (i, j) \in U_{н}. \tag{9}$$

*) Строго говоря, потенциалы и оценки следует называть опорными, поскольку их значения зависят от опоры.

Пусть $\tilde{x}$ — второй поток на сети, $\Delta x = \tilde{x} - x$ — приращение потока x. Из (3) следует

$$\sum_{j \in I^+(i)} \Delta x_{ij} - \sum_{j \in I^-(i)} \Delta x_{ij} = 0, \quad i \in I.$$

Умножим обе части равенств (8), (9) на Δx_{ij} и просуммируем по $(i, j) \in U$:

$$\sum_{(i,\, j) \in U} c_{ij} \Delta x_{ij} = - \sum_{(i,\, j) \in U_{\text{н}}} \Delta x_{ij} \Delta_{ij} + \sum_{(i,\, j) \in U} (u_i - u_j) \Delta x_{ij}.$$

Поскольку

$$\sum_{(i,\, j) \in U} (u_i - u_j) \Delta x_{ij} = \sum_{i \in I} u_i \left(\sum_{j \in I^+(i)} \Delta x_{ij} - \sum_{j \in I^-(i)} \Delta x_{ji} \right) = 0,$$

то получаем следующую формулу приращения стоимости потока

$$\sum_{(i,\, j) \in U} c_{ij} \Delta x_{ij} = - \sum_{(i,\, j) \in U_{\text{н}}} \Delta x_{ij} \Delta_{ij}. \tag{10}$$

6. Критерий оптимальности. Достаточное условие субоптимальности. Пусть для опорного потока $\{x, S_{\text{оп}}\}$ выполняются соотношения

$$\Delta_{ij} \leqslant 0 \text{ при } x_{ij} = 0; \quad \Delta_{ij} \geqslant 0 \text{ при } x_{ij} = d_{ij};$$
$$\Delta_{ij} = 0 \text{ при } 0 < x_{ij} < d_{ij}, \quad (i, j) \in U_{\text{н}}. \tag{11}$$

Поскольку $\Delta x_{ij} \geqslant 0$ при $x_{ij} = 0$; $\Delta x_{ij} \leqslant 0$ при $x_{ij} = d_{ij}$, то из (10) следует $\sum_{(i,\, j) \in U} c_{ij} \Delta x_{ij} \geqslant 0$, т. е. x — оптимальный поток.

Пусть $\{x^0, S_{\text{оп}}\}$ — оптимальный невырожденный опорный поток. Тогда существует решение y^0, w^0 двойственной задачи (7). Положим $u_i = -y_i^0$, $i \in I$. Тогда из условий дополняющей нежесткости (5) следуют равенства (8). Если дополнительно учесть ограничения задачи (7), убедимся в выполнении соотношений (11). Таким образом, справедлива

Теорема 3. Соотношения (11) достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности опорного потока $\{x, S_{\text{оп}}\}$.

Из формулы приращения (10) видно, что при $\Delta_{ij} < 0$ уменьшение потока по дуге (i, j) ведет к уменьшению стоимости потока. Максимально возможное уменьшение дугового потока равно x_{ij}. При $\Delta_{ij} > 0$ к уменьшению стоимости потока ведет увеличение потока по дуге (i, j), при этом максимально допустимое увеличение потока равно $d_{ij}-x_{ij}$. Следовательно,

$$-\sum_{(i,\ j)\in U} c_{ij}\Delta x_{ij} \geqslant \sum_{\substack{\Delta_{ij}<0,\\ (i,\ j)\in U_{\text{н}}}} \Delta_{ij}x_{ij} - \sum_{\substack{\Delta_{ij}>0,\\ (i,\ j)\in U_{\text{н}}}} \Delta_{ij}(d_{ij}-x_{ij}).$$

Если в качестве $\tilde{x}$ взять оптимальный поток x^0, то получим, что стоимость потока $\{x, S_{\text{оп}}\}$ превышает стоимость оптимального потока не более чем на

$$-\sum_{\Delta_{ij}<0} \Delta_{ij}x_{ij} + \sum_{\Delta_{ij}>0} \Delta_{ij}(d_{ij}-x_{ij}). \tag{12}$$

Поток x^{ε} называется ε-*оптимальным*, если

$$\sum_{(i,\ j)\in U} c_{ij}x_{ij} - \sum_{(i,\ j)\in U} c_{ij}x_{ij}^0 \leqslant \varepsilon.$$

Достаточное условие субоптимальности. Если на опорном потоке $\{x, S_{\text{оп}}\}$ число (12) равно ε, то x — ε-оптимальный поток.

Замечание. Если x — ε-оптимальный поток, то для него найдется такая (оптимальная) опора $S_{\text{оп}}$, что на потоке $\{x, S_{\text{оп}}\}$ число (12) равно ε.

7. Улучшение потока. Пусть $\{x, S_{\text{оп}}\}$ — опорный поток, неопорные оценки Δ_{ij}, $(i, j)\in U_{\text{н}}$, которого не удовлетворяют соотношениям (11). Из формулы приращения (10) следует, что в этом случае поток x можно улучшить, т. е. найти новый поток $x_{\text{нов}}$ меньшей стоимости. Число Δ_{ij} в формуле (10) можно интерпретировать как скорость изменения стоимости потока при изменении на единицу потока по неопорной дуге (i, j). Пусть $\Delta_{i_0j_0}$ — наибольшая по абсолютной величине неопорная оценка потока $\{x, S_{\text{оп}}\}$, не удовлетворяющая соотношениям (11). Ясно, что $\Delta_{i_0j_0}\neq 0$. С помощью дуги (i_0, j_0) и опорных дуг построим цикл (см. лемму 5). Пусть $\Delta_{i_0j_0}>0$. Наложение (i_0, j_0)-циркуляции на поток по циклу ведет к уменьшению стоимости потока и не нарушает условий баланса в узлах. Найдем максимально возможное значение Θ^0 циркуляции, при котором наложение на поток (i_0, j_0)-циркуляции не нарушает ограничений $0\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij}$. Нетрудно видеть, что Θ^0 равно наименьшему из чисел $\Theta_{ij}=d_{ij}-x_{ij}$ на прямых дугах, $\Theta_{ij}=x_{ij}$ — на обратных дугах (i_0, j_0)-цикла. При $\Delta_{i_0j_0}<0$ рассматриваем (j_0, i_0)-циркуляцию, т. е. цикл обходим в направлении $j_0 \to i_0$. Если поток $\{x, S_{\text{оп}}\}$ невырожденный, то $\Theta^0 > 0$. Новый поток получаем из старого наложением указанной циркуляции со значением Θ^0.

Пусть $\Theta^0 = \Theta_{i_* j_*}$. Если $(i_*, j_*) = (i_0, j_0)$, то опора сети сохраняется. При $(i_*, j_*) \neq (i_0, j_0)$ из опоры $S_{\text{оп}}$ удаляем дугу (i_*, j_*) и добавляем дугу (i_0, j_0), что приводит (см. леммы 5, 2) к новой опоре $(S_{\text{оп}})_{\text{нов}}$.

Из формулы (10) следует, что при переходе $\{x, S_{\text{оп}}\} \to \{x, S_{\text{оп}}\}_{\text{нов}}$ стоимость потока уменьшается на величину $\Theta^0 |\Delta_{i_0 j_0}|$.

8. Построение начального опорного потока. Исследуем три возможности, которые могут встретиться при решении практических задач: а) перед решением задачи (3) о потоке минимальной стоимости известны лишь параметры a_i, c_{ij}, d_{ij}, но нет сведений о потоке в сети; б) наряду с параметрами сети известен поток, составленный по рекомендациям специалистов; в) кроме параметров имеются числа x_{ij}, которые, по мнению специалистов, являются оптимальными дуговыми потоками, но в действительности в совокупности составляют лишь квазипоток.

Случай а) типичен при классической постановке задачи. Не существует метода построения опорного потока для произвольной сети. Опишем аналоги метода северо-западного угла и метода минимального элемента, в которых не исключается появление искусственных дуг.

Метод северо-западного угла. Выбираем «северо-западный» узел сети. Перебирая инцидентные дуги в определенном порядке, распределяем интенсивность узла по дугам. Если $a_i > 0$, то используются выходящие из i дуги, при $a_i < 0$ — входящие. Насыщенные дуги не рассматриваем и их потоки используем для изменения интенсивностей тех узлов, с которыми они соединяют первый узел. У ненасыщенной дуги уменьшаем пропускную способность на величину потока. Продолжая этот процесс, через конечное число шагов или полностью распределим интенсивности или из-за ограниченности пропускной способности последней дуги будем вынуждены для соблюдения баланса в узле i ввести искусственные дуги (i, s), если $a_i > 0$, или (s, i), если $a_i < 0$, по которым распределяем остаток интенсивности a_i. Полагаем $c_{is} = c_{si} = M$, $d_{is} = d_{si} = \infty$. При удалении насыщенных дуг следим за тем, чтобы связность сети не нарушалась. После распределения интенсивностей всех узлов в оставшейся сети ликвидируем циклы, не нарушая связности сети. При этом в первую очередь удаляем критические дуги. Полученное дерево сети составляет опору сети, а начальный поток получается после возвращения в сеть удаленных насыщенных дуг и перехода к исходным пропускным способностям. В расширенной сети (с искусственными дугами) прямым опорным методом находим поток минимальной стоимости для достаточно большого числа M. Потенциал искусственного узла полагаем равным нулю ($u_s=0$). Искусственные дуги навсегда удаляем из сети, как только потоки по ним становятся равными нулю. Анализ решения расширенной задачи стандартен для M-метода.

Замечание. Построение опоры можно вести параллельно с распределением интенсивностей, делая опорной последнюю дугу, по которой распределяется интенсивность узла.

Метод минимального элемента. В этом методе при распределении интенсивностей узлов в первую очередь рассматривается дуга с минимальной стоимостью. Если она насыщается, то ее удаляют из сети, а с новой сетью, в которой изменены интенсивности, поступают аналогично. Если дуга с минимальной стоимостью не насыщается при распределении интенсивности узла, то ее пропускная стоимость уменьшается на величину потока. Остальные операции такие же, как в методе северо-западного угла.

б) Пусть начальный поток известен. Для применения опорного метода необходимо построить начальную опору, в качестве которой можно выбрать (хотя бы случайным образом) любое дерево сети. Другое правило: строится дерево сети с использованием прежде всего некритических дуг. Общий метод построения начальной опоры связан с введением фиктивного узла ф, соединенного фиктивными дугами $(i, ф)$ со всеми узлами $i \in I$ ($c_{iф}=0$, $d_{iф}=0$, $a_ф=0$). В расширенной сети начальный поток известен. В качестве начальной опоры достаточно взять частичную сеть $\{I \cup ф, \{(i, ф), i \in I\}\}$. С помощью прямого опорного метода исключаются из опоры фиктивные дуги (первая фаза метода). Поскольку при этом поток не меняется, то вычисления существенно упрощаются и построение опоры из дуг множества U осуществляется на исходной сети $S=\{I, U\}$ без привлечения фиктивных узлов и дуг. Достаточно сначала все узлы пометить знаком «—» и заменять его на «+», как только соответствующая фиктивная дуга удалена из опоры.

в) Для начального квазипотока $\{x_{ij},\ (i,\ j)\in U\}$ проверяем выполнение условия баланса в узлах $i\in I$. Если $\alpha_i>0$, $\alpha_i=a_i-\sum_{j\in I^+(i)} x_{ij}+\sum_{j\in I^-(i)} x_{ji}$, то вводим искусственную дугу (i, s) $(c_{is}=M,\ d_{is}=\infty,\ x_{is}=\alpha_i)$. При $\alpha_i<0$ вводится дуга (s, i) $(c_{si}=M,\ d_{si}=\infty,\ x_{si}=-\alpha_i)$. Для расширенной сети поток построен. Опора строится, как в случае б). Далее, прямым опорным методом находим поток минимальной стоимости, предполагая, что M — достаточно большое число. Анализ результата стандартен для M-метода [МО].

9. Примеры. Пример 1. Найдем оптимальный поток на сети (рис. I.2). Над каждой дугой (i, j) помещена информация: d_{ij}, c_{ij}. Узел 1 — источник, узел 6 — сток. Их интенсивности равны 10. Остальные узлы — промежуточные.

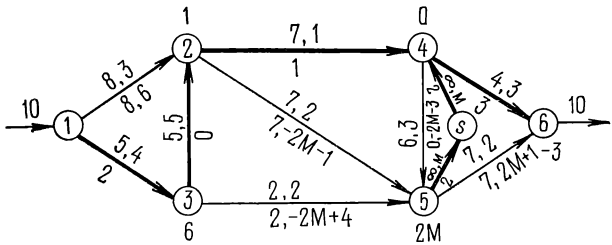


Рис. I.2

На рис. I.2 методом минимального элемента построен начальный поток (значение дугового потока помещено под d_{ij}). При этом пришлось ввести искусственный узел и искусственные дуги $(s, 4)$, $(5, s)$. На этом же рисунке построена опора, опорные дуги изображены жирной линией. Построения начинались в узле 1, и выбирались для опоры в первую очередь некритические дуги. Положив $u_4=0$, найдем по опорным дугам потенциалы узлов; значения u_i помещены около узлов. Оценки неопорных дуг помещены под числами c_{ij}. На дуге (2, 5) критерий оптимальности нарушается в наибольшей степени. Максимальное допустимое значение (5, 2)-циркуляции равно 2. Дуга (2, 5) входит в опору, искусственные узел и дуги ликвидируются.

После одной итерации получаем оптимальный поток: $x_{12}=8$, $x_{13}=0$, $x_{32}=0$, $x_{24}=3$, $x_{25}=5$, $x_{35}=2$, $x_{45}=0$, $x_{46}=3$, $x_{56}=7$.

Пример 2. Найдем оптимальный поток на сети из рис. I.3, на котором кроме параметров d_{ij}, c_{ij}, a_i задан начальный поток. Начав с узла 1, по некритическим дугам построим опору. Положив $u_3=0$, вычислим потенциалы узлов и оценки неопорных дуг. Дуга (2, 5) не удовлетворяет критерию оптимальности. Одна итерация прямого опорного метода приводит к оптимальному потоку (см. пример 1).

На рис. I.4 опора построена методом фиктивного узла. При этом на промежуточной итерации дуга (3, 5) по величине оценки должна была заменить одну из опорных дуг (3, 2), (2, 5). Однако переходом к дуге с меньшей оценкой была удалена очередная фиктивная опорная дуга. На первой фазе потенциал фиктивного узла постоянно равен нулю. Дуга (3, 5) не удовлетворяет критерию оптимальности. Одна итерация прямого опорного метода приводит к оптимальному потоку (см. пример 1).

Пример 3. Найдем оптимальный поток на сети (рис. I.5 без узла s) с начальным квазипотоком. Введя искусственный узел s, построим поток на расширенной сети (см. рис. I.5). Опора построена по некритическим дугам.

За две итерации прямого опорного метода (рис. I.5, I.6) искусственные дуговые потоки становятся нулевыми и поэтому искусственные узел и дуги ликвидируются. Одна итерация прямого опорного метода приводит к оптимальному потоку: $x_{12}=8$, $x_{13}=2$, $x_{24}=3$, $x_{25}=6$, $x_{32}=1$, $x_{35}=1$, $x_{45}=0$, $x_{46}=3$, $x_{56}=7$.

10. Сети с неориентированными дугами. В ряде практических задач некоторые пункты соединены *двухсторонними коммуникациями*, т. е. допускаются прямые и обратные перевозки продуктов. Удобной математической моделью транспортных задач для таких ситуаций является задача о потоке минимальной стоимости на сети с неориентированными дугами. Под *неориентированной дугой* *) $[i, j]$, соединяющей узлы i, j, будем понимать пару дуг (i, j), (j, i). На рисунках дуга $[i, j]$ изображается одной линией (без стрелки), соединяющей узлы i, j. Каждая неориентированная дуга характеризуется парой пропускных способностей d_{ij}, d_{ji} $(d_{ij}d_{ji}>0)$, парой чисел $c_{ij}\geqslant 0$, $c_{ji}\geqslant 0$, равных стоимости единичного потока в направлениях $i\to j$, $j\to i$. По неориентированной дуге допускаются два потока x_{ij}, x_{ji} $(x_{ij}x_{ji}=0)$. При введении опоры удобно опорной считать ту дугу из пары дуг, направление которой совпадает с направлением дугового потока. При этом упрощается проверка потока на оптимальность. Незначительные изменения возникают в операциях по улучшению потока. Однако в совокупности эти изменения проще операций, возникающих при замене неориентированной дуги парой ориентированных дуг. Другими словами, учет в прямом опорном методе специальной структуры задачи повышает эффективность метода. Реализации прямого опорного метода для сетей с неориентированными дугами оставляется читателю в качестве упражнения.

---

*) Название «неориентированная дуга» неудачное, так как это не дуга без ориентации (ребро), а дуга с двумя ориентациями.

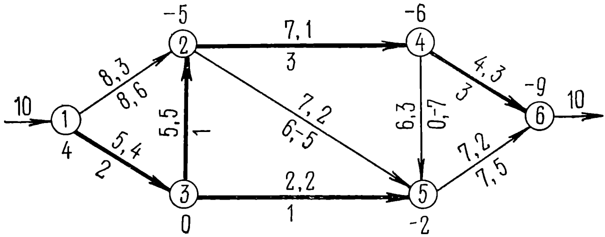


Рис. I.3

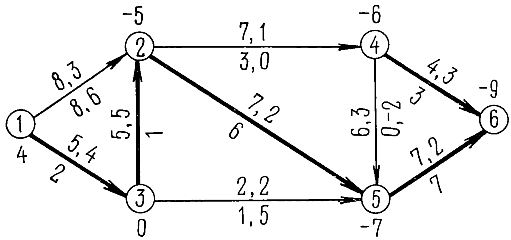


Рис. I4

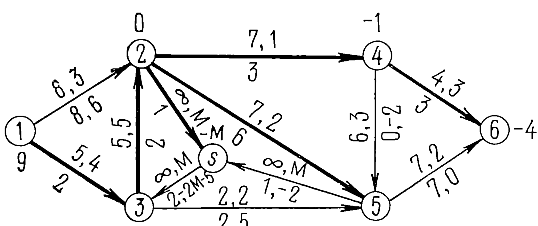


Рис. I.5

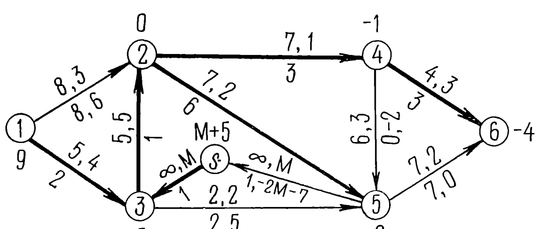


Рис. I.6

11. Сети с ограничениями на пропускные способности узлов. В практических задачах узлы часто представляют крупные населенные пункты с внутренней системой коммуникаций, которая накладывает ограничения на объемы перевозок, вызывает дополнительные расходы. Для учета подобных обстоятельств в математическую модель транспортных задач вводятся *узлы с пропускной способностью.*

В дополнение к введенным характеристикам узлу i припишем числа d_i, c_i (d_i — *пропускная способность узла* i, c_i — *стоимость транзита единичного потока* через узел i). Узел i (рис. I.7, *а*) с пропускной способностью

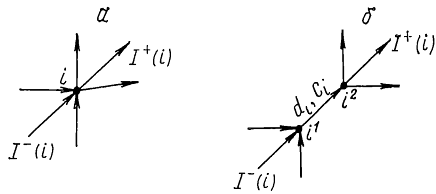


Рис. I.7

удобно представить состоящим из двух узлов i^1, i^2 без ограничения пропускных способностей (рис. I.7, *б*). Дополнительная дуга (i^1, i^2) имеет параметры $d_{i^1i^2}=d_i$, $c_{i^1i^2}=c_i$. Множество дуг, проходящих через узел i, разбивается на два подмножества $I^+(i)$, $I^-(i)$, которые приписываются разным узлам i^2, i^1. Переход к стандартной сети позволяет перенести прямой опорный метод на новый круг задач. Конечный результат необходимо сформулировать в терминах исходной сети, содержащей узлы с пропускными способностями. Оставим эту работу читателям в качестве упражнения. Подчеркнем, что реализация прямого опорного метода на сети со специальной структурой оказывается более эффективной, чем переход к стандартной сети с последующим применением общего метода.

Замечание. Как в § 1, отметим, что выше изложен лишь один опорный метод решения сетевой транспортной задачи, который максимально приближен к классическому методу потенциалов. В качестве упражнения читателям рекомендуется построить модификации изложенного метода на основе тех идей, которые использованы в [ч. 1, гл. III] для модификаций прямого опорного метода решения общей задачи линейного программирования.

12. Сети с нефиксированными интенсивностями узлов. Рассмотрим задачу о потоке минимальной стоимости для сети $S=\{I, U\}$, интенсивности a_i, $i\in I$, узлов которой могут изменяться в пределах

$$\underline{a}_i\leqslant a_i\leqslant \bar{a}_i,\ i\in I. \tag{13}$$

Потоком $x=\{x_{ij}, (i, j)\in U\}$ назовем совокупность чисел x_{ij}, на которых для некоторых интенсивностей a_i, $i\in I$, удовлетворяющих неравенствам (13), выполняются условия баланса в каждом узле $i\in I$ и не нарушены пропускные способности дуг.

Как и в случае открытых матричных транспортных задач, перейдем к более общей ситуации. Будем считать,

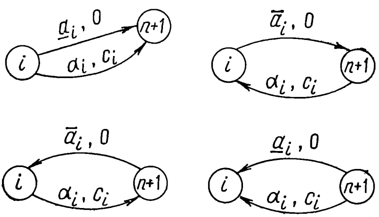


Рис. I.8

что в конкретных случаях превышение нижнего предела $\underline{a}_i$ или недостижение верхнего предела $\bar{a}_i$ сопряжены с дополнительными расходами.

Дополним исходную сеть S искусственным узлом $n+1$, который соединим со всеми узлами $i\in I$ с нефиксированными интенсивностями. Последние узлы считаем промежуточными, но вводим дополнительные дуги $(i, n+1)$, $(n+1, i)$. Параметры этих дуг в зависимости от конкретного случая берутся такими, как на рис. I.8. Здесь $\alpha_i=\bar{a}_i-\underline{a}_i$, c_i — дополнительные расходы на единицу отклонения от нижнего или верхнего пределов $\underline{a}_i$, $\bar{a}_i$.

В искусственном узле $n+1$ условие баланса не накладывается. Поэтому можно положить $u_{n+1}=0$.

Рекомендуется, воспользовавшись указанным переходом, построить алгоритм решения задачи (3), (13) с нефиксированными интенсивностями и описать его в терминах исходной сети, не используя искусственный узел.

§ 5. Мультипоток минимальной стоимости

В реальных условиях по сетям однотипных дорог транспортируются продукты различных видов. Математической моделью задачи минимизации транспортных издержек в указанной ситуации является задача о мультипотоках (многопродуктовых потоках, неоднородных потоках) минимальной стоимости. В данном параграфе излагается результат О. И. Костюковой по опорному методу решения двухпродуктовой задачи. Перенесение результатов на общий случай оставляем читателям в качестве упражнения.

1. Постановка задачи. Двойственная задача. Опорный двухпродуктовый поток. Каждому узлу $i \in I$ сети $S = \{I, U\}$ приписываем вместо одного числа вектор интенсивностей $a_i = \{a_i^1, a_i^2\}$. Каждую дугу $(i, j) \in U$ будем характеризовать пропускной способностью d_{ij} и вектором стоимости $c_{ij} = \{c_{ij}^1, c_{ij}^2\}$. В дальнейшем удобно множество дуг из U, имеющих векторную стоимость, представлять как объединение двух множеств U^1 и U^2. В множество U^1 включаем дуги $(i, j) \in U$ со стоимостью c_{ij}^1, в U^2 — со стоимостью c_{ij}^2. Говорят, что на сети задан двухпродуктовый поток *) $x = \{x_{ij}^1, x_{ij}^2, (i, j) \in U\}$, если числа x_{ij}^1 и x_{ij}^2 (дуговые потоки) удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij}^k - \sum_{j \in I_i^-(U)} x_{ji}^k = a_i^k, \tag{1}$$
$$x_{ij}^k \geqslant 0, \ x_{ij}^1 + x_{ij}^2 \leqslant d_{ij}, \ i \in I, \ (i, j) \in U, \ k = \overline{1, 2}.$$

Задача минимизации функции

$$\sum_{k=1}^{2} \sum_{(i, j) \in U} c_{ij}^k x_{ij}^k \to \min \tag{2}$$

на множестве потоков (1) называется задачей о двухпродуктовом потоке минимальной стоимости. Задача, двойственная к (1), (2), имеет вид

$$\sum_{k=1}^{2} \sum_{i \in I} a_i^k u_i^k - \sum_{(i, j) \in U} d_{ij} w_{ij} \to \max,$$
$$u_i^k - u_j^k - w_{ij} \leqslant c_{ij}^k, \ w_{ij} \geqslant 0, \ (i, j) \in U, \ k = 1, 2.$$

---

*) В дальнейшем для сокращения записи слово «двухпродуктовый» будем опускать, подразумевая под потоком двухпродуктовый поток.

Опорой сети будем называть совокупность дуг $\{U^1_{\text{оп}}, U^2_{\text{оп}}, U^*\}$, где $U^k_{\text{оп}} \subset U^k$, $k=\overline{1, 2}$; $U^* \subset U^1_{\text{оп}} \cap U^2_{\text{оп}} = \{(i, j) : (i, j)^1 \in U^1_{\text{оп}}, (i, j)^2 \in U^2_{\text{оп}}\}$, для которой система

$$\sum_{j \in I^+_i (U^k_{\text{оп}})} x^k_{ij} - \sum_{j \in I^-_i (U^k_{\text{оп}})} x^k_{ji} = 0, \quad i \in I(U^k_{\text{оп}}), \quad k=1, 2, \tag{3}$$

$$x^1_{ij} + x^2_{ij} = 0, \quad (i, j) \in U^*,$$

имеет только тривиальное решение, но имеет нетривиальные решения для каждой из следующих совокупностей: 1) $\{U^1_{\text{оп}}, U^2_{\text{оп}}, U^* \setminus (i, j)\}$, где (i, j) — любая дуга из U^*; 2) $\{U^1_{\text{оп}} \cup (i, j)^1, U^2_{\text{оп}}, U^*\}$, где $(i, j)^1$ — любая дуга, не принадлежащая $U^1_{\text{оп}}$; 3) $\{U^1_{\text{оп}}, U^2_{\text{оп}} \cup (i, j)^2, U^*\}$, где $(i, j)^2$ — любая дуга, не принадлежащая $U^2_{\text{оп}}$.

Пара из потока и опоры $\{x, U^1_{\text{оп}}, U^2_{\text{оп}}, U^*\}$ — опорный поток. Дуги $(i, j)^k \in U^k_{\text{оп}}$, $k=1, 2$, назовем опорными, остальные — неопорными. Опорный поток считается невырожденным, если $x^k_{ij} > 0$ для всех $(i, j)^k \in U^k_{\text{оп}}$, $k=1, 2$; $x^1_{ij} + x^2_{ij} < d_{ij}$ для $(i, j)^1 \in (U^1_{\text{оп}} \cup U^2_{\text{оп}}) \setminus U^*$ или для $(i, j)^2 \in (U^1_{\text{оп}} \cup U^2_{\text{оп}}) \setminus U^*$.

Пусть множество $U^1_{\text{оп}}$ содержит l_1 независимых циклов $L_1, \ldots, L_{l_1}$ и множество $U^2_{\text{оп}}$ — l_2 независимых циклов $L_{l_1+1}, \ldots, L_{l_1+l_2}$. (Циклы называются *независимыми*, если среди них нет цикла, все дуги которого входят в состав остальных циклов.) Составим матрицу

$$D = \left\{ \begin{array}{l} \delta_{\tau(i, j), t}, \ t=\overline{1, l_1+l_2}; \\ (i, j) \in U^* \end{array} \right\},$$

где

$$\delta_{\tau(i, j), t} = \begin{cases} 1, & \text{если } (i, j) \cap L_t \neq \varnothing; \ (i, j) \text{ — прямая дуга;} \\ -1, & \text{если } (i, j) \cap L_t \neq \varnothing; \ (i, j) \text{ — обратная дуга;} \\ 0, & \text{если } (i, j) \cap L_t = \varnothing, \end{cases}$$

$\tau(i, j)$ — порядковый номер дуги (i, j) в U^*.

Если $l_1 + l_2 \neq |U^*|$, то дополним матрицу D нулями до квадратной.

Число $R = \det D$ называется *детерминантом опоры* $\{U^1_{\text{оп}}, U^2_{\text{оп}}, U^*\}$.

Критерий опорности. Для того чтобы совокупность $\{U_{\text{оп}}^1, U_{\text{оп}}^2, U^*\}$ была опорой сети S, необходимо и достаточно, чтобы: 1) $I(U_{\text{оп}}^k)=I$, $k=1, 2$; 2) $U_{\text{оп}}^1$, $U_{\text{оп}}^2$ были связными множествами; 3) $R\neq 0$.

Отметим одно свойство опорных множеств. В множестве $U_{\text{оп}}^k$ существует l_k циклических дуг (объединение этих дуг будем обозначать через $U_{\text{цикл}}^k$), не принадлежащих U^*, таких, что, удалив их из $U_{\text{оп}}^k$, получим максимальное дерево $U_{\text{д}}^k$, $k=1, 2$. Следовательно, каждой дуге $(i, j)^k\in U_{\text{цикл}}^k$ можно поставить в соответствие один независимый цикл $L_{(i, j)^k}$ опоры. В дальнейшем предполагается, что в построении матрицы D участвуют именно эти циклы, т. е.

$$D=\left\{\begin{matrix} \delta_{\tau(i, j), t(\xi, \eta)}, & (\xi, \eta)\in U_{\text{цикл}}^1 \cup U_{\text{цикл}}^2; \\ (i, j)\in U^* & \end{matrix}\right\}.$$

Будем предполагать, что для дуг $(i, j)\in U^*$ выполняется равенство $x_{ij}^1+x_{ij}^2=d_{ij}$, так как в противном случае можно перейти к опоре $\{U_{\text{оп}}^1, U_{\text{оп}}^2\setminus(i, j)^2, U^*\setminus(i, j)\}$, в которой число элементов меньше, чем в исходной, причем невырожденность опорного плана сохраняется.

2. Формула приращения. Критерии оптимальности и субоптимальности. Пусть $\{x, U_{\text{оп}}^k, k=1, 2, U^*\}$ — опорный поток. По опоре исходного потока для каждого узла $i\in I$ построим вектор потенциалов $u_i=\{u_i^1, u_i^2\}$, компоненты которого удовлетворяют системе

$$\begin{gathered} u_i^k-u_j^k-c_{ij}^k=0, \ (i, j)\in U_{\text{оп}}^k\setminus U^*, \ k=1, 2; \\ u_i^1-u_j^1-c_{ij}^1=u_i^2-u_j^2-c_{ij}^2, \ (i, j)\in U^*. \end{gathered} \tag{4}$$

Чтобы решить систему (4), найдем вектор *) $\alpha=\{\alpha_{ij}, (i, j)\in U^*\}$: $\alpha=(D^{-1})'p$, где $p=\{p_1, \dots, p_{l_1+l_2}\}$,

$$p_t=\sum_{\substack{(i, j)\in L_t, \\ (i, j) \text{ — обратная дуга}}} c_{ij}^k-\sum_{\substack{(i, j)\in L_t, \\ (i, j) \text{ — прямая дуга}}} c_{ij}^k,$$

---

*) В частных случаях решение системы $D\alpha=p$ получается тривиально. По-видимому, есть правило, позволяющее легко получить решение и в общем случае.

$$k=\begin{cases}1, \text{ если } 1\leqslant t\leqslant l_1;\\ 2, \text{ если } l_1+1\leqslant t\leqslant l_1+l_2.\end{cases}$$

Вычислим $\bar{c}^k_{ij}=c^k_{ij}$, $(i, j)\overline{\in} U^*$; $\bar{c}^k_{ij}=c^k_{ij}+\alpha_{ij}$, $(i, j)\in U^*$, $k=1, 2$. Теперь векторы потенциалов u_i, $i\in I$, легко найдутся с помощью деревьев $U^k_{\text{д}}$ и чисел $\bar{c}^k_{ij}$, $k=1, 2$, как в классическом методе потенциалов.

Для каждой дуги вычислим вектор оценок $\Delta_{ij}=\{\Delta^1_{ij}, \Delta^2_{ij}\}$:

$$\Delta^k_{ij}=u^k_i-u^k_j-c^k_{ij},\ (i, j)\in U,\ k=1, 2.$$

По аналогии с п. 5 § 4 легко получить формулу приращения стоимости потока

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{(i, j)\in U} c^k_{ij}\Delta x^k_{ij}= -\sum_{(i, j)\in U^*}\alpha_{ij}(\Delta x^1_{ij}+\Delta x^2_{ij})-\sum_{k=1}^{2}\ \sum_{(i, j)^k\in U^k\setminus U^k_{\text{оп}}}\Delta^k_{ij}\,\Delta x^k_{ij}. \tag{5}$$

Используя соотношения двойственности, можно доказать следующее неравенство:

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{(i, j)\in U} c^k_{ij}x^k_{ij}-\sum_{k=1}^{2}\sum_{(i, j)\in U} c^k_{ij}x^{0k}_{ij}\leqslant\beta, \tag{6}$$

где

$$\beta=-\sum_{\substack{(i, j)\\ \max\{\Delta^1_{ij}, \Delta^2_{ij}, 0\}=0}}\ \sum_{k=1}^{2}\Delta^k_{ij}x^k_{ij}-\sum_{\substack{(i, j)\\ \max\{\Delta^1_{ij}, \Delta^2_{ij}, 0\}=\Delta^k_{ij}>0}}(\Delta^l_{ij}x^l_{ij}+\Delta^k_{ij}(x^k_{ij}-d_{ij})),$$

$$k=1, 2,\ l=1, 2,$$

x^0 — оптимальный поток.

Из неравенства (6) и формулы приращения (5) следуют

Критерии оптимальности и субоптимальности. Условия а) на ненасыщенных дугах $(x^1_{ij}+x^2_{ij}<d_{ij})$:

$$\Delta^k_{ij}\leqslant 0 \text{ при } x^k_{ij}=0;\ \Delta^k_{ij}=0 \text{ при } x^k_{ij}>0, \tag{7}$$

б) на насыщенных дугах $(x^1_{ij}+x^2_{ij}=d_{ij})$:

$$\begin{aligned}&\Delta^1_{ij}=\Delta^2_{ij}\geqslant 0 \text{ при } x^1_{ij}>0,\ x^2_{ij}>0;\\ &\Delta^1_{ij}\geqslant\Delta^2_{ij},\ \Delta^1_{ij}\geqslant 0 \text{ при } x^1_{ij}=d_{ij},\ x^2_{ij}=0\end{aligned}\tag{8}$$

достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности опорного потока.

Если

$$\beta\leqslant\varepsilon,\tag{9}$$

поток x является ε-оптимальным. Для каждого ε-оптимального потока существует опора $\{U^1_{\text{оп}},\ U^2_{\text{оп}},\ U^*\}$ такая, что для опорного потока $\{x,\ U^1_{\text{оп}},\ U^2_{\text{оп}},\ U^*\}$ выполняется неравенство (9).

3. Улучшение потока. Пусть для опорного потока $\{x,\ U^1_{\text{оп}},\ U^2_{\text{оп}},\ U^*\}$ приведенные критерии не выполняются. Приступим к улучшению потока. Из системы (4) видно, что критерий оптимальности выполняется для дуг из $(U^1_{\text{оп}}\cup U^2_{\text{оп}})\setminus U^*$. Пусть $(i,\ j)$ — ненасыщенная дуга. Если для $(i,\ j)^k$ не выполняются условия (7), то помечаем число Δ^k_{ij}. Если условия (8) не выполняются для насыщенной дуги $(i,\ j)$, то помечаем число $\Delta^1_{ij}-\Delta^2_{ij}$ при $\max\{\Delta^1_{ij},\ \Delta^2_{ij}\}\geqslant 0$ и число Δ^k_{ij} при $\max\{\Delta^1_{ij},\ \Delta^2_{ij}\}<0$, $x^k_{ij}\neq 0$, $k=1,\ 2$. Пусть среди помеченных чисел максимальное по модулю находится на дуге $(i_0,\ j_0)$. Это может быть число вида $\Delta^k_{i_0j_0}$ или число вида $\Delta^1_{i_0j_0}-\Delta^2_{i_0j_0}$.

Рассмотрим случай, когда максимальное по модулю число имеет вид $\Delta^1_{i_0j_0}$.

Пусть $(i_0,\ j_0)\,\overline{\in}\, U^*$. Найдем числа $\{y^k_{ij},\ (i,\ j)^k\in U^k_{\text{оп}},\ k=1,\ 2,\ y^1_{i_0j_0}\}$, удовлетворяющие системе (3), записанной относительно множеств $\{U^1_{\text{оп}}\cup(i_0,\ j_0)^1,\ U^2_{\text{оп}},\ U^*\}$, и условию $y^1_{i_0j_0}=\operatorname{sign}\Delta^1_{i_0j_0}$. Решаем полученную систему следующим образом. Рассмотрим цикл L_0, составленный из неопорной дуги $(i_0,\ j_0)^1$ и дуг дерева $U^1_{\text{д}}$. Положим

$$\alpha_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если } (i,\ j)^1\in L_0 \text{ и направления дуг } (i,\ j)^1,\ (i_0,\ j_0)^1 \text{ совпадают;}\\ -1, & \text{если } (i,\ j)^1\in L_0 \text{ и направления дуг } (i,\ j)^1,\ (i_0,\ j_0)^1 \text{ не совпадают;}\\ 0, & \text{если } (i,\ j)^1\,\overline{\in}\, L_0,\end{cases}$$

$(i,\ j)\in U^*$.

Из системы

$$Dy=\alpha, \tag{10}$$

где $\alpha=\{-\alpha_{ij}\operatorname{sign}\Delta^1_{i_0j_0},\ (i,j)\in U^*\}$, однозначно найдется вектор $y=\{y^k_{ij},\ (i,j)^k\in U^1_{\text{цикл}}\cup U^2_{\text{цикл}}\}$. Остальные числа y^k_{ij} легко найдутся из условий баланса. Новый поток строим в виде

$$\begin{aligned}&\bar{x}^k_{ij}=x^k_{ij}+\Theta^0 y^k_{ij},\ (i,j)^k\in U^k_{\text{оп}},\ k=1,2;\\ &\bar{x}^1_{i_0j_0}=x^1_{i_0j_0}+\Theta^0 y^1_{i_0j_0},\\ &\bar{x}^k_{ij}=x^k_{ij},\ (i,j)^k\bar{\in} U^k_{\text{оп}},\ k=1,2,\\ &(i,j)^k\neq(i_0,j_0)^1,\end{aligned}$$

где Θ^0 — максимально допустимый шаг, найденный по стандартным правилам (в невырожденном случае $\Theta^0>0$). Из формулы (5) видно, что при переходе $x\to\bar{x}$ стоимость потока уменьшилась на величину $\Theta^0\,|\Delta^1_{i_0j_0}|$.

Пусть Θ^0 достигается на опорной дуге $(i_*,j_*)\neq(i_0,j_0)$. Опорные множества меняются по следующему правилу. Дугу $(i_0,j_0)^1$ вводим в множество $U_{\text{оп}}$. На дуге (i_*,j_*) возможны ситуации: 1) дуговой поток $\bar{x}^k_{i_*j_*}$ стал нулевым; 2) дуга (i_*,j_*) стала насыщенной $((i_*,j_*)\bar{\in} U^*)$.

Далее поступаем так:

$$\left.\begin{array}{l}\text{а) если } \bar{x}^k_{i_*j_*}=0,\ (i_*,j_*)\bar{\in} U^*, \text{ из } U^k_{\text{оп}}\\ \quad\text{выводим дугу } (i_*,j_*)^k;\\ \text{б) если } \bar{x}^k_{i_*j_*}=0,\ (i_*,j_*)\in U^*, \text{ из } U^1_{\text{оп}},\ U^2_{\text{оп}},\ U^*\\ \quad\text{выводим соответственно дуги } (i_*,j_*)^1,\\ \quad(i_*,j_*)^2,\ (i_*,j_*);\\ \text{в) если } \bar{x}^1_{i_*j_*}+\bar{x}^2_{i_*j_*}=d_{i_*j_*},\ (i_*,j_*)^k\in U^k_{\text{оп}},\\ \quad k=1,2, \text{ дугу } (i_*,j_*) \text{ вводим в множество } U^*;\\ \text{г) если } \bar{x}^1_{i_*j_*}+\bar{x}^2_{i_*j_*}=d_{i_*j_*},\ (i_*,j_*)^1\bar{\in} U^1_{\text{оп}},\\ \quad(i_*,j_*)^2\in U^2_{\text{оп}}, \text{ дугу } (i_*,j_*)^2 \text{ выводим}\\ \quad\text{из опоры.}\end{array}\right\} \tag{11}$$

Пусть теперь $(i_0,j_0)\in U^*$. Найдем числа $\{y^k_{ij},\ (i,j)\in U^k_{\text{оп}},\ k=\overline{1,2}\}$, удовлетворяющие системе (3), записанной относительно множеств $\{U^1_{\text{оп}},\ U^2_{\text{оп}},\ U^*\setminus(i_0,j_0)\}$, и условию $y^1_{i_0j_0}+y^2_{i_0j_0}=-1$. Компоненты вектора α определим следующим образом: $\alpha_{ij}=0$, $(i,j)\in U^*\setminus(i_0,j_0)$, $\alpha_{i_0j_0}=-1$. Из системы (10) найдем вектор $y=\{y_{ij}^k,\ (i,\ j)^k\in U_{\text{цикл}}^1\cup U_{\text{цикл}}^2\}$. Остальные y_{ij}^k легко находятся из условия баланса. Новый опорный поток строим в виде

$$\bar{x}_{ij}^k=x_{ij}^k+\Theta^0 y_{ij}^k,\quad (i,\ j)^k\in U_{\text{оп}}^k,$$
$$\bar{x}_{ij}^k=x_{ij}^k,\quad (i,\ j)^k\overline{\in} U_{\text{оп}}^k,\quad k=1,2,$$

где Θ^0 — максимально допустимый шаг. Из формулы (5) видно, что при переходе к новому опорному потоку стоимость уменьшается на величину $\Theta^0\,|\Delta_{i_0j_0}^1|$. Пусть шаг Θ^0 достигается на дуге $(i_*,\ j_*)\neq(i_0,\ j_0)$. Меняем опорные множества: дугу $(i_0,\ j_0)$ выводим из множества U^*; с дугой $(i_*,\ j_*)$ поступаем согласно правилу (11).

Рассмотрим теперь случай, когда максимальное по модулю число имеет вид $\Delta_{i_0j_0}^1-\Delta_{i_0j_0}^2$. Найдем числа $\{y_{ij}^k,\ (i,\ j)\in U_{\text{оп}}^k,\ y_{i_0j_0}^k,\ k=1,\ 2\}$, удовлетворяющие системе (3), записанной для множеств $\{U_{\text{оп}}^k\cup(i_0,\ j_0)^k,\ k=1,\ 2;\ U^*\cup(i_0,\ j_0)\}$, и условию $y_{i_0j_0}^1=\operatorname{sign}(\Delta_{i_0j_0}^1-\Delta_{i_0j_0}^2)$. Числа y_{ij}^k можно представить в виде суммы чисел $y_{ij(1)}^k+y_{ij(2)}^k$, где $\{y_{ij(1)}^k,\ (i,\ j)^k\in U_{\text{оп}}^k,\ k=1,\ 2;\ y_{i_0j_0(1)}^1\}$ — решение системы (3), записанной для множеств $\{U_{\text{оп}}^1\cup(i_0,\ j_0)^1,\ U_{\text{оп}}^2,\ U^*\}$, при условии $y_{i_0j_0(1)}^1=\operatorname{sign}(\Delta_{i_0j_0}^1-\Delta_{i_0j_0}^2)$; $\{y_{ij(2)}^k,\ (i,\ j)^k\in U_{\text{оп}}^k,\ k=1,\ 2;\ y_{i_0j_0(2)}^2\}$ — решение системы (3), записанной для множеств $\{U_{\text{оп}}^1,\ U_{\text{оп}}^2\cup(i_0,\ j_0)^2,\ U^*\}$, при условии $y_{i_0j_0(2)}^2=-\operatorname{sign}(\Delta_{i_0j_0}^1-\Delta_{i_0j_0}^2)$. Построение решений таких систем рассматривалось выше. Новый поток строим в виде

$$\bar{x}_{ij}=x_{ij}+\Theta^0 y_{ij}^k,\quad (i,\ j)^k\in U_{\text{оп}}^k\cup(i_0,\ j_0)^k;$$
$$\bar{x}_{ij}^k=x_{ij}^k,\quad (i,\ j)^k\overline{\in} U_{\text{оп}}^k\cup(i_0,\ j_0)^k,\quad k=1,2,$$

где Θ^0 — максимальный шаг. Из формулы (5) видно, что стоимость потока $\bar{x}$ меньше стоимости потока x на величину $\Theta^0\,|\Delta_{i_0j_0}^1-\Delta_{i_0j_0}^2|$. Пусть шаг достигается на дуге $(i_*,\ j_*)\neq(i_0,\ j_0)$. Новую опору строим следующим образом. В множества $U_{\text{оп}}$, $U_{\text{оп}}$, U^* вводим дуги $(i_0,\ j_0)^1$, $(i_0,\ j_0)^2$, $(i_0,\ j_0)$ соответственно. С дугой $(i_*,\ j_*)$ поступаем согласно правилу (11).

Осталась нерассмотренной ситуация, когда $(i_0, j_0) = (i_*, j_*)$. Если выполняется условие $(i_0, j_0) = (i_*, j_*)$, опора меняется следующим образом:

а) если $x^1_{i_0j_0} + x^2_{i_0j_0} < d_{i_0j_0}$, $(i_0, j_0)^2 \in U^2_{\text{оп}}$, $(i_0, j_0)^1 \overline{\in} U^1_{\text{оп}}$, $\bar{x}^1_{i_0j_0} + \bar{x}^2_{i_0j_0} = d_{i_0j_0}$, вводим дугу $(i_0, j_0)^1$ в множество $U^1_{\text{оп}}$, дугу (i_0, j_0) — в U^*;

б) если $x^1_{i_0j_0} + x^2_{i_0j_0} < d_{i_0j_0}$, $(i_0, j_0)^2 \in U^2_{\text{оп}}$, $(i_0, j_0)^1 \overline{\in} U^1_{\text{оп}}$, $\bar{x}^2_{i_0j_0} = 0$, дугу $(i_0, j_0)^2$ выводим из множества $U^2_{\text{оп}}$, дугу $(i_0, j_0)^1$ вводим в $U^1_{\text{оп}}$;

в) если $(i_0, j_0) \in U^*$, $\bar{x}^k_{i_0j_0} = 0$, выводим дугу $(i_0, j_0)^k$ из множества $U^k_{\text{оп}}$, дугу (i_0, j_0) — из U^*;

г) в остальных случаях опора не меняется.

Во всех рассмотренных ситуациях новый опорный поток будет невырожденным, если дуга (i_*, j_*) определилась однозначно.

§ 6. Поток минимальной стоимости на мультисети

Здесь исследуется математическая модель задачи о минимальных затратах на перевозку одного продукта по сети с помощью нескольких типов транспорта.

1. Постановка задачи. Двойственная задача. Опорный поток. Пусть в отличие от § 4—5 некоторые пары узлов $i, j \in I$ соединены двумя и более ориентированными дугами $(i, j)^1, \ldots, (i, j)^m, (j, i)^1, \ldots, (j, i)^l$; $m = m(i, j)$, $l = l(i, j)$. Совокупность дуг, у которых один из узлов i, j является началом, а другой — концом, назовем *мультидугой* (i, j) между узлами i, j. Пусть U — множество мультидуг, определенных на узлах I. Пара $S = \{I, U\}$ называется *мультисетью*. Каждый узел i мультисети характеризуется интенсивностью a_i, каждая дуга $(i, j)^k$ — пропускной способностью d^k_{ij} и стоимостью c^k_{ij}. Потоком на мультисети называется совокупность чисел $x = \{x^k_{ij}, (i, j)^k \in U\}$, на которой выполняются соотношения

$$\sum_{j,\, k \in I^+(i)} x^k_{ij} - \sum_{j,\, k \in I^-(i)} x^k_{ji} = a_i,$$
$$0 \leqslant x^k_{ij} \leqslant d^k_{ij}, \quad i \in I, \quad (i, j)^k \in U. \tag{1}$$

Здесь $I^+(i) = \{j, k\colon (i, j)^k \in U\}$, $I^-(i) = \{j, k\colon (j, i)^k \in U\}$.

Задачей о потоке минимальной стоимости на мультисети назовем задачу минимизации

$$\sum_{(i,\ j)^k \in U} c_{ij}^k x_{ij}^k \to \min \tag{2}$$

на потоках (1).

Функция Лагранжа для задачи (1), (2) имеет вид

$$F(x, y, w) = \sum_{(i,\ j)^k \in U} c_{ij}^k x_{ij}^k + \\ + \sum_{i \in I} y_i \Big(\sum_{j,\ k \in I^+(i)} x_{ij}^k - \sum_{j,\ k \in I^-(i)} x_{ji}^k - a_i \Big) + \\ + \sum_{(i,\ j)^k \in U} w_{ij}^k (x_{ij}^k - d_{ij}^k).$$

Использовав теорему Куна — Таккера, получим задачу, двойственную к (1), (2):

$$\begin{gathered} -\sum_{i \in I} a_i y_i - \sum_{(i,\ j)^k \in U} w_{ij}^k d_{ij}^k \to \max, \\ y_i - y_j + w_{ij}^k + c_{ij}^k \geqslant 0,\ w_{ij}^k \geqslant 0,\ i, j \in I;\ (i, j)^k \in U. \end{gathered} \tag{3}$$

На оптимальном потоке и решении задачи (3) выполняются условия дополняющей нежесткости

$$x_{ij}^k (y_i - y_j + w_{ij}^k + c_{ij}^k) = 0;$$
$$w_{ij}^k (x_{ij}^k - d_{ij}^k) = 0,\ (i, j)^k \in U$$

и соотношение двойственности

$$\sum_{(i,\ j)^k \in U} c_{ij}^k x_{ij}^k = -\sum_{i \in I} a_i y_i - \sum_{(i,\ j)^k \in U} w_{ij}^k d_{ij}^k.$$

Сохраним определение опоры $S_{оп} = \{I, U_{оп}\}$, введенное в § 4, и назовем ее *опорой мультисети*. Пара $\{x, S_{оп}\}$ из потока и опоры сети называется опорным потоком. Опорный поток считается невырожденным, если его опорные дуги не являются критическими: $0 < x_{ij}^k < d_{ij}^k$, $(i, j)^k \in U_{оп}$.

2. Потенциалы узлов, оценки дуг. Формула приращения стоимости потока. Пусть $\{x, S_{оп}\}$ — опорный поток на мультисети $S = \{I, U\}$. *Потенциалами узлов* называются числа u_i, $i \in I$, которые удовлетворяют уравнениям

$$u_i - u_j = c_{ij}^k \quad (i, j)^k \in U_{оп},$$

и среди которых одно число равно нулю: $u_{i_1} = 0$.

По потенциалам узлов подсчитаем *оценки неопорных дуг*

$$\Delta_{ij}^{k}=u_i-u_j-c_{ij}^{k},\quad (i,\,j)^k\in U_{\text{н}}.$$

Пусть $\tilde{x}$ — другой поток на мультисети. Нетрудно показать (см. § 4), что приращение стоимости при переходе от потока x к потоку $\tilde{x}=x+\Delta x$ равно

$$\sum_{(i,\,j)^k\in U} c_{ij}^{k}\Delta x_{ij}^{k}=-\sum_{(i,\,j)^k\in U_{\text{н}}}\Delta x_{ij}^{k}\Delta_{ij}^{k}. \tag{4}$$

3. Критерий оптимальности. Достаточное условие субоптимальности. Пусть на опорном потоке $\{x,\,S_{\text{оп}}\}$ выполняются соотношения

$$\begin{gathered}\Delta_{ij}^{k}\leqslant 0 \text{ при } x_{ij}^{k}=0;\ \Delta_{ij}^{k}\geqslant 0 \text{ при } x_{ij}^{k}=d_{ij}^{k};\\ \Delta_{ij}^{k}=0 \text{ при } 0<x_{ij}^{k}<d_{ij}^{k},\quad (i,\,j)^k\in U_{\text{н}}.\end{gathered} \tag{5}$$

Из формулы приращения (4) следует, что стоимость потока не уменьшается при любом переходе $x\to\tilde{x}$.

Если $\{x,\,S_{\text{оп}}\}$ — невырожденный оптимальный опорный поток, то из условий дополняющей нежесткости и ограничений двойственной задачи (3) следует существование потенциалов u_i, $i\in I$, на которых выполняются соотношения (5). Таким образом, справедлива

Теорема. Соотношения (5) достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности опорного потока на мультисети.

Пусть на опорном потоке $\{x,\,S_{\text{оп}}\}$ соотношения (5) не выполняются. Подсчитаем число

$$\varepsilon=-\sum_{\Delta_{ij}^{k}<0}\Delta_{ij}^{k}x_{ij}^{k}+\sum_{\Delta_{ij}^{k}>0}\Delta_{ij}^{k}\,(d_{ij}^{k}-x_{ij}^{k}).$$

По аналогии с § 4, 5 нетрудно показать, что поток x является ε-оптимальным.

4. Улучшение потока. Рассмотрим опорный поток $\{x,\,S_{\text{оп}}\}$, на котором соотношения (5) не выполняются. Среди оценок Δ_{ij}^{k}, которые не удовлетворяют соотношениям (5), найдем оценку $\Delta_{i_0j_0}^{k_0}$ с наибольшим модулем. С помощью неопорной дуги $(i_0,\,j_0)^{k_0}$ и дуг опоры $S_{\text{оп}}$ составим цикл. Цикл может быть двух типов: а) малый цикл, когда в мультидуге (i_0, j_0) имеется опорная дуга; б) большой цикл, когда мультидуга (i_0, j_0) не содержит опорных дуг. По циклу пропустим $(i_0, j_0)^{k_0}$-циркуляцию при $\Delta^{k}_{i_0 j_0}>0$ и $(j_0, i_0)^{k_0}$-циркуляцию при $\Delta^{k_0}_{i_0 j_0}<0$ с максимально допустимым значением Θ^0. Отметим дугу $(i_*, j_*)^{k_*}$, которая стала критической при наложении циркуляции. Новый поток $x_{\text{нов}}$ получается из старого после наложения построенной циркуляции. При $(i_*, j_*)^{k_*}=(i_0, j_0)^{k_0}$ опора не меняется. Если $(i_*, j_*)^{k_*}\neq(i_0, j_0)^{k_0}$, то из опоры $S_{\text{оп}}$ удалим дугу $(i_*, j_*)^{k_*}$ и, добавив дугу $(i_0, j_0)^{k_0}$, получим новую опору. Стоимость потока за итерацию $x\to x_{\text{нов}}$ уменьшается на величину $\Theta^0\,|\Delta^{k_0}_{i_0 j_0}|$.

Глава II

ДВОЙСТВЕННЫЙ ОПОРНЫЙ МЕТОД

Цель данной главы — перенести двойственный опорный метод [ч. 1] на транспортные задачи линейного программирования.

§ 1. Матричная транспортная задача

Следуя схеме построения двойственного опорного метода для общей задачи линейного программирования [ч. 1, гл. II, § 2], в данном параграфе конкретизируются операции указанного метода с учетом специфики транспортной задачи.

1. Постановка задачи. Опорный коплан перевозок. Рассмотрим транспортную задачу (§ 1 гл. I)

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}\to\min,\ \sum_{j=1}^{m} x_{ij}=a_i,\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=b_j,$$
$$0\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}. \tag{1}$$

Составим двойственную к (1) задачу. Для этого введем функцию Лагранжа

$$F(x, y, w)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}+\sum_{i=1}^{n} y_i\left(\sum_{j=1}^{m} x_{ij}-a_i\right)+$$
$$+\sum_{j=1}^{m} y_{n+j}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}-b_j\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} w_{ij}(x_{ij}-d_{ij}).$$

Согласно теореме Куна — Таккера [МО], для оптимального плана перевозок x^0 найдется такая совокупность чисел $\{y^0_k,\ k=\overline{1, n+m};\ w^0_{ij},\ i=\overline{1, n},\ j=\overline{1, m}\}$, что функция $F(x, y, w)$ удовлетворяет неравенствам (условие седловости)

$$F(x^0, y, w) \leqslant F(x^0, y^0, w^0) \leqslant F(x, y^0, w^0) \tag{2}$$

при всех $x \geqslant 0$, $w \geqslant 0$, y. Отсюда легко получить, что вектор $\{y^0, w^0\}$ является решением задачи

$$-\sum_{i=1}^{n} a_i y_i - \sum_{j=1}^{m} b_j y_{n+j} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} w_{ij} d_{ij} \to \max,$$

$$y_i + y_{n+j} + c_{ij} + w_{ij} \geqslant 0,\ w_{ij} \geqslant 0,\ i=\overline{1, n},\ j=\overline{1, m},$$

которая называется двойственной задачей к задаче (1).

По традиции в теории матричных транспортных задач вместо переменных y_k, $k=\overline{1, n+m}$, используются переменные u_i, v_j: $u_i = -y_i$, $i=\overline{1, n}$; $v_j = -y_{n+j}$, $j=\overline{1, m}$. В новых переменных двойственная задача имеет вид

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n} a_i u_i + \sum_{j=1}^{m} b_j v_j - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} d_{ij} w_{ij} \to \max, \\ u_i + v_j - w_{ij} \leqslant c_{ij},\ w_{ij} \geqslant 0,\ i=\overline{1, n},\ j=\overline{1, m}.\end{gathered} \tag{3}$$

Из неравенств (2), кроме того, следуют условия дополняющей нежесткости

$$\begin{gathered} x^0_{ij}(u^0_i + v^0_j - w^0_{ij} - c_{ij}) = 0,\ w^0_{ij}(x^0_{ij} - d_{ij}) = 0, \\ i=\overline{1, n},\ j=\overline{1, m}, \end{gathered} \tag{4}$$

и соотношение двойственности

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x^0_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_i u^0_i + \sum_{j=1}^{m} b_j v^0_j - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} d_{ij} w^0_{ij}. \tag{5}$$

Двойственным планом перевозок будем называть совокупность чисел $\{u_i,\ v_j,\ w_{ij},\ i=\overline{1, n},\ j=\overline{1, m}\}$, удовлетворяющую ограничениям задачи (3).

С каждым двойственным планом можно связать совокупность чисел $\delta = \{\delta_{ij},\ i=\overline{1, n},\ j=\overline{1, m}\}$:

$$\delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}, \tag{6}$$

которую назовем *копланом (перевозок)* задачи (1). В дальнейшем предполагается, что элемент w двойственного плана *согласован* с копланом δ:

$$w_{ij}=0 \text{ при } \delta_{ij}\leqslant 0; \quad w_{ij}=\delta_{ij} \text{ при } \delta_{ij}>0. \qquad (7)$$

Если эти соотношения не выполняются, то, сохранив коплан, можно изменением компоненты w_{ij} добиться увеличения целевой функции двойственной задачи.

Таблица II.1

	B_1	B_2	- - -	B_m	
A_1	d_{11} c_{11} δ_{11}	d_{12} c_{12} δ_{12}	- - -	d_{1m} c_{1m} δ_{1m}	a_1
A_2	d_{21} c_{21} δ_{21}	d_{2m} c_{2m} δ_{22}	- - -	d_{2m} c_{2m} δ_{2m}	a_2
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
A_n	d_{n1} c_{n1} δ_{n1}	d_{n2} c_{n2} δ_{n2}	- - -	d_{nm} c_{nm} δ_{nm}	a_n
	b_1	b_2	- - -	b_m	

Цель данного параграфа не отличается от цели § 1 гл. I: нужно построить оптимальный план перевозок. Отличаются исходные предпосылки: в § 1 гл. I считался известным начальный план перевозок, теперь будем считать известным начальный двойственный план (или, что то же самое, начальный коплан). В связи с этим отличаются и методы достижения цели: в § 1 гл. I оптимальный план перевозок получен с помощью последовательного преобразования планов перевозок (прямой метод), здесь для построения оптимального плана перевозок используются последовательные преобразования двойственных планов (двойственный метод).

Понятие опоры сохраняется таким же, каким оно было введено в § 1 гл. I: опорой $I_{\text{оп}}$ задачи (1) является базисное множество клеток транспортной таблицы (в него входит хотя бы одна клетка из каждой строки и из каждого столбца таблицы, оно содержит $n+m-1$ клеток, не образующих цикла).

Определение. Пару $\{\delta, I_{\text{оп}}\}$ из коплана и опоры задачи (1) назовем *опорным копланом (перевозок).*

Компоненты δ_{ij}, $(i, j) \in I_{\text{оп}}$, коплана из опорных клеток называются *опорными коперевозками.* Остальные компоненты δ_{ij}, $(i, j) \in I_{\text{н}}$,— *неопорные коперевозки.* Опорный коплан называется *невырожденным,* если его неопорные коперевозки отличны от нуля.

Исходные данные транспортной задачи (1) с опорным копланом $\{\delta, I_{\text{оп}}\}$ заносим в транспортную таблицу (табл. II.1), в которой для удобства изложения метода опорные коперевозки обводим кружками.

Замечание. В классическом аналоге двойственного симплекс-метода для транспортной задачи рассматриваются только *базисные копланы,* у которых все опорные компоненты равны нулю.

2. Псевдоплан перевозок. Приращение двойственной целевой функции. По опорному коплану $\{\delta, I_{\text{оп}}\}$ построим *псевдоплан перевозок* $\varkappa = \{\varkappa_{ij}, i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}\}$. *Неопорные* псевдоперевозки положим равными

$$\begin{aligned} \varkappa_{ij} &= 0, \text{ если } \delta_{ij} \leqslant 0; \\ \varkappa_{ij} &= d_{ij}, \text{ если } \delta_{ij} > 0, \ (i, j) \in I_{\text{н}}. \end{aligned} \tag{8}$$

Опорные псевдоперевозки $\varkappa_{ij}$, $(i, j) \in I_{\text{оп}}$, найдутся однозначно из условий баланса по строкам и столбцам транспортной таблицы:

$$\begin{gathered} \sum_{(i,\, j) \in I_{\text{оп}}(i)} \varkappa_{ij} = a_i - \sum_{(i,\, j) \in I_{\text{н}}(i)} \varkappa_{ij}, \\ \sum_{(i,\, j) \in I^j_{\text{оп}}} \varkappa_{ij} = b_j - \sum_{(i,\, j) \in I^j_{\text{н}}} \varkappa_{ij}, \ i=\overline{1,n}, \ j=\overline{1,m}. \end{gathered} \tag{9}$$

Здесь $I_{\text{оп}}(i)$, $I^j_{\text{оп}}$ — множество опорных клеток в i-й строке и j-м столбце таблицы. Пусть неопорные псевдоперевозки занесены в транспортную таблицу. Вычисление опорных псевдоперевозок начинают с тех строки или столбца таблицы, которые содержат единственную опорную клетку (в ней коперевозка обведена кружком). Из свойств опоры следует, что такие строка или столбец всегда существуют и если указанную опорную клетку удалить, то в оставшемся множестве клеток опять найдется строка или столбец с единственной опорной клеткой.

Через nm шагов все псевдоперевозки будут вычислены. Они размещаются по клеткам транспортной таблицы, занимая в каждой из них левую нижнюю часть (в прямом опорном методе там находились перевозки).

Наряду с двойственным планом $\{u, v, w\}$ и соответствующим ему опорным копланом $\{\delta, I_{\text{оп}}\}$ рассматриваем двойственный план $\{\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}\}$, $\tilde{u}=u+\Delta u$, $\tilde{v}=v+\Delta v$, $\tilde{w}=w+\Delta w$, и соответствующий коплан $\tilde{\delta}=\delta+\Delta\delta$, считая вектор $\tilde{w}$ согласованным с вектором $\tilde{\delta}$ (7). Вычислим приращение двойственной целевой функции

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n} a_i\Delta u_i+\sum_{j=1}^{m} b_j\Delta v_j-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\Delta w_{ij}d_{ij}.$$

С учетом (6), (7), (9) получим

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}\Delta u_i\Big(\sum_{(i,\,j)\in I_{\text{оп}}(i)}\varkappa_{ij}+\sum_{(i,\,j)\in I_{\text{н}}(i)}\varkappa_{ij}\Big)+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\Delta v_j\Big(\sum_{(i,\,j)\in I_{\text{оп}}^{j}}\varkappa_{ij}+\sum_{(i,\,j)\in I_{\text{н}}^{j}}\varkappa_{ij}\Big)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}d_{ij}\Delta w_{ij}=$$

$$=\sum_{(i,\,j)\in I_{\text{оп}}}\varkappa_{ij}\Delta\delta_{ij}+\sum_{(i,\,j)\in I_{\text{н}}}\varkappa_{ij}\Delta\delta_{ij}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}d_{ij}\Delta w_{ij}.$$

Поскольку 1) при $\delta_{ij}>0$, $\tilde{\delta}_{ij}>0$, $(i, j)\in I_{\text{н}}$, имеем $\varkappa_{ij}=d_{ij}$, $\Delta w_{ij}=\Delta\delta_{ij}$; 2) при $\delta_{ij}\leqslant 0$, $\tilde{\delta}_{ij}\leqslant 0$, $(i, j)\in I_{\text{н}}$, имеем $\varkappa_{ij}=0$, $\Delta w_{ij}=0$; 3) при $\delta_{ij}>0$, $\tilde{\delta}_{ij}\leqslant 0$, $(i, j)\in I_{\text{н}}$, имеем $\varkappa_{ij}=d_{ij}$, $\Delta w_{ij}=-\delta_{ij}$; 4) при $\delta_{ij}\leqslant 0$, $\tilde{\delta}_{ij}>0$, $(i, j)\in I_{\text{н}}$, имеем $\varkappa_{ij}=0$, $\Delta w_{ij}=\tilde{\delta}_{ij}$, то приращение двойственной целевой функции

$$\alpha=\sum_{(i,\,j)\in I_{\text{оп}}}(\varkappa_{ij}\Delta\delta_{ij}-d_{ij}\Delta w_{ij})+$$

$$+\sum_{\substack{\delta_{ij}>0,\ \tilde{\delta}_{ij}<0,\\ (i,\,j)\in I_{\text{н}}}} d_{ij}\tilde{\delta}_{ij}-\sum_{\substack{\delta_{ij}\leqslant 0,\ \tilde{\delta}_{ij}>0,\\ (i,\,j)\in I_{\text{н}}}} d_{ij}\tilde{\delta}_{ij}. \tag{10}$$

3. Критерий оптимальности. Достаточное условие субоптимальности. Пусть опорные псевдоперевозки, построенные по опорному коплану $\{\delta, I_{\text{оп}}\}$, удовлетворяют соотношениям

$$\varkappa_{ij}=0 \text{ при } \delta_{ij}<0; \quad \varkappa_{ij}=d_{ij} \text{ при } \delta_{ij}>0;$$
$$0\leqslant\varkappa_{ij}\leqslant d_{ij} \text{ при } \delta_{ij}=0, \ (i, j)\in I_{\text{оп}}. \tag{11}$$

Вместе с соотношениями (8), (9) это означает, что $\varkappa$ — план перевозок. Поскольку значение прямой целевой функции (1) на плане $\varkappa$ и значение двойственной целевой функции (3) на двойственном плане $\{u, w\}$ совпадают:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}\varkappa_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(u_i+v_j-\delta_{ij})\varkappa_{ij}=$$
$$=\sum_{i=1}^{n} u_i\sum_{j=1}^{m}\varkappa_{ij}+\sum_{j=1}^{m} v_j\sum_{i=1}^{n}\varkappa_{ij}-\sum_{\delta_{ij}>0}\delta_{ij}d_{ij}=$$
$$=\sum_{i=1}^{n} a_i u_i+\sum_{j=1}^{m} b_j v_j-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} d_{ij}w_{ij},$$

то $\varkappa$ — оптимальный план перевозок.

Пусть $\{\delta, I_{\text{оп}}\}$ — невырожденный оптимальный опорный коплан. Тогда по теореме двойственности [МО] существует оптимальный план перевозок x. Из невырожденности коплана и условий дополняющей нежесткости (4) следуют соотношения для неопорных компонент x_{ij} плана перевозок x. Соотношения (11) для x суть следствия условий дополняющей нежесткости (4) и ограничений транспортной задачи (1).

Таким образом, справедлива

Теорема. Соотношения (11) достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности опорного коплана $\{\delta, I_{\text{оп}}\}$. Псевдоплан перевозок $\varkappa$, соответствующий указанному опорному коплану $\{\delta, I_{\text{оп}}\}$, является оптимальным планом перевозок.

Проверка критерия оптимальности легко осуществляется на транспортной таблице. В пустые части неопорных клеток (коперевозки не обведены кружком) заносим псевдоперевозки $\varkappa_{ij}$, вычисленные согласно соотношениям (8). Затем по правилам п. 2 заполняем опорные клетки. В каждой опорной клетке по числам d_{ij}, $\varkappa_{ij}$, δ_{ij} проверяются соотношения (11).

Замечание. Оптимальный план перевозок всегда оказывается *базисным:* у него неопорные перевозки принимают только граничные значения (0 или d_{ij}). Общий случай опорного плана перевозок будет рассмотрен в гл. V.

Рассмотрим опорный коплан $\{\delta, I_{\text{оп}}\}$. Пусть опорные компоненты псевдоплана $\varkappa$ удовлетворяют прямым ограничениям транспортной задачи (1), т. е. $\varkappa$ является планом перевозок. Подсчитаем число

$$\varepsilon = -\sum_{\delta_{ij}<0,\ (i,\ j)\in I_{\text{оп}}} \delta_{ij}\varkappa_{ij} + \sum_{\delta_{ij}>0,\ (i,\ j)\in I_{\text{оп}}} \delta_{ij}(d_{ij}-\varkappa_{ij}).$$

Покажем, что $\varkappa$ — ε-оптимальный план перевозок. Использовав определение (6), (7), соотношения (8), (9) и теорию двойственности, нетрудно убедиться в справедливости преобразований

$$\varepsilon = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \delta_{ij}\varkappa_{ij} + \sum_{\delta_{ij}>0} \delta_{ij}d_{ij} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (u_i+v_j-c_{ij})\varkappa_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} d_{ij}w_{ij} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} u_i \sum_{j=1}^{m} \varkappa_{ij} - \sum_{j=1}^{m} v_j \sum_{i=1}^{n} \varkappa_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}\varkappa_{ij} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} d_{ij}w_{ij} = -\sum_{i=1}^{n} a_iu_i - \sum_{j=1}^{m} b_jv_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} d_{ij}w_{ij} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}\varkappa_{ij} \geqslant -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}^{0} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij},$$

из которых следует утверждение об ε-оптимальности.

Понятно, что проверка псевдоплана $\varkappa$ на ε-оптимальность проводится по схеме проверки его на оптимальность.

