Р. Габасов
Ф. М. Кириллова

# МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

3
ЧАСТЬ

3 МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Р. Габасов,
Ф. М. Кириллова

# МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

## Часть 3

## СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

МИНСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО БГУ им. В. И. ЛЕНИНА
1980

ББК 22.1
Г12
*УДК 519.852*



**Методы линейного программирования.** Ч. 3. Специальные задачи. Габасов Р., Кириллова Ф. М.— Минск, Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1980, 368 с.

Заключительная часть книги посвящена применению методов, изложенных в ч. 1 и ч. 2, решению разнообразных экстремальных задач, распространенных в приложениях. Рассматриваются большие задачи линейного программирования с обоснованием ряда новых методов их решения; задачи оптимального управления с доказательством усиленного принципа максимума; экстремальные задачи на сетях в усложненной постановке; обобщенные задачи линейного программирования в условиях неопределенности; задачи квадратичного программирования с исследованием невыпуклого случая; дискретные задачи; специальные задачи нелинейного программирования с доказательством теорем сходимости алгоритмов.

Основной целью третьей части является демонстрация возможностей методов линейного программирования (в сочетании с другими идеями) при решении сложных задач оптимизации.

Ил. 3, табл. 5, библ. 31.

Г $\frac{30502-044}{М317-80}$ 45—80 1502000000

ББК 22.1
517.8

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . . . . . . . . . . . . . 5
ВВЕДЕНИЕ . . . . . . . . . . . . . . . . . 7
§ 1. Адаптивный метод . . . . . . . . . 7
§ 2. Метод решения задач с обобщенными прямыми ограничениями . . . . . . . . . . 28
§ 3. К построению методов нулевого порядка . . 40

*Глава I.* БОЛЬШИЕ ЗАДАЧИ . . . . . . . . . . 42
§ 1. Задача с большим числом переменных . . . 42
§ 2. Задача с большим числом основных ограничений 54
§ 3. Использование специальной структуры опоры . 61
§ 4. Метод Данцига — Вулфа декомпозиции ограничений прямой задачи . . . . . . . . 70
§ 5. Декомпозиция двойственных ограничений методом Данцига — Вулфа . . . . . . . . 79
§ 6. Декомпозиция опоры . . . . . . . . . 83
§ 7. Метод возмущений . . . . . . . . . 96
§ 8. Метод распределения . . . . . . . . . 104
§ 9. Итеративные методы . . . . . . . . 111

*Глава II.* ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ . . . . . . . 115
§ 1. Задача терминального управления . . . . 115
§ 2. Оптимальные процессы с фазовыми ограничениями . . . . . . . . . . . . . . 121
§ 3. Оптимальное управление при смешанных ограничениях . . . . . . . . . . . . 133

*Глава III.* СЕТЕВЫЕ ЗАДАЧИ . . . . . . . . . 138
§ 1. Экстремальные пути . . . . . . . . . 139
§ 2. Потоки, оптимальные по времени . . . . 151
§ 3. Условная оптимизация потока . . . . . 158
§ 4. Сетевая распределительная задача . . . . 169
§ 5. Оптимальный мультипоток на обобщенной сети 186
§ 6. Производственно-транспортная задача . . . 198
§ 7. Оптимальный поток на сети с делителем . . 203
§ 8. Задача сетевого планирования . . . . . 207

*Глава IV.* ОБОБЩЕННЫЕ ЗАДАЧИ . . . . . . . . 228
§ 1. Билинейные задачи . . . . . . . . . 229
§ 2. Стохастические задачи . . . . . . . . 240
§ 3. Параметрические задачи . . . . . . . 251
§ 4. Многоцелевые задачи . . . . . . . . 258
§ 5. Игровые задачи . . . . . . . . . . 280

*Глава V.* КВАДРАТИЧНЫЕ ЗАДАЧИ . . . . . . . 287
§ 1. Прямой опорный метод . . . . . . . . 287
§ 2. Опорный метод с оптимальной заменой элементов опоры . . . . . . . . . . . . . 305
§ 3. Адаптивный метод . . . . . . . . . 316
§ 4. Многоцелевые задачи . . . . . . . . 258

*Глава VI.* ДИСКРЕТНЫЕ ЗАДАЧИ . . . . . . . . 330
§ 1. Метод ветвей и границ . . . . . . . 331
§ 2. Метод отсечения . . . . . . . . . . 335
§ 3. Опорный метод . . . . . . . . . . 338

*Глава VII.* НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ . . . . . . . . 340
§ 1. Кусочно-линейные задачи . . . . . . . 341
§ 2. Позиномные задачи . . . . . . . . . 346
§ 3. Аппроксимация нелинейных задач . . . . 351
§ 4. Дробно-линейная задача . . . . . . . 358

Заключение . . . . . . . . . . . . . . . 364
Литература . . . . . . . . . . . . . . . 367

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Каждый класс прикладных задач, пройдя этап математического моделирования, характеризуется специфическим классом описывающих его функций и специальной структурой множества параметров. Многие из возникших подобным образом классов задач линейного и нелинейного программирования [1, 2] имеют в настоящее время детально разработанную теорию и всесторонне проверенные методы решения. Классический пример — задачи транспортного типа, рассмотренные во второй части данной книги [3]. Многие интересные классы задач изучены в [4, 5]. Процесс выделения специальных задач интенсивно развивался в последние пятнадцать — двадцать лет и будет, по всей вероятности, основным направлением развития методов оптимизации в будущем. Это объясняется тем, что стандартные (общие) методы оптимизации, в которых не учтена специфика задач, удается реализовать даже на современных ЭВМ лишь для задач небольшого размера по сравнению с размерами тех прикладных задач, которые актуальны сейчас в экономике и технике. Прогресс вычислительной техники наряду с расширением круга задач, доступных численному решению известными методами, остро ставит вопрос об эффективном ее использовании. В этой ситуации особое значение приобретают исследования по математическим методам, которые учитывают, с одной стороны, специфику решаемых задач, а с другой — возможности и тенденции развития ЭВМ.

В данной, третьей, части книги для решения ряда важных специальных задач математического программирования применяются методы, обоснованные в первых двух частях. Однако теперь эти методы не выступают как единственное средство решения задач, а используются в сочетании с другими методами, учитывающими специфику рассматриваемых задач. Кроме того, в отличие от ч. 2 здесь в основу берется, как правило, только один прямой опорный метод из ч. 1.

Несколько слов о содержании третьей части.

Введение посвящено построению модификаций опорного метода, впервые опубликованного авторами в [28] и развитого в предыдущих частях книги. Нигде специально не подчеркивается, что в схему опорных методов при соответствующей нормировке укладываются многие известные методы (методы проекции градиента, условного градиента и др.).

Изложение основного материала начинается с методов решения больших задач линейного программирования. Как известно, размер задачи определяется числом $n$ переменных и числом $m$ основных ограничений. Большие задачи $(n, m \gg 1)$ типичны для всех современных приложений, и разработка эффективных методов их решения — одна из самых актуальных проблем методов оптимизации.

Систематическое изучение больших задач началось после создания в 1960 г. метода декомпозиции Данцига — Вулфа. В главе I излагается модификация этого метода и приводится ряд других методов решения больших задач.

В главе II предложенные методы применяются для решения некоторых типичных задач линейного оптимального управления.

Материал главы III связан с экстремальными задачами на сетях. Рассматриваются разнообразные задачи в сетевой постановке. В каждой задаче имеется особенность, ради которой проводится модификация (реализация) общего метода. В совокупности задачи, исследованные в главе, позволяют составить сетевую модель любой задачи линейного программирования. Однако такая общая ситуация в книге не изучается и будет предметом нашей будущей работы.

Глава IV посвящена нескольким обобщениям классической задачи линейного программирования. Суть этих обобщений состоит в том, что параметры задач не считаются фиксированными, а могут принимать конечное множество значений, и выбором этих параметров распоряжается участник, который в классической модели не рассматривался. Отдельно изучаются случаи, когда интересы участника 1) совпадают с интересами исследователя, выбирающего планы; 2) противоположны и 3) участник безразличен к действиям исследователя.

В связи с большим вниманием, которое в последние годы уделяется вычислительным методам с ускоренной сходимостью, актуальной стала проблема разработки эффективных методов решения задач квадратичного программирования. Эта проблема с позиций методов данной книги рассматривается в главе V.

В главе VI изложены первые результаты по распространению предложенных в книге методов на задачи линейного дискретного программирования.

Книга завершается (глава VII) изучением нескольких проблем нелинейного программирования. Затронуты лишь те аспекты проблем, которые непосредственно связаны с основными методами книги.

Третья часть книги рассчитана на читателя, уже владеющего материалом предыдущих частей. Предполагается, что для него не составит особого труда самостоятельное решение небольших иллюстративных примеров. Авторы считают, что книга может быть использована в качестве учебного пособия: материал прорабатывался на занятиях со студентами.

В книгу включены результаты О. И. Костюковой (введение, гл. I, II; § 2, 4—6, 9 гл. III; § 1, 3 гл. IV; § 3 гл. VI); В. М. Ракецкого (гл. V); Л. В. Командиной (§ 3 гл. III); С. В. Маркова (§ 6—8 гл. III); Нгуен Дык Хиеу (§ 9 гл. III); М. П. Дымкова (§ 4 гл. IV); Е. И. Шилкиной (§ 5 гл. IV, § 1 гл. VII); Л. Ф. Дежурко (§ 4 гл. VII).

Эти же сотрудники участвовали в подготовке данной части к печати. Пользуясь случаем, выражаем им нашу глубокую благодарность.

*АВТОРЫ*

# ВВЕДЕНИЕ

Методы решения специальных задач, которым посвящена третья часть книги, существенно опираются на конструкции, разработанные в предыдущих частях. Исходя из этих конструкций, во введении строится несколько модификаций методов из [ч. 1, ч. 2]. (Здесь и далее подобная ссылка указывает на соответствующую часть работы [3].)

## § 1. Адаптивный метод

Опорный метод, составивший основу [ч. 1], был разработан для задач линейного программирования в канонической форме и по ряду причин своими операциями максимально приближен к классическим прямому и двойственному симплекс-методам. Особенность модификации состояла в том, что она позволяла учесть априорную информацию о планах (прямых и двойственных) и остановить процесс решения задачи с помощью критерия субоптимальности на плане из заданной окрестности (по значениям целевой функции) оптимального плана. В [ч. 2] приведен опорный метод с адаптивной нормировкой, который был также ориентирован на задачи в канонической форме, но в отличие от симплексного и опорного методов использовал более естественную нормировку допустимых направлений, зависящую от текущего плана. В этом методе впервые было введено экстремальное правило замены опор, основанное на дополнительной информации, имеющейся на итерациях. Отмеченные идеи ниже получат дальнейшее развитие. Особое внимание уделяется специфике математической модели и обеспечению тесной связи между всей совокупностью начальной и текущей информаций и операциями по их преобразованию. В основе всех построений лежит стремление в наибольшей степени учесть априорную информацию о задаче (ее модели и планах) и организовать такой процесс преобразования информации, в котором сведены к минимуму эвристические приемы и максимально учитывается цель всей оптимизации, структура модели и текущая информация. Принятый подход наиболее естествен для задач, занимающих низшую ступень в иерархии задач математического программирования. Большой удельный вес эвристики, видимо, неизбежен и оправдан лишь при исследовании новых и сложных задач.

**1. Математическая модель. Основные понятия.** Рассмотрим *общую задачу линейного программирования в естественной форме* *)

$$c'x \to \max,\ b_* \leqslant Ax \leqslant b^*,\ d_* \leqslant x \leqslant d^*. \qquad (1)$$

Здесь $c$, $x$, $d_*$, $d^*$ — $n$-векторы; $b_*$, $b^*$ — $m$-векторы, $A$ — $m \times n$-матрица; каждый вектор в операции записан в виде столбца; для получения вектора-строки используется оператор транспонирования $'$ (штрих); знаки $\geqslant$, $\leqslant$ в векторных выражениях означают совокупность компонентных неравенств; запись «max» означает найти максимум при условиях, которые следуют непосредственно за ней; действия над векторами и матрицами осуществляются по правилам векторно-матричного исчисления, например, $c'x$ — произведение вектора-строки $c'$ на вектор-столбец $x$ — есть скалярное произведение $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i$.

Общая задача линейного программирования известна еще в *нормальной форме*

$$c'x \to \max,\ Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0, \qquad (1а)$$

и *канонической (стандартной)*

$$c'x \to \max,\ Ax = b,\ x \geqslant 0. \qquad (1б)$$

Модели (1а), (1б) получаются из (1) при частных значениях ее параметров. К каждой из них можно свести модель (1), если расширить последнюю за счет увеличения количества переменных и ограничений.

Таким образом, хотя все обсуждаемые формы и являются общими, между ними существует принципиальная разница: (1а), (1б) получаются из (1) при

*) В зарубежной литературе (см., например, [6]) задача (1) известна как *задача интервального линейного программирования.*

частных значениях параметров; переход к (1а) или (1б) связан с увеличением размеров задач и потерей особенностей структуры исходной модели. В силу сказанного речь в дальнейшем пойдет о методах решения именно задачи (1), а не других задач, к которым можно свести (1).

В теории линейного программирования (в частности, в теории двойственности) удобна нормальная форма общей задачи. Для пояснения теоретических аспектов многих вычислительных методов часто (например, в симплекс-методе) привлекается каноническая форма. Форма (1) естественна в том смысле, что именно она чаще всего возникает при моделировании прикладных задач, при использовании методов линейного программирования в нелинейном программировании и при эффективном учете априорной информации для решения задачи (1).

Многие существующие пакеты программ позволяют решать задачи линейного программирования в произвольной форме записи, но, как правило, составлены они по методам, разработанным для одной (чаще всего канонической) формы. Другие формы автоматически сводятся к избранной, что приводит к потере особенностей структуры модели. Практика показывает, что эффективность алгоритмов существенно зависит от степени учета структуры модели. Классическое подтверждение этому — транспортные задачи. В [6] показана эффективность алгоритмов, учитывающих специальную структуру задач типа задачи (1).

С моделью задачи (1) связано понятие *плана:* такого $n$-вектора $x$, на котором выполняются *основные* ($b_* \leqslant Ax \leqslant b^*$) и *прямые* ($d_* \leqslant x \leqslant d^*$) *ограничения.* План $x^\varepsilon$ называется *$\varepsilon$-оптимальным (субоптимальным),* если $c'x^0 - c'x^\varepsilon \leqslant \varepsilon$, где $x^0$ — *оптимальный план (решение)* задачи (1): $c'x^0 = \max c'x$, максимум вычисляется по всем планам.

Одним из основных элементов излагаемого в книге подхода является предположение о том, что при решении практических задач используется (известна) не только математическая модель (1), но и априорная информация о планах, отражающая опыт функционирования реальных систем, знания специалистов, проектировавших аналогичные системы, догадки и интуицию экспертов, результаты решения задач в упрощенной постановке и т. д.

Она имеется в любой практической ситуации и составляет необходимый элемент прогресса, естественного развития знаний и опыта в области, к которой относится конкретная практическая задача. Сбор подобной информации представляет важный этап решения большой задачи, во многом определяющий успех следующего этапа, когда эта информация алгоритмически преобразуется с целью решения задачи (1). Таким образом, в излагаемом подходе нетрудно заметить элементы «человеко-машинных» методов решения практических задач.

Доступ к начальной информации о планах тесно связан с выбранной моделью (1). Действительно, результатом каждой экспертизы являются, как известно, три оценки: пессимистическая, наиболее вероятная и оптимистическая. Тогда векторы $d_*$, $x$, $d^*$ естественно трактовать как пессимистическую, наиболее вероятную и оптимистическую оценки оптимального плана. Аналогично трактуются в терминах ресурсов, необходимых для реализации оптимального плана, векторы $b_*$, $Ax$, $b^*$. Поэтому даже в тех случаях, когда исходная модель имеет форму (1а) или (1б), учет исходной информации приводит к модели (1). Проблемы, которые возникают при использовании начальной информации для запуска алгоритма оптимизации, рассматриваются ниже.

Под *методом решения* задачи (1) будем понимать совокупность двух методов: прямого и двойственного. Оба метода предназначены для построения оптимального или субоптимального плана задачи (1). Разница между ними состоит в том, что прямой метод преобразует информацию о планах самой задачи (1) (прямые планы), а двойственный — информацию о планах задачи, двойственной к задаче (1) (двойственные планы). Приведенная классификация отличается от традиционной, основанной на типе модели. (Раньше априорная информация не связывалась с моделью.) Каждая компонента метода имеет важное значение и используется при глубоком исследовании любой практической задачи. Поэтому на протяжении всей книги им уделялось почти одинаковое внимание. Только ради экономии места в третьей части несложные детали реализации двойственных методов оставляются читателям в качестве упражнений. Следует подчеркнуть, что именно использование идей двойственности характеризует современный уровень работ по методам оптимизации.

В основу адаптивного метода преобразования априорной информации положено понятие опоры.

Определение. *Опорой* *) задачи (1) называется неособая матрица $A_{\text{оп}}=A(I_{\text{оп}}, J_{\text{оп}})$, составленная из элементов $a_{ij}$, $i\in I_{\text{оп}}$, $j\in J_{\text{оп}}$, матрицы $A=A(I, J)$, $I=\{1, 2, \ldots, m\}$, $J=\{1, 2, \ldots, n\}$. Новое понятие возникло из анализа симплекс-метода и является непосредственным аналогом *базиса*. В отличие от базиса опора в общем случае представляет самостоятельный элемент метода, не зависящий от плана **). В процессе решения задачи (1) ее опора изменяется наряду с планом. Состав начальной опоры входит в априорную информацию. Качество априорной информации об опоре так же, как и качество плана, определяется ниже (см. (9), (12)) из оценки субоптимальности, величина которой тесно связана и с планом, и с опорой.

Эффективность каждого метода решения практических задач зависит от трех элементов: степени использования априорной информации, степени использования текущей информации для ее преобразования, своевременности останова процесса решения после достижения заданных характеристик. Выше обсуждался первый элемент адаптивного метода в связи с типом модели и начальной информацией о планах. Второй и третий элементы будут рассмотрены в дальнейшем при изложении метода.

**2. Прямой метод.** В основе метода лежит следующее

Определение. Пара $\{x, A_{\text{оп}}\}$ из плана и опоры задачи (1) называется *опорным планом.*

Опорный план считается *невырожденным,* если он *не вырожден по основным* $(b_*(I_{\text{н}})<A(I_{\text{н}}, J)x(J)<b^*(I_{\text{н}}))$ и *прямым* $(d_*(J_{\text{оп}})<x(J_{\text{оп}})<d^*(J_{\text{оп}}))$ *ограничениям.* Здесь $I_{\text{н}}=I\setminus I_{\text{оп}}$, $b_*(I_{\text{н}})=\{b_{*i}, i\in I_{\text{н}}\}$.

Пусть $\{x, A_{\text{оп}}\}$ — начальный опорный план ***). Вычислим *нижний* $\omega_*=\omega_*(x)=b_*-Ax$ и *верхний* $\omega^*=\omega^*(x)=b^*-Ax$ *векторы невязок, вектор потенциалов* $u'=u'(I_{\text{оп}})=c'_{\text{оп}}A_{\text{оп}}^{-1}$ и *вектор оценок* $\Delta'=\Delta'(J)=$

*) Иногда опорой удобно называть совокупность $U_{\text{оп}}=\{I_{\text{оп}}, J_{\text{оп}}\}$, тогда $A_{\text{оп}}$ — *опорная матрица.*

**) В симплекс-методе базис, как известно, однозначно определяет *базисный план,* которым (и только им) оперирует симплекс-метод.

***) Случай, когда априорная информация не является опорным планом, будет исследован после описания метода.

$= u'A(I_{оп}, J) - c'$. Для преобразования опорного плана $\{x, A_{оп}\}$ сначала найдем *формулу приращения целевой функции*

$$c'\Delta x = c'\tilde{x} - c'x,$$

где $\tilde{x} = x + \Delta x$ — некоторый план задачи (1).

Из определения векторов оценок и потенциалов имеем

$$c'\Delta x = u'A(I_{оп}, J)\Delta x - \Delta'\Delta x = [u'A(I_{оп}, J_н) - \Delta'(J_н)]\Delta x(J_н) + \\ + u'A_{оп}\Delta x(J_{оп}), \; J_н = J \setminus J_{оп}. \quad (2)$$

Поскольку $b_* \leqslant A(x + \Delta x) \leqslant b^*$, то, используя $\omega_*$, $\omega^*$, получаем $\omega_* \leqslant A\Delta x \leqslant \omega^*$. Опорная группа последних неравенств эквивалентна соотношениям

$$A(I_{оп}, J_{оп})\Delta x(J_{оп}) + A(I_{оп}, J_н)\Delta x(J_н) = z(I_{оп}), \\ \omega_*(I_{оп}) \leqslant z(I_{оп}) \leqslant \omega^*(I_{оп}). \quad (3)$$

Найдем отсюда

$$\Delta x(J_{оп}) = A_{оп}^{-1} z(I_{оп}) - A_{оп}^{-1} A(I_{оп}, J_н)\Delta x(J_н) \quad (4)$$

и подставим результат в (2), что даст искомую формулу

$$c'\Delta x = -\Delta'(J_н)\Delta x(J_н) + u'z(I_{оп}). \quad (5)$$

Пусть $a_i$ — $i$-я строка матрицы $A$, $a_i = A(i, J)$; $I_* = I_*(x) = \{i \in I : a_i' x = b_{*i}\}$, $I^* = I^*(x) = \{i \in I : a_i' x = b_i^*\}$, $I^{\sim} = I \setminus (I_* \cup I^*)$; $J_* = J_*(x) = \{j \in J : x_j = d_{*j}\}$, $J^* = J^*(x) = \{j \in J : x_j = d_j^*\}$, $J^{\sim} = J \setminus (J^* \cup J_*)$; $I_{*оп} = I_* \cap I_{оп}$, $J_{*н} = J_* \cap J_н$ и т. п. Тогда справедлив

**Критерий оптимальности.** Соотношения

$$u(I_{*оп}) \leqslant 0, \; u(I_{оп}^*) \geqslant 0, \; u(I_{оп}^{\sim}) = 0; \\ \Delta(J_{*н}) \geqslant 0, \; \Delta(J_н^*) \leqslant 0, \; \Delta(J_н^{\sim}) = 0 \quad (6)$$

достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности опорного плана $\{x, A_{оп}\}$.

Доказательство. *Достаточность*. Вектор $z(I_{*оп})$ на множестве $I_{*оп}$ неотрицателен, на множестве $I_{оп}^*$ неположителен, так как $\omega_*(I_{*оп}) = 0$, $\omega^*(I_{оп}^*) = 0$. Следовательно, при условиях (6) выполняется неравенство $u'z(I_{оп}) \leqslant 0$ для всех $z(I_{оп})$ из (3). Вектор $\Delta x(J_{*н})$ на множестве $J_{*н}$ неотрицателен, на множестве $J_н^*$ неположителен, так как $\Delta x(J_{*н}) = \tilde{x}(J_{*н}) - x(J_{*н}) \geqslant d_*(J_{*н}) - d_*(J_{*н}) = 0$; $\Delta x(J_н^*) \leqslant d^*(J_н^*) - d^*(J_н^*) = 0$. Следовательно, при условиях (6) выполняется неравенство $-\Delta'(J_н)\,\Delta x(J_н)\leqslant 0$ для всех допустимых $\Delta x(J_н)$.

Таким образом, любое допустимое приращение $\Delta x$ не ведет, согласно (5), к увеличению значения целевой функции $c'\Delta x\leqslant 0$. Опорный план $\{x, A_{оп}\}$ оптимален.

*Необходимость.* Пусть $\{x, A_{оп}\}$ — невырожденный оптимальный план. Если допустить, что соотношения (6) не выполняются по группе потенциалов, то при $\Delta x_н=0$ найдется достаточно малая допустимая вариация вектора $z(I_{оп})$, которая не нарушает прямых ограничений по опорным переменным и основных неопорных ограничений, и такая, что $u'z(I_{оп})>0$.

Аналогично нарушение соотношений (6) по группе оценок позволяет при $z=0$ легко построить допустимую вариацию $\Delta x(J_н)$, при которой $-\Delta'(J_н)\Delta x(J_н)>0$. Поскольку полученные неравенства противоречат предположению об оптимальности плана $x$, то критерий оптимальности доказан.

Из приведенных рассуждений следует, что при заданном $\{x, A_{оп}\}$ для каждого плана $\tilde{x}$ найдутся допустимые векторы $\Delta x(J_н)$, $z(I_{оп})$ такие, что $\tilde{x}=x+\{\Delta x(J_{оп}), \Delta x(J_н)\}$, где вектор $\Delta x(J_{оп})$ определен согласно (4). Поэтому максимум функции (5), вычисленный без учета любой части ограничений на $\Delta x$, будет служить оценкой отклонения плана $x$ от оптимального по целевой функции.

Найдем максимум функции (5) с учетом ограничений

$$\begin{gathered} d_*(J_н)-x(J_н)\leqslant\Delta x(J_н)\leqslant d^*(J_н)-x(J_н),\\ \omega_*(I_{оп})\leqslant z(I_{оп})\leqslant\omega^*(I_{оп}). \end{gathered}\tag{7}$$

Он достигается при

$$\begin{gathered} \Delta x_j=d_{*j}-x_j,\ \text{если}\ \Delta_j>0;\ \Delta x_j=d_j^*-x_j,\ \text{если}\ \Delta_j<0;\\ \Delta x_j=0,\ \text{если}\ \Delta_j=0,\ j\in J_н;\ z_i=\omega_{*i},\ \text{если}\ u_i<0;\\ z_i=\omega_i^*,\ \text{если}\ u_i>0;\ z_i=0,\ \text{если}\ u_i=0,\ i\in I_{оп}, \end{gathered}\tag{8}$$

и равен числу $\beta=\beta(x, A_{оп})$:

$$\begin{aligned} \beta=\sum_{\substack{\Delta_j>0,\\ j\in J_н}}\Delta_j(x_j-d_{*j})+\sum_{\substack{\Delta_j<0,\\ j\in J_н}}\Delta_j(x_j-d_j^*)+\\ +\sum_{\substack{u_i<0,\\ i\in I_{оп}}}u_i\omega_{*i}+\sum_{\substack{u_i>0,\\ i\in I_{оп}}}u_i\omega_i^*, \end{aligned}\tag{9}$$

которое назовем *оценкой субоптимальности* опорного плана $\{x, A_{\text{оп}}\}$.

**Критерий субоптимальности.** При $\beta \leqslant \varepsilon$ опорный план $\{x, A_{\text{оп}}\}$ является $\varepsilon$-оптимальным планом задачи (1). Для каждого $\varepsilon$-оптимального плана $x^\varepsilon$ существует такая опора $A_{\text{оп}}$, что оценка субоптимальности $\beta$ опорного плана $\{x^\varepsilon, A_{\text{оп}}\}$ удовлетворяет неравенству $\beta \leqslant \varepsilon$.

Первая часть утверждения доказана выше. Справедливость второй части следует из доказываемого ниже разложения величины *) $\beta$.

Пусть $\beta > \varepsilon$, где $\varepsilon$ — заданная точность приближения к оптимальному плану $x^0$ по значениям целевой функции. В этом случае приступаем к улучшению начального опорного плана $\{x, A_{\text{оп}}\}$. Естественным принципом улучшения опорного плана $\{x, A_{\text{оп}}\}$, который принят в адаптивном методе, является переход к опорному плану $\{\bar{x}, \bar{A}_{\text{оп}}\}$, оценка субоптимальности $\bar{\beta}$ которого меньше $\beta$.

Введем задачу, двойственную к (1):

$$b^{*\prime}s - b_*'t - d_*'v + d^{*\prime}w \to \min,$$

$$A'y - v + w = c, \quad s - t - y = 0, \quad s \geqslant 0, \quad t \geqslant 0, \quad v \geqslant 0, \quad w \geqslant 0. \qquad (10)$$

Нетрудно проверить, что вектор $\{y, s, t, v, w\}$ с компонентами $y = y(I)$, $s = s(I)$, $t = t(I)$, $v = v(J)$, $w = w(J)$, определенными следующим образом:

$$\begin{gathered} y(I_{\text{оп}}) = u, \ y(I_{\text{н}}) = 0, \ s_i = y_i, \ t_i = 0, \ \text{если } y_i \geqslant 0; \\ s_i = 0, \ t_i = -y_i, \ \text{если } y_i < 0, \ i \in I; \\ v_j = \Delta_j, \ w_j = 0, \ \text{если } \Delta_j \geqslant 0; \\ v_j = 0, \ w_j = -\Delta_j, \ \text{если } \Delta_j < 0, \ j \in J, \end{gathered} \qquad (11)$$

является двойственным планом. Поскольку этот вектор однозначно определяется опорой $A_{\text{оп}}$ задачи (1), то он называется двойственным планом, сопровождающим опорный план $\{x, A_{\text{оп}}\}$ *(сопровождающим двойственным планом)*. С помощью плана $x$ и сопровождающего двойственного плана (11) из (9) получаем

$$\beta = \sum_{j \in J} \Delta_j x_j - \sum_{\substack{j \in J, \\ \Delta_j > 0}} \Delta_j d_{*j} - \sum_{\substack{j \in J, \\ \Delta_j < 0}} \Delta_j d_j^* - \sum_{i \in I_{\text{оп}}} u_i a_i' x +$$

---

*) При вычислении $\beta$ были отброшены прямые опорные и основные неопорные ограничения. Для уточнения оценки субоптимальности можно привлечь часть из них. Это будет сделано в § 2. В [ч. 2] описан метод последовательного учета прямых опорных ограничений. В общем случае этот вопрос тесно связан с проблемой декомпозиции (см. гл. I).

$$+\sum_{\substack{i\in I_{\text{оп}},\\ u_i<0}} u_i b_{*i} + \sum_{\substack{i\in I_{\text{оп}},\\ u_i>0}} u_i b_i^* = [u'A(I_{\text{оп}},\ J) - c']\,x - d_*'v +$$
$$+ d^{*'}w - u'A(I_{\text{оп}},\ J)\,x + b^{*'}s - b_*'t = -c'x +$$
$$+ b^{*'}s - b_*'t - d_*'v + d^{*'}w = (c'x^0 - c'x) - (b^{*'}s^0 - b_*'t^0 -$$
$$- d_*'v^0 + d^{*'}w^0 - b^{*'}s + b_*'t + d_*'v - d^{*'}w).$$

Таким образом, оценка субоптимальности $\beta$ допускает разложение

$$\beta = \beta_x + \beta_{\text{оп}}, \tag{12}$$

где $\beta_x = c'x^0 - c'x$ — *мера неоптимальности плана* $x$, $\beta_{\text{оп}} = b^{*'}s - b_*'t - d_*'v + d^{*'}w - b^{*'}s^0 + b_*'t^0 + d_*'v^0 - d^{*'}w^0$ — мера *неоптимальности опоры* $A_{\text{оп}}$ (значок 0 означает оптимальное значение).

Если плану $x$ приписать опору $A^0_{\text{оп}}$, сопровождающий двойственный план которой является оптимальным двойственным базисным планом задачи (1), то $\beta_{\text{оп}} = 0$ и $\beta = \beta_x$, т. е. оценка субоптимальности станет точной: $c'x^0 - c'x = \beta$. Этим и доказывается необходимая часть критерия субоптимальности.

В силу разложения (12) компоненты $x$, $A_{\text{оп}}$ опорного плана можно улучшать независимо друг от друга. Новый план $\bar{x}$ будем строить в виде $\bar{x} = x + \Theta l$, где $l$ — подходящее направление, $\Theta$ — максимально допустимый шаг вдоль $l$. Прямые методы различаются между собой принципом выбора подходящего направления. В прямом опорном методе из [ч. 1] так же, как и в симплекс-методе, подходящее направление строится из принципа максимума производной по допустимым направлениям, стесненным специальным *(симплексным) нормировочным условием* $\left(\sum_{j\in J_{\text{н}}} |l_j| = 1,\ l_j \geqslant 0,\ j \in J_{\text{н}}\right)$. Можно подобрать нормировочное условие и для других прямых методов (например, для *метода проектируемых градиентов*). Однако все эти условия являются эвристическими, внесены в метод извне и не связаны непосредственно ни со структурой модели, ни с ситуацией, сложившейся на итерации. Более естественной является нормировка (7), которая используется при вычислении оценки субоптимальности. Она построена только по параметрам задачи, зависит от текущего опорного плана и, как отмечено выше, допускает дальнейший более точный учет ограничений.

В общем случае решение (8) задачи максимизации приращения (5) при ограничениях (7) не будет допустимым приращением, но вектор $l=\{l(J_{\text{оп}}),\ l(J_{\text{н}})\}$, построенный по (8):

$$
\begin{gathered}
l_j = d_{*j} - x_j,\ \text{если}\ \Delta_j > 0;\\
l_j = d_j^* - x_j,\ \text{если}\ \Delta_j < 0;\\
l_j = 0,\ \text{если}\ \Delta_j = 0,\ j \in J_{\text{н}};\\
l(J_{\text{оп}}) = A_{\text{оп}}^{-1}\omega(I_{\text{оп}}) - A_{\text{оп}}^{-1}A(I_{\text{оп}},\ J_{\text{н}})\, l(J_{\text{н}});\\
\omega(I_{\text{оп}}) = \{\omega_i,\ i \in I_{\text{оп}}\},\ \omega_i = \omega_{*i},\ \text{если}\ u_i < 0;\\
\omega_i = \omega_i^*,\ \text{если}\ u_i > 0;\ \omega_i = 0,\ \text{если}\ u_i > 0,\ i \in I_{\text{оп}},
\end{gathered}
\tag{13}
$$

является подходящим направлением для плана $x$. В задаче максимизации с ограничениями максимизация приращения целевой функции полнее учитывает основную цель и структуру задачи и более естественна, чем максимизация производной, которая, являясь, по существу, локальной характеристикой функции, лишь косвенно связана с исходной целью задачи.

Подходящее направление (13) в случае *оптимальной* опоры $A_{\text{оп}}(\beta_{\text{оп}}=0)$ и невырожденного сопровождающего двойственного плана за одну итерацию приводит к оптимальному плану *) $\bar{x}=x+l$, ибо тогда вектор $\bar{x}$ совпадает с псевдопланом, однозначно построенным двойственным опорным методом по оптимальному двойственному плану.

В общем случае не известно, оптимальна ли опора. Поэтому для построения $\bar{x}$ следует вычислить шаг $\Theta$. При движении вдоль $l$ могут нарушиться ограничения, которые не были учтены, когда находили максимальное приращение целевой функции (5) при условиях (7). Максимально допустимый шаг по опорным прямым ограничениям равен

$$
\begin{gathered}
\Theta_{j_0} = \min \Theta_j,\ j \in J_{\text{оп}};\ \Theta_j = (d_{*j} - x_j)/l_j,\ \text{если}\ l_j < 0;\\
\Theta_j = (d_j^* - x_j)/l_j,\ \text{если}\ l_j > 0;\ \Theta_j = \infty,\ \text{если}\ l_j = 0.
\end{gathered}
$$

Максимально допустимый шаг по неопорным основным ограничениям равен

$$
\Theta_{i_0} = \min \Theta_i,\ i \in I_{\text{н}};\ \Theta_i = w_{*i}/a_i' l,\ \text{если}\ a_i' l < 0;
$$

*) Оптимальный план задачи (1) можно получить по оптимальной опоре $A_{\text{оп}}$ и непосредственно, пользуясь теорией двойственности.

$$\Theta_i = \omega_i^*/a_i'l, \text{ если } a_i'l > 0; \ \Theta_i = \infty, \text{ если } a_i'l = 0.$$

Таким образом,

$$\Theta = \min\{1, \Theta_{i_0}, \Theta_{j_0}\},$$

где единица означает, что при движении вдоль $l$ не должны нарушаться ограничения (7).

На новом плане $\bar{x} = x + \Theta l$ выполняются соотношения $c'x^0 - c'\bar{x} = c'x^0 - c'x - \Theta c'l \leqslant \beta - \Theta c'l = \beta - \Theta(u'A(I_{\text{оп}}, J) - \Delta')l(J) = \beta + \Theta(\Delta'l - u'\omega(I_{\text{оп}})) = \beta - \Theta\beta = (1-\Theta)\beta$, т. е. при $(1-\Theta)\beta \leqslant \varepsilon$ процесс решения задачи заканчивается построением $\varepsilon$-оптимального плана $\bar{x}$.

Пусть $(1-\Theta)\beta > \varepsilon$. В прямом опорном методе из [ч. 1] так же, как и в симплекс-методе, новая опора определялась в общем случае однозначно вместе с обновлением плана. Если для симплекс-метода указанный способ, в силу специфики базисного плана, единственно возможный, то для подхода, принятого в книге, допускаются и другие принципы замены опоры. Следуя принятому выше принципу, опору $A_{\text{оп}}$ заменяем на такую опору $\bar{A}_{\text{оп}}$, чтобы уменьшилась оценка субоптимальности. Ясно, что новая операция основана не на эвристических соображениях, а тесно связана с ситуацией, сложившейся на итерации.

Выберем некоторые подмножества $I_0$, $J_0$ ($I_0 \subset I_{\text{н}}$, $J_0 \subset J_{\text{оп}}$). Среди всевозможных опор $\bar{A}_{\text{оп}} = A(\bar{I}_{\text{оп}}, \bar{J}_{\text{оп}})$, таких что $\bar{I}_{\text{оп}} \cap I_0 = \varnothing$, $\bar{J}_{\text{оп}} \supset J_0$, найдем ту, при которой оценка субоптимальности опорного плана $\{\bar{x}, \bar{A}_{\text{оп}}\}$ минимальна. Требование, чтобы все элементы множества $J_0$ были опорными ($J_0 \subset \bar{J}_{\text{оп}}$), а все элементы множества $I_0$ — неопорными ($I_0 \cap \bar{I}_{\text{оп}} = \varnothing$), эквивалентно условиям

$$w(J_0) = v(J_0) = 0, \ y(I_0) = s(I_0) = t(I_0) = 0. \qquad (14)$$

Таким образом, поиск опоры $\bar{A}_{\text{оп}}$ сводится к поиску оптимального базисного плана двойственной задачи (10) с учетом дополнительных условий (14). Введя обозначения $\tilde{I} = I \setminus I_0$, $\tilde{J} = J \setminus J_0$, $r = \{y(\tilde{I}), \ s(\tilde{I}), \ t(\tilde{I}), \ v(\tilde{J}), \ w(\tilde{J})\}$, новую задачу запишем в следующей форме:

$$f(r) = b^{*\prime}(\tilde{I})\, s(\tilde{I}) - b_*'(\tilde{I})\, t(\tilde{I}) - d_*'(\tilde{J})\, v(\tilde{J}) +$$
$$+ d^{*\prime}(\tilde{J})\, w(\tilde{J}) \to \min,$$
$$A'(\tilde{I}, J_0)\, y(\tilde{I}) = c(J_0), \ A'(\tilde{I}, \tilde{J})\, y(\tilde{I}) +$$

$$+w(\tilde{J})-v(\tilde{J})=c(\tilde{J}),$$
$$-y(\tilde{I})+s(\tilde{I})-t(\tilde{I})=0,\ s(\tilde{I})\geqslant 0,\ t(\tilde{I})\geqslant 0, \quad (15)$$
$$v(\tilde{J})\geqslant 0,\ w(\tilde{J})\geqslant 0.$$

При решении задачи (15) в качестве начального базисного плана можно взять план $r$, составленный из компонент двойственного плана, сопровождающего опору $A_{\text{оп}}$. (Именно этим объясняется требование $J_0 \subset J_{\text{оп}}$, $I_0 \subset I_{\text{н}}$. При любом выборе $I_0$ и $J_0$ новая опора будет не хуже старой.) Базис оптимального базисного плана $r^* = \{y^*(\tilde{I}),\ s^*(\tilde{I}),\ t^*(\tilde{I}),\ v^*(\tilde{J}),\ w^*(\tilde{J})\}$ задачи (15) и есть искомая опора $\bar{A}_{\text{оп}}$.

Нетрудно показать, что оценка $\bar{\beta}_{\text{оп}}$ для новой опоры $\bar{A}_{\text{оп}}$ равна $\bar{\beta}_{\text{оп}} = \beta_{\text{оп}} - (f(r) - f(r^*))$. Следовательно, опора $\bar{A}_{\text{оп}}$ не хуже опоры $A_{\text{оп}}$, поскольку $f(r) \geqslant f(r^*)$. Оценка субоптимальности нового опорного плана $\{\bar{x},\ \bar{A}_{\text{оп}}\}$ равна $\bar{\beta} = (1-\Theta)\beta - (f(r) - f(r^*))$.

Естественно ожидать, что величина $f(r) - f(r^*)$ будет бо́льшей, если в множество $J_{\text{оп}} \setminus J_0$ войдут индексы $j$, для которых числа $x_j + l_j$ в наибольшей степени выходят за границы отрезка $[d_{*j},\ d_j^*]$ (аналогично для $I_{\text{н}} \setminus I_0$):

$$\begin{aligned} J_0 &= \{j,\ j \in J_{\text{оп}},\ \rho(x_j + l_j,\ [d_{*j},\ d_j^*]) \leqslant \zeta\}; \\ I_0 &= \{i,\ i \in I_{\text{н}},\ \rho(a_i'(x+l),\ [b_{*i},\ b_i^*]) \leqslant \zeta\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь $\rho(a,\ \cdot)$ — расстояние между множествами, $\zeta$ — параметр итерации.

Рассмотрим задачу, двойственную к (15):

$$\begin{gathered} c'(J)x(J) \to \max, \\ b_*(\tilde{I}) \leqslant A(\tilde{I},\ J)x(J) \leqslant b^*(\tilde{I}), \\ d_*(\tilde{J}) \leqslant x(\tilde{J}) \leqslant d^*(\tilde{J}), \end{gathered} \quad (17)$$

которую можно решать вместо (15), начиная с опорного плана $\{\bar{x},\ A_{\text{оп}}\}$. Если на оптимальном опорном плане $\{x^*,\ \bar{A}_{\text{оп}}\}$ задачи (17) (на оптимальном псевдоплане задачи (15)) выполняются условия

$$d_{*j} \leqslant x_j^* \leqslant d_j^*,\ j \in J_0;\ b_{*i} \leqslant a_i'x^* \leqslant b_i^*,\ i \in I_0, \quad (18)$$

то $\bar{A}_{\text{оп}}$ — оптимальная опора задачи (1) (т. е. величина $f(r) - f(r^*)$ максимально возможная) и $x^*$ — ее оптимальный план. Следовательно, в множество $J_0$ имеет смысл включать те опорные компоненты плана $\bar{x}$, которые далеки от границы:

$$J_0 = \{j : j \in J_{\text{оп}};\ d_{*j} + \zeta < \bar{x}_j < d_j^* - \zeta\}, \qquad (19)$$

или те, на которых при движении вдоль $l$ прямые ограничения нарушаются в последнюю очередь:

$$J_0 = \{j : j \in J_{\text{оп}};\ \Theta_j > \Theta + \zeta\}. \qquad (20)$$

Аналогично для $I_0$:

$$I_0 = \{i : i \in I_{\text{н}};\ b_{*i} + \zeta < a_i'\bar{x} < b_i^* - \zeta\} \qquad (21)$$

или

$$I_0 = \{i:\ i \in I_{\text{н}};\ \Theta_i > \Theta + \zeta\}. \qquad (22)$$

С другой стороны, от выбора опоры $\bar{A}_{\text{оп}}$ существенно зависит выбор подходящего направления на следующей итерации (для опорного плана $\{\bar{x}, \bar{A}_{\text{оп}}\}$). Пусть условия (18) не выполняются. Возьмем в качестве подходящего направления вектор $x^* - \bar{x}$. Если коплан $\bar{\Delta}$, сопровождающий опору $\bar{A}_{\text{оп}}$, невырожденный, то этот вектор совпадает с вектором $l$, построенным по формулам (13) для коплана $\bar{\Delta}$. При вырожденном коплане $\bar{\Delta}$ векторы $x^* - \bar{x}$ и $l$ могут не совпадать, однако в любом случае оба они являются оптимальными планами задачи (5), (7), построенной по опоре $\bar{A}_{\text{оп}}$. Из (17) видно, что максимально допустимый шаг вдоль направления $x^* - \bar{x}$ достигается либо на прямых ограничениях $j \in J_0$, либо на основных ограничениях $i \in I_0$. Это также говорит за то, что в $J_0$ и $I_0$ следует включать далекие (на плане $\bar{x}$) от границ переменные и ограничения, т. е. строить $J_0$ и $I_0$ по формулам (19), (21). При этом гарантируется ненулевой шаг:

$$\bar{\Theta} > \min\left\{\min_{j \in J_0} \frac{\zeta}{|l_j|},\ \min_{i \in I_0} \frac{\zeta}{|a_i' l|}\right\}.$$

При больших $\zeta$ множества $J_0 = I_0 = \varnothing$ и задача (17) ((15)) совпадает с исходной. При $\zeta = 0$ и условии, что шаг $\Theta$ на предыдущей итерации определился однозначно, имеем случай элементарной замены (см. п. 3):

$$I_0 = I_{\text{н}} \setminus i_0,\ J_0 = J_{\text{оп}},\ \text{если}\ \Theta = \Theta_{i_0};$$
$$I_0 = I_{\text{н}},\ J_0 = J_{\text{оп}} \setminus j_0,\ \text{если}\ \Theta = \Theta_{j_0}.$$

Эти соотношения будут выполняться и в случае множеств (20), (22) при одном дополнительном требовании:

$$\Theta_j < \infty,\ j \in J_{\text{оп}};\ \Theta_i < \infty,\ i \in I_{\text{н}}.$$

Рассмотрим множества (16) при различных значениях параметра $\zeta$. При $\zeta>0$ может случиться, что $j_0 \in J_0$ для $\Theta=\Theta_{j_0}$ и $i_0 \in I_0$ для $\Theta=\Theta_{i_0}$. Шаг $\overline{\Theta}$ может оказаться равным нулю. С другой стороны, при достаточно больших $\zeta$ имеем $J_0=J_{\text{оп}}$, $I_0=I_{\text{н}}$. Задача (15) имеет единственный план $r$, следовательно, опора не меняется. При $\zeta=0$ в общем случае $|J_0|<|J_{\text{оп}}|-1$, $|I_0|<|I_{\text{н}}|-1$, даже если шаг $\Theta$ на предыдущей итерации определился однозначно, т. е. для множества (16) элементарная замена не получается из общего как частный случай при $\zeta=0$.

Замечание. Нетрудно показать, что оценка субоптимальности нового опорного плана $\{\bar{x}, \bar{A}_{\text{оп}}\}$ равна $\bar{\beta}=c'x^*-c'\bar{x}$, где $x^*$ — оптимальный план задачи (17).

Переход $\{x, A_{\text{оп}}\} \to \{\bar{x}, \bar{A}_{\text{оп}}\}$ назовем *большой итерацией* метода. Она состоит из *малых итераций* решения задачи (15) ((17)). Малая итерация называется *регулярной,* если она ведет к улучшению целевой функции задачи (15). Большая итерация называется *регулярной,* если $\bar{\beta}_{\text{оп}}<\beta_{\text{оп}}$.

**Теорема.** Адаптивный прямой метод конечен, если в задаче конечно число нерегулярных больших итераций.

Доказательство аналогично приведенному в [ч. 2] для прямого опорного метода с адаптивной нормировкой.

В общем случае априорная информация не позволяет сразу указать начальный опорный план. В [ч. 1] обсуждены три возможности: 1) отсутствие какой-либо информации, 2) наличие плана без опоры, 3) наличие квазиплана. Последняя возможность является наиболее общей. Остановимся на ней подробнее и опишем метод, который отличается от метода, изложенного в [ч. 1], и более естествен для принятого в книге подхода.

Итак, предположим, что при решении практической задачи составлена модель (1) и от специалистов получена информация (совокупность чисел) $x^1=\{x_j^1, j \in J\}$, которая, по их мнению, представляет оптимальный план. Для сложных задач, когда информация собирается от специалистов, знакомых лишь с отдельными подсистемами большой системы, вектор $x^1$ будет удовлетворять, как правило, прямым ограничениям, но при этом будет нарушаться часть основных ограничений *) ($x^1$ — квазиплан

*) Случай, когда на $x^1$ нарушается и часть прямых ограничений, исследуется по той же схеме, которая приводится ниже.

задачи (1)). Отказываться от такой информации неразумно, так как в ней заключен опыт и интуиция многих специалистов.

Для ее использования введем первую фазу адаптивного метода, на которой рассмотрим задачу

$$
\begin{gathered}
e'(z_* + z^*) \to \min_{x,\, z_*,\, z^*},\ b_* \leqslant Ax + z_* - z^* \leqslant b^*, \\
c'x^1 - \alpha_* \leqslant c'x \leqslant c'x^1 + \alpha^*,\ d_* \leqslant x \leqslant d^*, \qquad (23) \\
0 \leqslant z_{*i} \leqslant \max\{0,\ \omega^1_{*i}\},\ 0 \leqslant z^*_i \leqslant \max\{0,\ -\omega^{*1}_i\},\ i \in I,
\end{gathered}
$$

где $\omega_*{}^1 = b_* - Ax^1$, $\omega^{*1} = b^* - Ax^1$, $\alpha_* \geqslant 0$, $\alpha^* \geqslant 0$ — параметры первой фазы, характеризующие априорную информацию об оптимальном значении целевой функции задачи (1). В задаче (23) искусственные переменные $z_*$, $z^*$ введены для ликвидации невязок в основных ограничениях. Задача (23) отличается от задачи первой фазы симплекс-метода и от задачи, рассмотренной в [ч. 1] при начальном квазиплане, тем, что в задаче (23) при уничтожении невязок значение целевой функции (качество исходной информации) удерживается на определенном уровне, тогда как в $M$-методе и на первой фазе симплекс-метода при уничтожении невязок начальная информация могла испортиться.

Начальный план задачи (23) строится по квазиплану $x^1$ задачи (1) и имеет вид $\{x^1,\ z^1_*,\ z^{*1}\}$, где $z^1_{*i} = \omega^1_{*i}$, $z^{*1}_i = 0$, если $\omega^1_{*i} \geqslant 0$; $z^1_{*i} = 0$, $z^{*1}_i = \omega^{*1}_i$, если $\omega^{*1}_i \leqslant 0$, $i \in I$. Начальная опора для задачи (23) строится, как и в [ч. 1], по информации об активных основных ограничениях и некритических переменных для квазиплана $x^1$. Зная начальный опорный план, решаем задачу (23) адаптивным методом.

Если на решении $\{x^*,\ z^*_*,\ z^{**}\}$ задачи (23) один из векторов $z^*_*$, $z^{**}$ отличен от нуля и выполняются неравенства $c'x^1 - \alpha_* < c'x^* < c'x^1 + \alpha^*$, то основные ограничения задачи (1) противоречивы. Для совместных основных ограничений задачи (1) существуют такие $\alpha_*$, $\alpha^*$, что $z^*_* = z^{**} = 0$. В этом случае вектор $x^*$ вместе с соответствующей плану $\{x^*,\ 0,\ 0\}$ опорой принимается в качестве начального опорного плана задачи (1) и процесс решения продолжается *(вторая фаза)* согласно описанному выше адаптивному методу.

**3. Прямой метод с элементарной заменой опоры.** Изложенный в п. 2 метод зависит от параметра $\zeta$. При достаточно больших значениях $\zeta$ задача (15) ((17)) эквивалентна исходной (1). В данном пункте описывается простейшая реализация адаптивного метода для случая $\zeta=0$ и $|I_{\text{н}}\setminus I_0|+|J_{\text{оп}}\setminus J_0|=1$. Новый план $\bar{x}$ и в случае $\zeta=0$ строится по формуле $\bar{x}=x+\Theta l$ (см. п. 2). Изменения возникают при построении новой опоры $\bar{A}_{\text{оп}}$, т. е. при уменьшении $\beta_{\text{оп}}$ в разложении (12) оценки субоптимальности.

Пусть $(1-\Theta)\beta>\varepsilon$. Простейшая процедура замены при $\zeta=0$ сопровождающего опору $A_{\text{оп}}$ двойственного плана $\{y, s, t, v, w\}$ состоит в следующем. Для случая $\Theta=\Theta_{i_0}<1$ подсчитаем $\alpha=a'_{i_0}l$ и

$$\sigma=\min\{\sigma_{i_*},\ \sigma_{j_*}\};\ \sigma_{i_*}=\min\sigma_i,\ i\in I_{\text{оп}};$$
$$\sigma_{j_*}=\min\sigma_j,\ j\in J_{\text{н}}, \tag{24}$$

где

$$\sigma_i=\begin{cases} -u_i/z_i, & \text{если } u_iz_i<0,\\ 0, & \text{если } u_i=0,\ z_i>0,\ i\overline{\in}I^* \text{ или}\\ & \quad u_i=0,\ z_i<0,\ i\in I_*,\ i\in I_{\text{оп}},\\ \infty & \text{в остальных случаях;}\end{cases}$$

$$\sigma_j=\begin{cases} -\Delta_j/z_j, & \text{если } \Delta_jz_j<0,\\ 0, & \text{если } \Delta_j=0,\ x_j\neq d_{*j},\ z_j>0 \text{ или}\\ & \quad \Delta_j=0,\ x_j\neq d^*_j,\ z_j<0,\ j\in J_{\text{н}},\\ \infty & \text{в остальных случаях;}\end{cases}$$

$$z'(J_{\text{н}}\cup I_{\text{оп}})=ke'_{i_0}\{A(I_{\text{н}},J_{\text{н}})-A(I_{\text{н}},J_{\text{оп}})A^{-1}_{\text{оп}}A(I_{\text{оп}},J_{\text{н}}),$$
$$-A(I_{\text{н}},J_{\text{оп}})A^{-1}_{\text{оп}}\};$$
$$k=1,\ \text{если } a'_{i_0}\bar{x}=b^*_{i_0};\ k=-1,\ \text{если } a'_{i_0}\bar{x}=b_{*i_0}.$$

Для случая $\Theta=\Theta_{j_0}<1$ подсчитаем $\alpha=l_{j_0}$ и $\sigma$ из (24) при условии, что $z'(J_{\text{н}}\cup I_{\text{оп}})=ke'_{j_0}\{A^{-1}_{\text{оп}}A(I_{\text{оп}},J_{\text{н}}),\ A^{-1}_{\text{оп}}\}$; $k=1$, если $\bar{x}_{j_0}=d_{*j_0}$; $k=-1$, если $\bar{x}_{j_0}=d^*_{j_0}$. Для нового плана $\bar{x}$ выполняется неравенство

$$c'x^0-c'\bar{x}\leqslant\bar{\beta},\ \bar{\beta}=(1-\Theta)(\beta-|\alpha|\sigma).$$

Таким образом, при $\bar{\beta}\leqslant\varepsilon$ процесс решения задачи (1) прекращается на $\varepsilon$-оптимальном плане $\bar{x}$.

Предположим, что $\bar{\beta} > \varepsilon$. Тогда опору $A_{\text{оп}}$ заменяем на новую $\bar{A}_{\text{оп}} = A(\bar{I}_{\text{оп}}, \bar{J}_{\text{оп}})$. При построении множеств $\bar{I}_{\text{оп}}$, $\bar{J}_{\text{оп}}$ рассмотрим все случаи, возникающие на итерации.

1) Пусть $\Theta = \Theta_{i_0} < 1$, $\sigma = \sigma_{i_*}$. Полагаем $\bar{I}_{\text{оп}} = (I_{\text{оп}} \setminus i_*) \cup i_0$, $\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}}$. Тогда

$$\bar{A}_{\text{оп}}^{-1} = A_{\text{оп}}^{-1} - A_{\text{оп}}^{-1} e_{i_*} (A(i_*, J_{\text{оп}}) - A(i_0, J_{\text{оп}})) A_{\text{оп}}^{-1} / \alpha,$$

где

$\alpha = -A(i_0, J_{\text{оп}}) A_{\text{оп}}^{-1} e_{i_*} = kz(i_*) \neq 0$, $e_{i_*} = e(I_{\text{оп}}) = \{e(i) = 0, i \in I_{\text{оп}} \setminus i_*;\ e(i_*) = 1\}$.

2) Пусть $\Theta = \Theta_{i_0} < 1$, $\sigma = \sigma_{j_*}$. Полагаем $\bar{I}_{\text{оп}} = I_{\text{оп}} \cup i_0$, $\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}} \cup j_*$. Обратная матрица $\bar{A}_{\text{оп}}^{-1}$ имеет вид

$$\bar{A}_{\text{оп}}^{-1} = $$
$$= \left\{ \begin{matrix} A_{\text{оп}}^{-1} + A_{\text{оп}}^{-1} A(I_{\text{оп}}, j_*) A(i_0, J_{\text{оп}}) A_{\text{оп}}^{-1}/\alpha, & -A_{\text{оп}}^{-1} A(I_{\text{оп}}, j_*)/\alpha \\ -A(i_0, J_{\text{оп}}) A_{\text{оп}}^{-1}/\alpha, & 1/\alpha \end{matrix} \right\},$$

где $\alpha = A(i_0, j_*) - A(i_0, J_{\text{оп}}) A_{\text{оп}}^{-1} A(I_{\text{оп}}, j_*) = kz(j_*) \neq 0$.

3) Пусть $\Theta = \Theta_{j_0} < 1$, $\sigma = \sigma_{i_*}$. Полагаем $\bar{I}_{\text{оп}} = I_{\text{оп}} \setminus i_*$, $\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}} \setminus j_0$. Для обратной матрицы $\bar{A}_{\text{оп}}^{-1}$ имеем

$$\bar{A}_{\text{оп}}^{-1} = A_{\text{оп}}^{-1}(I_{\text{оп}} \setminus i_*, J_{\text{оп}} \setminus j_0) -$$
$$- A_{\text{оп}}^{-1}(i_*, J_{\text{оп}} \setminus j_0) A_{\text{оп}}^{-1}(I_{\text{оп}} \setminus i_*, j_0)/\alpha,$$

где $\alpha = A_{\text{оп}}^{-1}(i_*, j_0) = kz(i_*) \neq 0$.

4) Пусть $\Theta = \Theta_{j_0} < 1$, $\sigma = \sigma_{j_*}$. Полагаем $\bar{I}_{\text{оп}} = I_{\text{оп}}$, $\bar{J}_{\text{оп}} = (J_{\text{оп}} \setminus j_0) \cup j_*$. Тогда

$$\bar{A}_{\text{оп}}^{-1} = A_{\text{оп}}^{-1} - A_{\text{оп}}^{-1} (A(I_{\text{оп}}, j_*) - A(I_{\text{оп}}, j_0)) e'_{j_0} A_{\text{оп}}^{-1}/\alpha,$$

где $\alpha = e'_{j_0} A_{\text{оп}}^{-1} A(I_{\text{оп}}, j_*) = kz(j_*) \neq 0$, $e_{j_0} = e(J_{\text{оп}}) = \{e(j) = 0, j \in J_{\text{оп}} \setminus j_0;\ e(j_0) = 1\}$.

Построением нового опорного плана $\{\bar{x}, \bar{A}_{\text{оп}}\}$ завершается итерация. Она называется *регулярной*, если $\Theta + \sigma > 0$.

**Теорема.** Описанный алгоритм конечен, если в процессе его работы встречается конечное число нерегулярных итераций.

**4. Двойственные методы.** Прямые методы, изложенные в пп. 2 и 3, являются модификациями прямых методов из [ч. 1, ч. 2], где для каждого прямого метода был построен двойственный метод. Техника перехода от прямого метода к двойственному уже неоднократно описывалась. Предлагается в качестве упражнения использовать ее для построения двойственных компонент адаптивных методов из пп. 2 и 3.

**5. Численные эксперименты.** С целью проверки принципов, положенных в основу адаптивного метода, А. И. Тятюшкиным (г. Иркутск) был проведен ряд численных экспериментов на БЭСМ-6. Прямой адаптивный метод с элементарной заменой опоры (см. п. 3) сравнивался с прямым опорным методом, использующим симплексную нормировку [ч. 1].

В основном эксперименте рассматривались задачи

$$c'x \to \max, \quad Ax \leqslant b, \quad d_* \leqslant x \leqslant d^*,$$

имеющие размеры $20 \times 30$. Параметры $c_j$, $a_{ij}$, $b_i$, $d_{*j}$, $d_j^*$ элементов $c$, $A$, $b$, $d_*$, $d^*$ задачи генерировались датчиком случайных чисел с равномерным распределением на отрезках $-100 \leqslant c_j \leqslant 100$, $-100 \leqslant a_{ij} \leqslant 100$, $0 \leqslant b_i \leqslant 100$, $-100 \leqslant d_{*j} \leqslant 0$, $0 \leqslant d_j^* \leqslant 100$. Процесс решения каждый раз начинался с плана $x=0$. При симплексной нормировке начальная опора составлялась из единичных векторов условий, соответствующих свободным переменным $x_{i\text{св}}\,(Ax + x_{\text{св}} = b)$. В адаптивном методе начальная опора имела размеры $0 \times 0$. После генерирования параметров задача решалась сначала симплекс-методом, а затем адаптивным методом. В симплекс-методе на печать выводились оптимальный план и число итераций. Для адаптивного метода на каждой итерации печатались значения прямой и двойственной целевых функций и состав опоры.

Число итераций в симплекс-методе в среднем в 2,3 раза больше, чем в адаптивном (табл. 1).

*Таблица 1*

| Номер задачи | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Симплекс | 59 | 53 | 80 | 62 | 60 | 81 | 52 | 72 | 65 | 80 | 56 | 50 | 55 | 45 | 57 |
| Адаптивный | 24 | 33 | 38 | 27 | 26 | 24 | 30 | 20 | 20 | 30 | 31 | 29 | 24 | 24 | 36 |

*Продолжение табл. 1*

| Номер задачи | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Симплекс | 58 | 57 | 49 | 69 | 73 | 48 | 59 | 69 | 79 | 57 | 79 | 64 | 58 | 76 | 70 |
| Адаптивный | 11 | 33 | 26 | 20 | 14 | 38 | 22 | 25 | 25 | 22 | 22 | 22 | 23 | 30 | 28 |

*Продолжение табл. 1*

| Номер задачи | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Симплекс | 79 | 62 | 80 | 74 | 68 | 61 | 76 | 62 | 90 | 64 | 104 | 51 | 76 |
| Адаптивный | 20 | 25 | 30 | 30 | 26 | 33 | 24 | 16 | 27 | 29 | 20 | 22 | 31 |

Сравнение по количеству итераций важно с точки зрения накопления ошибок округления, вызываемых преобразованием опор. Однако принятая выше характеристика не полностью отражает преимущества адаптивного метода. Из проведенного эксперимента видно, что в адаптивном методе размер опор редко превышал значение $10\times10$, в то время как в симплекс-методе всегда использовались опоры размером $20\times20$.

Чтобы показать преимущества адаптивного метода, был поставлен первый вспомогательный эксперимент на время счета. Случайно генерированные задачи размером $20\times30$ решались сначала симплекс-методом, а затем адаптивным. Среднее время счета по десяти задачам в симплекс-методе оказалось в 5 раз больше, чем в адаптивном.

Второй вспомогательный эксперимент проводился с целью изучения влияния на результаты счета числа переменных ($n$) задачи при постоянном числе основных ограничений. Было решено по три задачи размерами $20\times60$, $20\times100$ (табл. 2).

*Таблица 2*

| Размер задачи | $20\times60$ | | | $20\times100$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Симплекс | 132 | 103 | 130 | 186 | 195 | 215 |
| Адаптивный | 27 | 39 | 16 | 31 | 48 | 38 |

В основном эксперименте генерировались полностью заполненные матрицы условий $A$. В третьем дополнительном эксперименте решалась последовательность задач с заданными плотностями заполнения матрицы $A$. Для каждого заполнения решалась одна задача сначала симплекс-методом, затем адаптивным. Данные о количестве итераций приведены в табл. 3.

*Таблица 3*

| Количество ненулевых элементов, % | 5 | 7 | 10 | 12 | 15 | 17 | 20 | 22 | 25 | 27 | 30 | 32 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Симплекс | 30 | 34 | 35 | 38 | 44 | 51 | 58 | 58 | 48 | 47 | 49 | 66 |
| Адаптивный | 11 | 10 | 16 | 17 | 15 | 19 | 13 | 13 | 26 | 18 | 24 | 27 |

*Продолжение табл. 3*

| Количество ненулевых элементов, % | 35 | 37 | 40 | 42 | 45 | 47 | 50 | 55 | 60 | 65 | 70 | 75 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Симплекс | 48 | 58 | 64 | 70 | 48 | 51 | 54 | 75 | 54 | 59 | 46 | 64 |
| Адаптивный | 14 | 15 | 25 | 21 | 15 | 14 | 28 | 22 | 13 | 38 | 25 | 30 |

Следующий, четвертый, вспомогательный эксперимент был поставлен с целью изучения влияния на результаты счета размеров задач. Матрицы генерировались полностью заполненными. Результаты по количеству итераций приведены в табл. 4.

*Таблица 4*

| $m \times n$ | $5 \times 7$ | | | | | $5 \times 10$ | | | | | $5 \times 20$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Симплекс | 11 | 10 | 10 | 7 | 10 | 17 | 15 | 13 | 13 | 14 | 22 | 29 | 27 | 26 | 27 |
| Адаптивный | 5 | 4 | 6 | 5 | 5 | 4 | 6 | 6 | 6 | 4 | 8 | 4 | 7 | 6 | 10 |

*Продолжение табл. 4*

| $m \times n$ | 5 × 30 | | | | | 10 × 15 | | | | | 10 × 20 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Симплекс | 32 | 32 | 36 | 35 | 36 | 22 | 23 | 26 | 30 | 25 | 26 | 28 | 32 | 26 | 31 |
| Адаптивный | 8 | 8 | 10 | 12 | 7 | 9 | 7 | 13 | 7 | 11 | 7 | 7 | 12 | 9 | 12 |

*Продолжение табл. 4*

| $m \times n$ | 10 × 30 | | | | | 30 × 40 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Симплекс | 46 | 48 | 55 | 57 | 42 | 167 | 118 | 93 | 89 | 90 |
| Адаптивный | 13 | 13 | 24 | 14 | 17 | 19 | 28 | 31 | 46 | 35 |

Наконец, пятый вспомогательный эксперимент проводился с разными значениями $d$ границ прямых ограничений вида $|x_j| \leqslant d$, $j = \overline{1, n}$. Результаты приведены в табл. 5.

*Таблица 5*

| $d, m, n$ | 5, 20, 30 | | | | | 10, 20, 30 | | | | | 20, 20, 30 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Симплекс | 44 | 56 | 60 | 54 | 57 | 46 | 56 | 56 | 61 | 51 | 63 | 51 | 53 | 68 | 45 |
| Адаптивный | 27 | 23 | 13 | 15 | 17 | 28 | 22 | 17 | 14 | 19 | 28 | 22 | 18 | 15 | 19 |

*Продолжение табл. 5*

| $d, m, n$ | 100, 20, 30 | | | | | 200, 20, 30 | | | | | 5, 30, 40 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Симплекс | 76 | 58 | 72 | 74 | 63 | 64 | 66 | 81 | 80 | 58 | 110 | 92 | 69 | 77 | 80 |
| Адаптивный | 26 | 25 | 27 | 26 | 25 | 27 | 26 | 20 | 16 | 22 | 22 | 25 | 25 | 40 | 38 |

*Продолжение табл. 5*

| $d, m, n$ | 10, 30, 40 | | | | | 50, 30, 40 | | | | | 200, 30, 40 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Симплекс | 111 | 82 | 82 | 76 | 74 | 127 | 78 | 93 | 89 | 111 | 192 | 116 | 91 | 103 | 119 |
| Адаптивный | 21 | 32 | 29 | 39 | 35 | 29 | 33 | 30 | 47 | 35 | 24 | 32 | 31 | 51 | 35 |

## § 2. Метод решения задач с обобщенными прямыми ограничениями

Трудоемкость методов типа симплекс-метода определяется во многом количеством основных ограничений. В данном параграфе рассматривается весьма обширный класс задач, содержащих специальные ограничения, которые хотя по форме и близки к основным, но позволяют модифицировать стандартный метод так, что дополнительные ограничения, не увеличивая размеров опоры, учитываются почти так же, как прямые ограничения. В качестве любопытного следствия метода данного параграфа показывается, что существует класс задач, для которого симплексная нормировка является естественной.

**1. Обобщенные ограничения.** Задачу

$$c'x \to \max,\ Ax=b,\ A=A(I,J),\ I=\{1, 2, \ldots, m\},\ J=\{1, 2, \ldots, n\},$$

$$x \geqslant 0,\ e'(J_k)x(J_k) \leqslant d_k,\ k \in K=\{1, 2, \ldots, p\}, \tag{1}$$

где

$$J_k \subset J,\ J_k \cap J_{\bar{k}} = \varnothing,\ k \neq \bar{k},\ \bar{k} \in K,\ \bigcup_{k \in K} J_k = J \tag{2}$$

принято называть *задачей линейного программирования с обобщенными ограничениями* *).

Задача (1), (2) встречается при моделировании многих прикладных задач [7]. Она возникает в некоторых методах решения больших задач (например, в методе декомпозиции Данцига — Вулфа (см. гл. I)). При $p=n$ задача (1), (2) становится задачей с двухсторонними прямыми ограничениями. Как известно (см. [ч. 1]), последнюю задачу нецелесообразно сводить к задаче с односторонними прямыми ограничениями, а гораздо эффективнее решать ее непосредственно модифицированным симплекс-методом. Аналогичный подход, позволяющий уменьшить размеры рабочих базисных матриц, предложен в [7] и для задачи (1), (2). В данном параграфе для этих целей развивается метод из [ч. 1].

Пусть $x$ — начальный план задачи (1), (2). Припишем ему *опору* $U_{\text{оп}}=\{J_{\text{оп}}, K_{\text{оп}}\}$, где множества $J_{\text{оп}} \subset J$, $K_{\text{оп}} \subset K$ таковы, что система

$$A(I, J_{\text{оп}})x(J_{\text{оп}})=0,\ e'x(J_{k\,\text{оп}})=0,$$
$$k \in K_{\text{оп}},\ J_{k\,\text{оп}}=J_k \cap J_{\text{оп}},$$

*) При этом подчеркивается отказ от перевода второй группы ограничений (2) в число основных ограничений (1).

имеет только тривиальное решение $x(J_{оп})=0$, но система

$$A(I, J^*)\,x(J^*)=0,\ e'x(J_k^*)=0,\ k\in K^*,\ J_k^*=J_k\cap J^*,$$

имеет нетривиальное решение $x(J^*)\neq 0$ для любых из совокупностей $\{J^*, K^*\}$ вида а) $J^*=J_{оп}\cup j_*$, $K^*=K_{оп}$, где $j_*\overline{\in} J_{оп}$; б) $J^*=J_{оп}$, $K^*=K_{оп}\setminus k_*$, где $k_*\in K_{оп}$. Пару $\{x, U_{оп}\}$ назовем *опорным планом*, считая его *невырожденным*, если $x(J_{оп})>0$, $e'x(J_k)<d_k$, $k\in\{k: J_{k\,оп}\neq\varnothing$, $k\overline{\in} K_{оп}\}$. Будем говорить, что невырожденный опорный план *регулярен*, если $e'x(J_k)=d_k$, $|J_{k\,оп}|\geqslant 2$, $k\in K_{оп}$. Любой невырожденный план $\{x, U_{оп}\}$ можно регуляризовать, удалив часть элементов опоры:

1) при $e'x(J_s)<d_s$, $s\in K_{оп}$, из $K_{оп}$ удаляем элемент $s$, из $J_{оп}$ — любой из элементов $j\in\{j: j\in J_{s\,оп}, g_{jj_s}\neq 0\}$, где $g_{jj_s}$, $j\in J_{s\,оп}\setminus j_s$, — компоненты вектора $g(J_{оп}^*, j_s)=-\tilde{A}^{-1}(I, J_{оп}^*)\,A(I, j_s)$, $g_{j_sj_s}=1-\sum\limits_{j\in J_{s\,оп}\setminus j_s} g_{jj_s}$ (определение $\tilde{A}(I, J_{оп}^*)$, $J_{оп}^*$, $j_s$ см. ниже);

2) при $|J_{k\,оп}|=1$, $k\in K_{оп}$ (из определения опоры следует, что $|J_{k\,оп}|>0$, $k\in K_{оп}$), из $K_{оп}$ удаляем элемент $k$, из $J_{оп}$ — элемент $j_k=J_{k\,оп}$.

Пусть $\{x, U_{оп}\}$ — регулярный план. Для каждого $k\in K_{оп}$ в множестве $J_{k\,оп}$ выделим элемент $j_k$ и обозначим $J_{*\,оп}=J(K_{оп})=\{j_k, k\in K_{оп}\}$, $J_{оп}^*=J_{оп}\setminus J_{*\,оп}$, $\tilde{A}(I, J_{оп}^*)=A(I, J_{оп}^*)-A(I, J_{*\,оп})\,B(K_{оп}, J_{оп}^*)$, $\tilde{c}'(J_{оп}^*)=c'(J_{оп}^*)-c'(J_{*\,оп})\,B(K_{оп}, J_{оп}^*)$, где $B(K_{оп}, J)$ — матрица со строками $\{e'(J_k), 0'(J\setminus J_k)\}$, $k\in K_{оп}$.

По *опорной (рабочей) матрице* $\tilde{A}_{оп}=\tilde{A}(I, J_{оп}^*)$ построим вектор потенциалов $u=u(I): u'=\tilde{c}'(J_{оп}^*)\,\tilde{A}_{оп}^{-1}$ и вычислим вектор оценок $\Delta=\Delta(J): \Delta=A'u-c$. Следуя [ч. 1], получаем

**Критерий оптимальности.** Соотношения: 1) $\Delta_j\geqslant 0$ при $x_j=0$; $\Delta_j=0$ при $x_j>0$, $j\in J_k$, на пассивных ограничениях $(e'x(J_k)<d_k)$, 2) $\Delta_{j_1}=\ldots=\Delta_{j_s}\leqslant 0$ при $x_{j_1}>0, \ldots, x_{j_s}>0$, $j_1, \ldots, j_s\in J_k$; $\Delta_j\geqslant\Delta_{j_1}$ при $x_j=0$, $j\in J_k$, на активных ограничениях $(e'x(J_k)=d_k)$ достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности опорного плана $\{x, U_{оп}\}$.

**Достаточное условие субоптимальности.** При $\beta \leqslant \varepsilon$,

$$\beta = \sum_{k \in K_+} \sum_{j \in J_k} \Delta_j x_j + \sum_{k \in K_-} \Big( \sum_{j \in J_k \setminus j_{s_k}} \Delta_j x_j + \Delta_{j_{s_k}} (x_{j_{s_k}} - d_k) \Big)$$

$(K_+ = \{k : \min\{\Delta_j, j \in J_k\} \geqslant 0\}, K_- = \{k : \min\{\Delta_j, j \in J_k\} = \Delta_{j_{s_k}} < 0\})$ опорный план $\{x, U_{\text{оп}}\}$ является $\varepsilon$-оптимальным ($c'x^0 - c'x \leqslant \varepsilon$, $x^0$ — оптимальный план).

Пусть $\beta > \varepsilon$, где $\varepsilon$ — заданная точность приближения к оптимальному плану. Новый план $\bar{x}$ ищем в виде $\bar{x} = x + \Theta l$. Для построения подходящего направления $l$ сформируем производную задачу.

В неопорных обобщенных ограничениях слагаемые $e'x(J_{k\,\text{оп}})$, $k \in K_{\text{н}} = K \setminus K_{\text{оп}}$, зависящие от опорных переменных, заменим одной переменной $\zeta_k$, $k \in K_{\text{н}}$. Таким образом, вместо $k$-го неопорного обобщенного ограничения $e'x(J_{k\,\text{н}}) + e'x(J_{k\,\text{оп}}) \leqslant d_k$, $x(J_k) \geqslant 0$ получим ослабленное неопорное обобщенное ограничение

$$e'x(J_{k\,\text{н}}) + \zeta_k \leqslant d_k, \quad x(J_{k\,\text{н}}) \geqslant 0, \quad \zeta_k \geqslant 0, \quad k \in K_{\text{н}}. \qquad (2\text{а})$$

Прямые ограничения $x_j \geqslant 0$, $j \in J_{k\,\text{оп}}$, $k \in K_{\text{оп}}$, на опорные переменные заменим более слабыми ограничениями

$$e'x(J_{k\,\text{оп}}) \geqslant 0, \quad k \in K_{\text{оп}}. \qquad (2\text{б})$$

Найдем подходящее направление $l$ из условия максимального возрастания целевой функции задачи (1) с учетом основных, неопорных прямых, опорных обобщенных, ослабленных неопорных обобщенных (2а) ограничений и ослабленных ограничений (2б) на опорные переменные. Нетрудно проверить, что искомое направление $l$ является решением задачи

$$\begin{gathered} c'l \to \max,\ Al = 0,\ e'l(J_{k\,\text{н}}) + \gamma_k \leqslant d_k - e'x(J_k), \\ \gamma_k \geqslant -\zeta_k,\ k \in K,\ \gamma_k = e'l(J_{k\,\text{оп}}),\ k \in K_{\text{оп}}; \\ l_j \geqslant -x_j,\ j \in J_{\text{н}}, \end{gathered} \qquad (3)$$

где $\zeta_k = e'x(J_{k\,\text{оп}})$, $k \in K$. Ограничения задачи (3)

$$\begin{gathered} e'l(J_{k\,\text{н}}) + \gamma_k \leqslant d_k - e'x(J_k),\ \ \gamma_k \geqslant -\zeta_k,\ \ k \in K_{\text{н}}; \\ e'l(J_{k\,\text{оп}}) \geqslant -e'x(J_{k\,\text{оп}}) = -\zeta_k,\ \ k \in K_{\text{оп}}, \end{gathered} \qquad (3')$$

порожденные ослабленными ограничениями (2а), (2б), являются дополнительными, их можно рассматривать как нормировочные условия.

Действительно, для построения подходящего направления $l$ из плана $x$ можно было решать производную задачу с учетом только основных, неопорных прямых и опорных обобщенных ограничений

$$c'l \to \max,\ Al=0,\ e'l(J_k)\leqslant d_k-e'x(J_k),\ k\in K_{\text{оп}},\qquad l_j\geqslant -x_j,\ j\in J_{\text{н}}. \tag{3''}$$

Однако последняя задача не всегда имеет конечное решение. Поэтому надо добавить нормировочные условия, гарантирующие существование конечного решения задачи (3″) при любом плане $x$ и не сужающие множество допустимых направлений. В частности, можно взять условия (3′). В отличие от всех других нормировочных условий эти условия являются естественными, так как они получены в результате некоторых ослаблений ограничений исходной задачи. Следовательно, значение целевой функции задачи (3) (она эквивалентна задаче (3″), (3′)) является оценкой субоптимальности плана $x$. Добавление к задаче (3″) условий (3′) не усложняет ее решение по сравнению со случаем, когда к задаче (3″) добавляются другие нормировочные условия, но позволяет точнее учитывать ограничения исходной задачи (опорные прямые и неопорные обобщенные), отброшенные при построении (3″).

Если из равенств $A(I,\ J_{\text{оп}})l(J_{\text{оп}})=-A(I,\ J_{\text{н}})l(J_{\text{н}})$, $e'l(J_{k\,\text{оп}})=\gamma_k$, $k\in K_{\text{оп}}$, выразить $l(J_{\text{оп}})$:

$$\begin{gathered} l(\overset{*}{J}_{\text{оп}})=-\widetilde{A}_{\text{оп}}^{-1}\left(A(I,\ J_{\text{н}})\,l(J_{\text{н}})+A(I,\ J_{*\text{оп}})\,\gamma(K_{\text{оп}})\right);\\ l(J_{*\text{оп}})=-B(K_{\text{оп}},\ \overset{*}{J}_{\text{оп}})\,l(\overset{*}{J}_{\text{оп}})+\gamma(K_{\text{оп}}), \end{gathered} \tag{4}$$

то из (3) получим производную задачу

$$\begin{gathered} -\Delta'(J_{\text{н}})l(J_{\text{н}})-\Delta'(J_{*\text{оп}})\gamma(K_{\text{оп}})\to\max,\\ \gamma_k\geqslant-\zeta_k,\ e'l(J_{k\text{н}})+\gamma_k\leqslant d_k-e'x(J_k),\ k\in K;\\ l_j\geqslant-x_j,\ j\in J_{\text{н}}=J\setminus J_{\text{оп}}. \end{gathered} \tag{5}$$

Легко видеть, что задача (5) распадается на $p$ подзадач, которые имеют вид:

а) $-\Delta'(J_k)l(J_k)\to\max,\ e'l(J_k)\leqslant d_k-e'x(J_k)$, $l(J_k)\geqslant -x(J_k)$, если $k\in K_1=\{k: J_{k\,\text{оп}}=\varnothing\}$;

б) $-\Delta'(J_{k\text{н}})l(J_{k\text{н}})\to\max,\ e'l(J_{k\text{н}})\leqslant d_k-e'x(J_k)-\zeta_k = d_k-e'x(J_{k\text{н}})$, $l(J_{k\text{н}})\geqslant -x(J_{k\text{н}})$, если $k\in K_2=K\setminus(K_{\text{оп}}\cup K_1)$;

в) $-\Delta'(J_{k\text{н}})l(J_{k\text{н}})-\Delta_{jk}\gamma_k \to \max$, $\quad e'l(J_{k\text{н}})+\gamma_k \leqslant 0$, $l(J_{k\text{н}}) \geqslant -x(J_{k\text{н}})$, $\gamma_k \geqslant -\zeta_k$, если $k \in K_{\text{оп}}$.

Нетрудно найти решения этих задач:

а) $(k \in K_1)$: 1) $l_j = -x_j$, $j \in J_k$, если $\Delta_{js_k} \geqslant 0$, $\Delta_{js_k} = \min\limits_{j \in J_k} \Delta_j$; 2) $l_j = -x_j$, $j \in J_k \setminus j_{s_k}$, $l_{js_k} = d_k - x_{js_k}$, если $\Delta_{js_k} < 0$;

б) $(k \in K_2)$: 1) $l_j = -x_j$, $j \in J_{k\text{н}}$, если $\Delta_{js_k} \geqslant 0$; $\Delta_{js_k} = \min\limits_{j \in J_{k\text{н}}} \Delta_j$, 2) $l_j = -x_j$, $j \in J_{k\text{н}} \setminus j_{s_k}$, $l_{js_k} = d_k - x_{js_k}$, если $\Delta_{js_k} < 0$;

в) $(k \in K_{\text{оп}})$: 1) $l_j = -x_j$, $j \in J_{k\text{н}}$, $\gamma_k = -\xi_k$, если $\min\limits_{j \in J_{k\text{н}} \cup j_k} \Delta_j = \Delta_{js_k} \geqslant 0$, 2) $l_j = -x_j$, $j \in J_{k\text{н}}$, $\gamma_k = e'x(J_{k\text{н}})$, если $\Delta_{js_k} < 0$, $s_k = k$, 3) $l_j = -x_j$, $j \in J_{k\text{н}} \setminus j_{s_k}$, $\gamma_k = -\xi_k$, $l_{js_k} = d_{js_k} - x_{js_k}$, если $\Delta_{js_k} < 0$, $s_k \neq k$.

Компонента $l(J_{\text{оп}}) = \{l(J_{*\text{оп}}), l(J^*_{\text{оп}})\}$ подходящего направления $l$ определена формулами (4).

Максимально допустимый шаг $\Theta$ найдем с учетом следующих ограничений: $\bar{x}_j \geqslant 0$, $j \in J_{\text{оп}}$; $e'\bar{x}(J_k) \leqslant d_k$, $k \in K_2$. Допустимый шаг по остальным ограничениям равен единице. Таким образом, $\Theta = \min\{1, \Theta_{j_0}, \Theta_{k_0}\}$, $\Theta_{j_0} = \min \Theta_j$, $j \in J_{\text{оп}}$, $\Theta_j = -x_j/l_j$ при $l_j < 0$; $\Theta_{k_0} = \min \Theta_k$, $k \in K_2$, $\Theta_k = (d_k - e'x(J_k))/e'l(J_k)$ при $e'l(J_k) > 0$. Если $(1-\Theta)\beta \leqslant \varepsilon$, то $\bar{x}$ является $\varepsilon$-оптимальным планом. При $(1-\Theta)\beta > \varepsilon$ для завершения итерации построим новую опору. Обозначим $K_1^* = \{k: k \in K_1, e'\bar{x}(J_k) = d_k\}$.

Пусть $\Theta = \Theta_{j_0}$, $j_0 \in J^*_{\text{оп}}$. Элемент $j_0$ выводим из множества $J_{\text{оп}}$ и далее поступаем согласно одному из следующих правил:

1) в $J_{\text{оп}}$ вводим любой элемент $j_* \in \{j: a_j \neq 0, \ l_j \neq 0, j \in K_{k\text{н}}, k \overline{\in} K_1^*\}$;

2) в $J_{\text{оп}}$ вводим любую пару элементов $j_{*1}^{(k_*)}$, $j_{*2}^{(k_*)} \in \{j_1^{(k)}, j_2^{(k)}: j_1^{(k)}, j_2^{(k)} \in J_k, k \in K_1^*, a_{j_1} \neq a_{j_2}, l_{j_1} \neq 0, l_{j_2} \neq 0\}$, в $K_{\text{оп}}$ вводим элемент $k_*$;

3) из $K_{\text{оп}}$ выводим любой элемент $k_* \in \{k: a_k \neq 0, e'l(J_k) < 0, k \in K_{\text{оп}}\}$. Здесь $a(J_{\text{н}} \cup K_{\text{оп}}) = e'_{j_0} \tilde{A}_{\text{оп}}^{-1} \{\tilde{A}(I, J_{\text{н}}), -A(I, J_{*\text{оп}})\}$, $\tilde{A}(I, J_{\text{н}}) = A(I, J_{\text{н}}) - A(I, J_{*\text{оп}}) B(K_{\text{оп}}, J_{\text{н}})$.

З а м е ч а н и е. Случай $j_0=j_k \in J_{*\text{оп}}$ сводится к рассмотренному. Действительно, в силу регулярности опоры существует $j_{\underline{k}} \in J^*_{\text{оп}}$, $j_{\underline{k}} \in J_k$. В множествах $J_{*\text{оп}}$, $J^*_{\text{оп}}$ поменяем местами элементы $j_k$ и $j_{\underline{k}}$. Для новых опорных множеств $j_0=j_k \in J^*_{\text{оп}}$. Матрица, обратная к новой опорной (рабочей) матрице, найдется по формуле

$$(\tilde{A}^{-1}_{\text{оп}})_{\text{нов}} = [E - e_{j_k}(B(\underline{k},\ J^*_{\text{оп}}) + e_{jk})'] \tilde{A}^{-1}_{\text{оп}}.$$

Пусть $\Theta=\Theta_{k_0}$, $k_0 \in K_2$. Элемент $k_0$ вводим в $K_{\text{оп}}$ и далее используем одно из указанных выше правил 1)—3) с $a(J_{\text{н}} \cup K_{\text{оп}}) = \{e'(J_{k_0\text{н}}),\ 0'(J_{\text{н}} \cup K_{\text{оп}} \setminus J_{k_0\text{н}})\} - e' \tilde{A}^{-1}_{\text{оп}} \{\bar{A}(I, J_{\text{н}}),\ -A(I,\ J_{*\text{оп}})\}$, $e=\{1,\ 1, \ldots,\ 1\}$.

**2. Классическая задача.** Основную идею метода п. 1 используем для решения классической задачи

$$c'x \to \max,\ Ax=b,\ x \geqslant 0. \tag{6}$$

Предположим, что среди основных ограничений задачи имеется ограничение вида

$$a'x=\alpha,\ \ a>0. \tag{7}$$

По опорному плану $\{x,\ J_{\text{оп}}\}$ [ч. 1] построим вектор потенциалов $u'=c'_{\text{оп}} A^{-1}_{\text{оп}}$ и вычислим вектор оценок $\Delta = A'u - c$. Известен критерий оптимальности [ч. 1]:

$$\Delta_j \geqslant 0 \text{ при } x_j=0;\ \Delta_j=0 \text{ при } x_j>0,\ j \in J_{\text{н}}.$$

Введем производную задачу

$$\beta = \max(-\Delta'_{\text{н}} l_{\text{н}}),\ a'_{\text{н}} l_{\text{н}} \leqslant a'_{\text{оп}} x_{\text{оп}},\ l_{\text{н}} \geqslant -x_{\text{н}},$$

где $a_{\text{н}}=\{a_j,\ j \in J_{\text{н}}\}$, $a_{\text{оп}}=\{a_j,\ j \in J_{\text{оп}}\}$. В силу (7) она всегда имеет решение:

$$1)\ l_j = -x_j,\ j \in J_{\text{н}}, \text{ если } \Delta_{j_*}/\alpha_{j_*} \geqslant 0,\ \ \Delta_{j_*}/a_{j_*} = \min_{j \in J_{\text{н}}}(\Delta_j/a_j); \tag{8}$$

$$2)\ l_j = -x_j,\ j \in J_{\text{н}} \setminus j_*,\ l_{j_*} = \frac{a'(J \setminus j_*)\, x(J \setminus j_*)}{a_{j_*}} = \frac{\alpha - a_{j_*} x_{j_*}}{a_{j_*}} = \alpha/a_{j_*} - x_{j_*}, \text{ если } \Delta_{j_*}/\alpha_{j_*} < 0.$$

При $\beta \leqslant \varepsilon$ начальный план $x$ является $\varepsilon$-оптимальным. Пусть $\beta > \varepsilon$. Новый план строим по формуле $\bar{x}=x+\Theta l$, где $l=\{l_{\text{оп}},\ l_{\text{н}}\}$ — подходящее направление, неопорная компонента $l_{\text{н}}$ которого уже найдена (см. (8)), а $l_{\text{оп}}=$

$=-A_{\text{оп}}^{-1} A_{\text{н}} l_{\text{н}}$. Максимально допустимый шаг вычисляется по стандартным правилам:

$$\Theta=\min\{1, \Theta_{i_0}\}, \ \Theta_{i_0}=\min \Theta_i, \ i\in I_{\text{оп}}, \ \Theta_i=-x_i/l_i, \ l_i<0.$$

Если $\beta(1-\Theta)\leqslant\varepsilon$, то $\bar{x}$ — $\varepsilon$-оптимальный план. При $\beta(1-\Theta)>\varepsilon$ новому плану $\bar{x}$ приписываем опору $\bar{J}_{\text{оп}}=(J_{\text{оп}}\setminus i_0)\cup j_0$, где элемент $j_0$ взят из множества $\{j: j\in J_{\text{н}}, \ l_j\neq 0, \ x_{i_0 j}\neq 0\}$, $\{x_{i_0 j}, \ j\in J_{\text{н}}\}=e'_{i_0} A_{\text{оп}}^{-1} A_{\text{н}}$.

В случае, когда $a=e$ и $x$ — базисный план, описанный метод совпадает с симплекс-методом. В отличие от последнего нормировка неопорных компонент уже не искусственная, а привязана к структуре задачи и использует текущую информацию о планах. Это позволяет получить достаточное условие субоптимальности. В свете изложенного можно объяснить эффективность симплекс-метода при решении практических задач, многие из которых содержат ограничения типа (7).

Замечание. Ясно, что вместо (7) достаточно предположить существование линейной комбинации основных ограничений, приводящей к (7).

Рассмотрим еще один метод решения задачи (6), (7), позволяющий на каждой итерации уменьшать оценку субоптимальности $\beta$. Пусть $\{x, A_{\text{оп}}\}$ — начальный опорный план задачи (6), (7). Задача поиска подходящего направления $l=\{l_{\text{оп}}, l_{\text{н}}\}$, дающего максимальное приращение целевой функции в пространстве неопорных переменных, имеет вид

$$\beta=\max(-\Delta_{\text{н}}' l_{\text{н}}), \ \ l_{\text{оп}}=-A_{\text{оп}}^{-1} A_{\text{н}} l_{\text{н}}, \ \ l_{\text{н}}\geqslant -x_{\text{н}}. \tag{9}$$

Она имеет конечное решение только при $\Delta_{\text{н}}\geqslant 0$.

Пусть $\Delta_{\text{н}}\not\geqslant 0$. Введем в задачу (9) еще одно дополнительное условие. Обозначим через $J_*$ некоторое подмножество из $J$ такое, что $J_{\text{н}}\subset J_*$. Из (7) следует, что для подходящего направления должно выполняться условие

$$a'(J_*)\, l(J_*)+a'(J\setminus J_*)\, l(J\setminus J_*)=0$$

и, в силу прямых ограничений на переменные $x_j$, $j\in J\setminus J_*$, условие

$$a'(J_*)\, l(J_*)\leqslant a'(J\setminus J_*)\, x(J\setminus J_*). \tag{10}$$

Следовательно, условие (10) является естественным ограничением на подходящее направление $l$. Добавим его к задаче (9). Ясно, что при $J_*=J_н$ задача (9), (10) будет иметь конечное решение (в силу $a'(J_н)>0$).

На последующих итерациях будем расширять множество $J_*$, т. е. вводить в $J_*$ новые элементы, по специальному правилу так, чтобы новые задачи (9), (10) также имели конечные решения, и оценка субоптимальности $\beta$ ($c'x^0-c'x\leqslant\beta$) уменьшалась на каждой итерации.

Очевидно, что при совпадении на некоторой итерации множества $J_*$ с $J$ отпадает необходимость в дополнительном ограничении (10): задача (9) и без него имеет конечное решение. Если к этому моменту исходная задача (6) не решена, то решение можно продолжить адаптивным методом, описанным в п. 3.

Пусть имеется некоторое множество $J_*$, для которого задача (9), (10) имеет конечное решение. (Для $J_*=J_н$ это условие выполняется.) Подсчитаем числа

$$\alpha_1(j_0)=-\Delta_{j_0}/z_{j_0}=\max_{\substack{j\in J_н,\\ z_j>0}}-\Delta_j/z_j;$$

$$\alpha_2(j_*)=-\Delta_{j_*}/z_{j_*}=\min_{\substack{j\in J_н,\\ z_j<0}}-\Delta_j/z_j;$$

$$\nu=a'(J\setminus J_*)\,x(J\setminus J_*)+z'(J_н)\,x(J_н),$$

где $z'(J_н)=a'(J_н)-a'(J_{*оп})A_{оп}^{-1}(J_{*оп},I)\,A(I,J_н)$, $J_{*оп}=J_*\cap J_{оп}$, $D(J_{оп},I)=A_{оп}^{-1}$, $A_{оп}^{-1}(J_{*оп},I)=D(J_{*оп},I)$.

Тогда задача (9), (10) имеет следующие решения:

1) $l_j=-x_j$, $j\in J_н$, $l_{оп}=-A_{оп}^{-1}A_нl_н$, если $\nu=0$ либо $\nu>0$, $\alpha_1(j_0)\leqslant 0$;

2) $l_j=-x_j$, $j\in J_н\setminus j_x$, $l_{j_x}=\dfrac{\nu-z_{j_x}x_{j_x}}{z_{j_x}}=$ (11)

$=\dfrac{\nu}{z_{j_x}}-x_{j_x}>-x_{j_x}$;

$l_{оп}=-A_{оп}^{-1}A_н l_н$, где $j_x=j_0$, если $\nu>0$, $\alpha_1(j_0)>0$; $j_x=j_*$, если $\nu<0$.

При $\beta\leqslant\varepsilon$ план $x$ будет $\varepsilon$-оптимальным. Пусть $\beta>\varepsilon$. Новый план строим в виде $\bar{x}=x+\Theta l$, где $\Theta=\min\{1,\Theta_{i_0}\}$, $\Theta_{i_0}=\min\limits_{l_i<0,\ i\in I_{оп}}\Theta_i$, $\Theta_i=-x_i/l_i$. Если $(1-\Theta)\beta\leqslant\varepsilon$, то план $\bar{x}$ является $\varepsilon$-оптимальным. В противном случае продолжаем решение.

Если при решении задачи (9), (10) реализовался случай 1) (см. (11)), то дополнительное ограничение (10) несущественно, вместо него можно ввести ограничение

$$l_{i_0} = -\sum_{j \in J_{\text{н}}} x_{i_0 j} l_j \geqslant -\bar{x}_{i_0}$$

и продолжить решение адаптивным методом (см. п. 3).

Пусть имеет место случай 2) (см. (11)). Возможны подслучаи: а) элемент $x_{i_0 j_x}$ в строке $\{x_{i_0 j},\ j \in J_{\text{н}}\} = e'_{i_0} A_{\text{оп}}^{-1} A_{\text{н}}$ отличен от нуля, б) $x_{i_0 j_x} = 0$. Если $x_{i_0 j_x} \neq 0$, то плану $\bar{x}$ приписываем опору $\bar{A}_{\text{оп}} = A(I, \bar{J}_{\text{оп}})$, $\bar{J}_{\text{оп}} = (J_{\text{оп}} \setminus i_0) \cup j_x$. В противном случае плану $\bar{x}$ приписываем опору $\bar{A}_{\text{оп}} = A(I, \bar{J}_{\text{оп}})$, $\bar{J}_{\text{оп}} = (J_{\text{оп}} \setminus i_0) \cup j^*$, где индекс $j^*$ найден из условия

$$\min_{\substack{j \in J_{\text{н}},\\ x_{i_0 j} < 0}} (\Delta_{j_x} z_j / z_{j_x} - \Delta_j) / x_{i_0 j} = (\Delta_{j_x} z_{j^*} / z_{j_x} - \Delta_{j^*}) / x_{i_0 j^*} = \sigma. \tag{12}$$

(Если индекс $j^*$ определяется не однозначно и есть $j^*$, для которого $\bar{x}_{j^*} > 0$, то в опору в первую очередь вводим этот индекс.)

Если $i_0 \overline{\in} J_*$, то полагаем $\bar{J}_* = J_* \cup i_0$, в противном случае $\bar{J}_* = J_*$. Для нового плана $\bar{x}$ и множеств $\bar{J}_*$, $\bar{J}_{\text{оп}}$, $\bar{J}_{\text{н}} = J \setminus \bar{J}_{\text{оп}}$ строим задачу (9), (10). Покажем, что она имеет конечное решение и новая оценка $\bar{\beta} > \beta$.

Запишем задачу, двойственную к производной задаче (9), (10):

$$\begin{gathered}
\beta = \beta(x,\ y^0,\ y_0^0) = \min_{y,\, y_0} (b'y + \alpha y_0 - c'x), \\
A'(I,\ J_{\text{оп}} \setminus J_{*\text{оп}})\, y = c(J_{\text{оп}} \setminus J_{*\text{оп}}), \\
A'(I,\ J_{*\text{оп}})\, y + a(J_{*\text{оп}})\, y_0 = c(J_{*\text{оп}}), \\
A'(I,\ J_{\text{н}})\, y + a(J_{\text{н}})\, y_0 \geqslant c(J_{\text{н}}),\ y_0 \geqslant 0.
\end{gathered} \tag{13}$$

Допустим, что при решении производной задачи (9), (10) реализовался случай 2) (см. (11)). Тогда на оптимальном двойственном плане $\{y^0_{\text{ст}},\ y^0_{0\text{ст}}\}$ выполняется соотношение

$$A'(I,\ j_x)\, y^0_{\text{ст}} + a_{j_x} y^0_{0\text{ст}} = c_{j_x}. \tag{14}$$

Пусть имеет место подслучай а). Заменим опору и запишем новую производную задачу, а также задачу, двойственную к ней. Используя (14), легко показать, что оптимальный двойственный план старой производной задачи $y^0_{\text{ст}}$ является допустимым двойственным планом для новой производной задачи. Значит, новая производная задача имеет конечное решение, поскольку существуют допустимые планы прямой и двойственной задач. Кроме того, верно соотношение

$$\overline{\beta}(\overline{x},\ y^0_{\text{ст}},\ y^0_{0\text{ст}}) = \beta(x,\ y^0_{\text{ст}},\ y^0_{0\text{ст}}) - c'\,\Delta x,$$

где $\overline{\beta}(\overline{x},\ y,\ y_0)$ — значение двойственной целевой функции новой производной задачи на плане $\{y,\ y_0\}$, $\Delta x = \overline{x} - x$. Следовательно,

$$\overline{\beta}(\overline{x},\ y^0_{\text{нов}},\ y^0_{0\text{нов}}) \leqslant \beta(x,\ y^0_{\text{ст}},\ y^0_{0\text{ст}}) - c'\Delta x < \beta(x,\ y^0_{\text{ст}},\ y^0_{0\text{ст}}). \quad (15)$$

Рассмотрим теперь подслучай б). В задаче (13) ограничение $A'(I,\ i_0)\,y = c_{i_0}$, $i_0 \in J_{\text{оп}} \diagdown J_{*\text{оп}}$, заменим на ограничение $A'(I,\ i_0)\,y \geqslant c_{i_0}$ и запишем ее в виде

$$\beta(x,\ y^0,\ y^0_0) = \min_{y,\ y_0}(b'y + \alpha y_0 - c'x),$$

$$A'(I,\ J_{\text{оп}} \diagdown (J_{*\text{оп}} \cup i_0))\,y = c\,(J_{\text{оп}} \diagdown (J_{*\text{оп}} \cup i_0)),$$

$$A'(I,\ i_0)\,y \geqslant c_{i_0}, \quad (16)$$

$$A'(I,\ J_{*\text{оп}})\,y + a\,(J_{*\text{оп}})\,y_0 = c\,(J_{*\text{оп}}),$$

$$A'(I,\ J_{\text{н}})\,y + a\,(J_{\text{н}})\,y_0 \geqslant c\,(J_{\text{н}}),\ y_0 \geqslant 0.$$

Ясно, что план $\{y^0_{\text{ст}},\ y^0_{0\text{ст}}\}$ является планом задачи (16). Согласно правилам двойственного метода [ч. 1], по плану $\{y^0_{\text{ст}},\ y^0_{0\text{ст}}\}$ построим коплан $\widetilde{\Delta}$ и псевдоплан $\varkappa$. Легко проверить, что $\varkappa = x + l$, где вектор $l$ найден из соотношений (11), $\widetilde{\Delta}_j = 0$, $j \in J_{\text{оп}}$, $\widetilde{\Delta}_j = \Delta_{j_{\text{х}}} z_j / z_{j_{\text{х}}} - \Delta_j$, $j \in J_{\text{н}}$. По условию, $\varkappa_{i_0} = x_{i_0} + l_{i_0} < 0$. Следовательно, направление $\delta = \{\delta_{i_0} = 1,\ \delta_j = 0,\ j \in (J_{\text{оп}} \diagdown i_0) \cup j_{\text{х}},\ \delta_j = x_{i_0 j},\ j \in J_{\text{н}} \diagdown j_{\text{х}}\}$ является подходящим для коплана $\widetilde{\Delta}$ в задаче (16). Максимально допустимый шаг вдоль этого направления равен $\sigma$, где $\sigma$ найден из условий (12).

Построим новый коплан $\overline{\Delta} = \widetilde{\Delta} + \sigma\delta$ и соответствующий ему двойственный план $\{\overline{y},\ \overline{y}_0\}$, на котором значение целевой функции $\beta(x,\ \overline{y},\ \overline{y}_0)$ не больше значения целевой функции на плане $\{y^0_{\text{ст}},\ y^0_{0\text{ст}}\}$. Рассмотрим производную задачу, соответствующую опорному плану $\{\bar{x}, \bar{A}_{\text{оп}}\}$ и $\bar{J}_*$. Легко проверить, что план $\{\bar{y}, \bar{y}_0\}$ (коплан $\bar{\Delta}$) является оптимальным двойственным планом этой задачи с оптимальным значением целевой функции

$$\bar{\beta}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}_0) = \beta(x, \bar{y}, \bar{y}_0) - c'\Delta x \leqslant \beta(x, y^0_{\text{ст}}, y^0_{0\text{ст}}) - \\ - c'\Delta x < \beta(x, y^0_{\text{ст}}, y^0_{0\text{ст}}). \qquad (17)$$

Из соотношений (15), (17) следует, что оценка субоптимальности $\beta$ уменьшается на каждой итерации.

Замечания. 1. Если имеет место подслучай б), то план $\{\bar{x}, \bar{A}_{\text{оп}}\}$ может быть вырожденным. Однако можно показать, что на следующей итерации шаг $\Theta$ вдоль построенного направления $l$ будет больше нуля (при условии, что на предыдущей итерации индекс $i_0$ определился однозначно).

2. Пусть в качестве начального плана взят базисный план. Тогда на итерациях движение происходит от одного базисного плана к другому. Описанный метод будет отличаться от симплекс-метода только правилом выбора ведущего столбца:

$$j_0 \text{ — ведущий столбец, если } |\Delta_{j_0}/z_{j_0}| = \max_{\substack{j\in J_{\text{н}},\\ \Delta_j<0,\ z_j>0}} |\Delta_j/z_j|,$$

где $z_j = a_j - \sum\limits_{i\in J_{*\text{оп}}} x_{ij}a_i, \quad j \in J_{\text{н}}$.

Остальные операции (построение подходящего направления, поиск ведущей строки и т. д.) совпадают с операциями симплекс-метода. Решение заканчивается, как только дополнительное ограничение станет несущественным (случай 1).

**3. Модификация.** Рассмотрим задачу (6) без предположения (7). Для построения подходящего направления введем производную задачу

$$\beta = \max(-\Delta'_{\text{н}} l_{\text{н}}), \quad l_{\text{н}} \geqslant -x_{\text{н}}; \qquad (18)$$

$$\sum_{j\in J_{\text{н}}} x_{i_*j} l_j \leqslant x_{i_*}, \qquad (19)$$

где $i_*$ — некоторый элемент опорного множества $J_{\text{оп}}$.

Для существования решения этой задачи необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$\Delta_j \geqslant 0 \text{ при } x_{i_*j} \leqslant 0; \quad \alpha_1(j_0) \leqslant \alpha_2(j_*), \qquad (20)$$

где $\alpha_1(j_0) = -\Delta_{j_0}/x_{i_*j_0} = \max\limits_{x_{i_*j}>0,\ j\in J_{\text{н}}} \{-\Delta_j/x_{i_*j}\}$, $\alpha_2(j_*) = -\Delta_{j_*}/x_{i_*j_*} = \min\limits_{x_{i_*j}<0,\ j\in J_{\text{н}}} \{-\Delta_j/x_{i_*j}\}$.

Решение задачи (18), (19) при условии (20) имеет вид (11) с $z_j = x_{i_* j}$, $j \in J_{\text{н}}$, $\nu = \nu_{i*} = x_{i*} + \sum\limits_{j \in J_{\text{н}}} x_{i*j} x_j$.

Если $\beta \leqslant \varepsilon$, то план $x$ является $\varepsilon$-оптимальным. Пусть $\beta > \varepsilon$. Переходим к плану $\bar{x} = x + \Theta l$, где $l = \{l_{\text{оп}}, l_{\text{н}}\}$, $l_{\text{оп}} = -A_{\text{оп}}^{-1} A_{\text{н}} l_{\text{н}}$, $\Theta = \min\{1; \Theta_{i_0}\}$ — максимально допустимый шаг, вычисленный по стандартным правилам.

Далее задачу будем решать с помощью адаптивного метода, модифицированного для решения задач с односторонними ограничениями. На каждой итерации в этом методе оценка субоптимальности будет конечна, причем она будет уменьшаться от итерации к итерации. Алгоритм модифицированного адаптивного метода состоит в следующем.

Если при вычислении $l_{\text{н}}$ по формулам (11) реализовался случай 1), то ограничение (19) несущественно. Заменяем его на аналогичное ограничение, соответствующее опорному индексу $i_0$, и решаем полученную задачу, которая имеет конечное решение, так как $\Delta_j \geqslant 0$, $j \in J_{\text{н}}$.

Если при вычислении $l_{\text{н}}$ имеет место случай 2), то $i_*$ выводим из опоры, $j_{\text{x}}$ вводим в опору. Дополнительное ограничение (19) записываем относительно индекса $i_0$. Новая производная задача имеет конечное решение.

Рассмотрим случай, когда условия (20) не выполняются. Это означает, что либо существует $j_0$, для которого $\Delta_{j_0} < 0$ при $x_{i_* j_0} \leqslant 0$, либо существуют $j_1$, $j_2$, для которых $-\Delta_{j_1}/x_{i_* j_1} < -\Delta_{j_2}/x_{i_* j_2}$, $x_{i_* j_1} < 0$, $x_{i_* j_2} > 0$. В первом случае полагаем $l_{\text{н}} = \{l_j = 0, j \in J_{\text{н}} \setminus j_0, l_{j_0} = 1\}$, во втором — $l_{\text{н}} = \{l_j = 0, j \neq j_1, j \neq j_2, j \in J_{\text{н}}, l_{j_1} = 1/x_{i_* j_1}, l_{j_2} = -1/x_{i_* j_2}\}$.

Новый план строим в виде $\bar{x} = x + \Theta_{i_0} l$, где $\Theta_{i_0} = \min\limits_{l_i < 0,\, i \in J_{\text{оп}}} \Theta_i$, $\Theta_i = -x_i/l_i$. Если шаг подсчитать не удается, то целевая функция задачи (6) неограниченно возрастает на множестве планов. В противном случае в задаче (18) условие (19) записываем относительно индекса $i_0$, индекс $i_*$ выводим из опоры, индекс $j_0$ или один из индексов $j_1$, $j_2$ вводим в опору.

Замечание. Вместо (19) можно рассматривать любую неотрицательную комбинацию опорных неравенств.

## § 3. К построению методов нулевого порядка

Симплекс-метод и его модификации, излагаемые в данной книге, являются методами оптимизации первого порядка, поскольку в них явно используется информация о первых производных целевой функции и функций основных ограничений. В последние годы в нелинейном программировании много внимания уделяется разработке методов нулевого порядка, итерации которых строятся лишь по значениям целевой функции и функций ограничений. Хотя задачи линейного программирования представляют крайне частный случай задач, вызвавших к жизни методы нулевого порядка, в некоторых ситуациях (в частности, если нет математических моделей линейных задач) могут вызвать интерес модификации нулевого порядка основных методов данной книги. В этом параграфе описывается одна модификация нулевого порядка адаптивного метода.

**1. Первый подход.** Рассмотрим задачу

$$c'x \to \max,\ Ax=b,\ d_* \leqslant x \leqslant d^*, \tag{1}$$

где $c$, $x$, $d_*$, $d^*$ — $n$-векторы, $b$ — $m$-вектор. Будем считать, что значения $n$-вектора $c$ и $m \times n$-матрицы $A$ не известны, но для любого $n$-вектора $x$ можно подсчитать $c'x$, $Ax$. Другими словами, предполагается, что можно поставить эксперимент с входными параметрами $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$, результаты которого $c'x$, $Ax$ можно замерить имеющимися средствами.

Пусть $x^1, x^2, \ldots, x^N$ $(N>n)$ — начальное множество планов задачи (1), построенное по начальной информации, $\operatorname{rank}\{x^s, s=\overline{1, N}\} = n$. Вычислим $c'x^s$, $s=\overline{1, N}$, и упорядочим эти числа: $c'x^{s_1} \geqslant c'x^{s_2} \geqslant \ldots \geqslant c'x^{s_N}$. Вектор $x^{s_N}$ заменим на новый $x^{N+1} = x(\lambda_1)$, $x(\lambda) = (1-\lambda)x^{s_N} + \frac{\lambda}{N-1}\sum_{i \neq s_N} x^i$, $\lambda_1 = \max\{\lambda : d_* \leqslant x(\lambda) \leqslant d^*\}$. Для нового множества $x^{s_1}, x^{s_2}, \ldots, x^{s_{N-1}}, x^{N+1}$ операции повторяются. После каждой итерации множество планов улучшается: из него удаляется план с наименьшим значением целевой функции и добавляется план, на котором значение целевой функции не меньше, чем в «центре тяжести» всех планов за исключением худшего. В общем случае, когда множество планов не вырождается слишком быстро, через конечное число итераций будет получен оптимальный план. Необходимым условием субоптимальности является ситуация, в которой текущее множество планов содержится в $\varepsilon$-окрестности наилучшего плана из этого множества.

**2. Второй подход.** Рассмотрим более интересный, с точки зрения приложений, случай, когда в задаче $c'x \to \max$, $b_* \leqslant Ax \leqslant b^*$, $d_* \leqslant x \leqslant d^*$, известно только множество $\{x^s, s=\overline{1, N}\}$ квазипланов, т. е. на всех векторах $x^s$ выполняются прямые ограничения $d_* \leqslant x^s \leqslant d^*$, но не на всех векторах выполняются основные ограничения $b_* \leqslant Ax^s \leqslant b^*$. Предположим, что известна хотя бы одна линейная комбинация $\sum_{s=1}^{N} \lambda_s x^s$, составляющая план задачи (1). Это эквивалентно предположению, что известен начальный план $x^1$ и построены векторы $x^i = x^1 + \mu_i l^i$, $i=\overline{2, N}$, по некоторому множеству линейно независимых направлений $l^i$. Общий случай, когда вектор $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i x^i$ не составляет плана задачи (1), сводится к рассматриваемому (см. § 1).

Положим $\gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_N\}$, $\gamma_s = c'x^s$, $Q = \{q_1, \ldots, q_N\}$, $q_s = Ax^s$, $P = \{x^1, \ldots, x^N\}$, $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}$ и перейдем от переменных $x$ к переменным $\lambda: x = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x^i$. В результате получим задачу

$$\gamma'\lambda \to \max_{\lambda}, \ b_* \leqslant Q\lambda \leqslant b^*, \ d_* \leqslant P\lambda \leqslant d^*, \tag{2}$$

эквивалентную задаче (1). Ее можно решить адаптивным методом (см. § 1), поскольку ее начальный план $\lambda$ известен.

З а м е ч а н и е. Предположение $\operatorname{rank}\{x^s, s=\overline{1, N}\}=n$ гарантирует сходимость итераций в общем случае, когда начальная информация не достаточно хорошая. При хорошей информации линейная оболочка небольшого числа векторов $x^s$ уже близка к оптимальному плану задачи (1). В этом случае число $N$ невелико и задача (2) может быть эффективно решена специальными методами (см. гл. I, § 1).

# Глава I

# БОЛЬШИЕ ЗАДАЧИ

*Размер общей задачи* линейного программирования характеризуется количеством $n$ переменных и количеством $m$ основных ограничений. Если хотя бы один из этих параметров представляет собой большое число, то принято *задачу* называть *большой*. Это весьма относительное определение зависит от многих конкретных обстоятельств. На практике задачу относят к большим задачам, если при попытке ее решения стандартными методами (чаще всего симплекс-методом) возникают следующие трудности: выбранный метод невозможно реализовать на имеющейся ЭВМ (например, из-за ограничений на оперативную память); реализация метода на ЭВМ не позволяет получить решения с необходимой точностью (например, в силу большого числа итераций и накопления ошибок округления); получение точного решения сопряжено с неоправданно большими расходами. С развитием вычислительной техники растут размеры задач, доступных решению на ЭВМ стандартными методами. Однако при этом, как правило, заметно растут и затраты на их решение. Во многих случаях возможность решения и расходы на решение задач не связаны непосредственно с размерами конкретных задач, а зависят главным образом от того, что в стандартных методах нельзя полностью учесть специфику всех задач и используемых ЭВМ. В данной главе излагается ряд методов решения задач, которые, по существу, представляют собой сочетание методов [ч. 1, ч. 2], используемых в качестве модулей, и дополнительных приемов, зависящих от особенностей конкретных задач.

## § 1. Задача с большим числом переменных

Модели линейного программирования, в которых немного основных ограничений, но очень велико количество переменных, встречаются при изучении многих прикладных задач, например задачи о раскрое [7], задачи оптимального управления в классе импульсных сигналов (см. гл. II) и др. [7]. Они возникают и при использовании специальных методов типа метода декомпозиции Данцига — Вулфа [2] для решения задач с небольшим числом переменных. Специфика нового класса задач требует соответствующей модификации и методов данной книги. Несколько подобных модификаций описываются в данном параграфе. Методы § 5, 7 также можно использовать для решения задач с большим числом переменных.

**1. Использование части неопорных переменных для увеличения итерационного шага.** Рассмотрим общую задачу линейного программирования в канонической форме *)

$$c'x \to \max,\ Ax=b,\ d_* \leqslant x \leqslant d^*\ (\operatorname{rank} A = m), \qquad (1)$$

в предположении, что размеры вектора $x$ значительно превосходят размеры вектора $b$ $(n \gg m)$.

С теоретической точки зрения значение величины $n$ не может принципиально сказаться при реализации на ЭВМ методов данной книги. Действительно, вычислив по опорному плану $\{x,\ A_{\text{оп}}\}$ вектор потенциалов $u\ (u' = c'_{\text{оп}}A_{\text{оп}}^{-1})$, можно, зная оценки $\Delta_j = u'a_j - c_j$, $j \in J_{\text{н}}$, приступить к оценке субоптимальности или к операциям по улучшению опорного плана $\{x,\ A_{\text{оп}}\}$. При этом, в силу малости величины $m$, обратную матрицу $A_{\text{оп}}^{-1}$ легко записать в оперативную память, а неопорные векторы $a_j$, $j \in J_{\text{н}}$, можно вызывать группами (содержащими наибольшие по модулю $\Delta_j$) из внешней памяти или генерировать отдельным алгоритмом (например, в методе декомпозиции Данцига—Вулфа). Такая модификация симплекс-метода дала хорошие результаты для рассматриваемого класса задач [7]. Ее можно использовать и при реализации опорного метода [ч. 1].

Специфика задачи (1), важная с точки зрения практической реализации обсуждаемых методов, состоит в следующем. По построению, оценки $\Delta_j$, $j \in J_{\text{оп}}$, опорных векторов условий (и соответствующих им переменных) равны нулю. При $n \gg m$ среди неопорных $m+1$-векторов $\{c_j,\ a_j\}$, $j \in J_{\text{н}}$, составленных из компонент вектора стоимости $c$ и столбцов матрицы условий $A$, найдется много таких, которые параллельны или почти параллельны некоторым опорным векторам $\{c_j,\ a_j\}$, $j \in J_{\text{оп}}$. Оценки $\Delta_j$, соответствующие этим векторам, будут равны нулю или мало отличаться от нуля. Между тем в симплекс-методе

---

*) Эта форма выбрана для некоторого упрощения выкладок. В качестве несложного упражнения предлагается объединить идеи данного параграфа с адаптивным методом из § 1 введения и рассмотреть задачу в естественной форме.

и методах данной книги знаки оценок $\Delta_j$ играют очень большую роль. Если учесть, что почти каждая реализация метода на ЭВМ сопровождается ошибками округления и что все современные ЭВМ идентифицируют (распознают) числа лишь с ограниченной точностью, то станут понятны те сложности, которые возникают при реализации методов на ЭВМ. Прежде всего, в симплекс-методе затрудняется останов процесса решения по критерию оптимальности. Из-за ошибок в распознавании знаков оценок $\Delta_j$, $j \in J_н$, процесс решения может быть остановлен на неоптимальном плане или, наоборот, может продолжаться, хотя оптимальный план уже получен.

В опорном методе с адаптивной нормировкой и в адаптивном методе ошибки в установлении знака также сказываются на выборе подходящего направления, ибо направление вектора $l$ определяется знаками оценок.

Серьезные трудности при $n \gg m$ возникают даже в случае, если вычисления ведутся абсолютно точно. Компоненты $l_j$, $j \in J_н$, определяются знаком $\Delta_j$ и числами $x_j$, $d_{*j}$, $d_j^*$, но не зависят от величины $|\Delta_j|$. Ясно, что при этом неоправданно увеличивается роль компонент $x_j$ с малыми $\Delta_j$, которые по физическому смыслу $\Delta_j$ должны меняться незначительно. Один из способов устранения этой трудности состоит в формировании подходящего направления с компонентами $\Delta_j l_j$. Ниже будет описан другой способ.

Из опорного метода с адаптивной нормировкой [ч. 2] и адаптивного метода (см. введение) видно, что вариации неопорных переменных используются для формирования подходящего направления с максимальным приращением значения целевой функции, а вариации опорных переменных находятся из условия максимально допустимого шага вдоль выбранного направления. При $n \gg m$ количество переменных, участвующих в построении направления, значительно превосходит количество переменных, используемых для вычисления шага. Поэтому может оказаться, что скорость увеличения значения целевой функции вдоль подходящего направления велика, но допустимый шаг очень мал и мало приращение целевой функции. Анализ оценок $\Delta_j$ позволяет преодолеть эту трудность следующим образом. По физическому смыслу величина $\Delta_j$ характеризует скорость увеличения целевой функции при изменении компоненты $x_j$. Оценки опорных переменных равны нулю, т. е. их изменение не сказывается на целевой функции. В этом отношении опорным переменным «родственны» те неопорные переменные, оценки $\Delta_j$ которых равны нулю или близки к нулю. Основная идея метода данного параграфа состоит в том, чтобы неопорные переменные с малыми оценками $|\Delta_j|$ использовать не для увеличения скорости изменения целевой функции вдоль подходящего направления, а направить их в помощь опорным переменным с целью получения максимально допустимого шага. В силу малости $|\Delta_j|$ изменения переменных $x_j$ незначительно скажутся на скорости изменения целевой функции, но не исключено, что они сильно повлияют на скорость изменения опорных переменных $x_i$, $i \in J_{\text{оп}}$, которыми определяется величина допустимого шага $\Theta$. Компоненты плана, которым соответствуют оценки с большими значениями $|\Delta_j|$, оставляются для формирования подходящего направления по схеме адаптивного метода. Из приведенного описания идеи метода видно, что в нем удается уменьшить влияние ошибок округления на процесс решения задачи.

Выберем число $\xi \geqslant 0$ (параметр метода) и разобьем множества $J = \{1, 2, \ldots, n\}$, $J_{\text{н}}$ на подмножества $J_{\text{м}} = \{j \in J : |\Delta_j| \leqslant \xi\}$, $J_{\text{нб}} = \{j \in J_{\text{н}} : |\Delta_j| > \xi\}$, $J_{\text{нм}} = J_{\text{н}} \cap J_{\text{м}}$. Построим компоненты допустимого направления, соответствующие большим оценкам:

$$l_j = d_{*j} - x_j \text{ при } \Delta_j > \xi;$$
$$l_j = d_j^* - x_j \text{ при } \Delta_j < -\xi, \; j \in J_{\text{нб}}. \tag{2}$$

Согласно [ч. 2] (см. также введение, § 1) при сохранении остальных неопорных компонент плана целевая функция получает максимальное приращение в пространстве переменных $x_j$, $j \in J_{\text{нб}}$. Компоненты $l_j$, $j \in J_{\text{м}}$, допустимого направления $l$ построим так, чтобы шаг $\Theta$ вдоль $l$ был максимальным, т. е.

$$\Theta \to \max_{l_j,\, j \in J_{\text{м}}}, \tag{3}$$

где, как известно (см. [ч. 1]),

$$\Theta = \min\{\Theta_j, j \in J_{\text{м}}; 1\},$$
$$\Theta_j = \begin{cases} (d_{*j} - x_j)/l_j & \text{при } l_j < 0, \\ (d_j^* - x_j)/l_j & \text{при } l_j > 0, \\ \infty & \text{при } l_j = 0, \; j \in J_{\text{м}}, \end{cases} \tag{4}$$

и переменные $l_j$, $j \in J_м$, удовлетворяют условиям допустимости направления:

$$A_м l_м + b_б = 0, \; b_б = A_{нб} l_{нб}. \tag{5}$$

При $\Theta = 1$ план $x + l$ $\beta$-оптимален, где

$$\beta = \sum_{\Delta_j > 0,\, j \in J_{нм}} \Delta_j (x_j + l_j - d_{*j}) + \sum_{\Delta_j < 0,\, j \in J_{нм}} \Delta_j (x_j + l_j - d_j^*) \leqslant \xi \Big( \sum_{\Delta_j > 0,\, j \in J_{нм}} (x_j + l_j - d_{*j}) - \sum_{\Delta_j < 0,\, j \in J_{нм}} (x_j + l_j - d_j^*) \Big).$$

При достаточно малом $\xi$ выполняется неравенство $\beta \leqslant \varepsilon$. Если окажется, что $\beta > \varepsilon$, то число $\xi$ следует уменьшить и решение задачи (1) продолжить при новом $\xi$. При $\Theta < 1$ строится новый план *) $\bar{x} = x + \Theta l$.