4. Улучшение коплана перевозок. Пусть $\{\delta, I_{\text{оп}}\}$ — опорный коплан перевозок, на котором соотношения (11) не выполняются. Из формулы приращения (10) видно, что два последних выражения не возникают, если коплан $\{\delta, I_{\text{оп}}\}$ — невырожденный и его возмущение $\Delta\delta$ достаточно мало. Исследуем сначала именно этот случай.

Пусть $\delta_{ij}<0$, $(i, j)\in I_{\text{оп}}$. Соотношения (11) не выполняются, если $\varkappa_{ij}\neq 0$. При малых возмущениях $\Delta\delta_{ij}$ имеем $\tilde{\delta}_{ij}=\delta_{ij}+\Delta\delta_{ij}<0$. Следовательно, $w_{ij}=0$, $\tilde{w}_{ij}=0$, $\Delta w_{ij}=0$ и $\alpha=\varkappa_{ij}\Delta\delta_{ij}$, т. е. $\varkappa_{ij}$ — скорость изменения двойственной целевой функции в точке δ при изменении единственной опорной компоненты с номером (i, j).

Пусть $\delta_{ij}>0$, $(i, j)\in I_{\text{оп}}$. Соотношения (11) не выполняются, если $\varkappa_{ij}\neq d_{ij}$. При малых возмущениях $\Delta\delta_{ij}$ имеем $\tilde{\delta}_{ij}>0$, $w_{ij}=\delta_{ij}$, $\tilde{w}_{ij}=\tilde{\delta}_{ij}$, $\Delta w_{ij}=\Delta\delta_{ij}$ и $\alpha=(\varkappa_{ij}-d_{ij})\Delta\delta_{ij}$, т. е. указанная выше скорость равна $\varkappa_{ij}-d_{ij}$.

Пусть $\delta_{ij}=0$, $(i, j)\in I_{\text{оп}}$. Соотношения (11) не выполняются при $\varkappa_{ij}\overline{\in}[0, d_{ij}]$. При малых $\Delta\delta_{ij}$ имеем $\tilde{\delta}_{ij}>0$, $\Delta w_{ij}=\Delta\delta_{ij}$, если $\Delta\delta_{ij}>0$; $\tilde{\delta}_{ij}<0$, $\Delta w_{ij}=0$, если $\Delta\delta_{ij}<0$. Соответственно $\alpha=(\varkappa_{ij}-d_{ij})\Delta\delta_{ij}$ при $\Delta\delta_{ij}>0$; $\alpha=\varkappa_{ij}\Delta\delta_{ij}$ при $\Delta\delta_{ij}<0$.

Таким образом, при $\delta_{ij}=0$, $\varkappa_{ij}>d_{ij}$ скорость увеличения двойственной целевой функции равна $\varkappa_{ij}-d_{ij}$, а при $\delta_{ij}=0$, $\varkappa_{ij}<0$ равна $-\varkappa_{ij}$.

В случае вырожденного коплана $\{\delta, I_{\text{оп}}\}$ изменение опорной коперевозки может вызвать изменение нулевой неопорной коперевозки так, что в формуле (10) появится одно из двух последних выражений. Это повлияет на скорость изменения двойственной целевой функции. Такой случай исследуется ниже.

Следуя классическому прототипу излагаемого метода, будем на каждой итерации изменять значения единственной опорной коперевозки. Первый элемент принципа допустимых направлений состоит в том, что выбирается та перевозка $\delta_{i_0j_0}$, при изменении которой двойственная целевая функция увеличивается с наибольшей скоростью $|\omega^0|$. Предыдущие вычисления приводят к следующим операциям. В опорных клетках $(i, j)\in I_{\text{оп}}$, в которых не выполняются соотношения (11), отмечаем число $\varkappa_{ij}$, если $\delta_{ij}<0$ или $\delta_{ij}=0$, $x_{ij}<0$, и число $\varkappa_{ij}-d_{ij}$, если $\delta_{ij}>0$ или $\delta_{ij}=0$, $\varkappa_{ij}>d_{ij}$. Обозначим через ω^0 и (i_0, j_0) отмеченное число с максимальным модулем и клетку, в которой оно находится. Двойственная целевая функция возрастает со скоростью $|\omega^0|$, если $\Delta\delta_{i_0j_0}=\sigma\operatorname{sign}\omega^0$, $\sigma\geqslant 0$.

Второй элемент принципа допустимых направлений состоит в том, что шаг σ увеличивается до тех пор, пока возрастает двойственная целевая функция и не нарушаются ограничения двойственной задачи. Поскольку выбором компоненты w двойственного плана $\{y, w\}$ всегда можно добиться выполнения ограничений, то при вычислении максимально допустимого шага σ^0 будем учитывать только возрастание двойственной целевой функции. Обозначим через σ_{ij} максимально допустимый шаг σ, который допускается компонентой δ_{ij} коплана.

Начнем с опорной клетки (i_0, j_0). Поскольку $\Delta\delta_{i_0j_0} = \sigma \operatorname{sign} \omega^0$, то при $\delta_{i_0j_0} > 0$, $\omega^0 < 0$ или $\delta_{i_0j_0} < 0$, $\omega^0 > 0$ для шага $|\delta_{i_0j_0}|$ коперевозка $\tilde{\delta}_{i_0j_0} = \delta_{i_0j_0} + \Delta\delta_{i_0j_0}$ равна нулю. Дальнейшее изменение компоненты $\delta_{i_0j_0}$ ведет к увеличению двойственной целевой функции, если $\varkappa_{i_0j_0} < 0$ при $\delta_{i_0j_0} > 0$ или $\varkappa_{i_0j_0} > d_{i_0j_0}$ при $\delta_{i_0j_0} < 0$. Таким образом,

$$\sigma_{i_0j_0} = \begin{cases} |\delta_{i_0j_0}|, \text{ если } 0 \leqslant \varkappa_{i_0j_0} \leqslant d_{i_0j_0}; \\ \infty \text{ — в остальных случаях.} \end{cases} \tag{12}$$

Перейдем к неопорной клетке $(i, j) \in I_\text{н}$. Изменение опорной коперевозки $\delta_{i_0j_0}$ вызывает изменение части неопорных коперевозок. Зависимость между $\Delta\delta_{ij}$ и $\Delta\delta_{i_0j_0}$ легко найти, если вспомнить связь между транспортной задачей и общей задачей линейного программирования [МО]. Для клетки (i, j) строим цикл с первым горизонтальным звеном. Если клетка (i_0, j_0) не вошла в цикл, то $\Delta\delta_{ij} = 0$ при любых $\Delta\delta_{i_0j_0}$ (клетка не помечается). Если клетка (i_0, j_0) оказалась на конце горизонтального звена цикла, то $\Delta\delta_{ij} = \Delta\delta_{i_0j_0}$ (условно: клетка (i, j) положительна, помечается знаком «+»). В случае, когда клетка (i_0, j_0) находится на конце вертикального звена цикла, имеем $\Delta\delta_{ij} = -\Delta\delta_{i_0j_0}$ (клетка (i, j) отрицательна, помечается знаком «—»).

Рассмотрим сначала положительную клетку (i, j). Пусть $\delta_{ij} = 0$. При $\omega^0 < 0$ в формуле приращения (10) два последних выражения равны нулю и поэтому клетка (i, j) не накладывает ограничений на величину шага: $\sigma_{ij} = \infty$. При $\omega^0 > 0$ скорость изменения двойственной целевой функции, согласно (10), равна

$$\alpha = \begin{cases} (\varkappa_{i_0j_0} - d_{ij})\Delta\delta_{i_0j_0}, \text{ если } \delta_{i_0j_0} < 0,\ \varkappa_{i_0j_0} > 0; \\ (\varkappa_{i_0j_0} - d_{i_0j_0} - d_{ij})\Delta\delta_{i_0j_0}, \text{ если } \delta_{i_0j_0} \geqslant 0, \\ \quad \varkappa_{i_0j_0} > d_{i_0j_0}. \end{cases}$$

Таким образом, при $\delta_{ij} = 0$ в положительной клетке получается следующее ограничение на шаг по клетке (i, j):

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ если } \varkappa_{i_0j_0} - d_{ij} \leqslant 0 \text{ при } \delta_{i_0j_0} < 0,\ \varkappa_{i_0j_0} > 0; \\ 0, \text{ если } \varkappa_{i_0j_0} - d_{i_0j_0} - d_{ij} \leqslant 0 \text{ при } \delta_{i_0j_0} \geqslant 0, \\ \quad \varkappa_{i_0j_0} > d_{i_0j_0}; \\ \infty \text{ — в остальных случаях.} \end{cases} \tag{13}$$

Рассмотрим отрицательную клетку с $\delta_{ij}=0$. При $\omega^0>0$ в формуле (10) справа остается только первое выражение, т. е. клетка (i, j) не накладывает ограничений на величину шага: $\sigma_{ij}=\infty$. При $\omega^0<0$ из (10) получим

$$\alpha=\begin{cases}(\varkappa_{i_0j_0}+d_{ij})\Delta\delta_{i_0j_0}, \text{ если } \delta_{i_0j_0}\leqslant 0,\\ \quad \varkappa_{i_0j_0}<0;\\ (\varkappa_{i_0j_0}-d_{i_0j_0}+d_{ij})\Delta\delta_{i_0j_0}, \text{ если } \delta_{i_0j_0}>0,\\ \quad \varkappa_{i_0j_0}-d_{i_0j_0}<0.\end{cases}$$

Отсюда для отрицательной клетки с $\delta_{ij}=0$ следует

$$\sigma_{ij}=\begin{cases}0, \text{ если } \varkappa_{i_0j_0}+d_{ij}\geqslant 0 \text{ при } \delta_{i_0j_0}\leqslant 0,\\ \quad \varkappa_{i_0j_0}<0;\\ 0, \text{ если } \varkappa_{i_0j_0}-d_{i_0j_0}+d_{ij}\geqslant 0 \text{ при } \delta_{i_0j_0}>0,\\ \quad \varkappa_{i_0j_0}-d_{i_0j_0}<0;\\ \infty \text{ — в остальных случаях.}\end{cases} \qquad (14)$$

Минимальное из чисел (12)—(14) обозначим через $\sigma_{i_*j_*}$.

Ограничения на шаг по неопорным клеткам с $\delta_{ij}\neq 0$ складываются из двух слагаемых $\sigma_{ij}=\overset{1}{\sigma}_{ij}+\overset{2}{\sigma}_{ij}$. Сначала найдем величину шага $\overset{1}{\sigma}_{ij}$, при котором коперевозка становится нулевой:

$$\overset{1}{\sigma}_{ij}=\begin{cases}\delta_{ij}, \text{ если } \delta_{ij}>0 \text{ и знаки у } \omega^0\\ \quad \text{и клетки } (i, j) \text{ различны};\\ -\delta_{ij}, \text{ если } \delta_{ij}<0 \text{ и знаки у } \omega^0\\ \quad \text{и клетки } (i, j) \text{ одинаковы};\\ \infty \text{ — в остальных случаях.}\end{cases} \qquad (15)$$

Минимальное из чисел $\overset{1}{\sigma}_{i_1j_1}$ (15) задает максимально допустимый шаг σ^1 первого этапа улучшения невырожденного коплана. После него коперевозка в клетке (i_1, j_1) становится равной нулю. Вычислим (см. выше) максимально допустимый шаг $\sigma_{i_*j_*}$ для полученного вырожденного коплана. Обозначим его через $\sigma^2=\overset{2}{\sigma}_{i_*j_*}$. Если $\sigma^1+\sigma^2=\infty$, то транспортная задача не имеет планов перевозок. При $\sigma^1+\sigma^2<\infty$ делаем шаг величины $\sigma^1+\sigma^2$, который приводит к новому коплану $\delta_{\text{пов}}$. При $(i_*, j_*)=(i_0, j_0)$ опора не меняется. Если $(i_*, j_*)\neq(i_0, j_0)$, то из опоры $I_{\text{оп}}$ удалим клетку (i_0, j_0), добавим клетку (i_*, j_*), что приводит к новой опоре $I_{\text{нов}}$ коплана $\delta_{\text{нов}}$.

5. Построение начального опорного коплана. Специфика задач линейного программирования с двухсторонними ограничениями состоит в том, что построение двойственного плана для них не составляет труда. Так, для транспортной задачи любая совокупность чисел u_i, v_j, $i=\overline{1, n}$, $j=\overline{1, m}$, задает двойственный план $\{u, v, w\}$, если

Таблица II.2

3	2	1	3	8	4	2	1	
-3	0	1	8^+	10	0	2	6^+	10
7	10	2	1	3	5	8	7	
0	-8	2	10	0	-1^-	8	0	10
5	3	∞	12	2	6	15	8	
8	0	32	0	0	-1^-	5	0	45
5		35		10		15		

положить $w_{ij}=0$ при $u_i+v_j \leqslant c_{ij}$; $w_{ij}=u_i+v_j-c_{ij}$ при $u_i+v_j > c_{ij}$. Поэтому для построения начального опорного коплана перевозок достаточно указать начальную опору. Она может быть выбрана случайно. Более целесообразен метод построения опоры с учетом рекомендаций специалистов. Предполагается, что начальные u_i, v_j, $i=\overline{1, n}$, $j=\overline{1, m}$, и соответствующие им коперевозки отражают опыт и интуицию специалистов, которые в своих рекомендациях исходят из физического смысла двойственных переменных [ч. 1, гл. VII]. Среди коперевозок могут оказаться более надежные и менее надежные оценки. Если $\delta_{ij}=0$, это означает, что, по мнению специалистов, в оптимальном плане перевозок компонента x^0_{ij} некритическая: $0 < x^0_{ij} < d_{ij}$. При $\delta_{ij} \neq 0$ величина $|\delta_{ij}|$ характеризует степень существенности с точки зрения минимальных транспортных издержек нижней границы (при $\delta_{ij} < 0$) и верхней границы (при $\delta_{ij} > 0$) ограничения на перевозку x_{ij}. В опору включаются в первую очередь клетки с наиболее надежными оценками. Ненадежные оценки δ_{ij} заменяются другими, полученными после построения опоры.

6. Пример. Решим двойственным опорным методом транспортную задачу с исходными данными из табл. II 2. Пусть $u_1=-1$, $u_2=-1$, $u_3=0$, $v_1=3$, $v_2=12$, $v_3=5$, $v_4=8$. Подсчитанные по этим данным коперевозки и псевдоперевозки помещены в ту же табл. II.2. Критерию оптимальности не удовлетворяют клетки (1, 1), $\varkappa_{11}=-3$, (1, 3), $\varkappa_{13}-d_{13}=2$, (3, 1), $\varkappa_{31}-d_{31}=3$. Следовательно, $\omega^0=\varkappa_{i_0j_0}=\varkappa_{11}=-3<0$. Пометим неопорные клетки (см. п. 4). Уменьшим коперевозку в клетке (1, 1) до появления нулевых неопорных коперевозок. При $\sigma^0=1$ она появится в клетке $(i_*, j_*)=(2, 3)$. Пересчет табл. II.2 приводит к оптимальному плану перевозок: $x_{11}=0$, $x_{12}=1$, $x_{13}=7$, $x_{14}=2$, $x_{21}=0$, $x_{22}=2$, $x_{23}=3$, $x_{24}=5$, $x_{31}=5$, $x_{32}=32$, $x_{33}=0$, $x_{34}=8$.

§ 2. Сетевая транспортная задача

В данном параграфе схема построения двойственного опорного метода [ч. 1] реализуется для задачи о потоке минимальной стоимости.

1. Постановка задачи. Опорный копоток. На сети $S=\{I, U\}$ рассмотрим задачу о потоке минимальной стоимости (§ 4 гл. I):

$$\sum_{(i,\,j)\in U} c_{ij}x_{ij}\to\min,\quad \sum_{j\in I^+(i)} x_{ij}-\sum_{j\in I^-(i)} x_{ji}=a_i,$$
$$i\in I,\ 0\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij},\ (i, j)\in U. \tag{1}$$

Составим двойственную задачу. Функция Лагранжа задачи (1) имеет вид [МО]

$$F(y, w)=\sum_{(i,\,j)\in U} c_{ij}x_{ij}+\sum_{i\in I} y_i\Big(\sum_{j\in I^+(i)} x_{ij}-\sum_{j\in I^-(i)} x_{ji}-a_i\Big)+$$
$$+\sum_{(i,\,j)\in U} w_{ij}(x_{ij}-d_{ij}).$$

Воспользовавшись теоремой Куна — Таккера, получим двойственную задачу

$$-\sum_{i\in I} a_iy_i-\sum_{(i,\,j)\in U} d_{ij}w_{ij}\to\max,$$
$$y_i-y_j+w_{ij}\geqslant -c_{ij},\ w_{ij}\geqslant 0,\ i, j\in I,\ (i, j)\in U, \tag{2}$$

и условия дополняющей нежесткости (на решениях задач (1), (2))

$$x_{ij}(y_i-y_j+w_{ij}+c_{ij})=0,\ w_{ij}(x_{ij}-d_{ij})=0,\ (i, j)\in U. \tag{3}$$

Следуя традициям, введем новые переменные (потенциалы) $u_i=-y_i$, $i\in I$. В новых переменных двойственная задача имеет вид

$$\sum_{i\in I} a_i u_i - \sum_{(i,\ j)\in U} d_{ij} w_{ij} \to \max,$$
$$u_i - u_j - w_{ij} \leqslant c_{ij},\quad w_{ij} \geqslant 0,\quad i,\ j\in I,\quad (i,\ j)\in U. \tag{4}$$

Двойственным планом задачи (1) назовем совокупность чисел $\{u_i,\ w_{ij},\ i\in I,\ (i,\ j)\in U\}$, удовлетворяющих ограничениям задачи (4). Каждому двойственному плану поставим в соответствие *копоток* задачи (1)

$$\delta=\{\delta_{ij},\ (i,\ j)\in U\},\quad \delta_{ij}=u_i-u_j-c_{ij}$$

и будем считать, что компонента w двойственного плана удовлетворяет соотношениям

$$w_{ij}=0,\ \text{если}\ \delta_{ij}\leqslant 0;\quad w_{ij}=\delta_{ij},\ \text{если}\ \delta_{ij}>0, \tag{5}$$

которые необходимо выполняются для оптимального двойственного плана, ибо при их нарушении можно, уменьшая соответствующие компоненты w_{ij}, добиться увеличения двойственной целевой функции (4).

Как и в § 4 гл. I, в данном параграфе необходимо построить оптимальный поток в заданной сети S. Будем считать, что к началу процесса решения известен не поток по сети (см. § 4 гл. I), а копоток (или, что то же самое, двойственный план задачи). Требуется построить такой алгоритм преобразования копотоков (отсюда название «двойственный метод»), который через конечное число итераций приводит к оптимальному или субоптимальному потоку. Основным элементом преобразования копотоков в данном параграфе служит опора сети. Понятие опоры $S_{\text{оп}}$ сохраняется таким же, как в § 4 гл. I.

Определение. Пара $\{\delta,\ S_{\text{оп}}\}$ из копотока и опоры сети называется *опорным копотоком.*

Компоненты копотока δ_{ij} по опорным дугам $(i,\ j)\in U_{\text{оп}}$ называют *опорными дуговыми копотоками.* Остальные компоненты δ_{ij}, $(i,\ j)\in U_{\text{н}}$,— *неопорные* дуговые копотоки. Копоток $\{\delta,\ S_{\text{оп}}\}$ называется *вырожденным*, если среди его неопорных дуговых копотоков имеются нулевые.

Исходные данные задачи (1) при решении двойственным опорным методом помещаются на сети. Опорные дуги изображаются жирной линией. Компоненты копотока δ_{ij} помещаются под дугами (i, j) на место оценок Δ_{ij} прямого опорного метода (см. § 4 гл. I).

2. Псевдопоток. Приращение двойственной целевой функции. Пусть $\{\delta, S_{\text{оп}}\}$ — некоторый опорный копоток. Построим по нему *псевдопоток* $\varkappa=\{\varkappa_{ij}, (i, j)\in U\}$. *Неопорные* дуговые псевдопотоки $\varkappa_{ij}$, $(i, j)\in U_{\text{н}}$, положим равными

$$\varkappa_{ij}=0, \text{ если } \delta_{ij}\leqslant 0; \ \varkappa_{ij}=d_{ij}, \text{ если } \delta_{ij}>0, \ (i, j)\in U_{\text{н}}. \quad (6)$$

Опорные дуговые псевдопотоки $\varkappa_{ij}$, $(i, j)\in U_{\text{оп}}$, найдутся однозначно из условий баланса на узлах опоры (сети):

$$\sum_{\substack{j\in I^+(i),\\ (i, j)\in U_{\text{оп}}}} \varkappa_{ij} - \sum_{\substack{j\in I^-(i),\\ (i, j)\in U_{\text{оп}}}} \varkappa_{ji} = a_i - \sum_{\substack{j\in I^+(i),\\ (i, j)\in U_{\text{н}}}} \varkappa_{ij} + \sum_{\substack{j\in I^-(i),\\ (i, j)\in U_{\text{н}}}} \varkappa_{ji}, \ i\in I. \quad (7)$$

Вычисление опорных дуговых псевдопотоков начинают с висячей дуги опоры.

Дуговые псевдопотоки $\varkappa$ помещаются под дугой на место дуговых потоков в прямом опорном методе (см. § 4 гл. I).

Наряду с опорным копотоком $\{\delta, S_{\text{оп}}\}$ рассмотрим копоток $\tilde{\delta}=\delta+\Delta\delta$, порожденный двойственным планом $\{\tilde{u}, \tilde{w}\}$, $\tilde{u}=u+\Delta u$, $\tilde{w}=w+\Delta w$, где вектор $\tilde{w}$ согласован (см. (5)) с копотоком $\tilde{\delta}$. Вычислим приращение целевой функции копотока (целевой функции двойственной задачи)

$$\alpha=\sum_{i\in I} a_i\Delta u_i - \sum_{(i, j)\in U} d_{ij}\Delta w_{ij}.$$

С учетом условий баланса (7) и равенства $\Delta\delta_{ij}=\Delta u_i-\Delta u_j$ получим

$$\alpha=\sum_{i\in I}\Delta u_i \Big(\sum_{j\in I^+(i)}\varkappa_{ij} - \sum_{j\in I^-(i)}\varkappa_{ji}\Big) - \sum_{(i, j)\in U} d_{ij}\Delta w_{ij} = \sum_{(i, j)\in U}\varkappa_{ij}\Delta\delta_{ij} - \sum_{(i, j)\in U} d_{ij}\Delta w_{ij}.$$

Из построения неопорных дуговых псевдопотоков (6) и соотношений (5) для каждой неопорной дуги $(i, j)\in U_{\text{н}}$ следует, что 1) если $\delta_{ij}>0$, $\tilde{\delta}_{ij}>0$, то $\varkappa_{ij}=d_{ij}$, $\Delta w_{ij}=\Delta\delta_{ij}$;

2) если $\delta_{ij}\leqslant 0$, $\tilde{\tilde{\delta}}_{ij}\leqslant 0$, то $\varkappa_{ij}=0$, $\Delta w_{ij}=0$; 3) если $\delta_{ij}>0$, $\tilde{\delta}_{ij}\leqslant 0$, то $\varkappa_{ij}=d_{ij}$, $\Delta w_{ij}=-\delta_{ij}$; 4) если $\delta_{ij}\leqslant 0$, $\tilde{\delta}_{ij}>0$, то $\varkappa_{ij}=0$, $\Delta w_{ij}=\tilde{\delta}_{ij}$.

Поэтому формула приращения целевой функции копотока принимает вид

$$\alpha=\sum_{(i,\,j)\in U_{\text{оп}}}\varkappa_{ij}\Delta\delta_{ij}+$$
$$+\sum_{\substack{\delta_{ij}>0,\ \tilde{\delta}_{ij}<0,\\ (i,\,j)\in U_{\text{н}}}} d_{ij}\tilde{\delta}_{ij}-\sum_{\substack{\delta_{ij}\leqslant 0,\ \tilde{\delta}_{ij}>0,\\ (i,\,j)\in U_{\text{н}}}} d_{ij}\tilde{\delta}_{ij}. \qquad (8)$$

3. Критерий оптимальности. Достаточное условие субоптимальности. Пусть опорные дуговые псевдопотоки, по опорному копотоку $\{\delta, S_{\text{оп}}\}$, удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered}\varkappa_{ij}=0 \text{ при } \delta_{ij}<0;\quad \varkappa_{ij}=d_{ij} \text{ при } \delta_{ij}>0;\\ 0\leqslant\varkappa_{ij}\leqslant d_{ij} \text{ при } \delta_{ij}=0,\ (i,\,j)\in U_{\text{оп}},\end{gathered} \qquad (9)$$

которые с учетом (6) означают, что $\varkappa$ — поток. Оптимальность этого потока следует из равенства значений целевых функций прямой (1) и двойственной (4) задач на $\varkappa$ и δ:

$$\sum_{(i,\,j)\in U} c_{ij}\varkappa_{ij}=\sum_{(i,\,j)\in U}(u_i-u_j-\delta_{ij})\varkappa_{ij}=$$
$$=\sum_{i\in I}u_i\Big(\sum_{j\in I^+(i)}\varkappa_{ij}-\sum_{j\in I^-(i)}\varkappa_{ji}\Big)-\sum_{\delta_{ij}>0}\delta_{ij}d_{ij}=$$
$$=\sum_{i\in I}a_iu_i-\sum_{(i,\,j)\in U}d_{ij}w_{ij}.$$

Пусть теперь δ — невырожденный оптимальный копоток. По теореме двойственности существует решение x задачи (1) и пара x, $\{u, w\}$ удовлетворяет условиям дополняющей нежесткости (3). Нетрудно показать, что при этих условиях на псевдопотоке $\varkappa=x$, построенном по вектору δ, выполняются соотношения (6), (9). Таким образом, справедлива

Теорема. Соотношения (9) достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности опорного копотока $\{\delta, S_{\text{оп}}\}$. Псевдопоток, соответствующий оптимальному копотоку $\{\delta, S_{\text{оп}}\}$, является оптимальным потоком по сети S.

Проверка критерия оптимальности сводится к сравнению чисел $\varkappa_{ij}$, d_{ij}, δ_{ij} для каждой опорной дуги.

Рассмотрим опорный копоток $\{\delta, S_{оп}\}$, у которого опорные дуговые псевдопотоки удовлетворяют прямым ограничениям задачи (1)

$$0 \leqslant \varkappa_{ij} \leqslant d_{ij}, \quad (i, j) \in U_{оп}.$$

В совокупности с соотношениями (6), (7) это означает, что $\varkappa$ — поток в сети S. Подсчитаем для него число

$$\varepsilon = -\sum_{\substack{\delta_{ij}<0,\\ (i,j)\in U_{оп}}} \delta_{ij}\varkappa_{ij} + \sum_{\substack{\delta_{ij}>0,\\ (i,j)\in U_{оп}}} \delta_{ij}(d_{ij}-\varkappa_{ij}).$$

По схеме предыдущего параграфа нетрудно показать, что $\varkappa$ является ε-оптимальным потоком.

4. Улучшение копотока. Пусть $\{\delta, S_{оп}\}$ — опорный копоток, на котором соотношения (9) не выполняются. Легко проверить, что в невырожденном случае всегда найдется вариация $\Delta\delta$ коплана, ведущая к увеличению двойственной целевой функции.

Пусть $\delta_{ij}<0$, $(i, j)\in U_{оп}$. Соотношения (9) не выполняются, если $\varkappa_{ij}\neq 0$. При малых $\Delta\delta_{ij}$ имеем $\tilde{\delta}_{ij}<0$, $\Delta w_{ij}=0$ и $\alpha=\varkappa_{ij}\Delta\delta_{ij}$, т. е. $\varkappa_{ij}$ — скорость изменения в точке δ двойственной целевой функции при изменении единственной компоненты δ_{ij}. Аналогично при $\delta_{ij}>0$, $(i, j)\in$ $\in U_{оп}$, имеем $\varkappa_{ij}\neq d_{ij}$, $\Delta w_{ij}=\Delta\delta_{ij}$ и $\alpha=(\varkappa_{ij}-d_{ij})\Delta\delta_{ij}$. Пусть $\delta_{ij}=0$, $(i, j)\in U_{оп}$. Соотношения (9) не выполняются при $\varkappa_{ij}\overline{\in}[0, d_{ij}]$. Из (8) получаем $\alpha=(\varkappa_{ij}-d_{ij})\Delta\delta_{ij}$ при $\Delta\delta_{ij}>0$; $\alpha=\varkappa_{ij}\Delta\delta_{ij}$ при $\Delta\delta_{ij}<0$.

Из этих вычислений следует правило выбора опорной компоненты $\delta_{i_0j_0}$, изменение которой ведет к увеличению двойственной целевой функции с наибольшей скоростью. На опорных дугах, на которых не выполняются соотношения (9), отметим число $\varkappa_{ij}$, если $\delta_{ij}<0$ или $\delta_{ij}=0$, $\varkappa_{ij}<0$, и число $\varkappa_{ij}-d_{ij}$, если $\delta_{ij}>0$ или $\delta_{ij}=0$, $\varkappa_{ij}>d_{ij}$. Пусть максимальное по модулю отмеченное число ω^0 принадлежит дуге (i_0, j_0). Отсюда следует, что при $\Delta\delta_{i_0j_0}=$ $=\sigma\operatorname{sign}\omega^0$, $\sigma>0$, двойственная целевая функция возрастает со скоростью $|\omega^0|$.

Будем увеличивать σ. В предыдущем параграфе вычислен максимально допустимый шаг, при котором значение двойственной целевой функции увеличивается. Эти вычисления можно повторить и для сетевой задачи.

Однако найдем шаг σ^0, который возможно и не будет максимальным, но требует меньших вычислений.

Ограничение на шаг, которое налагается опорной дугой, оставим прежним (см. (12), § 1):

$$\sigma_{i_0j_0}=\begin{cases} |\delta_{i_0j_0}|, \text{ если } 0\leqslant\varkappa_{i_0j_0}\leqslant d_{i_0j_0}; \\ \infty \text{ — в остальных случаях.}\end{cases} \qquad (10)$$

Ограничение на шаг по неопорной дуге будем искать из условия, что копоток по этой дуге обратился в нуль. При изменении опорного дугового копотока $\delta_{i_0j_0}$ изменяется часть неопорных дуговых копотоков. Если на опоре $S_{\text{оп}}$ по возмущению $\{\Delta\delta_{ij}=\Delta\delta_{i_0j_0}$ при $(i, j)=(i_0, j_0)$, $\Delta\delta_{ij}=0$, $(i, j)\in U_{\text{оп}}\setminus(i_0, j_0)\}$ сначала подсчитать изменение потенциалов Δu_i узлов $i\in I$, а затем вычислить изменения неопорных дуговых копотоков $\Delta\delta_{ij}$, $(i, j)\in U_{\text{н}}$, то придем к следующему: $\Delta\delta_{ij}=-\Delta\delta_{i_0j_0}$ в случае, когда в цикле дуги (i, j) и (i_0, j_0) одинаково ориентированы; $\Delta\delta_{ij}=\Delta\delta_{i_0j_0}$ — в противном случае. Для удобства вычислений в первом случае дугу помечаем знаком «—», во втором — знаком «+». Дуги $(i, j)\in U_{\text{н}}$, в циклы которых дуга (i_0, j_0) не входит, остаются непомеченными.

Таким образом, ограничение на шаг по неопорной дуге с $\delta_{ij}\neq 0$ равно

$$\sigma_{ij}=\begin{cases} \delta_{ij}, \text{ если } \delta_{ij}>0 \text{ и знаки у } \omega^0 \text{ и дуги } (i, j) \text{ различны;} \\ -\delta_{ij}, \text{ если } \delta_{ij}<0 \text{ и знаки у } \omega^0 \text{ и дуги } (i, j) \text{ одинаковы;} \\ \infty \text{ — в остальных случаях.}\end{cases} \qquad (11)$$

Минимальное из чисел (10), (11) принимаем за $\sigma^0=\sigma_{i_*j_*}$. Если $\sigma^0=\infty$, то в сети не существует потока. При $\sigma^0<\infty$ строим новый копоток $\bar{\delta}$: к копотокам на опорной дуге (i_0, j_0) и на положительных неопорных дугах (i, j) добавляем, а из копотоков на отрицательных неопорных дугах вычитаем число $\sigma^0 \operatorname{sign}\omega^0$. Остальные дуговые копотоки сохраняем. Если $(i_*, j_*)=(i_0, j_0)$, то опору $S_{\text{оп}}$ не меняем. При $(i_*, j_*)\neq(i_0, j_0)$ новая опора $(S_{\text{оп}})_{\text{нов}}$ получается из старой после замены дуги (i_0, j_0) на дугу (i_*, j_*). За итерацию $\{\delta, S_{\text{оп}}\}\to\{\delta, S_{\text{оп}}\}_{\text{нов}}$ значение двойственной целевой функции возрастает на величину $\sigma^0|\omega^0|$.

Замечание. Из анализа формулы (8) следует: при $\delta_{ij}=0$, $(i, j)\in U_н$, ограничение на шаг равно нулю ($\sigma_{ij}=0$), если дуга (i, j) положительна и $\omega^0>0$ или дуга (i, j) отрицательна и $\omega^0<0$; в остальных случаях $\sigma_{ij}=\infty$.

5. Построение начального опорного копотока. Особенность задачи о потоке минимальной стоимости с учетом пропускных способностей дуг состоит в том, что двойственный план для нее строится просто. При любых числах u_i, $i\in I$, совокупность чисел $\{u_i, w_{ij}, i\in I, (i,j)\in U\}$, где $w_{ij}=0$ при $u_i-u_j\leqslant c_{ij}$ и $w_{ij}=u_i-u_j-c_{ij}$ при $u_i-u_j>c_{ij}$, составляет двойственный план задачи. Однако ценность такого двойственного плана, вообще говоря, невелика. Изложенный метод будет тем более эффективным, чем ближе двойственный план к оптимальному. Поэтому актуальным становится вопрос об использовании опыта и интуиции специалистов.

Если начальный копоток известен, то нужно указать для него опору. Поскольку неопорные дуговые копотоки вычисляются по опорным, то естественно в опору включать те дуги (i, j), которым соответствует наиболее надежная информация δ_{ij}. Здесь можно использовать не только чисто двойственную информацию о степени влияния ограничений $(0, d_{ij})$ на оптимальную стоимость потока , но и прямую информацию о компонентах оптимального потока. Из условий дополняющей нежесткости следует, что $\delta_{ij}=0$ для некритической дуги в оптимальном потоке.

6. Пример. Найдем двойственным опорным методом оптимальный поток на сети, изображенный на рис. II.1. По начальным данным

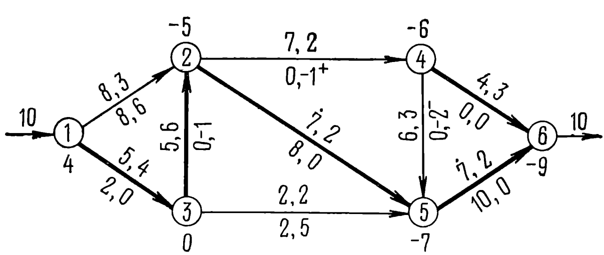


Рис. II.1

u_i, $i\in I$, вычислены дуговые копотоки δ_{ij}. Опора построена с помощью дуг, на которых $\delta_{ij}=0$. На этом же рисунке построен псевдопоток. На дугах (2, 5), (5, 6) критерий оптимальности не выполняется. В качестве дуги (i_0, j_0) выбираем (5, 6). Помечаем неопорные дуги, составляющие вместе с (i_0, j_0) цикл: дуга (2, 4) положительна, дуга (4, 5) отрицательна. Шаг $\sigma^0 = 1$ реализуется на дуге (2, 4). Строим новый опорный копоток и соответствующий псевдопоток. Для них критерий оптимальности выполняется. Оптимальный поток: $x_{12}=8$, $x_{13}=2$, $x_{24}=3$, $x_{25}=5$, $x_{32}=0$, $x_{35}=2$, $x_{45}=0$, $x_{46}=3$, $x_{56}=7$.

Глава III

ПРЯМОЙ БЕЗОПОРНЫЙ МЕТОД

В данной главе описывается реализация принципа допустимых направлений. В отличие от реализации, приведенной в гл. I, вспомогательные (производные) задачи решаются методом динамического программирования без привлечения опор исходной транспортной задачи. Эффективность получающихся алгоритмов объясняется тем, что транспортные задачи представляют весьма специальный класс задач линейного программирования.

Другой подход к методам данной главы описан в [3], [4].

§ 1. Производная задача

Для матричной и сетевой транспортных задач с известным планом перевозок или потоком строится вспомогательная задача, решение которой позволяет или доказать оптимальность текущего плана, или улучшить его.

1. Матричная транспортная задача. Пусть задан план перевозок $x = \{x_{ij},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}\}$ в задаче

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i,\quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j,\ 0 \leqslant x_{ij} \leqslant d_{ij},\ d_{ij} < \infty, \tag{1}$$

$$i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}.$$

Совокупность чисел $l = \{l_{ij},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}\}$ называется *допустимым направлением* для плана x, если для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ совокупность $x(\varepsilon) = x + \varepsilon l$ при всех ε, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, является планом перевозок. Легко проверить, что l — допустимое направление тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j=1}^{m} l_{ij}=0,\quad \sum_{i=1}^{n} l_{ij}=0,\quad l_{ij}\geqslant 0,\quad (i,\ j)\in I^{\text{н}};$$
$$l_{ij}\leqslant 0,\quad (i,\ j)\in I^{\text{в}},\quad i=\overline{1,\ n},\quad j=\overline{1,\ m}. \tag{2}$$

Здесь $I^{\text{н}}=\{(i,\ j):\ x_{ij}=0\}$, $I^{\text{в}}=\{(i,\ j):\ x_{ij}=d_{ij}\}$.

Допустимое направление l называется *подходящим* для плана перевозок x, если $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} c_{ij}l_{ij}<0$. Среди подходящих направлений будем искать *оптимальное направление*, доставляющее функции $\sum\sum c_{ij}l_{ij}$ минимум. Задача поиска оптимального направления при ограничениях (2) имеет решение с $\sum\sum c_{ij}l_{ij}>-\infty$ только в случае, когда x — оптимальный план перевозок, ибо если l — подходящее направление, то и αl при любом $\alpha>0$ — подходящее направление.

Среди всевозможных *нормировочных условий* рассмотрим следующее:

$$l_{ij}\leqslant d_{ij},\quad (i,\ j)\in I^{\text{н}};\quad l_{ij}\geqslant -d_{ij},\quad (i,\ j)\in I^{\text{в}};$$
$$-x_{ij}\leqslant l_{ij}\leqslant d_{ij}-x_{ij},\quad (i,\ j)\in I^{\text{п}}; \tag{3}$$
$$I^{\text{п}}=\{(i,\ j):\ 0<x_{ij}<d_{ij}\}.$$

В этом случае поиск оптимального направления сводится к задаче

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}l_{ij}\to\min,$$
$$\sum_{j=1}^{m} l_{ij}=0,\quad i=\overline{1,\ n};\quad \sum_{i=1}^{n} l_{ij}=0,\quad j=\overline{1,\ m};$$
$$0\leqslant l_{ij}\leqslant d_{ij},\quad (i,\ j)\in I^{\text{н}}; \tag{4}$$
$$-d_{ij}\leqslant l_{ij}\leqslant 0,\quad (i,\ j)\in I^{\text{в}};\quad -x_{ij}\leqslant l_{ij}\leqslant d_{ij}-x_{ij},\quad (i,\ j)\in I^{\text{п}}.$$

Эта задача имеет решение для любого плана перевозок x. Подобные задачи для построения оптимальных направлений будем называть *производными задачами* на плане перевозок x, планы производных задач — *производными планами.*

Производный план l назовем *отрицательным*, если $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} c_{ij}l_{ij}<0$. Аналогично вводятся понятия неотрицательных производных планов.

Задача, *двойственная* к производной задаче (4), имеет вид

$$\sum_{(i,\ j)\in I^{\text{в}}\cup I^{\text{п}}} x_{ij}p_{ij}+\sum_{(i,\ j)\in I^{\text{н}}\cup I^{\text{п}}} (d_{ij}-x_{ij})\,q_{ij}\to\min,$$

$$y_i+z_j-q_{ij}\leqslant c_{ij},\ q_{ij}\geqslant 0,\ (i,\ j)\in I^{\text{н}}; \tag{5}$$

$$y_i+z_j+p_{ij}-q_{ij}=c_{ij},\ p_{ij}\geqslant 0,\ q_{ij}\geqslant 0,\ (i,\ j)\in I^{\text{в}}\cup I^{\text{п}}.$$

Приведем вторую схему получения производной задачи (4), основанную на теории двойственности. Для плана перевозок x запишем критерий оптимальности: план перевозок x оптимален тогда и только тогда, когда существует такой коплан δ, что выполняются условия (дополняющей нежесткости):

$$\delta_{ij}\leqslant 0,\ (i,\ j)\in I^{\text{н}};\ \delta_{ij}\geqslant 0,\ (i,\ j)\in I^{\text{в}};\ \delta_{ij}=0,\ (i,\ j)\in I^{\text{п}}.$$

Эти соотношения в терминах двойственного плана $\{u,\ v,\ w\}$ имеют вид

$$u_i+v_j\leqslant c_{ij},\ (i,\ j)\in I^{\text{н}};\ u_i+v_j-w_{ij}=c_{ij},\ w_{ij}\geqslant 0,\ (i,\ j)\in I^{\text{в}};$$

$$u_i+v_j=c_{ij},\ (i,\ j)\in I^{\text{п}}. \tag{6}$$

Для проверки полученных соотношений на совместность, а значит, и для проверки плана перевозок на оптимальность введем задачу

$$-\sum_{(i,\ j)\in I^{\text{в}}\cup I^{\text{п}}} f_{ij}p_{ij}+\sum_{(i,\ j)\in I^{\text{н}}\cup I^{\text{п}}} g_{ij}q_{ij}\to\min,$$

$$\begin{gathered} u_i+v_j-q_{ij}\leqslant c_{ij},\ q_{ij}\geqslant 0,\ (i,\ j)\in I^{\text{н}};\\ u_i+v_j+p_{ij}-w_{ij}=c_{ij},\ w_{ij}\geqslant 0,\ p_{ij}\geqslant 0,\ (i,\ j)\in I^{\text{в}};\\ u_i+v_j+p_{ij}-q_{ij}=c_{ij},\ p_{ij}\geqslant 0,\ q_{ij}\geqslant 0,\ (i,\ j)\in I^{\text{п}}, \end{gathered} \tag{7}$$

где числа f_{ij}, g_{ij} удовлетворяют условиям

$$f_{ij}<0 \text{ при } x_{ij}>0;\quad g_{ij}>0 \text{ при } x_{ij}<d_{ij}. \tag{8}$$

Если совокупность $\{u,\ v,\ w\}$ удовлетворяет соотношениям (6), то совокупность $\{u,\ v,\ w,\ p=0,\ q=0\}$ является решением задачи (7), на котором целевая функция принимает нулевое значение.

Задача (7) всегда имеет решение $\{u,\ v,\ w,\ p,\ q\}$. Если на этом решении целевая функция принимает нулевое значение, то в силу (8) имеем $p_{ij}=0$ при $x_{ij}>0$; $q_{ij}=0$

при $x_{ij}<d_{ij}$. Подставив эти значения в ограничения задачи (7), убеждаемся, что совокупность $\{u, v, w\}$ удовлетворяет соотношениям (6). Следовательно, проверка плана перевозок x на оптимальность сводится к решению задачи (7).

Если положить

$$f_{ij}=-x_{ij},\ (i, j)\in I^{\text{в}}\cup I^{\text{п}};\ g_{ij}=d_{ij}-x_{ij},\ (i, j)\in I^{\text{н}}\cup I^{\text{п}};$$
$$u_i=y_i,\ v_j=z_j,\ i=\overline{1, n},\ j=\overline{1, m};\ q_{ij}=w_{ij},\ (i, j)\in I^{\text{в}},$$

то задача (7) совпадает с задачей (5). Таким образом, производная задача на плане перевозок x является двойственной задачей к задаче проверки плана перевозок на оптимальность.

2. Сетевая транспортная задача. Рассмотрим на сети поток $x=\{x_{ij},\ (i, j)\in U\}$ и задачу

$$\begin{gathered}\sum_{(i, j)\in U} c_{ij}x_{ij}\to\min,\\ \sum_{j\in I^+(i)} x_{ij}-\sum_{j\in I^-(i)} x_{ji}=a_i,\ i\in I,\\ 0\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij},\ (i, j)\in U.\end{gathered}\tag{9}$$

Совокупность чисел $l=l(x)=\{l_{ij},\ (i, j)\in U\}$ называется *допустимым направлением для потока* x на сети $S=\{I, U\}$, если для некоторого числа $\varepsilon_0>0$ совокупность $x(\varepsilon)=x+\varepsilon l$ при всех ε, $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, является потоком на сети S. Легко проверить, что l — допустимое направление тогда и только тогда, когда

$$\begin{gathered}\sum_{j\in I^+(i)} l_{ij}-\sum_{j\in I^-(i)} l_{ji}=0,\ i\in I;\\ l_{ij}\geqslant 0,\ (i, j)\in U^{\text{н}};\ l_{ij}\leqslant 0,\ (i, j)\in U^{\text{в}}.\end{gathered}\tag{10}$$

Здесь $U^{\text{н}}=\{(i, j):\ x_{ij}=0\}$, $U^{\text{в}}=\{(i, j):\ x_{ij}=d_{ij}\}$.

Допустимое направление l называется *подходящим для потока* x, если $\sum_{(i, j)\in U} c_{ij}l_{ij}<0$. Введем нормировочное условие

$$l_{ij}\leqslant d_{ij},\ (i, j)\in U^{\text{н}};\ l_{ij}\geqslant -d_{ij},\ (i, j)\in U^{\text{в}};$$
$$-x_{ij}\leqslant l_{ij}\leqslant d_{ij}-x_{ij},\ (i, j)\in U^{\text{п}},\ U^{\text{п}}=\{(i, j):\ 0<x_{ij}<d_{ij}\}.$$

Добавив эти соотношения к (10), получим *производную* *задачу на потоке* x для поиска *оптимального направления*

$$\sum_{(i,\ j)\in U} c_{ij} l_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j\in I^+(i)} l_{ij} - \sum_{j\in I^-(i)} l_{ji} = 0,\ i\in I;\ 0\leqslant l_{ij}\leqslant d_{ij},\ (i,\ j)\in U^{\text{н}}; \quad (11)$$

$$-d_{ij}\leqslant l_{ij}\leqslant 0,\ (i,\ j)\in U^{\text{в}};\ -x_{ij}\leqslant l_{ij}\leqslant d_{ij}-x_{ij},\ (i,\ j)\in U^{\text{п}}.$$

План производной задачи (производный поток) назовем *отрицательным*, если $\sum_{(i,\ j)\in U} c_{ij} l_{ij} < 0$.

Задача, двойственная к производной (11), имеет вид

$$\sum_{(i,\ j)\in U^{\text{в}}\cup U^{\text{п}}} x_{ij} p_{ij} + \sum_{(i,\ j)\in U^{\text{н}}\cup U^{\text{п}}} (d_{ij}-x_{ij}) q_{ij} \to \min,$$

$$y_i - y_j - q_{ij} \leqslant c_{ij},\ q_{ij}\geqslant 0,\ (i,\ j)\in U^{\text{н}}; \quad (12)$$

$$y_i - y_j + p_{ij} - q_{ij} = c_{ij},\ p_{ij}\geqslant 0,\ q_{ij}\geqslant 0,\ (i,\ j)\in U^{\text{в}}\cup U^{\text{п}}.$$

Последняя задача, а через нее и производная задача (11) легко получаются из теории двойственности. Действительно, поток x оптимален тогда и только тогда, когда для некоторого копотока δ выполняются соотношения $\delta_{ij}\leqslant 0$, $(i,\ j)\in U^{\text{н}}$; $\delta_{ij}\geqslant 0$, $(i,\ j)\in U^{\text{в}}$; $\delta_{ij}=0$, $(i,\ j)\in U^{\text{п}}$, или в терминах двойственного плана $\{u,\ w\}$:

$$u_i - u_j \leqslant c_{ij},\ (i,\ j)\in U^{\text{н}};$$

$$u_i - u_j - w_{ij} = c_{ij},\ w_{ij}\geqslant 0,\ (i,\ j)\in U^{\text{в}}; \quad (13)$$

$$u_i - u_j = c_{ij},\ (i,\ j)\in U^{\text{п}}.$$

Для проверки соотношений (13) на совместность введем задачу

$$-\sum_{(i,\ j)\in U^{\text{в}}\cup U^{\text{п}}} f_{ij} p_{ij} + \sum_{(i,\ j)\in U^{\text{н}}\cup U^{\text{п}}} g_{ij} q_{ij} \to \min,$$

$$u_i - u_j - q_{ij} \leqslant c_{ij},\ q_{ij}\geqslant 0,\ (i,\ j)\in U^{\text{н}}; \quad (14)$$

$$u_i - u_j + p_{ij} - w_{ij} = c_{ij},\ w_{ij}\geqslant 0,\ p_{ij}\geqslant 0,\ (i,\ j)\in U^{\text{в}};$$

$$u_i - u_j + p_{ij} - q_{ij} = c_{ij},\ p_{ij}\geqslant 0,\ q_{ij}\geqslant 0,\ (i,\ j)\in U^{\text{п}},$$

где числа f_{ij}, g_{ij} таковы, что $f_{ij}<0$ при $x_{ij}>0$; $g_{ij}>0$ при $x_{ij}<d_{ij}$.

Как и для случая матричной модели, нетрудно показать, что система (13) совместна тогда и только тогда, когда на решении задачи (14) значение целевой функции равно нулю. При $f_{ij}=-x_{ij}$, $(i, j)\in U^{\text{в}} \cup U^{\text{п}}$; $g_{ij}=d_{ij}-x_{ij}$, $(i, j)\in U^{\text{н}} \cup U^{\text{п}}$; $w_{ij}=q_{ij}$, $(i, j)\in U^{\text{в}}$, $u_i=y_i$, $i\in I$, задача (14) совпадает с задачей (12). Таким образом, производная задача на потоке x — это задача, двойственная к задаче по проверке потока x на оптимальность.

Хотя в формулировке задачи (11) участвуют узлы и дуги исходной сети S, но их параметры изменились и поэтому более правильно считать, что производная задача определена на новой сети $S_x=\{I_x, U_x\}$, которую будем называть *производной сетью.* Иногда, чтобы не иметь дело с отрицательными дуговыми производными потоками, производные задача и сеть заменяются другими эквивалентными производными задачей и сетью, в которых дуговые потоки неотрицательны. Однако при этом стоимости некоторых дуг (производные стоимости) становятся отрицательными. Опишем такой переход для производной задачи (11).

Дуга $(i, j)\in U^{\text{н}}$ с параметрами d_{ij}, c_{ij} не преобразуется: $\overset{x}{c}_{ij}=c_{ij}$, $\overset{x}{d}_{ij}=d_{ij}$. Дугу $(i, j)\in U^{\text{в}}$ заменим на дугу (j, i) с параметрами $\overset{x}{c}_{ji}=-c_{ij}$, $\overset{x}{d}_{ji}=d_{ij}$. Дугу $(i, j)\in U^{\text{п}}$ заменим двумя ориентированными (или одной неориентированной) дугами: (i, j) с параметрами $\overset{x}{c}_{ij}=c_{ij}$, $\overset{x}{d}_{ij}=d_{ij}-x_{ij}$; (j, i) с параметрами $\overset{x}{c}_{ji}=-c_{ij}$, $\overset{x}{d}_{ji}=x_{ij}$. Интенсивности всех узлов равны нулю. Полученную сеть $S_x=\{I_x, U_x\}$ также будем называть *производной (с неотрицательными дуговыми потоками)*. Производная задача на ней, эквивалентная задаче (11), имеет вид

$$\sum_{(i, j)\in U_x} \overset{x}{c}_{ij} l_{ij}\to\min,$$

$$\sum_{j\in I_x^{+}(i)} l_{ij}-\sum_{j\in I_x^{-}(i)} l_{ji}=0,\ i\in I_x,\ 0\leqslant l_{ij}\leqslant \overset{x}{d}_{ij},\ (i, j)\in U_x.$$

§ 2. Общая схема метода

Исходя из анализа производной задачи, формулируется критерий оптимальности текущего плана и описывается общая схема улучшения неоптимальности плана.

1. Матричная транспортная задача. Общий критерий оптимальности принципа допустимых направлений гласит: план перевозок в задаче

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij}=a_i, \ \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=b_j, \tag{1}$$

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant d_{ij}, \ i=\overline{1, n}, \ j=\overline{1, m},$$

оптимален тогда и только тогда, когда плану x не соответствует ни один отрицательный производный план или, другими словами, производная задача для x

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}l_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{m} l_{ij}=0, \ \sum_{i=1}^{n} l_{ij}=0, \tag{2}$$

$$-x_{ij} \leqslant l_{ij} \leqslant d_{ij}-x_{ij}, \ i=\overline{1, n}, \ j=\overline{1, m},$$

не имеет отрицательных планов l.

Проанализируем производную задачу (2) с отрицательными планами. В транспортной таблице такой задачи не существует строки или столбца с единственной ненулевой компонентой производного плана l, ибо в противном случае нарушается условие баланса по этим строке и столбцу. Из свойств опоры следует, что из клеток, содержащих ненулевые компоненты производного плана l, можно составить хотя бы один цикл. Поскольку вектор l задает допустимое направление для плана перевозок x, то при некотором обходе цикла в клетке (i, j), лежащей на конце вертикального звена, должно выполняться неравенство $x_{ij}<d_{ij}$, а в клетке (i, j), лежащей на конце горизонтального звена,— неравенство $x_{ij}>0$. Цикл, удовлетворяющий этим условиям, назовем контуром.

Для удобства вычислений клетки $(i, j) \in U^{\text{н}}$ с $x_{ij}=0$ пометим знаком «+», клетки $(i, j) \in U^{\text{в}}$ с $x_{ij}=d_{ij}$ — знаком «—». Клетки $(i, j) \in U^{\text{п}}$, в которых перевозки удовлетворяют неравенству $0<x_{ij}<d_{ij}$, не помечаем, считая их положительными или отрицательными в зависимости от того, на конец вертикального или горизонтального звена цикла они попали. Составим сумму по

клеткам цикла $\sum c_{ij} \operatorname{sign}(i, j)$. Из существования отрицательного производного плана следует, что хотя бы для одного контура эта сумма отрицательна. Такой контур назовем *отрицательным*, а сумму $\sum c_{ij} \operatorname{sign}(i, j)$ — его *значением*.

Обратное утверждение очевидно: если в транспортной таблице производной задачи существует отрицательный контур, то производная задача имеет отрицательный план.

Таким образом, доказан следующий

Критерий оптимальности. Для оптимальности плана перевозок задачи (1) необходимо и достаточно, чтобы в транспортной таблице его производной задачи (2) не существовало отрицательных контуров.

Проверку критерия оптимальности можно провести на транспортной таблице задачи (1).

Пусть для плана перевозок x критерий оптимальности не выполняется. Тогда, следуя принципу допустимых направлений, к перевозкам в положительных клетках отрицательного контура добавляем, а из перевозок отрицательных клеток вычитаем максимальное число Θ^0, при котором прямые ограничения транспортной задачи (1) не нарушаются. Нетрудно сообразить, что Θ^0 — минимальное из чисел $d_{ij}-x_{ij}$ в положительных клетках и чисел x_{ij} в отрицательных. Остальные перевозки не меняем. За итерацию транспортные расходы уменьшаются на величину $\Theta^0 \left|\sum c_{ij} \operatorname{sign}(i, j)\right|$. На новом плане перевозок по крайней мере один отрицательный контур ликвидируется.

Таков первый вариант общей схемы решения транспортной задачи (1) прямым безопорным методом. Он сводится к ряду задач построения отрицательных контуров с последующим изменением перевозок по клеткам этих контуров, что ведет к улучшению текущего плана перевозок. Методы построения отрицательных контуров рассматриваются в следующем параграфе *).

В описанном варианте производная задача (2) решалась прямым методом, т. е. непосредственно строились планы этой задачи. Второй вариант общей схемы прямого безопорного метода решения транспортной задачи связан

*) Справедливо утверждение: значение целевой функции производной задачи (2) на оптимальном отрицательном плане равно положительной комбинации значений конечного числа отрицательных контуров.

с двойственным методом решения производной задачи, т. е. с решением задачи

$$\sum_{(i,\ j)\in I^{\text{в}}\cup I^{\text{п}}} x_{ij}p_{ij}+\sum_{(i,\ j)\in I^{\text{н}}\cup I^{\text{п}}} (d_{ij}-x_{ij})\,q_{ij}\to\min,$$

$$y_i+z_j-q_{ij}\leqslant c_{ij},\ q_{ij}\geqslant 0,\ (i,\ j)\in I^{\text{н}}; \tag{3}$$

$$y_i+z_j+p_{ij}-q_{ij}=0,\ p_{ij}\geqslant 0,\ q_{ij}\geqslant 0,\ (i,\ j)\in I^{\text{в}}\cup I^{\text{п}}.$$

Отсюда следует второй критерий оптимальности: для оптимальности плана перевозок x необходимо и достаточно, чтобы на решении задачи (3) целевая функция принимала нулевое значение. Интересна физическая интерпретация задачи (3). Если приведенный критерий оптимальности не выполняется, то по решению $\{y,\ z,\ p,\ q\}$ строится отрицательный производный план и с помощью него улучшается план перевозок x.

2. Сетевая транспортная задача. Из принципа допустимых направлений следует критерий оптимальности: поток x в задаче

$$\sum_{(i,\ j)\in U} c_{ij}x_{ij}\to\min,$$

$$\sum_{j\in I^+(i)} x_{ij}-\sum_{j\in I^-(i)} x_{ji}=a_i,\ i\in I, \tag{4}$$

$$0\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij},\ (i,\ j)\in U,$$

оптимален в том и только в том случае, если для него не существует ни одного отрицательного производного потока.

Пусть в задаче

$$\sum_{(i,\ j)\in U} c_{ij}l_{ij}\to\min,$$

$$\sum_{j\in I^+(i)} l_{ij}-\sum_{j\in I^-(i)} l_{ji}=0,\ i\in I, \tag{5}$$

$$-x_{ij}\leqslant l_{ij}\leqslant d_{ij}-x_{ij},\ (i,\ j)\in U,$$

имеется отрицательный производный поток l. Из того, что в задаче (5) интенсивности узлов $i\in I$ равны нулю и поток l нетривиален, следует, что частичная сеть сети S, состоящая из дуг $(i,\ j)\in U$ с $l_{ij}\neq 0$, не содержит висячих дуг, но содержит хотя бы один цикл. Поскольку l — допустимое направление, то при некотором обходе на дугах циклов выполняются неравенства: $x_{ij}<d_{ij}$, если дуга $(i,\ j)$ прямая; $x_{ij}>0$, если дуга $(i,\ j)$ обратная. Циклы с этими свойствами назовем контурами. Прямым дугам контура припишем знак «+» ($\operatorname{sign}(i,\ j)=1$), обратным—

знак «—» ($\operatorname{sign}(i, j) = -1$). Контур назовем отрицательным, если вдоль него $\sum c_{ij} \operatorname{sign}(i, j) < 0$. Вдоль каждого контура компоненты l_{ij} производного потока постоянны по модулю и их знак совпадает со знаком соответствующих дуг. Поэтому отрицательность производного потока l означает, что в сети S существует по крайней мере один отрицательный контур.

Справедливо и обратное утверждение: если в сети S существует отрицательный контур, то задача (5) допускает отрицательный производный поток. Для доказательства достаточно положить вдоль контура

$$l_{ij} = \Theta, \text{ если } \operatorname{sign}(i, j) = 1; \quad l_{ij} = -\Theta, \text{ если } \operatorname{sign}(i, j) = -1,$$
$$\text{и } l_{ij} = 0, \text{ если } (i, j) \text{ не принадлежит контуру.} \tag{6}$$

При достаточно малом $\Theta > 0$ построенная совокупность $\{l_{ij}\}$ составляет отрицательный производный поток.

Таким образом, приведенному выше критерию оптимальности можно придать следующую форму: для оптимальности потока x в задаче (4) необходимо и достаточно, чтобы сеть $S = \{I, U\}$ не содержала отрицательных контуров.

Замечание. Если перейти к производной сети S_x (см. § 1), то понятие контура примет более привычный вид.

Предположим, что для потока x критерий оптимальности не выполняется: на сети S обнаружен отрицательный контур. По контуру пропустим максимально допустимый производный поток l вида (6). Число Θ положим равным минимальному из чисел $d_{ij} - x_{ij}$ на прямых дугах и чисел x_{ij} на обратных дугах. При сложении потока x с производным потоком l получится новый поток $\bar{x}$, стоимость которого меньше стоимости исходного потока на величину $\Theta \left| \sum c_{ij} \operatorname{sign}(i, j) \right|$. Ясно, что после перехода к потоку $\bar{x}$ на сети S исчезнет по крайней мере один отрицательный контур. Если пропускные способности дуг и дуговые потоки x_{ij} суть целые числа, то, очевидно, через конечное число итераций будет построен оптимальный поток. Таков первый вариант общей схемы решения задачи о потоке минимальной стоимости прямым безопорным методом.

Второй вариант общей схемы связан с решением задачи, двойственной к производной. Его детали легко описать исходя из результатов п. 1.

§ 3. Решение производной задачи

Согласно общей схеме, изложенной в § 2, решение транспортной задачи безопорным методом сводится к решению ряда производных задач. Каждый метод решения производной задачи порождает метод решения транспортной задачи. Как показано в предыдущем параграфе, решение производной задачи можно свести к построению отрицательных контуров. Поиск отрицательных контуров можно, в свою очередь, свести к различным экстремальным задачам. В данном параграфе исследуется только одна экстремальная задача, для решения которой привлекается динамическое программирование.

1. Матричная транспортная задача. Цепь с первым вертикальным звеном из клетки (i_1, j_1), $x_{i_1j_1}>0$ в клетку (i_2, j_2) транспортной таблицы назовем *путем*, если $x_{ij}<d_{ij}$ на концах вертикальных звеньев и $x_{ij}>0$ на концах горизонтальных звеньев цепи. Следовательно, *контур*, введенный в § 2,— путь, начало которого совпадает с концом. Пусть клеткам приписаны знаки по правилам § 2. Сумму $\sum c_{ij}\,\mathrm{sign}(i, j)$, вычисленную вдоль пути, назовем *значением* пути *). Будем искать отрицательный контур с минимальным значением, соответствующий пути из клетки (i_1, j_1) в ту же клетку. Следуя динамическому программированию, вложим последнюю задачу в семейство задач, состоящих в построении пути с минимальным значением из клетки (i_1, j_1) в произвольную клетку (i_k, j_k) не более чем через t промежуточных клеток. Пусть $B_t(i_k, j_k)$ — минимальное значение упомянутого пути (функция Беллмана). Рассмотрим сначала положительную клетку (i_k, j_k). В клетку (i_k, j_k) сделаем пробный шаг из отрицательной клетки (i_k, j). Значение оптимального пути из (i_1, j_1) в (i_k, j) не более чем через $t-1$ клеток равно, по определению, $B_{t-1}(i_k, j)$. Следовательно, значение пробного пути из (i_1, j_1) в (i_k, j_k) равно $B_{t-1}(i_k, j)+c_{i_kj_k}$. Минимизируя последнее выражение по отрицательным клеткам строки i_k, получим уравнение Беллмана

$$B_t(i_k, j_k)=\min_{(i_k,\, j)<0}\,[c_{i_kj_k}+B_{t-1}(i_k, j)].$$

Аналогично для отрицательной клетки (i_k, j_k)

$$B_t(i_k, j_k)=\min_{(i,\, j_k)>0}\,[-c_{i_kj_k}+B_{t-1}(i, j_k)].$$

*) При вычислении значения контура в сумму дуги входят только один раз.

Начальные условия имеют вид

$$B_0(i_1, j_1) = \begin{cases} c_{i_1 j_1}, & \text{если } (i_1, j_1) > 0; \\ -c_{i_1 j_1}, & \text{если } (i_1, j_1) < 0. \end{cases}$$

Решение уравнения Беллмана осуществим на транспортной таблице с помощью пометок.

Выберем отрицательную клетку (i_1, j_1) с наибольшей стоимостью $c_{i_1 j_1}$. Пометим ее двумя числами (метками) 0 и $\mu_{i_1 j_1} = -c_{i_1 j_1}$. Рассмотрим положительные клетки (i, j_1) столбца j_1. Пометим их парами чисел $\{(i_1, j_1), \mu_{i j_1} = \mu_{i_1 j_1} + c_{i j_1}\}$. Предположим, что на некотором этапе имеется множество помеченных клеток. Выберем среди них клетку (i_k, j_k) с минимальной второй меткой $\mu_{i_k j_k}$.

Пусть $(i_k, j_k) > 0$. Рассмотрим отрицательные (i_k, j) клетки строки i_k. Если клетка (i_k, j) не помечена, то полагаем $\{(i_k, j_k), \mu_{i_k j} = \mu_{i_k j_k} - c_{i_k j}\}$. В случае, когда клетка (i_k, j) помечена и $\mu_{i_k j_k} - c_{i_k j} \geqslant \mu_{i_k j}$, то ее метки сохраняем. Если $\mu_{i_k j_k} - c_{i_k j} < \mu_{i_k j}$, то по первым меткам восстанавливаем путь с целью обнаружения цикла. Если его нет, то меняем метки клетки на новые. В противном случае построен отрицательный контур со значением $\mu_{i_k j_k} - \mu_{i_k j} - c_{i_k j}$. Этот контур легко восстановить по первым меткам клеток, начиная с клетки (i_k, j_k). Перевозки в клетках из отрицательного контура меняем в соответствии с § 2. В результате хотя бы одна клетка поменяет знак.

Пусть $(i_k, j_k) < 0$. Просматриваем положительные клетки (i, j_k) столбца j_k. Если клетка (i, j_k) не помечена, то ей приписываем первую метку (i_k, j_k), вторую — $\mu_{i j_k} = \mu_{i_k j_k} + c_{i j_k}$. Если клетка (i, j_k) помечена, то ее метки сохраняем при $\mu_{i_k j_k} + c_{i j_k} \geqslant \mu_{i j_k}$. В случае $\mu_{i_k j_k} + c_{i j_k} < \mu_{i j_k}$ сначала по первым меткам проверяем наличие цикла. Если его нет, то метки клетки (i, j_k) меняем. Если обнаружен цикл, то он является отрицательным контуром. Меняем перевозки вдоль контура согласно § 2.

Процесс расстановки меток из клетки (i_1, j_1) прекращается, как только стабилизировались метки клеток. Если при этом не осталось непомеченных отрицательных клеток, то транспортная задача решена и текущий план перевозок является оптимальным. Процесс пометок продолжается, если в транспортной таблице остались непомеченными отрицательные клетки. Выбираем среди них клетку (i_2, j_2) с максимальной стоимостью и поступаем с ней так же, как с клеткой (i_1, j_1).

З а м е ч а н и е. Нетрудно заметить, что эффективность приведенного метода повышается для транспортных задач с фиксированными перевозками, которые можно интерпретировать как задачи оптимизации с дополнительными ограничениями. Это общее свойство переборных методов, к которым можно отнести и динамическое программирование.

Для иллюстрации безопорного метода решения транспортной задачи рассмотрим

П р и м е р. Решим транспортную задачу с данными из табл. III.1. Знаки клеток помещены в блок перевозок. Отсутствие знака означает, что клетка может быть и положительной и отрицательной.

Таблица III.1

3	2	1	3	8	4	2	1
1	−(1,3) −4	1 −	(1,3) −5	6	+(2,3) −2	2 −	(1,3) −3
7	10	2	1	3	5	8	7
+	(1,1) 6	2 −	(2,4) −2	3 −	(2,4) −6	5	+(3,4) −1
5	3	∞	12	2	6	15	8
4	+(1,1) −1	32	+(1,2) 7	1	+(2,3) 0	8	−0 −8

Первой помечаем клетку (3, 2) метками {0, —12}. Метки помещаем в «юго-восточный» блок клетки. Дальнейшие пометки невозможны, так как во втором столбце только отрицательные клетки. Этот этап в таблицах не отражен. Второй отрицательной клеткой с наибольшей стоимостью является клетка (3, 4). Пометки, начинающиеся с нее, помещены в табл. III.1. К первой метке клетки без знака приписываем такой знак («+» или «—»), который в данной попытке выбран для клетки. Продолжая процесс пометок после клетки (3, 1), обнаруживаем, что новая вторая метка $\mu_{34} = -9$ клетки (3, 4) меньше старой $\mu_{34} = -8$. Восстановление пути, который привел в клетку (3, 1), дает цикл (3, 1)—(1, 1)—(1, 3)—(2, 3)—(2, 4)—(3, 4)—(3, 1). По построению он является контуром со значением $\bar{\mu}_{34} - \mu_{34} = -1$. Вдоль этого контура меняем перевозки клеток на единицу, которая получается при выборе минимального среди чисел $d_{ij} - x_{ij}$ в положительных клетках и чисел x_{ij} в отрицательных клетках контура. Единицу добавляем к перевозкам в положительных и вычитаем из перевозок в отрицательных клетках контура. Остальные перевозки сохраняем. Новый план перевозок помещен в табл. III.2. Его стоимость меньше стоимости старого плана перевозок на $|\bar{\mu}_{34} - \mu_{34}| \cdot \Theta = 1$.

В табл. III.2 по сравнению с табл. III.1 изменились знаки клеток (1, 1), (2, 3), (3, 1). Процесс пометок из клетки (3, 4) (см. табл. III.2)

Таблица III.2

3	2	1	3	8	4	2	1
0^+	(3,1) 6	1^-	(1,3) −5	7	+(2,3) −2	2^-	(1,3) −3
7	10	2	1	3	5	8	7
$^+$	(3,1) 14	2^-	(2,4) −2	2	−(2,4) −6	6	+(3,4) −1
5	3	∞	12	2	6	15	8
5^-	(3,1) 4	32	+(1,2) 7	1	+(2,3) 0	7	−0 −8

не привел к отрицательному контуру. Поскольку в таблице не осталось ни одной непомеченной отрицательной клетки, то текущий план оптимален.

2. Сетевая транспортная задача. Пусть дана сеть $S=\{I, U\}$ с некоторым потоком x. Цепь с висячими узлами i_1 и i_k называется *путем* из i_1 в i_k, если на прямых дугах цепи выполняется неравенство $x_{ij}<d_{ij}$, а на обратных — неравенство $x_{ij}>0$. *Контур* — это путь, висячие узлы которого совпадают. Припишем дугам знаки в соответствии с § 2. Сумму $\sum c_{ij}\operatorname{sign}(i, j)$, вычисленную вдоль пути, назовем *значением* пути (в случае контура дуги суммируются только один раз). Поиск отрицательного контура сведем к построению отрицательного пути. Вложим эту задачу в семейство задач построения пути из произвольного узла i в узел j, который состоит не более чем из t дуг и имеет минимальное значение $B_t(j)$ (функция Беллмана). В отличие от п. 1 здесь функция Беллмана определена на множестве узлов, а не на множестве дуг. Обозначим:

$$\omega_+(j)=\{i\colon (i, j)\in U,\ x_{ij}<d_{ij}\}$$

и

$$\omega_-(j)=\{i\colon (j, i)\in U,\ x_{ji}>0\}.$$

Уравнение Беллмана запишется в виде

$$B_{t+1}(j)=\min\left\{\min_{i\in\omega_+(j)}\{B_t(i)+c_{ij}\},\ \min_{i\in\omega_-(j)}\{B_t(i)-c_{ji}\}\right\} \quad (1)$$

с начальным условием $B_0(j)=0,\ j\in I$.