Остановимся подробнее на задаче (3), (4). Ограничения (4), (5) на шаг $\Theta$ и вектор $l_м$ получены из соотношений

$$d_{*м} - x_м \leqslant \Theta l_м \leqslant d_м^* - x_м, \; A_м l_м + b_б = 0, \; 0 \leqslant \Theta \leqslant 1.$$

Если последнее равенство умножить на $\Theta$ и перейти к новым переменным $s_м = \Theta l_м$, то получим следующую эквивалентную (3), (4) задачу для вычисления максимального шага:

$$\Theta \to \max, \; A_м s_м + \Theta b_б = 0, \; d_{*м} - x_м \leqslant s_м \leqslant d_м^* - x_м, \quad 0 \leqslant \Theta \leqslant 1. \tag{6}$$

В качестве начального опорного плана задачи (6) можно взять совокупность $\{\Theta^*, s_м^*, A_{оп}\}$, где $A_{оп}$ — опора плана $x$; $s_м^* = \{s_{оп}^*, s_{нм}^*\}$; $s_{нм}^* = 0$;

$$s_{оп}^* = -\Theta^* A_{оп}^{-1} b_б; \; \Theta^* = \min\{1, \; \Theta_j^*, \; j \in J_{оп}\};$$
$$\Theta_j^* = (d_{*j} - x_j)/l_j^* \text{ при } l_j^* < 0;$$
$$\Theta_j^* = (d_j^* - x_j)/l_j^* \text{ при } l_j^* > 0;$$

---

*) Предполагается, что параметр $\xi$ настолько мал, что построенное направление $l$ будет подходящим.

$$\Theta_j^* = \infty \text{ при } l_j^* = 0; \; l_{\text{оп}}^* = -A_{\text{оп}}^{-1} b_{\text{б}}.$$

Задачу (6) решаем при помощи опорного метода с адаптивной нормировкой [ч. 2]. На первой итерации оценки всех неопорных векторов условий $a_j$, $j \in J_{\text{нм}}$, задачи (6) равны нулю, за исключением оценки $\Delta_\Theta = -1$ вектора $b_{\text{б}}$. Следовательно, при $\Theta < 1$ на итерации среди неопорных переменных увеличивается только $\Theta$.

Пусть $i_0$ — индекс опорной переменной $s_{i_0}$, которая при увеличении $\Theta$ на отрезке [0, 1] первой вышла на верхнюю или нижнюю границу прямых ограничений ($i_0$ находится по стандартным формулам типа (4)). Обозначим

$$J^* = \{j \in J_{\text{м}} \setminus J_{\text{оп}} : s_j \neq d_{*j} - x_j \text{ при } kx_{i_0 j} > 0;$$

$$s_j \neq d_j^* - x_j \text{ при } kx_{i_0 j} < 0\},$$

$$k = \begin{cases} 1, & \text{если } s_{i_0} \text{ достигает нижней границы,} \\ -1, & \text{если } s_{i_0} \text{ достигает верхней границы,} \end{cases}$$

$$x(i_0, J_{\text{нм}}) = e'_{i_0} A_{\text{оп}}^{-1} A_{\text{нм}}.$$

Если $J^* = \varnothing$, то значение $\tilde{\Theta}$, на котором остановился процесс увеличения неопорной переменной $\Theta$, равно искомому максимальному шагу вдоль $l$. Это следует из того, что после замены в опоре вектора $a_{i_0}$ на вектор $b_{\text{б}}$ будет выполняться критерий оптимальности в задаче (6). Опору $\tilde{A}_{\text{оп}}$, на которой $J^* = \varnothing$, приписываем в качестве промежуточной опоры плану $\bar{x} = x + \tilde{\Theta} l$, где $l = \{l_{\text{м}}, l_{\text{нб}}\}$, $l_{\text{м}} = \tilde{s}_{\text{м}}/\tilde{\Theta}$, $l_{\text{нб}}$ вычисляется согласно (2), если $\tilde{\Theta} \neq 0$; $l = 0$, если $\tilde{\Theta} = 0$; $\{\tilde{s}_{\text{м}}, \tilde{\Theta}\}$ — решение задачи (6).

В задаче (1) по опоре $\tilde{A}_{\text{оп}}$ вычисляем оценки $\tilde{\Delta}_j$ неопорных векторов условий и псевдоплан $\tilde{\varkappa}$. Если $\tilde{\varkappa}_{i_0} < d_{*i_0}$ при $k = 1$; $\tilde{\varkappa}_{i_0} > d_{i_0}^*$ при $k = -1$ (индекс $i_0$ и число $k$ определены выше), то вывод вектора $a_{i_0}$ из опоры $\tilde{A}_{\text{оп}}$ по правилам адаптивного метода ведет к улучшению последней (уменьшению оценки субоптимальности опорного плана $\{\bar{x}, \tilde{A}_{\text{оп}}\}$). Можно показать, что в случае $\operatorname{sign} \Delta_j = \operatorname{sign} \tilde{\Delta}_j$, $j \in J_{\text{нб}}$, оценки $\tilde{\Delta}_j$, $j \in J_{\text{м}}$, не влияют на выбор вектора $a_{j_0}$, который войдет в опору вместо $a_{i_0}$. Поэтому в адаптивном методе при замене опоры достаточно двойственный шаг $\sigma$ вычислять по оценкам $\tilde{\Delta}_j$, $j \in J_{\text{нб}}$. Построением опорного плана $\{\bar{x}, \bar{A}_{\text{оп}}\}$, $\bar{A}_{\text{оп}} = (A_{\text{оп}} \setminus a_{i_0}) \cup a_{j_0}$, завершается итерация в задаче (1).

Если псевдоплан $\tilde{\varkappa}$, построенный по опоре $\tilde{A}_{\text{оп}}$, удовлетворяет соотношениям $\tilde{\varkappa}_{i_0} \geqslant d_{*i_0}$ при $k=1$; $\tilde{\varkappa}_{i_0} \leqslant d^*_{i_0}$ при $k=-1$, то промежуточную опору $\tilde{A}_{\text{оп}}$ берем в качестве опоры $\bar{A}_{\text{оп}}$ плана $\bar{x}$. Можно показать, что в этом случае задача (6), построенная по опорному плану $\{\bar{x}, \bar{A}_{\text{оп}}\}$, будет иметь решение с $\Theta > 0$ (предполагается, что $\bar{x}_{i_0}$ — единственная критическая опорная переменная в опорном плане $\{\bar{x}, A_{\text{оп}}\}$).

Рассмотрим случай $J^* \neq \varnothing$. Шаг $\tilde{\Theta}$ не равен, вообще говоря, максимальному шагу вдоль $l$. Итерации в (6) продолжаются. Вектор $a_{i_0}$ удаляется из $A_{\text{оп}}$. Вводимый вектор $a_{j_0}$ находим по правилам адаптивного метода. При $J^* \neq \varnothing$ двойственный шаг $\sigma$ равен нулю и он достигается на векторах условий $a_j$, $j \in J^*$. Поэтому индекс $j_0$ принадлежит множеству $J^*$. Среди элементов $J^*$ выбираем прежде всего такой индекс $j_0$, для которого $d_{*j_0} - x_{j_0} < \tilde{s}_{j_0} < d^*_{j_0} - x_{j_0}$. (В противном случае $j_0$ — любой элемент из $J^*$.) Нетрудно проверить, что после замены $A_{\text{оп}} \to \bar{A}_{\text{оп}}$, $\bar{A}_{\text{оп}} = (A_{\text{оп}} \setminus a_{i_0}) \cup a_{j_0}$, т. е. на следующей итерации, в задаче (6) оценки всех неопорных векторов условий, за исключением вектора $b_б$, равны нулю. Таким образом, в случае $J^* \neq \varnothing$ для нового опорного плана задачи (6) выполняются те же специальные условия, что и для начального.

**2. Использование части неопорных переменных для увеличения итерационного приращения целевой функции.** Согласно адаптивному методу, неопорные компоненты допустимого направления выбираются из условия максимального приращения целевой функции в пространстве не всех переменных, а только неопорных. При $n \gg m$ истинное приращение целевой функции на итерации может существенно отличаться от его значения, полученного при построении допустимого направления. Это происходит каждый раз, когда оказывается малым шаг $\Theta$ вдоль допустимого направления $l$. (В п. 1 для увеличения $\Theta$

была использована часть неопорных переменных.) Максимизация шага не является основной целью итерации. Главная задача итерации для всех одношаговых методов оптимизации, т. е. для методов, в которых операции на итерации не согласовываются с операциями ни одной последующей итерации, состоит в максимизации приращения целевой функции на итерации. В данном пункте для решения этой задачи используются компоненты допустимого направления, соответствующие малым оценкам. Из физического смысла вектора оценок $\Delta$ следует, что приращение целевой функции от изменения компонент $x_{\text{н}}$ равно $-\Delta_{\text{н}}' l_{\text{н}} = -\Delta_{\text{нм}}' l_{\text{нм}} - \Delta_{\text{нб}}' l_{\text{нб}}$. Компоненту $l_{\text{нб}}$ построим по (2). Обозначим $\beta_{\text{нб}} = -\Delta_{\text{нб}}' l_{\text{нб}}$. Максимум по $l_{\text{нм}}$ величины $-\Delta_{\text{н}}' l_{\text{н}}$ достигается одновременно с максимумом по $0 \leqslant \Theta \leqslant 1$ и $s_{\text{нм}} = \Theta l_{\text{нм}}$ величины $-\Theta\Delta_{\text{н}}' l_{\text{н}} = -\Delta_{\text{нм}}' s_{\text{нм}} + \Theta\beta_{\text{нб}}$. Множество допустимых значений для $\Theta$, $s_{\text{м}}$ описано в п. 1 (см. ограничения задачи (6)).

Таким образом, максимизация итерационного приращения целевой функции при заданном направлении $l_{\text{нб}}$ изменения переменных $x_{\text{нб}}$ сводится к задаче

$$\begin{gathered}\Theta\beta_{\text{нб}} - \Delta_{\text{нм}}' s_{\text{нм}} \to \max_{\Theta,\, s_{\text{м}}}, \quad A_{\text{м}} s_{\text{м}} + \Theta b_{\text{б}} = 0, \\ d_{*\text{м}} - x_{\text{м}} \leqslant s_{\text{м}} \leqslant d_{\text{м}}^* - x_{\text{м}}, \quad 0 \leqslant \Theta \leqslant 1.\end{gathered} \tag{7}$$

Эта задача отличается от (6) дополнительным слагаемым в целевой функции, которое характеризует вклад в приращение переменных с малыми оценками. Если $\Delta_{\text{нм}} = 0$, то задача (7) совпадает с (6), т. е. в этом случае максимальный шаг обеспечивает максимальное итерационное приращение целевой функции.

Задачи (6), (7) можно решать одним и тем же методом.

**3. Покомпонентное построение подходящего направления.** Для невырожденного опорного плана $\{x, A_{\text{оп}}\}$ множество неопорных индексов $J_{\text{н}}$ разобьем на несколько подмножеств $J_1, \ldots, J_k$, $J_s \cap J_p = \varnothing$, $s \neq p$, $\bigcup_{s=1}^{k} J_s = J_{\text{н}}$. Чтобы упростить вычисления, рассмотрим два множества $J_1$, $J_2$.

В качестве $J_1$, $J_2$ возьмем $J_{\text{нб}}$, $J_{\text{нм}}$ (см. п. 1). Построим три вектора $l$, $l_1$, $l_2$. Вектор $l$ — подходящее направление для опорного плана $\{x, A_{оп}\}$, построенное согласно адаптивному методу:

$$l = \{l_{оп}, l_н\}, \; l_{оп} = -A_{оп}^{-1} A_н l_н,$$

$$l_j = \begin{cases} d_{*j} - x_j, & \text{если } \Delta_j > 0, \\ d_j^* \;\; - x_j, & \text{если } \Delta_j < 0, \quad j \in J_н. \\ \quad 0, & \text{если } \Delta_j = 0, \end{cases} \tag{8}$$

Через $J_{оп}^{\varkappa} = J_{оп}^* \cup J_{*оп}$ обозначим множество индексов опорных компонент псевдоплана $\varkappa = x + l$, значения которых выходят за пределы прямых ограничений:

$$J_{оп}^* = \{j \in J_{оп}, \; \varkappa_j > d_j^*\}, \; J_{*оп} = \{j \in J_{оп}, \; \varkappa_j < d_{*j}\}.$$

Если $J_{оп}^{\varkappa} = \varnothing$, то легко показать, что $x + l$ является оптимальным планом задачи (1). Компоненты вектора $l_1 = \{l_{1оп}, l_{11}, l_{12}\}$ положим равными

$$l_{1оп} = l_1(J_{оп}) = -A_{оп}^{-1} A_н l_1(J_н), \; l_{11} = l_1(J_1) = l(J_1),$$
$$l_{12} = l_1(J_2) = 0.$$

Аналогично строится вектор $l_2 = \{l_{2оп}, l_{21}, l_{22}\}$:

$$l_{2оп} = l_2(J_{оп}) = -A_{оп}^{-1} A_н l_2(J_н), \; l_{21} = l_2(J_1) = 0,$$
$$l_{22} = l_2(J_2) = l(J_2).$$

Улучшение опорного плана $\{x, A_{оп}\}$ начинаем с улучшения плана $x$ вдоль подходящего направления $l_1$ (предполагается, что среди компонент $x_j$, $j \in J_1$, есть компоненты, не удовлетворяющие критерию оптимальности), т. е. строим план

$$x^1 = x + \Theta_1^{(1)} l_1,$$

где $\Theta_1^{(1)}$ — максимально допустимый шаг, соответствующий направлению $l_1$ для плана $x$. Если $\Theta_1^{(1)} = 1$ и для всех компонент $x_j^1 = x_j$, $j \in J_2$, выполняются условия оптимальности, то план $x^1$ является оптимальным планом задачи (1).

Предположим, что эти условия не выполняются. Пусть $i_1$ — индекс критической опорной компоненты плана $x^1$, на которой достигается шаг $\Theta_1^{(1)}$. Возможны два случая:

а) для $i = i_1$ и $\bar{x} = x^1$ выполняются условия

$$i \in J_{*оп} \text{ при } \bar{x}_i = d_{*i}; \;\; i \in J_{оп}^* \text{ при } \bar{x}_i = d_i^*; \tag{9}$$

б) для $i = i_1$ и $\bar{x} = x^1$ условия (9) не выполняются.

В случае а) улучшаем опору $A_{оп}$, выводя из нее вектор $a_{i_0}$ и вводя вместо него вектор $a_{j_0}$, индекс которого находится по правилам опорного метода с адаптивной нормировкой [ч. 2]. Итерация заканчивается построением нового плана и новой опоры.

В случае б) продолжаем улучшать план $x$. Покажем, что вектор $l_2$ является подходящим направлением для плана $x^1$. Пусть для определенности $x^1_{i_1}=d^*_{i_1}$ (случай $x_{i_1}=d_{*i_1}$ рассматривается аналогично). Тогда $l_{i_1}=l_{1i_1}+l_{2i_1}\leqslant x_{i_1}-d^*_{i_1}$ и $l_{1i_1}>x_{i_1}-d^*_{i_1}$. Следовательно, $l_{2i_1}<0$ и направление $l_2$ является допустимым для плана $x^1$ (при условии, что шаг $\Theta_1^{(1)}$ определился однозначно). Среди компонент $x^1_j=x_j$, $j\in J_2$, есть такие, для которых не выполняется критерий оптимальности, ибо в противном случае выполнялись бы условия (9). Следовательно, $-\Delta' l_2=-\Delta'(J_2)\,l_2(J_2)>0$ и направление $l_2$ является подходящим.

Используя $l_2$, строим новый план

$$x^2=x^1+\Theta_2^{(2)}l_2=x+\Theta_1^{(1)}l_1+\Theta_2^{(2)}l_2,$$

где $\Theta_2^{(2)}$ — максимально допустимый шаг из $x^1$ вдоль $l_2$. Пусть $i_2$—индекс критической опорной переменной плана $x^2$, которая определила шаг $\Theta_2^{(2)}$, и пусть $x^2_{i_2}=d^*_{i_2}$. Если для $i=i_2$ и $\bar{x}=x^2$ выполняются условия (9) (случай а)), то для плана $x^2$ строим улучшенную опору $\bar{A}_{оп}=(A_{оп}\setminus a_{i_2})\cup a_{j_0}$, где вектор $a_{j_0}$ найден по правилам опорного метода с адаптивной нормировкой.

Если для $i=i_2$ и $\bar{x}=x^2$ условия (9) не выполняются (случай б)), то можно показать, что $\Theta_1^{(1)}<\Theta_2^{(2)}$, $\Theta_1^{(1)}<\Theta$, где $\Theta$ — максимально допустимый шаг из плана $x$ вдоль направления $l$. Действительно, предположим противное: $\Theta_2^{(2)}\leqslant\Theta_1^{(1)}$. Для $i_2$-й компоненты планов $x^1$ и $x^2$ выполняются условия

$$x^1_{i_2}=x_{i_2}+\Theta_1^{(1)}l_{1i_2}<d^*_{i_2},\quad x^2_{i_2}=x_{i_2}+\Theta_1^{(1)}l_{1i_2}+\Theta_2^{(2)}l_{2i_2}=d^*_{i_2}. \quad (10)$$

Из соотношений (10) следует, что $l_{2i_2}>0$. По условию, $\varkappa_{i_2}=x_{i_2}+l_{1i_2}+l_{2i_2}\leqslant d^*_{i_2}$. Ясно, что $\Theta_1^{(1)}<1$, так как в противном случае для $i=i_2$ выполнялись бы условия (9). Следовательно,

$$x^{\cdot}_{i_2}+\Theta_1^{(1)}(l_{1i_2}+l_{2i_2})<d^*_{i_2}.$$

Тогда $x^2_{i_2}=x_{i_2}+\Theta_1^{(1)}l_{1i_2}+\Theta_2^{(2)}l_{2i_2}\leqslant x_{i_2}+\Theta_1^{(1)}(l_{1i_2}+l_{2i_2})<d^*_{i_2}$, но это противоречит второму условию из (10). Полученное

противоречие доказывает, что $\Theta_1^{(1)} < \Theta_2^{(2)}$. Для опорных компонент плана $x^2$ выполняются неравенства

$$d_{*\text{оп}} \leqslant x_{\text{оп}} + \Theta_1^{(1)} l_{1\text{оп}} + \Theta_2^{(2)} l_{2\text{оп}} \leqslant d^*_{\text{оп}}.$$

Уменьшим шаг $\Theta_2^{(2)}$ вдоль подходящего направления $l_2$ до $\Theta_1^{(1)}$. При этом прямые опорные ограничения не нарушатся:

$$d_{*\text{оп}} < x_{\text{оп}} + \Theta_1^{(1)} (l_{1\text{оп}} + l_{2\text{оп}}) < d^*_{\text{оп}}. \qquad (11)$$

Из неравенств (11) следует, что $\Theta_1^{(1)} < \Theta$. Утверждение доказано.

Пусть для $i = i_2$ и $\bar{x} = x^2$ условия (9) не выполняются. Продолжаем улучшение плана $x$. Как и в предыдущем случае, легко показать, что направление $l_1$ является подходящим для плана $x^2$. Поэтому строим план

$$x^3 = x^2 + \Delta\Theta_1^{(3)} l_1 = x + \Theta_1^{(3)} l_1 + \Theta_2^{(2)} l_2,$$

где $\Theta_1^{(3)} = \Theta_1^{(1)} + \Delta\Theta_1^{(3)}$, $\Delta\Theta_1$ — максимально допустимый шаг вдоль $l_1$ для плана $x^2$. Пусть $j_1$ — индекс опорной компоненты плана $x^3$, определившей шаг $\Delta\Theta_1$. Если для $i = j_1$ и $\bar{x} = x^3$ выполняются условия (9), то для плана $x^3$ переходим к улучшенной опоре $\bar{A}_{\text{оп}} = (A_{\text{оп}} \setminus j_1) \cup j_0$. Если для $i = j_1$ и $\bar{x} = x^3$ условия (9) не выполняются, то можно показать, что $\Theta_1^{(3)} > \Theta_2^{(2)}$, $\Theta_2^{(2)} < \Theta$, вектор $l_2$ является подходящим направлением для плана $x^3$. Строим новый план

$$x^4 = x^3 + \Delta\Theta_2^{(4)} l_2 = x + \Theta_1^{(3)} l_1 + \Theta_2^{(4)} l_2$$

и повторяем все рассуждения, описанные для плана $x^2$.

Докажем, что через конечное число шагов обязательно встретится случай а). Предположим противное: случай б) встречается бесконечное число раз. Поскольку число опорных элементов конечно, то найдется такой опорный элемент $j_*$, на котором шаг вдоль $l_1$ (или $l_2$) достигается бесконечное число раз, причем при $\varkappa_{j*} \leqslant d^*_{j*}$ шаг достигается на верхней границе, при $\varkappa_{j*} \geqslant d_{*j*}$ — на нижней.

Пусть $x_{j_*}^{(s)} = x_{j_*} + \Theta_1^{(s-1)} l_{1j_*} + \Theta_2^{(s)} l_{2j_*}$ — $j_*$-я компонента плана $x^{(s)}$ до того времени, пока движение вдоль направления $l_1$ приведет к новому шагу $\Theta_1^{(s+1)} = \Theta_1^{(s-1)} + \Delta\Theta_1^{(s+1)}$, определяемому компонентой $j_*$. Предположим, что шаг $\Delta\Theta_1^{(s+1)}$ достигается на нижней границе. Тогда

$$\Delta\Theta_1^{(s+1)} = (d_{*j_*} - x_{j_*} - \Theta_1^{(s-1)} l_{1j_*} - \Theta_2^{(s)} l_{2j_*})/l_{1j_*}.$$

В силу того что $l_{1j_*} < 0$, $l_{2j_*} > 0$, $\Theta_2^{(s)} > \Theta_1^{(s-1)}$, $\Theta_1^{(s-1)} < \Theta$, имеем $x_{j_*} + \Theta_1^{(s-1)} l_{1j_*} + \Theta_2^{(s)} l_{2j_*} > x_{j_*} + \Theta_1^{(s-1)} (l_{1j_*} + l_{2j_*}) > d_{*j_*}$. Следовательно,

$$\Delta\Theta_1^{(s+1)} > (d_{*j_*} - x_{j_*})/l_{1j_*} - \Theta_1^{(s-1)} (l_{1j_*} + l_{2j_*})/l_{1j_*}. \quad (12)$$

При $l_{1j_*} + l_{2j_*} \geqslant 0$ из (12) для $s + 1 > 3$ получаем

$$\Delta\Theta_1^{(s+1)} > |(d_{*j_*} - x_{j_*})/l_{1j_*}| + \Theta_1^{(3)} |(l_{1j_*} + l_{2j_*})/l_{1j_*}| \geqslant \alpha > 0,$$

где $\alpha$ — некоторая константа, не зависящая от $s$.

Пусть $l_{1j_*} + l_{2j_*} < 0$. По условию, $x_{j_*} + l_{1j_*} + l_{2j_*} \geqslant d_{*j_*}$. Из (12) получаем

$$\Delta\Theta_1^{(s+1)} > |(l_{1j_*} + l_{2j_*})/l_{1j_*}| - \Theta_1^{(s-1)} |(l_{1j_*} + l_{2j_*})/l_{1j_*}| =$$
$$= (1 - \Theta_1^{(s-1)}) |(l_{1j_*} + l_{2j_*})/l_{1j_*}| >$$
$$> (1 - \Theta) |(l_{1j_*} + l_{2j_*})/l_{1j_*}| \geqslant \alpha > 0,$$

так как из условия $J_{\text{оп}}^{\varkappa} \neq \varnothing$ следует, что $\Theta < 1$.

Таким образом, $\Delta\Theta_1^{(s+1)} \geqslant \alpha$. Значит, шаг $\Theta_1^{(2k+1)} \to \infty$ при $k \to \infty$. Однако это противоречит тому, что $\Theta_1^{(2k+1)} < \Theta$ для любого $k$. Следовательно, за конечное число шагов реализуется случай а). Большая итерация заканчивается построением нового опорного плана $\{\bar{x}, \bar{A}_{\text{оп}}\}$, где $\bar{x} = x^{(s)}$.

Правило выбора ведущего столбца $a_{j_0}$ не гарантирует невырожденность нового опорного плана. Однако, как и в прямом опорном методе с адаптивной нормировкой [ч. 2], можно показать, что наличие в опорном плане $\{\bar{x}, \bar{A}_{\text{оп}}\}$ одной критической переменной $\bar{x}_{j_0}$ не мешает на следующей итерации построить план

$$\bar{x}^{(k)} = \bar{x} + \Theta_1^{(k)} l_1 + \Theta_2^{(k-1)} l_2 \quad (\text{или } \bar{x} + \Theta_1^{(k-1)} l_1 + \Theta_2^{(k)} l_2)$$

такой, что $\Theta_1^{(k)} + \Theta_2^{(k-1)} > 0$, и для критической опорной переменной $\bar{x}_{i_*}^{(k)}$ выполняются условия (9).

**4. Агрегирование переменных.** Рассмотрим задачу

$$c'(J_0)\, x(J_0) \to \max, \; A(I, J_0)\, x(J_0) +$$
$$+ \sum_{s \in S} A(I, J_s)\, x(J_s) = b(I), \; d_* \leqslant x(J) \leqslant d^*, \; J = J_0 \bigcup_{s \in S} J_s.$$

Пусть $\{x^1, A(I, J_{0\text{оп}})\}$ — начальный опорный план, $J_{0\text{оп}} \subset J_0$. Построим векторы $q^s = A(I, J_s)x^1(J_s)$ и с помощью вектора $z = z(S)$ агрегированных переменных исходную задачу запишем в эквивалентном виде:

$$c'(J_0)x(J_0) \to \max, \; A(I, J_0)x(J_0) + Qz = b(I),$$
$$d_*(J_0) \leqslant x(J_0) \leqslant d^*(J_0), \tag{13}$$
$$Qz = \sum_{s \in S} A(I, J_s)x(J_s), \; d_*(J_s) \leqslant x(J_s) \leqslant d^*(J_s), \; s \in S,$$

где $Q = \{q^s, s \in S\}$, $\operatorname{rank} Q = m$, $|I| = m$.

По опоре $A(I, J_{0\text{оп}})$ подсчитаем вектор оценок $\{\Delta(J_0), \Delta^z\}$. Подходящее направление $l = \{l(J_0), l^z\}$ найдем покомпонентно. Вектор $l(J_0)$ построим по адаптивному методу. Вектор $l^z$ положим равным $z^0 - z$, где $z^0$ — решение задачи

$$\left.\begin{aligned} -\Delta^{z'} z \to \max, \; Qz = \sum_{s \in S} A(I, J_s)x(J_s), \\ d_*(J_s) \leqslant x(J_s) \leqslant d^*(J_s), \; s \in S, \end{aligned}\right. \tag{14}$$

с начальным планом $\{z = e, x^1(J_s), s \in S\}$. В задаче (13) опору выбираем только из матрицы $A(I, J_0)$. Опору задачи (14) можно не менять, поскольку на переменные $z_j$ не наложено прямых ограничений.

Шаг $\Theta$ вдоль подходящего направления $l$ найдем по формуле

$$\Theta = \min\{1, \Theta_{i_0}\},$$

где $\Theta_{i_0}$ — максимально допустимый шаг по опорным переменным.

## § 2. Задача с большим числом основных ограничений

На практике нередко встречаются задачи, математические модели которых содержат сравнительно небольшое число переменных и весьма большое число основных ограничений типа неравенств. Решать их стандартными методами, разработанными для задач в канонической форме (с основными ограничениями типа равенств), нецелесообразно или невозможно на ЭВМ, ибо при этом размеры опорных (базисных) матриц будут совпадать с числом основных ограничений. Нецелесообразен и обычно рекомендуемый переход к двойственной задаче, в которой число основных ограничений (а значит, и размеры базисных матриц) равно числу переменных прямой задачи (и поэтому невелико), поскольку при переходе теряется априорная (возможно, очень ценная) информация о прямых планах. Между тем из элементарного курса линейного программирования известен геометрический метод, позволяющий эффективно решать задачи с двумя переменными и любым большим числом основных ограничений типа неравенств. Но его трудно распространить на задачи с тремя и более переменными. Интуитивно ясно, что должны существовать методы, учитывающие специфику обсуждаемых задач так же эффективно, как геометрический метод, и способные решать задачи с числом переменных, большим двух. В данном параграфе излагается один метод подобного типа.

Рассмотрим задачу линейного программирования следующего вида:

$$c'x \to \max, \quad b_* \leqslant Ax \leqslant b^*, \tag{1}$$

где $c$, $x$ — $n$-векторы; $b_*$, $b^*$ — $m$-векторы; $A=A(I, J)$ — $m\times n$-матрица со строками $a_i$, $i\in I\,(a_i=A(i, J))$.

Предполагается, что имеющаяся ЭВМ допускает реализацию методов типа симплекс-метода с базисной матрицей размером $n\times n$. Будем считать, что прямые ограничения задачи $d_*\leqslant x\leqslant d^*$ включены в число основных, что при $m\gg n$ не очень значительно скажется на структуре задачи (1). При составлении программы для ЭВМ целесообразно учитывать различие между основными и прямыми ограничениями, но при изложении идеи метода это лишь усложняет выкладки.

*Планом* задачи (1) назовем каждый вектор $x$, удовлетворяющий неравенствам $b_*\leqslant Ax\leqslant b^*$. Под *опорой* будем понимать любую неособую $n\times n$-матрицу $A_{оп}=A(I_{оп}, J)$, $I_{оп}\subset I$. Пара $\{x, A_{оп}\}$ — *опорный план*, который называется *невырожденным*, если $b_*(I_н)<A(I_н, J)\,x(J)<b^*(I_н)$, $I_н=I\setminus I_{оп}$.

Пусть $\{x, A_{оп}\}$ — начальный опорный план; $I_{*оп}=\{i: i\in I_{оп},\ a_i'x=b_{*i}\}$, $I_{оп}^*=\{i: i\in I_{оп},\ a_i'x=b_i^*\}$, $\tilde{I_{оп}}=I_{оп}\setminus(I_{*оп}\cup I_{оп}^*)$. Построим $n$-вектор потенциалов $u: u'=c'A_{оп}^{-1}$. Приращение целевой функции на плане $\bar{x}=x+\Delta x$, согласно § 1 введения, равно

$$c'\bar{x}-c'x=c'\Delta x=u'A_{оп}\Delta x=u'z, \tag{2}$$

где $z=z(I_{оп})=A_{оп}\Delta x$. Отсюда следует

**Критерий оптимальности.** Соотношения

$$u(I^*_{\text{оп}}) \geqslant 0, \ u(I_{*\text{оп}}) \leqslant 0, \ u(\tilde{I}_{\text{оп}}) = 0 \tag{3}$$

достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности опорного плана $\{x, A_{\text{оп}}\}$.

Доказательство. *Достаточность.* Для любого допустимого приращения должны выполняться условия

$$z(I^*_{\text{оп}}) \leqslant 0, \ z(I_{*\text{оп}}) \geqslant 0. \tag{4}$$

Пусть выполняются соотношения (3). Тогда из формулы приращения (2) и неравенств (4) получаем

$$c'\bar{x} - c'x = u'(I^*_{\text{оп}})\, z(I^*_{\text{оп}}) + u'(I_{*\text{оп}})\, z(I_{*\text{оп}}) \leqslant 0.$$

Следовательно, план $x$ является оптимальным.

*Необходимость.* Пусть $\{x, A_{\text{оп}}\}$ — невырожденный опорный план, для которого условия (3) не выполняются. Покажем, что план $x$ можно улучшить. Из формулы приращения (2) видно, что в этом случае существует такой вектор $z$, для которого выполнены условия (4) и $u'z > 0$. Легко проверить, что в случае невырожденности плана $x$ при достаточно малом $\Theta > 0$ вектор $\bar{x} = x + \Theta A^{-1}_{\text{оп}} z$ будет планом задачи (1), причем $c'\bar{x} - c'x = \Theta u'z > 0$. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Из формулы (2) видно, что при $u_i > 0$ увеличение компоненты $z_i$, а при $u_i < 0$ уменьшение компоненты $z_i$, $i \in I_{\text{оп}}$, ведет к увеличению приращения целевой функции. В силу опорных ограничений вектор $z$ может изменяться в пределах $\omega_*(I_{\text{оп}}) \leqslant z \leqslant \omega^*(I_{\text{оп}})$, где $\omega_*(I_{\text{оп}}) = b_*(I_{\text{оп}}) - A_{\text{оп}}x$, $\omega^*(I_{\text{оп}}) = b^*(I_{\text{оп}}) - A_{\text{оп}}x$. Для каждого плана $x$ найдется такое приращение $\Delta x$, что $x^0 = x + \Delta x$. Следовательно,

$$c'x^0 - c'x = u'z \leqslant \beta, \ \beta = \sum_{\substack{i \in I_{\text{оп}}, \\ u_i > 0}} u_i \omega^*_i + \sum_{\substack{i \in I_{\text{оп}}, \\ u_i < 0}} u_i \omega_{*i}. \tag{5}$$

Число $\beta$ назовем *оценкой субоптимальности* опорного плана $\{x, A_{\text{оп}}\}$. Из неравенства (5) следует

**Критерий субоптимальности.** Если для опорного плана $\{x, A_{\text{оп}}\}$ выполняется соотношение $\beta \leqslant \varepsilon$, то $x$ — $\varepsilon$-оптимальный план. Для каждого $\varepsilon$-оптимального плана $x^\varepsilon$ найдется такая опора $A_{\text{оп}}$, что для опорного плана $\{x^\varepsilon, A_{\text{оп}}\}$ выполняется неравенство $\beta \leqslant \varepsilon$.

Задача, двойственная к (1), имеет вид

$$b^{*\prime}w - b'_{*}v \to \min,\ A'y = c,\ y+v-w = 0,\ w \geqslant 0,\ v \geqslant 0. \qquad (6)$$

Каждой опоре $A_{оп}$ поставим в соответствие план $\{y, v, w\}$ задачи (6): $y(I_{оп}) = u(I_{оп})$, $y(I_{н}) = 0$; $w_i = y_i$, $v_i = 0$, если $y_i \geqslant 0$; $w_i = 0$, $v_i = -y_i$, если $y_i < 0$, $i \in I$, который будем называть *сопровождающим двойственным планом.* Из формулы (5) следует разложение оценки субоптимальности $\beta$:

$$\beta = -u'A_{оп}x + \sum_{\substack{u_i \geqslant 0,\\ i \in I_{оп}}} u_i b_i^* + \sum_{\substack{u_i < 0,\\ i \in I_{оп}}} u_i b_{*i} =$$

$$= -c'x + b^{*\prime}w - b'_{*}v = c'x^0 - c'x + b^{*\prime}w - b'_{*}v -$$

$$- b^{*\prime}w^0 + b'_{*}v^0 = \beta_x + \beta_{оп}. \qquad (7)$$

Здесь $\beta_x = c'x^0 - c'x$ — *мера неоптимальности плана* $x$; $\beta_{оп} = b^{*\prime}w - b'_{*}v - b^{*}w^0 + b'_{*}v^0$ — *мера неоптимальности опоры* $A_{оп}$, подсчитанная по сопровождающему двойственному плану; $v^0$, $w^0$ — компоненты оптимального плана задачи (6).

Пусть критерий оптимальности (3) не выполняется. Перейдем к новому опорному плану $\{\bar{x}, \bar{A}_{оп}\}$. При построении нового опорного плана будем стремиться уменьшить оценку субоптимальности: $\bar{\beta} < \beta$. Подходящее направление $l$ для плана $x$ найдем из условия максимального приращения целевой функции при соблюдении опорных ограничений, т. е. из решения задачи

$$c'l \to \max_{l},\ b_{*оп} \leqslant A_{оп}(x + l) \leqslant b^*_{оп}. \qquad (8)$$

Положив $\omega = \omega(I_{оп}) = A_{оп}l$, получим эквивалентную задачу

$$u'\omega \to \max_{\omega},\ \omega_{*оп} \leqslant \omega \leqslant \omega^*_{оп}. \qquad (9)$$

Легко проверить, что вектор $\omega$ с компонентами $\omega_i = \omega_i^*$, если $u_i > 0$; $\omega_i = \omega_{*i}$, если $u_i < 0$; $\omega_i = 0$, если $u_i = 0$, $i \in I_{оп}$, является решением задачи (9), а вектор $l = A_{оп}^{-1}\omega$ — решением задачи (8). Максимально допустимый шаг $\Theta$ вдоль $l$ найдем так, чтобы не нарушились: 1) опорные ограничения: $\Theta \leqslant 1$; 2) неопорные ограничения: $\Theta \leqslant \Theta_{i_0}$, $\Theta_{i_0} = \min \Theta_i$, $i \in I_{н}$; $\Theta_i = \omega_i^* / a_i' l$, если $a_i' l > 0$; $\Theta_i = \omega_{*i} / a_i' l$, если $a_i' l < 0$; $\Theta_i = \infty$, если $a_i' l = 0$. Таким образом, $\Theta = \min\{1, \Theta_{i_0}\}$.

При переходе к новому плану $\bar{x}=x+\Theta l$ слагаемое $\beta_x$ в разложении (7) уменьшается на величину $\Theta\beta$ и для плана $\bar{x}$ выполняется неравенство

$$c'x^0-c'\bar{x}\leqslant\beta-\Theta\beta=(1-\Theta)\beta.$$

При $\beta(1-\Theta)\leqslant\varepsilon$ процесс решения задачи прекращается на $\varepsilon$-оптимальном плане $\bar{x}$. Ясно, что при $\Theta=1$ план $\bar{x}$ будет оптимальным.

Пусть $\beta(1-\Theta)>\varepsilon$. Дальнейшее улучшение оценки субоптимальности свяжем с заменой опоры $A_{\text{оп}}$, т. е. с уменьшением слагаемого $\beta_{\text{оп}}$ в разложении (7). Этого можно добиться переходом от опоры $A_{\text{оп}}$ к опоре $\bar{A}_{\text{оп}}$, сопровождающий двойственный план которой лучше (по значению двойственной целевой функции) сопровождающего плана опоры $A_{\text{оп}}$. Введем обозначения: $\varkappa=A(x+l)$, $I_{+\text{оп}}=\{i:i\in I_{\text{оп}},\ u_i>0\}$, $I_{-\text{оп}}=\{i:i\in I_{\text{оп}},\ u_i<0\}$, $I_{0\,\text{оп}}=\{i:i\in I_{\text{оп}},\ u_i=0\}$. Запишем формулу приращения для двойственной задачи (6):

$$\begin{gathered}
b^{*\prime}\Delta w-b_*'\Delta v=(b_{*\text{н}}-\varkappa_{\text{н}})'\Delta y_{\text{н}}+(b^*_{\text{н}}-b_{*\text{н}})'\Delta w_{\text{н}}+\\
+(b_{*0\,\text{оп}}-\varkappa_{0\,\text{оп}})\Delta y_{0\,\text{оп}}+(b^*_{0\,\text{оп}}-b_{*0\,\text{оп}})'\Delta w_{0\,\text{оп}}+\\
+(b^*_{+\text{оп}}-b_{*+\text{оп}})'\Delta v_{+\text{оп}}+(b^*_{-\text{оп}}-b_{*-\text{оп}})'\Delta w_{-\text{оп}}=\\
=(b_{*\text{н}}-\varkappa_{\text{н}})'\Delta y_{\text{н}}+(b^*_{\text{н}}-b_{*\text{н}})'\Delta w_{\text{н}}+\sum_{\substack{y_i=0,\ \bar{y}_i>0,\\ i\in I_{0\,\text{оп}}}}(b^*_i-\varkappa_i)\bar{y}_i+\\
+\sum_{\substack{y_i=0,\ \bar{y}_i<0,\\ i\in I_{0\,\text{оп}}}}(b_{*i}-\varkappa_i)\bar{y}_i+\sum_{\substack{y_i<0,\\ \bar{y}_i>0}}(b^*_i-b_{*i})\bar{y}_i+\\
+\sum_{\substack{y_i>0,\\ \bar{y}_i<0}}(b_{*i}-b^*_i)\bar{y}_i,
\end{gathered}\tag{10}$$

где $\bar{y}=y+\Delta y$.

По построению, $i_0$-е ограничение на плане $\bar{x}$ активное. Пусть $a'_{i_0}\bar{x}=b_{*i_0}$. В качестве подходящего направления для двойственного плана возьмем вектор $\mu=\{\mu_{\text{оп}}=a'_{i_0}A^{-1}_{\text{оп}},\ \mu_{\text{н}}=-e_{i_0}\}$. Из формулы приращения (10) видно, что начальная скорость изменения двойственной целевой функции равна

$$\alpha_0 = \begin{cases} -b_{*i_0} + \varkappa_{i_0} < 0, \text{ если двойственный план невырожденный } (I_{0\,\text{оп}} = \varnothing); \\ -b_{*i_0} + \varkappa_{i_0} + \sum\limits_{\substack{i \in I_{0\text{оп}}, \\ \mu_i > 0}} (b_i^* - \varkappa_i)\,\mu_i + \sum\limits_{\substack{i \in I_{0\text{оп}}, \\ \mu_i < 0}} (b_{*i} - \varkappa_i)\,\mu_i \\ \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Скорость изменения остается постоянной до тех пор, пока компоненты $y_i$, $i \in I_{+\text{оп}} \cup I_{-\text{оп}}$, не меняют своих знаков. Как только хотя бы одна компонента $y_i$ изменит свой знак, скорость получает положительную добавку. Движение вдоль направления $\mu$ ведет к улучшению двойственной целевой функции только в том случае, если скорость движения вдоль него отрицательная.

Пусть известна скорость $\alpha_k$ и вектор $u^{(k)}$ (для начала $k=0$, $u^{(0)}=u$). При $\alpha_k \geqslant 0$ приступаем к замене опоры по следующему правилу: если среди индексов множества $I^0 = \{i: i \in I_{\text{оп}},\ u_i^{(k)} = 0,\ \mu_i > 0, \varkappa_i \neq b_i^*$ или $u_i^{(k)} = 0,\ \mu_i < 0,$ $\varkappa_i \neq b_{*i}\}$ есть индекс $i_*$, для которого $b_{*i_*} < a'_{i_*}\bar{x}_{i_*} < b^*_{i_*}$, то вместо индекса $i_*$ в множество $I_{\text{оп}}$ вводим индекс $i_0: \bar{I}_{\text{оп}} = (I_{\text{оп}} \setminus i_*) \cup i_0$. Если же таких $i$ в $I^0$ нет, то в качестве $i_*$ выбираем любой элемент из $I^0$.

Пусть $\alpha_k < 0$. Движение вдоль направления $\mu$ ведет к улучшению двойственной целевой функции. Максимально допустимый шаг $\sigma_k$ вдоль направления $\mu$ при скорости $\alpha_k$ находим из условия, что компоненты вектора $u^{(k+1)} = u^{(k)} + \sigma_k \mu_{\text{оп}}$ не меняют знака. После появления у вектора $u^{(k+1)}$ новых нулевых компонент движение вдоль $\mu$ будет происходить с новой скоростью:

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - \sum_{\substack{\mu_i < 0, \\ u_i^{(k+1)} = 0}} (b_i^* - b_{*i})\,\mu_i + \sum_{\substack{\mu_i > 0, \\ u_i^{(k+1)} = 0}} (b_i^* - b_{*i})\mu_i. \quad (11)$$

С полученными $\alpha_{k+1}$, $u^{(k+1)}$ поступаем так же, как с $\alpha_k$, $u^{(k)}$. Из (11) видно, что $\alpha_{k+1} > \alpha_k$. Можно показать, что через конечное число шагов получим $\alpha_s \geqslant 0$, т. е. за конечное число шагов найдется индекс $i_*$, который должен выйти из опоры.

При переходе от опоры $A_{\text{оп}}$ к опоре $\bar{A}_{\text{оп}} = A(\bar{I}_{\text{оп}}, J)$ оценка $\beta_{\text{оп}}$ в разложении (7) уменьшается на величину $\Delta\beta_{\text{оп}} = \sum\limits_{k=0}^{s-1} |\alpha_k|\,\sigma_k$, где $s$ — такой индекс, что $\alpha_{s-1} < 0$,

$\alpha_s \geqslant 0$ (при $s=0$, $\Delta\beta_{\text{оп}}=0$). Нетрудно заметить, что $\Delta\beta_{\text{оп}}>0$ при $s \neq 0$. Оценка субоптимальности нового опорного плана $\{\bar{x}, \bar{A}_{\text{оп}}\}$ равна $\bar{\beta}=(1-\Theta)\beta-\sum_{k=0}^{s-1}|\alpha_k|\sigma_k$. При $\bar{\beta} \leqslant \varepsilon$ процесс решения задачи останавливаем. План $\bar{x}$ принимаем за приближенное решение. В противном случае продолжаем решение с опорного плана $\{\bar{x}, \bar{A}_{\text{оп}}\}$. Можно непосредственно проверить, что числа $\bar{u}(I_{\text{оп}} \setminus i_0)=$ $=u^{(s)}(I_{\text{оп}} \setminus i_0)$, $\bar{u}_{i_*}=-\sum_{k=0}^{s-1}\sigma_k$ будут новыми потенциалами, подсчитанными для опоры $\bar{A}_{\text{оп}}$.

Аналогичные рассуждения проводятся и для случая, когда шаг достигается на верхней границе $b^*_{i_0}$. На этом заканчивается описание метода.

Сравним задачу (1) при $m>n$ и метод ее решения с задачей (1) при $m<n$ и опорным методом с адаптивной нормировкой [ч. 2]. Матрицы условий этих задач по форме получаются одна из другой поворотом на прямой угол. Опора в классическом случае получается из столбцов, в случае задачи (1) — из строк матрицы условий.

Традиционная роль столбцов матрицы $A$ в методе данного параграфа переходит к строкам. Подходящее направление в опорном методе из [ч. 2] строилось с помощью неопорных столбцов, теперь — с помощью опорных строк. Шаг в опорном методе вычислялся с помощью опорных переменных, здесь — с помощью неопорных ограничений. Если в методе из [ч. 2] элемент, удаляемый из опоры, получался при вычислении шага, то в методе данного параграфа при вычислении шага находится элемент, который войдет в новую опору. Раньше на итерациях опора «плавала» по горизонтали, теперь — по вертикали.

В изложенном методе для осуществления основных операций на каждой итерации рассматривается число ограничений, равное числу переменных. В этом отношении он близок к геометрическому методу ($n=2$), в котором перебираются точки, лежащие на пересечении двух прямых, заданных ограничениями. Однако выше не предполагалось, что на плане $x$ $m$ опорных ограничений обращались в равенства. Переход от плана $x$ к плану $\bar{x}$ не соответствует в общем случае переходу от одной крайней точки множества планов к соседней крайней точке. При выборе опорных ограничений для нового плана исходят из экстремального принципа.

Прямой метод данного параграфа можно рассматривать как двойственный опорный метод решения задачи, двойственной к задаче (1). Таким образом, в результате своеобразного двукратного сопряжения получается прямой метод (аналог известного тождества $(A')'=A$). В связи с приведенным обсуждением интересно построить модификации изложенного метода в духе тех модификаций, которые построены в книге для опорных методов в задачах с $n>m$.

## § 3. Использование специальной структуры опоры

Симплекс-метод был разработан для общей задачи с односторонними прямыми ограничениями. При переходе от двухсторонних прямых ограничений к задаче с односторонними прямыми ограничениями резко увеличивается размер базисной матрицы. Однако учет специальной структуры получающейся задачи позволяет операции с большой базисной матрицей свести к операциям с рабочей базисной матрицей, размер которой равен числу основных ограничений (т. е. такому размеру, как если бы исходная задача была с односторонними прямыми ограничениями). Это замечание использовано в [2] для создания эффективного метода решения общих задач с обобщенными прямыми ограничениями (см. § 2 введения). В [2] показано, что последний метод легко переносится на блочные задачи со связывающими ограничениями. Во многих случаях [4, 7] специальная блочная структура параметров задачи порождает базисные матрицы, операции с которыми можно эквивалентно заменить на операции с меньшими рабочими матрицами.

По-видимому, можно считать, что первыми примерами эффективного использования этой техники явились транспортные задачи, опорные методы решения которых существенно опираются на специальную структуру опоры, что позволяет работать с предельно простыми $1\times1$-матрицами с одним элементом, равным единице. Обобщенные транспортные задачи [ч. 2] представляют собой вторую ступень развития обсуждаемого метода на пути от простейшего случая к более сложному. В [ч. 2] аналогично исследованы другие виды задач транспортного типа. В свете сказанного рассматриваемая ниже блочная задача является первой ступенью на обратном пути от общей задачи к простейшим.

В данном параграфе техника перехода к рабочим базисным (опорным) матрицам излагается только для блочной задачи со связывающими ограничениями. Рекомендуется перенести ее на задачи из [4, 8].

**1. Опора.** Рассмотрим задачу

$$c'x \to \max,\ Ax=b,\ d_* \leqslant x \leqslant d^*, \tag{1}$$

со следующей блочной структурой $m \times n$-матрицы условий

$$A = A(I,\ J) = \left\{ \begin{matrix} A_0 & A_1 & A_2 & \dots & A_p \\ & B_1 & & & \\ & & B_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & B_p \end{matrix} \right\}, \tag{2}$$

где $A_0=A(I_0,\ J_0)$ — $m_0 \times n_0$-матрица, $A_k=A(I_0,\ J_k)$ — $m_0 \times n_k$-матрица, $B_k=B(I_k,\ J_k)$ — $m_k \times n_k$-матрица, $k=\overline{1,\ p}$,

$$m_0 + \sum_{k=1}^{p} m_k = m,\ n_0 + \sum_{k=1}^{p} n_k = n.$$

При $m_0=0$ задача (1), (2) распадается на $p$ независимых задач:

$$c_k' x_k \to \max,\ B_k x_k = b_k,\ d_{*k} \leqslant x_k \leqslant d_k^*,\ k = \overline{1,\ p},$$

где

$$c_k = c(J_k),\ x_k = x(J_k),\ b_k = b(I_k),\ d_{*k}=d_*(J_k),\ d_k^*=d^*(J_k).$$

Поэтому первые $m_0$ основных ограничений задачи (1) называются *связывающими*.

Рассматриваемая структура матрицы $A$ характерна, например, для производственной задачи на объединении. Объединение состоит из головного предприятия и $p$ предприятий-смежников. Из $n$ изделий, выпускаемых объединением, изделия с индексами $j \in J_0$ производятся на головном предприятии, изделия с индексами $j \in J_k$ — на $k$-м смежнике. Каждый смежник расходует (нормы расходов задаются матрицей $B_k$) собственные ресурсы (их объем равен $b_k$) и ресурсы (с матрицей расходов $A_k$) головного предприятия. Головное предприятие свои ресурсы (в объеме $b_0$) расходует на смежников и для изготовления собственных изделий (нормы расходов определяются матрицей $A_0$). При перечисленных условиях требуется найти оптимальный план производства объединения.

В основе опорных методов книги лежит понятие опоры $A_{оп}=A(I, J_{оп})$, $\det A_{оп}\neq 0$. В данном пункте описывается структура опоры для задачи (1), (2) и приводятся некоторые свойства опоры, важные с точки зрения реализации метода.

Пусть $J^0_{оп}=J_0\cap J_{оп}$, $J^k_{оп}=J_k\cap J_{оп}$.

**Теорема.** Для опорности $A_{оп}$ необходимо и достаточно, чтобы матрица

$$A_{оп}=\begin{Bmatrix} A(I_0, J^0_{оп}) & A(I_0, J^1_{оп}) & A(I_0, J^2_{оп}) & \dots & A(I_0, J^p_{оп}) \\ & B(I_1, J^1_{оп}) & & & \\ & & B(I_2, J^2_{оп}) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & B(I_p, J^p_{оп}) \end{Bmatrix}$$

обладала свойствами:

1) $\operatorname{rank} A(I_0, J^0_{оп})=|J^0_{оп}|$; 2) $\operatorname{rank} B(I_k, J^k_{оп})=|I_k|$, $k=\overline{1, p}$; 3) для каждого $|I_0|$-вектора $\lambda_0=\{\lambda_0(I_+), \lambda_0(I_-)\}$, $\lambda_0(I_-)\neq 0$, из $\lambda_0' A(I_0, J^0_{оп})=0$ следует

$$\operatorname{rank}\begin{Bmatrix} \lambda_0' A(I_0, J^k_{оп}) \\ B(I_k, J^k_{оп}) \end{Bmatrix} > \operatorname{rank} B(I_k, J^k_{оп})$$

хотя бы при одном $k$, $k=\overline{1, p}$. Здесь $I_+$ — множество индексов неособой матрицы $A(I_+, J^0_{оп})$, $I_-=I_0\setminus I_+$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\operatorname{rank} A_{оп}=|I|=|J_{оп}|$. Нарушение условия 1) означает, что число линейно независимых столбцов матрицы $A_{оп}$ меньше $|J_{оп}|$. При нарушении условия 2) ранг матрицы $A_{оп}$ станет меньше числа $|I|$ ее строк. Нарушение условия 3) означает, что при каждом $k$, $k=\overline{1, p}$, вектор $\lambda_0' A(I_0, J^k_{оп})$ линейно выражается через строки матрицы $B(I_k, J^k_{оп})$: $\lambda_0' A(I_0, J^k_{оп})=\lambda_k' B(I_k, J^k_{оп})$, $k=\overline{1, p}$. Отсюда следует, что для ненулевого $m$-вектора $\lambda=\{\lambda_0, -\lambda_1, \dots$ $\dots, -\lambda_p\}$ выполняется равенство $\lambda' A_{оп}=0$, которое противоречит тому, что матрица $A_{оп}$ неособая.

*Достаточность.* Предположим, что при выполнении условий 1) — 3) теоремы матрица $A_{оп}$ особая, т. е. для некоторого $m$-вектора $\lambda=\{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$, $\lambda\neq 0$, имеем $\lambda' A_{оп}=0$, что в компонентной записи принимает вид

$$\lambda_0' A(I_0, J^0_{оп})=0, \quad \lambda_0' A(I_0, J^k_{оп})+\lambda_k' B(I_k, J^k_{оп})=0, \quad k=\overline{1,p}. \tag{3}$$

Если допустить, что $\lambda_0=0$, то получим $\lambda_k' B(I_k, J^k_{оп})\equiv \equiv 0$, $\lambda_k\neq 0$, $k=\overline{1, p}$, в противоречие с условием 2). Если $\lambda_0\neq 0$ и $\lambda_0(I_-)=0$, то из (3) следует $\lambda_0'(I_+)A(I_+, J^0_{оп}) = = 0$, $\lambda_0(I_+)\neq 0$, что противоречит условию 1). Таким образом, равенства (3) выполняются для вектора $\lambda$ с $\lambda_0(I_-)\neq 0$. Но это невозможно при условии 3). Теорема доказана.

В каждом блоке $B(I_k, J^k_{оп})$ выделим неособую матрицу $B_{kоп}=B(I_k, J^{k+}_{оп})$. Тогда с использованием обозначения $J^{k-}_{оп}=J^k_{оп}\setminus I^{k+}_{оп}$ опорная матрица примет вид

$$A_{оп}=\left\{\begin{array}{cccc:ccc}
A(I_0, J^0_{оп}) & A(I_0, J^{1-}_{оп}) & \ldots & A(I_0, J^{p-}_{оп}) & A(I_0, J^{1+}_{оп}) & \ldots & A(I_0, J^{p+}_{оп}) \\
\hdashline
 & B(I_1, J^{1-}_{оп}) & & & B_{1оп} & & \\
 & & \ddots & & & \ddots & \\
 & & & B(I_p, J^{p-}_{оп}) & & & B_{pоп} \\
\multicolumn{4}{c:}{\longleftarrow |I_0| \longrightarrow} & \multicolumn{3}{c}{\longleftarrow \sum_{k=1}^{p} |I_k| \longrightarrow}
\end{array}\right\}.$$

Введем квадратную $m\times m$-матрицу $S=S(J_{оп}, J_{оп})$:

$$S=\left\{\begin{array}{ccccc:c}
\multicolumn{5}{c:}{E(J^-_{оп}, J^-_{оп})} & 0(J^-_{оп}, J^+_{оп}) \\
\hdashline
0(J^{1+}_{оп}, J^0_{оп}) & -B^{-1}(J^{1+}_{оп}, I_1)B(I_1, J^{1-}_{оп}) & & & & \\
 & & \ddots & & & \\
 & & & & -B^{-1}(J^{p+}_{оп}, I_p)B(I_p, J^{p-}_{оп}) & E(J^+_{оп}, J^+_{оп})
\end{array}\right\},$$

где $J^-_{оп}=\bigcup_{k=0}^{p} J^{k-}_{оп}$, $J^{0-}_{оп}=J^0_{оп}$, $J^+_{оп}=\bigcup_{k=1}^{p} J^{k+}_{оп}$, $E$ — единичная диагональная матрица, 0—нулевая матрица. Матрица $S$ неособая ($\det S=1$). В основе метода данного параграфа лежит следующее свойство опорной матрицы:

$$
A_{\text{оп}} S = \left\{ \begin{array}{c|c}
A_{0\text{оп}} & A(I_0, J_{\text{оп}}^{1+}) \;\ldots\; A(I_0, J_{\text{оп}}^{p+}) \\
\hline
 & \begin{array}{ccc} B_{1\text{оп}} & & \\ & \ddots & \\ & & B_{p\text{оп}} \end{array}
\end{array} \right\}, \qquad (4)
$$

где $A_{0\text{оп}} = A_{0\text{оп}}(I_0, J_{\text{оп}}^{-})$ — неособая $m_0 \times m_0$-матрица вида

$$
A_{0\text{оп}} = \{A_0(I_0, J_{\text{оп}}^0), A_1^0, \ldots, A_p^0\},
$$

$$
A_k^0 = A(I_0, J_{\text{оп}}^{k-}) - A(I_0, J_{\text{оп}}^{k+}) B_{k\text{оп}}^{-1} B(I_k, J_{\text{оп}}^{k-}), \; k = \overline{1, p}.
$$

**2. Построение основных элементов итерации с помощью рабочих опор.** Приступим к реализации прямого опорного метода с адаптивной нормировкой [ч. 2] для задачи (1), (2). Пусть $\{x, A_{\text{оп}}\}$ — начальный опорный план. Для построения вектора потенциалов $u$ нужно решить уравнение $u' A_{\text{оп}} = c'_{\text{оп}}$ $(c_{\text{оп}} = c(J_{\text{оп}}))$. Если умножить справа обе части уравнения на неособую матрицу $S$, то получим эквивалентное уравнение $u' A_{\text{оп}} S = \bar{c}'$, где $\bar{c}' = c'_{\text{оп}} S$, которое в компонентной записи в силу (4) имеет вид

$$
u'_0 A_{0\text{оп}} = \bar{c}'_0, \; u'_0 A_k(I_0, J_{\text{оп}}^{k+}) + u'_k B_{k\text{оп}} = \bar{c}'_k, \; k = \overline{1, p}, \qquad (5)
$$

где $u_0 = u(I_0)$, $u_k = u(I_k)$, $k = \overline{1, p}$, — компоненты вектора $u$; $\bar{c}_0 = \bar{c}(J_{\text{оп}}^{-})$; $\bar{c}_k = \bar{c}(J_{\text{оп}}^{k+})$, $k = \overline{1, p}$.

Из (6) получаем

$$
u'_0 = \bar{c}'_0 A_{0\text{оп}}^{-1}; \; u'_k = \bar{c}'_k B_{k\text{оп}}^{-1} - \bar{c}'_0 A_{0\,\text{оп}}^{-1} A(I_0, J_{\text{оп}}^{k+}) B_{k\,\text{оп}}^{-1}, \; k = \overline{1, p}.
$$

Таким образом, при вычислении вектора потенциалов $u$ достаточно вместо $m \times m$-матрицы $A_{\text{оп}}$ иметь *рабочие опорные матрицы:* $A_{0\text{оп}}$, $B_{k\text{оп}}$, $k = \overline{1, p}$, размеры которых равны $|I_0|$, $|I_k|$, $k = \overline{1, p}$.

С помощью найденных потенциалов и с учетом специальной структуры матрицы $A$ вычисляются оценки $\Delta_j$, $j \in J_{\text{н}} = J \setminus J_{\text{оп}}$:

$$
\Delta'(J_{\text{н}}^0) = u'_0 A_0(I_0, J_{\text{н}}^0) - c'(J_{\text{н}}^0), \; \Delta'(J_{\text{н}}^k) = u'_0 A(I_0, J_{\text{н}}^k) +
$$

$$
+ u'_k B(I_k, J_{\text{н}}^k) - c'(J_{\text{н}}^k), \; k = \overline{1, p},
$$

$$
J_{\text{н}}^0 = J_0 \setminus J_{\text{оп}}^0, \; J_{\text{н}}^k = J_k \setminus J_{\text{оп}}^k.
$$

Критерии оптимальности и субоптимальности формулируются так же, как в общем случае (см. [ч. 2]).

При описании итерации для задачи данного параграфа следует учесть возможность значительного превышения числа переменных $n$ над размерами $m$ опоры. Модификации опорного метода для этой ситуации описаны в § 1. Ниже во избежание сложных записей ограничимся стандартным случаем ($m<n$), оставив описание случая $m\ll n$ читателям в качестве упражнения.

Итерация прямого опорного метода связана с вычислением подходящего направления $l=l(J)$ и максимально допустимого шага $\Theta$ вдоль $l$. Вектор $l(J_{\text{н}})$ легко строится по $x$ и $\Delta$. Для вычисления вектора $l(J_{\text{оп}})$ найдем разложение вектора $\bar{l}(I)=-A(I, J_{\text{н}})l(J_{\text{н}})$ по столбцам опорной матрицы: $l(J_{\text{оп}})=A_{\text{оп}}^{-1}\bar{l}(I)$. Поскольку $A_{\text{оп}}^{-1}=S(A_{\text{оп}}S)^{-1}$, то из последнего равенства получим

$$l(J_{\text{оп}})=S(A_{\text{оп}}S)^{-1}\bar{l}(I). \tag{6}$$

Легко проверить, что матрица, обратная матрице (4), имеет вид

$$(A_{\text{оп}}S)^{-1}=\begin{Bmatrix} A_{0\,\text{оп}}^{-1} & \bar{A}(I_0, I_1) & \dots & \bar{A}(I_0, I_p) \\ & B_{1\,\text{оп}}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{p\,\text{оп}}^{-1} \end{Bmatrix},$$

где $\bar{A}(I_0, I_s)=-A_{0\,\text{оп}}^{-1}A(I_0, J_{\text{оп}}^{s+})B_{s\,\text{оп}}^{-1}$, $s=\overline{1, p}$.

Подсчитаем вектор $\tilde{l}(J_{\text{оп}})=(A_{\text{оп}}S)^{-1}\bar{l}(I)$:

$$\tilde{l}(J_{\text{оп}}^{-})=A_{0\,\text{оп}}^{-1}\bar{l}(I_0)+\sum_{s=1}^{p}\bar{A}(I_0, I_s)\bar{l}(I_s)=$$

$$=A_{0\,\text{оп}}^{-1}\left(\bar{l}(I_0)-\sum_{s=1}^{p}A(I_0, J_{\text{оп}}^{s+})B_{s\,\text{оп}}^{-1}\bar{l}(I_s)\right),$$

$$\tilde{l}(J_{\text{оп}}^{s+})=B_{s\,\text{оп}}^{-1}\bar{l}(I_s),\ s=\overline{1, p}.$$

В силу (6) компоненты вектора $l(J_{\text{оп}})$ имеют вид

$$l(J_{\text{оп}}^{-})=\tilde{l}(J_{\text{оп}}^{-});\ l(J_{\text{оп}}^{s+})=-B_{s\,\text{оп}}^{-1}B(I_s, J_{\text{оп}}^{s-})\tilde{l}(J_{\text{оп}}^{s-})+\tilde{l}(J_{\text{оп}}^{s+}),$$
$$s=\overline{1, p}.$$

С помощью $l(J_{\text{оп}})$ по стандартным формулам (см. введение) вычисляется шаг $\Theta$. При этом находится опорный вектор $A(I, j_0)$, который следует вывести из опоры. Чтобы найти вектор, который войдет в опору, построим вектор

$$\overline{z}'(J_н) = e'_{j_0} A^{-1}_{оп} A(I, J_н) = e'_{j_0} S(A_{оп} S)^{-1} A(I, J_н).$$

Возможны случаи: а) $j_0 \in J^-_{оп}$, б) $j_0 \in J^{k+}_{оп}$. В случае а) $z'(J^0_н) = \overline{z}'(I_0) A(I_0, J^0_н)$, $z'(J^s_н) = \overline{z}'(I_0)[A(I_0, J^s_н) - A(I_0, J^{s+}_{оп}) B^{-1}_{sоп} B(I_s, J^s_н)]$, где $\overline{z}'(I_0) = e'_{j_0} A^{-1}_{0\,оп}$.

Рассмотрим случай б). Подсчитаем вектор $\overline{z}(I) = e_{j0} S(A_{оп} S)^{-1}$:

$$\overline{z}(I_0) = b(j_0, J^{k-}_{оп}) A^{-1}_{0оп}(J^{k-}_{оп}, I_0),$$

$$\overline{z}(I_k) = (e'_{j_0}(J^{k+}_{оп}) - \overline{z}'(I_0) A(I_0, J^{k+}_{оп})) B^{-1}_{kоп},$$

$$\overline{z}(I_s) = -\overline{z}'(I_0) A(I_0, J^{s+}_{оп}) B^{-1}_{sоп}, \ s = \overline{1, p}, \ s \neq k,$$

где $b(j_0, J^{k-}_{оп}) = -e'_{j_0} B^{-1}_{kоп} B(I_k, J^{k-}_{оп})$.

Искомый вектор $z(J_н)$ имеет вид

$$z(J^0_н) = \overline{z}'(I_0) A(I_0, J^0_н),$$

$$z(J^s_н) = \overline{z}'(I_0) A(I_0, J^s_н) + \overline{z}'(I_s) B(I_s, J^s_н), \ s = \overline{1, p}.$$

С помощью вектора $z(J_н)$ найдем (см. введение) вектор $A(I, j_*)$, который войдет в новую опору. Таким образом, $\overline{A}_{оп} = A(I, \overline{J}_{оп})$, $\overline{J}_{оп} = (J_{оп} \setminus j_0) \cup j_*$.

Получим правила пересчета рабочих опор, для чего нам понадобится следующая формула: пусть $A = B + uv'$, где $B$ — неособая квадратная $n \times n$-матрица, $u$, $v$ — $n$-векторы. Тогда

$$A^{-1} = B^{-1} - \frac{1}{\gamma} B^{-1} uv' B^{-1}, \text{ где } \gamma = 1 + v' B^{-1} u. \tag{7}$$

Из правила выбора ведущего столбца $j_*$ (см. прямой опорный метод с адаптивной нормировкой [ч. 2]) следует, что

$$z(j_*) \neq 0. \tag{8}$$

Возможны случаи: а). $j_0 \in J^-_{оп}$; б) $j_0 \in J^+_{оп}$.

Рассмотрим случай а). Пусть $j_0 \in J^{k-}_{оп}$, $j_* \in J^s_н$. Обозначим $\overline{J}^{k-}_{оп} = J^{k-}_{оп} \setminus j_0$, $\overline{J}^{s-}_{оп} = \overline{J}^{s-}_{оп} \cup j_*$, $\overline{J}^{\nu-}_{оп} = J^{\nu-}_{оп}$, $\nu \neq s$, $\nu \neq k$, $\nu = \overline{0, p}$, $\overline{J}^{\nu+}_{оп} = J^{\nu+}_{оп}$, $\nu = \overline{1, p}$, $\overline{J}_{оп} = \overline{J}^-_{оп} \cup \overline{J}^+_{оп}$, $\overline{J}^-_{оп} = \bigcup_{\nu=0}^{p} \overline{J}^{\nu-}_{оп}$, $\overline{J}^+_{оп} = J^+_{оп}$.

Из представления опоры $A_{\text{оп}}$ (см. теорему) видно, что при $\bar{J}_{\text{оп}}^{\nu+} = J_{\text{оп}}^{\nu+}$ рабочие опорные матрицы $B_{\nu\text{оп}}$, $\nu = \overline{1, p}$, не меняются. Следовательно, не меняются и их обратные матрицы. Изменится только рабочая матрица $A_{0\,\text{оп}}$. Из представления $A_{\text{оп}}$ (см. теорему) видно также, что новая матрица $\bar{A}_{0\,\text{оп}}$ получается из старой $A_{0\,\text{оп}}$ заменой вектора $A_k^0(I_0, j_0)$ на вектор $\bar{A}_s^0(I_0, j_*) = A(I_0, j_*) - A(I_0, J_{\text{оп}}^{s+}) \times B_{s\,\text{оп}}^{-1} B(I_s, j_*)$ и соответствующей перестановкой столбцов. Используя формулу (7), получаем

$$\bar{A}_{0\,\text{оп}}^{-1} = [A(I_0, \bar{J}_{\text{оп}}^{-})]^{-1} = E(\bar{J}_{\text{оп}}^{-}, J_{\text{оп}}^{-})[A_{0\,\text{оп}}^{-1} + (E(J_{\text{оп}}^{-}, j_0) - z(J_{\text{оп}}^{-}, j_*))E(j_0, J_{\text{оп}}^{-})A_{0\,\text{оп}}^{-1}/z(j_*)], \tag{9}$$

где $z(J_{\text{оп}}^{-}, j_*) = A_{0\,\text{оп}}^{-1}\bar{A}_s^0(I_0, j_*)$; $E(\bar{J}_{\text{оп}}^{-}, J_{\text{оп}}^{-})$ — матрица с элементами

$$\delta_{\bar{j}, j} = \begin{cases} 0, & \text{если } \bar{j} \neq j, \\ 1, & \text{если } \bar{j} = j, \end{cases}$$

$$\bar{j} \in \bar{J}_{\text{оп}}^{-},\ j \in J_{\text{оп}}^{-},\ (\bar{j}, j) \neq (j_*, j_0),\ \delta_{j_*, j_0} = 1.$$

Из формулы (9) видно, что при условии (8) матрица $\bar{A}_{0\,\text{оп}}$ неособая ($A_{0\,\text{оп}}$ — неособая по построению).

Рассмотрим случай б). Здесь возможны два подслучая: 1б) $j_0 \in J_{\text{оп}}^{k+}$, $j_* \in J_{\text{н}}^{s}$, $k \neq s$; 2б) $j_0 \in J_{\text{оп}}^{k+}$, $j_* \in J_{\text{н}}^{k}$. Пусть имеет место подслучай 1б). Поступим следующим образом. Вначале перегруппируем множества $J_{\text{оп}}^{k+}$ и $J_{\text{оп}}^{k-}$ так, чтобы $j_0 \in \tilde{J}_{\text{оп}}^{k-}$, и найдем новые рабочие опорные матрицы, полученные в результате перегруппировки. После этого применим операции, описанные для случая а).

По построению,

$$z(j_*) = b(j_0, J_{\text{оп}}^{k-})A_{0\,\text{оп}}^{-1}[A(I_0, j_*) - A(I, J_{\text{оп}}^{s+})B_{s\,\text{оп}}^{-1}B(I_s, j_*)], \tag{10}$$

где через $b(j_0, J_{\text{оп}}^{k-})$ обозначена $j_0$-я строка матрицы $-B_{k\,\text{оп}}^{-1}B(I_k, J_{\text{оп}}^{k-})$. Из условия (8) и формулы (10) следует, что существует такой элемент $j_{\text{x}} \in J_{\text{оп}}^{k-}$, что $b(j_0, j_{\text{x}}) \neq 0$. В множествах $J_{\text{оп}}^{k+}$, $J_{\text{оп}}^{k-}$ поменяем элементы $j_0$ и $j_{\text{x}}$: $\tilde{J}_{\text{оп}}^{k+} = (J_{\text{оп}}^{k+} \setminus j_0) \cup j_{\text{x}}$, $\tilde{J}_{\text{оп}}^{k-} = (J_{\text{оп}}^{k-} \setminus j_{\text{x}}) \cup j_0$. При этом рабочие опорные матрицы $B_{\nu\,\text{оп}}$, $\nu=\overline{1,\ p}$, $\nu\neq k$, не изменятся, а новая рабочая матрица $\widetilde{B}_{k\,\text{оп}}=B(I_k,\ \widetilde{J}^{k+}_{\text{оп}})$ будет неособой:

$$\widetilde{B}^{-1}_{k\,\text{оп}}=B^{-1}_{k\,\text{оп}}+(E(J^{k+}_{\text{оп}},\ j_0)-b(J^{k+}_{\text{оп}},\ j_{\text{x}}))\times \times E(j_0,\ J^{k+}_{\text{оп}})\,B^{-1}_{k\,\text{оп}}/b(j_0,\ j_{\text{x}}),$$

где $b(J^{k+}_{\text{оп}},\ j_{\text{x}})$ — $j_{\text{x}}$-й столбец матрицы $-B^{-1}_{k\,\text{оп}}B_k(I_k,\ J^{k-}_{\text{оп}})$.

Посмотрим, как изменится опорная матрица $A_{0\,\text{оп}}$. Можно показать, что

$$\widetilde{A}_{0\,\text{оп}}=A_0(I_0,\ \widetilde{J}^{-}_{\text{оп}})=A_{0\,\text{оп}}-A^0_k(I_0,\ j_{\text{x}})(\overline{b}(j_0,\ J^{-}_{\text{оп}})+ + E(j_{\text{x}},\ J^{-}_{\text{оп}}))/b(j_0,\ j_{\text{x}}),$$

где $\overline{b}(j_0,\ J^{-}_{\text{оп}})$ — строка с компонентами

$$\overline{b}_{j_0 j}=\begin{cases} b_{j_0 j},\ j\in J^{k-}_{\text{оп}},\\ 0,\ j\in J^{-}_{\text{оп}}\setminus J^{k-}_{\text{оп}}.\end{cases}$$

Используя формулу (7), получаем

$$\widetilde{A}^{-1}_{0\,\text{оп}}=A^{-1}_{0\,\text{оп}}-[\overline{b}(j_0,\ J^{-}_{\text{оп}})+E(j_{\text{x}},\ J^{-}_{\text{оп}})]\,A^{-1}_{0\,\text{оп}},$$

т. е. $\widetilde{A}^{-1}_{0\,\text{оп}}$ получается из $A^{-1}_{0\,\text{оп}}$ заменой $j_{\text{x}}$-й строки на строку $-\overline{b}(j_0,\ J^{-}_{\text{оп}})\,A^{-1}_{0\,\text{оп}}$. После перегруппировки элемент $j_0\in\widetilde{J}^{k-}_{\text{оп}}$ выводим из опоры по правилам случая а).

Рассмотрим подслучай 2б). Если в строке $b(j_0,\ J^{k-}_{\text{оп}})$ есть отличный от нуля элемент $b(j_0,\ j_{\text{x}})$, то в множествах $J^{k+}_{\text{оп}}$, $J^{k-}_{\text{оп}}$ меняем местами элементы $j_0$ и $j_{\text{x}}$. Затем переходим к операциям случая а).

Пусть все элементы строки $b(j_0,\ J^{k-}_{\text{оп}})$ равны нулю. В этом случае в множестве $J^{k+}_{\text{оп}}$ элемент $j_0$ непосредственно заменяем на элемент $j_*:\overline{J}^{k+}_{\text{оп}}=(J^{k+}_{\text{оп}}\setminus j_0)\cup j_*$. Множества $J^{\nu-}_{\text{оп}}$, $\nu=\overline{0,\ p}$, $J^{\nu+}_{\text{оп}}$, $\nu\neq k$, $\nu=\overline{1,\ p}$, остаются прежними. Можно показать, что из рабочих опорных матриц меняется только матрица $B_{k\,\text{оп}}\to\overline{B}_{k\,\text{оп}}=B_k(I_k,\ \overline{J}^{k+}_{\text{оп}})$. Формула (7) позволяет легко найти $\overline{B}^{-1}_{k\,\text{оп}}$.

**3. Двойственный опорный метод.** Из [ч. 1, ч. 2] видно, что двойственная компонента каждого опорного метода строится с помощью двойственных планов (копланов) и тех элементов, которые используются в прямой компоненте метода. В п. 2 получены формулы подсчета этих элементов с помощью рабочих опор. Рекомендуется переписать операции двойственного опорного метода [ч. 1] в терминах рабочих опор.

## § 4. Метод Данцига — Вулфа декомпозиции ограничений прямой задачи

В 1960 г. Дж. Данциг и Р. Вулф [2] предложили метод решения общей задачи линейного программирования, который в принципе можно было реализовать на каждой ЭВМ при любом числе переменных, любом числе основных ограничений и любой матрице условий. Этим было положено начало интенсивным исследованиям по оптимизации больших систем. Большинство результатов отражено в [7]. В данном параграфе для решения больших задач аналог основной идеи метода Данцига — Вулфа используется при модификации опорного метода [ч. 1].

**1. Прямой метод. Общая задача.** Рассмотрим задачу

$$c'x \to \max, \ Ax=b, \ d_*\leqslant x\leqslant d^*, \tag{1}$$

с $m\times n$-матрицей $A=A(I, J)$ произвольной структуры и таких размеров $m$, $n\gg 1$, которые не позволяют хранить $m\times m$- и $n\times n$-матрицы в оперативной памяти ЭВМ.

Пусть $I^1$—произвольное подмножество из $I$, $I^2=I\diagdown I^1$. Множество планов $X=\{x:Ax=b, d_*\leqslant x\leqslant d^*\}$ задачи (1) можно представить в виде пересечения $X=X_1\cap X_2$ двух множеств

$$X_1=\{x:A(I^1, J)x=b(I^1)\};$$
$$X_2=\{x:A(I^2, J)x=b(I^2), \ d_*\leqslant x\leqslant d^*\}. \tag{2}$$

Согласно фундаментальной теореме теории выпуклых множеств, каждое многогранное выпуклое множество допускает двоякое описание: 1) с помощью конечного набора линейных равенств и неравенств, 2) с помощью выпуклой комбинации конечной совокупности элементов этого множества и конической комбинации совокупности векторов. Основная идея метода Данцига — Вулфа состоит в переходе от первого описания множества $X_2$ ко второму. Используемая ниже модификация состоит в следующем.

Пусть наряду с начальным планом *) $x$ задачи (1) известна совокупность

$$x^s,\ s\in S,\ |S|\geqslant|I^1|+1, \tag{3}$$

элементов множества $X_2$. Согласно упомянутой теореме, для ограниченного множества $X_2$ найдутся такие элементы (3), что множество выпуклых комбинаций

$$\tilde{X}_2=\left\{x: x=\sum_{s\in S}\lambda_s x^s,\ \lambda_s\geqslant 0,\ s\in S;\ \sum_{s\in S}\lambda_s=1\right\} \tag{4}$$

совпадает с множеством $X_2$. Для последующего достаточно, чтобы множество (4), порожденное совокупностью (3), являлось $\varepsilon$-аппроксимацией множества $X_2$ в задаче (1), т. е. при некотором $\varepsilon_1=\varepsilon_1(\varepsilon)$ $\varepsilon_1$-оптимальный план задачи

$$c'x\to\max,\ x\in X_1\cap\tilde{X}_2, \tag{5}$$

является $\varepsilon$-оптимальным планом задачи (1).

В силу (2) элементы множества (4) являются и элементами множества $X_1$, а значит, и планами задачи (1) тогда и только тогда, когда

$$A_1\sum_{s\in S}\lambda_s x^s=b_1,\ A_1=A(I^1,\ J),\ b_1=b(I^1).$$

Положим

$$Q=Q(I^1,\ S),\ q^s=Q(I^1,\ s)=A_1x^s,\ \gamma=\gamma(S)= \\ =\{\gamma_s,\ s\in S\},\ \gamma_s=c'x^s. \tag{6}$$

Тогда задача (5) относительно новых переменных $\lambda=\{\lambda_s,\ s\in S\}$ примет вид

$$\gamma'\lambda\to\max,\ Q\lambda=b_1,\ e'\lambda=1,\ \lambda\geqslant 0. \tag{7}$$

Задача (7), к которой свелась исходная задача (1), является задачей с обобщенными прямыми ограничениями (см. § 2 введения), имеющей $|I^1|$ основных ограничений, причем значение $|I^1|$ при реализации метода решения задачи (7) можно выбрать любым, исходя из возможностей конкретной ЭВМ. Проблема эффективного решения исходной задачи (1) свелась, таким образом, к задаче построения элементов (3), приводящих к $\varepsilon$-аппроксимации $\tilde{X}_2$ множества $X_2$.

---

*) Из последующего видно, что для реализации метода априорная информация о плане $x$ может быть значительно беднее.

Данциг и Вулф первыми показали, что при использовании второго описания множества $X_2$ вычисления можно организовать так, что не обязательно заранее знать все элементы второго описания — они будут получаться *(генерироваться)* последовательно в ходе итераций. В излагаемой модификации также не обязательно заранее знать совокупность (3), приводящую к $\varepsilon$-аппроксимации множества $X_2$.

Пусть $\{\lambda, \bar{Q}_{\text{оп}}\}$ — начальный опорный план задачи (7), в котором вектор $\lambda$ построен по априорной информации: $x = \sum_{s \in S} \lambda_s x^s$. Начальный план $\lambda$ задачи (7) можно составить по априорной информации другого сорта. Например, собираются предложения $x^s$, $s \in S$, экспертов об оптимальном плане $x^0$. Им приписывается вес $\lambda_s$, $s \in S$, характеризующий ценность экспертиз. Векторы $x^s$, $s \in S$, не обязательно планы задачи (1). Достаточно, чтобы они были элементами множества $X_2$, хотя можно ослабить (см. введение) и это требование. Числа $\lambda_s$, $s \in S$, таковы, что выпуклая комбинация $\sum_{s \in S} \lambda_s x^s$ является планом задачи (1). (Во введении показывается, как обойти и это ограничение.) По начальной совокупности элементов (3) построим, согласно (6), матрицу $Q$, вектор $\gamma$ для задачи (7) и из матрицы *) $\bar{Q} = \begin{Bmatrix} Q \\ e' \end{Bmatrix}$ выделим опорную $(|I^1| + 1) \times (|I^1| + 1)$-матрицу $\bar{Q}_{\text{оп}} = \begin{Bmatrix} Q(I^1, S_{\text{оп}}) \\ e'(S_{\text{оп}}) \end{Bmatrix}$, где $S_{\text{оп}}$ — множество опорных индексов, $|S_{\text{оп}}| = |I^1| + 1$.

По опорному плану $\{\lambda, \bar{Q}_{\text{оп}}\}$ построим $(|I^1|+1)$-вектор потенциалов $\{u'(I^1), u_*\} = \gamma'_{\text{оп}} \bar{Q}_{\text{оп}}^{-1}$ и вычислим вектор оценок $\Delta' = u'(I^1) Q + u_* e' - \gamma'$. Согласно § 2 введения, оценка субоптимальности опорного плана $\{\lambda, \bar{Q}_{\text{оп}}\}$ в задаче (7) равна

$$\beta = \begin{cases} \sum_{j \in S,\, j \neq j_0} \Delta_j \lambda_j + \Delta_{j_0}(\lambda_{j_0} - 1), & \text{если } \min_{j \in S} \Delta_j = \Delta_{j_0} < 0; \\ \sum_{j \in S} \Delta_j \lambda_j, & \text{если } \Delta_{j_0} = 0. \end{cases} \tag{8}$$

---

*) Предполагается, что $|S| \geqslant |I^1| + 1$ и среди векторов $\begin{Bmatrix} q^s \\ 1 \end{Bmatrix}$, $s \in S$, имеется $|I^1| + 1$ линейно независимых.

Решая задачу (7) методом § 2 введения, можно добиться, чтобы $\beta \leqslant \varepsilon_1$, где $0 \leqslant \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon$ — выбранное число. В этом случае $\sum\limits_{s \in S} \lambda_s x^s$ — $\varepsilon_1$-оптимальный план задачи (5), сформированной по начальному множеству (4). Проверим, является ли это множество $\varepsilon$-аппроксимирующим.

Добавление к (3) нового элемента $x^* \in X_2$ порождает новые вектор условий $q^* = A_1 x^*$ задачи (7), переменную $\lambda_*$ и коэффициент $\gamma_* = c' x^*$ целевой функции. Оценка нового вектора условий $\Delta_* = u' q^* + u_* - \gamma_*$. Согласно (8), оценка субоптимальности опорного плана $\{\lambda, \lambda_* = 0, \bar{Q}_{\text{оп}}\}$ станет равной

$$\beta_* = \begin{cases} \beta + \Delta_{j_0} - \Delta_*, \text{ если } \Delta_* < \Delta_{j_0} < 0; \\ \beta - \Delta_*, \text{ если } \Delta_* < 0,\ \Delta_{j_0} = 0; \\ \beta \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \tag{9}$$

Если $\beta_* \leqslant \varepsilon$ для всех $x^* \in X_2$, то множество $\tilde{X}_2$ является $\varepsilon$-аппроксимацией множества $X_2$, а $\sum\limits_{s \in S} \lambda_s x^s$ — $\varepsilon$-оптимальный план задачи (1), т. е. процесс решения задачи (1) останавливается. Следовательно, для останова процесса решения задачи (1) нужно найти элемент $x^* \in X_2$, на котором функция (9) принимает максимальное значение, т. е. решить задачу

$$\Delta_* \to \min, \quad x^* \in X_2. \tag{10}$$

Если вспомнить определение оценки $\Delta_*$ и вернуться к первому описанию (2) множества $X_2$, то задача (10) примет вид

$$f(x) = (c' - u' A_2)\, x - u_* \to \max_x, \quad A_2 x = b_2, \quad d_* \leqslant x \leqslant d^*$$
$$(A_2 = A(I^2, J),\ b_2 = b(I^2)). \tag{11}$$

Задача (11) имеет $|I^2|$ основных ограничений. Предположим, что опорный метод для нее реализуем на ЭВМ. В противном случае с задачей (11) поступаем так же, как с задачей (1), т. е. из множества $I^2$ выделяем подмножество $I^{21}$ и т. д. Понятно, что при любом исходном $I$ потребуется лишь конечное число раз разлагать множество основных ограничений, чтобы получить задачи, доступные решению на конкретной ЭВМ.

Решение задачи (11) начинаем с плана $x^{j_0}$. Пусть $x^*$ — $\varepsilon_2$-оптимальный план задачи (11). Возможны следующие случаи.

1) $\beta+\Delta_{j_0}+f(x^*)>\varepsilon$. Вектор $x^*$ присоединяем*) к множеству (3) и рассматриваем задачу (7) с дополнительным вектором условий $q^*$. Опорный метод применяем к опорному плану $\{\lambda,\ \lambda_*=0,\ \overline{Q}_{оп}\}$. После первой итерации одна из опорных переменных станет равной нулю: $\overline{\lambda}_{i_0}=0$. Вектор $x^{i_0}$ удаляем из множества (3) и соответственно сокращаем размер задачи (7). Продолжаем решать задачу (7) до получения неравенства $\beta\leqslant\varepsilon_1$.

2) $\beta+\Delta_{j_0}+f(x^*)+\varepsilon_2\leqslant\varepsilon$. В этом случае, согласно (9), выполняется неравенство $\beta_*\leqslant\varepsilon$, т. е. $\sum\limits_{s\in S}\lambda_s x^s$ — — $\varepsilon$-оптимальный план задачи (1).

3) $\beta+\Delta_{j_0}+f(x^*)\leqslant\varepsilon$, $\beta+\Delta_{j_0}+f(x^*)+\varepsilon_2>\varepsilon$. Продолжаем решать задачу (11), т.е. уменьшать показатель субоптимальности $\varepsilon_2$ плана $x^*$ до тех пор, пока не реализуется одно из условий 1), 2). Для оптимального плана задачи (11) одно из этих условий обязательно выполняется.

По аналогии с предыдущим, исходя из формулы (9), исследуется случай $\Delta_{j_0}=0$. Необходимые вычисления оставляем читателю.

По значению, которое имеют задачи (7), (11) в описанном методе, задача (7) называется *координирующей (главной) задачей,* задача (11) — *подзадачей* (вспомогательной) *задачей.* Метод решения называется методом декомпозиции, так как решение исходной задачи (1) с $|I|=|I^1|+|I^2|$ основными ограничениями распалось на решение ряда задач с $|I^1|$ и с $|I^2|$ основными ограничениями. Особенность задачи (7) состоит в том, что ее векторы условий можно не задавать явно, а генерировать отдельным алгоритмом, порожденным подзадачей (11). Это свойство задачи (7) позволяет избежать хранения массы информации. Оказывается, им обладают и некоторые другие задачи, встречающиеся в приложениях (например, *задача о раскрое* [7]). Генерация столбцов матрицы условий с помощью некоторого алгоритма называется методом генерирования столбцов.

---

*) Нетрудно заметить, что выбор нового элемента $x^*$ для совокупности (3) производится по принципу, положенному в основу адаптивного метода: выбор $x^*$ окончателен, если ограничения на опорные переменные задачи (7) несущественны.

Замечание. Изложенный метод допускает геометрическую интерпретацию, которая напоминает *метод симплексов,* хорошо известный в теории планирования экспериментов [9]. Близкая идея использована в § 3 введения для построения метода нулевого порядка.

**2. Классический вариант.** Рассмотрим один частный случай описанного метода, когда начальная информация такова: заданы $|I^1|+1$ оценка $x^s$, $s\in S$, $|S|=|I^1|+1$, оптимального плана и их веса $\lambda_s \geqslant 0$, $s\in S$, $\sum\limits_{s\in S} \lambda_s = 1$, такие, что $x^s\in X_2$, $s\in S$, $\det \overline{Q}_{оп}=\det\left\{\begin{matrix} Q(I^1, s), \\ 1 \end{matrix}\, s\in S\right\}\neq 0$, $\sum\limits_{s\in S} Q(I^1, s)\lambda_s = b_1$. Тогда $S_{оп}=S$ и оценка субоптимальности $\beta(S)$ в задаче (7) для плана $\{\lambda(S), \overline{Q}_{оп}\}$ равна нулю, т. е. $\{\lambda(S), \overline{Q}_{оп}\}$ — оптимальный план задачи (7). Следовательно, чтобы оценка $\beta_*$ (9) стала больше $\varepsilon$, $\varepsilon\geqslant 0$, к совокупности векторов $x^s$, $s\in S$, надо добавить такой вектор $x^*\in X_2$, для которого $-\Delta_* = -(u'(I^1)A_1x^* - c'x^* + u_*) > \varepsilon$. Если таких векторов нет, то $\sum\limits_{s\in S}\lambda_s x^s$ — $\varepsilon$-оптимальный план задачи (1).

Для построения вектора $x^*$ решаем задачу (11). Пусть $x^*$ — $\varepsilon_2$-оптимальный план задачи (11). Если $f(x^*)>\varepsilon$, то вектор $x^*$ добавляем к векторам $x^s$, $s\in S$. Для задачи (7), записанной относительно новой совокупности векторов $x^*$, $x^s$, $s\in S$, опорный план $\{\{\lambda(S), \lambda_*=0\}, \overline{Q}_{оп}\}$ не является $\varepsilon$-оптимальным. Приступаем к его улучшению.

Критерий оптимальности нарушается только на векторе $\left\{\begin{matrix} q^* \\ 1\end{matrix}\right\}$. Следовательно, единственное подходящее направление

$$\{l(S),\ l_*\} = \left\{ l(S) = \overline{Q}_{оп}^{-1}\left\{\begin{matrix} q^* \\ 1\end{matrix}\right\},\ l_* = 1\right\} \qquad (12)$$

приводит к оптимальному плану $\{\overline{\lambda}(S) = \lambda(S) + \Theta l(S), \overline{\lambda}_* = \Theta\}$, где $\Theta = \Theta_{i_0}$ — максимально допустимый шаг, найденный по стандартным правилам. Вектор $\left\{\begin{matrix} q^* \\ 1\end{matrix}\right\}$ вводим в опору вместо вектора $\left\{\begin{matrix} q^{i_0} \\ 1\end{matrix}\right\}$. В новом опорном плане неопорная переменная $\overline{\lambda}_{i_0}$ равна нулю. Вектор $x^{i_0}$ удаляем из (3). Очевидно, что новый опорный план является оптимальным планом задачи (7), записанной относительно нового множества (3), т. е. повторилась ситуация, имевшая место для начального опорного плана.

Если $f(x^*)+\varepsilon_2 \leqslant \varepsilon$, то решение задачи (1) останавливается на $\varepsilon$-оптимальном плане $\sum\limits_{s \in S} \lambda_s x^s$. Если $f(x^*) \leqslant \varepsilon$, $f(x^*)+\varepsilon_2 > \varepsilon$, то продолжаем решение задачи (11) (уменьшаем величину $\varepsilon_2$).

Замечание. Если $\varepsilon=0$ и задача (11) решается до получения оптимального плана, то описанный метод полностью совпадает с классическим методом декомпозиции Данцига — Вулфа.

**3. Модификация.** Рассмотрим модификацию метода, описанного в п. 2. Пусть начальная информация такая же, как в п. 2. Положим $S_*=S_{\text{оп}}$; $x^*$ — оптимальный план задачи (11). Тогда план $x=\sum\limits_{s \in S_{\text{оп}}} \lambda_s x^s$, построенный по начальному плану $\lambda$, является $\beta$-оптимальным планом задачи (1), где $\beta=f(x^*)$. Если $\beta \leqslant \varepsilon$, то решение задачи (1) прекращается. В противном случае продолжаем решение. Построим план $\{\bar{\lambda}, \bar{Q}(\bar{S}_{\text{оп}})\}$, оценка субоптимальности которого меньше $\beta$. Направление (12) является подходящим для плана $\{\lambda(S), \lambda_*=0, \bar{Q}(S_{\text{оп}})\}$. Построим план $\{\bar{\lambda}(S)=\lambda(S)+\Theta l(S), \ \bar{\lambda}_*=\Theta\}$, где $\Theta=\Theta_{i_0}$ — максимально допустимый шаг вдоль $l$, и новое опорное множество $\bar{S}_{\text{оп}}=(S_{\text{оп}} \setminus i_0) \cup *$. Если $i_0 \in S_*$, то $\bar{S}_*=S_* \setminus i_0$; если $i_0 \bar{\in} S_*$, то $\bar{S}_*=S_*$. Теперь вместо задачи (11) решаем задачу дробно-линейного программирования

$$\frac{f(x)}{1-q'A_1x} \to \max,$$

$$1 \geqslant q'A_1x, \ A_2x=b, \ d_* \leqslant x \leqslant d^*,$$

где $q'=\sum\limits_{i \in S_{\text{оп}} \setminus S_*} q_i'$; $q_i'$ — $i$-я строка матрицы $\bar{Q}(\bar{S}_{\text{оп}})$. Пусть $x^{(*)}$ — решение последней задачи. Можно показать, что план $\{\bar{\lambda}, \bar{S}_{\text{оп}}\}$—$\bar{\beta}$-оптимальный план, где $\bar{\beta}=f(x^{(*)})<\beta$. Обоснование следует из введения, § 2, п. 2 при $a=e$.

**4. Блочная задача.** Метод Данцига — Вулфа оказался весьма эффективным для задач линейного программирования со специальной структурой множества параметров. В данном пункте рассматривается *блочная задача* *со связывающими ограничениями,* т. е. задача (1) с матрицей

$$A = A(I,\ J) = \left\{ \begin{matrix} A(I_0,\ J_0) & A(I_0,\ J_1) & \dots & A(I_0,\ J_p) \\ & A(I_1,\ J_1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & A(I_p,\ J_p) \end{matrix} \right\}. \qquad (13)$$

В этом случае множество планов $X$ задачи (1) естественно представить в виде пересечения

$$X = X_0 \cap (X_1 \dot{+} X_2 \dot{+} \dots \dot{+} X_p)$$

множества $X_0 = \{x : A(I_0,\ J)\, x = b(I_0)\}$ и прямой суммы множеств $X_k = \{x(J_k) : A(I_k,\ J_k)\, x(J_k) = b(I_k),\ d_*(J_k) \leqslant x(J_k) \leqslant \leqslant d^*(J_k)\},\ k = \overline{1,\ p}$.

Пусть

$$x^{ks}(J_k),\ s \in S_k, \qquad (14)$$

— совокупность элементов множества $X_k$. По каждой системе элементов (14) составим выпуклые комбинации

$$\sum_{s \in S_k} \lambda_{ks}\, x^{ks}(J_k), \quad \sum_{s \in S_k} \lambda_{ks} = 1,\ \lambda_{ks} \geqslant 0,\ s \in S_k, \qquad (15)$$

которые аппроксимируют множества $X_k$. Согласно фундаментальной теореме теории выпуклых многогранных множеств, существуют и такие системы элементов (14), при которых множества выпуклых комбинаций (15) совпадают с $X_k$. Поэтому, использовав представление (15) вместо (7), получим эквивалентную задачу с $|I_0|$ основными и $p$ обобщенными прямыми ограничениями:

$$\sum_{k=1}^{p} \gamma_k' \lambda_k \to \max,\ \sum_{k=1}^{p} Q_k \lambda_k = b_0,\ e_k' \lambda_k = 1,\ \lambda_k \geqslant 0,\ k = \overline{1,\ p}, \qquad (16)$$

где

$$\lambda_k = \lambda_k(S_k) = \{\lambda_{ks},\ s \in S_k\};\ \gamma_k = \gamma(S_k) = \{c'(J_k)\, x^{ks}(J_k),\ s \in S_k\};\ Q_k = Q(I,\ S_k) = \{A(I_0,\ J_k)\, x^{ks}(J_k),\ s \in S_k\};$$
$$b_0 = b(I_0),\ e_k = e(S_k).$$

В силу специальной структуры матрицы (13) подзадача (11) распадается на $p$ эквивалентных подзадач

$$f(x(J_k)) = (c(J_k) - u'(I_0)\, A(I_0,\ J_k))\, x(J_k) \to \max, \qquad (17)$$
$$A(I_k,\ J_k)\, x(J_k) = b(I_k),\ d_*(J_k) \leqslant x(J_k) \leqslant d^*(J_k),\ k = \overline{1,\ p}.$$

При решении этих задач получается $p$ векторов $x^{k*}(J_k)$, $k=\overline{1, p}$, которые одновременно вводятся в систему (14) и порождают $p$ новых неопорных векторов условий в координирующей задаче (16). Теперь даже в классическом варианте (см. п. 2) решение координирующей задачи не сводится, вообще говоря, только к вычислению шага, а может состоять из нескольких итераций. Как отмечается в [7], одновременное введение нескольких векторов в (14) заметно улучшает эффективность метода Данцига — Вулфа. Описание дальнейших деталей метода п. 1 оставляем читателям.

**5. Двойственный метод. Общая задача.** Предположим, что при решении задачи (1) априорная информация состоит не из прямых планов задачи, а из двойственных. В данном пункте описывается модификация двойственного опорного метода [ч. 1], основанная на изложенном в п. 1 методе Данцига — Вулфа декомпозиции прямых ограничений. Напомним, что двойственный опорный метод использует опоры тех же размеров, что и прямой опорный метод. Поэтому непосредственное его использование для решения большой задачи (1) невозможно.

Итак, пусть известны начальная совокупность векторов (3) и начальный двойственный план задачи (1), т. е. такой вектор $\{y^1, v^1, w^1\}$, на котором выполняются все ограничения двойственной к (1) задачи

$$b'y - d'_* v + d^{*\prime} w \to \min, \quad A'y - v + w = c, \quad v \geqslant 0, \quad w \geqslant 0. \tag{18}$$

После разбиения матрицы $A=A(I, J)$ на блоки $A_1=A(I^1, J)$, $A_2=A(I^2, J)$ задача (18) принимает следующий вид:

$$b'_1 y_1 + b'_2 y_2 - d'_* v + d^{*\prime} w \to \min,$$
$$A'_1 y_1 + A'_2 y_2 - v + w = c, \quad v \geqslant 0, \quad w \geqslant 0,$$

где $y_1=y(I^1)$, $y_2=y(I^2)$ — компоненты вектора $y$. Начальная информация позволяет составить координирующую задачу (7). Запишем задачу, двойственную к координирующей:

$$b'_1 y_1 + y_0 \to \min, \quad y'_1 Q + y_0 e' \geqslant \gamma'. \tag{19}$$

Нетрудно проверить, что из начального двойственного плана задачи (1) получается следующий начальный план задачи (19): $\{y_1^1, y_0^1\}$, $y_0^1 = b'_2 y_2^1 - d'_* v^1 + d^{*\prime} w^1$. Припишем этому плану опору $\overline{Q}_{\text{оп}}$. Описание дальнейших операций двойственного метода [ч. 1] оставляем читателям.

## § 5. Декомпозиция двойственных ограничений методом Данцига — Вулфа

В данном параграфе метод Данцига — Вулфа декомпозиции прямых ограничений применяется для декомпозиции двойственных ограничений. При этом матрица условий прямой задачи рассекается на части не горизонтальными линиями, как в § 4, а вертикальными и основной операцией становится генерирование строк координирующей задачи, а не генерирование столбцов.

**1. Двойственный метод.** Рассмотрим задачу

$$c'x \to \max,\ Ax=b,\ d_* \leqslant x \leqslant d^*, \tag{1}$$

относительно параметров которой сохраним обычные предложения (см. § 1). Запишем задачу, двойственную к (1):

$$b'y - d'_* v + d^{*\prime} w \to \min,\ A'y - v + w = c,\ v \geqslant 0,\ w \geqslant 0. \tag{2}$$

Множество $Z$ двойственных планов $\{y, v, w\} = \{y, v_1, v_2, w_1, w_2\}$ представим в виде

$$Z = \{\{y, v_1, v_2, w_1, w_2\} : \{y, v_1, w_1\} \in Z_1,\ \{y, v_2, w_2\} \in Z_2\},$$

где

$$Z_1 = \{\{y, v_1, w_1\} : A_1'y - v_1 + w_1 = c_1,\ v_1 \geqslant 0,\ w_1 \geqslant 0\};$$
$$Z_2 = \{\{y, v_2, w_2\} : A_2'y - v_2 + w_2 = c_2,\ v_2 \geqslant 0,\ w_2 \geqslant 0\}; \tag{3}$$
$$A_1 = A(I, J^1);\ A_2 = A(I, J^2);\ v_1 = v(J^1);\ v_2 = v(J^2) \text{ и т. д.};$$

$J^1$ — некоторое подмножество из $J : J^1 \subset J,\ J^2 = J \setminus J^1$.

Согласно фундаментальной теореме теории выпуклых многогранных множеств, найдутся такие две конечные совокупности векторов

$$\{y^i, v_2^i, w_2^i\},\ i \in S;\ \{l^j, p^j, q^j\},\ j \in T, \tag{4}$$

удовлетворяющих соотношениям $A_2'y - v_2 + w_2 = c_2$, $v_2 \geqslant 0$, $w_2 \geqslant 0$; $A_2'l - p + q = 0$, $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, что множество $Z_2$ совпадает с множеством $\tilde{Z}_2$ выпуклых и конических комбинаций, построенных по (4):

$$\tilde{Z}_2 = \{\{y, v_2, w_2\} : \{y_2, v_2, w_2\} = \sum_{i \in S} \lambda_i \{y^i, v_2^i, w_2^i\} + \sum_{j \in T} \mu_j \{l^j, p^j, q^j\},\ \sum_{i \in S} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geqslant 0,\ i \in S;\ \mu_j \geqslant 0,\ j \in T\}. \tag{5}$$

Предположим, что, наряду с параметрами задачи (1), известен начальный двойственный план $\{y, v, w\}$ и начальные совокупности элементов (4). Элементы множества (5), построенного по начальной информации (4), будут, согласно (3), двойственными планами исходной задачи (1) тогда и только тогда, когда

$$A_1'\Big(\sum_{i\in S}\lambda_i y^i + \sum_{j\in T}\mu_j l^j\Big) - v_1 + w_1 = c_1,\ v_1 \geqslant 0,\ \ w_1 \geqslant 0.$$

В двойственной целевой функции перейдем к новым переменным $\lambda_i$, $\mu_j$ и, используя обозначения

$$\bar{g}_i = \{A_1'y^i\},\ \ \bar{\gamma}_i = b'y^i - d_{*2}'v_2^i + d_2^{*\prime}w_2^i,\ \ i\in S;$$

$$g_j = \{A_1'l^j\},\ \ \gamma_j = b'l^j - d_{*2}'p_2^j + d_2^{*\prime}q_2^j,\ \ j\in T;$$

$$\bar{G} = \bar{G}(S) = \{\bar{g}_i,\ i\in S\},\ \ \bar{\gamma} = \bar{\gamma}(S) = \{\bar{\gamma}_i,\ i\in S\},$$

введем задачу

$$\begin{gathered}\bar{\gamma}'\lambda + \gamma'\mu - d_{*1}'v_1 + d_1^*w_1 \underset{\lambda,\ \mu,\ v_1,\ w_1}{\to} \min,\ \ \bar{G}\lambda + G\mu - v_1 + w_1 = c_1,\\ \sum_{i\in S}\lambda_i = 1,\ \ \lambda_i \geqslant 0,\ \ i\in S,\ \ \mu_j \geqslant 0,\ \ j\in T,\ \ v_1\geqslant 0,\ \ w_1\geqslant 0.\end{gathered}\tag{6}$$

Из предыдущего следует существование таких совокупностей (4), что задачи (2) и (6) эквивалентны. Составим задачу, двойственную к (6):

$$\begin{gathered}c_1'x_1 + x_0 \to \max,\\ \bar{g}_i'x_1 + x_0 \leqslant \bar{\gamma}_i,\ i\in S,\ g_j'x_1 \leqslant \gamma_j,\ j\in T,\ d_{*1} \leqslant x_1 \leqslant d_1^*,\end{gathered}\tag{7}$$

и назовем ее *координирующей.* Она имеет $|J_1|+1$ переменных и $|S|+|T|$ основных ограничений типа неравенства. Такие задачи рассмотрены в § 2. Число $|J_1|$ можно выбрать произвольным в зависимости от мощности ЭВМ.

По предположению, среди априорной информации имеется двойственный план $\{y, v, w\}$ задачи (1). По нему легко строится двойственный план координирующей задачи (7). Всегда можно считать, что вектор $\{y, v, w\} = \{y^{i_0}, v^{i_0}, w^{i_0}\}$ включен в совокупность (4) $(i_0\in S)$. Тогда вектор $\{\lambda_i = 0,\ i\in S\setminus i_0;\ \lambda_{i_0} = 1,\ \mu_i = 0,\ i\in T;\ v_1,\ w_1\}$ — двойственный план задачи (7). Приписав ему опору, можно приступить к решению задачи (7) двойственным опорным методом.

На этом изложение двойственного метода решения задачи (1) прекратим и читателям рекомендуем закончить его, следуя п. 1 § 4.

**2. Прямой метод.** Для первого знакомства с методом настоящего параграфа интересной является ситуация, когда априорная информация о задаче (1) состоит из начальных совокупностей (4) и начального прямого плана $x^1=\{x^1(J^1),\ x^1(J^2)\}$ задачи (1). По этой информации можно построить координирующую задачу (7) и ее начальный план.

Рассмотрим подробнее связь координирующей задачи (7) с исходной задачей (1). Нетрудно показать, что задача (1) эквивалентна задаче

$$\begin{gathered} c_1'x_1 + x_0 \to \max_{x_1,\ x_0}, \\ y'A_1x_1 + x_0 \leqslant b'y - d_{*2}'v_2 + d_2^{*\prime}w_2 \text{ для каждого} \\ \{y,\ v_2,\ w_2\} \in Z_2,\ d_{*1} \leqslant x_1 \leqslant d_1^*, \end{gathered} \tag{8}$$

где $x_1=x(J^1)-|J^1|$ — вектор, $x_0$ — скаляр. С другой стороны, координирующую задачу (7) можно записать в виде

$$\begin{gathered} c_1'x_1 + x_0 \to \max_{x_1,\ x_0}, \\ y'A_1x_1 + x_0 \leqslant b'y - d_{*2}'v_2 + d_2^{*\prime}w_2 \text{ для каждого} \\ \{y,\ v_2,\ w_2\} \in \tilde{Z}_2,\ d_{*1} \leqslant x_1 \leqslant d_1^*. \end{gathered} \tag{9}$$

Из сравнения задач (8), (9) видно, что координирующая задача (7) получается из задачи (8), эквивалентной исходной, при релаксации части основных ограничений.

Вектор $\{x_1^1,\ x_0^1 = c_2^1 x_2^1\}$, построенный по заданному начальному плану $x^1 = \{x_1^1,\ x_2^1\}$, $x_2^1 = x^1(J^2)$, задачи (1) является планом задачи (8), а следовательно, и планом координирующей задачи (7). Пусть $\tilde{G}_{\text{оп}}' = \begin{Bmatrix} \overline{G}(S_{\text{оп}}), & G(T_{\text{оп}}) \\ e', & 0 \end{Bmatrix}$, $S_{\text{оп}} \subset S$, $T_{\text{оп}} \subset T$, — начальная опора задачи (7). Следуя § 2, приступаем к улучшению начального опорного плана $\{\tilde{G}_{\text{оп}},\ x_1^1,\ x_0^1\}$ координирующей задачи (7).

Пусть $\{\bar{x}_1,\ \bar{x}_0\}$ — $\varepsilon_1$-оптимальный план задачи (7). По построению, на этом векторе выполняются ограничения задачи (9). Следовательно, вектор $\{\Delta x_1,\ \Delta x_0\} = \{\bar{x}_1 -$

$-x_1^1$, $\bar{x}_0-x_0^1\}$ в терминах § 2 можно интерпретировать как подходящее направление для плана $\{x_1^1, x_0^1\}$ в задаче (8), построенное при релаксации части основных ограничений. Вычислим максимально допустимый шаг $\Theta$ вдоль направления $\{\Delta x_1, \Delta x_0\}$:

$$\Theta=\min\{1, \Theta_0\}, \Theta_0=\min\Theta(y), \{y, v_2, w_2\}\in Z_2,$$
$$y'A_1\Delta x_1+\Delta x_0>0, \tag{10}$$

где

$$\Theta(y)=\frac{(b-A_1x_1^1)'y-d_{*2}'v_2+d_2^{*\prime}w_2-x_0^1}{y'A_1\Delta x_1+\Delta x_0}.$$

Задача (10) называется *подзадачей* *), соответствующей совокупности (4). Она является задачей дробно-линейного программирования.

Решение $\Theta$ задачи (10) совпадает с решением задачи

$$\Theta\to\max_{x_2,\,\Theta},\quad -c_2'x_2+\Theta\Delta x_0\leqslant -x_0^1,$$
$$A_2x_2+\Theta A_1\Delta x_1=b-A_1x_1^1,\ d_{*2}\leqslant x_2\leqslant d_2^*,\ \Theta\leqslant 1, \tag{11}$$

которая является задачей линейного программирования.

Пусть $\Theta$ — решение задачи (11) (или (10)). Если $\Theta=1$, то вектор $\{\bar{x}_1, \bar{x}_0\}$ — $\varepsilon_1$-оптимальный план задачи (8). В этом случае вектор $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$, где $\bar{x}_2$ — решение задачи (11), является $\varepsilon_1$-оптимальным планом задачи (1). Действительно, согласно (7), (11), вектор $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ — план задачи (1). Из $\varepsilon_1$-оптимальности плана $\{\bar{x}_1, \bar{x}_0\}$ в задаче (7) следует неравенство $c_1'\bar{x}_1+\bar{x}_0\geqslant c_1'x_1+x_0-\varepsilon_1$ для любого плана $\{x_1, x_0\}$ задачи (7). Положив $x_1=x_1^0$, $x_0=c_2'x_2^0$ (где $\{x_1^0, x_2^0\}$ — оптимальный план задачи (1)), убеждаемся в $\varepsilon_1$-оптимальности плана $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ задачи (1).

Пусть $\Theta<1$. Тогда строим новый план $\{x_1^2=x_1^1+\Theta\Delta x_1,\ x_0^2=x_0^1+\Theta\Delta x_0\}$ задачи**) (8). Обозначим через $\{\tilde{y}_0^*, \tilde{y}^*, \tilde{v}_2^*, \tilde{w}_2^*, \tilde{w}^*\}$ оптимальный двойственный план за-

*) Методы решения таких задач рассматриваются в [7].

**) Новому плану задачи (8) соответствует новый план $\{x_1^2, x_2^2\}$ задачи (1), где $x_2^2$ — решение задачи (11). При переходе $\{x_1^1, x_2^1\}\to\{x_1^2, x_2^2\}$ целевая функция задачи (1) возрастает на величину $\Theta(c_1'\Delta x_1+\Delta x_0)$.

дачи (11). Поскольку $\Theta < 1$, то $\tilde{w}^* = 0$. Если $\tilde{y}_0^* \neq 0$, то к первой совокупности векторов (4) добавим вектор $\{y^*, v_2^*, w_2^*\} = \{\tilde{y}^*/\tilde{y}_0^*, \tilde{v}_2^*/\tilde{y}_0^*, \tilde{w}_2^*/\tilde{y}_0^*\}$. Если $\tilde{y}_0^* = 0$, то вектор $\{l^*, p^*, q^*\} = \{\tilde{y}^*, \tilde{v}_2^*, \tilde{w}_2^*\}$ добавим ко второй совокупности (4). В полученной новой координирующей задаче (7) добавленные векторы стремимся ввести в опору. Из совокупности (4) удаляем старые векторы, которым соответствуют пассивные на плане $\{x_1^2, x_2^2\}$ основные ограничения координирующей задачи. Решение новой координирующей задачи начинаем с проверки плана $\{x_1^2, x_0^2 = c_2^1 x_2^2\}$ на субоптимальность.

Из приведенного описания следует, что основной операцией на каждой итерации является введение в координирующую задачу новых строк (или строки), которые строятся с помощью подзадачи. Эта операция называется методом генерирования строк.

## § 6. Декомпозиция опоры

Метод декомпозиции Данцига — Вулфа (см. § 4) позволяет задачи с большим числом основных ограничений свести к ряду задач с малым числом ограничений. Однако при этом резко возрастает число переменных координирующей задачи, что заметно сказывается на увеличении количества итераций [7]. В данном параграфе излагается метод декомпозиции больших задач, в котором ни число ограничений, ни число переменных не увеличивается и тем не менее размеры рабочих опорных матриц таковы, что метод реализуем на любой ЭВМ.

**1. Плавающие опоры.** Рассмотрим большую задачу линейного программирования в естественной форме

$$c'x \to \max, \; b_* \leqslant Ax \leqslant b^*, \; d_* \leqslant x \leqslant d^*, \tag{1}$$

где $A = A(I, J)$; $c = c(J)$; $x = x(J)$; $b_* = b_*(I)$, ... ; $I = \{1, 2, \ldots, m\}$; $J = \{1, 2, \ldots, n\}$. Во введении описан адаптивный метод решения такой задачи, в котором в ходе итераций может меняться размер опоры. Опишем модификацию этого метода, где используются рабочие опорные $m_* \times m_*$-матрицы с размерами $m_*$, не превышающими заданного числа $m_0$.

Пусть $\{x, A_{оп}\}$ — начальный опорный план задачи (1), $A_{оп}=A(I_{оп}, J_{оп})$, $|I_{оп}|=|J_{оп}|\leqslant m_0$. Исходя из этого плана, начинаем решение задачи (1) методом, описанным в § 1 введения. Рассмотрим итерацию с опорной матрицей $A_{оп}$ максимально допустимого размера: $|I_{оп}|=|J_{оп}|=m_0$, и с $\Theta=\Theta_{i_0}$, $\sigma=\sigma_{j_*}$. Если следовать алгоритму из введения, то надо увеличить опору, положив $\bar{I}_{оп}=I_{оп}\cup i_0$, $\bar{J}_{оп}=J_{оп}\cup j_*$, $\bar{A}_{оп}=A(\bar{I}_{оп}, \bar{J}_{оп})$. При этом размер новой опорной матрицы $\bar{A}_{оп}$ становится недопустимым. В этом случае вместо новой опорной матрицы введем две опорные (рабочие) матрицы: $A_{1оп}=A(I_{1оп}, J_{1оп})$ и $\tilde{A}_{2оп}=\tilde{A}(I_{2оп}, J_{2оп})$, где $I_{1оп}=I_{оп}$, $J_{1оп}=J_{оп}$; $I_{2оп}=i_0$, $J_{2оп}=j_*$,

$\tilde{A}(I_{2оп}, J_{1н}\cup I_{1оп})=\{A(I_{2оп}, J_{1н})-A(I_{2оп}, J_{1оп})A_{1оп}^{-1}\times A(I_{1оп}, J_{1н}),\ A(I_{2оп}, J_{1оп})A_{1оп}^{-1}\}$, $J_{1н}=J\setminus J_{1оп}$. Опишем итерацию метода в терминах рабочих опор $A_{1оп}$ и $\tilde{A}_{2оп}$, размеры которых не превосходят заданного числа $m_0$.

Найдем вектор потенциалов $u(I_{оп})$, $I_{оп}=I_{1оп}\cup I_{2оп}$: $u'(I_{2оп})=\bar{c}'(J_{2оп})\tilde{A}_{2оп}^{-1}$, $u(I_{1оп})=[c'(J_{1оп})-u'(I_{2оп})A(I_{2оп}, J_{1оп})]A_{1оп}^{-1}$, где $\bar{c}'(J_{2оп})=c'(J_{2оп})-c'(J_{1оп})A_{1оп}^{-2}A(I_{1оп},J_{2оп})$ и вектор оценок $\Delta'(J)=u'(I_{1оп})A(I_{1оп}, J)+u'(I_{2оп})A(I_{2оп}, J)-c(J)$. Проверим критерии оптимальности и субоптимальности (см. введение, § 1). Если они не выполняются, то переходим к построению подходящего направления $l$. Среди всех подходящих направлений выбираем то, которое максимизирует приращение целевой функции при условии, что выполняются прямые неопорные ограничения

$$d_{*j}\leqslant x_j\leqslant d_j^*,\ j\in J_н=J\setminus(J_{1оп}\cup J_{2оп}),$$

и основные опорные ограничения $b_{*i}\leqslant a_i'x\leqslant b_i^*$, $i\in I_{оп}$ (см. введение, § 1, задача (5), (7)).

Компоненты подходящего направления $l=\{l_{1оп}, l_{2оп}, l_н\}$ находятся из соотношений: $l_j=d_{*j}-x_j$, если $\Delta_j>0$; $l_j=d_j^*-x_j$, если $\Delta_j<0$; $l_j=0$, если $\Delta_j=0$, $j\in J_н$; $l_{2оп}=-\tilde{A}_{2оп}^{-1}[\tilde{A}(I_{2оп}, J_н)l_н+\tilde{A}(I_{2оп}, I_{1оп})\omega(I_{1оп})-\omega(I_{2оп})]$; $l_{1оп}=-A_{1оп}^{-1}(A(I_{1оп}, J_{1н})l_{1н}-\omega(I_{1оп}))$, где $\omega(I_{оп})=\{\omega_i,\ i\in I_{оп}\}$, $\omega_i=b_{*i}-a_i'x$, если $u_i<0$; $\omega_i=b_i^*-a_i'x$, если $u_i>0$; $\omega_i=0$, если $u_i=0$, $i\in I_{оп}$. Новый план строим в виде $\bar{x}=x+\Theta l$, где $\Theta$ — максимально допустимый шаг, найденный по стандартным правилам (см. введение, § 1).

Укажем правила построения новых опорных (рабочих) матриц.

1) Пусть $\Theta=\Theta_{j_0}$. Если $j_0 \in J_{2\text{оп}}$, то полагаем $z(J_{\text{н}} \cup I_{1\text{оп}} \cup I_{2\text{оп}}) = ke_{j_0}\{\tilde{A}_{2\text{оп}}^{-1}\tilde{A}(I_{2\text{оп}}, J_{\text{н}}), -\tilde{A}_{2\text{оп}}^{-1}\tilde{A}(I_{2\text{оп}}, J_{1\text{оп}}), \tilde{A}_{2\text{оп}}^{-1}\}$, $k=1$, если $\bar{x}_{j_0}=d_{*j_0}$; $k=-1$, если $\bar{x}_{j_0}=d^*_{j_0}$, и находим шаг $\sigma$ согласно условиям (24) из §1 введения. При $\sigma=\sigma_{i_*}$, $i_* \in I_{2\text{оп}}$, или $\sigma=\sigma_{j_*}$ меняются только вторая рабочая опорная матрица $\tilde{A}_{2\text{оп}}$ и связанные с ней опорные множества $I_{2\text{оп}}$, $J_{2\text{оп}}$ по правилам, описанным в п. 3 § 1 введения для случаев 3), 4).

Пусть $\sigma=\sigma_{i_*}$, $i_* \in I_{1\text{оп}}$. Значит, $z(i_*)=e'_{j_0}\tilde{A}_{2\text{оп}}^{-1}\tilde{A}(I_{2\text{оп}}, i_*) \neq 0$. Отсюда следует, что в столбце $\tilde{A}(I_{2\text{оп}}, i_*)$ существует элемент $\tilde{A}(i_{\text{х}}, i_*) \neq 0$, $i_{\text{х}} \in I_{2\text{оп}}$. В множествах $I_{1\text{оп}}$, $I_{2\text{оп}}$ поменяем местами элементы $i_*$ и $i_{\text{х}}$: $\tilde{I}_{1\text{оп}} = (I_{1\text{оп}} \setminus i_*) \cup i_{\text{х}}$, $\tilde{I}_{2\text{оп}} = (I_{2\text{оп}} \setminus i_{\text{х}}) \cup i_*$. Новые обратные опорные матрицы примут вид

$$\begin{gathered} A^{-1}(\tilde{I}_{1\text{оп}}, J_{1\text{оп}}) = A_{1\text{оп}}^{-1}[E - e_{i_*}(\tilde{A}(i_{\text{х}}, I_{1\text{оп}}) - e'_{i_*})/\tilde{A}(i_{\text{х}}, i_*)]; \\ \tilde{A}^{-1}(\tilde{I}_{2\text{оп}}, J_{2\text{оп}}) = \tilde{A}_{2\text{оп}}^{-1}[E + (\tilde{A}(I_{2\text{оп}}, i_*) - e_{i_{\text{х}}})e'_{i_{\text{х}}}]. \end{gathered} \tag{2}$$

Для новых опорных множеств выполняется условие $i_* \in \tilde{I}_{2\text{оп}}$. Дальнейшие изменения второй опорной матрицы и множеств $\tilde{I}_{2\text{оп}}$, $J_{2\text{оп}}$ проводим по схеме п. 3 § 1 введения.

Рассмотрим теперь случай, когда $j_0 \in J_{1\text{оп}}$. Если в $j_0$-й строке матрицы $A_{1\text{оп}}^{-1}A(I_{1\text{оп}}, J_{2\text{оп}})$ есть элемент $e'_{j_0}A_{1\text{оп}}^{-1} \times A(I_{1\text{оп}}, j_{\text{х}})$, отличный от нуля, то в множествах $J_{1\text{оп}}$ и $J_{2\text{оп}}$ поменяем местами элементы*) $j_0$ и $j_{\text{х}}$: $\tilde{J}_{1\text{оп}} = (J_{1\text{оп}} \setminus j_0) \cup j_{\text{х}}$, $\tilde{J}_{2\text{оп}} = (J_{2\text{оп}} \setminus j_{\text{х}}) \cup j_0$. Для новых опорных множеств выполняется условие $j_0 \in \tilde{J}_{2\text{оп}}$. Этот случай уже рассмотрен выше.

---

*) Для вычисления новых обратных опорных (рабочих) матриц $A^{-1}(I_{1\text{оп}}, \tilde{J}_{1\text{оп}})$, $\tilde{A}^{-1}(I_{2\text{оп}}, \tilde{J}_{2\text{оп}})$ легко получить формулы, аналогичные (2).

Если все элементы $j_0$-й строки матрицы $A_{1оп}^{-1}A(I_{1оп}, J_{2оп})$ равны нулю, то полагаем $z(J_н \cup I_{1оп}) = ke'_{j_0}\{A_{1оп}^{-1}A(I_{1оп}, J_н), A_{1оп}^{-1}\}$, $k=1$, если $\bar{x}_{j_0} = d_{*j_0}$; $k=-1$, если $\bar{x}_{j_0} = d^*_{j_0}$, и находим $\sigma$ согласно соотношениям (24) из §1 введения. В этом случае меняем только первую рабочую матрицу: $\bar{A}_{1оп} = A(\bar{I}_{1оп}, \bar{J}_{1оп})$, где $\bar{I}_{1оп} = I_{1оп} \setminus i_*$, $\bar{J}_{1оп} = J_{1оп} \setminus j_0$ при $\sigma = \sigma_{i_*}$, $i_* \in I_{1оп}$; $\bar{I}_{1оп} = I_{1оп}$, $\bar{J}_{1оп} = (J_{1оп} \setminus j_0) \cup j_*$ при $\sigma = \sigma_{j_*}$. Формулы для подсчета $\bar{A}_{1оп}^{-1}$ приведены в п. 3 § 1 введения (случаи 3), 4)).