Решим уравнение Беллмана *методом расстановки пометок* на сети. Первоначально всем узлам припишем метки (0, 0). Предположим, что на некотором шаге узлы имеют метки $\{\mu_j, k(j)\}$, $j \in I$. Выберем узел l, для которого узел с наименьшей первой меткой является соседним, т. е. принадлежит $\omega_+(l)$ или $\omega_-(l)$. Рассмотрим узлы из $\omega_+(l)$ и $\omega_-(l)$. Найдем

$$\mu_l' = \min\{\min_{i \in \omega_+(l)} \{\mu_i + c_{il}\}, \min_{i \in \omega_-(l)} \{\mu_i - c_{li}\}\} = \mu_{i_0} + c_{i_0 l}$$

$$(\text{или } \mu_{i_0} - c_{l i_0}).$$

Если $\mu_l' \geqslant \mu_l$, то метка $\{\mu_l, k(l)\}$ сохраняется. Если $\mu_l' < \mu_l$, то по вторым элементам меток найдем числа $i_1 = k(i_0)$, $i_2 = k(i_1)$ и т. д., пока не получим $k(i_s) = 0$. Если $l \,\overline{\in}\, \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$, то узлу l припишем новую метку $\{\mu_l = \mu_l', k(l) = i_0\}$. Соответственно заменим метки тех узлов, которые были помечены через узел l. В противном случае найдем отрицательный контур. Пропустим по контуру максимально допустимый поток и повторим процесс расстановки пометок. Ситуация, когда на некотором шаге нельзя изменить ни одной метки и отрицательный контур не найден, означает, что исходная транспортная задача решена. Заметим, что числа $u_i = -\mu_i$, $i \in I$, являются компонентами оптимального двойственного плана исходной задачи.

Замечание. Результаты этого пункта нетрудно перенести на матричную модель задачи, определив в п. 1 функцию Беллмана на пунктах A_i, $i = \overline{1, n}$, B_j, $j = \overline{1, m}$.

Для иллюстрации метода решим

Пример. Пусть имеется сеть с некоторым потоком (рис. III.1). Найдем оптимальный поток. Расставим метки узлов (начальные метки (0, 0) не указаны); если в узле i нет метки, полагаем, что

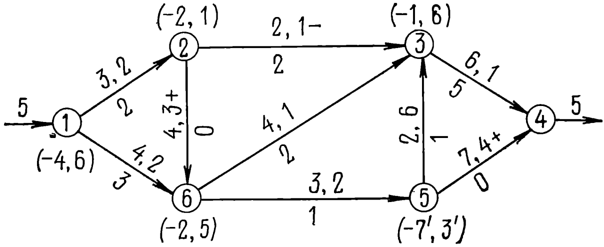


Рис. III.1

$\{\mu_i, k(i)\} = \{0, 0\}$. В качестве l рассмотрим узел 6. Получим, что $\mu_6' = -2$, i_0 положим равным 5 (могли взять 1). Поскольку $\mu_6' <$

$<\mu_6=0$ и $l=6 \overline{\in} \{5, 0\}$, то узлу 6 припишем метку $(-2, 5)$. Рассмотрим узел 1. Для него $\mu_1'=-4<\mu_1=0$ и $l=1 \overline{\in} \{6, 5\}$. Значит, узлу 1 припишем метку $\{-4, 6\}$. Далее рассмотрим узел 2. Проведя исследования, аналогичные, как для узлов 1 и 5, получим, что узлу 2 надо приписать новую метку $\{-2, 1\}$. Аналогично получается метка $\{-1, 6\}$ для узла 3. Рассмотрим узел $l=5$. Для него $\mu_5'=-7<\mu_5=0$, $i_0'=3$. Найдем числа $k(i_0)=k(3)=6$, $k(6)=5$, $k(5)=0$, т. е. $l=5 \in \in \{6, 5\}$. Найден контур $\{(6, 5)_-, (6, 3)_+, (5, 3)_-\}$ отрицательной стоимости, равной $\mu_5'-\mu_5=-7$. Пропустив по этому контуру единичный поток, получим новый поток: $x_{12}=2$, $x_{16}=3$, $x_{26}=0$, $x_{23}=2$, $x_{63}=3$, $x_{65}=0$, $x_{34}=5$, $x_{54}=0$, $x_{53}=0$, который оказывается оптимальным.

§ 4. Построение приближенных решений

Классическая схема принципа допустимых направлений нацелена на получение оптимальных планов. В [ч. 1] приводится ее модификация, основанная на α-допустимых направлениях, которая нацелена на построение субоптимальных планов. В данном параграфе описывается реализация указанной модификации, полученная с помощью теории двойственности (см. § 1).

1. Матричная транспортная задача. Требуется, исходя из начального плана перевозок x транспортной задачи

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij}=a_i, \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=b_j,$$

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant d_{ij}, \quad i=\overline{1, n}, \quad j=\overline{1, m},$$

построить субоптимальный план перевозок, транспортные расходы которого не превосходят минимально возможных на заданную величину.

Выберем некоторое число $\varepsilon \geqslant 0$. Введем множества $I^{\text{н}}(\varepsilon)=\{(i, j): 0 \leqslant x_{ij} \leqslant \varepsilon\}$, $I^{\text{в}}(\varepsilon)=\{(i, j): d_{ij}-\varepsilon \leqslant x_{ij} \leqslant \leqslant d_{ij}\}$, $I^{\text{п}}(\varepsilon)=\{(i, j): \varepsilon < x_{ij} < d_{ij}-\varepsilon\}$. Рассмотрим задачу

$$\sum_{(i, j)\in I^{\text{в}}(\varepsilon) \cup I^{\text{п}}(\varepsilon)} x_{ij}p_{ij} + \sum_{(i, j)\in I^{\text{н}}(\varepsilon) \cup I^{\text{п}}(\varepsilon)} (d_{ij}-x_{ij})\, q_{ij} \to \min,$$

$$u_i+v_j-q_{ij} \leqslant c_{ij}, \quad q_{ij} \geqslant 0, \quad (i, j) \in I^{\text{н}}(\varepsilon); \tag{1}$$

$$u_i+v_j+p_{ij}-q_{ij}=c_{ij}, \quad p_{ij} \geqslant 0, \quad q_{ij} \geqslant 0, \quad (i, j) \in I^{\text{в}}(\varepsilon) \cup I^{\text{п}}(\varepsilon).$$

Двойственной для нее является следующая:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}l_{ij}\to\min,$$

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{m} l_{ij}=0,\ i=\overline{1,n};\ \sum_{i=1}^{n} l_{ij}=0,\ j=\overline{1,m};\\ 0\leqslant l_{ij}\leqslant d_{ij}-\varepsilon,\ (i,j)\in I^{\text{н}}(\varepsilon);\\ -d_{ij}+\varepsilon\leqslant l_{ij}\leqslant 0,\ (i,j)\in I^{\text{в}}(\varepsilon);\\ -x_{ij}\leqslant l_{ij}\leqslant d_{ij}-x_{ij},\ (i,j)\in I^{\text{п}}(\varepsilon).\end{gathered}\tag{2}$$

Задача (2) формально мало отличается от производной задачи на плане перевозок (см. § 1). Назовем ее *ε-производной задачей* на плане перевозок. Если ε-производная задача имеет тривиальное решение $l\equiv 0$, то план перевозок ε_0-оптимален [ч. 1]:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}^{0}\leqslant\varepsilon_0,\tag{3}$$

где

$$\varepsilon_0=-\sum_{\delta_{ij}<0}\delta_{ij}x_{ij}+\sum_{\delta_{ij}>0}\delta_{ij}(d_{ij}-x_{ij}),\ \delta_{ij}=u_i+v_j-c_{ij},$$

$$i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m},\ —$$

коплан задачи (2).

Нетривиальное решение задачи (2) задает подходящее направление для плана перевозок x.

Интерпретация и решение ε-производной задачи проводятся по той же схеме, которая описана в § 2—3. Нетрудно заметить, что введение ε упрощает решение производной задачи, так как сокращается количество клеток с двойными знаками. Теперь клетка считается положительной, если $(i, j)\in I^{\text{н}}(\varepsilon)$, т. е. $0\leqslant x_{ij}\leqslant\varepsilon$; отрицательной, если $(i, j)\in I^{\text{в}}(\varepsilon)$; с двойным знаком, если $(i, j)\in I^{\text{п}}(\varepsilon)$.

Пример. Рассмотрим задачу с данными из табл. III.3. Знаки клеток найдены по $\varepsilon=1$. Процесс расстановки пометок из клетки (3, 4) не привел к контуру. Следовательно, ε-производная задача имеет лишь тривиальное решение, а исходный план перевозок отклоняется по расходам от оптимального не более чем на единицу. Этот вывод следует из формулы (3) и табл. III.3, где приведены потенциалы строк и столбцов.

Таблица III.3

	3	12	6	8
−1	3 ┆ 2 1 + ┆ (3,1) −1	1 ┆ 3 1 − ┆ (1,1) −4	7 ┆ 4 6 − ┆ (1,1) −5	2 ┆ 1 2 − ┆ (1,1) −2
−1	7 ┆ 10 + ┆ (3,1) 7	2 ┆ 1 2 − ┆ (2,4) −2	3 ┆ 5 3 − ┆ (2,4) −6	8 ┆ 7 5 + ┆ (3,4) −1
0	5 ┆ 3 4 − ┆ (3,3) −3	∞ ┆ 12 32 − ┆ (3,3) −12	3 ┆ 6 1 + ┆ (2,3) 0	15 ┆ 8 8 − ┆ 0 −8

2. **Сетевая транспортная задача.** Построение субоптимальных потоков с помощью ε-производных задач проводится по схеме п. 1. Детали оставлены читателям в качестве упражнения.

Замечание. Построение субоптимальных планов перевозок и потоков особенно естественно в случае, когда ε-производная задача решается двойственным методом, т. е. реализуется второй вариант общей схемы прямого безопорного метода (см. § 2).

Глава IV

ДВОЙСТВЕННЫЙ БЕЗОПОРНЫЙ МЕТОД

В главе описывается реализация принципа допустимых направлений для транспортной задачи с известным двойственным планом. Исходная задача сводится к ряду вспомогательных (производных) задач. В отличие от гл. II производные задачи решаются без привлечения опор исходной задачи. Показывается, что при решении производных задач, соответствующих транспортным задачам, эффективным оказывается метод динамического программирования.

Классическим прототипом методов данной главы является венгерский метод [3].

§ 1. Производная задача

По двойственному плану транспортной задачи строится производная задача, которая отличается от производной задачи гл. III, но так же, как и последняя, позволяет убедиться в оптимальности начальной информации или улучшить ее.

1. Матричная модель. Пусть известен двойственный план $\{u, v, w\}$ транспортной задачи

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij}=a_i, \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=b_j, \tag{1}$$

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant d_{ij}, \quad i=\overline{1, n}, \quad j=\overline{1, m},$$

т. е. совокупность чисел $\{u_i, v_i, w_{ij}, i=\overline{1, n}, j=\overline{1, m}\}$, удовлетворяющих ограничениям двойственной к (1) задачи

$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_i + \sum_{j=1}^{m} b_j v_j - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} d_{ij} w_{ij} \to \max,$$

$$u_i+v_j-w_{ij} \leqslant c_{ij}, \quad w_{ij} \geqslant 0, \tag{2}$$

$$i=\overline{1, n}, \quad j=\overline{1, m}.$$

Будем считать, что вектор w согласован с копланом перевозок $\delta=\{\delta_{ij}; \ \delta_{ij}=u_i+v_j-c_{ij}, \ i=\overline{1, n}, \ j=\overline{1, m}\}$, т. е. $w_{ij}=0$ при $\delta_{ij} \leqslant 0$; $w_{ij}=\delta_{ij}$ при $\delta_{ij}>0$.

Совокупность чисел $\{y, z, s\}$, $y=\{y_i, i=\overline{1, n}\}$, $z=\{z_j, j=\overline{1, m}\}$, $s=\{s_{ij}, i=\overline{1, n}, j=\overline{1, m}\}$, называется допустимым направлением на двойственном плане $\{u, v, w\}$ (на коплане перевозок δ), если для некоторого $\varepsilon_0>0$ совокупность $\{u(\varepsilon), v(\varepsilon), w(\varepsilon)\}=\{u, v, w\}+\varepsilon\{y, z, s\}$ при всех ε, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, является двойственным планом задачи (1).

Пусть $I^+=\{(i, j): \delta_{ij}>0\}$, $I^0=\{(i, j): \delta_{ij}=0\}$, $I^-=\{(i, j): \delta_{ij}<0\}$. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что $\{y, z, s\}$ — допустимое направление тогда и только тогда, когда выполняются соотношения

$$\begin{gathered} y_i+z_j-s_{ij} \leqslant 0, \quad (i, j) \in I^+; \\ y_i+z_j-s_{ij} \leqslant 0, \quad s_{ij} \geqslant 0, \quad (i, j) \in I^0; \\ s_{ij} \geqslant 0, \quad (i, j) \in I^-. \end{gathered} \tag{3}$$

Если рассматривать только такие двойственные планы $\{u(\varepsilon), v(\varepsilon), w(\varepsilon)\}$, у которых вектор $w(\varepsilon)$ согласован с копланом перевозок $\delta(\varepsilon)=u(\varepsilon)+v(\varepsilon)-c$, то вместо (3) получим

$$\begin{gathered} y_i+z_j-s_{ij}=0, \ (i, j)\in I^+; \\ s_{ij}=0, \ (i, j)\in I^-; \\ y_i+z_j-s_{ij}\leqslant 0, \ s_{ij}\geqslant 0, \ (i, j)\in I^0, \end{gathered} \tag{4}$$

причем $s_{ij}=0$ при $y_i+z_j\leqslant 0$; $s_{ij}=y_i+z_j$ при $y_i+z_j>0$.

Допустимое направление $\{y, z, s\}$ называется подходящим на двойственном плане задачи (1), если

$$\sum_{i=1}^{n} a_i y_i + \sum_{j=1}^{m} b_j z_j - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} d_{ij} s_{ij} > 0.$$

Среди подходящих направлений будем искать оптимальные, на которых функция

$$\sum_{i=1}^{n} a_i y_i + \sum_{j=1}^{m} b_j z_j - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} d_{ij} s_{ij}$$

достигает максимума. Поскольку наряду с вектором $\{y, z, s\}$ подходящим направлением является и вектор $\alpha\{y, z, s\}$ при любом $\alpha>0$, то задача поиска оптимального направления, вообще говоря, нерегулярна. Из всевозможных нормировочных условий выберем следующее:

$$\begin{gathered} \alpha_i\leqslant y_i\leqslant \beta_i, \ i=\overline{1, n}; \ \alpha_{n+j}\leqslant z_j\leqslant \beta_{n+j}, \ j=\overline{1, m}; \\ \alpha_k<0, \ \beta_k>0, \ k=\overline{1, n+m}. \end{gathered} \tag{5}$$

Добавив (5) к условиям (4), получим регулярную задачу для поиска оптимальных направлений

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{n} a_i y_i + \sum_{j=1}^{m} b_j z_j - \sum_{(i, j)\in I^+ \cup I^0} d_{ij} s_{ij} \to \max, \\ y_i+z_j-s_{ij}=0, \ (i, j)\in I^+; \\ y_i+z_j-s_{ij}\leqslant 0, \ s_{ij}\geqslant 0, \ (i, j)\in I^0; \\ \alpha_i\leqslant y_i\leqslant \beta_i, \ \alpha_{n+j}\leqslant z_j\leqslant \beta_{n+j}, \ i=\overline{1, n}, \ j=\overline{1, m}, \end{gathered} \tag{6}$$

которую назовем производной задачей на двойственном плане перевозок.

Выше было отмечено, что компоненты s_{ij}, $(i, j)\in I^0$, плана задачи (6) должны быть согласованы с компонентами y_i, z_j, $(i, j)\in I^0$:

$$s_{ij}=0 \text{ при } y_i+z_j\leqslant 0;$$
$$s_{ij}=y_i+z_j \text{ при } y_i+z_j>0,\ (i, j)\in I^0. \tag{7}$$

Решение задачи (6) обладает таким свойством. В случае его нарушения можно при фиксированных y_i, z_j за счет уменьшения s_{ij} добиться увеличения значения целевой функции.

Получим задачу (6) по другой схеме. Согласно теории двойственности [МО], для оптимальности двойственного плана $\{u, v, w\}$ необходимо и достаточно, чтобы существовал такой план перевозок x, что выполняются условия (дополняющей нежесткости):

$$x_{ij}=0,\ (i, j)\in I^-;\ x_{ij}=d_{ij},\ (i, j)\in I^+;$$
$$0\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij},\ (i, j)\in I^0. \tag{8}$$

В подробной записи это означает, что совместна система

$$\sum_{j\in I^0(i)} x_{ij}=a_i-\sum_{j\in I^+(i)} d_{ij},\ i=\overline{1, n};$$
$$\sum_{i\in I^0(j)} x_{ij}=b_j-\sum_{i\in I^+(j)} d_{ij},\ j=\overline{1, m}; \tag{9}$$
$$0\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij},\ (i, j)\in I^0,$$

где

$$I^0(i)=\{j\colon (i, j)\in I^0\},\ I^0(j)=\{i\colon (i, j)\in I^0\}.$$

Для проверки ее на совместность введем задачу

$$-\sum_{k=1}^{n+m}\alpha_k p_k+\sum_{k=1}^{n+m}\beta_k q_k\to\min,$$

$$\sum_{j\in I^0(i)} x_{ij}-p_i+q_i=a_i-\sum_{j\in I^+(i)} d_{ij},\ p_i\geqslant 0,\ q_i\geqslant 0,\ i=\overline{1, n},$$
$$\sum_{i\in I^0(j)} x_{ij}-p_{n+j}+q_{n+j}=b_j-\sum_{i\in I^+(j)} d_{ij}, \tag{10}$$
$$p_{n+j}\geqslant 0,\ q_{n+j}\geqslant 0,\ j=\overline{1, m},\ 0\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij},\ (i, j)\in I^0,$$

в которой переменные p_k, q_k удовлетворяют равенствам $p_k q_k=0$, $k=\overline{1, n+m}$.

Если совокупность $\{x_{ij},\ (i,\ j)\in I^0\}$ удовлетворяет соотношениям (9), то очевидно, что при $\alpha_k<0$, $\beta_k>0$, $k=\overline{1,\ n+m}$, совокупность $\{x_{ij},\ (i,\ j)\in I^0;\ p_k=0,\ q_k=0,\ k=\overline{1,\ n+m}\}$ — решение задачи (10), на котором целевая функция принимает нулевое значение. И наоборот, если $\{x_{ij},\ (i,\ j)\in I^0;\ p_k=0,\ q_k=0,\ k=\overline{1,\ n+m}\}$ — решение задачи (10), то совокупность $\{x_{ij},\ (i,\ j)\in I^0\}$ удовлетворяет соотношениям (9).

Задача, двойственная к (10), имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-\sum_{j\in I^+(i)}d_{ij})y_i+\sum_{j=1}^{m}(b_j-\sum_{i\in I^+(j)}d_{ij})z_j-\sum_{(i,\ j)\in I^0}d_{ij}s_{ij}\to\max,$$

$$y_i+z_j-s_{ij}\leqslant 0,\ s_{ij}\geqslant 0,\ (i,\ j)\in I^0;\ \alpha_k\leqslant y_k\leqslant\beta_k,\ k=\overline{1,n+m}.$$

При ее решении целесообразно учитывать соотношения (7).

Если ввести переменные $s_{ij}=y_i+z_j$, $(i,\ j)\in I^+$, то последняя задача принимает вид задачи (6). Таким образом, задача (10), составленная для проверки условий оптимальности (8) двойственного плана $\{u,\ v,\ w\}$, является двойственной к производной задаче на двойственном плане.

Задаче (10) можно придать определенный физический смысл. Рассмотрим транспортную таблицу исходной задачи (1). Совокупность чисел $l=\{l_{ij}=0,\ (i,\ j)\in I^-;\ l_{ij}=d_{ij},\ (i,\ j)\in I^+;\ 0\leqslant l_{ij}\leqslant d_{ij},\ (i,\ j)\in I^0\}$ задает квазиплан перевозок. Введем числа p_k, q_k следующим образом $(r_i=\sum_{j\in I^0(i)}l_{ij}+\sum_{j\in I^+(i)}d_{ij};\ s_j=\sum_{i\in I^0(j)}l_{ij}+\sum_{i\in I^+(j)}d_{ij})$:

$$p_i=r_i-a_i,\ q_i=0,\ \text{если}\ r_i-a_i>0,\ i=\overline{1,n};$$

$$q_i=a_i-r_i,\ p_i=0,\ \text{если}\ r_i-a_i<0,\ i=\overline{1,n};$$

$$p_{n+j}=s_j-b_j,\ q_{n+j}=0,\ \text{если}\ s_j-b_j>0,\ j=\overline{1,m};$$

$$q_{n+j}=b_j-s_j,\ p_{n+j}=0,\ \text{если}\ s_j-b_j<0,\ j=\overline{1,m}.$$

Квазиплан перевозок l становится планом перевозок в транспортной задаче, если изменить объемы производства и потребления:

увеличить с a_i до a_i+p_i, если $r_i-a_i>0$, $i=\overline{1,n}$;

уменьшить с a_i до a_i-q_i, если $r_i-a_i<0$, $i=\overline{1,n}$;

увеличить с b_j до b_j+p_{n+j}, если $s_j-b_j>0$, $j=\overline{1, m}$;

уменьшить с b_j до b_j-q_{n+j}, если $s_j-b_j<0$, $j=\overline{1, m}$.

Пусть увеличение объема производства a_i на единицу требует расходов $-\alpha_i$, расходы на увеличение объема потребления b_j на единицу равны $-\alpha_{n+j}$. Аналогично пусть налагается штраф и на уменьшение объемов производства и объемов потребления: если a_i уменьшается на единицу, то штраф равен β_i, штраф за уменьшение b_j на единицу составляет β_{n+j}. В этой интерпретации задача (10) состоит в поиске такого квазиплана перевозок, при котором штраф минимален.

Рассмотрим частный случай метода при условиях решения транспортных задач с односторонними прямыми ограничениями ($d_{ij}=\infty$), характерных для *венгерского метода*.

Будем считать, что $\beta_k=1$, $k=\overline{1, n+m}$, и начальный коплан перевозок неположителен: $\delta_{ij}\leqslant 0$, $i=\overline{1, n}$, $j=\overline{1, m}$. Такой коплан перевозок легко строится по коэффициентам стоимости, если положить

$$u_i=\min_{1\leqslant j\leqslant m} c_{ij},\quad v_j=\min_{1\leqslant i\leqslant n}(c_{ij}-u_i),\quad i=\overline{1, n},\ j=\overline{1, m}.$$

При этих условиях множество $I^+=\varnothing$ и поэтому производная (6) и двойственная (10) к ней задачи имеют вид

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n} a_i y_i+\sum_{j=1}^{m} b_j z_j\to\max,\quad y_i+z_j\leqslant 0,\quad (i, j)\in I^0,\\ \alpha_i\leqslant y_i\leqslant 1,\quad i=\overline{1, n},\quad \alpha_{n+j}\leqslant z_j\leqslant 1,\quad j=\overline{1, m};\end{gathered}\tag{11}$$

$$\begin{gathered}-\sum_{k=1}^{n+m}\alpha_k p_k+\sum_{k=1}^{n+m} q_k\to\min,\\ \sum_{j\in I^0(i)} l_{ij}-p_i+q_i=a_i,\quad p_i\geqslant 0,\quad q_i\geqslant 0,\quad i=\overline{1, n};\\ \sum_{i\in I^0(j)} l_{ij}-p_{n+j}+q_{n+j}=b_j,\quad p_{n+j}\geqslant 0,\quad q_{n+j}\geqslant 0,\quad j=\overline{1, m},\\ 0\leqslant l_{ij},\quad (i, j)\in I^0.\end{gathered}\tag{12}$$

Поскольку $a_i\geqslant 0$, $b_j\geqslant 0$, $i=\overline{1, n}$, $j=\overline{1, m}$, и построение начального плана в задаче (12) тривиально ($l_{ij}=0$, $(i, j)\in I^0$; $p_k=0$, $k=\overline{1, n+m}$; $q_i=a_i$, $i=\overline{1, n}$; $q_{n+j}=b_j$,

$j=\overline{1, m}$), то вместо (12) можно рассматривать более простую задачу

$$\sum_{k=1}^{n+m} q_k \to \min, \quad \sum_{j \in I^0(i)} l_{ij} = a_i - q_i, \quad q_i \geqslant 0, \quad i=\overline{1, n};$$
$$\sum_{i \in I^0(j)} l_{ij} = b_j - q_{n+j}, \quad q_{n+j} \geqslant 0, \quad j=\overline{1, m}, \quad 0 \leqslant l_{ij}, \quad (i, j) \in I^0, \tag{13}$$

считая в случае необходимости, что $p_k \equiv 0$, $k=\overline{1, n+m}$. Из (13) очевидно

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{(i, j) \in I^0} l_{ij} =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{j=1}^{m} b_j + \sum_{j=1}^{m} q_{n+j} = \sum_{j=1}^{m} q_{n+j}. \tag{14}$$

Поэтому в задаче (13) операцию $\sum_{k=1}^{n+m} q_k \to \min$ можно заменить на любую из операций: $\sum_{i=1}^{n} q_i \to \min$, $\sum_{j=1}^{m} q_{n+j} \to \min$.

Задача (13) представляет собой частный случай транспортной задачи. Следовательно, величину $\sum_{(i, j) \in I^0} l_{ij}$ можно трактовать как объем перевозок по множеству клеток I^0. В силу (14) операция $\sum_{i=1}^{n} q_i \to \min$ эквивалентна операции $\sum_{(i, j) \in I^0} l_{ij} \to \max$. Таким образом, задача (13) эквивалентна задаче о максимальном объеме перевозок на множестве I^0:

$$\sum_{(i, j) \in I^0} l_{ij} \to \max, \quad \sum_{j \in I^0(i)} l_{ij} = a_i - q_i, \quad q_i \geqslant 0, \quad i=\overline{1, n};$$
$$\sum_{i \in I^0(j)} l_{ij} = b_j - q_{n+j}, \quad q_{n+j} \geqslant 0, \quad j=\overline{1, m}, \tag{15}$$
$$0 \leqslant l_{ij}, \quad (i, j) \in I^0.$$

Ясно, что максимально возможный объем перевозок через множество I^0 получается при $q_i=0$, $i=\overline{1, n}$, и равен $\max \sum_{(i, j) \in I^0} l_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_i$, т. е. через множество I^0 перевозится вся продукция.

В § 3 будет показано, что для задачи (15) существует оптимальный двойственный план $\{\bar{y}_i,\ i=\overline{1,n};\ \bar{z}_j,\ j=\overline{1,m}\}$, компоненты которого равны либо 1, либо 0. Совокупность чисел

$$y_i=1-2\bar{y}_i,\ i=\overline{1,n};\ z_j=1-2\bar{z}_j,\ j=\overline{1,m}, \tag{16}$$

является оптимальным планом производной задачи (11). Таким образом, компоненты плана (16) равны либо —1, либо 1.

Приведенная интерпретация задачи, двойственной к производной, позволяет найти интересную физическую интерпретацию и самой производной задачи. При этом получает исключительно прозрачный смысл соотношение двойственности между указанными задачами. Этот вопрос подробно исследуется в следующем пункте при рассмотрении сетевой модели, когда ситуация становится предельно наглядной. Перевод результатов по сетевой модели на матричную модель (15) оставляем читателям в качестве упражнения.

2. Сетевая модель. Пусть для задачи о потоке минимальной стоимости

$$\sum_{(i,\ j)\in U} c_{ij}x_{ij}\to\min,\quad \sum_{j\in I^+(i)} x_{ij}-\sum_{j\in I^-(i)} x_{ji}=a_i,\ i\in I, \qquad 0\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij},\ (i,\ j)\in U, \tag{17}$$

известен двойственный план $\{u,\ w\}$, т. е. совокупность чисел $\{u_i,\ i\in I;\ w_{ij},\ (i,\ j)\in U\}$, удовлетворяющих ограничениям двойственной задачи

$$\sum_{i\in I} a_iu_i-\sum_{(i,\ j)\in U} d_{ij}w_{ij}\to\max,$$

$$u_i-u_j-w_{ij}\leqslant c_{ij},\ w_{ij}\geqslant 0,\ (i,\ j)\in U.$$

Как обычно, будем считать, что компоненты двойственного плана w_{ij}, $(i,\ j)\in U$, согласованы с компонентами копотока $\delta_{ij}=u_i-u_j-c_{ij}$: $w_{ij}=0$, если $\delta_{ij}\leqslant 0$; $w_{ij}=\delta_{ij}$, если $\delta_{ij}>0$, $(i,\ j)\in U$.

Совокупность чисел $\{y,\ s\}$, $y=\{y_i,\ i\in I\}$, $s=\{s_{ij},\ (i,\ j)\in U\}$, назовем допустимым направлением на двойственном плане $\{u,\ w\}$, если существует такое число $\varepsilon_0>0$, что совокупность $\{u(\varepsilon),\ w(\varepsilon)\}=\{u,\ w\}+\varepsilon\{y,\ s\}$ при всех ε, $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, является двойственным планом.

Если считать, что вектор $w(\varepsilon)$ согласован с копотоком $\delta(\varepsilon)$, то нетрудно показать, что множество допустимых направлений описывается соотношениями $y_i-y_j-s_{ij}=0$, $(i, j)\in U^+$; $s_{ij}=0$, $(i, j)\in U^-$; $y_i-y_j-s_{ij}\leqslant 0$, $s_{ij}\geqslant 0$, $(i, j)\in U^0$, причем $s_{ij}=0$ при $y_i-y_j\leqslant 0$; $s_{ij}=y_i-y_j$ при $y_i-y_j>0$. Здесь $U^+=\{(i,j): \delta_{ij}>0\}$, $U^-=\{(i,j): \delta_{ij}<0\}$, $U^0=\{(i, j): \delta_{ij}=0\}$.

Допустимое направление $\{y, s\}$ называется подходящим на двойственном плане $\{u, w\}$, если

$$\sum_{i\in I} a_i y_i - \sum_{(i,\ j)\in U} d_{ij}s_{ij} > 0.$$

Оптимальным направлением назовем решение производной задачи на двойственном плане

$$\sum_{i\in I} a_i y_i - \sum_{(i,\ j)\in U^+\cup U^0} d_{ij}s_{ij}\to\max,\ y_i-y_j-s_{ij}=0,\ (i, j)\in U^+; \tag{18}$$

$$y_i-y_j-s_{ij}\leqslant 0,\ s_{ij}\geqslant 0,\ (i, j)\in U^0;\ \alpha_i\leqslant y_i\leqslant\beta_i,\ i\in I,$$

где $\alpha_i<0$, $\beta_i>0$, $i\in I$; числа s_{ij}, $(i, j)\in U^0$, согласованы с числами y_i, $i\in I$: $s_{ij}=0$, если $y_i-y_j\leqslant 0$; $s_{ij}=y_i-y_j$, если $y_i-y_j>0$.

Задача, двойственная к производной задаче (18), имеет вид

$$-\sum_{i\in I}\alpha_i p_i+\sum_{j\in I}\beta_j q_j\to\min,$$

$$\sum_{j\in I^0_+(i)} l_{ij}-\sum_{j\in I^0_-(i)} l_{ji}-p_i+q_i=a_i-\sum_{j\in I^+_+(i)} d_{ij}+\sum_{j\in I^+_-(i)} d_{ji}, \tag{19}$$

$$p_i\geqslant 0,\ q_i\geqslant 0,\ i\in I,\ 0\leqslant l_{ij}\leqslant d_{ij},\ (i, j)\in U^0,$$

где $I^0_+(i)=\{j:\ (i, j)\in U^0\}$, $I^0_-(i)=\{j:\ (j, i)\in U^0\}$, $I^+_+(i)=\{j:\ (i, j)\in U^+\}$, $I^+_-(i)=\{j:\ (j, i)\in U^+\}$.

При решении задачи (19) разумно считать, что выполнены равенства $p_i q_i=0$, $i\in I$, которые справедливы для оптимального плана задачи (19).

Задачу (19), а через нее и производную задачу (18) нетрудно получить с помощью теории двойственности. По аналогии с п. 1 можно показать, что (19) — экстремальная задача для проверки двойственного плана $\{u, w\}$ на оптимальность.

Для физической интерпретации задачи (19) сведем ее к другой, эквивалентной задаче. Среди элементов множества I выделим два множества:

$$K^+=\{i\in I\colon\ \bar a_i=a_i-\sum_{j\in I_+^+(i)} d_{ij}+\sum_{j\in I_-^+(i)} d_{ji}>0\};$$

$$K^-=\{i\in I\colon\ \bar a_i=a_i-\sum_{j\in I_+^+(i)} d_{ij}+\sum_{j\in I_-^+(i)} d_{ji}<0\}.$$

Элементы i множества K^+ соединим с дополнительным узлом s (источником) дугами (s, i), параметры которых определим следующим образом:

$$d_{si}=\bar a_i,\ c_{si}=\beta_i,\ i\in K^+.$$

Аналогично для $i\in K^-$ введем дополнительный узел t (сток), дуги (i, t) и положим

$$d_{it}=-\bar a_i,\ c_{it}=-\alpha_i,\ i\in K^-.$$

Рассмотрим задачу

$$-\sum_{i\in K^-}\alpha_i l_{it}+\sum_{i\in K^+}\beta_i l_{si}\to\max,$$

$$\sum_{j\in I_+^0(i)} l_{ij}-\sum_{j\in I_-^0(i)} l_{ji}-l_{si}=0,\ 0\leqslant l_{si}\leqslant d_{si},\ i\in K^+;$$

$$\sum_{j\in I_+^0(i)} l_{ij}-\sum_{j\in I_-^0(i)} l_{ji}+l_{it}=0,\ 0\leqslant l_{it}\leqslant d_{it},\ i\in K^-, \tag{20}$$

$$0\leqslant l_{ij}\leqslant d_{ij},\ (i, j)\in U^0.$$

Нетрудно убедиться, что решения $\{l_{ij},\ (i, j)\in U^0;\ p_i,\ q_i,\ i\in I\}$, $\{l_{ij},\ (i, j)\in U^0;\ l_{si},\ i\in K^+;\ l_{it},\ i\in K^-\}$ задач (19), (20) связаны соотношениями $l_{si}=\bar a_i-q_i$, $i\in K^+$; $l_{it}=-\bar a_i-p_i$, $i\in K^-$. Следовательно, задача (20), как и задача (19), всегда имеет решение.

Оставив читателям в качестве упражнения общий случай, рассмотрим задачу (20) при классических условиях

$$\alpha_i=-1,\ \beta_i=1,\ i\in I.$$

Из теоремы существования потока в сети (гл. I) следует, что

$$\sum_{i\in K^-} l_{it}=\sum_{i\in K^+} l_{si}.$$

Поэтому задача (20) принимает вид

$$\sum_{i\in K^+} l_{si}\to\max,$$

$$\sum_{j\in I_+^0(i)} l_{ij}-\sum_{j\in I_-^0(i)} l_{ji}-l_{si}=0,\ 0\leqslant l_{si}\leqslant d_{si},\ i\in K^+,$$

$$\sum_{j\in I_+^0(i)} l_{ij}-\sum_{j\in I_-^0(i)} l_{ji}+l_{it}=0,\ 0\leqslant l_{it}\leqslant d_{it},\ i\in K^-, \qquad (21)$$

$$0\leqslant l_{ij}\leqslant d_{ij},\ (i,\ j)\in U^0.$$

Величина $\sum_{i\in K^+} l_{si}$ равна потоку, выходящему из источника s. В задаче (21) этот поток пропускается по части сети S, состоящей из дуг множества U^0. Требуется найти максимальный поток через U^0. Поэтому задачу (21) называют задачей о максимальном потоке. Таким образом, исходя из физической интерпретации задачи (19), делаем вывод: задача, двойственная к производной задаче на двойственном плане, является задачей о максимальном потоке.

Задача о максимальном потоке имеет разнообразные приложения. В § 3 будет приведен алгоритм ее решения. А пока приведем для нее следствия из теории двойственности. Задача, двойственная задаче о максимальном потоке (21), имеет вид

$$\sum_{i\in K^+} d_{si}s_{si}+\sum_{i\in K^-} d_{it}s_{it}+\sum_{(i,\ j)\in U^0} d_{ij}s_{ij}\to\min,$$

$$z_i-z_j+s_{ij}\geqslant 0,\ s_{ij}\geqslant 0,\ (i,\ j)\in U^0,\ -z_i+s_{si}\geqslant 1, \qquad (22)$$

$$s_{si}\geqslant 0,\ i\in K^+,\ z_i+s_{it}\geqslant 0,\ s_{it}\geqslant 0,\ i\in K^-.$$

Для задачи (22) существует оптимальный план (см. § 3), компоненты которого z_i, $i\in I$, равны -1 или 0. Покажем, что решение задачи (22) связано с решением производной задачи (18) соотношениями

$$y_i=-1-2z_i,\ i\in I. \qquad (23)$$

Из (23) следует, что y_i равно -1 или 1. Значит, за счет выбора s_{ij} всегда можно добиться выполнения ограничений задачи (18) на плане (23).

Обозначим через $f(z)$ оптимальное значение целевой функции задачи (22) и через $g(y)$ значение целевой функции задачи (18) на плане (23). Можно показать, что

$$g(y) = -2f(z) + \text{const}.$$

Следовательно, план (23) оптимален для задачи (18).

Решение задачи (22) можно, используя условия дополняющей нежесткости, легко восстановить по решению задачи (21), а затем из (23) получить решение производной задачи (18).

На решениях задач (21), (22) выполняется соотношение двойственности

$$\sum_{i\in K^+} l_{si} = \sum_{i\in K^+} d_{si}s_{si} + \sum_{i\in K^-} d_{it}s_{it} + \sum_{(i,\,j)\in U^0} d_{ij}s_{ij}. \qquad (24)$$

Приведем наглядную интерпретацию равенства (24).

Рассмотрим сеть $\bar{S}$ с множеством узлов $\bar{I} = \{I, s, t\}$ и множеством дуг $\bar{U} = \{U^0, (s, i), i\in K^+; (i, t), i\in K^-\}$.

Обозначим через $I_1 \subset \bar{I}$ некоторое множество узлов, содержащее s, но не содержащее t. Совокупность дуг $R(I_1) = \{(i, j)\colon i\in I_1, j\,\bar{\in}\, I_1, (i, j)\in \bar{U}\}$ называется разрезом сети, который задан множеством I_1. Величина $\sum\limits_{(i,\,j)\in R(I_1)} d_{ij}$ называется значением разреза. Разрез с минимальным значением — минимальный.

Как отмечалось выше, для задачи (22) существует такой оптимальный план, что $\overset{0}{z_i}$ равно 0 либо -1. Построим множество $\overset{0}{I_1} = \{i\colon \overset{0}{z_i} = -1; s\}$. Оно определяет разрез $R(\overset{0}{I_1})$, значение которого совпадает с оптимальным значением целевой функции задачи (22):

$$\sum_{i\in K^+} d_{si}\overset{0}{s}_{si} + \sum_{i\in K^-} d_{it}\overset{0}{s}_{it} + \sum_{(i,\,j)\in U^0} d_{ij}\overset{0}{s}_{ij} =$$

$$= \sum_{i\in I_1^0,\; j\,\bar{\in}\, I_1^0} d_{ij} = \sum_{(i,\,j)\in R(I_1^0)} d_{ij}.$$

Рассмотрим любой другой разрез, заданный множеством I_1. Непосредственной подстановкой можно убедиться в том, что значение разреза $R(I_1)$ равно значению целевой функции задачи (22) на плане $z_i = -1$, $i\in I_1$; $z_i = 0$, $i\,\bar{\in}\, I_1$. Следовательно,

$$\sum_{(i,\,j)\in R(I_1^0)} d_{ij} \leqslant \sum_{(i,\,j)\in R(I_1)} d_{ij},$$

т. е. разрез $R(I_1^0)$ минимальный. Из соотношений двойственности (24) получим

$$\sum_{i\in K^+} l_{si} = \sum_{\substack{i\in I_1^0,\\ j\in \bar I_1^0}} d_{ij}.$$

Таким образом, равенство (24) означает, что величина максимального потока в сети равна значению минимального разреза.

Замечание. Выше было показано, как по оптимальному плану задачи (22) построить минимальный разрез. Легко показать и обратное: как по минимальному разрезу построить оптимальный план задачи (22). Если $R(I_1)$ — минимальный разрез, то совокупность чисел $\{z_i=-1,\ i\in I_1,\ i\neq s;\ z_i=0,\ i\in\bar I_1,\ i\neq t\}$ является оптимальным планом задачи (22). Из (23) следует, что $\{y_i=1,\ i\in I_1,\ i\neq s;\ y_i=-1,\ i\in\bar I_1,\ i\neq t\}$ — оптимальный план производной задачи (18).

§ 2. Общая схема метода

Формулируется критерий оптимальности двойственного плана и описывается общая схема решения транспортных задач двойственным безопорным методом.

1. Матричная модель. Из вычислений, приведенных в § 1, следует критерий оптимальности принципа допустимых направлений: для оптимальности двойственного плана $\{u, v\}$ транспортной задачи

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}\to\min,$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij}=a_i,\quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=b_j, \tag{1}$$

$$0\leqslant x_{ij},\quad i=\overline{1,n},\quad j=\overline{1,m},$$

необходимо и достаточно, чтобы максимальный объем перевозок $\sum_{(i,j)\in I^0} l_{ij}^0$ по множеству I^0

$$\sum_{(i,j)\in I^0} l_{ij}\to\max,\qquad \sum_{j\in I^0(i)} l_{ij}=a_i-q_i,\quad q_i\geqslant 0,\quad i=\overline{1,n};$$

$$\sum_{i\in I^0(j)} l_{ij}=b_j-q_{n+j},\quad q_{n+j}\geqslant 0,\quad j=\overline{1,m}, \tag{2}$$

$$0\leqslant l_{ij},\quad (i,j)\in I^0,$$

равнялся общему объему производства $\sum_{i=1}^{n} a_i$.

При выполнении этого критерия оптимальный план перевозок x^0 составляется следующим образом:

$$x_{ij}^0=0,\ (i, j)\in I^-;\ \ x_{ij}^0=l_{ij}^0,\ (i, j)\in I^0.$$

Предположим, что критерий оптимальности не выполняется:

$$\sum_{(i,\ j)\in I^0} l_{ij}^0 < \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Обозначим через y_i^0, z_j^0, $i=\overline{1, n}$, $j=\overline{1, m}$, компоненты оптимального плана производной задачи (11) из § 1 $\{y^0, z^0\}$. (В § 1 отмечалось, что компоненты этого плана могут принимать только два значения: -1 и 1. В § 3 будет получено простое правило, позволяющее по решению задачи (2) найти компоненты плана $\{y^0, z^0\}$.) Исходный двойственный план $\{u, v\}$ меняется на новый $\{\bar{u}, \bar{v}\}$:

$$\bar{u}_i=u_i+\sigma^0 y_i{}^0,\ i=\overline{1, n};\ \ \bar{v}_j=v_j+\sigma^0 z_j{}^0,\ j=\overline{1, m},$$

где σ^0 — максимально допустимый шаг, найденный из условия допустимости двойственного плана $\{\bar{u}, \bar{v}\}$:

$$\sigma^0=\min_{y_i{}^0+z_j{}^0>0} \sigma_{ij},\ \sigma_{ij}=-\delta_{ij}/(y_i{}^0+z_j{}^0),\ \ (i, j)\in I^-.$$

За итерацию $\{u, v\}\to\{\bar{u}, \bar{v}\}$ значение двойственной целевой функции задачи (1) увеличивается на

$$\sigma^0\left(\sum_{i=1}^{n} a_i-\sum_{(i,\ j)\in I^0} l_{ij}^0\right).$$

Таков второй вариант общей схемы решения задачи (1) двойственным безопорным методом. В этом варианте непосредственно решается не производная задача, а задача, двойственная к ней.

В качестве упражнения предлагаем описать и реализовать первый вариант общей схемы, основанный на непосредственном решении производной задачи.

Таким образом, решение транспортной задачи двойственным безопорным методом свелось к решению задачи о максимальном объеме перевозок (2). Эффективные алгоритмы ее решения основаны на следующем анализе.

Предположим, что план перевозок $\{l_{ij},\ (i, j)\in I^0\}$ не максимален по объему. Тогда найдется пункт производства i_1, из которого можно вывезти дополнительно $\alpha>0$ единиц продукта. Это количество продукта можно или непосредственно завезти через клетки $(i_1, j)\in I^0$ в некоторые пункты потребления, или же (в случае когда потребности всех пунктов потребления, соединенных с i_1 клетками из I^0, удовлетворены) передать его через указанные пункты потребления другим пунктам производства. Из последних дополнительное количество продукта опять или непосредственно завозится через I^0 в пункт потребления с неудовлетворенной потребностью, или передается новым пунктам производства. Поскольку по теореме существования обязательно найдутся пункты потребления, в которые можно завезти дополнительно α единиц продукта, то описанные выше операции обязательно приведут в некоторые из этих пунктов.

На языке транспортной таблицы изложенное означает следующее. Если план перевозок $\{l_{ij}, (i, j)\in I^0\}$ через I^0 не максимален, то найдется строка i_1: $\sum\limits_{j\in I^0(i_1)} l_{i_1 j} < a_{i_1}$. Возможны два случая: 1) среди $I^0(i_1)$ есть такой индекс j_1, что $\sum\limits_{i\in I^0(j_1)} l_{ij_1}<b_{j_1}$; 2) для всех $j\in I^0(i_1)$ выполняется равенство $\sum\limits_{i\in I^0(j)} l_{ij}=b_j$. В первом случае объем перевозок можно увеличить за счет перевозки из i_1 в j_1, во втором обязательно найдется такой столбец $j_1\in I^0(i_1)$, что при некотором $(i_2, j_1)\in I^0$ выполняется неравенство $l_{i_2 j_1}>0$. (Иначе объем перевозок нельзя было бы увеличить вопреки предположениям.) Увеличение $l_{i_1 j_1}$ ведет к уменьшению $l_{i_2 j_1}$ (условие баланса по столбцу j_1). Чтобы сохранился баланс по строке i_2, необходимо увеличение $l_{i_2 j_2}$ в некоторой клетке (i_2, j_2). Повторилась ситуация со строкой i_1. Через конечное число шагов обнаружатся строка i_k и столбец $j_k\in I^0(i_k)$ такие, что

$$\sum_{i\in I^0(j_k)} l_{ij_k}<b_{j_k}.$$

Когда план перевозок $\{l_{ij}, (i, j)\in I^0\}$ по I^0 не максимален, то в транспортной таблице можно построить цепочку из строки i_1 с $\sum\limits_{j\in I^0(i_1)} l_{i_1 j}<a_{i_1}$ в столбец j_k с $\sum\limits_{i\in I^0(j_k)} l_{ij_k}<b_{j_k}$ такую, что на концах вертикальных звеньев перевозки l_{ij} положительны. Эту цепочку назовем, как и в гл. III, путем. Из приведенных построений очевидно обратное

утверждение: если в транспортной таблице существует путь из строки i_1 в столбец j_1, то объем перевозок можно увеличить за счет перевозки дополнительного количества продукта из пункта i_1 в пункт j_1.

Такой анализ позволяет сформулировать критерий оптимальности перевозок: план перевозок $\{l_{ij},\ (i,\ j)\in I^0\}$ оптимален тогда и только тогда, когда по клеткам множества I^0 транспортной таблицы нельзя построить ни одного пути.

Замечание. Можно считать, что множество I^0 содержит клетки из каждой строки и каждого столбца транспортной таблицы. В противном случае за счет соответствующего изменения потенциалов u, v можно увеличить значение двойственной целевой функции.

2. Сетевая модель. Исходя из смысла производной задачи и ее преобразований, осуществленных в § 1, сформулируем критерий оптимальности двойственного безопорного метода: для оптимальности двойственного плана $\{u,\ w\}$ задачи

$$\sum_{(i,\ j)\in U} c_{ij}x_{ij}\to\min,\quad \sum x_{ij}-\sum x_{ji}=a_i,\ i\in I, \qquad (3)$$
$$0\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij},\ (i,\ j)\in U,$$

необходимо и достаточно, чтобы величина $\sum\limits_{i\in K^+} l_{si}^0$ максимального потока по сети $\bar{S}^0=(\bar{I}^0,\ \bar{U}^0)$, где $\bar{I}^0=\{I,\ s,\ t\}$, $\bar{U}^0=\{U^0,\ (s,\ i),\ i\in K^+;\ (i,\ t),\ i\in K^-\}$, найденная по задаче

$$\sum_{i\in K^+} l_{si}\to\max,$$
$$\sum_{j\in \bar{I}^0_+(i)} l_{ij}-\sum_{j\in \bar{I}^0_-(i)} l_{ji}=0,\ i\in I, \qquad (4)$$
$$0\leqslant l_{ij}\leqslant d_{ij},\ (i,\ j)\in \bar{U}^0,$$

где $\bar{I}^0_+(i)=\{j\colon\ (i,\ j)\in\bar{U}^0\}$, $\bar{I}^0_-(i)=\{j\colon\ (j,\ i)\in\bar{U}^0\}$, равнялась $\sum\limits_{i\in K^+}\bar{a}_i$.

Оптимальный поток x^0 задачи (3) имеет компоненты $x_{ij}^0=0,\ (i,\ j)\in U^-;\ x_{ij}^0=d_{ij},\ (i,\ j)\in U^+;\ x_{ij}^0=l_{ij}^0,\ (i,\ j)\in U^0$.

Если критерий оптимальности не выполняется:

$$\sum_{i\in K^+} l_{si}^0<\sum_{i\in K^+}\bar{a}_i,$$

то двойственный план $\{u,\ w\}$ заменяется на новый.

Обозначим через $\{y^0, s^0\}$ решение производной задачи на двойственном плане $\{u, w\}$.

Замечание. Как отмечалось выше, компоненты y_i^0, $i \in I$, оптимального плана производной задачи могут принимать только два значения: -1 и 1. В § 3 будет получено простое правило, позволяющее по решению задачи (4) найти решение $\{y^0, s^0\}$ производной задачи.

Компоненту $\bar{u}$ нового двойственного плана $\{\bar{u}, \bar{w}\}$ найдем по формуле

$$\bar{u} = u + \sigma^0 y^0. \tag{5}$$

Вектор $\bar{w}$ согласуем с новым копотоком $\{\bar{\delta}_{ij} = \bar{u}_i - \bar{u}_j - c_{ij}, (i, j) \in U\}$. Как и в опорном методе (см. гл. II), шаг σ^0 можно найти несколькими способами. Приведем простейший способ:

$$\sigma^0 = \min\{\sigma^1, \sigma^2\},\ \sigma^1 = \min_{y_i - y_j > 0} \sigma_{ij}^1,\ \sigma_{ij}^1 = -\frac{\delta_{ij}}{y_i - y_j},$$
$$(i, j) \in U^-;\ \sigma^2 = \min_{y_i - y_j < 0} \sigma_{ij}^2,\ \sigma_{ij}^2 = -\frac{\delta_{ij}}{y_i - y_j},\ (i, j) \in U^+. \tag{6}$$

За одну итерацию значение двойственной целевой функции задачи (3) увеличивается на

$$\sigma^0 \Big(\sum_{i \in K^+} \bar{a}_i - \sum_{i \in K^+} l_{si}^0 \Big).$$

В этом состоит второй вариант общей схемы двойственного безопорного метода, когда решается не производная задача, а задача, двойственная к ней. Первый вариант общей схемы и его реализацию оставляем читателям в качестве упражнения.

Проанализируем задачу о максимальном потоке (4), к которой сводится второй вариант общей схемы двойственного безопорного метода. Предположим, что поток $\{l_{ij}, (i, j) \in U^0\}$ на подсети $\bar{S}^0 = \{\bar{I}, \bar{U}^0\}$ не максимален. Следовательно, из источника s можно выпустить, а в сток t доставить дополнительное количество продукта. Этот продукт пойдет по одной из дуг (s, i), $i \in K^+$. Поэтому найдется такая дуга (s, i_1), что $l_{si_1} < d_{si_1}$. Из условия баланса в узле $i_1 \in K^+$ следует, что найдется или прямая дуга $(i_1, j_1) \in U^0$ с $l_{i_1 j_1} < d_{i_1 j_1}$, или обратная дуга $(j_2, i_1) \in U^0$ с $l_{j_2 i_1} > 0$. Продолжив процесс построения дуг, обязательно обнаружим цепь из s в t, вдоль которой выполняются неравенства: $l_{ij}<d_{ij}$, если (i, j) — прямая дуга; $l_{ij}>0$, если (i, j) — обратная дуга. Такую цепь назовем путем. Очевидно и обратное утверждение: если из s в t существует путь, то поток в сети можно увеличить.

Проведенный анализ позволяет сказать, что для максимальности потока $\{l_{ij}, (i, j)\in U^0\}$ необходимо и достаточно, чтобы в сети $\bar{S}=\{I, \bar{U}^0\}$ не существовало пути из s в t.

Замечания: 1. Без ограничения общности можно считать, что каждый узел $i\in I$ является началом или концом некоторой дуги из U^0. В противном случае значение двойственной целевой функции легко увеличить за счет изменения потенциалов узлов.

2. В данной и предыдущей главах решение транспортной задачи сводится к решению ряда производных задач. Последние эквивалентны экстремальным задачам проверки критериев оптимальности. Таким образом, на первый взгляд очевиден недостаток классического метода решения экстремальных задач через использование критериев оптимальности. Он приводит к циклу: от одной экстремальной задачи перешли к другой экстремальной задаче. В общем случае не видно явных аргументов для отвода критики. Но, как показывают результаты гл. III и IV, такая критика не имеет оснований.

§ 3. Решение производной задачи

Решается двойственным методом (второй вариант общей схемы из § 2) производная задача на двойственном плане (см. § 1), к которой, согласно § 2, сводится решение транспортной задачи.

1. Матричная модель. Для транспортной задачи

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}\to\min,$$
$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij}=a_i,\quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=b_j, \tag{1}$$
$$x_{ij}\geqslant 0,\quad i=\overline{1,n},\quad j=\overline{1,m},$$

по известному двойственному плану $\{u_i, v_j, i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}\}$ составим коплан перевозок $\delta=\{\delta_{ij}=u_i+v_j-c_{ij}, i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}\}$ и в транспортной таблице выделим множество клеток $I^0=\{(i, j): \delta_{ij}=0\}$. Согласно § 1, решение производной задачи сводится к поиску плана перевозок через I^0 с наибольшим объемом. В § 2 показано, что эта задача, в свою очередь, сводится к построению путей из строк i с $a_i - \sum_{j \in I^0(i)} l_{ij} > 0$ в столбцы j с $b_j - \sum_{i \in I^0(j)} l_{ij} > 0$, где l_{ij} — перевозки задачи, двойственной производной задаче, которую будем решать методом динамического программирования. Для этого предварительно сведем ее к экстремальной задаче, т. е. наряду с поиском путей будем добиваться экстремальности некоторой его числовой характеристики. Укажем (для примера) три характеристики: количество звеньев; пропускная способность; ценность доставленного продукта.

Для определенности выберем вторую характеристику, т. е. будем искать путь с наибольшей пропускной способностью. Требуется, используя клетки множества I^0, построить такой путь из множества строк

$$\omega_1 = \{i\colon a_i - \sum_{j \in I^0(i)} l_{ij} > 0\}$$

в множество столбцов

$$\omega_k = \{j\colon b_j - \sum_{i \in I^0(j)} l_{ij} > 0\},$$

который имеет наибольшую пропускную способность. Следуя динамическому программированию, погрузим эту задачу в семейство задач, где необходимо найти пути максимальной пропускной способности из ω_1 в произвольный столбец или строку j. Обозначим через $B(j)$ (функция Беллмана) наибольшее количество продукта, которое можно доставить из ω_1 в j вдоль одного пути. Составим уравнение Беллмана для функции $B(j)$. Пусть ω — множество строк и столбцов с известными значениями функции $B(j)$. Обозначим через ω' множество соседних с ω строк и столбцов, будем считать*) $i \in \omega'$, если i — индекс строки и в ω найдется индекс столбца k такой, что $l_{ik} > 0$, $(i, k) \in I^0$, или если i — индекс столбца и в ω найдется индекс строки k такой, что $(k, i) \in I^0$. Объединение множества соседних узлов ω' и множества строк $\{i\colon i \overline{\in} \omega, i \in \omega_1\}$ обозначим через ω_*. Сделаем пробные перевозки из пунктов, индексы которых входят в ω, в пункты, индексы которых составляют множество ω_*. Рассмотрим пункт A_k, $k \in \omega_*$. Объем пробной перевозки в пункт A_k может равняться либо $a_k - \sum_{j \in I^0(k)} l_{kj}$, т. е. объему продукта,

---

*) Здесь и далее используется сокращенная запись $i \in \omega'$, хотя элементами множества ω' являются A_i, B_j. Из текста ясно, индекс какого пункта используется.

не вывезенного из A_k, либо $\min\{l_{ks}, B(s)\}$, т. е. объему продукта, который можно возвратить в A_k из пункта B_s, $s \in \omega$ (последнее возможно, если $k \in \omega'$).

Поскольку ищется путь максимальной пропускной способности, то пробную перевозку в A_k положим равной

$$B'(k) = \max\{a_k - \sum_{j \in I^0(k)} l_{kj}, \max_{B_s,\ s \in \omega} \min\{B(s), l_{ks}\}\}. \quad (2)$$

Рассмотрим пункт B_k, $k \in \omega'$. Поскольку в задаче (2) из § 2 нет ограничений на пропускные способности коммуникаций, то пробную перевозку в B_k положим равной

$$B'(k) = \max_{A_s,\ s \in \omega} B(s). \quad (3)$$

В результате наряду с числами $B(j)$, $j \in \omega$, найдены числа $B'(s)$, $s \in \omega'$. Если вычислить

$$B'(i) = \max B'(s),\ s \in \omega', \quad (4)$$

то очевидно, что $B'(i)$ — наибольшее количество продукта, которое возможно доставить из ω_1 в пункт производства или потребления с индексом i. Поэтому индекс i включаем в множество $\bar{\omega}$, $\bar{\omega} = \omega \cup i$, а пробную перевозку $B'(i)$ делаем постоянной:

$$B(i) = B'(i). \quad (5)$$

Соотношения (2)—(5) и задают уравнение Беллмана, представляющее собой своеобразное рекуррентное соотношение, определенное на множествах ω, $\bar{\omega}$. Начальное условие для уравнения Беллмана следует из определения функции Беллмана:

$$B(k) = a_k - \sum_{j \in I^0(k)} l_{kj} = \max_{i \in \omega_1} \{a_i - \sum_{j \in I^0(i)} l_{ij}\}.$$

Приведенный вывод уравнения Беллмана фактически содержит и метод его решения. Удобной формой реализации метода решения уравнения Беллмана является метод расстановки меток.

Пусть $\{l_{ij}, (i, j) \in I^0\}$ — некоторый план перевозок по I^0. Для первой итерации можно положить $l_{ij}\equiv 0$, $(i, j)\in I^0$. Найдем множество

$$\omega_1=\{i: a_i-\sum_{j\in I^0(i)} l_{ij}>0\}.$$

Пунктам производства i с индексами из ω_1 припишем временные метки $\{\mu_1', 0\}$ из двух элементов, где

$$\mu_i=a_i-\sum_{j\in I^0(i)} l_{ij}.$$

Метку $\{\mu_k', 0\}$ сделаем постоянной $\{\mu_k, 0\}$, $\mu_k=\mu_k'=$ $=\max_{i\in\omega_1} \mu_i$.

Пусть на некоторой итерации известно множество ω пунктов с постоянными метками $\{\mu_i, s(i)\}$, $i\in\omega$, где μ_i — максимальное количество продукта, которое можно вдоль пути доставить из ω_1 в пункт с индексом i, $s(i)$ — индекс пункта, который предшествует на пути пункту с индексом i. Расширение множества ω помеченных пунктов осуществим в два этапа. Сначала расставим временные метки, а потом среди них найдем постоянную. Пусть индексу $i\in\omega$ соответствует пункт производства или, другими словами, i — номер строки транспортной таблицы. Выделим столбцы с такими индексами j, что $(i, j)\in I^0$, и припишем им временные метки $\{\mu_j', i\}$, где $\mu_j'=\mu_i$. Если столбец j уже имел временную метку $\{\bar{\mu}_j', \bar{s}(j)\}$, то ее сохраним при $\mu_j'\leqslant\bar{\mu}_j'$.

Если $i\in\omega$ — номер столбца, то выделим строки с такими индексами j, что $(j, i)\in I^0$, $l_{ji}>0$, и припишем им временные метки $\{\mu_j', i\}$, где $\mu_j'=\min\{\mu_i, l_{ji}\}$. Если строка j уже имела временную метку $\{\bar{\mu}_j', \bar{s}(j)\}$, то ее сохраним при $\mu_j'\leqslant\bar{\mu}_j'$. Просмотрев элементы множества ω, построим множество ω_* номеров строк и столбцов, получивших временные метки. Среди временных меток найдем метку $\{\mu_k', s(k)\}$ с наибольшим первым элементом. К множеству ω добавим элемент k, а пункту с этим индексом припишем постоянную метку $\{\mu_k, s(k)\}$, где $\mu_k=\mu_k'$.

Процесс расстановки меток может закончиться за конечное число шагов одним из двух исходов: 1) получил временную метку $\{\mu_k', s(k)\}$ пункт B_k с $b_k-\sum_{i\in I^0(k)} l_{ik}>0$; 2) невозможно пометить новые пункты. Реализация случая 1) означает, что в пункт B_k можно доставить μ_k' единиц продукта. Поскольку потребность пункта B_k равна $b_k - \sum\limits_{i\in I^0(k)} l_{ik}$, то ему доставляется $\alpha = \min\{\mu_k', b_k - \sum\limits_{i\in I^0(k)} l_{ik}\}$ продукта. Легко найти путь, вдоль которого доставляется это количество продукта. Из второго элемента $s(k)$ метки пункта B_k узнаем предпоследний пункт пути, который позволяет аналогично восстановить еще один пункт, и т. д. Через конечное число шагов попадем в пункт множества ω_1 с нулевым вторым элементом метки. Объем производства в пункте A_{i_1} уменьшим на величину α и это число $l_{ij} = \alpha$ поместим в клетки (i, j), расположенные на построенном пути.

После этого исходя из ω_1 вновь расставляем метки столбцам и строкам транспортной таблицы. Через конечное число попыток придем к случаю 2). Если оказалось, что множество ω_1 пусто, то транспортная задача (1) решена. Случай, когда ω_1 непустое множество и новые пункты невозможно пометить, означает, что найден план перевозок максимального объема по множеству I^0. Восстановим по нему оптимальный план $\{y_j^0, j=\overline{1, m}; z_i^0, i=\overline{1, n}\}$ производной задачи. Пусть ω — множество помеченных строк и столбцов последней таблицы. Покажем, что совокупность чисел $\{\bar{y}_i = 0, i\in\omega; \bar{y}_i = 1, i\overline{\in}\omega; \bar{z}_i = 1, i\in\omega; \bar{z}_i = 0, i\overline{\in}\omega\}$ является оптимальным планом задачи

$$\sum_i a_i\bar{y}_i + \sum_j b_j\bar{z}_j \to \min,$$
$$\bar{y}_i + \bar{z}_j \geqslant 1, \ (i, j)\in I^0; \ \bar{y}_i \geqslant 0, \ i=\overline{1, n}; \ \bar{z}_j \geqslant 0, \ j=\overline{1, m}, \qquad (6)$$

которая является двойственной задачей о максимальном объеме перевозок через I^0.

Если строка $i\in\omega$, то всегда можно пометить соседние столбцы $j\in\{j: (i, j)\in I^0\}$. Следовательно, в этом случае ограничения задачи (6) не нарушаются, так как $\bar{y}_i + \bar{z}_j = 1, j\in\{j: (i, j)\in U^0\}$.

Если строка $i\overline{\in}\omega$, то $l_{ij} = 0$, $j\in\omega$ и $a_i = \sum\limits_{j\in\omega} l_{ij}$ (в противном случае строку i можно было бы пометить). Кроме того, для $i\overline{\in}\omega$ выполняются ограничения задачи (6): $\bar{y}_i + \bar{z}_j > 1$, если столбец $j\in\omega$; $\bar{y}_i + \bar{z}_j = 1$, если столбец $j\overline{\in}\omega$. Если столбец $j\in\omega$, то $l_{ij} = 0$, $i\overline{\in}\omega$ и $b_j = \sum\limits_{i\in\omega} l_{ij}$ (в противном случае могли бы пометить строку i или увеличить объем перевозок). Для $j \in \omega$ ограничения задачи (6) выполняются: $\bar{y}_i + \bar{z}_j > 1$, если строка $i \bar{\in} \omega$; $\bar{y}_i + \bar{z}_j = 1$, если строка $i \in \omega$. Если столбец $j \bar{\in} \omega$, то и строки $i \bar{\in} \omega$, $i \in \{i\colon (i, j) \in U^0\}$ (в противном случае могли бы пометить столбец j). Отсюда

$$\bar{y}_i + \bar{z}_j = 1, \quad \forall\, i \in \{i\colon (i, j) \in U^0\}.$$

Следовательно, совокупность чисел $\{\bar{y}, \bar{z}\}$ является планом задачи (6). Кроме того,

$$\sum_i a_i \bar{y}_i + \sum_j b_j \bar{z}_j = \sum_{i \bar{\in} \omega} a_i + \sum_{j \in \omega} b_j =$$
$$= \sum_{i \bar{\in} \omega} \sum_{j \bar{\in} \omega} l_{ij} + \sum_{j \in \omega} \sum_{i \in \omega} l_{ij} = \sum_{(i, j) \in I^0} l_{ij}.$$

Из теории двойственности следует оптимальность плана $\{\bar{y}, \bar{z}\}$. По формуле (16) из § 1 легко найти оптимальный план производной задачи:

$$y_i^0 = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in \omega \\ -1, & \text{если } i \bar{\in} \omega \end{cases} \quad i = \overline{1, m};$$

$$z_j^0 = \begin{cases} -1, & \text{если } j \in \omega \\ 1, & \text{если } j \bar{\in} \omega \end{cases} \quad j = \overline{1, n}.$$

По правилам § 2 меняется множество I^0 и решается новая задача о максимальном объеме перевозок. Если a_i, b_j, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$,— целые числа, то через конечное число итераций транспортная задача (1) будет решена, ибо на каждой итерации объем перевозок по I^0 увеличивается на целое число.

Для иллюстрации двойственного безопорного метода рассмотрим один из вариантов транспортной задачи — *задачу о назначениях*, для которой Куном [1] впервые были использованы приемы, лежащие в основе метода.

Имеется n работников, которых нужно назначить на n работ. При этом каждый работник должен быть занят и каждая работа должна выполняться одним работником. Расходы при выполнении i-м работником j-й работы равны c_{ij}. Как распределить работников, чтобы общие расходы были минимальными?

Введем переменную x_{ij}, принимающую значение 1, если i-й работник назначен на j-ю работу, и значение 0 в противном случае. Из равенства

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$$

следует $x_{ij_1}=1$ при некотором j_1, т. е. i-й работник занят некоторой j_1-й работой. Аналогично из

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1$$

следует $x_{i_1j}=1$ при некотором i_1, т. е. для j-й работы найдется i_1-й работник. Расходы, связанные с конкретным планом назначений

Таблица IV.1

$u_i \backslash v_j$	0	0	0	0	
1	2	1	3	1	1
1	1	3	1	2	1
2	5	3	2	2	1
3	3	3	6	3	1
	1	1	1	1	$b_j \backslash a_i$

$\{x_{ij},\ i,\ j=\overline{1,n}\}$, равны $\sum\limits_{i,\ j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$. Таким образом, математическая модель задачи о назначениях имеет вид

$$\sum_{i,\ j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\to\min,\quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1,\quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1;$$
$$x_{ij}=0 \text{ или } 1,\ i,\ j=\overline{1,n}. \qquad (7)$$

Вместо этой задачи рассмотрим задачу

$$\sum_{i,\ j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\to\min,\quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1,\quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1,$$
$$0\leqslant x_{ij}\leqslant 1,\ i,\ j=\overline{1,n}, \qquad (8)$$

которая является частным случаем транспортной задачи ($a_i\equiv 1$, $b_j\equiv 1$).

Известно [МО], и это легко следует из результатов гл. I, что при целочисленных a_i, b_j транспортная задача имеет целочисленное решение. Из ограничений задачи (8) следует, что значения компонент ее целочисленных планов могут равняться только 0 или 1. Таким образом, задача (7) эквивалентна задаче (8).

Решим численный пример с данными из табл. IV.1, в клетках которой помещены значения c_{ij}. Поскольку нет информации о двойственном плане (о степени непригодности работников для выполнения той или иной работы), то компоненты начального двойственного плана найдем по формулам, приведенным в § 1: $u_1=1$, $u_2=1$, $u_3=2$, $u_4=3$; $v_1=0$, $v_2=0$, $v_3=0$, $v_4=0$. Найдем клетки множества I^0 из

Таблица IV.2

	1		1 1	
1		1		1
		2	2	1
3	3		3	1
1	1	1		

условия $\delta_{ij}=u_i+v_j-c_{ij}=0$: (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 4). Эти клетки в табл. IV.1 обведены жирной линией.

Приступим к поиску плана перевозок максимального объема через множество I^0. Множество ω_1 состоит из всех строк. При расстановке меток из 1-й строки получает временную метку $\{1, 1\}$ четвертый столбец. Поэтому осуществляем перевозку $A_1—B_4$, после чего получаем табл. IV.2. Теперь множество ω_1 состоит из индексов строк 2, 3, 4. Расставив пометки из строки 2 для столбца 1, из строки 3 для столбца 3, из строки 4 для столбца 2, обнаружим, что каждый раз получают временную метку столбцы, соответствующие пунктам потребления, запросы которых не удовлетворены. При этом, как и на первой итерации, эти потребности сразу удовлетворяются и получается оптимальный план: $x_{14}=1$; $x_{21}=1$; $x_{33}=1$; $x_{42}=1$; остальные $x_{ij}=0$. Таким образом, оптимальны назначения: первый работник назначается на четвертую работу ($x_{14}=1$), второй — на первую, третий — на третью, четвертый — на вторую работу.

2. Сетевая модель. Для задачи о потоке минимальной стоимости

$$\sum_{(i,\, j)\in U} c_{ij}x_{ij}\to\min,$$
$$\sum_{j\in I^+(i)} x_{ij}-\sum_{j\in I^-(i)} x_{ji}=a_i,\ i\in I, \tag{9}$$
$$0\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij},\ (i,\, j)\in U,$$

по известному двойственному плану $\{u_i, i \in I; w_{ij}, (i, j) \in \in U\}$ составим коплан перевозок $\delta = \{\delta_{ij} = u_i - u_j - c_{ij}, (i, j) \in U\}$.