2) Пусть $\Theta = \Theta_{i_0}$. Используя соотношения (24) из §1 введения, найдем шаг $\sigma$ при условии, что $z'(J_н \cup I_{1оп} \cup I_{2оп}) =$

$$= k\{\tilde{A}(i_0, J_н) - \tilde{A}(i_0, J_{2оп})\tilde{A}_{2оп}^{-1}\tilde{A}(I_{2оп}, J_н), -\tilde{A}(i_0, I_{1оп}) +$$

$$+ \tilde{A}(i_0, J_{2оп})\tilde{A}_{2оп}^{-1}\tilde{A}(I_{2оп}, I_{1оп}), -\tilde{A}(i_0, J_{2оп})\tilde{A}_{2оп}^{-1}\}, \ I_н = I \setminus I_{оп},$$

$k=1$, если $a'_{i_0}\bar{x} = b^*_{i_0}$; $k=-1$, если $a'_{i_0}\bar{x} = b_{*i_0}$. Если $\sigma = \sigma_{j_*}$ или $\sigma = \sigma_{i_*}$, $i_* \in I_{2оп}$, то меняем только вторую опорную матрицу и соответствующие ей опорные множества $I_{2оп}$, $J_{2оп}$ (см. п. 3 § 1 введения, случаи 1) и 2)).

Пусть $\sigma = \sigma_{i_*}$, $i_* \in I_{1оп}$. Если в $i_*$-м столбце матрицы $\tilde{A}(I_{2оп}, I_{1оп})$ есть элемент $\tilde{A}(i_x, i_*) \neq 0$, то в множествах $I_{1оп}$ и $I_{2оп}$ поменяем местами элементы $i_x$ и $i_*$ (см. (2)). Для новых опорных множеств имеем $i_* \in \tilde{I}_{2оп}$, т. е. получили рассмотренный выше случай. Если все элементы столбца $\tilde{A}(I_{2оп}, i_*)$ равны нулю, то меняем первую опорную матрицу: $\bar{A}_{1оп} = A(\bar{I}_{1оп}, \bar{J}_{2оп})$, $\bar{I}_{1оп} = (I_{1оп} \setminus i_*) \cup i_0$, $\bar{J}_{2оп} = J_{2оп}$. Новая обратная матрица $\bar{A}_{1оп}^{-1}$ находится по формулам, приведенным в п. 3 § 1 введения для случая 1).

Вторая рабочая матрица $\tilde{A}_{2оп}$ и связанные с ней опорные множества $I_{2оп}$, $J_{2оп}$ не меняются. Из сказанного выше следует, что размеры первой опорной (рабочей) матрицы могут только уменьшаться, размеры же второй матрицы могут и увеличиваться и уменьшаться. (Вторая матрица может совсем «исчезнуть» ($I_{2оп} = J_{2оп} = \varnothing$).) Если обе опорные (рабочие) матрицы имеют максимально допустимый размер $m_0$ и возникает необходимость ввести в опорные множества $I_{оп}$, $J_{оп}$ новые элементы, то образуется третья рабочая опорная матрица, и т. д. При выполнении на некоторой итерации неравенства $|I_{1оп}| + |I_{2оп}| \leqslant m_0$ можно опять перейти к одной рабочей матрице $A(I_{оп}, J_{оп})$, $I_{оп} = I_{1оп} \cup I_{2оп}$, $J_{оп} = J_{1оп} \cup J_{2оп}$.

Замечание. Введение новой опоры можно задержать. Дело в том, что число $m_0$ могло быть указано специалистами в качестве размера оптимальной опорной матрицы. Не исключено также, что эта информация соответствует действительности. Следовательно, ситуация, когда на итерации возникает потребность увеличения размера опоры сверхдопустимого значения, может оказаться временной (преходящей, случайной) и она обязательно исчезнет при надлежащей замене опор без увеличения их размера. (Нечто подобное возникает и для планов: на итерациях нередко опорные компоненты оказываются критическими, но итерации, как правило, продолжают, несмотря на то, что шаг может оказаться равным нулю.) Если критерий оптимальности не выполняется и улучшения не удается добиться для всех опор заданного размера, текущий результат является оптимальным в классе таких опор. В случае, когда этот результат не удовлетворителен, переходят к расширению опоры (это означает, что указанный специалистами размер опоры не оптимален).

Метод данного пункта можно использовать и для задач в канонической форме

$$c'x \to \max, \ Ax=b, \ d_* \leqslant x \leqslant d^*. \qquad (3)$$

Поскольку в каждой ЭВМ равенства соблюдаются лишь с определенной точностью, то можно считать, что в действительности задача (3) относится к типу (1), где $b_*=b-a_*\bar{\varepsilon}$, $b^*=b+a^*\bar{\varepsilon}$, $a_*>0$, $a^*>0$, $\bar{\varepsilon}>0$. С другой стороны, можно сначала ослабить основные ограничения, а затем, уменьшая $\bar{\varepsilon}$, получить решение исходной задачи.

**2. Прямой метод.** Метод декомпозиции опоры изложим для большой задачи в канонической форме (3). Это упростит некоторые выкладки и позволит более отчетливо представить идею метода.

Матрицу $A=A(I, J)$ разобьем на блоки $A_i=A(I_i, J)$, $i=\overline{1, p}$, в которых число строк $|I_i|$ не превосходит $m_0$, где $m_0$ — размер опорной матрицы, допустимый для имеющейся ЭВМ. Чтобы не усложнять последующие вычисления, предположим, что $p=2$.

Пусть $A=\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix}$, $\operatorname{rank} A_1=m_1$, $\operatorname{rank} A_2=m_2$, $m_1+m_2=m$. Множество $Q_{оп}=\{Q_{1оп}, Q_{2оп}\}$, $Q_{1оп}=\{I_1, J_{1оп}\}$, $Q_{2оп}=\{I_2, J_{2оп}\}$, назовем *мультиопорой* задачи (3), если $I_1=I\diagdown I_2$, $J_{1оп}\subset J$, $J_{2оп}\subset J$, $J_{1оп}\cap J_{2оп}=\varnothing$, $|I_1|=|J_{1оп}|$, $|I_2|=|J_{2оп}|$, $\det A(I_1, J_{1оп})\neq 0$, $\det \tilde{A}(I_2, J_{2оп})\neq$ $\neq 0$, где $\tilde{A}(I_2, J)=A(I_2, J)-A(I_2, J_{1оп})A^{-1}(I_1, J_{1оп})\times$ $\times A(I_1, J)$. Мультиопоре соответствуют две неособые матрицы $A_{1оп}=A(I_1, J_{1оп})$, $\tilde{A}_{2оп}=\tilde{A}(I_2, J_{2оп})$ малых размеров $m_1$ и $m_2$, тогда как опоре в обычном понимании должна соответствовать одна большая $m \times m$-матрица $A_{оп} = A(I, J_{оп})$, $m = m_1 + m_2, I = I_1 \cup I_2, J_{оп} = J_{1оп} \cup J_{2оп}$.

Пара $\{x, Q_{оп}\}$, в которой $x$ — план задачи (3), называется *мультиопорным планом.*

По исходному мультиопорному плану $\{x, Q_{оп}\}$ построим $m_1$-, $m_2$-векторы потенциалов $u_1$, $u_2$ и $n$-векторы оценок $\Delta_1$, $\Delta$ матриц $A_1$, $A$:

$$\begin{aligned} u_1' &= c'(J_{1оп})A_{1оп}^{-1}, \ \Delta_1' = u_1'A_1 - c'; \\ u_2' &= -\Delta_1'(J_{2оп})\tilde{A}_{2оп}^{-1}, \ \Delta' = u_2'\tilde{A}_2 + \Delta_1'. \end{aligned} \tag{4}$$

Вектор $\Delta$ совпадает с вектором оценок, полученным для задачи (3) прямым опорным методом в случае опорной матрицы $A_{оп} = A(I, J_{оп})$. Действительно, представим матрицу $A_{оп}$ в виде

$$A_{оп} = \begin{vmatrix} A(I_1, J_{1оп}) & A(I_1, J_{2оп}) \\ A(I_2, J_{1оп}) & A(I_2, J_{2оп}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}.$$

Тогда прямым счетом проверяется, что

$$A_{оп}^{-1} = \begin{vmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}\tilde{A}_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}\tilde{A}_{22}^{-1} \\ -\tilde{A}_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & \tilde{A}_{22}^{-1} \end{vmatrix}, \tag{5}$$

где $\tilde{A}_{22} = \tilde{A}_{2оп}$. Вектор $\Delta$, найденный по правилам прямого опорного метода, равен

$$\Delta' = c'(J_{оп})A_{оп}^{-1}A(I, J) - c'(J). \tag{6}$$

Подставив матрицу (5) в (6), получим (4). Зная вектор оценок, получим [ч. 1] неравенство

$$c'x^0 - c'x \leqslant \beta, \ \beta = -\sum_{\Delta_j > 0, \ j \in J_н} \Delta_j(d_{*j} - x_j) - \sum_{\Delta_j < 0, \ j \in J_н} \Delta_j(d_j^* - x_j), \ J_н = J \setminus J_{оп}, \tag{7}$$

из которого следуют:

**Критерий оптимальности.** Соотношения $\Delta_j \geqslant 0$ при $x_j = d_{*j}$; $\Delta_j \leqslant 0$ при $x_j = d_j^*$; $\Delta_j = 0$ при $d_{*j} < x_j < d_j^*$, $j \in J_н$, достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности мультиопорного плана $\{x, Q_{оп}\}$.

**Критерий субоптимальности.** Если

$$\beta \leqslant \varepsilon, \tag{8}$$

то мультиопорный план $\{x, Q_{\text{оп}}\}$ является ε-оптимальным. Для каждого ε-оптимального плана $x^\varepsilon$ найдется мультиопора $Q_{\text{оп}}$ такая, что для $\{x^\varepsilon, Q_{\text{оп}}\}$ выполняется неравенство (8).

Предположим, что начальный мультиопорный план не удовлетворяет приведенным критериям. Опишем операции по его улучшению. Исходя из опорного плана $\{x(J_{1\text{н}}), \tilde{A}_{2\text{оп}}\}$ и используя адаптивную нормировку из [ч. 2], решим задачу

$$-\Delta_1'(J_{1\text{н}})x(J_{1\text{н}}) \to \max,\ \tilde{A}(I_2,\ J_{1\text{н}})x(J_{1\text{н}}) = \tilde{b}(I_2),$$
$$d_*(J_{1\text{н}}) \leqslant x(J_{1\text{н}}) \leqslant d^*(J_{1\text{н}}), \tag{9}$$

где $\tilde{b}(I_2) = b(I_2) - A(I_2,\ J_{1\text{оп}})\, A_{1\text{оп}}^{-1} b(I_1),\ J_{1\text{н}} = J \setminus J_{1\text{оп}}.$

Пусть $\{x^k(J_{1\text{н}}),\ \tilde{A}_{2\text{оп}}^{(k)}\},\ \tilde{A}_{2\text{оп}}^{(k)} = \tilde{A}(I_2,\ J_{2\text{оп}}^{(k)})$,—невырожденный $\beta^k$-оптимальный опорный план задачи (9) на $k$-й итерации $(k \geqslant 1)$, $\Delta^k(J_{1\text{н}})$ — соответствующий ему вектор оценок. Нетрудно проверить, что вектор $l^*(J) : l^*(J_{1\text{н}}) = x^k(J_{1\text{н}}) - x(J_{1\text{н}}),\ l^*(J_{1\text{оп}}) = -A_{1\text{оп}}^{-1} A(I_1,\ J_{1\text{н}})\, l^*(J_{1\text{н}})$, задает подходящее направление для плана $x$ в задаче (3). Максимально допустимый шаг $\Theta_0$ вдоль $l^*(J)$ равен $\Theta_0 = \min\{1,\ \Theta_{j_0}\}$, где $\Theta_{j_0} = \min \Theta_j,\ j \in J_{1\text{оп}},\ \Theta_j = (d_j^* - x_j)/l_j^*$, если $l_j^* > 0$; $\Theta_j = (d_{*j} - x_j)/l_j^*$, если $l_j^* < 0$; $\Theta_j = \infty$, если $l_j^* = 0$. Пусть $\Theta_0 = 1$. Если $\beta^k \leqslant \varepsilon$, то план $x + l^*$ — ε-оптимальный план задачи (3). Решение задачи прекращается. Если $\beta^k > \varepsilon$, то продолжаем решение задачи (9) исходя из плана $\{x^k(J_{1\text{н}}),\ \tilde{A}_{2\text{оп}}^{(k)}\}$.

При $\Theta_0 = \Theta_{j_0} < 1$ строим новый план $\bar{x} = x + \Theta_0 l^*$. Предположим, что среди компонент $\bar{x}_j,\ j \in J_{1\text{оп}} \cup J_{2\text{оп}}^k$, нового плана есть только одна критическая переменная $\bar{x}_{j_0}$, $j_0 \in J_{1\text{оп}}$.

Для нового мультиопорного плана оценка субоптимальности (7) равна

$$\bar{\beta} = -\sum_{\substack{\Delta_j^k > 0,\\ j \in J_{1\text{н}}}} \Delta_j^k (d_{*j} - \bar{x}_j) - \sum_{\substack{\Delta_j^k < 0,\\ j \in J_{1\text{н}}}} \Delta_j^k (d_j^* - \bar{x}_j).$$

Можно показать, что $\bar{\beta} = \beta - \Delta\beta_x - \Delta\beta_{\text{оп}}$, где $\Delta\beta_x = -\Theta_0 \Delta'(J_{\text{н}})\, l^*(J_{\text{н}}) > 0$ — приращение целевой функции задачи (3) при переходе от плана $x$ к плану $\bar{x}$, $-\Delta\beta \leqslant 0$ — приращение двойственной целевой функции задачи (3) при переходе от коплана $\Delta$ к коплану $\bar{\Delta} = \{\bar{\Delta}(J_{1\text{н}}) = \Delta^k(J_{1\text{н}}), \bar{\Delta}(J_{1\text{оп}}) = 0\}$. Если $\bar{\beta} \leqslant \varepsilon$, то решение задачи (3) прекращается на $\varepsilon$-оптимальном плане $\bar{x}$. В противном случае продолжаем решение.

Индекс $j_0$ переменной $x_{j_0}$, препятствующей движению вдоль $l^*(J)$, надо вывести из $J_{1\text{оп}}$. Поменяем его местами с некоторым элементом из $J_{2\text{оп}}^{(k)}$. Возможны случаи: а) существует $x_{j_0 j_*} \neq 0$, $j_* \in J_{2\text{оп}}^{(k)}$, где $\{x_{j_0 j}, j \in J_{2\text{оп}}^{(k)}\} = e'_{j_0} A_{1\text{оп}}^{-1} A(I_1, J_{2\text{оп}}^{(k)})$; б) все $x_{j_0 j} = 0$, $j \in J_{2\text{оп}}^{(k)}$.

В случае а), не изменяя множества $I_1$, $I_2$, в множествах опорных индексов $J_{1\text{оп}}$, $J_{2\text{оп}}^{(k)}$ поменяем местами элементы $j_0$ и $j_*$: $\bar{J}_{1\text{оп}} = (J_{1\text{оп}} \setminus j_0) \cup j_*$, $\bar{J}_{2\text{оп}} = (J_{2\text{оп}}^{(k)} \setminus j_*) \cup j_0$. В результате получим новую мультиопору $\bar{Q}_{\text{оп}} = \{\bar{Q}_{1\text{оп}}, \bar{Q}_{2\text{оп}}\}$, $\bar{Q}_{1\text{оп}} = \{I_1, \bar{J}_{1\text{оп}}\}$, $\bar{Q}_{2\text{оп}} = \{I_2, \bar{J}_{2\text{оп}}\}$, и соответствующие ей неособые матрицы $\bar{A}_{1\text{оп}} = A(I_1, \bar{J}_{1\text{оп}})$, $\bar{\tilde{A}}_{2\text{оп}} = \tilde{A}(I_2, \bar{J}_{2\text{оп}})$. Обратные матрицы $\bar{A}_{1\text{оп}}^{-1}$ и $\bar{\tilde{A}}_{2\text{оп}}^{-1}$ можно найти по формулам

$$\bar{A}_{1\text{оп}}^{-1} = [E - (e_{j_0} - a_{j*})\, e'_{j_0}/a_{j_0 j_*}] A^{-1}(I_1, J_{1\text{оп}});$$

$$\bar{\tilde{A}}_{2\text{оп}}^{-1} = [E - e_{j_*}(a_{j_0} + e_{j_*})'] \tilde{A}^{-1}(I_2, J_{2\text{оп}}^{(k)}),$$

где $a_{j_*} = A_{1\text{оп}}^{-1} A(I_1, j_*)$; $a_{j_0 j_*}$ — $j_0$-й элемент вектора $a_{j_*}$; $a_{j_0}$ — $j_0$-я строка матрицы $A_{1\text{оп}}^{-1} A(I_1, J_{2\text{оп}}^{(k)})$.

По новым опорным множествам формируем новую задачу (9). Легко проверить, что вектор $\Delta(J)$, подсчитанный по формулам (4) для новых опорных множеств, совпадает с вектором $\bar{\Delta}(J)$. Следовательно, опорный план $\{\bar{x}(\bar{J}_{1\text{н}}), \bar{\tilde{A}}_{2\text{оп}}\}$, где $\bar{J}_{1\text{н}} = J \setminus \bar{J}_{1\text{оп}}$, $\bar{\tilde{A}}_{2\text{оп}} = \tilde{A}(I_1, \bar{J}_{2\text{оп}})$, является $\bar{\beta}$-оптимальным планом новой задачи (9). По предположению, $\bar{\beta} > \varepsilon$, поэтому приступаем к улучшению плана $\{\bar{x}(\bar{J}_{1\text{н}}), \bar{\tilde{A}}_{2\text{оп}}\}$ в новой задаче (9).

Начальный опорный план $\{\bar{x}(\bar{J}_{1\text{н}}), \bar{\tilde{A}}_{2\text{оп}}\}$ задачи (9) является вырожденным, поскольку опорная переменная $\bar{x}_{j_0}$, $j_0 \in \bar{J}_{2\text{оп}}$, критическая. Однако можно показать, что это не мешает на следующей итерации улучшить план $\bar{x}(\bar{J}_{1\text{н}})$

задачи (9) (сделать шаг $\overline{\Theta} > 0$ вдоль проходящего направления). Действительно, пусть для определенности $\overline{x}_{j_0} = d_{*j_0}$. Если в подходящем направлснии $l$, построенном в задаче (9) для опорного плана $\{\overline{x}(\overline{J}_{1н}), \tilde{\tilde{A}}_{2оп}\}$, компонента $l_{j_0} \geqslant 0$, то шаг вдоль $l$ будет больше нуля. Следовательно, план $\overline{x}(\overline{J}_{1н})$ можно строго улучшить, не меняя опору $\tilde{\tilde{A}}_{2оп}$. Если $l_{j_0} < 0$, то переменную $\overline{x}_{j_0} = d_{*j_0}$ выведем из опоры по правилам адаптивного метода (см. в [ч. 2] общий случай смены опоры). При этом будут построены новый коплан $\overline{\Delta}$ и множество неопорных индексов $J_0$, которые можно ввести в опору вместо $j_0$. Если среди индексов $J_0$ есть индекс $j_*$ такой, что $d_{*j_*} < \overline{x}_{j_*} < d^*_{j_*}$, то $j_*$ введем в опору вместо $j_0$. Ясно, что в этом случае новый опорный план будет невырожденным и на следующей итерации шаг $\overline{\Theta}$ будет положительным.

Пусть все $\overline{x}_j$, $j \in J_0$, критические. Подсчитаем число $\gamma = -\sum\limits_{j \in \overline{J}_н} x_{j_0 j} \overline{l}_j$, где $\{x_{j_0 j},\ j \in \overline{J}_н\} = e'_{j_0} \tilde{\tilde{A}}^{-1}_{2оп} \tilde{\tilde{A}}(I_2, \overline{J}_н)$, $\overline{l}_j = d^*_j - \overline{x}_j$, если $\overline{\Delta}_j < 0$; $\overline{l}_j = d_{*j} - \overline{x}_j$, если $\overline{\Delta}_j > 0$; $\overline{l}_j = 0$, если $\overline{\Delta}_j = 0$. При $\gamma = 0$ в качестве $j_*$ выбираем любой элемент множества $J_0 \neq \varnothing$. Если $\gamma < 0$, то индекс $j_*$ выбираем из множества $J_1 = \{j \in J_0,\ x_{i_0 j} > 0,\ \overline{x}_j = d^*_j$ или $x_{i_0 j} < 0,\ \overline{x}_j = d_{*j}\}$. Если $\gamma > 0$, то индекс $j_*$ выбираем из множества $J_2 = J_0 \setminus J_1$. (Можно показать, что при $\gamma < 0$ множество $J_1 \neq \varnothing$ и при $\gamma > 0$ множество $J_2 \neq \varnothing$.)

Легко проверить, что для подходящего направления $\overline{l}$, построенного по правилам адаптивного метода для плана $\overline{x}(\overline{J}_{1н})$, и новой опоры $\tilde{\tilde{A}}(I_2, \overline{J}_{2оп} \setminus j_0 \cup j_*)$ выполняется условие

$$\overline{l}_{j_*} \geqslant 0, \text{ если } \overline{x}_{j_*} = d_{*j_*};\quad \overline{l}_{j_*} \leqslant 0, \text{ если } \overline{x}_j = d^*_{j_*}.$$

Значит, и в этом случае, заменив опору, можно построить подходящее направление, вдоль которого шаг $\overline{\Theta} > 0$, т. е. можно строго улучшить план $\overline{x}(\overline{J}_{1н})$.

Рассмотрим случай б) ($x_{j_0 j} = 0$, $j \in J^{(k)}_{2оп}$). Одновременно с заменой элемента $j_0 \in J_{1оп}$ на элемент из $J^{(k)}_{2оп}$ меняем по одному элементу и в множествах $I_1$, $I_2$. Пусть $\overline{x}_{j_0 i_0}$ —

отличный от нуля элемент матрицы $A^{-1}(I_1, J_{1оп})$; $x_{i_* j_*}$ — отличный от нуля элемент матрицы $\widetilde{A}(I_2, J_{2оп}^{(k)})$ (такие элементы всегда существуют). Строим новую мультиопору $\bar{Q}_{оп} = \{\bar{Q}_{1оп}, \bar{Q}_{2оп}\}$, где $\bar{Q}_{1оп} = \{\bar{I}_1, \bar{J}_{1оп}\}$, $\bar{Q}_{2оп} = \{\bar{I}_2, \bar{J}_{2оп}\}$, $\bar{I}_1 = (I_1 \setminus i_0) \cup i_*$, $\bar{I}_2 = (I_2 \setminus i_*) \cup i_0$, $\bar{J}_{1оп} = (J_{1оп} \setminus j_0) \cup j_*$, $\bar{J}_{2оп} = (J_{2оп}^{(k)} \setminus j_*) \cup j_0$. Как и в предыдущем случае, можно получить формулы для нахождения обратных матриц $A^{-1}(\bar{I}_1, \bar{J}_{1оп})$, $\widetilde{A}^{-1}(\bar{I}_2, \bar{J}_{2оп})$, используя старые обратные матрицы.

С новыми опорными множествами поступаем, как и в случае а).

Замечания. 1. Пусть $\{x^{(k)}, Q_{оп}^{(k)}\}$ и $\{x^{(k+1)}, Q_{оп}^{(k+1)}\}$—мультиопорные планы задачи (3), полученные на $k$-й и $(k+1)$-й итерациях. Для них верны соотношения

$$c'x^{(k)} \leqslant c'x^{(k+1)}, \; b'y^{(k)} + d^{*\prime}w^{(k)} - d_*'v^{(k)} \geqslant b'y^{(k+1)} + \\ + d^{*\prime}w^{(k+1)} - d_*'v^{(k+1)}, \tag{10}$$

где

$$\{y^{(k)}, w^{(k)}, v^{(k)}\}, \; \{y^{(k+1)}, w^{(k+1)}, v^{(k+1)}\},$$

— сопровождающие двойственные планы, соответствующие мультиопорам $Q_{оп}^{(k)}$ и $Q_{оп}^{(k+1)}$.

План $\{x^{(k)}, Q_{оп}^{(k)}\}$ назовем сильно вырожденным, если неравенства (10) обращаются в равенства. Можно показать, что описанный алгоритм будет конечным, если в процессе решения задачи (3) не встречаются сильно вырожденные планы.

2. В рассмотренном методе решение задачи (9) можно прервать на любой итерации. Самый простой вариант метода состоит в том, что решение задачи (9) прерывается после первой итерации. В этом случае $l^*(J_{1н}) = \Theta_* l(J_{1н})$, где $l(J_{1н})$ — подходящее направление для плана $x$, найденное по правилам адаптивного метода (см. § 1 введения); $\Theta_*$ — максимально допустимый шаг вдоль этого направления по переменным $x_j$, $j \in J_{1н}$. Следовательно, задача (9) не решается.

**3. Блочная задача.** Для специальной задачи блочного программирования

$$\begin{gathered} c'(J)\,x(J) \to \max, \; A(I_s, J_s)\,x(J_s) = b(I_s), \; s = \overline{1, p}; \\ A(I_0, J)\,x(J) = b(I_0), \; d_*(J) \leqslant x(J) \leqslant d^*(J), \end{gathered} \tag{11}$$

где $I_s = \left\{\sum_{k=1}^{s-1} m_k + 1, \; \ldots, \; \sum_{k=1}^{s} m_k\right\}$, $J_s = \left\{\sum_{k=1}^{s-1} n_k + 1, \quad \ldots\right.$

$\ldots, \sum_{k=1}^{s} n_k\}$, $m_s = |I_s|$, $n_s = |J_s|$, $s = \overline{1, p}$; $J = \bigcup_{s=1}^{p} J_s$, $I_0 =$

$= \{\sum_{s=1}^{p} m_s + 1, \ldots, \sum m_s + m_0\}$, $m_0 = |I_0|$, $c(J) = \{c_i, i \in J\}$;

$\operatorname{rank} A(I, J) = |I|$, $I = \bigcup_{s=0}^{p} I_s$,

метод декомпозиции (см. п. 2) упрощается. Пусть известен начальный опорный план $\{x, J_{оп}\}$ задачи (11). Разобьем множество $J_{оп}$ на подмножества $J_{1оп} \subset J_1, \ldots$ $\ldots, J_{pоп} \subset J_p$, $J_{0оп} = J_{оп} \setminus (\bigcup_{s=1}^{p} J_{sоп})$, такие, что $\operatorname{rank} A(I_s, J_{sоп}) = m_s$, $s = \overline{1, p}$. Совокупность множеств $J_{оп}^p = \{J_{sоп}, s = \overline{0, p}\}$ будем называть *мультиопорой* задачи (11). Совокупность $\{x, J_{оп}^p\}$ из плана и мультиопоры назовем *мультиопорным планом*.

По исходному мультиопорному плану $\{x, J_{оп}^p\}$ построим вектор потенциалов $u(J_{оп})$ и векторы оценок $\Delta_1(J)$, $\Delta(J)$ матриц $A(I \setminus I_0, J)$ и $A(I, J)$ ($A(I_s, J_k) = 0$, $k \neq s$, $k = \overline{1, p}$, $s = \overline{1, p}$):

$u'(J_{sоп}) = c'(J_{sоп}) A^{-1}(I_s, J_{sоп})$, $\Delta_1'(J_s) = u'(J_{sоп}) A(I_s, J_s) - c'(J_s)$, $s = \overline{1, p}$; $u'(J_{0оп}) = -\Delta_1'(J_{0оп}) \tilde{A}^{-1}(I_0, J_{0оп})$,

$$\Delta'(J) = u'(J_{0оп}) \tilde{A}(I_0, J) + \Delta_1'(J),$$

где $\tilde{A}(I_0, J) = A(I_0, J) - \sum_{s=1}^{p} A(I_0, J_{sоп}) A^{-1}(I_s, J_{sоп}) A(I_s, J)$.

Используя результаты предыдущего пункта, легко убедиться в справедливости неравенства

$$c'(J) x^0(J) - c'(J) x(J) \leqslant \beta,$$

$$\beta = -\sum_{\substack{\Delta_i > 0, \\ i \in J_н}} \Delta_i (d_{*i} - x_i) - \sum_{\substack{\Delta_i < 0, \\ i \in J_н}} \Delta_i (d_i^* - x_i), \quad J_н = J \setminus J_{оп}. \quad (12)$$

Из (12) следуют критерии оптимальности и субоптимальности для задачи (11), которые совпадают с критериями, полученными в п. 2.

Пусть начальный мультиопорный план не удовлетворяет ни одному из этих критериев. Опишем операции по улучшению начального плана. Используя в качестве начального опорный план $\{x(J_{1\text{н}}), J_{0\text{оп}}\}$, решим прямым опорным методом с адаптивной нормировкой задачу

$$-\Delta_1'(J_{1\text{н}})x(J_{1\text{н}}) \to \max, \ \widetilde{A}(I_0, J_{1\text{н}})\,x(J_{1\text{н}}) = \widetilde{b}(I_0), \quad (13)$$
$$d_*(J_{1\text{н}}) \leqslant x(J_{1\text{н}}) \leqslant d^*(J_{1\text{н}}),$$

где $J_{1\text{н}} = J \setminus \bigcup_{s=1}^{p} J_{s\text{оп}}$; $\widetilde{b}(I_0) = b(I_0) - \sum_{s=1}^{p} A(I_0, J_{s\text{оп}}) \times$ $\times A^{-1}(I_s, J_{s\text{оп}})\,b(I_s)$.

Пусть $\{x^0(J_{1\text{н}}), J^0_{0\text{оп}}\}$ — оптимальный опорный план задачи (13), $\Delta^0(J_{1\text{н}})$ — соответствующий вектор оценок матрицы условий (оптимальный коплан). Легко проверить, что вектор $l^*(J)$: $l^*(J_{1\text{н}}) = x^0(J_{1\text{н}}) - x(J_{1\text{н}})$, $l^*(J_{s\text{оп}}) = -A^{-1}(I_s, J_{s\text{оп}})A(I_s, J_s \setminus J_{s\text{оп}})\, l^*(J_s \setminus J_{s\text{оп}})$, $s = \overline{1, p}$, задает подходящее направление для плана $x$ в задаче (11). Найдем максимально допустимые шаги $\Theta_s^0$ вдоль $l^*$ по каждой группе переменных $x(J_{s\text{оп}})$, $s = \overline{1, p}$. Если все $\Theta_s^0 \geqslant 1$, $s = \overline{1, p}$, то план $x + l^*$ является оптимальным. При $\Theta^0 < 1$, $\Theta^0 = \min\{1, \min \Theta_s^0, s = \overline{1, p}\}$ строим новый план $\bar{x} = x + \Theta^0 l^*$.

Обозначим $P_0^* = \{s : s \in P^*, J_s \cap J^0_{0\text{оп}} = J^{0(s)}_{0\text{оп}} = \varnothing\}$, $P_1^* = \{s : s \in P^*, J^{0(s)}_{0\text{оп}} \neq \varnothing\}$, где $P^* = \{s : \Theta_s^0 < 1, s = \overline{1, p}\}$. Для каждого блока $s$, $s \in P_0^*$, методом адаптивной нормировки решим задачу

$$-\Delta^{0\prime}(J_s)\,x(J_s) \to \max, \quad (14)$$
$$A(I_s, J_s)\,x(J_s) = b(I_s), \ d_*(J_s) \leqslant x(J_s) \leqslant d^*(J_s), \ s \in P_0^*,$$

где $\Delta^0(J) = \{\Delta^0(J_{1\text{н}}), \Delta^0(J_{s\text{оп}}) = 0, s = \overline{1, p}\}$.

Пусть $\{\bar{x}(J_s), \bar{J}_{s\text{оп}}\}$ — опорный план, на котором остановлено решение задачи (14), $\bar{\Delta}(J_s)$ — соответствующий ему вектор оценок.

Рассмотрим теперь блоки $s$, $s \in P_1^*$. Обозначим через $i_s$, $i_s \in J_{s\text{оп}}$, индекс переменной, которая определила шаг $\Theta_s^0$. В множестве $P_1^*$ выделим подмножества

$$P_{10}^* = \{s : s \in P_1^*, \ x_{i_s j} = 0, \ \forall j \in J^{0(s)}_{0\text{оп}}\};$$
$$P_{11}^* = \{s : s \in P_1^*, \ \exists\, x_{i_s j_s} \neq 0, \ j_s \in J^{0(s)}_{0\text{оп}}\},$$

где $\{x_{i_s j},\ j \in J_{0\text{оп}}^{0(s)}\} = e_{i_s} A^{-1}(I_s,\ J_{s\text{оп}})\, A(I_s,\ J_{0\text{оп}}^{0(s)})$. Для блоков $s$, $s \in P_{11}^*$, в множествах $J_{s\text{оп}}$, $J_{0\text{оп}}^{0(s)}$ поменяем местами элементы $i_s$ и $j_s$: $\bar{J}_{s\text{оп}} = (J_{s\text{оп}} \setminus i_s) \cup j_s$, $\bar{J}_{0\text{оп}}^{0(s)} = (J_{0\text{оп}}^{0(s)} \setminus j_s) \cup i_s$. В блоках $s$, $s \in P_{10}^*$, по правилам прямого опорного метода с адаптивной нормировкой определим индекс $j_s$, $j_s \in J_s \setminus (J_{s\text{оп}} \cup J_{0\text{оп}}^{0(s)})$, который должен войти в множество $J_{s\text{оп}}$ вместо $i_s$, и новый вектор оценок $\bar{\Delta}(J_s)$. Положим $\bar{J}_{s\text{оп}} = (J_{s\text{оп}} \setminus i_s) \cup j_s$, $\bar{J}_{0\text{оп}}^{0(s)} = J_{0\text{оп}}^{0(s)}$, $s \in P_{10}^*$.

Плану $\bar{x}$ приписываем мультиопору $\bar{J}_{\text{оп}}^p = \{\bar{J}_{s\text{оп}},\ s = \overline{0,\ p}\}$, где $\bar{J}_{0\text{оп}} = J_{0\text{оп}} \cup (\bigcup\limits_{s \in P_1^*} \bar{J}_{0\text{оп}}^{0(s)}) \setminus (\bigcup\limits_{s \in P_1^*} J_{0\text{оп}}^{0(s)})$. Для плана $\{\bar{x},\ \bar{J}_{\text{оп}}^p\}$ верна оценка

$$c'x^0 - c'\bar{x} \leqslant \bar{\beta},\ \bar{\beta} = -\sum_{\bar{\Delta}_i > 0,\ i \in \bar{J}_\text{н}} \bar{\Delta}_i (d_{*i} - \bar{x}_i) - \sum_{\bar{\Delta}_i < 0,\ i \in \bar{J}_\text{н}} \bar{\Delta}_i (d_i^* - \bar{x}_i),$$

где $\bar{J}_\text{н} = J \setminus \bar{J}_{\text{оп}}^p$; $\bar{\Delta}(J) = \{\bar{\Delta}(J_s),\ s \in P_0^* \cup P_{10}^*;\ \bar{\Delta}(J_s) = \Delta^0(J_s),\ s \notin P_0^* \cup P_{10}^*\}$. Можно показать, что $\bar{\beta} = \beta - \Delta\beta_x - \Delta\beta_y$, где $\beta$ — оценка (12) предыдущего опорного плана $\{x,\ J_{\text{оп}}^p\}$, $\Delta\beta_x = c'\bar{x} - c'x \geqslant 0$ — приращение целевой функции задачи (11), $-\Delta\beta_y = -b'y - d^{*\prime}w + d_*'v + b'\bar{y} + d^{*\prime}\bar{w} - d_*'\bar{v} \leqslant 0$ — приращение двойственной целевой функции задачи (11) при переходе от сопровождающего двойственного плана $\{y,\ w,\ v\}$, соответствующего опоре $\{J_{\text{оп}}^p\}$, к двойственному плану $\{\bar{y},\ \bar{w},\ \bar{v}\}$, соответствующему опоре $\{\bar{J}_{\text{оп}}^p\}$. План $\{x,\ J_{\text{оп}}^p\}$ назовем *сильно вырожденным*, если $\Delta\beta_x = \Delta\beta_y = 0$.

Замечание. Если предположить, что в процессе решения задачи (11) не встречаются сильно вырожденные планы, то решение задачи будет получено за конечное число итераций.

**4. Двойственный метод.** В прямом опорном методе [ч. 1] опора используется для вычисления вектора оценок, в двойственном — для построения псевдоплана. В п. 2 показано, как вычислить вектор оценок с помощью малых рабочих опорных матриц. Рекомендуется эту идею использовать для построения псевдоплана. Результатом явится двойственный метод декомпозиции опоры.

## § 7. Метод возмущений

Во многих прикладных задачах удается выделить наиболее существенную часть и записать математическую модель всей задачи с помощью малого параметра, приписываемого к той части модели, которая играет второстепенную роль в задаче. Часто оказывается, что решение задачи в существенной части достигается очень просто и после несложно найденной коррекции достаточно хорошо приближает решение всей задачи. В данном параграфе на примере общей задачи линейного программирования излагается математическая реализация описанной идеи, именуемой часто *методом возмущений*. Другой подход к рассматриваемой задаче имеется в [10].

**1. Регулярный случай.** Задачу

$$c'(\mu)x \to \max, \quad A(\mu)x = b(\mu), \quad d_* \leqslant x \leqslant d^* \tag{1}$$

($x$ — $n$-вектор, $b(\mu)$ — $m$-вектор), характеристики которой $A(\mu)$, $b(\mu)$, $c(\mu)$ зависят от малого числового параметра $\mu \geqslant 0$:

$$A(\mu) = A_{(0)} + \mu A_{(1)} + \ldots + \mu^k A_{(k)} + \ldots;$$
$$b(\mu) = b_{(0)} + \mu b_{(1)} + \ldots + \mu^k b_{(k)} + \ldots;$$
$$c(\mu) = c_{(0)} + \mu c_{(1)} + \ldots + \mu^k c_{(k)} + \ldots,$$

назовем *возмущенной задачей линейного программирования.*

Будем говорить, что имеет место *регулярный* случай, если $\operatorname{rank} A_{(0)} = m$, $m = |I|$, $A_{(0)} = A_{(0)}(I, J)$.

Пусть $\{x, A_{\text{оп}}(\mu)\}$ — опорный план задачи (1),

$$\operatorname{rank} A_{(0)\,\text{оп}} = m. \tag{2}$$

Из уравнения

$$u'(\mu)\, A_{\text{оп}}(\mu) = c'_{\text{оп}}(\mu) \tag{3}$$

найдем вектор потенциалов $u(\mu)$. Решение уравнения (3) будем искать в виде

$$u(\mu) = u_{(0)} + \mu u_{(1)} + \ldots + \mu^k u_{(k)} + \ldots. \tag{4}$$

Подставив (4) в (3) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях $\mu$, получим уравнения

$$u'_{(0)} A_{(0)\text{оп}} = c'_{(0)\text{оп}}, \quad u'_{(0)} A_{(1)\text{оп}} + u'_{(1)} A_{(0)\text{оп}} = c'_{(1)\text{оп}}, \ \ldots;$$
$$u'_{(k)} A_{(0)\text{оп}} + \sum_{\substack{i \geqslant 0,\ j \geqslant 1,\\ i+j=k}} u'_{(i)} A_{(j)\text{оп}} = c'_{(k)\text{оп}}, \ \ldots.$$

Эти уравнения, в силу (2), однозначно разрешимы:

$$u'_{(0)}=c'_{(0)\,\text{оп}}A^{-1}_{(0)\text{оп}},\ u'_{(1)}=(c'_{(1)\,\text{оп}}-u'_{(0)}A_{(1)\,\text{оп}})A^{-1}_{(0)\text{оп}},\ \ldots$$

$$\ldots,\ u'_{(k)}=(c'_{(k)\,\text{оп}}-\sum_{\substack{i\geqslant 0,\ j\geqslant 1,\\ i+j=k}}u'_{(i)}A_{(j)\text{оп}})A^{-1}_{(0)\,\text{оп}},\ \ldots .$$

По найденному вектору потенциалов подсчитаем вектор оценок

$$\Delta'(\mu)=u'(\mu)A(\mu)-c'(\mu)=\Delta'_{(0)}+\mu\Delta'_{(1)}+\ldots+\mu^k\Delta'_{(k)}+\ldots,$$

где

$$\Delta'_{(0)}=u'_{(0)}A_{(0)}-c'_{(0)},\ \ldots,\ \Delta'_{(k)}=$$
$$=\sum_{\substack{i\geqslant 0,\ j\geqslant 0,\\ i+j=k}}u'_{(i)}A_{(j)}-c'_{(k)},\ \ldots. \tag{4a}$$

Тогда для оценки субоптимальности имеем

$$\beta(\mu)=\sum_{j\in J_\text{н},\ \Delta_j(\mu)>0}\Delta'_j(\mu)(x_j-d_{*j})+\sum_{j\in J_\text{н},\ \Delta_j(\mu)<0}\Delta_j(\mu)(x_j-d^*_j)=$$
$$=\sum_{j\in J_\text{н},\ \Delta_{(0)j}>0}\Delta_{(0)j}(x_j-d_{*j})+\sum_{j\in J_\text{н},\ \Delta_{(0)j}<0}\Delta_{(0)j}(x_j-d^*_j)+$$
$$+\mu\Bigg[\sum_{\substack{j\in J_\text{н},\ \Delta_{(0)j}=0,\\ \Delta_{(1)j}>0}}\Delta_{(1)j}(x_j-d_{*j})+$$
$$+\sum_{\substack{j\in J_\text{н},\ \Delta_{(0)j}=0,\\ \Delta_{(1)j}<0}}\Delta_{(1)j}(x_j-d^*_j)+\sum_{j\in J_\text{н},\ \Delta_{(0)j}>0}\Delta_{(1)j}(x_j-d_{*j})+$$
$$+\sum_{j\in J_\text{н},\ \Delta_{(0)j}<0}\Delta_{(1)j}(x_j-d^*_j)\Bigg]+\ldots+\mu^k\beta_{(k)}+\ldots,$$

где

$$\beta_{(k)}=\sum_{s=1}^{k}\Big(\sum_{j\in J_s^+(\Delta)}\Delta_{(k)j}(x_j-d_{*j})+\sum_{j\in J_s^-(\Delta)}\Delta_{(k)j}(x_j-d^*_j)\Big)+$$
$$+\sum_{j\in J_\text{н},\ \Delta_{(0)j}>0}\Delta_{(k)j}(x_j-d_{*j})+\sum_{j\in J_\text{н},\ \Delta_{(0)j}<0}\Delta_{(k)j}(x_j-d^*_j);$$

$$J_s^+(\Delta)=\{j\in J_\text{н}:\Delta_{(i)j}=0,\ i=\overline{0,\ s-1};\ \Delta_{(s)j}>0\},$$
$$J_s^-(\Delta)=\{j\in J_\text{н}:\Delta_{(i)j}=0,\ i=\overline{0,\ s-1};\ \Delta_{(s)j}<0\}.$$

Пусть $\{x^0, A_{(0)}(J^0_{\text{оп}})\}$ — оптимальный невырожденный опорный план задачи

$$c'_{(0)}x \to \max, \ A_{(0)}x = b_{(0)}, \ d_* \leqslant x \leqslant d^*. \tag{5}$$

Следовательно, выполняются соотношения

$$x^0_{(j)} = d^*_j, \text{ если } \Delta^0_{(0)j} < 0; \ x^0_j = d_{*j}, \text{ если } \Delta^0_{(0)j} > 0,$$
$$j \in J_{*(1)} = \{j : j \in J, \ \Delta^0_{(0)j} \neq 0\}, \tag{6}$$

где вектор $\Delta^0_{(0)}(J)$ совпадает с вектором оценок $\Delta_{(0)}(J)$, найденным из соотношений (4а) по опоре $A_{(0)}(J^0_{\text{оп}})$. По плану $x^0 = \{x^0(J^0_{\text{оп}}), \ x^0(J^0_{\text{н}})\}$, $J^0_{\text{н}} = J \setminus J^0_{\text{оп}}$, построим вектор $x^{(0)}_\mu = \{x^{(0)}_\mu(J^0_{\text{оп}}), \ x^0(J^0_{\text{н}})\}$, где $x^{(0)}_\mu(J^0_{\text{оп}})$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k A_{(k)}(J^0_{\text{оп}})\right) x^{(0)}_\mu(J^0_{\text{оп}}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k b_{(k)} -$$
$$-\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k A_{(k)}(J^0_{\text{н}})\right) x^0(J^0_{\text{н}}). \tag{7}$$

Если матрица $A_{(0)}(J^0_{\text{оп}})$ — неособая, то при достаточно малых $\mu \geqslant 0$ будет неособой и матрица $\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k A_{(k)}(J^0_{\text{оп}})$. Следовательно, уравнение (7) разрешимо относительно $x^{(0)}_\mu(J^0_{\text{оп}})$.

По предположению, $d_*(J^0_{\text{оп}}) < x^0(J^0_{\text{оп}}) < d^*(J^0_{\text{оп}})$. Тогда при достаточно малых $\mu \geqslant 0$ будут выполняться неравенства $d_*(J^0_{\text{оп}}) \leqslant x^{(0)}_\mu(J^0_{\text{оп}}) \leqslant d^*(J^0_{\text{оп}})$. Таким образом, $x^{(0)}_\mu$ — план исходной задачи (1).

Подсчитаем оценку субоптимальности $\beta^0(\mu)$ для опорного плана $\{x^{(0)}_\mu, \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k A_{(k)}(J^0_{\text{оп}})\}$. В силу (6) в выражении для $\beta(\mu)$ пропадут все слагаемые, зависящие от знака компонент $\Delta^0_{(0)j}$, т. е.

$$\beta^{(0)}(\mu) = \mu\beta^{(0)}_{(1)} + \ldots + \mu^k\beta^{(0)}_{(k)},$$

где

$$\beta^{(0)}_{(k)} = \sum_{s=1}^{k} \left( \sum_{j \in J^+_s(\Delta^0)} \Delta^0_{(k)j}(x_j - d_{*j}) + \sum_{j \in J^-_s(\Delta^0)} \Delta^0_{(k)j}(x_j - d^*_j) \right).$$

Ясно, что при $J_{*(1)} = J_{\text{н}}^0$ получим $\beta^0(\mu) = 0$ и, следовательно, $x_\mu^{(0)}$ — оптимальный план задачи (1) при достаточно малых $\mu$.

Пусть $|J_{*(1)}| < |J_{\text{н}}^0|$. Рассмотрим задачу

$$(c'_{(1)} - u'_{(0)} A_{(1)})\, x \to \max,\ A_{(0)}\, x = b_{(0)},\ d_* \leqslant x \leqslant d^*,$$
$$c'_{(0)}\, x = c'_{(0)}\, x^0, \tag{8}$$

где вектор потенциалов $u_{(0)}$ построен по опоре $A_{(0)}(J_{\text{оп}}^0)$. В силу невырожденности оптимального опорного плана $\{x^0,\ A_{(0)}(J_{\text{оп}}^0)\}$ задачи (5) множество планов задачи (8) можно записать следующим образом:

$$\{x : A_{(0)}(J_1)\, x(J_1) = b_0 - A_{(0)}(J_{*(1)})\, x^0(J_{*(1)}),$$
$$d_*(J_1) \leqslant x(J_1) \leqslant d^*(J_1),\ J_1 = J \setminus J_{*(1)}\}.$$

Значит, задача (8) эквивалентна задаче

$$(c'_{(1)}(J_1) - u'_{(0)} A_{(1)}(J_1))\, x(J_1) \to \max,\ A_{(0)}(J_1)\, x(J_1) = b^1_{(0)},$$
$$d_*(J_1) \leqslant x(J_1) \leqslant d^*(J_1), \tag{9}$$

где $b^1_{(0)} = b_{(0)} - A_{(0)}(J_{*(1)})\, x^0(J_{*(1)})$.

Пусть $\{x^1(J_1),\ A_{(0)}(J_{\text{оп}}^1)\}$ — оптимальный невырожденный опорный план задачи (9). Непосредственной подстановкой легко убедиться в том, что вектор $\Delta^1_{(1)}(J_1)$, построенный согласно (4а) по опоре $A_{(0)}(J_{\text{оп}}^1)$, является оптимальным вектором оценок $\Delta^1_{(1)}$ столбцов матрицы условий задачи (9). Следовательно, выполняются соотношения

$$x_j^1 = d_j^*,\ \text{если}\ \Delta^1_{(1)j} < 0;\ x_j^1 = d_{*j},$$
$$\text{если}\ \Delta^1_{(1)j} > 0,\ j \in J_{*(2)} = \{j \in J_1,\ \Delta^1_{(1)j} \neq 0\}. \tag{10}$$

В силу того что $J_{\text{оп}}^1 \subset J_1$, вектор $\Delta^0_{(0)}$, подсчитанный согласно (4а) для опоры $A_{(0)}(J_{\text{оп}}^0)$, совпадает с вектором $\Delta^1_{(0)}$, подсчитанным по опоре $A_{(0)}(J_{\text{оп}}^1)$: $c'_{(0)}(J_{\text{оп}}^0)\, A^{-1}_{(0)}(J_{\text{оп}}^0) \times \times A_{(0)} - c'_{(0)} = c'_{(0)}(J_{\text{оп}}^1)\, A^{-1}_{(0)}(J_{\text{оп}}^1)\, A_{(0)} - c'_{(0)}$. Тогда для опорного плана $\{x^1,\ A_{(0)}(J_{\text{оп}}^1)\}$, где $x^1 = \{x^1(J_1),\ x^0(J_{*(1)})\}$, выполняются соотношения (6) и (10) с учетом того, что $\Delta^0_{(0)j} = \Delta^1_{(0)j}$, $j \in J_{*(1)}$.

От невырожденного опорного плана $\{x^1,\ A_{(0)}(J_{\text{оп}}^1)\}$ по правилам, описанным выше (см. (7)), перейдем к опорному плану $\{x_\mu^{(1)}, \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k A_{(k)}(J_{\text{оп}}^1)\}$ задачи (1). Из соотношений (6) и (10) (при $\Delta_{(0)j}^0 = \Delta_{(0)j}^1$, $j \in J$) следует, что в выражении оценки субоптимальности $\beta^{(1)}(\mu)$ опорного плана $\{x_\mu^{(1)}, \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k A_{(k)}(J_{\text{оп}}^1)\}$ пропадут слагаемые, определяемые знаками величин $\Delta_{(0)j}^1$, $\Delta_{(1)j}^1$, $j \in J \setminus J_{\text{оп}}^1 = J_{\text{н}}^1$, т. е.

$$\beta^{(1)}(\mu) = \mu^2 \beta_{(2)}^{(1)} + \ldots + \mu^k \beta_{(k)}^{(1)} + \ldots,$$

где

$$\beta_{(k)}^{(1)} = \sum_{s=2}^{k} \Big( \sum_{j \in J_s^+(\Delta^1)} \Delta_{(k)j}^1 (x_j - d_{*j}) + \sum_{j \in J_s^-(\Delta^1)} \Delta_{(k)j}^1 (x_j - d_j^*) \Big).$$

Очевидно, что $\beta^{(1)}(\mu) = 0$, если $J_{*(2)} = J_1 \setminus J_{\text{оп}}^1$. В этом случае план $x_\mu^{(1)}$ является оптимальным планом задачи (1) при достаточно малых $\mu$.

Для построения следующего приближения $x^{(2)}(\mu)$ рассмотрим задачу

$$(c'_{(2)}(J_2) - u'_{(0)} A_{(2)}(J_2) - u'_{(1)} A_{(1)}(J_2))\, x(J_2) \to \max, \quad (11)$$
$$A_{(0)}(J_2)\, x(J_2) = b_{(0)}^2, \; d_*(J_2) \leqslant x(J_2) \leqslant d^*(J_2),$$

где $J_2 = J_1 \setminus J_{*(2)}$, $b_{(0)}^2 = b_{(0)}^1 - A_{(0)}(J_{*(2)})\, x^1(J_{*(2)})$. Пусть $\{x^2(J_2), A_{(0)}(J_{\text{оп}}^2)\}$ — ее оптимальный невырожденный опорный план, $\Delta_{(2)}^2(J_2)$ — оптимальный коплан. Рассуждая, как и в предыдущем случае, легко показать, что $\Delta_{(0)}^1 = \Delta_{(0)}^2$, $\Delta_{(1)}^1 = \Delta_{(1)}^2$, где векторы $\Delta_{(k)}^2$ найдены согласно (4а) по опоре $A_0(J_{\text{оп}}^2)$. Следовательно, для опорного плана $\{x^2, A_{(0)}(J_{\text{оп}}^2)\}$, где $x^2 = \{x^2(J_2), x^1(J_{*(2)}), x^0(J_{*(1)})\}$, выполняются соотношения (6), (10) и

$$x_j^2 = d_j^*, \text{ если } \Delta_{(2)j}^2 < 0; \; x_j^2 = d_{*j}, \text{ если } \Delta_{(2)j}^2 > 0,$$
$$j \in J_{*(3)} = \{j \in J_2, \; \Delta_{(2)j}^2 \neq 0\}. \quad (12)$$

От опорного плана $\{x^2, A_0(J_{\text{оп}}^2)\}$ перейдем к опорному плану $\{x_\mu^{(2)}, \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k A_{(k)}(J_{\text{оп}}^2)\}$ исходной задачи (1). В силу условий (6), (10), (12) в выражении оценки субоптимальности $\beta^{(2)}(\mu)$ для этого плана слагаемые, зависящие от знака векторов $\Delta^2_{(0)}$, $\Delta^2_{(1)}$, $\Delta^2_{(2)}$, равны нулю, т. е.

$$\beta^{(2)}(\mu) = \mu^3 \beta^{(2)}_{(3)} + \ldots + \mu^k \beta^{(2)}_{(k)} + \ldots .$$

Процесс решения задачи останавливается на $s$-й итерации, если $|J_s| = m$, т. е. полученный план $x^{(s)}_\mu$ является оптимальным, либо, если оценка субоптимальности $\beta^{(s)}(\mu) = 0(\mu^s)$, удовлетворяет заданной степени точности.

Таким образом, возмущенная задача (1) решается по этапам. Сначала решается задача (5) *(порождающая, базовая задача)*, затем переходят к задаче (8) *(вспомогательной, первой корректирующей задаче)*, за ней — ко второй корректирующей задаче (11) и т. д. С каждым этапом оценка субоптимальности $\beta^{(s)}(\mu)$ полученного плана $x^{(s)}(\mu)$ уточняется в том смысле, что в разложении $\beta^{(s)}(\mu)$ исчезают слагаемые с малыми степенями $\mu$. Если на некотором этапе $s$ получается оптимальный невырожденный базисный коплан корректирующей задачи, то план $x^{(s)}(\mu)$, построенный по оптимальному плану $x^s$ корректирующей задачи, является при малых $\mu$ оптимальным планом возмущенной задачи (1).

**2. Примеры.** К возмущенной задаче линейного программирования можно свести многие задачи линейного программирования с большим числом переменных (см. § 1 настоящей главы, § 1 гл. II). В этих задачах векторы условий разбиваются на группы, внутри которых выделяется центральный вектор, а остальные векторы строят из него с помощью малых сдвигов. В конечном счете получается задача вида

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{k} \sum_{s \in S_j} (c_{0j} + \mu c_{1j_s}) x_{j_s} \to \max, \\ \sum_{j=1}^{k} \sum_{s \in S_j} (a_{0j} + \mu a_{1j_s}) x_{js} = b, \\ x_{j_s} \geqslant 0, \; s \in S_j, \; j = \overline{1, k},\end{gathered} \tag{13}$$

где $S_j$ — заданные множества индексов. На языке производственной задачи специфика задачи (13) состоит в том, что изделия в пределах каждой группы $S_j$ изготавливаются почти одинаковыми способами.

Базовая задача для задачи (13) имеет вид

$$\sum_{j=1}^{k} c_{0j} \sum_{s\in S_j} x_{j_s} \to \max, \quad \sum_{j=1}^{k} a_{0j} \sum_{s\in S_j} x_{j_s} = b,$$
$$x_{j_s} \geqslant 0, \; s \in S_j, \; j = \overline{1, k}. \tag{14}$$

Она допускает *агрегирование* переменных, т. е. с помощью замены $z_j = \sum\limits_{s\in S_j} x_{j_s}$, $j = \overline{1, k}$, получается задача, эквивалентная задаче (14):

$$\sum_{j=1}^{k} c_{0j} z_j \to \max, \quad \sum_{j=1}^{k} a_{0j} z_j = b, \; z_j \geqslant 0, \; j = \overline{1, k}, \tag{15}$$

которая содержит меньше переменных, чем задача (14). Если $\{z_0, A^0_{\text{оп}}\}$ — единственный невырожденный оптимальный опорный план задачи (15), то решение $x_0$ задачи (14) получается из уравнений $z_{0j} = \sum\limits_{s\in S_j} x_{0j_s}$, $j = \overline{1, k}$. При этом $x_{0j_s} \equiv 0$, $s \in S_j$, если $z_{0j} = 0$, и можно считать, что $x_{0j_s} > 0$, $s \in S_j$, если $z_{0j} > 0$. По вектору $x_0$ строится план $x^{(0)}(\mu)$ (см. п. 1).

Первая корректирующая задача для (13) имеет вид

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{s\in S_j} (c_{1j_s} - u'_{(0)} a_{1j_s}) x_{j_s} \to \max,$$
$$\sum_{j=1}^{k} a_{0j} \sum_{s\in S_j} x_{j_s} = b, \; x_{j_s} \geqslant 0, \tag{16}$$
$$s \in S_j, \; j = \overline{1, k}, \; \sum_{j=1}^{k} c_{0j} \sum_{s\in S_j} x_{js} = \sum_{j=1}^{k} c_{0j} z_{0j}.$$

В силу того что $z_0$ — единственный оптимальный план задачи (15), задача (16) распадается (происходит декомпозиция задачи (16)) на $k$ задач вида

$$\sum_{s\in S_j} (c_{1j_s} - u'_{(0)} a_{1j_s}) x_{j_s} \to \max,$$
$$\sum_{s\in S_j} x_{j_s} = z_{0j}, \; x_{j_s} \geqslant 0, \; s \in S_j \tag{17}$$

каждая из которых представляет собой задачу о рюкзаке с делимыми грузами. Решение подобных задач тривиально. Пусть $s_*=s_*(j)$ такой индекс, что

$$c_{1js_*}-u'_{(0)}a_{1js_*}=\max_{s\in S_j}(c_{1j_s}-u'_{(0)}a_{1j_s}).$$

Тогда решение задачи (17) (а также и задачи (16)) имеет вид

$$x_{js_*}=z_{0j},\ x_{j_s}\equiv 0,\ \text{если}\ s\in S_j,\ \ s\neq s_*,\ \ j=\overline{1,\ k}.$$

Остальные операции описаны в п. 1.

В качестве второго примера эффективного применения метода возмущений рассмотрим задачу

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{s\in S_j}(c_{0j_s}+\mu c_{1j_s})\,x_{j_s}\to\max,\ \ (A_0+\mu A_1)\,x=b,\ \ x\geqslant 0,\tag{18}$$

в которой матрица $A_0$ имеет блочно-диагональную структуру:

$$A_0=\operatorname{diag}\{A_{01},\ \ldots,\ A_{0k}\}\tag{19}$$

с $m_j\times|S_j|$-матрицами $A_{0j}$, $j=\overline{1,\ k}$.

Особенность задачи (18), (19) в терминах производственной задачи состоит в следующем. Имеется производственное объединение, которое состоит из $k$ предприятий. На $j$-м предприятии изготавливаются изделия с индексами $s\in S_j$. Каждое предприятие $j$ использует в основном собственные ресурсы, нормы расходов которых характеризуются матрицей $A_{0j}$. Незначительное использование на $j$-м предприятии ресурсов $l$-го предприятия характеризуется $m_j\times|s_l|$-матрицей $\mu A_{1jl}$, которая составляет $jl$-й блок матрицы $\mu A_1$, $\mu A_1=\{\mu A_{1jl},\ \ l=\overline{1,\ k},\ \ j=\overline{1,\ k}\}$.

Базовая задача для (18) имеет вид

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{s\in S_j}c_{0js}\,x_{js}\to\max,$$

$$\sum_{s\in S_j}A_{0js}\,x_{js}=b_j,\ \ x_{js}\geqslant 0,\ \ s\in S_j,\ \ j=\overline{1,\ k},\tag{20}$$

где $b_j$ — $m_j$-вектор-компонента вектора $b$. Задача (20) распадается на $k$ подзадач:

$$\sum_{s\in S_j}c_{0js}\,x_{js}\to\max,\quad \sum_{s\in S_j}A_{0js}\,x_{js}=b_j,\ \ x_{js}\geqslant 0,$$
$$s\in S_j\ (j=\overline{1,\ k}).\tag{21}$$

Вектор потенциалов $u_{(0)}$ для задачи (20) состоит из компонент $u_{(0)j}$, которые представляют векторы потенциалов задач (21).

Первая корректирующая задача для (18) имеет вид

$$\sum_{j=1}^{k} \left(c'_{1j} - \sum_{l=1}^{k} u'_{0l} A_{1lj}\right) x_j \to \max, \; A_{0j}x_j = b_j,$$
$$x_j \geqslant 0, \; c'_{0j} x_j = \gamma_j, \; j = \overline{1, k}, \tag{22}$$

где $c_{1j} = \{c_{1js}, \; s \in S_j\}$; $x_j = \{x_{js}, \; s \in S_j\}$; $A_{0j} = \{A_{0js}, \; s \in S_j\}$; $\gamma_j \; (j = \overline{1, k})$ — оптимальные значения целевых функций задач (21). Задача (22) эквивалентна $k$ задачам меньших размеров:

$$\left(c'_{1j} - \sum u'_{0l} A_{1lj}\right) x_j \to \max, \; A_{0j}x_j = b_j,$$
$$x_j \geqslant 0, \; c'_{0j} x_j = \gamma_j, \; j = \overline{1, k}.$$

Операции построения плана задачи (18) по решениям задач (20), (22) описаны в п. 1.

**3. Обобщения.** Интересны следующие обобщения приведенной в п. 1 схемы решения возмущенных задач линейного программирования: 1) базовые и корректирующие задачи решаются не до получения оптимальных планов; процесс их решения останавливается после построения субоптимального плана; 2) матрица $A_0$ особая (сингулярный случай); 3) возмущенные задачи решаются двойственным методом.

Замечание. При исследовании *сингулярного случая* можно использовать эквивалентные преобразования, с помощью которых у матрицы $A_0$ (или у части опоры, связанной с ней) выделяется неособая часть. Степень сингулярности может оказаться большой, т. е. после выделения неособой части матрицы $A_0$ может появиться особенность у следующих рабочих опорных матриц.

## § 8. Метод распределения

В основу метода оптимизации системы, состоящей из нескольких подсистем, положен следующий эвристический принцип: 1) ресурсы системы распределяются по подсистемам; 2) каждая подсистема автономно оптимизируется в соответствии с выделенными ей ресурсами; 3) первоначальное распределение ресурсов корректируется с целью улучшения показателя качества всей системы. Математические аспекты подобного подхода (метода распределения ресурсов) к оптимизации больших систем рассматриваются в [7]. В данном параграфе дополнительно изучается *метод распределения стоимости.*

**1. Схема метода.** Рассмотрим большую задачу линейного программирования

$$c'x \to \max, \ Ax=b, \ d_* \leqslant x \leqslant d^*, \tag{1}$$

с известным начальным опорным планом $\{x^1, A_{\text{оп}}\}$. Относительно параметров задачи (1) сохраним обычные соглашения, принятые в § 1.

Множество $J$ индексов переменных $x$ разобьем на два подмножества $J_1$, $J_2 = J \diagdown J_1$ и вместо (1) рассмотрим две задачи

$$c_1'x_1 \to \max, \ A_1x_1 = b_1, \ d_{*1} \leqslant x_1 \leqslant d_1^*; \tag{2}$$

$$c_2'x_2 \to \max, \ A_2x_2 = b_2, \ d_{*2} \leqslant x_2 \leqslant d_2^*, \tag{3}$$

где $x_1=x(J_1)$; $A_1=A(I, J_1)$; $b_1+b_2=b$ и т. д. Ясно, что существует такое распределение $b_1$, $b_2$ вектора $b$, при котором компонентами $x^0(J_1)$, $x^0(J_2)$ оптимального плана задачи (1) являются оптимальные планы $x_1^0$, $x_2^0$ задач (2), (3).

Множество $I$ индексов основных ограничений задачи (1) разобьем на два подмножества $I^1$, $I^2 = I \diagdown I^1$. В соответствии с этим вектор потенциалов $u$ задачи (1), подсчитанный по опоре $A_{\text{оп}}$ $(u'A_{\text{оп}} - c'_{\text{оп}} = 0)$, разобьется на две компоненты $u(I^1)$, $u$ $(I^2)$. Поскольку $\Delta'(J) = u'A(I, J) - c'(J)$ и компоненты $v(J)$, $w(J)$ сопровождающего опору $A_{\text{оп}}$ двойственного плана $\{y, v, w\}$ удовлетворяют условиям согласования

$$v_j = \Delta_j, \ w_j = 0, \text{ если } \Delta_j \geqslant 0; \ v_j = 0, \ w_j = -\Delta_j,$$
$$\text{если } \Delta_j < 0, \ j \in J, \tag{4}$$

то вектор стоимости $c(J)$ можно представить в виде суммы $c=c^1+c^2$ двух векторов $c^{1\prime}(J) = u'(I^1)A(I^1, J) - v'(J)$, $c^{2\prime}(J) = u'(I^2)A(I^2, J) + w'(J)$.

Используя указанное распределение стоимости, вместо задач (2), (3) рассмотрим задачи

$$c_1^{1\prime}x_1 \to \max, \ A_1^1x_1 = b_1^1, \ d_{*1} \leqslant x_1 \leqslant d_1^*; \tag{5}$$

$$c_1^{2\prime}x_1 \to \max, \ A_1^2x_1 = b_1^2, \ d_{*1} \leqslant x_1 \leqslant d_1^*; \tag{6}$$

$$c_2^{1\prime}x_2 \to \max, \ A_2^1x_2 = b_2^1, \ d_{*2} \leqslant x_2 \leqslant d_2^*; \tag{7}$$

$$c_2^{2\prime}x_2 \to \max, \ A_2^2x_2 = b_2^2, \ d_{*2} \leqslant x_2 \leqslant d_2^*, \tag{8}$$

где $c_1^1 = c^1(J_1)$, $A_1^2 = A(I^2, J_1)$, $b_1^2 = b_1(I^2)$ и т. д. Существует такое распределение $c_1^1$, $c_1^2$, $c_2^1$, $c_2^2$ вектора стоимости $c$, что для задач (5), (6) найдется общий оптимальный план $x_1^0$ и для задач (7), (8) — общий план $x_2^0$, которые совпадут с компонентами $x^0(J_1)$, $x^0(J_2)$ оптимального плана $x^0$ задачи (1).

Для упрощения выкладок в следующих пунктах два принципа распределения (по вектору $b$: $b_1$, $b_2$ и по вектору $c$: $c^1$, $c^2$) рассматриваются отдельно.

**2. Распределение ресурсов.** Нетрудно заметить, что задача (1) эквивалентна задаче

$$f(\beta) = f_1(\beta) + f_2(\beta) \to \max_{\beta}, \tag{9}$$

где $f_1(\beta)$, $f_2(\beta)$ получены при решении задач

$$f_1(\beta) = \max_{x_1} c_1' x_1, \ A_1 x_1 = \beta, \ d_{*1} \leqslant x_1 \leqslant d_1^*; \tag{10}$$

$$f_2(\beta) = \max_{x_2} c_2' x_2, \ A_2 x_2 = b - \beta, \ d_{*2} \leqslant x_2 \leqslant d_2^*. \tag{11}$$

Если $x^{(1)}$ — начальный план задачи (1), то при $\beta = A_1 x^{(1)}(J_1)$ векторы $x^{(1)}(J_1)$, $x^{(1)}(J_2)$ являются планами задач (10), (11). Приписав этим векторам опоры $A_{1\text{оп}} = A(I, J_{1\text{оп}})$, $J_{1\text{оп}} \subset J_1$; $A_{2\text{оп}} = A(I, J_{2\text{оп}})$, $J_{2\text{оп}} \subset J_2$, приступим к решению задач (10), (11).

Пусть $u_1$, $u_2$ — векторы потенциалов: $u_1' A_{1\text{оп}} = c_{1\text{оп}}'$, $u_2' A_{2\text{оп}} = c_{2\text{оп}}'$. Подсчитаем векторы

$$\Delta'(J_1) = u_1' A(I, J_1) - c'(J_1), \ \Delta'(J_2) = u_2' A(I, J_2) - c'(J_2), \ \Delta(I) = -u_1 + u_2.$$

Из вида задач (9)—(11) следует, что для каждого $j \in J_1 \cup J_2$ число $\Delta_j$ равно взятой с обратным знаком скорости изменения функции $f(\beta)$ при увеличении компоненты $x_j$ плана $x^{(1)}$. Аналогично $\Delta_i$, $i \in I$,— взятая с обратным знаком скорость изменения функции $f(\beta)$ при увеличении компоненты $\beta_i$ вектора $\beta$. Исходя из этого, можно организовать разнообразные процедуры улучшения начального плана $x^{(1)}$. Изменение компонент вектора $\beta$ направлено на перераспределение ресурса $b$ с целью увеличения значения целевой функции задачи (9). Изменением компонент векторов $x_1$, $x_2$ можно добиться улучшения компонент $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$ при фиксированном распределении ресурса.

З а м е ч а н и е. Как видно из описания метода, распределение ресурсов ведет к задачам (10), (11) с матрицами $A_1=A(I, J_1)$, $A_2=A(I, J_2)$. Для специальных матриц $A$ матрицы $A_1$, $A_2$ могут оказаться очень простыми и удобными при решении задач (10), (11). Например, если $A$ — матрица блочной задачи с небольшим числом связывающих переменных:

$$A = \begin{Vmatrix} A_{11} & & & & A_{10} \\ & A_{22} & & & A_{20} \\ & & \ddots & & \\ & & & A_{pp} & A_{p0} \end{Vmatrix},$$

то, положив

$$A_1 = \begin{Vmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{pp} \end{Vmatrix}, \quad A_2 = \begin{Vmatrix} A_{10} \\ A_{20} \\ \vdots \\ A_{p0} \end{Vmatrix},$$

получим весьма простые задачи (10), (11)*).

Рассмотрим еще одну схему улучшения плана задачи (1) с помощью распределения ресурсов. Запишем задачу, эквивалентную задаче (1):

$$f(b_1, b_2) = f_1(b_1) + f_2(b_2) \to \max_{b_1, b_2}, \quad b_1 + b_2 = b,$$

где

$$f_1(b_1) = \max_{x_1} c_1' x_1, \quad A_1 x_1 = b_1, \quad d_{*1} \leqslant x_1 \leqslant d_1^*; \qquad (12)$$

$$f_2(b_2) = \max_{x_2} c_2' x_2, \quad A_2 x_2 = b_2, \quad d_{*2} \leqslant x_2 \leqslant d_2^*. \qquad (13)$$

Пусть $x^{(1)}$ — начальный план задачи (1). Зафиксируем векторы $b_1 = A_1 x_1^{(1)}$, $b_2 = A_2 x_2^{(1)}$. Обозначим через $x_1^*$, $Y_1^*$ оптимальный план и множество оптимальных двойственных планов задачи (12). Аналогичный смысл для задачи (13) имеют элементы $x_2^*$, $Y_2^*$.

**Критерий оптимальности.** Вектор $x^* = \{x_1^*, x_2^*\}$ — оптимальный план задачи (1) тогда и только тогда, когда $Y_1^* \cap Y_2^* \neq \varnothing$.

---

*) В рассматриваемом примере естественнее считать, что основные ограничения исходной задачи (1) имеют вид неравенств.

Множества $Y_1^*$, $Y_2^*$ описываются соотношениями

$$Y_1^*: A'_{1n}y = c_{1n},\ A'_{1н}y \geqslant c_{1н},\ A'_{1b}y \leqslant c_{1b};$$
$$Y_2^*: A'_{2n}y = c_{2n},\ A'_{2н}y \geqslant c_{2н},\ A'_{2b}y \leqslant c_{2b}. \qquad (14)$$

Здесь $A_{1n} = A(I,\ J_{1n})$, $J_{1n} = \{j \in J_1,\ d_{*j} < x_j < d_j^*\}$, $J_{1н} = \{j \in J_1,\ x_j = d_{*j}\}$, $J_{1b} = \{j \in J_1,\ x_j = d_j^*\}$ и т. д. Для проверки соотношений (14) на совместность введем задачу

$$\sum_{j \in J_{1n} \cup J_{1b}} \alpha_j + \sum_{j \in J_{1n} \cup J_{1н}} \beta_j \to \min_{y \in Y_2^*,\ \alpha,\ \beta},$$
$$A'_{1n}y - \alpha_{1n} + \beta_{1n} = c_{1n},\ A'_{1b}y - \alpha_{1b} \leqslant c_{1b}, \qquad (15)$$
$$A'_{1н}y + \beta_{1н} \geqslant c_{1н},\ \alpha_j \geqslant 0,\ j \in J_{1n} \cup J_{1b};$$
$$\beta_j \geqslant 0,\ j \in J_{1n} \cup J_{1н}.$$

Для совместности соотношений (14) необходимо и достаточно, чтобы существовало решение задачи (15) с $\alpha_j \equiv 0$, $\beta_j \equiv 0$.

Метод Данцига — Вулфа решения задач типа (15) описан в § 4, 5. Согласно критерию оптимальности, при $\alpha_j \equiv 0$, $\beta_j \equiv 0$ план $x^*$ оптимален. Если $\{\alpha, \beta\} \neq 0$, то оптимальный двойственный план $\varkappa = \{\varkappa_1, \varkappa_2\}$ задачи (15) является подходящим направлением для плана $x^*$ в задаче (1). План $x^*$ заменяем на новый $\bar{x} = x^* + \Theta\varkappa$, где максимально допустимый шаг $\Theta$ подсчитываем по стандартным правилам. Следующую итерацию начинаем с $\bar{x}$ и $\bar{J}_1 = J_{1оп} \cup (J_2 \setminus J_{2оп})$, $\bar{J}_2 = J_{2оп} \cup (J_1 \setminus J_{1оп})$.

Рассмотрим частный случай, когда одна из задач (12), (13) имеет невырожденный оптимальный план. В этом случае одно из множеств $Y_1^*$ или $Y_2^*$ состоит из единственного элемента. Пусть оптимальный план задачи (13) невырожденный. Тогда $Y_2^* = \{y_2^* = u_2\}$. Подсчитаем вектор $\tilde{\Delta}_1 = A'_1 y_2^* - c_1$. Тогда совокупность $\{y^0 = y_2^*,\ \alpha_j^0 = \tilde{\Delta}_{1j}$, если $\tilde{\Delta}_{1j} > 0$; $\alpha_j^0 = 0$, если $\tilde{\Delta}_{1j} \leqslant 0$, $j \in J_{1n} \cup J_{1b}$; $\beta_j^0 = -\tilde{\Delta}_{1j}$, если $\tilde{\Delta}_{1j} < 0$; $\beta_j^0 = 0$, если $\tilde{\Delta}_{1j} \geqslant 0$, $j \in J_{1n} \cup J_{1н}\}$ — решение задачи (15). При $\alpha_j^0 \equiv 0$, $\beta_j^0 \equiv 0$ выполняется включение $y_2^* \in Y_1^*$, и, следовательно, $\{x_1^*, x_2^*\}$ — решение исходной задачи (1).

Пусть $\{\alpha^0, \beta^0\} \neq 0$. Найдем оптимальный двойственный план $\varkappa = \{\varkappa_1, \varkappa_2\}$ задачи (15): $\varkappa_{1j} = 1$, если $\beta_j \neq 0$, $j \in J_{1n} \cup J_{1н}$; $\varkappa_{1j} = -1$, если $\alpha_j \neq 0$, $j \in J_{1n} \cup J_{1b}$; $\varkappa_{1j} = 0$ в остальных случаях, $j \in J_1$; $\varkappa_{2j} = 0$, $j \in J_2 \setminus J_{2оп}$, $\varkappa_{2оп} = \varkappa(J_{2оп}) = -A_{2оп}^{-1} A_1 \varkappa_1$.

По предположению, оптимальный опорный план $\{x_2^*, A_{2оп}^2\}$ задачи (13) невырожденный. Следовательно, вдоль направления $\varkappa$ можно сделать ненулевой шаг $\Theta$. Скорость изменения целевой функции задачи (1) при движении вдоль $\varkappa$ равна $\sum_{j \in J_{1n} \cup J_{1b}} \alpha_j^0 + \sum_{j \in J_{1n} \cup J_{1н}} \beta_j^0 > 0$.

**3. Распределение стоимости.** Пусть теперь в задаче (1) множество $I$ разбито на два подмножества $I^1$, $I^2$. Задачу (1) можно записать в следующем эквивалентном виде:

$$p(c^1, c^2) = p_1(c^1) + p_2(c^2) \to \min_{c^1, c^2}, \quad c^1 + c^2 = c,$$

где $p_1(c^1)$, $p_2(c^2)$ найдены из задач

$$p_1(c^1) = \max_x c^{1\prime} x, \quad A^1 x = b^1, \quad d_* \leqslant x \leqslant d^*; \tag{16}$$

$$p_2(c^2) = \max_x c^{2\prime} x, \quad A^2 x = b^2, \quad d_* \leqslant x \leqslant d^*. \tag{17}$$

Здесь $A^1 = A(I^1, J)$; $b^1 = b(I^1)$ и т. д.

Пусть $\{y^{(1)}, v^{(1)}, w^{(1)}\}$ — начальный двойственный план задачи (1). Им, в частности, может быть сопровождающий двойственный план, построенный по начальной опоре $A_{оп(1)}$. Зафиксируем векторы $c^1 = c^1(J) = y^{(1)\prime}(I^1) A^1 - v^{(1)\prime}$, $c^2 = c^2(J) = y^{(1)\prime}(I^2) A^2 + w^{(1)\prime}$. Обозначим через $\{y_1^*, v_1^*, w_1^*\}$, $X_1^*$ оптимальный двойственный план и множество оптимальных планов задачи (16), через $\{y_2^*, v_2^*, w_2^*\}$, $X_2^*$ — оптимальный двойственный план и множество оптимальных планов задачи (17).

**Критерий оптимальности.** Вектор $\{y, v, w\}$, где $y = \{y_1^*, y_2^*\}$, $v = v_1^* + v_2^*$, $w = w_1^* + w_2^*$, — оптимальный двойственный план задачи (1) тогда и только тогда, когда $X_1^* \cap X_2^* \neq \varnothing$. Множество $X_1^* \cap X_2^*$ является множеством оптимальных планов задачи (1).

Из критерия оптимальности легко получить необходимое условие оптимальности: для оптимальности двойственного плана $\{y, v, w\}$ в задаче (1) необходимо, чтобы выполнялось соотношение

$$\min\{v^*_{1j}+v^*_{2j},\ w^*_{1j}+w^*_{2j}\}=0,\ j\in J. \tag{18}$$

Если условие (18) не выполняется, то двойственный план $\{y, \tilde{v}, \tilde{w}\}$, где компоненты $\tilde{v}$, $\tilde{w}$ найдены по $y$ из условий согласования (4), лучше плана $\{y, v, w\}$. По плану $\{y, \tilde{v}, \tilde{w}\}$ разбиваем вектор стоимости $c$ и решаем задачи (16), (17).

Пусть условия (18) выполняются. Подсчитаем векторы $\Delta^k = A^{k\prime}y^*_k - c^k$, $k=1,2$. Множества $X^*_1$, $X^*_2$ можно описать следующим образом:

$$X^*_k=\{x: A^kx=b^k,\ x_j=d_{*j},\ \text{если}\ \Delta^k_j>0;\ x_j=d^*_j,\ \text{если}\ \Delta^k_j<0;\ \ d_{*j}\leqslant x_j\leqslant d^*_j, \text{если}\ \Delta^k_j=0,\ j\in J\},\ k=1,2.$$

Отсюда следует, что компоненты $x(J_*)$ планов из $X^*_1$ и $X^*_2$ должны совпадать. Следовательно, множества $X^*_1$ и $X^*_2$ пересекаются в том и только том случае, если

$$\widetilde{X}_1\cap\widetilde{X}_2\neq\varnothing, \tag{19}$$

где $J_0=J\diagdown J_*$;

$$\widetilde{X}_1=\{x_0=x(J_0): A^1_0x_0=\widetilde{b}^1,\ d_{*0}\leqslant x_0\leqslant d^*_0\},$$

$$A^1_0=A(I^1,\ J_0),\ \widetilde{b}^1=b^1-A(I^1,\ J_*)\,x(J_*);$$

$$\widetilde{X}_2=\{x_0=x(J_0): A^2_0x_0=\widetilde{b}^2,\ d_{*0}\leqslant x_0\leqslant d^*_0\},$$

$$A^2_0=A(I^2,\ J_0),\ \widetilde{b}^2=b^2-A(I^2,\ J_*)\,x(J_*).$$

Для проверки условия (19) введем задачу

$$e'\alpha+e'\beta\to\min_{x_0\in\widetilde{X}_2,\ \alpha,\ \beta},\ A^1_0x_0-\beta+\alpha=b^1. \tag{20}$$

Условие (19) выполняется тогда и только тогда, когда существует решение задачи (20) с $\alpha\equiv0$, $\beta\equiv0$.

Для решения задачи (20) можно воспользоваться методом Данцига — Вулфа декомпозиции прямых ограничений (см. § 4).

При $\alpha \equiv 0$, $\beta \equiv 0$ вектор $\{x_0^0, x(J_*)\}$, где $x_0^0$ — решение задачи (20), — оптимальный план исходной задачи (1). Если $\{\alpha, \beta\} \neq 0$, то оптимальный двойственный план $\{\Delta y, \Delta v, \Delta w\}$ задачи (20) является подходящим направлением для двойственного плана $\{y, v, w\}$ в задаче (1). План $\{y, v, w\}$ заменяем на новый $\{\bar{y}, \bar{v}, \bar{w}\} = \{y, v, w\} + \sigma\{\Delta y, \Delta v, \Delta w\}$, где максимально допустимый шаг $\sigma$ подсчитывается по стандартным правилам. Следующую итерацию начинаем с двойственного плана $\{\bar{y}, \bar{v}, \bar{w}\}$.

## § 9. Итеративные методы

На протяжении всей данной книги исследуются конечные (точные) методы, в которых на каждой итерации строятся векторы, являющиеся или планами (прямые методы), или двойственными планами (двойственные методы), или, наконец, парами из прямых и двойственных планов (комбинированные методы) рассматриваемой задачи линейного программирования. Другой обширный класс составляют итеративные (приближенные) методы, в которых операции ведутся на векторах, не обязательно являющихся планами или двойственными планами. В *сходящихся* итеративных методах векторы, построенные на итерациях, сходятся к оптимальным планам задачи и могут рассматриваться в силу этого в качестве *оценок* последних. Итеративный метод называется *прямым,* если в процессе итерации строятся оценки прямых планов, а затем по ним вычисляются оценки двойственных планов. В *двойственных* итеративных методах на итерациях сначала строятся оценки двойственных планов, а потом вычисляются оценки прямых планов. *Комбинированными* итеративными методами называются такие методы, в которых на итерациях одновременно строятся оценки как прямых, так и двойственных планов. При изучении итеративных методов большую роль играют *тип сходимости и скорость сходимости* последовательности оценок. В данном параграфе приводится лишь описание некоторых принципов, положенных в основу современных итеративных методов.

**1. Общая схема.** При построении итеративных методов приходится решать задачи вида

$$f(x) \to \min, \ x \in X, \tag{1}$$

где $f(x)$ — скалярная функция, определенная на множестве $X$ $n$-мерного пространства. Элементы $f(x)$, $X$ задачи (1) не обязательно целевая функция и множество планов исходной задачи, они могут быть построены из последних с помощью определенных правил.

Сгруппировав выражения или применив какой-либо другой способ, функцию $f(x)$ представим в виде $f(x) = f(x, x)$. Расширим (возможно локально) множество $X$, заменив его (в окрестности некоторой точки) на множество $\bar{X}$. *Метод простой итерации* состоит в построении последовательности точек $x^1$, $x^2$, ..., начинающейся с заданной $x^1$ и продолжающейся согласно рекуррентным формулам

$$f(x^{k+1}, x^k) = \min_{y \in \bar{X}} f(y, x^k), \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{2}$$

Разбиение функции $f(x)$ и расширение множества $X$ следует производить так, чтобы задача (2) решалась просто, а последовательность $x^k$, $k=1, 2, \ldots$, сходилась в некотором смысле к решению задачи (1).

Переход от решения $y(x^k)$ задачи $f(y, x^k) \to \min$, $y \in \bar{X}$, к следующей итерации $x^{k+1}$ может быть более сложным, чем $x^{k+1} = y(x^k)$. Для этого часто используются выпуклые или конические комбинации $\lambda_1 x^k + \lambda_2 y(x^k)$ точек $x^k$, $y(x^k)$, в которых параметры $\lambda_1$, $\lambda_2$ находят из условия оптимизации целевой функции исходной задачи. При построении $x^{k+1}$ возможны и «продольные» комбинации элементов $x^k$, $y(x^k)$, когда у вектора $x^k$ в зависимости от $y(x^k)$ изменяется часть компонент и эта часть находится из условия оптимизации целевой исходной задачи.

Поясним общую схему построения итеративных методов на задаче

$$c'x \to \max, \ Ax = b, \ d_* \leqslant x \leqslant d^*. \tag{3}$$

Предположим, что имеется эффективный алгоритм решения задачи

$$c_1'x \to \max, \ A_1 x = b, \ d_* \leqslant x \leqslant d^*.$$

Исходя из этого, задачу (3) представим в виде

$$c_1'x + (c - c_1)' x \to \max, \ A_1 x + (A - A_1) x = b, \ d_* \leqslant x \leqslant d^*.$$

Пусть $x^1$ — начальное приближение (начальная оценка) оптимального плана задачи (3). Следующие приближения $x^k$, $k=2, 3, \dots$, в методе простой итерации строятся рекуррентно:

$$c_1' x^{k+1} = \max_x c_1' x, \ A_1 x + (A - A_1) x^k = b,$$
$$d_* \leqslant x \leqslant d^*, \ k = 1, 2, \dots .$$

При этом матрица $A_1$ и вектор $c_1$ могут меняться от итерации к итерации *(нестационарный метод)*.

**2. Использование функций Лагранжа.** В итеративных методах широко используется функция Лагранжа. Это объясняется тем, что через нее выражены основные условия оптимальности. В выпуклом программировании в силу теоремы Куна — Таккера в терминах функции Лагранжа получается новое определение оптимальных планов, которое часто позволяет осуществить декомпозицию исходной большой задачи.

Рассмотрим большую задачу вида (3). Составим для нее функцию Лагранжа

$$F(x, \lambda) = c'x + \lambda'(Ax - b). \tag{4}$$

Согласно теореме Куна — Таккера, существует такой вектор $\lambda^0$, что оптимальный план $x^0$ задачи (3) совпадает с решением задачи

$$F(x, \lambda^0) \to \max, \ d_* \leqslant x \leqslant d^*.$$

Пусть $\lambda^1$ — начальная оценка вектора $\lambda^0$. По нему построим начальную оценку $x^1$ оптимального плана:

$$c'x^1 + \lambda^{1\prime}(Ax^1 - b) = \max_{d_* \leqslant x \leqslant d^*} (c'x + \lambda^{1\prime}(Ax - b)). \tag{5}$$

Понятно, что построение сводится к $n$ элементарным задачам вычисления максимума на отрезке линейной функции одной переменной. Вектор $x^1$ обладает экстремальным свойством:

$$c'x^1 = \max c'x, \ Ax = b_1, \ d_* \leqslant x \leqslant d^*, \ b_1 = Ax^1,$$

которое при $Ax^1 \approx b$ позволяет остановить процесс решения на векторе $x^1$.

Улучшение $\lambda^2$ начальной оценки $\lambda^1$ вектора $\lambda^0$ основано на следующем свойстве: если $\bar{x}$ — решение задачи (5) при замене вектора $\lambda^1$ на вектор $\bar{\lambda} = \lambda^1 + \varepsilon \operatorname{sign}(Ax^1 - b)$, $\varepsilon > 0$, то $\|A\bar{x} - b\| \leqslant \|Ax^1 - b\|$.

Описанный метод является двойственным итеративным, ибо он нацелен на построение последовательности оценок $\lambda^k$, $k=1, 2, \ldots$, оптимального двойственного плана $\lambda^0$. Оценки $x^k$ оптимального плана $x^0$ находятся из (5).

**3. Модифицированные функции Лагранжа.** В связи с поиском эффективных итеративных методов решения задач нелинейного программирования в последние годы широко используются *модифицированные функции Лагранжа*

$$F_s(x, \lambda) = c'x + \lambda'(Ax - b) + \frac{1}{2}(Ax - b)'S(Ax - b)$$

с положительно определенной матрицей $S$ (чаще всего $S$ — диагональная матрица с положительными элементами).

По начальной оценке $\lambda^1$ легко построить оценку $x^1 = x^1(\lambda, S)$ оптимального плана $x^0$, решив задачу

$$F_s(x, \lambda^1) \to \max, \quad d_* \leqslant x \leqslant d^*.$$

Для улучшения $\lambda^1$ предложен ряд способов, среди которых одним из простейших является *способ Хестенса:*

$$\lambda^2 = \lambda^1 + S(Ax^1 - b).$$

Ясно, что опять получился двойственный итеративный метод.

**4. Точная функция Лагранжа.** В классической функции Лагранжа (4) аргументы $x$, $\lambda$ не зависят друг от друга. Р. Флетчер показал, что даже для нелинейных задач существуют такие гладкие функции $\lambda(x)$, подстановка которых вместо вектора $\lambda$ в функцию Лагранжа приводит к $\Phi(x) = F(x, \lambda(x))$ — *точной функции Лагранжа,* максимум которой на множестве $d_* \leqslant x \leqslant d^*$ достигается на оптимальном плане $x^0$ исходной задачи. Решая задачу

$$\Phi(x) \to \max, \quad d_* \leqslant x \leqslant d^*,$$

получим последовательность $x^k$, $k=1, 2, \ldots$, оценок оптимального плана $x^0$. Последовательность $\lambda^k = \lambda(x^k)$, $k = 1, 2, \ldots$, состоит из оценок оптимального двойственного плана $\lambda^0$. Следовательно, описанный метод является прямым итеративным методом.

**5. Комбинированный метод.** Пусть $\{x^1, \lambda^1\}$ — начальная пара оценок оптимальных прямого $x^0$ и двойственного $\lambda^0$ планов задачи (3). Предположим, что уже построена $k$-я пара $\{x^k, \lambda^k\}$. Следующая пара $\{x^{k+1}, \lambda^{k+1}\}$ составляется из прямого $x^{k+1}$ и двойственного $\lambda^{k+1}$ оптимальных планов задачи

$$c_k'x + \lambda^{k\prime}(Ax - b) \to \max, \ A_k x + (A - A_k)x^k = b,$$
$$d_* \leqslant x \leqslant d^*,$$

в которой матрица $A_k$ подбирается по принципам, указанным в п. 1 для матрицы $A_1$.

К комбинированным методам относятся и градиентные методы подъема-спуска для построения седловых точек функции Лагранжа. Интересной является идея привлечения методов теории игр, основанных на изучении вспомогательных фиктивных игр [11].

# Глава II

# ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

В последние 20—25 лет среди методов оптимизации, которым уделяется особое внимание в научной литературе и инженерной практике, одно из центральных мест занимают методы оптимального управления [12]. В настоящее время известен ряд численных методов построения оптимальных управлений, но проблема создания эффективных алгоритмов в этой области еще далека от решения. Ниже, следуя и развивая [13], описываются модификации некоторых методов гл. I в приложении к типичным линейным задачам оптимального управления.

## § 1. Задача терминального управления

Для оптимизации линейной системы в классе импульсных сигналов используется метод § 1 гл. I. Попутно доказывается принцип максимума Л. С. Понтрягина и его обобщение на $\varepsilon$-оптимальные управления.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим систему управления, поведение которой на отрезке времени $T_1 = [0, \tau_*]$ описывается векторным дифференциальным уравнением

$$dz/d\tau = Qz + qv, \ z(0) = x_0. \tag{1}$$

Здесь $z = z(\tau)$ — $n$-вектор состояния рассматриваемой системы в момент $\tau$; $v = v(\tau)$ — значение управления в момент $\tau$; $Q$, $q$ — постоянные $n \times n$-матрица и $n$-вектор, определяющие динамические свойства системы; $x_0$ — начальное состояние системы.

Пусть на отрезке $T_1$ выбрано множество моментов времени $\{\tau_t, t \in T^*\}$, $\tau_0 = 0$, $\tau_t > \tau_{t-1}$, $\tau_{t_1} = \tau_*$, $T^* = \{0, 1, \ldots, t_1\}$, в которые производятся наблюдения над состояниями системы (1). Обозначим через

$$U_t = \{u : f_*(t) \leqslant u \leqslant f^*(t)\} \qquad (2)$$

множество доступных значений управления $v(\tau)$ при $\tau_t \leqslant \tau \leqslant \tau_{t+1}$. Функцию $v(\tau)$, $\tau \in T_1$, назовем *доступным управлением*, если она принимает постоянные значения $u(t) \in U_t$ на каждом множестве $[\tau_t, \tau_{t+1})$. Доступное управление называется *допустимым*, если соответствующая ему траектория $z(\tau)$, $\tau \in T_1$, системы (1) удовлетворяет равенству

$$Hz(\tau_*) = g, \qquad (3)$$

где $H$, $g$ — заданные $m \times n$-матрица и $m$-вектор; $\operatorname{rank} H = m$.

Качество допустимого управления $v(\tau)$, $\tau \in T_1 \setminus \tau_*$, оценим с помощью терминального функционала

$$J(v) = c' z(\tau_*), \qquad (4)$$

определенного через целевую функцию на конечных состояниях системы (1). *Оптимальным* называется каждое допустимое управление $v^0(\tau)$, $\tau \in T_1 \setminus \tau_*$, доставляющее максимум критерию качества (4) среди всех допустимых управлений:

$$J(v^0) = \max J(v). \qquad (5)$$

Траектория $z^0(\tau)$, $\tau \in T_1$, порожденная оптимальным управлением, называется *оптимальной траекторией* системы (1).

Цель данного параграфа состоит в построении алгоритма вычисления оптимальных управлений для задачи (1)—(5).

Имея в виду применение методов линейного программирования, перейдем к другой эквивалентной формулировке рассматриваемой задачи. Воспользуемся известным представлением решений системы (1) (*формула Коши* [14]):

$$z(\tau) = F(\tau) F^{-1}(s) z(s) + \int_s^\tau F(\tau) F^{-1}(\sigma) q v(\sigma) d\sigma, \qquad (6)$$

где $F(\tau)$ — $n \times n$-матричная функция — фундаментальная матрица решений однородной части уравнения (1) — удовлетворяет уравнению

$$dF/d\tau = QF, \; F(0) = E$$

($E$ — единичная диагональная $n \times n$-матрица) и в рассматриваемом случае имеет вид $F(\tau) = \exp Q\tau$. Из (6) для моментов наблюдения $\tau_t$ получаем

$$z(\tau_{t+1}) = F(\tau_{t+1})F^{-1}(\tau_t)z(\tau_t) + \int\limits_{\tau_t}^{\tau_{t+1}} F(\tau_{t+1})F^{-1}(\sigma)qv(\sigma)d\sigma. \quad (7)$$

Имея в виду, что $v(\tau) \equiv u(t)$, $\tau_t \leqslant \tau \leqslant \tau_{t+1}$, $\tau_{t+1} - \tau_t = \tau_t - \tau_{t-1}$, и введя обозначения $x(t) = z(\tau_t)$, $A = F(\tau_{t+1})F^{-1}(\tau_t)$, $b = \int\limits_{\tau_t}^{\tau_{t+1}} F(\tau_{t+1})\ F^{-1}(\sigma)\ qd\sigma$, из (7) получим рекуррентное уравнение

$$x(t+1) = Ax(t) + bu(t),\ t \in T = T^* \setminus t_1,\ x(0) = x_0,$$

которое эквивалентно дифференциальному уравнению (1), если интерес представляют состояния системы управления только в моменты наблюдения $\tau_t$, $t \in T^*$, и используются введенные выше классы доступных управлений.

Таким образом, в новых терминах задача (1)—(5) принимает следующий вид

$$c'x(t_1) \to \max_u,\ x(t+1) = Ax(t) + bu(t),\ x(0) = x_0,$$
$$f_*(t) \leqslant u(t) \leqslant f^*(t),\ t \in T,\ Hx(t_1) = g. \quad (8)$$

Отсюда, если воспользоваться формулой (6), можно перейти к общей задаче линейного программирования в канонической форме относительно неизвестных $u(t)$, $t \in T$. Не останавливаясь на деталях переформулировок, приведем результаты, которые следуют из § 1 гл. I.

**2. Решение задачи.** Множество моментов $T_{\text{оп}} \subset T = \{0, 1, \ldots, t_1 - 1\}$ назовем *опорой задачи* (8), если система

$$x(t+1) = Ax(t) + bu(t),\ x(0) = 0,\ Hx(t_1) = 0,\ t \in T, \quad (9)$$

имеет при $u(t) \equiv 0$, $t \in T_{\text{н}} = T \setminus T_{\text{оп}}$, только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$, $t \in T_{\text{оп}}$, но при любом $t^* \in T_{\text{н}}$ система (9) допускает для $u(t) \equiv 0$, $t \in T_{\text{н}} \setminus t^*$, нетривиальное решение $u(t) \not\equiv 0$, $t \in T_{\text{оп}} \cup t^*$. Множество $T_{\text{оп}}$ является опорой тогда и только тогда, когда

$$\det P \neq 0,\ P = \{HA^{t_1 - t - 1}b,\ t \in T_{\text{оп}}\}. \quad (10)$$

Пара $\{u, T_{оп}\}$ из допустимого управления $u=\{u(t)\in U_t, t\in T\}$ и опоры называется *опорным управлением. Сигналы* $u(t)$, $t\in T_{оп}$, будем называть *опорными*; $u(t)$, $t\in T_{н}$,— *неопорные* сигналы. Опорное управление называется *невырожденным,* если его опорные сигналы некритические: $f_*(t)<u(t)<f^*(t)$, $t\in T_{оп}$.

Наряду с опорным управлением $\{u, T_{оп}\}$ рассмотрим допустимое управление $u^*$ и, следуя [ч. 1], вычислим приращение целевой функции задачи (8):

$$\Delta J(u) = J(u^*) - J(u) = -\sum_{s\in T_{н}} \Delta(s)\, \Delta u(s),$$

где $\Delta u(s)=u^*(s)-u(s)$ — приращение управления; $-\Delta(s)=\psi'(s)b$ — *коуправление*; $\psi(s)$ *(котраектория)* — решение *сопряженного уравнения*

$$\psi'(s-1)=\psi'(s)A \tag{11}$$

с начальным условием

$$\psi'(t_1-1)=c'-v'H; \tag{12}$$

$v$ — $m$-вектор потенциалов $v'=\{c'A^{t_1-t-1}b,\ t\in T_{оп}\}P^{-1}$. Из приращения целевой функции следует справедливость неравенства

$$J(u^0)-J(u)\leqslant\beta, \tag{13}$$

$$\beta = \sum_{\Delta(t)>0} \Delta(t)(-f_*(t)+u(t)) + \sum_{\Delta(t)<0} \Delta(t)(-f^*(t)+u(t)).$$

Допустимое управление $u^\varepsilon$ называется $\varepsilon$-*оптимальным (субоптимальным),* если $c'x^0(t_1)-c'x^\varepsilon(t_1)\leqslant\varepsilon$, где $x^\varepsilon(t)$, $t\in T^*$,— траектория системы (8), соответствующая управлению $u^\varepsilon$; $u^0=\{u^0(t), t\in T\}$, $x^0(t)$, $t\in T^*$,— оптимальные управление и траектория задачи (8).

Из (13) следуют:

**Критерий субоптимальности.** Для $\varepsilon$-оптимальности допустимого управления $u$ необходимо и достаточно, чтобы при некоторой опоре $T_{оп}$ выполнялось неравенство

$$\beta\leqslant\varepsilon.$$

**Критерий оптимальности.** Соотношения $\Delta(t)=0$ при $f_*(t)<u(t)<f^*(t)$; $\Delta(t)\geqslant0$ при $u(t)=f_*(t)$; $\Delta(t)\leqslant0$ при $u(t)=f^*(t)$, $t\in T_{н}$, достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности опорного управления $\{u, T_{оп}\}$.

Критерий оптимальности можно сформулировать в терминах *дискретного принципа максимума:* для оптимальности опорного управления $\{u, T_{оп}\}$ достаточно, чтобы оно удовлетворяло условию максимума

$$\psi'(t)\,bu(t) = \max_{f_*(t)\leqslant u\leqslant f^*(t)} \psi'(t)\,bu, \tag{14}$$

где $\psi(t)$ — определенная выше котраектория; каждое невырожденное оптимальное опорное управление $\{u^0, T_{оп}\}$ удовлетворяет условию максимума (14).

Приведенный дискретный принцип максимума отличается от традиционных форм тем, что в нем точно указана котраектория, при вычислении которой не требуется решать экстремальных задач. В связи с этим появилась некоторая ограниченность принципа максимума в необходимой части. Этого недостатка лишена следующая форма принципа максимума: для оптимальности допустимого управления $u(t)$, $t\in T$, необходимо и достаточно существование опоры $T_{оп}$, при которой опорное управление $\{u, T_{оп}\}$ удовлетворяет условию максимума (14).

Принцип максимума (14) получен из критерия оптимальности опорного управления. Основываясь на критерии субоптимальности, сформулируем аналог условия (14) для случая $\varepsilon$-оптимального управления $u^\varepsilon(t)$, $t\in T$.

Для $\varepsilon$-оптимальности допустимого управления $u(t)$, $t\in T$, необходимо и достаточно, чтобы при некоторой опоре $T_{оп}$ существовала такая функция $\varepsilon(t)\geqslant 0$, $t\in T$, $\sum\limits_{t\in T}\varepsilon(t)\leqslant\varepsilon$, что

$$\psi'(t)\,bu(t) = \max_{f_*(t)\leqslant u\leqslant f^*(t)} \psi'(t)\,bu - \varepsilon(t),\ t\in T,$$

где $\psi(t)$ — решение задачи (11), (12).

В теории оптимального управления условия $\varepsilon$-оптимальности не исследовались. Полученный результат доставляет определенную характеристику устойчивости принципа максимума (по изменениям качества управления в окрестности оптимального управления указывается тип возмущений для принципа максимума).

Перейдем к основной цели данного параграфа. Предположим, что опорное управление $\{u, T_{оп}\}$ не удовлетворяет критерию оптимальности и оценка $\beta$ его отклонения от оптимального управления превышает заданную точность приближения $\varepsilon$. В дискретной задаче (8), полученной из непрерывной (1)—(5) с помощью квантования времени, число $t_1$, как правило (при точных аппроксимациях), значительно превосходит $m$. Поэтому для решения таких задач естествен метод § 1 гл. I.

По коуправлению $\Delta(t)$, $t\in T$, и заданному числу $\alpha$ построим множества $T_{м}=\{t: |\Delta(t)|\leqslant\alpha\}$, $T_{нб}=\{t: |\Delta(t)|>\alpha\}$. Рассмотрим задачу

$$-\Theta\sum_{t\in T}\Delta(t)\,\Delta u(t)\to\max,$$

$$x(t+1)=Ax(t)+b\Delta u(t),\quad t\in T,\quad Hx(t_1)=0,\quad x(0)=0$$

$$f_*(t)-u(t)\leqslant\Theta\Delta u(t)\leqslant f^*(t)-u(t),\ t\in T_{м},$$

где

$$\Delta u(t)=\begin{cases} f^*(t)-u(t), & \text{если } \Delta(t)<-\alpha,\\ f_*(t)-u(t), & \text{если } \Delta(t)>\alpha,\end{cases}\quad t\in T_{нб}.$$

Она эквивалентна следующей задаче линейного программирования *):

$$-\sum_{t\in T_{м}}\Delta(t)\,\Delta u(t)-\Theta\sum_{t\in T_{нб}}\Delta(t)\,\Delta u(t)\to\max_{\Theta,\ \Delta u(t),\ t\in T_{м}},\qquad(15)$$

$$\sum_{t\in T_{м}}HA^{t_1-t-1}\,b\Delta u(t)=-\Theta\tilde{b},$$

$$f_*(t)-u(t)\leqslant\Delta u(t)\leqslant f^*(t)-u(t),\ t\in T_{м},$$

где $\tilde{b}=\sum\limits_{t\in T_{нб}}HA^{t_1-t-1}\,b\Delta u(t)$.

В качестве начального опорного плана можно взять опорный план $\{\Delta u^1(t),\ t\in T_{м};\ T_{оп}\}$, где $\Delta u^1(t)=\Theta^1\Delta\tilde{u}(t)$;

$$\Delta\tilde{u}(t)=\begin{cases} 0, & \text{если } \Delta(t)=0,\\ f^*(t)-u(t), & \text{если } \Delta(t)<0,\ t\in T_{нм}=T_{м}\setminus T_{оп},\\ f_*(t)-u(t), & \text{если } \Delta(t)>0;\end{cases}$$

$$\Delta\tilde{u}_{оп}=-P^{-1}\tilde{b}-P^{-1}\Big(\sum_{t\in T_{нм}}HA^{t_1-t-1}\,b\Delta\tilde{u}(t)\Big);$$

$$\Theta^1=\min\Theta(t),\ t\in T_{оп};$$

*) В этой задаче векторы условий легко генерируются по исходным $H$, $A$, $B$.

$$\Theta(t)=\begin{cases}(f^*(t)-u(t))/\Delta\tilde{u}(t), & \text{если } \Delta\tilde{u}(t)>0,\\ (f_*(t)-u(t))/\Delta\tilde{u}(t), & \text{если } \Delta\tilde{u}(t)<0,\\ \infty, & \text{если } \Delta\tilde{u}(t)=0;\end{cases}$$

матрица $P$ задана формулой (10).

Задача (15) является реализацией задачи § 1 гл. I. Пусть решение задачи (15) остановлено на опорном плане $\{\Delta\bar{u}(t),\ t\in T_{\text{м}};\ \bar{\Theta},\ \bar{T}_{\text{оп}}\}$. Управление $\bar{u}=u+\Delta\bar{u}$, где $\Delta\bar{u}=\{\Delta\bar{u}(t),\ t\in T_{\text{м}};\ \bar{\Theta}\Delta u(t),\ t\in T_{\text{нб}}\}$, является допустимым в задаче (8), причем

$$\Delta J(u)=J(\bar{u})-J(u)=-\sum_{t\in T_{\text{м}}}\Delta(t)\Delta\bar{u}(t)-\bar{\Theta}\sum_{t\in T_{\text{нб}}}\Delta(t)\Delta u(t)\geqslant 0$$

(в невырожденном случае строго больше нуля). Для управления $\bar{u}$ справедливо неравенство

$$J(u^0)-J(\bar{u})\leqslant\bar{\beta},$$

где

$$\bar{\beta}=\sum_{\substack{\bar{\Delta}(t)>0,\\ t\in T}}\bar{\Delta}(t)(\bar{u}(t)-f_*(t))+\sum_{\substack{\bar{\Delta}(t)<0,\\ t\in T}}\bar{\Delta}(t)(\bar{u}(t)-f^*(t));$$

$\bar{\Delta}(s)=-\psi'(s)b$, $\psi(s)$ — решение сопряженной системы (11) с начальным условием (12), где

$$v'=\{c'A^{t_1-t-1}b,\ t\in\bar{T}_{\text{оп}}\}\bar{P}^{-1};\ \bar{P}=\{HA^{t_1-t-1}b,\ t\in\bar{T}_{\text{оп}}\}.$$

Если $\beta\leqslant\varepsilon$, то управление $\bar{u}$ является $\varepsilon$-оптимальным. В противном случае продолжаем решение задачи по схеме § 1 гл. I.

## § 2. Оптимальные процессы с фазовыми ограничениями

В теории оптимального управления заметные трудности возникают при учете фазовых ограничений. В данном параграфе для построения оптимальных управлений в задачах с фазовыми ограничениями привлекается техника § 6 гл. I.

**1. Постановка задачи.** При определенных условиях (см. § 1) задача оптимального управления линейной системой, на поведение которой наложены фазовые ограничения, сводится к следующей задаче линейного программирования:

$$
\begin{gathered}
J(u)=c'x(t_1)\to\max,\\
x(t+1)=Ax(t)+bu(t),\ x(0)=x_0,\\
f_*(t)\leqslant u(t)\leqslant f^*(t),\ t\in T=\{0,\ \ldots,\ t_1-1\},\qquad (1)\\
d_*(t)\leqslant x(t)\leqslant d^*(t),\ t\in T^*=\{1,\ \ldots,\ t_1\},
\end{gathered}
$$

где $A=A(I,\ I)$ — $n\times n$-матрица; $x(t)$, $d_*(t)$, $d^*(t)$, $b$, $c$ — $n$-векторы; $u(t)$, $f_*(t)$, $f^*(t)$ — скалярные величины; $I=\{1,\ \ldots,\ n\}$.

Последовательность управляющих сигналов *(управление)* $u=\{u(0),u(1),\ \ldots,\ u(t_1-1)\}$ назовем *допустимым управлением,* если вдоль него и соответствующей ему *(допустимой) траектории* $x=\{x(1),\ x(2),\ \ldots,\ x(t_1)\}$ выполняются все ограничения задачи (1).

На допустимой траектории рассмотрим состояния $x(s_1),\ \ldots,\ x(s_\nu)$, $s_1<s_2<\ldots<s_\nu$, $s_k\in T^*$, $k=\overline{1,\ \nu}$. Каждому состоянию $x(s_k)$ поставим в соответствие пару множеств $Q^k_{\text{оп}}=\{I^k_{\text{оп}},\ T^k_{\text{оп}}\}$, $k=\overline{1,\ \nu}$, которые определим рекуррентно.

Пару $Q^1_{\text{оп}}=\{I^1_{\text{оп}},\ T^1_{\text{оп}}\}$ составим из произвольных множеств $I^1_{\text{оп}}$, $T^1_{\text{оп}}$ таких, что $I^1_{\text{оп}}\subset I$, $T^1_{\text{оп}}\subset T^{s_1}=\{0,\ 1,\ \ldots$ $\ldots,\ s-1\}$, $|I^1_{\text{оп}}|=|T^1_{\text{оп}}|$, $\det D_1\neq 0$. Здесь $D_1=D_1(I^1_{\text{оп}},\ T^1_{\text{оп}})=$ $=\begin{Bmatrix}[A_0^{(s_1)}(t)\,b]_i, & t\in T^1_{\text{оп}}\\ i\in I^1_{\text{оп}} & \end{Bmatrix}$; $\quad A_0^{(s)}(t)=A^{s-t-1},\qquad t\leqslant s-1$; $[a]_i$ — $i$-я компонента вектора $a$.

Пусть построены пары $Q^k_{\text{оп}}=\{I^k_{\text{оп}},\ T^k_{\text{оп}}\}$, $k=\overline{1,\ p-1}$, удовлетворяющие следующим условиям: $I^k_{\text{оп}}\subset I$, $T^k_{\text{оп}}\subset$ $\subset T^{s_k}=\{0,\ 1,\ \ldots,\ s_k-1\}$, $|I^k_{\text{оп}}|=|T^k_{\text{оп}}|$, $T^k_{\text{оп}}\cap T^{\underline{k}}_{\text{оп}}=\varnothing$, $k\neq\underline{k}$, $\underline{k}=\overline{1,\ p-1}$, $\det D_k\neq 0$, где $D_k=D_k(I^k_{\text{оп}},\ T^k_{\text{оп}})=$ $=\begin{Bmatrix}[A_{k-1}^{(s_k)}(t)\,b]_i, & t\in T^k_{\text{оп}}\\ i\in I^k_{\text{оп}} & \end{Bmatrix}$, $k=\overline{1,\ p-1}$. Тогда пару $Q^p_{\text{оп}}=$ $=\{I^p_{\text{оп}},\ T^p_{\text{оп}}\}$ составим из таких множеств $I^p_{\text{оп}}$, $T^p_{\text{оп}}$, что

$$
I^p_{\text{оп}}\subset I,\quad T^p_{\text{оп}}\subset T^{s_p}\setminus\bigcup_{k=1}^{p-1}T^k_{\text{оп}},\ \det D_p\neq 0.
$$

Здесь

$$
T^{s_p}=\{0,\ 1,\ \ldots,\ s_p-1\};\ D_p=D_p(I^p_{\text{оп}},\ T^p_{\text{оп}})=
$$

$$= \begin{Bmatrix} [A_{p-1}^{(s_p)}(t)\, b]_i, & t \in T_{оп}^p \\ i \in I_{оп}^p & \end{Bmatrix},$$

$$A_{p-1}^{(s)}(t) = A^{s-s_{p-1}} B_{p-1} A_{p-2}^{(s_{p-1})}(t), t \in T_{p-1}^{(s)} = T^s \setminus \bigcup_{k=1}^{p-1} T_{оп}^k,$$
$$t < s_{p-1},$$

$$A_{p-1}^{(s)}(t) = A_{p-2}^{(s)}(t), \ t \in T_{p-1}^{(s)}, \ t > s_{p-1}, \ \text{для} \ s \geqslant s_{p-1};$$

$$\widetilde{B}_{p-1} = \sum_{t \in T_{оп}^{p-1}} A_{p-2}^{(s_{p-1})}(t)\, b \widetilde{d}_t^{p-1}, \ B_{p-1} = E - \widetilde{B}_{p-1}; \qquad (2)$$

$$\widetilde{d}_t^{p-1} = \widetilde{d}_t^{p-1}(I) = \{ \widetilde{d}_{ti}^{p-1} = 0, \ \text{если} \ i \,\overline{\in}\, I_{оп}^{p-1};$$
$$\widetilde{d}_{ti}^{p-1} = \overline{d}_{ti}^{p-1}, \ \text{если} \ i \in I_{оп}^{p-1}\};$$
$$\|\overline{d}_{ti}^{p-1}\|_{t \in T_{оп}^{p-1},\, i \in I_{оп}^{p-1}} = [D_{p-1}]^{-1}.$$

Пусть для каждого состояния $x(s_k)$ построены множество $Q_{оп}^k$ и матрица $D_k$, которые назовем *опорой и опорной матрицей состояния* $x(s_k)$, $k = \overline{1, \nu}$. Совокупность $Q_{оп} = \{Q_{оп}^k, \ k = \overline{1, \nu}\}$ назовем *мультиопорой* задачи (1). Пару $\{u, Q_{оп}\}$ из допустимого управления и мультиопоры назовем *мультиопорным управлением*. Мультиопорное управление *невырожденное*, если $f_*(t) < u(t) < f_*(t)$, $t \in T_{оп} = \bigcup_{k=1}^{\nu} T_{оп}^k$; $d_{*i}(t) < x_i(t) < d_i^*(t)$, $i \in I_н^t = I \setminus I_{оп}^t$, $t \in T^*$. (Для $t \,\overline{\in}\, \{s_1, \ldots, s_\nu\}$ положим $I_{оп}^t = \varnothing$.)

Рассмотрим некоторое мультиопорное управление $\{u, Q_{оп}\}$. Для каждого состояния $x(s)$, $s \geqslant 0$, справедлива формула Коши

$$x(s) = A^s x(0) + \sum_{k=0}^{s-1} A^{s-k-1} bu(k). \qquad (3)$$

Используя представление (3) для $x(s_1)$, с помощью опорной матрицы $D_1$ выразим управляющие сигналы $u(t)$, $t \in T_{оп}^1$, через $u(t)$, $t \in T_н^1 = T^{s_1} \setminus T_{оп}^1$, и компоненты $x_i(s_1)$, $i \in I_{оп}^1$, состояния $x(s_1)$:

$$u(t) = -\widetilde{d}_t^1 \Big\{ \sum_{t \in T_н^1} A_0^{(s_1)}(t)\, bu(t) + G_0^{(s_1)}(0)\, x(0) - x(s_1) \Big\},$$
$$t \in T_{оп}^1, \qquad (4)$$

где $G_0^{(s)}(0) = A^{s-s_0}$, $s_0 = 0$, $\tilde{d}_t^1$ — $t$-я строка матрицы $D_1^{-1}$. Подставим (4) в (3) для состояний $x(s)$, $s > s_1$. В результате получим представление для состояния $x(s)$, из которого исключены сигналы $u(t)$, $t \in T_{\text{оп}}^1$:

$$x(s) = x^{(1)}(s) = G_1^{(s)}(0)\,x(0) + G_1^{(s)}(1)\,\tilde{B}_1 x(s_1) + \sum_{t \in T_1^{(s)}} A_1^{(s)}(t)\,bu(t),$$

где

$T_1^{(s)} = T^{(s)} \diagdown T_{\text{оп}}^1$; $G_1^{(s)}(0) = A^{s-s_1} B_1 G_0^{(s_1)}(0)$; $G_1^{(s)}(1) = A^{(s-s_1)}$.

Пусть после исключения опорных управляющих сигналов $u(t)$, $t \in \bigcup\limits_{k=1}^{p-1} T_{\text{оп}}^k$, состояние $x(s)$, $s > s_{p-1}$, имеет следующее представление:

$$x(s) = x^{p-1}(s) = G_{p-1}^{(s)}(0)\,x(0) + \sum_{k=1}^{p-1} G_{p-1}^{(s)}(k)\,\tilde{B}_k x(s_k) + \sum_{t \in T_{p-1}^{(s)}} A_{p-1}^{(s)}\,bu(t). \tag{5}$$

В (5) положим $s = s_p$ и с помощью $D_p$ найдем $u(t)$, $t \in T_{\text{оп}}^p$:

$$u(t) = -\tilde{d}_t^p \Big\{ \sum_{t \in T_{\text{н}}^p} A_{p-1}^{(s_p)}(t)\,bu(t) + G_{p-1}^{(s_p)}(0)\,x(0) + \sum_{k=1}^{p-1} G_{p-1}^{(s_p)}(k)\,\tilde{B}_k x(s_k) - x(s_p) \Big\},\ t \in T_{\text{оп}}^p. \tag{6}$$

Здесь $T_{\text{н}}^p = T_{p-1}^{(s_p)} \diagdown T_{\text{оп}}^p$. Подставив (6) в (5), получим для состояний $x(s)$, $s > s_p$, представление

$$x(s) = x^{(p)}(s) = G_p^{(s)}(0)\,x(0) + \sum_{k=1}^{p} G_p^{(s)}(k)\,\tilde{B}_k x(s_k) + \sum_{t \in T_{p-1}^{(s)}} A_p^{(s)}\,bu(t).$$

Здесь

$$G_p^{(s)}(k) = A^{s-s_p} B_p G_{p-1}^{(s_p)}(k), \ k = \overline{0, p-1}; \tag{7}$$

$$G_p^{(s)}(p) = A^{s-s_p}, \ s > s_p; \ T_p^{(s)} = T^{(s)} \setminus \bigcup_{k=1}^{p} T_{\text{оп}}^k.$$

Пусть для конечного состояния $x(t_1)$ получено представление

$$x(t_1) = x^\nu(t_1) = G_\nu^{(t_1)}(0)\, x(0) + \sum_{k=1}^{\nu} G_\nu^{(t_1)}(k)\, \tilde{B}_k\, x(s_k) + \sum_{t \in T_{\text{н}}} A_\nu^{t_1}(t)\, bu(t),$$

где $T_{\text{н}} = T^{(t_1)} \setminus \bigcup_{k=1}^{\nu} T_{\text{оп}}^k = T \setminus T_{\text{оп}}$. Тогда, подставляя полученное представление в критерий качества задачи (1) и учитывая, что, по построению (см. (2)), в матрице $\tilde{B}_k = \tilde{B}_k(I, I)$ столбцы $\tilde{B}(I, i)$, $i \overline{\in} I_{\text{оп}}^k$, нулевые, получим

$$J(u) = c' G_\nu^{(t_1)}(0)\, x(0) + \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{i \in I_{\text{оп}}^k} c' G_\nu^{(t_1)}(k)\, \tilde{B}_k(I, i)\, x_i(s_k) + \sum_{t \in T_{\text{н}}} c' A_\nu^{(t_1)}(t)\, bu(t). \tag{8}$$

Пусть наряду с опорным управлением $\{u, I_{\text{оп}}^p, T_{\text{оп}}^p, p = \overline{1, \nu}\}$ имеется допустимое управление $\bar{u}$. Из (8) нетрудно получить формулу приращения

$$\Delta J(u) = J(\bar{u}) - J(u) = \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{i \in I_{\text{оп}}^k} c' G_\nu^{(t_1)}(k)\, \tilde{B}_k(I, i)\, \Delta x_i(s_k) + \sum_{t \in T_{\text{н}}} c' A_\nu^{(t_1)}(t)\, b\, \Delta u(t), \tag{9}$$

где $\Delta u(t) = \bar{u}(t) - u(t)$; $\Delta x(t) = \bar{x}(t) - x(t)$; $\bar{x} = \{\bar{x}(t), t \in T^*\}$ — траектория, соответствующая управлению $\bar{u}$.

Обозначим: $\Delta(t) = -c' A_\nu^{(t_1)}(t)\, b,\ t \in T_н,\quad v_i(s_k) = c' G_\nu^{(t_1)}(k)\, \widetilde{B}_k(I,\ i),\ i \in I_{оп}^k,\ k = \overline{1, \nu}$. Из формулы приращения (9) следует неравенство

$$J(\bar{u}) - J(u) \leqslant \beta, \tag{10}$$

$$\beta = \sum_{k=1}^{\nu} \Big[ \sum_{\substack{i \in I_{оп}^k, \\ v_i(s_k) > 0}} v_i(s_k)\,(d_i^*(s_k) - x_i(s_k)) + \sum_{\substack{i \in I_{оп}^k, \\ v_i(s_k) < 0}} v_i(s_k)\,(d_{*i}(s_k) - x_i(s_k)) \Big] + \sum_{\substack{t \in T_н, \\ \Delta(t) > 0}} \Delta(t)\,(u(t) - f_*(t)) + \sum_{\substack{t \in T_н, \\ \Delta(t) < 0}} \Delta(t)\,(u(t) - f^*(t)).$$

Используя последнее неравенство, легко доказать

**Критерий оптимальности.** Соотношения $v_i(s_k) \geqslant 0$ при $x_i(s_k) = d_i^*(s_k)$; $v_i(s_k) \leqslant 0$ при $x_i(s_k) = d_{*i}(s_k)$; $v_i(s_k) = 0$ при $d_{*i}(s_k) < x_i(s_k) < d_i^*(s_k)$, $i \in I_{оп}^k$, $k = \overline{1, \nu}$; $\Delta(t) \leqslant 0$ при $u(t) = f^*(t)$; $\Delta(t) \geqslant 0$ при $u(t) = f_*(t)$; $\Delta(t) = 0$ при $f_*(t) < u(t) < f^*(t)$, $t \in T_н$, достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности управления $u$.

**Критерий субоптимальности.** Для $\varepsilon$-оптимальности ($J(u^0) - J(u^\varepsilon) \leqslant \varepsilon$) управления $u^\varepsilon$ необходимо и достаточно существование такой мультиопоры $Q_{оп}$, что для мультиопорного управления $\{u,\ Q_{оп}\}$ выполняется неравенство $\beta \leqslant \varepsilon$.