Выделим частичную сеть $S^0 = \{I, U^0\}$ с множеством дуг $U^0 = \{(i, j) \in U: \delta_{ij} = 0\}$. На множестве дуг $U^+ = \{(i, j) \in U: \delta_{ij} > 0\}$ зададим дуговые потоки $x_{ij} = d_{ij}$, $(i, j) \in U^+$.

Интенсивности $\bar{a}_i$ узлов $i \in I$ частичной сети S^0 положим равными

$$\bar{a}_i = a_i - \sum_{j \in I_+^+(i)} d_{ij} + \sum_{j \in I_-^+(i)} d_{ji}, \quad i \in I.$$

Узлы множества $K^+ = \{i: \bar{a}_i > 0\}$ в S^0 являются источниками, узлы из $K^- = \{i: \bar{a}_i < 0\}$ — стоками. В § 2 для удобства пояснений источники и стоки объединены в один источник s и один сток t и вместо сети S^0 рассматривается сеть $\bar{S}^0 = (\bar{I}, \bar{U}^0)$, где $\bar{I} = (I, s, t)$, $\bar{U}^0 = \{U^0, (s, i), i \in K^+; (i, t), i \in K^-\}$.

Из общей схемы двойственного безопорного метода (см. § 2) следует, что для решения задачи (9) требуется пропустить через $\bar{S}^0$ максимальный поток $l^0 = \{\overset{0}{l}_{ij}, (i, j) \in U^0\}$ из s в t. Если величина этого потока равна $\sum_{i \in K^+} \bar{a}_i$, то решение $x^0 = \{\overset{0}{x}_{ij}, (i, j) \in U\}$ задачи (9) имеет вид

$$\overset{0}{x}_{ij} = 0, \ (i, j) \in U^-; \ \overset{0}{x}_{ij} = d_{ij}, \ (i, j) \in U^+;$$

$$\overset{0}{x}_{ij} = l_{ij}, \ (i, j) \in U^0.$$

При $\sum_{i \in K^+} \overset{0}{l}_{si} < \sum_{i \in K^+} \bar{a}_i$ начальный двойственный план заменим на новый.

В § 2 задача о максимальном потоке l^0 сведена к задаче о поиске на $\bar{S}^0$ пути из s в t. Последнюю задачу решим методом динамического программирования. Пусть на сети $\bar{S}^0$ уже имеется поток $l = \{l_{ij}, (i, j) \in U^0\}$. Как и в предыдущем пункте, сначала введем экстремальную задачу. Из трех указанных в п. 1 характеристик выбираем длину пути, под которой будем понимать количество дуг пути. Следуя динамическому программированию, задачу поиска на $\bar{S}^0$ кратчайшего пути из s в t погрузим в семейство задач построения кратчайших путей из s в произвольные узлы $i \in \bar{I}$. Пусть $B(i)$ — длина кратчайшего пути из s в i. Положим $B(s)=0$. Предположим, что известны значения $B(i)$ на множестве ω. Составим уравнение для вычисления значений функции $B(i)$. Пусть $i \in \omega$, множество $\omega(i)=\{j\colon j \overline{\in} \omega,\ \exists (i, j) \in \bar{U}^0,\ l_{ij}<d_{ij}$ или $\exists (j, i) \in \bar{U}^0,\ l_{ji}>0\}$ назовем множеством узлов, соседних с узлом i.

Обозначим через $\omega_*=\{i\colon i \in \omega,\ \omega(i) \neq \varnothing\}$. Найдем

$$\min_{i \in \omega_*} B(i)=B(i_0). \tag{10}$$

Очевидно, что

$$B(j)=B(i_0)+1,\ j \in \omega(i_0), — \tag{11}$$

длина кратчайшего пути из s в j.

Узлы $\omega(i_0)$ добавим к множеству ω и положим $B(j)=B(i_0)+1$.

Соотношения (10), (11) задают уравнение Беллмана для вычислений $B(k)$ с начальным условием $B(s)=0$.

Решается уравнение Беллмана (10), (11) методом расстановки меток. Узлу s припишем метку (0, 0). Предположим, что уже имеют метки узлы множества ω. Из узлов этого множества выделим подмножество ω_* (т. е. те узлы, у которых есть соседние узлы) и в нем ищем узел l, который имеет метку $\{\mu_l, k(l)\}$ с наименьшим первым элементом. Узлам $j \in \omega(l)$ припишем метки $\{\mu_l+1, l\}$ и добавим их к множеству ω.

Процесс расстановки меток продолжается до тех пор, пока 1) не получит метку $\{\mu_t, k(t)\}$ узел t или 2) на некотором шаге множество ω_* пусто и узел t пометить нельзя.

В случае 1) по вторым элементам меток восстановим путь из s в t и вдоль него пропустим наибольший поток. Для измененного потока $\{\bar{l}_{ij},\ (i, j) \in \bar{U}^0\}$ вновь повторим процесс расстановки меток. Через конечное число итераций придем к случаю 2). Это означает, что максимальный поток в сети $\bar{S}^0$ найден. Если в случае 2) множество помеченных узлов состоит только из узла s, то исходная задача (9) решена. В противном случае по решению задачи о максимальном потоке восстанавливаем оптимальный план производной задачи (18) § 1.

Обозначим через ω множество узлов, которые можно пометить. Если $i \in \omega$, $j \overline{\in} \omega$, то $l_{ij}=d_{ij}$ (в противном случае пометили бы узел j). Если $i \overline{\in} \omega$, $j \in \omega$, то $l_{ij}=0$ (в противном случае пометили бы узел i).

Рассмотрим любое множество узлов $I_1 \subset I$, содержащее узел s и не содержащее узел t. Для любого $i \in I_1$, $i \neq s$, выполняются условия баланса

$$\sum_{j \in \bar{I}^0_+(i)} l_{ij} - \sum_{j \in \bar{I}^0_-(i)} l_{ji} = 0, \quad i \in I_1, \quad i \neq s, \tag{12}$$

где $\bar{I}^0_+(i) = \{j\colon (i, j) \in \bar{U}^0\}$, $\bar{I}^0_-(i) = \{j\colon (j, i) \in \bar{U}^0\}$.

Для $i = s$ запишем тождество

$$\sum_{j \in I^0_+(s)} l_{sj} = \sum_{j \in K^+} l_{sj}. \tag{13}$$

Сложив равенства (12) и тождество (13), получим

$$\sum_{j \in K^+} l_{sj} = \sum_{\substack{i \in I_1, \\ j \bar{\in} I_1}} l_{ij} - \sum_{\substack{i \bar{\in} I_1, \\ j \in I_1}} l_{ij}. \tag{14}$$

Покажем, что совокупность чисел

$$\begin{gathered} \{z^0_i = -1, \ i \in \omega; \ z^0_i = 0, \ i \bar{\in} \omega; \\ s^0_{ij} = \max\{0, z^0_j - z^0_i\}, \ (i, j) \in \bar{U}^0\} \ — \end{gathered} \tag{15}$$

оптимальный план задачи (22) из § 1.

Для $I_1 = \omega$ в силу (14) имеем

$$\sum_{j \in K^+} l_{sj} = \sum_{\substack{i \in \omega, \\ j \bar{\in} \omega}} l_{ij} - \sum_{\substack{i \bar{\in} \omega, \\ j \in \omega}} l_{ij} = \sum_{\substack{i \in \omega, \\ j \bar{\in} \omega}} d_{ij} =$$

$$= \sum_{i \in K^+} d_{si} s^0_{si} + \sum_{i \in K^-} d_{it} s^0_{it} + \sum_{(i, j) \in U^0} d_{ij} s^0_{ij},$$

т. е. значение целевой функции задачи (21) из § 1 совпадает со значением целевой функции двойственной задачи (22) из § 1.

Из (23) § 1 получаем оптимальный план производной задачи

$$y^0_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in \omega; \\ -1, & \text{если } i \bar{\in} \omega. \end{cases} \tag{16}$$

З а м е ч а н и е. Из приведенных выше рассуждений и доказательства теоремы о максимальном потоке и минимальном разрезе видно, что множество ω $(\omega_\lambda = \varnothing)$ определяет минимальный разрез $R(\omega)$.

По правилам § 2 меняем множество U_0 и решаем новую задачу о максимальном потоке.

Пример. Пусть задана сеть (рис. IV.1). Первое число над дугой означает пропускную способность дуги, второе — стоимость единичного потока. Предположим, что кроме параметров задачи известен начальный двойственный план $\{u_i,\ i \in I;\ w_{ij},\ (i,\ j) \in U\}$. Компоненты двойственного плана u_i, $i \in I$, запишем рядом с узлами.

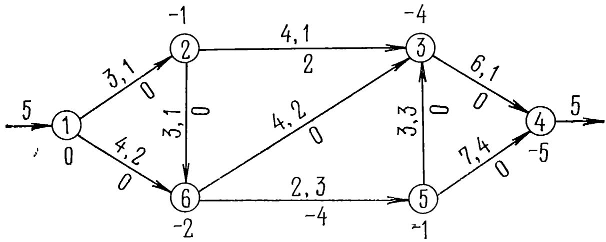


Рис IV.1

Найдем коплан $\delta = \{\delta_{ij} = u_i - u_j - c_{ij}\}$, компоненты которого запишем под дугами. Множество U^0 состоит из дуг $\{(1, 2), (1, 6), (2, 6), (6, 3), (5, 3), (3, 4), (5, 4)\}$. Множество U^+ состоит из одной дуги $(2, 3)$. Найдем числа

$$\bar{a}_i = a_i - \sum_{j \in I_+^+(i)} d_{ij} + \sum_{j \in I_-^+(i)} d_{ji},\ i \in I,$$

и рассмотрим сеть $\bar{S}^0$, изображенную на рис. IV.2, где все s и t представляют собой только один источник и сток; над дугами указаны пропускные способности.

Припишем метки узлам (на рис. IV.2 будем несколько раз повторять алгоритм расстановки меток, поэтому внизу каждой метки ста-

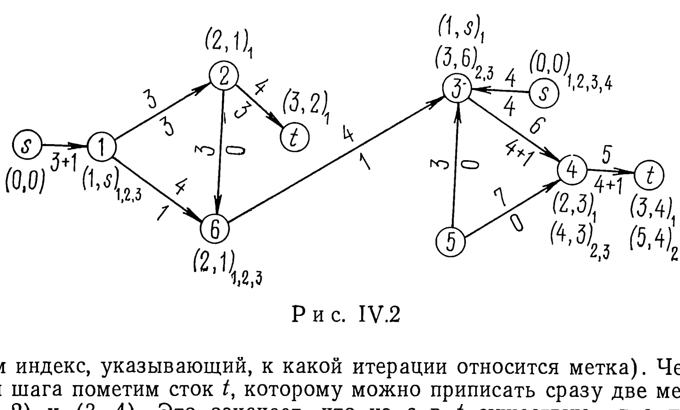


Рис. IV.2

вим индекс, указывающий, к какой итерации относится метка). Через три шага пометим сток t, которому можно приписать сразу две метки $(3, 2)$ и $(3, 4)$. Это означает, что из s в t существуют два пути длиной 3: путь $(s, 1)$, $(1, 2)$, $(2, t)$ с пропускной способностью 3 и путь $(s, 3)$, $(3, 4)$, $(4, t)$ с пропускной способностью 4. Пропустим по этим путям максимальные потоки. Дуговые потоки l_{ij} запишем под дугами.

Снова повторим процесс расстановки меток. Сток t получает метку (5, 4). Путь $(s, 1)$, $(1, 6)$, $(6, 3)$, $(3, 4)$, $(4, t)$ — кратчайший путь из s в t для новой сети. По этому пути пропустим максимальный поток, равный 1. Для полученной сети повторим процесс расстановки меток. Для множества $\omega=\{s, 1, 6, 3, 4\}$ множество $\omega_*=\varnothing$. Значит, в сети на рис. IV.2 найден максимальный поток.

Согласно (16), узлам i, $i\in\omega$, припишем $y_i=1$, узлам $i\bar{\in}\omega$ припишем $y_i=-1$. По формулам (6) § 2 находим шаг σ^0. В данном примере $\sigma^0=-\delta_{23}/(y_2-y_3)=1$. По формулам (5) § 2 находим новые компоненты двойственного плана: $u_1=1$, $u_2=-2$, $u_3=-3$, $u_4=-4$, $u_5=-2$, $u_6=-1$. Повторив описанные выше процедуры, получим оптимальный поток: $\{x_{12}=3,\ x_{23}=3,\ x_{34}=5,\ x_{16}=2,\ x_{63}=2,\ x_{26}=x_{65}=x_{53}=x_{54}=0\}$.

§ 4. Построение субоптимальных решений

В предыдущих параграфах главы изложен метод построения оптимальных планов перевозок и оптимальных потоков. В силу двойственного характера метода на промежуточных итерациях планы перевозок и потоки исходной транспортной задачи не строятся и поэтому вычисления обязательно ведутся до получения решения, когда одновременно с оптимальным двойственным планом впервые появляются оптимальные план перевозок или поток.

В данном параграфе излагается модификация двойственного безопорного метода для построения субоптимальных планов перевозок и потоков. Обоснование модификации приведено в [ч. 1].

Сначала рассмотрим транспортную задачу в матричной форме

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}\to\min,$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij}=a_i,\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=b_j,\ x_{ij}\geqslant 0,\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}.$$

Пусть $\delta=\{\delta_{ij}=u_i+v_j-c_{ij},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}\}$ — начальный коплан перевозок. Зададим небольшое число $\varepsilon>0$ и построим следующие множества клеток транспортной таблицы: $I^0(\varepsilon)=\{(i, j):\ \delta_{ij}\geqslant-\varepsilon,\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}\}$, $I^-(\varepsilon)=\{(i, j):\ \delta_{ij}<-\varepsilon,\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}\}$.

Заменим множество I^0, рассматриваемое в § 1—3, на множество $I^0(\varepsilon)$. Решим получившуюся ε-производную задачу. Возможны два исхода: 1) через множество $I^0(\varepsilon)$

перевозится весь объем продукции; 2) часть продукции невозможно перевезти через $I^0(\varepsilon)$.

В случае 1) строим план перевозок

$$x_{ij}^{\varepsilon}=0,\ (i,\ j)\in I^{-}(\varepsilon);\ \ x_{ij}^{\varepsilon}=l_{ij}^{0}(\varepsilon),\ (i,\ j)\in I^{0}(\varepsilon),\quad (1)$$

где $l^0(\varepsilon)=\{l_{ij}^0(\varepsilon),\ (i,\ j)\in I^0(\varepsilon)\}$ — максимальный план перевозок через $I^0(\varepsilon)$. Если обозначить через $\{u(\varepsilon),\ v(\varepsilon)\}=\{u_i(\varepsilon), v_j(\varepsilon), i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}\}$ двойственный план, соответствующий плану перевозок $l^0(\varepsilon)$, то нетрудно показать [ч. 1], что транспортные расходы на плане перевозок (1) превосходят минимально возможные расходы не более чем на

$$-\sum_{\delta_{ij}(\varepsilon)<0}\delta_{ij}(\varepsilon)x_{ij}^{\varepsilon}\quad (2)$$

единиц. Здесь $\{\delta_{ij}(\varepsilon),\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}\}$ — коплан перевозок, соответствующий двойственному плану $\{u(\varepsilon),\ v(\varepsilon)\}$.

Если реализовался случай 2), то по правилам § 2 текущий двойственный план заменяем на новый.

Поскольку $I^0\subset I^0(\varepsilon)$, то предлагаемая модификация двойственного безопорного метода требует, вообще говоря, меньшего, чем в основном случае, числа преобразований двойственных планов. Несмотря на некоторое расширение производной задачи, общее время решения транспортной задачи может уменьшиться.

Аналогичная модификация легко описывается и для сетевой модели транспортной задачи. Оставляем эту работу читателям в качестве упражнения.

Замечание. Выбрав соответствующее число ε, можно легко построить первое приближение и оценить по (2) его отклонение от оптимального плана. Если полученное отклонение велико, то, уменьшив ε, методами гл. VI можно улучшить первое приближение.

Глава V

ВЫРОЖДЕННЫЕ ЗАДАЧИ

Анализируя опорные методы решения транспортных задач (см. гл. I, II), нетрудно заметить, что они не позволяют улучшить за одну итерацию некоторые вырожденные опорные планы и копланы перевозок (потоки и копотоки). Если эта ситуация повторяется несколько раз, то появляется опасность зацикливания процесса решения транспортной задачи. В данной главе, исходя из общей идеи, изложенной в [ч. 1], строятся методы, ликвидирующие отмеченный недостаток опорных методов. При этом формируются вспомогательные задачи, по решениям которых улучшаются вырожденные планы и копланы. Для решения вспомогательных задач предлагаются два метода: безопорный и опорный. Безопорные методы выхода из цикла строятся только для сетевой модели, опорные — только для матричной. Использование опорных методов выхода из цикла не исключает опасности повторного зацикливания, что вынуждает вводить в рассмотрение вырожденные опорные планы и копланы высокого порядка.

Во многих местах данной главы материал изложен конспективно, некоторые вопросы лишь упомянуты. Это сделано, с одной стороны, с целью экономии места, с другой — с расчетом на самостоятельную работу. Можно надеяться, что проблемы оптимизации, связанные с вырожденными задачами, кроме традиционно математического интереса вызовут и прикладной интерес. Требуется определенное время, чтобы эффективно оценить все методы книги, вытекающие из принципа допустимых направлений. Несмотря на очевидность основного принципа, реализация его в конкретных случаях связана с определенными трудностями, с определенной творческой работой.

§ 1. Улучшение вырожденных опорных планов перевозок и потоков

В [ч. 1] изложены две схемы метода решения вырожденных задач, основанного на экстремальном подходе к проблеме. Этот подход представляет собой реализацию принципа допустимых направлений для вырожденных задач. Ниже применительно к транспортным задачам излагается вторая схема, непосредственно развивающая технику гл. I.

1. Матричная транспортная задача. Рассмотрим задачу

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}\to\min,\quad \sum_{j=1}^{m} x_{ij}=a_i,\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=b_j, \tag{1}$$
$$0\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m},$$

и вырожденный опорный план перевозок $\{x, I_{\text{оп}}\}$.

Обозначим $I_{\text{оп}}=\{(i, j)\in I_{\text{оп}}: x_{ij}=0\}$, $I_{\text{оп}}=\{(i, j)\in I_{\text{оп}}: x_{ij}=d_{ij}\}$. Среди исходных предпосылок прямого метода основным является предположение о том, что план перевозок x отражает опыт и интуицию специалистов, занятых реальным физическим прототипом математической задачи (1). С этой точки зрения информация о некритических перевозках $0<x_{ij}<d_{ij}$ существенно богаче информации о критических перевозках $x_{ij}=0$ или d_{ij}. Естественно предположить, что специалисты наряду с указанием критических перевозок сообщают информацию о степени влияния изменений нижних и верхних границ прямых ограничений $0\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij}$ на величину минимальных транспортных расходов. Будем считать, что наиболее надежная информация этого сорта связана с критическими опорными перевозками.

Другими словами, пусть наряду с опорным планом перевозок $\{x, I_{\text{оп}}\}$ известны числа Δ_{ij}^{*}, $(i, j)\in I_{\text{оп}}^{\text{н}}\cup I_{\text{оп}}^{\text{в}}$, такие, что

$$\begin{gathered}\Delta_{ij}^{*}\leqslant 0,\ (i, j)\in I_{\text{оп}}^{\text{н}};\ \Delta_{ij}^{*}\geqslant 0,\ (i, j)\in I_{\text{оп}}^{\text{в}};\\ \Delta_{ij}=0,\ (i, j)\in I_{\text{оп}}^{\text{п}},\ I_{\text{оп}}^{\text{п}}=I_{\text{оп}}\setminus I_{\text{оп}}^{\text{н}}\cup I_{\text{оп}}^{\text{в}}.\end{gathered}\tag{2}$$

С помощью опоры $I_{\text{оп}}$ и чисел (2) построим потенциалы u_i^{*}, v_j^{*}:

$$u_i+v_j^{*}-c_{ij}=\Delta_{ij}^{*},\ (i, j)\in I_{\text{оп}}.\tag{3}$$

Одно из чисел u_i, v_j можно взять произвольным.

Потенциалы и оценки из гл. I будем обозначать теми же символами, но без знака «*», причем $\Delta_{ij}=0$, $(i, j)\in I_{\text{оп}}$. Потенциалы u_i^{*}, v_j^{*} из (3) вычисляются аналогично потенциалам u_i, v_j из гл. I, если только на каждом шаге к стоимости c_{ij} опорной клетки добавлять ее оценку Δ_{ij}.

По найденным потенциалам вычислим оценки неопорных клеток

$$\Delta_{ij}=u_i+v_j-c_{ij},\ (i, j)\in I_{\text{н}}.\tag{4}$$

Из теории двойственности следует

Теорема. Для оптимальности опорного плана перевозок $\{x, I_{\text{оп}}\}$ необходимо и достаточно, чтобы для некоторых чисел (2) оценки (4) неопорных клеток удовлетворяли соотношениям

$$\Delta_{ij}^{*} \leqslant 0,\ (i,\ j) \in I_{\text{н}}^{\text{н}};\ \Delta_{ij}^{*} \geqslant 0,\ (i,\ j) \in I_{\text{н}}^{\text{в}};$$
$$\Delta_{ij}^{*} = 0,\ (i,\ j) \in I_{\text{н}}^{\text{п}}. \tag{5}$$

Если соотношения (5) для начального плана перевозок $\{x,\ I_{\text{оп}}\}$ не выполняются, то он является ε-оптимальным, где

$$\varepsilon = -\sum_{\substack{\Delta_{ij}^{*}<0,\\ (i,\ j)\in I_{\text{н}}}} \Delta_{ij}^{*} x_{ij} + \sum_{\substack{\Delta_{ij}^{*}>0,\\ (i,\ j)\in I_{\text{н}}}} \Delta_{ij}^{*} (d_{ij} - x_{ij}). \tag{6}$$

Предположим, что число (6) велико. Приступим к улучшению плана перевозок $\{x,\ I_{\text{оп}}\}$. Будем считать, что вычисления по методу гл. I приводят к нулевому шагу $\Theta^0 = 0$, т. е. не позволяют за одну итерацию улучшить план перевозок. В основу метода улучшения вырожденного плана перевозок положим приведенный критерий оптимальности. Можно показать [ч. 1], что соотношения (2), (5) являются реализацией критерия оптимальности принципа допустимых направлений. Не повторяя общую схему решения, приступим к непосредственной проверке критерия оптимальности, который, как видно из (2), (5), состоит из ряда равенств и неравенств. Проверка на совместность системы равенств и неравенств аналогична первой фазе симплекс-метода [МО]. Нетрудно заметить, что системы (2), (5) совместны тогда и только тогда, когда равно нулю минимальное значение целевой функции задачи ($f_{ij} > 0$, $g_{ij} > 0$):

$$\sum_{(i,\ j)\in I_{\text{н}}^{\text{н}} \cup I_{\text{н}}^{\text{п}}} f_{ij} p_{ij} + \sum_{(i,\ j)\in I_{\text{н}}^{\text{в}} \cup I_{\text{н}}^{\text{п}}} g_{ij} q_{ij} \to \min,$$
$$y_i + z_j - c_{ij} = 0,\ (i,\ j) \in I_{\text{оп}}^{\text{п}};\ y_i + z_j - c_{ij} \leqslant 0,\ (i,\ j) \in I_{\text{оп}}^{\text{н}};$$
$$y_i + z_j - c_{ij} \geqslant 0,\ (i,\ j) \in I_{\text{оп}}^{\text{в}};\ y_i + z_j - c_{ij} - p_{ij} \leqslant 0,\ (i,\ j) \in I_{\text{н}}^{\text{н}};$$
$$y_i + z_j - c_{ij} + q_{ij} \geqslant 0,\ (i,\ j) \in I_{\text{н}}^{\text{в}}; \tag{7}$$
$$y_i + z_j - c_{ij} - p_{ij} + q_{ij} = 0,\ (i,\ j) \in I_{\text{н}}^{\text{п}};$$
$$p_{ij} \geqslant 0,\ (i,\ j) \in I_{\text{н}}^{\text{н}} \cup I_{\text{н}}^{\text{п}};\ q_{ij} \geqslant 0,\ (i,\ j) \in I_{\text{н}}^{\text{в}} \cup I_{\text{н}}^{\text{п}}.$$

Смысл задачи (7) проясняется, если, помня о принципе допустимых направлений, записать задачу, двойственную к ней:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}l_{ij}\to\min,\ \sum_{j=1}^{m} l_{ij}=0,\ \sum_{i=1}^{n} l_{ij}=0,$$

$$0\leqslant l_{ij}\leqslant f_{ij},\ (i,\ j)\in I_{\text{н}}^{\text{н}};\ -g_{ij}\leqslant l_{ij}\leqslant 0,\ (i,\ j)\in I_{\text{н}}^{\text{в}};\quad (8)$$

$$-g_{ij}\leqslant l_{ij}\leqslant f_{ij},\ (i,\ j)\in I_{\text{н}}^{\text{п}};\ l_{ij}\geqslant 0,\ (i,\ j)\in I_{\text{оп}}^{\text{н}};$$

$$l_{ij}\leqslant 0,\ (i,\ j)\in I_{\text{оп}}^{\text{в}}.$$

Отсюда видно, что задача (7) двойственна производной задаче на вырожденном плане перевозок. Числа f_{ij}, g_{ij}, $(i,\ j)\in I_{\text{н}}$, положим равными $g_{ij}=x_{ij}$, $f_{ij}=d_{ij}-x_{ij}$, $(i,\ j)\in I_{\text{н}}$.

В рассматриваемой ситуации разумно решать задачу (8) двойственным методом, ибо имеющаяся информация касается копланов. Согласно договоренности, для матричной модели будем использовать опорные методы. В качестве начального опорного коплана задачи (8) возьмем коплан, составленный из оценок Δ_{ij}^* начального опорного плана перевозок: $\gamma_{ij}=\Delta_{ij}^*$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$. Задача (8) отличается от традиционной матричной транспортной задачи (см. гл. I) тем, что часть переменных l_{ij} может быть отрицательной. Как уже отмечалось в гл. I, это обстоятельство не вносит существенных изменений в алгоритмы опорных методов. В каждом прямом ограничении $\alpha_{ij}\leqslant l_{ij}\leqslant\beta_{ij}$ важно отмечать не знак чисел α_{ij}, β_{ij}, а их место: задают ли они нижнюю границу или верхнюю.

Решив задачу (8) двойственным опорным методом, убедимся в том, что $\{x,\ I_{\text{оп}}\}$ — оптимальный план перевозок (если $p_{ij}\equiv q_{ij}\equiv 0$), или получим подходящее направление $l^0=\{l_{ij}^0,\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}\}$. Новый план перевозок $x_{\text{нов}}$ строим по формуле

$$x_{\text{нов}}=x+\Theta^0 l^0,$$

где Θ^0 — максимально допустимый шаг. Из построения вектора l^0 следует, что $\Theta^0>0$. В отличие от традиционного метода улучшения (см. гл. I) при вычислении $x_{\text{нов}}$ может возникнуть необходимость введения нескольких циклов (по каждой ненулевой неопорной компоненте l_{ij}^0, $(i,\ j)\in I_{\text{н}}$, вектора l^0).

Новая опора $(I_{\text{оп}})_{\text{нов}}$ совпадает со старой, если перевозки $(x_{ij})_{\text{нов}}$, $(i, j) \in I_{\text{оп}}$, некритические или позволяют улучшить план перевозок $x_{\text{нов}}$ методом гл. I. В противном случае опорную клетку с критической перевозкой заменяем на неопорную клетку с некритической перевозкой, находящейся в одном цикле с заменяемой опорной.

Итерация $x \to x_{\text{нов}}$ называется *большой*, итерации по вычислению вектора l^0 — *малыми*. За большую итерацию транспортные расходы уменьшаются на величину $\Theta^0 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} l_{ij}^0$.

Для иллюстрации метода рассмотрим

Пример. В табл. V.1 помещен вырожденный опорный план перевозок. Опорная клетка (2, 4) критическая. Начальные данные для решения задачи (8) двойственным методом помещены в табл. V.2.

Таблица V.1

3	2	1	3	8	4	2	1	
2		1	8	5		2	6	10
7	10	2	1	3	5	5	7	
	-8	2	10	3	-1	5	3	10
5	3	∞	12	2	6	15	8	
3		32			-1	8		43
5		35		8		15		

Если в клетке (i, j) на месте d_{ij} стоит одно число, то оно означает одну из границ переменной l_{ij}, вторая граница предполагается равной нулю. Для ограничения $l_{ij} \leqslant d_{ij}$ записываются два числа: $-\infty$, d_{ij}. Если место d_{ij} пусто, то переменная l_{ij} не имеет ограничений.

В клетке (2, 4) соотношения критерия оптимальности не выполняются: $\delta_{24} = 3 > 0$, $\omega^0 = \varkappa_{24} = 3$. Помечаем клетки (2, 1), (2, 2), (2, 3). По коперевозкам этих клеток находим $\Theta^0 = 1$. Малая итерация по двойственному опорному методу приводит к нулевому псевдоплану l^0. Это означает, что исходный план перевозок из табл. V.1 является оптимальным. Такой же вывод можно получить и прямым опорным методом, если по табл. V.1 сделать одну итерацию с нулевым шагом и заменой клетки (2, 4) на клетку (2, 3). Этот распространенный способ действий не гарантирует в общем случае построения оптимального плана перевозок.

Таблица V.2

		-1				-2		
-3	0	0	8	3	0	0	6	0
7		-2		-3		$-\infty$		
0	-8^{+}	0	10^{+}	-3	-1^{+}	3	3	0
				2				
3	0	0	0	0	-1	-3	0	0
0		0		0		0		

Замечание. Изложенный метод улучшения вырожденных планов перевозок связан с решением опорным двойственным методом вспомогательной задачи. Если в ходе ее решения появляется вырожденный опорный коплан, то будем говорить, что исходный план перевозок имеет второй порядок вырождения. Методы улучшения вырожденных копланов рассматриваются в следующем параграфе. Они связаны с построением вспомогательных задач, которые решаются прямыми методами. Если при решении их опорным методом появится вырожденный план, то исходному плану перевозок приписывается третий порядок вырождения. Порядок вырождения исходного плана перевозок конечен, ибо каждая вспомогательная задача проще предыдущей.

2. Сетевая транспортная задача. Пусть $\{x, S_{\text{оп}}\}$ — вырожденный опорный поток в задаче

$$\sum_{(i,\ j)\in U} c_{ij}x_{ij}\to\min,$$

$$\sum_{j\in I^{+}(i)} x_{ij}-\sum_{j\in I^{-}(i)} x_{ji}=a_i,\ i\in I; \tag{9}$$

$$0\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij},\ (i,\ j)\in U.$$

Обозначим $U_{\text{оп}}^{\text{н}}=\{(i,\ j): x_{ij}=0,\ (i,\ j)\in U_{\text{оп}}\}$, $U_{\text{оп}}^{\text{в}}=\{(i,\ j): x_{ij}=d_{ij},\ (i,\ j)\in U_{\text{оп}}\}$. Будем считать, что наряду с опорным потоком известны оценки критических опорных дуг:

$$\Delta_{ij}^{*}\leqslant 0,\ (i,\ j)\in U_{\text{оп}}^{\text{н}};\ \Delta_{ij}^{*}\geqslant 0,\ (i,\ j)\in U_{\text{оп}}^{\text{в}};$$
$$\Delta_{ij}^{*}=0,\ (i,\ j)\in U_{\text{оп}}^{\text{п}}, \tag{10}$$

где $U_{\text{оп}}^{\text{п}}=\{(i,\ j): 0<x_{ij}<d_{ij},\ (i,\ j)\in U_{\text{оп}}\}$. Найдем потенциалы u_i^{*}, $i\in I$, решив систему

$$u_i^{*}-u_j^{*}-c_{ij}=\Delta_{ij}^{*},\ (i,\ j)\in U_{\text{оп}}. \tag{11}$$

Потенциал u_i^* одного из узлов $i \in I$ берем произвольным. Остальные потенциалы u_i^* находятся из (11) так же, как в гл. I, с одним изменением: вместо c_{ij} берем $c_{ij}+\Delta_{ij}^*$.

Найденные потенциалы позволяют вычислить оценки неопорных дуг

$$\Delta_{ij}^* = u_i^* - u_j^* - c_{ij}, \quad (i, j) \in U_{\text{н}}. \tag{12}$$

Теорема. Для оптимальности вырожденного опорного потока $\{x, S_{\text{оп}}\}$ задачи (9) необходимо и достаточно, чтобы при некоторых числах Δ_{ij}^*, $(i, j) \in U_{\text{оп}}$, из (10) оценки (11), (12) удовлетворяли условиям

$$\begin{gathered} \Delta_{ij}^* \leqslant 0, \ (i, j) \in U_{\text{н}}^{\text{н}}; \ \Delta_{ij}^* \geqslant 0, \ (i, j) \in U_{\text{н}}^{\text{в}}; \\ \Delta_{ij}^* = 0, \ (i, j) \in U_{\text{н}}^{\text{п}}, \end{gathered} \tag{13}$$

где $U_{\text{н}}^{\text{н}} = \{(i, j): x_{ij}=0, \ (i, j) \in U_{\text{н}}\}$, $U_{\text{н}}^{\text{в}} = \{(i, j): x_{ij}=d_{ij}, \ (i, j) \in U_{\text{н}}\}$, $U_{\text{н}}^{\text{п}} = \{(i, j): 0<x_{ij}<d_{ij}, \ (i, j) \in U_{\text{н}}\}$.

Стоимость опорного потока $\{x, S_{\text{оп}}\}$ превышает стоимость оптимального потока не более чем на величину

$$\varepsilon = -\sum_{\Delta_{ij}^*<0} \Delta_{ij}^* x_{ij} + \sum_{\Delta_{ij}^*>0} \Delta_{ij}^* (d_{ij} - x_{ij}).$$

Если число ε велико, то приступим к улучшению потока x. Без ограничения общности можно считать, что метод гл. I приводит к шагу $\Theta^0=0$. Для проверки совместности систем (10), (13) введем задачу

$$\sum_{(i, j) \in U_{\text{н}}^{\text{н}} \cup U_{\text{н}}^{\text{п}}} f_{ij} p_{ij} + \sum_{(i, j) \in U_{\text{н}}^{\text{в}} \cup U_{\text{н}}^{\text{п}}} g_{ij} q_{ij} \to \min,$$

$$\begin{gathered} u_i - u_j - c_{ij} = 0, \ (i, j) \in U_{\text{оп}}^{\text{п}}; \ u_i - u_j - c_{ij} \leqslant 0, \ (i, j) \in U_{\text{оп}}^{\text{н}}; \\ u_i - u_j - c_{ij} \geqslant 0, \ (i, j) \in U_{\text{оп}}^{\text{в}}; \\ u_i - u_j - c_{ij} - p_{ij} \leqslant 0, \ (i, j) \in U_{\text{н}}^{\text{н}}; \\ u_i - u_j - c_{ij} + q_{ij} \geqslant 0, \ (i, j) \in U_{\text{н}}^{\text{в}}; \\ u_i - u_j - c_{ij} + q_{ij} - p_{ij} = 0, \ (i, j) \in U_{\text{н}}^{\text{п}}; \\ p_{ij} \geqslant 0, \ (i, j) \in U_{\text{н}}^{\text{н}} \cup U_{\text{н}}^{\text{п}}; \ q_{ij} \geqslant 0, \ (i, j) \in U_{\text{н}}^{\text{в}} \cup U_{\text{н}}^{\text{п}}, \end{gathered} \tag{14}$$

где $f_{ij}>0$, $g_{ij}>0$.

Задача, двойственная к (14), имеет вид

$$\sum_{(i,\ j)\in U} c_{ij}l_{ij}\to\min,\ \sum_{j\in I^+(i)} l_{ij}-\sum_{j\in I^-(i)} l_{ji}=0,$$

$$0\leqslant l_{ij}\leqslant f_{ij},\ (i,\ j)\in U_{\text{н}}^{\text{н}};\ -g_{ij}\leqslant l_{ij}\leqslant 0,\ (i,\ j)\in U_{\text{н}}^{\text{в}};\quad (15)$$

$$-g_{ij}\leqslant l_{ij}\leqslant f_{ij},\ (i,\ j)\in U_{\text{н}}^{\text{п}};\ l_{ij}\geqslant 0,\ (i,\ j)\in U_{\text{оп}}^{\text{н}};$$

$$l_{ij}\leqslant 0,\ (i,\ j)\in U_{\text{оп}}^{\text{в}}.$$

Решим последнюю задачу при $g_{ij}=x_{ij}$, $f_{ij}=d_{ij}-x_{ij}$ двойственным безопорным методом (см. гл. IV), принимая за начальный двойственный план $\{u^*,\ w^*\}$, построенный по потенциалам u_i^*, $i\in I$. Пусть $l^0=\{l_{ij}^0,\ (i,\ j)\in U\}$ — решение задачи (15). Если $\sum_{(i,\ j)\in U} c_{ij}l_{ij}^0\geqslant 0$, то опорный поток $\{x,\ S_{\text{оп}}\}$ оптимален. При $\sum_{(i,\ j)\in U} c_{ij}l_{ij}^0<0$ новый поток $x_{\text{нов}}$ ищем по формуле

$$x_{\text{нов}}=x+\Theta^0 l^0,$$

где максимально допустимый шаг находим по правилам модификации прямого опорного метода, изложенным в [ч. 1]. (Там же указаны правила замены опоры $S_{\text{оп}}$ на новую опору $(S_{\text{оп}})_{\text{нов}}$.) За одну итерацию $\{x,\ S_{\text{оп}}\}\to\to\{x,\ S_{\text{оп}}\}_{\text{нов}}$ стоимость потока уменьшается на величину $\Theta^0\left|\sum_{(i,\ j)\in U} c_{ij}l_{ij}^0\right|>0$. К опорному потоку $\{x,\ S_{\text{оп}}\}_{\text{нов}}$ применим прямой опорный метод. Таким образом, изложенный метод улучшения вырожденного опорного потока представляет собой комбинацию использования прямого опорного и двойственного безопорного методов.

§ 2. Улучшение вырожденных опорных копланов перевозок и копотоков

В данном параграфе решается задача, в некотором смысле двойственная к задаче предыдущего параграфа.

1. Матричная транспортная задача. Рассмотрим задачу

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}\to\min,\ \sum_{j=1}^{m} x_{ij}=a_i,\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=b_j,\quad (1)$$

$$0\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m},$$

и вырожденный опорный коплан перевозок $\{\delta,\ I_{\text{оп}}\}$.

Обозначим $I^0=\{(i,\ j)\in I\colon\ \delta_{ij}=0\}$, $I^-=\{(i,\ j)\in I\colon\ \delta_{ij}<0\}$, $I^+=\{(i,\ j)\in I\colon\ \delta_{ij}>0\}$, $I_{\text{н}}^0=I^0\cap I_{\text{н}}$ и т. п.

В основе двойственных методов лежит предположение о том, что к началу процесса решения известен двойственный план. В гл. II начальная информация считалась одинаково ценной по всем компонентам. Однако, исходя из теории двойственности, нетрудно заметить, что ненулевым компонентам коплана перевозок соответствуют единственные числа ($\varkappa_{ij}=0$ при $\delta_{ij}<0$; $\varkappa_{ij}=d_{ij}$ при $\delta_{ij}>0$), а нулевым компонентам — множества чисел ($0\leqslant\varkappa_{ij}\leqslant d_{ij}$ при $\delta_{ij}=0$). Поэтому при более точной постановке задачи (1) естественно предположить, что специалисты, сообщая нулевые компоненты δ_{ij}, дополнительно указывают значения перевозок x_{ij}, соответствующие нулевым коперевозкам δ_{ij}. Будем считать, что наиболее надежная информация относится к неопорным переменным.

Итак, пусть известен опорный коплан перевозок $\{\delta,\ I_{\text{оп}}\}$ и неопорные псевдоперевозки $\overset{*}{\varkappa}_{ij}$, $(i,\ j)\in I_{\text{н}}$:

$$\begin{gathered}\overset{*}{\varkappa}_{ij}=0 \text{ при } \delta_{ij}<0;\ \overset{*}{\varkappa}_{ij}=d_{ij} \text{ при } \delta_{ij}>0;\\ 0\leqslant\overset{*}{\varkappa}_{ij}\leqslant d_{ij} \text{ при } \delta_{ij}=0,\ (i,\ j)\in I_{\text{н}}.\end{gathered}\tag{2}$$

С помощью опоры $I_{\text{оп}}$ и чисел (2) найдем значения опорных псевдоперевозок $\overset{*}{\varkappa}_{ij}$, $(i,\ j)\in I_{\text{оп}}$:

$$\begin{gathered}\sum_{j\in I_{\text{оп}}(i)}\overset{*}{\varkappa}_{ij}=a_i-\sum_{j\in I_{\text{н}}(i)}\overset{*}{\varkappa}_{ij},\ i=\overline{1,n};\\ \sum_{i\in I_{\text{оп}}^j}\overset{*}{\varkappa}_{ij}=b_j-\sum_{i\in I_{\text{н}}^j}\overset{*}{\varkappa}_{ij},\ j=\overline{1,m}.\end{gathered}\tag{3}$$

Из теории двойственности следует

Теорема. Для оптимальности опорного коплана перевозок необходимо и достаточно, чтобы при некоторых $\overset{*}{\varkappa}_{ij}$, $0\leqslant\overset{*}{\varkappa}_{ij}\leqslant d_{ij}$, $(i,\ j)\in I_{\text{н}}^0$, из (2) опорные псевдоперевозки, найденные из (3), удовлетворяли соотношениям

$$\begin{gathered}\overset{*}{\varkappa}_{ij}=0 \text{ при } \delta_{ij}<0;\ \overset{*}{\varkappa}_{ij}=d_{ij} \text{ при } \delta_{ij}>0;\\ 0\leqslant\overset{*}{\varkappa}_{ij}\leqslant d_{ij} \text{ при } \delta_{ij}=0,\ (i,\ j)\in I_{\text{оп}}.\end{gathered}\tag{4}$$

При указанных условиях псевдоплан перевозок $\varkappa^*$ является оптимальным планом перевозок.

Если псевдоплан перевозок $\varkappa^*$ не удовлетворяет соотношениям (4), но выполняются неравенства $0 \leqslant \varkappa_{ij}^* \leqslant d_{ij}$, $(i, j) \in I_{\text{оп}}$, то подсчитаем число

$$\varepsilon = -\sum_{(i, j) \in I_{\text{оп}}^-} \delta_{ij} \varkappa_{ij}^* + \sum_{(i, j) \in I_{\text{оп}}^+} \delta_{ij} (d_{ij} - \varkappa_{ij}^*).$$

В этом случае построенный псевдоплан перевозок $\varkappa^*$ является ε-оптимальным планом перевозок.

Предположим, что начальный опорный коплан перевозок $\{\delta, I_{\text{оп}}\}$ требуется улучшить и метод гл. II приводит к нулевому шагу σ^0.

Проверку соотношений (2), (4) сведем к экстремальной задаче

$$\begin{gathered}
\sum_{k=1}^{n+m} \alpha_k p_k + \sum_{k=1}^{n+m} \beta_k q_k \to \min, \\
\sum_{j \in I^0(i)} l_{ij} - p_i + q_i = a_i - \sum_{j \in I^+(i)} d_{ij}, \ p_i \geqslant 0, \ q_i \geqslant 0, \ i = \overline{1, n}; \\
\sum_{i \in I^0(j)} l_{ij} - p_{n+j} + q_{n+j} = b_j - \sum_{i \in I^+(j)} d_{ij}, \\
p_{n+j} \geqslant 0, \ q_{n+j} \geqslant 0, \ j = \overline{1, m}; \ 0 \leqslant l_{ij} \leqslant d_{ij}, \ (i, j) \in I^0,
\end{gathered} \tag{5}$$

где $\alpha_k > 0$, $\beta_k > 0$, $k = \overline{1, n+m}$; $I^0 = \{(i, j): \delta_{ij} = 0\}$, $I^+ = \{(i, j): \delta_{ij} > 0\}$, $I^0(i) = \{j: (i, j) \in I^0\}$, $I^+(i) = \{j: (i, j) \in I^+\}$, $I^0(j) = \{i: (i, j) \in I^0\}$, $I^+(j) = \{i: (i, j) \in I^+\}$.

При решении задачи (5) естественно считать, что выполняется тождество $p_k q_k \equiv 0$, $k = \overline{1, n+m}$. В качестве начального приближения для l можно взять нулевые перевозки $\varkappa^*$. Тогда начальные значения для p_k, q_k окажутся равными

$$p_i = 0, \ q_i = \bar{a}_i = a_i - \sum_{j \in I^+(i)} d_{ij} - \sum_{j \in I^0(i)} \varkappa_{ij}^*, \text{ если } \bar{a}_i \geqslant 0;$$

$$p_i = -\bar{a}_i, \ q_i = 0, \text{ если } \bar{a}_i < 0, \ i = \overline{1, n};$$

$$p_{n+j} = 0, \ q_{n+j} = \bar{b}_j = b_j - \sum_{i \in I^+(j)} d_{ij} - \sum_{i \in I^0(j)} \varkappa_{ij}^*, \text{ если } \bar{b}_j \geqslant 0;$$

$$p_{n+j} = -\bar{b}_j, \ q_{n+j} = 0, \text{ если } \bar{b}_j < 0, \ j = \overline{1, m}.$$

Как и в § 1, нетрудно показать, что задача (5) связана с производной задачей на двойственном плане. Поскольку для задачи (5) известен начальный план, то разумно ее решать прямыми методами. Опорный метод для решения задачи (5) легко построить по результатам гл. I. Если на некоторой итерации появится вырожденный опорный план задачи (5), то обратимся к методу § 1. В этом случае считается, что начальный двойственный план имеет *второй порядок вырождения. Порядок вырождения* определяется числом вспомогательных задач, привлеченных для того, чтобы убедиться, что двойственный план оптимален или что его следует заменить на двойственный план с большим значением целевой функции.

При решении задачи (5) возможны два исхода: 1) $p_k = q_k = 0$, $k = \overline{1, n+m}$; 2) $\sum\limits_{k=1}^{n+m} p_k^2 + q_k^2 > 0$. Первый исход означает, что рассматриваемый вырожденный двойственный план $\{u, v, w\}$ оптимален. Во втором строится новый двойственный план $\{u, v, w\}_{\text{нов}} = \{u, v, w\} + \sigma^0 \{y, z, s\}$, где $\{y, z, s\}$ — решение задачи, двойственной к (5), σ^0 — максимально допустимый шаг, вычисленный по правилам модификации опорного двойственного метода (см. [ч. 1], там же излагается правило построения новой опоры). Следует заметить, что при улучшении вырожденного двойственного плана в общем случае на одной итерации меняется несколько неопорных компонент коплана перевозок. За одну итерацию $\{\delta, I_{\text{оп}}\} \to \{\delta, I_{\text{оп}}\}_{\text{нов}}$ значение двойственной целевой функции исходной транспортной задачи увеличивается на величину

$$\sigma^0 \left(\sum_{k=1}^{n+m} \alpha_k p_k + \sum_{k=1}^{n+m} \beta_k q_k \right) > 0.$$

2. Сетевая транспортная задача. Читатель уже давно, видимо, заметил, что изложение методов решения транспортных задач в данной книге ведется так, чтобы максимально упростить переход от матричной модели к сетевой. В данном пункте намечалось перенести конструкции п. 1 на сетевые модели с одним изменением. Сетевой аналог задачи (5) предполагалось решить прямым безопорным методом. Поскольку безопорные методы не подвержены вырождению, то в этом случае на каждом двойственном плане достаточно рассматривать единственную вспомогательную задачу. Аналогичная работа уже проделана в § 1. Поэтому полезно самостоятельно повторить ее при условиях данного параграфа.

§ 3. Квазивырожденные опорные планы перевозок и потоки

Излагаются методы улучшения опорных планов перевозок и потоков, которые не являются вырожденными, но в определенном смысле близки к ним *).

1. Матричная транспортная задача. Пусть $\{x, I_{\text{оп}}\}$ — опорный план перевозок в задаче

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}\to\min,\quad \sum_{j=1}^{m} x_{ij}=a_i,\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=b_j, \tag{1}$$

$$0\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}.$$

По заданному числу $\varepsilon\geqslant 0$ введем множества $I^{\text{н}}(\varepsilon)=\{(i, j):\ 0\leqslant x_{ij}\leqslant\varepsilon\}$, $I^{\text{в}}(\varepsilon)=\{(i, j):\ d_{ij}-\varepsilon\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij}\}$, $I^{\text{н}}_{\text{оп}}(\varepsilon)=I^{\text{н}}(\varepsilon)\cap I_{\text{оп}}$ и т. п.

Согласно § 1, опорный план перевозок называется вырожденным, если множество $I^{\text{н}}_{\text{оп}}(0)\cup I^{\text{в}}_{\text{оп}}(0)$ непусто. Однако практически (при счете на ЭВМ) вырожденными можно считать и такие планы перевозок, у которых непусты множества $I^{\text{н}}_{\text{оп}}(\varepsilon)\cup I^{\text{в}}_{\text{оп}}(\varepsilon)$ при малых ε. Такие планы перевозок будем называть *квазивырожденными*. В связи с отмеченным обстоятельством исследование квазивырожденных задач имеет большое прикладное значение.

При исследовании квазивырожденных задач будем исходить из идей § 1. Начальная информация считается такой же, как в § 1, т. е. наряду с опорным планом перевозок $\{x, I_{\text{оп}}\}$ известны оценки опорных критических перевозок Δ^*_{ij}, $(i, j)\in I^{\text{в}}_{\text{оп}}\cup I^{\text{н}}_{\text{оп}}$. Критерий оптимальности и достаточное условие субоптимальности, очевидно, сохраняются. Основные изменения связаны с операциями по улучшению исходного плана перевозок. Естественно считать (в этом суть метода), что перевозки x_{ij}, мало отличающиеся от граничных (0 или d_{ij}), являются критическими. Это, согласно § 1, накладывает определенные ограничения на выбор допустимых направлений, что прежде всего отражается на виде вспомогательной за-

*) Методы данного и следующего параграфов нетрудно перенести на общие задачи линейного программирования [ч. 1].

дачи (7) § 1, введенной для проверки критерия оптимальности. Теперь вспомогательная задача имеет вид

$$\sum_{(i,\,j)\in I_{\text{н}}^{\text{н}}(\varepsilon)\,\cup\,I_{\text{н}}^{\text{п}}(\varepsilon)} f_{ij}p_{ij}+\sum_{(i,\,j)\in I_{\text{н}}^{\text{в}}(\varepsilon)\,\cup\,I_{\text{н}}^{\text{п}}(\varepsilon)} g_{ij}q_{ij}\to\min,$$

$$\begin{gathered} y_i+z_j-c_{ij}=0,\ (i,\,j)\in I_{\text{оп}}^{\text{п}}(\varepsilon);\ y_i+z_j-c_{ij}\leqslant 0,\\ (i,\,j)\in I_{\text{оп}}^{\text{н}}(\varepsilon);\ y_i+z_j-c_{ij}\geqslant 0,\ (i,\,j)\in I_{\text{оп}}^{\text{в}}(\varepsilon);\\ y_i+z_j-c_{ij}-p_{ij}\leqslant 0,\ (i,\,j)\in I_{\text{н}}^{\text{н}}(\varepsilon);\ y_i+z_j-c_{ij}+\\ +q_{ij}\geqslant 0,\ (i,\,j)\in I_{\text{н}}(\varepsilon);\ y_i+z_j-c_{ij}-p_{ij}+q_{ij}=0,\\ (i,\,j)\in I_{\text{н}}(\varepsilon);\ p_{ij}\geqslant 0,\ (i,\,j)\in I_{\text{н}}^{\text{н}}(\varepsilon)\cup I_{\text{н}}^{\text{п}}(\varepsilon);\\ q_{ij}\geqslant 0,\ (i,\,j)\in I_{\text{н}}^{\text{в}}(\varepsilon)\cup I_{\text{н}}^{\text{п}}(\varepsilon). \end{gathered} \tag{2}$$

Составим для нее двойственную задачу

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}l_{ij}\to\min,$$

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{m} l_{ij}=0,\ \sum_{i=1}^{n} l_{ij}=0,\ 0\leqslant l_{ij}\leqslant f_{ij},\ (i,\,j)\in I_{\text{н}}^{\text{н}}(\varepsilon);\\ -g_{ij}\leqslant l_{ij}\leqslant 0,\ (i,\,j)\in I_{\text{н}}^{\text{в}}(\varepsilon);\ -g_{ij}\leqslant l_{ij}\leqslant f_{ij},\\ (i,\,j)\in I_{\text{н}}^{\text{п}}(\varepsilon);\ l_{ij}\geqslant 0,\ (i,\,j)\in I_{\text{оп}}^{\text{н}}(\varepsilon);\\ l_{ij}\leqslant 0,\ (i,\,j)\in I_{\text{оп}}^{\text{в}}(\varepsilon). \end{gathered} \tag{3}$$

Эту задачу решим двойственным опорным методом, поскольку начальная информация, которую можно заимствовать из задачи (1), касается копланов перевозок (см. § 1). В результате решения возможны два исхода: а) $l_{ij}^0\equiv 0$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$; б) $l_{ij}^0\not\equiv 0$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$. Случай а) теперь не означает, что план перевозок x оптимален. Однако можно получить новую оценку отклонения плана перевозок от оптимального x^0

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}^0\leqslant$$
$$\leqslant-\sum_{\delta_{ij}<0}\delta_{ij}^{\varepsilon}\,x_{ij}+\sum_{\delta_{ij}>0}\delta_{ij}^{\varepsilon}\,(d_{ij}-x_{ij}),$$

где $\{\delta_{ij}^{\varepsilon},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}\}$ — решение задачи (2), которое получается попутно с l^0.

В случае б) исходный план перевозок заменяем на новый

$$x_{\text{нов}} = x + \Theta^0 l^0,$$

где максимально допустимый шаг Θ^0 вычисляется по правилам прямого метода. Сохраняются и правила замены опоры.

Сравнивая метод гл. I с изложенным методом решения транспортных задач, нетрудно заметить, что в новом варианте прямого метода исключаются малые шаги. Это ведет к уменьшению числа итераций и, как следствие, к уменьшению накопления ошибок округления. Платой является получение не оптимального, а субоптимального плана перевозок. Видимо, существует разумный компромисс, при котором конкретная задача решается с заданной точностью за приемлемое время. Управление величиной ε зависит от ряда причин, среди которых большую роль играют тип задачи, опыт исследователя, искусство вычислителя и т. д.

Эффективность использования квазивырожденных планов для решения транспортных (и общих) задач линейного программирования может проявиться в случае больших размеров задач. Рассматриваемый ниже пример приводится лишь для иллюстрации метода.

Пример. Рассмотрим транспортную задачу, параметры которой вместе с начальным опорным планом перевозок содержатся в табл. V.3. Положим $\varepsilon = 1/4$. Начальная таблица для решения вспо-

Таблица V.3

3	2	1	3	8	4	2	1	
2		1	8	5		2	6	10
7	10	2	1	3	5	5	7	
$\frac{1}{4}$	−8	2	10	$\frac{11}{4}$	−1	5	3	10
3	3	∞	12	2	6	15	8	
$\frac{11}{4}$		32		$\frac{1}{4}$	−1	8		43
5		35		8		15		

могательной задачи (3) двойственным опорным методом имеет вид табл. V.4. Она не удовлетворяет критерию оптимальности. После одной итерации получаем таблицу, которая удовлетворяет критерию оптимальности. Согласно общей теории, следует или уменьшить число ε, или остановиться на исходном плане перевозок, если он доста-

Таблица V.4

		-1				-2		
-3	0	0	8	3	0	0	6	0
7		-2		-3		$-\infty$		
0	-8^+	0	10^+	-3	-1^+	3	3	0
$-\infty$				2				
3	0	0	0	0	-1	-3	0	0
0		0		0		0		

точно близок к оптимальному. В нашем случае отклонение по транспортным расходам не превосходит

$$-\sum_{\delta_{ij}<0} \delta_{ij}x_{ij}+\sum_{\delta_{ij}>0} \delta_{ij}(d_{ij}-x_{ij})=7\cdot 1/4+1\cdot 1/4=2,$$

что составляет менее 0,4% от минимально возможных транспортных расходов. Начальный план перевозок сохраняем.

2. Сетевая транспортная задача. Для задачи

$$\sum_{(i,\ j)\in U} c_{ij}x_{ij}\to\min,$$

$$\sum_{j\in I^+(i)} x_{ij}-\sum_{j\in I^-(i)} x_{ji}=a_i,\ i\in I,$$

$$0\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij},\ (i,\ j)\in U,$$

с известным опорным потоком $\{x, S_{\text{оп}}\}$, $x=\{x_{ij},\ (i,\ j)\in U\}$ по заданному числу $\varepsilon\geqslant 0$ построим множества дуг $U^{\text{н}}(\varepsilon)=\{(i,\ j)\in U\colon 0\leqslant x_{ij}\leqslant\varepsilon\}$, $U^{\text{в}}(\varepsilon)=\{(i,\ j)\in U\colon d_{ij}-\varepsilon\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij}\}$, $U^{\text{п}}(\varepsilon)=\{(i,\ j)\in U\colon \varepsilon<x_{ij}<d_{ij}-\varepsilon\}$.

Поток $\{x, S_{\text{оп}}\}$ назовем квазивырожденным (ε-вырожденным), если у него множество $U^{\text{н}}_{\text{оп}}(\varepsilon)\cup U^{\text{в}}_{\text{оп}}(\varepsilon)$, $U^{\text{н}}_{\text{оп}}(\varepsilon)=U^{\text{н}}(\varepsilon)\cap U_{\text{оп}}$, $U^{\text{в}}_{\text{оп}}(\varepsilon)=U^{\text{в}}(\varepsilon)\cap U_{\text{оп}}$, непусто. Таким образом, каждый вырожденный опорный поток является и квазивырожденным. Обобщение состоит в том, что опорные дуговые потоки квазивырожденного плана необязательно критические, хотя и близки к ним (они квазикритические). С физической точки зрения отличие критического дугового потока от квазикритического можно трактовать следующим образом. Для критического потока x_{ij} специалист уверенно (степень уверенности определяется величиной δ_{ij}) указывает на его граничное значение ($x_{ij}=0$ при $\delta_{ij}<0$; $x_{ij}=d_{ij}$ при $\delta_{ij}>0$). Если же специалист говорит, что значение x_{ij} находится около границы (т. е. $\delta_{ij}\approx 0$), то x_{ij} — квазикритический дуговой поток.

Для улучшения квазивырожденных потоков предлагается использовать метод § 1, в котором множества $U^{\text{н}}$, $U^{\text{в}}$, $U^{\text{п}}$ следует заменить на множества $U^{\text{н}}(\varepsilon)$, $U^{\text{в}}(\varepsilon)$, $U^{\text{п}}(\varepsilon)$. Как и в предыдущем пункте, метод приводит к построению субоптимальных потоков. Идея метода изложена в [ч. 1] и тесно связана с принципом допустимых направлений. Читателю, знакомому с предыдущим материалом, нетрудно описать все формальные операции алгоритма улучшения квазивырожденного потока. На данном этапе разумно ограничиться приведенными замечаниями, ибо успех здесь во многом зависит от конкретной задачи, специалиста, заинтересованного в ее решении, и многих других причин. Думается, что по мере накопления практических результатов проблема будет рассмотрена на другом уровне.

§ 4. Квазивырожденные опорные копланы перевозок и копотоки

По аналогии с § 3 методы § 2 можно обобщить на случай опорных копланов перевозок и копотоков, близких к вырождению.

1. Матричная транспортная задача. Пусть $\{\delta, I_{\text{оп}}\}$ — опорный коплан перевозок в задаче

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}\to\min,$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij}=a_i,\quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=b_j,$$

$$0\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij},\quad i=\overline{1,n},\quad j=\overline{1,m}.$$

По заданному числу $\varepsilon\geqslant 0$ построим множества $I^0(\varepsilon)=\{(i,j)\colon |\delta_{ij}|\leqslant\varepsilon\}$, $I^+(\varepsilon)=\{(i,j)\colon \delta_{ij}>\varepsilon\}$, $I^-(\varepsilon)=$ $=\{(i,j)\colon \delta_{ij}<-\varepsilon\}$, $I_{\text{н}}^0(\varepsilon)=I^0(\varepsilon)\cap I_{\text{н}}$ и т. п.

В § 2 вырожденность опорного коплана связывается с непустотой множества $I_{н}^{0}(0)$. С точки зрения метода гл. II наличие элементов в таком множестве нежелательно, ибо это может привести к «холостому» шагу $\sigma^0=0$, когда улучшения коплана с помощью двойственного опорного метода не происходит. С практической точки зрения нежелательны и ситуации, когда за итерацию изменение значения двойственной целевой функции незначительно. Опорные копланы, на которых они реализуются, назовем *квазивырожденными.* Исходя из вычислений § 2 и введенных обозначений, нетрудно понять, что указанные ситуации связаны со случаями, когда при малых ε непусты множества $I^0(\varepsilon)$. С физической точки зрения рассмотрение квазивырожденных планов двойственных задач диктуется тем, что при малых значениях δ_{ij} ошибки в определении знака δ_{ij} сильно влияют на значения компонент псевдоплана. Поэтому разумно сомнительные случаи исследовать дополнительно. Другими словами, по рекомендациям специалистов выделяются ситуации, в которых их опыт и интуицию нужно дополнить математическими расчетами. Что касается конкретных методов улучшения квазивырожденных опорных копланов перевозок, то их нетрудно построить методом § 2 с заменой множеств I^0, I^+, I^- на множества $I^0(\varepsilon)$, $I^+(\varepsilon)$, $I^-(\varepsilon)$. При этом, как и в § 3, получаются субоптимальные планы перевозок.

2. **Сетевая транспортная задача.** Все сказанное о матричной модели транспортной задачи справедливо и для сетевой модели. Читателю рекомендуется самостоятельно не только формально записать необходимые формулы и операции, но и использовать получающиеся алгоритмы для решения практических задач. Это позволит глубоко усвоить основные математические принципы данной книги и накопить опыт решения практических задач.

Глава VI

АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ

Процесс решения практической задачи не заканчивается получением оптимального плана. В связи с разными обстоятельствами представляют интерес описание всего множества оптимальных планов и оценка чувствительности оптимального плана к изменениям параметров задачи. Большое практическое значение с точки зрения управления (коррекции плана) имеет вопрос об эффективном (не требующем значительных затрат времени и средств) переходе к новому оптимальному плану, соответствующему новым, измененным, значениям параметров. Параметры транспортной задачи разбиваются на следующие группы: коэффициенты стоимости, объемы производства и потребления (интенсивности узлов), величина ограничений на пропускные способности, количество пунктов производства и потребления (количество узлов сети), количество незапрещенных перевозок (количество дуг сети).

§ 1. Множества оптимальных и субоптимальных планов

Исходя из методов решения транспортных задач, изложенных в гл. I—IV, в данном параграфе описываются множества оптимальных и ε-оптимальных планов прямой и двойственной задач при матричном и сетевом описаниях транспортной задачи.

1. Матричная транспортная задача. Пусть $x^0=\{x_{ij}^0, i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}\}$ — оптимальный план перевозок в задаче

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}\to\min,$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij}=a_i,\quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=b_j, \tag{1}$$

$$0\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij},\quad i=\overline{1,n},\quad j=\overline{1,m}.$$

Множество оптимальных планов X^0 представляет собой выпуклое замкнутое множество. Цель настоящего параграфа — описать множество X^0 и найти условия, при которых X^0 состоит из единственного элемента x^0.

Будем считать, что наряду с оптимальным планом x^0 известен один из методов гл. I—IV, с помощью которого решена задача (1). Пусть для начала им является прямой опорный метод гл. I. Следовательно, известна опора $I_{\text{оп}}$, соответствующая плану x^0, и выполняются соотношения

$$x_{ij}^0=0,\ (i,j)\in I_{\text{н}}^-;\quad x_{ij}^0=d_{ij},\ (i,j)\in I_{\text{н}}^+;$$

$$0\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij},\ (i,j)\in I_{\text{н}}^0.$$

Здесь $I_{\text{н}}^{-}=\{(i,\ j):\ \Delta_{ij}<0,\ (i,\ j)\in I_{\text{н}}\}$, $I_{\text{н}}^{+}=\{(i,\ j):\ \Delta_{ij}>0,\ (i,\ j)\in I_{\text{н}}\}$, $I_{\text{н}}^{0}=\{(i,\ j):\ \Delta_{ij}=0,\ (i,\ j)\in I_{\text{п}}\}$. Из физического смысла оценок Δ_{ij} следует, что только вариации перевозок в клетках $(i,\ j)\in I_{\text{н}}^{0}$ (и вызванные ими вариации опорных перевозок) могут сохранить значение целевой функции (1) на минимальном уровне. Припишем клетке $(i,\ j)\in I_{\text{н}}^{0}$ число λ_{ij}. Составим цикл для клетки $(i,\ j)$ с первым горизонтальным звеном. Клетке $(k,\ l)$ припишем числа $\overset{ij}{\lambda}_{kl}=-\lambda_{ij}$, если она лежит на конце горизонтального звена цикла; $\overset{ij}{\lambda}_{kl}=\lambda_{ij}$, если она лежит на конце вертикального звена; $\overset{ij}{\lambda}_{kl}=0$, если она не принадлежит циклу.

Вариации λ_{ij} перевозок x_{ij}^{0}, $(i,\ j)\in I_{\text{н}}^{0}$, вызывают вариацию $\lambda_{kl}=\sum\limits_{(i,\ j)\in I_{\text{н}}^{0}}\overset{ij}{\lambda}_{kl}$ опорной перевозки x_{kl}^{0}, $(k,\ l)\in I_{\text{оп}}$. Вариации λ_{ij}, $(i,\ j)\in I_{\text{н}}^{0}$, допустимы, если

$$\begin{gathered}0\leqslant x_{ij}^{0}+\lambda_{ij}\leqslant d_{ij},\ (i,\ j)\in I_{\text{н}}^{0};\\ 0\leqslant x_{kl}^{0}+\lambda_{kl}\leqslant d_{kl},\ (k,\ l)\in I_{\text{оп}}.\end{gathered}\tag{2}$$

Отсюда следует, что каждый элемент множества X^0 можно представить в виде

$$x_{ij}^{0},\ (i,\ j)\in I_{\text{н}}^{-}\cup I_{\text{н}}^{+};\quad x_{ij}^{0}+\lambda_{ij},\ (i,\ j)\in I_{\text{н}}^{0}\cup I_{\text{оп}},$$

где $\{\lambda_{ij},\ (i,\ j)\in I_{\text{н}}^{0}\cup I_{\text{оп}}\}$ — решение системы неравенств (2).

Задача (1) имеет единственное решение x^0 тогда и только тогда, когда система неравенств (2) имеет только тривиальное решение $\lambda_{ij}\equiv 0$, $(i,\ j)\in I_{\text{н}}^{0}\cup I_{\text{оп}}$. В частности, оптимальный план перевозок $\{x^0,\ I_{\text{оп}}\}$ будет единственным, если оценки неопорных клеток отличны от нуля.

Приведенные выше вычисления меняются незначительно, если предположить, что оптимальный план перевозок x^0 построен с помощью двойственного опорного метода гл. II. В этом случае x^0 — базисный план перевозок и он будет единственным, если оптимальный коплан $\{\delta^0,\ I_{\text{оп}}\}$ невырожденный. Для вырожденного коплана $\{\delta^0,\ I_{\text{оп}}\}$ множество X^0 оптимальных планов строится аналогично, меняются лишь числа Δ_{ij} на δ_{ij}.

При анализе решения (см. последующие параграфы главы) важную роль играет и множество Y^0 оптимальных двойственных планов перевозок (или множество Δ^0 соответствующих оптимальных копланов перевозок). Из результатов гл. I, II видно, что вектор $\Delta^0=\{\Delta_{ij}^0=0, (i, j)\in I_{\text{оп}}, \Delta_{ij}^0, (i, j)\in I_{\text{н}}\}$, составленный из оценок оптимального плана перевозок x^0, который построен с помощью прямого опорного метода, является оптимальным базисным копланом перевозок. По нему с помощью опоры $I_{\text{оп}}$ легко восстанавливаются компоненты (потенциалы строк и столбцов) $u_i^0, v_j^0, i=\overline{1, n}, j=\overline{1, m}$, оптимального двойственного плана. Из обоснования двойственного опорного метода (см. гл. II) следует, что значение двойственной целевой функции может сохраниться на максимальном уровне при вариации только тех опорных коперевозок (и соответствующих неопорных коперевозок) Δ_{kl}^0, которые лежат в клетках с критическими перевозками ($x_{kl}^0=0$ или $x_{kl}^0=d_{kl}$). Вариация μ_{kl} перевозок этих клеток вызовет определенную вариацию μ_{ij} коперевозок неопорных клеток. Числа μ_{ij} однозначно находятся по μ_{kl} и равны $\pm\mu_{kl}$ (см. подсчет λ_{kl} для случая X^0).

Исходя из формулы приращения, найдем сначала множество допустимых вариаций μ_{kl}, при которых скорость изменения двойственной целевой функции равна нулю и впервые появятся новые нулевые неопорные коперевозки. По этим вариациям составляем подмножество Δ_1^0 множества Δ^0. В связи с тем что после появления нулевых коперевозок формула приращения меняет вид, то составляем новое множество допустимых вариаций μ_{kl}, при которых двойственная целевая функция не меняется и появляются новые нулевые неопорные коперевозки. Так появится подмножество $\Delta_2^0\subset\Delta^0$. Через конечное число шагов будет построено все множество Δ^0. Подробности можно восстановить по вычислениям гл. II.

Из этих рассуждений следует, что задача (1) имеет единственный оптимальный двойственный план перевозок, если оптимальный план перевозок x^0 невырожден в смысле гл. I, т. е. $0<x_{ij}^0<d_{ij}$, $(i, j)\in I_{\text{оп}}$.

Приведенная схема построения множества Δ^0 оптимальных копланов сохраняется и в случае, когда задача

(1) решена двойственным опорным методом. В этом случае вместо вектора x^0 нужно рассматривать вектор $\varkappa^0$.

Один из возможных способов фактического построения множества X^0 оптимальных планов перевозок состоит в следующем. Сначала с помощью прямого опорного метода перейдем от оптимального опорного плана перевозок $\{x^0, I_{\text{оп}}\}$ к оптимальному базисному плану перевозок $\{x^1, \overset{1}{I}_{\text{оп}}\}$, т. е. сделаем критическими ($\overset{1}{x}_{ij}=0$ или d_{ij}) все неопорные перевозки исходного оптимального плана перевозок. Отметим неопорные клетки $I_{\text{н}}^{10}$ с нулевыми оценками $\Delta_{ij}=0$, $(i, j)\in I_{\text{н}}$. Варьируем перевозку в клетке $(i_1, j_1)\in I_{\text{н}}^{10}$ до тех пор, пока не будет построен новый оптимальный базисный план перевозок $\{x^{11}, \overset{11}{I}_{\text{оп}}\}$. Если в множестве $I_{\text{н}}^{10}$ имеется k элементов, то в результате указанных вариаций получится, вообще говоря, k новых оптимальных базисных планов перевозок $\{x^{11}, \overset{11}{I}_{\text{оп}}\}$, $\{x^{12}, \overset{12}{I}_{\text{оп}}\}, \ldots, \{x^{1k}, \overset{1k}{I}_{\text{оп}}\}$. Выпуклую оболочку планов перевозок $x^1, x^{11}, \ldots, x^{1k}$ обозначим через X^1. Если перечисленные операции повторить с каждым из вновь построенных оптимальных базисных планов перевозок $\{x^{1i}, \overset{1i}{I}_{\text{оп}}\}$, то получим множества X^{1i}, $i=\overline{1, k}$. Ясно, что новые оптимальные базисные планы перевозок могут появляться лишь на конечном числе итераций. Все полученные множества $X^1, X^{1i}, \ldots, X^{1i_1 \ldots i_s}$ образуют множество X^0. Схематично описанную процедуру построения множества X^0 удобно изображать в виде ветвящегося дерева.

Аналогичный алгоритм существует для построения множества оптимальных копланов Δ^0. На предварительном этапе по двойственному опорному коплану перейдем к оптимальному базисному коплану, а затем строим подмножества $\Delta^1, \Delta^{1i}, \ldots$ по критическим опорным перевозкам.

Рассмотрим ситуацию, когда транспортная задача (1) решена безопорными методами. Она может быть сведена к предыдущей, если оптимальный план перевозок x^0 дополнить соответствующей опорой $I_{\text{оп}}$. Опишем другой метод. Решение задачи (1) прямым безопорным методом прекращается, как только обнаруживается, что производная сеть на текущем плане перевозок не содержит отрицательных контуров (см. гл. IV). Из физического смысла контуров следует, что транспортные расходы можно сохранить на минимальном уровне, если варьировать перевозки только на нулевых контурах. Всевозможные допустимые вариации перевозок (при которых не нарушаются прямые ограничения) вдоль нулевых контуров задают, очевидно, множество X^0 оптимальных перевозок.

Оптимальный план перевозок будет в задаче (1) единственным, если соответствующая ему производная сеть не содержит нулевых контуров.

2. Сетевая транспортная задача. Множество X^0 оптимальных потоков в задаче

$$\begin{gathered}\sum_{(i,\,j)\in U} c_{ij}x_{ij}\to\min,\\ \sum_{j\in I^+(i)} x_{ij}-\sum_{j\in I^-(i)} x_{ji}=a_i,\ i\in I,\\ 0\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij},\ (i,\,j)\in U,\end{gathered}\tag{3}$$

строится аналогично множеству X^0 оптимальных планов перевозок.

Приведем некоторые выкладки. Предположим, что транспортная задача решалась безопорным методом (прямым или двойственным) и получен некоторый оптимальный поток x^0 и оптимальный копоток δ^0. Построим по ним следующие множества:

$$\begin{gathered}U^{\text{п}}=\{(i,\,j):\ 0<x_{ij}<d_{ij}\},\ U^{\text{н}}=\{(i,\,j):\ x_{ij}=0\},\\ U^{\text{в}}=\{(i,\,j):\ x_{ij}=d_{ij}\},\ U^+=\{(i,\,j):\ \delta_{ij}>0\},\\ U^-=\{(i,\,j):\ \delta_{ij}<0\},\ U^0=\{(i,\,j):\ \delta_{ij}=0\}.\end{gathered}$$

Рассмотрим систему

$$\begin{gathered}l_{ij}=0,\ (i,\,j)\overline{\in} U^0;\ -\overset{0}{x}_{ij}\leqslant l_{ij}\leqslant d_{ij}-\overset{0}{x}_{ij},\ (i,\,j)\in U^0;\\ \sum_{j\in I_+(i)} l_{ij}-\sum_{j\in I_-(i)} l_{ji}=0,\ i\in I.\end{gathered}\tag{4}$$

Каждый элемент $\bar{x}^0$ множества X^0 можно представить в виде

$$\bar{x}^0=\{\overset{0}{\bar{x}}_{ij}=\overset{0}{x}_{ij}+l_{ij},\ (i,\,j)\in U\},$$

где числа l_{ij} удовлетворяют системе (4).

Система (4) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда в сети $S^0=(I,\,U^0)$ с потоком x^0 есть контур.

Опишем множество Δ^0 оптимальных копотоков. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}
&\alpha_i-\alpha_j=0, \ (i, j)\in U^{\text{п}};\\
&\alpha_i-\alpha_j\geqslant 0, \ (i, j)\in U^{\text{в}0}=U^{\text{в}}\cap U^0;\\
&\alpha_i-\alpha_j\leqslant 0, \ (i, j)\in U^{\text{н}0}=U^{\text{н}}\cap U^0;\\
&\alpha_i-\alpha_j\geqslant -\overset{0}{\delta}_{ij}, \ (i, j)\in U^{\text{в}+}=U^{\text{в}}\cap U^+;\\
&\alpha_i-\alpha_j\leqslant -\overset{0}{\delta}_{ij}, \ (i, j)\in U^{\text{н}-}=U^{\text{н}}\cap U^-.
\end{aligned} \tag{5}$$

Каждый элемент $\overline{\delta}^0$ множества Δ^0 можно представить в виде

$$\overline{\delta}^0=\{\overline{\delta}^0_{ij}=\delta_{ij}+\alpha_i-\alpha_j, \ (i, j)\in U\}.$$

Система (5) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда в сети $S^0=(I, U^0)$ существует такое множество узлов I_*, что $R(I_*)\subset U^{\text{в}0}$, $R(I\setminus I_*)\subset U^{\text{н}0}$, где $R(I_*)$ — разрез в сети S^0, определяемый множеством I_*.

Перебрав все множества I_*, найдем все оптимальные копотоки.

Из содержания гл. I—IV видно, какая связь существует между понятиями и результатами двух форм транспортной задачи. Поэтому читателям рекомендуется описанные в п. 1 конструкции самостоятельно перенести на задачу (3).

3. Множество ε-оптимальных планов. Конструкции данного пункта поясним на задаче о потоке минимальной стоимости (3). Переход к задаче (1) оставим в качестве упражнения. Множество X^ε ε-оптимальных потоков состоит из потоков x^ε, удовлетворяющих неравенству

$$\sum_{(i, j)\in U} c_{ij}\overset{\varepsilon}{x}_{ij}-\sum_{(i, j)\in U} c_{ij}\overset{0}{x}_{ij}\leqslant\varepsilon.$$

Для построения множества X^ε достаточно внести небольшие изменения в конструкции п. 1. Предварительный этап (переход к оптимальному базисному потоку $\{x^1, \overset{1}{S}_{\text{оп}}\}$) сохраняется. Кроме потоков $x^{11}, \ldots, x^{1k}$, которые строились в п. 1 по потоку x^1 на первом этапе, построим дополнительные потоки для каждого базисного потока $x^1, x^{11}, \ldots, x^{1k}$. Рассмотрим для определенности поток $\{x^1, \overset{1}{S}_{\text{оп}}\}$. Поток по дуге $(i, j)\in U_{\text{н}}$ с $\Delta_{ij}<0$ увеличиваем до тех пор, пока $x_{ij}\leqslant\varepsilon/|\Delta_{ij}|$ и не нарушаются пропускные способности опорных дуг. Если $\Delta_{ij} > 0$, $(i, j) \in U_{\text{н}}$, то поток по дуге (i, j) уменьшаем до тех пор, пока $d_{ij} - x_{ij} \leqslant \varepsilon/\Delta_{ij}$ и не нарушаются пропускные способности опорных дуг. Получим поток $x^1(i, j)$. Таким образом, с каждым оптимальным базисным потоком $\{x^1, S^1_{\text{оп}}\}$ связываются, вообще говоря, l_1 дополнительных потоков, где l_1 — число отличных от нуля оценок Δ_{ij}, $(i, j) \in U^1_{\text{н}}$. На первом этапе строится выпуклая оболочка X^1_ε по потокам $x^1, x^{11}, \ldots, x^{1k}$ и дополнительным потокам по каждому из перечисленных базисных потоков; на втором этапе по x^{1i} строятся новые оптимальные базисные потоки и дополнительные к ним; и т. д. Объединение получающихся выпуклых оболочек образует множество X^ε.

Идея метода построения множества ε-оптимальных планов достаточно проста и без труда переносится на задачу построения множества Δ^ε ε-оптимальных копланов.

В случае, когда оптимальный поток x^0 получен прямым безопорным методом, при построении множества X^ε рассматриваются все контуры на производной сети S_{x0}, строится максимально допустимый поток по каждому из них со стоимостью, не превосходящей ε. Выпуклая комбинация этих потоков, наложенная на поток x^0, дает любой элемент множества X^ε.

4. Примеры. 1) В табл. VI.1 содержится оптимальный опорный план перевозок, который получен прямым опорным методом.

Таблица VI.1

3	2	1	3	8	4	2	1	
	−1	1	7	7		2	5	10
7	10	2	1	3	5	8	7	
	−8	2	10	2		6		10
5	3	∞	12	2	6	15	8	
5		32		1	0	7		45
5		35		10		15		

Построим сначала множество X^0 оптимальных планов перевозок. За одну итерацию получен оптимальный базисный план перевозок x^1 (табл. VI.2). У него равна нулю оценка единственной неопорной клетки: $\Delta_{33}=0$. Уменьшив перевозку клетки (3, 3), получим новый оптимальный базисный план перевозок: $x^{11}=\{x_{11}=0,\ x_{12}=1,\ x_{13}=7,\ x_{14}=2,\ x_{21}=0,\ x_{22}=2,\ x_{23}=3,\ x_{24}=5,\ x_{31}=5,\ x_{32}=32,\ x_{33}=0,\ x_{34}=8\}$.

Таблица VI.2

3	2	1	3	8	4	2	1
	−1	1	7	7		2	5
7	10	2	1	3	5	8	7
	−8	2	10	1		7	
5	3	∞	12	2	6	15	8
5		32		2	0	6	

Выпуклая оболочка планов перевозок x^1 и x^{11} имеет вид

$$x(\lambda_1, \lambda_2)=\lambda_1 x^1+\lambda_2 x^{11},\ \lambda_1,\ \lambda_2\geqslant 0,\ \lambda_1+\lambda_2=1.$$

Таким образом, множество X^1 состоит из однопараметрического семейства планов перевозок $x_{11}=0$, $x_{12}=1$, $x_{13}=7$, $x_{14}=2$, $x_{21}=0$, $x_{22}=2$, $x_{23}=\lambda_1+3\lambda_2$, $x_{24}=7\lambda_1+5\lambda_2$, $x_{31}=5$, $x_{32}=32$, $x_{33}=2\lambda_1$, $x_{34}=6\lambda_1+8\lambda_2$, где λ_1, $\lambda_2\geqslant 0$, $\lambda_1+\lambda_2=1$. Если строить новый оптимальный базисный план перевозок по плану x^{11}, то получим план из табл. VI.2. Следовательно, $X^0=X^1$.

Таблица VI.3

	3		12		6		8		
−2	3	2	1	3	8	4	2	1	
	0	−1 +	1	7 $\bar{0}$	7	0	2	5 $\bar{0}$	10
−1	7	10	2	1	3	5	8	7	
	0	−8 $\overset{0}{+}$	2	10 $\overset{0}{0}$	3	0	5	0	10
0	5	3	∞	12	2	6	15	8	
	5	0	32	0	0	0 $\overset{+}{0}$	8	0	45
	5		35		10		15		

Построим множество Δ^0 оптимальных копланов в рассматриваемом примере. В табл. VI.3 содержится оптимальный базисный коплан перевозок δ^0 (δ^1), составленный из оценок клеток $\{\Delta_{ij},\ i=\overline{1,\ n},\ j=\overline{1, m}\}$ (оценки опорных клеток равны нулю). Ему соответствует псевдоплан перевозок с двумя критическими перевозками $x_{23}=3$, $x_{31}=5$. Начнем с клетки (2, 3). Поскольку при изменении опорной коперевозки δ_{23} меняется неопорная коперевозка $\delta_{33}=0$, то при вычислении скорости изменения двойственной целевой функции нужно пользоваться полной формулой приращения из § 1 гл. II. При $\Delta\delta_{23}>0$ скорость равна $(\varkappa_{23}-d_{23})-d_{33}=2$, при $\Delta\delta_{23}<0$ равна $\varkappa_{23}=3$. Таким образом, вариация коперевозки δ_{23} недопустима.

Рассмотрим клетку (3, 1). При увеличении коперевозки δ_{31} на единицу получим новый оптимальный базисный коплан перевозок:

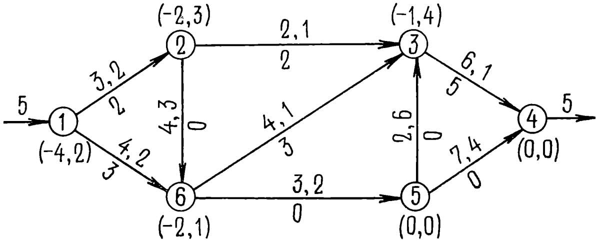


Рис. VI.1

$\delta^{11}=\{\delta_{11}=0,\ \delta_{12}=7,\ \delta_{13}=0,\ \delta_{14}=5,\ \delta_{21}=-7,\ \delta_{22}=10,\ \delta_{23}=0,$ $\delta_{24}=0,\ \delta_{31}=1,\ \delta_{32}=0,\ \delta_{33}=0,\ \delta_{34}=0\}$. Выпуклые комбинации копланов перевозок δ^0 и δ^{11} составляют множество Δ^1.

Для коплана δ^{11} критическими являются псевдоперевозки $\varkappa_{11}$, $\varkappa_{23}$. Начнем с клетки (1, 1). При увеличении коперевозки δ_{11} скорость изменения двойственной целевой функции равна $\varkappa_{11}-d_{11}=-3$, поэтому уменьшаем коперевозку δ_{11} на единицу, что приводит к оптимальному коплану перевозок δ^0, совпадающему с копланом перевозок δ^1.

Перейдем к клетке (2, 3). Вариация коперевозки δ_{23}, как и при рассмотрении δ^1, ведет к увеличению двойственной целевой функции, что недопустимо. Таким образом, процесс построения множества Δ^0 закончен: $\Delta^0=\Delta^1$.

2) Рассмотрим сеть (рис. VI.1), содержащую оптимальный поток, полученный прямым безопорным методом. Кроме оптимального потока на сети указаны оптимальные метки узлов, т. е. метки, полученные на последней итерации. Просмотрим метки еще раз. Узлу $l=3$ можно приписать метку $\{-1,\ 6\}=\{\mu_3^*,\ k^*(3)\}$. Находим числа $k(6)=1$, $k(1)=2$, $k(2)=3$, $k(3)=4$, $k(4)=0$, $l=3\in\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$. Значит, дуги $(6,\ 3)_+$, $(2,\ 3)_-$, $(1,\ 2)_-$, $(1,\ 6)_+$ образуют контур, значение которого равно $\mu_3-\mu_3^*=-1-(-1)=0$. Пропускная способность контура равна 1. Пропустим по нему единичный поток. Получим другой оптимальный поток: $x_{12}=1$, $x_{16}=4$, $x_{23}=1$, $x_{26}=0$, $x_{34}=5$, $x_{53}=0$, $x_{54}=0$, $x_{63}=4$, $x_{65}=0$. На сети (см. рис. VI.1) больше нет контуров с нулевым значением. (В этом можно убедиться, просмотрев еще раз все метки.) Выпуклая комбинация построенных потоков образует множество X^0: $x_{26}=x_{65}=x_{53}=x_{54}=0$, $x_{34}=5$, $x_{23}=2\lambda_1+\lambda_2=$ $=x_{12}$, $x_{16}=x_{63}=3\lambda_1+4\lambda_2$, $\lambda_1,\ \lambda_2>0$, $\lambda_1+\lambda_2=1$.

Построим множество Δ^0 оптимальных копотоков для данного примера. Один оптимальный копоток можно получить из условий $\delta_{ij}=\mu_j-\mu_i-c_{ij}$, $(i, j)\in U$, где μ_i — первые элементы оптимальных меток. Полученный копоток изображен на рис. VI.2.

Множество $\overset{1}{I}_*=\{5\}$, $R(\overset{1}{I}_*)=\varnothing$ (напомним, что разрез рассматриваем в сети $S^0=(I, U^0)$), $I\setminus\overset{1}{I}_*=\{1, 2, 3, 4, 6\}$, $R(I\setminus\overset{1}{I}_*)=$ $=\{(6, 5)\}\subset U^{\text{н}0}$. Построим новый оптимальный копоток. Узлам $i\in\overset{1}{I}_*$ припишем $\alpha_i=1$, т. е. $\alpha_5=1$, узлам $i\in I\setminus\overset{1}{I}_*$ — $\alpha_i=0$. Находим число

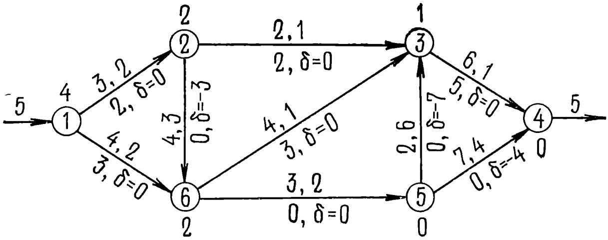


Рис. VI.2

$\sigma=\min-\delta_{ij}/(\alpha_i-\alpha_j)$, $\delta_{ij}(\alpha_i-\alpha_j)<0$, $(i, j)\in U^{\text{п}}$. В данном случае $\sigma=\delta_{54}/(\alpha_5-\alpha_4)=4$. Новый копоток: $\delta_{12}=0$, $\delta_{16}=0$, $\delta_{23}=0$, $\delta_{26}=-3$, $\delta_{34}=0$, $\delta_{53}=-3$, $\delta_{54}=0$, $\delta_{63}=0$, $\delta_{65}=-4$.

Построить множество I_*, отличное от $\overset{1}{I}_*$, невозможно. Значит, выпуклая комбинация построенных копотоков образует множество Δ^0: $\delta_{12}=\delta_{16}=\delta_{63}=\delta_{34}=\delta_{23}=0$, $\delta_{26}=-3$, $\delta_{65}=-4\lambda_2$, $\delta_{54}=-4\lambda_1$, $\delta_{53}=$ $=-7\lambda_1-3\lambda_2$, λ_1, $\lambda_2>0$, $\lambda_1+\lambda_2=1$.

§ 2. Вариация параметров стоимости

Анализ решений транспортных задач начнем с исследования влияния малых вариаций параметров стоимости на минимальные транспортные расходы. При этом будем основываться на вычислениях, выполненных в [ч. 1] для общей задачи линейного программирования. Методы предыдущих глав будут использоваться для построения новых оптимальных планов. В данном и последующих параграфах теоретические аспекты анализа решений поясняются на транспортной задаче в матричной форме.

Перенесение параметров на сетевую модель оставляем читателям в качестве упражнения. Примеры связаны с обеими формами транспортной задачи.

1. Теория. Рассмотрим задачу

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}\to\min,$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij}=a_i,\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=b_j, \tag{1}$$

$$0\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij}<\infty,\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}.$$

Будем считать, что все параметры задачи, за исключением параметров стоимости $c=\{c_{ij},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}\}$, фиксированы. Обозначим $X^0=X^0(c)$ множество оптимальных планов перевозок (см. § 1)

$$\varphi(c)=\min\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij},$$

где минимум берется по множеству планов перевозок X.

Многозначная функция (кратко множество $X^0(c)$) $c\to X^0(c)$ называется *полунепрерывной сверху* в точке c, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что множество $X^0(\tilde c)$ содержится в ε-окрестности множества $X^0(c)$ всякий раз, как только $\|\tilde c-c\|<\delta$.

Из [ч. 1] следует 1) $X^0(c)$ — выпуклый компакт, который полунепрерывно сверху зависит от c; 2) $\varphi(c)$ — вогнутая функция, непрерывная по c.

Для количественной оценки влияния малых вариаций параметров стоимости на минимальные транспортные расходы введем *коэффициенты чувствительности* транспортных расходов по параметрам стоимости

$$\nu_{ij}^{+}(c)=\left.\frac{\partial\varphi(c)}{\partial c_{ij}}\right|_{c_{ij}+0},\quad \nu_{ij}^{-}(c)=\left.\frac{\partial\varphi(c)}{\partial c_{ij}}\right|_{c_{ij}-0}.$$

В [ч. 1] показано, что

$$\nu_{ij}^{+}(c)=\min_{x\in X^0(c)} x_{ij},\quad \nu_{ij}^{-}(c)=\max_{x\in X^0(c)} x_{ij}. \tag{2}$$

Числа $\nu_{ij}^{+}(c)$, $\nu_{ij}^{-}(c)$ позволяют, зная решение транспортной задачи для фиксированного вектора c, оценить величину минимальных транспортных расходов $\varphi(\tilde c)$ для векторов $\tilde c$, близких к c.

При вычислении точного значения $\varphi(\tilde c)$ разумно воспользоваться результатами вычислений по транспортной задаче с параметрами стоимости $c=\{c_{ij},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}\}$. Предположим, что до момента прерывания процесса решения в связи с изменением коэффициентов стоимости задача (1) решалась одним из методов гл. I—IV.

Если задача решалась прямым опорным методом, то после замены $c\to\tilde{c}$ пересчитываются потенциалы и оценки неопорных клеток. В случае, когда прервался двойственный опорный метод, то по старым потенциалам $u_i,\ v_j,\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}$, пересчитываются компоненты $\tilde{\delta}_{ij}=u_i+ +v_j-c_{ij},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}$, коплана перевозок и по $\{\tilde{\delta},\ I_{\text{оп}}\}$ строим новый псевдоплан перевозок. Если задача решалась безопорными методами, то после замены $c\to\tilde{c}$ перестраиваются производные задачи (см. примеры).

2. Примеры. Пример 1. Рассмотрим транспортную задачу, записанную в табл. VI.1 вместе с оптимальным планом перевозок, полученным прямым опорным методом. Проанализируем коэффициенты чувствительности по параметрам стоимости. Поскольку перевозки клеток, за исключением клеток (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), постоянны для всех $x^0\in X^0(c)$, то коэффициенты чувствительности $\nu^+_{ij}(c)$, $\nu^-_{ij}(c)$ в этих клетках равны между собой и равны оптимальным перевозкам из этих клеток. Например, $\nu^+_{11}=\nu^-_{11}=0$, $\nu^+_{12}=\nu^-_{12}=1$, $\nu^+_{14}=\nu^-_{14}=2$. Это говорит о том, что малые вариации стоимости c_{11} не влияют на величину минимальных транспортных расходов. Расходы в два раза чувствительней к вариациям стоимости c_{14}, чем к стоимости c_{12}. Коэффициенты чувствительности в клетках (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4) находим по формулам (2), используя вычисления § 1: $\nu^+_{23}=1$, $\nu^-_{23}=2$, $\nu^+_{24}=6$, $\nu^-_{24}=7$, $\nu^+_{33}=1$, $\nu^-_{33}=2$, $\nu^+_{34}=6$, $\nu^-_{34}=7$. Из этих чисел следует, что при уменьшении параметра c_{23} транспортные расходы уменьшаются в два раза быстрее, чем они увеличиваются при увеличении этого же параметра.

При вычислении коэффициентов чувствительности $\nu^{\pm}_{ij}(c)$ необязательно знать множество $X^0(c)$. Из (2) видно, что вычисление их сводится к специальной транспортной задаче на подтаблице исходной транспортной задачи для плана перевозок $\{x^0,\ I_{\text{оп}}\}$, составленной из опорных клеток и неопорных клеток с нулевыми оценками $\Delta_{ij}=0$.

Исходя из табл. VI.1 и критерия оптимальности, легко записать соотношения на новые значения параметров $\tilde{c}_{ij}$, $(i,\ j)\in I_{\text{н}}$, при выполнении которых $X^0(c)=X^0(\tilde{c})$: $\tilde{c}_{11}\geqslant 1$, $\tilde{c}_{12}\leqslant 10$, $\tilde{c}_{14}\geqslant 6$, $\tilde{c}_{21}\geqslant 2$, $\tilde{c}_{22}\leqslant 11$, $\tilde{c}_{13}=4$, $\tilde{c}_{23}=5$, $\tilde{c}_{24}=7$, $\tilde{c}_{31}=3$, $\tilde{c}_{32}=12$, $\tilde{c}_{33}=6$, $\tilde{c}_{34}=8$. Другие группы соотношений получаются при переходе к другим опорам без изменения плана перевозок.

Найдем оптимальный план перевозок для случая, когда в табл. VI.1 стоимость клетки (1, 1) приняла новое значение $\tilde{c}_{11}=0{,}5$ (табл. VI.4). Поскольку $\tilde{\Delta}_{11}=0{,}5$; $x_{11}=0$, то табл. VI.4 не удовлетворяет критерию оптимальности. За одну итерацию прямого опорного метода получаем план перевозок, транспортные расходы при котором превышают, согласно критерию субоптимальности, минимально возможные не более чем на 0,5 единиц ($<0{,}1\%$). Еще одна итерация приводит к оптимальному плану перевозок: $x_{11}=2$, $x_{12}=1$, $x_{13}=5$, $x_{14}=2$, $x_{21}=0$, $x_{22}=2$, $x_{23}=3$, $x_{24}=5$, $x_{31}=3$, $x_{32}=32$, $x_{33}=2$, $x_{34}=8$.

Таблица VI.4

3	0,5	1	3	8	4	2	1
•	0,5	1	7	7		2	5
7	10	2	1	3	5	8	7
	-8	2	10	2		6	
5	3	∞	12	2	6	15	8
5		32		1	0	7	

Пример 2. Рассмотрим сеть (см. рис. VI.1) вместе с оптимальным потоком, полученным прямым безопорным методом. Найдем коэффициенты чувствительности по параметрам стоимости: $\nu^{\pm}_{26} = \nu^{\pm}_{54} = \nu^{\pm}_{53} = \nu^{\pm}_{65} = 0$, $\nu^{\pm}_{34} = 5$, $\nu^{+}_{23} = 1$, $\nu^{-}_{23} = 2$, $\nu^{+}_{12} = 1$, $\nu^{-}_{12} = 2$, $\nu^{+}_{16} = \nu^{+}_{63} = 3$, $\nu^{-}_{16} = \nu^{-}_{63} = 4$. Отсюда видно, что малые изменения стои-

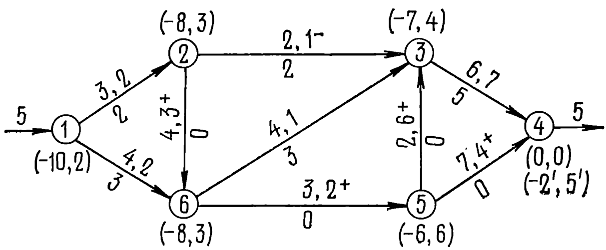


Рис. VI.3

мостей на дугах (2, 6), (5, 4), (5, 3) и (6, 5) не влияют на величину минимальных транспортных расходов. Наибольшее влияние на величину минимальных расходов оказывают вариации стоимости c_{34}.

Предположим, что стоимость единичного потока по дуге (3, 4) увеличилась на 6 единиц, т. е. $\tilde{c}_{34}=7$ (рис. VI.3). Новую задачу решим прямым безопорным методом. Узлу 3 припишем метку $\{-7, 4\}$. Рассмотрим узел $l=2$:

$$\mu' = -7-1 = -8 < \mu = 0 \quad \text{и} \quad l=2 \,\overline{\overline{\in}}\, \{k(3)=4,\ k(4)=0\}.$$

Узлу 2 припишем метку $\{-8, 3\}$. Аналогичным образом приписываются метки узлам 1, 6, 5. Узлу $l=4$ можно приписать метку $\{-2', 5'\}$:

$$\mu_4' = -2 < \mu_4 = 0,\ l=4 \in \{k(5)=6,\ k(6)=3,\ k(3)=4,\ k(4)=0\}.$$

Следовательно, найден контур $(6, 5)_+$, $(5, 4)_+$, $(3, 4)_-$, $(2, 3)_-$, (1, 2)–, (1, 6)+ отрицательной стоимости, равной $\mu_4' - \mu_4 = -2$. Пропустив по контуру максимальный поток, получим сеть с оптимальным потоком: $x_{12}=2$, $x_{16}=3$, $x_{26}=0$, $x_{23}=2$, $x_{34}=2$, $x_{53}=0$, $x_{54}=3$, $x_{63}=0$, $x_{65}=3$.

Пример 3. В табл. II.2 помещена информация о промежуточной итерации по решению транспортной задачи двойственным опорным методом. На рассматриваемой итерации коэффициенты стоимости приняли новые значения $\tilde{c}_{23}=3$. Изменение неопорной коперевозки может вызвать изменение псевдоперевозки в этой клетке. В этом случае имеются два пути: 1) пересчитать псевдоплан перевозок, 2) предварительно перевести неопорную клетку в опору. В табл. VI.5,

Таблица VI.5

3	2	1	3	8	4	2	1	
0	0	1	8	7	0	2	6	10
7	10	2	1	3	3	8	7	
0	-8	2	10	3	1	5	0	10
5	3	∞	12	2	6	15	8	
5	0	32	0	0	-1	8	0	45
5		35		10		15		

следуя первому пути, найден новый коплан перевозок и соответствующий ему псевдоплан перевозок. Для табл. VI.5 выполняется критерий оптимальности. Следовательно, сразу получен оптимальный план перевозок, который оказался таким же, как и при старых параметрах стоимости.

Пример 4. На рис. VI.4 помещена информация о промежуточной итерации двойственного безопорного метода по решению задачи о потоке минимальной стоимости.

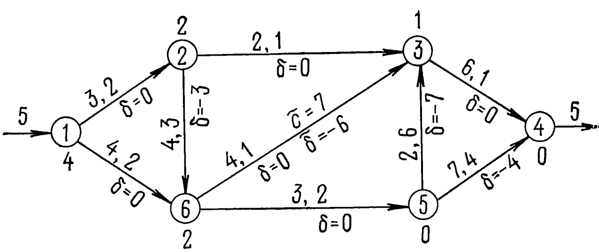


Рис. VI.4

Предположим, что на данной итерации изменился коэффициент стоимости на дуге (6, 3): $\tilde{c}_{63}=7$. Найдем новый копоток $\tilde{\delta}_{63}$, используя старые потенциалы и новый коэффициент стоимости. По копотоку строим сеть $\bar{S}^0$ (рис. VI.5).

На сети $\bar{S}^0$ ищем максимальный поток. Максимальный поток равен 2. На втором шаге удается пометить только узлы 1, 2, 6, 5. По правилам двойственного безопорного метода находим новые потенциалы: $u_1=6$, $u_2=4$, $u_3=-1$, $u_4=-2$, $u_5=2$, $u_6=4$ и копоток δ.

По новому копотоку δ строим сеть $\bar{S}^0$, на которой решаем задачу о максимальном потоке. После двух итераций метода пометок

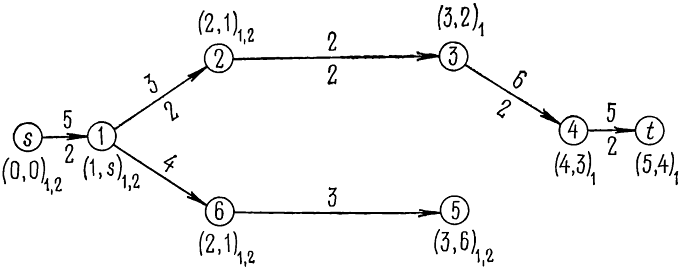


Рис. VI.5

можем пометить только источник s. Это означает, что задача решена. Совокупность чисел $x_{12}=x_{23}=x_{34}=2$, $x_{16}=x_{65}=x_{54}=3$, $x_{26}=x_{63}=$ $=x_{53}=0$ — оптимальный поток.

§ 3. Вариация параметров ограничений

Ограничения транспортной задачи включают объемы производства a_i и потребления b_j (матричная модель), интенсивности узлов a_i (сетевая модель) и пропускные способности d_{ij} коммуникаций и дуг.

В данном параграфе вопросы, исследованные в § 2 для параметров стоимости, рассматриваются для параметров ограничений.

1. Теория. Рассмотрим сначала случай, когда в задаче

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}\to\min,\quad \sum_{j=1}^{m} x_{ij}=a_i,\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=b_j,\qquad (1)$$

$$0\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij}<\infty,\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m},$$

зафиксированы все параметры, за исключением совокупностей $a=\{a_i,\ i=\overline{1,n}\}$, $b=\{b_j,\ j=\overline{1,m}\}$. Говоря о множестве параметров $a=\{a_i,\ i=\overline{1,n}\}$, $b=\{b_j,\ j=\overline{1,m}\}$, всегда будем предполагать, что выполнены условия баланса $\sum_{i=1}^{n} a_i=\sum_{j=1}^{m} b_j$. Другими словами, в $(n+m)$-мерном пространстве параметров $\{a,\ b\}$ всегда рассматривается только подпространство $\sum_{i=1}^{n} a_i-\sum_{j=1}^{m} b_j=0$.

Пусть $X^0 = X^0(a, b)$ — множество оптимальных планов перевозок; обозначим

$$\varphi(a, b) = \min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij},$$

где минимум берется по множеству планов перевозок $X = X(a, b)$. Множество $X^0(a, b)$ — выпуклый компакт или пусто. Функция $\varphi(a, b)$ определена лишь для тех значений $a \in A$, $b \in B$, при которых множество $X(a, b)$ непусто, причем на A, B она выпукла. Если $\{x^0(a, b), I_{\text{оп}}\}$ — невырожденный оптимальный план перевозок, то функция $\varphi(a, b)$ определена и непрерывна в окрестности точки $\{a, b\}$, отображение $\{a, b\} \to X^0(a, b)$ полунепрерывно сверху в точке $\{a, b\}$, оптимальный коплан перевозок $\delta^0(a, b)$ единствен и непрерывен по a, b.

При изменении единственного параметра a_i (или b_j) условие баланса всегда нарушается. Для определенности будем добиваться баланса изменением только одного параметра из a или b.

Коэффициентами чувствительности по $\{a, b\}$ назовем числа

$$\nu_{i(k)}^{+}(a, b) = \left. \frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial a_i} \right|_{a_i + 0},$$

$$\nu_{i(k)}^{-}(a, b) = \left. \frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial a_i} \right|_{a_i - 0},$$

$$\nu^{j(k)+}(a, b) = \left. \frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial b_j} \right|_{b_j + 0},$$

$$\nu^{j(k)-}(a, b) = \left. \frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial b_j} \right|_{b_j - 0},$$

где индекс $i(k)$ $(j(k))$ означает, что при изменении компоненты $a_i (b_j)$ баланс достигался за счет компоненты c_k, $k \neq i$ $(c_k = a_k,\ k = \overline{1, n};\ c_k = b_{k-n},\ k = \overline{n+1, n+m})$.

Из [ч. 1] следует,

$$\nu_{i(k)}^{+}(a, b) = \max_{\substack{\delta \in \Delta^0(a, b),\\ w_k = 0}} u_i, \quad \nu_{i(k)}^{-}(a, b) = \min_{\substack{\delta \in \Delta^0(a, b),\\ w_k = 0}} u_i,$$

$$\nu^{j(k)+}(a, b) = \max_{\substack{\delta \in \Delta^0(a, b),\\ w_k = 0}} v_j, \quad \nu^{j(k)-}(a, b) = \min_{\substack{\delta \in \Delta^0(a, b),\\ w_k = 0}} v_j,$$

где $w_k = u_k$, $k = \overline{1, n}$; $w_k = v_{k-n}$, $k = \overline{n+1, n+m}$.

Вторая группа параметров ограничений состоит из пропускных способностей коммуникаций $d=\{d_{ij},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}\}$.

Зафиксируем остальные параметры задачи (1) и введем обозначения: $X^0=X^0(d)$ — множество оптимальных планов перевозок,

$$\varphi(d)=\min\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}x_{ij},$$

$$\nu_{ij}^{+}(d)=\left.\frac{\partial\varphi(d)}{\partial d_{ij}}\right|_{d_{ij}+0},\quad \nu_{ij}^{-}(d)=\left.\frac{\partial\varphi(d)}{\partial d_{ij}}\right|_{d_{ij}-0}.$$

Функции $X^0(d)$, $\varphi(d)$ обладают такими же свойствами, какими обладают функции $X^0(a,\ b)$, $\varphi(a,\ b)$. Из [ч. 1] следует:

$$\nu_{ij}^{+}(d)=\min_{\delta\in\Delta^0(d)}\{-\delta_{ij},\ 0\},\quad \nu_{ij}^{-}(d)=\max_{\delta\in\Delta^0(d)}\{\delta_{ij},\ 0\}.$$

Числа $\nu_{ij}^{+}(d)$, $\nu_{ij}^{-}(d)$ характеризуют степень существенности верхнего ограничения d_{ij} для величины минимальных транспортных расходов. Она определяется величиной положительных компонент оптимальных копланов. Степень существенности нижнего ограничения определяется величиной отрицательных компонент оптимальных копланов.

Из содержания п. 1 §1—3 видно, что все компоненты решения прямой и двойственной задач имеют определенный смысл, важный с точки зрения анализа решения задачи (1).

Коэффициенты чувствительности полезны для предварительных оценок влияния вариаций на минимальные транспортные расходы. Опишем теперь методы построения оптимального плана перевозок, соответствующего новым значениям параметров.

Пусть после получения прямым или двойственным опорным методом оптимального плана перевозок изменились объемы производства и потребления в некоторых пунктах. Измененные объемы распределены по опорным клеткам (как видно из дальнейшего, для сокращения числа итераций иногда полезно привлекать и неопорные клетки). Если вновь полученные перевозки удовлетворяют ограничениям, то они составляют оптимальный план перевозок. В противном случае в нашем распоряжении будет иметься псевдоплан перевозок, соответствующий опорному коплану старого оптимального плана перевозок. Поэтому дальнейшие вычисления удобно вести согласно двойственному опорному методу.

Рассмотрим ситуацию, когда объемы производства и потребления изменились до получения оптимального плана перевозок. Если вычисления велись двойственным опорным методом, то, используя текущий опорный коплан, пересчитаем псевдоплан перевозок и продолжим вычисления. В случае, если были прерваны итерации прямого опорного метода, то можно воспользоваться одним из путей: 1) по схеме M-метода ввести искусственные клетки для обеспечения баланса и продолжить вычисления по прямому опорному методу; 2) по текущим потенциалам строк и столбцов составить псевдоплан перевозок и перейти к итерациям двойственного опорного метода.

Пусть изменилась пропускная способность d_{ij} дуги (i, j). Увеличение d_{ij} не сказывается на методах решения. При уменьшении d_{ij} текущий план перевозок (в прямых методах) сможет стать псевдопланом. Поэтому общим методом построения дальнейших итераций является двойственный (опорный или безопорный) метод.

2. Примеры. Пример 1. Пусть в табл. VI.1 с оптимальным планом перевозок, полученным прямым опорным методом, изменились объем производства в пункте A_1 ($\tilde{a}_1=12$) и объем потребления в пункте B_2 ($\tilde{b}_2=37$). Используя опору и коплан табл. VI.1 для новых

Таблица VI.6

3	2	1	3	8	4	2	1	
	−1	1	7	9		2	5	12
7	10	2	1	3	5	8	7	
	−8	2	10	0		8		10
5	3	∞	12	2	6	15	8	
5		34		1	0	5		45
5		37		10		15		

условий, найдем псевдоплан перевозок (табл. VI.6). Он не удовлетворяет критерию оптимальности, и потому с помощью двойственного опорного метода ищем оптимальный план перевозок.

Распределение новых объемов производства и потребления по опорным клеткам всегда осуществимо. Поэтому такой путь решения задачи является общим. Однако в конкретных случаях может оказаться целесообразным при распределении использовать неопорные клетки. В табл. VI.7 для прежних условий приведено распределение

Таблица VI.7

3	2	1	3	8	4	2	1
1	-1	1	7	8		2	5
7	10	2	1	3	5	8	7
	-8	2	10	1		7	
5	3	∞	12	2	6	15	8
4		34		1	0	6	

новых объемов с использованием неопорной клетки (1, 1). В результате получился опорный план перевозок, транспортные расходы на котором превышают минимально возможные не более чем на единицу (по критерию субоптимальности $\varepsilon = -x_{11} \cdot \Delta_{11} = 1$). В действительности же полученный план перевозок является оптимальным, в чем легко убедиться, заменив опору.

Пример 2. На рис. VI.1 изображена сеть с оптимальным потоком, полученным прямым безопорным методом. Предположим, что изменились интенсивности узлов: $\tilde{a}_5 = 1$, $\tilde{a}_4 = 6$. Задачу с новыми параметрами решаем двойственным методом. С помощью потенциалов ($u_i = -\mu_i$, $i \in I$) строим копоток δ, а затем сеть $\bar{S}^0$ (рис. VI.6).

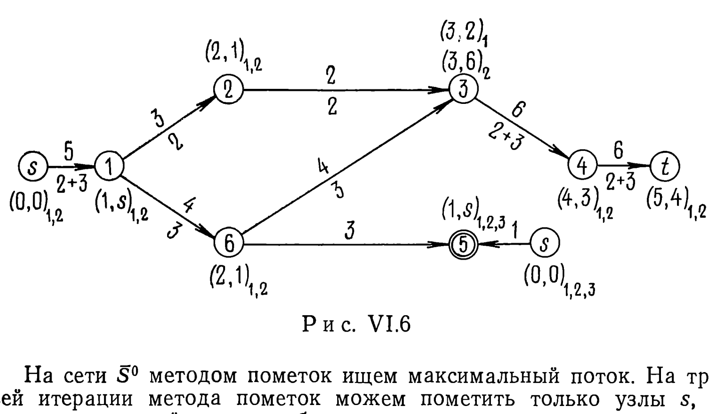


Рис. VI.6

На сети $\bar{S}^0$ методом пометок ищем максимальный поток. На третьей итерации метода пометок можем пометить только узлы s, 5. По правилам двойственного безопорного метода находим новые потенциалы $\bar{u}_i$, $i \in I$, и копоток $\overline{\delta}$ (рис. VI.7).

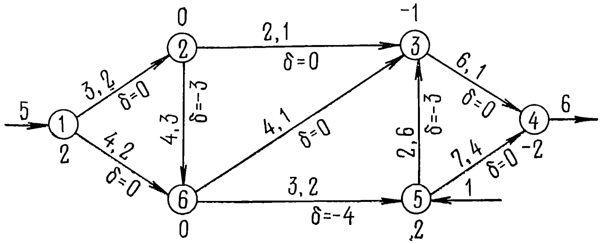


Рис. VI.7

По новому копотоку $\overline{\delta}$ строим новую сеть $\bar{S}^0$, на которой решаем задачу о максимальном потоке.

После трех итераций метода пометок можем пометить только источник s. Задача решена, получен оптимальный поток: $x_{12}=2$, $x_{16}=3$, $x_{23}=2$, $x_{26}=0$, $x_{34}=5$, $x_{53}=0$, $x_{54}=1$, $x_{63}=3$, $x_{65}=0$.

Пример 3. Предположим теперь, что на сети (см. рис. VI.1) изменилась пропускная способность дуги (6, 3): $\tilde{d}_{63}=2$. Остальные параметры остались прежними. Как и в предыдущем примере, с помощью потенциалов находим копоток и по нему строим сеть $\bar{S}^0$ (рис. VI.8).

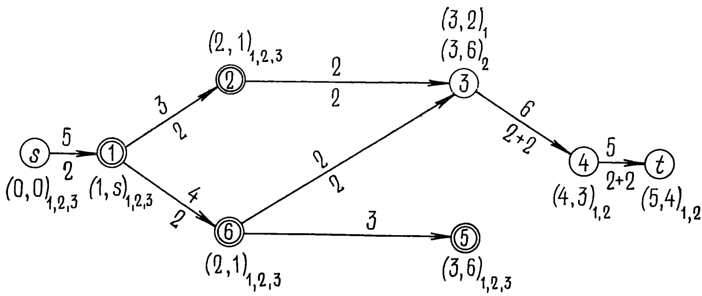


Рис. VI.8

На сети $\bar{S}^0$ методом пометок ищем максимальный поток. После двух итераций можем пометить только узлы 1, 2, 6, 5. По правилам двойственного безопорного метода находим новый копоток δ (рис. VI.9) и новую сеть $\bar{S}^0$.

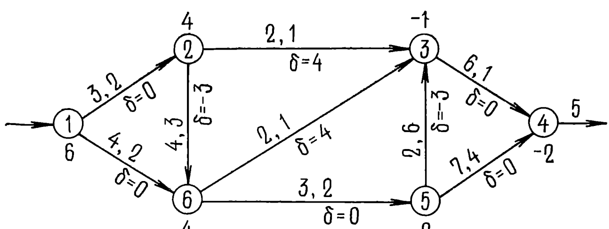


Рис. VI.9

После четырех итераций метода пометок на сети $\bar{S}^0$ можем пометить только источник s. Следовательно, задача решена, получен оптимальный поток: $x_{12}=2$, $x_{16}=3$, $x_{23}=2$, $x_{26}=0$, $x_{34}=4$, $x_{53}=0$, $x_{54}=1$, $x_{63}=2$, $x_{65}=1$.

Замечание. Если задача решалась прямым безопорным методом и изменение ограничений произошло на промежуточной итерации, то в некоторых случаях нецелесообразно решать новую задачу двойственным методом, так как из решения старой задачи нельзя получить начальный двойственный план новой задачи.

Пример 4. На рис. VI.10 изображена промежуточная итерация прямого безопорного метода. Предположим, что на этой итерации

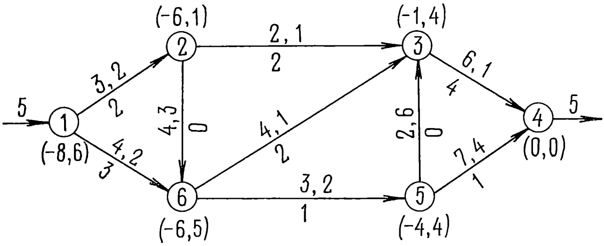


Рис. VI.10

изменились интенсивности узлов $\tilde{a}_5=1$, $\tilde{a}_4=6$. Введем искусственную дугу $(5, 4)_{\text{ис}}$ с дуговым потоком $(x_{54})_{\text{ис}}=1$ и $(c_{54})_{\text{ис}}=M$, получим сеть (рис. VI.11). По правилам прямого безопорного метода приписываем метки узлам сети (рис. VI.11). При попытке заменить метку $\{0, 0\}$ узла 4 на новую $\{(-M+1)', 3'\}$ обнаруживаем, что построен контур $(5, 4)_{\text{ис}-}$, $(6, 5)_-$, $(6, 3)_+$, $(3, 4)_+$ с отрицательным значением $(-M+1)$. Пропустим по контуру максимально допустимый поток. При этом $(x_{54})_{\text{ис}}=0$, тогда дугу $(5, 4)_{\text{ис}}$ можно убрать. Легко проверить, что новая сеть совпадает с последней сетью примера 3, т. е. получен оптимальный поток.

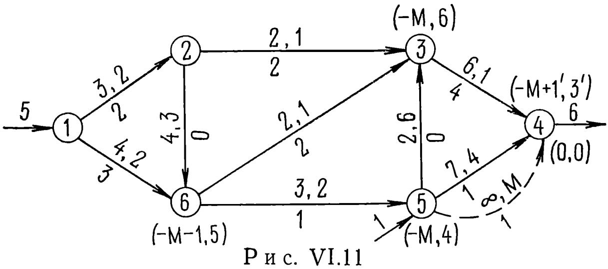


Рис. VI.11

Замечание. Если задача решалась двойственным безопорным методом, то независимо от того, вносятся изменения в ограничения задачи на промежуточной итерации или после получения оптимального плана, продолжаем вычисления по одной схеме: текущий или оптимальный двойственный план старой задачи принимаем в качестве начального двойственного плана новой задачи, которую решаем двойственным безопорным методом.

§ 4. Изменение размеров задачи

Размеры транспортной задачи характеризуются числом пунктов производства n и потребления m, числом нефиксированных перевозок (матричная модель), числом узлов $|I|$ и дуг $|U|$ (сетевая модель). В данном параграфе рассматриваются методы коррекции оптимальных планов в связи с изменениями размеров задачи.

1. Теория. Пусть $\{x, I_{\text{оп}}\}$ — некоторый опорный план перевозок в задаче

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij}=a_i, \ \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=b_j, \tag{1}$$

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant d_{ij}, \ i=\overline{1, n}, \ j=\overline{1, m}.$$

Требуется построить оптимальный план перевозок для случая, когда перевозка между пунктами A_n и B_m зафиксирована: $\bar{x}_{nm}=\overset{*}{x}_{nm} \neq x_{nm}$.

Рассмотрим две возможности: а) клетка (n, m) неопорная; б) клетка (n, m) опорная. а) Сначала перевозку $\overset{*}{x}_{nm}$ пытаемся распределить по опорным клеткам $(i, j) \in I_{\text{оп}}$, т. е. величину $\overset{*}{x}_{nm}-x_{nm}$ добавляем к a_n и b_m, клетку (n, m) заштриховываем, условия баланса пытаемся удовлетворить только с помощью изменения опорных перевозок: если это не выполнимо, то по оценкам остальных неопорных клеток строим базисный псевдоплан $\{\varkappa, I_{\text{оп}}\}$, как и в опорном двойственном методе. Дальнейшие итерации проводим, следуя последнему методу. б) Осуществляем итерацию прямого опорного метода, выводя клетку (n, m) из опоры. С новым опорным планом поступаем по схеме случая а).

Предположим, что до фиксации перевозки клетки (n, m) задача (1) решалась двойственным опорным методом. Имеются две возможности: а) клетка (n, m) неопорная, б) клетка (n, m) опорная. Изменения по сравнению с предыдущим случаем очевидны.

Рассмотрим ситуацию, когда в процессе решения задачи (1) в транспортную таблицу добавляется новая клетка. Это означает, что появилась новая коммуникация между старыми пунктами (раньше перевозка по ней была фиксированной) или появился новый пункт, с которым старые связаны единственной коммуникацией.

Пусть после решения транспортной задачи изменилось количество пунктов производства и потребления. Для определенности предположим, что добавился новый пункт производства A_{n+1} с объемом производства a_{n+1}. Ясно, что для соблюдения условия баланса нужно или уменьшить объемы производства в старых пунктах $A_1, \ldots, A_n$, или увеличить объемы потребления в пунктах $B_1, \ldots, B_m$. После изменения объемов в новой строке выберем опорную клетку и по новой совокупности опорных клеток распределим новые объемы производства и потребления. Анализ ситуации аналогичен случаю, рассмотренному в § 3.

Предположим, что после решения некоторой транспортной задачи ликвидирован пункт производства A_k. Для соблюдения условия баланса нужно указать или пункты производства, в которых необходимо увеличить объемы производства, или пункты потребления, в которых необходимо уменьшить объемы потребления. Изменив опору прежней транспортной таблицы так, чтобы в ликвидируемой строке осталась лишь одна опорная клетка, новые объемы производства и потребления распределим по оставшейся части таблицы. Анализ ситуации аналогичен рассмотренному в § 3.

2. Примеры. Пример 1. Пусть в табл. VI.1 с оптимальным планом перевозок, полученным прямым опорным методом, зафиксирована перевозка $\tilde{x}_{12}=0$. Старую перевозку $x_{12}=1$ нетрудно распределить по опорным клеткам, при этом получается оптимальный план перевозок: $x_{11}=0$, $x_{13}=8$, $x_{14}=2$, $x_{21}=0$, $x_{22}=2$, $x_{23}=1$, $x_{24}=7$, $x_{31}=5$, $x_{32}=33$, $x_{33}=1$, $x_{34}=6$.

Пусть теперь в табл. VI.1 зафиксирована перевозка $\tilde{x}_{23}=3$. Поскольку клетка (2, 3) опорная, то предварительно выведем ее из опоры. Далее поступим, как в предыдущем случае. Распределение по опорным клеткам приводит к оптимальному плану перевозок.

Пример 2. В табл. VI.1 добавим новую строку, соответствующую пункту производства A_4 с $a_4=5$. Для сохранения условия баланса уменьшим объем производства в пункте A_3, положив $\tilde{a}_3=40$. В новой строке клетку (4, 2) сделаем опорной. Распределение новых объемов производства по опорным клеткам приводит к табл. VI.8, удовлетворяющей критерию оптимальности. Если бы оказалось, что $d_{42}<5$, то для получения оптимального плана перевозок пришлось бы использовать двойственный опорный метод.

Пример 3. Пусть в табл. VI.1 ликвидирован первый столбец, соответствующий пункту потребления B_1. Для сохранения баланса уменьшим объем производства в пункте A_1: $\tilde{a}_1=5$. Распределение новых объемов по оставшимся опорным клеткам приводит к табл. VI.9

Таблица VI.8

	3		12		6		8		
−2	3	2	1	3	8	4	2	1	
		−1	1	7	7		2	5	10
−1	7	10	2	1	3	5	8	7	
		−8	2	10	2		6		10
0	5	3	∞	12	2	6	15	8	
	5		27		1		7		40
−1	3	8	6	11	1	12	8	7	
		−6	5		−7			0	5

с псевдопланом перевозок. Поскольку опорный коплан сохранился из старой задачи, то для получения оптимального плана перевозок можно использовать двойственный опорный метод.

Таблица VI.9

1	3	8	4	2	1	
1	7	2		2	5	5
2	1	3	5	8	7	
2	10	7		1		10
∞	12	2	6	15	8	
32		1	0	12		45
35		10		15		

Пример 4. На рис. VI.10 изображена промежуточная итерация прямого безопорного метода. Предположим, что на этой итерации

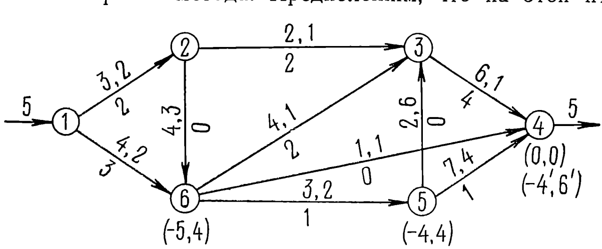


Рис. VI.12

к исходной сети добавили дугу (6, 4) с параметрами $d_{64}=1$, $c_{64}=1$ (рис. VI.12). Продолжим решение задачи прямым безопорным методом. Расставив метки узлам, обнаружим контур $(5, 4)_-$, $(6, 5)_-$, $(6, 4)_+$ отрицательной стоимости ($\mu_4'-\mu_4=-4$). Пропустив по контуру единичный поток, получим новую сеть с оптимальным потоком: $x_{12}=2$, $x_{16}=3$, $x_{23}=2$, $x_{26}=0$, $x_{34}=4$, $x_{53}=0$, $x_{54}=0$, $x_{63}=2$, $x_{64}=1$, $x_{65}=0$.

Пример 5. На рис. VI.1 изображена сеть с оптимальным потоком. Предположим, что из сети удалили дугу (6, 3). Новую задачу предлагается решить двойственным безопорным методом, взяв в качестве начального двойственного плана новой задачи оптимальный двойственный план старой. Оптимальный поток изображен на рис. VI.13.

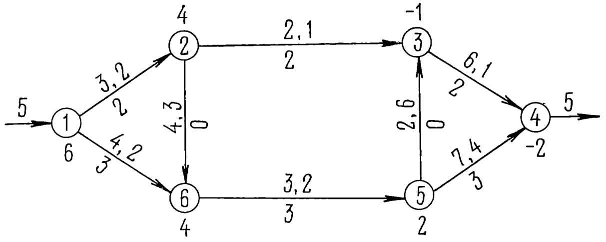


Рис. VI 13

Пример 6. Предположим, что к сети, изображенной на рис. VI.13, добавили узел $i=7$ и дуги (6, 7) и (7, 4) с параметрами $d_{67}=6$, $c_{67}=1$, $d_{74}=5$, $c_{74}=2$. Предлагается продолжить решение задачи прямым безопорным методом.

Глава VII

ОБОБЩЕННАЯ ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Транспортная задача, рассмотренная в предыдущих главах, допускает обобщения в нескольких направлениях. В данной главе исследуется одно из возможных обобщений, имеющее важное прикладное значение. Матричная модель изучаемой задачи в разных источниках имеет разные названия: λ-задача, распределительная задача, обобщенная транспортная задача и т. д. Физическую интерпретацию исследуемых моделей можно найти в [1, 3]. Ниже помимо матричной модели рассматривается и сетевая модель. Из-за ограниченности объема книги излагаются только два метода решения обобщенной транспортной задачи, которые являются обобщениями методов гл. I и II. Показывается, что, несмотря на заметное усложнение исследуемых задач по сравнению с классическими прототипами транспортных задач, учет специфики новых задач позволяет заметно упростить методы решения общей задачи линейного программирования. Полученные результаты вселяют надежду на успешное решение задач, полученных по другим направлениям обобщения транспортной задачи.

Весь материал данной главы основан на результатах О. И. Костюковой.

§ 1. Матричная модель

Формулируется матричная форма обобщенной транспортной задачи. Для нее получены аналоги результатов, изложенных в гл. I и II для классической транспортной задачи.

1. Постановка задачи. Связь обобщенной транспортной задачи с классической транспортной задачей. Имеются m видов топлива, которые производятся в m различных пунктах $A_1, \ldots, A_m$. В A_i производится a_i единиц i-го вида топлива. Все топливо доставляется к n потребителям $B_1, \ldots, B_n$. Для каждого потребителя B_j известно количество тепла b_j (число калорий), которое должно быть получено в результате сжигания завезенного топлива. Заданы числа $\lambda_{ij}>0$ — коэффициент теплоотдачи i-го вида топлива в j-м пункте B_j. Пропускная способность коммуникаций $A_i \to B_j$ равна d_{ij}. Стоимость перевозки единицы топлива из A_i в B_j равна c_{ij}. Требуется найти такой план перевозок топлива, при котором из всех пунктов производства вывозится все добываемое топливо, запросы каждого пункта потребления удовлетворяются полностью и транспортные расходы минимальны. Обозначим через x_{ij} количество i-го вида топлива, доставляемое j-му потребителю.

Математическая модель этой задачи называется *обобщенной транспортной задачей* и имеет вид

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i, \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij}x_{ij}=b_j, \tag{1}$$

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant d_{ij}, \quad i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,n}.$$

Совокупность чисел $x=\{x_{ij},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\}$, удовлетворяющая ограничениям задачи (1), называется планом перевозок. План перевозок x^0 оптимален, если на нем транспортные расходы (целевая функция задачи (1)) минимальны.

При $\lambda_{ij}=\alpha_i/\beta_j$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, с помощью обозначений $\bar{a}_i=\alpha_i a_i$, $\bar{b}_j=\beta_j b_j$, $\bar{x}_{ij}=\alpha_i x_{ij}$, $\bar{d}_{ij}=\alpha_i d_{ij}$, $\bar{c}_{ij}=c_{ij}/\alpha_i$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, из (1) получим

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\bar{c}_{ij}\bar{x}_{ij}\to\min,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\bar{x}_{ij}=\bar{a}_i,\quad \sum_{i=1}^{m}\bar{x}_{ij}=\bar{b}_j,$$

$$0\leqslant\bar{x}_{ij}\leqslant\bar{d}_{ij},\quad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n},$$

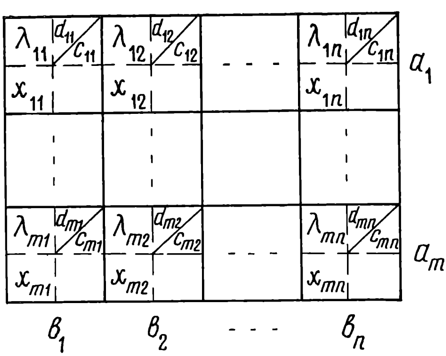
т. е. задача (1) сводится к классической транспортной задаче в матричной форме (см. гл. I). Можно показать [3], что условие $\lambda_{ij}=\alpha_i/\beta_j$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, является и необходимым условием сводимости задачи (1) с помощью линейного преобразования к транспортной задаче, т. е. верна

Теорема. Задача (1) сводится к классической транспортной задаче тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank}\Lambda=1$, где $\Lambda=\|\lambda_{ij}\|_{m,\,n}$ — матрица коэффициентов.

В дальнейшем предполагаем, что $\operatorname{rank}\Lambda>1$.

Условия задачи (1) удобно записывать в виде таблицы T (табл. VII.1).

Таблица VII.1



2. Каноническая форма обобщенной транспортной задачи. Совокупность различных клеток таблицы T

$$(i_1, j_1),\ (i_2, j_2),\ \ldots,\ (i_s, j_s) \tag{2}$$

называется цепочкой, если в каждой строке и в каждом столбце таблицы T не более двух клеток из (2) и каждая пара клеток из (2), стоящих рядом, лежит либо в одном столбце, либо в одной строке. Цепочка называется циклом, если в T нет строк и столбцов, в которых только одна клетка из (2).

Пусть U — подмножество клеток таблицы T. Через $I(U)$ и $J(U)$ обозначим множество строк и столбцов, соответствующих клеткам из U: $I(U)=\{i: \exists j,\ (i, j)\in U\}$; $J(U)=\{j: \exists i,\ (i, j)\in U\}$. Пусть U_* — любое множество клеток таблицы T, не содержащее циклов. Рассмотрим систему

$$\alpha_i-\lambda_{ij}\beta_j=0,\ (i, j)\in U_*.$$

Если $\alpha_{i_1}=1$, $i_1\in I(U_*)$, или $\beta_{j_1}=1$, $j_1\in J(U_*)$, то эта система имеет нетривиальное решение $\alpha_i>0$, $\beta_j>0$, $i\in I(U_*)$, $j\in J(U_*)$. Положим $\alpha_i=\beta_j=1$, $i\,\overline{\in}\,I(U_*)$, $j\,\overline{\in}\,J(U_*)$. Введем обозначения: $\bar{c}_{ij}=c_{ij}/\alpha_i$, $\bar{\lambda}_{ij}=\lambda_{ij}\beta_j/\alpha_i$, $\bar{x}_{ij}=\alpha_i x_{ij}$, $\bar{a}_i=\alpha_i a_i$, $\bar{b}_j=\beta_j b_j$, $\bar{d}_{ij}=\alpha_i d_{ij}$, $i=\overline{1, m}$, $j=\overline{1, n}$. Тогда задача (1) примет вид

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\bar{c}_{ij}\bar{x}_{ij}\to\min,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\bar{x}_{ij}=\bar{a}_i,\quad \sum_{i=1}^{m}\bar{\lambda}_{ij}\bar{x}_{ij}=\bar{b}_j,$$

$$0\leqslant\bar{x}_{ij}\leqslant\bar{d}_{ij},\ i=\overline{1, m},\ j=\overline{1, n},$$

где $\bar{\lambda}_{ij}=1$, $(i, j)\in U_*$.

Полученную модель назовем *канонической формой* обобщенной транспортной задачи, соответствующей множеству U_*.

3. Теорема существования. Обозначим через $U_*(I_*, J_*)$ множество клеток, принадлежащее множеству $\{(i, j): i\in I_*, j\in J_*\}$ и не содержащее циклов.

Теорема. Для существования плана перевозок в задаче (1) необходимо и достаточно, чтобы для любых

$I_* \subset I$, $J_* \subset J$, $U_*(I_*, J_*)$ выполнялись условия

$$\sum_{i \in I_*} \bar{a}_i - \sum_{j \in J_*} \bar{b}_j \leqslant \sum_{\substack{i \in I_*, \\ j \in J_*}} \bar{d}_{ij} + \sum_{\substack{i \in I_*, j \in J_*, \\ \bar{\lambda}_{ij} < 1}} (1 - \bar{\lambda}_{ij}) \bar{d}_{ij};$$

$$\sum_{i \in I_*} \bar{a}_i - \sum_{j \in J_*} \bar{b}_j \geqslant - \sum_{\substack{i \in I_*, \\ j \in J_*}} \bar{d}_{ij} - \sum_{\substack{i \in I_*, j \in J_*, \\ \bar{\lambda}_{ij} > 1}} (\bar{\lambda}_{ij} - 1) \bar{d}_{ij},$$

где $\bar{a}_i$, $\bar{b}_j$, $\bar{\lambda}_{ij}$, $\bar{d}_{ij}$ — параметры задачи (1), записанной в канонической форме, соответствующей множеству $U_*(I_*, J_*)$.

Доказательство см. в § 2.

4. Опора. Критерий опорности. Любой цикл таблицы T можно представить в виде

$$(i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), \ldots, (i_s, j_s), (i_s, j_1). \tag{3}$$

Детерминантом цикла (3) назовем число $R = \lambda_{i_1 j_1} \lambda_{i_2 j_2} \ldots \ldots \lambda_{i_s j_s} - \lambda_{i_1 j_2} \lambda_{i_2 j_3} \ldots \lambda_{i_s j_1}$. Цикл называется *невырожденным*, если $R \neq 0$.

Пусть U — подмножество клеток таблицы T. Из клеток множества U образуем всевозможные циклы. Клетка $(i, j) \in U$ называется *циклической* клеткой множества U, если она входит в состав хотя бы одного цикла.

Множество клеток U называется связным, если для любого $i \in I(U)$ и любого $j \in J(U)$ существует цепочка (2), для которой $i_1 = i$, $j_s = j$.

Множества U_k, $k = \overline{1, N}$, называются компонентами связности множества U, если 1) $U = \bigcup_{k=1}^{N} U_k$; 2) U_k, $k = \overline{1, N}$, — связное множество; 3) не существует цепочки (2), у которой $i_1 \in I(U_k)$, $j_s \in J(U_t)$, $k \neq t$.

С помощью множества U построим систему

$$\sum_{j \in J_i(U)} y_{ij} = 0, \ i \in I(U); \quad \sum_{i \in I_j(U)} \lambda_{ij} y_{ij} = 0, \ j \in J(U), \tag{4}$$

где $I_j(U) = \{i: (i, j) \in U\}$, $J_i(U) = \{j: (i, j) \in U\}$.

Определение. Максимальное (по количеству элементов) множество клеток $U \subset T$, для которого система (4) имеет только тривиальное решение, называется опорой таблицы T и обозначается $U_{\text{оп}}$.

Для доказательства критерия опорности нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. Для того чтобы циклические клетки связного множества образовывали только один цикл, необходимо и достаточно, чтобы $|U|=|I(U)|+|J(U)|$, где $|U|$ — количество элементов множества U.

Лемма 2. Если опора $U_{\text{оп}}$ состоит из N компонент связности U_k, $k=\overline{1, N}$, то система (4) эквивалентна системе

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j\in J_i(U_k)} y_{ij}=0, \quad i\in I(U_k); \\ &\sum_{i\in I_j(U_k)} \lambda_{ij}y_{ij}=0, \ j\in J(U_k) \end{aligned}\right\} \ k=\overline{1, N}. \tag{5}$$

(Доказательство лемм оставляем читателям в качестве упражнения.)

Теорема *(критерий опорности)*. Множество $U_{\text{оп}}$ является опорой тогда и только тогда, когда 1) $|U_{\text{оп}}|=m+n$; 2) в каждой компоненте связности множества $U_{\text{оп}}$ существует единственный цикл; 3) каждый цикл невырожденный.

Достаточность. Покажем, что при условиях 1)—3) система (4) имеет только тривиальное решение. В силу леммы 2 для этого достаточно показать, что каждая из подсистем (5) имеет только тривиальное решение.

Предположим противное, т. е. что подсистема, соответствующая k-й компоненте связности, имеет нетривиальное решение $Y_k=\{y_{ij}, (i, j)\in U_k\}$. Обозначим: $\tilde{U}_k=\{(i, j)\colon (i, j)\in U_k, y_{ij}\neq 0\}$. Из (5) видно, что $|J_i(\tilde{U}_k)|\geqslant 2$ для $\forall i\in I(\tilde{U}_k)$ и $|I_j(\tilde{U}_k)|\geqslant 2$ для $\forall j\in J(\tilde{U}_k)$, т. е. все элементы множества $\tilde{U}_k$ циклические. В силу условия 2) элементы множества $\tilde{U}_k$ образуют один цикл: $\tilde{U}_k=\{(i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), \ldots, (i_s, j_s), (i_s, j_1)\}$. Рассмотрим систему

$$\alpha_i-\lambda_{ij}\beta_j=0, \ (i, j)\neq(i_1, j_1), \ (i, j)\in\tilde{U}_k. \tag{6}$$

Система (6) — это однородная система $2s-1$ уравнений с $2s$ неизвестными. Она всегда имеет нетривиальное решение, причем если $\alpha_{i_1}>0$, то $\alpha_i>0$, $\beta_j>0$, $i\in I(\tilde{U}_k)$, $j\in J(\tilde{U}_k)$. Поскольку $Y_k=\{y_{ij}\colon (i, j)\in U_k\}$ — решение подсистемы (5), то

$$\sum_{j\in J_i(\tilde{U}_k)} y_{ij}=0, \ i\in I(\tilde{U}_k); \qquad \sum_{i\in I_j(\tilde{U}_k)} \lambda_{ij}y_{ij}=0, \ j\in J(\tilde{U}_k).$$

Используя (6), запишем эту систему в эквивалентном виде:

$$\sum_{j\in J_i(\tilde U_k)} \alpha_i y_{ij}=0,\ i\in I(\tilde U_k),$$

$$\sum_{i\in I_j(\tilde U_k)} \alpha_i y_{ij}=0,\ j\neq j_1,\ j\in J(\tilde U_k); \tag{7}$$

$$\sum_{\substack{i\neq i_1,\\ i\in I_{j_1}(\tilde U_k)}} \alpha_i y_{ij_1}+y_{i_1j_1}\lambda_{i_1j_1}\beta_{j_1}=0. \tag{8}$$

От суммы равенств (7) отнимем сумму равенств (8), получим

$$(\alpha_{i_1}-\lambda_{i_1j_1}\beta_{j_1})\,y_{i_1j_1}=0.$$

По предположению, $y_{i_1j_1}\neq 0$, $\alpha_{i_1}\neq 0$. Следовательно, детерминант цикла компоненты U_k равен

$$R=\lambda_{i_1j_1}\cdot\frac{\alpha_{i_2}}{\beta_{j_2}}\cdot\ldots\cdot\frac{\alpha_{i_s}}{\beta_{j_s}}-\frac{\alpha_{i_1}}{\beta_{j_2}}\cdot\frac{\alpha_{i_2}}{\beta_{j_3}}\cdot\ldots\cdot\frac{\alpha_{i_s}}{\beta_{j_1}}=$$

$$=\left(\lambda_{i_1j_1}-\frac{\alpha_{i_1}}{\beta_{j_1}}\right)\frac{\alpha_{i_2}}{\beta_{j_2}}\cdot\frac{\alpha_{i_3}}{\beta_{j_3}}\cdot\ldots\cdot\frac{\alpha_{i_s}}{\beta_{j_s}}=0,$$

что противоречит условию теоремы. Значит, система (4) имеет только тривиальное решение.

Покажем, что множество $U_{\text{оп}}$, $|U_{\text{оп}}|=m+n$, является максимальным среди множеств, для которых система (4) имеет только тривиальное решение.

Очевидно, что для любого множества U число уравнений в системе (4) не превосходит $m+n$. Следовательно, для любого U, $|U|>m+n$, система (4) имеет нетривиальное решение.

Замечание. Если $\operatorname{rank}\Lambda\geqslant 2$, то существует множество U, удовлетворяющее достаточным условиям опорности:

$$U=\{(s,j),\ j=\overline{1,n};\ (i,t),\ i\neq s,\ i=\overline{1,m};\ (p,q)\}, \tag{9}$$

где $\begin{vmatrix}\lambda_{st} & \lambda_{sq}\\ \lambda_{pt} & \lambda_{pq}\end{vmatrix}$ — отличный от нуля минор матрицы Λ.