Пусть приведенные критерии не выполняются. Положим

$$\Delta x_i(s_k) = \begin{cases} d_{*i}(s_k) - x_i(s_k), & \text{если } v_i(s_k) < 0, \\ d_i^*(s_k) - x_i(s_k), & \text{если } v_i(s_k) > 0,\ i \in I_{оп}^k,\ k = \overline{1, \nu}, \\ 0, & \text{если } v_i(s_k) = 0, \end{cases} \tag{11}$$

$$\Delta u(t) = \begin{cases} f_*(t) - u(t), & \text{если } \Delta(t) > 0, \\ f^*(t) - u(t), & \text{если } \Delta(t) < 0,\ t \in T_н, \\ 0, & \text{если } \Delta(t) = 0. \end{cases}$$

При $p=\nu$ из соотношений

$$\Delta u(t) = -\tilde{d}_t^p \Big\{ \sum_{t\in T_{\text{н}}^p} A_{p-1}^{(s_p)}(t)\, b\, \Delta u(t) + \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{i\in I_{\text{оп}}^k} G_{p-1}^{(s_p)}(k) \times \\ \times \tilde{B}_k(I,\ i)\, \Delta x_i(s_k) - \Delta x(s_p) \Big\},\ t\in T_{\text{оп}}^p; \tag{12}$$

$$\Delta x(s) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{i\in I_{\text{оп}}^k} G_p^{(s)}(k)\, \tilde{B}_k(I,\ i)\, \Delta x_i(s_k) + \\ + \sum_{t\in T_{\text{н}}^p} A_p^{(s)}(t)\, b\Delta u(t) \tag{13}$$

с учетом (11) находим $\Delta u(t)$, $t\in T_{\text{оп}}^{\nu}$, и $\Delta x(s)$, $s_\nu < s \leqslant t_1$. Зная $\Delta u(t)$, $t\in T_{\text{оп}}^{\nu}$, из условий (12), (13) при $p = \nu-1$ находим $\Delta u(t)$, $t\in T_{\text{оп}}^{\nu-1}$, и $\Delta x(s)$, $s_{\nu-1} < s \leqslant s_\nu$, и т. д.

Ясно, что построенное приращение управления $\Delta u = \{\Delta u(t),\ t\in T\}$ является подходящим направлением для управления $u$. Оно найдено из условия максимального возрастания критерия качества в пространстве неопорных управляющих сигналов $u(t)$, $t\in T_{\text{н}}$, с учетом фазовых ограничений на опорные компоненты $x_i(s_k)$, $i\in I_{\text{оп}}^k$, состояний $x(s_k)$, $k=\overline{1,\ \nu}$.

Строим новое управление $\bar{u}=u+\Theta\Delta u$ и соответствующую ему траекторию $\bar{x}=x+\Theta\Delta x$, где $\Theta$ — максимально допустимый шаг:

$$\Theta=\min\{1,\ \Theta_{t_0},\ \Theta_{i_0}(\bar{t})\},\ \Theta_{t_0}=\min\Theta_t,\ t\in T_{\text{оп}};$$

$$\Theta_t = \begin{cases} (f^*(t)-u(t))/\Delta u(t), & \text{если } \Delta u(t)>0, \\ (f_*(t)-u(t))/\Delta u(t), & \text{если } \Delta u(t)<0, \\ \infty, & \text{если } \Delta u(t)=0; \end{cases}$$

$$\Theta_{i_0}(\bar{t}) = \min\Theta_i(t),\ i\in I_{\text{н}}^t,\ t=\overline{1,\ t_1};$$

$$\Theta_i(t) = \begin{cases} (d_i^*(t)-x_i(t))/\Delta x_i(t), & \text{если } \Delta x_i(t)>0, \\ (d_{*i}(t)-x_i(t))/\Delta x_i(t), & \text{если } \Delta x_i(t)<0, \\ \infty, & \text{если } \Delta x_i(t)=0. \end{cases}$$

Оценка субоптимальности для управления $\bar{u}$ равна $(1-\Theta)\beta$. Если $(1-\Theta)\beta\leqslant\varepsilon$, то решение задачи (1) прекращается на $\varepsilon$-оптимальном управлении $\bar{u}$. Очевидно, что при $\Theta=1$ управление $\bar{u}$ будет оптимальным.

Пусть $(1-\Theta)\beta>\varepsilon$. Переходим к правилам построения новой мультиопоры. Пусть $\Theta=\Theta_{i_0}(\bar{t})$. Предположим, что $\bar{t}=s_p$. Если $p<\nu$, то применяем следующую процедуру спуска по $i_0(s_p)$. Находим наименьший номер $k_0\in\in\{1, 2, \ldots, \nu-p\}$, для которого существует $t_{p+k_0}\in\in T_{\text{оп}}^{p+k_0}\cap T_{\text{н}}^p$ такое, что $B_p(i_0, I)\,A_{p-1}^p(t_{p+k_0})\,b\neq 0$. (Здесь через $B_p(i_0, I)$ обозначена $i_0$-я строка матрицы $B_p$.) Если номер $k_0$ найти не удается, то процедура спуска закончена.

Предположим, что номер $k_0$ найден. Для состояний $x(s_k)$, $k=\overline{1, p-1}$, опоры и опорные матрицы не меняются: $\overline{Q}_{\text{оп}}^k=Q_{\text{оп}}^k$, $\overline{D}_k=D_k$, $k=\overline{1, p-1}$. Следовательно, $\overline{B}_k=B_k$, $\overline{\widetilde{B}}_k=\widetilde{B}_k$ для $k=\overline{1, p-1}$. Состоянию $x(s_p)$ приписываем новую опору $\overline{Q}_{\text{оп}}^p=\{\bar{I}_{\text{оп}}^p, \overline{T}_{\text{оп}}^p\}$, где $\bar{I}_{\text{оп}}^p=I_{\text{оп}}^p\cup i_0$; $\overline{T}_{\text{оп}}^p=T_{\text{оп}}^p\cup t_{p+k_0}$, и новую опорную матрицу

$$\overline{D}_p=\overline{D}_p(\bar{I}_{\text{оп}}^p, \overline{T}_{\text{оп}}^p)=\begin{Bmatrix}[A_{p-1}^{(s_p)}(t)\,b]_i, & t\in\overline{T}_{\text{оп}}^p\\ i\in\bar{I}_{\text{оп}}^p & \end{Bmatrix}.$$

Зная $D_p^{-1}$, легко найти $\overline{D}_p^{-1}$. По $\overline{D}_p^{-1}$ строим новые матрицы $\overline{\widetilde{B}}_p$ и $\overline{B}_p$.

Для состояний $x(s_k)$, $p<k\leqslant p+k_0-1$, опоры и опорные матрицы остаются прежними. По формулам (2) строим новые матрицы $\overline{B}_k$, $\overline{\widetilde{B}}_k$, $p+1\leqslant k\leqslant p+k_0-1$.

Для состояния $x(s_{p+k_0})$ построим матрицу

$$\widetilde{D}_{p+k_0}=\widetilde{D}_{p+k_0}(I_{\text{оп}}^{p+k_0}, T_{\text{оп}}^{p+k_0}\setminus t_{p+k_0}\cup i_0(s_p))=$$

$$=\begin{Bmatrix}[\overline{A}_{p+k_0-1}^{(s_{p+k_0})}(t)\,b]_i, t\in T_{\text{оп}}^{p+k_0}\setminus t_{p+k_0}, & [\overline{G}_{p+k_0-1}^{(s_{p+k_0})}(p)\,\overline{\widetilde{B}}_p(I, i_0)]_i\\ i\in I_{\text{оп}}^{p+k_0} & \end{Bmatrix},$$

где $\overline{A}_{p+k_0-1}^{(s_{p+k_0})}(t)$, $\overline{G}_{p+k_0-1}^{(s_{p+k_0})}(p)$ найдены по формулам (2), (7) при $B_k=\overline{B}_k$, $k=\overline{1, p+k_0-1}$.

Можно показать, что матрица $\widetilde{D}_{p+k_0}$ представима в виде

$$\widetilde{D}_{p+k_0} = D_{p+k_0} - A^{(s_{p+k_0})}_{p+k_0-1}(t_{p+k_0})\, b\, [\{B_p(i_0, I)\, A^{(s_p)}_{p-1}(t)\, b,\ t \in T^{p+k_0}_{\text{оп}}\} - e_{t_{p+k_0}}(T^{p+k_0}_{\text{оп}})]\,/\alpha,$$

где $\alpha = B_p(i_0, I)\, A^{(s_p)}_{p-1}(t_{p+k_0})\, b$; $A^{(s_p)}_{p-1}(t) = 0$ для $t \in T^{p+k_0}_{\text{оп}} \setminus T^p_{\text{н}}$;

$e_{t_{p+k_0}}(T^{p+k_0}_{\text{оп}}) = \{e_{t_{p+k_0}, t} = 0,\ t \in T^{p+k_0}_{\text{оп}} \setminus t_{p+k_0},\ e_{t_{p+k_0}, t} = 1\}$.

По формулам (7) § 1 гл. I легко найти $\widetilde{D}^{-1}_{p+k_0}$.

Пусть $\widetilde{d}^{p+k_0}_{i_0(s_p)} = \widetilde{d}^{p+k_0}_{i_0(s_p)}(I) = \{\widetilde{d}_{i_0(s_p), i} = 0,\ i \overline{\in} I^{p+k_0}_{\text{оп}}$; $\widetilde{d}_{i_0(s_p), i} = \overline{\overline{d}}_{i_0(s_p), i},\ i \in I^{p+k_0}_{\text{оп}}\}$, где $\{\overline{\overline{d}}_{i_0(s_p), i},\ i \in I^{p+k_0}_{\text{оп}}\}$ — элементы $i_0(s_p)$ -й строки матрицы $\widetilde{D}^{-1}_{p+k_0}$.

Найдем наименьший номер $k_1 \in \{k_0+1, \ldots, \nu-p\}$, для которого существует $t_{p+k_1} \in T^{p+k_0}_{\text{н}} \cap T^{p+k_1}_{\text{оп}}$ такое, что $\widetilde{d}^{p+k_0}_{i_0(s_p)} \overline{A}^{(s_{p+k_0})}_{p+k_0-1}(t_{p+k_1})\, b \neq 0$. Если $k_1$ найти не удалось, то процедура спуска закончена.

Пусть номер $k_1$ найден. Для состояния $x(s_{p+k_0})$ строим новую опору $\overline{Q}^{p+k_0}_{\text{оп}} = \{\overline{I}^{p+k_0}_{\text{оп}}, \overline{T}^{p+k_0}_{\text{оп}}\}$, $\overline{I}^{p+k_0}_{\text{оп}} = I^{p+k_0}_{\text{оп}}$, $\overline{T}^{p+k_0}_{\text{оп}} = T^{p+k_0}_{\text{оп}} \setminus t_{p+k_0} \cup t_{p+k_1}$, и новую опорную матрицу

$$\overline{D}_{p+k_0} = \left\{\begin{matrix} [\overline{A}^{(s_{p+k_0})}_{p+k_0-1}(t)\, b]_i, & t \in \overline{T}^{p+k_0}_{\text{оп}} \\ i \in \overline{I}^{p+k_0}_{\text{оп}} & \end{matrix}\right\}.$$

Матрица $\overline{D}_{p+k_0}$ отличается от $\widetilde{D}_{p+k_0}$ одним столбцом. Следовательно, зная $\widetilde{D}^{-1}_{p+k_0}$, можно легко найти $\overline{D}^{-1}_{p+k_0}$.

По $\overline{D}^{-1}_{p+k_0}$ строим $\overline{B}_{p+k_0}$, $\overline{\overline{\overline{B}}}_{p+k_0}$. Для состояний $x(s_k)$, $p+k_0 < k \leqslant p+k_1-1$, опоры $Q^k_{\text{оп}}$ и опорные матрицы $D_k$ не меняются. По ним можно построить $\overline{B}_k$ и $\overline{\overline{B}}_k$, $p+k_0 < k \leqslant p+k_1-1$.

Для состояния $x(s_{p+k_1})$ строим матрицу

$$\widetilde{D}_{p+k_1} = \widetilde{D}_{p+k_1}(I^{p+k_1}_{\text{оп}}, T^{p+k_1}_{\text{оп}} \setminus t_{p+k_1} \cup i_0(s_p)) =$$

$$= \begin{Bmatrix} [\overline{A}^{(s_{p+k_1})}_{p+k_1-1}(t)\, b]_i,\ t \in T^{p+k_1}_{\text{оп}} \setminus t_{p+k_1},\ [\overline{G}^{(s_{p+k_1})}_{p+k_1}(p)\, \overset{\approx}{B}_p(I,\ i_0)]^i \\ i \in I^{p+k_1}_{\text{оп}} \end{Bmatrix}$$

Нетрудно получить простые правила построения $\widetilde{D}^{-1}_{p+k_1}$ используя матрицы $D^{-1}_{p+k_1}$, $\widetilde{D}^{-1}_{p+k_0}$.

С матрицей $\widetilde{D}_{p+k_1}$ поступаем так же, как с $\widetilde{D}_{p+k_0}$. Процедура спуска заканчивается на состоянии $x(s_{p+l})$, если не существует таких $t_{p+l+k}$, $k=\{1, \ldots, \nu-p-l\}$, что $t_{p+l+k} \in T^{p+l}_{\text{н}} \cap T^{p+l+k}_{\text{оп}}$, и $\widetilde{d}^{p+1\,\prime}_{i_0}(s_p)\, \overline{A}^{(s_{p+l})}_{p+l-1}(t_{p+l+k})\, b \neq 0$.

Случай $t \in \{s_1, \ldots, s_\nu\}$ рассматривается аналогично. Пусть $s_{p-1} < t < s_p$. Полагаем $s'_p = t$ и вместо состояний $x(s_1), \ldots, x(s_{p-1}), x(s_p), \ldots, x(s_\nu)$ в процедуре спуска рассматриваем состояния $x(s_1), \ldots, x(s_{p-1}), x(s'_p), x(s_p), \ldots, x(s_\nu)$.

Пусть процедура спуска закончилась на состоянии $x(s_{p+l})$. Опорные множества и опорные матрицы состояний $x(s_k)$, $k > p+l$, не меняются. Положим

$$z(t) = \widetilde{d}^{p+l\,\prime}_{i_0(s_p)}\, \overline{A}^{(s_{p+l})}_{p+l-1}(t)\, b,\ t \in T^{p+l}_{\text{н}},$$

$$z_i(s_k) = \widetilde{d}^{p+l\,\prime}_{i_0(s_p)}\, \overline{G}^{(s_{p+l})}_{p+l-1}(k)\, \widetilde{B}_k(I,\ i),\ i \in I^k_{\text{оп}},\ k = \overline{1,\ p+l-1},$$

$$z_i(s_{p+l}) = -\widetilde{d}^{p+l}_{i_0(s_p),\,i},\ \ i \in I^{p+l}_{\text{оп}};$$

$h = -1$, если $\overline{x}_{i_0}(s_p) = d^*_{i_0}(s_p)$; $h = +1$, если $\overline{x}_{i_0}(s_p) = d_{*i_0}(s_p)$. Подсчитаем двойственный шаг

$$\sigma = \min\{\sigma_{t_*},\ \sigma_{i_*}(s_{k_*})\},\ \ \sigma_{t_*} = \min \sigma_t,\ t \in T^{p+l}_{\text{н}}, \tag{14}$$

где

$$\sigma_t = \begin{cases} -\Delta(t)/hz(t), \text{ если } h\Delta(t)\, z(t) < 0, \\ 0, \text{ если } \Delta(t) = 0,\ \overline{u}(t) \neq f^*(t),\ hz(t) < 0, \\ 0, \text{ если } \Delta(t) = 0,\ \overline{u}(t) \neq f_*(t),\ hz(t) > 0, \\ \infty \text{ в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$\sigma_{i_*}(s_{k_*}) = \min \sigma_i(s_k),\ \ i \in I^k_{\text{оп}},\ \ k = \overline{1,\ p+l};$$

$$\sigma_i(s_k) = \begin{cases} v_i(s_k)/hz_i(s_k), \text{ если } -hv_i(s_k)\, z_i(s_k) < 0, \\ 0, \text{ если } v_i(s_k) = 0,\ \overline{x}_i(s_k) \neq d^*_i(s_k),\ hz_i(s_k) < 0, \\ 0, \text{ если } v_i(s_k) = 0,\ \overline{x}_i(s_k) \neq d_{*i}(s_k),\ hz_i(s_k) > 0, \\ \infty \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Пусть $\sigma=\sigma_{t_*}$. Для состояния $x(s_{p+l})$ строим новую опору $\overline{Q}^{p+l}_{\text{оп}}=\{\overline{I}^{p+l}_{\text{оп}}, \overline{T}^{p+l}_{\text{оп}}\}$, $\overline{I}^{p+l}_{\text{оп}}=I^{p+l}_{\text{оп}}$, $\overline{T}^{p+l}_{\text{оп}}=T^{p+l}_{\text{оп}}\setminus t_{p+l}\cup$ $\cup\, t_*$, и опорную матрицу

$$\overline{D}_{p+l}=\overline{D}_{p+l}(\overline{I}^{p+l}_{\text{оп}}, \overline{T}^{p+l}_{\text{оп}})=\begin{Bmatrix}[\overline{A}^{(s_{p+l})}_{p+l-1}(t)\,b]_i, & t\in\overline{T}^{p+l}_{\text{оп}}\\ i\in\overline{I}^{p+l}_{\text{оп}}\end{Bmatrix}.$$

Остальные опоры и опорные матрицы не меняются.

Переходим к следующей итерации.

Пусть $\sigma=\sigma_{i_*}(s_{k_*})$. Если $k_*<p+l$, то осуществим процедуру подъема по $i_*(s_{k_*})$. Положим $g=p+l$. Для состояния $x(s_g)$ строим матрицы

$$\tilde{\tilde{D}}_g=\tilde{\tilde{D}}_g(I^g_{\text{оп}}, T^g_{\text{оп}}\setminus t_g\cup i_*(s_{k_*}))=\begin{Bmatrix}[\overline{A}^{(s_g)}_{g-1}(t)\,b]_i, & t\in T^g_{\text{оп}}\setminus t_g, & [\overline{G}^g_{g-1}(k_*)\,\tilde{\overline{B}}_{k_*}(I, i_*)]_i\\ i\in I^g_{\text{оп}}\end{Bmatrix}$$

и $\tilde{\tilde{D}}{}^{-1}_g$. Выбираем наибольший индекс $\overline{k}_0$, $\overline{k}_0\in\{1,\ \ldots$ $\ldots, g-1\}$, для которого существует $\overline{t}_{g-\overline{k}_0}\in\overline{T}^{g-\overline{k}_0}_{\text{оп}}$, $\tilde{d}^{g-\overline{k}_0}_t\times$ $\times\,\overline{G}^{g-\overline{k}_0}_{g-\overline{k}_0-1}(k_*)\,\tilde{\overline{B}}_{k_*}(I, i_*)\neq 0$. Если $\overline{k}_0$ построить не удалось, то $g=k_*$ и процедура подъема закончена.

Пусть найдены $\overline{k}_0$ и $\overline{t}_{g-\overline{k}_0}$. Для состояния $x(s_{g-\overline{k}_0})$ строим матрицу

$$\tilde{\tilde{D}}_{g-\overline{k}_0}=\tilde{\tilde{D}}_{g-\overline{k}_0}(\overline{I}^{g-\overline{k}_0}_{\text{оп}}, \overline{T}^{g-\overline{k}_0}_{\text{оп}}\setminus\overline{t}_{g-\overline{k}_0}\cup i_*(s_{k_*}))=$$

$$=\begin{Bmatrix}[\overline{A}^{(s_{g-\overline{k}_0})}_{g-\overline{k}_0-1}(t)\,b]_i, & t\in\overline{T}^{g-\overline{k}_0}_{\text{оп}}\setminus\overline{t}_{g-\overline{k}_0}, & [\overline{G}^{(s_{g-\overline{k}_0})}_{g-\overline{k}_0-1}\,\tilde{\overline{B}}_{k_*}(i_*, I)]_i\\ i\in\overline{I}^{g-\overline{k}_0}_{\text{оп}}\end{Bmatrix}$$

и обратную ей матрицу $\tilde{\tilde{D}}{}^{-1}_{g-\overline{k}_0}$. Состоянию $x(\overline{\overline{s}}_g)$ приписываем новые опорные множества $\overline{\overline{I}}{}^g_{\text{оп}}=\overline{I}^g_{\text{оп}}$, $\overline{\overline{T}}{}^g_{\text{оп}}=\overline{T}_{\text{оп}}\setminus t_g\cup$ $\cup\,\overline{t}_{g-\overline{k}_0}$ и соответствующую им опорную матрицу $\overline{\overline{D}}_g(\overline{\overline{I}}{}^g_{\text{оп}},$ $\overline{\overline{T}}{}^g_{\text{оп}})$. Обратную матрицу $\overline{\overline{D}}{}^{-1}_g$ можно найти, зная $\tilde{D}_{g-\overline{k}_0}$ и $\tilde{\tilde{D}}{}^{-1}_g$.

Опорные множества и опорные матрицы состояний $x(s_k)$, $g-\overline{k}_0<k<g$, не меняются.

С состоянием $x(s_{g-\bar{k}_0})$ поступаем так же, как с $x(s_g)$.

Предположим, что построен номер $\bar{l}$ такой, что $g-\bar{l}=k_*$. Состоянию $x(s_{k_*})$ приписываем новую опору $\bar{\bar{Q}}^{k_*}_{\text{оп}}=\{\bar{\bar{I}}^{k_*}_{\text{оп}}, \bar{\bar{T}}^{k_*}_{\text{оп}}\}$, где $\bar{\bar{I}}^{k_*}_{\text{оп}}=\bar{I}^{k_*}_{\text{оп}}\setminus i_*$, $\bar{\bar{T}}^{k_*}_{\text{оп}}=\bar{T}^{k_*}_{\text{оп}}\setminus \bar{t}_{g-\bar{l}}$, и опорную матрицу $\bar{\bar{D}}_{g-l}(\bar{\bar{I}}^{k_*}_{\text{оп}}, \bar{\bar{T}}^{k_*}_{\text{оп}})$, которая получается из $\tilde{\tilde{D}}_{g-l}$ вычеркиванием $i_*$-й строки и $i_*(s_{k_*})$-го столбца. Опоры и опорные матрицы состояний $x(s_k)$, $k<p^*$, не меняются.

Рассмотрим теперь случай $\Theta=\Theta_{t_0}$. Если $t_0\in T^p_{\text{оп}}$, $p<\nu$, то, последовательно меняя элементы в множествах $T^p_{\text{оп}}, \ldots, T^\nu_{\text{оп}}$, стремимся перевести элемент $t_0$ в множество $T^{p+l}_{\text{оп}}$ с максимальным индексом $l$. Эта процедура спуска по $t_0$ аналогична рассмотренной в § 3 (процедура спуска по $(i_0, t_0)$).

Пусть в результате применения процедуры спуска по $t_0$ элемент $t_0$ переведен в множество $T^q_{\text{оп}}$ с максимально возможным индексом $q$. Полагаем

$$z(t)=\tilde{d}^q_{t_0}A^{(s_q)}_{q-1}(t)\,b,\ t\in T^q_{\text{н}},$$

$$z_i(s_k)=\tilde{d}^q_{t_0}G^{(s_q)}_{q-1}(k)\,\tilde{B}_k(I,\ i),\ i\in I^k_{\text{оп}},\ k=\overline{1, q-1},$$

$$z_i(s_q)=-\tilde{d}^q_{t_0, i},\ i\in I^q_{\text{оп}};$$

$h=1$, если $\bar{u}(t_0)=f_*(t_0)$; $h=-1$, если $\bar{u}(t_0)=f^*(t_0)$.

По формулам (14) находим двойственный шаг $\sigma$. Если $\sigma=\sigma_{t_*}$ или $\sigma=\sigma_{i_*}(s_{k_*})$ и $s_{k_*}=s_q$, то меняются только опорные множества и опорная матрица состояния $x(s_q)$: в первом случае $\bar{I}^q_{\text{оп}}=I^q_{\text{оп}}$, $\bar{T}^q_{\text{оп}}=(T^q_{\text{оп}}\setminus t_0)\cup t_*$, во втором случае $\bar{I}^q_{\text{оп}}=I^q_{\text{оп}}\setminus i_*$, $\bar{T}^q_{\text{оп}}=T^q_{\text{оп}}\setminus t_0$. Легко построить новую опорную матрицу $\bar{D}_q(\bar{I}^q_{\text{оп}}, \bar{T}^q_{\text{оп}})$, соответствующую состоянию $x(s_q)$, и обратную ей.

Пусть $\sigma=\sigma_{i_*}(s_{k_*})$, $s_{k_*}<s_q$. Строим матрицу

$$\tilde{\tilde{D}}_q(I^q_{\text{оп}},\ T^q_{\text{оп}}\setminus t_0\cup i_*(s_{k_*}))=$$

$$=\left\{\begin{matrix}[A^{(s_q)}_{q-1}(t)\,b]_i,\ t\in T^q_{\text{оп}}\setminus t_0, & [G^{(s_q)}_{q-1}(k_*)\,\tilde{B}_{k_*}(i_*,\ I)]_i\\ i\in I^q_{\text{оп}} & \end{matrix}\right\}$$

и применяем описанную выше процедуру подъема по $i_*(s_{k_*})$ от состояния $x(s_q)$ до состояния $x(s_{k_*})$.

## § 3. Оптимальное управление при смешанных ограничениях

Упрощенный вариант метода из п. 2 § 6 гл. I используем для построения алгоритма решения задачи

$$J(u)=c'x(t_1)\to\max,\ x(t+1)=Ax(t)+Bu(t)+\eta(t),$$
$$x(0)=x_0,\ Dx(t)+Gu(t)=g(t),\ f_*(t)\leqslant u(t)\leqslant f^*(t),\quad (1)$$
$$t\in T=\{0,\ 1,\ \ldots,\ t_1\},$$

где $c$, $x(t)$, $\eta(t)$ — $n$-векторы; $u(t)$, $f_*(t)$, $f^*(t)$ — $r$-векторы; $g(t)$ — $m$-вектор; $A$, $B$, $D$, $G$ — матрицы соответствующих размеров. Последовательность $u=\{u(t),\ t\in T\}$ назовем *допустимым управлением,* если вдоль него выполняются все ограничения задачи (1). Решение $u^0$ задачи (1) — *оптимальное управление,* соответствующая ему траектория $x^0(t)$, $t\in T$,— *оптимальная траектория.*

Обозначим: $I=\{1,\ 2,\ \ldots,\ r\}$, $Q=\{(i,\ t),\ i\in I,\ t\in T\}$. Множество $Q_{\text{оп}}\subset Q$ назовем *опорой* задачи (1), если система

$$\begin{gathered}x(t+1)=Ax(t)+Bu(t),\ x(0)=0,\\ Dx(t)+Gu(t)=0,\ t\in T,\end{gathered}\qquad (2)$$

имеет при $u_i(t)\equiv0$, $(i,\ t)\in Q_{\text{н}}=Q\diagdown Q_{\text{оп}}$, только тривиальное решение $u_i(t)\equiv0$, $(i,\ t)\in Q_{\text{оп}}$, но для любого $(i_*,\ t_*)\in Q_{\text{н}}$ система (2) допускает при $u_i(t)\equiv0$, $(i,\ t)\in Q_{\text{н}}\diagdown(i_*,\ t_*)$, нетривиальное решение $u_i(t)\not\equiv0$, $(i,\ t)\in Q_{\text{оп}}\cup(i_*,\ t_*)$ ($u_i(t)$ — $i$-я компонента вектора $u(t)$).

Разобьем опору $Q_{\text{оп}}$ на подмножества $Q_{s\,\text{оп}}$, $s=\overline{0,\ t_1}$, $Q_{\text{оп}}=\bigcup_{s=0}^{t_1}Q_{s\,\text{оп}}$, $Q_{k\text{оп}}\cap Q_{s\,\text{оп}}=\varnothing$, $k\neq s$, обладающие некоторым свойством, которое будет указано ниже. Множества $\{Q_{s\,\text{оп}},\ s=\overline{0,\ t_1}\}$ — *мультиопора* задачи (1), $\{u,\ Q_{s\,\text{оп}},\ s=\overline{0,\ t_1}\}$ — *мультиопорное управление.*

Обозначим: $I^t_{\text{оп}}=\{i:(i,\ t)\in Q_{\text{оп}}\}$, $I^t_{s\,\text{оп}}=\{i:(i,\ t)\in Q_{s\,\text{оп}}\}$. Символ $B(I_*)$ будет обозначать подматрицу матрицы $B=B(I):B(I_*)=\{b_j,\ j\in I_*\subset I\}$, где $b_j$ — столбец из $B$. Задачу (1) можно свести к задаче линейного программирования, матрица условия которой имеет вид

$$Б^0 = \left\{\begin{matrix} G & & & & \\ DB & G & & & \\ DAB & DB & G & & \\ DA^2B & DAB & DB & & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ DA^{t_1-1}B & DA^{t_1-2}B & DA^{t_1-3}B & \cdot\ \cdot\ \cdot & G \end{matrix}\right\}.$$

Элементы этой матрицы сгруппируем в блоки $Б^0(s, t)$, $s, t=\overline{0, t_1}$, размером $m\times r$. Блок $Б^0(s, t)$ равен нулевой матрице, если $s<t$; матрице $G$, если $s=t$; матрице $DA^{s-t-1}B$, если $s>t$, $s\in T$, $t\in T$. Совокупность блоков $Б^0(s, t)$, $s\in S_*\subset T$, $t\in T_*\subset T$, будем обозначать через $Б^0(S_*, T_*)$. Символами $Б^0(s, t)_j$ и $Б^0(s, t)^i$ обозначим $j$-й столбец и $i$-ю строку блока $Б^0(s, t)$.

Множество $Q_{0\,\text{оп}}$ выбрано так, что матрица $P_{0\,\text{оп}}= \{Б^0(0, 0)_i,\ (i, 0)\in Q_{0\,\text{оп}}\}$ невырожденная. Назовем матрицу $P_{0\,\text{оп}}$ *опорной матрицей блоков* $Б^0(0, T)$. С ее помощью найдем вектор потенциалов $v(0)$:

$$v'(0) = \{c'A^{t_1-1}b_i,\ i\in I^0_{0\,\text{оп}}\}\, P^{-1}_{0\,\text{оп}}$$

и вектор оценок $\Delta^{(0)}$ столбцов блоков $Б^0(0, T)$:

$$\Delta^{(0)}(t) = -c'A^{t_1-t-1}B,\quad t\in T\setminus S_0,\quad S_0=\{0\};$$

$$\Delta^{(0)}(0,\ I^0_{0\,\text{н}}) = v'(0)\, G\,(I^0_{0\,\text{н}}) - c'A^{t_1-1}B\,(I^0_{0\,\text{н}}),$$

$$\Delta^{(0)}(0,\ I^0_{0\,\text{оп}}) = 0,$$

где $I^0_{0\,\text{н}} = I\setminus I^0_{0\,\text{оп}}$; через $\Delta^{(0)}(0, I_*)$ обозначены компоненты $\Delta^{(0)}_i(0)$, $i\in I_*$, вектора $\Delta^{(0)}(0)$.

В матрице $Б^0$ сделаем первое преобразование, т. е. от $Б^0$ перейдем к $Б^1$ по следующему правилу:

$$Б^1(S_0,\ S_0) = Б^0(S_0,\ S_0),\ Б^1(T,\ T\setminus S_0) = Б^0(T,\ T\setminus S_0);$$

$$Б^1(S,\ 0) = [0\,(I^0_{0\,\text{оп}}),\ DA^{s-1}B^{1,1}(I^0_{0\,\text{н}})],\quad s\in T\setminus S_0,$$

где $B^{1,1}(I^0_{0\,\text{н}}) = B\,(I^0_{0\,\text{н}}) - B\,(I^0_{0\,\text{оп}})\, P^{-1}_{0\,\text{оп}} G\,(I^0_{0\,\text{н}})$; $0\,(I^0_{0\,\text{оп}})$ — подматрица нулевой $m\times r$-матрицы. Пусть получена матрица $Б^k$, $k<t_1$. Множество $Q_{k\,\text{оп}}$ выбрано так, что матрица $P_{k\text{оп}} = \{Б^k(k,\ t)_i,\ (i,\ t)\in Q_{k\text{оп}}\}$ невырожденная. Назовем ее опорной матрицей блоков $Б^k(k, T)$. Найдем вектор потенциалов $v(k)$:

$$v'(k) = -\{\Delta^{(k-1)}_i(t),\ (i,\ t)\in Q_{k\,\text{оп}}\}\, P^{-1}_{k\text{оп}}$$

и вектор оценок столбцов блоков $Б^k(k, T)$:

$$\Delta^{(k)}(t) = -c'A^{t_1-t-1}B, \ t \in T \setminus S_k, \ S_k = \{0, 1, \ldots, k\};$$
$$\Delta^{(k)}(k, I^k_{k\,\text{н}}) = v'(k)\,G(I^k_{k\,\text{н}}) - c'A^{t_1-k-1}B(I^k_{k\,\text{н}}),$$
$$I^k_{k\,\text{н}} = I \setminus I^k_{k\,\text{оп}};$$
$$\Delta^{(k)}(p, I^p_{k\,\text{н}}) = v'(k)\,DA^{k-p-1}B^{p+1,\,k}(I^p_{k\,\text{н}}) +$$
$$+ \Delta^{(k-1)}(t, I^p_{k\,\text{н}}), \ p = \overline{0, k-1};$$
$$\Delta^{(k)}(p, I \setminus I^p_{k\,\text{н}}) = 0, \ p = \overline{0, k},$$

где через $\Delta^{(k)}(p, I_*)$ обозначены компоненты $\Delta^{(k)}_i(p)$, $i \in I_* \subset I$, $r$-вектора $\Delta^{(k)}(p)$, $I^p_{k\,\text{н}} = I^p_{(k-1)\,\text{н}} \setminus I^p_{k\,\text{оп}}$, $p = \overline{0, k-1}$. Сделаем преобразование $Б^k \to Б^{k+1}$:

$$Б^{k+1}(T, T \setminus S_k) = Б^k(T, T \setminus S_k), \ Б^{k+1}(S_k, S_k) = Б^k(S_k, S_k);$$
$$Б^{k+1}(s, t) = [0(\bigcup_{p=0}^{k} I^t_{p\,\text{оп}}), \ DA^{s-t-1}B^{t+1,\,k+1}(I^t_{k\,\text{н}})],$$
$$s \in T \setminus S_k, \ t \in S_k,$$

где

$$B^{k+1,\,k+1}(I^k_{k\,\text{н}}) = B(I^k_{k\,\text{н}}) - B(I^k_{k\,\text{оп}})\,P^{-1}_{k\,\text{оп}}\,G(I^k_{k\,\text{н}});$$
$$B^{t+1,\,k+1}(I^t_{k\,\text{н}}) = [E - B^{t+1,\,k}(I^t_{k\,\text{оп}})\,P^{-1}_{k\,\text{оп}}DA^{k-t-1}]\,B^{t+1,\,k}(I^t_{k\,\text{н}}),$$
$$t < k, \ s \in T \setminus S_k, \ t \in S_k.$$

Пусть построена матрица $Б^{t_1}$ и найдены оценки $\Delta^{(t_1)}(t)$, $t \in T\,(\Delta^{(t_1)}(t, i) = 0, \ (i, t) \in Q_{\text{оп}})$. Можно показать, что полученные оценки совпадают с оценками, найденными по стандартным правилам линейного программирования с помощью матрицы $[Б^0_{\text{оп}}]^{-1}$, где $Б^0_{\text{оп}} = \{Б^0(T, t)_i, (i, t) \in Q_{\text{оп}}\}$. Следовательно [ч. 1], справедливо неравенство

$$J(u^0) - J(u) \leqslant \beta, \tag{3}$$

$$\beta = \sum_{\Delta^{(t_1)}_i(t) > 0} \Delta^{(t_1)}_i(t)\,(u_i(t) - f_{*i}(t)) +$$
$$+ \sum_{\Delta^{(t_1)}_i(t) < 0} \Delta^{(t_1)}_i(t)\,(u_i(t) - f^*_i(t)).$$

Из равенства (3) следуют

**Критерии оптимальности и субоптимальности.** Соотношения $\Delta_i^{(t_1)}(t)=0$ при $f_{*i}(t)<u(t)<f_i^*(t)$; $\Delta_i^{(t_1)}(t)\geqslant 0$ при $u_i=f_{*i}(t)$; $\Delta_i^{(t_1)}(t)\leqslant 0$ при $u_i(t)=f_i^*(t)$, $(i,\ t)\in Q_{\text{н}}=Q\setminus Q_{\text{оп}}$, достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности управления $\{u,\ Q_{s\,\text{оп}},\ s\in T\}$ в задаче (1).

Если

$$\beta\leqslant\varepsilon,$$

то управление $u(t)$, $t\in T$,— $\varepsilon$-оптимальное. Для каждого $\varepsilon$-оптимального управления $u(t)$, $t\in T$, найдется такая опора $Q_{\text{оп}}$, что для мультиопорного управления $\{u,\ Q_{s\,\text{оп}},\ s\in T\}$ выполняется неравенство $\beta\leqslant\varepsilon$.

Замечание. Оценки $\Delta^{(k)}(t)$, получаемые на промежуточных преобразованиях матрицы $Б^0$, можно использовать для проверки критерия оптимальности и субоптимальности так называемой укороченной задачи:

$$J(u)=c'x(k)\to\max,\ x(t+1)=Ax(t)+Bu(t)+\eta(t),$$
$$Dx(t)+Gu(t)=g(t),\ x(0)=x_0,$$
$$f_*(x)\leqslant u(t)\leqslant f^*(t),\ t=0,\ 1,\ \dots,\ k.$$

Предположим, что начальное мультиопорное управление $\{u,\ Q_{s\,\text{оп}},\ s\in T\}$ не удовлетворяет приведенным критериям. Построим вектор $l=\{l_i(t),\ (i,\ t)\in Q\}$, позволяющий найти новое управление. Следуя методу максимального приращения [ч. 2], положим

$$l_i(t)=\begin{cases} f_{*i}(t)-u_i(t), & \text{если } \Delta_i^{(t_1)}(t)>0;\\ f_i^*(t)-u_i(t), & \text{если } \Delta_i^{(t_1)}(t)<0,\ (i,\ t)\in Q_{\text{н}};\\ 0, & \text{если } \Delta_i^{(t_1)}(t)=0.\end{cases}$$

Компоненты $l_i(t)$, $(i,\ t)\in Q_{\text{оп}}$, легко найдутся с помощью матриц $P^{-1}_{s\,\text{оп}}$, $s\in T$, из следующих соотношений:

$$\{l_i(t),\ (i,\ t)\in Q_{t_1\,\text{оп}}\}=-P^{-1}_{t_1\,\text{оп}}\{l_i(t)\,Б^{t_1}(t_1,\ t)_i,$$
$$(i,\ t)\in Q^*_{t_1}=Q_{\text{н}}\};$$
$$\{l_i(t),\ (i,\ t)\in Q_{s\,\text{оп}}\}=-P^{-1}_{s\,\text{оп}}\{l_i(t)\,Б^{t_1}(s,\ t)_i,$$
$$(i,\ t)\in Q^*_s=Q^*_{s+1}\cup Q_{(s+1)\,\text{оп}}\},\ s=t_1-1,\ t_1-2,\ \dots,\ 0.$$

Построим новое управление $\bar u=u+\Theta_0 l$, где $\Theta_0\geqslant 0$ — максимальный шаг, при котором выполняется условие $f_*(t)\leqslant\bar u(t)\leqslant f^*(t)$, $t\in T$. В невырожденном случае (т. е. при $\Theta_0>0$) управление $\bar u$ лучше, чем $u$: $J(\bar u)>J(u)$.

Легко показать, что, если $\Theta_0=1$, управление $\bar{u}$ является оптимальным. Пусть шаг $\Theta_0$ определился сигналом $u_{i_0}(t_0)$, где $(i_0, t_0)\in Q_{s_0\text{оп}}$ и $\Theta_0<1$. Элемент $(i_0, t_0)$ надо вывести из опоры. Осуществим процедуру спуска по $(i_0, t_0)$. Для этого перегруппируем элементы множеств $Q_{s\,\text{оп}}$, $s\geqslant s_0$, так, чтобы элемент $(i_0, t_0)$ принадлежал множеству $\overline{Q}_{\bar{s}\,\text{оп}}$ с максимально возможным индексом $\bar{s}$.

Пусть в $i_0$-й строке матрицы $P^{-1}_{s_0\,\text{оп}}\text{Б}^{t_1}(s_0, T)$ существует элемент $P^{-1}_{s_0\,\text{оп}}(i_0)\,\text{Б}^{t_1}(s_0, t_*)_{j_*}\neq 0$, $(j_*, t_*)\in Q_{(s_0+1)\,\text{оп}}$, где $P^{-1}_{s_0\,\text{оп}}(i_0)$ — $i_0$-я строка матрицы $P^{-1}_{s_0\,\text{оп}}$. В множествах $Q_{s_0\,\text{оп}}$ и $Q_{(s_0+1)\,\text{оп}}$ поменяем местами элементы $(i_0, t_0)$ и $(j_*, t_*)$: $\overline{Q}_{s_0\,\text{оп}}=(Q_{s_0\,\text{оп}}\setminus(i_0, t_0))\cup(j_*, t_*)$, $\overline{Q}_{(s_0+1)\,\text{оп}}=(Q_{(s_0+1)\,\text{оп}}\setminus(j_*, t_*))\cup(i_0, t_0)$. При этом множество $Q_{\text{оп}}$ остается неизменным, а матрицы $P^{-1}_{s_0\,\text{оп}}$ и $P^{-1}_{(s_0+1)\,\text{оп}}$ меняются. Новые матрицы $\overline{P}^{-1}_{s_0\,\text{оп}}$ и $\overline{P}^{-1}_{(s_0+1)\,\text{оп}}$ вычисляются по формулам

$$\overline{P}^{-1}_{s_0\,\text{оп}}=[E+(e_{i_0}-a_{j_*})\,e'_{i_0}/a_{i_0 j_*}]\,P^{-1}_{s_0\,\text{оп}}, \tag{4}$$

где $a_{j_*}=P^{-1}_{s_0\,\text{оп}}\text{Б}^{t_1}(s_0, t_*)_{j_*}$; $a_{i_0 j_*}$ — $i_0$-й элемент вектора $a_{j_*}$;

$$\overline{P}^{-1}_{(s_0+1)\,\text{оп}}=[E-e_{j_*}(a_{i_0}+e_{j_*})']\,P^{-1}_{(s_0+1)\,\text{оп}}, \tag{5}$$

где $a_{i_0}$ — вектор с компонентами $P^{-1}_{s_0\,\text{оп}}(i_0)\,\text{Б}^{t_1}(s_0, t)_j$, $(j, t)\in Q_{(s_0+1)\,\text{оп}}$. Остальные матрицы $P^{-1}_{s\,\text{оп}}$, $s\neq s_0$, $s\neq s_0+1$, $s\in T$, остаются прежними.

Пусть в $i_0$-й строке матрицы $P^{-1}_{s_0\,\text{оп}}\text{Б}^{t_1}(s_0, T)$ все элементы $P^{-1}_{s_0\,\text{оп}}(i_0)\,\text{Б}^{t_1}(s_0, t)_j=0$, $(j, t)\in Q_{(s_0+k)\,\text{оп}}$, $k=\overline{1, s_1-s_0-1}$, но существует $P^{-1}_{s_0\,\text{оп}}(i_0)\,\text{Б}^{t_1}(s_0, t_*)_{j_*}\neq 0$, $(j_*, t_*)\in Q_{s_1\,\text{оп}}$. В множествах $Q_{s_0\,\text{оп}}$ и $Q_{s_1\,\text{оп}}$ меняем местами элементы $(i_0, t_0)$ и $(j_*, t_*)$: $\overline{Q}_{s_0\,\text{оп}}=(Q_{s_0\,\text{оп}}\setminus(i_0, t_0))\cup(j_*, t_*)$, $\overline{Q}_{s_1\,\text{оп}}=(Q_{s_1\,\text{оп}}\setminus(j_*, t_*))\cup(i_0, t_0)$. Новые матрицы $\overline{P}^{-1}_{s_0\,\text{оп}}$ и $\overline{P}^{-1}_{s_1\,\text{оп}}$ находятся по формулам (4), (5). Остальные обратные опорные матрицы не меняются.

Пусть в $i_0$-й строке матрицы $P^{-1}_{s_0\,\text{оп}}\text{Б}^{t_1}(s_0, T)$ все элементы $P^{-1}_{s_0\,\text{оп}}(i_0)\,\text{Б}^{t_1}(s_0, t)_j=0$, $(j, t)\in Q_{(s_0+k)\,\text{оп}}$, $k=\overline{1, t_1-s_0}$, или $s_0=t_1$. В этом случае элемент $(i_0, t_0)$ нельзя перевести в множество $\overline{Q}_{\bar{s}\,\text{оп}}$, где $\bar{s}>s_0$. Используя элементы строки $P^{-1}_{s_0\,\text{оп}}(i_0)\,\text{Б}^{t_1}(s_0, T)$, по правилам адаптивного метода [ч. 2] находим элемент $(i_1, t_1)$, который надо ввести в опору $Q_{\text{оп}}$ вместо элемента $(i_0, t_0)$. В множестве $Q_{s_0\,\text{оп}}$ заменяем элемент $(i_0, t_0)$ на $(i_1, t_1)$: $\overline{Q}_{s_0\,\text{оп}}=(Q_{s_0\,\text{оп}}\setminus(i_0, t_0))\cup(i_1, t_1)$. При такой замене меняется только опорная матрица блоков $Б^{(s_0)}(s_0, T)$. Новую матрицу $\overline{P}^{-1}_{s_0\,оп}$ находим по формуле (4). Управлению $\overline{u}$ приписываем мультиопору $\{\overline{Q}_{s\,оп},\ s \in T\}$, где $\overline{Q}_{s\,оп} = Q_{s\,оп}$ для $s < s_0$ и $s > \overline{s}$. С мультиопорным управлением $\{\overline{u},\ \overline{Q}_{s\,оп},\ s \in T\}$ поступаем так же, как с $\{u,\ Q_{s\,оп},\ s \in T\}$.

Замечания. 1. Для $s < s_0$ новые потенциалы $\bar{v}(s)$ и оценки $\overline{\Delta}(s)$ совпадают с потенциалами и оценками, полученными на предыдущей итерации.

2. По аналогии с § 1 критерий оптимальности можно сформулировать в терминах дискретного принципа максимума.

Для оптимальности управления $u^0$ необходимо и достаточно существование такой опоры $Q_{оп}$, что

$$v'(t)\,Gu(t) + \psi'(t)\,Bu(t) = \max_{f_*(t) \leqslant u \leqslant f^*(t)} (v'(t)\,Gu + \psi'(t)\,Bu),$$

где $v'(t)$ — $m$-вектор с компонентами

$v_j(t) = \{c'A^{t_1-\tau-1}b_i,\ (i, \tau) \in Q_{оп}\}\,Б^{-1}_{оп}(mt+j)$; $Б^{-1}_{оп}(mt+j)$ — $(mt+j)$-й столбец матрицы $Б^{-1}_{оп}$; $Б_{оп} = \{Б(T, t)_i,\ (i, t) \in Q_{оп}\}$; $\psi'(t)$ — решение системы

$$\psi'(t-1) = \psi'(t)\ A - v'(t)\,D$$

с начальным условием $\psi'(t_1 - 1) = c' - v'(t_1 - 1)\,D$.

3. Интересно сравнить изложенный метод решения задачи (1) с обычным методом решения задачи

$$J(u) = c'x(t_1) = \max,\ x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + \eta(t),$$
$$\mu z(t+1) = \mu z(t) + Dx(t) + Gu(t) - g(t),\ x(0) = x_0,$$
$$\mu z(0) = g(0) - Dx(0) - Gu(0),\ f_*(t) \leqslant u(t) \leqslant f^*(t),\ t \in T,$$

в которой параметр $\mu \geqslant 0$ — достаточно малое число.

4. Поскольку в § 2—3 число переменных предполагается большим, то при фактическом решении задач целесообразно использовать элементы метода § 1 гл. I. Этот вопрос носит чисто технический характер.

# Глава III

# СЕТЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Сетевые модели и соответствующие им сетевые (потоковые) методы получили в последние годы широкое распространение при решении разнообразных задач оптимизации. В [ч. 2] изложены некоторые сетевые реализации предложенных в [ч. 1] общих методов применительно к транспортным задачам. В данной главе рассматриваются как новые сетевые задачи, так и задачи, исследованные в [ч. 2] другими методами. При обосновании методов основное внимание уделяется учету специфики сетевых задач. Несмотря на значительный объем главы, в ней удалось рассмотреть лишь часть из большого числа сетевых задач. С другими задачами и методами можно познакомиться по [8, 15, 16].

## § 1. Экстремальные пути

В приложениях встречаются разнообразные экстремальные задачи, сформулированные в терминах путей на сети. Математические модели двух типов подобных задач исследуются в данном параграфе. Эти задачи, с одной стороны, связаны с некоторыми задачами, рассмотренными в книге (см., например, [ч. 2] и § 8), с другой — имеют непосредственные важные приложения.

**1. Минимальные пути.** Пусть $S=\{I,\ U\}$ — *сеть*, на которой из всех метрических характеристик, введенных в [ч. 2], определены только стоимости $c_{ij}\neq 0$ дуг $(i, j)\in U$, именуемые в данном параграфе (условно) *длинами дуг.* Последовательность дуг из $U$

$$(i_1, i_2),\ (i_2, i_3),\ \ldots,\ (i_{k-1}, i_k), \tag{1}$$

в которой конец $i_s$ каждой (кроме последней, $s\neq k$) дуги является началом последующей (кроме первой), называется *путем* из $i_1$ в $i_k$. Сеть $S$ называют *сильно связной,* если любые два ее узла можно соединить путем. Число $c_{i_1i_2}+c_{i_2i_3}+\ldots+c_{i_{k-1}i_k}$ называется *длиной пути* (1). Если из $i_1$ в $i_k$ нет пути, то условно считается, что длина пути из $i_1$ в $i_k$ равна $\infty$.

*Задача о минимальном (кратчайшем) пути* состоит в построении для заданных узлов $i_1$, $i_k\in I$ пути из $i_1$ в $i_k$ с минимальной длиной.

Опишем только три метода решения поставленной задачи. Дополнительные сведения о методах решения задачи о минимальном пути можно найти в [8, 16].

**Метод последовательных приближений в пространстве функции Беллмана.** Задачу о минимальном пути из фиксированного узла $i_1$ в заданный узел $i_k$ погрузим (вложим) в семейство задач о минимальных путях из $i_1$ в произвольные узлы $i\in I$. Длину минимального пути из $i_1$ в $i$ обозначим через $B_i$ *(функция Беллмана).* Пусть $I^-(j)$ — совокупность узлов $i\in I$, соединенных с $j\in I$ дугами $(i, j)$, которые оканчиваются в $j$. Стандартными рассуждениями динамического программирования показывается, что функция $B_i$ удовлетворяет *уравнению Беллмана*

$$B_j = \min_{i \in I^-(j)} (B_i + c_{ij}), \quad j \neq i_1, \quad j \in I, \tag{2}$$

с краевым условием (при условии, что нет отрицательных контуров *), проходящих через $i_1$)

$$B_{i_1} = 0. \tag{3}$$

Если же $B_i$, $i \in I$,— решение уравнения (2) с краевым условием (3), а $i$, $i_k$, $i_{k-1}$, ..., $i_1$ — последовательность узлов, найденная из соотношений

$$B_i = B_{i_k} + c_{i_k i} = \min_{j \in I^-(i)} (B_j + c_{ji});$$

$$B_{i_k} = B_{i_{k-1}} + c_{i_{k-1} i_k} = \min_{j \in I^-(i_k)} (B_j + c_{j i_k}), \ \ldots, \ B_{i_2} = \tag{4}$$

$$= B_{i_1} + c_{i_1 i_2} = \min_{j \in I^-(i_2)} (B_j + c_{j i_2}),$$

то последовательность дуг $(i_1, i_2)$, $(i_2, i_3)$, ..., $(i_k, i)$ составляет минимальный путь из $i_1$ в $i$. Это утверждение непосредственно следует из (4).

Уравнение Беллмана (2), (3) будем решать *методом последовательных приближений в пространстве функции Беллмана.* Для этого построим последовательные приближения $B_j^l$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, по формулам

$$B_j^l = \min_{i \in I^-(j)} (B_i^{l-1} + c_{ij}), \quad l = 1, 2, \ldots, \quad j \in I, \quad j \neq i_1,$$

$$B_{i_1}^0 = 0, \quad B_i^0 = \infty, \quad i \in I \setminus i_1. \tag{5}$$

Рекуррентное уравнение (5) проще уравнения (2). Оно представляет собой уравнение Беллмана для функции $B_j^l$, имеющей следующий физический смысл: $B_j^l$ — минимальная длина пути из $i_1$ в $j$, состоящего из не более чем $l$ дуг.

Ясно, что $B_j^l \equiv B_j^{l(j)}$ при $l \geqslant l(j)$ и $B_j^{l(j)} = B_j$, где $l(j)$ — количество дуг минимального пути из $i_1$ в $j$. Если в сети $S$ нет отрицательных контуров, то очевидно, что $l(j) \leqslant |I|$, $j \in I$.

Рассмотрим сначала случай, когда в сети нет отрицательных контуров. Из приведенных рассуждений следует,

---

*) *Контуром* называется путь (1), у которого $i_1 = i_k$. *Контур отрицательный,* если его длина отрицательна.

что для построения минимальных путей достаточно решать уравнение (5) до тех пор, пока для каждого узла $i \in I$ не стабилизируются значения функции $B_i^l$, $l = 0, 1, 2 \ldots$. Уравнение (5) удобно решать *методом расстановки меток*. Процесс решения начинается с присвоения узлам $i \in I$ меток $\mu_{i_1} = 0$, $\mu_i = \infty$, $i \in I$, $i \neq i_1$. Пусть на $l$-м шаге узлы $i \in I$ имеют метки $\mu_i$. Для каждого $i \in I$, $i \neq i_1$, подсчитаем числа

$$\mu_i' = \min_{j \in I^-(i)} (\mu_j + c_{ji}). \tag{6}$$

Если $\mu_i' = \mu_i$, то метки узла $i$ сохраняются. При $\mu_i' < \mu_i$ метку $\mu_i$ заменяем на новую $\bar{\mu}_i = \mu_i'$. Процесс решения останавливается, если на очередном шаге не изменилась метка ни одного узла. Это произойдет не более чем через $|I|$ шагов.

Из сравнения (6) и (5) заключаем, что значение метки $\mu_i$ на $l$-м шаге равно $B_i^l$. Аналогично значение $\mu_i$ после остановки процесса решения — длина минимального пути из $i_1$ в $i$.

Зная постоянные метки $\mu_i$, $i \in I$, легко построить минимальный путь из $i_1$ в $i_k$ по соотношениям

$$\mu_{i_k} = \mu_{i_{k-1}} + c_{i_{k-1} i_k} = \min_{i \in I^-(i_k)} (\mu_i + c_{i i_k}),$$

$$\mu_{i_{k-1}} = \mu_{i_{k-2}} + c_{i_{k-2} i_{k-1}} = \min_{i \in I^-(i_{k-1})} (\mu_i + c_{i i_{k-1}}), \ \ldots, \mu_{i_2} =$$

$$= \mu_{i_1} + c_{i_1 i_2} = \min_{i \in I^-(i_2)} (\mu_i + c_{i i_2}),$$

следующим из равенств (4).

Отметим, что изложенный метод позволяет без дополнительных вычислений построить минимальный путь из $i_1$ не только в заданный узел $i_k$, но и в любой другой узел сети. Это одно из достоинств метода динамического программирования, позволяющее, в частности, провести анализ решения на чувствительность. Но если в конкретной задаче не требуется дополнительной информации о решении, то в общем случае не найдено способов сокращения вычислений для построения единственного минимального пути.

Рассмотрим теперь случай, когда перед началом решения задачи о минимальном пути неизвестно, есть ли в сети $S$ отрицательные контуры. Процесс решения начинается с присвоения узлам сети двухэлементных меток

$(s_j,\ \mu_j)=(\infty,\ \infty)$, $j \in I \setminus i_1$, $(s_{i_1},\ \mu_{i_1})=(0,\ 0)$. Пусть на $l$-м шаге узлы $j$, $j \in I$, имеют метки $(s_j,\ \mu_j)$. Для каждого $j \in I$ найдем

$$\mu_j' = \min_{i \in I^-(j)} \{\mu_i + c_{ij}\} = \mu_{i_*} + c_{i_* j}.$$

Если $\mu_j' = \mu_j$, метка узла $j$ не меняется*). Пусть $\mu_j' < \mu_j$. Построим множество узлов $L(i_*) = \{i_{*1},\ i_{*2},\ \ldots,\ i_{*p},\ i_1\}$, где $i_{*1} = s_{i_*}$; $i_{*2} = s_{i_{*1}}$, $\ldots$ ; $i_1 = s_{i_{*p}}$. Если $j \notin L(i_*)$, узлу $j$ приписываем новую метку $(\bar{s}_j = i_*,\ \bar{\mu}_j = \mu_j')$ и соответственно меняем вторые элементы меток узлов, зависящие от метки узла $j$: $\bar{\mu}_i = \mu_i + (\mu_j' - \mu_j)$, $i \in N(j) = \{i : j \in L(i)\}$. Если $j \in L(i_*)$, в сети $S$ контур $(i_{*t},\ i_{*(t-1)})$, $(i_{*(t-1)},\ i_{*(t-2)})$, $\ldots$, $(i_{*1},\ i_*)$, $(i_*,\ i_{*t})$, где $i_{*t} = j$, будет отрицательным.

Обозначим: $I^{*1} = \{i_*,\ i_{*1},\ \ldots,\ i_{*t}\}$. Рассмотрим множество узлов $\omega(I^{*1}) = \{j : j \notin I^{*1},\ \exists\ (i,\ j),\ i \in I^{*1}\}$, соседних с множеством $I^{*1}$. Если $\omega(I^{*1}) \neq \varnothing$, то полагаем $I^{*2} = I^{*1} \cup \omega(I^{*1})$ и рассматриваем множество $\omega(I^{*2})$ и т. д. до тех пор, пока на некотором шаге $\omega(I^{*s}) \neq \varnothing$. В силу конечности множества $I$ множество $I^{*s}$ будет построено за конечное число шагов. Если $i_k \in I^{*s}$, то длина минимального пути из $i_1$ в $i_k$ равна $-\infty$. Если $i_1 \in I^{*s}$, $i_k \notin I^{*s}$, в сети $S$ нет путей из $i_1$ в $i_k$. Решение задачи прекращается.

Пусть $i_1$, $i_k \notin I^{*s}$. Узлы $I^{*s}$ и связанные с ними дуги вычеркиваем из сети $S$ и в полученной сети $\bar{S}$ продолжаем процесс расстановки меток.

Каждая итерация может закончиться одной из следующих ситуаций: 1) меняется метка хотя бы одного узла, причем второй элемент новой метки строго меньше второго элемента старой метки; 2) в сети обнаружен отрицательный контур и построено множество $I^{*s}$. Здесь возможны случаи: 2а) $i_1$, $i_k \notin I^{*s}$, 2б) $i_k \in I^{*s}$, 2в) $i_1 \in I^{*s}$, $i_k \notin I^{*s}$; 3) для всех узлов сети $\bar{S}$ ($\bar{S} = S$, если не было удалений дуг и узлов) выполняется условие $\mu_j' = \mu_j$, т. е. нельзя изменить ни одной метки.

Покажем, что через конечное число итераций возникнет одна из ситуаций 2б), 2в), 3). Ситуация 1) не может встречаться бесконечное число раз. Действительно, каждой совокупности первых элементов меток соответствует некоторое дерево, по которому однозначно можно восста-

*) Здесь формально считается, что $\infty + c_{ij} = \infty$ для любого конечного $c_{ij}$.

новить вторые элементы $\mu_j$ меток. Поскольку на каждой итерации происходит уменьшение второго элемента хотя бы у одной метки, то одна и та же совокупность первых меток не может встретиться дважды. Число деревьев в сети $S$ конечно. Следовательно, ситуация 1) может встречаться конечное число раз.

Рассмотрим ситуацию 2а). В силу конечности множества $I$ она также не может повторяться бесконечное число раз. Следовательно, через конечное число итераций возникнет одна из ситуаций 2б), 2в), 3).

Если возникает одна из ситуаций 2б), 2в), 3), то решение задачи прекращается, так как в случае 2б) длина минимального пути из $i_1$ в $i_k$ равна $-\infty$, в случае 2в) в сети $S$ не существует путей из $i_1$ в $i_k$, в случае 3) длина минимального пути из $i_1$ в $i_k$ равна $\mu_{i_k}$.

**Метод расширения области определения функции Беллмана.** *Областью определения уровня $t$ функции Беллмана* назовем множество $R_t=\{i: B_i \leqslant t\}$, состоящее из узлов $i \in I$, длина минимальных путей до которых из $i_1$ не превышает $t$. Понятно *), что $R_0=i_1$, так как $B_{i_1}=0$, $B_i>0$, $i \in I \setminus i_1$.

Предположим, что построено множество $R_t$ и для каждого узла $i \in R_t$ известно значение $B_i$ функции Беллмана. Пусть $i_k \overline{\in} R_t$. Построим множество $R_\tau$, удовлетворяющее соотношениям $|R_\tau|>|R_t|$, но $R_{\tau-\varepsilon}=R_t$ при любом $\varepsilon$, $0<\varepsilon \leqslant \tau - t$. Ясно, что индекс $\tau$ искомого множества $R_\tau$ равен $\tau = \min\limits_{p \in I \setminus R_t} B_p$ и область определения уровня $\tau$ функции Беллмана имеет вид

$$R_\tau = R_t \cup \{i: B_i=\tau\}. \tag{7}$$

Нетрудно показать, что при условии $c_{ij}>0$, $(i, j) \in U$, верны соотношения **)

$$\tau = \min_{p \in I \setminus R_t} B_p = \min_{p \in \omega(R_t)} \min_{j \in I^-(p) \cap R_t} (B_j + c_{jp}),$$
$$B_k > \tau, \quad k \overline{\in} R_t \cup \omega(R_t), \tag{8}$$

где $\omega(R_t)=\{j: j \overline{\in} R_t, \exists\ (i, j), i \in R_t\}$ — множество узлов, соседних с множеством $R_t$. Из соотношений (8) легко найти $\tau$ и узлы $i$, для которых $B_i=\tau$.

---

*) Предполагается, что $c_{ij}>0$, $(i, j) \in U$.

**) Очевидно, что при $\omega(R_t)=\varnothing$ имеем $\tau=\infty$; $B_i=\infty$, $i \in I \setminus R_t$, $R_\infty = I$.

Соотношения (7), (8) позволяют построить следующий алгоритм поиска минимальных путей. В начале процесса полагаем $R_0=i_1$ и приписываем узлу $i_1$ постоянную метку $\mu_{i_1}=0$. Пусть построено множество узлов $R_t$, элементы $i$ которого имеют постоянные метки $\mu_i$. Рассмотрим множество узлов $\omega(R_t)$, соседних с множеством $R_t$. Для узлов $j\in\omega(R_t)$ вычислим временные метки

$$\mu_j'=\min_{i\in I^-(j)\cap R_t}(B_i+c_{ij}).$$

Найдем $\tau=\min\limits_{j\in\omega(R_t)}\mu_j'$. Построим область определения уровня $R_\tau=R_t\cup\{j:j\in\omega(R_t),\ \mu_j'=\tau\}$, в котором узлам из $\{j:j\in\in\omega(R_t),\ \mu_j'=\tau\}$ припишем постоянные метки $\mu_j$, равные вычисленным вре́менным меткам $\mu_j'$. Процесс решения заканчивается, как только на некотором шаге окажется, что 1) $\omega(R_\tau)=\varnothing$, $i_k\bar{\in}R_\tau$ или 2) $i_k\in R_\tau$, т. е. как только узел $i_k$ получит постоянную метку $\mu_{i_k}$. В первом случае нет пути из $i_1$ в $i_k$, во втором длина минимального пути из $i_1$ в $i_k$ равна $\mu_{i_k}$. Конечность метода следует из того, что множество узлов $I$ конечно и на каждом шаге множество узлов, имеющих постоянные метки, увеличивается хотя бы на один элемент.

Сравним данный алгоритм с приведенным выше методом последовательных приближений в пространстве функции Беллмана. Основное отличие состоит в том, что в предыдущем методе до окончания процесса решения все метки считаются вре́менными, поскольку они могут еще измениться. Это значит, что на каждом шаге следует просматривать все узлы сети. В методе расширения области определения функции Беллмана к началу каждого шага известно множество $R_t$ узлов с постоянными метками. Просмотр только узлов $\omega(R_t)$, соседних с множеством $R_t$, позволяет приписать постоянные метки некоторым новым узлам из $\omega(R_t)$ и построить новое множество $R_\tau$, $|R_\tau|>|R_t|$, с постоянными метками. Следовательно, второй метод является более эффективным, поскольку он требует меньше вычислений. Заметим, однако, что первый метод является более общим, так как для него требование $c_{ij}>0$, $(i, j)\in U$, при котором обоснован второй метод, не существенно. Основой обоих методов является уравнение Беллмана (2).

Покажем, как из уравнения (2) можно получить и второй метод построения минимальных путей. Предположим, что выполнены условия $c_{ij}\geqslant 0$, $(i, j)\in U$. Пусть построено множество узлов $I^*$, $I^*\subset I$, с известными значениями $B_i$ функции Беллмана (для первой итерации $I^*=i_1$). Подсчитаем числа $B'_j = \min\limits_{i\in I^-(j)\cap I^*}(B_i+c_{ij})$, $j\in\omega(I^*)$. Из уравнения (2) для $j\in\omega(I^*)$ имеем

$$B_j = \min_{i\in I^-(j)}(B_i+c_{ij}) = \min\{\min_{i\in I^-(j)\cap I^*}(B_i+c_{ij}),$$
$$\min_{i\in I^-(j)\setminus I^*}(B_i+c_{ij})\} = \min\{B'_j, \min_{i\in I^-(j)\setminus I^*}(B_i+c_{ij})\}. \tag{9}$$

Нетрудно проверить, что для $j_*\in\omega(I^*)$, где $j_*$ определено из условия $B'_{j_*}=\min B'_j$; $j\in\omega(I^*)$, уравнение (9) принимает вид

$$B_{j_*} = \min\{B'_{j_*}, \min_{i\in I^-(j_*)\setminus I^*}(B_i+c_{ij_*})\} = B'_{j_*},$$

так как $B_i+c_{ij_*}\geqslant B'_{j_*}$, $i\in I^-(j_*)\setminus I^*$. Следовательно, множество $I^*$ можно расширить до $\bar{I}^*=I^*\cup j_*$. Следующая итерация начинается с множества $\bar{I}^*$. Описанный алгоритм совпадает с методом расширения области определения функции Беллмана, если $c_{ij}>0$, $(i, j)\in U$.

**Метод потенциалов.** Задачу о минимальном пути можно связать с задачей о потоке минимальной стоимости. Представим мысленно, что узлам $i_1$ и $i_k$ приписаны интенсивности $a_{i_1}=1$, $a_{i_k}=-1$, числа $c_{ij}$ — дуговые стоимости. Очевидно, стоимость потока $x=\{x_{ij}, (i, j)\in U\}$, где $x_{i_1i_2}=\ldots=x_{i_{k-1}i_k}=1$; $x_{ij}=0$ для остальных дуг, будет равна длине пути (1). Согласно методу потенциалов решения задачи о потоке минимальной стоимости [ч. 2], среди оптимальных потоков существует такой базисный поток $\{x^0, U^0_{\text{Б}}\}$, стоимость которого равна длине минимального пути и единичные (ненулевые) дуговые потоки которого расположены вдоль минимального пути. Согласно критерию оптимальности [ч. 2], найдутся такие потенциалы $u_i$ узлов $i\in I$, что

$$u_i-u_j-c_{ij}=0,\ (i, j)\in U^0_{\text{Б}}; \tag{10}$$

$$\Delta_{ij}=u_i-u_j-c_{ij}\leqslant 0,\ (i, j)\in U^0_{\text{н}}=U\setminus U^0_{\text{Б}}. \tag{11}$$

Поскольку потенциал одного из узлов можно выбрать произвольно, то положим $u_{i_1}=0$. Частичная сеть $\{I, U^0_{\text{Б}}\}$

является деревом, и поэтому в сети $\{I, U_Б^0\}$ из $i_1$ в $i_k$ существует единственная цепь, которая в данном случае является путем (в силу того, что $a_{i_1}=1$, $a_{i_k}=-1$). Если сложить равенства (10) вдоль этого пути, получим $-u_{i_k}=$ $=c_{i_1i_2}+\ldots+c_{i_{k-1}i_k}$. Сложение соответствующих равенств (10) и неравенств (11) вдоль любого другого пути из $i_1$ в $i_k$ приводит к соотношению $-u_{i_k}\leqslant c_{i_1i_{*2}}+\ldots+c_{i_{*p}i_k}$. Таким образом, величина потенциала $u_{i_k}$, взятая с обратным знаком, равна длине минимального пути из $i_1$ в $i_k$.

Соотношения (11) не зависят от интенсивностей $a_i$, $i\in I$, т. е. они доставляют критерий оптимальности для каждой задачи о потоке минимальной стоимости. Поэтому, привлекая алгоритм решения задачи о потоке минимальной стоимости к поиску минимальных путей, можно задавать интенсивности узлов так, чтобы упрощались вычисления, ведущие к выполнению (10), (11).

Опишем алгоритм метода потенциалов для построения минимальных путей. Пусть задано начальное базисное множество $U_Б$ (в данном параграфе множество дуг $U_Б$ называется базисным, если для каждого узла, инцидентного одной из его дуг, существует единственный путь из узла $i_1$). Потенциалы узлов $u_i$, $i\in I$, найдем из следующей системы:

$$u_{i_1}=0,\ u_i-u_j-c_{ij}=0,\ (i, j)\in U_Б.$$

Подсчитаем оценки небазисных дуг: $\Delta_{ij}=u_i-u_j-c_{ij}$, $(i, j)\in U_Н$. Если все $\Delta_{ij}\leqslant 0$, $(i, j)\in U_Н$, то $U_Б$ является *деревом минимальных путей* и значение потенциала $u_i$, взятое с обратным знаком, равно длине минимального пути из $i_1$ в $i$.

Пусть $\Delta_{i_*j_*}>0$, $(i_*, j_*)\in U_Н$. Как известно [ч. 2], из дуг множества $U_Б\cup(i_*, j_*)$ можно образовать единственный цикл. Если все дуги этого цикла имеют одно направление, то он является отрицательным контуром. Исходя из этого контура по правилам, описанным в методе последовательных приближений в пространстве функции Беллмана, строим множество узлов $I^{*s}$. Если $i_k\in I^{*s}$, длина минимального пути из $i_1$ в $i_k$ равна $-\infty$ и процесс решения задачи прекращается. Если $i_k\overline{\in} I^{*s}$, из сети $S$ удаляем узлы $j\in I^{*s}$ и связанные с ними дуги, в оставшейся части сети продолжаем процесс решения задачи.

Пусть цикл, построенный из дуг $U_Б\cup(i_*, j_*)$, не является контуром. Нетрудно показать, что в этом случае цикл можно представить в виде двух путей из некоторого узла $\bar{i}$ в узел $j_*$:

$$(\bar{i}, \bar{i}_1), \ \ldots, \ (\bar{i}_s, i_*), \ (i_*, j_*); \tag{12}$$

$$(\bar{i}, \underline{i}_1), \ \ldots, \ (\underline{i}_{p-1}, \underline{i}_p), \ (\underline{i}_p, j_*). \tag{13}$$

При наложении $\Theta_{i_*j_*}$-циркуляции на цикл (12), (13) дуговые потоки на дугах (13) уменьшаются. Значит, максимально допустимый шаг достигается на одной из дуг пути (13).

По предположению, поток в сети является базисным, следовательно, для любого пути $(i_1, i_2), \ldots, (i_{p-1}, i_p)$, составленного из дуг дерева $U_Б$, выполняется соотношение $x_{i_1i_2} \geqslant x_{i_2i_3} \geqslant \ldots \geqslant x_{i_{p-1}i_p}$. Из последнего условия следует, что при наложении на цикл (12), (13) $\Theta_{i_*j_*}$-циркуляции максимально допустимый шаг достигается на дуге $(\underline{i}_p, j_*)$. Согласно методу решения задачи о потоке минимальной стоимости, меняем базис: дугу $(i_*, j_*)$ вводим в базис $U_Б$ вместо дуги $(\underline{i}_p, j_*)$. Решение задачи будет получено за конечное число итераций.

Замечания. 1. Предположим, что $c_{ij} \geqslant 0$, $(i, j) \in U$. Требуется построить минимальный путь из $i_1$ в $i_k$. Предположим также, что известен некоторый путь $\tilde{U} = \{(i_1, i_2), \ldots, (i_{k-1}, i_k)\}$ из $i_1$ в $i_k$, длина которого, по мнению специалистов, близка к минимальной. Достроим путь $\tilde{U}$ до дерева следующим образом. Из равенств $u_{i1} = 0$, $u_i - u_j - c_{ij} = 0$, $(i, j) \in \tilde{U}$, вычислим потенциалы узлов $\tilde{I} = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$. Рассмотрим узлы $\omega(\tilde{I})$ и найдем узел $j_*$ из условия

$$u'_{j_*} = \max u'_j, \ j \in \omega(\tilde{I}),$$

где $u'_j = u_{i(j)} - c_{i(j)j} = \max\limits_{i \in I^-(j) \cap \tilde{I}} (u_i - c_{ij})$. Узлу $j_*$ припишем потенциал $u_{j_*} = u'_{j_*}$ и добавим его к множеству $\tilde{I}$, дугу $(i(j_*), j_*)$ добавим к множеству $\tilde{U}$. Для новых множеств $\tilde{I}$, $\tilde{U}$ повторяем описанные выше операции до тех пор, пока $\omega(\tilde{I}) = \varnothing$. Для сильно связной сети это означает, что $\tilde{U}$ — дерево.

Если начальный путь, указанный специалистами, действительно был минимальным, то для $U_Б^0 = \tilde{U}$ выполняется критерий оптимальности (11). В противном случае решаем задачу методом потенциалов, начиная с базиса $\tilde{U}$.

Можно показать, что при этом на каждой итерации будет происходить улучшение пути из $i_1$ в $i_k$. (В общем случае на итерации может улучшиться путь из $i_1$ в некоторый узел $i_*$, а путь из $i_1$ в $i_k$ не изменится.)

Вместо пути из $i_1$ в $i_k$ специалисты могли задать любую связную часть дерева $\tilde{U}$ с корнем в $i_1$, которая, по их мнению, является частью дерева минимальных путей (частью оптимального базиса). Тогда множество $\tilde{U}$ достраиваем до дерева по аналогичной схеме.

2. Пусть в сети по дереву $U_Б$ подсчитаны потенциалы $u_i$, $i \in I$. Величина $\sum\limits_{(i,\, j) \in U_{н},\ \Delta_{ij} > 0} \Delta_{ij}$ может служить оценкой субоптимальности пути из $i_1$ в $i_k$ по дугам дерева $U_Б$.

3. Все приведенные алгоритмы нацелены на построение скорее дерева минимальных путей, чем минимального пути из $i_1$ в $i_k$.

**2. Максимальные пути.** *Задача о максимальном (критическом) пути* состоит в построении для заданных узлов $i_1$, $i_k \in I$ пути из $i_1$ в $i_k$ с наибольшей длиной. Задача о максимальном пути легко сводится к задаче о минимальном пути заменой длин дуг $c_{ij}$ на $-c_{ij}$, $(i,\ j) \in U$. Следовательно, все методы решения задачи о минимальном пути могут быть использованы для решения задачи о максимальном пути *).

**Метод последовательных приближений в пространстве функций Беллмана.** Задачу о максимальном пути из фиксированного узла $i_1$ в заданный узел $i_k$ вложим в семейство задач о максимальных путях из $i_1$ в произвольные узлы $i \in I$. Длину максимального пути из $i_1$ в $i$ обозначим через $B_i$ *(функция Беллмана)*. Легко проверить, что функция $B_i$ удовлетворяет *уравнению Беллмана*

$$B_j = \max_{i \in I^-(j)} (B_i + c_{ij}),\quad j \neq i_1,\quad j \in I, \tag{14}$$

с краевым условием (при условии, что нет положительных контуров, проходящих через $i_1$)

$$B_{i_1} = 0. \tag{15}$$

Если $B_i$, $i \in I$,— решение уравнения (14) с краевым условием (15), а $i$, $i_k$, $i_{k-1}$, . . . , $i_1$ — последовательность узлов, найденных из соотношений

$$\begin{gathered} B_i = B_{i_k} + c_{i_k i} = \max_{j \in I^-(i)} (B_j + c_{ji}), \\ B_{i_k} = B_{i_{k-1}} + c_{i_{k-1} i_k} = \max_{j \in I^-(i_k)} (B_j + c_{j i_k}),\ \ldots, \\ B_{i_2} = B_{i_1} + c_{i_1 i_2} = \max_{j \in I^-(i_2)} (B_j - c_{j i_2}), \end{gathered} \tag{16}$$

*) Исключение составляет метод расширения области определения функции Беллмана, так как для его применения необходимо дополнительное условие $c_{ij} < 0$, $(i,\ j) \in U$.

то последовательность дуг $(i_1, i_2)$, $(i_2, i_3)$, ..., $(i_k, i)$ составляет максимальный путь из $i_1$ в $i$.

Как и в предыдущем пункте, уравнение Беллмана (14), (15) будем решать методом последовательных приближений в пространстве функции Беллмана. Построим последовательные приближения $B_j^l$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, по формулам

$$B_j^l = \max_{i \in I^-(j)} (B_i^{l-1} + c_{ij}), \quad l = 1, 2, \ldots; \ j \in I,$$
$$B_{i1}^0 = 0, \ B_i^0 = -\infty, \ i \in I \setminus i_1. \qquad (17)$$

Здесь $B_j^l$ — максимальная длина пути из $i_1$ в $j$, составленного не более чем из $l$ дуг. Ясно, что $B_j^l \equiv B_j^{l(j)}$ при $l \geqslant l(j)$ и $B_j^{l(j)} = B_j$, где $l(j)$ — количество дуг максимального пути из $i_1$ в $j$. Если в сети $S$ нет положительных*) контуров, то очевидно, что $l(j) \leqslant |I|$, $j \in I$. В этом случае уравнение (17) удобно решать *методом расстановки одноэлементных меток,* который легко получить, используя схему п. 1.

Рассмотрим подробнее общий случай, когда перед началом решения задачи о максимальном пути неизвестно, есть ли в сети $S$ положительные контуры. Процесс решения начинается с присвоения узлам сети двухэлементных меток $(s_j, \mu_j) = (+\infty, -\infty)$, $j \in I \setminus i_1$ $(s_{i_1}, \mu_{i_1}) = (0,0)$. Пусть на $l$-м шаге узлы $j$, $j \in I$, имеют метки $(s_j, \mu_j)$. Для каждого $j \in I$ найдем

$$\mu_j' = \max_{i \in I^-(j)} \{\mu_i + c_{ij}\} = \mu_{i_*} + c_{i_* j}.$$

Если $\mu_j' = \mu_j$, метка узла $j$ не меняется**). Пусть $\mu_j' > \mu_j$. Если $j \overline{\in} L(i_*)$, узлу $j$ приписываем новую метку $(\overline{s}_j = i_*, \ \overline{\mu}_j = \mu_j')$ и соответственно меняем вторые элементы меток узлов $i \in N(j) = \{i : j \in L(i)\} : \overline{\mu}_i = \mu_i + (\mu_j' - \mu_j)$, $i \in N(j)$. Если $j \in L(i_*)$, в сети $S$ найден положительный контур.

Обозначим через $I^{*1}$ множество узлов этого контура. Используя описанную в п. 1 процедуру, строим множество $I^{*s}$. Если $i_k \in I^{*s}$, длина максимального пути из $i_1$ в $i_k$

---

*) Контур называется *положительным,* если его длина положительна.

**) Считается, что $-\infty + c_{ij} = -\infty$ для любого конечного $c_{ij}$.

равна $+\infty$. Если $i_1 \in I^{*s}$, $i_k \overline{\in} I^{*s}$, в сети $S$ нет путей из $i_1$ в $i_k$. Решение задачи прекращается.

Пусть $i_1, i_k \overline{\in} I^{*s}$. Узлы $I^{*s}$ и связанные с ними дуги вычеркиваем из сети $S$ и в полученной сети $\bar{S}$ продолжаем процесс расстановки меток.

Если $\mu'_j = \mu_j$ для всех узлов рассматриваемой сети, процесс решения задачи прекращается. Длина максимального пути из $i_1$ в $i_k$ равна $\mu_{ik}$. При $\mu_{ik} = -\infty$ в сети $S$ не существует путей из $i_1$ в $i_k$. Пусть $\mu_{ik} > -\infty$. Максимальный путь легко восстановить по первым элементам меток: $(i_1, i_{*p})$, $(i_{*p}, i_{*p-1})$, ..., $(i_{*1}, i_k)$, где $\{i_{*1}, i_{*2}, \ldots, i_{*p}\} = L(i_k)$.

Как и в п. 1, можно показать, что задача о максимальном пути описанным методом решается за конечное число шагов.

**Метод расширения области определения функции Беллмана.** Будем считать, что в сети $S$ нет контуров. Алгоритм решения задачи о максимальном потоке состоит в следующем. На первом шаге узлу $i_1$ приписываем постоянную метку $\mu_{i_1} = 0$, узлам $j \in \{j : I^-(j) = \varnothing\}$ — постоянные метки $\mu_j = -\infty$. Через $I^1 = i_1 \cup \{j : I^-(j) = \varnothing\}$ обозначим множество узлов, имеющих постоянные метки на первом шаге.

Пусть на $l$-м шаге имеется множество узлов $I^l$, $i_k \overline{\in} I^l$, для которых известны постоянные метки. Рассмотрим множество $\tilde{I}^l = \{j : j \in I \setminus I^l, \ I^-(j) \in I^l\}$. Покажем, что $\tilde{I}^l \neq \varnothing$, если в сети $S$ нет контуров. Предположим противное, т. е. $\tilde{I}^l = \varnothing$. Из сети $S$ удалим узлы $I^l$ и связанные с ними дуги. Получим сеть $\bar{S} = (\bar{I}, \bar{U})$. По предположению, $i_k \overline{\in} I^l$. Следовательно, $\bar{I} \neq \varnothing$. В сети $\bar{S}$ для каждого узла $j$ множество $\bar{I}^-(j) = \{i : \exists (i, j) \in \bar{U}\}$ не пусто, так как в противном случае для узла $j$ выполнялось бы одно из двух условий: либо $I^-(j) = \varnothing$ и, следовательно, $\mu_j = -\infty$, $j \in I^l$, либо $j \in \tilde{I}^l$. Первое условие противоречит построению сети $\bar{S}$, второе — предположению, что $\tilde{I}^l = \varnothing$. Однако из условия $\bar{I}^-(j) \neq \varnothing$, $j \in \bar{I}$, следует, что в сети $\bar{S}$ есть контур. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Для узлов $j \in \tilde{I}^l$, используя уравнение Беллмана (14), легко найти постоянные метки: $\mu_j = \max\limits_{i \in I^-(j)} (\mu_i + c_{ij})$, $j \in \tilde{I}^l$. Полагаем $I^{l+1} = I^l \cup \tilde{I}^l$ и переходим к следующему шагу.

Задача будет решена, как только будет построено множество $I^p$, для которого $i_k \in I^p$. Длина максимального пути из $i_1$ в $i_k$ равна $\mu_{i_k}$. Если $\mu_{i_k} = -\infty$, в сети $S$ нет путей из $i_1$ в $i_k$.

**Метод потенциалов.** Как отмечалось выше, задача о максимальном пути сводится к задаче о минимальном пути заменой коэффициентов $c_{ij}$ на $-c_{ij}$. Поэтому метод потенциалов легко перенести на задачу о максимальном потоке. При этом метод почти полностью совпадает с методом потенциалов, описанным в п. 1. Отличие состоит лишь в том, что везде $c_{ij}$ заменяется на $-c_{ij}$ и значение потенциала $u_i$, подсчитанного по оптимальному базису $U_Б^0$, равно длине максимального пути из $i_1$ в $i_k$.

## § 2. Потоки, оптимальные по времени

В некоторых прикладных задачах транспортного типа эффективность перевозок оценивается не их стоимостью, а временем, необходимым для выполнения всех перевозок. Существует простой алгоритм решения подобной проблемы для случая транспортной задачи в матричной форме [15]. Ситуация заметно усложняется при рассмотрении сетевых моделей.

**1. Первый алгоритм.** Рассмотрим сеть $S = \{I, U\}$, в которой $I$ — множество узлов с источником $s$ и стоком $t$ (остальные узлы нейтральные), $U$ — множество дуг. Пусть задана величина интенсивности $a$ узлов $s$, $t$, пропускные способности $d_{ij}$ дуг $(i, j) \in U$ и числа $c_{ij}$, равные времени перевозки по дуге $(i, j)$. Требуется найти такой поток $x^0 = \{x_{ij}^0, (i, j) \in U\}$, вдоль которого время транспортировки из $s$ в $t$ минимально. Для удобства дальнейших построений приведем другую формулировку, в которой более четко определена целевая функция.

Пусть $\{P_k, k \in N\}$ — множество всевозможных путей в сети $S$ из источника $s$ в сток $t$, $P_k$ — множество дуг $k$-го пути, $x_k$ — величина потока вдоль $k$-го пути, $N = \{1, \ldots, M\}$, $c(P_k) = \sum_{(i, j) \in P_k} c_{ij}$ — время транспортировки вдоль $P_k$, $I(i, j) = \{k : (i, j) \in P_k\}$. Тогда математическая модель поставленной задачи примет вид

$$\max_{k \in N,\, x_k \neq 0} c(P_k) \to \min,$$
$$\sum_{k \in N} x_k = a, \quad \sum_{k \in I(i, j)} x_k \leqslant d_{ij}, \quad (i, j) \in U, \quad x_k \geqslant 0, \quad k \in N. \qquad (1)$$

Полученная задача не является задачей линейного программирования, однако ее можно свести к решению семейства задач линейного программирования.

Рассмотрим семейство задач

$$a(t) = \max \sum_{k \in N(t)} x_k,$$

$$\sum_{k \in I_t(i,j)} x_k \leqslant d_{ij}, \quad (i, j) \in U, \ x_k \geqslant 0, \ k \in N(t), \qquad (2)$$

где $N(t) = \{k : k \in N, \ c(P_k) \leqslant t\}$, $I_t(i, j) = \{k : k \in N(t), (i, j) \in P_k\}$. Очевидно, что при фиксированном $t$ задача (2) является задачей линейного программирования.

Пусть $t_0$ — длина минимального пути в сети $S$. Положим $t = t_0$ и решим задачу (2). Если $a(t_0) \geqslant a$, то оптимальный план задачи (2) является оптимальным планом задачи (1), $t_0$ — минимальное время перевозки. Пусть $a(t_0) < a$. В сети $S$ из всех путей, длина которых больше $t_0$, выбираем путь с минимальной длиной $t_1 > t_0$ и решаем задачу (2) при $t = t_1$ и т. д.

Процесс решения будет остановлен, если 1) на некотором шаге $a(t_k) \geqslant a$; 2) $t_k = t_{\max}$, $a(t_k) < a$, где $t_{\max}$ — длина максимального пути в сети $S$ из $s$ в $t$. В первом случае оптимальный план задачи (2) при $t = t_k$ является оптимальным планом задачи (1), $t_k$ — минимальное время перевозки. Второй случай означает, что исходная задача (1) не имеет допустимых планов.

Таким образом, решение задачи (1) сводится к решению конечного числа задач вида (2).

Рассмотрим подробнее задачу (2). Из ограничений задачи (2) видно, что вектор матрицы условий, соответствующий пути $P_k$, $k \in N(t)$, имеет вид $a^k(U) = \{a^k_{ij}, (i, j) \in U\}$, $a^k_{ij} = 1$, если $(i, j) \in P_k$; $a^k_{ij} = 0$, если $(i, j) \overline{\in} P_k$. Следовательно, чтобы задать вектор условий, соответствующий пути $P_k$, надо знать $|P_k|$ чисел. Кроме того, число столбцов $|N(t)|$ матрицы условий может оказаться очень большим. Поэтому основная трудность при решении задачи (2) стандартными методами состоит в построении путей $P_k$, $k \in N(t)$, и хранении информации о всех векторах $a^k(U)$, $k \in N(t)$, матрицы условий. Ниже приводится алгоритм, на итерациях которого не требуется знание всех столбцов $a^k(U)$, $k \in N(t)$, в явном виде. Они генерируются в процессе решения с помощью специальной подпрограммы.

Решаем задачу (2) при $t=t_p$, $p=0,1,\ldots,q$. Введем следующие определения. Совокупность чисел $x(t_p)=\{x_k, k\in N(t_p)\}$ называется *планом* задачи (2), если они удовлетворяют всем ее ограничениям. Пара $Q_{оп}=\{U_{оп}, N_{оп}\}$ — *опора* задачи (2), если $\det A(U_{оп}, N_{оп})\neq 0$,

$$A(U_{оп}, N_{оп}) = A_{оп} = \left\{\begin{matrix} a_{ij}^k, & k\in N_{оп} \\ (i, j)\in U_{оп} \end{matrix}\right\}, \; U_{оп}\subset U, N_{оп}\subset N(t_p).$$

Совокупность $\{x(t_p), Q_{оп}\}$ из плана и опоры назовем *опорным планом*. Опорный план *невырожденный*, если

$$x_k>0, k\in N_{оп}, \sum_{k\in I_{t_p}(i,j)} x_k<d_{ij}, \; (i, j)\in U_{н}=U\setminus U_{оп}.$$

Предположим, что перед началом решения задачи (2) известен некоторый невырожденный опорный план $\{x(t_p), Q_{оп}\}$, для которого выполняется условие

$$x_k=0, \; k\in N_{н}=N(t_p)\setminus N_{оп}. \tag{3}$$

Замечания. 1. При $p=0$ начальный опорный план строится очевидным образом. Пусть $P_\nu$ — путь с минимальной длиной $t_0$. Тогда пара $\{x(t_0), Q_{оп}\}$, где

$$x(t_0)=\{x_\nu=d_{i_0j_0}=\min_{(i,j)\in P_\nu} d_{ij}, \; x_k=0, \; k\in N(t_0)\setminus\nu\}; \tag{4}$$

$$Q_{оп}=\{U_{оп}, N_{оп}\}, \; U_{оп}=\{(i_0, j_0)\}, \; N_{оп}=\{\nu\},$$

является начальным опорным планом задачи (2) при $t=t_0$. Для начального опорного плана (4) условие (3) выполняется. Легко проверить, что это условие будет выполняться и на всех последующих итерациях.

2. Требование (3) несущественно. Его нарушение не вносит принципиальных изменений в алгоритм. Однако в этом случае кроме опорных векторов условий $a^k(U)$, $k\in N_{оп}$, необходимо запомнить все неопорные векторы $a^k(U)$, $k\in N_{н}$, для которых $x_k\neq 0$.

Построим вектор потенциалов $u(U_{оп})=\{u_{ij}, (i, j)\in U_{оп}\}=e'A_{оп}^{-1}$, $e'=\{1, 1, \ldots, 1\}$, и найдем число $\rho$ из решения задачи

$$\rho=\min\sum_{(i,j)\in U_{оп}} u_{ij}x_{ij}, \; \sum_{(i,j)\in U} c_{ij}x_{ij}\leqslant t_p, \tag{5}$$

$$\sum_{j\in I_i^+(U)} x_{ij}-\sum_{j\in I_i^-(U)} x_{ji}=\begin{cases} 1, & \text{если } i=s, \\ 0, & \text{если } i\neq s, \; i\neq t, \; i\in I, \\ -1, & \text{если } i=t, \end{cases}$$

$$x_{ij}\in\{0, 1\}, \; (i, j)\in U.$$

Справедлив следующий

**Критерий оптимальности.** Соотношения

$$u_{ij} \geqslant 0, \text{ если } \sum_{k \in I_{t_p}(i,\, j)} x_k = d_{ij};$$

$$u_{ij} = 0, \text{ если } \sum_{k \in I_{t_p}(i,\, j)} x_k < d_{ij},\ (i,\ j) \in U_{\text{оп}}; \tag{6}$$

$$\rho \geqslant 1,$$

достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности плана $x(t_p)$ в задаче (2) (при $t=t_p$).

Проверку критерия оптимальности начинаем с проверки условий (6). Пусть они не выполняются, например, существует дуга $(i_0,\ j_0) \in U_{\text{оп}}$, для которой $u_{i_0 j_0} < 0$, $\sum_{k \in I_{t_p}(i_0,\, j_0)} x_k \leqslant d_{i_0 j_0}$. В этом случае подходящее направление $l(t_p) = \{l_k,\quad k \in N(t_p)\}$ находим из условий $l_k = 0$, $k \in N_{\text{н}}$, $l_k = -\bar{a}_{k,\,(i_0,\, j_0)}$, $k \in N_{\text{оп}}$, где $\{\bar{a}_{k,\,(i_0,\, j_0)},\ k \in N_{\text{оп}}\}$ — элементы $(i_0,\ j_0)$-го столбца матрицы $A_{\text{оп}}^{-1}$. Максимально допустимый шаг $\Theta$ вдоль направления $l(t_p)$ равен

$$\Theta = \min\{\Theta_{k_*},\ \Theta_{i_* j_*}\},\ \Theta_{k_*} = \min \Theta_k,\ k \in N_{\text{оп}},$$
$$l_k < 0,\ \Theta_k = -x_k/l_k;$$
$$\Theta_{i_* j_*} = \min \Theta_{ij},\ (i,\ j) \in U_{\text{н}}, \tag{7}$$
$$\sum_{k \in I_{t_p}(i,\, j)} l_k > 0,\ \Theta_{ij} = \Big(d_{ij} - \sum_{k \in I_{t_p}(i,\, j)} x_k\Big) \Big/ \sum_{k \in I_{t_p}(i,\, j)} l_k .$$

Переходим к новому плану $\bar{x}(t_p) = x(t_p) + \Theta l(t_p)$.

Пусть $\Theta = \Theta_{k_*}$. Тогда новая опора имеет вид $\bar{Q}_{\text{оп}} = \{\bar{U}_{\text{оп}},\ \bar{N}_{\text{оп}}\}$, $\bar{U}_{\text{оп}} = U_{\text{оп}} \setminus (i_0,\ j_0)$, $\bar{N}_{\text{оп}} = N_{\text{оп}} \setminus k_*$.

Если $\Theta = \Theta_{i_* j_*}$, то $\bar{U}_{\text{оп}} = (U_{\text{оп}} \setminus (i_0,\ j_0)) \cup (i_*,\ j_*)$, $\bar{N}_{\text{оп}} = N_{\text{оп}}$, $\bar{Q}_{\text{оп}} = \{\bar{U}_{\text{оп}},\ \bar{N}_{\text{оп}}\}$. Новую итерацию начинаем с опорного плана $\{\bar{x}(t_p),\ \bar{Q}_{\text{оп}}\}$.

Случай, когда существует дуга $(i_0,\ j_0) \in U_{\text{оп}}$, для которой $u_{i_0 j_0} > 0$, $\sum_{k \in I_{t_p}(i_0,\, j_0)} x_k < d_{i_0 j_0}$, рассматривается аналогично.

Пусть соотношения (6) выполняются. Для полной проверки критерия оптимальности необходимо решить задачу (5). Один из алгоритмов решения этой задачи приведен в п. 2.

Пусть в результате решения задачи (5) получили $\rho < 1$. По решению задачи (5) $\{x_{ij}^0, (i, j) \in U\}$ строим путь $P_{k_0} = \{(i, j) : x_{ij}^0 = 1\}$. Переходим к улучшению плана $x(t_p)$ задачи (2). Легко проверить, что направление

$$\begin{gathered} l(t_p) = \{l(N_{\text{оп}}), \ l(N_{\text{н}})\} : l_{k_0} = 1, \ l_k = 0, \\ k \in N_{\text{н}} \setminus k_0, \ l(N_{\text{оп}}) = -A_{\text{оп}}^{-1} P_{k_0}(U_{\text{оп}}), \end{gathered} \tag{8}$$

является подходящим для плана $x(t_p)$ в задаче (2). Максимально допустимый шаг $\Theta$ вдоль направления $l(t_p)$ находится по формулам (7). Новый план строим в виде $\bar{x}(t_p) = x(t_p) + \Theta l(t_p)$.

Если $\Theta = \Theta_{k_*}$, то плану $\bar{x}(t_p)$ приписываем опору $\bar{Q}_{\text{оп}} = \{\bar{U}_{\text{оп}}, \bar{N}_{\text{оп}}\}$, $\bar{U}_{\text{оп}} = U_{\text{оп}}$, $\bar{N}_{\text{оп}} = (N_{\text{оп}} \setminus k_*) \cup k_0$. Если $\Theta = \Theta_{i_* j_*}$, то полагаем $\bar{U}_{\text{оп}} = U_{\text{оп}} \cup (i_*, j_*)$, $\bar{N}_{\text{оп}} = N_{\text{оп}} \cup k_0$, $\bar{Q}_{\text{оп}} = \{\bar{U}_{\text{оп}}, \bar{N}_{\text{оп}}\}$. Новую итерацию начинаем с опорного плана $\{\bar{x}(t_p), \bar{Q}_{\text{оп}}\}$.

Пусть $\rho \geqslant 1$. Согласно критерию оптимальности, $x(t_p)$ — оптимальный план задачи. Рассмотрим оптимальное значение $a(t_p)$ целевой функции задачи (2). Если $a(t_p) \geqslant a$, то $x^0 = \{x_k^0 = x_k, \ k \in N(t_p), \ x_k^0 = 0 \ k \in N \setminus N(t_p)\}$ является оптимальным планом исходной задачи (1), $t_p$ — оптимальное значение целевой функции этой задачи. Если $a(t_p) < a$, среди путей сети $S$, длина которых больше $t_p$, находим путь с минимальной длиной $t_{p+1}$ и решаем задачу (2) при $t = t_{p+1}$, начиная с оптимального опорного плана задачи (2) при $t = t_p$.

Если все $c_{ij}$, $(i, j) \in U$, — целые числа, то число $t_{p+1}$ можно найти, решив задачу

$$t_{p+1} = \min \sum_{(i, j) \in U} c_{ij} x_{ij},$$

$$\sum_{(i, j) \in U} c_{ij} x_{ij} \geqslant t_p + 1,$$

$$\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U)} x_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = s, \\ 0, & \text{если } i \in I \setminus (s \cup t), \\ -1, & \text{если } i = t, \end{cases} \tag{9}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \ (i, j) \in U.$$

Последняя задача является задачей целочисленного программирования, и для ее решения можно воспользоваться одним алгоритмом, описанным в гл. VI.

Если $t_p = t_{\max}$ и $a(t_{\max}) < a$, то исходная задача не имеет допустимых планов.

**2. Вспомогательный алгоритм.** Опишем один из возможных алгоритмов решения задачи (5). Пусть начальный список множеств состоит из множества $U_1 = U$. Решим задачу о потоке минимальной стоимости

$$\rho(U_*) = \min \sum_{(i,\, j) \in U_{\text{оп}} \cap U_*} u_{ij} x_{ij},$$

$$\sum_{j \in I_i^+(U_*)} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U_*)} x_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = s, \\ 0, & \text{если } i \in I \setminus (s \cup t), \\ -1, & \text{если } i = t, \end{cases} \quad (10)$$
$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant 1, \ (i,\, j) \in U_*,$$

положив $U_* = U_1$. Нетрудно проверить, что среди оптимальных планов задачи (10) существует целочисленный оптимальный план $\{x_{ij}^0,\ (i,\ j) \in U_1\}$. Построим путь $P_1^* = \{(i,\ j) : x_{ij}^0 \neq 0,\ (i,\ j) \in U_1\} = \{(i,\ j)_1^1,\ \ldots,\ (i,\ j)_k^1\}$. Если $c(P_1^*) \leqslant t_p$, задача (5) решена. Если $c(P_1^*) > t_p$, из списка удаляем множество $U_1$ и заменяем его множествами $U_{11} = U_1 \setminus (i,\ j)_1^1,\ \ldots,\ U_{1k} = U_1 \setminus (i,\ j)_k^1$.

Решая задачу (10) при $U_* = U_{1s}$, $s = \overline{1,\ k}$, получаем оценки $\rho(U_{1s})$ и соответствующие им пути $P_{1s}^*$, $s = \overline{1,\ k}$. Очевидно, что число $\min\limits_{s=\overline{1,\ k}} \rho(U_{1s}) = \rho(U_{1s_*})$ является оценкой снизу целевой функции задачи (5). Следовательно, если $\rho(U_{1s_*}) \geqslant 1$, то $\rho \geqslant 1$ и критерий оптимальности плана $x(t_p)$ в задаче (2) выполняется.

Пусть $\rho(U_{1s_*}) < 1$. Если $c(P_{1s_*}) \leqslant t_p$, оптимальный план задачи (10) при $U_* = U_{1s_*}$ является оптимальным планом задачи (5). Полагаем $P_{k_0} = P_{1s_*}$ и переходим к построению подходящего направления (8) в задаче (2).

Рассмотрим случай, когда $c(P_{1s_*}) > t_p$. Поскольку нас интересуют значения целевой функции задачи (5), меньшие единицы, то из списка можно удалить те множества $U_{1s}$, для которых $\rho(U_{1s}) \geqslant 1$. Далее из списка удаляем множество $U_{1s_*}$, заменяя его множествами $U_{1s_*1} = U_{1s_*} \setminus (i,\ j)_1^{1s_*},\ \ldots,\ U_{1s_*q} = U_{1s_*} \setminus (i,\ j)_q^{1s_*}$, где $\{(i,\ j)_1^{1s_*},\ \ldots,\ (i,\ j)_q^{1s_*}\} = P_{1s_*}$.

С новым списком поступаем аналогично.

Описанный выше метод можно использовать и для решения задачи (9).

Для проверки критерия оптимальности задачи (2) при $t=t_p$ не обязательно знать точное решение задачи (5). Достаточно знать, существует ли в сети $S$ такой путь $P_s$, что

$$c(P_s) \leqslant t_p, \quad \sum_{(i,\,j)\in U_{\text{оп}}\cap P_s} u_{ij} < 1. \tag{11}$$

Если такой путь существует, то критерий оптимальности не выполняется. Путь $P_s$ можно взять в качестве пути $P_{k_0}$, по которому строится подходящее направление (8). Если таких путей нет, то для всех $P_k$, $k\in N(t)$, выполняется неравенство $\sum u_{ij} \geqslant 1$, $(i,\ j)\in U_{\text{оп}}\cap P_k$. Следовательно, $\rho \geqslant 1$ и выполняется критерий оптимальности плана $x(t_p)$ в задаче (2).

Таким образом, для проверки критерия оптимальности задачи (2) вместо задачи (5) можно решить задачу

$$\sum_{(i,\,j)\in U} c_{ij}x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{(i,\,j)\in U_{\text{оп}}} u_{ij}x_{ij} < 1,$$

$$\sum_{j\in I_i^+(U)} x_{ij} - \sum_{j\in I_i^-(U)} x_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{если } i=s, \\ 0, & \text{если } i\in I\setminus(s\cup t), \\ -1, & \text{если } i=t, \end{cases} \tag{12}$$

$$x_{ij}\in\{0,\ 1\},\ (i,\ j)\in U.$$

Для решения последней задачи воспользуемся *методом ветвей и границ*.

Пусть начальный список множеств состоит из множества дуг $U_1 = U$. В множестве $U_1$ найдем путь $P_1^*$ с минимальной длиной $l_1^*$. Если $\sum\limits_{(i,\,j)\in U_1^*} u_{ij} < 1$, где $U_1^* = U_{\text{оп}}\cap P_1^* = \{(i,\ j)_1^1,\ \ldots,\ (i,\ j)_k^1\}$, то задача (12) решена. В сети $S$ построен путь $P_1^*$, для которого выполняются условия (11). Пусть $\sum\limits_{(i,\,j)\in U_1^*} u_{ij} \geqslant 1$. Множество $U_1$ удаляем из списка и заменяем его множествами $U_{11} = U_1\setminus(i,\ j)_1^1$,

$\ldots, \; U_{1k} = U_1 \setminus (i,\; j)_k^1$. Для каждого множества $U_{1s}$, $s = \overline{1,\; k}$, нового списка находим путь $P_{1s}^*$ с минимальной длиной $l_{1s}^*$. Очевидно, что число $l_{1s_*}^* = \min\limits_{s=\overline{1,\,k}} l_{1s}^*$ является оценкой снизу целевой функции задачи (12). Значит, из условия $l_{1s_*} > t_p$ следует, что в сети $S$ нет путей $P_s$, для которых выполняются условия (11). Следовательно, план $x(t_p)$ — оптимальный в задаче (2).

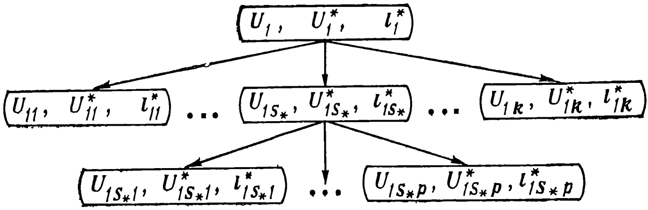

Рис. 1

Пусть $l_{1s_*}^* < t_p$. Если $\sum\limits_{(i,\,j) \in U_{1s_*}^*} u_{ij} < 1$, где $U_{1s_*}^* = U_{\text{оп}} \cap P_{1s_*} = \{(i,\; j)_1^{1s_*}, \; \ldots, \; (i,\; j)_p^{1s_*}\}$, то в сети $S$ построен путь $P_{1s_*}^*$, удовлетворяющий условиям (11). Пусть $\sum\limits_{(i,\,j) \in U_{1s_*}^*} u_{ij} \geqslant 1$. Из списка удаляем множества $U_{1s}$, для которых $l_{1s} > t_p$. Множество $U_{1s_*}$ заменяем на множества $U_{1s_*1} = U_{1s_*} \setminus (i,\; j)_1^{1s_*}, \; \ldots, \; U_{1s_*p} = U_{1s_*} \setminus (i,\; j)_p^{1s_*}$. С новым списком поступаем так же, как и с начальным: для каждого множества списка строим путь с минимальной длиной и т. д. Схематично описанный процесс можно изобразить в виде дерева (рис. 1). Очевидно, что с помощью метода ветвей и границ задача (12) будет решена за конечное число шагов.

## § 3. Условная оптимизация потока

В [ч. 2] разработан опорный метод решения транспортной задачи в матричной форме с дополнительными ограничениями на перевозки. Ниже излагается аналогичный результат для сетевой транспортной задачи.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим сеть $S(I, U)$, где $I$ — множество узлов, $U$ — множество дуг сети $S$. Каждому узлу поставим в соответствие число $a_i$, $i \in I$,— интенсивность узла (если $i$ — источник, то $a_i > 0$; если $i$ — сток, то $a_i < 0$; $a_i = 0$ для транзитного узла $i$). Каждой дуге $(i, j)$ припишем числа $d_{*ij}$ и $d^*_{ij}$ — нижнюю и верхнюю пропускные способности. Число $x_{ij}$, удовлетворяющее неравенству

$$d_{*ij} \leqslant x_{ij} \leqslant d^*_{ij}, \tag{1}$$

назовем *дуговым потоком*. Скажем, что на сети $S$ задан *(нагруженный) поток* $x = \{x_{ij}, (i, j) \in U\}$, если дуговые потоки удовлетворяют в каждом узле условию баланса

$$\sum_{j \in I^+(i)} x_{ij} - \sum_{j \in I^-(i)} x_{ji} = a_i, \; i \in I, \tag{2}$$

и условиям

$$\sum_{(i, j) \in U} \lambda^p_{ij} x_{ij} = \alpha_p, \; p = \overline{1, l}, \tag{3}$$

где $I^+(i) = \{j : (i, j) \in U\}$; $I^-(i) = \{j : (j, i) \in U\}$; $\alpha_p$, $\lambda^p_{ij}$ — заданные числа.

Пусть $c_{ij}$ — стоимость единичного потока по дуге $(i, j)$. Рассмотрим задачу об условной оптимизации потока, которая состоит в минимизации целевой функции

$$\sum_{(i, j) \in U} c_{ij} x_{ij} \to \min \tag{4}$$

при условиях (1)—(3).

Далее полагаем, что ранг системы (2), (3) равен $|I| + l - 1$.

**2. Критерий опорности.** Максимальная частичная сеть $S_{\text{оп}}(I, U_{\text{оп}})$, $U_{\text{оп}} \subset U$, называется *опорой сети* $S$, если система

$$\begin{gathered} \sum_{j \in I^+_{\text{оп}}(i)} x_{ij} - \sum_{i \in I^-_{\text{оп}}(i)} x_{ji} = 0, \; i \in I, \\ \sum_{(i, j) \in U_{\text{оп}}} \lambda^p_{ij} x_{ij} = 0, \; p = \overline{1, l}, \end{gathered} \tag{5}$$

где $I^+_{\text{оп}}(i) = \{j : (i, j) \in U_{\text{оп}}\}$; $I^-_{\text{оп}}(i) = \{j : (j, i) \in U_{\text{оп}}\}$, имеет только тривиальное решение.

Рассмотрим некоторый цикл $L_q$ в сети $S$: $i_1^q$, $i_2^q$, ..., $i_s^q$. Выбрав в нем направление движения, обозначим через $L_q^+$ и $L_q^-$ множества прямых и обратных дуг цикла соответственно. Введем понятие *детерминанта* $R_p(L_q)$ *цикла* $L_q$ *относительно* $p$*-го ограничения* из (3):

$$R_p(L_q) = \sum_{(i,\ j) \in L_q} \lambda_{ij}^p \operatorname{sign}(i,\ j)^q,$$

где функция $\operatorname{sign}(i,\ j)^q$ определяется соотношением

$$\operatorname{sign}(i,\ j)^q = \begin{cases} 1, \text{ если } (i,\ j) \in L_q^+; \\ -1, \text{ если } (i,\ j) \in L_q^-; \\ 0, \text{ если } (i,\ j) \overline{\in} L_q. \end{cases}$$

Цикл $L_q$ называется *вырожденным* относительно $p$-го ограничения, если $R_p(L_q) = 0$.

Множество $L$ циклов $\{L_q,\ q = \overline{1,\ t}\}$ назовем *независимым,* если в нем не существует такого цикла $L_k$, что $L_k \subset \overline{U L_q}$, $q = \overline{1,\ t}$, $q \neq k$. Дуга $(i,\ j) \in L_k$, $(i,\ j) \overline{\in} L_q$, $q = \overline{1,\ t}$, $q \neq k$, называется *собственной дугой* цикла $L_k$. В дальнейшем в качестве первой дуги цикла будем брать собственную дугу.

Пусть $L$ — множество всех независимых циклов в сети $S$. Составим матрицу $D(S) = \{R_p(L_q),\ q = \overline{1,\ t}\}_{p = \overline{1,\ l}}$. Если $l \neq t$, то дополним ее нулями до квадратной матрицы порядка $\max\{l,\ t\}$. Число $R(S) = \det D(S)$ назовем *детерминантом* сети $S$.

Для доказательства критерия опорности нам понадобятся следующие леммы.

**Лемма 1.** Для того чтобы связная сеть $S(I,\ U)$ содержала ровно $t$ независимых циклов, необходимо и достаточно, чтобы $|U| = |I| + t - 1$.

*Необходимость.* Разрушим все $t$ независимых циклов, удалив из каждого по одной собственной дуге. Новая сеть $S_1(I,\ U_1)$ связная, ибо удаление дуги из цикла не нарушит связности сети [ч. 2] и какому-либо узлу не могут быть инцидентны только собственные дуги циклов. Так как связная сеть $S_1$ не содержит циклов, то $S_1$ — дерево, а значит, $|U_1| = |I| - 1$. Тогда $|U| = |I| - 1 + t$.

*Достаточность.* Выделим в $S(I,\ U)$, $|U| = |I| + t - 1$, дерево $S_1(I,\ U_1)$, $|U_1| = |I| - 1$. Добавление к $S_1$ любой дуги из множества $U_2 = U \setminus U_1$, $|U_2| = t$, ведет к образованию цикла из этой дуги и некоторых дуг дерева $S_1$. Эти циклы $L_q$, $q = \overline{1, t}$, независимы, поскольку каждый имеет хотя бы одну собственную дугу — дугу из множества $U_2$.

Далее предположим, что в $S$ кроме указанных $t$ независимых циклов существует еще один независимый цикл $L_*$. Ясно, что дуги из $U_2$ в него не входят. Значит, он состоит из дуг дерева $S_1$. Полученное противоречие доказывает, что в сети $S$ ровно $t$ независимых циклов.

**Лемма 2.** Опора $S_{\text{оп}}$ — связная сеть.

**Критерий опорности.** Связная сеть $S_{\text{оп}}(I, U_{\text{оп}})$ является опорой сети тогда и только тогда, когда $R(S_{\text{оп}}) \neq 0$.

*Достаточность.* Так как $R(S_{\text{оп}}) \neq 0$, то в матрице $D(S_{\text{оп}})$ нет нулевых строк и столбцов, т. е. $l = t$. В силу леммы 1 $|U_{\text{оп}}| = |I| + l - 1$. Покажем, что ранг матрицы $B$ системы (5) равен числу переменных $|U_{\text{оп}}|$. Одно из первых $|I|$ уравнений лишнее (сложив их, получим $0 = 0$; сохраним его ради симметрии). Матрицу $B$ представим в виде

$$B = \begin{Bmatrix} B_1 & B_2 \\ & B_3 \end{Bmatrix},$$

где $\{B_1 B_2\}$ — транспортный блок, причем столбцы блока $B_1$ соответствуют дугам некоторого дерева в $S_{\text{оп}}$; $B_3$ — $l \times (|I| + l - 1)$-матрица, элементами которой являются числа $\lambda_{ij}^p$, $(i, j) \in U_{\text{оп}}$. Легко показать, что $\operatorname{rank} B_1 = |I| - 1$, а значит, и $\operatorname{rank} \{B_1 B_2\} = |I| - 1$.

Предположим, что $k$-я строка матрицы $B_3$ линейно зависит от строк матрицы $B$. Тогда существуют такие числа $\mu_i$ и $\nu_p$, что

$$\lambda_{ij}^k = \mu_i - \mu_j + \sum_{\substack{p=1,\\ p\neq k}}^{l} \lambda_{ij}^p \nu_p, \quad \sum_{i \in I} \mu_i^2 + \sum_{\substack{p=1,\\ p\neq k}}^{l} \nu_p^2 > 0. \qquad (6)$$

Подсчитаем, используя (6), детерминанты $R_k(L_q)$, $q = \overline{1, l}$, всех циклов опоры относительно $k$-го ограничения:

$$R_k(L_q) = \sum_{(i, j) \in L_q} \lambda_{ij}^k \operatorname{sign}(i, j)^q =$$

$$= \sum_{(i, j) \in L_q} \left(\mu_i - \mu_j + \sum_{\substack{p=1,\\ p\neq k}}^{l} \lambda_{ij}^p \nu_p\right) \operatorname{sign}(i, j)^q =$$

$$= \sum_{\substack{p=1,\\ p\neq k}}^{l} \nu_p \Big( \sum_{(i,\, j)\in L_q} \lambda_{ij}^p \operatorname{sign}(i,\ j)^q \Big) = \sum_{\substack{p=1,\\ p\neq k}}^{l} \nu_p R_p(L_q),\ \ q = \overline{1,\ l}.$$

Отсюда видно, что $k$-й столбец в $D(S_{\text{оп}})$ — линейная комбинация остальных столбцов, т. е. $R(S_{\text{оп}})=0$. Полученное противоречие доказывает, что $\operatorname{rank} B=|I|+l-1=|U_{\text{оп}}|$ и система (5) имеет только тривиальное решение. При этом расширить рассматриваемую сеть нельзя, ибо при добавлении к ней хотя бы одной дуги в системе (5) число переменных станет больше ранга системы.

*Необходимость.* Пусть $S_{\text{оп}}$ — опора сети. По лемме 2 $S_{\text{оп}}$ — связная сеть. По определению, она содержит максимальное число дуг, для которых система (5) имеет только тривиальное решение.

Предположим, что $R(S_{\text{оп}})=0$. Возможны случаи: а) $l<t$; б) $l>t$; в) $l=t$. В случае а) система (5) имеет нетривиальное решение, так как число переменных больше числа линейно независимых уравнений. В случае б) $\operatorname{rank} B=|I|+t-1$, а ранг матрицы условий — $|I|+l-1$. Это означает, что сеть можно расширить. В случае в) можно построить нетривиальное решение системы (5) следующим образом. Положим $x_{ij}=0$, если $(i,\ j)\overline{\in} L$; $x_{ij}=a_q \operatorname{sign}(i,\ j)^q$, если $(i,\ j)$ — собственная дуга цикла $L_q$. Значения $x_{ij}$ для оставшихся дуг из $U_{\text{оп}}$ однозначно находятся из условий баланса в узлах $x_{ij}= \sum_{q=1}^{l} b_q \operatorname{sign}(i,\ j)^q$, $(i,\ j)\in U^*_{\text{оп}} = U_{\text{оп}} \setminus \bigcup_{q=1}^{l} (i_1^q,\ i_2^q)$. Тогда последние $l$ уравнений принимают вид

$$\sum_{(i,\, j)\in U_{\text{оп}}} \lambda_{ij}^p x_{ij} = \sum_{(i,\, j)\in U_{\text{оп}}} \lambda_{ij}^p \sum_{q=1}^{l} b_q \operatorname{sign}(i,\ j)^q =$$

$$= \sum_{q=1}^{l} b_q \sum_{(i,\, j)\in U_{\text{оп}}} \lambda_{ij}^p \operatorname{sign}(i,\ j)^q = \sum_{q=1}^{l} b_q R_p(L_q) = 0,\ \ p=\overline{1,\ l}.$$

Так как, по предположению, $R(S_{\text{оп}})=0$, то построено нетривиальное решение, т. е. $S_{\text{оп}}$ — не опора.

Полученные противоречия доказывают критерий опорности.

**3. Опорный поток. Потенциалы узлов, оценки дуг. Критерий оптимальности. Достаточное условие субоптимальности.** Совокупность $\{x,\ S_{\text{оп}}\}$ из нагруженного потока и опоры называется *опорным потоком;* поток вдоль опорной дуги — *опорный дуговой поток,* остальные дуговые потоки — *неопорные.* Опорный поток называется *невырожденным,* если его опорные дуговые потоки удовлетворяют неравенствам $d_{*ij} < x_{ij} < d^*_{ij}$, $(i, j) \in U_{\text{оп}}$.

Обозначим через $U_{\text{н}}$ множество неопорных дуг. По опоре $S_{\text{оп}}$ построим опорные потенциалы узлов $u_i$, $i \in I$, и циклов $r_p$, $p = \overline{1, l}$, удовлетворяющие системам

$$\begin{cases} \sum_{p=1}^{l} R_p(L_q) r_p = \sum_{(i, j) \in L_q} c_{ij} \operatorname{sign}(i, j)^q, \\ q = \overline{1, l}; \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} u_i - u_j = c_{ij} - \sum_{p=1}^{l} \lambda^p_{ij} r_p, \\ (i, j) \in U_{\text{оп}}. \end{cases} \tag{8}$$

Система (7) имеет единственное решение, поскольку матрицей ее коэффициентов является неособая матрица $D'(S_{\text{оп}})$. В системе (8) один из потенциалов положим равным нулю, например $u_1 = 0$. Тогда остальные потенциалы узлов найдутся однозначно. С помощью потенциалов вычислим оценки неопорных дуг $\Delta_{ij} = u_i - u_j + \sum_{p=1}^{l} \lambda^p_{ij} r_p - c_{ij}$, $(i, j) \in U_{\text{н}}$.

Следуя [ч. 2], доказывается

**Критерий оптимальности.** Соотношения

$$\Delta_{ij} = 0 \text{ при } d_{*ij} < x_{ij} < d^*_{ij}; \; \Delta_{ij} \leqslant 0 \text{ при } x_{ij} = d_{*ij}; \\ \Delta_{ij} \geqslant 0 \text{ при } x_{ij} = d^*_{ij} \tag{9}$$

достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности опорного нагруженного потока $\{x, S_{\text{оп}}\}$.

Определение. Поток $x^\varepsilon$ называется *субоптимальным* (*ε-оптимальным*), если

$$\sum_{(i, j) \in U} c_{ij} x^\varepsilon_{ij} - \sum_{(i, j) \in U} c_{ij} x^0_{ij} \leqslant \varepsilon.$$

*Достаточное условие субоптимальности.* Пусть для опорного потока $\{x, S_{\text{оп}}\}$ выполняется неравенство

$$\sum_{\Delta_{ij}>0} \Delta_{ij}(d^*_{ij} - x_{ij}) - \sum_{\Delta_{ij}<0} \Delta_{ij}(x_{ij} - d_{*ij}) \leqslant \varepsilon.$$

Тогда $x$ — $\varepsilon$-оптимальный поток.

Доказательство стандартное.

**4. Улучшение потока.** На неопорных дугах, элементы которых не удовлетворяют соотношениям (9), отметим оценку $\Delta_{ij}$. Пусть $\Delta_{i_0 j_0}$ — максимальная по модулю оценка среди отмеченных. В сети $\tilde{S}_{\text{оп}}(I, U_{\text{оп}} \cup (i_0, j_0))$ вычеркнем все висячие дуги. Полученную сеть обозначим через $\bar{S}(\bar{I}, \bar{U})$. В сети $\bar{S}$ найдем псевдопоток $Y = \{y_{ij}, (i, j) \in \bar{U}\}$ — совокупность чисел, удовлетворяющих однородным условиям

$$\sum_{j \in \bar{I}^+(i)} y_{ij} - \sum_{j \in \bar{I}^-(i)} y_{ji} = 0, \ i \in \bar{I}; \tag{10}$$

$$\sum_{(i, j) \in \bar{U}} \lambda^p_{ij} y_{ij} = 0, \ p = \overline{1, l}, \tag{11}$$

следующим образом:

1) дуге $(i_0, j_0)$ припишем псевдопоток $y_{i_0 j_0} = 1$;

2) псевдопотоки $y_{ij}$, $(i, j) \overline{\in} L$, легко находятся из условий (10);

3) из (11), (10) нетрудно получить, что псевдопотоки $y_{i_1^q i_2^q}$, $q = \overline{1, l}$, определяются из системы

$$\sum_{q=1}^{l} R_p(L_q)\, y_{i_1^q i_2^q} = -R_p(L_0), \ p = \overline{1, l}, \tag{12}$$

где $L_0$ — цикл, образованный дугой $(i_0, j_0)$ и некоторыми дугами из $U^*_{\text{оп}}$. Так как $R(S_{\text{оп}}) \neq 0$, система (12) имеет единственное решение;

4) псевдопотоки на оставшихся дугах из $L$ легко находятся по (10).

Если $\Delta_{i_0 j_0} > 0$, то

$$\Theta_0 = \min\left\{d^*_{i_0 j_0} - x_{i_0 j_0};\ \min_{y_{ij}>0} \frac{d^*_{ij} - x_{ij}}{y_{ij}};\ \min_{y_{ij}<0} \frac{d_{*ij} - x_{ij}}{y_{ij}}\right\},$$

а при $\Delta_{i_0 j_0} < 0$

$$\Theta_0 = \min\left\{x_{i_0 j_0} - d_{*i_0 j_0};\ \min_{y_{ij}<0} \frac{x_{ij} - d^*_{ij}}{y_{ij}};\ \min_{y_{ij}>0} \frac{x_{ij} - d_{*ij}}{y_{ij}}\right\}.$$

Пусть минимум достигается на дуге $(i_*, j_*)$. Новый поток $\bar{x}$ находим по формулам

$$\bar{x}_{ij} = x_{ij}, \ (i, j) \in U_{\text{н}} \setminus (i_0, j_0);$$
$$\bar{x}_{ij} = x_{ij} + \theta_0 y_{ij}, \ (i, j) \in U_{\text{оп}} \cup (i_0, j_0).$$

В обоих случаях при $(i_0, j_0) = (i_*, j_*)$ опора не меняется. В противном случае из опоры удаляем дугу $(i_*, j_*)$ и вводим в $S_{\text{оп}}$ дугу $(i_0, j_0)$. Новая частичная сеть образует опору. Значение целевой функции уменьшается на $\Theta_0 |\Delta_{i_0 j_0}|$.