Необходимость. Из доказательства достаточности следует, что для опоры $U_{\text{оп}}$ должны выполняться условия

$$|U_k|\leqslant|I(U_k)|+|J(U_k)|,\ k=\overline{1,N},$$

ибо в противном случае система (4) имеет нетривиальное решение. Покажем, что на самом деле имеют место равенства. Предположим противное, тогда

$$|U_{\text{оп}}|=\sum_{k=1}^{N}|U_k|<\sum_{k=1}^{N}(|I(U_k)|+|J(U_k)|)=$$
$$=|I(U_{\text{оп}})|+|J(U_{\text{оп}})|\leqslant m+n.$$

Это противоречит тому, что $U_{\text{оп}}$ — максимальное множество, так как множество (9) содержит $m+n$ клеток и соответствующая ему система (4) имеет только тривиальное решение. Значит, $|U_k|=|I(U_k)|+|J(U_k)|$, $k=\overline{1,N}$. В силу леммы 1 получаем, что циклические клетки каждой компоненты связности образуют только один цикл.

Предположим, что цикл (i_1, j_1), (i_1, j_2), ... , (i_s, j_s), (i_s, j_1), соответствующий k-й компоненте связности, вырожденный. Тогда система (4) имеет нетривиальное решение:

$$y_{ij}=0,\ (i, j)\overline{\in}\{(i_1, j_1),\ (i_1, j_2),\ \ldots,\ (i_s, j_s),\ (i_s, j_1)\};$$
$$y_{i_1j_1}=1;\ y_{i_p j_{p+1}}=-y_{i_p j_p},\ y_{i_{p+1} j_{p+1}}=$$
$$=-y_{i_p j_{p+1}}\cdot\lambda_{i_p j_{p+1}}/\lambda_{i_{p+1} j_{p+1}},\ p=\overline{1, s},\ j_{s+1}=j_1.$$

Полученное противоречие показывает, что все циклы опоры невырожденные. Теорема доказана.

Следствие. Система

$$u_i+\lambda_{ij}v_j=0,\ (i, j)\in U_{\text{оп}}, \tag{10}$$

имеет только тривиальное решение.

Доказательство. Сравнивая матрицы систем (10) и (4), убеждаемся, что матрица системы (10) равна транспонированной матрице системы (4). Из теоремы следует, что матрица системы (4) невырожденная, значит, невырождена и матрица системы (10).

5. Опорный план. Критерий оптимальности. Совокупность $\{x, U_{\text{оп}}\}$ плана перевозок и опоры таблицы T называется опорным планом. Перевозки x_{ij}, $(i, j)\in U_{\text{оп}}$,— опорные, x_{ij}, $(i, j)\in U_{\text{н}}$,— неопорные, $U_{\text{н}}=T\setminus U_{\text{оп}}$. Опорный план называется невырожденным, если опорные перевозки удовлетворяют неравенствам $0<x_{ij}<d_{ij}$.

Пусть $\{x, U_{\text{оп}}\}$ — опорный план перевозок. По опоре $U_{\text{оп}}$ построим (опорные) потенциалы u_i, $i=\overline{1, m}$; v_j, $j=\overline{1, n}$,— числа, удовлетворяющие системе уравнений

$$u_i+\lambda_{ij}v_j=c_{ij}, \quad (i, j)\in U_{\text{оп}}. \tag{11}$$

В силу следствия 1 опорные потенциалы из системы (11) найдутся однозначно.

С помощью опорных потенциалов вычислим оценки неопорных клеток

$$\Delta_{ij}=u_i+\lambda_{ij}v_j-c_{ij}, \quad (i, j)\in U_{\text{н}}. \tag{12}$$

Рассмотрим соотношения

$$\begin{gathered}\Delta_{ij}\leqslant 0, \text{ если } x_{ij}=0; \ \Delta_{ij}\geqslant 0, \text{ если } x_{ij}=d_{ij};\\ \Delta_{ij}=0, \text{ если } 0<x_{ij}<d_{ij}, \quad (i, j)\in U_{\text{н}}.\end{gathered} \tag{13}$$

Критерий оптимальности. Соотношения (13) достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности опорного плана перевозок $\{x, U_{\text{оп}}\}$.

Для упрощения вычислений считаем, что задача (1) записана в канонической форме, соответствующей множеству $U_{\text{оп}*}$, полученному из $U_{\text{оп}}$ удалением из каждой компоненты связности U_k по одной циклической клетке (s_k, t_k), $k=\overline{1, N}$. Циклическим опорным клеткам (s_k, t_k), $k=\overline{1, N}$, приписываем индекс «—», остальным опорным циклическим клеткам приписываем индексы «+» и «—» так, чтобы в одной строке или столбце не было циклических клеток с одинаковыми индексами. Потенциалы находим следующим образом. Полагаем

$$v_{t_k}=\frac{\sum\limits_{(i,\, j)_+\in U_k} c_{ij}-\sum\limits_{(i,\, j)_-\in U_k} c_{ij}}{1-\lambda_{s_k t_k}}, \quad k=\overline{1, N}, \tag{14}$$

остальные потенциалы находятся, как и в классическом методе потенциалов, из соотношений

$$u_i+v_j=c_{ij}, \quad (i, j)\in U_{\text{оп}*}.$$

По известным потенциалам легко подсчитать в силу (12) оценки Δ_{ij} неопорных дуг. Числа Δ_{ij}, $(i, j)\in U_{\text{н}}$, записываются в табл. VII.1 в правом нижнем углу клетки (i, j).

Проверка соотношений (13) сводится к анализу чисел d_{ij}, Δ_{ij}, x_{ij} из каждой неопорной клетки.

6. Достаточное условие субоптимальности. План перевозок x^ε называется ε-оптимальным, если

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}^{\varepsilon} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}^{0} \leqslant \varepsilon.$$

Теорема. Опорный план перевозок $\{x, U_{\text{оп}}\}$ является ε-оптимальным планом перевозок с числом

$$\varepsilon = -\sum_{\substack{(i,\, j)\in U_{\text{н}},\\ \Delta_{ij}<0}} \Delta_{ij}x_{ij} + \sum_{\substack{(i,\, j)\in U_{\text{н}},\\ \Delta_{ij}>0}} \Delta_{ij}(d_{ij}-x_{ij}).$$

Доказательство стандартное (см. [ч. 1]).

7. Итерация. Как и в классической транспортной задаче, множество планов перевозок обобщенной задачи компактно. Поэтому процедура проверки прямого опорного метода [ч. 1] на неограниченность целевой функции отпадает.

Опишем процедуру улучшения опорного плана перевозок $\{x, U_{\text{оп}}\}$, который не удовлетворяет соотношениям (13). В каждой неопорной клетке, элементы которой не удовлетворяют соотношениям (13), отметим оценку Δ_{ij}. Пусть $\Delta_{i_0j_0}$ — максимальное по модулю число среди отмеченных оценок. Ясно, что $\Delta_{i_0j_0}\neq 0$.

Пусть $i_0\in I(U_p)$, $j_0\in J(U_q)$, где U_p и U_q — некоторые компоненты связности опоры. Рассмотрим множество клеток

$$\tilde{U} = \begin{cases} U_p \cup U_q \cup (i_0, j_0), \text{ если } p\neq q; \\ U_p \cup (i_0, j_0), \text{ если } p=q. \end{cases} \qquad (15)$$

Для удобства обведем в таблице T клетки множества $\tilde{U}$ кружком. Найдем числа y_{ij}, $(i, j)\in\tilde{U}$, следующим образом.

1. Полагаем $y_{i_0j_0}=-1$.

2. Числа y_{ij} для опорных нециклических клеток легко найти из условий:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{а) в любой строке таблицы } T \text{ сумма чисел } y_{ij}, \\
\quad\text{лежащих в клетках, обведенных кружком,} \\
\quad\text{равна нулю;} \\
\text{б) в любом столбце таблицы } T \text{ сумма произ-} \\
\quad\text{ведений чисел } y_{ij}, \text{ находящихся в обведен-} \\
\quad\text{ных кружком клетках, на соответствующие} \\
\quad\lambda_{ij} \text{ равна нулю.}
\end{array}\right\} \qquad (16)$$

3. Пусть известны числа y_{ij} для всех опорных нециклических клеток, принадлежащих $\tilde{U}$. Найдем числа y_{ij} для опорных циклических клеток из $\tilde{U}$. В случае $p=q$ это циклические клетки компоненты U_p, в случае $p\neq q$ — циклические клетки компонент связности U_p и U_q. Пусть $U_p^{\text{цикл}}$ — множество циклических клеток компоненты связности U_p. Определим $y_{s_pt_p}$ по формуле

$$y_{s_pt_p}=\Big(\sum_{\substack{j\in J\,(U_p^{\text{цикл}}),\\ (i,\,j)\in U\setminus U_p^{\text{цикл}}}}\lambda_{ij}y_{ij}-\sum_{\substack{i\in I\,(U_p^{\text{цикл}}),\\ (i,\,j)\in U\setminus U_p^{\text{цикл}}}}y_{ij}\Big)\Big/(1-\lambda_{s_pt_p}). \quad (17)$$

Можно показать, что среди чисел y_{ij}, входящих в числитель правой части равенства (17), будет не более двух y_{ij}, отличных от нуля. Остальные y_{ij}, $(i,\ j)\in U_p^{\text{цикл}}$, можно найти по правилу (16). Если $p\neq q$, то числа y_{ij}, $(i,\ j)\in U_q^{\text{цикл}}$, находятся аналогично.

В табл. VII.1 числа y_{ij}, $(i,\ j)\in U_{\text{оп}}^p\cup U_{\text{оп}}^q$, записываются в клетке $(i,\ j)$ в правом нижнем углу.

Рассмотрим случаи: 1) $\Delta_{i_0j_0}>0$, 2) $\Delta_{i_0j_0}<0$. В случае 1) найдем число Θ из условий

$$-\Theta=\min\left\{\frac{x_{ij}}{y_{ij}},\ y_{ij}>0;\ \ \frac{-d_{ij}+x_{ij}}{y_{ij}},\ y_{ij}<0;\ \ (i,\ j)\in\tilde{U}\right\}.$$

В случае 2) число Θ найдем из условий

$$\Theta=\min\left\{-\frac{x_{ij}}{y_{ij}},\ y_{ij}<0;\ \frac{d_{ij}-x_{ij}}{y_{ij}},\ y_{ij}>0;\ (i,\ j)\in\tilde{U}\right\}.$$

Пусть минимальное число оказалось в клетке $(i_*,\ j_*)$. Переходим к новому опорному плану. Возможны следующие ситуации:

а) $(i_*,\ j_*)=(i_0,\ j_0)$. При переходе к новой таблице меняется только план перевозок

$$\begin{aligned}\bar{x}_{ij}&=x_{ij}+\Theta\cdot y_{ij},\ (i,\ j)\in\tilde{U};\\ \bar{x}_{ij}&=x_{ij},\ (i,\ j)\,\overline{\in}\,\tilde{U}.\end{aligned}\quad (18)$$

Опора $U_{\text{оп}}$ и множество $U_{\text{оп}*}$ остаются прежними. Не изменятся, следовательно, и оценки Δ_{ij}, $(i,\ j)\in U_{\text{н}}$.

б) $(i_*,\ j_*)\neq(i_0,\ j_0)$. Тогда опорная клетка $(i_*,\ j_*)$ выходит из опоры, неопорная клетка $(i_0,\ j_0)$ становится опорной. Получаем новую опору. Из каждой компоненты связности новой опоры удаляем по одной циклической клетке $(s_k, t_k)_{\text{нов}}$, $k=\overline{1, N_{\text{нов}}}$. Получаем новое множество $(U_{\text{оп}*})_{\text{нов}}$. (Если цикл в новой опоре совпадает с циклом в старой, то удаляем ту клетку (s, t), которая удалялась при построении старого множества $U_{\text{оп}*}$.)

Теперь необходимо получить новый план перевозок и записать задачу в канонической форме, соответствующей новому множеству $(U_{\text{оп}*})_{\text{нов}}$. Для этого находим числа α_i, $i=\overline{1, m}$; β_j, $j=\overline{1, n}$, из условий

$$\alpha_i - \lambda_{ij}\cdot\beta_j = 0, \quad (i, j) \in (U_{\text{оп}*})_{\text{нов}};$$
$$\alpha_{s_k} = 1, \quad k=\overline{1, N}.$$

Пересчитываем таблицу по формулам

$$\begin{aligned} &\bar{x}_{ij} = \alpha_i(x_{ij} + \Theta y_{ij}), \quad (i, j) \in \tilde{U};\\ &\bar{x}_{ij} = \alpha_i x_{ij}, \quad (i, j) \,\overline{\in}\, \tilde{U};\\ &\bar{\lambda}_{ij} = \lambda_{ij}\frac{\beta_j}{\alpha_i}, \quad \bar{c}_{ij} = \frac{c_{ij}}{\alpha_i}, \quad \bar{d}_{ij} = \alpha_i d_{ij}, \quad i=\overline{1, m}, \quad j=\overline{1, n}. \end{aligned} \tag{19}$$

Предположим, что после некоторой итерации выполняется критерий оптимальности (достаточное условие субоптимальности). Оптимальный (субоптимальный) план перевозок исходной задачи (1) вычисляется по формулам

$$\overset{0}{x}_{ij} = \frac{x_{ij}\cdot c_{ij}}{c_{ij}^{\text{исх}}} \quad \left(\overset{\varepsilon}{x}_{ij} = \frac{x_{ij}\cdot c_{ij}}{c_{ij}^{\text{исх}}}\right),$$

где x_{ij}, c_{ij} взяты из последней таблицы, $c_{ij}^{\text{исх}}$ — исходное значение c_{ij}.

8. Построение начального опорного плана. Предположим, что к началу решения задачи не известно никакой дополнительной информации о планах. Следуя схеме п. 5 § 1 гл. I, легко построить аналоги методов северо-западного угла и минимального элемента. Оба эти метода предполагают расширение исходной задачи, благодаря чему можно добиться выполнения условий баланса. К расширенной задаче применим метод, описанный в пп. 5—7 данной главы. Исходная задача расширяется следующим образом: полагаем $c_{m+1\, n+1}=0$; $c_{i\, n+1}=M$, $i=\overline{1, m}$; $c_{m+1\, j}=M$, $j=\overline{1, n}$; $\lambda_{m+1\, j}=1$, $j=\overline{1, n}$; $\lambda_{i\, n+1}=0$, $i=\overline{1, m+1}$.

На искусственную переменную $x_{m+1\ n+1}$ нет ограничений, $0 \leqslant x_{i\ n+1}$, $i=\overline{1, m}$; $0 \leqslant x_{m+1\ j}$, $j=\overline{1, n}$. Будем считать, что клетка $(m+1,\ n+1)$ является опорной и образует цикл, состоящий только из одной клетки.

Рассмотрим случай, когда кроме параметров задачи известен квазиплан перевозок $0 \leqslant \bar{x}_{ij} \leqslant d_{ij}$, $i=\overline{1, m}$, $j=\overline{1, n}$. Подсчитаем числа

$$\bar{x}_{i\ n+1}=a_i-\sum_{j=1}^{n} \bar{x}_{ij},\ i=\overline{1, m};$$

$$\bar{x}_{m+1\ j}=b_j-\sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij}\bar{x}_{ij},\ j=\overline{1, n}; \tag{20}$$

$$\bar{x}_{m+1\ n+1}=-\sum_{j=1}^{n} \bar{x}_{m+1\ j}.$$

К таблице T добавим искусственную $(m+1)$-ю строку и искусственный $(n+1)$-й столбец. Если $x_{m+1\ j}>0$, то полагаем $c_{m+1\ j}=M$, $0 \leqslant x_{m+1\ j} \leqslant +\infty$; если $x_{m+1\ j}<0$, то полагаем $c_{m+1\ j}=-M$, $-\infty \leqslant x_{m+1\ j} \leqslant 0$. Аналогично находим параметры $(n+1)$-го столбца. На $x_{m+1\ n+1}$ нет ограничений. Положим $c_{m+1\ n+1}=0$; $\lambda_{i\ n+1}=0$, $i=\overline{1, m+1}$; $\lambda_{m+1\ j}=1$, $j=\overline{1, n}$; $b_{n+1}=a_{m+1}=0$. Параметры неискусственных клеток остаются прежними.

Для расширенной задачи искусственные клетки образуют начальную опору. Условимся клетку $(m+1,\ n+1)$ считать циклом, состоящим из одной клетки. Расширенную задачу решаем методом, описанным в пп. 5—7. Легко показать, что наличие отрицательных перевозок не вносит существенных изменений в алгоритм.

Анализ результатов стандартен для M-метода.

Можно построить начальный опорный план с помощью первой фазы двухфазного метода. Достоинством этого метода является то, что после окончания первой фазы кроме начального опорного плана получается информация и о том, сводится исходная задача к классической транспортной задаче или нет. Рассмотрим первую фазу.

Найдем числа $x_{i\ n+1}$, $i=\overline{1, m}$; $x_{m+1\ j}$, $j=\overline{1, n+1}$, из соотношений (20). Определим параметры искусственных клеток. Положим $\lambda_{i\ n+1}=0$, $i=\overline{1, m+1}$; $\lambda_{m+1\ j}=1$, $j=\overline{1, n}$; $b_{n+1}=a_{m+1}=0$; $c_{m+1\ n+1}=0$; $c_{ij}=1$, $d_{ij}=+\infty$, если $x_{ij}>0$;

$c_{ij}=-1$, $d_{ij}=-\infty$, если $x_{ij}<0$, $i=m+1$ или $j=n+1$, $(i, j)\neq(m+1, n+1)$.

Решим задачу

$$\sum_{i=1}^{m} c_{i\,n+1} x_{i\,n+1}+\sum_{j=1}^{n} c_{m+1\,j}\, x_{m+1\,j}\to\min,$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij}=a_i,\ i=\overline{1, m+1},\ \sum_{i=1}^{m+1}\lambda_{ij}x_{ij}=b_j,\ j=\overline{1, n+1},\quad (21)$$

$$0\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij},\ i=\overline{1, m},\ j=\overline{1, n},$$

$$\left.\begin{array}{l} 0\leqslant x_{ij}<\infty,\ \text{если } \bar{x}_{ij}>0 \\ -\infty<x_{ij}\leqslant 0,\ \text{если } \bar{x}_{ij}<0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} i=m+1 \text{ или } j=n+1, \\ (i, j)\neq(m+1, n+1). \end{array}$$

В качестве начальной опоры берем искусственные клетки. Условимся клетку $(m+1, n+1)$ считать циклом, состоящим из одной клетки. Решаем задачу (21) методом, описанным в пп. 5—7. Легко показать, что наличие отрицательных перевозок не вносит существенных изменений в алгоритм.

Предположим, что задача (21) решена. Возможны случаи:

а) $\sum_{i=1}^{m} c_{i\,n+1}x_{i\,n+1}+\sum_{j=1}^{n} c_{m+1\,j}\, x_{m+1\,j}\neq 0$; исходная задача не имеет решения;

б) $\sum_{i=1}^{m} c_{i\,n+1}x_{i\,n+1}+\sum_{j=1}^{n} c_{m+1\,j}\, x_{m+1\,j}=0$ и $u_i=0$, $i=\overline{1, m}$; $v_j=0$, $j=\overline{1, n}$, т. е. в опоре нет искусственных клеток, кроме $(m+1, n+1)$; построен начальный опорный план перевозок;

в) $\sum_{i=1}^{m} c_{i\,n+1}x_{i\,n+1}+\sum_{j=1}^{n} c_{m+1\,j}\, x_{m+1\,j}=0$, но есть $u_i\neq 0$ или $v_j\neq 0$, т. е. в опоре есть искусственные клетки, кроме $(m+1, n+1)$. Тогда ищем

$$\Delta_{i_0 j_0}=\max_{\substack{i=\overline{1, m},\\ j=\overline{1, n}}} |u_i+\lambda_{ij}v_j|.$$

Если $\Delta_{i_0 j_0}\neq 0$, то от клетки (i_0, j_0) строим цепочку из опорных клеток до искусственной опорной клетки. Эта искусственная опорная клетка выходит из опоры, клетка (i_0, j_0) входит в опору.

По новой опоре строим новые потенциалы. Если они равны нулю, то имеем случай б). Если не все потенциалы равны нулю, то повторяем только что проделанные операции. Так как на каждой итерации из опоры удаляется хотя бы одна искусственная клетка, то за конечное число итераций придем либо к случаю б), либо к случаю $\Delta_{i_0 j_0}=0$, $i=\overline{1, m}$, $j=\overline{1, n}$, и среди потенциалов есть отличные от нуля. Во втором случае исходная задача может быть сведена к классической транспортной. Действительно, если $u_i+\lambda_{ij}v_j=0$, $i=\overline{1, m}$, $j=\overline{1, n}$, и $\exists u_i\neq 0$ или $\exists v_j\neq 0$, то все $u_i\neq 0$, $v_j\neq 0$, $i=\overline{1, m}$, $j=\overline{1, n}$. Следовательно, $\lambda_{ij}=-u_i/u_j$, значит, $\operatorname{rank}\Lambda=1$ и исходную задачу можно свести к классической транспортной задаче.

9. Пример. Имеются 3 пункта производства топлива и 4 пункта потребления топлива. Заданы числа λ_{ij} — коэффициенты теплоотдачи, c_{ij} — стоимость перевозки единицы объема топлива из i-го пункта j-му потребителю, d_{ij} — ограничения на пропускные способности дорог, $i=\overline{1, 3}$, $j=\overline{1, 4}$.

Кроме того, предполагается, что задан начальный опорный план перевозок. Исходные данные приведены в табл. VII.2. Для удобства

Таблица VII.2

									a_i	u_i	α_i
	2	2 / 2	1	4 / 1	3	4 / 3	1.	6 / 2	8	7	1
	1	-1	4	2	0	-11	3	0			
	2	4 / -1	1	2 / 3	1	2 / +2	1	3 / 2	6	7	1
	2	1	1	2	1	-3	2	0			
	1	2 / +4	2	5 / 2	1	4 / -2	3	2 / 1	7	7	2
	1	-2	4	-3 -1	2	3	0	-9			
b_j	7		13		3		5				
v_j	-3		-4		-5		-5				
β_j	2		1		2		1				

вычислений опорные клетки будем обводить жирными линиями. Опора из табл. VII.2 состоит из одной компоненты связности. Клетки (2, 1), (2, 3), (3, 3), (3, 1) — циклические опорные. Они образуют единственный цикл опоры. Удалим из опоры циклическую клетку $(s, t)=(2, 1)$, оставшиеся опорные клетки образуют множество $U_{\text{оп}*}$. Для табл. VII.2 все $\lambda_{ij}=1$, $(i, j)\in U_{\text{оп}*}$, значит, исходная задача записана в канонической форме относительно множества $U_{\text{оп}*}$. Расставим индексы «$+$» и «$-$» для опорных циклических клеток (индекс записываем рядом со стоимостью c_{ij}): клетке $(s, t)=(2, 1)$ приписываем индекс «$-$», индексы остальных опорных циклических клеток определятся однозначно. Для проверки оптимальности исходного плана надо найти потенциалы. Первым находим потенциал $v_t=v_1$ по формуле (14)

$$v_1=\frac{4+2-1-2}{1-2}=-3,$$

остальные потенциалы находим из условий $u_i+v_j=c_{ij}$, $(i, j)\in U_{\text{оп}*}$. По известным потенциалам находим, согласно формулам (12), оценки Δ_{ij} для неопорных клеток. Числа Δ_{ij} записываем в правый нижний угол неопорных клеток.

Критерий оптимальности для табл. VII.2 не выполняется в клетках (1, 1) и (3, 2) и так как $|\Delta_{32}|>|\Delta_{11}|$, то $(i_0, j_0)=(3, 2)$. Поскольку опора состоит из одной компоненты связности, то множество $\tilde{U}$ (см. (16)) состоит из опорных клеток и клетки (3, 2). Параметры λ_{ij} клеток множества $\tilde{U}$ обведем кружком.

Найдем числа y_{ij}, $(i, j)\in\tilde{U}$. Полагаем $y_{32}=-1$. Из условий (16) легко находятся $y_{22}=2$, $y_{14}=y_{24}=0$. Осталось определить числа y_{ij} для опорных циклических клеток. По формуле (17) получаем

$$y_{21}=\frac{-y_{22}-y_{24}-y_{32}}{1-\lambda_{21}}=\frac{-2+1}{1-2}=1.$$

Остальные числа y_{ij} для опорных циклических клеток находим из условий (16).

Поскольку $\Delta_{i_0j_0}=\Delta_{32}<0$, то максимальный шаг Θ находим из условий

$$\Theta=\min\left\{-\frac{x_{ij}}{y_{ij}},\ y_{ij}<0;\ \frac{d_{ij}-x_{ij}}{y_{ij}},\ y_{ij}>0;\ (i, j)\in\tilde{U}\right\}.$$

Из табл. VII.2 видно, что $\Theta=-x_{23}/y_{23}=1/3$, т. е. $(i_*, j_*)=(2, 3)$. Опорная клетка (2, 3) выходит из опоры, клетка (3, 2) становится опорной. Построим для новой опоры множества $(s, t)_{\text{нов}}=(2, 1)$ и $(U_{\text{оп}*})_{\text{нов}}=\{(1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$. Полагаем $\alpha_s=\alpha_2=1$, остальные α_i, β_j, $i=\overline{1, 3}$, $j=\overline{1, 4}$, находим из условий $\alpha_i-\lambda_{ij}\beta_j=0$, $(i, j)\in(U_{\text{оп}*})_{\text{нов}}$.

Пусть найдены числа α_i, β_j, $i=\overline{1, 3}$, $j=\overline{1, 4}$. Используя формулы (19), получаем табл. VII.3. Найдем потенциалы для этой таблицы:

$$v_t=v_1=\frac{-1-1+2+3}{1-4}=-1.$$

Остальные потенциалы находятся, как в классическом методе потенциалов.

Подсчитаем оценки Δ_{ij} неопорных клеток. Условия оптимальности для табл. VII.3 не выполняются, так как $x_{11}=1$, $\Delta_{11}=-1$. Множество $\tilde{U}$ состоит из опорных клеток и клетки $(i_0, j_0)=(1, 1)$. Полагаем

Таблица VII.3

								u_i
4	$2 / 2$	1	$4 / 1$	6	$4 / 3$	1	$6 / 2$	5
1	−1	4	2	0	−10	3	1	
4	$4 / -1$	1	$2 / +3$	2	$2 / 2$	1	$3 / 2$	5
$\frac{7}{3}$	1	$\frac{5}{3}$	0	0	−1	2	−1	
1	$4 / +2$	1	$10 / -1$	1	$8 / 1$	$\frac{3}{2}$	$4 / \frac{1}{2}$	3
$\frac{2}{3}$	0	$\frac{22}{3}$	0	6	0	0	−2	
v_j: −1		−2		−2		−3		

$y_{11}=-1$. Согласно правилу (16), получаем, что $y_{14}=1$, $y_{24}=-1$, $y_{33}=0$. Из (17) следует

$$y_{st}=y_{21}=\frac{4\cdot(-1)-(-1)}{1-4}=1.$$

По правилу (16) находим $y_{22}=y_{31}=y_{32}=0$.

Максимальный шаг Θ находим из условий

$$\Theta=\min\left\{-\frac{x_{ij}}{y_{ij}},\ y_{ij}<0;\ \frac{d_{ij}-x_{ij}}{y_{ij}},\ y_{ij}>0,\ (i,\ j)\in\tilde{U}\right\};$$

$$\Theta=-x_{11}/y_{11}=1.$$

Значит, $(i_*,\ j_*)=(1,\ 1)$. Реализовался случай, когда $(i_0,\ j_0)=(i_*,\ j_*)=(1,\ 1)$. Новый план помещен в табл. VII.4, для которой

Таблица VII.4

4	$2 / 2$	1	$4 / 1$	6	$4 / 3$	1	$6 / 2$
0	−1	4	2	0	−10	4	
4	$4 / 1$	1	$2 / 3$	2	$2 / 2$	1	$3 / 2$
$\frac{10}{3}$		$\frac{5}{3}$		0	−1	1	
1	$4 / 2$	1	$10 / 1$	1	$8 / 1$	$\frac{3}{2}$	$4 / \frac{1}{2}$
$\frac{2}{3}$		$\frac{22}{3}$		6		0	−2

выполняется критерий оптимальности. Оптимальный план исходной задачи: $x_{11}=0$, $x_{12}=4$, $x_{13}=0$, $x_{14}=4$, $x_{21}=10/3$, $x_{22}=5/3$, $x_{23}=0$, $x_{24}=1$, $x_{31}=1/3$, $x_{32}=11/3$, $x_{33}=3$, $x_{34}=0$.

10. Обсуждение обобщенной транспортной задачи. В задаче (1) в пунктах производства объем произведенного топлива выражается в тоннах, в пунктах потребления объем потребляемого топлива выражается в калориях. Возникает вопрос: не сводится ли задача (1) к транспортной задаче, если объемы производства измерять в калориях? Пусть y_{ij} — количество калорий, получаемое от сжигания i-го топлива в j-м пункте потребления. Введем обозначения: $\bar{\lambda}_{ij}=1/\lambda_{ij}$, $\bar{c}_{ij}=c_{ij}/\lambda_{ij}$, $\bar{d}_{ij}=\lambda_{ij}d_{ij}$. Тогда задача (1) запишется в виде

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\bar{c}_{ij}y_{ij}\to\min,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\bar{\lambda}_{ij}y_{ij}=a_i,\quad \sum_{i=1}^{m}y_{ij}=b_j,$$

$$0\leqslant y_{ij}\leqslant\bar{d}_{ij},\quad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n},$$

т. е. с точностью до обозначений не изменилась.

Однако если эффективность использования каждого вида топлива одинакова во всех пунктах потребления, т. е. коэффициенты зависят только от индекса i: $\lambda_{ij}=\alpha_i\neq 0$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, то задача (1) сводится к классической транспортной задаче после замены $y_{ij}=\alpha_i x_{ij}$, $\bar{a}_i=\alpha_i a_i$, $\bar{c}_{ij}=c_{ij}/\alpha_i$, $\bar{d}_{ij}=\alpha_i d_{ij}$. Аналогично задача (1) сводится к транспортной задаче, если во всех пунктах производится топливо одного вида. Исходя из п. 1, можно указать и другие неформальные случаи сводимости обобщенной транспортной задачи к классической транспортной задаче.

С другой стороны, задачи вида

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}y_{ij}\to\min,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\mu_{ij}y_{ij}=a_i,\quad \sum_{i=1}^{m}\gamma_{ij}y_{ij}=b_j,$$

$$0\leqslant y_{ij}\leqslant d_{ij},\quad \mu_{ij}>0,\quad \gamma_{ij}>0,\quad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n},$$

на первый взгляд более общие, чем задача (1), с помощью замены $x_{ij}=\mu_{ij}y_{ij}$, $\lambda_{ij}=\gamma_{ij}/\mu_{ij}$, $\bar{c}_{ij}=c_{ij}/\mu_{ij}$, $\bar{d}_{ij}=\mu_{ij}d_{ij}$ сводятся к задаче (1).

11. Двойственный опорный метод. Постановка задачи. Наряду с задачей (1) рассмотрим двойственную к ней задачу

$$\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} w_{ij} \to \max,$$
$$u_i + \lambda_{ij} v_j - w_{ij} \leqslant c_{ij}, \quad w_{ij} \geqslant 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}. \tag{22}$$

Двойственным планом перевозок будем называть совокупность чисел $\{u_i, v_j, w_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}\}$, удовлетворяющую ограничениям задачи (22).

С каждым двойственным планом свяжем совокупность чисел

$$\delta = \{\delta_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}\}, \quad \delta_{ij} = u_i + \lambda_{ij} v_j - c_{ij}, \tag{23}$$

которую назовем копланом (перевозок) задачи (1). В дальнейшем предполагается, что элемент w двойственного плана согласован с копланом δ:

$$w_{ij} = 0 \text{ при } \delta_{ij} \leqslant 0 \text{ и } w_{ij} = \delta_{ij} \text{ при } \delta_{ij} > 0. \tag{24}$$

Если эти соотношения не выполняются, то, не изменяя коплана, можно, уменьшая компоненты w_{ij}, добиться увеличения целевой функции двойственной задачи.

Пусть к началу решения задачи (1) кроме параметров c_{ij}, λ_{ij}, d_{ij}, a_i, b_j известен начальный двойственный план перевозок (или, что то же самое, начальный коплан). Надо найти оптимальный план перевозок. В пп. 5—7 оптимальный план перевозок получался с помощью последовательного преобразования планов перевозок задачи (1) (прямой метод). В двойственном методе для построения оптимального плана перевозок используются последовательные преобразования двойственных планов.

Определение. Пару $\{\delta, U_{\text{оп}}\}$ из коплана и опоры задачи (1) назовем опорным копланом.

Компоненты коплана δ_{ij}, $(i, j) \in U_{\text{оп}}$,— опорные коперевозки; δ_{ij}, $(i, j) \in U_{\text{н}}$,— неопорные коперевозки. Опорный коплан называется невырожденным, если неопорные коперевозки отличны от нуля. Исходные данные обобщенной транспортной задачи (1) с опорным копланом $\{\delta, U_{\text{оп}}\}$ заносятся в табл. VII.5. Как и раньше, предполагаем, что задача (1) записана в канонической форме, соответствующей множеству $U_{\text{оп}*}$, и циклическим опорным клеткам поставлены знаки «+» или «—».

Таблица VII.5

λ_{11}	d_{11}	λ_{12}	d_{12}	$\ldots$	λ_{1n}	d_{1n}
$\varkappa_{11}$	δ_{11}	$\varkappa_{12}$	δ_{12}		$\varkappa_{1n}$	δ_{1n}
$\vdots$		$\vdots$			$\vdots$	
λ_{m1}	d_{m1}	λ_{m2}	d_{m2}	$\ldots$	λ_{mn}	d_{mn}
$\varkappa_{m1}$	δ_{m1}	$\varkappa_{m2}$	δ_{m2}		$\varkappa_{mn}$	δ_{mn}

12. Псевдоплан перевозок. Приращение двойственной целевой функции. По опорному коплану $\{\delta, U_{\text{оп}}\}$ построим псевдоплан перевозок $\varkappa = \{\varkappa_{ij},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\}$. Неопорные псевдоперевозки $\varkappa_{ij}$ положим равными

$$\varkappa_{ij}=0, \text{ если } \delta_{ij}\leqslant 0; \quad \varkappa_{ij}=d_{ij}, \text{ если } \delta_{ij}>0, \quad (i, j)\in U_{\text{н}}. \tag{25}$$

Опорные псевдоперевозки $\varkappa_{ij}$, $(i, j)\in U_{\text{оп}}$, однозначно найдутся из условий

$$\begin{gathered}\sum_{j\in J_i(U_{\text{оп}})} \varkappa_{ij} = a_i - \sum_{j\in J_i(U_{\text{н}})} \varkappa_{ij}, \quad i=\overline{1,m};\\ \sum_{i\in I_j(U_{\text{оп}})} \lambda_{ij}\varkappa_{ij} = b_j - \sum_{i\in I_j(U_{\text{н}})} \lambda_{ij}\varkappa_{ij}, \quad j=\overline{1,n}.\end{gathered} \tag{26}$$

Числа $\varkappa_{ij}$, соответствующие опорным нециклическим клеткам, находятся точно так же, как в § 1 гл. II. Пусть найдены опорные нециклические псевдоперевозки. Подсчитаем числа

$$\tilde{a}_i = a_i - \sum_{j=\overline{1,n},\ j\overline{\in} J_i(U_{\text{оп}}^{\text{цикл}})} \varkappa_{ij}, \quad i = I(U_{\text{оп}}^{\text{цикл}});$$

$$\tilde{b}_j = b_j - \sum_{i=\overline{1,m},\ i\overline{\in} I_j(U_{\text{оп}}^{\text{цикл}})} \lambda_{ij}\varkappa_{ij}, \quad j\in J(U_{\text{оп}}^{\text{цикл}}),$$

где $U_{\text{оп}}^{\text{цикл}}$ — множество опорных циклических клеток. Тогда

$$\varkappa_{s_k t_k} = \Big(\sum_{i\in I(U_k^{\text{цикл}})} \tilde{a}_i - \sum_{j\in J(U_k^{\text{цикл}})} \tilde{b}_j\Big) / (1-\lambda_{s_k t_k}), \quad k=\overline{1,N}.$$

Остальные опорные циклические псевдоперевозки легко найти из условий баланса (26), как в § 1 гл. II. Полученный псевдоплан перевозок заносим в табл. VII.5.

Наряду с двойственным планом $\{u, v, w\}$ и соответствующим ему опорным копланом $\{\delta, U_{\text{оп}}\}$ рассмотрим двойственный план $\{\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}\}$, $\tilde{u}=u+\Delta u$, $\tilde{v}=v+\Delta v$, $\tilde{w}=w+\Delta w$, и соответствующий коплан $\tilde{\delta}=\delta+\Delta\delta$, считая вектор $\tilde{w}$ согласованным с вектором $\tilde{\delta}$. Найдем приращение двойственной целевой функции

$$\alpha=\sum_{i=1}^{m} a_i\Delta u_i+\sum_{j=1}^{n} b_j\Delta v_j-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}\Delta w_{ij}.$$

С учетом (23)—(25) получим

$$\alpha=\sum_{i=1}^{m}\Delta u_i\Big(\sum_{j\in J_i(U_{\text{оп}})}\varkappa_{ij}+\sum_{j\in J_i(U_{\text{н}})}\varkappa_{ij}\Big)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\Delta v_j\Big(\sum_{i\in I_j(U_{\text{оп}})}\lambda_{ij}\varkappa_{ij}+\sum_{i\in I_j(U_{\text{н}})}\lambda_{ij}\varkappa_{ij}\Big)-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}\Delta w_{ij}=$$

$$=\sum_{(i,\,j)\in U_{\text{оп}}}\varkappa_{ij}\Delta\delta_{ij}+\sum_{(i,\,j)\in U_{\text{н}}}\varkappa_{ij}\Delta\delta_{ij}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}\Delta w_{ij}.$$

Поскольку при $\delta_{ij}>0$, $\tilde{\delta}_{ij}\geqslant 0$, $(i, j)\in U_{\text{н}}$, имеем $\varkappa_{ij}=d_{ij}$, $\Delta w_{ij}=\Delta\delta_{ij}$; при $\delta_{ij}\leqslant 0$, $\tilde{\delta}_{ij}\leqslant 0$, $(i, j)\in U_{\text{н}}$, имеем $\varkappa_{ij}=0$, $\Delta w_{ij}=0$; при $\delta_{ij}>0$, $\tilde{\delta}_{ij}<0$, $(i, j)\in U_{\text{н}}$, имеем $\varkappa_{ij}=d_{ij}$, $\Delta w_{ij}=-\delta_{ij}$; при $\delta_{ij}\leqslant 0$, $\tilde{\delta}_{ij}>0$, $(i, j)\in U_{\text{н}}$, имеем $\varkappa_{ij}=0$, $\Delta w_{ij}=\tilde{\delta}_{ij}$, то формула приращения двойственной целевой функции принимает вид

$$\alpha=\sum_{(i,\,j)\in U_{\text{оп}}}(\varkappa_{ij}\Delta\delta_{ij}-d_{ij}\Delta w_{ij})+$$
$$+\sum_{\substack{\delta_{ij}>0,\ \tilde{\delta}_{ij}<0,\\ (i,\,j)\in U_{\text{н}}}} d_{ij}\tilde{\delta}_{ij}-\sum_{\substack{\delta_{ij}\leqslant 0,\ \tilde{\delta}_{ij}>0,\\ (i,\,j)\in U_{\text{н}}}} d_{ij}\tilde{\delta}_{ij}. \tag{27}$$

13. Критерий оптимальности. Достаточные условия субоптимальности. Пусть опорные псевдоперевозки, построенные по опорному коплану $\{\delta, U_{\text{оп}}\}$, удовлетворяют соотношениям

$$\varkappa_{ij}=0 \text{ при } \delta_{ij}<0; \ \varkappa_{ij}=d_{ij} \text{ при } \delta_{ij}>0;$$
$$0\leqslant\varkappa_{ij}\leqslant d_{ij} \text{ при } \delta_{ij}=0, \ (i, j)\in U_{\text{оп}}. \qquad (28)$$

Очевидно, что при этих условиях $\varkappa$ является планом перевозок.

Поскольку значение целевой функции прямой задачи (1) на плане $\varkappa$ и значение целевой функции двойственной задачи (22) на двойственном плане $\{u, v, w\}$ совпадают:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\varkappa_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(u_i+\lambda_{ij}v_j-\delta_{ij})\varkappa_{ij}=$$
$$=\sum_{i=1}^{m}u_i\sum_{j=1}^{n}\varkappa_{ij}+\sum_{j=1}^{n}v_j\sum_{i=1}^{m}\lambda_{ij}\varkappa_{ij}-\sum_{\delta_{ij}>0}\delta_{ij}d_{ij}=$$
$$=\sum_{i=1}^{m}a_iu_i+\sum_{j=1}^{n}b_jv_j-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_{ij}w_{ij},$$

то $\varkappa$ — оптимальный план перевозок.

Пусть $\{\delta, U_{\text{оп}}\}$ — невырожденный оптимальный опорный коплан. Тогда, по теореме двойственности [МО], существует оптимальный план перевозок x. Из невырожденности коплана и условий дополняющей нежесткости $x^0_{ij}(u^0_i+\lambda_{ij}v^0_j-w^0_{ij}-c_{ij})=0$, $\quad w^0_{ij}(x^0_{ij}-d_{ij})=0$, $\quad i=\overline{1, m}$, $j=\overline{1, n}$, следуют соотношения (25) для неопорных компонент x_{ij} плана перевозок. Соотношения (28) для опорных компонент x_{ij} плана перевозок суть следствия условий дополняющей нежесткости и ограничений обобщенной транспортной задачи (1).

Таким образом, справедлива

Теорема. Соотношения (28) достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности опорного коплана $\{\delta, U_{\text{оп}}\}$. Псевдоплан перевозок $\varkappa$, соответствующий указанному опорному коплану $\{\delta, U_{\text{оп}}\}$, является оптимальным планом перевозок.

Рассмотрим опорный коплан $\{\delta, U_{\text{оп}}\}$, опорные компоненты псевдоплана которого удовлетворяют ограничениям $0\leqslant\varkappa_{ij}\leqslant d_{ij}$, $(i, j)\in U_{\text{оп}}$. Ясно, что $\varkappa$ является планом перевозок. Подсчитаем для него число

$$\varepsilon=-\sum_{\substack{\delta_{ij}<0,\\(i, j)\in U_{\text{оп}}}}\delta_{ij}\varkappa_{ij}+\sum_{\substack{\delta_{ij}>0,\\(i, j)\in U_{\text{оп}}}}\delta_{ij}(d_{ij}-\varkappa_{ij}).$$

Покажем, что $\varkappa$ — ε-оптимальный план перевозок. Используя определения (23), (25), соотношения (24), (26) и теорию двойственности, легко показать, что

$$\varepsilon = -\sum_{\substack{\delta_{ij}<0,\\ (i,j)\in U_{\text{оп}}}} \delta_{ij}\varkappa_{ij} + \sum_{\substack{\delta_{ij}>0,\\ (i,j)\in U_{\text{оп}}}} \delta_{ij}(d_{ij}-\varkappa_{ij}) =$$

$$= -\sum_{\delta_{ij}\leqslant 0} \delta_{ij}\varkappa_{ij} + \sum_{\delta_{ij}>0} \delta_{ij}(d_{ij}-\varkappa_{ij}) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}\varkappa_{ij} + \sum_{\delta_{ij}>0} \delta_{ij}d_{ij} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (u_i+\lambda_{ij}v_j-c_{ij})\varkappa_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}w_{ij} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{n} \varkappa_{ij} - \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij}\varkappa_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\varkappa_{ij} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}w_{ij} = -\sum_{i=1}^{m} a_i u_i - \sum_{j=1}^{n} b_j v_j + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}w_{ij} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\varkappa_{ij} \geqslant -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x^0_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\varkappa_{ij}.$$

Отсюда следует утверждение об ε-оптимальности.

14. Улучшение коплана перевозок. Пусть $\{\delta, U_{\text{оп}}\}$ — опорный коплан перевозок, на котором соотношения (28) не выполняются. Из формулы приращения (27) видно, что два последних выражения не возникают, если опорный коплан $\{\delta, U_{\text{оп}}\}$ невырожденный и его возмущение $\Delta\delta$ достаточно мало. Исследуем этот случай.

Пусть $\delta_{ij}<0$, $(i, j)\in U_{\text{оп}}$. Соотношения (28) не выполняются, если $\varkappa_{ij}\neq 0$. При малых возмущениях $\Delta\delta_{ij}$ имеем $\tilde{\delta}_{ij}=\delta_{ij}+\Delta\delta_{ij}<0$. Следовательно, $w_{ij}=0$, $\tilde{w}_{ij}=0$, $\Delta w_{ij}=0$ и $\alpha=\varkappa_{ij}\Delta\delta_{ij}$, т. е. $\varkappa_{ij}$ — скорость изменения двойственной целевой функции в точке δ при изменении единственной опорной компоненты с номером (i, j).

Пусть $\delta_{ij}>0$, $(i, j)\in U_{\text{оп}}$. Соотношения (28) не выполняются, если $\varkappa_{ij}\neq d_{ij}$. При малых возмущениях $\Delta\delta_{ij}$ имеем $\tilde{\delta}_{ij}>0$, $w_{ij}=\delta_{ij}$, $\tilde{w}_{ij}=\tilde{\delta}_{ij}$, $\Delta w_{ij}=\Delta\delta_{ij}$ и $\alpha=(\varkappa_{ij}-d_{ij})\Delta\delta_{ij}$, т. е. теперь указанная выше скорость равна $(\varkappa_{ij}-d_{ij})$.

Пусть $\delta_{ij}=0$, $(i, j)\in U_{\text{оп}}$. Соотношения (28) не выполняются при $\varkappa_{ij}\,\overline{\in}\,[0, d_{ij}]$. При малых $\Delta\delta_{ij}$ имеем $\tilde{\delta}_{ij}>0$,

$\Delta w_{ij}=\Delta\delta_{ij}$, если $\Delta\delta_{ij}>0$ и $\tilde{\delta}_{ij}<0$; $\Delta w_{ij}=0$, если $\Delta\delta_{ij}<0$, соответственно

$$\alpha=(\varkappa_{ij}-d_{ij})\Delta\delta_{ij} \text{ при } \Delta\delta_{ij}>0;$$

$$\alpha=\varkappa_{ij}\Delta\delta_{ij} \text{ при } \Delta\delta_{ij}<0.$$

Таким образом, при $\delta_{ij}=0$, $\varkappa_{ij}>d_{ij}$ скорость возрастания двойственной целевой функции равна $\varkappa_{ij}-d_{ij}$, а при $\delta_{ij}=0$, $\varkappa_{ij}<0$ она равна $\varkappa_{ij}$.

В случае вырожденного коплана $\{\delta, U_{\text{оп}}\}$ изменение опорной коперевозки может вызвать изменение нулевой неопорной коперевозки так, что в формуле (27) появится одно из двух последних выражений. Это повлияет на скорость изменения двойственной целевой функции.

Следуя классическому прототипу излагаемого метода, будем на каждой итерации изменять значение единственной опорной коперевозки. Первый элемент принципа допустимых направлений состоит в том, что выбирается та коперевозка $\delta_{i_0j_0}$, при изменении которой двойственная целевая функция увеличивается с наибольшей скоростью $|\omega^0|$. Предыдущие вычисления приводят к следующим операциям. В опорных клетках $(i, j)\in U_{\text{оп}}$, в которых не выполняются соотношения (28), отметим число $\varkappa_{ij}$, если $\delta_{ij}<0$ или $\delta_{ij}=0$, $\varkappa_{ij}<0$, и число $\varkappa_{ij}-d_{ij}$, если $\delta_{ij}>0$ или $\delta_{ij}=0$, $\varkappa_{ij}>d_{ij}$. Для удобства каждое отмеченное число поместим в нижний треугольник соответствующей клетки табл. VII.6. Обозначим через ω^0 и (i_0, j_0) отмеченное число с максимальным модулем и клетку, в которой оно находится. Двойственная целевая функция возрастает со скоростью $|\omega^0|$, если $\Delta\delta_{i_0j_0}=\sigma \operatorname{sign}\omega^0$, $\sigma\geqslant 0$.

Второй элемент принципа допустимых направлений состоит в том, что шаг σ увеличивается до тех пор, пока возрастает двойственная целевая функция и не нарушаются ограничения двойственной задачи. Поскольку выбором компоненты w двойственного плана $\{u, v, w\}$ можно всегда добиться выполнения ограничений, то при вычислении максимально допустимого шага σ будем учитывать только возрастание двойственной целевой функции. Обозначим через σ_{ij} максимально допустимый шаг, который обусловлен компонентой δ_{ij} коплана.

Начнем с опорной клетки (i_0, j_0). Поскольку $\Delta\delta_{i_0j_0}=\sigma\operatorname{sign}\omega^0$, то при $\delta_{i_0j_0}>0$, $\omega^0<0$ или $\delta_{i_0j_0}<0$, $\omega^0>0$ при шаге $|\delta_{i_0j_0}|$ коперевозка $\tilde{\delta}_{i_0j_0}=\delta_{i_0j_0}+\Delta\delta_{i_0j_0}=0$. Дальнейшее изменение компоненты $\delta_{i_0j_0}$ ведет к увеличению двойственной целевой функции, если $\varkappa_{i_0j_0}<0$ при $\delta_{i_0j_0}>0$ или $\varkappa_{i_0j_0}-d_{i_0j_0}>0$ при $\delta_{i_0j_0}<0$. Таким образом,

$$\sigma_{i_0j_0}=\begin{cases} |\delta_{i_0j_0}|, \text{ если } 0\leqslant\varkappa_{i_0j_0}\leqslant d_{i_0j_0}; \\ \infty \text{ — в остальных случаях.}\end{cases} \tag{29}$$

Перейдем к неопорным клеткам $(i, j)\in U_{\text{н}}$. Изменение опорной коперевозки $\delta_{i_0j_0}$ вызывает изменение части неопорных коперевозок. Зависимость между $\Delta\delta_{ij}$, $(i, j)\in U_{\text{н}}$, и $\Delta\delta_{i_0j_0}$ можно обнаружить, если вспомнить связь между обобщенной транспортной задачей и общей задачей линейного программирования [ч. 1, двойственный метод]:

$$\Delta\delta'_{\text{н}}=\Delta\delta'_{\text{оп}}A^{-1}_{\text{оп}}A_{\text{н}}=\Delta\delta_{i_0j_0}a_{i_0j_0}A_{\text{н}},$$

где $a_{i_0j_0}=\{\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \mu_1, \ldots, \mu_n\}$ — строка матрицы $A^{-1}_{\text{оп}}$, соответствующая опорной коперевозке $\delta_{i_0j_0}$ коплана $\{\delta, A_{\text{оп}}\}$. Пусть клетка (i_0, j_0) принадлежит k-й компоненте связности опоры U_k. Найдем числа γ_i, $i=\overline{1, m}$, μ_j, $j=\overline{1, n}$. Полагаем $\gamma_i=0$, $i\,\overline{\in}\,I(U_k)$; $\mu_j=0$, $j\,\overline{\in}\,J(U_k)$. Рассмотрим случаи: 1) (i_0, j_0) — опорная нециклическая клетка, 2) (i_0, j_0) — опорная циклическая клетка. В первом случае $\gamma_i=0$, $i\in I(U_k^{\text{цикл}})$; $\mu_j=0$, $j\in J(U_k^{\text{цикл}})$. Остальные γ_i, μ_j легко найдутся из условий

$$\gamma_i+\mu_j=0, \ (i, j)\neq(i_0, j_0), \ (i, j)\in U_k\setminus U_k^{\text{цикл}};$$
$$\gamma_{i_0}+\mu_{j_0}=1.$$

Во втором случае вначале находим

$$\mu_{t_k}=\frac{(-1)^p}{1-\lambda_{s_kt_k}},$$

где

$$p=\begin{cases} 0, \text{ если клетка } (i_0, j_0) \text{ имеет знак «+»;} \\ 1, \text{ если клетка } (i_0, j_0) \text{ имеет знак «—».}\end{cases}$$

Остальные γ_i, μ_j, $(i, j)\in U_k$, найдем из условий

$$\gamma_i+\mu_j=0, \ (i, j)\neq(s_k, t_k), \ (i, j)\neq(i_0, j_0), \ (i, j)\in U_k;$$
$$\gamma_{i_0}+\mu_{j_0}=1,$$

если $(s_k, t_k)=(i_0, j_0)$, то последнее условие не учитывается. Теперь можно легко подсчитать приращения неопорных коперевозок

$$\Delta\delta_{ij}=\Delta\delta_{i_0j_0}(\gamma_i+\lambda_{ij}\mu_j)=\sigma\operatorname{sign}\omega^0\cdot(\gamma_i+\lambda_{ij}\mu_j),\ \ (i,\ j)\in U_{\text{н}}.$$

Числа $\operatorname{sign}\omega^0\cdot(\gamma_i+\lambda_{ij}\mu_j)$, $(i,\ j)\in U_{\text{н}}$, записываем в нижних треугольниках неопорных клеток (см. табл. VII.5).

Шаг по неопорным компонентам δ_{ij} ($\delta_{ij}\neq 0$, т. е. рассмотрим невырожденный коплан) равен

$$\sigma_{ij}=\begin{cases} -\delta_{ij}/\operatorname{sign}\omega^0\cdot(\gamma_i+\lambda_{ij}\mu_j), \\ \quad\text{если } \delta_{ij}\operatorname{sign}\omega^0\cdot(\gamma_i+\lambda_{ij}\mu_j)<0; \\ \infty \text{ — в остальных случаях.}\end{cases}$$

Пусть

$$\sigma_{i_*j_*}=\min\{\sigma_{ij},\ (i,\ j)\in U_{\text{н}},\ \sigma_{i_0j_0}\}. \qquad (30)$$

Если $\sigma_{i_*j_*}=\infty$, то обобщенная транспортная задача не имеет планов перевозок. При $\sigma_{i_*j_*}<\infty$ делаем шаг величины $\sigma_{i_*j_*}$, который приводит к новому коплану $\delta_{\text{нов}}$. При $(i_*, j_*)=(i_0, j_0)$ опора $U_{\text{оп}}$ и множества $U_{\text{оп}*}$ не меняются. Если $(i_*, j_*)\neq(i_0, j_0)$, то из опоры $U_{\text{оп}}$ удаляем клетку (i_0, j_0) и добавляем клетку (i_*, j_*). Для новой опоры строим новое множество $(U_{\text{оп}*})_{\text{нов}}$. Чтобы перейти к новой таблице, найдем числа α_i, $i=\overline{1,m}$, β_j, $j=\overline{1,n}$, как в п. 7, которые позволяют записать задачу в канонической форме относительно множества $(U_{\text{оп}*})_{\text{нов}}$. В новую таблицу запишем числа

$$\begin{gathered}\bar\delta_{ij}=(\delta_{ij}+\Delta\delta_{ij})/\alpha_i,\ \bar\lambda_{ij}=\lambda_{ij}\beta_j/\alpha_i,\\ \bar d_{ij}=d_{ij}\alpha_i,\ \bar a_i=a_i\alpha_i,\ \bar b_j=b_j\beta_j,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.\end{gathered} \qquad (31)$$

Если выполняется критерий оптимальности (условие субоптимальности), то оптимальный план перевозок задачи (1) находим по формулам

$$x^0_{ij}=\varkappa_{ij}\frac{d^{\text{исх}}_{ij}}{d_{ij}}\quad\left(x^{\varepsilon}_{ij}=\varkappa_{ij}\frac{d^{\text{исх}}_{ij}}{d_{ij}}\right),\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n},$$

где $\varkappa_{ij}$, d_{ij} взяты из последней таблицы, $d^{\text{исх}}_{ij}$ — исходное значение d_{ij} в задаче (1).

Замечание. Для задач с двухсторонними ограничениями построение начального опорного коплана не представляет труда. Любая совокупность чисел u_i, $i=\overline{1, m}$; v_j, $j=\overline{1, n}$, задает двойственный план $\{u, v, w\}$, если положить $w_{ij}=0$ при $u_i+\lambda_{ij}v_j-c_{ij}\leqslant 0$; $w_{ij}=u_i+\lambda_{ij}v_j-c_{ij}$ при $u_i+\lambda_{ij}v_j-c_{ij}>0$.

15. Пример. Пусть имеется n предприятий $B_1, \ldots, B_n$, на которых производятся m изделий. Обозначим через c_{ij} себестоимость производства i-го изделия на j-м предприятии, x_{ij} — число единиц i-го изделия, которое должно производиться на j-м предприятии, d_{ij} — максимальное число единиц i-го изделия, которое может быть произведено на j-м предприятии, t_{ij} — время (часы), которое затрачивает j-е предприятие на изготовление единицы i-го изделия, a_i — количество единиц i-го изделия, которое должно быть выпущено по плану всеми предприятиями, b_j — количество часов, планируемое j-му предприятию на все виды изделия. Требуется так распределить изделия между предприятиями, чтобы: 1) объем производства по каждому изделию соответствовал плановому заданию:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i, \quad i=\overline{1, m};$$

2) время, выделенное каждому предприятию, было израсходовано:

$$\sum_{i=1}^{m} t_{ij}x_{ij}=b_j, \quad j=\overline{1, n};$$

3) объем производства i-го изделия на j-м предприятии не превышал максимально допустимого:

$$0\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij};$$

4) общая себестоимость $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$ была минимальной.

Сравнив задачу распределения изделий между предприятиями и обобщенную транспортную задачу (1), увидим, что их математические модели совпадают. (Поэтому иногда обобщенную транспортную задачу называют распределительной.) Рассмотрим задачу распределения изделий между предприятиями с исходными данными, приведенными в табл. VII.2. Очевидно, что оптимальный план данной задачи и оптимальный план задачи, рассмотренной в п. 9, совпадают. Предположим, что условия задачи несколько изменились: плановое задание по первому изделию стало 9 единиц. Чтобы лучше использовать информацию, полученную при решении старой задачи, новую задачу будем решать двойственным методом.

По табл. VII.4 составим таблицу для двойственного метода (табл. VII.6). Числа Δ_{ij}, $i=\overline{1, m}$, $j=\overline{1, n}$, являются базисным копланом новой задачи. Опорные клетки обведем жирными линиями. Критерий оптимальности не выполняется, так как $x_{22}=3$, $d_{22}=2$. Значит, $\omega^0=1$, $(i_0, j_0)=(2, 2)$. Параметр λ_{ij} клетки (i_0, j_0) обведем кружком. Найдем числа γ_i, $i=\overline{1, 3}$, и μ_j, $j=\overline{1, 4}$. Для неопорных клеток вычислим числа $\operatorname{sign}\omega^0\cdot(\gamma_i+\lambda_{ij}\mu_j)$, $(i, j)\in U_{\text{н}}$, и запишем их

Таблица VII.6

				a_i	γ_i	α_i
$4 \quad 2\diagup 0$ $0 \quad -1$	$1 \quad 4\diagup 1$ $4 \quad 2$	$6 \quad 4\diagup -\frac{2}{3}$ $0 \quad -10$	$1 \quad 6\diagup$ $5 \quad 0$	9	$\frac{4}{3}$	1
$4 \quad 4\diagup$ $3 \quad 0$	$1 \quad 2\diagup 1$ $3 \quad 0$	$2 \quad 2\diagup \frac{2}{3}$ $0 \quad -1$	$1 \quad 3\diagup$ $0 \quad 0$	6	$\frac{4}{3}$	1
$1 \quad 4\diagup$ $2 \quad 0$	$1 \quad 10\diagup$ $6 \quad 0$	$1 \quad 8\diagup$ $6 \quad 0$	$\frac{3}{2} \quad 4\diagup -\frac{5}{3}$ $0 \quad -2$	14	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
b_j: 14	13	6	5			
μ_j: $-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$			
β_j: $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1			

в нижнем треугольнике клеток $(i, j) \in U_н$. По формулам (29), (30) найдем шаг $\sigma_{i_* j_*} = \sigma_{23} = 3/2$. Клетку (i_*, j_*) также обведем кружком. Клетка (2, 2) выходит из опоры, клетка (2, 3) становится опорной.

Таблица VII.7

				a_i
$2 \quad 2\diagup$ $0 \quad -1$	$\frac{1}{2} \quad 4\diagup$ $4 \quad \frac{7}{2}$	$3 \quad 4\diagup$ $0 \quad -11$	$1 \quad 6\diagup$ 5	9
$2 \quad 4\diagup$ $\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2} \quad 2\diagup$ $2 \quad \frac{3}{2}$	$1 \quad 2\diagup$ $\frac{3}{2}$	$1 \quad 3\diagup$ 0	6
$1 \quad 2\diagup$ 2	$1 \quad 5\diagup$ $\frac{7}{2}$	$1 \quad 4\diagup$ $\frac{3}{2}$	$3 \quad 2\diagup$ $0 \quad -\frac{13}{2}$	7
b_j: 7	$\frac{13}{2}$	3	5	

Используя формулы (31), переходим к табл. VII.7, для которой выполняется критерий оптимальности. Числа $x_{11} = x_{13} = x_{24} = x_{34} = 0$, $x_{12} = 4$, $x_{14} = 5$, $x_{21} = 5/2$, $x_{22} = 2$, $x_{23} = 3/2$, $x_{31} = 2$, $x_{32} = 7/2$, $x_{33} = 3/2$ — оптимальный план новой задачи.

§ 2. Задача о потоке минимальной стоимости на обобщенной сети

1. Постановка задачи. Связь с классической задачей о потоке минимальной стоимости. Рассмотрим сеть $S=(I, U)$ с множествами узлов I и дуг U. Пусть каждому узлу $i\in I$ приписана интенсивность a_i (как и раньше, $a_i>0$ соответствует источнику, $a_i<0$ — стоку, $a_i=0$ — транзитному узлу), каждой дуге (i, j) приписана пропускная способность $d_{ij}\geqslant 0$ и число $\lambda_{ij}>0$.

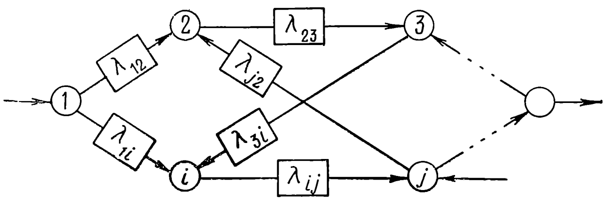


Рис. VII.1

Число $0\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij}$ назовем дуговым потоком по дуге (i, j). В конце каждой дуги $(i, j)\in U$ поместим пункт с параметром $\lambda_{ij}>0$ (рис. VII.1), в котором дуговой поток x_{ij} преобразуется в поток $\lambda_{ij}x_{ij}$, непосредственно поступающий в узел j.

Определение. Совокупность чисел

$$x=\{x_{ij},\ (i, j)\in U\}$$

называется потоком на обобщенной сети, если

$$\sum_{j\in I_i^+} x_{ij} - \sum_{j\in I_i^-} \lambda_{ji}x_{ji}=a_i,\quad i\in I; \tag{1}$$

$$0\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij},\quad (i, j)\in U, \tag{2}$$

где $I_i^+=\{j\colon (i, j)\in U\}$, $I_i^-=\{j\colon (j, i)\in U\}$.

Если на совокупности чисел $x=\{x_{ij},\ (i, j)\in U\}$ выполняются только равенства (1), то x — псевдопоток. Если x удовлетворяет только неравенствам (2), то говорят о квазипотоке.

Пусть на каждой дуге $(i, j)\in U$ задано число $c_{ij}>0$ —

стоимость единичного потока ($x_{ij}=1$) из узла i в узел j. Функцию

$$\sum_{(i,\ j)\in U} c_{ij}x_{ij} \tag{3}$$

назовем стоимостью потока.

Задача о потоке минимальной стоимости на обобщенной сети состоит в минимизации на потоках функции (3).

Поток $x^0=\{x_{ij}^0,\ (i,\ j)\in U\}$ называется оптимальным, если

$$\sum_{(i,\ j)\in U} c_{ij}x_{ij}^0 \leqslant \sum_{(i,\ j)\in U} c_{ij}x_{ij}$$

для любого потока x.

Рассмотрим любой цикл в сети S. Выберем в нем направление движения. Обозначим через R_+ произведение чисел λ_{ij} на прямых дугах цикла, через R_- — произведение чисел λ_{ij} на обратных дугах. Если все дуги цикла имеют одно направление, то считаем их прямыми и полагаем $R_-=1$.

Число $R=R_+-R_-$ называется детерминантом цикла. Цикл называется невырожденным, если его детерминант отличен от нуля.

Лемма. Для того чтобы в сети S все циклы были вырожденными, необходимо и достаточно, чтобы числа λ_{ij} были представимы в виде $\lambda_{ij}=\alpha_i/\alpha_j$, $(i,\ j)\in U$.

Необходимость. Обозначим через $(I,\ U_d)$ некоторое максимальное дерево сети S. Рассмотрим систему

$$\alpha_i-\lambda_{ij}\alpha_j=0,\ \ (i,\ j)\in U_d. \tag{4}$$

Это однородная система $(n-1)$ *) уравнений с n неизвестными. Такая система имеет нетривиальное решение. Очевидно, что если $\alpha_{i_1}>0$, то $\alpha_i>0$, $\forall i\in I$. Из (4) получаем $\lambda_{ij}=\alpha_i/\alpha_j$, $(i,\ j)\in U_d$, где $\{\alpha_i,\ i\in I\}$ — нетривиальное решение системы (4).

Рассмотрим любую дугу $(s,\ t)\in U\setminus U_d$ и покажем, что $\lambda_{st}=\alpha_s/\alpha_t$. По лемме 5 § 4 гл. I дуга $(s,\ t)$ и некоторые дуги дерева U_d образуют цикл. Обозначим через $[t,\ i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_m,\ s]$ узлы этого цикла. По предположению, цикл вырожденный, значит,

$$R_+(R_-)^{-1}=1. \tag{5}$$

*) Считаем, что $|I|=n$.

В произведение (5) параметры λ_{ij} прямых дуг входят в 1-й степени, а параметры λ_{ij} обратных дуг — в (-1)-й степени. Распишем (5) подробнее, считая дугу (s, t) прямой:

$$\frac{\alpha_t}{\alpha_{i_1}} \cdot \frac{\alpha_{i_1}}{\alpha_{i_2}} \cdot \frac{\alpha_{i_2}}{\alpha_{i_3}} \cdot \ldots \cdot \frac{\alpha_{i_{m-1}}}{\alpha_{i_m}} \cdot \frac{\alpha_{i_m}}{\alpha_s} \cdot \lambda_{st} = 1.$$

Отсюда получаем, что $\lambda_{st} = \alpha_s/\alpha_t$.

Достаточность. Пусть $\lambda_{ij} = \alpha_i/\alpha_j$, $(i, j) \in U$. Рассмотрим любой цикл сети S. Пусть $[i_1, i_2, \ldots, i_m]$ — вершины цикла. Дугу (i_1, i_2) считаем прямой. Подсчитаем для этого цикла число

$$R_+(R_-)^{-1} = \frac{\alpha_{i_1}}{\alpha_{i_2}} \cdot \frac{\alpha_{i_2}}{\alpha_{i_3}} \cdot \ldots \cdot \frac{\alpha_{i_{m-1}}}{\alpha_{i_m}} \cdot \frac{\alpha_{i_m}}{\alpha_{i_1}} = 1.$$

Значит, $R = R_+ - R_- = 0$, т. е. цикл вырожденный.

При $\lambda_{ij} \equiv 1$ задача (1)—(3) становится классической задачей о потоке минимальной стоимости [1]. Найдем критерий сводимости задачи (1)—(3) к классической задаче о потоке минимальной стоимости.

Теорема 1. Задача о потоке минимальной стоимости на обобщенной сети сводится к классической задаче о потоке минимальной стоимости тогда и только тогда, когда в сети S все циклы вырожденные.

Достаточность. Пусть в сети S все циклы вырожденные. В силу леммы 1 имеем $\lambda_{ij} = \alpha_i/\alpha_j$, $(i, j) \in U$. Тогда исходную задачу (1)—(3) можно записать в виде

$$\sum_{(i, j) \in U} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j \in I_i^+} \alpha_i x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-} \alpha_j x_{ji} = \alpha_i a_i, \quad i \in I,$$

$$0 \leqslant \alpha_i x_{ij} \leqslant \alpha_i d_{ij}, \quad (i, j) \in U.$$

Введем обозначения $y_{ij} = \alpha_i x_{ij}$, $b_i = \alpha_i a_i$, $h_{ij} = c_{ij}/\alpha_i$, $g_{ij} = \alpha_i d_{ij}$. Тогда задача (1)—(3) эквивалентна задаче

$$\sum_{(i, j) \in U} h_{ij} y_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j \in I_i^+} y_{ij} - \sum_{j \in I_i^-} y_{ij} = b_i, \quad i \in I, \qquad (6)$$

$$0 \leqslant y_{ij} \leqslant g_{ij}, \quad (i, j) \in U,$$

которая является классической задачей о потоке минимальной стоимости.

Необходимость. Пусть задача (1)—(3) сводится к классической задаче. Очевидно, вырожденность циклов при переходе от задачи (1)—(3) к (6) сохраняется. Предположим, что существует невырожденный цикл. Тогда можно построить сеть, содержащую цикл, которая при нулевых интенсивностях узлов допускает единственный нулевой поток. Но это противоречит лемме 6 § 4 гл. I. Значит, в сети не существует невырожденных циклов.

2. Каноническая форма задачи (1)—(3). Множество $U_* \subset U$ назовем квазидеревом, если оно не содержит циклов. Обозначим через $I(U_*)$ множество узлов квазидерева $I(U_*) = \{i\colon \exists j,\ (i, j) \in U_* \text{ или } (j, i) \in U_*\}$. Рассмотрим систему

$$\alpha_i - \lambda_{ij}\alpha_j = 0, \quad (i, j) \in U_*.$$

Положим $\alpha_{i_1} = 1$, $i_1 \in I(U_*)$, тогда эта система имеет решение $\alpha_i > 0$, $i \in I(U_*)$. Положим $\alpha_i = 1$, $i \in I \setminus I(U_*)$. Введем обозначения: $\bar{c}_{ij} = c_{ij}/\alpha_i$, $\bar{x}_{ij} = \alpha_i x_{ij}$, $\bar{d}_{ij} = \alpha_i d_{ij}$, $\bar{a}_i = \alpha_i a_i$, $\bar{\lambda}_{ij} = \lambda_{ij}\dfrac{\alpha_j}{\alpha_i}$, $i \in I$, $(i, j) \in U$.

Исходную задачу (1)—(3) запишем в виде

$$\sum_{(i, j) \in U} \bar{c}_{ij}\bar{x}_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j \in I_i^+} \bar{x}_{ij} - \sum_{j \in I_i} \bar{\lambda}_{ji}\bar{x}_{ji} = \bar{a}_i, \quad i \in I, \tag{7}$$

$$0 \leqslant \bar{x}_{ij} \leqslant \bar{d}_{ij}, \quad (i, j) \in U,$$

где $\bar{\lambda}_{ij} = 1$, $(i, j) \in U_*$.