**5. Двойственный метод. Постановка задачи.** Наряду с задачей (1)—(4) рассмотрим двойственную к ней задачу

$$\sum_{i \in I} a_i u_i + \sum_{p=1}^{l} \alpha_p r_p + \sum_{(i, j) \in U} d_{*ij} \omega_{ij} - \sum_{(i, j) \in U} d_{ij}^* w_{ij} \to \max,$$
$$u_i - u_j + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^p r_p + \omega_{ij} - w_{ij} = c_{ij}, \tag{13}$$
$$\omega_{ij} \geqslant 0, \ w_{ij} \geqslant 0, \ (i, j) \in U.$$

*Двойственным планом* задачи (1)—(4) называется вектор $\{u, r, \omega, w\}$, который удовлетворяет всем ограничениям задачи (13). Вектор $\delta = \{\delta_{ij}, \ (i, j) \in U\}$, $\delta_{ij} = u_i - u_j + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^p r_p - c_{ij}$, назовем *нагруженным копотоком* задачи (1) — (4). В дальнейшем полагаем, что элементы $\omega$ и $w$ *согласованы* с копотоком $\delta$:

$$\begin{aligned} &\omega_{ij} = 0, \ w_{ij} = \delta_{ij} \ \text{при} \ \delta_{ij} \geqslant 0; \\ &\omega_{ij} = -\delta_{ij}, \ w_{ij} = 0 \ \text{при} \ \delta_{ij} < 0. \end{aligned} \tag{14}$$

В противном случае можно, не изменяя копотока, изменить компоненты $\omega$, $w$ так, что двойственная целевая функция увеличится.

Пусть к началу решения задачи (1)—(4) известен начальный двойственный план (или, что то же самое, начальный копоток). Надо найти оптимальный поток задачи (1)—(4) путем последовательного преобразования двойственных планов с помощью опор.

Пару $\{\delta, S_{\text{оп}}\}$ из копотока и опоры назовем *опорным копотоком*. Компоненты копотока $\delta_{ij}$, $(i, j) \in U_{\text{оп}}$, называются *опорными дуговыми* потоками, остальные — неопорными. Опорный копоток называется *невырожденным,* если $\delta_{ij} \neq 0$, $(i, j) \in U_{\text{н}}$.

По опорному копотоку построим псевдопоток $\varkappa = \{\varkappa_{ij}, (i, j) \in U\}$. Неопорные псевдоперевозки положим равными $\varkappa_{ij} = d^*_{ij}$, если $\delta_{ij} > 0$; $\varkappa_{ij} = d_{*ij}$, если $\delta_{ij} \leqslant 0$. Опорные псевдопотоки по дугам $(i^q_1, i^q_2)$, $q = \overline{1, l}$, находим из системы

$$\begin{cases} \sum_{q=1}^{l} R_p(L_q)\, \varkappa_{i^q_1 i^q_2} = \alpha_p - \sum_{(i, j) \in U_{\text{н}}} R_p(L_{ij})\, \varkappa_{ij} - \sum_{i \in I_*} a_i R_p(L_i), \\ p = \overline{1, l}, \end{cases} \tag{15}$$

где $L_{ij}$ — цикл, образованный дугой $(i, j) \in U_{\text{н}}$ и некоторыми дугами из $U^*_{\text{оп}}$; $L_i$ — цепочка дуг из $U^*_{\text{оп}}$ от узла $i$ до узла $k$; $I_* = I \setminus \{k\}$; $k$ — любой фиксированный узел из $I$. Система (15) имеет единственное решение, поскольку матрица ее коэффициентов $D(S_{\text{оп}})$ неособая. Остальные опорные псевдопотоки легко находятся из условия баланса.

Наряду с двойственным планом $\{u, r, \omega, w\}$ и соответствующим копотоком $\{\delta, S_{\text{оп}}\}$ рассмотрим двойственный план $\{\tilde{u}, \tilde{r}, \tilde{\omega}, \tilde{w}\}$, $\tilde{u} = u + \Delta u$, $\tilde{r} = r + \Delta r$, $\tilde{\omega} = \omega + \Delta\omega$, $\tilde{w} = w + \Delta w$, и соответствующий копоток $\tilde{\delta} = \delta + \Delta\delta$, причем считаем, что $\tilde{\omega}$ и $\tilde{w}$ согласованы с $\tilde{\delta}$. Нетрудно подсчитать приращение двойственной целевой функции

$$\alpha = \sum_{(i, j) \in U_{\text{оп}}} (\varkappa_{ij}\, \Delta\delta_{ij} + d_{*ij}\Delta\omega_{ij} - d^*_{ij}\, \Delta w_{ij}) +$$
$$+ \sum_{\substack{\delta_{ij} > 0,\ \tilde{\delta}_{ij} \leqslant 0, \\ (i, j) \in U_{\text{н}}}} (d^*_{ij} - d_{*ij})\, \tilde{\delta}_{ij} + \sum_{\substack{\delta_{ij} \leqslant 0,\ \tilde{\delta}_{ij} > 0, \\ (i, j) \in U_{\text{н}}}} (d_{*ij} - d^*_{ij})\, \tilde{\delta}_{ij}.$$

**Критерий оптимальности.** Соотношения

$$\begin{gathered} \varkappa_{ij} = d_{*ij} \text{ при } \delta_{ij} < 0; \ \varkappa_{ij} = d^*_{ij} \text{ при } \delta_{ij} > 0; \\ d_{*ij} \leqslant \varkappa_{ij} \leqslant d^*_{ij} \text{ при } \delta_{ij} = 0, \ (i, j) \in U_{\text{оп}}, \end{gathered} \tag{16}$$

достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности опорного копотока $\{\delta, S_{\text{оп}}\}$. (Доказательство см. в [ч. 1].)

**Достаточное условие субоптимальности.** Пусть $\{\delta, S_{\text{оп}}\}$ — опорный невырожденный копоток, у которого опорные псевдопотоки удовлетворяют ограничениям $d_{*ij} \leqslant \varkappa_{ij} \leqslant d^*_{ij}$, $(i, j) \in U_{\text{оп}}$. Тогда $\varkappa$ — поток, причем $\varkappa$ — $\varepsilon$-оптимальный поток, где число $\varepsilon$ находится по формуле

$$\varepsilon = \sum_{\delta_{ij} > 0} \delta_{ij} (d^*_{ij} - \varkappa_{ij}) - \sum_{\delta_{ij} < 0} \delta_{ij} (\varkappa_{ij} - d_{*ij}), \quad (i, j) \in U_{\text{оп}}.$$

**6. Улучшение копотока.** Пусть $\{\delta, S_{\text{оп}}\}$ — опорный невырожденный копоток, для которого соотношения (16) не выполняются.

Пусть $\delta_{ij} > 0$, $(i, j) \in U_{\text{оп}}$. Соотношения (16) не выполняются, если $\varkappa_{ij} \neq d^*_{ij}$. При малых $\Delta\delta_{ij}$ имеем $\tilde{\delta}_{ij} > 0$ и, в силу (14), $\Delta\omega_{ij} = 0$, $\Delta w_{ij} = \Delta\delta_{ij}$, значит, $\alpha = (\varkappa_{ij} - d^*_{ij}) \Delta\delta_{ij}$, т. е. $\varkappa_{ij} - d^*_{ij}$ — скорость изменения двойственной целевой функции в точке $\delta$ при изменении единственной опорной компоненты $\delta_{ij}$ копотока.

Пусть $\delta_{ij} < 0$, $(i, j) \in U_{\text{оп}}$. Соотношения (16) не выполняются, если $\varkappa_{ij} \neq d_{*ij}$. При малых $\Delta\delta_{ij}$ имеем $\tilde{\delta}_{ij} < 0$ и, в силу (14), $\Delta\omega_{ij} = -\Delta\delta_{ij}$, $\Delta w_{ij} = 0$, значит, $\alpha = (\varkappa_{ij} - d_{*ij}) \Delta\delta_{ij}$. Аналогично при $\delta_{ij} = 0$, $(i, j) \in U_{\text{оп}}$, получим $\alpha = (\varkappa_{ij} - d^*_{ij}) \Delta\delta_{ij}$ при $\Delta\delta_{ij} > 0$ и $\alpha = (\varkappa_{ij} - d_{*ij}) \Delta\delta_{ij}$ при $\Delta\delta_{ij} < 0$.

Следуя [ч. 2], на каждой итерации будем менять только одну опорную коперевозку. Выберем ту коперевозку $\delta_{i_0 j_0}$, при изменении которой двойственная целевая функция увеличивается с наибольшей скоростью. Коперевозку $\delta_{i_0 j_0}$ находим следующим образом. На опорных дугах, на которых (16) не выполняются, отмечаем число $\varkappa_{ij} - d^*_{ij}$, если $\delta_{ij} > 0$ или $\delta_{ij} = 0$, $\varkappa_{ij} > d^*_{ij}$, и число $\varkappa_{ij} - d_{*ij}$, если $\delta_{ij} < 0$ или $\delta_{ij} = 0$, $\varkappa_{ij} < d_{*ij}$. Максимальное среди отмеченных чисел обозначим через $v^0$, а дугу, на которой оно находится, через $(i_0, j_0)$. Из приведенных выше рассуждений следует, что при $\Delta\delta_{i_0 j_0} = \sigma \operatorname{sign} v^0$, $\sigma \geqslant 0$, двойственная целевая функция возрастает со скоростью $|v^0|$.

Шаг $\sigma$ выбирается так, чтобы двойственная целевая функция возрастала и не нарушались ограничения задачи (13). Но выбором компонент $\omega$, $w$ всегда можно добиться выполнения этих ограничений, поэтому будем учитывать только возрастание целевой функции.

Рассмотрим дугу $(i_0, j_0) \in U_{\text{оп}}$. При $\delta_{i_0 j_0} > 0$, $v^0 < 0$ и при $\delta_{i_0 j_0} < 0$, $v^0 > 0$, сделав шаг $\sigma = |\delta_{i_0 j_0}|$, получим $\tilde{\delta}_{i_0 j_0} = 0$, т. е. на этой дуге выполнятся (16), если

$\varkappa_{i_0j_0} \in [d_{*i_0j_0}, d^*_{i_0j_0}]$. При $\delta_{i_0j_0} > 0$, $\varkappa_{i_0j_0} < d_{*i_0j_0}$ и при $\delta_{i_0j_0} < 0$, $\varkappa_{i_0j_0} > d^*_{i_0j_0}$ дальнейшее изменение компоненты $\delta_{i_0j_0}$ ведет к увеличению двойственной целевой функции. Поэтому

$$\sigma_{i_0j_0} = \begin{cases} |\sigma_{i_0j_0}|, \text{ если } d_{*i_0j_0} \leqslant \varkappa_{i_0j_0} \leqslant d^*_{i_0j_0}; \\ \infty \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

При изменении опорного дугового копотока $\delta_{i_0j_0}$ изменяется часть неопорных дуговых копотоков.

Из двойственного опорного метода [ч. 1] с учетом структуры матрицы условий задачи (1)—(4) получается зависимость между $\Delta\delta_{ij}$, $(i, j) \in U_{\text{н}}$, и $\Delta\delta_{i_0j_0}$:

$$\Delta\delta_{ij} = \Delta\delta_{i_0j_0}\left(\gamma_i - \gamma_j + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^p \nu_p\right) = \\ = \sigma\left(\gamma_i - \gamma_j + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^p \nu_p\right) \operatorname{sign} v^0, \quad (17)$$

где $\nu_p$, $p = \overline{1, l}$, удовлетворяют системе

$$\sum_{p=1}^{l} R_p(L_q)\nu_p = \operatorname{sign}(i_0, j_0)^q; \; q = \overline{1, l},$$

а $\gamma_i$, $i \in I$, при $(i_0, j_0) \in U^*_{\text{оп}}$ — решение системы

$$\begin{cases} \gamma_i - \gamma_j = -\sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^p \nu_p, \; (i, j) \in U^*_{\text{оп}} \setminus (i_0, j_0); \\ \gamma_{i_0} - \gamma_{j_0} = 1 - \sum_{p=1}^{l} \lambda_{i_0j_0}^p \nu_p; \; \gamma_1 = 0. \end{cases}$$

В противном случае $\gamma_i$ находятся из системы

$$\begin{cases} \gamma_i - \gamma_j = -\sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}\nu_p, \; (i, j) \in U^*_{\text{оп}}, \\ \gamma_1 = 0. \end{cases}$$

Из (17) получаем ограничение на шаг по $\delta_{ij}$, $(i, j) \in U_{\text{н}}$:

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} -\delta_{ij} \Big/ \left(\gamma_i - \gamma_j + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^p \nu_p\right) \operatorname{sign} v^0, \\ \text{если } \delta_{ij}\left(\gamma_i - \gamma_j + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^p \nu_p\right) \operatorname{sign} v^0 < 0; \\ 0, \text{ если } \delta_{ij} = 0, \; \left(\gamma_i - \gamma_j + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^p \nu_p\right) \operatorname{sign} v^0 > 0; \\ \infty \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Минимальное из чисел $\sigma_{ij}$, $(i, j) \in U_н$, и $\sigma_{i_0 j_0}$ обозначим через $\sigma_0 = \sigma_{i_* j_*}$. Если $\sigma_0 = \infty$, то задача (1)—(4) не имеет планов; если $\sigma_0 < \infty$, то переходим к новому копотоку $\bar{\delta}$ со следующими компонентами: $\bar{\delta}_{ij} = \delta_{ij}$, если $(i, j) \in U_{оп} \setminus (i_0, j_0)$; $\bar{\delta}_{i_0 j_0} = \delta_{i_0 j_0} + \sigma_0 \operatorname{sign} v^0$; $\bar{\delta}_{ij} = \delta_{ij} + \sigma_0 \Big(\gamma_i - \gamma_j + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^p \nu_p\Big) \operatorname{sign} v^0$, $(i, j) \in U_н$.

При $(i_*, j_*) = (i_0, j_0)$ опора сохраняется. В противном случае $U_{оп}^{нов} = U_{оп} \cup (i_*, j_*) \setminus (i_0, j_0)$. Значение целевой функции за итерацию увеличивается на $\sigma_0 |v^0|$.

## § 4. Сетевая распределительная задача

В [ч. 2] описан опорный метод решения задачи о потоке минимальной стоимости на обобщенной сети. Ниже для той же задачи излагается безопорный метод (в прямом и двойственном вариантах).

**1. Прямой метод.** Рассмотрим сеть $S = \{I, U\}$ с множествами узлов $I$ и дуг $U$, имеющую следующие параметры (см. [ч. 2]): $a_i$ — интенсивность узла $i$; $d_{ij}$ — пропускная способность дуги $(i, j)$; $x_{ij}$ — дуговой поток; $c_{ij}$ — стоимость единичного дугового потока; $\lambda_{ij}$ — параметр специального пункта на конце дуги $(i, j)$, где дуговой поток $x_{ij}$ из узла $i$ преобразуется в поток $\lambda_{ij} x_{ij}$ и непосредственно поступает в узел $j$.

Совокупность чисел $x = \{x_{ij}, (i, j) \in U\}$ называется *потоком* на сети $S$, если

$$\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U)} \lambda_{ji} x_{ji} = a_i, \quad i \in I;$$
$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant d_{ij}, \quad (i, j) \in U, \tag{1}$$

где $I_i^+(U) = \{j : (i, j) \in U\}$; $I_i^-(U) = \{j : (j, i) \in U\}$.

Задачу минимизации функции

$$\sum_{(i, j) \in U} c_{ij} x_{ij} \tag{2}$$

при ограничениях (1) назовем *задачей о потоке минимальной стоимости на обобщенной сети*.

Решение задачи (1), (2) — *поток минимальной стоимости* $x^0 = \{x_{ij}^0, (i, j) \in U\}$ — называется *оптимальным* потоком, поток $x^\varepsilon = \{x^\varepsilon_{ij}, \ (i, j) \in U\}$, — *ε-оптимальным* (*субоптимальным*) потоком, если

$$\sum_{(i, j)\in U} c_{ij} x^\varepsilon_{ij} - \sum_{(i, j)\in U} c_{ij} x^0_{ij} \leqslant \varepsilon.$$

В данном пункте для заданного начального потока $x$ и заданного числа $\varepsilon \geqslant 0$ строится алгоритм, позволяющий найти субоптимальный поток, стоимость которого превышает стоимость оптимального не более чем на $\varepsilon$.

По известному потоку $x$ и выбранному числу $\alpha \geqslant 0$ построим множества $U^н(\alpha) = \{(i, j): 0 \leqslant x_{ij} \leqslant \alpha\}$, $U^в(\alpha) = \{(i, j): d_{ij} - \alpha \leqslant x_{ij} \leqslant d_{ij}\}$, $U^п(\alpha) = U \setminus (U^н(\alpha) \cup U^в(\alpha))$ и векторы $x^1(\alpha)$, $x^2(\alpha)$ с компонентами $x^1_{ij}(\alpha) = 0$, если $(i, j) \overline{\in} U^н(\alpha)$; $x^1_{ij}(\alpha) = x_{ij}$, если $(i, j) \in U^н(\alpha)$; $x^2_{ij}(\alpha) = d_{ij}$, если $(i, j) \overline{\in} U^в(\alpha)$; $x^2_{ij}(\alpha) = x_{ij}$, если $(i, j) \in U^в(\alpha)$.

Вектор $l = \{l_{ij}, (i, j) \in U\}$ назовем *α-допустимым направлением* для потока $x$, если существует такое $\gamma_0 > 0$, что совокупность чисел $x(\gamma) = x + \gamma l$ удовлетворяет ограничениям

$$\begin{gathered}\sum_{j\in I^+_i(U)} x_{ij}(\gamma) - \sum_{j\in I^-_i(U)} \lambda_{ji} x_{ji}(\gamma) = a_i, \ i \in I; \\ x^1_{ij}(\alpha) \leqslant x_{ij}(\gamma) \leqslant x^2_{ij}(\alpha), \ (i, j) \in U,\end{gathered} \tag{3}$$

для любого $\gamma$, $0 \leqslant \gamma \leqslant \gamma_0$. Из соотношений (3) следует, что вектор $l$ является $\alpha$-допустимым направлением для потока $x$ в том и только том случае, если

$$\begin{gathered}\sum_{i\in I^+_i(U)} l_{ij} - \sum_{j\in I^-_i(U)} \lambda_{ji} l_{ji} = 0, \ i \in I; \\ l_{ij} \geqslant 0, \ (i, j) \in U^н(\alpha); \ l_{ij} \leqslant 0, \ (i, j) \in U^в(\alpha).\end{gathered} \tag{4}$$

Будем говорить, что $\alpha$-допустимое направление $l$ является $\alpha$-подходящим, если $\sum_{(i, j)\in U} c_{ij} l_{ij} < 0$.

Сеть с потоком $x$, в которой по заданному $\alpha$ произведено разбиение множества $U$ на подмножества $U^н(\alpha)$, $U^п(\alpha)$, $U^в(\alpha)$, обозначим через $S_\alpha(x)$.

В ней будем искать $\alpha$-подходящие направления. Из условия (3) следует, что если в $S_\alpha(x)$ существует $\alpha$-подходящее направление $l$, то поток $x$ можно улучшить, заменив его новым потоком $\bar{x} = x + \theta l$, где $\theta > 0$ — максимально допустимый шаг, найденный по стандартным правилам.

Предположим, что в сети $S_\alpha(x)$ нет $\alpha$-подходящих направлений. Значит, задача

$$\Sigma c_{ij} l_{ij} \to \min \tag{5}$$

при ограничениях (4) имеет тривиальное решение $l^0 = 0$.

Обозначим через $\delta = \{\delta_{ij}, (i, j) \in U\}$ — оптимальный копоток задачи (4), (5). Тогда нетрудно показать, что для потока $x$ справедлива оценка

$$\sum_{(i, j) \in U} c_{ij} x_{ij} - \sum_{(i, j) \in U} c_{ij} x_{ij}^0 \leqslant \beta,$$

$$\beta = - \sum_{(i, j) \in U^{\text{н}}(\alpha)} \delta_{ij} x_{ij} + \sum_{(i, j) \in U^{\text{в}}(\alpha)} \delta_{ij} (d_{ij} - x_{ij}) \leqslant \tag{6}$$

$$\leqslant \alpha \sum_{(i, j) \in U^{\text{н}}(\alpha) \cup U^{\text{в}}(\alpha)} |\delta_{ij}|.$$

Если $\beta \leqslant \varepsilon$, то решение задачи (1), (2) прекращается на $\varepsilon$-оптимальном потоке $x$. Если $\beta > \varepsilon$, заменяем число $\alpha$ на $\bar{\alpha} < \alpha$ такое, что $|U^{\text{в}}(\alpha) \cup U^{\text{н}}(\alpha)| > |U^{\text{в}}(\bar{\alpha}) \cup U^{\text{н}}(\bar{\alpha})|$, и ищем $\bar{\alpha}$-подходящее направление в сети $S_{\bar{\alpha}}(x)$. Очевидно, что при $\alpha = 0$ оценка $\beta = 0$ и, следовательно, поток $x$ будет оптимальным, если в сети $S_\alpha(x)$ нет $\alpha$-подходящих направлений.

Таким образом, решение исходной задачи сводится к построению в сети $S_\alpha(x)$ $\alpha$-подходящих направлений.

Введем следующие определения. Цепь [ч. 2] называется *путем* в сети $S_\alpha(x)$, если при заданном направлении движения выполняются условия*): прямые дуги $(i, j) \overline{\in} U^{\text{в}}(\alpha)$, обратные дуги $(i, j) \overline{\in} U^{\text{н}}(\alpha)$. Путь, у которого крайние узлы совпадают, называется *контуром*.

Замечание. Когда речь идет о контуре, предполагается, что для него задано некоторое фиксированное направление обхода. Если поменять направление обхода, то получим другой контур.

Пусть $R_+$ — произведение чисел $\lambda_{ij}$ на прямых дугах контура (пути), $R_-$ — произведение чисел $\lambda_{ij}$ на обратных дугах. Если все дуги прямые (обратные), то полагаем

---

*) В данном параграфе рассматриваются только элементарные пути и контуры.

$R_-=1$ $(R_+=1)$. Число $T=R_+/R_-$ называется *детерминантом* контура (пути).

Контур $K$ назовем *контуром-источником* $K_+$, если $T>1$, *контуром-стоком* $K_-$, если $T<1$, и *нейтральным контуром* $K_0$, если $T=1$.

Обозначим через $I(K)$ множество узлов контура $K$. Путь $[i_1, i_2, \ldots, i_s]$ называется путем из контура-источника $K_+$ в контур-сток $K_-$, если $i_1\in I(K_+)$, $i_s\in I(K_-)$.

Замечание. Будем считать, что путь из $K_+$ в $K_-$ состоит из нуля дуг, если существует такой узел $i_1$, что $i_1\in I(K_+)$, $i_1\in I(K_-)$, но $I(K_+)\neq I(K_-)$.

Совокупность дуг из контура-источника $K_+$, контура-стока $K_-$ и пути, соединяющего $K_+$ и $K_-$ в направлении $K_+\to K_-$, назовем *биконтуром*, если в ней количество дуг на единицу превышает количество узлов.

**Лемма 1.** Каждому биконтуру (нейтральному контуру) с множеством дуг $U^*$ соответствует с точностью до множителя единственное $\alpha$-допустимое направление $l=\{l_{ij}=0,\ (i,\ j)\in U\setminus U^*,\ l_{ij}=l^*_{ij},\ (i,\ j)\in U^*\}$, где $\{l^*_{ij},\ (i,\ j)\in U^*\}$ — нетривиальное решение системы

$$\sum_{j\in I_i^+(U^*)} l_{ij}-\sum_{j\in I_i^-(U^*)}\lambda_{ji}l_{ji}=0,\ i\in I(U^*);\tag{7}$$

$$\begin{gathered}l_{ij}\geqslant 0,\ (i,\ j)\in U^{\text{н}}(\alpha)\cap U^*;\\ l_{ij}\leqslant 0,\ (i,\ j)\in U^{\text{в}}(\alpha)\cap U^*.\end{gathered}\tag{8}$$

Доказательство. Пусть $U^*$ — биконтур. Покажем, что система (7), (8) имеет нетривиальное решение. Очевидно, что в случае $U^*\subset U^{\text{п}}(\alpha)$ система (7), (8) имеет нетривиальное решение, поскольку условия (8) пропадают, а система (7) имеет нетривиальное решение как однородная система из $|U^*|-1$ уравнений с $|U^*|$ неизвестными.

Пусть $U^{\text{н}}(\alpha)\cap U^*\neq\varnothing$ и $(i_0,\ j_0)$ — некоторая дуга из множества $U^{\text{н}}(\alpha)\cap U^*$. Рассмотрим задачу

$$l_{i_0j_0}\to\max,\ \sum_{j\in I_i^+(U^*)} l_{ij}-\sum_{j\in I_i^-(U^*)}\lambda_{ji}l_{ji}=0,\ i\in I(U^*);$$

$$\begin{gathered}0\leqslant l_{i_0j_0}\leqslant 1;\ l_{ij}\geqslant 0,\ (i,\ j)\in U^{\text{н}}(\alpha)\cap U^*\setminus(i_0,\ j_0);\\ l_{ij}\leqslant 0,\ (i,\ j)\in U^{\text{в}}(\alpha)\cap U^*,\end{gathered}\tag{9}$$

и двойственную к ней задачу

$$\omega_{i_0j_0}\to\min,\ u_{i_0}-\lambda_{i_0j_0}u_{j_0}-\omega_{i_0j_0}\leqslant -1,\ \omega_{i_0j_0}\geqslant 0;$$

$$u_i-\lambda_{ij}u_j\begin{cases}\leqslant 0, & (i,\ j)\in U^{\text{н}}(\alpha)\cap U^*\setminus(i_0,j_0);\\ \geqslant 0, & (i,\ j)\in U^{\text{в}}(\alpha)\cap U^*;\\ =0, & (i,\ j)\in U^{\text{п}}(\alpha)\cap U^*.\end{cases}\tag{10}$$

Предположим, что существует план задачи (10), для которого $\omega_{i_0j_0}<1$. Тогда на дугах биконтура выполняются неравенства

$$u_i-\lambda_{ij}u_j\begin{cases}\leqslant 0, & \text{если } (i,\ j)\text{ — прямая дуга, } (i,j)\neq(i_0,j_0);\\ \geqslant 0, & \text{если } (i,\ j)\text{ — обратная дуга;}\end{cases}\tag{11}$$

$$u_{i_0}-\lambda_{i_0j_0}u_{j_0}<0.$$

Рассмотрим путь $[i_1, \ldots, i_s]$, соединяющий $K_+$ и $K_-$. Из (11) следует, что

$$u_{i_1}-T_{\text{п}}u_{i_s}\begin{cases}\leqslant 0, & \text{если } (i_0,j_0)\text{ не принадлежит пути;}\\ <0, & \text{если } (i_0,\ j_0)\text{ принадлежит пути,}\end{cases}\tag{12}$$

где $T_{\text{п}}>0$ — детерминант рассматриваемого пути. Используя неравенства (11) для дуг контуров $K_+$ и $K_-$, имеем

$$\begin{aligned}&u_{i_1}(1-T_+)\begin{cases}\leqslant 0, & \text{если } (i_0,\ j_0)\,\overline{\in}\, U(K_+),\\ <0, & \text{если } (i_0,\ j_0)\in U(K_+);\end{cases}\\ &u_{i_s}(1-T_-)\begin{cases}\leqslant 0, & \text{если } (i_0,\ j_0)\,\overline{\in}\, U(K_-),\\ <0, & \text{если } (i_0,\ j_0)\in U(K_-),\end{cases}\end{aligned}\tag{13}$$

где $T_+>1$ — детерминант контура $K_+$; $T_-<1$ — детерминант контура $K_-$; $U(K)$ — множество дуг контура $K$. Очевидно, что система неравенств (12), (13) несовместна. Полученное противоречие доказывает оптимальность плана $\{u_i=0,\ i\in I(U^*),\ \omega_{i_0j_0}=1\}$ в задаче (10). (В случае, когда путь из $K_+$ в $K_-$ состоит из нуля дуг, неравенство (12) пропадает. Противоречие следует из несовместности системы (13), для которой $i_1=i_s$.)

Из теоремы двойственности следует, что существует нетривиальный план ($l_{i_0j_0}=1$) задачи (9) и, следовательно, нетривиальное решение системы (7), (8).

В силу того что ранг системы (7) равен $|U^*|-1$, нетрудно показать, что числа $l_{ij}$ из (7), (8) определяются с точностью до множителя $\theta>0$.

Аналогично рассматривается случай, когда $U^*$ — нейтральный контур или когда $(i_0,\ j_0)\in U^{\text{в}}(\alpha)\cap U^*\neq\varnothing$.

Определение. Биконтур (нейтральный контур) называется *отрицательным,* если соответствующее ему $\alpha$-допустимое направление является $\alpha$-подходящим.

**Теорема 1.** Задача (4), (5) имеет нулевое решение тогда и только тогда, когда в сети $S_\alpha(x)$ нет отрицательных биконтуров и отрицательных нейтральных контуров.

*Необходимость* следует из леммы.

*Достаточность.* Приведем конструктивное доказательство.

Рассмотрим на сети $S_\alpha(x)$ вспомогательную задачу: среди всех единичных потоков, которые могут быть доставлены в узел $j$ из некоторого контура-источника вдоль одного пути, найти поток с минимальной стоимостью. Решим эту задачу методом динамического программирования.

Введем *функцию Беллмана* $B_k(j)$ — минимальная стоимость единичного потока, который может быть доставлен в $j$ из некоторого контура-источника вдоль пути, содержащего не более $k$ дуг. Через $M_k(j)$ обозначим множество дуг контура-источника и пути, соответствующих потоку со стоимостью $B_k(j)$.

Рассмотрим контур-источник $K_+$. Можно показать, что числа $u_j$, $j \in I(K_+)$, найденные из системы

$$-u_i + \lambda_{ij} u_j = c_{ij}, \quad (i, j) \in U(K_+), \tag{14}$$

определяют стоимость единичного потока из $K_+$ в $j$, $j \in I(K_+)$. Предположим, что известны все контуры-источники $K_+^s$, $s = \overline{1, m}$, сети $S_\alpha(x)$. Для каждого из них из системы (14) найдем числа $u_i^s$, $i \in I(K_+^s)$. Положим $B_0(i) = \min\limits_s u_i^s = u_i^{s(i)}$, $M_0(i) = U(K_+^{s(i)})$, если $i \in \bigcup\limits_{s=1}^m I(K_+^s)$; $B_0(i) = \infty$, $M_0(i) = \varnothing$, если $i \overline{\in} \bigcup\limits_{s=1}^m I(K_+^s)$. *Уравнение Беллмана* имеет вид

$$B_k(j) = \min\{\min_{i \in \omega_+(j)} (B_{k-1}(i) + c_{ij}) / \lambda_{ij}, \\ \min_{i \in \omega_-(j)} (\lambda_{ji} B_{k-1}(i) - c_{ji})\}, \tag{15}$$

где

$$\omega_+(j) = \{i : (i, j) \in U, \ (i, j) \overline{\in} U^{\text{в}}(\alpha)\};$$

$$\omega_-(j) = \{i : (j, i) \in U, \ (j, i) \overline{\in} U^{\text{н}}(\alpha)\}.$$

Пусть минимум в (15) достигается при $i = i_*$. Если

$$B_k(j) < B_{k-1}(j), \tag{16}$$

то полагаем

$$M_k(j) = \begin{cases} M_{k-1}(i_*) \cup (i_*,\ j), & \text{если } i_* \in \omega_+(j); \\ M_{k-1}(i_*) \cup (j,\ i_*), & \text{если } i_* \in \omega_-(j). \end{cases}$$

В противном случае полагаем $M_k(j) = M_{k-1}(j)$.

Покажем, что на каждом шаге множество $M_k(j)$ либо состоит из некоторого контура-источника $K_+$ и элементарного пути, либо $M_k(j) = \varnothing$, т. е. из дуг множества $M_k(j)$ нельзя составить более одного контура. Действительно, на первом шаге это условие выполняется. Пусть оно выполняется на $(k-1)$-м шаге. Из сказанного следует, что это условие будет справедливо и для $M_k(j)$ в том и только том случае, если не выполняется (16) либо выполняется (16) и $j \overline{\in} I(M_{k-1}(i_*))$.

Предположим противное: имеет место (16) и $j \in I(M_{k-1}(i_*))$. Это означает, что из дуг множества $M_k(j)$ можно построить контур $K^*$, $K^* \neq K_+$, проходящий через узлы $i_*$, $j$. Контур $K^*$ не может быть ни контуром-стоком, ни нейтральным контуром, иначе это означало бы, что в сети $S_\alpha(x)$ построен отрицательный биконтур или отрицательный нейтральный контур. Следовательно, $K^*$ — контур-источник. По определению, $B_k(j)T^*/(T^*-1)$ (где $T^* > 1$ — детерминант контура $K^*$) — стоимость потока величины $T^*/(T^*-1)$ в узел $j$ из $K_+$ по дугам множества $M_k(j)$; $B_{k-1}(j)/(T^*-1)$ — стоимость потока величины $1/(T^*-1)$ в узел $j$ из $K_+$ по дугам множества $M_{k-1}(j)$. Тогда $B_0(j) = (T^* B_k(j) - B_{k-1}(j))/(T^*-1)$ — стоимость единичного потока в узел $j$ из $K^*$ вдоль пути, содержащего нуль дуг, т. е. по дугам множества $M_0(j) = U(K^*)$. Из (16) следует $B_0(j) < B_k(j) < B_{k-1}(j)$, что противоречит построению, так как $B_s \leqslant B_m$ при $s > m$. Следовательно, на каждом шаге множество $M_k(j)$ либо пусто, либо состоит из контура-источника и элементарного пути. Поскольку любой элементарный путь сети $S_\alpha(x)$ содержит менее $t = |U|$ дуг, то вспомогательная задача будет решена не более чем за $t$ шагов.

Нетрудно проверить, что числа $u_i = -B_t(i)$, $i \in I$, составляют двойственный план задачи (4), (5). Из теории двойственности следует, что задача (4), (5) имеет нулевое решение. Теорема доказана.

Таким образом, задача поиска $\alpha$-подходящих направлений для потока $x$ свелась к поиску отрицательных биконтуров и отрицательных нейтральных контуров в сети

$S_\alpha(x)$. Построение отрицательных биконтуров и нейтральных контуров осуществим с помощью *метода расстановки меток,* являющегося реализацией метода динамического программирования, примененного выше для доказательства теоремы.

Пусть известен некоторый контур $K_+$ в сети $S_\alpha(x)$. (Если в сети $S_\alpha(x)$ нет контуров-источников, то ищем отрицательный нейтральный контур *). Если и таких нет, то задача (4), (5) имеет тривиальное решение.) Из системы $B_j\lambda_{ij}-B_i=c_{ij}$, $(i, j)\in U(K_+)$, найдем числа $B_i$, $i\in I(K_+)$. Положим $B_i=\infty$, $M(i)=\varnothing$, $i\overline{\in} I(K_+)$. Пусть $(i, j)\in U(K_+)$. Если $(i, j)$ — прямая дуга, то узлу $j$ припишем метки «+», $M(j)=i$; если $(i, j)$ — обратная дуга, то узлу $i$ припишем метки «—», $M(i)=j$. Каждому узлу $i_0$, $i_0\in I$, поставим в соответствие множество

$$L(i_0)=\begin{cases} i_0, \text{ если } M(i_0)=\varnothing; \\ \{i_0, i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}, \ldots, i_k\}, \text{ если } M(i_0)\neq\varnothing, \end{cases}$$

где $i_1=M(i_0)$; $i_2=M(i_1)$, ... ; $i_{k+1}=M(i_k)$, ... ; $i_k=M(i_s)$, $0\leqslant k\leqslant s$. Сделаем в узел $j$ пробный шаг

$$B'_j=\min\{\min_{i\in\omega_+(j)}(B_i+c_{ij})/\lambda_{ij}, \min_{i\in\omega_-(j)}(B_i\lambda_{ji}-c_{ji})\}. \quad (17)$$

Пусть минимум в (17) достигается при $i=i_*$, $i_*\in\omega_+(j)$. Если $B'_j=B_j$, то метка узла $j$ не меняется. Если $B'_j<B_j$, возможны случаи: 1) $j\overline{\in} L(i_*)$, 2) $j\in L(i_*)$. В первом случае узлу $j$ приписываем новые метки: $\overline{B}_j=B'_j$, $\overline{M}_j=i_*$, «+». Соответственно изменяем метки $B_i$ узлов $i$, для которых $j\in L(i)$, т. е. метки, зависящие от $B_j$.

Второй случай означает, что множество дуг

$$U^*=(i_*, j)\cup\{(i, M(i)), i\in L(i_*), \text{ если узел } i \text{ имеет метку «—»}; (M(i), i), i\in L(i_*), \text{ если узел } i \text{ имеет метку «+»}\} \quad (18)$$

образует два контура: контур-источник, с помощью которого были помечены узлы $i_*$, $j$, и новый контур, содержащий дугу $(i_*, j)$. Если детерминант нового контура $T_{\text{нов}}>1$, меняем метки узла $j$: $\overline{B}_j=(T_{\text{нов}}B'_j-B_j)/(T_{\text{нов}}-1)$, $\overline{M}_j=i_*$, «+». Соответственно меняем метки $B_i$,

*) Используя метод динамического программирования, легко (см. [ч. 2]) получить алгоритм построения контура-источника или нейтрального контура.

зависящие от $B_j$. Если $T_{\text{нов}} < 1$ ($T_{\text{нов}} = 1$), множество дуг (18) (новый контур) составляет отрицательный биконтур (отрицательный нейтральный контур). Из условия $l_{i_* j} = 1$ и (7) нетрудно найти $\alpha$-подходящее направление, соответствующее биконтуру (18).

Максимально допустимый шаг $\Theta_0$ находится по формуле

$$\Theta_0 = \min \Theta_{ij}, \ (i, j) \in U^*,$$

где

$$\Theta_{ij} = \begin{cases} (d_{ij} - x_{ij}) / l_{ij}, \text{ если } l_{ij} > 0; \\ -x_{ij} / l_{ij}, \text{ если } l_{ij} < 0. \end{cases}$$

Новый поток $\bar{x}$ строим в виде $\bar{x}_{ij} = x_{ij}$, если $(i, j) \overline{\in} U^*$; $\bar{x}_{ij} = x_{ij} + \Theta_0 l_{ij}$, если $(i, j) \in U^*$. При переходе от потока $x$ к потоку $\bar{x}$ функция (2) уменьшилась на величину $|\Theta_0 \lambda_{i_* j} (B_j' - B_j)|$.

Пусть после нескольких итераций метода расстановки меток в сети $S_\alpha(x)$ нельзя изменить ни одной метки. В этом случае вычеркиваем все узлы $i$, для которых $B_i < \infty$, и связанные с ними дуги. В оставшейся сети методом расстановки меток строим отрицательный биконтур (нейтральный контур). Если же все дуги сети $S_\alpha(x)$ вычеркнуты или в сети нет контура-источника (отрицательного нейтрального контура), то для потока $x$ нет $\alpha$-подходящих направлений. По формуле (6) получаем оценку $\beta$, положив $\delta_{ij} = -B_i + \lambda_{ij} B_j$, $(i, j) \in U$. Если $\beta \leqslant \varepsilon$, то решение задачи (1), (2) прекращается на $\varepsilon$-оптимальном потоке $x$. В противном случае уменьшаем число $\alpha$ и продолжаем решение.

Замечание. Поиск отрицательного биконтура или отрицательного нейтрального контура целесообразно начинать с множества $U^{\text{п}}(\alpha)$. Если для $k$-й компоненты связности $\{I_k^{\text{п}}, U_k^{\text{п}}\}$ множества $U^{\text{п}}(\alpha)$ система $-B_i + \lambda_{ij} B_j = c_{ij}$, $(i, j) \in U_k^{\text{п}}$, несовместна, то $k$-я компонента $\{I_k^{\text{п}}, U_k^{\text{п}}\}$ содержит отрицательный биконтур или отрицательный нейтральный контур.

Используя дополнительное правило, сформулированное в замечании, можно показать, что описанным методом задача (1), (2) решается за конечное число итераций.

**2. Двойственный метод.** Предположим теперь, что кроме параметров задачи (1), (2) к началу решения известен план $\{u, w\} = \{u_i, i \in I;\ w_{ij}, (i, j) \in U\}$ двойственной к (1), (2) задачи

$$\sum_{i \in I} a_i u_i - \sum_{(i, j) \in U} d_{ij} w_{ij} \to \max, \tag{19}$$
$$u_i - \lambda_{ij} u_j - w_{ij} \leqslant c_{ij},\ w_{ij} \geqslant 0,\ (i, j) \in U.$$

В данном пункте для заданного начального плана $\{u, w\}$ задачи (19) и заданного числа $\varepsilon \geqslant 0$ строится алгоритм, позволяющий найти $\varepsilon$-оптимальный поток задачи (1), (2), последовательно преобразуя планы задачи (19).

В дальнейшем каждому плану $\{u, w\}$ задачи (19) (двойственному плану) будем ставить в соответствие *копоток* $\delta = \{\delta_{ij} = u_i - \lambda_{ij} u_j - c_{ij},\ (i, j) \in U\}$. По известному копотоку $\delta$, построенному по начальному двойственному плану $\{u, w\}$, и выбранному $\alpha \geqslant 0$ составим векторы $\delta(\alpha)$ и $w(\alpha)$ с компонентами $\delta_{ij}(\alpha) = \delta_{ij}$, если $\delta_{ij} \in [-\alpha, 0]$; $\delta_{ij}(\alpha) = 0$, если $\delta_{ij} \overline{\in} [-\alpha, 0]$; $w_{ij}(\alpha) = \delta_{ij}$, если $\delta_{ij} \in [0, \alpha]$; $w_{ij}(\alpha) = 0$, если $\delta_{ij} \overline{\in} [0, \alpha]$.

Вектор $\{v_i, i \in I;\ \gamma_{ij}, (i, j) \in U\}$ называется *$\alpha$-допустимым направлением* для двойственного плана $\{u, w\}$ (коплана $\delta$), если существует такое число $\mu_0 > 0$, что при всех $\mu$, $0 \leqslant \mu \leqslant \mu_0$, выполняются соотношения

$$(u_i + \mu v_i) - \lambda_{ij}(u_j + \mu v_j) - (w_{ij} + \mu \gamma_{ij}) \leqslant c_{ij} + \delta_{ij}(\alpha);$$
$$w_{ij} + \mu \gamma_{ij} \geqslant w_{ij}(\alpha),\ (i, j) \in U.$$

Обозначим $U^-(\alpha) = \{(i, j) \in U;\ \delta_{ij} < -\alpha\}$, $U^+(\alpha) = \{(i, j) \in U;\ \delta_{ij} > \alpha\}$, $U^*(\alpha) = \{(i, j) \in U;\ -\alpha \leqslant \delta_{ij} \leqslant \alpha\}$. Легко проверить, что множество $\alpha$-допустимых направлений описывается соотношениями

$$\begin{gathered} v_i - \lambda_{ij} v_j - \gamma_{ij} \leqslant 0,\ (i, j) \in U^+(\alpha) \cup U^*(\alpha); \\ \gamma_{ij} \geqslant 0,\ (i, j) \in U^-(\alpha) \cup U^*(\alpha). \end{gathered} \tag{20}$$

Среди всех $\alpha$-допустимых направлений будем искать направление, максимизирующее функцию

$$\sum_{i \in I} a_i v_i - \sum_{(i, j) \in U} d_{ij} \gamma_{ij}. \tag{21}$$

С помощью замены $a_i = b_i + \sum_{j \in I_i^+(U^+)} d_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U^+)} \lambda_{ji} d_{ji}$

задачу (20), (21) можно привести к виду

$$\sum_{i\in I} b_i u_i - \sum_{(i,\ j)\in U^*} d_{ij}\gamma_{ij} \to \max,$$

$$v_i - \lambda_{ij}v_j - \gamma_{ij} \leqslant 0,\ \gamma_{ij} \geqslant 0,\ (i,\ j) \in U^*.$$

Для того чтобы последняя задача имела конечное решение для любого копотока $\delta$, введем нормировочные условия и добавим слагаемые в целевую функцию. Получим задачу

$$\begin{gathered}\sum_{i\in I} b_i v_i - \sum_{(i,\ j)\in U^*} d_{ij}\,\gamma_{ij} - \sum_{i\in I_+} b_i\gamma_i + \sum_{i\in I_-} b_i\gamma_i \to \max,\\ v_i - \lambda_{ij}v_j - \gamma_{ij} \leqslant 0,\ \gamma_{ij} \geqslant 0,\ (i,\ j)\in U^*, \qquad (22)\\ v_i - \gamma_i \leqslant 1,\ \gamma_i \geqslant 0,\ i\in I_+ = \{i: b_i \geqslant 0\},\\ -v_i - \gamma_i \leqslant 1,\ \gamma_i \geqslant 0,\ i\in I_- = \{i: b_i < 0\},\end{gathered}$$

которую назовем *производной задачей* по отношению к задаче (19) и копотоку $\delta$. Запишем двойственную к ней задачу

$$\sum_{i\in I} \alpha_i \to \min,$$

$$\sum_{j\in I_i^+(U^*)} x_{ij} - \sum_{j\in I_i^-(U^*)} \lambda_{ji}x_{ji} + (\operatorname{sign} b_i)\alpha_i = b_i,\ i\in I, \qquad (23)$$

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant d_{ij},\ (i,\ j)\in U^*,\ 0 \leqslant \alpha_i \leqslant |b_i|,\ i\in I.$$

Рассмотрим сеть $\bar S = \{\bar I,\ \bar U\}$, $\bar I = \{I,\ s,\ t\}$, $\bar U = \{U^*;\ (s,\ i),\ i\in I_+;\ (i,\ t),\ i\in I_-\}$. Тогда задача (23) эквивалентна следующей задаче:

$$\begin{gathered}\sum_{i\in I_+} \bar x_{si} + \sum_{i\in I_-} \bar x_{it} \to \max,\\ \sum_{j\in I_i^+(\bar U)} \bar x_{ij} - \sum_{j\in I_i^-(\bar U)} \lambda_{ji}\,\bar x_{ji} = 0,\ i\in I, \qquad (24)\\ 0 \leqslant \bar x_{ij} \leqslant d_{ij},\ (i,\ j)\in \bar U,\end{gathered}$$

которую назовем задачей о *максимальном потоке на обобщенной сети* $\bar S$. Здесь $d_{si} = b_i$, $\lambda_{si} = 1$, $i\in I_+$; $d_{it} = -b_i$, $i\in I_-$.

Предположим, что значение целевой функции задачи (24) на оптимальном плане $\{\bar{x}_{ij}^0,\ (i,\ j) \in \bar{U}\}$ равно $\sum\limits_{j \in I} |b_i|$. Покажем, что в этом случае совокупность чисел

$$\{x_{ij} = \bar{x}_{ij}^0,\ (i,\ j) \in U^*;\ x_{ij} = 0,\ (i,\ j) \in U^-,$$
$$x_{ij} = d_{ij},\ (i,\ j) \in U^+\} \tag{25}$$

является $\beta$-оптимальным потоком задачи (1), (2), где

$$\beta = -\sum_{-\alpha \leqslant \delta_{ij} < 0} \delta_{ij} \bar{x}_{ij}^0 + \sum_{0 < \delta_{ij} \leqslant \alpha} \delta_{ij} (d_{ij} - \bar{x}_{ij}^0). \tag{26}$$

Легко проверить, что совокупность чисел (25) является потоком задачи (1), (2). Следовательно, имеем

$$\sum_{(i,\ j) \in U} c_{ij} x_{ij} = -\sum_{(i,\ j) \in U} x_{ij} \delta_{ij} + \sum_{i \in I} u_i a_i = -\sum_{(i,\ j) \in U^*(\sigma)} x_{ij} \delta_{ij} -$$
$$-\sum_{(i,\ j) \in U^+} d_{ij} \delta_{ij} + \sum_{i \in I} u_i a_i = -\sum_{-\alpha \leqslant \delta_{ij} < 0} \delta_{ij} \bar{x}_{ij}^0 + \tag{27}$$
$$+\sum_{0 < \delta_{ij} \leqslant \alpha} \delta_{ij} (d_{ij} - \bar{x}_{ij}^0) + \sum_{i \in I} u_i a_i - \sum_{(i,\ j) \in U} d_{ij} w_{ij}.$$

В выражении (27) последние два слагаемых равны значению целевой функции задачи (19) на плане $\{u, w\} = \{u_i,\ i \in I;\ w_{ij} = 0$, если $\delta_{ij} \leqslant 0;\ w_{ij} = \delta_{ij}$, если $\delta_{ij} > 0\}$. Из соотношений двойственности и (27) следует неравенство

$$\sum_{(i,\ j) \in U} c_{ij} x_{ij} - \sum_{(i,\ j) \in U} c_{ij} x_{ij}^0 \leqslant -\sum_{-\alpha \leqslant \delta_{ij} < 0} \delta_{ij} \bar{x}_{ij}^0 +$$
$$+\sum_{0 < \delta_{ij} \leqslant \alpha} \delta_{ij} (\alpha_{ij} - \bar{x}_{ij}^0),$$

которое доказывает утверждение.

Если оптимальное значение целевой функции задачи (24) меньше, чем $\sum\limits_{i \in I} |b_i|$, то, как будет показано ниже, по решению задачи (24) легко построить $\alpha$-допустимое направление (решение задачи (22)), ведущее к улучшению двойственной целевой функции исходной задачи.

Таким образом, поиск $\alpha$-допустимых направлений для задачи (19) сводится к решению задачи (24).

Введем следующие определения. Путь из узла $s$ в узел $j \in I(K_-)$ назовем *обобщенным путем* из источника в сток *I типа*; путь из узла $j \in I(K_+)$ в узел $t$ — *обобщенным путем* из источника в сток *II типа*; путь из узла $s$ в узел $t$ — *обобщенным путем* из источника в сток *III типа*.

**Лемма 2.** Каждый обобщенный путь из источника в сток задает подходящее направление для задачи (24), т. е. поток $\bar{x}$ в задаче (24) можно увеличить, если в сети $\bar{S}(\bar{x})$ существует обобщенный путь из источника в сток *).

Доказательство леммы проводится по схеме, использованной при доказательстве леммы 1.

**Теорема 2.** Для оптимальности потока $\bar{x}$ в задаче (24) необходимо и достаточно, чтобы в сети $\bar{S}(\bar{x})$ не было обобщенных путей из источника в сток.

*Необходимость* следует из леммы 2.

*Достаточность*. Покажем, что поток $\bar{x}$ является максимальным, если в сети $\bar{S}(\bar{x})$ нет обобщенных путей из источника в сток. На сети $\bar{S}(\bar{x})$ рассмотрим вспомогательную задачу: найти путь из узла $s$ в узел $j$, $j \neq t$, с минимальным детерминантом. Решим эту задачу методом динамического программирования.

Введем функцию Беллмана $B_k(j)$ — минимальный детерминант среди детерминантов путей из $s$ в $j$, содержащих не более $k$ дуг. Уравнение Беллмана имеет вид

$$B_k(j) = \min\{\min_{i \in \omega^+(j)} B_{k-1}(i)\lambda_{ij};\ \min_{i \in \omega^-(j)} B_{k-1}(i)/\lambda_{ji}\}, \tag{28}$$

где $\omega^+(j) = \{i: (i, j) \in \bar{U},\ \bar{x}_{ij} < d_{ij}\}$; $\omega^-(j) = \{i: (j, i) \in \bar{U}, \bar{x}_{ji} > 0\}$, с начальными условиями $B_0(s) = 1$; $B_0(j) = \infty$, $j \in \bar{I} \setminus \bar{s}$. Можно показать, что, поскольку в сети $\bar{S}(\bar{x})$ нет обобщенных путей I и III типов, узел $t$ все время будет иметь первоначальную метку $B_0(t) = \infty$ и пути, соответствующие функциям $B_k(j)$, $j \in I$, будут элементарными. Следовательно, начиная с некоторого шага $k_0 \leqslant |\bar{U}|$, выполняются условия $B_{k_0}(t) = B_k(j)$ для любого $k \geqslant k_0$, $j \in I$.

Выделим множество узлов $I_0 = \{j: B_{k_0}(j) = \infty\}$ и для него рассмотрим вторую вспомогательную задачу: найти путь из узла $j \in I_0$ в узел $t$ с максимальным детерминантом. Как и в предыдущем случае, для решения вспомогательной задачи воспользуемся методом динамического программирования.

*) Символом $\bar{S}(\bar{x})$ обозначается сеть $\bar{S}$ с потоком $\bar{x}$,

Введем функцию Беллмана $A_k(i)$ — максимальный детерминант среди детерминантов путей из $i$, $i \in I_0$, в $t$, содержащих не более $k$ дуг. Составим уравнение Беллмана

$$A_k(i) = \max\{\max_{j \in \underline{\omega}^+(i)} A_{k-1}(j)\lambda_{ij};$$

$$\max_{j \in \underline{\omega}^-(i)} A_{k-1}(j)/\lambda_{ji}\},\ i \in I_0, \qquad (29)$$

с начальными условиями $A_0(t) = 1$, $A_0(i) = 0$, $i \in I_0 \setminus t$. Здесь $\underline{\omega}^+(i) = \{j\colon (i, j) \in \overline{U},\ \overline{x}_{ij} < d_{ij}\}$; $\underline{\omega}^-(i) = \{j\colon (j, i) \in \overline{U},\ \overline{x}_{ji} > 0\}$. Нетрудно показать, что если в сети $\overline{S}(\overline{x})$ нет путей II и III типов, то, начиная с некоторого шага $k_1$, будут выполняться условия $A_{k_1}(i) = A_k(i)$, $k \geqslant k_1$, $i \in I_0$. Очевидно, что пути, соответствующие $A_{k_1}(i)$, не содержат узлов $j \in I \setminus I_0$, ибо в противном случае в сети $\overline{S}(\overline{x})$ были бы пути из $s$ в $t$.

Предположим, что обе вспомогательные задачи решены. Покажем, что для чисел $v_i^0$, $i \in I$:

$$v_i^0 = 1/B_{k_0}(i),\ \text{если}\ i \overline{\in} I_0,\ i \neq s;\ v_i^0 = -A_{k_1}(i),\ \text{если}\ i \in I_0 \setminus t;$$

$$v_s^0 = v_t^0 = 0 \qquad (30)$$

и потока $\bar{x}$ выполняются достаточные условия оптимальности потока $\bar{x}$ в задаче (24).

Пусть $(i, j) \in U^*$, $i \overline{\in} I_0$, $j \in I_0$, тогда $\bar{x}_{ij} = d_{ij}$, ибо в противном случае существовал бы обобщенный путь III типа. Из (30) следует, что $v_i^0 > 0$, $v_j^0 \leqslant 0$. Значит, $v_i^0 - \lambda_{ij} v_j^0 > 0$. Если $j \overline{\in} I_0$, $i \in I_0$, то $\overline{x}_{ij} = 0$. По построению, $v_j^0 \geqslant 0$, $j \overline{\in} I_0$; $v_i^0 < 0$, $i \in I_0$, следовательно, $v_i^0 - \lambda_{ij} v_j^0 < 0$.

Пусть для дуги $(i, j) \in U^*$, $i$, $j \overline{\in} I_0$, условия оптимальности не выполняются, например, $\overline{x}_{ij} = 0$, $v_i^0 - \lambda_{ij} v_j^0 > 0$. Тогда $B(j) > B(i)\lambda_{ij}$, что противоречит (28).

Пусть для дуги $(i, j) \in U^*$, $i$, $j \in I_0$, $\overline{x}_{ij} = 0$, но $v_i^0 - \lambda_{ij} v_j^0 > 0$. Тогда $A(i) < A_{(j)}\lambda_{ij}$, что противоречит (29). Рассмотрев аналогичным образом оставшиеся случаи, убеждаемся в справедливости соотношений $v_i^0 - \lambda_{ij} v_j^0 \geqslant 0$, если $\overline{x}_{ij} = d_{ij}$; $v_i^0 - \lambda_{ij} v_j^0 \leqslant 0$, если $x_{ij} = 0$; $v_i^0 - \lambda_{ij} v_j^0 = 0$, если $0 < \overline{x}_{ij} < d_{ij}$, $(i, j) \in U^*$; $v_i^0 \leqslant 1$, если $\overline{x}_{si} = d_{si}$; $v_i^0 \geqslant 1$, если $\overline{x}_{si} = 0$; $v_i^0 = 1$, если $0 < \overline{x}_{si} < d_{si}$, $i \in I_+$;

$v_i^0 \geqslant -1$, если $\overline{x}_{it} = d_{it}$; $v_i^0 \leqslant -1$, если $\overline{x}_{it} = 0$; $v_i^0 = -1$, если $0 < \overline{x}_{it} < d_{it}$, $i \in I_-$. Из последних соотношений следует оптимальность потока $\overline{x}$ в задаче (24). Теорема доказана.

Для решения задачи о максимальном потоке опишем *метод расстановки меток,* являющийся реализацией метода динамического программирования, примененного выше для доказательства теоремы.

Пусть в сети $\bar{S}$ задан поток *) $\bar{x}$. Узлам $i \in \{i : i \in I_+, \bar{x}_{si} < b_i\}$ приписываем метки $\{v_i = 1,\ M(i) = 0\}$; узлам $i \in \{i : i \in I_-,\ \bar{x}_{it} < -b_i\}$ — метки $\{v_i = -1,\ M(i) = 0\}$; остальным узлам — метки $\{v_i = 0,\ M(i) = 0\}$. Пусть $N_+$ — множество узлов с положительными первыми элементами меток, $N_-$ — множество узлов с отрицательными первыми элементами меток. Обозначим: $\eta_+ = \{j : \exists\,(i, j),\ i \in N_+,\ \overline{x}_{ij} < d_{ij}$ или $\exists\,(j, i),\ i \in N_+,\ \overline{x}_{ji} > 0\}$; $\eta_- = \{i : \exists\,(i, j),\ j \in N_-,\ \overline{x}_{ij} < d_{ij}$ или $\exists\,(j, i),\ j \in N_-,\ \overline{x}_{ji} > 0\}$.

Если $\eta_+ \cap \eta_- \neq \varnothing$, то в сети $\bar{S}(\bar{x})$ существует путь из $s$ в $t$. Восстановим этот путь по вторым элементам меток. Пусть $i_* \in \eta_+ \cap \eta_-$. Следовательно, существует ребро $\{i_0, i_*\}$, $i_0 \in N_+$, и ребро $\{i_*, j_0\}$, $j_0 \in N_-$. Тогда искомый путь имеет вид

$$\{s,\ i_k,\ \ldots,\ i_1,\ i_0,\ i_*,\ j_0,\ j_1,\ \ldots,\ j_p,\ t\}, \tag{31}$$

где $i_1 = M(i_0)$; $i_2 = M(i_1)$, ... ; $i_k = M(i_{k-1})$; $M(i_k) = 0$; $j_1 = M(j_0)$, ... ; $j_p = M(j_{p-1})$; $M(j_p) = 0$. Пропуская максимально допустимый поток по пути (31), увеличиваем поток $\bar{x}$ в $\bar{S}$.

Пусть $\eta_+ \cap \eta_- = \varnothing$. Рассмотрим узел $i \in \eta_-$. Сделаем в $i$ пробный шаг

$$v_i' = \min\{\min_{j \in \underline{\omega}^+(i)} v_j \lambda_{ij};\ \min_{j \in \underline{\omega}^-(i)} v_j / \lambda_{ji}\}.$$

Если $v_i = v_i'$, то метку узла $i$ не меняем. Пусть $v_i > v_i'$ и минимум в последнем выражении достигается на узле $j_*$. Построим множество $L(j_*) = \{j_*, j_1, \ldots, j_s\}$, где $j_1 = \mu(j_*)$; $j_2 = \mu(j_1)$, ... ; $\mu(j_s) = 0$. Если $i \in L(j_*)$, то найдем обобщенный путь II типа из источника в сток. Его легко восстановить по вторым элементам меток. В сети $\bar{S}$ увели-

*) В качестве начального потока $\bar{x}$ можно взять нулевой поток.

чиваем поток, изменяя соответствующим образом дуговые потоки вдоль построенного пути. Если $i \in L(j_*)$, узлу $i$ припишем новую метку $\{v_i = v'_i,\ \mu(i) = j_*\}$ и соответственно изменим первые элементы меток узлов $j$, для которых $i \in L(j)$.

Случай $j \in \eta_+$ исследуется аналогично. Пробная метка $v'_j$ находится из условия

$$v'_j = \max\{\max_{i \in \omega^+(j)} v_i/\lambda_{ij},\ \max_{i \in \omega^-(j)} v_i\lambda_{ji}\}.$$

Если в сети $\bar{S}(\bar{x})$ нельзя изменить ни одной метки, то $\bar{x}$ — максимальный поток в сети $\bar{S}$.

Замечание. При построении обобщенных путей в сети $\bar{S}(\bar{x})$ следует в первую очередь рассматривать дуги $\bar{U}^{\text{п}}(\bar{x}) = \{(i, j): (i, j) \in \bar{U},\ 0 < \bar{x}_{ij} < d_{ij}\}$ и пытаться из них строить обобщенный путь из источника в сток. В множестве $\bar{U}^{\text{п}}(\bar{x})$ существует обобщенный путь в том и только том случае, если система $v_s = v_t = 0$,

$$v_i - \lambda_{ij} v_j = \begin{cases} 0, \text{ если } (i, j) \in \bar{U}^{\text{п}}(\bar{x}),\ i \neq s,\ j \neq t; \\ -1, \text{ если } (i, j) \in \bar{U}^{\text{п}}(\bar{x}),\ i = s \text{ или } j = t, \end{cases}$$

несовместна.

**Лемма 3.** С учетом дополнительного правила, сформулированного в замечании, задача о максимальном потоке на обобщенной сети методом расстановки меток решается за конечное число шагов.

Пусть в сети $\bar{S}$ методом расстановки меток построен максимальный поток $\bar{x}$. Обозначим через $v_i^0$, $i \in I$, первые элементы меток, полученные в результате решения задачи о максимальном потоке. Очевидно, что числа $v_i^0$, $i \in I$, совпадают с числами (30) и, следовательно, являются оптимальным планом *) задачи

$$\sum_{i \in I_+} b_i \gamma_{si} - \sum_{i \in I_-} b_i \gamma_{it} + \sum_{(i, j) \in U^*} d_{ij} \gamma_{ij} \to \min,$$

$$v_i - \lambda_{ij} v_j - \gamma_{ij} \leqslant 0,\ (i, j) \in U^*; \qquad (32)$$

$$v_i - \gamma_{it} \leqslant -1,\ i \in I_-;\ -v_i - \gamma_{si} \leqslant -1,\ i \in I_+,$$

двойственной к задаче о максимальном потоке. Обозначим через $f(v)$ значение целевой функции задачи (32) и

*) Строго говоря, планом задачи (32) является совокупность чисел $\{v_i,\ i \in I;\ \gamma_{ij},\ (i, j) \in \bar{U}\}$. Однако компоненты $\gamma_{ij}$, $(i, j) \in \bar{U}$, однозначно определяются из условий согласования по компонентам $v_i$, $i \in I$.

через $g(v)$ значение целевой функции задачи (22) на плане $\{v_i,\ i\in I\}$. Нетрудно показать, что имеет место равенство

$$g(v^0)+f(v^0)=\sum_{i\in I}|b_i|. \tag{33}$$

Из условия (33) и оптимальности плана $\{v_i^0,\ i\in I\}$ в задаче (32) следует оптимальность плана $\{v_i^0,\ i\in I\}$ в задаче (22).

Согласно теории двойственности, величина максимального потока в обобщенной сети $\bar{S}$ равна $f(v^0)$. Из (33) следует, что при $f(v^0)<\sum_{i\in I}|b_i|$ имеет место неравенство $g(v^0)>0$. Значит, оптимальный план

$$\left.\begin{array}{l}\{v_i^0,\ i\in I;\ \ \gamma_{ij}=\max\{0,\ v_i^0-\lambda_{ij}v_j^0\},\ (i,j)\in U^*;\\ \gamma_i=\max\{0,\ v_i^0-1\},\ i\in I_+;\ \gamma_i=\max\{0,\ -v_i^0-1\},\ i\in I_-\}\end{array}\right. \tag{34}$$

задачи (22) является $\alpha$-подходящим направлением для двойственного плана.

Максимально допустимый шаг вдоль $\alpha$-подходящего направления (34) равен $\sigma=\min\sigma_{ij}$, $(i,j)\in U^+(\alpha)\cup U^-(\alpha)$, $\sigma_{ij}=-\delta_{ij}/(v_i^0-\lambda_{ij}v_j^0)$, если $(i,j)\in U^+(\alpha)$, $v_i^0-\lambda_{ij}v_j^0<0$, либо $(i,j)\in U^-(\alpha)$, $v_i^0-\lambda_{ij}v_j^0>0$; $\sigma_{ij}=\infty$ в остальных случаях. Если $\sigma=\infty$, то исходная задача (1), (2) не имеет допустимых потоков.

Пусть $\sigma<\infty$. Переходим к новому копотоку $\bar{\delta}=\{\bar{\delta}_{ij}=\delta_{ij}+\sigma(v_i^0-\lambda_{ij}v_j^0),\ (i,j)\in U\}$. По копотоку $\bar{\delta}$ строим новую производную задачу и соответствующую ей задачу о максимальном потоке. Заметим, что в качестве начального потока $\bar{x}$ и начальных меток в новой задаче о максимальном потоке на обобщенной сети можно взять максимальный поток и соответствующие метки, полученные на предыдущей итерации.

Пусть в результате решения задачи (24) получен оптимальный поток $\bar{x}^0$ такой, что $\sum_{i\in I_+}\bar{x}_{si}^0+\sum_{i\in I_-}\bar{x}_{it}^0=f(v^0)=\sum_{i\in I}|b_i|$. Как было показано выше, в этом случае совокупность чисел (25) является $\beta$-оптимальным потоком задачи (1), (2). Если $\beta\leqslant\varepsilon$, то решение задачи (1), (2) прекращается на $\varepsilon$-оптимальном потоке (25). Если $\beta>\varepsilon$, то уменьшаем число $\alpha$ и строим новую производную задачу.

З а м е ч а н и е. Число $\alpha$ уменьшаем на столько, чтобы хотя бы одна дуга $(i, j)$ вышла из множества $U^*(\alpha)$.

**Теорема.** Описанный метод за конечное число итераций позволяет либо убедиться в отсутствии потоков в задаче (1), (2), либо построить $\varepsilon$-оптимальный поток $x^\varepsilon$ задачи (1), (2).

## § 5. Оптимальный мультипоток на обобщенной сети

В данном параграфе строится прямой опорный метод решения сетевой задачи, моделирующей двухпродуктовую транспортную задачу с преобразованием транспортируемых продуктов.

**1. Постановка задачи. Опорный мультипоток.** Рассмотрим обобщенную [ч. 2] сеть $S=\{I, U\}$ со следующими характеристиками элементов: $a_i=\{a_i^1, a_i^2\}$ — интенсивность узла $i\in I$; $d_{ij}$ — пропускная способность дуги $(i, j)\in U$; $c_{ij}=\{c_{ij}^1, c_{ij}^2\}$ — стоимость единичного дугового потока $x_{ij}=\{x_{ij}^1, x_{ij}^2\}$ вдоль дуги $(i, j)\in U$; $\lambda_{ij}=\{\lambda_{ij}^1, \lambda_{ij}^2\}$ — параметр дуги, характеризующий явление преобразования дугового потока: поток $\{x_{ij}^1, x_{ij}^2\}$ из узла $i$ поступает в узел $j$ в виде $\{\lambda_{ij}^1 x_{ij}^1, \lambda_{ij}^2 x_{ij}^2\}$ (считается, что пункт преобразования находится непосредственно перед узлом $j$).

Математическая модель задачи об оптимальном мультипотоке на обобщенной сети имеет следующий вид:

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{(i,j)\in U} c_{ij}^k x_{ij}^k \to \min,$$

$$\sum_{j\in I_i^+(U)} x_{ij}^k - \sum_{j\in I_i^-(U)} \lambda_{ji}^k x_{ji}^k = a_i^k,\ i\in I, \tag{1}$$

$$x_{ij}^k \geqslant 0,\ k=1, 2;\ x_{ij}^1 + x_{ij}^2 \leqslant d_{ij},\ (i, j)\in U,$$

где дополнительные символы имеют стандартный смысл.

Следуя [ч. 2], удобно множество дуг $U$ представить в виде объединения двух множеств $U^1$, $U^2$. В множество $U^1$ дуга $(i, j)$ входит с параметрами $c_{ij}^1$, $\lambda_{ij}^1$, в множество $U^2$ — с $c_{ij}^2$, $\lambda_{ij}^2$. По аналогии с [ч.2] совокупность дуг $U_{оп}=\{U_{оп}^1, U_{оп}^2, U^*\}$, $U_{оп}^1\subset U^1$, $U_{оп}^2\subset U^2$, $U^*\subset U_{оп}^1\cap U_{оп}^2$, назовем *опорой* задачи (1), если система

$$\sum_{j\in I_i^+(U_{\text{оп}}^k)} x_{ij}^k - \sum_{j\in I_i^-(U_{\text{оп}}^k)} \lambda_{ji}^k x_{ji}^k = 0,\ i\in I(U_{\text{оп}}^k),\ k=1, 2;$$

$$x_{ij}^1 + x_{ij}^2 = 0,\ (i, j)\in U^*, \qquad (2)$$

имеет только тривиальное решение, но допускает ненулевой псевдопоток для каждой из следующих совокупностей дуг:

1) $\{U_{\text{оп}}^1, U_{\text{оп}}^2, U^*\setminus(i_0, j_0)\}$, где $(i_0, j_0)$ — любая дуга из $U^*$;

2) $\{U_{\text{оп}}^1 \cup (i_0, j_0)^1,\ U_{\text{оп}}^2,\ U^*\}$, где $(i_0, j_0)^1\in U^1\setminus U_{\text{оп}}^1$;

3) $\{U_{\text{оп}}^1,\ U_{\text{оп}}^2 \cup (i_0, j_0)^2,\ U^*\}$, где $(i_0, j_0)^2\in U^2\setminus U_{\text{оп}}^2$.

Пара $\{x, U_{\text{оп}}\}$ из потока $x$ и опоры $U_{\text{оп}}$ называется *опорным потоком. Дуги* $(i, j)^k\in U_{\text{оп}}^k$, $k=1, 2$, назовем *опорными,* остальные дуги — *неопорными.*

Для формулировки критерия опорности введем следующие понятия. Пусть сеть $\{I, U_{\text{оп}}^k\}$ состоит из $m_k$ компонент связности $S_{l\,\text{оп}}^k = \{I_l^k, U_{l\,\text{оп}}^k\}$, $l=\overline{1, m_k}$, $k = 1, 2$. Возьмем для простоты $k = 1$. В каждой компоненте связности $S_{l\,\text{оп}}^1$ произвольным образом выделим дерево $\{I_l^1, U_{lg}^1\}$, $U_{lg}^1\subset U_{l\,\text{оп}}^1$. Определим множества $\widetilde{U}_{l\,\text{оп}}^1$ и $U_{l\,\text{биц}}^1$. Возможны два случая.

а) Любая дуга $(s, t)\in U_{l\,\text{оп}}^1\setminus U_{lg}^1$ составляет с дугами $U_{lg}^1$ вырожденный цикл. Полагаем $\widetilde{U}_{l\,\text{оп}}^1 = U_{lg}^1$ и $U_{l\,\text{биц}}^1 = U_{l\,\text{оп}}^1\setminus\widetilde{U}_{l\,\text{оп}}^1$.

б) Существует дуга $(s_0, t_0)^1\in U_{l\,\text{оп}}^1\setminus U_{lg}^1$, которая образует с дугами $U_{lg}^1$ невырожденный цикл. Тогда $\widetilde{U}_{l\,\text{оп}}^1 = U_{lg}^1\cup(s_0, t_0)^1$ и $U_{l\,\text{биц}}^1 = U_{l\,\text{оп}}^1\setminus\widetilde{U}_{l\,\text{оп}}^1$.

Для каждой дуги $(s, t)^1\in U_{l\,\text{биц}}^1$ составим сеть $\{I_l^1, \widetilde{U}_{l\,\text{оп}}^1\cup(s, t)^1\}$. Вычеркнем из нее все висячие дуги. Если в полученном множестве $\{I(\widetilde{U}_{(s,t)^1}), \widetilde{U}_{(s,t)^1}\}$ можно выделить вырожденный цикл, то обозначим составляющие его дуги через $U_{(s,t)^1}$. Когда из дуг $(i, j)^1\in\widetilde{U}_{(s,t)^1}$ вырожденный цикл построить нельзя, под $U_{(s,t)^1}$ будем понимать все множество $\widetilde{U}_{(s,t)^1}$. Дуги $(i, j)^1\in U_{\text{биц}}^1 = \bigcup_{l=1}^{m_k} U_{l\,\text{биц}}^1$ назовем *бициклическими.* Можно показать, что $|U_{\text{биц}}^1| = |U_{\text{оп}}^1| - |I| + v_1$, где $v_1$ — число компонент связности $S^1_{l\,\text{оп}}$, в которых $\widetilde{U}^1_{l\,\text{оп}} = U^1_{lg}$. Связную сеть $Z_{(i,\,j)^1} = \{I_{(i,\,j)^1},\ U_{(i,\,j)^1}\}$, $I_{(i,\,j)^1} = I(U_{(i,\,j)^1})$, будем называть *бициклом,* соответствующим бициклической дуге $(i,\ j)^1$. Для удобства в дальнейшем каждой дуге $(i,\ j)^1 \in U^1_{\text{биц}}$ поставим в соответствие натуральное число $t: 1 \leqslant t \leqslant l_1$, $l_1 = |U^1_{\text{биц}}|$. Поэтому бицикл $Z_{(i,\,j)^1}$ можно записать в виде $Z_t$, где $t = t(i,\ j)^1$.

Случай $k=2$ рассматривается аналогично. Множество $U^2_{\text{оп}}$ содержит $l_2 = |U^2_{\text{биц}}|$ бициклов $Z_{l_1+1}, \ldots, Z_{l_1+l_2}$. Введем множества $U_{\text{биц}} = U^1_{\text{биц}} \bigcup U^2_{\text{биц}}$ и $\widetilde{U}^k_{\text{оп}} = U^k_{\text{оп}} \diagdown U^k_{\text{биц}}$, $k = 1, 2$. Для каждого бицикла $Z_t$ составим систему уравнений

$$\sum_{j \in I_i^+(U_t)} \widetilde{y}^t_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U_t)} \lambda^k_{ji} \widetilde{y}^t_{ji} = 0,$$

$$k = \begin{cases} 1, t \leqslant l_1, \\ 2, t > l_1, \end{cases} t = \overline{1,\ l_1 + l_2}. \tag{3}$$

Поток $\widetilde{y}^t_{i_t j_t}$ на бициклической дуге $(i_t,\ j_t)^k \in U_t$ положим равным единице. Остальные $\widetilde{y}^t_{ij}$, $(i,\ j)^k \in U_t$, найдутся из (3) однозначно. Так же, как и в § 5 гл. I [ч.2], составим матрицу

$$D(U^*,\ U_{\text{биц}}) = \left\{ \begin{array}{l} \delta_{\tau(i,\,j)\,t(\xi,\,\eta)^k},\ (\xi,\ \eta)^k \in U_{\text{биц}},\ k = 1,\ 2 \\ (i,\ j) \in U^* \end{array} \right\},$$

где

$$\delta_{\tau(i,\,j)\,t} = \begin{cases} \widetilde{y}^t_{ij}, & \text{если } (i,\ j) \in U_t \cap U^*, \\ 0, & \text{если } (i,\ j) \,\overline{\in}\, U_t \cap U^*; \end{cases}$$

$\tau(i,\ j)$ — порядковый номер дуги $(i,\ j)$ в $U^*$. Если $l_1+l_2 \neq |U^*|$, то дополняем матрицу $D$ нулями до квадратной. Число $R = \det D$ назовем *детерминантом опоры.*

**Критерий опорности.** Совокупность дуг $U_{\text{оп}} = \{U^1_{\text{оп}}, U^2_{\text{оп}}, U^*\}$ является опорой тогда и только тогда, когда $I(U^k_{\text{оп}}) = I$, $k = 1,\ 2$; в каждой компоненте связности $S^k_{l\,\text{оп}} = \{I^k_l, U^k_{l\,\text{оп}}\}$, $l = \overline{1,\ m_k}$, множества $\{I, U^k_{\text{оп}}\}$, $k=1,\ 2$, содержится хотя бы один невырожденный цикл; $R \neq 0$.

Опорный поток считается *невырожденным,* если $x^k_{ij} > 0$ для всех $(i,\ j)^k \in U^k_{\text{оп}}$, $k = 1,\ 2$; $0 < x^1_{ij} + x^2_{ij} < d_{ij}$ для

$(i, j)^k \in (U^1_{\text{оп}} \cup U^2_{\text{оп}}) \setminus U^*$, $k=1, 2$. Так как в случае $0 < x^1_{ij} + x^2_{ij} < d_{ij}$, $(i, j) \in U^*$, можно перейти к опоре $\{U^1_{\text{оп}} \setminus (i, j)^1, U^2_{\text{оп}} \setminus (i, j)^2, U^* \setminus (i, j)\}$, содержащей меньшее число элементов по сравнению с исходной, будем считать, что все дуги $(i, j) \in U^*$ насыщенные.

**2. Формула приращения. Критерии оптимальности и субоптимальности.** Пусть $\{x, U_{\text{оп}}\}$ — опорный поток. Каждому узлу $i \in I$ припишем вектор потенциалов $u_i = \{u^1_i, u^2_i\}$, компоненты которого удовлетворяют системе

$$u^k_i - \lambda^k_{ij} u^k_j - c^k_{ij} = 0, \quad (i, j) \in U^k_{\text{оп}} \setminus U^*, \quad k = 1, 2; \tag{4}$$

$$u^1_i - \lambda^1_{ij} u^1_j - c^1_{ij} = u^2_i - \lambda^2_{ij} u^2_j - c^2_{ij}, \quad (i, j) \in U^*. \tag{5}$$

Обозначим через $\alpha(U^*)$ вектор $\{\alpha_{\tau(i, j)}, (i, j) \in U^*\}$, через $p(U_{\text{биц}})$ вектор $\{p_{t(\xi, \eta)^k}, (\xi, \eta)^k \in U_{\text{биц}}, k = 1, 2\}$, где $p_{t(\xi, \eta)^k} = \sum\limits_{(i, j)^k \in U_{t(\xi, \eta)^k}} c^k_{ij} \tilde{y}^t_{ij}$. Тогда систему (4), (5) можно записать в виде

$$D'(U^*, U_{\text{биц}}) \alpha(U^*) = p(U_{\text{биц}}); \tag{6}$$

$$u^k_i - \lambda^k_{ij} u^k_j - \bar{c}^k_{ij} = 0; \quad \bar{c}^k_{ij} = \begin{cases} c^k_{ij}, & \text{если } (i, j)^k \in U^k_{\text{оп}} \setminus U^*; \\ c^k_{ij} + \alpha_{\tau(i, j)}, & \text{если } (i, j) \in U^*. \end{cases} \tag{7}$$

Если известно решение $\alpha(U^*)$ системы (6), то числа $u^1_i$ и $u^2_i$ легко найдутся из (7). Для каждой дуги $(i, j) \in U$, как обычно, вычислим вектор оценок $\Delta_{ij} = \{\Delta^1_{ij}, \Delta^2_{ij}\} : \Delta^k_{ij} = u^k_i - \lambda^k_{ij} u^k_j - c^k_{ij}$, $k = 1, 2$. По аналогии с [ч.2] можно получить формулу приращения стоимости потока

$$\sum_{k=1}^{2} \sum_{(i, j) \in U} c^k_{ij} \Delta x^k_{ij} = - \sum_{(i, j) \in U^*} \alpha_{\tau(i, j)} (\Delta x^1_{ij} + \Delta x^2_{ij}) - \\ - \sum_{k=1}^{2} \sum_{(i, j)^k \in U^k \setminus U^k_{\text{оп}}} \Delta^k_{ij} \Delta x^k_{ij}. \tag{8}$$

Из соотношений двойственности следует неравенство

$$\sum_{k=1}^{2} \sum_{(i, j) \in U} c^k_{ij} x^k_{ij} - \sum_{k=1}^{2} \sum_{(i, j) \in U} c^k_{ij} x^{0k}_{ij} \leqslant \beta, \tag{9}$$

где

$$\beta = -\sum_{k=1}^{2} \sum_{\substack{(i,\, j)\in U, \\ \max\{\Delta_{ij}^1,\, \Delta_{ij}^2\}\leqslant 0}} \Delta_{ij}^k \Delta x_{ij}^k - \sum_{\substack{(i,\, j)\in U, \\ \max\{\Delta_{ij}^1,\, \Delta_{ij}^2\}=\Delta_{ij}^k>0}} [\Delta_{ij}^n x_{ij}^n + $$

$$+ \Delta_{ij}^k (x_{ij}^k - d_{ij})]; \; n = 1,2, \; n \neq k;$$

$x^0 = \{x_{ij}^{0k},\ (i, j) \in U^k,\ k = 1, 2\}$ — оптимальный поток в задаче (1).

Используя формулу приращения (8) и неравенство (9), можно доказать

**Критерий оптимальности.** Соотношения

$$\Delta_{ij}^k \leqslant 0 \text{ при } x_{ij}^k = 0; \; \Delta_{ij}^k = 0 \text{ при } x_{ij}^k > 0 \tag{10}$$

на ненасыщенных дугах $(x_{ij}^1 + x_{ij}^2 < d_{ij})$;

$$\Delta_{ij}^1 = \Delta_{ij}^2 \geqslant 0 \text{ при } x_{ij}^1 > 0, \; x_{ij}^2 > 0; \tag{11}$$

$$\Delta_{ij}^1 \geqslant \Delta_{ij}^2, \; \Delta_{ij}^1 \geqslant 0 \text{ при } x_{ij}^1 = d_{ij}, \; x_{ij}^2 = 0$$

на насыщенных дугах $(x_{ij}^1 + x_{ij}^2 = d_{ij})$ достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности потока $x$.

**Критерий субоптимальности.** При $\beta \leqslant \varepsilon$ поток $x$ является $\varepsilon$-оптимальным (субоптимальным).

Замечание. Для каждого $\varepsilon$-оптимального потока существует опора $U_{\text{оп}} = \{U_{\text{оп}}^1,\ U_{\text{оп}}^2,\ U^*\}$ такая, что для опорного потока $\{x, U_{\text{оп}}\}$ выполняется неравенство (9).

**3. Улучшение потока.** Пусть для опорного потока $\{x, U_{\text{оп}}\}$ критерии оптимальности и субоптимальности не выполняются. Опишем операции по улучшению потока. Из системы (4) видно, что дуги $(i, j)^k \in (U_{\text{оп}}^1 \cup U_{\text{оп}}^2) \setminus U^*$, $k = 1, 2$, удовлетворяют критерию оптимальности. Пусть $(i, j)$ — ненасыщенная дуга. Если для $(i, j)^k$ не выполняются условия (10), помечаем число $\Delta_{ij}^k$. Когда не выполняются условия (11) для насыщенной дуги $(i, j)$, помечаем число $\Delta_{ij}^1 - \Delta_{ij}^2$ при $\max\{\Delta_{ij}^1,\ \Delta_{ij}^2\} = \Delta_{ij}^1 > 0$ и число $\Delta_{ij}^k$ при $\max\{\Delta_{ij}^1,\ \Delta_{ij}^2\} < 0$ и $x_{ij}^k > 0$; $k = 1, 2$. Среди помеченных чисел выбираем максимальное по модулю. Пусть оно находится на дуге $(i_0,\ j_0)$.

Рассмотрим случай, когда $(i_0,\ j_0) \overline{\in} U^*$ и выбранное число имеет вид $\Delta_{i_0 j_0}^k$. Для определенности возьмем $k = 1$.

Найдем поток $Y(U^1_{\text{оп}} \cup U^2_{\text{оп}} \cup (i_0, j_0)^1) = \{y^k_{ij}, \ (i, j)^k \in U^k_{\text{оп}}, \ k = 1, 2; \ y^1_{i_0 j_0}\}$, компоненты которого удовлетворяют системе (2), записанной относительно множеств $\{U^1_{\text{оп}} \cup (i_0, j_0)^1, U^2_{\text{оп}}, U^*\}$, и условию $y^1_{i_0 j_0} = \operatorname{sign} \Delta^1_{i_0 j_0}$. Покажем, как можно решить данную систему уравнений. Для бицикла $Z_0 = \{I_0, U_0\}$, образованного дугами $(i_0, j_0)^1$ и $(i, j)^1 \in \widetilde{U}^1_{\text{оп}}$, из системы (3) найдем числа $\widetilde{y}^0_{ij}$, $(i, j)^1 \in U_0$, при условии $\widetilde{y}^0_{i_0 j_0} = 1$. Определим вектор $\alpha(U^*) = \{\alpha_{\tau(i, j)}, \ (i, j) \in U^*\}$:

$$\alpha_{\tau(i, j)} = \begin{cases} -\widetilde{y}^0_{ij}, & \text{если } (i, j) \in U^* \cap U_0, \\ 0, & \text{если } (i, j) \in U^* \setminus U_0. \end{cases}$$

Потоки на бициклических дугах $Y(U_{\text{биц}}) = \{y^k_{ij}, (i, j)^k \in U_{\text{биц}}, \ k = 1, 2\}$ вычисляются из системы

$$D(U^*, U_{\text{биц}}) \cdot Y(U_{\text{биц}}) = \alpha(U^*). \tag{12}$$

Потоки на остальных дугах $(i, j)^k \in U^k_{\text{оп}} \setminus U^k_{\text{биц}}$, $k = 1, 2$, находятся по правилу

$$y^k_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ если } T_{(i, j)^k} = \varnothing; \\ \sum\limits_{t \in T_{(i, j)^k}} y^k_{i_t j_t} \cdot \widetilde{y}^t_{ij}, \end{cases}$$

где $T_{(i, j)^k} = \{t : (i, j)^k \in U_{t\,(\xi, \eta)^k}, \ (\xi, \eta)^k \in U^k_{\text{биц}}\}$, $(i_t, j_t)^k$ — бициклическая дуга, определившая бицикл $Z_t$, т. е. $Z_t = Z_{(i_t, j_t)^k}$.

Новый поток $\bar{x}$ строится в виде $\bar{x}^k_{ij} = x^k_{ij} + \Theta y^k_{ij}$, $(i, j)^k \in U^k_{\text{оп}}$, $k = 1, 2$; $\bar{x}^1_{i_0 j_0} = x^1_{i_0 j_0} + \Theta y^1_{i_0 j_0}$; $\bar{x}^k_{ij} = x^k_{ij}$, $(i, j)^k \in U^k \setminus U^k_{\text{оп}}$, $k = 1, 2$; $(i, j)^1 \neq (i_0, j_0)^1$, где $\Theta$ — максимальный шаг, который определяется так:

$$\Theta = \min\{d_{i_0 j_0} - x^1_{i_0 j_0}, \ \Theta_1\}, \text{ если } \Delta^1_{i_0 j_0} > 0,$$

$$\Theta = \min\{x^1_{i_0 j_0}, \ \Theta_1\}, \quad \text{если } \Delta^1_{i_0 j_0} < 0,$$

$$\text{где } \Theta_1 = \min\left\{ \min_{\substack{y^k_{ij} < 0, \\ (i, j)^k \in U^k_{\text{оп}}}} -\frac{x^k_{ij}}{y^k_{ij}}, \ k = 1, 2; \quad \min_{\substack{y^1_{ij} + y^2_{ij} > 0, \\ (i, j) \in (U^1_{\text{оп}} \cup U^2_{\text{оп}}) \setminus U^*}} \frac{d_{ij} - (x^1_{ij} + x^2_{ij})}{y^1_{ij} + y^2_{ij}} \right\}.$$

Из формулы (8) видно, что после преобразования $x \to \bar{x}$ стоимость потока уменьшилась на величину $\Theta\,|\Delta^1_{i_0j_0}|$.

Пусть максимальный шаг $\Theta$ достигается на опорной дуге $(i_*, j_*) \neq (i_0, j_0)$. Опорные множества будем менять по следующему правилу. Дугу $(i_0, j_0)^1$ вводим в состав множества $U^1_{\text{оп}}$. На дуге $(i_*, j_*)$ возможны ситуации: дуговой поток $x^k_{i_*j_*}$ стал нулевым; дуга $(i_*, j_*) \overline{\in} U^*$ превратилась в насыщенную.

Далее поступаем так:

$$\left.\begin{array}{l} \text{а) если } \bar{x}^k_{i_*j_*} = 0,\ (i_*, j_*) \overline{\in} U^*, \text{ из } U^k_{\text{оп}} \text{ выводим} \\ \quad \text{дугу } (i_*, j_*)^k; \\ \text{б) если } \bar{x}^k_{i_*j_*} = 0,\ (i_*, j_*) \in U^*, \text{ дуги } (i_*, j_*)^1,\ (i_*, j_*)^2, \\ \quad (i_*, j_*) \text{ выводим из множеств } U^1_{\text{оп}},\ U^2_{\text{оп}},\ U^*; \\ \text{в) если } \bar{x}^1_{i_*j_*} + \bar{x}^2_{i_*j_*} = d_{i_*j_*},\ (i_*, j_*)^k \in U^k_{\text{оп}},\ k = 1, 2, \\ \quad \text{дугу } (i_*, j_*) \text{ вводим в множество } U^*; \\ \text{г) если } \bar{x}^1_{i_*j_*} + \bar{x}^2_{i_*j_*} = d_{i_*j_*},\ (i_*, j_*)^1 \overline{\in} U^1_{\text{оп}},\ (i_*, j_*)^2 \in \\ \quad \in U^2_{\text{оп}}, \text{ дугу } (i_*, j_*)^2 \text{ выводим из } U^2_{\text{оп}}. \end{array}\right\} \quad (13)$$

Можно показать, что полученное по правилам (13) множество $\{U^1_{\text{оп}}, U^2_{\text{оп}}, U^*\}_{\text{нов}}$ является опорой задачи (1).

Пусть теперь $(i_0, j_0) \in U^*$. Найдем поток $Y\,(U^1_{\text{оп}} \cup U^2_{\text{оп}})$, удовлетворяющий системе (2), которая записана относительно множеств $\{U^1_{\text{оп}}, U^2_{\text{оп}}, U^* \setminus (i_0, j_0)\}$, и условию $y^1_{i_0j_0} + y^2_{i_0j_0} = -1$. Компоненты вектора $\alpha\,(U^*)$, согласно общей схеме, определим так:

$$\alpha_{\tau\,(i,\,j)} = \begin{cases} 0, \text{ если } (i, j) \in U^* \setminus (i_0, j_0); \\ -1,\ (i, j) = (i_0, j_0). \end{cases}$$

Из системы (11) найдем вектор $Y\,(U_{\text{биц}})$. Числа $y^k_{ij}$, $(i, j)^k \in U^k_{\text{оп}} \setminus U^k_{\text{биц}}$, $k = 1, 2$, находятся из соотношений (12).

Новый поток $\bar{x}$ строим в виде $\bar{x}^k_{ij} = x^k_{ij} + \Theta y^k_{ij}$, $(i, j)^k \in U^k_{\text{оп}}$, $k = 1, 2$; $\bar{x}^k_{ij} = x^k_{ij}$, $(i, j)^k \overline{\in} U^k_{\text{оп}}$, $k = 1, 2$, где $\Theta$ — максимально допустимый шаг, найденный по стандартным правилам. При переходе к новому опорному потоку стоимость уменьшается на величину $-\Theta\Delta^1_{i_0j_0}$. Предположим, что шаг $\Theta$ достигается на дуге $(i_*, j_*) \neq (i_0, j_0)$. Тогда $\bar{U}^* = U^* \setminus (i_0, j_0)$. С дугой $(i_*, j_*)$ поступаем согласно (13).

Пусть максимальное по модулю число имеет вид $\Delta^1_{i_0j_0}-\Delta^2_{i_0j_0}$. Это означает, что дуга $(i_0, j_0)$ насыщена. Найдем поток $Y[(U^1_{\text{оп}}\cup(i_0, j_0)^1)\cup(U^2_{\text{оп}}\cup(i_0, j_0)^2)]$, удовлетворяющий системе (2), составленной для множеств $\{U^1_{\text{оп}}\cup(i_0, j_0)^1, U^2_{\text{оп}}\cup(i_0, j_0)^2, U^*\cup(i_0, j_0)\}$ при условиях $y^1_{i_0j_0}=\operatorname{sign}(\Delta^1_{i_0j_0}-\Delta^2_{i_0j_0})$ и $y^2_{i_0j_0}=-\operatorname{sign}(\Delta^1_{i_0j_0}-\Delta^2_{i_0j_0})$. Поток $y^k_{ij}$ по дуге $(i, j)^k\in U^k_{\text{оп}}$ можно представить в виде суммы потоков $y^k_{ij\,(1)}+y^k_{ij\,(2)}$, $k=1, 2$, где $\{y^k_{ij\,(1)}, (i, j)^k\in U^k_{\text{оп}}, k=1, 2; y^1_{i_0j_0\,(1)}\}$ — решение системы (2) на множестве дуг $\{U^1_{\text{оп}}\cup(i_0, j_0)^1, U^2_{\text{оп}}, U^*\}$ при условии $y^1_{i_0j_0(1)}=\operatorname{sign}(\Delta^1_{i_0j_0}-\Delta^2_{i_0j_0})$ и $\{y^k_{ij\,(2)}, (i, j)^k\in U^k_{\text{оп}}, k=1, 2; y^2_{i_0j_0\,(2)}\}$ удовлетворяет системе (2), записанной для множеств $\{U^1_{\text{оп}}, U^2_{\text{оп}}\cup(i_0, j_0)^2, U^*\}$ с условием $y^2_{i_0j_0\,(2)}=-\operatorname{sign}(\Delta^1_{i_0j_0}-\Delta^2_{i_0j_0})$. Способы решения подобных систем были рассмотрены выше.

Новый поток $\overline{x}$ строим в виде $\overline{x}^k_{ij}=x^k_{ij}+\Theta y^k_{ij}$, $(i, j)^k\in U^k_{\text{оп}}\cup(i_0, j_0)^k$; $\overline{x}^k_{ij}=x^k_{ij}$, $(i, j)^k\overline{\in} U^k_{\text{оп}}\cup(i_0, j_0)^k$, $k=1, 2$, где $\Theta$ — максимально допустимый шаг. Стоимость потока $\overline{x}$ меньше стоимости прежнего потока на величину $\Theta\,|\Delta^1_{i_0j_0}-\Delta^2_{i_0j_0}|$. Опора преобразуется так: $\overline{U}^k_{\text{оп}}=U^k_{\text{оп}}\cup(i_0, j_0)^k$, $k=1, 2$; $\overline{U}^*=U^*\cup(i_0, j_0)$. С дугой $(i_*, j_*)$ поступаем по правилу (13).

Рассмотрим последний случай, когда $(i_0, j_0)=(i_*, j_*)$. Опорное множество будет изменяться в следующем порядке:

если $x^1_{i_0j_0}+x^2_{i_0j_0}<d_{i_0j_0}$, $(i_0, j_0)^2\in U^2_{\text{оп}}$, $(i_0, j_0)^1\overline{\in} U^1_{\text{оп}}$, $\overline{x}^1_{i_0j_0}+\overline{x}^2_{i_0j_0}=d_{i_0j_0}$, вводим дугу $(i_0, j_0)^1$ в $U^1_{\text{оп}}$, дугу $(i_0, j_0)$ — в $U^*$;

если $x^1_{i_0j_0}+x^2_{i_0j_0}<d_{i_0j_0}$, $(i_0, j_0)^2\in U^2_{\text{оп}}$, $(i_0, j_0)^1\overline{\in} U^1_{\text{оп}}$, $\overline{x}^2_{i_0j_0}=0$, дугу $(i_0, j_0)^2$ выводим из множества $U^2_{\text{оп}}$, в $U^1_{\text{оп}}$ вводится дуга $(i_0, j_0)^1$;

если $(i_0, j_0)\in U^*$, $\overline{x}^k_{i_0j_0}=0$, дугу $(i_0, j_0)^k$ выводим из $U^k_{\text{оп}}$ и дугу $(i_0, j_0)$ — из $U^*$. В остальных случаях при $(i_0, j_0)=(i_*, j_*)$ опора не меняется.

**4. Преобразование структуры.** Назовем *структурой* опорного множества $U_{\text{оп}}$ совокупность множеств $\{\widetilde{U}^k_{\text{оп}}, U^k_{\text{биц}}, k=1, 2; U_t, \widetilde{Y}(U_t), t=\overline{1, l_1+l_2}; D^{-1}\}$. В связи с тем что для процесса решения двухпродуктовой задачи на обобщенной сети характерно наличие большого числа трудоемких вспомогательных операций (разбиение $U^1_{\text{оп}}$ и $U^2_{\text{оп}}$ на бициклы, построение матрицы $D$, вычисление $D^{-1}$ и т. д.), желательно создать алгоритм, с помощью которого можно было бы эффективно строить структуру для новой опоры, используя информацию о старой структуре. Рассмотрим ряд простейших случаев изменения опорного множества $U_{\text{оп}}$ и покажем, как при этом преобразуется структура. Все остальные случаи получаются путем комбинации простейших в определенном порядке.

1) Пусть дуга $(i_0, j_0)^k$ вводится в множество $U^k_{\text{оп}}$, а из $U^n_{\text{оп}}$ удаляется $(i_*, j_*)^n$; $k, n = 1, 2$. Возьмем сначала $k = n = 1$. Введем множество $J_1 = \{t : (i_*, j_*)^1 \in U_t, t = \overline{0, l_1}\}$. Обозначим через вектор $\widetilde{Y}(U_t)$ поток $\{\widetilde{y}^t_{ij}, (i, j)^k \in U_t\}$, $t = \overline{0, l_1 + l_2}$. Из системы (11) определим вектор $Y(U_{\text{биц}}) = \{y^k_{ij}, (i, j)^k \in U_{\text{биц}}, k = 1, 2\}$ при условии, что вектор $\alpha(U^*)$ задается, как и в случае, когда максимальное по модулю число равно $|\Delta^1_{i_0j_0}|$.

Структуру для нового опорного множества будем строить следующим образом:

если $(i_*, j_*)^1 \in U^1_{\text{биц}}$, то

$$\overline{U}_t = \begin{cases} U_t, \ t = \overline{1, l_1}; \ t \neq t(i_*, j_*)^1, \\ U_0, \ t = t(i_*, j_*)^1; \end{cases}$$

$$\widetilde{Y}(\overline{U}_t) = \begin{cases} \widetilde{Y}(U_t), \ t = \overline{1, l_1}; \ t \neq t(i_*, j_*)^1, \\ \widetilde{Y}(U_0), \ t = t(i_*, j_*)^1; \end{cases}$$

$$\overline{U}^1_{\text{биц}} = (U^1_{\text{биц}} \cup (i_0, j_0)^1) \setminus (i_*, j_*)^1; \quad \overline{\widetilde{U}}{}^1_{\text{оп}} = \widetilde{U}^1_{\text{оп}}.$$

Пусть $D^{-1} = \{g_{ij}; \ i, \ j = \overline{1, l_1 + l_2}\}$. Для упрощения записи положим $t_0 = t(i_*, j_*)^1$ и обозначим поток $Y(U_{\text{биц}})$ через вектор $r = \{r_t, \ t = \overline{1, l_1 + l_2}\}$, где $r_t = y^k_{ij}$, $t = t(i, j)^k$, $(i, j)^k \in U_{\text{биц}}$, $k = 1, 2$. По аналогии с [ч.1], можно убедиться, что элементы матрицы $\overline{D}^{-1}$ имеют вид

$$\overline{g}_{t_0j} = -\frac{g_{t_0j}}{r_{t_0}} \operatorname{sign} \Delta^1_{i_0j_0};$$

$$\overline{g}_{ij} = g_{ij} - \frac{r_i}{r_{t_0}} g_{t_0j}, \ i \neq t_0; \ i, \ j = \overline{1, l_1 + l_2}.$$

Остальные элементы структуры остаются без изменений.

Пусть $(i_*, j_*)^1 \in \widetilde{U}^1_{\text{оп}}$. Если $J_1 = \{0\}$, то в структуре опорного множества преобразуется лишь $\widetilde{U}^1_{\text{оп}} : \overline{\widetilde{U}}^1_{\text{оп}} = (\widetilde{U}^1_{\text{оп}} \cup (i_0, j_0)^1) \setminus (i_*, j_*)^1$. При $J_1 \neq \{0\}$ определим бицикл $Z_{t_1}$ из условия $|U_{t_1}| = \min\limits_{t \in J_1} |U_t|$. Назовем его главным. Главному бициклу $Z_{t_1}$ соответствует главный ($t_1$-й) столбец матрицы $D$.

Пусть $(i_1, j_1)^1 \in U_{t_1} \cap U^1_{\text{биц}}$. Тогда

$$\overline{U}_t = \begin{cases} U_t \cup U_{t_1} \setminus (i_*, j_*)^1, & t \in J_1, \ t \neq t_1, \\ U_t, & t \overline{\in} J_1, \ t = \overline{0, l_1}, \end{cases}$$

$$\overline{U}_{t_1} = \overline{U}_0.$$

Набор потоков $\widetilde{Y}(\overline{U}_t)$, соответствующих бициклам $\overline{Z}_t = \{I(\overline{U}_t), \overline{U}_t\}$, можно получить по правилу

$$\widetilde{Y}(\overline{U}_t) = \begin{cases} \widetilde{Y}(U_t) - \widetilde{Y}(U_{t_1}) \dfrac{\widetilde{y}^t_{i_* j_*}}{\widetilde{y}^{t_1}_{i_* j_*}}, & t \in J_1, \ t \neq t_1, \\ \widetilde{Y}(U_t), & t \overline{\in} J_1, \ t = \overline{0, l_1}, \end{cases}$$

$$\widetilde{Y}(\overline{U}_{t_1}) = \widetilde{Y}(\overline{U}_0);$$

$$\overline{\widetilde{U}}^1_{\text{оп}} = (\widetilde{U}^1_{\text{оп}} \cup (i_1, j_1)^1) \setminus (i_*, j_*)^1;$$

$$\overline{U}^1_{\text{биц}} = (U^1_{\text{биц}} \cup (i_0, j_0)^1) \setminus (i_1, j_1)^1.$$

Здесь под разностью потоков $\widetilde{Y}(U_m) - \widetilde{Y}(U_n)$ понимается поток вида $\{\widetilde{y}^m_{ij}, (i, j)^1 \in U_m \setminus U_n; -\widetilde{y}^n_{ij}, (i, j)^1 \in U_n \setminus U_m; \widetilde{y}^m_{ij} - \widetilde{y}^n_{ij}, (i, j)^1 \in U_m \cap U_n\}$.

Обозначим через $\widetilde{g}_{t_1} = \{\widetilde{g}_{t_1 j}, j = \overline{1, l_1 + l_2}\}$ вектор с элементами $\widetilde{g}_{t_1 j} = \dfrac{g_{t_1 j}}{\widetilde{y}^{t_1}_{i_* j_*}} - \sum\limits_{t \in J_1 \setminus t_1} \dfrac{g_{tj}}{\widetilde{y}^t_{i_* j_*}}$, $j = \overline{1, l_1 + l_2}$. Введем вектор $r = \{r_1, r_2, \ldots, r_{l_1 + l_2}\}$, где

$$r_t = \begin{cases} y^k_{ij}, \ t = t(i, j)^k, \ (i, j)^k \in U_{\text{биц}}, \ k = 1, 2; \ t \neq t_1; \\ \sum\limits_{t \in J_1 \setminus \{0\}} r_t \widetilde{y}^t_{i_* j_*} + y^0_{i_* j_*} \operatorname{sign} \Delta^1_{i_0 j_0}, \ t = t_1. \end{cases}$$

Легко показать, что матрица $\bar{D}^{-1}$ имеет вид

$$\bar{g}_{t_1 j} = -\frac{\tilde{g}_{t_1 j}}{r_{t_1}} \operatorname{sign} \Delta^1_{i_0 j_0};$$

$$\bar{g}_{ij} = g_{ij} - \frac{r_i}{r_{t_1}} g_{t_1 j}, \quad i \neq t_1; \; i, \; j = \overline{1, l_1 + l_2}.$$

Остальные элементы структуры не меняются. Для $k=1$, $n=2$, $\bar{U}^1_{\text{биц}} = U^1_{\text{биц}} \cup (i_0, \; j_0)^1$ множества $\bar{\tilde{U}}^2_{\text{оп}}$, $\bar{U}^2_{\text{биц}}$; $\bar{U}_t$, $\tilde{Y}(\bar{U}_t)$, $t = \overline{1, l_1 + l_2}$, получаются по аналогии со случаем $k = n = 1$.

2) Предположим теперь, что $\bar{U}^k_{\text{оп}} = U^k_{\text{оп}} \setminus (i_*, \; j_*)^k$, а $\bar{U}^* = U^* \setminus (i_0, \; j_0)$. Рассмотрим случай $k = 1$. Пусть $(i_*, \; j_*)^1 \in U^1_{\text{биц}}$. Тогда

$$\bar{U}_t = \begin{cases} U_t, \; t < t(i_*, \; j_*)^1, \\ U_{t+1}, \; t(i_*, \; j_*)^1 + 1 \leqslant t \leqslant l_1 + l_2 - 1, \end{cases}$$

т. е. в множествах $\bar{U}^1_{\text{оп}}$ и $U^2_{\text{оп}}$ можно выделить только $l_1 + l_2 - 1$ бициклов. Потоки $\tilde{Y}(\bar{U}_t)$, $t = \overline{1, l_1 + l_2 - 1}$, определятся так:

$$\tilde{Y}(\bar{U}_t) = \begin{cases} \tilde{Y}(U_t), \; t < t(i_*, \; j_*)^1, \\ \tilde{Y}(U_{t+1}), \; t(i_*, \; j_*)^1 + 1 \leqslant t \leqslant l_1 + l_2 - 1; \end{cases}$$

$$\bar{U}^1_{\text{биц}} = U^1_{\text{биц}} \setminus (i_*, \; j_*)^1; \; \bar{\tilde{U}}^1_{\text{оп}} = \tilde{U}^1_{\text{оп}}.$$

Из системы (11) с вектором $\alpha(U^*) = \{\alpha_{\tau(i,j)}, \; (i, \; j) \in U^*\}$, где

$$\alpha_{\tau(i,j)} = \begin{cases} 0, \text{ если } (i, \; j) \in U^* \setminus (i_0, \; j_0); \\ -1, \text{ если } (i, \; j) = (i_0, \; j_0), \end{cases}$$

вычислим поток $Y(U_{\text{биц}})$. Как и в случае 1), определим вектор $r = \{r_t, \; t = \overline{1, \; l_1 + l_2}\}$ и число $t_0 = t(i_*, \; j_*)^1$. Можно показать, что матрица $\bar{D}^{-1} = \{\bar{g}_{ij}; \; i, \; j = \overline{1, l_1 + l_2 - 1}\}$ вычисляется по формуле

$$\bar{g}_{km} = g_{ij} - \frac{r_i}{r_{t_0}} g_{t_0 j},$$

где

$$k=\begin{cases} i, \text{ если } 1\leqslant i<t_0, \\ i-1, \text{ если } t_0\leqslant i\leqslant l_1+l_2; \end{cases}$$

$$m=\begin{cases} j, \text{ если } j<\tau(i_0,\ j_0), \\ j-1, \text{ если } \tau(i_0,\ j_0)\leqslant j\leqslant l_1+l_2. \end{cases}$$

Если $(i_*,\ j_*)^1\in\widetilde{U}^1_{\text{оп}}$, то вводим множество $J_1=\{t\colon (i_*,\ j_*)^1\cap U_t\neq\varnothing,\ t=\overline{1,\ l_1}\}$ и по аналогии с п. 1 преобразуем отдельные элементы структуры так, чтобы дуга $(i_*,\ j_*)^1$ стала бициклической. После этого выполняем операции, описанные выше для случая $(i_*,\ j_*)^1\in U^1_{\text{биц}}$.

3) Рассмотрим случай, когда в множество $U^*$ добавляется дуга $(i_*,\ j_*)$, $(i_*,\ j_*)^k\in U^k_{\text{оп}}$, $k=1,\ 2$, а $U^1_{\text{оп}}$ увеличивается на дугу $(i_0,\ j_0)^1$. Структура опоры $\{\overline{U}^1_{\text{оп}},\ \overline{U}^2_{\text{оп}},\ \overline{U}^*\}$ примет следующий вид:

$$\overline{U}_t=\begin{cases} U_t,\ t\leqslant l_1, \\ U_0,\ t=l_1+1, \\ U_{t-1},\ t=\overline{l_1+2,\ l_1+l_2+1}; \end{cases}$$

$$\widetilde{Y}(\overline{U}_t)=\begin{cases} \widetilde{Y}(U_t),\ t\leqslant l_1, \\ \widetilde{Y}(U_0),\ t=l_1+1, \\ \widetilde{Y}(U_{t-1}),\ t=\overline{l_1+2,\ l_1+l_2+1}; \end{cases}$$

$$\overline{\widetilde{U}}{}^k_{\text{оп}}=\widetilde{U}^k_{\text{оп}},\ \overline{U}^k_{\text{биц}}=U^k_{\text{биц}},\ k=1,\ 2.$$

Для нахождения $\bar{D}^{-1}$ используется *метод окаймления.* Обозначим через $v_{l_1+l_2}$ строку $\{\widetilde{y}^1_{i_*j_*},\ \ldots,\ \widetilde{y}^{l_1+l_2}_{i_*j_*}\}$, а через $q_{l_1+l_2}$ столбец $\delta^0\doteq\{\delta^0_{\tau(i,\ j)},\ (i,\ j)\in U^*\}$, где

$$\delta^0_{\tau(i,\ j)}=\begin{cases} \widetilde{y}^0_{ij},\ (i,\ j)\in U^*\cap U_0; \\ 0,\ (i,\ j)\in U^*\setminus U_0. \end{cases}$$

Пусть $n=l_1+l_2+1$. Для построения $\bar{D}^{-1}$ нужно произвести следующие действия:

найти столбец $D^{-1}q_{n-1}$. Элементы столбца $\beta_{1n},\ \beta_{2n},\ \ldots$ $\ldots,\ \beta_{n-1n}$ находятся при помощи накоплений;

найти число $\alpha_n=\widetilde{y}^0_{i_*j_*}+\sum\limits_{l=1}^{n-1}\widetilde{y}_{i_*j_*}\beta_{in};$

найти строку $v'_{n-1}D^{-1}$ с элементами $\gamma_{n1}, \gamma_{n2}, \ldots, \gamma_{n\,n-1}$;

найти элементы $\tilde{g}_{ij}$ матрицы $\tilde{D}=\{\tilde{g}_{ij};\ i, j=\overline{1, l_1+l_2+1}\}$ по формулам

$$\tilde{g}_{ij}=g_{ij}+\frac{\beta_{in}\gamma_{nj}}{\alpha_n},\ 1\leqslant i, j\leqslant n-1;$$

$$\tilde{g}_{in}=\frac{\beta_{in}}{\alpha_n},\ \tilde{g}_{nj}=\frac{\gamma_{nj}}{\alpha_n},\ 1\leqslant i, j\leqslant n-1;\ \tilde{g}_{nn}=\frac{1}{\alpha_n};$$

окончательно, переставив необходимые строки, получаем элементы матрицы $\bar{D}^{-1}$: $\bar{g}_{ij}=\tilde{g}_{ij}$, $i\leqslant l_1$; $\bar{g}_{l_1+1, j}=\tilde{g}_{nj}$; $\bar{g}_{ij}=\tilde{g}_{mj}$, $m=i-1$, $i=\overline{l_1+2, n}$; $j=\overline{1, n}$.

## § 6. Производственно-транспортная задача

В приложениях редко производственная [ч. 1] и транспортная [ч. 2] задачи встречаются изолированно. Прикладные задачи являются, как правило, комплексными и содержат как элементы производственной, так и элементы транспортной задачи. В данном параграфе исследуется однопродуктовая задача этого типа.

**1. Постановка задачи. Опорный потокоплан.** Рассмотрим сеть $S=\{I, U\}$. В отличие от [ч. 2] будем считать, что множество $I$ состоит из узлов $i\in I^{\text{c}}$ с постоянной интенсивностью $a_i$ ($a_i$ — алгебраические числа) и узлов $i\in I\diagdown I^{\text{c}}$ с переменной интенсивностью. Через $I^{\text{п}}\subset I\diagdown I^{\text{c}}$ обозначим множество узлов с положительной интенсивностью $x_i$, $a_{*i}\leqslant x_i\leqslant a_i^*$, $a_i^*>0$ (пункты производства), через $I^{\text{р}}=(I\diagdown I^{\text{c}})\diagdown I^{\text{п}}$ — множество узлов с отрицательной интенсивностью — $x_i$, $a_{*i}\leqslant x_i\leqslant a_i^*$, $a_{*i}>0$ (пункты потребления). Узлам $i\in I^{\text{п}}\cup I^{\text{р}}$ с переменной интенсивностью припишем дополнительную характеристику $c_i$. Для $i\in I^{\text{п}}$ число $c_i$ можно интерпретировать как затраты, связанные с увеличением производства на единицу продукта в пункте $i$. Для пунктов потребления $i\in I^{\text{р}}$ под числом $c_i$ можно понимать величину расходов на хранение единицы продукта. Остальные характеристики сети $S$ оставим традиционными [ч. 2]. Совокупность чисел $x=\{x_i, x_{ij}, i\in I^{\text{п}}\cup I^{\text{р}}, (i, j)\in U\}$ из плана производства $\{x_i, i\in I^{\text{п}}\cup I^{\text{р}}\}$ и потока $\{x_{ij}, (i, j)\in U\}$ назовем потокопланом (*производственно-транспортным планом*), если она удовлетворяет соотношениям

$$\sum_{j\in I_i^+(U)} x_{ij} - \sum_{j\in I_i^-(U)} x_{ij} = \begin{cases} a_i, \text{ если } i\in I^{\text{с}}, \\ x_i, \text{ если } a_{*i}\leqslant x_i\leqslant a_i^*,\ i\in I^{\text{п}}, \\ -x_i, \text{ если } a_{*i}\leqslant x_i\leqslant a_i^*,\ i\in I^{\text{р}}, \end{cases} \quad (1)$$

$$0\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij},\ (i,\ j)\in U.$$

На заданном потокоплане $x$ число $\sum\limits_{i\in I^{\text{п}}} c_i x_i$ равно затратам на достижение интенсивностей $x_i$ в узлах $i\in I^{\text{п}}$, $\sum\limits_{i\in I^{\text{р}}} c_i\,(x_i-a_{*i})$ — расходы на хранение продукта, если его поступление $x_i$ в $i\in I^{\text{р}}$ превышает потребление $a_{*i}$, $\sum\limits_{(i,\ j)\in U} c_{ij}x_{ij}$ — транспортные издержки.

Таким образом, задача поиска оптимального потокоплана $x^0=\{x_i^0,\ x_{ij}^0,\ i\in I^{\text{п}}\cup I^{\text{р}},\ (i,\ j)\in U\}$, на котором общие (производственные и транспортные) расходы минимальны, эквивалентна минимизации функции

$$\sum_{(i,\ j)\in U} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i\in I^{\text{п}}} c_i x_i + \sum_{i\in I^{\text{р}}} c_i\,(x_i - a_{*i}) \to \min \quad (2)$$

при ограничениях (1). *Производственно-транспортную задачу* (1), (2) будем решать прямым опорным методом [ч. 1].

*Опорой сети* $S=\{I,\ U\}$ будем называть множество $S_{\text{оп}}=\{I_{\text{оп}},\ U_{\text{оп}}\}$, $I_{\text{оп}}\subset I^{\text{п}}\cup I^{\text{р}}$, $U_{\text{оп}}\subset U$, для которого система

$$\sum_{j\in I_i^+(U_{\text{оп}})} x_{ij} - \sum_{j\in I_i^-(U_{\text{оп}})} x_{ji} = \begin{cases} 0, \text{ если } i\in I(U_{\text{оп}})\setminus I_{\text{оп}}, \\ x_i, \text{ если } i\in I^{\text{п}}\cap I_{\text{оп}}, \\ -x_i, \text{ если } i\in I^{\text{р}}\cap I_{\text{оп}}; \end{cases} \quad (3)$$

$$\sum_{i\in I^{\text{п}}\cap I_{\text{оп}}} x_i - \sum_{i\in I^{\text{р}}\cap I_{\text{оп}}} x_i = 0,$$

имеет только тривиальное решение $x\equiv 0$, но допускает ненулевой псевдопотокоплан $x$ для каждого из следующих множеств:

$$\{I_{\text{оп}},\ U_{\text{оп}}\cup(i_0,j_0)\}, \text{ где } (i_0,\ j_0)\in U\setminus U_{\text{оп}};$$
$$\{I_{\text{оп}}\cup i_0,\ U_{\text{оп}}\}, \qquad \text{где } i_0\in(I^{\text{п}}\cup I^{\text{р}})\setminus I_{\text{оп}}.$$

Здесь $I(U_*)$ — совокупность узлов, которым инцидентны дуги из $U_*$.

Пару $\{x, S_{оп}\}$ из потокоплана и опоры назовем *опорным потокопланом*. Опорный потокоплан считается *невырожденным*, если он *невырожден по дуговым потокам* ($0<x_{ij}<d_{ij}$ для $(i, j)\in U_{оп}$) и *интенсивностям узлов* ($a_{*i} < x_i < a_i^*$, $i \in I_{оп}$). *Дуги* $(i, j) \in U_{оп}$ и *узлы* $i \in I_{оп}$ назовем *опорными*, остальные дуги и узлы $i \in (I^{п} \cup I^{р}) \setminus I_{оп}$ — *неопорными*. Используя общее определение опоры, можно доказать

**Критерий опорности.** Множество $S_{оп}=\{I_{оп}, U_{оп}\}$, $I_{оп}\subset I^{п} \cup I^{р}$, $U_{оп}\subset U$, является опорой тогда и только тогда, когда 1) $|I_{оп}|+|U_{оп}|=|I|$; 2) $U_{оп}$ не содержит циклов; 3) в каждой компоненте связности подсети $\bar{S}= =\{I(U_{оп}), U_{оп}\}$ сети $S$ существует только один опорный узел.

Замечание. Условие 1) можно переписать так: $I_{оп} \cup I(U_{оп})=I$.

**2. Приращение стоимости потокоплана. Критерии оптимальности и субоптимальности.** Пусть $\{x, S_{оп}\}$ — опорный потокоплан. Узлам $i\in I$ припишем числа $u_i$ так, чтобы выполнялись равенства:

$$\begin{gathered} u_i=c_i, \quad i\in I^{р} \cap I_{оп}; \\ u_i=-c_i, \quad i\in I^{п} \cap I_{оп}; \\ u_i-u_j-c_{ij}=0, \quad (i, j)\in U_{оп}. \end{gathered} \tag{4}$$

Из свойства опоры следует, что числа $u_i$, $i\in I$, из системы (4) найдутся однозначно. По традиции назовем их *потенциалами узлов сети*. Для каждой неопорной дуги $(i, j) \in U_{н} = U\setminus U_{оп}$ и каждого узла $i \in I_{н}= (I^{п} \cup I^{р})\setminus I_{оп}$ найдем оценки $\Delta_{ij}=u_i-u_j-c_{ij}$ и $\Delta_i=\begin{cases} u_i-c_i, \text{ если } i\in I^{р}, \\ -u_i-c_i, \text{ если } i\in I^{п}, \end{cases}$ соответственно. По аналогии с п. 5 § 4 гл. I [ч. 2] получим формулу приращения стоимости потокоплана

$$\sum_{(i, j)\in U} c_{ij}\Delta x_{ij}+\sum_{i\in I\setminus I^{c}} c_i\Delta x_i=-\sum_{(i, j)\in U_{н}} \Delta x_{ij}\Delta_{ij}-\sum_{i\in I_{н}} \Delta x_i\Delta_i. \tag{5}$$

Применяя соотношения двойственности, можно доказать следующее неравенство:

$$\sum_{(i, j)\in U} c_{ij}x_{ij}+\sum_{i\in I\setminus I^{c}} c_i x_i-\sum_{(i, j)\in U} c_{ij}x_{ij}^0-\sum_{i\in I\setminus I^{c}} c_i x_i^0\leqslant \beta, \tag{6}$$

где

$$\beta = -\sum_{\substack{\Delta_{ij}<0,\\ (i,j)\in U_{\text{н}}}} \Delta_{ij}x_{ij} + \sum_{\substack{\Delta_{ij}>0,\\ (i,j)\in U_{\text{н}}}} \Delta_{ij}(d_{ij}-x_{ij}) -$$

$$- \sum_{\substack{\Delta_i<0,\\ i\in I_{\text{н}}}} \Delta_i(x_i - a_{*i}) + \sum_{\substack{\Delta_i>0,\\ i\in I_{\text{н}}}} \Delta_i(a_i^* - x_i).$$

**Критерии оптимальности и субоптимальности.** Условия:

$$\Delta_{ij}\leqslant 0 \text{ при } x_{ij}=0;\ \Delta_{ij}\geqslant 0 \text{ при } x_{ij}=d_{ij};\ \Delta_{ij}=0$$
$$\text{при } 0<x_{ij}<d_{ij},\ (i,j)\in U_{\text{н}}, \text{— на дугах;} \qquad (7)$$

$$\Delta_i\leqslant 0 \text{ при } x_i=a_{*i};\ \Delta_i\geqslant 0 \text{ при } x_i=a_i^*; \qquad (8)$$
$$\Delta_i=0 \text{ при } a_{*i}<x_i<a_i^*,$$

$i\in I_{\text{н}}$,— на узлах достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности опорного потокоплана $\{x, S_{\text{оп}}\}$.

Если $\beta\leqslant\varepsilon$, то потокоплан $x$ является $\varepsilon$-оптимальным. (Потокоплан $x^{\varepsilon}$ называется *$\varepsilon$-оптимальным (субоптимальным)*, если

$$\sum_{(i,j)\in U} c_{ij}x_{ij}^{\varepsilon} + \sum_{i\in I\setminus I^{\text{с}}} c_i x_i^{\varepsilon} - \sum_{(i,j)\in U} c_{ij}x_{ij}^{0} - \sum_{i\in I\setminus I^{\text{с}}} c_i x_i^{0} \leqslant \varepsilon.)$$

**3. Улучшение потокоплана.** Пусть $\{x, S_{\text{оп}}\}$ — начальный опорный потокоплан, для которого не выполняются условия критериев оптимальности и субоптимальности (при заданном $\varepsilon$). Из формулы (5) следует, что потокоплан $x$ можно улучшить. Пусть $\Delta_{i_0j_0}$ — наибольшая по модулю неопорная оценка, не удовлетворяющая соотношениям (7), и $\Delta_{k_0}$ — наибольшая по абсолютной величине оценка для неопорных узлов, в которых нарушается (8). Выберем $\Delta_0=\max\{|\Delta_{i_0j_0}|, |\Delta_{k_0}|\}$.

Предположим, что $\Delta_0=|\Delta_{i_0j_0}|$. Рассмотрим два случая.

1) Для дуги $(i_0, j_0)$ можно построить цикл из дуг $(i,j)\in U_{\text{оп}}$. Преобразуем множество $\{I(U_{\text{оп}}), U_{\text{оп}}\}$ и изменим поток $\{x_{ij}, (i,j)\in U\}$ по аналогии с п. 7 § 4 гл. I [ч. 2]. Множество $I_{\text{оп}}$ и план $\{x_i, i\in I^{\text{п}}\cup I^{\text{р}}\}$ оставляем прежними.

2) Если для дуги $(i_0, j_0)$ цикл из дуг $U_{оп}$ построить нельзя, то соединим узлы $i_0$ с $i_1 \in I_{оп}$ и $j_0$ с $j_1 \in I_{оп}$ цепью из ребер, которым соответствуют опорные дуги.