Задачу (7) назовем канонической формой задачи (1)—(3), соответствующей квазидереву U_*.

3. Теорема существования потока в обобщенной сети. Обозначим через $U(A)$ множество $U(A) = \{(i, j)\colon i \in A, j \in A\}$, где $A \subset I$.

Теорема 2. Для существования потока в обобщенной сети необходимо и достаточно, чтобы для любого множества $A \subset I$ и любого квазидерева $U_* \subset U(A)$ выполнялись условия

$$\sum_{i \in A} \bar{a}_i \leqslant \sum_{\substack{i \in A, \\ j \bar{\in} A}} \bar{d}_{ij} + \sum_{\substack{(i,\, j) \in U(A), \\ \bar{\lambda}_{ij} < 1}} \bar{d}_{ij}(1 - \bar{\lambda}_{ij}); \tag{8}$$

$$\sum_{i \in A} \bar{a}_i \geqslant - \sum_{\substack{i \bar{\in} A, \\ j \in A}} \bar{\lambda}_{ij} \bar{d}_{ij} - \sum_{\substack{(i,\, j) \in U(A), \\ \bar{\lambda}_{ij} > 1}} (\bar{\lambda}_{ij} - 1) \bar{d}_{ij}, \tag{9}$$

где $\bar{a}_i$, $\bar{d}_{ij}$, $\bar{\lambda}_{ij}$ — параметры задачи, записанной в канонической форме, соответствующей квазидереву $U_* \subset U(A)$.

Необходимость. Пусть существует поток в обобщенной сети. Возьмем любое множество $A \subset I$ и любое квазидерево $U_* \subset U(A)$. Запишем задачу в канонической форме, соответствующей U_*. Имеем

$$\sum_{i \in A} \bar{a}_i = \sum_{i \in A} \Big(\sum_{j \in I} \bar{x}_{ij} - \sum_{j \in I} \bar{\lambda}_{ji} \bar{x}_{ji} \Big) =$$

$$= \sum_{\substack{i \in A, \\ j \bar{\in} A}} \bar{x}_{ij} + \sum_{(i,\, j) \in U(A)} (1 - \bar{\lambda}_{ij}) \bar{x}_{ij} - \sum_{\substack{i \bar{\in} A, \\ j \in A}} \bar{\lambda}_{ij} \bar{x}_{ij}.$$

Поскольку $0 \leqslant \bar{x}_{ij} \leqslant \bar{d}_{ij}$, то отсюда легко получить условия (8), (9).

Достаточность. Рассмотрим задачу

$$- \sum_{i \in I^-} x_{0i} - \sum_{i \in I^+} x_{i0} \to \max, \quad I^+ = \{i\colon a_i \geqslant 0\}, \; I^- = \{i\colon a_i < 0\};$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j \in I_i^+} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-} \lambda_{ji} x_{ji} + x_{i0} = a_i, \quad i \in I^+; \\ &\sum_{j \in I_i^+} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-} \lambda_{ji} x_{ji} - x_{0i} = a_i, \quad i \in I^-; \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant d_{ij}, \; (i, j) \in U; \; 0 \leqslant x_{0i}, \; i \in I^-; \; 0 \leqslant x_{i0}, \; i \in I^+.$$

В обобщенной сети существует поток в том и только в том случае, если

$$- \sum_{i \in I^-} x^0_{0i} - \sum_{i \in I^+} x^0_{i0} = 0,$$

где $\{x^0_{0i}, \; i \in I^-; \; x^0_{i0}, \; i \in I^+\}$ — решение задачи (10).

Рассмотрим двойственную задачу к задаче (10)

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i \in I} a_i u_i + \sum_{(i,\, j) \in U} d_{ij} w_{ij} \to \min, \quad u_i - \lambda_{ij} u_j + w_{ij} \geqslant 0, \\ &u_i \geqslant -1, \; i \in I^+; \; -u_j \geqslant -1, \; j \in I^-; \; 0 \leqslant w_{ij}, \; (i, j) \in U. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Пусть совокупность чисел $\{u_i^0,\ i\in I;\ w_{ij}^0,\ (i, j)\in U\}$ — решение задачи (11). Введем обозначения: $A^+=\{i\colon u_i^0>0\}$, $A^-=\{i\colon u_i^0<0\}$, $A^0=\{i\colon u_i^0=0\}$, $A^+\cup A^-\cup A^0=I$. Тогда можем записать

$$\sum_{i\in I} a_i u_i^0+\sum_{(i,j)\in U} d_{ij} w_{ij}^0=\sum_{i\in A^+} a_i u_i^0+\sum_{i\in A^-} a_i u_i^0+$$
$$+\sum_{\substack{i\in A^-,\\ j\in A^+}} d_{ij}(-u_i^0+\lambda_{ij}u_j^0)+\sum_{\substack{i\in A^-,\\ j\in A^0}} d_{ij}(-u_i^0)+\sum_{\substack{i\in A^0,\\ j\in A^+}} d_{ij}\lambda_{ij}u_j^0+$$
$$+\sum_{\substack{(i,j)\in U(A^-),\\ -u_i^0+\lambda_{ij}u_j>0}} d_{ij}(-u_i^0+\lambda_{ij}u_j^0)+\sum_{\substack{(i,j)\in U(A^+),\\ -u_i^0+\lambda_{ij}u_j^0>0}} d_{ij}(-u_i^0+\lambda_{ij}u_j^0)= \tag{12}$$
$$=\sum_{i\in A^-} a_i u_i^0-\sum_{\substack{i\in A^-,\\ j\bar{\in} A^-}} d_{ij}u_i^0-\sum_{\substack{(i,j)\in U(A^-),\\ 1-\lambda_{ij}u_j^0/u_i^0>0}} d_{ij}(1-\lambda_{ij}u_j^0/u_i^0)u_i^0+$$
$$+\sum_{j\in A^+} a_j u_j^0+\sum_{\substack{i\bar{\in} A^+,\\ j\in A^+}} d_{ij}u_i^0\lambda_{ij}u_j^0/u_i^0+$$
$$+\sum_{\substack{(i,j)\in U(A^+),\\ -1+\lambda_{ij}u_j^0/u_i^0>0}} d_{ij}(-1+\lambda_{ij}u_j^0/u_i^0)u_i^0.$$

В множестве $U(A^-)$ выделим дуги, соответствующие базисным дугам *) оптимального потока x^0 задачи (10). Эти дуги образуют квазидерево, для которого условия (8) имеют вид

$$-\sum_{i\in A^-} a_i u_i^0\leqslant-\sum_{\substack{i\in A^-,\\ j\bar{\in} A^-}} d_{ij}u_i^0-$$
$$-\sum_{\substack{(i,j)\in U(A^-),\\ \lambda_{ij}u_j^0/u_i^0<1}} d_{ij}u_i^0(1-\lambda_{ij}u_j^0/u_i^0), \tag{13}$$

где $\bar{a}_i=-a_iu_i^0$, $\bar{d}_{ij}=-d_{ij}u_i^0$, $\bar{\lambda}_{ij}=\lambda_{ij}u_j^0/u_i^0$. В множестве $U(A^+)$ выделим дуги, соответствующие базисным дугам оптимального потока x^0 задачи (10). Эти дуги образуют квазидерево. Запишем для него условия (9)

$$\sum_{j\in A^+} a_j u_j^0\geqslant-\sum_{\substack{i\bar{\in} A^+,\\ j\in A^+}} d_{ij}u_i^0\lambda_{ij}u_j^0/u_i^0-$$
$$-\sum_{\substack{(i,j)\in U(A^+),\\ \lambda_{ij}u_j^0/u_i^0>1}} (-1+\lambda_{ij}u_j^0/u_i^0)d_{ij}u_i^0. \tag{14}$$

---

*) Предполагается, что задача (10) решается симплекс-методом.

Из (12), (13), (14) и теоремы двойственности получаем

$$-\sum_{i\in I^-} x_{0i}^0 - \sum_{i\in I^+} x_{i0}^0 = \sum_{i\in I} a_i u_i^0 + \sum_{(i,\,j)\in U} d_{ij} w_{ij} \geqslant 0,$$

но, с другой стороны,

$$-\sum_{i\in I^-} x_{0i}^0 - \sum_{i\in I^+} x_{i0}^0 \leqslant 0,$$

следовательно,

$$-\sum_{i\in I^-} x_{0i}^0 - \sum_{i\in I^+} x_{i0}^0 = 0.$$

Отсюда заключаем, что в обобщенной сети существует поток.

Следствие 1. Для существования плана перевозок в задаче (1) § 1 необходимо и достаточно, чтобы для любых $I_*\subset I$, $J_*\subset J$ и $U_*(I_*, J_*)$ выполнялись условия

$$\sum_{i\in I_*} \bar{a}_i - \sum_{j\in J_*} \bar{b}_j \leqslant \sum_{\substack{i\in I_*,\\ j\bar{\in} J_*}} \bar{d}_{ij} + \sum_{\substack{i\in I_*,\, j\in J_*,\\ \bar{\lambda}_{ij}<1}} (1-\bar{\lambda}_{ij})\bar{d}_{ij}; \tag{15}$$

$$\sum_{i\in I_*} \bar{a}_i - \sum_{j\in J_*} \bar{b}_j \geqslant -\sum_{\substack{i\bar{\in} I_*,\\ j\in J_*}} \bar{d}_{ij} - \sum_{\substack{i\in I_*,\, j\in J_*,\\ \bar{\lambda}_{ij}>1}} (\bar{\lambda}_{ij}-1)\bar{d}_{ij}, \tag{16}$$

где $\bar{a}_i$, $\bar{b}_j$, $\bar{d}_{ij}$, $\bar{\lambda}_{ij}$ — параметры задачи (1) § 1, записанной в канонической форме относительно множества $U_*(I_*, J_*)$. (Напомним, что $U_*(I_*, J_*)$ — множество, не содержащее циклов, и $U_*(I_*, J_*)\subset\{(i, j): i\in I_*, j\in J_*\}$.)

Доказательство. Записав задачу (1) § 1 в сетевой форме и применив к ней теорему 2, получим условия (15) и (16).

Следствие 2. Для существования потока в классической транспортной сети (см. § 4 гл. I) необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{i\in I} a_i = 0 \tag{17}$$

и для любого множества $A\subset I$ выполнялось условие

$$\sum_{i\in A} a_i \leqslant \sum_{i\in A,\, j\bar{\in} A} d_{ij}. \tag{18}$$

Доказательство. При

$$\lambda_{ij} \equiv 1, \quad (i, j)\in U, \tag{19}$$

из задачи (1)—(3) получаем классическую транспортную задачу. Очевидно, что при условии (19) каноническая форма относительно любого множества U_* совпадает с исходной формой задачи. Условия (8), (9) принимают вид

$$\sum_{i\in A} a_i \leqslant \sum_{i\in A,\ j\overline{\in} A} d_{ij}; \tag{20}$$

$$\sum_{i\in A} a_i \geqslant - \sum_{i\overline{\in} A,\ j\in A} d_{ij} \tag{21}$$

для $\forall A \subset I$.

Покажем, что условия (20), (21) эквивалентны условиям (17), (18). Для этого достаточно показать, что из (20), (21) следует (17) и из (17), (18) следует (21).

При $A=I$ из (20) и (21) получаем

$$\sum_{i\in I} a_i \leqslant 0, \quad \sum_{i\in I} a_i \geqslant 0.$$

Значит, на самом деле имеет место (17).

Пусть выполняются условия (17), (18). Тогда

$$0 = \sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in A} a_i + \sum_{i\in \bar{A}} a_i \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i\in A} a_i + \sum_{\substack{i\in \bar{A},\\ j\overline{\in} \bar{A}}} d_{ij} = \sum_{i\in A} a_i + \sum_{\substack{i\overline{\in} A,\\ j\in A}} d_{ij},$$

где $\bar{A} = I \setminus A$. Сравнив правую и левую части полученного выражения, получим условие (21). Следствие доказано.

Следствие 3. Для существования плана перевозок в задаче (1) § 1 гл. I необходимо и достаточно, чтобы $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ и для любых $I_* \subset I$ и $J_* \subset J$ выполнялось условие

$$\sum_{i\in I_*} a_i - \sum_{j\in J_*} b_j \leqslant \sum_{\substack{i\in I_*,\\ j\overline{\in} J_*}} d_{ij}.$$

4. Опора обобщенной сети. Критерий опорности. В дальнейшем предполагается, что исходная сеть S связная, $|I| < |U|$ и в сети S существует хотя бы один невырожденный цикл.

Определение. Максимальная (по количеству дуг) частичная сеть $S_{\text{оп}}=(I, U_{\text{оп}})$, $U_{\text{оп}}\subset U$, называется опорой сети S, если система

$$\sum_{j\in I^+_{\text{оп}_i}} x_{ij} - \sum_{j\in I^-_{\text{оп}_i}} \lambda_{ji}x_{ji}=0, \quad i\in I, \tag{22}$$

где $I^+_{\text{оп}_i}=\{j\,|\,(i, j)\in U_{\text{оп}}\}$, $I^-_{\text{оп}_i}=\{j\,|\,(j, i)\in U_{\text{оп}}\}$, имеет только тривиальное решение.

Дуги $(i, j)\in U_{\text{оп}}$ называются опорными, остальные дуги $(i, j)\in U\setminus U_{\text{оп}}=U_{\text{н}}$ — неопорными.

Теорема 3. Частичная сеть $S_{\text{оп}}$ является опорой сети S тогда и только тогда, когда 1) в каждой компоненте связности сети $S_{\text{оп}}$ существует единственный цикл, 2) каждый цикл сети $S_{\text{оп}}$ невырожденный.

Достаточность. Пусть условия 1), 2) теоремы выполняются. Покажем, что множество $S_{\text{оп}}$ является опорой. Доказательство от противного. Пусть существует нетривиальное решение системы (22). Рассмотрим множество $\tilde{U}\subset U$, $\tilde{U}=\{(i, j)\,|\,x_{ij}\neq 0\}$. В силу системы (22) множество $\tilde{U}$ не имеет висячих дуг и, поскольку условие 1) выполнено, то каждая его компонента связности является циклом. Можно показать, что каждый цикл множества $\tilde{U}$ вырожденный. Это противоречит условию 2) (схема доказательства аналогична доказательству, приведенному в п. 4, § 1).

Предположим, что $S_{\text{оп}}$ немаксимальная сеть, т. е. существует сеть $\bar{S}=(I, \bar{U})$, $|\bar{U}|>|U_{\text{оп}}|$, для которой система (22) имеет только тривиальное решение. Из 1) следует, что $|U_{\text{оп}}|=n$. Тогда $|\bar{U}|>n$ и система (22), соответствующая $\bar{S}$, имеет нетривиальное решение как однородная система линейных уравнений, в которой число неизвестных больше числа уравнений. Значит, $S_{\text{оп}}$ — максимальная частичная сеть. По определению, $S_{\text{оп}}$ — опора.

Необходимость. Пусть $S_{\text{оп}}$ — опора и $S^k_{\text{оп}}=(I_k, U^k_{\text{оп}})$, $k=\overline{1, N}$, компоненты связности опоры. Если в опоре $S_{\text{оп}}$ есть компоненты связности, где более одного цикла, то подсистема системы (22), соответствующая этой компоненте связности, имеет нетривиальное решение, так как в ней число неизвестных больше числа уравнений. В каждой компоненте связности опоры не более одного цикла, следовательно, $|U^k_{\text{оп}}|\leqslant|I_k|$. Если есть компонента связности, в которой нет цикла, то $|U^k_{\text{оп}}|<|I_k|$, значит, и $|U_{\text{оп}}| = \sum_{k=1}^{N} |U^k_{\text{оп}}| < \sum_{k=1}^{N} |I_k| = n$. Легко построить сеть $S^* = (I, U^*)$, $|U^*| = n$, удовлетворяющую достаточным условиям опорности. Следовательно, сеть $S_{\text{оп}}$ не является максимальной, что противоречит определению опоры, и в каждой компоненте связности $S^k_{\text{оп}}$ есть ровно по одному циклу.

Предположим, что в опоре $S_{\text{оп}}$ есть компонента связности $S^k_{\text{оп}}$, где цикл вырожденный. По лемме $\lambda_{ij} = \alpha_i/\alpha_j$, $(i, j) \in U^k_{\text{оп}}$. Обозначим через $y_{ij} = \alpha_i x_{ij}$, $(i, j) \in U^k_{\text{оп}}$. Тогда систему (22) для $S^k_{\text{оп}}$ можно записать в виде

$$\sum_{j \in I_k} y_{ij} - \sum_{j \in I_k} y_{ji} = 0, \quad i \in I_k. \tag{23}$$

Сеть $S^k_{\text{оп}}$ содержит цикл, по лемме 6 § 4 гл. I система (23) имеет нетривиальное решение. Значит, и система (22) имеет нетривиальное решение. Полученное противоречие доказывает условие 2).

С л е д с т в и е. Система

$$\alpha_i - \lambda_{ij}\alpha_j = 0, \quad (i, j) \in U_{\text{оп}},$$

имеет только тривиальное решение.

5. Опорный поток. Потенциалы узлов, оценки дуг. Приращение стоимости потока.

О п р е д е л е н и е. Пару $\{x, S_{\text{оп}}\}$ из потока и опоры сети назовем опорным потоком, поток вдоль опорной дуги — опорным дуговым потоком, остальные дуговые потоки сети — неопорными.

Опорный поток $\{x, S_{\text{оп}}\}$ называется невырожденным, если $0 < x_{ij} < d_{ij}$, $(i, j) \in U_{\text{оп}}$.

По опоре $S_{\text{оп}}$ построим (опорные) потенциалы u_i, $i \in I$,— числа, удовлетворяющие системе

$$u_i - \lambda_{ij} u_j - c_{ij} = 0, \quad (i, j) \in U_{\text{оп}}. \tag{24}$$

Из следствия теоремы 3 видно, что опорные потенциалы из системы (24) находятся однозначно.

Имея потенциалы узлов, найдем оценки неопорных дуг сети

$$\Delta_{ij} = u_i - \lambda_{ij} u_j - c_{ij}, \quad (i, j) \in U_{\text{н}} = U \setminus U_{\text{оп}}. \tag{25}$$

Пусть $\tilde{x}$ — второй поток на сети, $\Delta x = \tilde{x} - x$ — приращение потока x. Из (1) следует

$$\sum_{j \in I_i^+} \Delta x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-} \lambda_{ji} \Delta x_{ji} = 0, \quad i \in I.$$

Умножим обе части равенств (24), (25) на Δx_{ij} и просуммируем по $(i, j) \in U$:

$$\sum_{(i,j) \in U} c_{ij} \Delta x_{ij} = -\sum_{(i,j) \in U_{\text{н}}} \Delta x_{ij} \Delta_{ij} + \sum_{(i,j) \in U} (u_i - \lambda_{ij} u_j) \Delta x_{ij}.$$

Поскольку

$$\sum_{(i,j) \in U} (u_i - \lambda_{ij} u_j) \Delta x_{ij} = \sum_{i \in I} u_i \Big(\sum_{j \in I_i^+} \Delta x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-} \lambda_{ji} \Delta x_{ji} \Big) = 0,$$

то получим следующую формулу приращения стоимости потока:

$$\sum_{(i,j) \in U} c_{ij} \Delta x_{ij} = -\sum_{(i,j) \in U_{\text{н}}} \Delta x_{ij} \Delta_{ij}. \tag{26}$$

6. Критерий оптимальности. Достаточные условия субоптимальности. Пусть для опорного потока $\{x, S_{\text{оп}}\}$ выполняются соотношения

$$\begin{gathered} \Delta_{ij} \leqslant 0 \text{ при } x_{ij} = 0; \ \Delta_{ij} \geqslant 0 \text{ при } x_{ij} = d_{ij}; \\ \Delta_{ij} = 0 \text{ при } 0 < x_{ij} < d_{ij}, \ (i, j) \in U_{\text{н}}. \end{gathered} \tag{27}$$

Поскольку $\Delta x_{ij} \geqslant 0$ при $x_{ij} = 0$, $\Delta x_{ij} \leqslant 0$ при $x_{ij} = d_{ij}$, то из (26) следует $\sum\limits_{(i,j) \in U} c_{ij} \Delta x_{ij} \geqslant 0$, т. е. x — оптимальный поток.

Пусть $\{x^0, S_{\text{оп}}\}$ — оптимальный невырожденный опорный поток. Тогда существует решение u^0, w^0 двойственной задачи

$$\begin{gathered} \sum_{i \in I} d_i u_i - \sum_{(i,j) \in U} d_{ij} w_{ij} \to \max, \\ u_i - \lambda_{ij} u_j - w_{ij} \leqslant c_{ij}, \ (i, j) \in U, \ 0 \leqslant w_{ij}, \ (i, j) \in U. \end{gathered} \tag{28}$$

Из условий дополняющей нежесткости

$$\begin{gathered} x_{ij}^0 (u_i^0 - \lambda_{ij} u_j^0 - w_{ij}^0 - c_{ij}) = 0; \\ w_{ij}^0 (x_{ij}^0 - d_{ij}) = 0, \ (i, j) \in U, \end{gathered}$$

и невырожденности оптимального опорного потока следуют условия (24). Если дополнительно учесть ограничения задачи (28), то убедимся в справедливости соотношений (27). Таким образом, доказана

Теорема 4. Соотношения (27) достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности опорного потока $\{x, S_{\text{оп}}\}$.

Из формулы приращения (26) видно, что при $\Delta_{ij}<0$ уменьшение потока по дуге (i, j) ведет к уменьшению стоимости потока. Максимально возможное уменьшение дугового потока равно x_{ij}. При $\Delta_{ij}>0$ к уменьшению стоимости потока ведет увеличение потока по дуге (i, j), при этом максимально допустимое увеличение потока равно $d_{ij}-x_{ij}$.

Таким образом,

$$\sum_{(i,\,j)\in U} c_{ij}\Delta x_{ij} \geqslant \sum_{\substack{\Delta_{ij}<0,\\ (i,\,j)\in U_{\text{н}}}} \Delta_{ij}x_{ij} - \sum_{\substack{\Delta_{ij}>0,\\ (i,\,j)\in U_{\text{н}}}} \Delta_{ij}(d_{ij}-x_{ij}).$$

Если в качестве $\tilde{x}$ взять оптимальный поток x^0, то получим, что стоимость потока $\{x, S_{\text{оп}}\}$ превышает стоимость оптимального потока не более чем на

$$-\sum_{\Delta_{ij}<0} \Delta_{ij}x_{ij} + \sum_{\Delta_{ij}>0} \Delta_{ij}(d_{ij}-x_{ij}). \qquad (29)$$

Поток x называется ε-оптимальным, если

$$\sum_{(i,\,j)\in U} c_{ij}x_{ij} - \sum_{(i,\,j)\in U} c_{ij}x^0_{ij} \leqslant \varepsilon.$$

Достаточное условие субоптимальности. Если на опорном потоке $\{x, S_{\text{оп}}\}$ число (29) равно ε, то x — ε-оптимальный поток.

7. Улучшение потока. Пусть задан опорный невырожденный поток $\{x, S_{\text{оп}}\}$. Опорные дуги, образующие цикл, назовем циклическими опорными дугами. Узел j называется *циклическим*, если существует ребро (i, j), которому соответствует циклическая опорная дуга.

В каждой компоненте связности $S^k_{\text{оп}}$, $k=\overline{1, N}$, опоры выделим по одной циклической дуге (s_k, t_k), $k=\overline{1, N}$. Множество $U_{\text{оп}*}=U_{\text{оп}} \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{N} (s_k, t_k)$ является квазидеревом.

Для удобства вычислений считаем, что задача (1)—(3) записана в канонической форме, соответствующей $U_{\text{оп}*}$.

Найдем потенциалы u_i, $i \in I$:

$$u_{t_k} = \Big(\sum_{\substack{(i,\ j) \text{ — прямая} \\ \text{циклическая} \\ \text{дуга из } U^k_{\text{оп}}}} c_{ij} - \sum_{\substack{(i,\ j) \text{ — обратная} \\ \text{циклическая} \\ \text{дуга из } U^k_{\text{оп}}}} c_{ij} \Big) / (1 - \lambda_{s_k t_k}), \quad (30)$$

дугу (s_k, t_k), $k = \overline{1, N}$, считаем прямой; остальные потенциалы находятся, как и в классическом методе потенциалов, из условий $u_i - u_j = c_{ij}$, $(i, j) \in U_{\text{оп}*}$.

По известным потенциалам находим оценки неопорных дуг и проверяем критерий оптимальности. Пусть критерий оптимальности не выполняется. Из формулы приращения (26) следует, что в этом случае поток можно улучшить. Число Δ_{ij} в формуле (26) можно интерпретировать как скорость изменения стоимости потока при изменении на единицу потока по неопорной дуге (i, j). Пусть $\Delta_{i_0 j_0}$ — наибольшая по модулю оценка неопорной дуги, неудовлетворяющей соотношениям (27), и $i_0 \in I_k$, $j_0 \in I_p$. Рассмотрим сеть

$$\tilde{S} = \begin{cases} (I_k,\ U^k_{\text{оп}} \cup (i_0, j_0)), & \text{если } k = p; \\ (I_k \cup I_p,\ U^k_{\text{оп}} \cup U^p_{\text{оп}} \cup (i_0, j_0)), & \text{если } k \neq p. \end{cases}$$

В сети $\tilde{S}$ вычеркнем все висячие дуги. Полученную сеть обозначим через $\bar{S} = (\bar{I}, \bar{U})$.

В сети $\bar{S}$ найдем псевдопоток $Y = \{y_{ij},\ (i, j) \in \bar{U}\}$ — совокупность чисел, удовлетворяющую однородным условиям баланса

$$\sum_{j \in \bar{I}} y_{ij} - \sum_{j \in \bar{I}} \lambda_{ji} y_{ji} = 0, \quad i \in \bar{I}, \quad (31)$$

следующим образом:

1) дуге (i_0, j_0) припишем псевдопоток $y_{i_0 j_0} = -1$;

2) псевдопотоки на нециклических опорных дугах легко найти из условий баланса (31);

3) пусть найдены псевдопотоки на всех нециклических опорных дугах. Обозначим через $U^k_{\text{цикл}}$ циклические опорные дуги k-й компоненты связности. Существует не более двух дуг (i_1, j_1), (i_2, j_2), у каждой из которых хотя бы

по одному циклическому узлу и для которых псевдопотоки $y_{i_1j_1}$, $y_{i_2j_2}$ уже известны ; положим

$$y_{s_kt_k}=\frac{b_1y_{i_1j_1}+b_2y_{i_2j_2}}{1-\lambda_{s_kt_k}}, \tag{32}$$

где

$$b_m=\begin{cases} -1, & \text{если в дуге } (i_m, j_m) \text{ узел } i_m \text{ циклический;} \\ \lambda_{i_mj_m}, & \text{если в дуге } (i_m, j_m) \text{ узел } j_m \text{ циклический;} \\ & m=\overline{1, 2}. \end{cases}$$

Потоки на остальных циклических дугах, принадлежащих $U^k_{\text{цикл}}$, легко найти из условий (31). Если $k\neq p$, то аналогично находим псевдопотоки для циклических опорных дуг $U^p_{\text{цикл}}$.

Рассмотрим случаи: а) $\Delta_{i_0j_0}>0$, б) $\Delta_{i_0j_0}<0$.

В случае а) найдем число Θ из условий

$$-\Theta=\min\left\{\frac{x_{ij}}{y_{ij}},\ y_{ij}>0,\ (i, j)\in\bar{U};\right.$$
$$\left.\frac{-d_{ij}+x_{ij}}{y_{ij}},\ y_{ij}<0,\ (i, j)\in\bar{U}\right\}.$$

В случае б) найдем число Θ из условий

$$\Theta=\min\left\{-\frac{x_{ij}}{y_{ij}},\ y_{ij}<0,\ (i, j)\in\bar{U};\right.$$
$$\left.\frac{d_{ij}-x_{ij}}{y_{ij}},\ y_{ij}>0,\ (i, j)\in\bar{U}\right\}.$$

Пусть минимум достигается на дуге (i_*, j_*).

Если $(i_*, j_*)=(i_0, j_0)$, то при переходе к новому опорному потоку меняется только поток. Новый поток находим по формулам

$$\bar{x}_{ij}=x_{ij}+\Theta y_{ij},\ (i, j)\in\bar{U};$$
$$\bar{x}_{ij}=x_{ij},\ (i, j)\in U\setminus\bar{U}.$$

Опора $S_{\text{оп}}$ и множество $U_{\text{оп}*}$ остаются прежними.

Если $(i_*, j_*)\neq(i_0, j_0)$, то опорная дуга (i_*, j_*) выходит из опоры, неопорная дуга (i_0, j_0) становится опорной. Получим новую опору. В каждой компоненте связности новой опоры выделим по одной циклической дуге (s_k, t_k),

$k=\overline{1,N}$, и образуем новое множество $(U_{\text{оп}*})_{\text{нов}}=$ $=(U_{\text{оп}})_{\text{нов}}\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{N}(s_k,\ t_k)$ (если цикл в новой опоре совпадает с циклом в старой опоре, то выбираем ту дугу $(s,\ t)$, которая была выделена в старой опоре).

Полагаем $\alpha_{s_k}=1$, $k=\overline{1,N}$. Остальные числа α_i, $i\in I$, находим из условий

$$\alpha_i-\lambda_{ij}\alpha_j=0,\ (i,\ j)\in(U_{\text{оп}*})_{\text{нов}}.$$

Найдем параметры новой сети:

$$\bar{x}_{ij}=\alpha_i(x_{ij}+\Theta y_{ij}),\ (i,\ j)\in\bar{U};\ \bar{x}_{ij}=\alpha_i x_{ij},\ (i,\ j)\in U\setminus\bar{U};$$
$$\bar{\lambda}_{ij}=\lambda_{ij}\frac{\alpha_j}{\alpha_i};\ \bar{c}_{ij}=\frac{c_{ij}}{\alpha_i};\ \bar{d}_{ij}=\alpha_i d_{ij},\ (i,\ j)\in U. \tag{33}$$

Предположим, что после некоторой итерации выполняется критерий оптимальности (достаточные условия субоптимальности). Найдем оптимальный (субоптимальный) поток задачи (1)—(3)

$$x_{ij}^0=\frac{x_{ij}d_{ij}^{\text{исх}}}{d_{ij}}\quad\left(x_{ij}^{\varepsilon}=\frac{x_{ij}d_{ij}^{\text{исх}}}{d_{ij}}\right),\ (i,\ j)\in U, \tag{34}$$

где x_{ij}, d_{ij} — параметры последней сети, $d_{ij}^{\text{исх}}$ — исходное значение d_{ij} в задаче (1)—(3).

8. Пример. Прежде чем перейти к решению примера, условимся о расположении параметров задачи на сети. Пусть задана некоторая сеть. На дугах в квадратиках указываем только отличные от единицы коэффициенты λ_{ij}. Над дугой $(i,\ j)$ помещаем значения двух параметров: d_{ij} и c_{ij}. Под дугой первое число выражает дуговой поток x_{ij}, второе — оценку Δ_{ij}, если $(i,\ j)$ — неопорная дуга, и величину y_{ij}, если $(i,\ j)$ — опорная дуга. Первое число при вершине i будет означать потенциал u_i, второе число — α_i. Опорные дуги выделяем жирными линиями.

Пусть имеется сеть с параметрами, приведенными на рис. VII.2. Кроме параметров задачи задан начальный опорный поток. Для этой сети опора состоит из одной компоненты связности. Дуги (6, 2), (6, 5), (2, 5) образуют единственный опорный цикл, индекс которого равен $1/2\cdot1-1=-1/2\neq0$. Значит, совокупность дуг (1, 6), (6, 2), (2, 5), (6, 5), (2, 3), (3, 4) удовлетворяет критерию опорности.

Если в качестве опорной циклической дуги (s,t) взять дугу $(2,5)$, то можно считать, что исходная задача записана в канонической форме относительно множества $U_{\text{оп}*}=U_{\text{оп}}\setminus(2,\ 5)$ (так как $\lambda_{ij}=1$, $(i,\ j)\in U_{\text{оп}*}$).

Найдем потенциалы: вначале по формуле (30) находим

$$u_t = u_5 = \frac{2+5-2}{1-1/2} = 10$$

(напомним, что в опорном цикле дугу $(s, t) = (2, 5)$ считаем прямой), остальные потенциалы находим, как в классическом методе потенциалов, рассматривая только дуги множества $U_{оп*}$. Найдем оценки неопорных дуг и проверим критерий оптимальности.

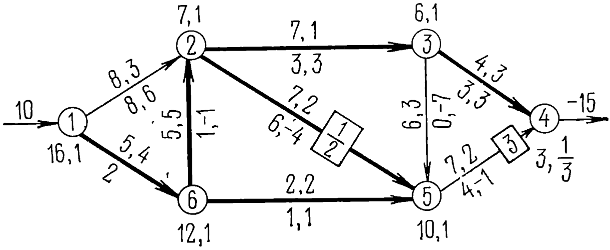


Рис. VII.2

Критерий оптимальности не выполняется, поскольку для дуги (5, 4) $x_{54}=4$, а $\Delta_{54}=-1$. В качестве дуги (i_0, j_0) возьмем дугу (5, 4). Опорные дуги (6, 2), (6, 5), (2, 5), (2, 3), (3, 4) и неопорная дуга (5, 4) образуют множество $\bar{U}$.

Для дуг этого множества найдем числа y_{ij}. Полагаем $y_{54}=-1$. Из условий баланса (31) находим $y_{34}=3$, $y_{23}=3$. Осталось определить числа y_{ij} для опорных циклических дуг. По формуле (32) получаем

$$y_{25} = \frac{-y_{54}-y_{23}}{1-\lambda_{25}} = \frac{1-3}{1-1/2} = -4;$$

$y_{62}=-1$, $y_{65}=1$ легко находятся из условий баланса (31). На сети (см. рис. VII.2) реализуется случай б): $\Delta_{i_0j_0}=\Delta_{54}=-1<0$. Максимальный шаг Θ находим из условий

$$\Theta = \min\left\{-\frac{x_{ij}}{y_{ij}},\ y_{ij}<0,\ \frac{d_{ij}-x_{ij}}{y_{ij}},\ y_{ij}>0,\ (i, j)\in\bar{U}\right\} =$$

$$= \frac{d_{34}-x_{34}}{y_{34}} = 1/3.$$

Значит, опорная дуга $(i_*, j_*) = (3, 4)$ выходит из опоры, дуга $(i_0, j_0) = (5, 4)$ становится опорной. Для того чтобы перейти к новой сети, необходимо определить числа α_i, $i=\overline{1, 6}$, которые позволят записать задачу в канонической форме относительно нового множества $(U_{оп*})_{нов}$.

На данной итерации цикл старой опоры совпадает с циклом новой опоры, поэтому для уменьшения вычислений удобнее в качестве дуги $(s, t)_{нов}$ взять старую дугу $(s, t) = (2, 5)$ (могли взять любую другую циклическую опорную дугу, но тогда больше чисел α_i было бы отлично от 1, что усложнило бы вычисления при переходе к новой сети). Следовательно, $(U_{оп*})_{нов} = (1, 6), (6, 2), (2, 3), (6, 5), (5, 4)$. Полагаем $\alpha_s = \alpha_2 = 1$. Остальные α_i, $i = \overline{1, 6}$, найдем из условий

$$\alpha_i - \lambda_{ij}\alpha_j = 0, \quad (i, j) \in (U_{оп*})_{нов}.$$

Получим, что только одно $\alpha_4 = 1/3 \neq 1$, остальные $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_5 = \lambda_6 = 1$.

Использовав формулы (33), запишем задачу в канонической форме относительно множества $(U_{оп*})_{нов}$ (рис. VII.3). Поскольку опорные циклы на рис. VII.2 и на рис. VII.3 полностью совпадают,

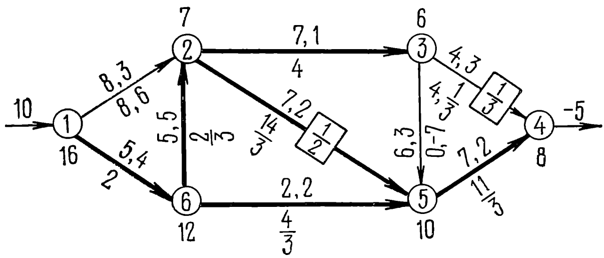


Рис. VII.3

то совпадают и потенциалы циклических узлов 2, 5, 6. Найти потенциалы остальных узлов не составляет труда. Подсчитав оценки неопорных дуг, убедимся в том, что критерий оптимальности выполняется. По формулам (34) легко проверить, что поток на рис. VII.3 является оптимальным потоком исходной сети (см. рис. VII.2).

9. Построение начального опорного плана. При решении практических задач могут встретиться три возможности: а) перед решением задачи (1)—(3) известны лишь параметры a_i, d_{ij}, λ_{ij}, c_{ij}, но нет сведений о потоке; б) наряду с параметрами известен поток, составленный по рекомендациям специалистов; в) кроме параметров имеются числа x_{ij}, которые, по мнению специалистов, являются оптимальными дуговыми потоками, но в действительности в совокупности составляют лишь квазипоток.

Для случая а), используя схему п. 8 § 4 гл. I, можно построить аналоги методов северо-западного угла и минимального элемента. Отличие этих методов для обобщенной задачи будет состоять в том, что после введения искусственных дуг (i, s) или (s, i), $i \in I$, обеспечивающих баланс в узлах $i \in I$, надо ввести еще одну искусственную дугу (s, i_1), i_1 — любой узел, принадлежащий I, с параметрами $c_{si_1} = 0$, $\lambda_{si_1} = 0$, ограничений на дуговой поток

x_{si_1} нет. Эта дополнительная дуга обеспечивает баланс в искусственном узле s. Полученную расширенную задачу решаем методом, использованным для решения обобщенной транспортной задачи.

б) Пусть начальный поток известен. Для применения прямого опорного метода нужно построить начальную опору. В качестве опоры можно взять любое множество дуг, удовлетворяющее критерию опорности. Общее правило состоит в следующем: вводим фиктивный узел ф и фиктивные дуги $(i, ф)$ для каждого $i \in I$ с параметрами $a_ф=0$, $c_{iф}=0$, $d_{iф}=0$, $\lambda_{iф}=1$ и дугу $(ф, i_1)$, где $i_1 \in I$, с параметрами $c_{фi_1}=0$, $d_{фi_1}=0$, $\lambda_{фi_1}=0$. В расширенной сети начальный поток известен. В качестве начальной опоры можно взять частичную сеть, состоящую из фиктивных дуг. С помощью прямого опорного метода исключаем из опоры фиктивные дуги.

в) Для начального квазипотока $\{x_{ij}, (i, j) \in U\}$ вычисляем числа

$$\alpha_i = a_i - \sum_{j \in I_i^+} x_{ij} + \sum_{j \in I_i^-} \lambda_{ji} x_{ji}, \quad i \in I.$$

Строим вспомогательную задачу следующим образом. Если $\alpha_i \geqslant 0$, то вводится искусственная дуга (i, s), $c_{is}=1$, $\lambda_{is}=1$, $d_{is}=\infty$, $x_{is}=\alpha_i$. Если $\alpha_i<0$, то вводится искусственная дуга (s, i), $c_{si}=1$, $\lambda_{si}=1$, $d_{si}=\infty$, $x_{si}=-\alpha_i$. Вводим еще одну искусственную дугу (s, i_1), $i_1 \in I$, $c_{si_1}=0$, $\lambda_{si_1}=0$. Ограничений на дуговой поток x_{si_1} нет, $x_{si_1}=\sum_{i \in I} \alpha_i$. Полагаем $c_{ij}=0$, $(i, j) \in U$. Для вспомогательной задачи имеем начальный поток. В качестве начальной опоры можно взять частичную сеть, состоящую из искусственных дуг. На построенной сети решаем обобщенную задачу о потоке минимальной стоимости прямым опорным методом.

Предположим, что вспомогательная задача решена. Возможны три ситуации: 1) не все искусственные дуговые потоки равны нулю. В этом случае в исходной задаче (1)—(3) не существует потока; 2) все искусственные дуговые потоки равны нулю и $u_i=0$, $i \in I$ (т. е. в опоре только одна искусственная дуга (s, i_1)). В этом случае построен начальный опорный поток; 3) все искусственные дуговые потоки равны нулю, но есть $u_i \neq 0$; ищем

$$\Delta_{i_0 j_0} = \max_{(i, j) \in U} |u_i - \lambda_{ij} u_j|.$$

Если $\Delta_{i_0j_0} \neq 0$, то от дуги (i_0, j_0) строим цепочку по опорным дугам до искусственного узла s. Искусственная дуга, вошедшая в эту цепочку, выходит из опоры, дуга (i_0, j_0) становится опорной. По новой опоре пересчитываем потенциалы. Если $u_i = 0$, $i \in I$, то начальный опорный поток построен; если нет, то повторяем операции пункта 3). За конечное число шагов либо придем к условию 2), либо получим, что $\Delta_{i_0j_0} = 0$ и существует $u_i \neq 0$. В последнем случае исходная задача (1)—(3) сводится к классической транспортной задаче. Действительно, если $\Delta_{i_0j_0} = 0$, то

$$u_i - \lambda_{ij} u_j = 0, \quad (i, j) \in U. \tag{35}$$

Если существует $u_i \neq 0$, то в силу (35) $u_i \neq 0$, $\forall i \in I$. Тогда из (35) получим $\lambda_{ij} = u_i / u_j$, $(i, j) \in U$.

Из леммы 1 следует, что задачу (1)—(3) можно свести к классической задаче о потоке минимальной стоимости.

10. Двойственный метод. Постановка задачи. Наряду с задачей (1)—(3) рассмотрим двойственную ей задачу

$$\begin{gathered}\sum_{i \in I} a_i u_i - \sum_{(i,\, j) \in U} d_{ij} w_{ij} \to \max, \\ u_i - \lambda_{ij} u_j - w_{ij} \leqslant c_{ij}, \ w_{ij} \geqslant 0, \ i, j \in I, \ (i, j) \in U.\end{gathered} \tag{36}$$

Двойственным планом задачи (1)—(3) назовем совокупность чисел $\{u_i,\ i \in I;\ w_{ij},\ (i, j) \in U\}$, удовлетворяющих ограничениям задачи (36). Каждому двойственному плану поставим в соответствие копоток задачи (1) $\delta = \{\delta_{ij},\ (i, j) \in U\}$, $\delta_{ij} = u_i - \lambda_{ij} u_j - c_{ij}$, и будем считать, что компонента w двойственного плана удовлетворяет соотношениям

$$w_{ij} = 0, \text{ если } \delta_{ij} \leqslant 0; \quad w_{ij} = \delta_{ij}, \text{ если } \delta_{ij} > 0, \tag{37}$$

ибо при их нарушении можно, уменьшая соответствующие компоненты w_{ij}, добиться увеличения двойственной целевой функции.

Предположим, что к началу решения известен копоток (или, что то же самое, двойственный план задачи). Требуется так организовать процедуру преобразования копотоков, чтобы через конечное число итераций прийти к оптимальному или субоптимальному потоку.

Определение. Пара $\{\delta, S_{\text{оп}}\}$ из копотока и опоры сети называется опорным копотоком.

Компоненты копотока δ_{ij} по опорным дугам $(i, j) \in U_{\text{оп}}$ называются опорными дуговыми копотоками, остальные компоненты δ_{ij}, $(i, j) \in U_{\text{н}}$,— неопорными.

Опорный копоток $\{\delta, S_{\text{оп}}\}$ называется невырожденным, если его неопорные дуговые копотоки равны нулю.

11. Псевдопоток. Приращение двойственной целевой функции. Пусть $\{\delta, S_{\text{оп}}\}$ — некоторый опорный копоток. Построим по нему псевдопоток $\varkappa = \{\varkappa_{ij}, (i, j) \in U\}$. Неопорные псевдопотоки положим равными

$$\varkappa_{ij} = 0, \text{ если } \delta_{ij} \leqslant 0; \ \varkappa_{ij} = d_{ij}, \text{ если } \delta_{ij} > 0, \ (i, j) \in U_{\text{н}}. \tag{38}$$

Как и раньше, предполагаем, что задача (1)—(3) записана в канонической форме, соответствующей $U_{\text{оп}*}$. Нециклические опорные дуговые псевдопотоки $\varkappa_{ij}$, $(i, j) \in U_{\text{оп}} \setminus U_{\text{цикл}}$, найдутся из условий баланса в узлах, как в п. 2 § 2 гл. II. Чтобы найти $\varkappa_{ij}$, $(i, j) \in U_{\text{цикл}}$, подсчитаем числа

$$\tilde{a}_i = a_i - \sum_{j \in I(U \setminus U_{\text{цикл}})} \varkappa_{ij} + \sum_{j \in I(U \setminus U_{\text{цикл}})} \lambda_{ji} \varkappa_{ji}, \quad i \in I(U_{\text{цикл}}).$$

Тогда

$$\varkappa_{s_k t_k} = \Big(\sum_{i \in I(U^k_{\text{цикл}})} \tilde{a}_i \Big) / (1 - \lambda_{s_k t_k}), \quad k = \overline{1, N}, \tag{39}$$

где $U^k_{\text{цикл}}$ — циклические дуги k-й компоненты связности опоры. Остальные циклические опорные псевдопотоки находятся из условий баланса.

Наряду с опорным копотоком $\{\delta, S_{\text{оп}}\}$ рассмотрим копоток $\tilde{\delta} = \delta + \Delta\delta$, порожденный двойственным планом $\{\tilde{u}, \tilde{w}\}$, $\tilde{u} = u + \Delta u$, $\tilde{w} = w + \Delta w$, где вектор $\tilde{w}$ согласован с копланом $\tilde{\delta}$ (см. (30)).

Следуя схеме, приведенной в § 2 гл. II, можно легко получить формулу приращения двойственной целевой функции

$$\begin{aligned} \alpha = \sum_{i \in I} a_i \Delta u_i - \sum_{(i, j) \in U} d_{ij} \Delta w_{ij} = \sum_{(i, j) \in U_{\text{оп}}} \varkappa_{ij} \Delta\delta_{ij} + \\ + \sum_{\substack{\delta_{ij} > 0, \ \tilde{\delta}_{ij} < 0, \\ (i, j) \in U_{\text{н}}}} d_{ij} \tilde{\delta}_{ij} - \sum_{\substack{\delta_{ij} \leqslant 0, \ \tilde{\delta}_{ij} > 0, \\ (i, j) \in U_{\text{н}}}} d_{ij} \tilde{\delta}_{ij}. \end{aligned} \tag{40}$$

12. Критерий оптимальности. Достаточные условия субоптимальности.

Теорема. Соотношения

$$\begin{gathered}\varkappa_{ij}=0 \text{ при } \delta_{ij}<0;\ \varkappa_{ij}=d_{ij} \text{ при } \delta_{ij}>0;\\ 0\leqslant\varkappa_{ij}\leqslant d_{ij} \text{ при } \delta_{ij}=0,\ (i,j)\in U_{\text{оп}},\end{gathered}\tag{41}$$

достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности опорного копотока $\{\delta, S_{\text{оп}}\}$. Псевдопоток, соответствующий оптимальному копотоку $\{\delta, S_{\text{оп}}\}$, является оптимальным потоком в сети S. (Доказательство, как в § 2 гл. II.)

Рассмотрим опорный копоток $\{\delta, S_{\text{оп}}\}$, у которого опорные дуговые псевдопотоки удовлетворяют ограничениям

$$0\leqslant\varkappa_{ij}\leqslant d_{ij},\quad (i,j)\in U_{\text{оп}}.$$

Тогда $\varkappa$ является ε-оптимальным потоком, где число ε находится по формуле

$$\varepsilon=-\sum_{\substack{\delta_{ij}<0,\\ (i,j)\in U_{\text{оп}}}}\delta_{ij}\varkappa_{ij}+\sum_{\substack{\delta_{ij}>0,\\ (i,j)\in U_{\text{оп}}}}\delta_{ij}(d_{ij}-\varkappa_{ij}).$$

13. Улучшение копотока. Пусть $\{\delta, S_{\text{оп}}\}$ — опорный копоток, на котором соотношения (41) не выполняются. Тогда из формулы приращения (40) видно, что в невырожденном случае всегда найдется вариация $\Delta\delta$ коплана, ведущая к увеличению двойственной целевой функции.

Пусть $\delta_{ij}<0$, $(i,j)\in U_{\text{оп}}$. Соотношения (41) не выполняются, если $\varkappa_{ij}\neq0$. При малых $\Delta\delta_{ij}$ имеем $\tilde{\delta}_{ij}<0$, $\Delta w_{ij}=0$ и $\alpha=\varkappa_{ij}\Delta\delta_{ij}$, т. е. $\varkappa_{ij}$ — скорость изменения в точке δ двойственной целевой функции при изменении опорной компоненты δ_{ij}. Аналогично при $\delta_{ij}>0$, $(i,j)\in U_{\text{оп}}$, имеем $\varkappa_{ij}\neq d_{ij}$, $\Delta w_{ij}=\Delta\delta_{ij}$ и $\alpha=(\varkappa_{ij}-d_{ij})\Delta\delta_{ij}$. Пусть $\delta_{ij}=0$, $(i,j)\in U_{\text{оп}}$. Соотношения (41) не выполняются при $\varkappa_{ij}\notin[0, d_{ij}]$. Из (40) получаем $\alpha=(\varkappa_{ij}-d_{ij})\Delta\delta_{ij}$ при $\Delta\delta_{ij}>0$; $\alpha=\varkappa_{ij}\Delta\delta_{ij}$ при $\Delta\delta_{ij}<0$.

Из этих вычислений следует правило выбора опорной компоненты $\delta_{i_0j_0}$, изменение которой ведет к увеличению двойственной целевой функции с наибольшей скоростью. На опорных дугах, на которых не выполняются соотношения (41), отмечаем число $\omega_{ij}=\varkappa_{ij}$, если $\delta_{ij}<0$ или $\delta_{ij}=0$, $\varkappa_{ij}<0$; и число $\omega_{ij}=\varkappa_{ij}-d_{ij}$, если $\delta_{ij}>0$ или $\delta_{ij}=0$, $\varkappa_{ij}>d_{ij}$. Пусть максимальное по модулю отмеченное число ω^0 принадлежит дуге (i_0, j_0). Из приведенных выше вычислений следует, что при $\Delta\delta_{i_0j_0}=\sigma \operatorname{sign} \omega^0$, $\sigma>0$, двойственная целевая функция возрастает со скоростью $|\omega^0|$. Шаг σ будем увеличивать до тех пор, пока либо выполнится условие оптимальности для дуги (i_0, j_0), либо обратится в нуль один из неопорных дуговых копотоков копотока $\tilde{\delta}$.

Ограничение на шаг, которое налагается опорной дугой, следующее:

$$\sigma_{i_0j_0}=\begin{cases} |\delta_{i_0j_0}|, & \text{если } 0\leqslant\varkappa_{i_0j_0}\leqslant d_{i_0j_0};\\ \infty & \text{— в противном случае.}\end{cases} \tag{42}$$

При изменении опорного дугового копотока $\delta_{i_0j_0}$ изменяется часть неопорных дуговых копотоков. Чтобы найти $\Delta\delta_{ij}$, $(i, j)\in U_{\text{н}}$, по опоре и по возмущениям на опорных дугах

$$\{\Delta\delta_{i_0j_0}=1;\ \Delta\delta_{ij}=0,\ (i, j)\neq(i_0, j_0),\ (i, j)\in U_{\text{оп}}\}$$

подсчитаем изменения Δu_i потенциалов узлов.

Предположим, что опорная дуга (i_0, j_0) принадлежит k-й компоненте связности $S^k_{\text{оп}}(I^k, U^k_{\text{оп}})$. Рассмотрим случаи: а) (i_0, j_0) — нециклическая опорная дуга, б) (i_0, j_0) — циклическая опорная дуга.

В случае а) $\Delta u_i=0$, $i \,\overline{\in}\, I^k_{\text{оп}}$, $i\in I^k_{\text{цикл}}$, где $I^k_{\text{цикл}}$ — множество циклических узлов k-й компоненты связности. Остальные Δu_i, $i\in I^k\setminus I^k_{\text{цикл}}$, находим из соотношений

$$\Delta u_i-\Delta u_j=0,\ (i, j)\neq(i_0, j_0),\ (i, j) \text{ — нециклическая дуга из } U^k_{\text{оп}};$$

$$\Delta u_{i_0}-\Delta u_{j_0}=1.$$

В случае б) полагаем $\Delta u_i=0$, $i \,\overline{\in}\, I^k_{\text{оп}}$;

$$\Delta u_{t_k}=\frac{(-1)^p}{1-\lambda_{s_kt_k}} \tag{43}$$

где

$$p=\begin{cases} 0, & \text{если дуга } (i_0, j_0) \text{ — прямая;}\\ 1, & \text{если дуга } (i_0, j_0) \text{ — обратная.}\end{cases}$$

(Напомним, что прямое направление в цикле определяется дугой (s_k, t_k).) Остальные Δu_i, $i\in I^k$, находим из условий $\Delta u_i - \Delta u_j = 0$, $(i, j) \neq (i_0, j_0)$, $(i, j) \neq (s_k, t_k)$, $(i, j) \in U^k_{\text{оп}}$, $\Delta u_{i_0} - \Delta u_{j_0} = 1$. Если $(s_k, t_k) = (i_0, j_0)$, то последнее условие не учитывается. Теперь легко найти приращения неопорных дуговых копотоков

$$\Delta\delta_{ij} = \sigma \operatorname{sign} \omega^0 \cdot (\Delta u_i - \lambda_{ij} \Delta u_j), \quad (i, j) \in U_{\text{н}}.$$

Отсюда получаем ограничения на шаг по неопорным дугам

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} -\delta_{ij} / \operatorname{sign} \omega^0 \cdot (\Delta u_i - \lambda_{ij} \Delta u_j), \\ \text{если } \operatorname{sign} \omega^0 \cdot (\Delta u_i - \lambda_{ij} \Delta u_j) < 0; \\ \infty \text{ — в остальных случаях.} \end{cases} \tag{44}$$

Минимальное из чисел (42), (44) принимаем за $\sigma_0 = \sigma_{i_* j_*}$. В невырожденном случае $\sigma_0 \neq 0$. Если $\sigma_0 = \infty$, то в сети S не существует потока. При $\sigma_0 < \infty$ строим новый копоток и переходим к новой сети. В случае $(i_*, j_*) = (i_0, j_0)$ опора не меняется, при переходе к новой сети меняется только копоток $\tilde{\delta}_{ij} = \delta_{ij} + \Delta\delta_{ij}$, $(i, j) \in U$. При $(i_*, j_*) \neq (i_0, j_0)$ новая опора $(S_{\text{оп}})_{\text{нов}}$ получается из старой после замены дуги (i_0, j_0) на дугу (i_*, j_*). Строим новое множество $(U_{\text{оп}*})_{\text{нов}}$ и находим числа α_i, $i \in I$, как в п. 7. Параметры новой сети находим по формулам

$$\begin{gathered} \tilde{\delta}_{ij} = (\delta_{ij} + \Delta\delta_{ij}) / \alpha_i, \ \tilde{\lambda}_{ij} = \lambda_{ij} \alpha_j / \alpha_i, \\ \tilde{d}_{ij} = \alpha_i d_{ij}, \ \tilde{a}_i = a_i \alpha_i, \ i \in I, \ (i, j) \in U. \end{gathered} \tag{45}$$

Если на какой-то итерации выполняется критерий оптимальности (условие субоптимальности), то оптимальный (субоптимальный) поток исходной задачи можно найти по формулам

$$x^0_{ij} = \varkappa_{ij} \frac{d^{\text{исх}}_{ij}}{d_{ij}} \quad \left(x^\varepsilon_{ij} = \varkappa_{ij} \frac{d^{\text{исх}}_{ij}}{d_{ij}} \right), \tag{46}$$

где $\varkappa_{ij}$, d_{ij} — параметры последней сети, $d^{\text{исх}}_{ij}$ — значение d_{ij} в исходной сети.

Замечание. Построение начального плана для задачи (29) не составляет труда. Взяв любую совокупность чисел u_i, $i \in I$, и определив w_{ij}, $(i, j) \in U$, по формулам (30) получим начальный план задачи (29).

14. Пример. Условимся о размещении параметров на сети при решении обобщенной транспортной задачи двойственным методом. Над дугой (i, j) записываем вначале d_{ij}, потом δ_{ij}. Под дугой (i, j) первое число означает величину псевдопотока $\varkappa_{ij}$, второе число означает $\operatorname{sign} \omega^0 \cdot (\Delta u_i - \lambda_{ij} \Delta u_j)$, если (i, j) неопорная дуга, и ω_{ij}, если (i, j) опорная дуга. При вершине i первое число соответствует Δu_i, второе — α_i. Опорные дуги выделяем жирными линиями. На сети указываем только отличные от единицы параметры λ_{ij}. Вернемся к примеру, рассмотренному в п. 8. Предположим, что исходные параметры задачи изменились: интенсивность первого узла уменьшилась на единицу и стала равной $a_1 = 9$. Для того чтобы лучше использовать информацию, полученную при решении первоначальной задачи, будем решать измененную задачу двойственным методом. Построим сеть (рис. VII.4), в которой параметры d_{ij} и $\delta_{ij} = \Delta_{ij}$ взяты из сети,

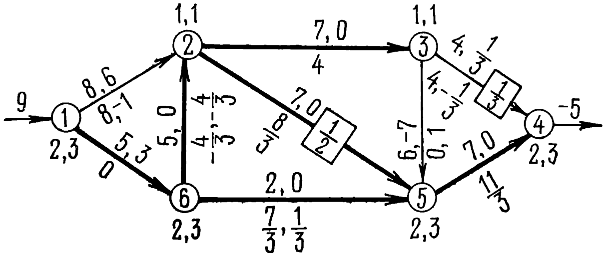


Рис. VII.4

изображенной на рис. VII.3. Множества $U_{оп}$, $U_{оп*}$ и (s, t) такие же, как и на рис. VII.3.

Псевдопотоки для неопорных дуг найдем из условий (38). Из условий баланса определим псевдопотоки для опорных нециклических дуг $\varkappa_{16} = 1$, $\varkappa_{54} = 11/3$, $\varkappa_{23} = 4$. Опорный псевдопоток по циклической дуге $(s, t) = (2, 5)$ найдем по формуле (39)

$$\varkappa_{25} = \frac{4 + 1 - 11/3}{1 - 1/2} = \frac{8}{3}.$$

Псевдопотоки $\varkappa_{62} = -4/3$ и $\varkappa_{65} = 7/3$ найдем из условий баланса.

Критерий оптимальности не выполняется для дуг (6, 2), (6, 5). Подсчитав $\omega_{62} = -4/3$ и $\omega_{65} = 7/3 - 2 = 1/3$, получим, что $\omega^0 = -4/3$, $(i_0, j_0) = (6, 2)$.

Найдем приращения потенциалов Δu_i. На сети (см. рис. VII.4) реализуется случай б): дуга $(i_0, j_0) = (6, 2)$ циклическая.

Найдем $\Delta u_t = \Delta u_5$ по формуле (43)

$$\Delta u_5 = \frac{(-1)^p}{1 - \lambda_{25}} = \frac{1}{1 - 1/2} = 2.$$

Остальные Δu_i, $i = \overline{1, 6}$, легко найти из условий

$$\Delta u_i - \Delta u_j = 0, \quad (i, j) \neq (6, 2), \quad (i, j) \in U_{оп*};$$

$$\Delta u_6 - \Delta u_2 = 1.$$

Для неопорных дуг находим числа $\operatorname{sign}\omega^0\cdot(\Delta u_i-\lambda_{ij}\Delta u_j)$ и по формулам (44) находим шаг σ_0. В данном случае $\sigma_0=\sigma_{i_*j_*}=\sigma_{34}=1$.

Опорная дуга (6, 2) выходит из опоры, дуга (3, 4) становится опорной. В качестве $(s, t)_{\text{нов}}$ возьмем дугу (2, 5), тогда $(U_{\text{оп}*})_{\text{нов}}=\{(1, 6), (6, 5), (5, 4), (2, 3), (3, 4)\}$.

Полагаем $\alpha_s=\alpha_2=1$, остальные α_i, $i=\overline{1, 6}$, находим из условий $\alpha_i-\lambda_{ij}\alpha_j=0$, $(i, j)\in U_{\text{оп}*}$. По формулам (45) переходим к новой сети (рис. VII.5). Находим дуговые псевдопотоки $\varkappa_{ij}$ и проверяем крите-

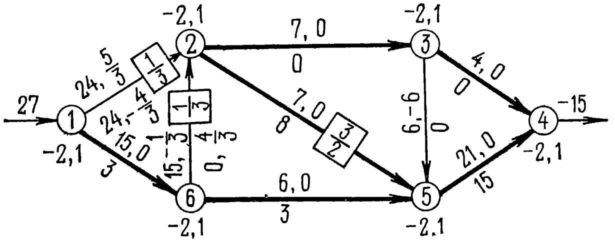


Рис. VII.5

рий оптимальности. Условия оптимальности не выполняются для дуги (2, 5), так как $d_{25}=7$, а $\varkappa_{25}=8$. Значит, $\omega^0=\omega_{i_0j_0}=\omega_{25}=8-7=1$.

Находим приращения потенциалов Δu_i, $i=\overline{1, 6}$, и для неопорных дуг числа $\operatorname{sign}\omega^0\cdot(\Delta u_i-\lambda_{ij}\Delta u_j)$. По формулам (44) находим шаг σ_0: $\sigma_0=\sigma_{i_*j_*}=\sigma_{12}=5/4$. Опорная дуга (2, 5) выходит из опоры, дуга (1, 2) становится опорной. Если в качестве $(s, t)_{\text{нов}}$ взять дугу (1, 2), то все α_i, $i=\overline{1, 6}$, равны единице, значит, при переходе к новой сети параметры a_i, d_{ij}, λ_{ij} останутся прежними. Переходим к новой сети (рис. VII.6). На этой сети строим псевдопоток и убеждаемся в выпол-

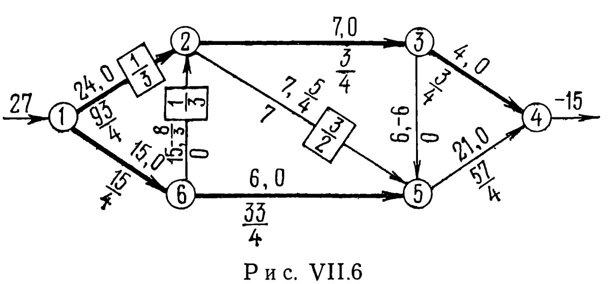


Рис. VII.6

нении критерия оптимальности. Оптимальный поток для исходной сети, полученный по формулам (46), равен: $x_{12}=31/4$, $x_{16}=5/4$, $x_{23}=3/4$, $x_{25}=7$, $x_{35}=0$, $x_{34}=3/4$, $x_{54}=19/4$, $x_{62}=0$, $x_{65}=5/4$.

ДОПОЛНЕНИЯ

Ниже приводятся четыре дополнения к материалу книги. В первом дополнении, основанном на результатах Л. В. Командиной, решается транспортная задача (см. § 1 гл. I) с учетом специальных ограничений на перевозки, которые существенно изменяют структуру задачи и приближают ее к общей задаче [ч. 1]. Частный случай исследовался в [1]. Материал следующих трех дополнений основан на результатах авторов, полученных совместно с О. И. Костюковой после выхода [ч. 1]. Исходя из предложенных методов решения общей задачи линейного программирования, можно построить новые алгоритмы решения рассмотренных в книге транспортных задач.

1. Нагруженная транспортная задача

Рассмотрим матричную транспортную задачу с дополнительными ограничениями

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}\to\min,\quad \sum_{j=1}^{m} x_{ij}=a_i,\quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=b_j,$$
$$d_{*ij}\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij}^{*},\quad i=\overline{1,n},\quad j=\overline{1,m};\tag{1}$$

$$\sum_{(i,\,j)\in M_p} x_{ij}=\alpha_p,\quad p=\overline{1,\,l},\tag{2}$$

где M_p, $p=\overline{1,\,l}$,— заданные множества клеток транспортной таблицы, α_p — заданные числа, ранг системы (2) равен l.

Совокупность чисел $x=\{x_{ij},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}\}$ называется планом задачи, если она удовлетворяет всем ее ограничениям. Опорой транспортной таблицы назовем максимальное (по количеству элементов) множество $U_{\text{оп}}$ клеток транспортной таблицы, для которого имеет только тривиальное решение система

$$\sum_{j\in J_i(U_{\text{оп}})} x_{ij}=0,\quad i\in I(U_{\text{оп}});$$
$$\sum_{i\in I_j(U_{\text{оп}})} x_{ij}=0,\quad j\in J(U_{\text{оп}});\tag{3}$$
$$\sum_{(i,\,j)\in M_p'} x_{ij}=0,\quad p=\overline{1,l},$$

где $I(U_{\text{оп}})=\{i\colon\ \exists\, j,\ (i,j)\in U_{\text{оп}}\}$; $J(U_{\text{оп}})=\{j\colon\ \exists\, i,\ (i,j)\in U_{\text{оп}}\}$; $I_j(U_{\text{оп}})=\{i\colon\ (i,j)\in U_{\text{оп}}\}$; $J_i(U_{\text{оп}})=\{j\colon\ (i,j)\in U_{\text{оп}}\}$; $M_p'=M_p\cap U_{\text{оп}}$, $p=\overline{1,l}$.

Пусть *) $L=\{L_q,\ q=\overline{1,l_1}\}$ — совокупность всех независимых циклов из множества клеток U^* транспортной таблицы. (Множество L называется независимым, если не существует цикла $L_k\in L$, что $L_k\subset\bigcup\limits_{q=1,\ q\neq k}^{l_1} L_q$.) Рассмотрим некоторый цикл

$$(i_1^q,\ j_1^q),\ (i_1^q,\ j_2^q),\ (i_2^q,\ j_2^q),\ \ldots,\ (i_{s_q}^q,\ j_{s_q}^q),\ (i_{s_q}^q,\ j_1^q).$$

Каждой клетке $(i,j)\in L_q$ поставим в соответствие число

$$\alpha_{ij}^p=\begin{cases}1, & \text{если } (i,j)\in M_p;\\ 0, & \text{если } (i,j)\overline{\in} M_p.\end{cases}\tag{4}$$

Введем понятие детерминанта цикла L_q относительно M_p:

$$R_p(L_q)=\sum_{k=1}^{s_q}\left(\alpha^p_{i_k^q j_k^q}-\alpha^p_{i_k^q j_{k+1}^q}\right);\ j_{s_q+1}^q=j_1^q.$$

Составим матрицу **)

$$D(U^*)=\left\{\begin{matrix}R_p(L_q),\ q=\overline{1,l_1},\\ p=\overline{1,l}\end{matrix}\right\}.$$

Если $l_1\neq l$, дополним $D(U^*)$ нулями до квадратной матрицы. Число $R=\det D(U^*)$ назовем детерминантом множества U^* относительно $M=\{M_p,\ p=\overline{1,l}\}$.

Критерий опорности. Связное множество $U_{\text{оп}}$ клеток транспортной таблицы является опорой тогда и только тогда, когда ***) а) $|I(U_{\text{оп}})|=n$, $|J(U_{\text{оп}})|=m$, б) $R\neq 0$.

Для доказательства теоремы понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. Для того чтобы связное множество U клеток транспортной таблицы содержало ровно l независимых циклов, необходимо и достаточно, чтобы $|U|=|I(U)|+|J(U)|+l-1$.

Доказательство обеих частей леммы проведем методом математической индукции по числу l. Для $l=1$ лемма справедлива (см. § 1 гл. VII). Предположив, что она верна для всех $l=\overline{2,k}$, установим ее справедливость для $l=k+1$.

---

*) Символом L_q будем обозначать и цикл как единичный объект, и множество клеток, составляющих цикл. Из контекста ясен смысл символа в каждом конкретном случае.

**) Символ $\left\{\begin{matrix}a_{ij},\ j=\overline{1,m},\\ i=\overline{1,n}\end{matrix}\right\}$ означает $n\times m$-матрицу $\left\{\begin{matrix}a_{11} & \ldots & a_{1m}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \ldots & a_{nm}\end{matrix}\right\}$.

***) Символом $|I|$ обозначено количество элементов множества I.

Необходимость. Пусть в связном множестве U_1 ровно k независимых циклов. Тогда $|U_1|=|I(U_1)|+|J(U_1)|+k-1$. Добавим к множеству U_1 связное множество U_2 такое, что $U=U_1\cup U_2$ — связное множество и содержит ровно $k+1$ независимых циклов. При этом если множество U_2 содержит цикл, то $|I(U_1)\cap I(U_2)|+|J(U_1)\cap J(U_2)|=1$; если же U_2 не содержит цикла, то $|I(U_1)\cap I(U_2)|+|J(U_1)\cap J(U_2)|=2$. В первом случае $|U|=|U_1|+|U_2|=|I(U_1)|+|J(U_1)|+k-1+|I(U_2)|+|J(U_2)|$, но $|I(U)|=|I(U_1)|+|I(U_2)|-|I(U_1)\cap I(U_2)|$ и $|J(U)|=|J(U_1)|+|J(U_2)|-|J(U_1)\cap J(U_2)|$, т. е. $|I(U)|+|J(U)|=|I(U_1)|+|J(U_1)|+|I(U_2)|+|J(U_2)|-1$, а значит, $|U|=|I(U)|+|J(U)|+k$. И во втором случае с учетом того, что для связного множества U_2 без циклов $|U_2|=|I(U_2)|+|J(U_2)|-1$, придем к утверждению леммы.

Достаточность. Составим матрицу $Z=\{z_{ij}\}$ размеров $|I(U)|\times|J(U)|$ для множества U, $|U|=|I(U)|+|J(U)|+(k+1)-1$:

$$z_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если } (i,j)\in U;\\ 0, & \text{если } (i,j)\overline{\in} U.\end{cases}$$

В силу связности множества U в матрице Z нет нулевых строк и столбцов. Из матрицы Z получим матрицу Z_1 следующим образом: вычеркнем все строки, содержащие только одну единицу, затем столбцы с одной единицей; далее с новой матрицей поступаем аналогично и так до тех пор, пока не останется ни одной строки и ни одного столбца, содержащих только одну единицу. Пусть вычеркнуты s_1 строк и t_1 столбцов. Тогда в матрице Z_1 осталось $|I(U)|+|J(U)|+(k+1)-(s_1+t_1)-1$ единиц (каждая из них соответствует клетке множества U, входящей хотя бы в один цикл, и эти клетки образуют не менее $k+1$ независимых циклов, ибо в противном случае получим противоречие условию). Удалим из Z_1 единицу, соответствующую клетке, входящей только в один цикл (такая клетка существует по определению независимых циклов). Удалив ее, мы разрушим один независимый цикл. Образуем матрицу Z_2 так же, как и матрицу Z_1. Пусть вычеркнуты s_2 строк и t_2 столбцов. Тогда в Z_2 осталось $|I(U)|+|J(U)|+(k+1)-2-(s_1+t_1+s_2+t_2)$ единиц. Если теперь присоединить все вычеркнутые единицы, кроме разрушившей цикл, то $|U|=|I(U)|+|J(U)|+k-1$, что является условием существования в U ровно k независимых циклов. Следовательно, первоначально в U было $k+1$ независимых циклов.

Лемма 2. Опора $U_{оп}$ — связное множество.