Пусть $\Delta_{i_0 j_0} > 0$. Обозначим символом $(i_0, j_0)_{i_1, j_1}$ путь с направлением $i_0 \to j_0$ между узлами $i_1$ и $j_1$. Введем $U^1_{оп}$ — множество дуг пути $(i_0, j_0)'_{i_1, j_1}$. Можно показать, что при наложении на исходный опорный потокоплан $\{x_{i_1}, x_{j_1}, x_{ij}, (i, j) \in U^1_{оп}\}$ вдоль пути $(i_0, j_0)_{i_1, j_1}$ потокоплана*) $y = \{\Theta \operatorname{sign}[i] \cdot \operatorname{sign}[i_1, j_1], i = i_1, j_1; \Theta \operatorname{sign}(i, j), (i, j) \in U^1_{оп}\}$ уменьшится значение целевой функции (2) без нарушения ограничений (1). Найдем максимально возможное значение $\Theta$ потокоплана $y$. Для этого вычислим

$$\Theta_i = \begin{cases} x_i - a_{*i}, & \operatorname{sign}[i] \ \operatorname{sign}[i_1, j_1] = -1, \\ a_i^* - x_i, & \operatorname{sign}[i] \ \operatorname{sign}[i_1, j_1] = 1, \ i = i_1, j_1. \end{cases}$$

Легко показать, что $\Theta$ равно наименьшему из чисел $\Theta_{i_1}$, $\Theta_{j_1}$, $\Theta_{ij} = d_{ij} - x_{ij}$ на прямых дугах $(i, j) \in U^1_{оп}$; $\Theta_{ij} = x_{ij}$ на обратных дугах $(i, j) \in U^1_{оп}$. Опорное множество $S_{оп} = \{I_{оп}, U_{оп}\}$ изменяем по следующему правилу:

если $\Theta = \Theta_{i_* j_*}$, с дугами $(i_0, j_0)$ и $(i_*, j_*)$ поступаем по аналогии с п. 7 § 4 гл. I [ч. 2];

если $\Theta = \Theta_{i_*}$, $i_* \in \{i_1, j_1\}$, из $I_{оп}$ выводим узел $i_*$ и в $U_{оп}$ добавляем дугу $(i_0, j_0)$. Можно доказать, что указанные преобразования множества $\{I_{оп}, U_{оп}\}$ приводят к новой опоре $\overline{S}_{оп} = \{\overline{I}_{оп}, \overline{U}_{оп}\}$.

Новый потокоплан $\bar{x}$ строим в виде

$$\bar{x}_i = x_i + \Theta \ \operatorname{sign}[i] \cdot \operatorname{sign}[i_1, j_1], \ i = i_1, j_1;$$

$$\bar{x}_i = x_i, \ i \in (I^{п} \cup I^{р}) \setminus (i_1 \cup j_1);$$

$$\bar{x}_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + \Theta, & (i, j) \in U^1_{оп}, \text{ если } (i, j) \text{ — прямая дуга}, \\ x_{ij} - \Theta, & (i, j) \in U^1_{оп}, \text{ если } (i, j) \text{ — обратная дуга}, \\ x_{ij}, & (i, j) \in U \setminus U^1_{оп}. \end{cases} \quad (9)$$

---

*) $\operatorname{sign}[i] = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in I^{п}, \\ -1, & \text{если } i \in I^{р}; \end{cases}$

если узлы $i_1$ и $j_1$ связаны цепью из ребер, то

$\operatorname{sign}[i_1, j_1] = \begin{cases} 1, & \text{если цепь просматривается в } i_1 \to j_1 \text{ направлении}, \\ -1, & \text{если цепь просматривается в } j_1 \to i_1 \text{ направлении}; \end{cases}$

как и в [ч. 2], $\operatorname{sign}(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если дуга } (i, j) \text{ прямая}, \\ -1, & \text{если дуга } (i, j) \text{ — обратная}. \end{cases}$

При $\Delta_{i_0j_0}<0$ выбираем в цепи направление $j_0 \rightarrow i_0$ и выполняем операции, рассмотренные выше. Из формулы (5) следует, что при переходе $\{x, S_{оп}\} \rightarrow \{\bar{x}, \bar{S}_{оп}\}$ стоимость потокоплана уменьшается на величину $\Theta|\Delta_{i_0j_0}|$.

Предположим теперь, что $\Delta_0 = |\Delta_{k_0}|$. Рассмотрим два случая. 1) Пусть $\Delta_0 = \Delta_{k_0} > 0$. Составим цепь, связывающую узел $k_0$ с узлом $i_1 \in I_{оп}$, из ребер, которым соответствуют опорные дуги. Выберем направление в цепи от узла $k_0$, если $k_0 \in I^{п}$ (пункт производства), к узлу $k_0$, если $k_0 \in I^{р}$ (пункт потребления). Дуги пути между узлами $k_0$ и $i_1$ с введенным подобным образом направлением обозначим через $U^1_{оп}$. Максимальный шаг $\Theta$ вычисляется по аналогии со случаем 2) в ситуации, когда $\Delta_0 = |\Delta_{i_0j_0}|$. Опорное множество $(I_{оп}, U_{оп})$ будем изменять так:

если $\Theta = \Theta_{i_*j_*}$, из $U_{оп}$ выводим дугу $(i_*, j_*)$ и в $I_{оп}$ добавляем узел $k_0$;

если $\Theta = \Theta_{i_1}$, из множества $I_{оп}$ удаляем узел $i_1$ и вводим туда узел $k_0$;

если $\Theta = \Theta_{k_0}$, множество $\{I_{оп}, U_{оп}\}$ остается без изменений.

2) При $\Delta_{k_0}<0$ изменится лишь правило выбора направления (прямое направление поменяется на обратное и наоборот) в цепи, связывающей узлы $k_0$ и $i_1 \in I_{оп}$.

Новый потокоплан $\bar{x}$ строим по правилам (9). При переходе $\{x, S_{оп}\} \rightarrow \{\bar{x}, \bar{S}_{оп}\}$ стоимость потока уменьшится на величину $\Theta|\Delta_{k_0}|$.

## § 7. Оптимальный поток на сети с делителем

Для описания некоторых прикладных задач целесообразно к элементам классической сети добавить специальные узлы, в которых дуговой поток рассекается в заданных пропорциях.

**1. Сеть с делителем.** Пусть $S = \{I, U\}$ — классическая сеть с множеством узлов $I$ и множеством дуг $U$, $i_*$ — специальный узел, не принадлежащий $I$, $I_*$ — некоторое подмножество из $I$. Добавим к $I$ специальный узел $i_*$ и к $U$ множество дуг $U_*$, состоящее из дуги $(i_0, i_*)$, $i_0 \in I$, и конечного множества дуг $(i_*, s)$, $s \in I_*$. Параметры дуг из $U_*$ такие же, как у классических дуг из $U$. Узлу $i_*$ припишем векторный параметр $\mu = \{\mu_s, s \in I_*\}$, $\mu_s > 0$,

$\sum_{s\in I_*}\mu_s=1$, считая, что величины потоков $x_{ij}$ на дугах $(i,\ j)\in U_*$ связаны соотношениями $x_{i_*s}=\mu_s x_{i_0 i_*}$, $s\in I_*$.

Объект $S_d=\{I_d,\ U_d\}$, $I_d=I\cup i_*$, $U_d=U\cup U_*$, назовем *сетью с делителем (d-сетью)*. Совокупность чисел $x=\{x_{ij},\ (i,\ j)\in U_d\}$ называется потоком на сети $S_d$, если

$$\sum_{j\in I^+(i)} x_{ij}-\sum_{j\in I^-(i)} x_{ji}=a_i,\ i\in I;\ x_{i_*s}=\mu_s x_{i_0 i_*},\ s\in I_*; \quad (1)$$

$$0\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij},\ (i,\ j)\in U_d. \quad (2)$$

В данном параграфе рассматривается задача построения оптимального потока $x^0=\{x^0_{ij},\ (i,\ j)\in U_d\}$ с минимальной стоимостью

$$\sum_{(i,\ j)\in U_d} c_{ij}x_{ij}\to\min. \quad (3)$$

Замечание. Предположим, что существует некоторый поток $x=\{x_{ij},\ (i,\ j)\in U_d\}$, удовлетворяющий соотношениям (1)—(2), и хотя бы один узел $s_0\in I_*$, который нельзя связать цепью $\{i_0,\ i_1,\ \ldots$ $\ldots,\ i_m,\ s_0\}$, $i_k\in I$, $k=\overline{1,\ m}$, с узлом $i_0$. Тогда сеть $S$ состоит из $l$ компонент связности $S_k=\{I_k,\ U_k\}$, $k=\overline{1,\ l}$. В этом случае задача (1)—(3) сводится к $l$ классическим транспортным задачам вида

$$\begin{gathered}\sum_{(i,\ j)\in U_k} c_{ij}x_{ij}\to\min,\quad \sum_{j\in I_i^+(U_k)} x_{ij}-\sum_{j\in I_i^-(U_k)} x_{ji}=\bar a_i,\ i\in I_k,\\ 0\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij},\ (i,\ j)\in U_k,\ k=\overline{1,\ l};\ \bar a_i=a_i,\ i\in I\setminus I_*,\\ \bar a_i=\begin{cases}a_{i_0}-x_{i_0 i_*},\ i=i_0,\\ a_s+\mu_s x_{i_0 i_*},\ i=s\in I_*,\end{cases}\end{gathered}\quad (4)$$

где $x_{i_0 i_*}=\sum_{i\in I_{k_0}} a_i/(1-\sum_{s\in I_*\cap I_{k_0}}\mu_s)$, $S_{k_0}=\{I_{k_0},\ U_{k_0}\}$ — компонента связности, содержащая узел $i_0$, $s_0\overline{\in} I_{k_0}$. Пусть $x^0_k=\{x^0_{ij},\ (i,j)\in U_k\}$, $k=\overline{1,\ l}$, — оптимальные потоки в задачах (4), $x_{i_*}=\{x_{ij},\ (i,\ j)\in U_*\}$, $x_{i_*s}=\mu_s x_{i_0 i_*}$, $s\in I_*$. Тогда оптимальный поток $x^0=\{x^0_{ij},\ (i,\ j)\in U_d\}$ в задаче (1)—(3) запишется в виде $\{x^0_k,\ k=\overline{1,\ l};\ x_{i_*}\}$.

Опишем процесс вычисления оптимального потока, когда сеть $S=\{I,\ U\}$ связная. Задачу (1)—(3) будем решать прямым опорным методом [ч. 1].

**2. Опора сети. Критерий опорности.** Сеть $S_{d\,\text{оп}}=\{I_{d\,\text{оп}}, U_{d\,\text{оп}}\}$, $I_{d\,\text{оп}}=I(U_{d\,\text{оп}})$, $U_{d\,\text{оп}}\subset\tilde{U}_d=U\cup(i_0, i_*)$, называется *опорой* сети $S_d$, если система уравнений

$$\sum_{j\in I_i^+(U_{d\,\text{оп}})} x_{ij}-\sum_{j\in I_i^-(U_{d\,\text{оп}})} x_{ji}=0,\ i\in I\setminus(I_*\cup i_0), \tag{5}$$

$$\sum_{j\in I_s^+(U_{d\,\text{оп}})} x_{ij}-\sum_{j\in I_s^-(U_{d\,\text{оп}})} x_{ji}-\alpha\mu_s x_{i_0i_*}=0,$$

$$\alpha=\begin{cases}1, \text{ если } (i_0, i_*)\in U_{d\,\text{оп}},\\ 0, \text{ если } (i_0, i_*)\overline{\in} U_{d\,\text{оп}},\end{cases}\quad \mu_{i_0}=-1,\ s\in I_*\cup i_0,$$

имеет только тривиальное решение $x_{ij}\equiv 0$, $(i, j)\in U_{d\,\text{оп}}$, но для любой дуги $(i_1, j_1)\in\tilde{U}_d\setminus U_{d\,\text{оп}}$ система (5) допускает ненулевое решение $x_{ij}\neq 0$ на множестве $\{I(U_{d\,\text{оп}}\cup(i_1, j_1)), U_{d\,\text{оп}}\cup(i_1, j_1)\}$. Дуги $(i, j)\in U_{d\,\text{оп}}$ назовем *опорными*, остальные дуги $(i, j)\in U_{\text{н}}=\tilde{U}_d\setminus U_{d\,\text{оп}}$ — *неопорными*. Пару $\{x, S_{d\,\text{оп}}\}$ из потока $x$ и опоры $S_{d\,\text{оп}}$ назовем *опорным потоком*. Опорный поток считается *невырожденным*, если *) $0<x_{ij}<d_{ij}$ для $(i, j)\in U_{d\,\text{оп}}$. Обозначим множество $U_{d\,\text{оп}}\cap U$ через $U_{\text{оп}}$.

Критерий опорности. Сеть $S_{d\,\text{оп}}=\{I_{d\,\text{оп}}, U_{d\,\text{оп}}\}$ — опора задачи (1)—(3) тогда и только тогда, когда при $(i_0, i_*)\overline{\in}U_{d\,\text{оп}}$ множество $\{I, U_{\text{оп}}\}$ является деревом сети $S$; при $(i_0, i_*)\in U_{d\,\text{оп}}$, во-первых, существует узел $s_0\in I_*$ такой, что его нельзя соединить цепью $\{i_0, \ldots, s_0\}$ из ребер, которым соответствуют опорные дуги, с узлом $i_0$; во-вторых, множество $\{I, U_{\text{оп}}\}$ можно достроить до дерева сети $S$ с помощью любой дуги $(i_1, j_1)\in U\setminus U_{\text{оп}}$, которая не составляет цикла с опорными дугами.

**3. Критерии оптимальности и субоптимальности.** Пусть $\{x, S_{d\,\text{оп}}\}$ — опорный поток. Узлам $i\in I$ припишем числа $u_i$ (потенциалы), найденные из системы уравнений

$$u_i-u_j=c_{ij},\ (i, j)\in U_{\text{оп}}, \tag{6}$$

$$\alpha\Big(u_{i_0}-\sum_{s\in I_*}\mu_s(u_s+c_{i_*s})\Big)=0,$$

$$\alpha=\begin{cases}1, \text{ если } (i_0, i_*)\in U_{d\,\text{оп}},\\ 0, \text{ если } (i_0, i_*)\overline{\in} U_{d\,\text{оп}}.\end{cases}$$

---

*) Когда $d_{i_0i_*}>d_{i_*s_*}/\mu_{s_*}=\min\{d_{i_*s}/\mu_s,\ s\in I_*\}$, под ограничением $d_{i_0i_*}$ будем понимать число $d_{i_*s_*}/\mu_{s_*}$.

З а м е ч а н и е. Если одно из чисел $u_i$, $i \in I$, задать произвольно, то, как и в [ч. 2], можно показать, что остальные найдутся из системы (6) однозначно. Причем решение системы (6) при $\alpha = 1$ по сложности эквивалентно решению ее в случае $\alpha = 0$.

Для каждой неопорной дуги $(i, j) \in U_{\text{н}}$ вычислим оценку $\Delta_{ij} = \begin{cases} u_i - u_j - c_{ij}, & (i, j) \in U_{\text{н}} \cap U, \\ u_{i_0} - \sum\limits_{s \in I_*} \mu_s (u_s + c_{i_* s}), \end{cases}$

если $(i, j) = (i_0, i_*)$. По аналогии с [ч.2] можно доказать

**Критерий оптимальности.** Соотношения

$$\Delta_{ij} \leqslant 0 \text{ при } x_{ij} = 0; \ \Delta_{ij} \geqslant 0 \text{ при } x_{ij} = d_{ij};$$
$$\Delta_{ij} = 0, \text{ если } 0 < x_{ij} < d_{ij}, \ (i, j) \in U_{\text{н}}, \tag{7}$$

достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности опорного потока $\{x, S_{d\,\text{оп}}\}$.

Пусть $\beta = -\sum\limits_{\substack{\Delta_{ij} < 0, \\ (i, j) \in U_{\text{н}}}} \Delta_{ij} x_{ij} + \sum\limits_{\substack{\Delta_{ij} > 0, \\ (i, j) \in U_{\text{н}}}} \Delta_{ij} (d_{ij} - x_{ij})$. Справедлив

**Критерий субоптимальности.** Если

$$\beta \leqslant \varepsilon, \tag{8}$$

то $x$ — $\varepsilon$-оптимальный поток. Для каждого $\varepsilon$-оптимального потока $x^\varepsilon$ найдется опора $S^\varepsilon_{d\,\text{оп}}$ такая, что для опорного потока $\{x^\varepsilon, S_{d\,\text{оп}}\}$ выполняется неравенство (8).

**4. Итерация.** Пусть $\{x, S_{d\,\text{оп}}\}$ — начальный невырожденный опорный поток, для которого не выполняются условия критериев оптимальности и субоптимальности. Тогда этот поток можно улучшить. Найдем $\Delta_{i_1 j_1}$ — наибольшую по модулю неопорную оценку, не удовлетворяющую соотношениям (7). Рассмотрим два случая.

1) Существует цикл из дуги $(i_1, j_1)$ и дуг $(i, j) \in U_{\text{оп}}$. Изменим поток $\{x_{ij}, (i, j) \in U\}$ и преобразуем множество $U_{\text{оп}}$ по правилам § 4 гл. I [ч. 2]. Поток $x_{i_0 i_*}$ по дуге $(i_0, i_*)$ оставляем прежним. Стоимость нового потока $\bar{x}$ меньше стоимости старого потока на величину $\Theta |\Delta_{i_1 j_1}|$.

2) Дуга $(i_1, j_1)$ не составляет цикл с опорными дугами. Каждый узел $s \in I_*$ соединим цепью из ребер, которым соответствуют дуги $(i, j) \in U_{d\,\text{оп}} \cup (i_1, j_1)$, с узлом $i_*$.

Пусть $\Delta_{i_1 j_1} > 0$. Выберем в цепи $\{i_*, \ldots, s_0\}$, $s_0 \in I_*$, содержащей ребро $\{i_1, j_1\}$, направление $i_1 \to j_1$. В остальных цепях $\{i_*, \ldots, s\}$, $s \in I_* \setminus s_0$, направление будет определяться направлением дуги $(i_0, i_*)$, полученным в цепи $\{i_*, \ldots, s_0\}$. Дуги пути между узлами $i_*$ и $s$ с введенным подобным образом направлением обозначим через $U^s_{d\,\text{оп}}$, $s \in I_*$. Образуем множество $L = \bigcup_{s \in I_*} U^s_{d\,\text{оп}}$. Легко заметить, что если $(i, j) \in U^{s_1}_{d\,\text{оп}} \cap U^{s_2}_{d\,\text{оп}}$, то в каждом из этих путей дуга $(i, j)$ прямая или обратная одновременно. Поэтому будем называть дуги $(i, j)$ множества $L$ соответственно прямыми или обратными, сохраняя за ними то название, которое они несут в содержащем их пути. Можно показать, что наложение потоков $y_s = \{\mu_s \Theta\, \text{sign}\,(i, j), (i, j) \in U^s_{d\text{оп}}\}$, $\Theta > 0$, $s \in I_*$, на поток $\{x_{ij}, (i, j) \in L\}$ не нарушит ограничений (1) и приведет к уменьшению целевой функции (3).

Найдем максимально возможное значение $\Theta$ из условия выполнения ограничений (2) при указанном выше наложении. Каждой дуге $(i, j) \in L$ припишем параметр $\mu_{ij} = \sum\limits_{s \in (s:(i, j) \in U^s_{d\,\text{оп}})} \mu_s$. По аналогии с [ч.2] можно подсчитать, что $\Theta$ равно наименьшему из чисел $\Theta_{ij} = (d_{ij} - x_{ij})/\mu_{ij}$ на прямых дугах $(i, j) \in L$ и $\Theta_{ij} = x_{ij}/\mu_{ij}$ на обратных дугах $(i, j) \in L$. Если поток $\{x, S_{d\,\text{оп}}\}$ невырожденный, то $\Theta > 0$. Пусть $\Theta = \Theta_{i_2 j_2}$. Опорное множество $S_{d\,\text{оп}} = \{I_{d\,\text{оп}}, U_{d\,\text{оп}}\}$ преобразуем следующим образом: если $(i_2, j_2) \neq (i_1, j_1)$, в $U_{d\,\text{оп}}$ заменяем дугу $(i_2, j_2)$ на $(i_1, j_1)$; в случае $(i_2, j_2) = (i_1, j_1)$ множество $U_{d\,\text{оп}}$ остается без изменения.

Компоненты нового потока $\bar{x}$ равны $\bar{x}_{ij} = x_{ij} + \mu_{ij} \Theta\, \text{sign}\,(i, j)$, $(i, j) \in L$; $\bar{x}_{i_* s} = \mu_s \bar{x}_{i_0 i_*}$, $s \in I_*$; $\bar{x}_{ij} = x_{ij}$, $(i, j) \in U \setminus L$.

При $\Delta_{i_1 j_1} < 0$ считаем, что дуга $(i_1, j_1)$ задает направление $j_1 \to i_1$, и выполняем рассмотренные выше операции. Из [ч. 2] следует, что при переходе $\{x, S_{d\,\text{оп}}\} \to \{x, S_{d\,\text{оп}}\}_{\text{нов}}$ стоимость потока уменьшается на величину $\Theta |\Delta_{i_1 j_1}|$.

## § 8. Задача сетевого планирования

Сетевые модели широко используются не только при оптимизации потоков. Важный класс непотоковых задач, естественно моделируемых в сетевых терминах, составляют задачи сетевого планирования, возникающие при управлении сложными комплексами работ. В данном параграфе описывается реализация адаптивного метода решения одной задачи распределения ресурсов при сетевом планировании.

**1. Простейшая задача сетевого планирования.** При разработке сложных проектов, управлении большим комплексом работ часто используются *сетевые графики*. Комплекс работ в них изображается в виде сети $S=\{I, U\}$, но в отличие от потоковых задач элементам сети — узлам и дугам — приписываются новые характеристики. Узел $i\in I$ принято называть *событием*, его характеристика $x_i$ — *время наступления события*. Дуга $(i, j)\in U$ называется *работой*, которая начинается после наступления события $i$ и оканчивается до наступления события $j$. Она характеризуется *продолжительностью* $z_{ij}>0$ выполнения работы. Кроме этих характеристик возможны дополнительные. Например, $a_{*i}$, $a_i^*$ — ограничения на время наступления события $i: a_{*i}\leqslant x_i\leqslant a_i^*$; $q_{*ij}$, $q_{ij}^*$ — ограничения на продолжительность работы $(i, j)$: $q_{*ij}\leqslant z_{ij}\leqslant q_{ij}^*$.

Говорят, что на сети задан сетевой график $\{x_i, i\in I, z_{ij}, (i, j)\in U\}$, если для каждой дуги $(i, j)$ выполняется неравенство

$$x_j-x_i\geqslant z_{ij},\ (i, j)\in U, \tag{1}$$

которое выражает естественное требование: продолжительность работы $(i, j)$ не должна превышать интервала между моментами наступления событий $i$, $j$. Если сеть допускает сетевой график, то на ней не может существовать контуров. Действительно, если $U_k$ — контур, то, суммируя вдоль него неравенства (1), получим противоречивое неравенство $0<\sum\limits_{(i,j)\in U_k} z_{ij}\leqslant 0$.

Во многих задачах сетевого планирования среди событий $i\in I$ выделяют два события: $s$ — начальное, $t$ — конечное, которые характеризуются тем, что $I_s^-=\varnothing$, $I_t^+=\varnothing$ $(I_i^-=\{j:(j, i)\in U\}$, $I_i^+=\{j:(i, j)\in U\})$.

Простейшая задача сетевого планирования состоит в минимизации разности $x_t-x_s$, которая равна *продолжительности выполнения комплекса работ* и является одной из основных характеристик сетевого графика. Нетрудно понять, что число $\min(x_t-x_s)$ равно длине максимального (критического) пути из $s$ в $t$. Методы решения этой задачи описаны в § 1. Зная критический путь, можно более детально проанализировать сетевой график. *Моменты раннего* и *моменты позднего* наступления событий, *резервы времени* работ и другие характеристики сетевого графика определяются во многих руководствах (см., например, [13, 22]).

**2. Оптимальное распределение ресурсов.** На выполнение работ, как правило, расходуются ресурсы. Рассмотрим случай использования одного ресурса. Будем считать, что продолжительность $z_{ij}$ работы $(i, j)$ зависит от объема $x_{ij}$ выделенного на нее ресурса линейным образом:

$$z_{ij}=t_{ij}-\alpha_{ij}x_{ij},$$

где $t_{ij}$ — продолжительность работы без использования ресурса; $\alpha_{ij}$ — коэффициент пропорциональности.

Пусть $d_{ij}$ — максимальный объем ресурса, который можно выделить на работу $(i, j)$, $\alpha_*$ — общий объем ресурса на весь комплекс работ. Требуется найти такое распределение ресурса по работам, при котором продолжительность выполнения комплекса работ минимальна. Следуя п. 1, нетрудно показать, что математическая модель сформулированной задачи имеет вид

$$\begin{gathered} x_s-x_t\to\max, \\ x_i-x_j-\alpha_{ij}x_{ij}\leqslant -t_{ij}, \\ 0\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij},\ (i,\ j)\in U;\quad \sum_{(i,\ j)\in U} x_{ij}\leqslant \alpha_*. \end{gathered} \tag{2}$$

В дальнейшем задача (2) рассматривается только как математический объект. Содержательную интерпретацию результатов в терминах сетевого планирования оставляем читателю.

Множество чисел $X=\{x_i,\ i\in I;\ x_{ij},\ (i,\ j)\in U\}$ назовем *планом* задачи (2), если они удовлетворяют всем ее ограничениям. Совокупность $Q_{\text{оп}}=\{U^1,\ U^2,\ \gamma\}$ из двух множеств $U^1$, $U^2\subset U$ и числа $\gamma\in\{0,\ 1\}$ назовем *опорой* задачи (2), если система

$$\begin{gathered} x_s=0,\ x_i-x_j=0,\ (i,\ j)\in U^1\setminus U^2; \\ x_i-x_j-\alpha_{ij}x_{ij}=0,\ (i,\ j)\in U^1\cap U^2; \\ \gamma\sum_{(i,\ j)\in U^2} x_{ij}=0, \end{gathered}$$

записанная для совокупности $\{U^1, U^2, \gamma\}$, имеет только тривиальное решение, но имеет нетривиальное решение для каждой совокупности $\{\bar{U}^1, \bar{U}^2, \bar{\gamma}\}$ следующих видов: $\bar{U}^1 = U^1 \setminus (i, j)$, $\bar{U}^2 = U^2$, $\bar{\gamma} = \gamma$, где $(i, j)$ — любая дуга из $U^1$; $\bar{U}^1 = U^1$, $\bar{U}^2 = U^2$, $\bar{\gamma} = 0$, если $\gamma = 1$; $\bar{U}^1 = U^1$, $\bar{U}^2 = U^2 \cup (i, j)$, $\bar{\gamma} = \gamma$, где $(i, j)$ — любая дуга, не принадлежащая $U^2$.

Максимальное дерево сети $S$ обозначим через $U_d$. Из дерева $U_d$ удалим любую дугу. Полученное множество обозначим через $U_*$. Ясно, что сеть $\{I, U_*\}$ состоит из двух компонент связности $\{I(s), U_*(s)\}$, $\{\bar{I}(s), \bar{U}_*(s)\}$, причем $s \in I(s)$ и множества $U_*(s)$, $\bar{U}_*(s)$ не содержат циклов.

Рассмотрим связную частичную сеть $\{I, U_* \cup \bar{U}\}$. Обозначим: $R_+ = \{(i, j) \in \bar{U}, i \in I(s), j \in \bar{I}(s)\}$, $R_- = \{(i, j) \in \bar{U}, i \in \bar{I}(s), j \in I(s)\}$. По построению, $R = R_+ \cup R_- \subset \bar{U}$. Число $\rho = \sum\limits_{(i, j) \in R_+} 1/\alpha_{ij} - \sum\limits_{(i, j) \in R_-} 1/\alpha_{ij}$ назовем детерминантом связной сети $\{I, U_* \cup \bar{U}\}$.

Обозначим: $U_\alpha = U^1 \cap U^2$. Справедлив следующий

**Критерий опорности.** Совокупность $Q_{\text{оп}} = \{U^1, U^2, \gamma\}$ является опорой задачи (2) тогда и только тогда, когда при $\gamma = 0$ выполняется условие: $U^1 \setminus U^2 = U_d$, $U_\alpha = U^2$; при $\gamma = 1$ выполняется одно из следующих условий: $U^1 \setminus U^2 = U_d$, $U_\alpha = U^2 \setminus (i_*, j_*)$, где $(i_*, j_*)$ — некоторая дуга из $U^2$; $U^1 \setminus U^2 = U_*$, $U_\alpha = U^2$, сеть $\{I, U_* \cup U_\alpha\}$ связная и ее детерминант $\rho$ отличен от нуля.

Из критерия опорности видно, что задача (2) может иметь опоры трех типов: $Q^{\mathrm{I}}_{\text{оп}} = \{U_d, U_\alpha\}$; $Q^{\mathrm{II}}_{\text{оп}} = \{U_d, U_\alpha, (i_*, j_*)\}$, $(i_*, j_*) = U^2 \setminus U^1$; $Q^{\mathrm{III}}_{\text{оп}} = \{U_*, U_\alpha\}$. Причем в третьем типе можно выделить два вида опоры: опору $Q^{\mathrm{IIIa)}}_{\text{оп}} = \{U_*, U_\alpha\}$, для которой $s \in I(s)$, $t \in I(s)$, и опору $Q^{\mathrm{III6)}}_{\text{оп}} = \{U_*, U_\alpha\}$, для которой $s \in I(s)$, $t \in \bar{I}(s)$.

Замечание. В дальнейшем иногда будет удобно опоры всех типов записывать в виде $Q^*_{\text{оп}} = \{U^*_d, U^*_\alpha, (i_*, j_*)\}$, где $U^*_d$ — дерево сети $S$, $U^*_d \cap U^*_\alpha = \varnothing$, $(i_*, j_*) \cap U^*_\alpha = \varnothing$. Тогда $Q_{\text{оп}}$ — опора первого типа, если $(i_*, j_*) = \varnothing$, $(U_d = U^*_d, U_\alpha = U^*_\alpha)$, $Q_{\text{оп}}$ — опора второго типа, если $(i_*, j_*) \neq \varnothing$, $(i_*, j_*) \bar{\in} U^*_d$ $(Q^*_{\text{оп}} = Q^{\mathrm{II}}_{\text{оп}})$, $Q_{\text{оп}}$ — опора третьего типа, если $(i_*, j_*) \neq \varnothing$, $(i_*, j_*) \in U^*_d$ $(U_* = U^*_d \setminus (i_*, j_*)$, $U_\alpha = U^*_\alpha \cup (i_*, j_*))$.

План и опора составляют *опорный план* $\{x, Q_{\text{оп}}\}$, который называется *невырожденным,* если $0 < x_{ij} < d_{ij}$, $(i, j) \in U^2$; $x_i - x_j - \alpha_{ij} x_{ij} < -t_{ij}$, $(i, j) \in U_{\text{н}} = U \setminus U^1$; $\sum\limits_{(i, j) \in U} x_{ij} < \alpha_*$ при $\gamma = 0$.

Приступим к реализации адаптивного метода. Найдем потенциалы $u_{ij}$, $(i, j) \in U^1$, $u_*$ из системы

$$\sum_{j \in I_i^+(U^1)} u_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U^1)} u_{ji} = \begin{cases} 1, \text{ если } i = s, \\ 0, \text{ если } i = I \setminus (s \cup t), \\ -1, \text{ если } i = t, \end{cases} \qquad (3)$$

$$u_* - \alpha_{ij} u_{ij} = 0, \ (i, j) \in U^2; \ u_* = 0, \text{ если } \gamma = 0; \qquad (4)$$

$$u_{ij} = 0, \ (i, j) \in U \setminus U^1 = U_{\text{н}},$$

составленной по опоре $Q_{\text{оп}}$. Поясним порядок вычисления их для возможных типов опор $Q_{\text{оп}} = \{U_d^*, U_\alpha^*, (i_*, j_*)\}$.

Пусть $\Pi_{st}$ — цепь из $s$ в $t$, составленная из дуг дерева $U_d^*$, $\Pi_{st}^+$ — множество прямых и $\Pi_{st}^-$ — множество обратных дуг цепи $\Pi_{st}$. Если $(i_*, j_*) \cap \Pi_{st} = \varnothing$, то решение системы (3), (4) имеет вид

$$u_* = 0, \ u_{ij} = 0, \ (i, j) \in U \setminus \Pi_{st}; \qquad (5)$$

$$u_{ij} = 1, \text{ если } (i, j) \in \Pi_{st}^+; \ u_{ij} = -1, \text{ если } (i, j) \in \Pi_{st}^-.$$

Пусть $(i_*, j_*) \cap \Pi_{st} \neq \varnothing$. Это возможно только в том случае, если $Q_{\text{оп}}$ — опора третьего типа и $t \in I(s)$. Тогда решение системы (3), (4) составляется из чисел $u_* = 1/\rho$, $u_{ij} = u_* / \alpha_{ij}$, $(i, j) \in U_\alpha^* \cup (i_*, j_*)$, $u_{ij} = 0$, $(i, j) \in U_{\text{н}}$, и чисел $u_{ij}$, $(i, j) \in U_* = U_d^* \setminus (i_*, j_*)$, которые легко находятся по множеству $U_*$ из условий баланса (3).

Покажем, что в задаче (2) среди опор каждого типа существуют такие, что соответствующие им потенциалы удовлетворяют неравенствам

$$u_{ij} \geqslant 0, \ (i, j) \in U; \ u_* \geqslant 0. \qquad (6)$$

На самом деле, неравенства (6) будут выполняться для потенциалов, найденных по опорам $Q_{\text{оп}}^{\text{I}}$, $Q_{\text{оп}}^{\text{II}}$ и $Q_{\text{оп}}^{\text{IIIа)}}$, если все дуги цепи $\Pi_{st}$ — прямые.

Построим опору $Q_{\text{оп}}^{\text{IIIб)}}$ такую, что для подсчитанных по ней потенциалов выполняются неравенства (6). Рассмотрим произвольную связную сеть $\{I, \bar{U}\}$, $\bar{U} \subset U$, содержащую хотя бы один путь из $s$ в $t$. Пусть $\{\bar{u}_{ij}^0, (i, j) \in \bar{U}, \bar{u}_{ts}^0\}$ — оптимальный базисный план задачи

$$\bar{u}_{ts} \to \max,$$

$$\sum_{j \in I_i^+(\bar{U})} \bar{u}_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(\bar{U})} \bar{u}_{ji} = \begin{cases} \bar{u}_{ts}, \text{ если } i = s, \\ 0, \text{ если } i \in I \setminus (s \cup t), \\ -\bar{u}_{ts}, \text{ если } i = t, \end{cases} \tag{7}$$

$$0 \leqslant \bar{u}_{ij} \leqslant 1/\alpha_{ij}, \ (i, j) \in \bar{U}.$$

Легко проверить, что опора $\{U_*, U_\alpha\}$, где $U_*$ — множество базисных дуг оптимального базисного плана задачи (7) без дуги $(t, s)$, $U_\alpha = \{(i, j) : (i, j) \in \bar{U} \setminus U_*, \ \bar{u}_{ij}^0 = 1/\alpha_{ij}\}$, является опорой типа $Q_{\text{оп}}^{\text{III}б)}$ и потенциалы, подсчитанные по ней, равны

$$u_* = 1/\bar{u}_{ts}^0; \ u_{ij} = u_* \bar{u}_{ij}^0, \ (i, j) \in U_* \cup U_\alpha; \ u_{ij} = 0, \\ (i, j) \in U_{\text{н}}. \tag{8}$$

Ясно, что для потенциалов (8) выполняются неравенства (6). Опорный план $\{x, Q_{\text{оп}}\}$, для которого выполняются неравенства (6) и равенства

$$x_i - x_j = t_{ij} - \alpha_{ij} x_{ij}, \ (i, j) \in U^1; \ \gamma \sum_{(i, j) \in U} x_{ij} = \alpha_* \gamma, \tag{9}$$

будем называть согласованным по множеству $U^1$, $\gamma$.

Докажем еще одно утверждение, используемое в дальнейшем: для каждого плана $x$ можно подобрать опору $Q_{\text{оп}}$ такую, что $\{x, Q_{\text{оп}}\}$ — согласованный опорный план.

Действительно, пусть $U^1$ — множество критических дуг сети $S$ с длинами $t_{ij} - \alpha_{ij} x_{ij}$. Не уменьшая целевую функцию задачи (2), изменяя только компоненты $x_i$, $i \in I$, плана $x$, всегда можно добиться, чтобы дерево $\bar{U}_d$ максимальных путей из $s$ в $j \in I \setminus S$ принадлежало множеству $U^1$. Если для компонент $x_{ij}$, $(i, j) \in U$, плана $x$ неравенство

$$\sum_{(i, j) \in U} x_{ij} \leqslant \alpha_* \tag{10}$$

не активно, то план $x$ можно согласовать только с опорой первого типа. Если неравенство (10) активно, то план $x$ можно согласовать с опорой любого из трех типов.

Нетрудно показать, что опорные планы $\{x, Q^{\mathrm{I}}_{\text{оп}}\}$, где $Q^{\mathrm{I}}_{\text{оп}} = \{\bar{U}_d, U_\alpha = U^1 \setminus \bar{U}_d\}$, и $\{x, Q^{\mathrm{II}}_{\text{оп}}\}$, $\{x, Q^{\mathrm{IIIa)}}_{\text{оп}}\}$, где $x$ — план, для которого неравенство (10) активно, $Q^{\mathrm{II}}_{\text{оп}} = \{\bar{U}_d, U_\alpha = U^1 \setminus U_d, (i_*, j_*)\}$, $(i_*, j_*)$ — любая дуга из множества $U \setminus U^1$; $Q^{\mathrm{IIIa)}}_{\text{оп}} = \{U_* = \bar{U}_d \setminus (i_*, j_*), U_\alpha \subset U^1 \setminus U_*\}$, где $(i_*, j_*)$ — любая дуга из $U_d$, не принадлежащая цепи $\Pi_{st}$; $U_\alpha$—любое подмножество из $U^1 \setminus U_*$ такое, что детерминант $\rho$ сети $\{I, U_* \cup U_\alpha\}$ отличен от нуля (в частности, можно положить $U_\alpha = (i_*, j_*)$), согласованы.

Чтобы построить опору типа $Q^{\mathrm{III}б)}_{\text{оп}}$, согласованную с планом $x$, положим $\bar{U} = U^1$ и решим задачу (7). Опора $Q^{\mathrm{III}б)}_{\text{оп}} = \{U_*, U_\alpha\}$, где $U_* = \bar{U}_{\text{Б}} \setminus (t, s)$, $U_\alpha = \{(i, j) : (i, j) \in \bar{U} \setminus U_*, \bar{u}^0_{ij} = 1/\alpha_{ij}\}$, $\bar{U}_{\text{Б}}$ — множество базисных дуг оптимального базисного плана $\{\bar{u}^0_{ij}, (i, j) \in \bar{U}, u^0_{ts}\}$ задачи (7), согласована с планом $x$, для которого неравенство (10) активно.

Используя потенциалы, найденные из системы (3), (4), подсчитаем оценки $\Delta_{ij} = u_* - \alpha_{ij} u_{ij}$, $(i, j) \in U \setminus U^2$.

**Критерий оптимальности.** Соотношения

$$u_* \geqslant 0 \text{ при } \sum_{(i, j) \in U} x_{ij} = \alpha_*; \quad u_* = 0 \text{ при } \sum_{(i, j) \in U} x_{ij} < \alpha_*, \tag{11}$$

$$\begin{gathered} u_{ij} \geqslant 0 \text{ при } x_i - x_j - \alpha_{ij} x_{ij} = -t_{ij}, \\ u_{ij} = 0 \text{ при } x_i - x_j - \alpha_{ij} < -t_{ij}, \ (i, j) \in U^1; \\ \Delta_{ij} \leqslant 0 \text{ при } x_{ij} = d_{ij}, \ \Delta_{ij} = 0 \text{ при } 0 < x_{ij} < d_{ij}, \\ \Delta_{ij} \geqslant 0 \text{ при } x_{ij} = 0, \ (i, j) \in U \setminus U^2, \end{gathered} \tag{12}$$

достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности опорного плана $\{x, Q_{\text{оп}}\}$.

Пусть для потенциалов выполняются неравенства (6). Тогда справедлива оценка

$$(x^0_s - x^0_t) - (x_s - x_t) \leqslant \beta, \tag{13}$$

где

$$\beta = \sum_{\substack{u_{ij} > 0, \\ (i, j) \in U^1}} u_{ij} y_{ij} + \sum_{\substack{\Delta_{ij} > 0, \\ (i, j) \in U \setminus U^2}} \Delta_{ij} x_{ij} + \sum_{\substack{\Delta_{ij} < 0, \\ (i, j) \in U \setminus U^2}} \Delta_{ij} (x_{ij} - d_{ij}) + u_* \Big(\alpha_* - \sum_{(i, j) \in U} x_{ij}\Big),$$

$$y_{ij}=x_i-x_j+\alpha_{ij}x_{ij}-t_{ij},\ (i,\ j)\in U.$$

Из неравенства (13) следует

**Критерий субоптимальности.** Для $\varepsilon$-оптимальности плана $x^\varepsilon$ необходимо и достаточно существование такой опоры $Q_{\text{оп}}$, что для опорного плана $\{x^\varepsilon,\ Q_{\text{оп}}\}$ верно неравенство $\beta\leqslant\varepsilon$.

Для упрощения дальнейших вычислений будем рассматривать согласованные опорные планы. Можно показать, что план $\{\bar{x},\ \bar{Q}_{\text{оп}}\}$, полученный из согласованного опорного плана $\{x,\ Q_{\text{оп}}\}$ по правилам адаптивного метода, будет согласованным. Следовательно, все опорные планы будут согласованными, если таковым был начальный.

Предположим, что приведенные критерии оптимальности и субоптимальности не выполняются для согласованного опорного плана $\{x,\ Q_{\text{оп}}\}$. Подходящее направление $\Delta x=\{\Delta x_i,\ i\in I,\ \Delta x_{ij},\ (i,\ j)\in U\}$ построим следующим образом. Положим

$$\Delta x_{ij}=\begin{cases} -x_{ij}, \text{ если } \Delta_{ij}>0, \\ d_{ij}-x_{ij}, \text{ если } \Delta_{ij}<0, \\ 0, \text{ если } \Delta_{ij}=0. \end{cases} \quad (i,\ j)\in U\diagdown U^2.$$

Остальные компоненты $\Delta x_{ij}$, $(i,\ j)\in U^2$, $\Delta x_i$, $i\in I$, подходящего направления однозначно найдутся из системы

$$\Delta x_i-\Delta x_j=\alpha_{ij}\Delta x_{ij},\ (i,\ j)\in U^1; \tag{14}$$

$$\gamma\sum_{(i,\ j)\in U}\Delta x_{ij}=0,\ \Delta x_s=0.$$

Если в рассматриваемом опорном плане опора принадлежит к первому или второму типу, то решение системы (14) начинаем с подсистемы

$$\Delta x_s=0,\ \Delta x_i-\Delta x_j=\alpha_{ij}\Delta x_{ij},\ (i,\ j)\in U_d=U^1\diagdown U^2. \tag{15}$$

В силу того что множество $U_d$ является деревом, числа $\Delta x_i$, $i\in I$, легко найдутся из (15). Зная $\Delta x_i$, $i\in I$, по формуле

$$\Delta x_{ij}=(\Delta x_i-\Delta x_j)/\alpha_{ij} \tag{16}$$

нетрудно найти $\Delta x_{ij}$, $(i,\ j)\in U_\alpha=U^1\cap U^2$.

В случае опоры первого типа все компоненты подходящего направления уже построены. Для опоры второго типа осталась неопределенной компонента $\Delta x_{i_* j_*}$, $(i_*, j_*) = U^2 \setminus U^1$. Она находится из условия

$$\Delta x_{i_* j_*} = - \sum_{(i,\, j) \in U \setminus (i_*,\, j_*)} \Delta x_{ij}.$$

Рассмотрим опору $Q_{\text{оп}}^{\text{IIIa)}}$. Из соотношений

$$\Delta x_s = 0,\ \Delta x_i - \Delta x_j = \alpha_{ij} \Delta x_{ij},\ (i,\, j) \in U(s),$$

найдем $\Delta x_i$, $i \in I(s)$, и по формулам (16) компоненты $\Delta x_{ij}$, $(i, j) \in U_\alpha$, $i, j \in I(s)$. По построению, $\Delta x_{ij} = 0$, $(i, j) \in U_* \setminus U(s)$, следовательно, $\Delta x_{ij} = 0$, $(i, j) \in U_\alpha$, $i, j \in \bar{I}(s)$, и все $\Delta x_i$, $i \in \bar{I}(s)$, равны между собой: $\Delta x_i = \Delta x_*$, $i \in \bar{I}(s)$. Значит, с учетом последнего уравнения из (14) имеем

$$-\Delta x_* \rho + \Big( \sum_{(i,\, j) \in R_+} \Delta x_i / \alpha_{ij} - \sum_{(i,\, j) \in R_-} \Delta x_j / \alpha_{ij} \Big) + \\ + \sum_{(i,\, j) \in U \setminus R} \Delta x_{ij} = 0.$$

Теперь легко найти компоненты $\Delta x_i = \Delta x_*$, $i \in \bar{I}(s)$, и по формулам (16) компоненты $\Delta x_{ij}$, $(i, j) \in R$.

Пусть в рассматриваемом опорном плане опора относится к типу $Q_{\text{оп}}^{\text{IIIб)}}$. Решение системы (14) строится следующим образом. Из системы

$$\Delta x_s = 0,\ \Delta x_t = \sum_{(i,\, j) \in U \setminus U_\alpha} \Delta x_{ij} \Delta_{ij},\ \ \Delta x_i - \Delta x_j = \alpha_{ij} \Delta x_{ij},$$
$$(i,\ j) \in U_*,$$

легко найдутся числа $\Delta x_i$, $i \in I$. Остальные компоненты $\Delta x_{ij}$, $(i, j) \in U_\alpha$, подходящего направления подсчитываются по формулам (16).

При движении вдоль подходящего направления $\Delta x$ могут нарушиться неопорные основные ограничения $x_i = x_j - \alpha_{ij} x_{ij} \leqslant -t_{ij}$, $(i, j) \in U_{\text{н}}$, прямые ограничения на опорные переменные $x_{ij}$, $(i, j) \in U^2$, и, в случае опоры первого типа, ограничение на ресурсы $\sum_{(i,\, j) \in U} x_{ij} < \alpha_*$. Следовательно, максимально допустимый шаг $\Theta$ вдоль направления $\Delta x$ равен

$$\Theta = \min\ \{1,\ \Theta_{i_0 j_0}^{(\text{н})},\ \Theta_{i_0 j_0}^{(2)},\ \Theta_*\},$$

где $\Theta^{(\text{н})}_{i_0j_0}=\min\Theta^{(\text{н})}_{ij}$, $(i,\ j)\in U_\text{н}$; $\Theta^{(\text{н})}_{ij}=\begin{cases}\infty, \text{ если } \Delta y_{ij}\leqslant 0,\\ -y_{ij}/\Delta y_{ij},\\ \text{если } \Delta y_{ij}>0;\end{cases}$

$$y_{ij}=x_i-x_j-\alpha_{ij}x_{ij}+t_{ij};\ \ \Delta y_{ij}=\Delta x_i-\Delta x_j-\alpha_{ij}\Delta x_{ij},$$

$$(i,\ j)\in U_\text{н};\ \Theta^{(2)}_{i_0j_0}=\min\Theta^{(2)}_{ij},\ (i,\ j)\in U^2;$$

$$\Theta^{(2)}_{ij}=\begin{cases}-x_{ij}/\Delta x_{ij}, \text{ если } \Delta x_{ij}<0,\\ (d_{ij}-x_{ij})/\Delta x_{ij}, \text{ если } \Delta x_{ij}>0,\\ \infty, \text{ если } \Delta x_{ij}=0;\end{cases}$$

$$\Theta_*=\begin{cases}\Big(-\sum\limits_{(i,\ j)\in U}x_{ij}+\alpha_*\Big)\Big/\sum\limits_{(i,\ j)\in U}\Delta x_{ij}, \text{ если } \gamma=0 \text{ и}\\ \qquad\qquad\sum\limits_{(i,\ j)\in U}\Delta x_{ij}>0,\\ \infty \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

Новый план строим в виде $\bar{x}=x+\Theta\Delta x$. Согласно алгоритму адаптивного метода, план $\bar{x}$ будет оптимальным, если $\Theta=1$.

Пусть $\Theta=\Theta^{(\text{н})}_{i_0j_0}<1$. Можно показать, что числа $\Delta u_{ij}$, $(i,\ j)\in U$, $\Delta u_*$, найденные из системы

$$\sum_{j\in I(U^1\cup(i_0,\ j_0))}\Delta u_{ij}-\sum_{j\in I(U^1\cup(i_0,\ j_0))}\Delta u_{ji}=0,\ \ i\in I, \tag{17}$$

$$\begin{gathered}\Delta u_*=0, \text{ если } \gamma=0;\ \Delta u_{ij}=0,\ (i,\ j)\in U\setminus(U^1\cup(i_0,\ j_0));\\ u_{i_0j_0}=1,\ \Delta u_*-\alpha_{ij}\Delta u_{ij}=0,\ (i,\ j)\in U^2;\end{gathered} \tag{18}$$

задают подходящее направление для двойственного базисного плана $\{u_{ij},\ (i,\ j)\in U;\ u_*\}$, сопровождающего опору $Q_\text{оп}$ (см. введение, § 1).

Рассмотрим опору $Q_\text{оп}=\{U^*_d,\ U^*_\alpha,\ (i_*,\ j_*)\}$ произвольного типа. Обозначим через $L(i_0,\ j_0)$ единственный цикл множества $U^*_d\cup(i_0,\ j_0)$; $L_+(i_0,\ j_0)$ — множество дуг цикла $L(i_0,\ j_0)$, направление которых совпадает с направлением дуги $(i_0,\ j_0)$; $L_-(i_0,\ j_0)$ — множество дуг цикла $L(i_0,\ j_0)$, направление которых не совпадает с направлением дуги $(i_0,\ j_0)$.

Если $(i_*,\ j_*)\cap L(i_0,\ j_0)=\varnothing$, то решение системы (17), (18) имеет вид

$$\Delta u_* = 0;\ \Delta u_{ij} = 0,\ (i,\ j) \in U \setminus L(i_0,\ j_0); \tag{19}$$
$$\Delta u_{ij} = 1,\ \text{если}\ (i,\ j) \in L_+(i_0,\ j_0);\ \Delta u_{ij} = -1,\ \text{если}\ (i,\ j) \in L_-(i_0,\ j_0).$$

Пусть $(i_*,\ j_*) \cap L(i_0,\ j_0) \neq \varnothing$. В этом случае решение системы (17), (18) построим следующим образом. Положим $\Delta u_* = \alpha_{i_* j_*}$, если $Q_{\text{оп}}$ — опора второго типа, $\Delta u_* = \operatorname{sign}(i_0,\ j_0)/\rho$, если $Q_{\text{оп}}$ — опора третьего типа. Здесь $\operatorname{sign}(i_0,\ j_0) = -1$, если $i_0 \in I(s)$; $\operatorname{sign}(i_0,\ j_0) = 1$, если $j_0 \in I(s)$. Тогда из (18) легко найти $\Delta u_{ij} = \Delta u_*/\alpha_{ij}$, $(i,\ j) \in U^2$; $\Delta u_{ij} = 0$, $(i,\ j) \in U \setminus (U^1 \cup (i_0,\ j_0))$. В силу того что множество $U^1 \setminus U^2$ не содержит циклов, остальные числа $\Delta u_{ij}$, $(i,\ j) \in U^1 \setminus U^2$, легко найдутся из условий баланса (17).

Замечание. Легко проверить, что в случае опоры $Q_{\text{оп}}^{\text{III б)}}$ решение системы (17), (18) можно представить в виде

$$\Delta u_{ij} = u_{ij} \operatorname{sign}(i_0,\ j_0),\ (i,\ j) \in U^1 \setminus \Pi(i_0,\ j_0);\ \Delta u_* = u_* \operatorname{sign}(i_0,\ j_0);$$
$$\Delta u_{ij} = \begin{cases} 1 + u_{ij} \operatorname{sign}(i_0,\ j_0), & \text{если}\ (i,\ j) \in \Pi_+(i_0,\ j_0), \\ -1 + u_{ij} \operatorname{sign}(i_0,\ j_0), & \text{если}\ (i,\ j) \in \Pi_-(i_0,\ j_0). \end{cases} \tag{20}$$

Двойственный допустимый шаг $\sigma^0$ найдем из того условия, что при движении вдоль двойственного подходящего направления $\{\Delta u_{ij},\ (i,\ j) \in U,\ \Delta u_*\}$ компоненты векторов

$$\{u_{ij},\ (i,\ j) \in U^1;\ \gamma u_*\} + \sigma^0 \{\Delta u_{ij},\ (i,\ j) \in U^1,\ \gamma \Delta u_*\};$$
$$\{\Delta_{ij},\ (i,\ j) \in U \setminus U^2\} + \sigma^0 \{\Delta\delta_{ij},\ (i,\ j) \in U \setminus U^2\}$$

не меняют своих знаков. Здесь $\Delta\delta_{ij} = \Delta u_* - \alpha_{ij}\Delta u_{ij}$, $(i,\ j) \in U \setminus U^2$.

Пусть решение системы (17), (18) имеет вид (19). Тогда шаг $\sigma^0$ равен

$$\sigma^0 = \min\{\sigma_{ij}^u;\ \sigma_{ij}^\Delta,\ (i,\ j) \in L_-(i_0,\ j_0);\ \sigma_{ij}^\Delta,\ (i,\ j) \in L_+(i_0,\ j_0)\},$$

где $\sigma_{ij}^u = u_{ij}$, $(i,\ j) \in L_-(i_0,\ j_0)$;

$$\sigma_{ij}^\Delta = \begin{cases} \infty, & \text{если}\ \Delta_{ij} > 0\ \text{либо}\ \Delta_{ij} = 0,\ x_{ij} = 0, \\ -\Delta_{ij}/\alpha_{ij} & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$
$$(i,\ j) \in L_-(i_0,\ j_0);$$

$$\sigma_{ij}^\Delta = \begin{cases} \infty, & \text{если}\ \Delta_{ij} < 0\ \text{либо}\ \Delta_{ij} = 0,\ x_{ij} = d_{ij}, \\ \Delta_{ij}/\alpha_{ij} & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$
$$(i,\ j) \in L_+(i_0,\ j_0).$$

Если $\sigma^0 = \sigma^u_{i_1 j_1}$, то новая опора $\{\bar{U}^1, \bar{U}^2, \bar{\gamma}\}$ состоит из следующих компонент: $\bar{U}^1 = (U^1 \cup (i_0, j_0)) \setminus (i_1, j_1)$, $\bar{U}^2 = U^2$, $\bar{\gamma} = \gamma$.

Пусть $\sigma^0 = \sigma^\Delta_{i_1 j_1}$. Опора $\{\bar{U}^1, \bar{U}^2, \bar{\gamma}\}$ состоит из компонент $\bar{U}^1 = U^1 \cup (i_0, j_0)$, $\bar{U}^2 = U^2 \cup (i_1, j_1)$, $\bar{\gamma} = \gamma$. Очевидно, что в обоих случаях ($\sigma^0 = \sigma^u_{i_1 j_1}$, $\sigma^0 = \sigma^\Delta_{i_1 j_1}$) новая и старая опоры относятся к одному типу.

Если $Q_{оп}$ — опора второго типа и $(i_*, j_*) = (i_0, j_0)$ или $Q_{оп}$ — опора третьего типа, то

$$\sigma^0 = \min\{\sigma^u_{ij},\ (i, j) \in U^1;\ \sigma^\Delta_{ij},\ (i, j) \in U \setminus U^2\}, \qquad (21)$$

где

$$\sigma^u_{ij} = \begin{cases} \infty, \text{ если } \Delta u_{ij} \geqslant 0, \\ -u_{ij}/\Delta u_{ij}, \text{ если } \Delta u_{ij} < 0,\ (i, j) \in U^1; \end{cases}$$

$$\sigma^\Delta_{ij} = \begin{cases} \infty, \text{ если } \Delta_{ij}\Delta\delta_{ij} > 0 \text{ либо } \Delta\delta_{ij} = 0, \\ \text{либо } \Delta_{ij} = 0,\ \Delta\delta_{ij} > 0,\ \bar{x}_{ij} = 0, \\ \text{либо } \Delta_{ij} = 0,\ \Delta\delta_{ij} < 0,\ \bar{x}_{ij} = d_{ij}, \\ -\Delta_{ij}/\Delta\delta_{ij} \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$(i, j) \in U \setminus U^2.$$

Если $\sigma^0 = \sigma^u_{i_1 j_1}$, $(i_1, j_1) \in U^1$, то новая опора $\{\bar{U}^1, \bar{U}^2, \bar{\gamma}\}$ имеет компоненты: $\bar{U}^1 = U^1 \setminus (i_1, j_1) \cup (i_0, j_0)$, $\bar{U}^2 = U^2$, $\bar{\gamma} = \gamma$. Если $\sigma^0 = \sigma^\Delta_{i_1 j_1}$, $(i_1, j_1) \in U \setminus U^2$, то $\bar{U}^1 = U^1 \cup (i_0, j_0)$, $\bar{U}^2 = U^2 \cup (i_1, j_1)$, $\bar{\gamma} = \gamma$. В обоих случаях тип опоры может измениться.

Рассмотрим подробнее случай, когда система (17), (18) имеет решение (20), т. е. когда опора типа $Q^{\text{IIIб)}}_{оп}$. Пусть $\operatorname{sign}(i_0, j_0) = -1$ (случай $\operatorname{sign}(i_0, j_0) = 1$ рассматривается аналогично). Шаг $\sigma^0$ равен

$$\sigma^0 = \min\{\sigma^u_{ij},\ (i, j) \in \Pi_-(i_0, j_0);\ \sigma^\Delta_{ij},\ (i, j) \in \Pi(i_0, j_0)\},$$

где

$$\sigma^u_{ij} = u_{ij}/(1 + u_{ij}),\ (i, j) \in \Pi_-(i_0, j_0);$$

$$\sigma^\Delta_{ij} = \begin{cases} \infty, \text{ если } \Delta_{ij}(\Delta_{ij} - \alpha_{ij}) < 0 \text{ либо } \Delta_{ij} = \alpha_{ij}, \\ \text{либо } \Delta_{ij} = 0,\ x_{ij} = 0; \\ \Delta_{ij}/(\Delta_{ij} - \alpha_{ij}) \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$(i,\ j)\in\Pi_-(i_0,\ j_0); \tag{22}$$

$$\sigma_{ij}^{\Delta}=\begin{cases}\infty, \text{ если } \Delta_{ij}(\Delta_{ij}+\alpha_{ij})<0 \text{ либо } \Delta_{ij}=-\alpha_{ij},\\ \text{либо } \Delta_{ij}=0,\ x_{ij}=d_{ij},\\ \Delta_{ij}/(\Delta_{ij}-\alpha_{ij}) \text{ в остальных случаях,}\end{cases}$$

$$(i,\ j)\in\Pi_+(i_0,\ j_0).$$

Если $\sigma^0=\sigma_{i_1j_1}^{u}$, то $\bar{U}^1=U^1\setminus(i_1,\ j_1)\cup(i_0,\ j_0)$, $\bar{U}^2=U^2$, $\bar{\gamma}=\gamma$. При $\sigma^0=\sigma_{i_1j_1}^{\Delta}$ опора $\{\bar{U}^1,\ \bar{U}^2,\ \bar{\gamma}\}$ имеет компоненты $\bar{U}^1=U^1\cup(i_0,\ j_0)$, $\bar{U}^2=U^2\cup(i_1,\ j_1)$, $\bar{\gamma}=\gamma$. Новая опора остается опорой типа $Q_{\text{оп}}^{\text{III б)}}$.

Рассмотрим случай, когда $\Theta=\Theta_{i_0j_0}^{(2)}$. Можно показать, что числа $\Delta u_{ij}$, $(i,\ j)\in U$; $\Delta u_*$, найденные из системы

$$\sum_{j\in I(U^1)}\Delta u_{ij}-\sum_{j\in I(U^1)}\Delta u_{ji}=0,\ i\in I, \tag{23}$$

$$\Delta u_*-\alpha_{ij}\Delta u_{ij}=0,\ (i,\ j)\in U^2\setminus(i_0,\ j_0);$$

$$\Delta u_*-\alpha_{i_0j_0}\Delta u_{i_0j_0}=k, \tag{24}$$

$$\Delta u_*=0, \text{ если } \gamma=0;\ \Delta u_{ij}=0,\ (i,\ j)\in U\setminus U^1,$$

где $k=-1$, если $\bar{x}_{i_0j_0}=d_{i_0j_0}$; $k=1$, если $\bar{x}_{i_0j_0}=0$, задают подходящее направление для двойственного базисного плана $\{u_{ij},\ (i,\ j)\in U,\ u_*\}$, сопровождающего опору $Q_{\text{оп}}$. Пусть $\bar{x}_{i_0j_0}=0$. Построим решение системы (23), (24) для различных типов опор $Q_{\text{оп}}=\{U_d^*,\ U_\alpha^*,\ (i_*,\ j_*)\}$.

Если $(i_*,\ j_*)\cap L(i_0,\ j_0)=\varnothing$, то числа

$$\Delta u_*=0;\ \Delta u_{ij}=0,\ (i,\ j)\in U\setminus L(i_0,\ j_0),$$

$$\Delta u_{ij}=-1/\alpha_{i_0j_0},\ (i,\ j)\in L_+(i_0,\ j_0);\ \Delta u_{ij}=1/\alpha_{i_0j_0}, \tag{25}$$

$$(i,\ j)\in L_-(i_0,\ j_0),$$

являются решением системы (23), (24).

Пусть $(i_*,\ j_*)\cap L(i_0,\ j_0)\neq\varnothing$. В этом случае решение системы (23), (24) построим следующим образом. Положим $\Delta u_*=1$, если $Q_{\text{оп}}$ — опора второго типа $((i_0,\ j_0)=(i_*,\ j_*))$; $\Delta u_*=-\operatorname{sign}(i_0,\ j_0)/\alpha_{i_0j_0}\rho$, если $Q_{\text{оп}}$ — опора третьего типа. Тогда из (24) имеем $\Delta u_{ij}=\Delta u_*/\alpha_{ij}$, $(i,\ j)\in U^2$, $\Delta u_{ij}=0$, $(i,\ j)\in U\setminus U^1$. Остальные числа $\Delta u_{ij}$, $(i,\ j)\in U^1\setminus U^2$, легко найдутся из условий баланса (23).

Замечание. Нетрудно проверить, что в случае опоры $Q_{\text{оп}}^{\text{IIIб})}$ решение системы (23), (24) можно представить в виде

$$\Delta u_* = u_{i_0 j_0} = -u_*/\alpha_{i_0 j_0} \operatorname{sign}(i_0, j_0);$$

$$\Delta u_{ij} = -u_{ij}/\alpha_{i_0 j_0} \operatorname{sign}(i_0, j_0), \ (i, j) \in U^1 \setminus \Pi(i_0, j_0);$$

$$\Delta u_{ij} = \begin{cases} -1/\alpha_{i_0 j_0} - u_{ij}/\alpha_{i_0 j_0} \operatorname{sign}(i_0, j_0), \ (i, j) \in \Pi_+(i_0, j_0), \\ 1/\alpha_{i_0 j_0} - u_{ij}/\alpha_{i_0 j_0} \operatorname{sign}(i_0, j_0), \ (i, j) \in \Pi_-(i_0, j_0); \end{cases} \tag{26}$$

$$\Delta u_{ij} = 0, \ (i, j) \in U \setminus U^1.$$

Очевидно, что $\sigma^0 = \sigma^u_{i_0 j_0} = 0$, если $Q_{\text{оп}}$ — опора первого типа или $Q_{\text{оп}}$ — опора второго типа и $(i_0, j_0) \neq (i_*, j_*)$. Новая опора имеет компоненты $\overline{U}^1 = U^1 \setminus (i_0, j_0)$, $\overline{U}^2 = U^2 \setminus (i_0, j_0)$, $\overline{\gamma} = \gamma$. Тип опоры сохраняется. В остальных случаях шаг $\sigma^0$ вычисляется по формуле (21). При $\sigma^0 = \sigma^u_{i_1 j_1}$, $(i_1, j_1) \in U^1$, новая опора имеет компоненты $\overline{U}^1 = U^1 \setminus (i_1, j_1)$, $\overline{U}^2 = U^2 \setminus (i_0, j_0)$, $\overline{\gamma} = \gamma$. Если $\sigma^0 = \sigma^\Delta_{i_1 j_1}$, $(i_1, j_1) \in U \setminus U^2$, то $\overline{U}^1 = U^1$, $\overline{U}^2 = (U^2 \setminus (i_0, j_0)) \cup (i_1, j_1)$, $\overline{\gamma} = \gamma$. Тип опоры может меняться.

Рассмотрим подробнее случай, когда система (23), (24) имеет решение (26), т. е. опору типа $Q_{\text{оп}}^{\text{IIIб})}$. Пусть $\operatorname{sign}(i_0, j_0) = 1$ (случай $\operatorname{sign}(i_0, j_0) = -1$ исследуется аналогично). Найдем $\sigma_*$, $\sigma^u_{ij}$, $(i, j) \in U^1$, $\sigma^\Delta_{ij}$, $(i, j) \in U \setminus U^2$:

$$\sigma_* = \alpha_{i_0 j_0}, \ \sigma^u_{ij} = \alpha_{i_0 j_0}, \ (i, j) \in U^1 \setminus \Pi(i_0, j_0);$$

$$\sigma^u_{ij} = \begin{cases} u_{ij}\alpha_{i_0 j_0}/(1 + u_{ij}), \ (i, j) \in \Pi_+(i_0, j_0), \\ \infty, \ (i, j) \in \Pi_-(i_0, j_0); \end{cases}$$

$$\sigma^\Delta_{ij} = \alpha_{i_0 j_0}, \ (i, j) \in U \setminus (U^2 \cup \Pi(i_0, j_0));$$

$$\sigma^\Delta_{ij} = \begin{cases} \infty, \text{ если } \Delta_{ij}(\Delta_{ij} - \alpha_{ij}) < 0, \text{ или } \Delta_{ij} = \alpha_{ij}, \\ \text{или } \Delta_{ij} = 0, \ x_{ij} = 0, \\ \alpha_{i_0 j_0}\Delta_{ij}/(\Delta_{ij} - \alpha_{ij}) \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$(i, j) \in \Pi_+(i_0, j_0) \setminus (i_0, j_0);$$

$$\sigma^\Delta_{ij} = \begin{cases} \infty, \text{ если } \Delta_{ij}(\Delta_{ij} - \alpha_{ij}) < 0, \text{ или } \Delta_{ij} = -\alpha_{ij}, \\ \text{или } \Delta_{ij} = 0, \ x_{ij} = d_{ij}, \\ \alpha_{i_0 j_0}\Delta_{ij}/(\Delta_{ij} + \alpha_{ij}) \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$(i, j) \in \Pi_-(i_0, j_0).$$

Следовательно, допустимый шаг $\sigma^0$ равен

$$\sigma^0 = \min\{\sigma_{ij}^u,\ (i,\ j) \in \Pi_+(i_0,\ j_0);\ \sigma_{ij}^\Delta,\ (i, j) \in \\ \in \Pi(i_0, j_0) \setminus (i_0,\ j_0)\}.$$

При $\sigma^0 = \sigma_{i_1 j_1}^u$ новая опора состоит из $\bar{U}^1 = U^1 \setminus (i_1, j_1)$, $\bar{U}^2 = U^2 \setminus (i_0, j_0)$, $\bar{\gamma} = \gamma$. При $\sigma^0 = \sigma_{i_1 j_1}^\Delta$ новая опора $\bar{Q}_{\text{оп}} = \{\bar{U}^1,\ \bar{U}^2,\ \bar{\gamma}\}$ имеет следующие компоненты: $\bar{U}^1 = U^1$, $\bar{U}^2 = U^2 \setminus (i_0,\ j_0) \cup (i_1,\ j_1)$, $\bar{\gamma} = \gamma$. В обоих случаях тип опоры сохраняется.

Случай $\Theta = \Theta_{i_0 j_0}^{(2)}$, $\bar{x}_{i_0 j_0} = d_{i_0 j_0}$, аналогичен рассмотренному выше случаю $\Theta = \Theta_{i_0 j_0}^{(2)}$, $\bar{x}_{i_0 j_0} = 0$. Остался нерассмотренным случай $\Theta = \Theta_* < 1$. Он возможен только тогда, когда $Q_{\text{оп}}$ — опора первого типа. Можно показать, что совокупность чисел $\Delta u_{ij}$, $(i, j) \in U$, $\Delta u_*$, найденных из системы

$$\sum_{j \in I(U^1)} \Delta u_{ij} - \sum_{j \in I(U^1)} \Delta u_{ji} = 0,\ i \in I; \tag{27}$$

$$\Delta u_* - \alpha_{ij} \Delta u_{ij} = 0,\ (i,\ j) \in U^2;\ \Delta u_* = 1;$$

$$\Delta u_{ij} = 0,\ (i,\ j) \in U \setminus U^1,$$

является подходящим направлением для двойственного базисного плана $\{u_{ij},\ (i,\ j) \in U;\ u_*\}$, сопровождающего опору $Q_{\text{оп}}$.

Решение последней системы строим следующим образом. Полагаем $\Delta u_{ij} = 1/\alpha_{ij}$, $(i,\ j) \in U^2$. Остальные числа $\Delta u_{ij}$, $(i,\ j) \in U_d = U^1 \setminus U^2$, в силу того что множество $U_d$ является деревом, легко найдутся из условий баланса (27).

Допустимый двойственный шаг $\sigma^0$ равен

$$\sigma^0 = \min\{\sigma_{ij}^u,\ (i, j) \in U_d;\ \sigma_{ij}^\Delta,\ (i, j) \in U_d;\ \sigma_{ij}^\Delta,\ (i, j) \in U \setminus U^1\},$$

где

$$\sigma_{ij}^u = \begin{cases} \infty, \text{ если } \Delta u_{ij} \geqslant 0, \\ -u_{ij}/\Delta u_{ij}, \text{ если } \Delta u_{ij} < 0, \end{cases} \quad (i,\ j) \in U_d;$$

$$\sigma_{ij}^\Delta = \begin{cases} \infty, \text{ если } \Delta_{ij}\Delta\delta_{ij} > 0, \text{ или } \Delta\delta_{ij} = 0, \\ \text{или } \Delta_{ij} = 0,\ \Delta\delta_{ij} > 0,\ x_{ij} = 0, \\ \text{или } \Delta_{ij} = 0,\ \Delta\delta_{ij} < 0,\ x_{ij} = d_{ij}, \\ -\Delta_{ij}/\Delta\delta_{ij} \text{ в остальных случаях}, \end{cases} \quad (i,\ j) \in U_d;$$

$$\sigma_{ij}^\Delta = \begin{cases} \infty, \text{ если } x_{ij} = 0, \\ 0, \text{ если } x_{ij} \neq 0, \end{cases} \quad (i,\ j) \in U \setminus U^1.$$

Если $\sigma^0 = \sigma^u_{i_1 j_1}$, то $\bar{U}^1 = U^1 \setminus (i_1, j_1)$; $\bar{U}^2 = U^2$, $\bar{\gamma} = 1$. Новая опора будет опорой третьего типа. При $\sigma^0 = \sigma^\Delta_{i_1 j_1}$ новая опора имеет компоненты $\bar{U}^1 = U^1$, $\bar{U}^2 = U^2 \cup (i_1, j_1)$, $\bar{\gamma} = 1$. Если $(i_1, j_1) \in U_d$, то новая опора относится к третьему типу. При $(i_1, j_1) \in U \setminus U^1$ получается опора второго типа.

Новую итерацию начинаем с опорного плана $\{\bar{x}, \bar{Q}_{\text{оп}}\}$.

Из описания алгоритма следует, что опорный план $\{\bar{x}, \bar{Q}_{\text{оп}}\}$ будет согласованным, если был согласованным план $\{x, Q_{\text{оп}}\}$.

**3. Специальный метод.** Опишем частный случай рассмотренного выше метода, когда решение задачи (2) начинается со *специального опорного плана.*

Дугам сети $S = \{I, U\}$ припишем длины $t_{ij}$, $(i, j) \in U$, и построим дерево максимальных путей из $s$ в $j \in I$. Пусть $l_j$ — длина максимального пути из $s$ в $j \in I$. Очевидно, что $x = \{x_j = l_j,\ j \in I;\ x_{ij} = 0,\ (i, j) \in U\}$ будет планом задачи (2). В сети $S$ выделим множество критических дуг $\bar{U} = \{(i, j) : x_j - x_i = t_{ij} - \alpha_{ij} x_{ij}\}$ для плана $x$.

Пусть $\{\bar{u}^0_{ij},\ (i, j) \in \bar{U},\ \bar{u}^0_{ts} > 0\}$ — оптимальный базисный план задачи (7), $\bar{U}_{\text{Б}}$ — множество базисных дуг этого плана. Плану $x$ задачи (2) припишем опору $Q^{\text{III}б)}_{\text{оп}} = \{U_*, U_\alpha\}$, где $U_* = \bar{U}_{\text{Б}} \setminus (t, s)$, $U_\alpha = \{(i, j) : (i, j) \in \bar{U} \setminus U_*,\ \bar{u}^0_i = 1/\alpha_{ij}\}$.

Покажем, что для опорного плана $\{x, Q^{\text{III}б)}_{\text{оп}}\}$ выполняются все условия критерия оптимальности из п. 2, кроме условия (11).

Действительно, потенциалы, подсчитанные по опоре $Q^{\text{III}б)}_{\text{оп}}$, имеют вид $u_* = 1/\bar{u}^0_{ts}$, $u_{ij} = u_* \bar{u}^0_{ij}$, $(i, j) \in U_* \cup U_\alpha$; $u_{ij} = 0$, $(i, j) \in U_{\text{н}}$. Ясно, что $u_{ij} \geqslant 0$, $(i, j) \in U^1 = U_* \cup U_\alpha$; $u_{ij} = 0$, $(i, j) \in U_{\text{н}}$. Следовательно, первая группа условий (12) критерия оптимальности выполняется.

Подсчитаем оценки $\Delta_{ij}$ для $(i, j) \in U_* \cup U_{\text{н}}$:

$$\Delta_{ij} = u_* - \alpha_{ij} u_{ij} = u_* (1 - \alpha_{ij} \bar{u}^0_{ij}) \geqslant 0,\ (i, j) \in U_*,$$

$$\Delta_{ij} = u_* > 0,\ (i, j) \in U_{\text{н}}.$$

Поскольку, по построению, $x_{ij} = 0$, $(i, j) \in U$, то выполняется и вторая группа условий (12). Для опорного плана $\{x, Q^{\text{III}б)}_{\text{оп}}\}$ условие (11) не выполняется, так как $u_* > 0$,

$$\sum_{(i, j) \in U} x_{ij} = 0 < \alpha_*.$$

Из свойств адаптивного метода (с простейшими правилами выбора двойственного шага [ч. 2]) следует, что если на какой-то итерации критерий оптимальности выполняется для строки $i$ (столбца $j$), то и на всех последующих итерациях для этой строки (столбца) критерий оптимальности будет выполняться. Следовательно, если решать задачу (2) адаптивным методом, начиная с построенного плана $\{x, Q_{\text{оп}}^{\text{III}б)}\}$, то на каждой итерации получим опорные планы $\{\overline{x}, \overline{Q}_{\text{оп}}^{\text{III}б)}\}$, для которых выполняются все условия оптимальности, кроме (11).

Пусть в сети $\{I, \overline{U}\}$ произведено разбиение множества узлов $I$ на подмножества $I_s$, $I_t$; $I_s \cup I_t = I$, $I_s \cap I_t = \varnothing$, $s \in I_s$, $t \in I_t$. Обозначим: $\overline{R}_+ = \{(i, j) \in \overline{U}, i \in I_s, j \in I_t\}$, $\overline{R}_- = \{(i, j) \in \overline{U}, i \in I_t, j \in I_s\}$. Множество дуг $\overline{R} = \overline{R}_+ \cup \overline{R}_-$ назовем *сечением сети* $\{I, \overline{U}\}$. Величина $\overline{\rho} = \sum\limits_{(i, j) \in \overline{R}_+} 1/\alpha_{ij} - \sum\limits_{(i, j) \in \overline{R}_-} 1/\alpha_{ij}$ называется *значением сечения* $\overline{R}$. Сечение $\overline{R}$ назовем *допустимым*, если $x_{ij} < d_{ij}$, $(i, j) \in \overline{R}_+$, $x_{ij} > 0$, $(i, j) \in \overline{R}_-$.

Опишем общую итерацию. Пусть $\{x, Q_{\text{оп}}^{\text{III}б)}\}$ — невырожденный опорный план задачи (2), для которого выполняются условия (12), и опорные дуги $(i, j) \in U_* \cup U_\alpha$, критические на плане $x$ (т. е. $x_i - x_j = t_{ij} - \alpha_{ij} x_{ij}$). Здесь $Q_{\text{оп}}^{\text{III}б)} = \{U_*, U_\alpha\}$ — опора третьего типа. Множество $U_*$ разбивает узлы $I$ на два непересекающихся подмножества $I(s)$, $s \in I(s)$, и $I(t)$, $t \in I(t)$ (см. п. 2). В п. 2 показано, что потенциалы, подсчитанные по опоре $Q_{\text{оп}}^{\text{III}б)}$, имеют вид $u_* = 1/\rho$, $u_{ij} = u_*/\alpha_{ij}$, $(i, j) \in U_\alpha$, $u_{ij} = 0$, $(i, j) \in U_{\text{н}}$; потенциалы $u_{ij}$, $(i, j) \in U_*$, однозначно найдутся из условий баланса (3). Здесь $\rho = \sum\limits_{(i, j) \in R_+} 1/\alpha_{ij} - \sum\limits_{(i, j) \in R_-} 1/\alpha_{ij}$ — значение сечения $R = R_+ \cup R_-$, $R_+ = \{(i, j) \in U_\alpha, i \in I(s), j \in I(t)\}$, $R_- = \{(i, j) \in U_\alpha, i \in I(t), j \in I(s)\}$, однозначно строящегося по опоре $\{U_*, U_\alpha\}$.

По предположению, $u_{ij} \geqslant 0$, $(i, j) \in U_* \cup U_\alpha$, $u_* \geqslant 0$. Покажем, что в этом случае сечение $R$ имеет минимальное значение среди допустимых сечений сети $\{I, U_* \cup U_\alpha\}$.

Действительно, поскольку потенциалы $u_{ij}$, $(i, j) \in U_* \cup U_\alpha$, $u_*$ удовлетворяют системам (3), (4), то для любого сечения $\bar{R}$ справедливо равенство

$$\sum_{(i,\ j) \in \bar{R}_+} u_{ij} - \sum_{(i,\ j) \in \bar{R}_-} u_{ij} = 1. \qquad (28)$$

В силу того что для опорного плана $\{x, Q_{\text{оп}}^{\text{IIIб)}}\}$ выполняются условия (12), на допустимом сечении должны выполняться соотношения

$$u_{ij} \leqslant u_*/\alpha_{ij},\ (i,\ j) \in \bar{R}_+;\ u_{ij} \geqslant u_*/\alpha_{ij},\ (i,\ j) \in \bar{R}_-. \qquad (29)$$

Из (28), (29) и неравенств $u_{ij} \geqslant 0$, $(i, j) \in U_* \cup U_\alpha$, $u_* \geqslant 0$ имеем

$$\left( \sum_{(i,\ j) \in \bar{R}_+} 1/\alpha_{ij} - \sum_{(i,\ j) \in \bar{R}_-} 1/\alpha_{ij} \right) u_* \geqslant 1.$$

По построению, $1/u_* = \rho = \sum_{(i,\ j) \in R_+} 1/\alpha_{ij} - \sum_{(i,\ j) \in R_-} 1/\alpha_{ij}$.

Следовательно, $\bar{\rho} \geqslant \rho$ для любого допустимого сечения $\bar{R}$.

Очевидно, что, в силу сделанных предположений, опорный план $\{x, Q_{\text{оп}}^{\text{IIIб)}}\}$ будет оптимальным, если выполняется условие (11). Оценка субоптимальности опорного плана $\{x, Q_{\text{оп}}^{\text{IIIб)}}\}$ равна

$$\beta = u_* \left( \alpha_* - \sum_{(i,\ j) \in U} x_{ij} \right).$$

Если $\beta \leqslant \varepsilon$, решение задачи (2) прекращается на $\varepsilon$-оптимальном опорном плане $\{x, Q_{\text{оп}}^{\text{IIIб)}}\}$.

Пусть критерии оптимальности и субоптимальности не выполняются. Легко проверить, что компоненты подходящего направления $\Delta x = \{\Delta x_i,\ i \in I;\ \Delta x_{ij},\ (i,\ j) \in U\}$, найденные по правилам адаптивного метода из системы

$$\Delta x_{ij} = \begin{cases} d_{ij} - x_{ij}, & \text{если } \Delta_{ij} < 0, \\ -x_{ij}, & \text{если } \Delta_{ij} > 0, \quad (i,\ j) \in U \setminus U_\alpha; \\ 0, & \text{если } \Delta_{ij} = 0, \end{cases}$$

$$\Delta x_i - \Delta x_j = \alpha_{ij} \Delta x_{ij},\ (i,\ j) \in U_* \cup U_\alpha,\ \Delta x_s = 0;$$

$$\sum_{(i,\ j) \in U} \Delta x_{ij} = \alpha_* - \sum_{(i,\ j) \in U} x_{ij},$$

равны:

$$\Delta x_i = 0,\ i \in I(s),\ \Delta x_i = u_* \left( \sum_{(i,\ j) \in U} x_{ij} - \alpha_* \right) = \\ = -\beta,\ i \in I(t), \quad (30)$$

$$\Delta x_{ij} = 0,\ (i,\ j) \in U \setminus R;$$

$$\Delta x_{ij} = \frac{\Delta x_i - \Delta x_j}{\alpha_{ij}} = \begin{cases} \beta/\alpha_{ij}, & \text{если } (i,\ j) \in R_+, \\ -\beta/\alpha_{ij}, & \text{если } (i,\ j) \in R_-. \end{cases}$$

Замечание. В силу того что $R$ — минимальное среди допустимых сечений сети $\{I,\ U_* \cup U_\alpha\}$, то нетрудно проверить, что направление $\Delta x$ задает такое распределение ресурсов в сети $\{I,\ U_* \cup U_\alpha\}$, при котором затраты ресурса на единицу уменьшения времени выполнения сетевого графика минимальны.

Из (30) следует, что при движении вдоль построенного направления $\Delta x$ могут нарушаться неопорные ограничения $x_i - x_j - \alpha_{ij} x_{ij} \leqslant -t_{ij}$, $(i,\ j) \in U_н$, $i \in I(s)$, $j \in I(t)$, т. е. дуги $(i,\ j) \in U_н$, $i \in I(s)$, $j \in I(t)$, могут стать критическими; опорные прямые ограничения на переменные $x_{ij}$, $(i,\ j) \in R$, т. е. переменные $x_{ij}$, $(i,\ j) \in R_+$, могут достичь верхней границы $d_{ij}$, переменные $x_{ij}$, $(i,\ j) \in R_-$, — нижней границы 0.

Следовательно, максимально допустимый шаг $\theta$ вдоль $\Delta x$ равен

$$\Theta = \min \{1,\ \Theta^н_{i_0 j_0},\ \Theta^\alpha_{i_0 j_0}\},$$

где

$$\Theta^н_{i_0 j_0} = \min \Theta^н_{ij},\ (i,\ j) \in U_н,\ i \in I(s),\ j \in I(t);$$

$$\Theta^н_{ij} = (x_j - x_i - t_{ij} + \alpha_{ij} x_{ij}) / (\Delta x_i - \Delta x_j) = \\ = (x_j - x_i - t_{ij} + \alpha_{ij} x_{ij}) / \beta;$$

$$\Theta^\alpha_{i_0 j_0} = \min \Theta^\alpha_{ij},\ (i,\ j) \in R;$$

$$\Theta^\alpha_{ij} = \begin{cases} -x_{ij}/\Delta x_{ij} = x_{ij}\alpha_{ij}/\beta, & (i,\ j) \in R_-, \\ (d_{ij} - x_{ij}) / \Delta x_{ij} = (d_{ij} - x_{ij})\alpha_{ij} / \beta, & (i,\ j) \in R_+. \end{cases}$$

Замечание. Очевидно, что $\Theta^\alpha_{i_0 j_0}$ будет больше нуля в том и только в том случае, если сечение $R$ допустимое.

Новый план строим в виде $\bar{x} = x + \theta \Delta x$. Оценка субоптимальности плана $\bar{x}$ равна $\beta(1-\theta)$. Если $\beta(1-\theta) \leqslant \varepsilon$, то решение задачи (2) прекращается на $\varepsilon$-оптимальном плане $\bar{x}$. Ясно, что при $\theta = 1$ план $\bar{x}$ будет оптимальным.

Предположим, что $(1-\theta)\beta > \varepsilon$. Рассмотрим подробнее правила замены опоры $Q_{\text{оп}}^{\text{IIIб)}}$, описанные в предыдущем пункте.

Пусть $\Theta = \Theta_{i_0 j_0}^{\text{н}} < 1$, $(i_0, j_0) \in U_{\text{н}}$, $i_0 \in I(s)$, $j_0 \in I(t)$. Согласно п. 2, числа (20) (составляющие решение системы (17), (18)) задают подходящее направление для двойственного плана $\{u_{ij}, (i, j) \in U, u_*\}$, сопровождающего опору $Q_{\text{оп}}^{\text{IIIб)}}$. В нашем случае $\operatorname{sign}(i_0, j_0)$ всегда равен $-1$. Следовательно,

$$\sigma_0 = \min\{\sigma_{ij}^u;\ (i, j) \in \Pi_-(i_0, j_0);\ \ \sigma_{ij}^\Delta,\ (i, j) \in \Pi\ \ (i_0, j_0)\},$$

где $\sigma_{ij}^u$, $\sigma_{ij}^\Delta$, $\sigma_{i_0 j_0}^\Delta$ найдены по формулам (22). Если $\sigma_0 = \sigma_{i_1 j_1}^u$, то новая опора $\overline{Q}_{\text{оп}}^{\text{IIIб)}} = \{\overline{U}_*, \overline{U}_\alpha\}$ имеет компоненты $\overline{U}_* = U_* \cup (i_0, j_0) \setminus (i_1, j_1)$, $\overline{U}_\alpha = U_\alpha$.

Покажем, что на дуге $(i_1, j_1)$, удаленной из опорного множества $U_* \cup U_\alpha$, нет ресурса, т. е. $\bar{x}_{i_1 j_1} = x_{i_1 j_1} = 0$. Действительно, пусть $(i, j) \in \Pi_-(i_0, j_0)$, $\Delta_{ij} = u_* - \alpha_{ij} u_{ij} < 0$. Тогда

$$\sigma_{ij}^u - \sigma_{ij}^\Delta = \frac{u_{ij}}{1 + u_{ij}} - \frac{\Delta_{ij}}{\Delta_{ij} - \alpha_{ij}} =$$

$$= \frac{\Delta_{ij} u_{ij} - \alpha_{ij} u_{ij} - \Delta_{ij} - \Delta_{ij} u_{ij}}{(1 + u_{ij})(\Delta_{ij} - \alpha_{ij})} = -\frac{u_*}{(1 + u_{ij})(\Delta_{ij} - \alpha_{ij})} > 0.$$

Следовательно, при $\Delta_{ij} < 0$, $(i, j) \in \Pi_-(i_0, j_0)$, справедливо неравенство $\sigma_{ij}^u > \sigma_{ij}^\Delta$.

Пусть $\Delta_{ij} = 0$, $x_{ij} \neq 0$, $(i, j) \in \Pi_-(i_0, j_0)$. Тогда $\sigma_{ij}^u \geqslant \sigma_{ij}^\Delta = 0$. Значит, при $(i, j) \in \Pi_-(i_0, j_0)$, $x_{ij} \neq 0$ (по предположению, из условия $\Delta_{ij} < 0$, $(i, j) \in U_*$, следует, что $x_{ij} = d_{ij}$) шаг $\sigma_{ij}^\Delta$ меньше шага $\sigma_{ij}^u$. Следовательно, если $\sigma_0 = \sigma_{i_1 j_1}^u$, то $\overline{x}_{i_1 j_1} = x_{i_1 j_1} = 0$. Таким образом, на каждой итерации $x_{ij} = 0$ для всех дуг $(i, j) \in U_{\text{н}}$. Поскольку $\Delta_{ij} = u_* > 0$ для $(i, j) \in U_{\text{н}}$, то для дуг $(i, j) \in U_{\text{н}}$ выполняется критерий оптимальности.

Если $\sigma_0 = \sigma_{i_1 j_1}^\Delta$, $(i_1, j_1) \in \Pi(i_0, j_0)$, компоненты новой опоры $\overline{Q}_{\text{оп}}^{\text{IIIб)}}$ строятся следующим образом: $\overline{U}_* = U^* \cup (i_0, j_0) \setminus (i_1, j_1)$, $\overline{U}_\alpha = U_\alpha \cup (i_1, j_1)$. На следующей итерации дуга $(i_1, j_1)$ войдет в сечение $\overline{R}$, построенное по новой опоре $\overline{Q}_{\text{оп}}^{\text{IIIб)}}$. Нетрудно показать, что $x_{i_1 j_1} < d_{i_1 j_1}$, если $(i_1,$

$j_1) \in \overline{R}_+$, и $x_{i_1j_1} > 0$, если $(i_1, j_1) \in \overline{R}_-$. Значит, новое сечение $\overline{R}$ будет допустимым, если старый опорный план $\{x, Q_{\text{оп}}^{\text{III6})}\}$ был невырожденным.

Пусть $\Theta = \Theta_{i_0j_0}^{\alpha} < 1$. Рассмотрим случай, когда $\overline{x}_{i_0j_0} = d_{i_0j_0}$. Следовательно, $(i_0, j_0) \in R_+$. Легко проверить, что числа

$$\Delta u_* = -u_*/\alpha_{i_0j_0};\ \Delta u_{ij} = -u_{ij}/\alpha_{i_0j_0},\ (i,\ j) \in U_\alpha \cup (U_* \setminus \Pi(i_0,\ j_0));$$

$$\Delta u_{ij} = \begin{cases} 1/\alpha_{i_0j_0} - u_{ij}/\alpha_{i_0j_0}, & (i,\ j) \in \Pi_+(i_0,\ j_0), \\ -1/\alpha_{i_0j_0} - u_{ij}/\alpha_{i_0j_0}, & (i,\ j) \in \Pi_-(i_0,\ j_0); \end{cases}$$

$$\Delta u_{ij} = 0,\ (i,\ j) \in U_{\text{н}},$$

составляют решение системы (23), (24).

Допустимый двойственный шаг $\sigma_0$ равен

$$\sigma_0 = \min\{\sigma_{ij}^u,\ (i,\ j) \in \Pi_-(i_0,\ j_0);\ \sigma_{ij}^\Delta,\ (i,\ j) \in \Pi(i_0,\ j_0) \setminus (i_0,\ j_0)\},$$

где

$$\sigma_{ij}^u = \alpha_{i_0j_0} u_{ij} / (1 + u_{ij}),\ (i,\ j) \in \Pi_-(i_0,\ j_0);$$

$$\sigma_{ij}^\Delta = \begin{cases} \infty, \text{ если } \Delta_{ij}(\Delta_{ij} + \alpha_{ij}) \leqslant 0, \text{ либо } \Delta_{ij} = \alpha_{ij}, \text{ либо} \\ \Delta_{ij} = 0,\ x_{ij} = d_{ij}, \\ \alpha_{i_0j_0}\Delta_{ij} / (\Delta_{ij} + \alpha_{ij}) \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$(i,\ j) \in \Pi_+(i_0,\ j_0) \setminus (i_0,\ j_0);$$

$$\sigma_{ij}^\Delta = \begin{cases} \infty, \text{ если } \Delta_{ij}(\Delta_{ij} - \alpha_{ij}) \leqslant 0, \text{ либо } \Delta_{ij} = \alpha_{ij}, \text{ либо} \\ \Delta_{ij} = 0,\ x_{ij} = 0, \\ \alpha_{i_0j_0}\Delta_{ij} / (\Delta_{ij} - \alpha_{ij}) \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$(i,\ j) \in \Pi_-(i_0,\ j_0).$$

Пусть $\sigma_0 = \sigma_{i_1j_1}^u$. Дугу $(i_0, j_0)$ вводим в множество $U_*$ вместо дуги $(i_1, j_1)$. Из $U_\alpha$ выводим дугу $(i_0, j_0)$. Компоненты новой опоры имеют вид $\overline{U}_* = U_* \cup (i_0, j_0) \setminus (i_1, j_1)$, $\overline{U}_\alpha = U_\alpha \setminus (i_0, j_0)$. Как и в предыдущем случае, можно показать, что $\overline{x}_{i_1j_1} = 0$, т. е. на выводимой дуге нет ресурса.

При $\sigma_0 = \sigma_{i_1j_1}^\Delta$, $(i_1, j_1) \in \Pi(i_0, j_0) \setminus (i_0, j_0)$, компоненты новой опоры $\overline{Q}_{\text{оп}}^{\text{III6})}$ строятся следующим образом: $\overline{U}_* = U_* \setminus (i_1, j_1) \cup (i_0, j_0)$, $\overline{U}_\alpha = U_\alpha \setminus (i_0, j_0) \cup (i_1, j_1)$. Дуга $(i_1, j_1)$ войдет в сечение $\overline{R}$, построенное по новой опоре

$\overline{Q}_{\text{оп}}^{\text{IIIб)}}$. Нетрудно проверить, что $\overline{x}_{i_1 j_1} > 0$, если $(i_1, j_1) \in \overline{\overline{R}}_-$; $\overline{x}_{i_1 j_1} < d_{i_1 j_1}$, если $(i, j) \in \overline{R}_+$.

Таким образом, новое сечение $\bar{R}$ будет допустимым, если опорный план $\{x, Q_{\text{оп}}^{\text{IIIб)}}\}$ был невырожденным.

Оценка субоптимальности $\overline{\beta}$ нового опорного плана $\{\overline{x}, \overline{Q}_{\text{оп}}^{\text{IIIб)}}\}$ равна $\overline{\beta} = (1 - \Theta)\beta - \sigma_0 \gamma$, где

$$\gamma = \begin{cases} |x_{i_0 j_0} + \Delta x_{i_0 j_0}| \text{ при } \Theta = \Theta_{i_0 j_0}^{\alpha}, \quad \overline{x}_{i_0 j_0} = 0; \\ |d_{i_0 j_0} - (x_{i_0 j_0} + \Delta x_{i_0 j_0})| \text{ при } \Theta = \Theta_{i_0 j_0}^{\alpha}, \quad \overline{x}_{i_0 j_0} = d_{i_0 j_0}; \\ |t_{i_0 j_0} + (x_{i_0} + \Delta x_{i_0}) - (x_{j_0} + \Delta x_{j_0}) - \alpha_{i_0 j_0}(x_{i_0 j_0} + \Delta x_{i_0 j_0})| \\ \text{при } \Theta = \Theta_{i_0 j_0}^{\Delta}. \end{cases}$$

Если $\overline{\beta} \leqslant \varepsilon$, процесс решения останавливается на $\varepsilon$-оптимальном плане $\bar{x}$. В противном случае переходим к следующей итерации.

# Глава IV

## ОБОБЩЕННЫЕ ЗАДАЧИ

Под обобщенной задачей линейного программирования понимается каждая экстремальная задача с линейной целевой функцией $c'x$ и линейными ограничениями $Ax = b$, $0 \leqslant x \leqslant d$, в которой в отличие от традиционной задачи линейного программирования параметры $A$, $b$, $c$, $d$ уже не фиксированы, а могут принимать любое значение из заданных множеств. Для наглядности интерпретаций будем считать, что выбором конкретных значений параметров распоряжаются участники трех типов. Участник первого типа является союзником исследователя, распоряжающегося выбором вектора $x$, и стремится, как и исследователь, максимизировать значение целевой функции. Участнику второго типа или безразличны цели исследователя, или свои действия он предпринимает по законам, не зависящим от действий исследователя. К третьему типу отнесем противника исследователя, который выбором параметров стремится уменьшить значение целевой функции.

Учет отмеченной распределенности параметров модели существенно усложняет задачи линейного программирования, внося принципиальные изменения в такие коренные понятия, как план, оптимальный план. Новые модели охватывают более широкий круг прикладных задач, по сравнению с тем, который был доступен линейному программированию. Теория и методы решения этих задач интенсивно развивались в последние годы и привели к созданию билинейного и стохастического программирований, к появлению таких разделов нелинейного программирования, как задачи векторной оптимизации, минимаксные задачи и т. д. В данной главе описываются некоторые методы решения задач указанных выше классов.

## § 1. Билинейные задачи

Билинейными называются специальные задачи нелинейного программирования с такими двумя группами переменных, что при фиксации значений каждой группы получается однотипная задача линейного программирования относительно другой группы переменных. Другими словами, в билинейных задачах обеими группами переменных распоряжаются союзники и каждый из них при самостоятельных действиях имеет дело с задачей линейного программирования. В данном параграфе излагаются методы решения трех типичных билинейных задач.

**1. Общая схема решения многоэкстремальных задач.** *Билинейные задачи,* которые рассматриваются в пп. 2, 5, являются *многоэкстремальными задачами,* т. е. такими задачами

$$f(x) \to \max, \quad x \in X, \tag{1}$$

в которых целевая функция $f(x)$ на множестве планов $X$ может иметь несколько (различных) локальных максимумов.

Общая схема, принятая для построения решения задачи (1), состоит в следующем. Через $x^\varepsilon$ будем обозначать $\varepsilon$-оптимальный план ($f(x^\varepsilon) \geqslant f(x) - \varepsilon$ для всех $x \in X$), через $x^{\text{л}\varepsilon}$ — локальный $\varepsilon$-оптимальный план. (План $x^{\text{л}\varepsilon}$ назовем локальным $\varepsilon$-оптимальным планом, если для всех $x^* \in X$, для которых существует такая функция $g_{x_*}(t)$, что $x^{\text{л}\varepsilon} = g_{x_*}(0)$, $x^* = g_{x_*}(1)$, $g_{x_*}(t) \in X$ при $t \in [0, 1]$, и функция $f(g_{x_*}(t))$ монотонно возрастает на отрезке $[0, 1]$, выполняется неравенство $f(x^*) \leqslant f(x^{\text{л}\varepsilon}) + \varepsilon$.)

Пусть известен конечный алгоритм, который для заданного $\varepsilon \geqslant 0$ и любого $x \in X$ строит локальный $\varepsilon$-оптимальный план $x^{\text{л}\varepsilon}(x)$. Процесс решения задачи (1) начинается с некоторого плана $x^1$. Пусть $x^s$ — план, полученный к $s$-й итерации. Для него строится план $x^{\text{л}\varepsilon}(x^s)$.

Если $f(x^{\text{лε}}(x^s)) \geqslant f(x) - \varepsilon$ для всех $x \in X$, то $x^{\text{лε}}(x^s)$ — $\varepsilon$-оптимальный план задачи (1) и процесс решения прекращается. В противном случае найдется такой план $x^{s+1} \in X$, что $f(x^{s+1}) > f(x^{\text{лε}}(x^s)) + \varepsilon$. Построением вектора $x^{s+1}$ итерация завершается. Поскольку количество локальных минимумов в задаче (1) конечно и ни один из них в процессе итераций не может встретиться более

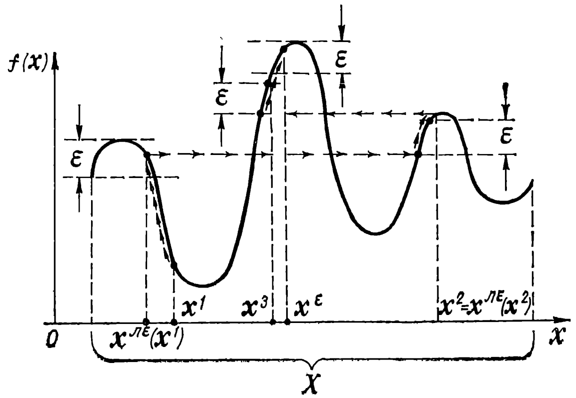


Рис. 2

одного раза, то по описанной схеме через конечное число итераций будет построен $\varepsilon$-оптимальный план задачи (1). Геометрическая иллюстрация общей схемы решения многоэкстремальных задач приведена на рис. 2. Наиболее трудным этапом реализации схемы является переход от плана $x^{\text{лε}}(x^s)$ к плану $x^{s+1}$ (см. пп. 2, 4).

**2. Билинейная целевая функция.** Рассмотрим задачу

$$c'x + y'Cx + d'y \to \max_{x,\, y}, \; Ax = b, \; By = a, \; d_* \leqslant x \leqslant d^*, \; g_* \leqslant y \leqslant g^*, \tag{2}$$

где $c$, $x$, $d_*$, $d^*$ — $n$-векторы.

От классических задач линейного программирования задача (2) отличается присутствием в целевой функции билинейного слагаемого $y'Cx$, из-за которого задача (2) становится в общем случае многоэкстремальной. Действительно, задача (2) эквивалентна двум задачам

$$\begin{aligned} &f(y) = \max_x (c'x + y'Cx + d'y), \; Ax = b, \; d_* \leqslant x \leqslant d^*; \\ &f(y) \to \max_y, \; By = a, \; g_* \leqslant y \leqslant g^*. \end{aligned} \tag{3}$$

Первая из этих задач является задачей линейного программирования, во второй находится максимум выпуклой функции на выпуклом множестве. Нетрудно убедиться ($y+y^2\to\max$, $|y|\leqslant 1$), что во второй задаче могут появиться локальные максимумы, которые в общем случае ведут к многоэкстремальности пары задач (3), а значит, и задачи (2).

**3. Алгоритм решения.** Приведем реализацию общей схемы решения многоэкстремальных задач для задачи билинейного программирования (2). Для частного случая ($\varepsilon=0$) она имеется в работе [17], где при построении локально-оптимальных планов используется симплекс-метод. Замена симплекс-метода опорным или другими методами данной книги позволяет эффективно строить $\varepsilon$-оптимальные планы задачи (2).

Пусть задана точность $\varepsilon$ приближения к оптимальному значению целевой функции и известен начальный план $\{x^1, y^1\}$ задачи (2). Приписав компонентам $x$ и $y$ начального плана опоры $A_{\text{оп}}$, $B_{\text{оп}}$ и чередуя группы итераций опорного метода в пространствах $x$ и $y$, построим план $\{x^{\varepsilon_1}, y^{\varepsilon_1}\}=\{x^{\varepsilon_1}(x^1, y^1), y^{\varepsilon_1}(x^1, y^1)\}$ такой, что вектор $x^{\varepsilon_1}$ является $\varepsilon_1$-оптимальным планом задачи (2) при $y=y^{\varepsilon_1}$ и вектор $y^{\varepsilon_1}$ является $\varepsilon_1$-оптимальным планом задачи (2) при $x=x^{\varepsilon_1}$. Согласно общей схеме, этот план будет $\varepsilon$-оптимальным планом задачи (2) тогда и только тогда, когда для всех планов $\{x, y\}$ выполняется неравенство

$$c'x^{\varepsilon_1}+y^{\varepsilon_1'}Cx^{\varepsilon_1}+d'y^{\varepsilon_1}\geqslant c'x+y'Cx+d'y-\varepsilon.$$

Другими словами, для каждого вектора $\bar{y}$, удовлетворяющего соотношениям $By=a$, $g_*\leqslant y\leqslant g^*$, должно быть

$$f(\bar{y})=\max_{Ax=b,\ d_*\leqslant x\leqslant d^*}(c'x+\bar{y}'Cx+d'\bar{y})\leqslant c'x^{\varepsilon_1}+y^{\varepsilon_1'}Cx^{\varepsilon_1}+d'y^{\varepsilon_1}+\varepsilon.$$

Отсюда, переходя к двойственной задаче, получаем

$$f(\bar{y})=\min(b'z-d_*'v+d^{*\prime}w+d'\bar{y})\leqslant$$

$$\leqslant c'x^{\varepsilon_1}+y^{\varepsilon_1'}Cx^{\varepsilon_1}+d'y^{\varepsilon_1}+\varepsilon,$$

$$A'z-v+w=c+C'\bar{y},\ w\geqslant 0,\ v\geqslant 0.$$

Последнее неравенство эквивалентно непротиворечивости по $\{z, v, w\}$ системы

$$b'z - d'_* v + d^{*\prime} w + d'\bar{y} \leqslant c' x^{\varepsilon_1} + y^{\varepsilon_1 \prime} C x^{\varepsilon_1} + d' y^{\varepsilon_1} + \varepsilon, \qquad (4)$$
$$A'z - v + w = c + C'\bar{y}, \ v \geqslant 0, \ w \geqslant 0.$$

Вспоминая определение вектора $\bar{y}$, заключаем, что для $\varepsilon$-оптимальности плана $\{x^{\varepsilon_1}, y^{\varepsilon_1}\}$ необходимо и достаточно, чтобы система (4) была непротиворечива по $\{z, v, w\}$ для всех $\bar{y} \in \{y : By = a, \ g_* \leqslant y \leqslant g^*\}$. Запишем систему (4) в эквивалентном виде

$$(b - Ad^*)'z + (d^* - d_*)'v + (Cd^* + d)'y \leqslant c'x^{\varepsilon_1} +$$
$$+ y^{\varepsilon_1 \prime} C x^{\varepsilon_1} + d' y^{\varepsilon_1} + \varepsilon - d^{*\prime} c, \ A'z - v \leqslant c + C'y, \ v \geqslant 0,$$

и исключим из полученной системы неравенств переменные $\{z, v\}$. Метод исключения переменных из неравенств состоит в следующем.

Пусть задана система неравенств

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \ i = \overline{1, m}. \qquad (5)$$

Исключим из системы (5) переменную $x_1$. Для этого систему (5) представим в виде

$$\begin{aligned} x_1 &\leqslant l_i(x_2, \ldots, x_n)/a_{i1}, & i &\in I_+(x_1) = \{i : a_{i1} > 0\}, \\ x_1 &\geqslant l_i(x_2, \ldots, x_n)/a_{1i}, & i &\in I_-(x_1) = \{i : a_{i1} < 0\}, \\ 0 &\leqslant l_i(x_2, \ldots, x_n), & i &\in I_0(x_1) = \{i : a_{i1} = 0\}, \end{aligned}$$

где $l_i(x_2, \ldots, x_n) = b_i - \sum_{j=2}^{n} a_{ij} x_j$. Нетрудно проверить, что система (5) совместна тогда и только тогда, когда совместна система

$$l_j(x_2, \ldots, x_n)/a_{j1} \leqslant l_i(x_2, \ldots, x_n)/a_{i1}, \ j \in I_-(x_1),$$
$$i \in I_+(x_1), \ 0 \leqslant l_i(x_2, \ldots, x_n), \ i \in I_0(x_1). \qquad (6)$$

Замечание. Если одно из множеств $I_-(x_1)$ или $I_+(x_1)$ пусто, то система (6) принимает вид $0 \leqslant l_i(x_2, \ldots, x_n)$, $i \in I_0(x_1)$. Если же при этом и $I_0(x_1) = \varnothing$, то система (6) совместна при любых значениях переменных $x_2, \ldots, x_n$.

Чтобы переменную $x_2$ исключить из системы (6), применяем к ней описанную выше процедуру и т. д.

Пусть в результате исключения переменных $\{z, v\}$ из системы (4) получена система

$$p'_k y \leqslant \rho_k, \ k = \overline{1, K}, \tag{7}$$

где $p_k$ — вектор, размер которого совпадает с размером $y$; $\rho_k$ — скаляр. Система неравенств (7) описывает множество таких $y$, для которых система (4) совместна по $\{z, v, w\}$, или, другими словами, множество таких $y$, для которых $f(y) \leqslant c'x^{\varepsilon_1} + y^{\varepsilon_1\prime} C x^{\varepsilon_1} + d'y^{\varepsilon_1} + \varepsilon$. Следовательно, план $\{x^{\varepsilon_1}, y^{\varepsilon_1}\}$ будет $\varepsilon$-оптимальным в задаче (2) тогда и только тогда, когда

$$\{y : By = a, \ g_* \leqslant y \leqslant g^*\} \subset \{y : p'_k y \leqslant \rho_k, \ k = \overline{1, K}\}. \tag{8}$$

Проверку условия (8) сведем к решению ряда задач линейного программирования

$$p'_k y \to \max, \ By = a, \ g_* \leqslant y \leqslant g^*. \tag{9}$$

Если для всех $k$, $k = \overline{1, K}$, выполняются неравенства $p'_k y^k \leqslant \rho_k$, где $y^k$ — решение $k$-й задачи (9), то, согласно приведенному выше критерию, план $\{x^{\varepsilon_1}, y^{\varepsilon_1}\}$ является $\varepsilon$-оптимальным в задаче (2). В противном случае выбираем вектор $y^{k_0}$, для которого $p'_{k_0} y^{k_0} > \rho_{k_0}$, и переходим к новому плану $\{x^2, y^2\} = \{x^{\varepsilon_1}, y^{k_0}\}$ задачи (2). По построению, имеем $f(y^{k_0}) > f(y^{\varepsilon_1}) + \varepsilon$. Новую итерацию начинаем с плана $\{x^2, y^2\}$.

Для плана $\{x^{2(1)}, y^2\}$, где $x^{2(1)}$ — $\varepsilon_1$-оптимальный план задачи (2) при $y = y^2$, верно соотношение

$$c'x^{2(1)} + y^{2\prime} C x^{2(1)} + d'y^2 \geqslant c'x^{\varepsilon_1} + y^{\varepsilon_1\prime} C x^{\varepsilon_1} + \\ + d'y^{\varepsilon_1} + \varepsilon - \varepsilon_1.$$

Рассмотрим случай, когда $\varepsilon_1 = 0$. Пусть в результате поочередного решения задачи (2) (то при фиксированном $x$, то при фиксированном $y$) получен план $\{x^0, y^0\} = \{x^0(x^1, y^1), \ y^0(x^1, y^1)\}$ такой, что $x^0$ — оптимальный план задачи (2) при $y = y^0$, $y^0$ — оптимальный план задачи (2) при $x = x^0$. Покажем, что вектор $y^0$ является точкой локального максимума функции $f(y)$, если $x^0$ — единственный оптимальный план задачи (2) при $y = y^0$. Предположим противное: для каждого $\Theta$, $0 \leqslant \Theta \leqslant \Theta_0$, существуют такие $\Delta y_\Theta$, $\|\Delta y_\Theta\| \leqslant \Theta$, $\Delta y_\Theta \in \Delta Y = \{\Delta y : B\Delta y = 0,$

$g_*-y_0\leqslant\Delta y\leqslant g_*-y^0\}$, и $\Delta x(\Delta y_\Theta)$, $\Delta x(\Delta y_\Theta)\in\Delta X=$ $=\{\Delta x:A\Delta x=0,\ d_*-x^0\leqslant\Delta x\leqslant d^*-x^0\}$, что

$$\Delta y'_\Theta(Cx^0+d)+(c+y^{0\prime}C)\Delta x(\Delta y_\Theta)+\Delta y'_\Theta C\Delta x(\Delta y_\Theta)>0. \quad (10)$$

Из условия (10) и оптимальности плана $x^0$ в задаче (2) при $y=y^0$ следует, что $(c+y^{0\prime}C)\Delta x(\Delta y_\Theta)\to 0$ при $\Theta\to 0$. Из последнего условия с учетом единственности оптимального плана $x^0$ в задаче (2) при $y=y^0$ получаем

$$\|\Delta x(\Delta y_\Theta)\|\to 0 \text{ при } \Theta\to 0. \quad (11)$$

По предположению, $y^0$ — оптимальный план задачи (2) при $x=x^0$. Значит,

$$\Delta y'_\Theta(Cx^0+d)\leqslant 0 \text{ при любом } \Delta y_\Theta\in\Delta Y. \quad (12)$$

Из условий (10)—(12) следует, что при достаточно малых $\Theta$ должно выполняться неравенство $(c+y^{0\prime}C)\Delta x(\Delta y_\Theta)\geqslant$ $\geqslant 0$. Однако из единственности оптимального плана $x^0$ в задаче (2) при $y=y^0$ следует, что $(c+y^{0\prime}C)\Delta x<0$ для любого $\Delta x\neq 0$, $\Delta x\in\Delta X$. Полученное противоречие доказывает утверждение.

**4. Билинейный вектор условий.** Рассмотрим задачу *)

$$\begin{gathered} c'x+(q'y+c_0)x_0\to\max_{x_0,\,x,\,y\in Y}, \\ Ax+(Cy+a_0)x_0=b,\ d_*\leqslant x\leqslant d^*,\ d_{*0}\leqslant x_0\leqslant d_0^*, \end{gathered} \quad (13)$$

где $Y=\{y:By=a,\ g_*\leqslant y\leqslant g^*\}$ — ограниченное множество. От задач линейного программирования задача (13) отличается тем, что столбец, соответствующий переменной $x_0$, не фиксированный, а может выбираться из некоторого выпуклого множества.

Пусть задана точность $\varepsilon$ приближения к оптимальному значению целевой функции и известна некоторая совокупность векторов

$$y^i\in Y,\ i\in S,\ |S|\leqslant m. \quad (14)$$

Вместо задачи (13) рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} c'x+(q'y+c_0)x_0\to\max_{x_0,\,x,\,\tilde{Y}}, \\ Ax+(Cy+a_0)x_0=b,\ d_*\leqslant x\leqslant d^*,\ d_{*0}\leqslant x_0\leqslant d_0^*, \end{gathered} \quad (15)$$

*) В литературе (см. [2]) она известна как задача Вулфа.

где $\widetilde{Y} = \left\{ y : y = \sum_{i \in S} \lambda_i y^i;\ \sum_{i \in S} \lambda_i = 1;\ \lambda_i \geqslant 0,\ i \in S \right\}$. Найдется такая совокупность (14), при которой задача (15) эквивалентна задаче (13). Множество $\widetilde{Y}$ назовем $\varepsilon$-аппроксимацией множества $Y$, если $\varepsilon_1$-оптимальный план задачи (15) является $\varepsilon$-оптимальным планом задачи (13).

Построение совокупности (14), задающей $\varepsilon$-аппроксимацию $\widetilde{Y}$ множества $Y$, будем проводить по схеме § 4 гл. I.

Нетрудно проверить, что задача (15) эквивалентна следующей задаче линейного программирования *):

$$c'x + c_0 x_0 + \sum_{i \in S} \widetilde{\lambda}_i q' y^i \to \max_{x,\ \widetilde{\lambda},\ x_0},$$
$$Ax + a_0 x_0 + \sum_{i \in S} \widetilde{\lambda}_i C y^i = b, \tag{16}$$
$$\sum_{i \in S} \widetilde{\lambda}_i = x_0,\ d_* \leqslant x \leqslant d^*,\ d_{*0} \leqslant x_0 \leqslant d_0^*,\ \widetilde{\lambda}_i \geqslant 0,\ i \in S.$$

Если известен начальный план $\{x,\ x_0,\ y\}$ задачи (13), то вектор $\{x,\ x_0,\ \widetilde{\lambda}_1 = x_0\}$ можно взять в качестве начального плана задачи (16) при условии, что совокупность (14) состоит из одного вектора $y^1 = y$.

Пусть $\{x,\ x_0,\ \widetilde{\lambda}(S),\ G_{\text{оп}}\}$ — опорный план задачи (16). Подсчитаем по опоре векторы потенциалов $\{u,\ u_0\}$ и оценок $\Delta$. Тогда оценка субоптимальности плана $\{x,\ x_0,\ \widetilde{\lambda}(S)\}$ в задаче (16) равна

$$\beta = \sum_{\substack{j \in \overline{J},\\ \Delta_j > 0}} \Delta_j (x_j - d_{*j}) + \sum_{\substack{j \in \overline{J},\\ \Delta_j < 0}} \Delta_j (x_j - d_j^*) +$$
$$+ \sum_{\substack{j \in S,\\ j \neq j_0}} \Delta_j \widetilde{\lambda}_j + \Delta_{j_0} (\widetilde{\lambda}_{j_0} - d_0^*),$$

где $\Delta_{j_0} = \min_{j \in S} \Delta_j$, $\overline{J} = J \cup 0$.

---

*) Предполагается, что $d_{*0} \geqslant 0$. В противном случае надо рассматривать две задачи: одну с условием $0 \leqslant x_0 \leqslant d_0^*$, $\widetilde{\lambda} \geqslant 0$, другую с условием $d_{*0} \leqslant x_0 \leqslant 0$, $\widetilde{\lambda} \leqslant 0$.

Пусть получен $\varepsilon_1$-оптимальный план $\{x^\varepsilon,\ x_0^\varepsilon \neq 0,\ \widetilde{\lambda}^\varepsilon(S),\ G_{оп}^\varepsilon\}$ задачи (16). Проверим, является ли он $\varepsilon$-оптимальным в задаче (13). Для этого решим задачу

$$f(y) = u'Cy + u_0 - q'y \to \min_{y \in Y}. \tag{17}$$

Обозначим через $y^*$ — оптимальный план задачи (17). Тогда оценка субоптимальности плана $\{x^\varepsilon,\ x_0^\varepsilon,\ y^\varepsilon = \sum_{i \in S} \lambda_i^\varepsilon y^i\}$ $(\lambda^\varepsilon = \widetilde{\lambda}^\varepsilon / x_0^\varepsilon)$ в задаче (13) равна

$$\overline{\beta} = \begin{cases} \beta + d^*(\Delta_{j_0} - f(y^*)), & \text{если } f(y^*) < \Delta_{j_0}; \\ \beta, & \text{если } f(y^*) \geqslant \Delta_{j_0}. \end{cases}$$

Если $\overline{\beta} \leqslant \varepsilon$, процесс решения задачи (13) прекращается на $\varepsilon$-оптимальном плане $\{x^\varepsilon,\ x_0^\varepsilon,\ y^\varepsilon = \sum_{i \in S} \lambda_i^\varepsilon y^i\}$.

Предположим, что $\overline{\beta} > \varepsilon$. Вектор $y^*$ добавляем к совокупности (14). В задаче (16) появится новый вектор условий $\begin{Bmatrix} q'y^* \\ Cy^* \\ 1 \end{Bmatrix}$ и соответствующая ему переменная $\widetilde{\lambda}_*$. Решаем полученную задачу, исходя из опорного плана $\{x^\varepsilon,\ x_0^\varepsilon,\ \widetilde{\lambda}^\varepsilon(S),\ \widetilde{\lambda}_* = 0,\ G_{оп}^\varepsilon\}$. Если $|S| \geqslant m$, то среди векторов (14) всегда найдется вектор, который можно вывести из совокупности (14) (см. § 4 гл. I).

Замечание. Задачу (17) не обязательно решать до конца. Можно остановить процесс решения на $\varepsilon_2$-оптимальном плане $y^{\varepsilon_2}$. В этом случае проверка плана $\{x^\varepsilon,\ x_0^\varepsilon,\ y^\varepsilon = \sum_{i \in S} \lambda_i y^i\}$ на субоптимальность в задаче (13) проводится по схеме § 4 гл. I.

**5. Билинейная строка.** Рассмотрим задачу

$$c'x \to \max_{x,\ y \in Y},\ Ax = b,\ (Cy + d)'x \leqslant b_0'y + q,\ d_* \leqslant x \leqslant d^*, \tag{18}$$

где $Y = \{y : By = a,\ g_* \leqslant y \leqslant g^*\}$.

От классической задачи линейного программирования задача (18) отличается наличием строки, элементы которой не фиксированы, а могут выбираться из некоторого выпуклого множества. Задачу (18) можно представить в виде

$$f(y) \to \max_{y \in Y}, \tag{19}$$

где $f(y) = \max\limits_x c'x;\ Ax=b;\ (Cy+d)'x \leqslant b_0'y+q,\ d_* \leqslant x \leqslant d^*$. Как отмечалось выше, задача (19) является многоэкстремальной задачей, поэтому для ее решения естественно использовать схему, описанную в п. 1.

Предположим, что известен начальный план $\{x^1, y^1\}$ задачи (18). Зафиксируем вектор $y=y^1$ и решим полученную задачу адаптивным методом *) (см. введение, § 1), начиная с опорного плана $\{x^1, A_{\text{оп}}\}$, где $A_{\text{оп}}=A(I, J_{\text{оп}})$ — невырожденная подматрица матрицы $A=A(I, J)$. Нетрудно показать, что в этом случае на всех итерациях автоматически будет выполняться условие: потенциал $u_*$, соответствующий ограничению

$$(Cy+d)'x \leqslant b_0'y+q, \tag{20}$$

равен нулю, если условие (20) выполняется как строгое неравенство.

Обозначим через $x^{1(1)}$ — $\varepsilon_1$-оптимальный план задачи (18) при $y=y^1$. Из сказанного выше следует, что план $\{x^{1(1)}, y^1\}$ будет $\varepsilon_1$-оптимальным планом исходной задачи (18), если на нем неравенство (20) строгое.

Пусть неравенство (20) на плане $\{x^{1(1)}, y^1\}$ обращается в равенство. Решим задачу

$$(Cx-b_0)'y \to \min_{y\in Y} \tag{21}$$

при $x=x^{1(1)}$. Решение задачи (21) прямо не влияет на значение целевой функции задачи (18), так как значения целевых функций задачи (18) на планах $\{x^{1(1)}, y^1\}$ и $\{x^{1(1)}, y^{1(1)}\}$, где $y^{1(1)}$ — $\varepsilon_1$-оптимальный план задачи (21) при $x=x^{1(1)}$, совпадают. Однако, если на плане $\{x^{1(1)}, y^{1(1)}\}$ неравенство (20) выполняется как строгое неравенство, то решение **) задачи (18) при $y=y^{1(1)}$ позволяет либо убедиться в $\varepsilon_1$-оптимальности плана $\{x^{1(1)}, y^{1(1)}\}$ в задаче (18), либо получить новый план $\{x^{1(2)}, y^{1(1)}\}$ задачи (18),

---

*) Легко проверить, что наличие ограничений типа равенств не вносит изменений в адаптивный метод. Учет дополнительных условий $b_* = b^* = b$ лишь упрощает правило подсчета шага $\sigma_{i*}$: при подсчете $\sigma_{i*}$ ограничения типа равенств не рассматриваются.

**) Решение задачи (18) при $y=y^{1(1)}$ начинаем с опорного плана $\{x^{1(1)}, A(I, J_{\text{оп}})\}$, где матрица $A(I, J_{\text{оп}})$ получена из оптимальной опоры $\left\{\begin{matrix} A(I, J^1_{\text{оп}}) \\ y^1 c_j + d_{0j},\ j \in J^1_{\text{оп}} \end{matrix}\right\}$ задачи (18) при $y=y^1$ удалением последней строки и соответствующего столбца. Здесь $c_j$ — $j$-й столбец матрицы $C$.

на котором значение целевой функции строго больше, чем на плане $\{x^{1(1)}, y^1\}$. Здесь $x^{1(2)}$ — $\varepsilon_1$-оптимальный план задачи (18) при $y=y^{1(1)}$.

С планом $\{x^{1(2)}, y^{1(1)}\}$ поступаем, как с планом $\{x^{1(1)}, y^1\}$ и т. д., до тех пор, пока 1) на плане $\{x^{1(k)}, y^{1(k-1)}\}$, где $x^{1(k)}$ — решение задачи (18) при $y=y^{1(k-1)}$, условие (20) будет выполняться как строгое неравенство, или 2) на плане $\{x^{1(k)}, y^{1(k)}\}$, где $y^{1(k)}$ — решение задачи (21) при $x=x^{1(k)}$, неравенство (20) обратится в равенство, т. е. $y^{1(k)}=y^{1(k-1)}$ является $\varepsilon_1$-оптимальным планом задачи (21) при $x=x^{1(k)}$.