Доказательство. Так как $U_{оп}$ опора, то система (3) имеет только тривиальное решение и множество $U_{оп}$ максимальное. Предположим, что $U_{оп}$ — несвязное множество. Тогда $U_{оп}=U_1\cup U_2$, где U_1 и U_2 связные множества, $I(U_1)\cap I(U_2)=\varnothing$ и $J(U_1)\cap J(U_2)=\varnothing$.

Рассмотрим множество $U=U_{оп}\cup(i_0, j_0)$, $i_0\in I(U_1)$, $j_0=J(U_2)$. Запишем для него систему (3) в виде

$$\sum_{j\in J_i(U_1)} x_{ij}=\begin{cases}0, & \text{если } i\in I(U_1),\ i\neq i_0,\\ -x_{i_0j_0}, & \text{если } i=i_0;\end{cases}$$

$$\sum_{i\in I_j(U_1)} x_{ij}=0,\ j\in J(U_1);\qquad \sum_{j\in J_i(U_2)} x_{ij}=0,\ i\in I(U_2);$$

$$\sum_{i\in I_j(U_2)} x_{ij}= \begin{cases} 0, & \text{если } j\in J(U_2),\ j\neq j_0,\\ -x_{i_0j_0}, & \text{если } j=j_0; \end{cases}$$

$$\sum_{(i,\,j)\in M_p'} x_{ij}=0,\ p=\overline{1,l}. \tag{5}$$

Из суммы первых $|I(U_1)|$ уравнений вычтем сумму следующих $|J(U_1)|$ уравнений, тогда получим $x_{i_0j_0}=0$ и, значит, система (5) имеет только тривиальное решение. То есть $U_{\text{оп}}$ — не максимальное множество, что противоречит условию леммы. Следовательно, $U_{\text{оп}}$ — связное множество.

Перейдем к доказательству критерия опорности.

Достаточность. Из условия б) следует, что в матрице $D(U_{\text{оп}})$ нет нулевых строк и столбцов, т. е. в $U_{\text{оп}}$ существуют l независимых циклов. Тогда в силу леммы 1 и условия а) $|U_{\text{оп}}|=n+m+l-1$. Поэтому в системе (3) имеется $n+m+l-1$ переменных и $n+m+l$ уравнений. (Причем сумма первых n уравнений равна сумме следующих m уравнений: $\Sigma\, x_{ij}=0$, $(i,\ j)\in U_{\text{оп}}$, т. е. одно из них лишнее. Сохраним его ради симметрии.)

С помощью метода математической индукции по числу l покажем, что каждое из следующих l уравнений линейно не зависит от предыдущих. Матрицу A системы (3) представим так:

$$A=\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix},$$

где A_1 — $(m+n)\times(m+n+l-1)$-матрица, A_2 — $l\times(m+n+l-1)$-матрица. Столбцы матрицы A_1 содержат ровно две единицы на i-м и $(n+j)$-м местах. Строка матрицы A_2, соответствующая k-му ограничению, состоит из чисел $\overset{k}{\alpha}_{ij}$, $(i,\ j)\in U_{\text{оп}}$.

Предположим, что первое уравнение матрицы A_2 линейно зависит от уравнений матрицы A_1. Тогда существуют числа λ_i, $i=\overline{1,n}$, и μ_j, $j=\overline{1,m}$, одновременно не равные нулю такие, что каждый элемент первой строки матрицы A_2 может быть представлен в виде

$$\overset{1}{\alpha}_{ij}=\lambda_i+\mu_j,\ \ (i,\ j)\in U_{\text{оп}}.$$

Выберем уравнения для $(i,\ j)\in L_1$, записав их по ходу цикла. Сложим уравнения, соответствующие клеткам $(\overset{1}{i}_k,\ \overset{1}{j}_k)$, $k=\overline{1,s_1}$, из полученной суммы вычтем уравнения для $(\overset{1}{i}_k,\ \overset{1}{j}_{k+1})$, $k=\overline{1,s_1}$. Тогда слева получим $R_1(L_1)$, а справа 0, т. е. цикл L_1 вырожденный относительно множества M_1. Поступим аналогично для всех циклов L_q, $q=\overline{2,l}$, и получим $R_1(L_q)=0$. Таким образом, в определителе R первая строка состоит из нулей, что противоречит условию б) теоремы. Значит, первое уравнение в A_2 не является линейно зависимым от уравнений матрицы A_1.

Предположим, что первые k строк матрицы A_2 линейно независимы от предыдущих строк матрицы A, но $(k+1)$-я строка линейно зависима. Тогда существуют числа λ_i, $i=\overline{1,n}$; μ_j, $j=\overline{1,m}$; ν_p, $p=\overline{1,k}$, такие, что каждый элемент $(k+1)$-й строки матрицы A_2 может быть представлен в виде

$$\overset{k+1}{a_{ij}}=\lambda_i+\mu_j+\sum_{s=1}^{k}\nu_s\overset{s}{a_{ij}}.$$

Как и раньше, сложим уравнения, соответствующие клеткам $(i_k^q, j_k^q)\in L_q$, и из полученной суммы вычтем уравнения, соответствующие клеткам $(i_k^q, j_{k+1}^q)\in L_q$. Тогда для каждого цикла получим уравнения

$$R_{k+1}(L_q)=R_1(L_q)\nu_1+\ldots+R_k(L_q)\nu_k,\ q=\overline{1,l},$$

из которых видно, что $(k+1)$-я строка в R — линейная комбинация предыдущих k строк, т. е. $R=0$, что противоречит условию б) теоремы. Таким образом, последние l уравнений системы (3) линейно независимы от предыдущих, т. е. ранг системы (3) равен $n+m+l-1$, следовательно, система (3) имеет только тривиальное решение.

Расширить множество $U_{\text{оп}}$ нельзя, так как, добавив еще хотя бы одну клетку, в системе (3) будем иметь переменных больше, чем число линейно независимых уравнений, т. е. система (3) будет иметь нетривиальное решение.

Необходимость. 1) Предположим, что $|I(U_{\text{оп}})|=n_1<n$. Пусть клетки из $U_{\text{оп}}$ находятся в первых n_1 строках. Образуем множество U, добавив к $U_{\text{оп}}$ любую клетку (n_1+1, j) в (n_1+1)-й строке, и запишем для него систему (3). Эта система имеет только тривиальное решение, так как новую переменную находим из уравнения $x_{n_1+1,\,j}=0$, а остальные из системы (3), записанной для множества $U_{\text{оп}}$, которая имеет только тривиальное решение, т. е. $U_{\text{оп}}$ — не максимальное множество, для которого система (3) имеет только тривиальное решение, что противоречит условию теоремы. Таким образом, $|I(U_{\text{оп}})|=n$. Аналогично показывается, что $|J(U_{\text{оп}})|=m$.

2) Пусть множество $U_{\text{оп}}$ содержит l_1 независимых циклов. Тогда $|U_{\text{оп}}|=|I(U_{\text{оп}})|+|J(U_{\text{оп}})|+l_1-1$. Если $l_1>l$, то в системе (3) число переменных больше числа уравнений и, значит, $U_{\text{оп}}$ не опора. Если $l_1<l$, то всегда можно добавить к $U_{\text{оп}}$ клетку такую, что ранг системы (3), записанной для нового множества, увеличивается на единицу (ибо в противном случае ранг системы (2) равен $l_1<l$). Значит, система (3) для нового множества имеет только тривиальное решение, т. е. $U_{\text{оп}}$ — не максимальное множество, что противоречит условию теоремы. Тогда $l_1=l$ и $D(U_{\text{оп}})$ — квадратная матрица. Предположим, что $R=0$. Тогда всегда можно построить нетривиальное решение следующим образом. Положим $x_{ij}=0$, $(i, j)\in U_{\text{оп}}\setminus L$, и $x_{i_k^q j_k^q}=a_q$, $x_{i_k^q j_{k+1}^q}=-a_q$ для клеток, принадлежащих только циклу L_q. Для остальных клеток значения x_{ij} определяются из первых $n+m$ уравнений системы (3). Последние l уравнений системы примут вид

$$\sum_{q=1}^{l}R_p(L_q)a_q=0,\ p=\overline{1,l}.$$

Так как, по предположению, $R=0$, то система имеет нетривиальное решение. Теорема доказана.

Определение. Совокупность $\{x, U_{\text{оп}}\}$ из плана и опоры называется опорным планом.

Опорный план называется невырожденным, если опорные перевозки удовлетворяют неравенствам $d_{*ij}<x_{ij}<d^*_{ij}$. Обозначим через $U_{\text{н}}$ множество неопорных клеток.

По опоре $U_{\text{оп}}$ построим опорные потенциалы u_i, $i=\overline{1,n}$; v_j, $j=\overline{1,m}$; r_p, $p=\overline{1,l}$, удовлетворяющие системам

$$\sum_{p=1}^{l} R_p(L_q)r_p=$$

$$=\sum_{k=1}^{s_q}\left(c_{i_k^q j_k^q}-c_{i_k^q j_{k+1}^q}\right),\ q=\overline{1,l}; \tag{6}$$

$$u_i+v_j=c_{ij}-\sum_{p=1}^{l}\alpha_{ij}^{p}r_p,\ (i,\ j)\in U_{\text{оп}}, \tag{7}$$

где числа α_{ij}^p определяются из (4). Система (6) относительно r_p имеет единственное решение, так как $R\neq 0$. Если в системе (7) задать произвольно потенциал каких-нибудь строки или столбца, то потенциалы остальных строк и столбцов найдутся из (7) однозначно. Найденные потенциалы позволяют вычислить оценки неопорных клеток

$$\Delta_{ij}=u_i+v_j+\sum_{p=1}^{l}\alpha_{ij}^{p}r_p-c_{ij},\ (i,\ j)\in U_{\text{н}}.$$

Следуя [ч. 1], доказываются

Критерий оптимальности. Соотношения

$$\begin{gathered}\Delta_{ij}\leqslant 0 \text{ для } x_{ij}=d_{*ij};\ \Delta_{ij}\geqslant 0 \text{ для } x_{ij}=d^*_{ij};\\ \Delta_{ij}=0 \text{ для } d_{*ij}<x_{ij}<d^*_{ij}\end{gathered} \tag{8}$$

достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности опорного плана перевозок $\{x,\ U_{\text{оп}}\}$.

Критерий субоптимальности. Если для опорного плана $\{x,\ U_{\text{оп}}\}$ выполняется неравенство

$$\sum_{\Delta_{ij}>0}\Delta_{ij}(d^*_{ij}-x_{ij})-\sum_{\Delta_{ij}<0}\Delta_{ij}(x_{ij}-d_{*ij})\leqslant\varepsilon,\ (i,\ j)\in U_{\text{н}}, \tag{9}$$

то план x ε-оптимальный. Для каждого ε-оптимального плана x найдется такая опора, что справедливо неравенство (9).

Итерация. В неопорных клетках, элементы которых не удовлетворяют соотношениям (8) (или (9)), отметим оценку Δ_{ij}. Пусть $\Delta_{i_0j_0}$ — максимальная по модулю среди них. Обозначим через U множество циклических клеток и через $\bar{U}$ множество $(U_{\text{оп}}\setminus U)\bigcup(i_0,\ j_0)$. Найдем числа y_{ij}, $(i,\ j)\in U_{\text{оп}}\bigcup(i_0,\ j_0)$:

полагаем $y_{i_0j_0}=-1$;

для опорных нециклических клеток числа y_{ij} легко находятся по правилу: сумма всех чисел y_{ij} в каждой строке и каждом столбце равна нулю;

для циклических опорных клеток числа y_{ij} находятся из системы

$$\sum_{j\in J_i(U)} y_{ij} = -\sum_{j\in J_i(\bar U)} y_{ij},\ i\in I(U);$$

$$\sum_{i\in I_j(U)} y_{ij} = -\sum_{i\in I_j(\bar U)} y_{ij},\ j\in J(U);$$

$$\sum_{(i,\,j)\in M''_p} y_{ij} = -\sum_{(i,\,j)\in M'''_p} y_{ij},\ p=\overline{1,l},$$

где

$$M'''_p = \begin{cases} M'_p\setminus M''_p, & \text{если } (i_0, j_0)\,\overline{\in}\, M_p; \\ (M'_p\setminus M''_p)\cup(i_0, j_0), & \text{если } (i_0, j_0)\in M_p. \end{cases}$$

Возможны два случая: 1) $\Delta_{i_0j_0}>0$, 2) $\Delta_{i_0j_0}<0$. В случае 1) шаг Θ находится из условия

$$\Theta=\Theta_{i_*j_*}=\min\left\{d^*_{i_0j_0}-x_{i_0j_0},\ \min_{y_{ij}>0}\frac{x_{ij}-d_{*ij}}{y_{ij}},\ \min_{y_{ij}<0}\frac{d^*_{ij}-x_{ij}}{-y_{ij}}\right\},$$

а новый план находим по формулам

$$\bar x_{ij}=x_{ij},\ (i,\ j)\in U_{\text{н}}\setminus(i_0,\ j_0);\ \bar x_{i_0j_0}=x_{i_0j_0}+\Theta;$$
$$\bar x_{ij}=x_{ij}-\Theta y_{ij},\ (i,\ j)\in U_{\text{оп}}.$$

В случае 2) шаг

$$\Theta=\Theta_{i_*j_*}=\min\left\{x_{i_0j_0}-d_{*i_0j_0},\ \min_{y_{ij}>0}\frac{d^*_{ij}-x_{ij}}{y_{ij}},\ \min_{y_{ij}<0}\frac{d_{*ij}-x_{ij}}{y_{ij}}\right\},$$

а новый план вычисляется по формулам

$$\bar x_{ij}=x_{ij},\ (i,\ j)\in U_{\text{н}}\setminus(i_0,\ j_0);\ \bar x_{i_0j_0}=x_{i_0j_0}-\Theta;$$
$$\bar x_{ij}=x_{ij}+\Theta y_{ij},\ (i,\ j)\in U_{\text{оп}}.$$

В обоих случаях при $(i_0,\ j_0)=(i_*,\ j_*)$ опора $U_{\text{оп}}$ не меняется. Если $(i_0,\ j_0)\neq(i_*,\ j_*)$, из старой опоры удаляем клетку $(i_*,\ j_*)$ и добавляем клетку $(i_0,\ j_0)$. Полученное множество образует новую опору.

Замечания: 1. Если $(i_*,\ j_*)\,\overline{\in}\, L$, в новой опоре циклы не изменяются, а следовательно, потенциалы r_p, $p=\overline{1,l}$, остаются прежними. Если же $(i_*,\ j_*)\in L_k$, $k=\overline{1,l_1}$, $l_1\leqslant l$, в новой опоре надо выявить новые циклы вместо разрушенных.

2. Если для клетки $(i_0,\ j_0)$ можно построить из клеток опоры цикл L_0, вырожденный относительно всех множеств из M (т. е. $R_p(L_0)=0$, $p=\overline{1,l}$), нахождение шага Θ и нового плана выполняется, как и в классической транспортной задаче.

2. Метод максимального приращения с оптимальной заменой элемента опоры

Рассмотрим задачу линейного программирования в канонической форме

$$c'x \to \max, \ Ax=b, \ d_* \leqslant x \leqslant d^*, \qquad (1)$$

где c, x, d_*, d^* — n-векторы-столбцы, b — m-вектор-столбец, A — $m\times n$-матрица ($\operatorname{rank} A=m$, $n\geqslant m$), $'$ (штрих) — операция транспонирования.

Будем считать, что перед началом решения задачи (1) кроме параметров c, A, d_*, d^* известен план x^1 ($Ax^1=b$, $d_*\leqslant x^1\leqslant d^*$). Требуется построить алгоритм получения оптимального x^0 или ε-оптимального x^ε ($c'x^0-c'x^\varepsilon\leqslant\varepsilon$) планов.

Приписав плану x^1 опору $\overset{1}{A}_{\text{оп}}=\{a_i, \ i\in \overset{1}{I}_{\text{оп}}\}$ [ч. 1], получим начальный опорный план $\{x^1, \overset{1}{A}_{\text{оп}}\}$. Согласно [ч. 1], сведения о начальной опоре $\overset{1}{A}_{\text{оп}}$ целесообразно собирать у специалистов и вносить в первоначальную информацию о задаче. Опорный план $\{x, A_{\text{оп}}\}$ считается невырожденным, если ни одна из его опорных компонент x_i, $i\in I_{\text{оп}}$, не является критической, т. е. не принимает граничных значений (d_{*i} или d_i^*).

Найдем m-вектор потенциалов u из уравнения $u'\overset{1}{A}_{\text{оп}}=c'_{\text{оп}}$ и вычислим вектор оценок $\Delta_{\text{н}}$ неопорных векторов условий a_i, $i\in\overset{1}{I}_{\text{н}}$, $\overset{1}{I}_{\text{н}}=I\setminus\overset{1}{I}_{\text{оп}}$, $I=\{i, \ i=\overline{1,n}\}$: $\Delta'_{\text{н}}=u'\overset{1}{A}_{\text{н}}-c'_{\text{н}}$.

Следуя [ч. 1], нетрудно подсчитать

$$c'x^0-c'x^1\leqslant\beta^1,$$
$$\beta^1=-\sum_{\Delta_i>0, \ i\in\overset{1}{I}_{\text{н}}}\Delta_i(d_{*i}-\overset{1}{x}_i)-\sum_{\Delta_i<0, \ i\in\overset{1}{I}_{\text{н}}}\Delta_i(d_i^*-\overset{1}{x}_i). \qquad (2)$$

Из этого неравенства получаем [ч. 1]

Критерии оптимальности и субоптимальности. Соотношения

$$\Delta_i\geqslant 0 \text{ при } \overset{1}{x}_i=d_{*i}; \ \Delta_i\leqslant 0 \text{ при } \overset{1}{x}_i=d_i^*;$$
$$\Delta_i=0 \text{ при } d_{*i}<\overset{1}{x}_i<d_i^*, \ i\in\overset{1}{I}_{\text{н}},$$

достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности опорного плана $\{x^1, \overset{1}{A}_{\text{оп}}\}$.

Если

$$\beta^1\leqslant\varepsilon, \qquad (3)$$

то опорный план $\{x^1, \overset{1}{A}_{\text{оп}}\}$ является ε-оптимальным. Для каждого ε-оптимального плана x^1 найдется опора $\overset{1}{A}_{\text{оп}}$ такая, что для опорного плана $\{x^1, \overset{1}{A}_{\text{оп}}\}$ выполняется неравенство (3).

Рассмотрим теперь ситуацию, когда начальный план нужно улучшить. Один из методов улучшения опорных планов указан в [ч. 1]. Там же отмечено, что опорные планы в отличие от классических базисных планов допускают другие методы улучшения, основанные на новых нормировочных условиях для подходящих направлений.

В данном параграфе рассмотрим следующую нормировку неопорных компонент допустимого направления:

$$d_{*i}-x_i^1 \leqslant l_i \leqslant d_i^* - x_i^1, \; i \in I_{\text{н}}^1. \tag{4}$$

Эта *нормировка* зависит от текущего плана x^1 и является в этом смысле *адаптивной*. Она отличается от симплексной нормировки тем, что оптимальное направление ищется не из условия максимальной скорости возрастания целевой функции, а из условия максимального приращения целевой функции в пространстве неопорных переменных. Подсчитав максимум производной целевой функции [ч. 1] по допустимым направлениям, найдем компоненты оптимального подходящего направления l^1, соответствующего нормировке (4):

$$l_i^1 = d_i^* - x_i^1, \text{ если } \Delta_i < 0; \; l_i^1 = d_{*i} - x_i^1, \text{ если } \Delta_i > 0;$$

$$l_i^1 = 0, \text{ если } \Delta_i = 0, \; i \in I_{\text{н}}^1; \; l_{\text{оп}}^1 = -(A_{\text{оп}}^1)^{-1} A_{\text{н}}^1 l_{\text{н}}^1.$$

Новый план x^2 строится в виде $x^2 = x^1 + \Theta_0 l^1$, где Θ_0 — максимально допустимый шаг, который ищем так, чтобы на векторе x^2 не нарушались прямые ограничения по неопорным и опорным переменным. Из первого требования следует, что $\Theta_0 \leqslant 1$. Второе требование эквивалентно [ч. 1] неравенству

$$\Theta_0 \leqslant \Theta_{i_0}, \; \Theta_{i_0} = \min \Theta_i, \; i \in I_{\text{оп}}, \; l_i^1 \neq 0,$$

где

$$\Theta_i = \begin{cases} (d_i^* - x_i^1)/l_i^1, \text{ если } l_i^1 > 0; \\ (d_{*i} - x_i^1)/l_i^1, \text{ если } l_i^1 < 0. \end{cases}$$

Таким образом, $\Theta_0 = \min\{1, \Theta_{i_0}\}$. Ясно, что при $\Theta_0 = 1$ план x^2 оптимален и процесс решения задачи закончен.

Пусть $\Theta_0 = \Theta_{i_0} < 1$. При переходе к плану x^2 целевая функция прямой задачи возрастает на величину $\Theta_0 \beta^1$. Оценка субоптимальности плана x^2:

$$c'x^0 - c'x^2 \leqslant (1-\Theta_0)\beta^1. \tag{5}$$

Если значение правой части в (5) не превышает заданной точности приближения ε к оптимальному плану, то план x^2 принимается за приближенное решение задачи (1). В противном случае встает вопрос о замене опоры $A_{\text{оп}}^1$. Поскольку ограничение на опорную переменную x_{i_0} препятствует дальнейшему движению вдоль l^1, то вектор a_{i_0} подлежит удалению из опоры. Возникает вопрос: какой вектор a_{j_0} ввести в опору плана x^2 вместо вектора a_{i_0}? В симплекс-методе вопрос решается однозначно в силу специфики базисного плана. В опорном методе [ч. 1] используется аналогичное правило: в опору вводится вектор a_{j_0}, оценка Δ_{j_0} которого дает максимальную скорость увеличения целевой функции. Однако нетрудно понять, что замену элементов опоры можно отделить от выбора подходящего направления. Будем исходить из следующего соображения. Оценка субоптимальности (2) опорного плана $\{x, A_{\text{оп}}\}$ зависит от опоры, и поэтому при замене опоры разумно добиваться максимального улучшения оценки. Более точные оценки позволяют скорее остановить процесс решения, ибо с помощью их быстрее распознается субоптимальность текущего плана.

Каждому опорному плану $\{x, A_{\text{оп}}\}$ можно поставить в соответствие сопровождающий коплан Δ и сопровождающий двойственный план $\{y, w, v\}$ по следующему правилу: $y' = c'_{\text{оп}} A_{\text{оп}}^{-1}$; $w_i = 0$, $v_i = \Delta_i$, если $\Delta_i \geqslant 0$; $w_i = -\Delta_i$, $v_i = 0$, если $\Delta_i < 0$, $i = \overline{1, n}$; $\Delta = A'y - c$ (фактически сопровождающие коплан и двойственный план зависят только от опоры $A_{\text{оп}}$).

Нетрудно показать, что оценка β^1 опорного плана $\{x^1, \overset{1}{A}_{\text{оп}}\}$ равна

$$\beta^1 = \overset{1}{\beta}_x + \overset{1}{\beta}_y, \tag{6}$$

где $\overset{1}{\beta}_x$ — точная оценка плана x $(c'x^0 - c'x^1 = \overset{1}{\beta}_x)$, $\overset{1}{\beta}_y$ — точная оценка сопровождающего двойственного плана $\{y^1, w^1, v^1\}$ $(b'y^1 + d^{*\prime}w^1 - d'_* v^1 - b'y^0 - d^{*\prime}w^0 + d'_* v^0 = \overset{1}{\beta}_y$, где $\{y^0, w^0, v^0\}$ — оптимальный двойственный план задачи (1)). Грубо говоря, оценка $\overset{1}{\beta}_x$ характеризует меру неоптимальности плана x^1, оценка $\overset{1}{\beta}_y$ — меру неоптимальности опоры $\overset{1}{A}_{\text{оп}}$.

Из (6) видно, что если уменьшить величину $\overset{1}{\beta}_y$, то улучшится оценка β^1. Уменьшения $\overset{1}{\beta}_y$ можно добиться с помощью двойственного опорного метода [ч. 1]: от опорного коплана $\{\Delta^1, \overset{1}{A}_{\text{оп}}\}$ переходим к опорному коплану $\{\Delta^2, \overset{2}{A}_{\text{оп}}\}$, для которого оценка $\overset{2}{\beta}_y$ меньше $\overset{1}{\beta}_y$. Для этого нужно проделать следующие операции: построить подходящее направление t для коплана Δ^1: $t_i = 0$, $i \in \overset{1}{I}_{\text{оп}}$, $i \neq i_0$;

$$t_{i_0} = \begin{cases} -1, & \text{если } \overset{2}{x}_{i_0} = d^*_{i_0}, \\ 1, & \text{если } \overset{2}{x}_{i_0} = d_{*i_0}, \end{cases} \qquad t'_{\text{н}} = t'_{\text{оп}} (\overset{1}{A}_{\text{оп}})^{-1} \overset{1}{A}_{\text{н}}.$$

Пусть $\overset{2}{x}_{i_0} = d_{*i_0}$. Начальная скорость убывания двойственной целевой функции вдоль t равна $\alpha_0 = \varkappa_{i_0} - d_{*i_0}$, где $\varkappa = x^1 + l^1$. Максимальный шаг σ_0 вдоль направления t при скорости α_0 находим из условия, что компоненты коплана $\Delta_{(0)} = \Delta^1 + \sigma_0 t$ не меняют знаки. Если продолжить движение вдоль t после появления нулевых компонент коплана $\Delta_{(0)}$, то скорость убывания двойственной целевой функции уменьшится и станет равной

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \sum_{\substack{t_j < 0, \\ \Delta_{(0)j} = 0,\ j \in \overset{1}{I}_{\text{н}}}} t_j (\varkappa_j - d^*_j) + \sum_{\substack{t_j > 0, \\ \Delta_{(0)j} = 0,\ j \in \overset{1}{I}_{\text{н}}}} t_j (\varkappa_j - d_{*j}).$$

При $\alpha_1 \geqslant 0$ движение вдоль t прекращается. Если $\alpha_1 < 0$, то движемся вдоль t со скоростью α_1 до тех пор, пока не появятся новые нулевые компоненты у коплана $\Delta_{(1)} = \Delta_{(0)} + \sigma_1 t$. Пусть движение вдоль t происходит со скоростью $\alpha_k < 0$. Максимальный шаг σ_k находим из условия, что у коплана $\Delta_{(k)} = \Delta_{(k-1)} + \sigma_k t$ впервые появляются новые нулевые компоненты. Подсчитаем новую скорость изменения двойственной целевой функции вдоль направления t:

$$\alpha_{k+1}=\alpha_k+\sum_{\substack{t_j<0,\\ \Delta_{(k)j}=0,\ j\in \overset{1}{I}_{\text{н}}}} t_j(\varkappa_j-d_j^*)+\sum_{\substack{t_j>0,\\ \Delta_{(k)j}=0,\ j\in \overset{1}{I}_{\text{н}}}} t_j(\varkappa_j-d_{*j}).$$

Если $\alpha_{k+1}\geqslant 0$, то движение вдоль t прекращается. В противном случае продолжаем движение вдоль t со скоростью $\alpha_{k+1}<0$. Движение вдоль t прекращается, как только будет получена скорость $\alpha_s\geqslant 0$.

Новый коплан $\Delta^2=\Delta^1+t\sum_{k=0}^{s-1}\sigma_k$. Ему соответствует опора $\{a_i,\ i\in \overset{1}{I}_{\text{оп}},\ i\neq i_0,\ a_j\}$, где a_j — любой вектор из множества $I_{\text{н}*}=\{j\colon j\in \overset{1}{I}_{\text{н}},\ \overset{2}{\Delta}_j=0$ и $t_j(\varkappa_j-d_{*j})>0$ либо $t_j(\varkappa_j-d_j^*)>0\}$, т. е. из множества, которое появляется при вычислении положительной добавки к скорости α_{s-1}. (Для невырожденного коплана Δ^2 это множество состоит из одного элемента.) Если в $I_{\text{н}*}$ есть элемент j, для которого $d_{*j}<x_j<d_j^*$, то выбираем его в качестве j_0. В противном случае в качестве j_0 выбираем любой элемент из $I_{\text{н}*}$.

Таким образом, построена новая опора $\overset{2}{A}_{\text{оп}}=(\overset{1}{A}_{\text{оп}}\setminus a_{i_0})\bigcup a_{j_0}$. При переходе от коплана Δ^1 к коплану Δ^2 $(\overset{1}{A}_{\text{оп}}\to\overset{2}{A}_{\text{оп}})$ оценка $\overset{1}{\beta}_y$ уменьшится на величину $\sum_{k=0}^{s-1}|\alpha_k|\sigma_k$, а следовательно,

$$c'x^0-c'x^2\leqslant\beta^2=(1-\Theta_0)\beta^1-\sum\nolimits_{k=0}^{s-1}|\alpha_k|\sigma_k. \tag{7}$$

Замена a_{i_0} на a_{j_0} соответствует одной итерации двойственного опорного метода, в результате которой сопровождающий опорный коплан $\{\Delta^1,\ \overset{1}{A}_{\text{оп}}\}$ заменяется новым $\{\Delta^2,\ \overset{2}{A}_{\text{оп}}\}$. Если последний оказывается оптимальным и невырожденным, то соответствующий ему псевдоплан [ч. 1] есть оптимальный план задачи (1). С другой стороны, в этой ситуации одна итерация прямого метода также приводит к оптимальному плану. Действительно, пусть имеется опорный план $\{x,\ \overset{0}{A}_{\text{оп}}\}$, для которого сопровождающий коплан Δ^0 является оптимальным невырожденным копланом. По описанным выше формулам строим подходящее направление l. Очевидно, что вектор $x+l$ равен единственному псевдоплану $\varkappa$, соответствующему Δ^0. Псевдоплан $\varkappa=x+l$ является оптимальным планом задачи (1).

Дополнительные операции по выбору оптимального вектора a_{j_0} элементарны, производятся над текущими данными опорного плана $\{x^1,\ \overset{1}{A}_{\text{оп}}\}$ и не могут повлиять существенно на общее время решения задачи. Экономия же в числе итераций, связанная с преобразованием опор, может оказаться существенной. Важно, что замена опоры связывается с определенной экстремальной задачей, направленной на быстрейшее решение исходной задачи. В этом отношении приведенная модификация опорного метода согласуется с общей направленностью подхода [ч. 1] по максимальному учету имеющейся информации и рациональному ее преобразованию.

З а м е ч а н и е. Замена вектора a_{i_0} основана на стремлении максимально улучшить оценку $\overset{1}{\beta}_y$. Для этого можно использовать упрощенный алгоритм, когда шаг двойственной итерации находится из условия

$$\sigma=\sigma_{j_0}=\min(-\overset{1}{\Delta}_j/t_j),\ j\in\{j:\ j\in\overset{1}{I}_{\text{н}},\ \overset{1}{\Delta}_j t_j<0\}\ \bigcup$$

$$\bigcup\{j:\ j\in\overset{1}{I}_{\text{н}},\ \overset{1}{\Delta}_j=0 \text{ и } t_j(\varkappa_j-\overset{*}{d}_j)>0 \text{ либо } t_j(\varkappa_j-d_{*j})>0\},$$

$$\Delta^2=\Delta^1+\sigma t.$$

Опора $\overset{1}{A}_{\text{оп}}$ заменяется на опору $\overset{2}{A}_{\text{оп}}$ (наиболее трудная часть итерации) лишь тогда, когда значение правой части неравенства (7) больше ε: $\beta^2>\varepsilon$.

В результате итерации получается новый опорный план $\{x^2, \overset{2}{A}_{\text{оп}}\}$. Если $d_{*j_0}<\overset{2}{x}_{j_0}<\overset{*}{d}_{j_0}$ и вектор a_{i_0} определяется однозначно, то новый план, очевидно, невырожденный. Если же $\overset{2}{x}_{j_0}$ принимает одно из граничных значений, то план $\{x^2, \overset{2}{A}_{\text{оп}}\}$ вырожденный и появляется опасность, что на следующей итерации нельзя будет сделать ненулевой шаг $\tilde{\Theta}_0$. В действительности же этого не произойдет, так как можно показать, что $\overset{2}{l}_{j_0}>0$, если $\overset{2}{x}_{j_0}=d_{*j_0}$, и $\overset{2}{l}_{j_0}<0$, если $\overset{2}{x}_{j_0}=\overset{*}{d}_{j_0}$. Следовательно, если вектор a_{i_0} определяется однозначно, то на данной ($0<\Theta_0<1$) и на следующей ($\tilde{\Theta}_0>0$) итерациях происходит улучшение планов x^1, x^2 задачи (1).

Перейдем к доказательству конечности алгоритма. Сначала введем новое понятие вырожденности. *Опорный план* $\{x, A_{\text{оп}}\}$ назовем *сильно вырожденным*, если на нем по описанному выше алгоритму не увеличивается целевая функция прямой задачи, а на сопровождающем его коплане не уменьшается целевая функция двойственной задачи.

Теорема. Описанный выше алгоритм конечен, если на каждой его итерации не получаются сильно вырожденные опорные планы.

Следствие. Описанный выше алгоритм конечен, если на каждой итерации вектор a_{i_0} определяется однозначно.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы. Покажем, что если не встречаются сильно вырожденные планы, то через конечное число итераций происходит улучшение сопровождающего двойственного плана или выполняются условия оптимальности.

Предположим противное: возможно бесконечное число итераций с одним и тем же двойственным планом. Пусть $\overset{*}{A}_{\text{оп}}$ — опора сопровождающего двойственного плана. Поскольку двойственный план не меняется, то не меняются и оценки Δ. Значит, на всех итерациях $A_{\text{оп}}\subset\{a_i,\ i\in\overset{*}{I}_{\text{оп}}\cup\overset{*}{I}_{\text{н0}}\}$, где $\overset{*}{I}_{\text{н0}}=\{i:\ i\in\overset{*}{I}_{\text{н}},\ \Delta_i=0\}$. Число $k=|\overset{*}{I}_{\text{оп}}\cup\overset{*}{I}_{\text{н0}}|$ конечное, следовательно, некоторая опора будет повторяться бесконечное число раз. Пусть это будет опора $\overset{*}{A}_{\text{оп}}$. В каждом новом опорном плане $\{x, \overset{*}{A}_{\text{оп}}\}$ компоненты x_i, $i\in\overset{*}{I}_{\text{н0}}$, могут оставаться прежними (такими, как на всех предыдущих итерациях с данным двойственным планом) либо принимать одно из двух граничных значений. Отсюда следует, что через конечное число итераций встретятся два опорных плана $\{x_1, A^*_{\text{оп}}\}$ и $\{x_2, A^*_{\text{оп}}\}$, у которых $x_{1\text{н}0}=x_{2\text{н}0}$. По предположению, сильно вырожденные планы не встречаются. Значит, на каждой итерации происходит улучшение прямых планов или выполняются условия оптимальности. Пусть условия оптимальности не выполняются, тогда $x_1\neq x_2$ $(c'x_1<c'x_2)$. Пусть l_1 — подходящее направление из плана x_1 и $\Theta_1>0$ — максимально допустимый шаг вдоль l_1. Так как на итерации $x_1\to x_2$ оценки Δ не менялись, то

$$x_{2j}=x_{1j}+\varepsilon l_{1j},\ j\in I^*_{\text{н}}\setminus I^*_{\text{н}0}=I^*_{\text{н}*}, \tag{8}$$

где $\varepsilon>\Theta_1$.

Из (8) и уравнений

$$A^*_{\text{оп}}x_{1\text{оп}}+A^*_{\text{н}0}x_{1\text{н}0}+A^*_{\text{н}*}x_{1\text{н}*}=b,$$

$$A^*_{\text{оп}}x_{2\text{оп}}+A^*_{\text{н}0}x_{2\text{н}0}+A^*_{\text{н}*}x_{2\text{н}*}=b,$$

$$A^*_{\text{оп}}l_{1\text{оп}}=-A^*_{\text{н}*}l_{1\text{н}*}$$

следует, что $x_{2\text{оп}}=x_{1\text{оп}}+\varepsilon l_{1\text{оп}}$.

Значит, вдоль направления l_1 из плана x_1 можно попасть на план x_2, сделав шаг $\varepsilon>\Theta_1$. Это противоречит тому, что Θ_1 — максимально допустимый шаг.

Таким образом, через конечное число итераций двойственный план обязательно улучшится или выполнятся условия оптимальности. Поскольку двойственный план базисный, число опор задачи (1) конечно, то через конечное число итераций будет получен оптимальный двойственный план. Все последующие итерации будут проходить на этом двойственном плане, а так как улучшить его нельзя, то через конечное число итераций будет получен оптимальный план x^0 задачи (1). Теорема доказана.

3. Метод решения задач с основными ограничениями типа неравенств

1°. Рассмотрим задачу

$$c'x\to\max,\ b_*\leqslant Ax\leqslant b^*,\ d_*\leqslant x\leqslant d^*, \tag{1}$$

которая отличается от задачи § 2 наличием двухсторонних основных ограничений. Ясно, что к задаче (1) легко свести классические задачи линейного программирования.

Выбор модели (1) непосредственно связан с общей направленностью метода [ч. 1] и его модификаций, излагаемых в дополнении. Как правило, при составлении математической модели конкретной практической задачи легко указать лишь один из векторов каждой пары $\{b_*, b^*\}$ и $\{d_*, d^*\}$. Однако в модель (1) целесообразно вводить все указанные векторы. Даже если используются очевидные неравенства $Ax\leqslant b$ $(Ax\geqslant \bar{b})$, $0\leqslant x\leqslant d$, то перед решением задачи (1) следует заменить их неравенствами $b_* \leqslant Ax \leqslant b^*$ ($b_* \geqslant \bar{b}$, $b^* \leqslant \underline{b}$, $d_* \leqslant x \leqslant \leqslant d^*$, $d_* > 0$, $d^* \leqslant d$). Дополнительную информацию о векторах b_*, b^*, d_*, d^* рекомендуется получать у специалистов, занятых практическими прототипами модели (1). Специалист достаточно высокой квалификации обязан иметь свои представления об области, в которой, по его мнению, лежит оптимальный план, и об области, в которой расположены ресурсы, необходимые для реализации оптимального плана. Чем меньше размеры областей (т. е. чем меньше числа $\|d^* - d_*\|$, $\|b^* - b_*\|$), указанные специалистом в ряде типичных ситуаций, тем, очевидно, выше его квалификация *).

Планом задачи (1) назовем каждый n-вектор x, удовлетворяющий ее ограничениям $b_* \leqslant Ax \leqslant b^*$, $d_* \leqslant x \leqslant d^*$. Введем обозначения: $I = \{1, 2, \ldots, m\}$, $J = \{1, 2, \ldots, n\}$, $A(M, N)$ — $k \times s$-матрица с элементами a_{ij}, $i \in M \subset I$, $j \in N \subset J$, $k = |M|$, $s = |N|$, $|M|$ — количество элементов множества M; $I_{\text{а}}$ — множество индексов основных ограничений, активных на плане x ($I_{\text{а}} = I_* \cup I^*$, $I_* = \{i\colon a^{i\prime}x = b_{*i}\}$, $I^* = \{i\colon a^{i\prime}x = \overset{*}{b}_i\}$, $a^{i\prime}$ — i-я строка матрицы A).

Неособая подматрица $A_{\text{оп}} = A(I_{\text{а}}, J_{\text{оп}})$ матрицы $A(I_{\text{а}}, J)$ называется опорой плана x. Пара $\{x, A_{\text{оп}}\}$ — опорным планом задачи (1). Опорный план назовем невырожденным, если все его опорные компоненты некритические: $d_{*j} < x_j < \overset{*}{d}_j$, $j \in J_{\text{оп}}$. Опоре $A_{\text{оп}}$ соответствует вектор опорных потенциалов u: $u'A_{\text{оп}} = c'_{\text{оп}}$, где $c'_{\text{оп}} = \{c_i, i \in J_{\text{оп}}\}$.

Определение. Опорный план $\{x, A_{\text{оп}}\}$ считается согласованным, если

$$u_i \geqslant 0, \ i \in I^*; \quad u_i \leqslant 0, \ i \in I_*.$$

Замечание. Если $I_{\text{а}} = \varnothing$, т. е. $I_* = I^* = \varnothing$, то полагаем $A_{\text{оп}} = \varnothing$, $u = 0$.

Предположим, что наряду с моделью (1) известен согласованный опорный план $\{x^1, \overset{1}{A}_{\text{оп}}\}$. В [ч. 1] обсуждается проблема построения начального плана x^1 по информации, полученной от специалистов, занятых практическими прототипами задачи (1). Там же рассмотрена проблема построения опоры начального плана. Согласованность опорного плана характеризует (см. далее) качество исходной информации. Методы согласования (первая фаза метода) будут приведены ниже.

Пусть $\overset{1}{J}_* = \{j\colon \overset{1}{x}_j = d_{*j}\}$, $J^* = \{j\colon \overset{1}{x}_j = \overset{*}{d}_j\}$, $J^1\sim = \{j\colon d_{*j} < x_j < \overset{*}{d}_j\}$, $\Delta' = u'A(I_{\text{а}}, J) - c'$. Следуя [ч. 1], нетрудно доказать

Критерии оптимальности и субоптимальности. Соотношения

$$\Delta_j \geqslant 0, \ j \in \overset{1}{J}_*; \ \Delta_j \leqslant 0, \ j \in J^{1*}; \ \Delta_j = 0, \ j \in J^1\sim, \tag{2}$$

достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности согласованного опорного плана $\{x^1, \overset{1}{A}_{\text{оп}}\}$.

---

*) Приведенные соображения известны в методе экспертиз: при поиске некоторого параметра x от каждого эксперта получают три числа: пессимистическую d_*, оптимистическую d^* и наиболее вероятную x^* оценки этого параметра.

Если для опорного плана $\{x^1, \overset{1}{A}_{\text{оп}}\}$ выполнены условия

$$\beta^1 \leqslant \varepsilon,\ \beta^1 = -\sum_{\substack{\Delta_j>0,\\ j\in \overset{1}{J}_{\text{н}}}} \Delta_j (d_{*j} - \overset{1}{x}_j) - \sum_{\substack{\Delta_j<0,\\ j\in \overset{1}{J}_{\text{н}}}} \Delta_j (d_j^* - \overset{1}{x}_j) + \\ + \sum_{\substack{u_i>0,\\ i\in \overset{1}{I}_{\text{а}}}} u_i \delta_i^{1*} + \sum_{\substack{u_i<0,\\ i\in \overset{1}{I}_{\text{а}}}} u_i \overset{1}{\delta}_{*i}, \tag{3}$$

где $\overset{1}{J}_{\text{н}} = J \setminus \overset{1}{J}_{\text{оп}}$, $\delta^{1*} = b^* - Ax^1$, $\overset{1}{\delta}_* = b_* - Ax^1$, то x^1 — ε-оптимальный план.

Перейдем к рассмотрению основного вопроса метода: описанию итерации по улучшению начального согласованного опорного плана $\{x^1, \overset{1}{A}_{\text{оп}}\}$, не удовлетворяющего соотношениям (2), и замене его таким новым согласованным планом $\{x^2, \overset{2}{A}_{\text{оп}}\}$, что $c'x^1 < c'x^2$ (в невырожденном случае).

Следуя § 2, новый план ищем в виде $x^2 = x^1 + \Theta_0 l^1$, где $l^1 = \{\overset{1}{l}_{\text{оп}}, \overset{1}{l}_{\text{н}}\}$: $\overset{1}{l}_j = d_{*j} - \overset{1}{x}_j$, если $\Delta_j > 0$; $\overset{1}{l}_j = d_j^* - \overset{1}{x}_j$, если $\Delta_j < 0$; $\overset{1}{l}_j = 0$, если $\Delta_j = 0$, $j \in \overset{1}{J}_{\text{н}}$; $\overset{1}{l}_{\text{оп}} = -(\overset{1}{A}_{\text{оп}})^{-1} A(\overset{1}{I}_{\text{а}}, \overset{1}{J}_{\text{н}}) \overset{1}{l}_{\text{н}}$. Максимально допустимый шаг Θ_0 делаем таким, чтобы не нарушались прямые ограничения на неопорные переменные ($\Theta_0 \leqslant 1$), на опорные переменные: $\Theta_0 \leqslant \Theta_{j_0}^{\text{оп}}$,

$$\Theta_{j_0}^{\text{оп}} = \min \Theta_j,\ j \in \overset{1}{J}_{\text{оп}},\ \Theta_j = \begin{cases} (d_j^* - \overset{1}{x}_j)/\overset{1}{l}_j, & \text{если } \overset{1}{l}_j > 0; \\ (d_{*j} - \overset{1}{x}_j)/\overset{1}{l}_j, & \text{если } \overset{1}{l}_j < 0, \end{cases} \tag{4}$$

и чтобы не нарушались основные ограничения, пассивные на плане x^1: $\Theta_0 \leqslant \Theta_{i_0}^{\text{п}}$, $\Theta_{i_0}^{\text{п}} = \min \Theta_i$, $i \in \overset{1}{I}_{\text{п}} = I \setminus \overset{1}{I}_{\text{а}}$,

$$\Theta_i = \begin{cases} \delta_i^{1*}/a^{i\prime} l^1, & \text{если } a^{i\prime} l^1 > 0; \\ \overset{1}{\delta}_{*i}/a^{i\prime} l^1, & \text{если } a^{i\prime} l^1 < 0. \end{cases}$$

Таким образом, $\Theta_0 = \min\{1, \Theta_{j_0}^{\text{оп}}, \Theta_{i_0}^{\text{п}}\}$. Если $\Theta_0 = 1$, то план x^2 оптимален. Пусть $\Theta_0 < 1$. Опорный план $\{x^2, \overset{1}{A}_{\text{оп}}\}$ является согласованным. Для него оценка субоптимальности лучше, чем для опорного плана $\{x^1, \overset{1}{A}_{\text{оп}}\}$, и равна $(1-\Theta)\beta^1$, где β^1 — оценка плана $\{x^1, \overset{1}{A}_{\text{оп}}\}$. Если $(1-\Theta)\beta^1 \leqslant \varepsilon$, то план x^2 принимаем за приближенное решение задачи (1). В противном случае встает вопрос о замене опоры $\overset{1}{A}_{\text{оп}}$. Правила замены опоры основываются на тех же идеях оптимальности, что и в § 2, и сводятся к следующему.

Пусть $\Theta_0 = \Theta_{j_0}^{\text{оп}} < 1$, т. е. опорная переменная $\overset{2}{x}_{j_0}$ достигла границы. Элемент j_0 выводим из множества $\overset{1}{J}_{\text{оп}}$. По правилам двойственного опорного метода [ч. 1] улучшаем сопровождающий коплан Δ^1, соответствующий опоре $\overset{1}{A}_{\text{оп}}$. Полагаем

$$k=\begin{cases} 1, \text{ если } \overset{2}{x}_{j_0}=d_{*j_0}, \\ -1, \text{ если } \overset{2}{x}_{j_0}=d^*_{j_0}; \end{cases}$$

$$z'(\overset{1}{J}_{\text{н}} \cup \overset{1}{I}_{\text{а}})=e'_{j_0}\{(\overset{1}{A}_{\text{оп}})^{-1}A(\overset{1}{I}_{\text{а}}, \overset{1}{J}_{\text{н}}),\ (\overset{1}{A}_{\text{оп}})^{-1}\};$$

$$\sigma_j=\begin{cases} -\overset{1}{\Delta}_j/kz_j, \text{ если } k\overset{1}{\Delta}_j z_j<0, \\ 0, \quad \text{если } \Delta_j=0,\ \overset{1}{x}_j\neq d_{*j},\ kz_j>0, \\ 0, \quad \text{если } \Delta_j=0,\ \overset{1}{x}_j\neq d^*_j,\ kz_j<0, \\ \infty \text{ — в остальных случаях;} \end{cases} \quad j\in\overset{1}{J}_{\text{н}},$$

$$\sigma_i=\begin{cases} -u_i/kz_j, \text{ если } ku_iz_i<0, \\ 0, \quad \text{если } u_i=0,\ kz_i>0,\ i\in I_*, \\ 0, \quad \text{если } u_i=0,\ kz_i<0,\ i\in I^*, \\ \infty \text{ — в остальных случаях.} \end{cases} \quad i\in\overset{1}{I}_{\text{а}}, \tag{5}$$

Допустимый двойственный шаг равен

$$\sigma_0=\min\{\overset{\text{н}}{\sigma}_{j_*},\ \overset{\text{а}}{\sigma}_{i_*}\};\ \overset{\text{н}}{\sigma}_{j_*}=\min\sigma_j,\ j\in\overset{1}{I}_{\text{н}};\ \overset{\text{а}}{\sigma}_{i_*}=\min\sigma_i,\ i\in\overset{1}{I}_{\text{а}}. \tag{6}$$

Пусть $\sigma_0=\overset{\text{н}}{\sigma}_{j_*}$. Вместо элемента j_0 в множество $\overset{1}{J}_{\text{оп}}$ вводим элемент j_*: $\overset{2}{J}_{\text{оп}}=(\overset{1}{J}_{\text{оп}}\setminus j_0)\cup j_*$, $\overset{2}{I}_{\text{а}}=\overset{1}{I}_{\text{а}}$, $\overset{2}{A}_{\text{оп}}=A(\overset{2}{I}_{\text{а}}, \overset{2}{J}_{\text{оп}})$ (новая опорная матрица отличается от старой одним столбцом).

При $\sigma_0=\overset{\text{а}}{\sigma}_{i_*}$ из множества $\overset{1}{I}_{\text{а}}$ удаляем элемент i_*, из множества $\overset{1}{J}_{\text{оп}}$ — элемент j_0: $\overset{2}{I}_{\text{а}}=\overset{1}{I}_{\text{а}}\setminus i_*$, $\overset{2}{J}_{\text{оп}}=\overset{1}{J}_{\text{оп}}\setminus j_0$, $\overset{2}{A}_{\text{оп}}=A(\overset{2}{I}_{\text{а}}, \overset{2}{J}_{\text{оп}})$ ($\overset{2}{A}_{\text{оп}}$ получается из $\overset{1}{A}_{\text{оп}}$ вычеркиванием i_*-й строки и j_0-го столбца).

Рассмотрим теперь случай, когда $\Theta_0=\overset{\text{п}}{\Theta}_{i_0}<1$. Ограничение i_0 стало активным и должно войти в множество $\overset{1}{I}_{\text{а}}$. Положим

$$k=\begin{cases} 1, \text{ если } a^{i_0\prime}x^2=b^*_{i_0}, \\ -1, \text{ если } a^{i_0\prime}x^2=b_{*i_0}; \end{cases}$$

$$z'(\overset{1}{J}_{\text{н}}\cup\overset{1}{I}_{\text{а}})=e'_{i_0}\{A(\overset{1}{I}_{\text{п}}, \overset{1}{J}_{\text{н}})-A(\overset{1}{I}_{\text{п}}, \overset{1}{J}_{\text{оп}})(\overset{1}{A}_{\text{оп}})^{-1}A(I_{\text{а}}, \overset{1}{J}_{\text{н}}),$$
$$-A(\overset{1}{I}_{\text{п}}, \overset{1}{J}_{\text{оп}})(\overset{1}{A}_{\text{оп}})^{-1}\}.$$

Допустимый шаг σ_0 найдем по формулам (5) и (6). Пусть $\sigma_0=\overset{\text{н}}{\sigma}_{j_*}$. Элемент j_* добавим к множеству $\overset{1}{J}_{\text{оп}}$, элемент i_0 — к множеству $\overset{1}{I}_{\text{а}}$: $\overset{2}{J}_{\text{оп}}=\overset{1}{J}_{\text{оп}}\cup j_*$; $\overset{2}{I}_{\text{а}}=\overset{1}{I}_{\text{а}}\cup i_0$; $\overset{2}{A}_{\text{оп}}=A(\overset{2}{I}_{\text{а}}, \overset{2}{J}_{\text{оп}})$ (новая опора получается из старой добавлением новых строки и столбца).

Если $\sigma_0=\overset{\text{а}}{\sigma}_{i_*}$, то элемент i_0 вводим в $\overset{1}{I}_{\text{а}}$ вместо элемента i_*: $\overset{2}{J}_{\text{оп}}=\overset{1}{J}_{\text{оп}}$; $\overset{2}{I}_{\text{а}}=(\overset{1}{I}_{\text{а}}\setminus i_*)\cup i_0$; $\overset{2}{A}_{\text{оп}}=A(\overset{2}{I}_{\text{а}}, \overset{2}{J}_{\text{оп}})$ (матрицы $\overset{1}{A}_{\text{оп}}$ и $\overset{2}{A}_{\text{оп}}$ отличаются одной строкой).

Нетрудно проверить, что новый опорный план $\{x^2, \overset{2}{A}_{\text{оп}}\}$ является согласованным. Для него оценка субоптимальности равна

$$\beta^2=(1-\Theta)(\beta^1-|\alpha|\sigma_0),\quad \alpha=\begin{cases} \overset{1}{l}_{j_0}, & \text{если } \Theta_0=\overset{\text{оп}}{\Theta}_{j_0};\\ a^{i_0\prime}l^1, & \text{если } \Theta_0=\overset{\text{п}}{\Theta}_{i_0}.\end{cases}$$

Замечания: 1. Если $\sigma_0=\overset{\text{н}}{\sigma}_{j_*}$ и j_* определяется неоднозначно, то в первую очередь в множество $J_{\text{оп}}$ вводим элемент j_*, для которого $d_{*j_*}<\overset{2}{x}_{j_*}<\overset{*}{d}_{j_*}$. Если таких элементов нет, то вводим элемент j_*, для которого $\overset{2}{x}_{j_*}$ принимает граничное значение. Как и в § 2, можно показать, что это не мешает на следующей итерации улучшить план x^2.

2. В случаях, когда $\sigma_0=\overset{\text{а}}{\sigma}_{i_*}$, элемент i_* выводим из множества $I_{\text{а}}$, т. е. i_*-е ограничение относится к пассивным, хотя на плане x^2 оно активно. Это может помешать на следующей итерации сделать шаг $\Theta_0>0$. Можно показать, что на самом деле этого не произойдет, так как на следующей итерации i_*-е ограничение станет пассивным.

3. При решении задач с основными ограничениями типа неравенств размеры опор могут меняться от итерации к итерации. Поскольку каждый раз увеличение или уменьшение равно единице, то построение новой обратной матрицы по старой не представляет труда и мало отличается от классического случая [МО].

Рассмотрим теперь вопрос о согласовании. Оценка субоптимальности для согласованного опорного плана $\{x, A_{\text{оп}}\}$ имеет вид

$$\beta=-\sum_{\substack{\Delta_j>0,\\ j\in J_{\text{н}}}}\Delta_j(d_{*j}-x_j)-\sum_{\substack{\Delta_j<0,\\ j\in J_{\text{н}}}}\Delta_j(\overset{*}{d}_j-x_j). \tag{7}$$

Из (3) и (7) следует, что число

$$\sum_{\substack{u_i>0,\\ i\in I_{\text{а}}}}u_i\overset{*}{\delta}_i+\sum_{\substack{u_i<0,\\ i\in I_{\text{а}}}}u_i\delta_{*i}$$

можно трактовать как меру несогласованности плана $\{x, A_{\text{оп}}\}$. Понятно, что оптимальный опорный план всегда согласован. Покажем, как от несогласованного плана $\{x, A_{\text{оп}}\}$ перейти к такому согласованному плану $\{x^*, \overset{*}{A}_{\text{оп}}\}$, чтобы $c'x<c'x^*$ (в невырожденном случае).

Пусть опорный план $\{x, A_{\text{оп}}\}$ несогласованный. Подсчитаем число $|u_{i_*}|=\max\{\max\limits_{i\in I_*}u_i, \max\limits_{i\in I^*}(-u_i)\}$. Легко проверить, что вектор $l=\{l_{\text{оп}}, l_{\text{н}}\}$, $l_{\text{н}}=0$, $l_{\text{оп}}=\overset{-1}{A}_{\text{оп}}e_{i_*}\operatorname{sign}u_{i_*}$, является подходящим направлением для плана x. Новый план ищем в виде $\bar{x}=x+\Theta_0 l$.

Максимально допустимый шаг Θ_0 делаем таким, чтобы не нарушались прямые ограничения по опорным переменным ($\Theta_0 \leqslant \Theta_{j_0}^{\text{оп}}$, где $\Theta_{j_0}^{\text{оп}}$ найдено по формуле (4)), основные ограничения, пассивные на плане x ($\Theta_0 \leqslant \Theta_{i_0}^{\text{п}}$, где $\Theta_{i_0}^{\text{п}}$ найдено, как и в основном алгоритме), и чтобы не нарушалось i_*-е основное ограничение ($\Theta_0 \leqslant \Theta_{i_*}$, $\Theta_{i_*} = -\delta_{*i_*}$, если $u_{i_*} < 0$; $\Theta_0 = \delta_{i_*}^*$, если $u_{i_*} > 0$).

Максимально допустимый шаг

$$\Theta_0 = \min \{\Theta_{j_0}^{\text{оп}}, \Theta_{i_0}^{\text{п}}, \Theta_{i_*}\}.$$

Значение целевой функции на плане $\bar{x}$ возрастает на величину $\Theta_0 |u_{i_*}|$. Для нового плана $\bar{x}$ найдем новую опору. Рассмотрим случаи:

1) $\Theta_0 = \Theta_{i_*}$. Опора не меняется: $\bar{I}_{\text{а}} = I_{\text{а}}$, $\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}}$, $\bar{A}_{\text{оп}} = A(\bar{I}_{\text{а}}, \bar{J}_{\text{оп}})$.

2) $\Theta_0 = \Theta_{i_0}^{\text{п}}$. Новая опора получается из старой вычеркиванием i_*-й строки и j_0-го столбца: $\bar{I}_{\text{а}} = I_{\text{а}} \setminus i_*$, $\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}} \setminus j_0$.

3) $\Theta_0 = \Theta_{i_0}^{\text{п}}$. Новая опора получается из старой заменой i_*-й строки на строку $A(i_0, J_{\text{оп}})$: $\bar{I}_{\text{а}} = (I_{\text{а}} \setminus i_*) \cup i_0$, $\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}}$.

Если полученный план $\{\bar{x}, \bar{A}_{\text{оп}}\}$ не является согласованным, то повторяем для него все описанные операции.

За конечное число шагов будет получен согласованный план $\{x^*, A_{\text{оп}}^*\}$ такой, что $c'x < c'x^*$, $|I_{\text{а}}(x)| \geqslant |I_{\text{а}}(x^*)|$.

2°. Изложим упрощенный метод решения задачи (1), в которой число переменных (n) значительно меньше числа ограничений (m). Упрощение достигается за счет того, что размеры опоры на всех итерациях остаются постоянными ($n \times n$). При этом может несколько увеличиться объем требуемой оперативной памяти ЭВМ, но при небольших n это не очень существенно. Эффективность модификации не ниже, чем у метода, описанного в п. 1.

Отнесем прямые ограничения задачи (1) к основным, т. е. представим задачу в виде

$$c'x \to \max, \quad \bar{b}_* \leqslant \bar{A}x \leqslant \bar{b}^*, \tag{8}$$

где $\bar{A} = \begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix}$, $\bar{b}^{*\prime} = \{b^{*\prime}, d^{*\prime}\}$, $\bar{b}_*{}' = \{b_*{}', d_*{}'\}$, $\operatorname{rank} \bar{A} = n$.

Пара $\{x, A_{\text{оп}}\}$, где $A_{\text{оп}} = \bar{A}(I_{\text{оп}}, J)$ — невырожденная матрица, называется опорным планом. Опорный план невырожденный, если все ограничения i, $i \in I_{\text{н}} = I \setminus I_{\text{оп}}$, пассивные. По опорному плану построим опорные потенциалы $u' = c'A_{\text{оп}}^{-1}$. Из результатов п. 1 нетрудно получить

Критерии оптимальности и субоптимальности. Соотношения $u_i \geqslant 0$, $i \in I^*$; $u_i \leqslant 0$, $i \in I_*$; $u_i = 0$, $i \in I_{\text{оп}} \setminus I_{\text{а}}$, достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности опорного плана $\{x, A_{\text{оп}}\}$ в задаче (8).

Если

$$\beta \leqslant \varepsilon, \quad \beta = \sum_{\substack{u_i < 0, \\ i \in I_{\text{оп}}}} u_i \delta_{*i} + \sum_{\substack{u_i > 0, \\ i \in I_{\text{оп}}}} u_i \delta_i^*, \tag{9}$$

то x — ε-оптимальный план. Для каждого ε-оптимального плана x^ε

найдется опора $A_{оп}$ такая, что для опорного плана $\{x^\varepsilon, A_{оп}\}$ выполняется неравенство (9).

Пусть эти критерии не выполняются. Новый план ищем в виде $\bar{x}=x+\Theta_0 l$, где $l=-A_{оп}^{-1}\alpha$,

$$\alpha_i=\begin{cases}-\delta_{*i}, & \text{если } u_i<0,\\ -\delta_i^*, & \text{если } u_i>0, \quad i\in I_{оп}.\\ 0, & \text{если } u_i=0,\end{cases}$$

Максимально допустимый шаг Θ_0 находится так, чтобы не нарушались основные ограничения из $I_{оп}$ $(\Theta_0\leqslant 1)$ и $I_н$: $\Theta_0\leqslant\Theta_{i_0}$, $\Theta_{i_0}=\min\Theta_i$, $i\in I_н$, где

$$\Theta_i=\begin{cases}\delta_i^*/a^{i\prime}l, & \text{если } a^{i\prime}l>0;\\ \delta_{*i}/a^{i\prime}l, & \text{если } a^{i\prime}l<0.\end{cases}$$

Таким образом, $\Theta_0=\min\{1, \Theta_{i_0}\}$. Если $\Theta_0=1$, то план $\bar{x}$ оптимальный. Пусть $\Theta_0=\Theta_{i_0}<1$. Этот случай аналогичен случаю $\Theta_0=\overset{п}{\Theta}_{i_0}<1$ предыдущего пункта. С учетом того, что в данном пункте $J_н=\varnothing$ и множеству $I_а$ соответствует множество $I_{оп}$, из п. 1 получаем $z'(I_{оп})=-e_{i_0}'A(I_н, J)A_{оп}^{-1}$ и находим допустимый шаг σ_0.

Случай $\sigma_0=\sigma_{j_*}$ невозможен. Следовательно, всегда $\sigma_0=\sigma_{i_*}$. Новая опорная матрица получается из старой заменой i_*-й строки на i_0-ю строку.

За конечное число итераций метод приводит к оптимальному плану, если не встречаются сильно вырожденные планы.

4. Метод последовательного улучшения подходящего направления

Вернемся к задаче (1) § 2. Пусть $\{x^1, A_{оп}\}$ — начальный невырожденный опорный план. По правилам § 2 построим для него подходящее направление l^1. Если вдоль l^1 максимально допустимый шаг Θ^1 меньше единицы, это означает, что при выборе подходящего направления нужно кроме неопорных компонент учесть и некоторые опорные. Нетрудно сообразить, что среди опорных следует в первую очередь рассмотреть такие, которые имеют индексы критических компонент плана $x^1+\Theta^1 l^1$. Для улучшения направления l^1 рассмотрим задачу (второй этап)

$$-\Delta_н' l_н\to\max,\quad d_{*i_1}-\overset{1}{x}_{i_1}\leqslant-\sum_{j\in I_н}x_{i_1 j}l_j\leqslant d_{i_1}^*-\overset{1}{x}_{i_1},\qquad (1)$$

$$d_{*н}-\overset{1}{x}_н\leqslant l_н\leqslant d_н^*-\overset{1}{x}_н,$$

где i_1 — индекс критической опорной компоненты плана $x^1+\Theta^1 l^1$, $\{x_{i_1 j}, j\in I_н\}=e_{i_1}'A_{оп}^{-1}A_н$.

Эта задача имеет одно основное ограничение типа неравенства, которое на векторе $\Theta^1 l^1$ обращается в равенство. Для решения задачи (1) целесообразно привлечь метод § 3. При этом на итерациях осуществляется двойная проверка: 1) текущее направление $l^1(s)$ в совокупности с планом x^1 проверяется на субоптимальность плана $x^1+\Theta^1(s)l^1(s)$; 2) вектор $l^1(s)$ проверяется на субоптимальность в задаче (1), ибо на промежуточных этапах часто можно ограничиться приближенным достижением максимума в (1).

Пусть $l^{k-1}(s)$ — текущий план задачи (k-й этап, s-я итерация)

$$-\Delta_{\text{н}}' l_{\text{н}} \to \max,\ d_{*i} - \overset{1}{x}_i \leqslant -\sum_{j\in I_{\text{н}}} x_{ij} l_j \leqslant d_i^* - \overset{1}{x}_i,\ i\in I_{\text{оп}\ k-1},$$
$$d_{*\text{н}} - \overset{1}{x}_{\text{н}} \leqslant l_{\text{н}} \leqslant d_{\text{н}}^* - \overset{1}{x}_{\text{н}}, \tag{2}$$

где $\{x_{ij},\ j\in I_{\text{н}}\} = e_i' A_{\text{оп}}^{-1} A_{\text{н}}$, $I_{\text{оп}\ k-1} = \{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}\}$, и $\Theta^{k-1}(s)$ — максимально допустимый шаг вдоль $l^{k-1}(s)$. Если $\Theta^{k-1}(s)=1$, то $x^{k-1}(s) = x^1 + \Theta^{k-1}(s) l^{k-1}(s)$ — оптимальный план. При $\Theta^{k-1}(s) < 1$ проверяем план $x^{k-1}(s)$ на субоптимальность. Если

$$-\sum_{\substack{\Delta_j>0,\\ j\in I_{\text{н}}}} \Delta_j (d_{*j} - \overset{k-1}{x_j}(s)) - \sum_{\substack{\Delta_j<0,\\ j\in I_{\text{н}}}} \Delta_j (d_j^* - \overset{k-1}{x_j}(s)) +$$
$$+\sum_{\substack{u_i>0,\\ i\in I^{\text{а}}_{\text{оп}\ k-1}}} u_i (d_i^* - \overset{k-1}{x_i}(s)) + \sum_{\substack{u_i<0,\\ i\in I^{\text{а}}_{\text{оп}\ k-1}}} u_i (d_{*i} - \overset{k-1}{x_i}(s)) \leqslant \varepsilon, \tag{3}$$

где $I^{\text{а}}_{\text{оп}\ k-1}$ — индексы активных основных ограничений задачи (2) на плане $l^{k-1}(s)$, числа Δ_j, $j\in I_{\text{н}}$, u_i, $i\in I^{\text{а}}_{\text{оп}\ k-1}$, определены согласно методу § 3, то $x^{k-1}(s)$ — ε-оптимальный план задачи (1) § 2.

Если условие (3) не выполняется, то проверяем план $l^{k-1}(s)$ на субоптимальность в задаче (2). Если

$$-\sum_{\substack{\Delta_j>0,\\ j\in I_{\text{н}}}} \Delta_j (d_{*j} - \overset{k-1}{l_j}(s)) - \sum_{\substack{\Delta_j<0,\\ j\in I_{\text{н}}}} \Delta_j (d_j^* - \overset{k-1}{l_j}(s)) +$$
$$+\sum_{\substack{u_i>0,\\ i\in I^{\text{а}}_{\text{оп}\ k-1}}} u_i \delta_i^* + \sum_{\substack{u_i<0,\\ i\in I^{\text{а}}_{\text{оп}\ k-1}}} u_i \delta_{*i} \leqslant \varepsilon_1, \tag{4}$$

где числа Δ_j, $j\in I_{\text{н}}$, u_i, δ_i^*, δ_{*i}, $i\in I^{\text{а}}_{\text{оп}\ k-1}$, определены согласно методу § 3, то $l^{k-1}(s)$ — ε_1-оптимальный план задачи (2).

Пусть условие (4) не выполняется, тогда по правилам § 3 улучшаем план $l^{k-1}(s)$ $(l^{k-1}(s) \to l^{k-1}(s+1))$. Если условие (4) выполняется, то вектор $l^k = l^{k-1}(s)$ $(\Theta^k = \Theta^{k-1}(s))$ принимаем за приближенное решение k-го этапа. Поскольку для плана $x^k = x^{k-1}(s)$ условия субоптимальности не выполняются, то приступаем к следующему этапу: к улучшению направления l^k.

Пусть i_k — индекс опорной переменной, которая определила шаг Θ^k. Добавив к ограничениям задачи (2) еще одно основное ограничение, получим задачу

$$-\Delta'_{\text{н}} l_{\text{н}} \to \max,\ d_{*i} - \overset{1}{x}_i \leqslant - \sum x_{ij} l_j \leqslant \overset{*}{d}_i - \overset{1}{x}_i,\ i \in I_{\text{оп}\ k},$$

$$d_{*\text{н}} - \overset{1}{x}_{\text{н}} \leqslant l_{\text{н}} \leqslant \overset{*}{d}_{\text{н}} - \overset{1}{x}_{\text{н}},$$

где $I_{\text{оп}\ k} = I_{\text{оп}\ k-1} \cup i_k$ ($k+1$-й этап), с начальным опорным планом $\{l^k(0) = \Theta^k l^k,\ A(\overset{\text{а}}{I}_{\text{оп}\ k} = \varnothing,\ J_{\text{оп}\ k} = \varnothing)\}$. На плане $l^k(0)$ i_k-е ограничение активное и должно войти в множество $\overset{\text{а}}{I}_{\text{оп}\ k}$; элемент j_0, $j_0 \in I_{\text{н}}$, который войдет в $J_{\text{оп}\ k}$, определяется по правилам § 3. Продолжаем решение задачи (2) методом § 3, осуществляя на каждой итерации двойной контроль (см. выше).

Не более чем через m этапов начальное подходящее направление l^1 будет улучшено до направления l^s, $s \leqslant m$, которое даст оптимальный или субоптимальный план.

Из описания метода следует, что на каждой его итерации имеется план, который лучше старого. Число основных ограничений вспомогательной задачи на первом этапе равно нулю, на каждом этапе возрастает на единицу и не превышает m. Каждая вспомогательная задача использует решение предыдущего этапа и поэтому в большинстве случаев будет требовать небольшого числа итераций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Данциг Дж.* Линейное программирование, его обобщения и применения. М., «Прогресс», 1966.

2. *Форд Л. Р., Фалкерсон Д. Р.* Потоки в сетях. М., «Мир», 1966.

3. *Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б.* Задачи линейного программирования транспортного типа. М., «Наука», 1969.

4. *Ху Т.* Целочисленное программирование и потоки в сетях. М., «Мир», 1974.

5. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Методы линейного программирования, ч. 1. Общие задачи. Минск, Изд-во БГУ, 1977.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Рафаил Габасов
Фаина Михайловна Кириллова

МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Ч. 2. Транспортные задачи

Редактор
Т. А. Акулович
Художник
В. И. Попов
Художественный редактор
И. Х. Беленькая
Технический редактор
В. П. Безбородова
Корректор
Л. В. Лебедева

ИБ № 173

Сдано в набор 24.01.78. Подписано в печать 5.07.78. АТ 09212. Формат $84\times108^1/_{32}$. Бумага типографская № 3. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 12,6. Уч.-изд. л. 12,65. Тираж 3600 экз. Заказ 771. Цена 2 руб. 10 коп.

Издательство Белорусского государственного университета им. В. И. Ленина. Минск, Парковая магистраль, 11. Дом книги. Ордена Трудового Красного Знамени типография издательства ЦК КП Белоруссии. Минск, Ленинский пр., 79.

2 р. 10 к