В первом случае решение задачи (18) прекращается на $\varepsilon_1$-оптимальном плане $\{x^{1(k)}, y^{1(k-1)}\}$.

Рассмотрим второй случай. Согласно общей схеме, план $\{x^{1(k)}, y^{1(k)}\}$ будет $\varepsilon$-оптимальным, $\varepsilon>\varepsilon_1$, планом задачи (18) тогда и только тогда, когда для всех $y\in Y$ выполняется условие $c'x^{1(k)}\geqslant f(y)-\varepsilon$, т. е. для каждого $y\in Y$ должно быть *)

$$f(y)=\{\max\ c'x\,|\,Ax=b,\ d^*\leqslant x\leqslant d_*,\ (Cy+d_0)'x\leqslant \leqslant b_0'y+q\}=\min\{b'z+(b_0'y+q)z_0-d_*'v+d^{*\prime}w\,|\,A'z+ +(Cy+d_0)z_0-v+w=c;\ z_0\geqslant 0,\ v\geqslant 0,\ w\geqslant 0\}\leqslant \leqslant c'x^{1(k)}+\varepsilon.$$

Последнее неравенство эквивалентно непротиворечивости по $\{z, z_0, v, w\}$ системе

$$b'z+(b_0'y+q)z_0-d_*'v+d^{*\prime}w\leqslant c'x^{1(k)}+\varepsilon, \tag{22}$$
$$A'z+(Cy+d_0)z_0-v+w=c,\ z_0\geqslant 0,\ v\geqslant 0,\ w\geqslant 0.$$

Исключая из системы (22) переменные $z$, $v$, $w$, получаем эквивалентную систему, которую можно привести к виду

$$(p_k'y+\rho_k)z_0\leqslant\begin{cases}1, & k\in N^+,\\ -1, & k\in N^-,\quad z_0\geqslant 0,\\ 0, & k\in N^0,\end{cases} \tag{23}$$

---

*) Правильнее было бы рассматривать только те $y\in Y$, для которых совместна система

$$Ax=b,\ (Cy+d)'x\leqslant b_0'y+q,\ d_*\leqslant x\leqslant d^*,$$

поскольку в терминах прямой задачи только для них имеет смысл $f(y)$. Однако переход к двойственной задаче по переменным $x$ позволяет рассматривать все $y\in Y$.

где $N^+$, $N^-$, $N^0$, $N^+ \cap N^0 = N^+ \cap N^- = N^- \cap N^0 = \varnothing$ — некоторые множества; $p_k$ — вектор, размер которого совпадает с размером вектора $y$; $\rho_k$ — скаляр. Очевидно, что в случае $N^- = \varnothing$ система (23) совместна при $z_0 = 0$ для любых $y$.

Нетрудно показать, что при $N^- \neq \varnothing$ система (23) совместна тогда и только тогда, когда совместна система

$$p'_k y + \rho_k \leqslant 0, \; k \in N^0,$$
$$p'_k y + \rho_k < 0, \; k \in N^-,$$
$$p'_k y + \rho_k \leqslant -(p'_s y + \rho_s), \; k \in N^+, \; s \in N^-.$$

Для проверки последней системы на совместность найдем числа

$$\varphi_{k,s}(y^{(k,s)}) = \max_{y \in Y} (p'_k y + \rho_k + p'_s y + \rho_s), \quad k \in N^+, \quad s \in N^-,$$
$$\varphi_k(y^{(k)}) = \max_{y \in Y} (p'_k y + \rho_k), \; k \in N^- \cup N^0.$$

Если $$\varphi_k(y^{(k)}) \leqslant 0, \; k \in N^0; \; \varphi_k(y^{(k)}) < 0, \; k \in N^-; \\ \varphi_{k,s}(y^{(k,s)}) \leqslant 0, \; k \in N^+, \; s \in N^-, \tag{24}$$

то $\{x^{1(k)}, y^{1(k)}\}$ — $\varepsilon$-оптимальный план задачи (18). В противном случае в качестве $y^2$ выбираем тот вектор $y^{(k)}$ или $y^{(k,s)}$, на котором нарушается соответствующее условие из (24). Из сказанного выше следует, что $c'x^2 > c'x^{1(k)} + \varepsilon - \varepsilon_1$, где $x^2$ — $\varepsilon_1$-оптимальный план задачи (18) при $y = y^2$.

С новым планом $\{x^2, y^2\}$ задачи (18) поступаем так, как и с начальным.

Рассмотрим частный случай, когда $\varepsilon_1 = 0$. Здесь условие 1) означает, что $\{x^{1(k)}, y^{1(k)}\}$ — оптимальный план исходной задачи (18).

Рассмотрим условие 2) при $\varepsilon_1 = 0$. Покажем, что точка $y^{1(k-1)}$ является точкой локального максимума функции $f(y)$, если $x^{1(k)}$ — единственный оптимальный план задачи (18) при $y = y^{1(k-1)}$. Предположим противное, т. е. для каждого $\Theta$, $0 < \Theta \leqslant \Theta_0$, найдутся такие $\Delta y_\Theta$, $\|\Delta y_\Theta\| \leqslant \Theta$, $\Delta y_\Theta \in \Delta Y = \{\Delta y : B\Delta y = 0, \quad g_* - y^{1(k-1)} \leqslant \Delta y \leqslant g^* - y^{1(k-1)}\}$, и $\Delta x(\Delta y_\Theta)$, $\Delta x(\Delta y_\Theta) \in \Delta X = \{\Delta x : A\Delta x = 0, \quad d_* - x^{1(k)} \leqslant \Delta x \leqslant d^* - x^{1(k)}\}$, что

$$c'\Delta x(\Delta y_\Theta) > 0, \tag{25}$$

$$\Delta y'_\Theta (Cx^{1(k)} - b_0) + (y^{1(k-1)'} C + d_0) \Delta x(\Delta y_\Theta) + \\ + \Delta y'_\Theta C \Delta x(\Delta y_\Theta) \leqslant 0. \tag{26}$$

Тогда, в силу единственности оптимального плана $x^{1(k)}$ в задаче (18) при $y=y^{1(k-1)}$, имеем

$$c'\Delta x(\Delta y_\Theta)\to 0 \text{ при } \Theta\to 0;\ \Delta x(\Delta y_\varepsilon)\to 0 \text{ при } \Theta\to 0. \qquad (27)$$

По предположению (условие 2)), план $y^{1(k-1)}$ является оптимальным в задаче (21) при $x=x^{1(k)}$. Значит,

$$\Delta y'(Cx^{1(k)}-b_0)\geqslant 0,\ \Delta y_\Theta\in\Delta Y. \qquad (28)$$

Из условий (27)—(28) следует, что при достаточно малых $\Theta$ для справедливости неравенства (26) необходимо, чтобы

$$(y^{1(k-1)'}C+d_0')\,\Delta x\,(\Delta y_\Theta)\leqslant 0. \qquad (29)$$

Однако из оптимальности плана $x^{1(k)}$ в задаче (18) при $y=y^{1(k-1)}$ и условия (29) следует, что

$$c'\Delta x(\Delta y_\Theta)\leqslant 0$$

при достаточно малых $\Theta$, что противоречит (25). Полученное противоречие доказывает утверждение.

## § 2. Стохастические задачи

Интересными в прикладном и теоретическом отношениях обобщениями классической задачи линейного программирования

$$c'x\to\max,\ Ax\leqslant b,\ 0\leqslant x\leqslant d, \qquad (1)$$

являются *задачи линейного стохастического программирования,* в которых $A$, $b$, $c$, $d$ — случайные параметры [18].

С точки зрения классификации участников, приведенной в начале главы, в новых задачах наряду с исследователем, выбирающим оптимальные значения $x$, имеется распоряжающийся значениями $A$, $b$, $c$, $d$ участник, которому безразличны цели исследователя и чье поведение можно описать вероятностными законами. В задачах стохастического программирования коренным образом меняются основные понятия линейного программирования. Ниже описывается постановка ряда задач типа (1) с учетом случайности параметров $A$, $b$, $c$, $d$ и кратко обсуждается их специфика с позиции детерминированных задач, рассмотренных в книге. Содержание параграфа показывает, что решение задач стохастического программирования в общей постановке связано с большими трудностями. Успех в ближайшие годы, по-видимому, можно ожидать лишь в том случае, если а) считать стохастичность в некотором смысле малой; б) детально учесть структуру задачи и механизм появления случайности; в) изменить понятие сходимости алгоритма с учетом вероятностных особенностей задачи.

1. **Планы.** При замене в (1) детерминированных параметров $A$, $b$, $c$, $d$ стохастическими первым возникнет вопрос о смысле каждого из соотношений в (1). Рассмотрим наиболее распространенные обобщения понятия плана, связанного с ограничениями из (1).

Для упрощения выкладок и более четкого понимания существа новых задач будем считать, что $A$, $b$, $c$, $d$ — дискретные случайные параметры, принимающие (матричные и векторные) значения: $A=\{A(\omega),\ \omega\in\Omega\}$, $b=\{b(\omega),\ \omega\in\Omega\}$, $c=\{c(\omega),\ \omega\in\Omega\}$, $d=\{d(\omega),\ \omega\in\Omega\}$ и распределенные на конечном множестве $\Omega$ с вероятностной мерой $p(\omega)$, $\omega\in\Omega$ $(p(\omega)\geqslant 0,\ \sum\limits_{\omega\in\Omega} p(\omega)=1)$.

В детерминированной постановке $n$-вектор $x$ из (1) можно трактовать как *действие* (в исследовании операций — *решение*), которое предпринимается исследователем для оптимизации физической системы, имеющей математическую модель (1). При введении стохастичности целесообразно различать два вида действий. *Программное (перспективное, директивное) действие* характеризуется тем, что вектор $x$ выбирается вне зависимости от того, какие параметры $A(\omega)$, $b(\omega)$, $c(\omega)$, $d(\omega)$ реализовались в конкретном случае. В практических задачах это часто соответствует тому, что исследователь не имеет возможности постоянно следить за случайными параметрами или не может изменить свои действия в изменившейся ситуации. Если же вектор $x$ можно выбирать в зависимости от каждой реализовавшейся ситуации $A(\omega)$, $b(\omega)$, $c(\omega)$, $d(\omega)$, то он называется *оперативным действием* $x(\omega)$.

Известно, что с вектором $x$ (действием) и ограничениями задачи

$$Ax\leqslant b,\ 0\leqslant x\leqslant d, \tag{2}$$

связано понятие плана. Наличие случайных параметров позволяет более разнообразно, чем в детерминированном случае, *трактовать* соотношения (2) и существенно обогащать понятие плана.

Программное действие $x$ называется *программным $q$-планом,* если

$$P\{Ax \leqslant b,\ 0 \leqslant x \leqslant d\} \geqslant q, \tag{3}$$

где символ $P\{\ldots\}$ означает вероятность события, заключенного в скобках, т. е.

$$P\{Ax \leqslant b,\ 0 \leqslant x \leqslant d\} = \Sigma p(\omega),$$

и сумма берется по всем $\omega \in \Omega$ таким, что $A(\omega)x \leqslant b(\omega)$, $0 \leqslant x \leqslant d(\omega)$.

В отличие от детерминированного случая теперь на плане $x$ ограничения (2) могут иногда нарушаться. Число $q(0 < q \leqslant 1)$ регулирует по мере (по важности) количество случаев, когда ограничения, возможно, не выполняются на $x$.

Если в (2) следить не за системой ограничений, а за каждым ограничением в отдельности, то возникает понятие *программного построчного $q$-плана,* под которым понимается такое программное действие $x$, что

$$P\{a_i' x \leqslant b_i\} \geqslant q_i,\ i = \overline{1,\ m};\ P\{0 \leqslant x_j \leqslant d_j\} \geqslant q_{m+j},\ j = \overline{1,\ n}. \tag{4}$$

Здесь $a_i$ — $i$-я строка матрицы $A$; $b_i$ — $i$-я компонента вектора $b$.

*Ограничения* (3), (4) при $0 < q,\ q_i,\ q_{m+j} < 1$ принято называть *вероятностными.* Если в (3), (4) параметры $q$, $q_i$, $q_{m+j}$ равны единице, то *ограничения* называются *жесткими,* а соответствующее им программное действие — программным планом (без индекса $q$).

Пусть в конкретной задаче не следят за выполнением ограничений (2) при каждой реализации $\omega \in \Omega$, а следят, чтобы они выполнялись в среднем по всем реализациям. Тогда появляется понятие *программного* М-*плана* такого $n$-вектора $x$, что выполняются неравенства

$$A_{\text{м}} x \leqslant b_{\text{м}},\ 0 \leqslant x \leqslant d_{\text{м}},$$

где $A_{\text{м}} = \sum_{\Omega} p(\omega) A(\omega),\quad b_{\text{м}} = \sum_{\Omega} p(\omega) b(\omega),$

$$d_{\text{м}} = \sum_{\Omega} p(\omega) d(\omega).$$

До сих пор при определении планов в основу действий исследователя был положен принцип, принятый в детерминированных задачах: исследователь сам указывал на то или иное действие из числа доступных. Принципиально новое обобщение возникает в случае, когда исследователь действует по правилам, которыми руководствуется участник, выбирающий значения параметров $A$, $b$, $c$, $d$. Действия участника можно трактовать следующим образом. У него имеется множество $\Omega$ и функция $p(\omega)$, $\omega\in\Omega$. Он строит случайный механизм, обеспечивающий реализацию события $\omega\in\Omega$ с вероятностью $p(\omega)$. Участник при выборе своего действия запускает случайный механизм. Последний указывает конкретное значение $\omega\in\Omega$, по которому участник выбирает $A(\omega)$, $b(\omega)$, $c(\omega)$, $d(\omega)$. Рассмотрим ситуацию, когда аналогичного принципа действий придерживается и исследователь.

По аналогии с $\Omega$ введем множество $X_q$ программных $q$-планов. На множестве $X_q$ введем вероятностную меру $d\mu(x)$, $\left(d\mu(x)\geqslant 0, \int\limits_{X_q} d\mu(x)=1\right)$—аналог функции $p(x)$. Каждую функцию распределения $\mu(x)$, $x\in X_q$, назовем *смешанным программным q-планом*. Таким образом, исследователь теперь в программных действиях указывает не вектор $x\in X_q$ (чистый программный $q$-план), а распределение вероятностей $d\mu(x)$, $x\in X_q$, согласно которому случайный механизм выбирает конкретное действие. Необходимость использования смешанных планов в физических задачах часто объясняется желанием исследователя скрыть от посторонних свои действия. Идея смешанных планов оказалась очень полезной при обосновании ряда теоретических результатов в теории экстремальных задач.

Замечание. Смешанные планы не обязательно определять на множестве $X_q$, составленном из всех ограничений задачи. Можно составить множество $X$ из части ограничений (например, только прямых), на $X$ ввести меру $d\mu(x)$, а остальные ограничения учитывать одним из указанных выше способов (по вероятности, в среднем и т. п.).

Если вместо множества программных $q$-планов взять множества других планов, то получим новые классы смешанных программных планов. Читателю в качестве упражнения предлагается все определения перенести на случай оперативных планов.

В некоторых задачах стохастического программирования встречаются *комбинированные планы*, компоненты которых принадлежат к различным типам планов. В качестве примера рассмотрим два подобных случая. Первый относится к многоэтапным задачам. Требуется принять план мероприятий на длительный срок. В момент его принятия многие факторы, связанные с осуществлением плана, не известны. Предположим, что они могут быть описаны случайными величинами. По истечении некоторого времени (до окончания действия плана) случайные факторы становятся известными и появляется возможность скорректировать план. Обозначим через вектор $x$, $0 \leqslant x \leqslant d$, упомянутый план, который, по определению, должен удовлетворять ограничению

$$A(\omega)x \leqslant b(\omega), \tag{5}$$

где $A(\omega)$, $b(\omega)$ — случайные факторы. После реализации случайных факторов, как правило, оказывается, что часть неравенств в (5) не выполняется. Для их выполнения вводится корректирующий план $z(\omega) \geqslant 0$ так, чтобы $A(\omega)x - z(\omega) \leqslant b(\omega)$.

Таким образом, в описанной двухэтапной задаче стохастического программирования компонента $x$ — программный план, компонента $z(\omega)$ — оперативный план.

Рассмотрим теперь задачу, в которой ограничения имеют вид

$$A_1x + A_2y \leqslant b_1,$$
$$B_2y \leqslant b_2,\ 0 \leqslant x \leqslant d,\ 0 \leqslant y \leqslant g,$$

причем для каждого $y \in Y = \{y: B_2y \leqslant b_2,\ 0 \leqslant y \leqslant g\}$ существует вектор $0 \leqslant x \leqslant d$ такой, что $A_1x + A_2y \leqslant b_1$. В этом случае в качестве компоненты $y$ можно взять смешанный программный план на $Y$, а в качестве компоненты $x$ — чистый программный план.

**2. Оптимальные планы.** Наличие случайных параметров заметно перегружает понятие и оптимального плана, которое в детерминированном случае (1) вводилось предельно легко. Это позволяет более разнообразно, чем ранее, оценивать качество конкретного плана.

Для сокращения терминологии за основу возьмем задачу (1) и программные планы. Программный план $x^0$ назовем *оптимальным по вероятности на уровне* $\gamma$, если $P\{c'(\omega)x^0 \geqslant \gamma\} = \max_{x \in X} P\{c'(\omega)x \geqslant \gamma\}$. План $x^0$ *оптимален по уровню с вероятностью* $q$, если $\gamma^0 = \max \gamma$, $P\{c'(\omega)x^0 \geqslant \geqslant \gamma^0\} \geqslant q$, $P\{c'(\omega)x \geqslant \gamma\} \geqslant q$, $x \in X$. *Оптимальным в среднем* называется план $x^0$ такой, что $Mc'x^0 = c'_{\text{м}}x^0 = \max_{x \in X} c'_{\text{м}}x$. План $x^0$, *оптимальный по рассеянию* (дисперсии), определяется соотношением

$$\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)(c'(\omega)x^0 - c'_{\text{м}}x^0)^2 = \min_{x\in X}\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)(c'(\omega)x - c'_{\text{м}}x)^2.$$

С некоторыми другими показателями качества планов можно познакомиться в [18, 19]. Выбор типа плана и показателя его качества определяется конкретной физической задачей. Понятия, удобные (иногда единственные) в одних ситуациях, имеют существенные недостатки (иногда и бессмысленны) в других. В теории экстремальных задач название задачи, как правило, получается из вида показателя качества. Этот показатель качества можно рассматривать со многими типами планов. Нетрудно подсчитать, сколько задач стохастического программирования получится, если рассмотреть комбинации только тех типов планов и показателей качества, которые введены в пп. 1, 2. В следующих пунктах обсуждаются лишь некоторые задачи стохастического программирования.

**3. Детерминированная целевая функция.** Рассмотрим задачу

$$c'x \to \max, \quad P\{A(\omega)x \leqslant b(\omega), \ 0 \leqslant x \leqslant d(\omega)\} \geqslant q, \qquad (6)$$

в которой $c$ — детерминированный вектор стоимости. Ее можно записать в эквивалентной форме

$$f(\Omega_q) \to \max, \ \Omega_q \subset \Omega,$$

где $\Omega_q$ — любое подмножество из $\Omega$ со свойством $\sum_{\omega\in\Omega_q} p(\omega) \geqslant$ $\geqslant q$; функция $f(\Omega_q)$ определена задачей

$$f(\Omega_q) = \max_x c'x, \ A(\omega)x \leqslant b(\omega), \ 0 \leqslant x \leqslant d(\omega), \ \omega \in \Omega_q.$$

Множество $X_q$ чистых программных планов задачи (6) не всегда выпукло. Например, в случае, когда $x$ — скаляр, $\Omega = \{1, 2\}$, $p(1) = \frac{1}{2}$, $p(2) = \frac{1}{2}$, $a(1) = 1$, $a(2) = -1$, $b(1) = 1$, $b(2) = -2$, $q = \frac{1}{2}$, $d(1) = d(2) = 3$, множество $X_q$ состоит из отрезков $0 \leqslant x \leqslant 1$, $2 \leqslant x \leqslant 3$. В силу этого непосредственное использование прямых методов не гарантирует получения глобальных оптимальных $q$-планов задачи (6). Для построения локальных оптимальных $q$-планов рекомендуется перенести на задачу (6) технику опорных методов. В данном пункте описывается одна из реализаций метода ветвей и границ (см. гл. VI).

Пусть $\{\delta(\omega), A_{\text{оп}}(\omega)\}$ — опорные копланы, известные для каждой реализации $\omega\in\Omega$; $\beta(\omega)$ — оценки субоптимальности. Введем функцию $\zeta(\omega)=b'(\omega)y(\omega)+d'(\omega)\times\times w(\omega)$, построенную по двойственным планам $\{y(\omega), w(\omega)\}$. Из теории двойственности следует неравенство

$$\max_{\substack{A(\omega)x\leqslant b(\omega),\\ 0\leqslant x\leqslant d(\omega)}} c'x \leqslant \zeta(\omega),\ \omega\in\Omega.$$

Найдем элемент $\omega_1$ из условия

$$\zeta(\omega_1)=\max\zeta(\omega),\ \omega\in\Omega.$$

Если $p(\omega_1)\geqslant q$, то псевдоплан $\varkappa(\omega_1)$, соответствующий опорному коплану $\{\delta(\omega_1), A_{\text{оп}}(\omega_1)\}$, является $\beta(\omega_1)$-оптимальным $q$-планом задачи (6). В случае $\beta(\omega_1)\leqslant\varepsilon$, где $\varepsilon$ — заданная точность приближения к оптимальному значению целевой функции задачи (6), процесс решения прекращается.

Пусть $\beta(\omega_1)>\varepsilon$. Опорный коплан $\{\delta(\omega_1), A_{\text{оп}}(\omega_1)\}$ улучшается двойственным опорным методом [ч. 1] до тех пор, пока не нарушится неравенство

$$b'(\omega_1)\bar{y}(\omega_1)+d'(\omega_1)\bar{w}(\omega_1)\geqslant b'(\omega)y(\omega)+d'(\omega)w(\omega),$$
$$\text{для всех } \omega\in\Omega,\ \omega\neq\omega_1, \tag{7}$$

или при выполнении (7) $\bar{\beta}(\omega_1)\leqslant\varepsilon$. В последнем случае процесс решения прекращается на $\varepsilon$-оптимальном $q$-плане (псевдоплане) $\bar{\varkappa}$, построенном по $\{\bar{\delta}(\omega_1), \bar{A}_{\text{оп}}(\omega_1)\}$. Если $p(\omega_1)\geqslant q$, а неравенство (7) нарушается, то в начальной информации пару $\{\delta(\omega_1), A_{\text{оп}}(\omega_1)\}$ заменяем на $\{\bar{\delta}(\omega_1), \bar{A}_{\text{оп}}(\omega_1)\}$.

Рассмотрим случай $p(\omega_1)<q$. В дополнение к элементам $\omega\in\Omega$ введем пары $\{\omega_1, \omega\}$, $\omega\in\Omega$, $\omega\neq\omega_1$. К ограничениям $A(\omega_1)x\leqslant b(\omega_1)$ добавим ограничения $A(\omega)x\leqslant\leqslant b(\omega)$, $\omega\neq\omega_1$. Двойственный план системы двух ограничений имеет вид $\{y, w\}$, $y=\{\lambda y(\omega_1), (1-\lambda)y(\omega)\}$, $w==\lambda w(\omega_1)+(1-\lambda)w(\omega)$. По значениям $f(\omega_1, \omega)$ двойственной целевой функции новых задач определим функцию $\zeta_1(\omega)=f(\omega_1, \omega)$. Найдем элемент $\omega_2\in\Omega$, $\omega\neq\omega_1$, на котором достигается максимальное значение функции $\max\{\zeta(\omega), \zeta_1(\omega)\}$. Случай $\zeta(\omega_2)\geqslant\zeta_1(\omega_2)$ рассматривается аналогично предыдущему. Пусть $\zeta(\omega_2)<\zeta_1(\omega_2)$. Если $p(\omega_1)+p(\omega_2)\geqslant q$, то псевдоплан $\varkappa$, соответствующий двойственному опорному коплану $\{\delta(\omega_1, \omega_2), A_{\text{оп}}(\omega_1, \omega_2)\}$, является $\beta(\omega_1, \omega_2)$-оптимальным планом задачи (6). Дальнейшие операции очевидны.

**4. Вероятностная оптимизация детерминированной системы.** Рассмотрим задачу

$$\gamma \to \max_x, \ P\{c'(\omega)x \geqslant \gamma\} \geqslant q, \ Ax = b, \ 0 \leqslant x \leqslant d, \quad (8)$$

в которой ограничения детерминированы, но целевая функция зависит от случайного параметра $c(\omega)$, $\omega \in \Omega$.

Пусть имеется список множеств

$$\Omega_i, \ \Omega_i \subset \Omega, \ i = \overline{1, N}, \quad (9)$$

и соответствующая ему совокупность $\beta(\Omega_i)$-оптимальных планов

$$\{x(\Omega_i), \ \gamma(\Omega_i)\}, \ i = \overline{1, N}, \quad (10)$$

задач

$$\gamma(\Omega_i) = \max \gamma, \ c'(\omega)x \geqslant \gamma, \ \omega \in \Omega_i, \ Ax = b,$$
$$0 \leqslant x \leqslant d, \ i = \overline{1, N}. \quad (11)$$

В качестве начального списка (9) возьмем список

$$\Omega_i = \omega_i, \ i = \overline{1, |\Omega|}.$$

Найдем множество $\Omega_{i_*}$ из условия

$$\max_{i=\overline{1, N}} (\gamma(\Omega_i) + \beta(\Omega_i)) = \gamma(\Omega_{i*}) + \beta(\Omega_{i*}). \quad (12)$$

Если $p(\Omega_{i*}) = \sum_{\omega \in \Omega_{i*}} p(\omega) \geqslant q$, план $x(\Omega_{i*})$ является $\beta(\Omega_{i*})$-оптимальным планом задачи (8). В случае $\beta(\Omega_{i*}) \leqslant \varepsilon$, где $\varepsilon$ — заданная точность приближения к оптимальному значению целевой функции задачи (8), процесс решения прекращается.

Пусть $\beta(\Omega_{i_*}) > \varepsilon$. Продолжаем решение $i_*$-й задачи (11) одним из прямых методов до тех пор, пока 1) не нарушится неравенство

$$\bar{\gamma}(\Omega_{i_*}) + \bar{\beta}(\Omega_{i_*}) \geqslant \gamma(\Omega_i) + \beta(\Omega_i), \ i = \overline{1, N}, \ i \neq i_*;$$

2) при выполнении последнего условия выполняется $\bar{\beta}(\Omega_{i_*}) \leqslant \varepsilon$. В случае 2) процесс решения прекращается на $\varepsilon$-оптимальном плане $\bar{x}(\Omega_{i_*})$. В случае 1) в совокупности (10) $\beta(\Omega_{i_*})$-оптимальный план $\{x(\Omega_{i_*}), \gamma(\Omega_{i_*})\}$ за-

меняем на $\overline{\beta}(\Omega_{i_*})$-оптимальный план $\{\bar{x}(\Omega_{i_*}),\ \overline{\gamma}(\Omega_{i_*})\}$ и переходим к поиску нового множества $\Omega_i$ из условия (12).

Рассмотрим случай $p(\Omega_{i_*})<q$. Множество $\Omega_{i_*}$ вычеркиваем из списка (9), план $\{x(\Omega_{i_*}),\ \gamma(\Omega_{i_*})\}$ — из совокупности (10). Строим пробные множества $\Omega_{i_*}\cup\omega_j$, $\omega_j\overline{\in}\Omega_{i_*}$. Если в списке нет множеств $\Omega_k\subset\Omega_{i_*}\cup\omega_j$, пробное множество $\Omega_{i_*}\cup\omega_j$ включаем в список (9), соответствующий ему план *) $\{x(\Omega_{i_*}\cup\omega_j),\ \gamma(\Omega_{i_*}\cup\omega_j)\}$ — в совокупность (10).

С новым списком (9) и новой совокупностью планов (10) поступаем, как с начальными.

Если все задачи (11) невырожденные, то решение задачи (8) будет получено за конечное число итераций.

**5. Оптимизация усредненной целевой функции.** Рассмотрим задачу

$$\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)\,c'(\omega)\,x(\omega)\to\max,$$
$$\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)\,A(\omega)\,x(\omega)=b_{\text{м}},\ d_{*\text{м}}\leqslant\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)\,x(\omega)\leqslant d^*_{\text{м}},\tag{13}$$

где символ М означает усреднение по мере $p(\omega)$ (например, $b_{\text{м}}=\sum\limits_{\omega\in\Omega}p(\omega)\,b(\omega)$).

Относительно переменных $z(\omega)=p(\omega)x(\omega)$, $\omega\in\Omega$, задача (13) представляет детерминированную задачу с большим числом $n|\Omega|$ переменных. Методы решения подобных задач рассмотрены в § 1 гл. I.

**6. Минимизация дисперсии.** Рассмотрим задачу

$$\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)\,(c'(\omega)\,x-c'_{\text{м}}x)^2\to\min,\ A_{\text{м}}x=b_{\text{м}},\ d_{*\text{м}}\leqslant x\leqslant d^*_{\text{м}}.\tag{14}$$

Поскольку

$$\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)\,(c'(\omega)\,x-c'_{\text{м}}x)^2=x'Dx,$$
$$D=\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)\,c(\omega)\,c'(\omega)-c_{\text{м}}c'_{\text{м}}\geqslant 0,$$

---

*) В качестве плана $\{x(\Omega_{i_*}\cup\omega_j),\ \gamma(\Omega_{i_*}\cup\omega_j)\}$ можно взять план $\{x(\Omega_{i_*}),\ \gamma=\min\{\gamma(\Omega_{i_*}),\ c'(\omega_j)\,x(\Omega_{i_*})\}\}$.

то задача (14) эквивалентна детерминированной задаче квадратичного программирования

$$x'Dx \to \min, \ A_{\text{м}}x = b_{\text{м}}, \ d_{*\text{м}} \leqslant x \leqslant d^*_{\text{м}},$$

методы решения которой излагаются в гл. V.

**7. Оптимальные распределения.** Рассмотрим задачу

$$\int_X c'x d\mu(x) \to \max_{\mu}, \ d\mu(x) \geqslant 0, \ x \in X, \ \int_X d\mu(x) = 1,$$

где $X = \{x : Ax = b, \ d_* \leqslant x \leqslant d^*\}$ — множество планов.

Можно показать, что эта задача эквивалентна задаче

$$\sum_{s \in S} \lambda_s c' x^s \to \max_{\lambda, \ x^s}, \ \sum_{s \in S} \lambda_s = 1, \ \lambda_s \geqslant 0, \ x^s \in X, \ s \in S, \quad (15)$$

где $|S| \geqslant n$.

Методы решения задач типа (15) изложены в § 1.

**8. Двухэтапная задача.** Из описания, приведенного в п. 1, следует, что двухэтапная задача планирования с минимизацией расходов по реализации плана $x$ и корректирующего плана $z(\omega)$ имеет следующую математическую модель:

$$c'x + \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega)\, c'(\omega)\, z(\omega) \to \min,$$

$$A(\omega)x - z(\omega) \leqslant b(\omega), \ 0 \leqslant x \leqslant d, \ z(\omega) \geqslant 0, \ \omega \in \Omega.$$

В подробной записи (по элементам $\omega \in \Omega$) эта задача принимает форму специальной блочной задачи со связывающими переменными $x$. Методы решения подобных задач рассматриваются в гл. I.

**9. Стохастические методы.** Из приведенного описания типичных задач стохастического программирования видно, что почти каждая из них сводится к большим задачам линейного и нелинейного программирования. При значительной величине $|\Omega|$ традиционные (конечные и итеративные) методы для их решения будут в общем случае малоэффективными. В последние годы стал развиваться новый подход к решению больших задач, в котором изменено понятие сходимости. Уже из описания итеративных методов следует, что ослабление понятия сходимости, принятого в конечных методах, позволяет упростить процедуру решения. Дальнейший шаг в этом направлении состоит в замене детерминированной последовательности оценок $x^k$, $k = 1, 2, \ldots$, оптимального плана $x^0$ на последовательность случайных оценок $x^k$, $k=1$, $2, \ldots$, которые в некотором вероятностном смысле сходятся к $x^0$.

Приведем, следуя [12], простейшую реализацию этой идеи. Пусть требуется найти $f(x) \to \max$, $x \in R_n$. Построим последовательность точек

$$x^{k+1} = x^k + \Theta_k \xi^k, \quad k=1, 2, \ldots, \tag{16}$$

начинающуюся с произвольной точки $x^1$. В (16) $\xi^k$ — случайный вектор, условное математическое ожидание которого равно

$$M(\xi^k / x^1, \ldots, x^k) = \alpha_k \operatorname{grad} f(x^k), \quad \alpha_k > 0. \tag{17}$$

Таким образом, при построении $x^k$, $k=1, 2, \ldots$, движения происходят не в направлении локального градиента, как это имеет место в детерминированных градиентных методах, а в случайных направлениях, которые только в среднем совпадают с направлением градиента. Выигрыш здесь состоит в том, что во многих случаях генерировать векторы $\xi^k$ со свойством (17) значительно проще, чем вычислять градиент функции $f(x)$. Например, пусть

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} f_i(x) \to \max, \quad f_i(x) \in C^{(1)}. \tag{18}$$

Положим

$$\xi^k = \operatorname{grad} f_{i_k}(x^k). \tag{19}$$

где $i_k$ — реализация на $k$-м шаге случайной величины $i$, равномерно распределенной на множестве $\{1, 2, \ldots, N\}$. Ясно, что

$$M(\xi^k / x^1, \ldots, x^k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \operatorname{grad} f_i(x^k) = \frac{1}{N} \operatorname{grad} f(x^k),$$

т. е. вектор (19) удовлетворяет условию (17).

Процедура (16) в приложении к задаче (18) означает, что на каждом шаге случайным образом выбирается одна компонента $f_{i_k}(x)$ функции $f(x)$ и делается шаг в направлении градиента этой компоненты.

В [12] приведен ряд утверждений о сходимости процедур типа (16). Там же указываются задачи, для которых целесообразно использовать стохастические методы. Это в основном сложные задачи, формулируемые через функции с трудно вычисляемыми значениями и производными. Актуальной остается проблема реализации стохастических методов для решения задач данного параграфа с максимальным учетом их специфики.

## § 3. Параметрические задачи

При анализе прикладных задач часто в их математические модели вводят параметр и исследуют поведение решения в зависимости от изменения параметра. Принято подобные вопросы относить к *параметрическому программированию*. Некоторые задачи линейного параметрического программирования рассмотрены в [ч. 1], [ч. 2] и § 7 гл. I в связи с анализом решения и методом возмущений. В данном параграфе излагается основная задача линейного параметрического программирования для двух классических случаев. Более сложные случаи изучаются в [11].

**1. Параметрическая целевая функция.** Рассмотрим семейство задач

$$(c_0+\mu c_1)'x\to\max,\ Ax=b,\ d_*\leqslant x\leqslant d^*, \tag{1}$$

зависящих от числового параметра $\mu$, изменяющегося на отрезке $\mu_*\leqslant\mu\leqslant\mu^*$. Основная задача параметрического программирования состоит в вычислении критических значений

$$\mu_*=\mu_0\leqslant\mu_1<\mu_2<\ldots<\mu_s\leqslant\mu^*$$

параметра $\mu$, которые характеризуются тем, что каждый опорный план $\{x^{(k)},\ A_{(k)\text{оп}}\}$ является оптимальным планом задачи (1) при любом $\mu\in[\mu_k,\ \mu_{k+1}]$, если он оптимален при некотором $\bar\mu\in(\mu_k,\ \mu_{k+1})$. Пусть $\{x^{0(0)},\ A_{(0)\text{оп}}\}$, $A_{(0)\text{оп}}=A(I,\ J_{\text{оп}}^{(0)})$, — оптимальный невырожденный опорный план задачи (1) при $\mu=\mu_0$. Следовательно, при $\mu=\mu_0$ выполняются соотношения

$$\Delta_j^{(0)}(\mu)=0,\ \text{если}\ d_{*j}<x_j^{0(0)}<d_j^*;$$
$$\Delta_j^{(0)}(\mu)\geqslant 0,\ \text{если}\ x_j^{0(0)}=d_{*j};$$
$$\Delta_j^{(0)}(\mu)\leqslant 0,\ \text{если}\ x_j^{0(0)}=d_j^*;$$
$$j\in J_{\text{н}}^{(0)}=J\diagdown J_{\text{оп}}^{(0)}. \tag{2}$$

Здесь $\Delta_j^{(0)}(\mu)=\alpha_j^{(0)}+\mu\beta_j^{(0)}$; $\alpha_j^{(0)}=c_0(J_{\text{оп}}^{(0)})A_{(0)\text{оп}}^{-1}a_j-c_0(j)$; $\beta_j^{(0)}=c_1(J_{\text{оп}}^{(0)})A_{(0)\text{оп}}^{-1}a_j-c_1(j)$, $j\in J$. Найдем максимальное число $\Theta_0$ такое, что при $\mu_0 \leqslant \mu \leqslant \mu_0 + \Theta_0$ выполняются соотношения (2). Очевидно, что искомое число равно

$$\Theta_0 = \min \Theta_{0j}, \quad j \in J_{\text{н}}^{(0)};$$

$$\Theta_{0j} = \begin{cases} 0, \text{ если } d_{*j} < x_j^{0(0)} < d_j^*, \ \beta_j^{(0)} \neq 0; \\ \Delta_j^{(0)}(\mu)/\beta_j^{(0)}, \quad \text{если} \quad x_j^{0(0)} = d_j^*, \quad \beta_j^{(0)} > 0 \quad \text{или} \\ x_j^{0(0)} = d_{*j}, \ \beta_j^{(0)} < 0; \\ \infty \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \tag{3}$$

Положим $\mu_1 = \mu_0 + \Theta_0$. Следовательно, для любого $\mu \in [\mu_0, \mu_1]$ имеем $x_\mu^0 = x^{0(0)}$, $A_{\text{оп}}^0(\mu) \equiv A_{(0)\text{оп}}$.

Если $\mu_1 \geqslant \mu^*$, то исходная задача решена.

Пусть $\mu_1 < \mu^*$. Обозначим: $J_{(0)}^0(\mu) = \{j : \Delta_j^{(0)}(\mu) = 0\}$; $J_{(0)}^+(\mu) = \{j : \Delta_j^{(0)}(\mu) > 0\}$; $J_{(0)}^-(\mu) = \{j : \Delta_j^{(0)}(\mu) < 0\}$. В силу определения $\mu_1$ для любого $\mu > \mu_1$ набор множеств $\{J_{(0)}^0(\mu), J_{(0)}^+(\mu), J_{(0)}^-(\mu)\}$ не может совпасть с набором множеств $\{J_{(0)}^0(\mu_1), J_{(0)}^+(\mu_1), J_{(0)}^-(\mu_1)\}$. Следовательно, план $x^{0(0)}$ и опора $A_{(0)\text{оп}}$ с набором множеств $\{J^0 = J_{(0)}^0(\mu_1), J^+ = J_{(0)}^+(\mu_1), J^- = J_{(0)}^-(\mu_1)\}$ не могут быть оптимальными ни при каком $\mu > \mu_1$.

Пусть построен отрезок $[\mu_{k-1}, \mu_k]$ такой, что

$$\{x^{0(k-1)}, A_{(k-1)\text{оп}}\} = \{x_\mu^0, A_{\text{оп}}^0(\mu)\}, \ \mu \in [\mu_{k-1}, \mu_k].$$
$$(k = 1, 2, \ldots).$$

Решим вспомогательную задачу

$$-\sum_{j \in J_{(k-1)}^0(\mu_k)} \beta_j^{(k-1)} x_j \to \max,$$

$$A(I, J_{(k-1)}^0(\mu_k))\, x(J_{(k-1)}^0(\mu_k)) = b - A(I, J \setminus J_{(k-1)}^0(\mu_k)) \times \\ \times x^{0(k-1)}(J \setminus J_{(k-1)}^0(\mu_k)), \tag{4}$$

$$d_*(J_{(k-1)}^0(\mu_k)) \leqslant x(J_{(k-1)}^0(\mu_k)) \leqslant d^*(J_{(k-1)}^0(\mu_k)),$$

начиная с опорного плана*) $\{x^{0(k-1)}(J_{(k-1)}^0(\mu_k)), A_{(k-1)\text{оп}}\}$. Пусть $\{\bar{x}(J_{(k-1)}^0(\mu_k)), A_{(k)\text{оп}}\}$, $A_{(k)\text{оп}} = A(I, J_{\text{оп}}^{(k)})$, — оптимальный невырожденный опорный план задачи (4),

*) При $|J_{(k-1)}^0(\mu_k)| = m + 1$ задача (4) решается за одну итерацию.

$\bar{\Delta}(J^0_{(k-1)}(\mu_k))$ — оптимальный коплан, сопровождающий опору $A_{(k)\text{оп}}$. Легко проверить, что пара $\{x^{0(k)}, A_{(k)\text{оп}}\}$, где $x^{0(k)} = \{x^{0(k)}(J^0_{(k-1)}(\mu_k)) = \bar{x}(J^0_{(k-1)}(\mu_k)),\quad x^{0(k)}(J\setminus J^0_{(k-1)} \times (\mu_k)) = x^{0(k-1)}(J\setminus J^0_{(k-1)}(\mu_k))\}$, является оптимальным планом задачи (1) при $\mu = \mu_k$. Следовательно, при $\mu = \mu_k$ справедливы соотношения:

$$\begin{aligned}
&\Delta_j^{(k)}(\mu) = 0, \text{ если } d_{*j} < x_j^{0(k)} < d_j^*;\\
&\Delta_j^{(k)}(\mu) \geqslant 0, \text{ если } x_j^{0(k)} = d_{*j};\\
&\Delta_j^{(k)}(\mu) \leqslant 0, \text{ если } x_j^{0(k)} = d_j^*,\ j \in J_{\text{н}}^{(k)} = J\setminus J_{\text{оп}}^{(k)},
\end{aligned} \tag{5}$$

где $\Delta_j^{(k)}(\mu) = \alpha_j^{(k)} + \mu\beta_j^{(k)};\quad \alpha_j^{(k)} = c_0(J_{\text{оп}}^{(k)})\, A^{-1}_{(k)\text{оп}} a_j - c_0(j);$
$$\beta_j^{(k)} = c_1(J_{\text{оп}}^{(k)})\, A^{-1}_{(k)\text{оп}} a_j - c_1(j);\ j \in J.$$

По формуле, аналогичной (3), найдем максимальное число $\Theta_k$ такое, что при $\mu_{k+1} = \mu_k + \Theta_k$ выполняются соотношения (5). Покажем, что $\Theta_k > 0$. Действительно, легко проверить, что $\bar{\Delta}(J^0_{(k-1)}(\mu_k)) = \beta^{(k)}(J^0_{(k-1)}(\mu_k))$. Из оптимальности плана $\{x^{0(k)}(J^0_{(k-1)}(\mu_k)),\ A_{(k)\text{оп}}\}$ в задаче (4) следует, что $\beta_j^{(k)} = 0$, если $d_{*j} < x_j^{0(k)} < d_j^*$; $\beta_j^{(k)} \geqslant 0$, если $x_j^{0(k)} = d_{*j}$; $\beta_j^{(k)} \leqslant 0$, если $x_j^{0(k)} = d_j^*$, $j \in J^0_{(k-1)}(\mu_k)$.

Значит, при увеличении $\mu_k$ из условий (5) могут нарушиться только условия со следующими индексами:

$$j \in J_{\text{н}}^{(k)} \setminus (J^0_{(k-1)}(\mu_k) \setminus J_{\text{оп}}^{(k)}) = J\setminus J^0_{(k-1)}(\mu_k).$$

Однако в силу определения множества $J^0_{(k-1)}(\mu_k)$ и условия $\Delta_j^{(k-1)}(\mu_k) = \Delta_j^{(k)}(\mu_k)$, $j \in J$, имеем $\Delta_j^{(k)}(\mu_k) \neq 0$, $j \in J_{\text{н}}^{(k)} \setminus (J^0_{(k-1)}(\mu_k) \setminus J_{\text{оп}}^{(k)})$. Значит, $\Theta_k > 0$. Очевидно, для любого $\mu \in [\mu_k, \mu_{k+1}]$ план $\{x^{0(k)}, A_{(k)\text{оп}}\}$ будет оптимальным в задаче (1). Как и в предыдущем случае, легко показать, что план $x^{0(k)}$ и опора $A_{(k)\text{оп}}$ с набором множеств $\{J^0 = J^0_{(k)}(\mu_{k+1}),\ J^+ = J^+_{(k)}(\mu_{k+1}),\ J^- = J^-_{(k)}(\mu_{k+1})\}$ не могут быть оптимальными ни при каком $\mu > \mu_{k+1}$.

Если $\mu_{k+1} \geqslant \mu^*$, то исходная задача решена. При $\mu_{k+1} < \mu^*$ продолжаем решение по описанной выше схеме.

Предположим, что вспомогательная задача (4) при каждом $k$ решается за конечное число итераций. Покажем, что в этом случае через конечное число шагов будет построено $\mu_{s+1} \geqslant \mu^*$.

Выше отмечалось, что одна опора не может встретиться дважды с одним и тем же набором $\{J^0, J^+, J^-\}$.

Каждой опоре $A_{оп}$ можно приписать конечное число наборов $\{J^0, J^+, J^-\}$. Сведовательно, опора $A_{оп}$ не может быть оптимальной для бесконечного числа отрезков $[\mu_{k-1}, \mu_k]$, $\mu_{k-1} < \mu_k$. Множество всевозможных опор задачи (1) конечно. Значит, через конечное число итераций будет построено $\mu_{s+1} \geqslant \mu^*$.

Замечания. 1. Отрезок $[\mu_{k-1}, \mu_k]$ задает максимальную область изменения значений параметра $\mu$, для которых*) $x_\mu^0 = x^{0(k-1)}$, т. е. для $\mu \overline{\in} [\mu_{k-1}, \mu_k]$ имеем: $x_\mu^0 \neq x^{0(k-1)}$, $k = 1, \ldots, s+1$. Опора $A_{оп}$ может быть оптимальной для нескольких отрезков $[\mu_{k_1-1}, \mu_{k_1}], \ldots, [\mu_{k_p-1}, \mu_{k_p}]$, т. е. для $\mu \in \{[\mu_{k_1-1}, \mu_{k_1}] \cup \ldots \cup [\mu_{k_p-1}, \mu_{k_p}]\}$ имеет место $A_{оп}^0(\mu) = A_{оп} = A_{(k_1)оп} = \ldots = A_{(k_p)оп}$, $k_1 < \ldots < k_p$.

2. Если в задаче (4) оптимальный коплан $\overline{\Delta}(J_{(k-1)}^0(\mu_k))$ вырожденный, то в задаче (4) существует несколько оптимальных опорных планов $\{\overline{x}^i(J_{(k-1)}^0(\mu_k)), A_{(k)оп}^i\}$, $i = \overline{1, p_k}$. Однако можно показать, что длина отрезка $[\mu_k, \mu_{k+1}]$ (число $\Theta_k$) не зависит от выбора оптимального опорного плана $\{\overline{x}^i(J_{(k-1)}^0(\mu_k)), A_{(k)оп}^i\}$, поскольку $\Theta_k$ определяется величинами $\beta_j^{i(k)}$, $\alpha_j^{i(k)} + \mu_k \beta_j^{i(k)}$, $j \in J_н^{(k)}$, не зависящими от $i$.

Также можно показать, что решение (множество оптимальных планов) задачи (4) на $(k+1)$-м шаге не зависит от того, какой план $\{\overline{x}^i(J_{(k-1)}^0(\mu_k)), A_{(k)оп}^i\}$ выбран в качестве решения задачи (4) на $k$-м шаге. Каждый из планов $x^{i0(k)}$, $i = \overline{1, p_k}$, является оптимальным при $\mu \in [\mu_k, \mu_{k+1}]$.

**2. Параметрический вектор ограничений.** Рассмотрим семейство задач

$$c'x \to \max, \quad Ax = b_0 + \mu b_1, \quad d_* \leqslant x \leqslant d^*, \tag{6}$$

зависящих от числового параметра $\mu$, $\mu_* \leqslant \mu \leqslant \mu^*$.

Найдем *критические значения*

$$\mu_* = \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_s \leqslant \mu^*$$

параметра $\mu$, характеризующиеся тем, что опора $A_{(k)оп}$, оптимальная в задаче (6) при некотором $\overline{\mu} \in (\mu_k, \mu_{k+1})$, будет оптимальной опорой задачи (6) и при любом $\mu \in [\mu_k, \mu_{k+1}]$ или если при некотором $\overline{\mu} \in (\mu_k, \mu_{k+1})$ ограничения задачи (6) несовместны, то они несовместны и при любом $\mu \in (\mu_k, \mu_{k+1})$.

---

*) Здесь $x_\mu^0$ — некоторый оптимальный план задачи (1) при заданном значении $\mu$.

Решая задачу (6) двойственным опорным методом *) при $\mu=\mu_0$, либо а) получаем оптимальный опорный план задачи (6) при $\mu=\mu_0$, либо б) убеждаемся в несовместности ограничений задачи (6) при $\mu=\mu_0$.

Рассмотрим случай а): при $\mu=\mu_0$ ограничения задачи (6) совместны. Пусть $\{x^{(0)}, A_{(0)\text{оп}}\}$, $A_{(0)\text{оп}}=A(I, J^{(0)}_{\text{оп}})$, — оптимальный опорный план задачи (6) при $\mu=\mu_0$, $\Delta^{(0)}$ — оптимальный невырожденный коплан, сопровождающий опору $A_{(0)\text{оп}}$. Следовательно, при $\mu=\mu_0$ справедливы соотношения

$$d_{*j} \leqslant x_j^{(0)}(\mu) \leqslant d_j^*, \quad j \in J^{(0)}_{\text{оп}}, \tag{7}$$

где

$$x_j^0(\mu)=\alpha_j^{(0)}+\mu\beta_j^{(0)}; \quad \alpha_j^{(0)}=e_j' A^{-1}_{(0)\text{оп}}[-A(I, J^{(0)}_{\text{н}}) \times$$
$$\times x^{(0)}(J^{(0)}_{\text{н}})+b_0]; \quad \beta_j^{(0)}=e_j' A^{-1}_{(0)\text{оп}} b_1; \quad j \in J^{(0)}_{\text{оп}}; \quad x_j^{(0)}=d_{*j},$$

если $\Delta_j^{(0)}>0$; $x_j^{(0)}=d_j^*$, если $\Delta_j^{(0)}<0$, $j \in J^{(0)}_{\text{н}}=J \diagdown J^0_{\text{оп}}$.

Найдем максимальное число $\Theta_0$ такое, что при любом $\mu$, $\mu_0 \leqslant \mu \leqslant \mu_0+\Theta_0$, выполняются соотношения (7). Число $\Theta_0$ легко найти из условий

$$\Theta_0=\min \Theta_{0j}, \quad j \in J^{(0)}_{\text{оп}}; \tag{8}$$

$$\Theta_{0j}=(d_j^*-x_j^{(0)}(\mu_0))/\beta_j^{(0)}, \text{ если } \beta_j^{(0)}>0;$$

$$\Theta_{0j}=(d_{*j}-x_j^{(0)}(\mu_0))/\beta_j^{(0)}, \text{ если } \beta_j^{(0)}<0;$$

$$\Theta_{0j}=\infty, \text{ если } \beta_j^{(0)}=0.$$

Положим $\mu_1=\mu_0+\Theta_0$. Следовательно, для любого $\mu \in [\mu_0, \mu_1]$ опора $A_{(0)\text{оп}}$ является оптимальной в задаче (6).

Если $\mu_1 \geqslant \mu^*$, то исходная задача решена.

Пусть $\mu_1<\mu^*$. Ясно, что при $\mu>\mu_1$ соотношения (7) нарушаются. Следовательно, опора $A_{(0)\text{оп}}$ не может быть оптимальной в задаче (6) ни при каком $\mu>\mu_1$.

Пусть построен отрезок $[\mu_{k-1}, \mu_k]$ такой, что опора $A_{(k-1)\text{оп}}=A(I, J^{(k-1)}_{\text{оп}})$ является оптимальной опорой задачи (6) при любом $\mu \in [\mu_{k-1}, \mu_k]$. Обозначим:

$$x^{(k)}(J)=\{x_j^{(k)}=x_j^{(k-1)}(\mu_k), \ j \in J^{(k-1)}_{\text{оп}}, \ x_j^{(k)}=x_j^{(k-1)},$$
$$j \in J^{(k-1)}_{\text{н}}\};$$

$$J^{\text{п}}_{(k-1)}=\{j : j \in J, \ d_{*j}<x_j^{(k)}<d_j^*\};$$

$$J^{\text{в}}_{(k-1)}=\{j : j \in J, \ x_j^{(k)}=d_j^*\};$$

*) Начальный двойственный план задачи (6) строится очевидным образом.

$$J^{\text{н}}_{(k-1)} = \{j : j \in J, \ x_j^{(k)} = d_{*j}\}.$$

Решим задачу

$$c'l \to \max, \ Al = b_1, \ l(J^{\text{в}}_{(k-1)}) \leqslant 0, \ l(J^{\text{н}}_{(k-1)}) \geqslant 0, \quad (9)$$

двойственным методом, начиная с базисного коплана $\{\Delta^{(k-1)}, A_{(k-1)\text{оп}}\}$. Если ограничения задачи (9) несовместны (двойственная целевая функция не ограничена на множестве двойственных планов), то и ограничения задачи (6) несовместны при $\mu > \mu_k$. Исходная задача решена.

Пусть ограничения задачи (9) совместны и в результате ее решения получен оптимальный опорный план $\{l^{(k)}, A_{(k)\text{оп}}\}$, $A_{(k)\text{оп}} = A(I, \ J^{(k)}_{\text{оп}})$, и оптимальный невырожденный коплан $\Delta^{(k)}$, сопровождающий опору $A_{(k)\text{оп}}$. Из условий задачи (9) имеем

$$\begin{aligned} &\Delta_j^{(k)} = 0, \ j \in J^{(k)}_{\text{оп}}, \ \text{причем} \ J^{\text{п}}_{(k-1)} \subset J^{(k)}_{\text{оп}}; \\ &\Delta_j^{(k)} > 0, \ j \in J^{\text{н}}_{(k-1)} \cap J^{(k)}_{\text{н}}; \ \ \Delta_j^{(k)} < 0, \ \ j \in J^{\text{в}}_{(k-1)} \cap J^{(k)}_{\text{н}}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $J^{(k)}_{\text{н}} = J \setminus J^{(k)}_{\text{оп}}$.

Используя (10), легко проверить, что пара $\{x^{(k)}, A_{(k)\text{оп}}\}$ и вектор $\Delta^{(k)}$ являются соответственно оптимальным опорным планом и оптимальным невырожденным копланом задачи (6) при $\mu = \mu_k$. Следовательно, при $\mu = \mu_k$ выполняются соотношения

$$d_{*j} \leqslant x_j^{(k)}(\mu) \leqslant d_j^*, \ j \in J^{(k)}_{\text{оп}}, \quad (11)$$

где $x_j^{(k)}(\mu) = \alpha_j^{(k)} + \mu\beta_j^{(k)}$; $\alpha_j^{(k)} = e_j' A^{-1}_{(k)\text{оп}}[-A(I, \ J^{(k)}_{\text{н}}) \times \times x^{(k)}(J^{(k)}_{\text{н}}) + b_0]$; $\beta_j^{(k)} = e_j' A^{-1}_{(k)\text{оп}} b_1$; $x_j^{(k)} = d_{*j}$, если $\Delta_j^{(k)} > 0$; $x_j^{(k)} = d_j^*$, если $\Delta_j^{(k)} < 0$, $j \in J^{(k)}_{\text{н}}$.

По формуле, аналогичной (8), найдем максимальное число $\Theta_k$ такое, что при любом $\mu$, $\mu_k \leqslant \mu \leqslant \mu_k + \Theta_k$, выполняются соотношения (11).

Покажем, что $\Theta_k > 0$. Действительно, нетрудно проверить, что оптимальный план $l^{(k)}$ задачи (9) представим в виде

$$l_j^{(k)} = 0, \ j \in J^{(k)}_{\text{н}}; \ l_j^{(k)} = e_j' A^{-1}_{(k)\text{оп}} b_1 = \beta_j^{(k)}, \ j \in J^{(k)}_{\text{оп}}. \quad (12)$$

Из формулы для определения $\Theta_k$ (см. (8)) видно, что $\Theta_k$ равно нулю в том и только том случае, если существует такой индекс $j_0$, что $j_0 \in J^{\text{в}}_{(k-1)} \cap J^{(k)}_{\text{оп}}$, $\beta_{j_0}^{(k)} > 0$ или $j_0 \in J^{\text{н}}_{(k-1)} \cap J^{(k)}_{\text{оп}}$, $\beta_{j_0}^{(k)} < 0$.

Но из (12) и ограничений задачи (9) следует, что

$$\beta_j^{(k)} \leqslant 0, \; j \in J^{\text{в}}_{(k-1)} \cap J^{(k)}_{\text{оп}}; \; \beta_j^{(k)} \geqslant 0, \; j \in J^{\text{н}}_{(k-1)} \cap J^{(k)}_{\text{оп}}.$$

Значит, $\Theta_k > 0$.

Положим $\mu_{k+1} = \mu_k + \Theta_k$. Очевидно, что для всех $\mu \in [\mu_k, \mu_{k+1}]$ опора $A_{(k)\text{оп}}$ является оптимальной в задаче (6). Из определения $\mu_{k+1}$ следует, что при любом $\mu > \mu_{k+1}$ соотношения (11) не будут выполняться. Значит, ни при каком $\mu > \mu_{k+1}$ опора $A_{(k)\text{оп}}$ не может быть оптимальной в задаче (6).

Если $\mu_{k+1} \geqslant \mu^*$, то исходная задача решена. В противном случае переходим к следующей итерации.

Таким образом, одна и та же опора $A_{\text{оп}}$ не может быть оптимальной в задаче (6) при $\mu$, принадлежащих двум отрезкам $[\mu_k, \mu_{k+1}]$, $[\mu_p, \mu_{p+1}]$, $k \neq p$. Число опор в задаче (6) конечно. Следовательно, через конечное число итераций будут построены все критические значения $\mu_1, \ldots, \mu_s$ параметра $\mu$.

Рассмотрим теперь случай б): ограничения задачи (6) несовместны при $\mu = \mu_0$. Это означает, что в процессе решения задачи (6) был получен опорный коплан $\{\overline{\Delta}(J), \overline{A}_{\text{оп}}\}$, $\overline{A}_{\text{оп}} = A(I, \overline{J}_{\text{оп}})$, такой, что при некотором $j_0 \in \overline{J}_{\text{оп}}$ выполняется одно из двух условий:

1) $\varkappa_{j_0}(\mu_0) < d_{*j_0}$, $x_{j_0 j} > 0$, если $\varkappa_j = d_{*j}$; $x_{j_0 j} < 0$, если $\varkappa_j = d_j^*$; $x_{j_0 j} = 0$, если $d_{*j} < \varkappa_j < d_j^*$, $j \in \overline{J}_{\text{н}} = J \diagdown \overline{J}_{\text{оп}}$;

2) $\varkappa_{j_0}(\mu_0) > d_{j_0}^*$, $x_{j_0 j} < 0$, если $\varkappa_j = d_{*j}$; $x_{j_0 j} > 0$, если $\varkappa_j = d_j^*$; $x_{j_0 j} = 0$, если $d_{*j} < \varkappa_j < d_j^*$, $j \in \overline{J}_{\text{н}}$,

где

$$\varkappa_j = \begin{cases} d_j^*, \text{ если } \overline{\Delta}_j < 0, \\ d_{*j}, \text{ если } \overline{\Delta}_j > 0, \quad j \in \overline{J}_{\text{н}}, \\ \text{любому числу, принадлежащему отрезку } [d_{*j}, d_j^*], \\ \text{если } \Delta_j = 0; \end{cases}$$

$$\varkappa_{j_0}(\mu_0) = \overline{\alpha}_{j_0} + \mu_0 \overline{\beta}_{j_0}; \; \overline{\alpha}_{j_0} = e'_{j_0} \overline{A}_{\text{оп}}^{-1} [-A(I, \overline{J}_{\text{н}}) \varkappa(\overline{J}_{\text{н}}) + b_0];$$

$$\overline{\beta}_{j_0} = e'_{j_0} \overline{A}_{\text{оп}}^{-1} b_1; \; \{x_{j_0 j}, \; j \in \overline{J}_{\text{н}}\} = e'_{j_0} \overline{A}_{\text{оп}}^{-1} A(I, \overline{J}_{\text{н}}).$$

Предположим для определенности, что имеют место условия 1). (Случай, когда выполняются условия 2), рассматривается аналогично.) Если $\overline{\beta}_{j_0} < 0$, то ограничения задачи (6) несовместны при всех $\mu \geqslant \mu_0$.

Пусть $\bar{\beta}_{j_0}>0$. Очевидно, что для всех $\mu$, $\mu_0\leqslant\mu<(d_{*j_0}-\varkappa_{j_0}(\mu_0))/\bar{\beta}_{j_0}$, ограничения задачи (6) несовместны.

Рассмотрим ограничения задачи (6) при $\mu=\bar{\mu}$, где $\bar{\mu}=(d_{*j_0}-\varkappa_{j_0}(\mu_0))/\bar{\beta}_{j_0}$. Если

$$d_{*j}\leqslant\bar{\alpha}_j+\bar{\mu}\,\bar{\beta}_j\leqslant d_j^*,\ j\in\bar{J}_{\text{оп}},\tag{12}$$

то $\{\bar{x},\ \bar{A}_{\text{оп}}\}$, $\bar{x}=\{\bar{x}_j=\bar{\alpha}_j+\bar{\mu}\,\bar{\beta}_j,\ j\in\bar{J}_{\text{оп}},\ \bar{x}_j=\varkappa_j,\ j\in\bar{J}_{\text{н}}\}$ — оптимальный план задачи (6). Полагаем $\mu_1=\bar{\mu}$, $x^{(1)}=\bar{x}$, $J_{\text{оп}}^{(0)}=\bar{J}_{\text{оп}}$ и переходим к случаю а).

Пусть условия (12) не выполняются. В этом случае продолжаем решение задачи (6) при $\mu=\bar{\mu}$. Через конечное число итераций (предполагается, что задача (6) невырожденная) будет либо получен оптимальный опорный план $\{x^{(1)},\ A_{(1)\text{оп}}\}$ и оптимальный коплан $\Delta^{(1)}$ (случай а)), либо найдется индекс $j_0$, удовлетворяющий одному из условий 1), 2) (случай б)). Далее действуем по описанной выше схеме.

Замечание. Если оптимальный опорный план $\{l^{(k)},\ A_{(k)\text{оп}}\}$ задачи (9) вырожденный (всегда предполагается, что оптимальный коплан $\{\Delta^{(k)},\ A_{(k)\text{оп}}\}$ невырожденный), то в задаче (9) существует несколько оптимальных опорных копланов $\{\Delta^{i(k)},\ A^i_{(k)\text{оп}}\}$, $i=\overline{1,\ p_k}$. Однако можно показать, что число $\Theta_k$, определяющее длину отрезка $[\mu_k,\ \mu_{k+1}]$, не зависит от выбора опоры $A^i_{(k)\text{оп}}$, $i=\overline{1,\ p_k}$. В этом случае каждая из опор $A^i_{(k)\text{оп}}$, $i=\overline{1,\ p_k}$, является оптимальной опорой задачи (6) при $\mu\in[\mu_k,\ \mu_{k+1}]$.

## § 4. Многоцелевые задачи

Важное обобщение классических задач оптимизации с одной целевой функцией (однокритериальные задачи), привлекающее в последние годы внимание многих специалистов, связано с рассмотрением *многоцелевых (многокритериальных) задач* [20], в формулировку которых включается несколько целевых функций. Эти задачи, по общему убеждению, отражают вполне реальные ситуации, возникающие в различных актуальных приложениях. Поскольку только в исключительных (вырожденных) случаях существуют планы, доставляющие максимум всем целевым функциям одновременно, то сама постановка задач многоцелевой оптимизации является серьезной проблемой. В данном параграфе излагаются некоторые задачи многокритериального линейного программирования.

**1. Эффективные планы.** Пусть на ограниченном множестве планов

$$X = \{x \in R^n\colon\ Ax = b,\ x \geqslant 0\}, \tag{1}$$

где $A = A(I, J)$ — $m \times n$-матрица $I = \{1, 2, \ldots, m\}$, $J = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\operatorname{rank} A = m$, задана конечная совокупность

$$f(x, \omega) = c'(\omega) x,\ \ \omega \in \Omega,\ \ |\Omega| = l, \tag{2}$$

целевых функций. Среди элементов множества (1) желательно найти такой план, на котором функции (2) «достигают максимального значения». Известно, что для системы функций (или, другими словами, для векторнозначной целевой функции) $f(x) = \{f(x, \omega),\ \omega \in \Omega\}$ невозможно определить «максимальное значение». Поэтому приведенную выше «формулировку» задачи векторной оптимизации нельзя считать вполне определенной. В связи с этим говорят, что многокритериальные задачи оптимизации являются *задачами оптимизации в условиях неопределенности.*

Несмотря на недостаточность исходной информации для точного определения решения задачи векторной оптимизации (1), (2), имеющихся сведений достаточно для описания свойства, которым должно обладать каждое решение задачи (1), (2), как бы оно не было определено и каким бы способом не было построено. Это свойство называется *эффективностью.*

Определение. План $x^{\text{эф}}$ назовем *эффективным (оптимальным по Парето),* если не существует другого плана $\hat{x}$ такого, что $f(\hat{x}) \geqslant f(x^{\text{эф}})$ и $f(\hat{x}) \neq f(x^{\text{эф}})$.

«Недоопределенность» (с классической точки зрения) постановки задачи (1), (2) является причиной того, что множество $X^{\text{эф}}$ эффективных планов, как правило, состоит из большого числа планов и в этом отношении ближе к множеству планов, чем к множеству оптимальных планов, которое, вообще говоря, состоит из единственного элемента. Множество $X^{\text{эф}}$ можно трактовать как множество допустимых планов, согласованных с заданным набором функций цели. Другими словами, эффективные планы — это своего рода полуфабрикаты решения, полурешения, полуоптимальные планы. В пользу такого взгляда говорит и то, что в практических задачах со многими целевыми функциями часто на значения всех целевых функций кроме одной накладываются ограничения снизу или сверху в зависимости от смысла целевой функции, после чего они включаются в число основных ограничений. Фактически многие задачи только формально являются скалярными, ибо в них указанные операции осуществляются до привычной формулировки задачи.

Во многих практических задачах выбор в качестве решения множества планов (или, другими словами, вместо фиксированного действия совокупности действий) нежелателен и принимается за недостаточную разработку задач. Поэтому следующим за построением множества $X^{эф}$ этапом решения задачи (1), (2) в математическом отношении является сужение множества $X^{эф}$. В рамках введенной информации эта проблема неразрешима. Нужны дополнительные сведения, которые лежат вне математической модели (1), (2). В данной ситуации возможны по крайней мере два пути:

1) использование дополнительных целевых функций, определенных на $X^{эф}$;

2) формирование правил действия с элементами $X^{эф}$, которые назовем *принципами выбора*.

В данном параграфе обсуждается только второй путь. Введем некоторые определения.

Совокупность правил, основанных на информации (1), (2) и приводящих в общем случае к единственному элементу $x^0 \in X^{эф}$, принимающемуся за решение задачи (1), (2), будем называть *принципом выбора*. Семейство однотипных принципов выбора назовем *обобщенным принципом выбора*.

Принцип выбора назовем *скаляризуемым*, если существуют такие множество $\Lambda$ и скалярная функция $\varphi(x, \lambda)$, заданная на (1), (2) и множестве $\Lambda$, что при некотором $\lambda \in \Lambda$ вектор $x^0$ такой, что $\varphi(x^0, \lambda) = \max\limits_{x \in X} \varphi(x, \lambda)$.

Обобщенный принцип выбора назовем *полным*, если каждый эффективный план из $X^{эф}$ может быть получен одним из принципов выбора данного семейства.

Скаляризуемый принцип выбора назовем *полным*, если $\Phi(\Lambda) = X^{эф}$, $\Phi(\Lambda) = \{x^0(\lambda), \lambda \in \Lambda\}$, где $x^0(\lambda)$ определяется соотношением $\varphi(x^0(\lambda), \lambda) = \max\limits_{x \in X} \varphi(x, \lambda)$, $\lambda \in \Lambda$.

Отложим пока изучение принципов выбора. Изучим сначала множество эффективных планов и алгоритм его построения.

Пусть $\{x, A_Б\}$, $A_Б = A(I, J_Б)$, $J_Б \subset J$, — некоторый невырожденный базисный план*). Составим $l \times m$-матрицу $C_Б = C(\Omega, J_Б)$, где $C(\Omega, J) = \{c'(\omega), \omega \in \Omega\}$, и построим $l \times m$-матрицу потенциалов $U = C_Б A_Б^{-1}$. Вычислим теперь $l \times n$-матрицу оценок $\Delta(\Omega, J) = UA - C$. Заметим, что $\Delta_Б = \Delta(\Omega, J_Б) = 0$. Таким образом, $\Delta(\Omega, J) = \{0, \Delta_н\}$, $\Delta_н = \Delta(\Omega, J_н)$.

**Теорема 1.** Для эффективности базисного плана $\{x, A_Б\}$ необходимо и достаточно, чтобы существовал положительный $l$-вектор $\lambda > 0$ такой, что $\lambda' \Delta_н \geqslant 0$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\{x, A_Б\}$ — эффективный базисный план. Нетрудно убедиться, что план $x$ эффективен тогда и только тогда, когда система $Cl \geqslant 0$, $Cl \neq 0$ несовместна для любого допустимого из точки $x$ направления $l$. Множество допустимых направлений $l = \{l_Б, l_н\}$ из $x$ описывается соотношениями $l_н \geqslant 0$, $l_Б = -A_Б^{-1} A_н l_н$. Следовательно, план $x$ эффективен тогда и только тогда, когда система

$$\Delta_н' l_н \leqslant 0,\ l_н \geqslant 0,\ \Delta_н' l_н \neq 0 \qquad (3)$$

является несовместной. Так как план $x$ — эффективен, то для любого $\omega \in \Omega$ и каждого вектора $l_н$, удовлетворяющего системе

$$\Delta'(\nu, J_н) l_н \leqslant 0,\ l_н \geqslant 0,\ \nu \in \Omega,\ \nu \neq \omega,$$

выполняется неравенство $\Delta'(\omega, J_н) l_н \geqslant 0$ (в противном случае система (3) была бы совместной, что невозможно). Тогда по теореме Фаркаша о неравенствах-следствиях существуют числа $\mu_\nu(\omega) \geqslant 0$, $\nu \in \Omega$, $\nu \neq \omega$, и вектор $\pi(\omega) \geqslant 0$ такие, что

$$\sum_{\substack{\nu \in \Omega \\ \nu \neq \omega}} \mu_\nu(\omega) \Delta(\nu, J_н) + \Delta(\omega, J_н) - \pi(\omega) = 0. \qquad (4)$$

Суммируя в (4) по $\omega$, получаем

$$\sum_{\omega \in \Omega} \lambda_\omega \Delta(\omega, J_н) = \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega), \qquad (5)$$

где

$$\lambda_\omega = \sum_{\substack{\nu \in \Omega \\ \nu \neq \omega}} \mu_\nu(\omega) + 1,\ \omega \in \Omega.$$

*) В дальнейшем будем говорить просто базисный план, имея в виду, что речь идет о невырожденном базисном плане.

Очевидно, что $\lambda_\omega > 0$, $\pi(\omega) \geqslant 0$, $\omega \in \Omega$. Следовательно, из (5) имеем $\lambda' \Delta_н \geqslant 0$. Необходимость доказана.

*Достаточность.* Пусть для некоторого $\lambda^0 \in R^l$, $\lambda^0 > 0$, выполняется условие теоремы, но базисный план $x$ не является эффективным. Тогда для некоторого $\omega \in \Omega$ система

$$l_н \geqslant 0,\ \Delta'(\omega, J_н) l_н < 0,\ \Delta'(\nu, J_н) l_н \leqslant 0,\ \nu \in \Omega,\ \nu \neq \omega, \quad (6)$$

будет совместной. Пусть $\hat{l}_н$ удовлетворяет (6). Тогда $\sum\limits_{\nu\in\Omega} \lambda_\nu^0 \Delta'(\nu, J_н)\hat{l}_н < 0$. Но по условию теоремы $\sum\limits_{\nu\in\Omega} \lambda_\nu^0 \Delta(\nu, J_н) \geqslant 0$. Так как $\hat{l}_н \geqslant 0$, то $\sum\limits_{\nu} \lambda_\nu^0 \Delta'(\nu, J_н)\hat{l}_н \geqslant 0$. Получили противоречие. Теорема доказана.

Следствие. Базисный план $x^0$ эффективен тогда и только тогда, когда существует вектор $\lambda \in R^l$, $\lambda > 0$, такой, что

$$\lambda' C x^0 = \max_{x \in X} \lambda' C x. \quad (7)$$

Действительно, из теории линейного программирования известно, что скалярная функция $c^{\lambda'} x = \lambda' C x$ достигает максимума на $X$ тогда и только тогда, когда

$$\Delta_н^\lambda = c_Б^\lambda A_Б^{-1} A_н - c_н^\lambda = \lambda' C_Б A_Б^{-1} A_н - \lambda' C_н \geqslant 0.$$

Сопоставляя последнее неравенство с теоремой 1, убеждаемся в справедливости следствия.

Замечание. Утверждение следствия справедливо не только для базисных эффективных планов, но и для произвольных эффективных планов.

Перейдем к построению множества эффективных планов $X^{эф}$. Пусть $\{x, A_Б\}$ — эффективный невырожденный базисный план (методы построения таких планов будут описаны в п. 2), $\Delta$ — соответствующая матрица оценок. Обозначим через $\Lambda(x)$ множество

$$\Lambda(x) = \{\lambda \in R^l \colon \lambda > 0,\ \lambda' \Delta_н \geqslant 0\}.$$

Из теоремы 1 следует, что $\Lambda(x) \neq \varnothing$. Легко проверить, что $\Lambda(x)$ — выпуклый многогранный конус. В общем случае $\Lambda(x)$ — незамкнутое множество. Через $\overline{\Lambda(x)}$ обозначим замыкание конуса $\Lambda(x)$. Пусть $b_1, \ldots, b_p$ — направляющие векторы ребер конуса $\overline{\Lambda(x)}$. Тогда

$$\overline{\Lambda(x)} = \{\lambda \in R^l\colon\ \lambda = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i b_i,\ \alpha_i \geqslant 0,\ i = \overline{1,\ p}\}.$$

Замечания. 1. Направляющие векторы ребер многогранного конуса $\overline{\Lambda(x)}$ можно находить с помощью специальной задачи линейного программирования

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i \to \max,\ \lambda'\Delta_{\text{н}} \geqslant 0,\ \lambda \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \leqslant 1. \tag{8}$$

Пересечение П плоскости $\sum_{i=1}^{l} \lambda_i = 1$ с конусом $\overline{\Lambda(x)}$ образует многогранное выпуклое множество, вершинами которого являются точки пересечения ребер конуса $\overline{\Lambda(x)}$ с плоскостью $\sum_{i=1}^{l} \lambda_i = 1$. Ясно, что любая точка многогранника П будет решением задачи (8). Решив (8) симплекс-методом, найдем оптимальный базисный план $\lambda^0$, соответствующий некоторой вершине многогранника П. Полученная при этом обратная матрица и оценки плана $\lambda^0$ позволяют построить остальные вершины многогранника П.

2. Пусть $\lambda > 0$ — произвольный вектор из $R^l$, $x^0$ — эффективный базисный план. Справедливо следующее утверждение. Включение $\lambda \in \Lambda(x^0)$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\lambda' C x^0 = \max_{x \in X} \lambda' C x.$$

Легко видеть, что $x^0$ — базисный план следующей задачи:

$$c^{\lambda\,\prime} x \to \max \text{ при } x \in X, \tag{9}$$

где $c^{\lambda} = \lambda' C$.

Согласно теории линейного программирования, точка $x^0$ будет оптимальным решением задачи (9) тогда и только тогда, когда $\Delta^{\lambda}_{\text{н}} \geqslant 0$, где $\Delta^{\lambda}_{\text{н}} = c^{\lambda}_{\text{Б}} A_{\text{Б}}^{-1} A_{\text{н}} - c^{\lambda}_{\text{н}} = \lambda' C_{\text{Б}} A_{\text{Б}}^{-1} A_{\text{н}} - \lambda' C_{\text{н}} = \lambda' \Delta_{\text{н}}$. Значит, $x^0$ — оптимальное решение задачи (9) тогда и только тогда, когда $\lambda' \Delta_{\text{н}} \geqslant 0$. Отсюда следует доказываемое.

3. Если $\operatorname{rank} C = n$, то эффективный базисный план $x^0$ является единственной эффективной в $X$ точкой тогда и только тогда, когда $\Lambda(x^0) = R^l_+$, где $R^l_+$ — положительный ортант в $R^l$.

Доказательство. На самом деле, пусть $x^0$ — единственная эффективная в $X$ точка. Отсюда следует, что $Cx^0 \geqslant Cx$ для любого $x \in X$. Значит, для любого $\lambda \in R^l_+$ имеем $\lambda' C x^0 = \max_{x \in X} \lambda' C x$. Согласно критерию оптимальности базисного плана $x^0$, в задаче $c^{\lambda\,\prime} x \to \max_{x \in X}$, где $c^\lambda = \lambda' C$, имеем $\Delta_н^\lambda = \lambda'\Delta_н \geqslant 0$. Это означает, что $\lambda \in \Lambda(x^0)$. Тем самым доказано, что $R_+^l \subset \Lambda(x^0)$. Обратное включение $\Lambda(x^0) \subset R_+^l$ очевидно. Таким образом, $\Lambda(x^0) = R_+^l$.

Пусть теперь $\Lambda(x^0) = R_+^l$. Покажем, что $Cx^0 \geqslant Cx$ для любого $x \in X$. Отсюда, так как rank $C = n$, будет следовать, что $x^0$ — единственная эффективная в $X$ точка.

Рассмотрим в $\Lambda(x^0)$ последовательность векторов $\{\lambda^n\} = \left\{\left(1, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)\right\}$. Тогда в силу замечания 2 имеем

$$\lambda^{n\prime} Cx^0 = \max_{x \in X} \lambda^{n\prime} Cx, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Переходя к пределу в предыдущих равенствах, будем иметь $c_1' x^0 = \max_{x \in X} c_1' x$. Поступая аналогичным образом для каждого $j \in \{1, l\}$, получаем в итоге $c_j' x^0 = \max_{x \in X} c_j' x$, $j = \overline{1, l}$. Это означает, что $x^0$ — единственная эффективная в $X$ точка. Замечание доказано.

Пусть $N^{эф} = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ — множество эффективных базисных планов задачи (1), (2). Через $\Lambda(x_i)$ обозначим множество $\Lambda(x_i) = \{\lambda \in R_+^l\colon \ \lambda'\Delta_н \geqslant 0\}$, где $\Delta_н$ — матрица оценок, соответствующая базисному плану $x_i$. В дальнейшем $\Lambda(x_i)$ будем называть *конусом оптимальных весов* эффективного базисного плана $x_i$.

**Лемма 1.** Если $N^{эф} = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ — множество всех эффективных базисных планов (1), (2), то $R_+^l = \bigcup_{i=1}^{r} \Lambda(x_i)$.

Доказательство. Включение $\bigcup_{i=1}^{r} \Lambda(x_i) \subset R_+^l$ очевидно, так как любой вектор $\lambda \in \Lambda(x_i)$ принадлежит $R_+^l$. Докажем обратное. Пусть $\check{\lambda} \in R_+^l$. Рассмотрим задачу

$$\check{\lambda}' Cx \to \max, \quad x \in X. \tag{10}$$

Так как $X$ — ограниченное замкнутое множество, то решение задачи (10) существует. Из теории линейного программирования известно, что если существует оптимальное решение в (10), то найдется по крайней мере один оптимальный базисный план задачи (10). Обозначим его через $x_k$. Из следствия вытекает, что $x_k$ является эффективным базисным планом задачи (1), (2), т. е. $x_k \in N^{эф}$.

Тогда, согласно замечанию 2, имеем, что $\overset{\vee}{\lambda} \in \Lambda(x_k)$. Отсюда следует, что $R^l_+ \subset \bigcup_{i=1}^{r} \Lambda(x_i)$. Лемма 1 доказана.

Как отмечалось ранее, замыкание $\overline{\Lambda(x_i)}$ конуса $\Lambda(x_i)$ можно представить в виде

$$\overline{\Lambda(x_i)} = \{\lambda \in R^l\colon\ \lambda = \sum_{j=1}^{p(i)} \alpha_j b^i_j,\ \alpha_j \geqslant 0\}, \qquad (11)$$

где $b^i_j$, $j = \overline{1, p(i)}$, — образующие ребра конуса $\overline{\Lambda(x^i)}$; $p(i)$ — число образующих $\overline{\Lambda(x^i)}$.

Введем множество

$$N^k(x^i) = \begin{cases} \{x \in X\colon\ b^{i\prime}_k Cx = b^{i\prime}_k Cx^i\}, & \text{если } b^i_k \in \Lambda(x^i), \\ \varnothing, & \text{если } b^i_k \notin \Lambda(x^i). \end{cases} \qquad (12)$$

Если $N^k(x^i) \neq \varnothing$, то указанное множество есть некоторая грань множества $X$.

Следующая теорема устанавливает связь между множествами $X^{эф}$ и $N^k(x^i)$.

**Теорема 2.** Множество эффективных планов $X^{эф}$ задачи (1), (2) совпадает с множеством $H = \bigcup_{i=1}^{r} \bigcup_{k=1}^{P(i)} N^k(x^i)$.

Доказательство. Из (12) и замечания 2 следует, что для любого $\overset{\vee}{x} \in N^k(x^i)$, $N^k(x^i) \neq \varnothing$, выполняется условие $\lambda' C\overset{\vee}{x} = \lambda' Cx^i = \max_{x \in X} \lambda' Cx$, где $\lambda = b^i_k$, $b^i_k \in \Lambda(x_i) \subset \subset R^l_+$. В силу замечания к теореме 1 имеет место включение $\overset{\vee}{x} \in X^{эф}$. Таким образом, включение $H \subset X^{эф}$ доказано.

Докажем обратное включение. Пусть $x^0 \in X^{эф}$. Тогда существует вектор $\lambda^0 \in R^l_+$ такой, что

$$\lambda^{0\prime} Cx^0 = \max_{x \in X} \lambda' Cx. \qquad (13)$$

Так как $\lambda^0 \in R^l_+$ и по лемме 1 $R^l_+ = \bigcup_{i=1}^{r} \Lambda(x_i)$, то существует такое $s$, $1 \leqslant s \leqslant r$, что $\lambda^0 \in \Lambda(x_s)$. Значит, найдутся числа $\alpha_i \geqslant 0$, $i = \overline{1, p(s)}$, $\sum_{i=1}^{p(s)} \alpha_i \neq 0$, такие, что $\lambda^0 = \sum_{i=1}^{p(s)} \alpha_i b_i^s$. Тогда из (13) следует

$$\sum_{i=1}^{p(s)} \alpha_i b_i^{s\prime} C x^0 = \max_{x \in X} \sum_{i=1}^{p(s)} \alpha_i b_i^{s\prime} C x. \tag{14}$$

Кроме того, точка $x^s$, согласно замечанию 2, удовлетворяет условию

$$\lambda' C x_s = \max_{x \in X} \lambda' C x \tag{15}$$

для любого $\lambda \in \Lambda(x_s)$. Тогда из (14) и (15) имеем

$$\sum_{i=1}^{p(s)} \alpha_i b_i^{s\prime} C x^0 = \sum_{i=1}^{p(s)} \alpha_i b_i^{s\prime} C x^s. \tag{16}$$

Опять в силу замечания 2 для любого $i$, $1 \leqslant i \leqslant p(s)$, имеем

$$b_i^{s\prime} C x^s = \max_{x \in X} b_i^{s\prime} C x.$$

Так как $\alpha_i \geqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant p(s)$, то из последнего равенства и (16) следует, что существует $m$, $1 \leqslant m \leqslant p(s)$, такое, что $b_m^{s\prime} C x^s = b_m^{s\prime} C x^0$. Это означает, что $x^0 \in N^m(x^s)$. Справедливость включения $X^{\text{эф}} \subset H$ установлена. Теорема доказана.

Таким образом, теорема 2 дает полное описание множества $X^{\text{эф}}$. Заметим далее, что это описание можно осуществить, если известно множество эффективных базисных планов $N^{\text{эф}}$. Ниже покажем, как по известному эффективному базисному плану $x^0$ можно путем последовательного построения множеств $N^k$ найти все элементы множества $N^{\text{эф}}$.

Базисные планы $x^0$ и $x^1$ назовем *соседними*, если базисы этих планов отличаются лишь одним вектором.

Ясно, что если $x^0$ и $x^1$ — соседние эффективные базисные планы, то любая точка $x^*$ ребра $\Gamma$, соединяющего точки $x^0$ и $x^1$, является эффективной.

Обозначим через $N_s(x^0)$ множество эффективных базисных планов, соседних с эффективным базисным планом $x^0$.

**Лемма 2.** Справедливо включение $N_s(x^0) \subset \bigcup_{k=1}^{p(0)} N^k(x^0)$.

Доказательство. Предположим, что существует эффективный базисный план $\bar{x} \in N_s(x^0)$, но $\bar{x} \notin \bigcup_{k=1}^{p(0)} N^k(x^0)$. Тогда для любого $b_k$ (здесь $b_k$, $k = \overline{1, p(0)}$, — образующие конуса $\overline{\Lambda(x^0)}$) выполняется неравенство

$$b_k' C\bar{x} < b_k' C x^0 = \max_{x \in X} b_k' C x, \quad k = \overline{1, p(0)}, \tag{17}$$

так как в противном случае $\bar{x} \in \bigcup_{k=1}^{p(0)} N^k(x^0)$. Из (17) следует, что

$$\lambda' C\bar{x} < \lambda' C x^0 = \max_{x \in X} \lambda' C x \tag{18}$$

для любого $\lambda \in \Lambda(x^0)$, так как каждый вектор $\lambda \in \Lambda(x^0)$ можно представить в виде $\lambda = \sum_{k=1}^{p(0)} \alpha_k b_k$, где $\alpha_k \geqslant 0$.

Рассмотрим точку $x^* = \alpha x^0 + (1 - \alpha)\bar{x}$, $0 < \alpha < 1$, лежащую на ребре, соединяющем точки $x^0$ и $\bar{x}$. Ясно, что $x^*$ является эффективной точкой. В силу замечания к теореме 1 существует такой вектор $\lambda_* \in R_+^l$, что $\lambda_*' C x^* = \max_{x \in X} \lambda_*' C x$.

Отсюда следует, что

$$\lambda_*' C x^* \geqslant \lambda_*' C x^0 \text{ и } \lambda_*' C x^* \geqslant \lambda_*' C\bar{x}. \tag{19}$$

Предположим, что одно из неравенств строгое, например, $\lambda_*' C x^* > \lambda_*' C\bar{x}$. Тогда из определения точки $x^*$ и (19) получим противоречие

$$\alpha \lambda_*' C x^0 + (1 - \alpha) \lambda_*' C\bar{x} = \lambda_* C x^* > \alpha \lambda_*' C x^0 + (1 - \alpha) \lambda_*' C\bar{x}.$$

Следовательно, $\lambda_*' C x^* = \lambda_*' C\bar{x}$. Аналогично доказывается равенство $\lambda_*' C x^* = \lambda_*' C x^0$.

Так как $\max_{x \in X} \lambda_*' C x = \lambda_*' C x^* = \lambda_*' C x^0$, то по замечанию 2 имеем $\lambda_* \in \Lambda(x^0)$. Кроме того, по доказанному $\lambda_*' C x^* = \lambda_*' C\bar{x}$, что противоречит (18). Лемма доказана.

Алгоритм построения множества $X^{эф}$ состоит в следующем.

1. Находим начальный эффективный базисный план. Для этого достаточно решить симплекс-методом задачу $\lambda' Cx \to \max\limits_{x \in X}$, где $\lambda > 0$ — произвольный вектор из $R^l$. Решение этой задачи, согласно замечанию к теореме 1, является эффективной точкой задачи (1), (2).

2. Для найденного эффективного базисного плана $\{x^0, A_Б\}$ построим конус оптимальных весов $\Lambda(x^0) = \{\lambda \in R^l_+ : \lambda' \Delta_н \geqslant 0\}$, где $\Delta_н$ — матрица оценок, соответствующая плану $x^0$. Конус $\Lambda(x^0)$ может быть незамкнутым. Для замыкания $\overline{\Lambda(x^0)}$ найдем образующие $b_k$, $k = \overline{1, p(0)}$. Согласно замечанию 1, эти образующие можно найти из решения специальной задачи

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i \to \max, \quad \lambda' \Delta_н \geqslant 0, \quad \lambda \geqslant 0, \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \leqslant 1. \qquad (20)$$

Пересечение $\pi$ конуса $\overline{\Lambda(x^0)}$ с плоскостью $L = \{\lambda \mid \sum_{i=1}^{l} \lambda_i = 1\}$ образует многогранник, вершинами которого являются точки пересечения образующих $\overline{\Lambda(x^0)}$ с $L$. Очевидно, каждая точка из $\pi$ является решением (20). Решая (20) симплекс-методом, находим оптимальный базисный план $b_1$, соответствующий некоторой вершине $\pi$, а значит, направляющий вектор одного из образующих ребер конуса $\overline{\Lambda(x^0)}$. Накопленная при этом информация (обратная матрица и оценки плана $b_1$) позволяет определить остальные образующие $\overline{\Lambda(x^0)}$. Пусть $I_{н0}$ — множество небазисных индексов, для которых $\Delta$-оценки плана $b_1$ являются нулевыми. В базис плана $b_1$ вводим поочередно векторы $d_i$, $i \in I_{н0}$, где $d_i$ — векторы-столбцы матрицы ограничений задачи (20). Полученные при этом новые базисные планы будут соседними с $b_1$ вершинами многогранника $\pi$.

Затем переходим в одну из найденных вершин $b_{i_0}$ (соответственно изменяются $\Delta$-оценки и обратная матрица) и вновь находим соседние с $b_{i_0}$ вершины многогранника $\pi$, среди которых выбираем уже лишь те, которые не встречались раньше.

3. По найденным образующим конуса $\overline{\Lambda(x^0)}$ построим все эффективные грани множества $X$, проходящие через

точку $x^0$. Для этого по каждой образующей $b_k$, $k=\overline{1, p(0)}$, определим множество

$$N^k(x^0) = \begin{cases} \varnothing, \text{ если } b_k \notin \Lambda(x^0); \\ \{x \in X\colon\ b_k' Cx = b_k' Cx^0\}, \text{ если } b_k \in \Lambda(x^0). \end{cases}$$

Множество $N^k(x^0)$ представляет собой некоторую грань множества $X$, и поэтому для построения $N^k(x^0)$ достаточно найти вершины многогранника $N^k(x^0)$. Тогда $N^k(x^0)$ будет определяться как выпуклая оболочка этих вершин.

Для нахождения вершин множества $N^k(x^0)$ воспользуемся специальной задачей линейного программирования

$$b_k' Cx \to \max,\ x \in X. \tag{21}$$

Ясно, что любая точка множества $N^k(x^0)$ является решением (21). Решая задачу (21) стандартным симплекс-методом, получаем базисный план-вершину многогранника $N^k(x^0)$. Остальные вершины $N^k(x^0)$ находятся по схеме, описанной в п. 2 для задачи (20).

Пусть $x^0, x^1, \ldots, x^s$ — вершины многогранника $N^k(x^0)$. Ясно, что все вершины $N^k(x^0)$ являются эффективными базисными планами, среди которых, в частности, имеются соседние с $x^0$ эффективные базисные планы. Множество $N^k(x^0)$ в этом случае можно представить в виде

$$N^k(x^0) = \{x \in R^n\colon\ x = \sum_{i=0}^{s} \beta_i x^i,\ \beta_i \geqslant 0, \sum_{i=0}^{s} \beta_i = 1\}.$$

Таким образом, в точке $x^0$ построены все эффективные грани множества $X$, проходящие через $x^0$, и, кроме того, найдены эффективные базисные планы, принадлежащие этим граням.

4. Переходим в один из найденных эффективных базисных планов $x^1$. Для выбранного эффективного базисного плана $x^1$ повторяем построения пп. 2,3, т. е. находим конус оптимальных весов $\overline{\Lambda(x^1)}$ и множество эффективных граней $N^k(x^1)$, $k = \overline{1, p(1)}$, множества $X$, проходящих через вершину $x^1$. Для того чтобы избежать повторений при построении эффективных граней, нужно при нахождении образующих конуса $\overline{\Lambda(x^1)}$ брать лишь те образующие, которые не встречались ранее.

Покажем, что описанная выше процедура позволяет построить все множество эффективных базисных планов $X^{эф}$.

Согласно теореме 2, множество $X^{эф}$ будет построено, если будет известно множество эффективных базисных планов $N^{эф}$ задачи (1), (2). Таким образом, весь вопрос свелся к доказательству того, что любой элемент множества $N^{эф}$ можно найти с помощью процедуры 1—4. Убедимся в справедливости этого утверждения.

Известно, что множество $N^{эф}$ связно, т. е. для любых $x^*$ и $\hat{x}$ из $N^{эф}$ существует последовательность элементов $x^1, x^2, \ldots, x^k$ из $N^{эф}$ таких, что $x^i$ и $x^{i+1}$, $i=\overline{1, k-1}$, являются соседними и $x^1=x^*$, $x^k=\hat{x}$.

Пусть $x^0$ — начальный эффективный базисный план, а $\bar{x}$ — произвольный элемент из $N^{эф}$. В силу связности $N^{эф}$ существуют такие точки $x^1, x^2, \ldots, x^s$ из $N^{эф}$, что $x^1 = x^0$, $x^s = \bar{x}$ и $x^i$, $x^{i+1}$, $i=\overline{1, s-1}$, являются соседними. Для точки $x^1 = x^0$ построим множество $\bigcup\limits_{k=1}^{p(1)} N^k(x^1)$, $p(1)$ — число образующих конуса $\overline{\Lambda(x^1)}$. По лемме 2 $x^2 \in \bigcup\limits_{i=1}^{p(1)} H^k(x^1)$.

Для точки $x^2$ строим множество $\bigcup\limits_{k=1}^{p(2)} N^k(x^2)$. Опять по лемме 2 имеем включение $x^3 \in \bigcup\limits_{k=1}^{p(2)} N^k(x^2)$. Продолжая этот процесс, получаем на последнем шаге $x^s \in \bigcup\limits_{k=1}^{p(s-1)} N^k(x^{s-1})$, $x^s = \bar{x}$. Этим мы доказали, что, зная начальный эффективный базисный план $x^0$ и последовально осуществляя построение множеств $N^k(x^i)$, можно построить любой элемент множества $N^{эф}$.

Итак, если известен начальный эффективный базисный план, то, осуществляя процедуру 2—4, можно построить множество эффективных планов $X^{эф}$ задачи (1), (2).

**2. Принципы выбора.** Ниже будет описано несколько примеров скаляризуемых и обобщенных принципов выбора. Исследуется также вопрос полноты описываемых принципов выбора.

*Первый принцип (оптимизация взвешенного критерия).* Согласно правилам этого принципа, нужно каждому показателю качества $f(x,\omega)=c'(\omega)x$, $\omega\in\Omega$, присвоить положительное число $\lambda_\omega$, причем числа таковы, что $\sum\limits_{\omega\in\Omega}\lambda_\omega=1$, затем образовать скалярную функцию $\varphi(x,\lambda)$ по правилу $\varphi(x,\lambda)=\sum\limits_{\omega\in\Omega}\lambda_\omega f(x,\omega)$. В качестве решения задачи (1), (2) выбирается точка $x^0$, удовлетворяющая условию $\varphi(x^0,\lambda)=\max\varphi(x,\lambda)$, $x\in X$. Можно привести следующую физическую интерпретацию указанных правил. Задается относительная полезность $\lambda_\omega$ каждого показателя качества $c'(\omega)x$ (общая полезность принимается равной единице), и в качестве решения выбирается точка $x^0$, доставляющая максимальную полезность.

Покажем, что набор описанных правил составляют принцип выбора. Для этого докажем, что план, полученный при помощи данного набора правил, является эффективным.

Пусть $x^0$ удовлетворяет условию $\varphi(x^0,\lambda)=\max\varphi(x,\lambda)$, $x\in X$, но $x^0\notin X^{эф}$. Тогда существует такой элемент $\bar{x}\in X$, что $C\bar{x}\geqslant Cx^0$ и $C\bar{x}\neq Cx^0$. Следовательно,

$$\sum_{\omega\in\Omega}\lambda_\omega f(\bar{x},\omega)=\varphi(\bar{x},\lambda)>\sum_{\omega\in\Omega}\lambda_\omega f(x^0,\omega)=\varphi(x^0,\lambda),$$

что противоречит первоначальному предположению.

Справедливо следующее утверждение. Принцип оптимизации взвешенного критерия является скаляризуемым и полным при $\Lambda=\Lambda_+$, где

$$\Lambda_+=\{\lambda\in R^l:\ \lambda_\omega>0,\ \omega\in\Omega,\ \sum_{\omega\in\Omega}\lambda_\omega=1\}.$$

Скаляризуемость данного принципа очевидна. Докажем полноту. Нетрудно видеть, что $\Phi(\Lambda_+)\subset X^{эф}$. Убедимся в справедливости обратного включения $X^{эф}\subset\Phi(\Lambda_+)$. Пусть $x^0\in X^{эф}$. Из определения эффективности следует, что задача

$$d'y\to\max,\ Ax=b,\ x\geqslant 0,\ Cx-Ey=Cx^0,$$
$$y\geqslant 0,\ d>0, \tag{22}$$

имеет решение $\hat{y}$, причем $d'\hat{y}=0$. Здесь $E$ — единичная $l\times l$-матрица. Тогда двойственная к (22) задача

$$b'u+v'Cx^0\to\min,\ A'u+v'C\geqslant 0,\ -v\geqslant d>0, \tag{23}$$

также имеет решение $\{\hat{u}, \hat{v}\}$ и $b'\hat{u}+\hat{v}'Cx^0=0$. Нетрудно показать, что $\hat{u}$ является решением следующей задачи:

$$b'u\to\min,\ A'u\geqslant-\hat{v}'C. \tag{24}$$

Следовательно, и двойственная к (3) задача

$$-\hat{v}C'x\to\max,\ Ax=b,\ x\geqslant 0, \tag{25}$$

также имеет решение. Но так как $-\hat{v}'Cx^0=b'\hat{u}$, то $x^0$ — тоже решение задачи (25). Значит, $-\hat{v}'Cx^0\geqslant-\hat{v}'Cx$ для любого $x\in X$. Возьмем $\lambda^0_\omega=-\hat{v}_\omega/\sum\limits_{\omega\in\Omega}\hat{v}_\omega$, $\omega\in\Omega$. Ясно, что

$$\lambda^0_\omega>0 \text{ и } \lambda^0Cx^0=\varphi(x^0,\ \lambda^0)=\max_{x\in X}\varphi(x,\ \lambda^0)=\max_{x\in X}\lambda^{0\prime}Cx.$$

Тем самым установлено, что $x^0\in\Phi(\lambda^0)$, где $\lambda^0\in\Lambda_+$. Утверждение доказано.

*Второй принцип выбора (оптимизация по иерархической системе целевых функций).* Выбор решения задачи (1), (2) в данном принципе осуществляется по следующим правилам. Фиксируется некоторый элемент $\omega=(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_l)$ из множества $\Omega^\pi$, где $\Omega^\pi$ — множество перестановок элементов $\Omega$. Решением задачи (1), (2) считается точка $x^0$, удовлетворяющая соотношениям

$$c'_{\omega_i}x^0=\max c'_{\omega_i}x,\ x\in X_i,\ i=\overline{1,\ l};$$

$$X_i=\{x\in X_{i-1}\colon\ c'_{\omega_{i-1}}x=\max_{\tilde{x}\in X_{i-1}} c'_{\omega_{i-1}}\tilde{x}\},\ X_1=X.$$

Таким образом, применение указанных правил к (1), (2) приводит к установлению определенного порядка среди набора целевых функций. Такому упорядочению можно придать, например, следующий физический смысл. Показатель качества с номером $\omega_1$ является самым важным среди других показателей качества; $\omega_2$ — показатель, наиболее важный среди оставшихся показателей, и т. д.

Покажем, что приведенные правила составляют принцип выбора, т.е. покажем, что $x^0\in X^{эф}$. Предположим противное: $x^0\notin X^{эф}$. Тогда существует такой элемент $\hat{x}\in X$, что $C\hat{x}\geqslant Cx^0$, $C\hat{x}\neq Cx^0$. Пусть $\omega_k$ — первый из ряда индексов $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$, на котором выполняется строгое неравенство

$c'_{\omega_k}\hat{x} > c'_{\omega_k}x^0$. Тогда $\hat{x} \in X_{k-1}$, так как, по предположению, $c'_{\omega_s}\hat{x} = c'_{\omega_s}x^0$, $s = \overline{1,\ k-1}$. Далее, $c'_{\omega_k}\hat{x} > c'_{\omega_k}x^0$. Но это невозможно, так как по условию $c'_{\omega_k}x^0 = \max c'_{\omega_k}x$, $x \in X_{k-1}$. Значит, $x^0 \in X^{эф}$. Утверждение доказано.

Описанный принцип выбора зависит от параметра $\omega$. Поэтому если $\omega$ будет пробегать множество $\Omega^{\pi}$, получим семейство однотипных принципов выбора, т. е. обобщенный принцип выбора. Можно показать, что этот принцип не является полным.

*Третий принцип выбора.* Правила действия, образующие данный принцип выбора, состоят в следующем. Вначале строится идеальная (утопическая) точка $R^*$ задачи (1), (2), т. е. точка, координатами которой служат числа $R_{\omega} = \max c'(\omega)x$, $x \in X$, $\omega \in \Omega$. Задается вектор $\lambda \in R^l$, $\lambda \geqslant 0$, и по этому вектору строится множество $X_{\lambda} = \{x \in X: R^* - Cx \leqslant \lambda\}$. В качестве решения $x^0$ задачи (1), (2) берется точка, удовлетворяющая условию $\|R^* - Cx^0\| = \min\|R^* - Cx\|$, $x \in X_{\lambda}$, где $\|\cdot\|$ означает норму в пространстве $R^l$. Множество $X_{\lambda}$ можно трактовать как область допустимых компромиссов. Тогда числа $\lambda_{\omega}$ будут означать величину допустимого отклонения (уступки) по каждому показателю качества от максимального значения. В качестве компромиссного решения выбирается точка, обеспечивающая максимальную близость целевых функций к своим наилучшим значениям.

Покажем, что совокупность описанных правил образует принцип выбора, т. е. покажем, что $x^0 \in X^{эф}$. Предположим, что $x^0 \notin X^{эф}$. Тогда существует $\hat{x} \in X$ такое, что $C\hat{x} \geqslant Cx^0$ и $C\hat{x} \neq Cx^0$. Отсюда следует, что $R^* - C\hat{x} \leqslant R^* - Cx^0$ и $R^* - C\hat{x} \neq R^* - Cx^0$. Так как $R^* - Cx^0 \leqslant \lambda$, то $(R^* - C\hat{x}) \in X_{\lambda}$. Поэтому $\|R^* - C\hat{x}\| < \|R^* - Cx^0\|$, что противоречит условию $\|R^* - Cx^0\| = \min\|R^* - Cx\|$, $x \in X_{\lambda}$. Значит, $x^0 \in X^{эф}$. Имеет место следующее утверждение: третий принцип выбора является скаляризуемым и полным.

Пусть $\Lambda = \Lambda_{\geqslant}$, где $\Lambda_{\geqslant} = \{\lambda \in R^l;\ \lambda \geqslant 0\}$. Скаляризующую функцию на $X \times \Lambda_{\geqslant}$ зададим в виде

$$\varphi(x,\ \lambda) = \begin{cases} -\|R^* - Cx\|, & x \in X_{\lambda}, \\ -\infty, & x \notin X \setminus X_{\lambda}. \end{cases}$$

Так как для любого $\lambda \in \Lambda_{\geqslant}$, $\max\limits_{x\in X} \varphi(x,\lambda) = \max\limits_{x\in X_\lambda} \varphi(x,\lambda)$, то скаляризуемость указанного принципа выбора очевидна. Докажем полноту, т. е. покажем, что $X^{эф} = \Phi(\Lambda_{\geqslant})$. Включение $\Phi(\Lambda_{\geqslant}) \subset X^{эф}$ доказано выше. Установим справедливость обратного включения. Пусть $x^0 \in X^{эф}$. Положим $\lambda^0 = R^* - Cx^0$. Ясно, что $\lambda^0 \in \Lambda_{\geqslant}$. Покажем, что $x^0 \in \Phi(\lambda^0)$. Предположим, что $x^0 \notin \Phi(\lambda^0)$. Тогда существует $\hat{x} \in X_{\lambda^0}$ такое, что $\| R^* - C\hat{x} \| < \| R^* - Cx^0 \|$, но так как $R^* - C\hat{x} \leqslant \lambda^0 = R^* - Cx^0$, то $R^* - C\hat{x} \leqslant R^* - Cx^0$ и $R^* - C\hat{x} \neq R^* - Cx^0$. Следовательно, $C\hat{x} \geqslant Cx^0$ и $C\hat{x} \neq Cx^0$, что противоречит условию $x^0 \in X^{эф}$. Утверждение доказано.

*Четвертый принцип выбора.* Здесь правила получения решения задачи (1), (2) следующие. Находим идеальную точку $R^*$ задачи (1), (2), затем задаем числа $\lambda_\omega$, $\omega \in \Omega$, и решением (1), (2) считаем точку $x^0$, удовлетворяющую условию

$$\min_{\omega\in\Omega} [c'(\omega)\, x^0 + \lambda_\omega - R^*_\omega] = \max_{x\in X} \min_{\omega\in\Omega} [c'(\omega)\, x + \lambda_\omega - R^*_\omega]. \quad (26)$$

Пусть $\Lambda = \Lambda^{эф}$, где $\Lambda^{эф} = \{\lambda \in R^l\colon\ \lambda = R^* - Cx,\ \ x \in X^{эф}\}$. На множестве $X \times \Lambda^{эф}$ определим скалярную функцию

$$\varphi(x,\lambda) = \min_{\omega\in\Omega} [c'(\omega)\, x + \lambda_\omega - R^*_\omega],\ \ \omega \in \Omega.$$

Справедливо утверждение.

Правила выбора решения (26) составляют при $\Lambda = \Lambda^{эф}$ скаляризуемый и полный принцип выбора в задаче (1), (2).

Вначале докажем, что $\Phi(\Lambda^{эф}) \subset X^{эф}$. Отсюда очевидным образом будет следовать, что правила (26) являются скаляризуемым принципом выбора. Пусть $x^0 \in \Phi(\Lambda^{эф})$. Тогда существует такой элемент $x^* \in X^{эф}$, что $\lambda^0 = R^* - Cx^*$ и $x^0 \in \Phi(\lambda^0)$. Покажем, что $x^* \in \Phi(\lambda^0)$. Предположим противное. Тогда существует такой элемент $\bar{x} \in X$, что $\varphi(\bar{x}, \lambda^0) > \varphi(x^*, \lambda^0)$, т. е.

$$c'(\omega)\, \bar{x} - c'(\omega)\, x^* \geqslant \min_{\omega\in\Omega} [c'(\omega)\, \bar{x} + (R^*_\omega - c'(\omega)\, x^*) - R^*_\omega] > \min_{\omega} [c'(\omega)\, x^* + (R^*_\omega - c'(\omega)\, x^*) - R^*_\omega] = 0,\ \omega \in \Omega.$$

Но это противоречит условию $x^* \in X^{эф}$. Таким образом, $x^* \in \Phi(\lambda^0)$. Следовательно, $\varphi(x^*, \lambda^0) = \varphi(x^0, \lambda^0)$, т. е.

$$\min_{\omega\in\Omega} [c'(\omega)\, x^0 + \lambda^0_\omega - R^*_\omega] = \min_{\omega\in\Omega} [c'(\omega)\, x^* + \lambda^*_\omega - R^*_\omega] = 0.$$

Отсюда следует, что $c'(\omega)x^* \leqslant c'(\omega)x^0$, $\omega \in \Omega$. Но так как $x^* \in X^{эф}$, из последних неравенств получаем, что $x^0 \in X^{эф}$.

Теперь покажем, что $X^{эф} \subset \Phi(\Lambda^{эф})$. Пусть $x^0 \in X^{эф}$. Положим $\lambda^0 = R^* - Cx^0$. Покажем, что $x^0 \in \Phi(\lambda^0)$. Предположим противное. Тогда найдется такой элемент $\hat{x} \in X$, что

$$c'(\omega)\hat{x} - c'(\omega)x^0 \geqslant \min_{\omega} [c'(\omega)\hat{x} + (R^*_\omega - c'(\omega)x^0) - - R^*_\omega] > \min_{\omega \in \Omega} [c'(\omega)x^0 + R^*_\omega - c'(\omega)x^0 - R^*_\omega] = 0, \ \omega \in \Omega.$$

Последние неравенства противоречат тому, что $x^0 \in X^{эф}$. Утверждение доказано.

*Пятый принцип выбора.* При выборе решения задачи (1), (2) в соответствии с данным принципом руководствуются следующими правилами действий. Как и в предыдущем принципе выбора, вначале строится идеальная точка $R^*$, затем задаются числа $\lambda_\omega$, $\omega \in \Omega$, и решением задачи (1), (2) считается точка $x^0$, удовлетворяющая соотношению

$$\min_{\omega \in \Omega} \lambda_\omega (c'(\omega)x^0 - R^*_\omega) = \max_{x \in X} \min_{\omega \in \Omega} \lambda_\omega (c'(\omega)x - R^*_\omega). \quad (27)$$

Множество параметров определим следующим образом:

$$\Lambda^{эф}_+ = \{\lambda \in R^l : \lambda_\omega = 1/(R^*_\omega - c'(\omega)x), \ R^*_\omega \neq c'(\omega)x, \ \omega \in \Omega, \\ x \in X^{эф}\}.$$

Пусть на множестве $X \times \Lambda^{эф}_+$ задана скалярная функция

$$\varphi(x, \lambda) = \min_{\omega \in \Omega} \lambda_\omega (c'(\omega)x - R^*_\omega).$$

Правила выбора (27) при $\lambda \in \Lambda^{эф}_+$ составляют скаляризуемый принцип выбора.

Пусть $x^0 \in \varphi(\lambda^0)$, где $\lambda^0$ — некоторый вектор из $\Lambda^{эф}_+$. Покажем, что $x^0 \in X^{эф}$. Так как $\lambda^0 \in \Lambda^{эф}_+$, то существует такой элемент $x^* \in X^{эф}$, что $\lambda^0_\omega = 1/(R^*_\omega - c'(\omega)x^*)$, $\omega \in \Omega$. Докажем, что $x^* \in \Phi(\lambda^0)$. Предположим противное. Тогда существует такой элемент $\hat{x} \in X^{эф}$, что

$$\lambda^0_\omega (c'(\omega)\hat{x} - R^*_\omega) \geqslant \min_{\omega \in \Omega} \lambda^0_\omega (c'(\omega)\hat{x} - R^*_\omega) > \min_{\omega \in \Omega} \lambda^0_\omega \times \\ \times (c'(\omega)x^* - R^*_\omega) = 1, \ \omega \in \Omega.$$

Отсюда имеем $c'(\omega)\hat{x} - R^*_\omega > 1/\lambda^0_\omega = c'(\omega)x^* - R^*_\omega$, $\omega \subset \Omega$. Значит, $c'(\omega)\hat{x} > c'(\omega)x^*$, $\omega \in \Omega$, что невозможно, так как $x^* \in X^{эф}$. Таким образом, $x^* \in \Phi(\lambda^0)$. Далее:

$$\lambda^0_\omega (c'(\omega)x^0 - R^*_\omega) \geqslant \min_{\omega\in\Omega} \lambda^0_\omega (c'(\omega)x^0 - R^*_\omega) =$$
$$= \min_{\omega\in\Omega} \lambda^0_\omega (c'(\omega)x^* - R^*_\omega) = 1, \ \omega \in \Omega.$$

Следовательно, $c'(\omega)x^0 - R^*_\omega \geqslant c'(\omega)x^* - R^*_\omega$, $\omega \in \Omega$, или $c'(\omega)x^0 \geqslant c'(\omega)x^*$, $\omega \in \Omega$. Но $x^* \in X^{эф}$. Поэтому из последних неравенств следует, что $x^0 \in X^{эф}$. Утверждение доказано.

Замечание. Необходимо отметить, что скаляризуемый принцип выбора (27) не является полным при $\Lambda = \Lambda^{эф}_+$, т. е. существуют точки в $X^{эф}$, которые невозможно получить с помощью (27) ни при каких $\lambda$ из $\Lambda^{эф}_+$. Однако имеет место следующее утверждение. Множество $X^{эф}$ совпадает с замыканием множества $\Phi(\Lambda^{эф}_+)$.

Включение $\overline{\Phi(\Lambda^{эф}_+)} \subset X^{эф}$ следует из того, что принцип выбора (27) является скаляризуемым. Докажем обратное включение. Пусть $x^0 \in X^{эф}$. Вначале предположим, что $x^0$—такой элемент, что $R^*_\omega \neq \neq c'(\omega)x^0$ для всех $\omega \in \Omega$. Положим $\lambda^0_\omega = 1/(R^*_\omega - c'(\omega)x^0)$, $\omega \in \Omega$. Ясно, что $\lambda^0 \in \Lambda^{эф}_+$. Покажем, что $x^0 \in \Phi(\lambda^0)$. Предположим противное. Тогда найдется такое $\hat{x} \in X$, что

$$\lambda^0_\omega (c'(\omega)\hat{x} - R^*_\omega) \geqslant \min_{\omega\in\Omega} \lambda^0_\omega (c'(\omega)\hat{x} - R^*_\omega) > \min_{\omega\in\Omega} \lambda^0_\omega (c'(\omega)x^0 -$$
$$- R^*_\omega) = 1, \ \omega \in \Omega.$$

Отсюда следует, что $c'(\omega)\hat{x} - R_\omega > c'(\omega)x^0 - R^*_\omega$, $\omega \in \Omega$. Легко видеть, что последнее противоречит условию $x^0 \in X^{эф}$. Пусть теперь элемент $x^0 \in X^{эф}$ и такой, что $R^*_\omega = c'(\omega)x^0$, $\omega \in I_0 \subset \Omega$, $R^*_\omega \neq \neq c'(\omega)x^0$, $\omega \in \Omega \setminus I_0$. Так как множество $X^{эф}$ является компактом, то существует последовательность такая, что $\{x^n\} \to x^0$, $n \to \infty$, и $c'(\omega)x^n \neq R^*_\omega$, $\omega \in \Omega$. Тогда по доказанному выше $x^n \in \Phi(\Lambda^{эф}_+)$ для любого $n$. Так как $\{x^n\} \to x^0$, $n \to \infty$, где $x^n \in \Phi(\Lambda^{эф}_+)$, то $x^0 \in \overline{\Phi(\Lambda^{эф}_+)}$. Утверждение доказано.

*Шестой принцип выбора.* Правила выбора решения предлагаемого принципа состоят в следующем. Строим идеальную в (1), (2) точку $R^*$, затем для заданного параметра $\lambda \in R^l$ определяем число $\mu^0 = \min\limits_{\mu}\{\mu \geqslant 0 : \mu\lambda = R^* - Cx,\ x \in X\}$. Решением задачи (1), (2) объявляется точка $x^0 \in X$ такая, что $\mu^0\lambda = R^* - Cx^0$.

Множество параметров зададим в виде $\Lambda^{эф} = \{\lambda \in R^l;\ \lambda = R^* - Cx,\ x \in X^{эф}\}$. Тогда совокупность описанных правил при $\Lambda = \Lambda^{эф}$ является обобщенным и полным принципом выбора.

Вначале докажем, что описанные правила образуют принцип выбора, если $\lambda \in \Lambda^{эф}$. Пусть $x^0$ — решение (1), (2), полученное с помощью приведенных выше правил для некоторого $\lambda^0 \in \Lambda^{эф}$. Покажем, что $x^0 \in X^{эф}$. Так как $\lambda^0 \in \Lambda^{эф}$, то существует такой элемент $x^* \in X^{эф}$, что $\lambda^0 = R^* - Cx^*$. Так как $x^0$ — результат действия по описанным правилам при $\lambda = \lambda^0$, то существует такое число $\mu^0$, $\mu^0 = \min\limits_{\mu}\{\mu \geqslant 0;\ \mu\lambda^0 = R^* - Cx,\ x \in X\}$, что $\mu^0\lambda^0 = \mu^0(R^* - Cx^*) = R^* - Cx^0$. В силу того что $\lambda^0 = R^* - Cx^*$ и $x^* \in X^{эф}$, имеем $\mu^0 = \min\limits_{\mu}\{\mu \geqslant 0: \mu\lambda^0 = R^* - Cx,\ x \in X\} \leqslant 1$. Предположим, что $\mu^0 < 1$. Тогда $R^* - Cx^* > R^* - Cx^0$, что противоречит условию $x^* \in X^{эф}$. Следовательно, $\mu^0 = 1$. Тогда из равенств $\mu^0\lambda^0 = R^* - Cx^0$ и $\mu^0 = 1$ получаем $Cx^0 = Cx^*$. Так как $x^* \in X^{эф}$, то $x^0 \in X^{эф}$. Этим доказано, что описанные правила при $\lambda \in \Lambda^{эф}$ составляют принцип выбора.

Если параметр $\lambda$ пробегает множество $\Lambda^{эф}$, то приведенные правила образуют некоторый обобщенный принцип выбора. Покажем, что построенный обобщенный принцип является полным. Для этого докажем, что любая точка из $X^{эф}$ может быть получена с помощью данного обобщенного принципа при некотором $\lambda^0 \in \Lambda^{эф}$.

Пусть $x^0 \in X^{эф}$. Положим $\lambda^0 = R^* - Cx^0$. Ясно, что $\lambda^0 \in \Lambda^{эф}$. Предположим, что элемент $x^0$ не является результатом применения указанных правил к (1), (2) при $\lambda = \lambda^0$. Пусть $\bar{x}$ — результат действия обобщенного принципа на (1), (2) при $\lambda = \lambda^0$. Тогда существует число $\bar{\mu}$ такое, что $\bar{\mu}(R^* - Cx^0) = \bar{\mu}\lambda^0 = R^* - C\bar{x}$. Если предположить, что $\bar{\mu} > 1$, то получим противоречие с тем, что $\bar{x}$ найдено при помощи обобщенного принципа при $\lambda = \lambda^0$. Если предположить, что $\mu < 1$, то тогда $R^* - Cx^0 > R^* - C\bar{x}$, что противоречит условию $x^0 \in X^{эф}$. Значит, $\mu = 1$. Следовательно, $R^* - Cx^0 = R^* - C\bar{x}$, т. е. $x^0$ является результатом применения обобщенного принципа выбора при $\lambda = \lambda^0$. Утверждение доказано.

*Седьмой принцип выбора.* В соответствии с правилами данного принципа выбора для нахождения решения задачи (1), (2) поступаем следующим образом. Вычисляем идеальную в (1), (2) точку $R^*$. По заданному $l$-вектору $\lambda$ определяем множество $X_\lambda = \{x \in X\colon Cx \geqslant R^* - \lambda\}$. Затем по заданному элементу $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_l)$ из $\Omega^\pi$, где $\Omega^\pi$ означает множество перестановок элементов $\Omega$, выбор решения $x^0$ осуществляем по правилу

$$c'(\omega_i)x^0 = \max c'(\omega_i)x,\ x \in X_i;$$
$$X_i = \{\tilde{x} \in X_{i-1}\colon c'(\omega_{i-1})\tilde{x} = \max c'(\omega_{i-1})x,\ x \in X_{i-1}\}, \quad (28)$$
$$i = \overline{1, l},\ X_1 = X_\lambda.$$

Другими словами, для выбора решения выделяется вначале область допустимых компромиссов $X_\lambda$ и затем на этом множестве оптимизируется некоторая иерархическая система целевых функций.

Множество параметров определим в виде $\Lambda^\Omega = \Lambda_+ \times \Omega^\pi$, где $\Lambda_+ = \{\lambda \in R^l\colon \lambda \geqslant 0\}$.

Тогда имеет место следующее утверждение. Совокупность правил (28) при $\Lambda = \Lambda^\Omega$ образует полный обобщенный принцип выбора. Вначале покажем, что план, выбранный по правилам (28) для некоторого $\lambda \in \Lambda^\Omega$, будет эффективным. Пусть $x^0$ — план, полученный из (28) при некотором $\alpha^0 \in \Lambda^\Omega$, где $\alpha^0 = (\omega^0, \lambda^0)$, $\omega^0 = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_l)$, $\lambda^0 \in \Lambda^+$. Предположим, что $x^0$ не является эффективным планом. Тогда существует такая точка $\bar{x} \in X$, что $c'(\omega_i)\bar{x} \geqslant c'(\omega_i)x^0$, $i = \overline{1, l}$, и для некоторого $\omega_k$, $1 \leqslant k \leqslant l$; $c'(\omega_k)\bar{x} > c'(\omega_k)x^0$. Без ограничения общности будем считать, что $\omega_k$ — первый индекс в последовательности $\omega_1$, $\omega_2, \ldots, \omega_l$, на котором нарушаются равенства $c'(\omega_i)\bar{x} = c'(\omega_i)x^0$, $i = \overline{1, l}$. Ясно, что $\bar{x} \in X_\lambda$ и $\bar{x} \in X_k$. Но $c'(\omega_k)\bar{x} > c'(\omega_k)x^0$, что невозможно, так как план $x^0$ удовлетворяет соотношениям (28).

Теперь докажем, что обобщенный принцип выбора (28) является полным. Пусть $x^0 \in X^{эф}$. Положим $\alpha^0 = (\omega;\ \lambda^0)$, где $\lambda^0 = R^* - Cx^0$, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_l)$ — произвольный элемент из $\Omega^\pi$. Покажем, что $x^0$ удовлетворяет соотношениям (28) при $\lambda=\lambda^0$. Ясно, что $X_{\lambda^0}=\{x\in X\colon Cx\geqslant Cx^0\}$. Предположим, что $x^0$ не является решением (28). Тогда $x^0$ не удовлетворяет соотношениям $c'(\omega_i)x^0=\max c'(\omega_i)x$, $x\in X_i$, $i=\overline{1, l}$. Пусть $\omega_k$ — первый индекс, на котором нарушаются эти соотношения. Тогда существует такой элемент $\bar{x}\in X_k$, что $c'(\omega_k)\bar{x}>c'(\omega_k)x^0$. Так как $\bar{x}\in X_{\lambda^0}$, то $C\bar{x}\geqslant Cx^0$. С учетом предыдущего получаем, что $C\bar{x}\geqslant Cx^0$ и $C\bar{x}\neq Cx^0$, что противоречит эффективности плана $x^0$. Утверждение доказано.

*Восьмой принцип выбора.* Правила действия в данном случае заключаются в следующем. На значения $(l-1)$ целевых функций накладываются ограничения снизу, после чего они включаются в число основных ограничений (1). На новом множестве планов оптимизируется оставшаяся целевая функция. Решением задачи (1), (2) считается точка, доставляющая максимум оставшейся целевой функции.

Указанные правила действия можно описать следующим образом. Пусть $\Omega_0\subset\Omega$ и $|\Omega_0|=l-1$. Для заданного вектора $\lambda\in R^{l-1}$ определим множество $X_\lambda=\{x\in X\colon c'(\omega)x\geqslant\lambda,\ \omega\in\Omega_0\}$. Тогда решением считаем точку $x^0$, удовлетворяющую условию

$$c'(\omega)x^0=\max c'(\omega)x,\ x\in X_\lambda,\ \omega=\Omega\setminus\Omega_0. \qquad (29)$$

Для заданного $\Omega_0$ множество параметров определим в виде

$$\Lambda_{\Omega_0}^{\text{эф}}=\{\lambda\in R^{l-1}\colon\ \lambda_\omega=c'(\omega)x,\ \omega\in\Omega_0,\ x\in X^{\text{эф}}\}.$$

Тогда имеет место следующее утверждение. Правила (29) при $\Lambda=\Lambda_{\Omega_0}^{\text{эф}}$ образуют полный обобщенный принцип выбора.

Вначале докажем, что любое решение, найденное по правилам (29) при $\lambda\in\Lambda_{\Omega_0}^{\text{эф}}$, является эффективным. Пусть $x^0$ — решение (29), полученное при $\lambda=\lambda^0\in\Lambda_{\Omega_0}^{\text{эф}}$. Тогда существует такой элемент $x^*\in X^{\text{эф}}$, что $\lambda_\omega^0=c'(\omega)x^*$, $\omega\in\Omega_0$. Нетрудно проверить, что $x^*$ удовлетворяет (29) при $\lambda=\lambda^0$. Поэтому $Cx^0\geqslant Cx^*$. Если предположить, что $x^0\notin X^{\text{эф}}$, то существует такой элемент $\hat{x}\in X$, что $C\hat{x}\geqslant Cx^0$ и $C\hat{x}\neq Cx^0$. Но тогда $C\hat{x}\geqslant Cx^*$ и $C\hat{x}\neq Cx^*$, что противоречит условию $x^*\in X^{\text{эф}}$.

Теперь покажем, что любой план $x^0$ из $X^{эф}$ можно получить обобщенным принципом выбора (29) при некотором $\lambda^0 \in \Lambda^{эф}_{\Omega_0}$. Пусть $x^0 \in X^{эф}$. Положим $\lambda^0 = c'(\omega) x^0$, $\omega \in \Omega_0$. Покажем, что план $x^0$ можно получить с помощью (29) при $\lambda = \lambda^0$. Предположим противное. Тогда существует такой элемент $\hat{x} \in X_{\lambda^0}$, что $c'(\omega)\hat{x} > c'(\omega) x^0$, где $\omega = \Omega \setminus \Omega_0$. Так как $\hat{x} \in X_{\lambda_0}$, то $c'(\omega)\hat{x} \geqslant c'(\omega)x^0$, $\omega \in \Omega_0$. Отсюда с учетом предыдущего заключаем, что $x^0 \notin X^{эф}$. Противоречие. Утверждение доказано.

## § 5. Игровые задачи

Рассматривается обобщенная задача линейного программирования, в которой параметры целевой функции задачи выбираются противником исследователя так, чтобы в противовес исследователю минимизировать значение целевой функции. Для случая, когда оба участника используют чистые планы, изучаются два типа информированности участников.

**1. Максимин.** Рассмотрим задачу

$$f(x) = \min_{\omega \in \Omega} (c'(\omega) x + \alpha(\omega)) \to \max_x, \quad Ax = b, \quad d_* \leqslant x \leqslant d^*, \quad (1)$$

где $x$ — $n$-вектор; $b$ — $m$-вектор; $\alpha$ — скаляр; $\Omega$ — конечное множество элементов, выбором которых распоряжается противник; $x \in X = \{x: Ax = b, \ d_* \leqslant x \leqslant d^*\}$; $X$ — множество планов исследователя. Остальные обозначения традиционны.

Выбор исследователем оптимального плана $x^0$ как решения задачи (1) оправдан и целесообразен в тех случаях, когда противник перед каждым своим выбором $\omega \in \Omega$ знает о выборе $x \in X$, сделанном исследователем. Таким образом, с точки зрения исследователя рассматривается предельно пессимистическая ситуация или, другими словами, ищется план $x^0$, гарантирующий исследователю выигрыш в самом неблагоприятном для него случае.

Пусть $\{x, A_{оп}\}$ — начальный опорный план задачи (1). Найдем приращение $\Delta f(x, \Delta x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ целевой функции, порожденное планом $x + \Delta x$. Поскольку $A\Delta x = 0$, то с помощью опоры $A_{оп}$ получим

$$\Delta f(x,\ \Delta x)=\min_{\omega\in\Omega}\ [c'(\omega)\,x+\alpha(\omega)+(c'_{\text{н}}(\omega)-$$
$$-c'_{\text{оп}}(\omega)\,A^{-1}_{\text{оп}}A_{\text{н}})\,\Delta x_{\text{н}}]-\min_{\omega\in\Omega}(c'(\omega)\,x+\alpha(\omega)). \qquad (2)$$

Ясно, что задача (1) эквивалентна задаче

$$\Delta f(x,\ \Delta x)\to\max_{\Delta x},\ d_{*}-x\leqslant\Delta x\leqslant d^{*}-x,$$
$$\Delta x_{\text{оп}}=-A^{-1}_{\text{оп}}A_{\text{н}}\Delta x_{\text{н}}. \qquad (3)$$

Следуя адаптивному методу, по задаче (3) составим производную задачу

$$\beta(x,\ A_{\text{оп}},\ l_{\text{н}})=\min_{\omega\in\Omega}[c'(\omega)\,x+\alpha(\omega)+$$
$$+(c'_{\text{н}}(\omega)-c'_{\text{оп}}(\omega)\,A^{-1}_{\text{оп}}A_{\text{н}})\,l_{\text{н}}]-\min_{\omega\in\Omega}(c'(\omega)\,x+\alpha(\omega))\to\max_{l_{\text{н}}},$$
$$d_{*\text{н}}-x_{\text{н}}\leqslant l_{\text{н}}\leqslant d^{*}_{\text{н}}-x_{\text{н}}, \qquad (4)$$

которая отличается от (3) тем, что в ней не учитываются ограничения на опорные переменные.

Задача (4) является линейной. Ниже будет приведен специальный алгоритм ее решения. Пусть $l^{0}_{\text{н}}$ — решение производной задачи.

**Критерий оптимальности.** Равенство

$$\beta(x,\ A_{\text{оп}},\ l^{0}_{\text{н}})=0 \qquad (5)$$

достаточно; в случае невырожденности оно необходимо для оптимальности опорного плана $\{x,\ A_{\text{оп}}\}$ в задаче (1).

Доказательство. *Достаточность.* Если выполняется (5), то тем более будет $\Delta f(x,\ \Delta x^{0})=0$, где $\Delta x^{0}$ — решение задачи (3). Таким образом, $\Delta(x+\Delta x)\leqslant f(x)$ для всех планов $x+\Delta x$.

*Необходимость.* Пусть на невырожденном оптимальном опорном плане $\{x,\ A_{\text{оп}}\}$ равенство (5) не выполняется:

$$\beta(x,\ A_{\text{оп}},\ l^{0}_{\text{н}})>0. \qquad (6)$$

При любом значении $\Theta$, $0<\Theta\leqslant 1$, вектор $\Theta l^{0}_{\text{н}}$ является планом задачи (4) и на нем, в силу (6), выполняется неравенство $\beta(x,\ A_{\text{оп}},\ \Theta l^{0}_{\text{н}})>0$. Для невырожденного опорного плана $\{x,\ A_{\text{оп}}\}$ при достаточно малых $\Theta>0$ вектор $\Theta l^{0}_{\text{оп}}=-\Theta A^{-1}_{\text{оп}}A_{\text{н}}l^{0}_{\text{н}}$ удовлетворяет неравенствам $d_{*\text{оп}}-x_{\text{оп}}\leqslant\Theta l^{0}_{\text{оп}}\leqslant d^{*}_{\text{оп}}-x_{\text{оп}}$. Отсюда следует, что при указанных $\Theta$ вектор $x+\Theta l^{0}$ является планом задачи (1) и выполняется неравенство $f(x+\Theta l^0) - f(x) > 0$, которое противоречит оптимальности плана $\{x, A_{\text{оп}}\}$.

**Достаточное условие субоптимальности.** Если на опорном плане $\{x, A_{\text{оп}}\}$ равенство (5) не выполняется, но

$$\beta(x, A_{\text{оп}}, l_{\text{н}}^0) \leqslant \varepsilon, \tag{7}$$

то план $x$ является $\varepsilon$-оптимальным планом задачи (1).

Доказательство. Имеем

$$\Delta f(x, \Delta x) = f(x+\Delta x) - f(x) \leqslant \beta(x, A_{\text{оп}}, l_{\text{н}}^0). \tag{8}$$

Поскольку для каждого плана $x$ найдется такое приращение $\Delta x$, что $x^0 = x + \Delta x$, то из (8) с учетом (7) заключаем, что $f(x^0) - f(x) \leqslant \varepsilon$.

Пусть $\beta(x, A_{\text{оп}}, l_{\text{н}}^0) > \varepsilon$, где $\varepsilon$ — заданная точность приближения к оптимальному плану $x^0$ по значениям целевой функции. Новый план $\bar{x}$ строим по формуле $\bar{x} = x + \Theta l^0$, где $l^0 = \{l_{\text{оп}}^0, l_{\text{н}}^0\}$; $l_{\text{оп}}^0 = -A_{\text{оп}}^{-1} A_{\text{н}} l_{\text{н}}^0$; $\Theta$—максимально допустимый шаг вдоль $l^0$:

$$\Theta = \min\{1, \Theta_{i_0}\}, \quad \Theta_{i_0} = \min \Theta_i,$$

$$\Theta_i = \begin{cases} \dfrac{d_i^* - x_i}{l_i^0}, & \text{если } l_i^0 > 0; \\ \dfrac{d_{i*} - x_i}{l_i^0}, & \text{если } l_i^0 < 0, \ i \in I_{\text{оп}}; \\ \infty, & \text{если } l_i^0 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

При $\beta(\bar{x}, A_{\text{оп}}, l_{\text{н}}^0) \leqslant \varepsilon$ процесс решения останавливается на $\varepsilon$-оптимальном плане $\bar{x}$. Если $\beta(\bar{x}, A_{\text{оп}}, l_{\text{н}}^0) > \varepsilon$, то плану $\bar{x}$ приписываем новую опору $\bar{A}_{\text{оп}} = (A_{\text{оп}} \setminus a_{i_0}) \cup a_{j_0}$, $j_0 \in I_{\text{н}}$, $x_{i_0 j_0} \neq 0$, $x_{i_0 j} = e'_{i_0} A_{\text{оп}}^{-1} a_j$, и новую итерацию начинаем с опорного плана $\{\bar{x}, \bar{A}_{\text{оп}}\}$ и соответствующей ему производной задачи (4). Проблема выбора оптимальной опоры $\bar{A}_{\text{оп}}$ здесь не обсуждается.

Замечания. 1. Производную задачу не обязательно решать до конца. Пусть $l_{\text{н}}^{\varepsilon_1}$ — $\varepsilon_1$-оптимальный план. Если $\beta(x, A_{\text{оп}}, l_{\text{н}}^{\varepsilon_1}) + \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon$, то план $x$ является $\varepsilon$-оптимальным планом задачи (1). В противном случае план $l_{\text{н}}^{\varepsilon_1}$ можно принять за приближенное решение задачи (4) и проверить на субоптимальность в задаче (1) план $\bar{x} = x + \Theta l^{\varepsilon_1}$.

2. Поскольку для невырожденного опорного плана $\{x, A_{оп}\}$ каждый вектор $l$, полученный на итерациях производной задачи, является подходящим направлением, то новый план $\bar{x}$ можно строить по $l$: $\bar{x} = x + \Theta l$.

3. Для упрощения производной задачи ее можно формировать только по $\omega \in \Omega$, активным для плана $x$ (элемент $\omega_* \in \Omega$ называется *активным* в задаче (1), если $\min\limits_{\omega\in\Omega}(c'(\omega)x + \alpha(\omega)) = c'(\omega_*)x + \alpha(\omega_*)$). Если $l$ — решение соответствующей задачи, то при вычислении шага используется формула $\Theta^0 = \min(1, \Theta_{i_0}, \Theta_{\omega_0})$, где $\Theta_{i_0}$ определяется по (9); $\Theta_{\omega_0} = \min\limits_{\omega} \Theta_\omega$; $\omega$ принадлежит пассивным для плана $x$ элементам из $\Omega$; $\Theta_\omega = (c'(\omega)x + \alpha(\omega) - f(x))/(\beta(x, A_{оп}, l_н) + \Delta'_н(\omega) l_н)$.

В этом случае направление $l$ совпадает с допустимым направлением, вдоль которого производная целевой функции задачи (1) максимальна.

Приведем теперь алгоритм решения *) задачи

$$f(x) = \min_{i\in I} f_i(x) \to \max_x, \quad d_* \leqslant x \leqslant d^*,$$

$$f_i(x) = a'_i x + b_i, \quad a_i = A(i, J), \quad i \in I, \tag{10}$$

частным случаем которой является производная задача (4). Вектор $x$, удовлетворяющий условиям $d_* \leqslant x \leqslant d^*$, назовем *планом* задачи (10). *Опорой* задачи (10) будем называть любую невырожденную матрицу $A_{оп} = A(I_{оп}, J_{оп}) = \{a_{ij}, i \in I_{оп}, j \in J_{оп}\}$, $I_{оп} \subset I$, $J_{оп} \subset J$. Пара $\{x, A_{оп}\}$ — опорный план. Опорный план называется *невырожденным,* если $d_*(J_{оп}) < x(J_{оп}) < d^*(J_{оп})$, $f_i(x) > f(x)$, $i \in I_н = I \setminus I_{оп}$.

Пусть $\{x, A_{оп}\}$ — начальный невырожденный опорный план. Строим новый план $\bar{x} = x + \Theta l$, где $l = \{l(J_{оп}) = A_{оп}^{-1} e, \; l(J_н) = 0\}$ — подходящее направление для плана $x$; $e = \{1, 1, \ldots, 1\}$; $\Theta = \min\{\Theta_{i_0}, \Theta_{j_0}\}$: $\Theta_{j_0} = \min \Theta_j$, $j \in J_{оп}$, $\Theta_j = (d^*_j - x_j)/l_j$, если $l_j > 0$; $\Theta_j = (d_{*j} - x_j)/l_j$, если $l_j < 0$; $\Theta_j = \infty$, если $l_j = 0$; $\Theta_{i_0} = \min \Theta_i$, $i \in I_н$; $\Theta_i = (f_i(x) - f(x))/(1 - a'_i l)$, если $a'_i l < 1$; $\Theta_i = \infty$, если $a'_i l \geqslant 1$.

Пусть $\Theta = \Theta_{j_0}$. Рассмотрим множества

$$I_0 = \{i: i \in I_{оп}, \; f_i(\bar{x}) > f(\bar{x}), \; x^l_{j_0 i} \neq 0;$$
$$f_i(\bar{x}) = f(\bar{x}), \; k x^l_{j_0 i} > 0\};$$

*) Этот алгоритм и алгоритм решения производной задачи п. 1 § 1 гл. VII построены независимо О. И. Костюковой и Е. И. Шилкиной.

$$J_0 = \{j\colon j \in J_{\text{н}},\ d_{*j} < \bar{x}_j < d^*_j,\ x_{j_0 j} \neq 0;$$
$$\bar{x}_j = d^*_j,\ kx_{j_0 j} > 0;\ \bar{x}_j = d_{*j},\ kx_{j_0 j} < 0\}, \qquad (11)$$

где $k = 1$, если $\bar{x}_{j_0} = d_{*j_0}$; $k = -1$, если $\bar{x}_{j_0} = d^*_{j_0}$; $\{x^l_{j_0 i},\ i \in I_{\text{оп}}\}$, $\{x_{j_0 j},\ j \in J_{\text{н}}\}$ — $j_0$-е строки матриц $A^{-1}_{\text{оп}}$, $A^{-1}_{\text{оп}} A(I_{\text{оп}}, J_{\text{н}})$.

Если $I_0 \cup J_0 = \varnothing$, то план $\bar{x}$ является оптимальным в задаче (10).

Пусть $I_0 \cup J_0 \neq \varnothing$. Если $\{i \in I_0\colon f_i(\bar{x}) > f(\bar{x})\} \cup \{j \in J_0 : d_{*j} < x_j < d^*_j\} \neq \varnothing$, то выбираем элемент $s$, принадлежащий этому множеству. Если оно пусто, то выбираем любой элемент $s$ из $I_0 \cup J_0$. Плану $\bar{x}$ приписываем новую опору $\bar{A}_{\text{оп}} = A(\bar{I}_{\text{оп}}, \bar{J}_{\text{оп}})$, где $\bar{I}_{\text{оп}} = I_{\text{оп}} \setminus s$, $\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}} \setminus j_0$, если $s \in I_0$; $\bar{I}_{\text{оп}} = I_{\text{оп}}$, $\bar{J}_{\text{оп}} = (J_{\text{оп}} \setminus j_0) \cup s$, если $s \in J_0$.

Рассмотрим случай, когда $\Theta = \Theta_{i_0} < 1$. Полагая $k = -1$,

$$\{x^l_{i_0 i},\ i \in I_{\text{оп}}\} = -A(i_0, J_{\text{оп}}) A^{-1}_{\text{оп}},\ \{x_{i_0 j},\ j \in J_{\text{н}}\} =$$
$$= A(i_0, J_{\text{н}}) - A(i_0, J_{\text{оп}}) A^{-1}_{\text{оп}} A(I_{\text{оп}}, J_{\text{н}}),$$

и заменяя $j_0$ на $i_0$, по формулам (11) строим множества $I_0$, $J_0$.

Если $I_0 \cup J_0 = \varnothing$, то $\bar{x}$—оптимальный план задачи (10) и процесс решения задачи (10) прекращается. В противном случае по правилам, описанным выше, выбираем элемент $s \in I_0 \cup J_0$. Новая опора имеет вид $\bar{A}_{\text{оп}} = A(\bar{I}_{\text{оп}}, \bar{J}_{\text{оп}})$, $\bar{I}_{\text{оп}} = (I_{\text{оп}} \setminus s) \cup i_0$, $\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}}$, если $s \in I_0$; $\bar{I}_{\text{оп}} = I_{\text{оп}} \cup i_0$, $\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}} \cup s$, если $s \in J_0$.

Новая итерация начинается с плана $\{\bar{x}, \bar{A}_{\text{оп}}\}$.

Замечания. 1. Если на некоторой итерации окажется, что $I_0 = \varnothing$, то, проделав дополнительные вычисления, можно оценить отклонение плана $\bar{x}$ от оптимального по значению целевой функции следующим образом. Построим невырожденную матрицу $\tilde{A}(\tilde{I}, \tilde{J}) = \{A(I_{\text{оп}}, J_{\text{оп}} \setminus j_0),\ -e(I_{\text{оп}})\}$ при $\Theta = \Theta_{j_0}$ и матрицу $\tilde{A}(\tilde{I}, \tilde{J}) = \{A(I_{\text{оп}} \cup i_0, J_{\text{оп}}),\ -e(I_{\text{оп}} \cup i_0)\}$ при $\Theta = \Theta_{i_0}$. Подсчитаем оценки $\Delta(J) = uA(\tilde{I}, \tilde{J})$, где $u = u(\tilde{I})$ — последняя строка матрицы $(\tilde{A}(\tilde{I}, \tilde{J}))^{-1}$. Тогда справедлива оценка

$$f(x^0) - f(\bar{x}) \leqslant \beta,\ \beta = \sum_{\substack{j \in J \\ \Delta_j > 0}} \Delta_j (\bar{x}_j - d_{*j}) + \sum_{\substack{j \in J \\ \Delta_j < 0}} \Delta_j (\bar{x}_j - d^*_j).$$

Если $\beta \leqslant \varepsilon$, то решение задачи (10) можно остановить на $\varepsilon$-оптимальном плане $\bar{x}$.

Можно воспользоваться более грубой оценкой субоптимальности, оценив функцию $f(x)$ следующим образом: $f(x) \leqslant \alpha$ для любого плана $x$, где $\alpha = \min\limits_{i \in I} \alpha_i$; $\alpha_i = a_i' x^i + b_i$, где

$$x_j^i = \begin{cases} d_j^*, & \text{если } a_{ij} \geqslant 0; \\ d_{*j}, & \text{если } a_{ij} < 0. \end{cases}$$

Если на плане $\bar{x}$ выполняется неравенство $\alpha - f(\bar{x}) \leqslant \varepsilon$, то $\bar{x}$ — $\varepsilon$-оптимальный план.

2. Если на итерации имеет место случай $I_0 = \varnothing$, то можно перейти к задаче

$$\xi \to \max_{\xi,\, x},$$

$$Ax + b \geqslant e\xi, \quad d_* \leqslant x \leqslant d^*,$$

и решать ее адаптивным методом, начиная с плана $\{\bar{x},\ \xi = f(\bar{x}),\ \bar{A}(\bar{I}, \bar{J})\}$. При этом вычисления несколько усложняются, но на каждой итерации будет иметься оценка субоптимальности, убывающая от итерации к итерации.

**2. Минимакс.** Рассмотрим случай, когда исследователь перед каждым своим выбором $x \in X$ знает выбор $\omega \in \Omega$, который сделан противником. Математическая модель рассматриваемой задачи имеет вид

$$c'(\omega^0)\, x^0 + \alpha(\omega^0) = \min_{\omega \in \Omega} \max_{x} \left(c'(\omega)\, x + \alpha(\omega)\right),$$

$$Ax = b, \quad d_* \leqslant x \leqslant d^*, \tag{12}$$

где все параметры имеют такой же смысл, как и в п. 1.

Введем функцию

$$f(\omega) = \max_{x} \left(c'(\omega)\, x + \alpha(\omega)\right), \quad Ax = b, \quad d_* \leqslant x \leqslant d^*. \tag{13}$$

Тогда задача (12) эквивалентна следующей задаче:

$$f(\omega) \to \min, \quad \omega \in \Omega. \tag{14}$$

Поскольку, по предположению, $\Omega$ — дискретное множество, то (14) — задача дискретного программирования. Для ее решения используем метод ветвей и границ (см. § 1 гл. VI).

Пусть $\{x, A_{\text{оп}}\}$ — начальный опорный план задачи (12). Согласно (13), для функции

$$\xi(\omega, x, A_{\text{оп}}) = c'(\omega)\, x + \alpha(\omega) \tag{15}$$

выполняется неравенство $f(\omega) \geqslant \xi(\omega, x, A_{\text{оп}})$, $\omega \in \Omega$. Поэтому функцию (15) можно взять в качестве оценки множества $\Omega$. Найдем такой элемент $\omega^1 \in \Omega$, что $\xi(\omega^1, x, A_{\text{оп}}) = \min \xi(\omega, x, A_{\text{оп}})$, $\omega \in \Omega$.

По опорному плану $\{x, A_{\text{оп}}\}$ подсчитаем оценки субоптимальности $\beta(\omega, x, A_{\text{оп}})$ в задачах

$$c'(\omega)x + \alpha(\omega) \to \max, \; Ax = b, \; d_* \leqslant x \leqslant d^*. \tag{16}$$

По определению, функция $\beta(\omega, x, A_{\text{оп}})$ удовлетворяет неравенству $f(\omega) \leqslant \xi(\omega, x, A_{\text{оп}}) + \beta(\omega, x, A_{\text{оп}})$. Следовательно, элемент $\omega^0$, доставляющий решение задаче (14), не может принадлежать множеству

$$\{\omega \in \Omega: \; \xi(\omega, x, A_{\text{оп}}) > \xi(\bar{\omega}, x, A_{\text{оп}}) + \\ + \beta(\bar{\omega}, x, A_{\text{оп}}), \; \bar{\omega} \in \Omega, \; \bar{\omega} \neq \omega\}. \tag{17}$$

Такие множества будем на итерациях удалять из $\Omega$ и рассматривать далее задачу (14) на оставшемся множестве $\Omega_1$.

Ясно, что элемент $\omega^1$ принадлежит множеству $\Omega_1$. Исходя из начального опорного плана $\{x, A_{\text{оп}}\}$, начинаем решать задачу (16) при $\omega = \omega^1$ прямым опорным методом с адаптивной нормировкой. Если для плана $\{x, A_{\text{оп}}\}$ выполняется критерий оптимальности в задаче (16) при $\omega = \omega^1$, то план $\{x, A_{\text{оп}}\}$ — оптимальный план задачи (11). Если оценка субоптимальности удовлетворяет неравенству $\beta(\omega^1, x, A_{\text{оп}}) \leqslant \varepsilon$, где $\varepsilon$ — заданная точность приближения к оптимальному плану по значениям целевой функции, то план $\{x, A_{\text{оп}}\}$ — $\varepsilon$-оптимален в задаче (11). Пусть $\beta(\omega^1, x, A_{\text{оп}}) > \varepsilon$. Переходим к новому опорному плану $\{\bar{x}, A_{\text{оп}}\}$. Если окажется, что $\beta(\omega^1, \bar{x}, A_{\text{оп}}) \leqslant \varepsilon$, то $\{\bar{x}, A_{\text{оп}}\}$ — $\varepsilon$-оптимальный план задачи (11). При $\beta(\omega^1, \bar{x}, A_{\text{оп}}) > \varepsilon$ вычисляем $\xi(\omega, \bar{x}, A_{\text{оп}})$, $\omega \in \Omega_1$. Если для некоторых $\omega$, $\omega \in \Omega$, выполняется неравенство

$$\xi(\omega, \bar{x}, A_{\text{оп}}) > \xi(\omega, x, A_{\text{оп}}), \tag{18}$$

то оценку $\xi(\omega, x, A_{\text{оп}})$ заменяем лучшей $\xi(\omega, \bar{x}, A_{\text{оп}})$. В противном случае $\xi(\omega, x, A_{\text{оп}})$ не меняем. Пусть для некоторого $\omega^2 \in \Omega_1$ выполняется

$$\xi(\omega^2, \bar{x}, A_{\text{оп}}) < c'(\omega^1)\bar{x} + \alpha(\omega^1). \tag{19}$$

В этом случае переходим к решению задачи (16) при $\omega = \omega^2$, начиная с опорного плана $\{\bar{x}, A_{\text{оп}}\}$.

Пусть (19) не выполняется. Если

$$\beta(\omega^1, \bar{x}, \bar{A}_{\text{оп}}) \leqslant \varepsilon, \tag{20}$$

то план $\{\bar{x}, \bar{A}_{оп}\}$ — $\varepsilon$-оптимальный план задачи (11). В противном случае подсчитываем оценки субоптимальности $\beta(\omega, \bar{x}, \bar{A}_{оп})$, $\omega \in \Omega_1$, и проверяем, имеются ли элементы, принадлежащие множеству (17), полагая в (17), что $\dot{\omega}$, $\bar{\omega} \in \Omega_1$. Если таковые имеются, то сужаем множество $\Omega_1$ далее. Процесс решения задачи (16) продолжаем при $\omega = \omega^1$ до тех пор, пока не выполнятся условия (19) либо (20).

# Глава V

# КВАДРАТИЧНЫЕ ЗАДАЧИ

Квадратичное программирование представляет один из первых разделов нелинейного программирования, в котором идеи и методы линейного программирования привели к созданию эффективных алгоритмов [21]. В настоящее время квадратичное программирование как самостоятельный раздел нелинейного программирования является мощным орудием решения сложных задач. Оно характеризует вторую ступень развития эффективных вычислительных методов оптимизации, начало которым положено методами линейного программирования. Значение методов квадратичного программирования определяется не только (и не столько) внутренними задачами квадратичного программирования, но и теми возможностями, которые возникают при их использовании в создании алгоритмов нелинейного программирования. Многие современные алгоритмы с ускоренной сходимостью основаны на методах квадратичной аппроксимации и методах квадратичного программирования. Вопросы аппроксимации нелинейных задач будут рассмотрены в гл. VII. В данной главе приводятся методы решения общей задачи квадратичного программирования, примыкающие к изложенным в книге методам линейного программирования.

## § 1. Прямой опорный метод

Обоснован аналог прямого опорного метода [ч. 1] решения общей задачи квадратичного программирования.

**1. Постановка задачи. Критерий оптимальности.** Рассмотрим *задачу квадратичного программирования в канонической форме:*

$$F(x)=\frac{1}{2}x'Dx+c'x\to\min,\ Ax=b,\ 0\leqslant x\leqslant d, \qquad (1)$$

где $D$ — симметрическая неотрицательно определенная $n\times n$-матрица; $A$ — $m\times n$-матрица, $m\leqslant n$, $\operatorname{rank} A=m$, $0<d$, $\|d\|\leqslant+\infty$; $x$, $c$, $d$ — $n$-векторы; $b$ — $m$-вектор.

Пусть $x$ — *план* задачи (1), т. е. $Ax=b$, $0\leqslant x\leqslant d$, $A_{\text{оп}}$ — опора [ч. 1]. Пару $\{x, A_{\text{оп}}\}$ назовем *опорным планом* задачи (1). Обозначим: $J=\{1, 2, \ldots, n\}$, $J_{\text{оп}}$ — множество опорных индексов (индексов векторов условий, вошедших в $A_{\text{оп}}$), $J_{\text{н}}=J\setminus J_{\text{оп}}$, $x_{\text{оп}}=\{x_j, j\in J_{\text{оп}}\}$, $x_{\text{н}}=\{x_j, j\in J_{\text{н}}\}$ и т. д. *Опорный план* $\{x, A_{\text{оп}}\}$ назовем *невырожденным,* если $0<x_j<d_j$, $j\in J_{\text{оп}}$.

Положим

$$f(x)=\frac{\partial F(x)}{\partial x}=Dx+c. \qquad (2)$$

По опорной матрице $A_{\text{оп}}$ и опорной компоненте $f_{\text{оп}}(x)$ вектора (2) построим $m$-вектор $u(x)=\{u_j(x), j\in J_{\text{оп}}\}$ опорных потенциалов:

$$u'(x)=f'_{\text{оп}}(x)A_{\text{оп}}^{-1}. \qquad (3)$$

Вычислим оценки $\Delta_j(x)$ неопорных векторов условий $a_j$, $j\in J_{\text{н}}$:

$$\Delta_j(x)=a'_j u(x)-f_j(x),\ j\in J_{\text{н}}. \qquad (4)$$

**Теорема 1** *(критерий оптимальности)*. Соотношения

$$\Delta_j(x)\leqslant 0 \text{ при } x_j=0;\ \Delta_j(x)\geqslant 0 \text{ при } x_j=d_j;$$
$$\Delta_j(x)=0 \text{ при } 0<x_j<d_j,\ j\in J_{\text{н}}, \qquad (5)$$

достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности опорного плана.

Доказательство. *Достаточность.* Пусть для опорного плана $\{x, A_{\text{оп}}\}$ выполняются соотношения (5). Рассмотрим задачу

$$F(x)=\frac{1}{2}x'Dx+c'x\to\min,\ Ax=b,\ 0\leqslant x_j\leqslant d_j,$$
$$j\in J\setminus J_{\text{оп}}^{\text{кр}}, \qquad (6)$$

где $J_{\text{оп}}^{\text{кр}}=\{j: j\in J_{\text{оп}},\ x_j=0 \text{ или } x_j=d_j\}$. Ясно, что задача (6) — задача выпуклого программирования, а $x$ — ее план.

Как известно, для оптимальности плана $x$ в задаче выпуклого программирования необходимо и достаточно, чтобы производная целевой функции $F(x)$ по любому допустимому направлению $l$ из точки $x$ была неотрицательна:

$$\frac{\partial F'(x)}{\partial x} l \geqslant 0. \qquad (7)$$

Каждое допустимое из точки $x$ направление $l$ в задаче (6) удовлетворяет соотношениям

$$Al = 0, \qquad (8)$$

$$l_j \geqslant 0 \text{ при } x_j = 0; \; l_j \leqslant 0 \text{ при } x_j = d_j, \; j \in J_{\text{н}}. \qquad (9)$$

Обозначив $\Delta(x) = A'u(x) - f(x)$, из (3), (4) и (8) получим

$$f'(x)\, l = -\Delta'(x)\, l + u'(x)\, Al = -\sum_{j \in J_{\text{н}}} \Delta_j(x)\, l_j. \qquad (10)$$

Но тогда из (5), (9) и (10) следует

$$\frac{\partial F'(x)}{\partial x} l = f'(x)\, l = -\sum_{j \in J_{\text{н}}} \Delta_j(x)\, l_j \geqslant 0,$$

т. е. план $x$ оптимален в задаче (6). С учетом того, что (1) — задача выпуклого программирования, множество планов задачи (6) включает в себя множество планов задачи (1), а оптимум в (6) достигается на общем для двух задач плане, нетрудно показать, что опорный план $\{x, A_{\text{оп}}\}$ — решение задачи (1).

*Необходимость.* Пусть $\{x, A_{\text{оп}}\}$ — невырожденный оптимальный опорный план. Предположим противное: существует индекс $j_0$ такой, что для пары $\{x_{j_0}, \Delta_{j_0}(x)\}$ соответствующее соотношение из (5) не выполняется. Построим вектор $\bar{l}: \bar{l}_j = 0$, $j \in J_{\text{н}} \setminus j_0$, $\bar{l}_{j_0} = \operatorname{sign} \Delta_{j_0}(x)$, $\bar{l}_{\text{оп}} = -A_{\text{оп}}^{-1} A_{\text{н}} \bar{l}_{\text{н}}$. Направление $\bar{l}$, в силу предположения о невырожденности опорного плана $\{x, A_{\text{оп}}\}$, является допустимым. Из (10) следует, что

$$\frac{\partial F'(x)}{\partial x} \bar{l} = f'(x)\, \bar{l} = -\sum_{j \in J_{\text{н}}} \Delta_j(x) \bar{l}_j = -\Delta_{j_0}(x) \operatorname{sign} \Delta_{j_0}(x) < 0,$$

но это невозможно, так как для любого допустимого из $x$ направления $l$ выполняется неравенство (7). Получили противоречие, которое доказывает теорему.

**2. Критерий субоптимальности.** По опорному плану $\{x, A_{\text{оп}}\}$ построим *производную задачу*

$$G(x,\ A_{\text{оп}},\ l) = \frac{1}{2} l'Dl + f'(x)\, l \to \min_{l},\ Al = 0,$$
$$-x_{\text{н}} \leqslant l_{\text{н}} \leqslant d_{\text{н}} - x_{\text{н}}, \tag{11}$$

и задачу

$$F(A_{\text{оп}}, z) = \frac{1}{2} z'Dz + c'z \to \min_{z},\ Az = b,\ 0 \leqslant z_{\text{н}} \leqslant d_{\text{н}}. \tag{12}$$

**Лемма 1.** Если $l^0$ — решение (11), то $z^0 = x + l^0$ — решение (12).

Доказательство. Если $l$ — план задачи (11), то $0 \leqslant x_{\text{н}} + l_{\text{н}} \leqslant d_{\text{н}}$, $A(x+l) = b$, т. е. $z = x + l$ — план задачи (12). Обратно: если $z$ — план задачи (12), то $l = z - x$ — план задачи (11). В силу этого

$$F(A_{\text{оп}}, z) = \frac{1}{2} z'Dz + c'z = \frac{1}{2}(x+l)'D(x+l) + c'(x+l) =$$
$$= \frac{1}{2} x'Dx + c'x + x'Dl + c'l + \frac{1}{2} l'Dl = \frac{1}{2} l'Dl +$$
$$+ f'(x)\, l + F(x) = G(x, A_{\text{оп}}, l) + F(x), \tag{13}$$

где $z$ и $l$ связаны соотношением $z = x + l$.

Следовательно,

$$F(A_{\text{оп}}, z^0) = G(x, A_{\text{оп}}, l^0) + F(x) \leqslant G(x, A_{\text{оп}}, l) + F(x) =$$
$$= F(A_{\text{оп}}, z),$$

что и доказывает лемму.

Из критерия оптимальности п. 1 следует

**Лемма 2** (*критерий оптимальности* в задаче (12)). Для оптимальности плана $z$ задачи (12) необходимо и достаточно выполнение условий

$$\Delta_j(z) \leqslant 0 \text{ при } z_j = 0;\ \Delta_j(z) \geqslant 0 \text{ при } z_j = d_j;$$
$$\Delta_j(z) = 0 \text{ при } 0 < z_j < d_j,\ j \in J_{\text{н}}.$$

**Теорема 2** (*критерий субоптимальности*). Если $-G(x, A_{\text{оп}}, l^0) \leqslant \varepsilon$, то $\{x, A_{\text{оп}}\}$ — $\varepsilon$-оптимальный опорный план в (1). Обратно: если $x^{\varepsilon}$ — $\varepsilon$-оптимальный опорный план в (1), то существует такая опора $A_{\text{оп}}^{\varepsilon}$, что $-G(x^{\varepsilon}, A_{\text{оп}}^{\varepsilon}, l^0) \leqslant \varepsilon$.

Доказательство. *Достаточность.* Рассмотрим $z^0 = x + l^0$. Согласно лемме 1, план $z^0$ оптимален в задаче

(12). Пусть $x^0$ — оптимальный план задачи (1). Так как $x^0$ — план задачи (12), в силу (13) имеем

$$F(x)-F(x^0)\leqslant F(x)-F(A_{\text{оп}},\ z^0)=-G(x,\ A_{\text{оп}},\ l^0)\leqslant\varepsilon.$$

*Необходимость.* Пусть $x^\varepsilon$ — $\varepsilon$-оптимальный план задачи (1), $\{x^0,\ A^0_{\text{оп}}\}$ — ее оптимальный опорный план. Положим $A^\varepsilon_{\text{оп}}=A^0_{\text{оп}}$. Для вектора $\tilde z=x^0$ имеем $\Delta(\tilde z)=\Delta(x^0)$. Следовательно, в силу леммы 2, план $\tilde z$ оптимален в (12). Пусть $l^0$ — решение задачи (11). Так как функция $F(x)$ выпукла, при $z^0=x^\varepsilon+l^0$ справедливо равенство $F(A^\varepsilon_{\text{оп}},\ z^0)=F(A^\varepsilon_{\text{оп}},\ \tilde z)$. Поэтому $G(x^\varepsilon,\ A^\varepsilon_{\text{оп}},\ l^0)=F(A^\varepsilon_{\text{оп}},\ z^0)-F(x^\varepsilon)=F(x^0)-F(x^\varepsilon)\geqslant-\varepsilon$.

Следствие *(достаточное условие субоптимальности)*. Если

$$-\sum_{\Delta_j(x)<0}\Delta_j(x)\,x_j+\sum_{\Delta_j(x)>0}\Delta_j(x)\,(d_j-x_j)\leqslant\varepsilon,\qquad(14)$$

то $x$ — $\varepsilon$-оптимальный план задачи (1).

Доказательство. Так как $G(x,\ A_{\text{оп}},\ l)$ — выпуклая по $l$ функция, то

$$0\geqslant G(x,\ A_{\text{оп}},\ l^0)\geqslant G(x,\ A_{\text{оп}},\ 0)+\frac{\partial G'(x,\ A_{\text{оп}},\ 0)}{\partial l}\,l^0=$$
$$=f'(x)\,l^0.\qquad(15)$$

Пусть $\xi^0$ — решение задачи линейного программирования

$$f'(x)\,\xi\to\min_\xi,\ A\xi=0,\ -x_{\text{н}}\leqslant\xi_{\text{н}}\leqslant d_{\text{н}}-x_{\text{н}}.$$

Из критерия оптимальности в задаче линейного программирования следует, что

$$\xi^0_j=-x_j\ \text{при}\ \Delta_j(x)\leqslant 0,\ \xi^0_j=d_j-x_j\ \text{при}\ \Delta_j(x)>0,$$
$$j\in J_{\text{н}};\ \xi^0_{\text{оп}}=-A^{-1}_{\text{оп}}A_{\text{н}}\,\xi^0_{\text{н}}.\qquad(16)$$

Так как $f'(x)\,l^0\geqslant f'(x)\,\xi^0$, то, используя (3), (4) и (16), имеем

$$f'(x)\,\xi^0=-f'_{\text{оп}}(x)\,A^{-1}_{\text{оп}}A_{\text{н}}\,\xi^0_{\text{н}}+f'_{\text{н}}(x)\,\xi^0_{\text{н}}=-[u'(x)\,A_{\text{н}}-$$
$$-f'_{\text{н}}(x)]\,\xi^0_{\text{н}}=-\Delta'_{\text{н}}(x)\,\xi^0_{\text{н}}=\sum_{\Delta_j(x)<0}x_j\,\Delta_j(x)-\sum_{\Delta_j(x)>0}(d_j-$$
$$-x_j)\,\Delta_j(x).\qquad(17)$$

С учетом критерия субоптимальности соотношений (14), (15) и (17) получаем $F(x)-F(x^0)\leqslant -G(x, A_{\text{оп}}, l^0)\leqslant$ $\leqslant -f'(x)\xi^0 = -\sum\limits_{\Delta_j(x)<0} x_j\Delta_j(x) + \sum\limits_{\Delta_j(x)>0}(d_j-x_j)\Delta_j(x)\leqslant\varepsilon.$

**3. Итерация.** Предположим, что для опорного плана $\{x, A_{\text{оп}}\}$ не выполняются соотношения оптимальности. В этом случае направление $l$ всегда можно выбрать таким образом, что

$$-\sum_{j\in J_{\text{н}}}\Delta_j(x)\,l_j<0;\ \ l_j\geqslant 0 \text{ при } x_j=0;\ \ l_j\leqslant 0 \qquad (18)$$

при $x_j=d_j,\ i\in J_{\text{н}};\ l_{\text{оп}}=-A_{\text{оп}}^{-1}A_{\text{н}}l_{\text{н}}$.

Как следует из (10), вдоль направления (18) выполняется неравенство

$$\frac{\partial F(x)}{\partial l}<0.$$

Если опорный план $\{x, A_{\text{оп}}\}$ не вырожден, что будет предполагаться в дальнейшем, то из последнего неравенства следует, что направление $l$, удовлетворяющее соотношениям (18), является направлением спуска (подходящим направлением).

При минимизации выпуклой функции $F(x)$ движение вдоль подходящего направления $l$ целесообразно до тех пор, пока $x+\Theta l$ не выйдет на границу прямых ограничений или целевая функция не достигнет минимума. Поэтому максимально допустимый шаг $\Theta(l)$ вдоль направления $l$ равен

$$\Theta(l)=\min\{\Theta_{i_0}^1(l),\ \Theta_{i_0}^2(l),\ \Theta^3(l)\}, \qquad (19)$$

где

$$\Theta_{i_0}^1(l)=\min\left\{\min_{l_j<0,\ j\in J_{\text{оп}}} -\frac{x_j}{l_j},\ \min_{l_j>0,\ j\in J_{\text{оп}}}\frac{d_j-x_j}{l_j}\right\}$$

есть максимально допустимый шаг по опорным компонентам;

$$\Theta_{i_0}^2(l)=\min\left\{\min_{l_j<0,\ j\in J_{\text{н}}} -\frac{x_j}{l_j},\ \min_{l_j>0,\ j\in J_{\text{н}}}\frac{d_j-x_j}{l_j}\right\}$$

есть максимально допустимый шаг по неопорным компонентам; $i_0$ — индекс компоненты, на которой реализуется соответствующий минимум; $\Theta^3=\Theta^3(l)$ — максимально допустимый шаг по целевой функции, т. е. $F(x+\Theta^3 l) = \min_{\Theta \geqslant 0} F(x+\Theta l)$.

Будем считать, что $\Theta(l)$, а также индекс $i_0$, если $\Theta(l) = \Theta^1_{i_0}(l)$ или $\Theta(l) = \Theta^2_{i_0}(l)$, определяются, согласно (19), однозначно.

Найдем явные формулы для $\Theta^3(l)$. Из формулы (10) и выпуклости $F(x)$ следует, что каждая точка минимума $\Theta^0$ функции $F(x+\Theta l)$ является решением уравнения

$$\sum_{j \in J_{\text{н}}} \Delta_j(x+\Theta l)\, l_j = 0 \tag{20}$$

и, наоборот, каждое решение уравнения (20) доставляет минимум по $\Theta$ функции $F(x+\Theta l)$. Используя (2), (4), получаем

$$\Delta_j(x+\Theta l) = u'(x+\Theta l)\, a_j - f_j(x+\Theta l) = f'_{\text{оп}}(x+ \\ +\Theta l)\, A^{-1}_{\text{оп}}\, a_j - f_j(x+\Theta l) = f'_{\text{оп}}(x)\, A^{-1}_{\text{оп}}\, a_j - f_j(x) + \\ + [f_{\text{оп}}(\Theta l) - c_{\text{оп}}]' A^{-1}_{\text{оп}}\, a_j - f_j(\Theta l) + c_j = \Delta_j(x) - \Theta\, z'_j D l, \\ j \in J_{\text{н}}, \tag{21}$$

где символом $z_j$, $j \in J_{\text{н}}$, обозначен вектор с компонентами

$$z_{ij} = \begin{cases} -x_{ij}, & i \in J_{\text{оп}}; \\ 0, & i \in J_{\text{н}},\ i \neq j; \\ 1, & i = j, \end{cases}$$

а $x_{ij}$ — координаты разложения вектора $a_j$ по столбцам опоры. Таким образом, уравнение (20) принимает вид

$$\sum_{j \in J_{\text{н}}} l_j \Delta_j(x) - \Theta \sum_{j \in J_{\text{н}}} l_j (z'_j D l) = 0$$

и поэтому

$$\Theta^3(l) = \begin{cases} \infty, & \alpha(l) = 0; \\ \Big(\sum_{j \in J_{\text{н}}} l_j \Delta_j(x)\Big)/\alpha(l), & \text{если } \alpha(l) > 0, \end{cases} \tag{22}$$

где

$$\alpha(l) = \Big(\sum_{j \in J_{\text{н}}} l_j z_j\Big)' D l = l' D l. \tag{23}$$

Способы построения подходящих направлений $l$ для опорного плана $\{x, A_{\text{оп}}\}$ могут быть самыми разнообразными. Каждый из них порождает свой метод решения исходной задачи (1). Предлагаемый ниже метод при $D=0$ совпадает с прямым опорным методом решения задачи линейного программирования [ч. 1].

Совокупность операций по проверке критерия оптимальности, достаточного условия субоптимальности, построению подходящего направления, вычислению максимально допустимого шага и нового опорного плана назовем *итерацией метода.* Для удобства изложения будем вести двойную нумерацию итераций. Символами $x(k, r)$, $l(k, r)$, $A_{\text{оп}}(k, r)$, $J_{\text{н}}(k, r)$, $J_{\text{оп}}(k, r)$ обозначим векторы $x$, $l$, матрицу $A_{\text{оп}}$, множества $J_{\text{н}}$, $J_{\text{оп}}$ на $(k, r)$-й итерации ($k=1, 2, \ldots; r=1, 2, \ldots$). Тогда $\Delta(k, r)=\Delta(x(k, r))$, $\Theta(k, r)=\Theta(l(k, r))$, $\alpha(k, r)=\alpha(l(k, r))$ и т. д. Для $(k, r)$-й итерации в дальнейшем определяется множество $J_0(k, r)$, причем $J_0(1, 1)=\varnothing$.

Пусть на $(k, r)$-й итерации имеет место $J_0(k, r)=\varnothing$ и для опорного плана $\{x(k, r), A_{\text{оп}}(k, r)\}$ не выполняется критерий оптимальности (достаточное условие субоптимальности). Через $j_r$ обозначим индекс оценки, максимальной по модулю среди тех оценок $\Delta_j(k, r)$, $j\in J_{\text{н}}(k, r)$, для которых не выполняются условия (9). Положим

$$l(k, r)=z_{j_r}(k, r)\operatorname{sign}\Delta_{j_r}(k, r). \qquad (24)$$

Ясно, что построенное таким образом направление $l(k, r)$ является подходящим для текущего опорного плана. Формулы (22) и (23) на векторе (24) принимают вид

$$\Theta^3(k, r)=\begin{cases}\infty, \text{ если } \alpha(k, r)=0;\\ |\Delta_{j_r}(k, r)|/\alpha(k, r), \text{ если } \alpha(k, r)>0,\end{cases}$$

где $\alpha(k, r)=z'_{j_r}(k, r)Dz_{j_r}(k, r)$. Так как для $l(k, r)$ выполняются условия (18), то $\Theta(k, r)>0$.

Возможны только три случая: а) $\Theta(k, r)=\Theta^1_{i_r}(k, r)$; б) $\Theta(k, r)=\Theta^2_{i_r}(k, r)$; в) $\Theta(k, r)=\Theta^3(k, r)$.

В случае а) очередной итерации присваиваем номер $(k+1, 1)$. Новый план вычисляем по формуле

$$x(k+1, 1)=x(k, r)+\Theta(k, r)\, l(k, r). \qquad (25)$$

Опора $A_{\text{оп}}(k+1,1)$ получается из старой опоры $A_{\text{оп}}(k, r)$ заменой вектора $a_{i_r}$ на вектор $a_{j_r}$. Элементы матрицы $A^{-1}_{\text{оп}}(k+1,1)$ вычисляются по стандартным формулам [ч.1]:

$$u_{ij}(k+1,1)=\begin{cases} u_{ij}(k,\ r)-\dfrac{u_{i_rj}(k,\ r)\,x_{ij_r}(k,\ r)}{x_{i_rj_r}(k,\ r)}, & i\neq i_r;\\ u_{i_r}(k,\ r)/x_{i_rj_r}(k,\ r), & i=i_r, \end{cases}$$

где $u_{ij}(k,\ r)$ — $(i,\ j)$-й элемент матрицы $A_{\text{оп}}^{-1}(k,\ r)$. Полагаем $J_0(k+1,1)=\varnothing$.

В случае б) имеем $i_r=j_r$. Новой итерации присваиваем номер $(k+1,\ 1)$. План $x(k+1,\ 1)$ вычисляем по формуле (25) и приписываем ему старую опору $(A_{\text{оп}}(k+1,\ 1)=A_{\text{оп}}(k,\ r))$. Полагаем $J_0(k+1,\ 1)=\varnothing$.

В случае в) очередной итерации присваиваем номер $(k,\ r+1)$. Новый план вычисляем по формуле

$$x(k,\ r+1)=x(k,\ r)+\Theta^3(k,\ r)\,l(k,\ r) \tag{26}$$

и полагаем $A_{\text{оп}}(k,\ r+1)=A_{\text{оп}}(k,\ r)$, $J_0(k,\ r+1)=\{j_r\}$.

Пусть на $(k,\ r)$-й итерации $J_0(k,\ r)\neq\varnothing$, а опорный план $\{x(k,\ r),\ A_{\text{оп}}(k,\ r)\}$ по-прежнему не удовлетворяет критерию оптимальности (достаточному условию субоптимальности). Направление $l(k,\ r)$ ищем в следующем виде *):

$$(k,\ r)=z_{j_r}(k,\ r)\operatorname{sign}\Delta_{j_r}(k,\ r)+\sum_{j\in J_0(k,\ r)}\gamma_j(k,\ r)\,z_j(k,\ r), \tag{27}$$

где параметры $\gamma_j(k,\ r)$, $j\in J_0(k,\ r)$, найдем из условий

$$\Delta_j(x(k,\ r)+\Theta l(k,\ r))\overset{\Theta}{\equiv}\Delta_j(k,\ r),\quad j\in J_0(k,\ r), \tag{28}$$

которые, как будет показано в п. 5 (утверждение 1), обеспечивают $D$-сопряженность векторов $l(k,\ 1)$, $l(k,\ 2)$, ... ..., $l(k,\ r)$.

Напомним, что линейно независимые векторы $y_i\neq 0$, $i=\overline{1,\ s}$, называются *$D$-сопряженными*, если $y_i'Dy_j=0$, $i\neq j$, $i,\ j=\overline{1,\ s}$.

Используя (21), тождество (28) можно записать таким образом:

$$z_j'(k,\ r)\,Dl(k,\ r)=0,\quad j\in J_0(k,\ r). \tag{29}$$

Подставив (27) в (29), получим

$$\sum_{i\in J_0(k,\ r)}\gamma_i(k,\ r)\,z_j'(k,\ r)\,Dz_i(k,\ r)=-\operatorname{sign}\Delta_{j_r}(k,\ r)\,z_{j_r}'(k,\ r)\,Dz_j(k,\ r),\quad j\in J_0(k,\ r). \tag{30}$$

*) Индекс $j_r$ определен выше для случая $J_0(k,\ r)=\varnothing$.

Если ввести обозначения: $h_{ij}(k, r) = z_i'(k, r) D z_j(k, r)$, $i, j \in J_{\text{н}}(k, r)$; $H(k, r) = \{h_{ij}(k, r), i, j \in J_0(k, r)\}$; $\beta_j(k, r) = z_j'(k, r) D z_{j_r}(k, r)$; $\beta(k, r) = \{\beta_j(k, r), j \in J_0(k, r)\}$; $\gamma(k, r) = \{\gamma_i(k, r), i \in J_0(k, r)\}$, то система уравнений (30) примет вид

$$H(k, r)\gamma(k, r) = -\operatorname{sign}\Delta_{j_r}(k, r)\beta(k, r). \qquad (31)$$

В п. 5 (утверждение 2) будет показано, что матрица $H(k, r)$ не вырождена, т. е. система (31) всегда совместна. Для решения (31) используем любой конечный метод решения систем линейных уравнений.

Из утверждения 3 п. 5 следует, что

$$0 < x_j(k, r) < d_j, \ \Delta_j(k, r) = 0, \ j \in J_0(k, r). \qquad (32)$$

Поэтому направление (27), построенное указанным выше способом, является подходящим. Формулы (22) и (23) при этом принимают вид

$$\Theta^3(k, r) = \begin{cases} \infty, \text{ если } \alpha(k, r) = 0; \\ |\Delta_{j_r}(k, r)|/\alpha(k, r), \text{ если } \alpha(k, r) > 0; \end{cases}$$

$$\alpha(k, r) = l'(k, r) Dl(k, r) = z_{j_r}'(k, r) Dl(k, r) \operatorname{sign}\Delta_{j_r}(k, r) = h_{j_r j_r}(k, r) + \gamma'(k, r)\beta(k, r)\operatorname{sign}\Delta_{j_r}(k, r).$$

Для вычисления $\alpha(k, r)$ можно использовать любую из формул, приведенных в последнем равенстве.

Опять возможны три случая: а) $\Theta(k, r) = \Theta^1_{i_r}(k, r)$; б) $\Theta(k, r) = \Theta^2_{i_r}(k, r)$; в) $\Theta(k, r) = \Theta^3(k, r)$.

В случае а) очередной итерации присваиваем номер $(k+1, 1)$. Новый план $x(k+1, 1)$ строится согласно (25). Если среди чисел $x_{i_r j}(k, r)$, $j \in J_0(k, r)$, есть отличные от нуля, то опора нового плана $A_{\text{оп}}(k+1, 1)$ получается из старой опоры $A_{\text{оп}}(k, r)$ заменой вектора $a_{i_r}$ на любой из векторов $a_j$, $j \in J_0(k, r)$, для которых $x_{i_r j} \neq 0$. Полагаем $J_0(k+1, 1) = J_0(k, r) \setminus j$. Если $x_{i_r j} = 0$, $j \in J_0(k, r)$, то $A_{\text{оп}}(k+1, 1)$ получается из $A_{\text{оп}}(k, r)$ заменой столбца $a_{i_r}$ на столбец $a_{j_r}$. При этом полагаем $J_0(k+1, 1) = \varnothing$.

В случае б) новой итерации присваиваем номер $(k+1, 1)$. Новый план $x(k+1, 1)$ строится по формуле (25), $A_{\text{оп}}(k+1, 1) = A_{\text{оп}}(k, r)$, $J_0(k+1, 1) = J_0(k, r) \setminus i_r$.

В случае в) переходим к итерации с номером $(k, r+1)$, для которой новый план $x(k, r+1)$ вычисляем по формуле (26), $A_{оп}(k, r+1)=A_{оп}(k, r)$, $J_0(k, r+1)= =J_0(k, r)\cup j_r$.

**4. Рекуррентные формулы вычисления матрицы $H(k, r)$.** Из приведенного в п. 3 описания итерации опорного метода следует, что $A_{оп}(k, 1)=A_{оп}(k, 2)=\ldots= =A_{оп}(k, r)$, а также $A_{оп}(k+1,1)=A_{оп}(k, r)$ при $\Theta(k, r)=\Theta^2_{i_r}(k, r)$. Это означает, что

$$z_j(k, 1)=z_j(k, 2)=\ldots=z_j(k, r),\ j\in J_н(k, 1)= =J_н(k, 2)=\ldots=J_н(k, r);$$

$$z_j(k+1,1)=z_j(k, r),\ j\in J_н(k, r)=J_н(k+1,1) \qquad (33)$$

при $\Theta(k, r)=\Theta^2_{i_r}(k, r)$.

Используя (33), получаем рекуррентные соотношения для построения матрицы $H(k, r)$.

Если $\Theta(k, r)=\Theta^3(k, r)$, то матрица $H(k, r+1)$ формируется из матрицы $H(k, r)$ добавлением к ней новых строки и столбца с индексом $j_r$. Их элементы вычисляются по правилу $h_{jj_r}(k, r+1)=h_{j_rj}(k, r+1)=z'_{j_r}(k, r+1)Dz_j(k, r+1)=z'_{j_r}(k, r)Dz_j(k, r)$, $j\in J_0(k, r+1)$. С учетом того, что $h_{jj_r}(k, r)=\beta_j(k, r)$, получаем следующую формулу:

$$H(k, r+1)=\begin{pmatrix}H(k, r), & \beta(k, r)\\ \beta'(k, r), & h_{j_rj_r}(k, r)\end{pmatrix}. \qquad (34)$$

Если $\Theta(k, r)=\Theta^2_{i_r}(k, r)$, то при $i_r=j_r$ имеем $H(k+ +1,1)=H(k, r)$. При $i_r\in J_0(k, r)$ справедливо соотношение

$$H(k+1,1)=\{h_{ij}(k, r),\ i,\ j\in J_0(k+1,1)= =J_0(k, r)\setminus i_r\}, \qquad (35)$$

т. е. матрица $H(k+1, 1)$ получается из $H(k, r)$ исключением столбца и строки, имеющих индекс $i_r$.

Рассмотрим случай, когда $\Theta(k, r)=\Theta^1_{i_r}(k, r)$, $J_0(k+ +1, 1)\neq\varnothing$. Пусть $j_0$ — индекс столбца, который вводится в опору. Для упрощения вывода рекуррентного соотношения предположим, что $J_0(k, r)=J_н(k, r)=\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-m}\}$. Обозначим: $\tilde{J}_0(k+1, 1)=J_0(k+1, 1)\cup i_r$; $\tilde{H}(k+ +1, 1)=\{h_{ij}(k+1, 1),\ i,\ j\in\tilde{J}_0(k+1, 1)\}$; $x_{ij}=x_{ij}(k, r)$, $i\in J_{оп}(k, r)$, $j\in J_н(k, r)$; $\tilde{x}_{ij}=x_{ij}(k+1, 1)$, $i\in J_{оп}(k+ +1, 1)$, $j\in J_н(k+1, 1)$.

Построим матрицу

$$Z(k,\ r)=\{z_j(k,\ r),\ j\in J_0(k;\ r)\}=$$

$$=\begin{bmatrix} -x_{n-m+1,\,1} & -x_{n-m+1,2} & \dots & -x_{n-m+1,\,n-m} \\ -x_{n-m+2,\,1} & -x_{n-m+2,2} & \dots & -x_{n-m+2,\,n-m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -x_{n,\,1} & -x_{n,\,2} & \dots & -x_{n,\,n-m} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда $H(k,\ r)=Z'(k,\ r)DZ(k,\ r)$, а $\tilde{H}(k+1,\ 1)=\tilde{Z}'(k+$ $+1,\ 1)D\tilde{Z}(k+1,\ 1)$, где

$$\tilde{Z}(k+1,\ 1)=\{z_j(k+1,\ 1),\ j\in\tilde{J}_0(k+1,\ 1)\}=$$

$$=\begin{array}{c} \\ \\ i_r \\ \\ \\ \\ \\ j_0 \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} -\tilde{x}_{n-m+1,\,1} & -\tilde{x}_{n-m+1,2} & \dots & \dfrac{x_{n-m+1,\,j_0}}{x_{i_r j_0}} & \dots & -\tilde{x}_{n-m+1,n-m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\tilde{x}_{n,\,1} & -\tilde{x}_{n,\,2} & \dots & \dfrac{x_{nj_0}}{x_{i_r j_0}} & \dots & -\tilde{x}_{n,\,n-m} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{-x_{i_r 1}}{x_{i_r j_0}} & \dfrac{-x_{i_r 2}}{x_{i_r j_0}} & \dots & \dfrac{-1}{x_{i_r j_0}} & \dots & \dfrac{-x_{i_r,\,n-m}}{x_{i_r j_0}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

а $\tilde{x}_{ij}$ и $x_{ij}$ связаны соотношением

$$\tilde{x}_{ij}=x_{ij}-\frac{x_{i_r j}\,x_{ij_0}}{x_{i_r j_0}},$$

$$i=\overline{1,\ m},\ i\neq i_r,\ j=\overline{n-m+1,\ n},\ j\neq j_0.$$

Непосредственным умножением нетрудно проверить, что

$$\tilde{Z}(k+1,\ 1)=Z(k,\ r)M(k,\ r),$$

где

$$M(k, r)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{x_{i_r,1}}{x_{i_r j_0}} & -\frac{x_{i_r,2}}{x_{i_r,j_0}} & \dots & \frac{-1}{x_{i_r j_0}} & \dots & -\frac{x_{i_r,n-m}}{x_{i_r j_0}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$\tilde{H}(k+1,\ 1)=M'(k,\ r)H(k,\ r)M(k,\ r). \tag{36}$$

Пусть теперь $J_0(k,\ r)=\{j_1,\ j_2,\ \dots,\ j_0,\ \dots,\ j_s\}$ — произвольное множество. Аналогично тому, как это было сделано раньше, можно показать, что справедлива формула (36), где

$$M(k, r)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{x_{i_r j_1}(k, r)}{x_{i_r j_0}(k, r)} & -\frac{x_{i_r j_2}(k, r)}{x_{i_r j_0}(k, r)} & \dots & \frac{-1}{x_{i_r j_0}(k, r)} & \dots & -\frac{x_{i_r j_s}(k, r)}{x_{i_r j_0}(k, r)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица $H(k+1,\ 1)$ получается из $\tilde{H}(k+1,\ 1)$ удалением строки и столбца с индексом $i_r$. Вычисление элементов матрицы $H(k+1,\ 1)$ можно записать следующим образом:

$h_{ij}(k+1,\ 1)=g_{ij}-g_{ij_0}x_{i_r j}(k,\ r)\,/\,x_{i_r j_0}(k,\ r)$, $i,\ j\in$ $\in J_0(k+1,\ 1)$, $g_{ij}=h_{ij}(k,\ r)-h_{jj_0}(k,\ r)\,x_{i_r i}(k,\ r)/x_{i_r j_0}(k,\ r)$, $i\in J_0(k+1,\ 1)$, $j\in J_0(k,\ r)\diagdown j_0$, $g_{ij_0}=-h_{ij_0}(k,\ r)/x_{i_r j_0}(k,\ r)$, $i\in J_0(k+1, 1)$.

**5. Свойства метода. Утверждение 1.** Направления $l(k,\ 1),\ l(k,\ 2),\ \dots,\ l(k,\ r)$ являются $D$-сопряженными.

Доказательство. Рассмотрим два вектора $l(k,\ s)$ и $l(k,\ p)$, где $1\leqslant s<p\leqslant r$. Используя (27) и полагая в силу (33), что $z_j=z_j(k,\ 1)=\dots=z_j(k,\ r)$, $j\in$ $\in J_{\text{н}}(k,\ 1)=\dots=J_{\text{н}}(k,\ r)$, получаем:

$$l'(k,\ s)Dl(k,\ p)=[z_{j_s}\operatorname{sign}\Delta_{j_s}(k,\ s)+$$

$$+\sum_{i\in J_0(k,\ s)}\gamma_i(k,\ s)\,z_i]'D[z_{j_p}\operatorname{sign}\Delta_{j_p}(k,\ p)+\sum_{i\in J_0(k,\ p)}\gamma_i(k,\ p)\times$$

$$\times z_i]=[z_{j_s}Dz_{j_p}\operatorname{sign}\Delta_{j_p}(k,\ p)+\sum_{i\in J_0(k,\ p)}\gamma_i(k,\ p)\,z'_{j_s}Dz_i]\times$$

$$\times\operatorname{sign}\Delta_{j_s}(k,\ s)+\sum_{j\in J_0(k,\ s)}\gamma_j(k,\ s)[z'_jDz_{j_p}\operatorname{sign}\Delta_{j_p}(k,\ p)+$$

$$+\sum_{i\in J_0(k,\ p)}\gamma_i(k,\ p)\,z'_jDz_i].$$

Так как $\{J_0(k,\ s),\ j_s\}\in J_0(k,\ p)$, из (29) следует $z'_iDz_{j_p}\operatorname{sign}\Delta_{j_p}(k,\ p)+\sum\limits_{i\in J_0(k,\ p)}\gamma_i(k,\ p)\,z'_jDz_i=0,\ i\in\{J_0(k,\ s),$ $j_s\}$, т. е. $l'(k,\ s)\,Dl(k,\ p)=0$.

**Утверждение 2.** Матрица $H(k,\ r)$, $k\geqslant 1$, $r\geqslant 1$, $J_0(k,\ r)\neq\varnothing$, симметрична и положительно определена.

Доказательство. Симметричность и неотрицательная определенность матрицы $H(k,\ r)$ вытекает из формулы $H(k,\ r)=Z'(k,\ r)DZ(k,\ r)$. Поэтому для доказательства утверждения достаточно показать, что матрица $H(k,\ r)$ не вырождена. Воспользуемся методом математической индукции. Его применение в данном случае означает, что необходимо доказать:

1) невырожденность матрицы $H(k,\ 2)$ при условии $J_0(k,\ 1)=\varnothing$, $\Theta(k,\ 1)=\Theta^3(k,\ 1)$;

2) невырожденность матрицы $H(k,\ r)$, $J_0(k,\ r)\neq\varnothing$, в предположении, что матрица $H(k,\ r-1)$, $J_0(k,\ r-1)\neq$ $\neq\varnothing$, не вырождена *).

Пусть $J_{\text{н}}(k,\ 1)=\varnothing$, $\Theta(k,\ 1)=\Theta^3(k,\ 1)$. В этом случае $H(k,\ 2)=\{h_{j_1j_1}(k,\ 2)\}$, $h_{j_1j_1}(k,\ 2)=z'_{j_1}(k,\ 1)\,Dz_{j_1}(k,\ 1)=$ $=l'(k,\ 1)\,Dl(k,\ 1)=\alpha(k,\ 1)\neq 0$, так как $\Theta^3(k,\ 1)<\infty$. Таким образом, 1) доказано.

Перейдем к доказательству 2). Предположим, что на $(k,\ r-1)$-й итерации $J_0(k,\ r-1)\neq\varnothing$, а матрица $H(k,\ r-1)$ не вырождена. Возможны следующие случаи:

а) $r>1$, т. е. $\Theta(k,\ r-1)=\Theta^3(k,\ r-1)$. Допустим, что матрица $H(k,\ r)$ вырождена. Тогда существует ненулевой вектор $\xi$, для которого

$$H(k,\ r)\,\xi=0. \tag{37}$$

---

*) Если $r=1$, то под номером $(k,\ r-1)$ подразумевается номер $(k-1,\ s)$ предыдущей итерации.

Из (34) и невырожденности матрицы $H(k, r-1)$ следует

$$\xi = t\overline{\gamma}(k, r-1), \tag{38}$$

где $t \neq 0$; $\overline{\gamma}'(k, r-1) = (\gamma'(k, r-1), \operatorname{sign} \Delta_{j_{r-1}}(k, r-1))$. Запишем последнюю строку уравнения (37), использовав (34) и (38):

$$t\beta'(k, r-1)\gamma(k, r-1) + th_{j_{r-1}j_{r-1}}(k, r-1)\operatorname{sign}\Delta_{j_{r-1}}(k, r-1) = 0.$$

Разделив последнее равенство на $t\operatorname{sign}\Delta_{j_{r-1}}(k, r-1)$, получим

$$\beta'(k, r-1)\gamma(k, r-1)\operatorname{sign}\Delta_{j_{r-1}}(k, r-1) + h_{j_{r-1}j_{r-1}}(k, r-1) = 0.$$

Но

$$\beta'(k, r-1)\gamma(k, r-1)\operatorname{sign}\Delta_{j_{r-1}}(k, r-1) + h_{j_{r-1}j_{r-1}}(k, r-1) = \alpha(k, r-1) > 0.$$

Получили противоречие, которое и доказывает невырожденность матрицы $H(k, r)$;

б) $r = 1$, $\Theta(k-1, s) = \Theta_i^1(k-1, s)$, $j_0 \in J_0(k-1, s)$. В силу невырожденности $M(k, r)$ из (36) следует, что $\widetilde{H}(k, 1)$ не вырождена. Тогда матрица $H(k, 1)$ не вырождена как подматрица матрицы $\widetilde{H}(k, 1)$, расположенная по главной диагонали;

в) $r = 1$, $\Theta(k-1, s) = \Theta_{i_s}^2(k-1, s)$.

Если $i_s = j_s$, то невырожденность матрицы $H(k, 1)$ тривиально следует из равенства $H(k, 1) = H(k-1, s)$. При $i_s \in J_0(k-1, s)$ матрица $H(k, 1)$ не вырождена как подматрица матрицы $H(k-1, s)$, расположенная по главной диагонали.

В а) — в) рассмотрены все возможные случаи, когда $J_0(k, r-1) \neq \varnothing$ и $J_0(k, r) \neq \varnothing$. Следовательно, 2), а вместе с ним и утверждение 2 доказаны.

**Утверждение 3.** Для всех $j \in J_0(k, r)$ $0 < x_j < d_j$, $\Delta_j(k, r) = 0$.

Доказательство. Для $J_0(k, r) = \varnothing$ утверждение 3 выполняется тривиально. Поэтому будем считать, что $J_0(k, r) \neq \varnothing$. Применим метод математической индукции.

Пусть $J_н(k, 1) = \varnothing$, $\Theta(k, 1) = \Theta^3(k, 1)$. Тогда $J_0(k, r) = \{j_1\}$. В силу однозначного определения шага имеем $\Theta(k, 1) = \Theta^3(k, 1) < \min\{\Theta^1_{i_1}(k, 1), \Theta^2_{i_1}(k, 1)\}$, а следовательно, $\Delta_{j_1}(k, r) = 0$, $0 < x_{j_1}(k, r) < d_{j_1}$.

Предположим, что утверждение верно на $(k, r-1)$-й итерации и $J_н(k, r-1) \neq \varnothing$. Возможны следующие случаи: а) $r > 1$, $\Theta(k, r-1) = \Theta^3(k, r-1)$; б) $r = 1$, $\Theta(k-1, s) = \Theta^1_{i_s}(k-1, s)$, $j_0 \in J_0(k-1, s)$; в) $r = 1$, $\Theta(k-1, s) = \Theta^2_{i_s}(k-1, s)$.

а) Так как $l(k, r-1)$ удовлетворяет условиям (23), то $\Delta_j(k, r) = 0$, $j \in J_0(k, r-1)$. Из соотношений $\Delta_{j_{r-1}}(k, r) = 0$ и $\Theta^3(k, r-1) < \min\{\Theta^1_{i_{r-1}}(k, r-1), \Theta^2_{i_{r-1}}(k, r-1)\}$ следует доказываемое утверждение.

б) Обозначим через $\overline{\Delta}(k-1, s)$ вектор $\Delta(x(k-1, s) + \Theta(k-1, s)\, l(k-1, s))$, построенный по опоре $A_{оп}(k-1, s)$. Тогда

$$\Delta_j(k, 1) = \overline{\Delta}_j(k-1, s) - \overline{\Delta}_{j_0}(k-1, s)\, x_{i_s j}(k-1, s)/x_{i_s j_0}(k-1, s),$$

$$j \in J_н(k, 1) \setminus i_s, \quad \Delta_{i_s}(k, 1) = -\overline{\Delta}_{j_0}(k-1, s)/x_{i_s j_0}(k-1, s),$$

$$\Delta_j(k, 1) = 0, \quad j \in J_{оп}(k, 1).$$

Поскольку $\overline{\Delta}_j(k-1, s) = 0$, $0 < x(k, 1) < d_j$, $j \in J_0(k-1, s)$, то из равенства $\overline{\Delta}_{j_0}(k-1, s) = 0$ и предыдущих формул получаем $0 < x_j(k, 1) < d_j$, $\Delta_j(k, 1) = 0$, $j \in J_0(k, 1)$.

в) Доказательство аналогично а).

**6. Конечность метода.** Вообще говоря, из предыдущего описания метода не следует его конечность. Однако простое *дополнительное правило* позволяет гарантировать это важное свойство. Обозначим:

$$J^d_н(k, r) = \{j\colon j \in J_н(k, r),\ x_j(k, r) = d_j\},\quad J^0_н(k, r) = \{j\colon j \in J_н(k, r),\ x_j(k, r) = 0\},\quad J^{кр}_н(k, r) = J^d_н(k, r) \cup J^0_н(k, r),\quad J^{\sim}_н(k, r) = \{j\colon j \in J_н(k, r),\ 0 < x_j(k, r) < d_j,$$

$$\Delta_j(k, r) = 0\}, \ J_\Delta(k, r) = \{j\colon j \in J_н(k, r) \setminus J_н^{кр}(k, r),$$
$$\Delta_j(k, r) \neq 0\}.$$

Компоненты плана $x_j(k, r)$, $j \in J_н^{кр}(k, r)$, будем называть *критическими*.

Дополнительное правило: улучшение опорного плана осуществляем, если возможно, без изменения его критических неопорных компонент.

Специфика векторов (24), (27) и свойство (32) опорного плана позволяют довольно просто учитывать дополнительное правило на итерации. Для этого достаточно при $J_\Delta(k, r) \neq \varnothing$ изменить определение индекса $j_r$: символом $j_r$ обозначим такой индекс, при котором оценка $\Delta_{j_r}(k, r)$ является максимальной среди оценок $\Delta_j(k, r)$, $j \in J_\Delta(k, r)$.

На каждой итерации при $\Theta(k, r) = \Theta^з(k, r)$ число $|J_0(k, r)|$ индексов, входящих в $J_0(k, r)$, увеличивается на единицу. Поэтому из (32) и критерия оптимальности следует, что не более чем за $n - m + 1$ итерацию будет получен оптимальный план или изменится первый индекс в номере итерации. В свою очередь, всякий раз, когда меняется первый индекс в номере итерации, число $|J_н^{кр}(k, r)|$ увеличивается на единицу. Поэтому за конечное число итераций выполнится равенство

$$|J_н^{\sim}(k, r)| + |J_н^{кр}(k, r)| = n - m. \tag{39}$$

План $x(k, r)$ в этом случае доставляет минимум целевой функции при ограничениях

$$Ax = b; \quad x_j = 0, \quad j \in J_н^0(k, r); \quad x_j = d_j,$$
$$j \in J_н^d(k, r); \quad 0 \leqslant x \leqslant d. \tag{40}$$

Если $\Delta_j(k, r) \leqslant 0$, $j \in J_н^0(k, r)$, $\Delta_j(k, r) \geqslant 0$, $j \in J_н^d(k, r)$, то $x(k, r)$ — решение задачи (1), так как выполнен критерий оптимальности. В противном случае за конечное число итераций будет получен другой план $x(k_1, r_1)$, $k_1 \geqslant k$, характеризующийся равенством (39), но с меньшим значением целевой функции. Поэтому процесс решения задачи (1) можно рассматривать как построение последовательности планов, оптимальных для различных комбинаций ограничений типа (40). В силу строгого убывания целевой функции от плана к плану ни одна из комбинаций не повторится дважды. Поскольку различных вариантов ограничений типа (40) конечное число, а оптимальный план задачи (1) является оптимальным для одного из них, то задача (1) будет решена за конечное число итераций.

**7. Использование в методе матрицы** $H^{-1}(k, r)$. Так как матрица $H(k, r)$, $J_0(k, r)\neq\varnothing$, не вырождена, то всегда существует $H^{-1}(k, r)$, которую можно эффективно использовать для решения системы линейных уравнений (31). Если $J_0(k, r-1)=\varnothing$, а $\Theta(k, r-1)=\Theta^3(k, r-1)$, то $H(k, r)$ состоит из одного элемента и ее обращение не представляет труда. Для больших $|J_0(k, r)|$ обращение матрицы $H(k, r)$ — это уже самостоятельная довольно сложная задача. Поэтому в данном пункте будут получены рекуррентные формулы для вычисления $H^{-1}(k, r)$.

Пусть $J_0(k, r)\neq\varnothing$ и известна матрица $H^{-1}(k, r)$. Если $\Theta(k, r)=\Theta^3(k, r)$, то, используя (34) и известные из линейной алгебры формулы, получаем:

$$H^{-1}(k, r+1)=$$

$$=\begin{bmatrix} H^{-1}(k,r)+\dfrac{H^{-1}(k,r)\,\beta(k,r)\beta'(k,r)\,H^{-1}(k,r)}{t(k,r)}, & -\dfrac{H^{-1}(k,r)\,\beta(k,r)}{t(k,r)} \\ -\dfrac{\beta'(k,r)\,H^{-1}(k,r)}{t(k,r)}, & \dfrac{1}{t(k,r)} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} H^{-1}(k,r)+\dfrac{\gamma(k,r)\,\gamma'(k,r)}{\alpha(k,r)}, & \dfrac{\gamma(k,r)}{\alpha(k,r)}\operatorname{sign}\Delta_{j_r}(k,r) \\ \dfrac{\gamma'(k,r)}{\alpha(k,r)}\operatorname{sign}\Delta_{j_r}(k,r), & \dfrac{1}{\alpha(k,r)} \end{bmatrix}, \quad (41)$$

где

$$t(k, r)=h_{j_rj_r}(k, r)-\beta'(k, r)\,H^{-1}(k, r)\,\beta(k, r)=$$
$$=h_{j_rj_r}(k, r)+\beta'(k, r)\,\gamma(k, r)\operatorname{sign}\Delta_{j_r}(k, r)=\alpha(k, r).$$

Если $\Theta(k, r)=\Theta^2_{i_r}(k, r)$, $i_r\in J_0(k, r)$ (при $i_r=j_r$ матрица $H^{-1}(k+1, 1)=H^{-1}(k, r)$), то представим $H^{-1}(k, r)$ в следующем виде:

$$H^{-1}(k, r)=\begin{pmatrix} G(k, r), & g_{i_r}(k, r) \\ g'_{i_r}(k, r), & g_{i_ri_r}(k, r)\end{pmatrix}, \quad (42)$$

где $G(k, r)=\{g_{ij}(k, r),\ i,\ j\in J_0(k+1, 1)\}$; $g_{i_r}(k, r)=\{g_{i_rj}(k, r),\ j\in J_0(k+1, 1)\}$; $g_{ij}(k, r)$ — $(i, j)$-й элемент матрицы $H^{-1}(k, r)$. Используя (35), (42) и рекуррентное соотношение из [22], получаем

$$H^{-1}(k+1,\ 1)=G(k,\ r)-\frac{g_{i_r}(k,\ r)\,g'_{i_r}(k,\ r)}{g_{i_r i_r}(k,\ r)}. \qquad (43)$$

Если $\Theta(k,\ r)=\Theta^1_{i_r}(k,\ r)$, $J_0(k,\ r)=\{j_1,\ \ldots,\ j_0,\ \ldots,\ j_s\}$, то, как следует из (36),

$$\tilde{H}^{-1}(k+1,\ 1)=M^{-1}(k,\ r)H^{-1}(k,\ r)[M^{-1}(k,\ r)]', \qquad (44)$$

где

$$M^{-1}(k,\ r)=$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -x_{i_r j_1}(k,\ r) & -x_{i_r j_2}(k,\ r) & \ldots & -x_{i_r j_0}(k,\ r) & \ldots & -x_{i_r j_s}(k,\ r) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

Из (44), как и в предыдущем случае, получим

$$H^{-1}(k+1,\ 1)=\tilde{G}(k+1,\ 1)-\frac{\tilde{g}_{i_r}(k+1,\ 1)\,\tilde{g}'_{i_r}(k+1,\ 1)}{\tilde{g}_{i_r i_r}(k+1,1)}, \qquad (45)$$

где $\tilde{G}(k+1,\ 1)=\{\tilde{g}_{ij}(k+1,\ 1),\ i,\ j\in J_0(k+1,\ 1)\}$; $\tilde{g}_{i_r}(k+1,\ 1)=\{\tilde{g}_{i_r j}(k+1,\ 1),\ j\in J_0(k+1,\ 1)\}$; $\tilde{g}_{ij}(k+1,\ 1)$ — $(i,\ j)$-й элемент матрицы $\tilde{H}^{-1}(k+1,\ 1)$.

Использование в методе матрицы $H^{-1}(k,\ r)$ и ее вычисление по формулам (41)—(45) позволяет более экономно строить вычисления. Однако метод в этом случае более чувствителен к ошибкам округлений, с которыми ведутся вычисления на ЭВМ, что особенно существенно при решении больших задач.

## § 2. Опорный метод с оптимальной заменой элементов опоры

В данном параграфе строится метод, который можно рассматривать как аналог опорного метода с адаптивной нормировкой [ч. 2].

**1. Предварительные замечания.** Рассмотрим задачу

$$F(x)=\frac{1}{2}x'Dx+c'x\to\min,\ Ax=b,\ 0\leqslant x\leqslant d, \qquad (1)$$

где матрицы $D$, $A$, векторы $x$, $c$, $b$, $d$ удовлетворяют требованиям, сформулированным в § 1. Пусть $\{x, A_{\text{оп}}\}$ — опорный план задачи (1), для которого не выполняются соотношения оптимальности, полученные в § 1. Построим производную задачу

$$G(x, A_{\text{оп}}, l) = \frac{1}{2} l' Dl + f'(x) l \to \min_l, \qquad (2)$$

$$Al = 0, \ -x_{\text{н}} \leqslant l_{\text{н}} \leqslant d_{\text{н}} - x_{\text{н}}.$$

Обозначим:

$$f(x, l) = \frac{\partial G(x, A_{\text{оп}}, l)}{\partial l} = D'l + f'(x); \qquad (3)$$

$$u'(x, l) = f'_{\text{оп}}(x, l) A_{\text{оп}}^{-1}; \qquad (4)$$

$$\Delta(x, l) = A'u(x, l) - f(x, l). \qquad (5)$$

Используя (3)—(5) и (2)—(4) из § 1, получаем

$$\Delta(x, l) = A'u(x, l) - f(x, l) = A'(A_{\text{оп}}^{-1})' f_{\text{оп}}(x, l) - Dl -$$
$$- f(x) = A'(A_{\text{оп}}^{-1})' [Dl + f(x)]_{\text{оп}} - Dl - f(x) =$$
$$= A'(A_{\text{оп}}^{-1})' f_{\text{оп}}(x + l) - f(x + l) = \Delta(x + l). \qquad (6)$$

Из (6) и лемм 1, 2 § 1 следует *критерий оптимальности* для задачи (2): план $l^0$ тогда и только тогда является решением производной задачи (2), когда выполняются соотношения

$$\Delta_j(x, l^0) \leqslant 0 \text{ при } l_j^0 = -x_j;$$
$$\Delta_j(x, l^0) \geqslant 0 \text{ при } l_j^0 = d_j - x_j; \qquad (7)$$
$$\Delta_j(x, l^0) = 0 \text{ при } -x_j < l_j^0 < d_j - x_j, \ j \in J_{\text{н}}.$$

Нетрудно показать, что решение $l^0$ производной задачи является подходящим направлением для невырожденного неоптимального опорного плана $\{x, A_{\text{оп}}\}$.

**2. Опорный метод сопряженных градиентов.** Рассмотрим задачу

$$G(x, l) = \frac{1}{2} l' Dl + f'(x) l \to \min_l, \ Al = 0. \qquad (8)$$

Представим матрицу $D$ в следующем виде:

$$D = \begin{pmatrix} D_{\text{оп}^2}, & D_{\text{оп н}} \\ D_{\text{н оп}}, & D_{\text{н}^2} \end{pmatrix}, \qquad (9)$$

где

$$D_{\text{оп}^2}=\{d_{ij},\ i,\ j\in J_{\text{оп}}\};\ D_{\text{н}^2}=\{d_{ij},\ i,\ j\in J_{\text{н}}\};\qquad (10)$$

$$D_{\text{опн}}=\{d_{ij},\ i\in J_{\text{оп}},\ j\in J_{\text{н}}\};\ D_{\text{ноп}}=\{d_{ij},\ i\in J_{\text{н}},\ j\in J_{\text{оп}}\};$$

$d_{ij}$ — $(i,\ j)$-й элемент матрицы $D$. Ясно, что

$$D'_{\text{оп н}}=D_{\text{н оп}}.\qquad (11)$$

Из условия $Al=0$ получаем

$$l_{\text{оп}}=-A_{\text{оп}}^{-1}A_{\text{н}}l_{\text{н}}.\qquad (12)$$

Используя (9) и (12), можно записать

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}l'Dl+f'(x)\,l&=\frac{1}{2}l'_{\text{н}}A'_{\text{н}}(A_{\text{оп}}^{-1})'D_{\text{оп}^2}A_{\text{оп}}^{-1}A_{\text{н}}l_{\text{н}}-\\&-\frac{1}{2}l'_{\text{н}}A'_{\text{н}}(A_{\text{оп}}^{-1})'D_{\text{оп н}}l_{\text{н}}-\frac{1}{2}l'_{\text{н}}D_{\text{ноп}}A_{\text{оп}}^{-1}A_{\text{н}}l_{\text{н}}+\\&+\frac{1}{2}l'_{\text{н}}D_{\text{н}^2}l_{\text{н}}-f'_{\text{оп}}(x)A_{\text{оп}}^{-1}A_{\text{н}}l_{\text{н}}+f'_{\text{н}}(x)\,l_{\text{н}}=\\&=\frac{1}{2}l'_{\text{н}}\overline{D}\,l_{\text{н}}+\overline{f}'(x)\,l_{\text{н}}.\end{aligned}\qquad (13)$$

Здесь

$$\overline{D}=A'_{\text{н}}(A_{\text{оп}}^{-1})'D_{\text{оп}^2}A_{\text{оп}}^{-1}A_{\text{н}}-A'_{\text{н}}(A_{\text{оп}}^{-1})'D_{\text{опн}}-D_{\text{ноп}}A_{\text{оп}}^{-1}\times$$
$$\times A_{\text{н}}+D_{\text{н}^2};\qquad (14)$$

$$\overline{f}(x)=-A'_{\text{н}}(A_{\text{оп}}^{-1})'f_{\text{оп}}(x)+f_{\text{н}}(x)=-\Delta_{\text{н}}(x).$$

Задача (8), таким образом, свелась к следующей:

$$\overline{G}(x,\ l_{\text{н}})=\frac{1}{2}l'_{\text{н}}\overline{D}\,l_{\text{н}}+\overline{f}(x)\,l_{\text{н}}\to\min_{l_{\text{н}}}.\qquad (15)$$

Учитывая (8)—(14), нетрудно показать, что матрица $\overline{D}$ симметрическая и неотрицательно определенная.

Задачу (15) решим *методом сопряженных градиентов* [22]. Минимизирующая последовательность состоит из не более чем $n-m$ точек $l_{\text{н}}(r)$, $r=1,\ 2,\ \ldots,\ s+1\leqslant n-m$, которые строятся по правилу

$$l_{\text{н}}(r+1)=l_{\text{н}}(r)+\alpha(r)\,p_{\text{н}}(r),\ r=\overline{1,\ s},\qquad (16)$$

где

$$\alpha(r)=\frac{-g'(r)\,p_{\text{н}}(r)}{\left[\dfrac{\partial\overline{G}(x,\ l_{\text{н}}(r)+p_{\text{н}}(r))}{\partial l_{\text{н}}}-\dfrac{\partial\overline{G}(x,\ l_{\text{н}}(r))}{\partial l_{\text{н}}}\right]'p_{\text{н}}(r)},$$
$$r=\overline{1,\ s};\qquad (17)$$

$$p_{\text{н}}(r) = -g(r) + \beta(r)\, p_{\text{н}}(r-1),\ r = \overline{2, s};\ p_{\text{н}}(1) = g(1); \tag{18}$$

$$\beta(r) = \frac{g'(r)\, g(r)}{g'(r-1)\, g(r-1)},\ r = \overline{2, s}; \tag{19}$$

$$g(r) = \frac{\partial \bar{G}(x,\ l_{\text{н}}(r))}{\partial l_{\text{н}}},\ r = \overline{1, s}. \tag{20}$$

Решение задачи (8) посредством ее сведения к (14) методом сопряженных градиентов не совсем удобно, так как приходится специально вычислять матрицу $\bar{D}$. Чтобы избежать этого, поступим следующим образом. Учитывая (3)—(5), (9)—(13) и полагая $f(x, l(r)) = f(x, r)$, $u(x, l(r)) = u(x, r)$, $\Delta(x, l(r)) = \Delta(x, r)$, получаем:

$$\begin{aligned} g(r) &= \frac{\partial \bar{G}(x,\ l_{\text{н}}(r))}{\partial l_{\text{н}}} = A_{\text{н}}'(A_{\text{оп}}^{-1})' D_{\text{оп}^2} A_{\text{оп}}^{-1} A_{\text{н}} l_{\text{н}}(r) - \\ &- A_{\text{н}}'(A_{\text{оп}}^{-1})' D_{\text{опн}} l_{\text{н}}(r) - D_{\text{ноп}} A_{\text{оп}}^{-1} A_{\text{н}} l_{\text{н}}(r) + D_{\text{н}^2} l_{\text{н}}(r) - \\ &- A_{\text{н}}'(A_{\text{оп}}^{-1})' f_{\text{оп}}(x) + f_{\text{н}}(x) = - A_{\text{н}}'(A_{\text{оп}}^{-1})' D_{\text{оп}^2} l_{\text{оп}}(r) - \\ &- A_{\text{н}}'(A_{\text{оп}}^{-1})' D_{\text{опн}} l_{\text{н}}(r) + D_{\text{ноп}} l_{\text{оп}}(r) + D_{\text{н}^2} l_{\text{н}}(r) - \\ &- A_{\text{н}}'(A_{\text{оп}}^{-1})' f_{\text{оп}}(x) + f_{\text{н}}(x) = - A_{\text{н}}'(A_{\text{оп}}^{-1})' [D_{\text{оп}^2} l_{\text{оп}}(r) + \\ &+ D_{\text{опн}} l_{\text{н}}(r) + f_{\text{оп}}(x)] + D_{\text{ноп}} l_{\text{оп}}(r) + D_{\text{н}^2} l_{\text{н}}(r) + \\ &+ f_{\text{н}}(x) = - A_{\text{н}}'(A_{\text{оп}}^{-1})' f_{\text{оп}}(x, r) + f_{\text{н}}(x, r) = -\Delta_{\text{н}}(x, r). \end{aligned} \tag{21}$$

Далее, обозначим $p(r) = \{p_{\text{оп}}(r),\ p_{\text{н}}(r)\}$, где $p_{\text{оп}}(r) = -A_{\text{оп}}^{-1} A_{\text{н}} p_{\text{н}}(r)$. Тогда аналогично (21)

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial \bar{G}(x,\ l_{\text{н}}(r) + p_{\text{н}}(r))}{\partial l_{\text{н}}} - \frac{\partial \bar{G}(x,\ l_{\text{н}}(r))}{\partial l_{\text{н}}}\right]' p_{\text{н}}(r) = \\ &= p_{\text{н}}'(r)\, \bar{D}\, p_{\text{н}}(r) = p'(r)\, D p(r) = \left[\frac{\partial G(x,\ l(r) + p(r))}{\partial l} - \right. \\ &\qquad \left. - \frac{\partial G(x,\ l(r))}{\partial l}\right]' p(r). \end{aligned} \tag{22}$$

В силу (21) и (22) формулы (17)—(19) принимают вид

$$\alpha(r) = \Delta_{\text{н}}'(x, r)\, p_{\text{н}}(r) / \gamma(r),\ r = \overline{1, s}; \tag{23}$$

$$\gamma(r) = \left[\frac{\partial G(x,\ l(r) + p(r))}{\partial l} - \frac{\partial G(x,\ l(r))}{\partial l}\right]' p(r),$$
$$r = \overline{1, s}; \tag{24}$$

$$p_{\text{н}}(r)=\Delta_{\text{н}}(x,\ r)+\beta(r)\,p_{\text{н}}(r-1),\ r=\overline{2,\ s};\ p_{\text{н}}(1)=$$
$$=\Delta_{\text{н}}(x,\ 1); \tag{25}$$

$$\beta(r)=\frac{\Delta_{\text{н}}'(x,\ r)\,\Delta(x,\ r)}{\Delta_{\text{н}}'(x,\ r-1)\,\Delta(x,\ r-1)},\ r=\overline{2,\ s}. \tag{26}$$

От формулы (16) для удобства вычислений перейдем к следующей:

$$l(r+1)=l(r)+\alpha(r)\,p(r),\ r=\overline{1,\ s}. \tag{27}$$

Таким образом, выбрав начальный план $l(1)$, по формулам (3)—(5) и (23)—(27) можно решить задачу (8) без ее непосредственного сведения к (15). Процесс вычислений при этом может окончиться двояко:

а) $\Delta(x,\ s+1)=0$. Точка $l^0=l(s+1)$ — решение задачи (8);

б) $\Delta(x,\ s)\neq 0$, $\gamma(s)=0$. В этом случае задача (8) не имеет решения; $p(s+1)$ — направление бесконечного убывания целевой функции $G(x,\ l)$.

**3. Решение производной задачи опорным методом сопряженных градиентов.** Применим описанный в п. 2 метод для решения производной задачи (2). Последняя сложнее задачи (8) из-за наличия группы прямых ограничений. Приведем модификацию метода п. 2, в которой просто учитываются дополнительные ограничения.

Обозначим: $J_{\text{н}}^{\text{кр}}(x,\ r)=\{j\colon j\in J_{\text{н}},\ \ l_j(r)=-x_j$ или $l_j(r)=d_j-x_j\}$; $J_\Delta(x,r)=\{j\colon j\in J_{\text{н}}\diagdown J_{\text{н}}^{\text{кр}}(x,r),\ \Delta_j(x,r)\neq$ $\neq 0\}$. По заданному начальному плану $l(1)$, не удовлетворяющему соотношениям оптимальности (7), построим множество $\tilde{J}_c(1)=J_{\text{н}}^{\text{кр}}(x,\ 1)\diagdown\{j_1,\ \ldots,\ j_\alpha\}$, где $\{j_1,\ \ldots,\ j_\alpha\}\subseteq$ $\subseteq J_{\text{н}}$ — индексы такие, что пары $\{\Delta_{j_s}(r),\ l_{j_s}(r)\}$, $s=\overline{1,\ \alpha}$, не удовлетворяют соотношениям (7).

Пусть $l(r)$, $\tilde{J}_c(r)$ получены в ходе решения задачи (2) и план $l(r)$ не удовлетворяет критерию оптимальности. По плану $l(r)$ и множеству $\tilde{J}_c(r)$ построим множество

$$J_c(r)=\begin{cases}\tilde{J}_c(r), \text{ если } J_\Delta(x,\ r)\neq\varnothing;\\ \tilde{J}_c(r)\diagdown\{j_1,\ \ldots,\ j_\sigma\}, \text{ если } J_\Delta(x,\ r)=\varnothing,\end{cases}$$

где $\{j_1, \ldots, j_\alpha\} \in \tilde{J}_c(r)$ — индексы, на которых нарушаются соотношения оптимальности, и вектор $\tilde{\Delta}_н(x, r)$ с компонентами

$$\tilde{\Delta}_j(x, r) = \begin{cases} \Delta_j(x, r), \text{ если } j \in J_н \setminus J_c(r); \\ 0, \text{ если } j \in J_c(r). \end{cases}$$

Кроме того, если $J_c(r) \neq J_c(r-1)$, $r=2, 3, \ldots$, то положим $p(r-1)=0$. Точку $l(r+1)$ найдем по правилу

$$l(r+1) = l(r) + \alpha^0(r) p(r), \ r=1, 2, \ldots,$$

где

$$p_н(r) = \tilde{\Delta}_н(x, r) + \beta(r) p_н(r-1), \ \ r = 2, 3, \ldots;$$

$$p_н(1) = \tilde{\Delta}(x, 1);$$

$$\beta(r) = \frac{\tilde{\Delta}'(x, r)\tilde{\Delta}(x, r)}{\tilde{\Delta}'(x, r-1)\tilde{\Delta}(x, r-1)}, \ r = 2, 3, \ldots;$$

$$\alpha^0(r) = \min\{\alpha(r), \alpha^1(r)\}, \ r = 1, 2, \ldots;$$

$$\alpha(r) = \begin{cases} \tilde{\Delta}'(x, r) p_н(r)/\gamma(r), \text{ если } \gamma(r) > 0, \\ \infty, \text{ если } \gamma(r) = 0, \ r = 1, 2, \ldots; \end{cases}$$

$$\alpha^1(r) = \min\left\{ \min_{p_j(r)>0} \frac{d_j - x_j - l_j(r)}{p_j(r)}, \min_{p_j(r)<0} \frac{-x_j - l_j(r)}{p_j(r)}, \right.$$
$$\left. j \in J_н \setminus J_c(r) \right\}, \ r=1, 2, \ldots,$$

$\gamma(r)$ вычислено согласно (23). Если $\alpha^0(r) = \alpha(r)$, то $\tilde{J}_c(r+1) = J_c(r)$. В противном случае $\tilde{J}_c(r+1) = J_c(r) \cup i_r$, где $i_r$ — индекс, на котором реализуется минимум при вычислении $\alpha^1(r)$.

Так же, как и в § 1, можно показать, что производная задача (2) будет решена за конечное число шагов.

**4. Итерация. Замена опоры.** Пусть $\varepsilon > 0$ — допустимое отклонение опорного плана от оптимального по целевой функции, $\{x(k), A_{оп}(k)\}$ — текущий опорный план задачи (1), не удовлетворяющий критерию оптимальности, $l^0(k)$ — решение соответствующей производной задачи. Если $\beta(k) = -G(x(k), A_{оп}(k), l^0(k)) \leqslant \varepsilon$, то процесс решения задачи (1) можно остановить на $\varepsilon$-оптимальном плане $x(k)$. Предположим, что $\beta(k) > \varepsilon$.

Обозначим: $f(k) = f(x(k))$; $f(k, k) = f(x(k), l^0(k))$; $u(k) = u(x(k))$; $u(k, k) = u(x(k), l^0(k))$; $\Delta(k) = \Delta(x(k))$; $\Delta(k, k) = \Delta(x(k), l^0(k))$ и т. д. Вычислим, согласно (19) из § 1, максимально допустимый шаг $\Theta(k)$ вдоль направления $l^0(k)$. Ясно, что, в силу ограничений производной задачи, $\Theta^2_{i_k}(k) \geqslant 1$. Но поскольку точка $x(k) + l^0(k)$ является решением задачи

$$G(A_{\text{оп}}, x) = \frac{1}{2} x' Dx + c'x \to \min, \qquad (28)$$

$$Ax = b, \ 0 \leqslant x_{\text{н}} \leqslant d_{\text{н}},$$

то $\Theta^3(k) = 1$, а, следовательно, $\Theta(k) = \min\{\Theta^1_{i_k}(k), 1\}$. При этом если $\Theta(k) = 1$, то план $x(k+1) = x(k) + l^0(k)$ — решение исходной задачи (1). Предположим, что $\Theta(k) < 1$. Новый план вычислим по формуле

$$x(k+1) = x(k) + \Theta(k) l^0(k).$$

Рассмотрим вопрос о построении соответствующей ему опоры $A_{\text{оп}}(k+1)$. Так как опорная компонента плана $x_{i_k}(k)$ стала критической, столбец $a_{i_k}$ необходимо вывести из опоры. В выборе ему замены будем руководствоваться следующими соображениями.

Поставим в соответствие опорному плану $\{x(k), A_{\text{оп}}(k)\}$ тройку $\{z(k), y(k), w(k)\}$ по правилу

$$z(k) = x(k) + l^0(k); \ y(k) = -u(k, k);$$

$$w_j(k) = \begin{cases} \Delta_j(k, k), \text{ если } \Delta_j(k, k) \geqslant 0; \\ 0, \text{ если } \Delta_j(k, k) < 0. \end{cases} \qquad (29)$$

Покажем, что совокупность $\{z(k), y(k), w(k)\}$, построенная согласно (29), является планом *двойственной* к (1) задачи

$$F^*(z, y, w) = -\frac{1}{2} z' Dz - b'y - d'w \to \max_{\{z, y, w\}}, \qquad (30)$$

$$Dz + A'y + w + c \geqslant 0, \ w \geqslant 0.$$

Действительно, $w(k) \geqslant 0$ по построению;

$$Dz(k) + A'y(k) + w(k) + c = D[x(k) + l^0(k)] + c -$$
$$- A'u(k, k) + w(k) = f(k, k) - A'u(k, k) + w(k) =$$
$$= -\Delta(k, k) + w(k) \geqslant 0.$$

Двойственный план $\{z(k),\ y(k),\ w(k)\}$, построенный согласно (29), назовем *сопровождающим двойственным планом.*

Оценку субоптимальности теперь можно представить в виде суммы

$$\beta(k)=\beta_x(k)+\beta_{\text{оп}}(k), \tag{31}$$

где $\beta_x(k)=F(x(k))-F(x^0)$ — мера неоптимальности плана $x(k)$; $\beta_{\text{оп}}(k)=F^*(z^0,\ y^0,\ w^0)-F^*(z(k),\ y(k),\ w(k))$ — мера неоптимальности опоры $A_{\text{оп}}(k)$; $x^0$ и $\{z^0,\ y^0,\ w^0\}$ — соответственно оптимальные планы прямой и двойственной задач. Для опорного плана $\{x(k+1),\ A_{\text{оп}}(k)\}$ оценка субоптимальности не ухудшилась и стала равной

$$\overline{\beta}(k)=\beta_x(k+1)+\beta_{\text{оп}}(k)\leqslant\beta(k). \tag{32}$$

Здесь $\beta_x(k+1)=\beta_x(k)+\frac{1}{2}[\Theta(k)]^2[l^0(k)]'Dl^0(k)+$ $+\Theta(k)f'(k)l^0(k)$, т. е. $\overline{\beta}(k)<\beta(k)$, если $\Theta(k)\neq 0$. Вектор $a_{j_k}$, который введем в опору вместо $a_{i_k}$, выберем таким образом, чтобы для опоры $A_{\text{оп}}(k+1)$ мера неоптимальности $\beta_{\text{оп}}(k+1)$ не ухудшилась в сравнении с $\beta_{\text{оп}}(k)$. Для этого используем линейное программирование.

Пара $\{y(k),\ w(k)\}$ является планом задачи

$$-b'y-d'w\to\max_{\{y,\ w\}},\quad A'y+w\geqslant -f(k,\ k),\ w\geqslant 0, \tag{33}$$

двойственной к задаче

$$f'(k,\ k)x\to\min_x,\quad Ax=b,\ 0\leqslant x\leqslant d.$$

Нетрудно показать, что $z(k)$ — псевдоплан задачи (33), а пара $\{\delta(k,\ 0),\ A_{\text{оп}}(k)\}$, где $\delta(k,\ 0)=-\Delta(k,\ k)$, есть опорный коплан задачи (33), для которого не выполняется критерий оптимальности. Предположим, что он не вырожден. Тогда значение двойственной целевой функции в (32) можно увеличить. Применим для этого, как и в методе с адаптивной нормировкой [ч. 2], двойственный метод [ч. 1]. Подходящее направление $t(k)$ для коплана $\delta(k,\ 0)$ имеет вид $t_j(k)=0$, $j\in J_{\text{оп}}(k)\setminus i_k$,

$$t_{i_k}(k)=\begin{cases}-1, & \text{если } x_{i_k}(k+1)=d_{i_k};\\ 1, & \text{если } x_{i_k}(k+1)=0;\end{cases}$$

$$t'_{\text{н}}(k)=t'_{\text{оп}}(k)A_{\text{оп}}^{-1}(k)A_{\text{н}}(k).$$

Пусть $x_{i_k}(k+1)=0$. Тогда начальная скорость возрастания двойственной целевой функции (33) равна $q(k,0)=-z_{i_k}(k)$. Максимальный шаг $\sigma(k, 0)$ вдоль направления $t(k)$ при скорости $q(k, 0)$ находим из условия, что компоненты коплана $\delta(k, 1)=\delta(k, 0)+\sigma(k, 0)t(k)$ не меняют знак. После появления нулевых компонент у коплана $\delta(k, 1)$ скорость возрастания двойственной целевой функции (33) уменьшится и станет равной

$$q(k, 1)=q(k,0)-\sum_{\substack{t_j(k)>0\\ \delta_j(k,\,1)=0,\ j\in J_{\text{н}}(k)}} d_jt_j(k)+\sum_{\substack{t_j(k)<0\\ \delta_j(k,\,1)=0,\ j\in J_{\text{н}}(k)}} d_jt_j(k).$$

При $q(k, 1)>0$ продолжаем движение вдоль направления $t(k)$. В противном случае останавливаемся на коплане $\delta(k, 1)$.

Пусть для опорного коплана $\{\delta(k, s), A_{\text{оп}}(k)\}$, $\delta(k, s)=\delta(k, 0)+t(k)\sum_{i=1}^{s-1}\sigma(k, i)$, скорость движения вдоль направления $t(k)$ равна $q(k, s)>0$. Максимальный шаг $\sigma(k, s)$ находим из условия, что у коплана $\delta(k, s+1)$ появляются новые нулевые компоненты. Скорость изменения двойственной целевой функции вдоль направления $t(k)$ на коплане $\delta(k, s+1)$ равна

$$q(k, s+1)=q(k, s)-\sum_{\substack{\delta_i(k,\,s+1)=0\\ t_j(k)>0,\ j\in J_{\text{н}}(k)}} d_jt_j(k)+\sum_{\substack{\delta_j(k,\,s+1)=0\\ t_j(k)<0,\ j\in J_{\text{н}}(k)}} d_jt_j(k).$$

Если $q(k, s+1)>0$, то продолжаем движение вдоль $t(k)$ со скоростью $q(k, s+1)$. В противном случае останавливаемся на коплане $\delta(k, s+1)$.

Если опорный коплан $\{\delta(k, 0), A_{\text{оп}}(k)\}$ вырожден, то начальная скорость движения вдоль направления $t(k)$ равна

$$q(k, 0)=-z_{i_k}(k)-\sum_{\substack{\delta_j(k,\,0)=0\\ t_j(k)>0,\ j\in J_{\text{н}}(k)}} z_j(k)t_j(k)-\sum_{\substack{\delta_j(k,\,0)=0\\ t_j(k)<0,\ j\in J_{\text{н}}(k)}} (z_j(k)-d_j)t_j(k).$$

Не исключено, что $q(k, 0) \leqslant 0$. В этом случае сразу же останавливаемся на коплане $\delta(k, 0)$. Если $q(k, 0) > 0$, то осуществляем движение вдоль $t(k)$ по вышеописанным правилам.

Из сказанного следует, что за конечное число шагов будет получен коплан $\delta(k; r)$, для которого $q(k, r) \leqslant 0$. По коплану $\delta(k, r)$ и вектору $z(k, r)$ построим опору $A_{\text{оп}}(k+1) = \{a_j, j \in J_{\text{оп}}(k) \setminus i_k, a_{j_k}\}$, где $a_{j_k}$ — любой вектор из множества $J_{\text{но}}(k) = \{j \in J_{\text{н}}(k): \delta_j(k, r) = 0, t_j(k) \times \times z_j(k) > 0$ или $t_j(k)(z_j(k) - d_j(k)) > 0\}$.

Покажем, что для опорного плана $\{x(k+1), A_{\text{оп}}(k+1)\}$ выполняется неравенство

$$\beta_{\text{оп}}(k+1) \leqslant \beta_{\text{оп}}(k). \tag{34}$$

Простой подстановкой нетрудно проверить, что сопровождающий двойственный план $\{z(k+1), y(k+1), w(k+1)\}$ есть план задачи

$$\begin{gathered} -\frac{1}{2} z'Dz - b'y - d_{\text{н}}' w_{\text{н}} \to \max, \\ [Dz + A'y + c]_j = 0, \ j \in J_{\text{оп}}(k+1), \\ [Dz + A'y + w + c]_j \geqslant 0, \ w_j \geqslant 0, \ j \in J_{\text{н}}(k+1). \end{gathered} \tag{35}$$

Так как задача (35) является двойственной к задаче (28), построенной по опоре $A_{\text{оп}}(k+1)$, опорный план $\{z(k+1), A_{\text{оп}}(k+1)\}$ — решением (28), то, согласно теории двойственности, из равенства

$$\frac{1}{2} z'(k+1) Dz(k+1) + c'z(k+1) = f'(z(k+1)) z(k+1) -$$

$$-\frac{1}{2} z'(k+1) Dz(k+1) = f'(k+1, k+1) z(k+1) -$$

$$-\frac{1}{2} z'(k+1) Dz(k+1) = -z'(k+1) \Delta(k+1, k+1) +$$

$$+ u'(k+1, k+1) Az(k+1) - \frac{1}{2} z'(k+1) Dz(k+1) =$$

$$= -\frac{1}{2} z'(k+1) Dz(k+1) - b'y(k+1) - d_{\text{н}}' w_{\text{н}}(k+1)$$

следует, что сопровождающий двойственный план $\{z(k+1), y(k+1), w(k+1)\}$ есть решение задачи (35). Далее, тройка $\{z(k), \bar{y}(k+1), \bar{w}_{\text{н}}(k+1)\}$, где $\{\bar{y}(k+1), \bar{w}(k+1)\}$ — план задачи (33), соответствующий опорному коплану $\{\delta(k, r), A_{\text{оп}}(k+1)\}$, тоже является планом задачи (35) по построению и

$$-\frac{1}{2}z'(k)Dz(k)-b'y(k)-d'w(k)\leqslant-\frac{1}{2}z'(k)Dz(k)-\\-b'\bar{y}(k+1)-d'\bar{w}(k+1). \qquad (36)$$

Поскольку план $\{z(k+1), y(k+1), w(k+1)\}$ оптимален в задаче (35), то

$$-\frac{1}{2}z'(k)Dz(k)-b'\bar{y}(k+1)-d'\bar{w}(k+1)\leqslant\\ \leqslant-\frac{1}{2}z'(k+1)Dz(k+1)-b'y(k+1)-d'w(k+1). \qquad (37)$$

Из (36) и (37) с очевидностью следует доказываемое неравенство (34).

Таким образом, для построенного опорного плана $\{x(k+1), A_{\text{оп}}(k+1)\}$ оценка субоптимальности удовлетворяет неравенству

$$\beta(k+1)\leqslant\beta(k).$$

**5. Конечность.** Предположим, что матрица $D$ положительно определена. В этом случае

$$\beta_{\text{оп}}(k+1)<\beta_{\text{оп}}(k). \qquad (38)$$

Действительно, предположим, что

$$\beta_{\text{оп}}(k+1)=\beta_{\text{оп}}(k). \qquad (39)$$

Тогда $\Delta_{j_k}(k, k)=0$ и вектор $z(k)$, в силу строгой выпуклости, является единственным решением задачи

$$\frac{1}{2}x'Dx+c'x\to\min, Ax=b, 0\leqslant x_j\leqslant d_j, j\in J_{\text{н}}(k)\setminus j_k. \qquad (40)$$

Точка $z(k+1)$ тоже план задачи (40). В силу равенства (39)

$$\frac{1}{2}z'(k)Dz(k)+c'z(k)=\frac{1}{2}z'(k+1)Dz(k+1)+c'z(k+1),$$

а, следовательно, $z(k)=z(k+1)$. Но это невозможно, так как $z_{i_k}(k)\overline{\in}[0, d_{i_k}]$ $z_{i_k}(k+1)\subset[0, d_{i_k}]$. Получили противоречие, которое доказывает неравенство (38).

С каждой опорой $A_{\text{оп}}(k)$ связано единственное число $\beta_{\text{оп}}(k)$ — мера ее неоптимальности. Поэтому из (38) следует, что ни одна из опор не повторится дважды. Но тогда, поскольку число различных опор ограничено, за конечное число итераций будет получена опора $A_{\text{оп}}(k^0)$ с $\beta_{\text{оп}}(k^0)=0$, что означает оптимальность плана $x(k^0)$.

Если матрица $D$ неотрицательно определена, то гарантировать конечность настоящего метода не удается. Однако в этом случае можно построить несложную модификацию метода, которая будет решать задачу (1) за конечное число итераций.

## § 3. Адаптивный метод

Строится квадратичный аналог прямой части адаптивного метода, изложенного во введении.

**1. Критерий оптимальности и субоптимальности.** Рассмотрим задачу квадратичного программирования в *естественной форме*

$$F(x)=\frac{1}{2}x'Dx+c'x\to\min,\ b_*\leqslant Ax\leqslant b^*,\ d_*\leqslant x\leqslant d^*, \quad (1)$$

где $D$ — симметрическая неотрицательно определенная $n\times n$-матрица; $A$ — $m\times n$-матрица; $-\infty<b_*<b^*<+\infty$; $-\infty<d_*<d^*<+\infty$; $x$, $c$, $d_*$, $d^*$ — $n$-векторы; $b_*$, $b^*$ — $m$-векторы.

Введем обозначения: $I=\{1, 2, \ldots, m\}$; $J=\{1, 2, \ldots, n\}$; $A(M, N)=\{a_{ij}, i\in M, j\in N\}$ — $k\times s$-матрица, $M\subset I$, $N\subset J$, $k=|M|$, $s=|N|$; $|M|$ — количество элементов множества $M$; $b(M)=\{b_i, i\in M\}$ — $k$-вектор.

Вектор $x$, удовлетворяющий всем ограничениям задачи (1), назовем *планом*. Неособая подматрица $A_{\text{оп}}=A(I_{\text{оп}}, J_{\text{оп}})$ матрицы $A$, $I_{\text{оп}}\subset I$, $J_{\text{оп}}\subset J$, называется *опорой задачи* (1). Пара $\{x, A_{\text{оп}}\}$ называется *опорным планом.* Опорный план не вырожден, если он удовлетворяет соотношениям

$$b_*(I_{\text{н}})<A(I_{\text{н}}, J)\,x<b^*(I_{\text{н}}),\ d^*(J_{\text{оп}})<x(J_{\text{оп}})<d^*(J_{\text{оп}}),$$

где $I_{\text{н}}=I\setminus I_{\text{оп}}$.

Пусть $\{x, A_{\text{оп}}\}$ — начальный опорный план задачи (1), $w_*=b_*-Ax$, $w^*=b^*-Ax$ — нижний и верхний векторы невязок, $I^*=\{i: A(i, J)\,x=b_i^*\}$, $I_*=\{i: A(i, J)\,x=b_{*i}\}$, $\tilde I=I\setminus(I^*\cup I_*)$, $J^*=\{j: x_j=d_j^*\}$, $J_*=\{j: x_j=d_{*j}\}$, $\tilde J=J\setminus(J^*\cup J_*)$, $I_{\text{оп}}^*=I^*\cap I_{\text{оп}}$, $I_{*\text{оп}}=I_*\cap I_{\text{оп}}$, $\tilde I_{\text{оп}}=\tilde I\cap I_{\text{оп}}$, $J_{\text{н}}^*=J^*\cap J_{\text{н}}$, $J_{*\text{н}}=J_*\cap J_{\text{н}}$, $\tilde J_{\text{н}}=\tilde J\cap J_{\text{н}}$, $J_{\text{н}}=J\setminus J_{\text{оп}}$.

По опорному плану $\{x, A_{\text{оп}}\}$ вычислим градиент целевой функции $f=Dx+c$, вектор опорных потенциалов $u=u(I_{\text{оп}})$: $u'=f'(I_{\text{оп}})\,A_{\text{оп}}^{-1}$, и вектор оценок $\Delta=A'(I_{\text{оп}}, J)\,u-f$.

**Критерий оптимальности.** Соотношения

$$\Delta(J_{*\text{н}}) \leqslant 0,\ \Delta(J_{\text{н}}^{*}) \geqslant 0,\ \Delta(J_{\text{н}}^{\sim}) = 0,$$

$$u(I_{\text{оп}}^{*}) \leqslant 0,\ u(I_{*\text{оп}}) \geqslant 0,\ u(I_{\text{оп}}^{\sim}) = 0$$

достаточны, а в случае невырожденности опорного плана и необходимы для его оптимальности.

Построим производную задачу

$$G(x,\ A_{\text{оп}},\ l) = \frac{1}{2} l' Dl + f'l \to \min, \tag{2}$$

$$\omega_{*}(I_{\text{оп}}) \leqslant A(I_{\text{оп}},\ J)\, l \leqslant \omega^{*}(I_{\text{оп}}),\ \bar{d}_{*}(J_{\text{н}}) \leqslant l(J_{\text{н}}) \leqslant \bar{d}^{*}(J_{\text{н}}),$$

где $\bar{d}_{*}(J_{\text{н}}) = d_{*}(J_{\text{н}}) - x(J_{\text{н}})$; $\bar{d}^{*}(J_{\text{н}}) = d^{*}(J_{\text{н}}) - x(J_{\text{н}})$.

Пусть $l^{0}$ — ее решение, $\beta = -G(x,\ A_{\text{оп}},\ l^{0})$. Справедлив

**Критерий субоптимальности.** Если $\beta \leqslant \varepsilon$, то опорный план $\{x,\ A_{\text{оп}}\}$ является $\varepsilon$-оптимальным. Обратно: если $x^{\varepsilon}$ — $\varepsilon$-оптимальный план, то существует такая опора $A_{\text{оп}}^{\varepsilon} = A(I_{\text{оп}}^{\varepsilon},\ J_{\text{оп}}^{\varepsilon})$, что $\beta \leqslant \varepsilon$.

Следствие *(достаточное условие субоптимальности)*. План $x$ является $\varepsilon$-оптимальным, если

$$\sum_{\Delta_j < 0} \Delta_j \bar{d}_{*j} + \sum_{\Delta_j > 0} \Delta_j \bar{d}_j^{*} + \sum_{u_i > 0} u_i w_i^{*} + \sum_{u_i < 0} u_i w_{*i} \leqslant \varepsilon.$$

Для решения производной задачи нетрудно построить специальную модификацию опорного метода сопряженных градиентов (§ 2), заметив, что задача (2) эквивалентна следующей:

$$G(x,\ A_{\text{оп}},\ l) = \frac{1}{2} l' Dl + f'l \to \min,$$

$$A(I_{\text{оп}},\ J)\, l - \xi = 0,\ \bar{d}_{*}(J_{\text{н}}) \leqslant l(J_{\text{н}}) \leqslant \bar{d}^{*}(J_{\text{н}}),$$

$$\omega_{*}(I_{\text{оп}}) \leqslant \xi \leqslant \omega^{*}(I_{\text{оп}}).$$

Обозначим: $f_x = Dl + f$, $u_x' = (A_{\text{оп}}^{-1})' f_x(I_{\text{оп}})$, $\Delta_x = A'(I_{\text{оп}},\ J)\, u_x - f_x$. Критерий оптимальности в задаче (2) можно сформулировать таким образом. План $l$ тогда и только тогда оптимален в задаче (2), когда

$$\Delta_{xj} \leqslant 0 \text{ при } l_j = \bar{d}_{*j},\ \Delta_{xj} \geqslant 0 \text{ при } l_j = \bar{d}_j^{*},$$

$$\Delta_{xj} = 0 \text{ при } \bar{d}_{*j} < l_j < \bar{d}_j^{*},\ j \in J_{\text{н}};$$

$$u_{xi} \geqslant 0 \text{ при } A(i,\ J)\, l = \omega_{*i},\ u_{xi} \leqslant 0 \text{ при } A(i,\ J)\, l = \omega_i^{*},$$

$$u_{xi} = 0 \text{ при } \omega_{*i} < A(i,\ J)\, l < \omega_i^{*},\ i \in I_{\text{оп}}.$$

**2. Итерация метода.** Пусть $\{x, A_{\text{оп}}\}$ — текущий опорный план задачи (1), не удовлетворяющий критерию оптимальности, $\beta \geqslant \varepsilon$, где $\varepsilon$ — заданная точность приближения к оптимальному значению целевой функции. В качестве направления улучшения плана $x$ будем использовать решение $l^0$ соответствующей производной задачи (2). Как уже указывалось, если опорный план $\{x, A_{\text{оп}}\}$ не вырожден, то $l^0$ — подходящее для плана $x$ направление. Шаг $\Theta_0$ для построения нового плана $\bar{x} = x + \Theta_0 l$, найденный из условия максимально допустимого продвижения вдоль $l^0$, равен $\Theta_0 = \min\{1, \Theta_{i_0}, \Theta_{j_0}\}$, где $\Theta_{i_0} = \min \Theta_i$, $i \in I_{\text{н}}$; $A(i, J)\, l^0 \neq 0$; $\Theta_i = \overset{*}{\omega_i} / A(i, J)\, l^0$, если $A(i, J)\, l^0 > 0$; $\Theta_i = \omega_{*i} / A(i, J)\, l^0$, если $A(i, J)\, l^0 < 0$; $\Theta_{j_0} = \min \Theta_j$, $j \in J_{\text{оп}}$, $l_j^0 \neq 0$; $\Theta_j = \bar{d}_j^* / l_j^0$, если $l_j^0 > 0$; $\Theta_j = \bar{d}_{*j} / l_j^0$, если $l_j^0 < 0$.

Рассмотрим вопрос о построении для плана $\bar{x}$ новой опоры $\bar{A}_{\text{оп}}$. Представим оценку субоптимальности $\beta = -G(x, A_{\text{оп}}, l^0)$ в следующем виде:

$$\beta = \beta_x + \beta_{\text{оп}}, \tag{3}$$

где $\beta_x = c'x - c'x^0$ — мера неоптимальности плана $x$; $x^0$ — решение задачи (1); $\beta_{\text{оп}} = -\frac{1}{2}(z^0)' D z^0 - b^{*\prime} s^0 + b_*' t^0 - d^{*\prime} w^0 + d_*' v^0 + \frac{1}{2} z' D z + b^{*\prime} s - b_*' t + d^{*\prime} w - d_*' v$ — мера неоптимальности опоры $A_{\text{оп}}$, подсчитанная по оптимальному плану $\{z^0, y^0, s^0, t^0, w^0, v^0\}$ задачи, двойственной к (1):

$$\begin{gathered} -\frac{1}{2} z' D z - b^{*\prime} s + b_*' t - d^{*\prime} w + d_*' v \to \max, \\ Dz + A'y + w - v + c = 0, \\ y + s - t = 0,\ w \geqslant 0,\ v \geqslant 0,\ s \geqslant 0,\ t \geqslant 0, \end{gathered} \tag{4}$$

и сопровождающему двойственному плану $\{z, y, s, t, w, v\}$, т. е. плану задачи (4), построенному по правилу

$$z = x + l^0;\ y(I_{\text{оп}}) = -u_x,\ y(I_{\text{н}}) = 0;\ s_i = -y_i,\ t_i = 0, \tag{5}$$

если $y_i \leqslant 0$; $s_i = 0$, $t_i = y_i$, если $y_i > 0$, $i \in I$; $w_j = \Delta_{xj}$, $v_j = 0$, если $\Delta_{xj} \geqslant 0$; $w_j = 0$, $v_j = -\Delta_{xj}$, если $\Delta_{xj} < 0$, $j \in J$.

В результате перехода от опорного плана $\{x, A_{\text{оп}}\}$ к опорному плану $\{\bar{x}, A_{\text{оп}}\}$ оценка оптимальности уменьшилась (если $\Theta_0 \neq 0$) за счет уменьшения $\beta_x$:

$$\bar{\beta}_x = \beta_x + \frac{1}{2} \Theta_0^2 (l^0)' D l^0 + \Theta_0 f' l^0.$$

Если $\overline{\beta}_x+\beta_{\text{оп}}\leqslant\varepsilon$, то процесс решения задачи (1) останавливается на $\varepsilon$-оптимальном плане $\bar{x}$.

Пусть $\overline{\beta}_x+\beta_{\text{оп}}>\varepsilon$. Переходим к уменьшению $\beta_{\text{оп}}$. Выберем $\varepsilon_0$ и во множествах $J_{\text{оп}}$, $I_{\text{н}}$ выделим подмножества $J_0=\{j\in J_{\text{оп}}\colon \Theta_j>\Theta_0+\varepsilon_0\}$, $I_0=\{i\in I_{\text{н}}\colon \Theta_i>\Theta_0+\varepsilon_0\}$. Среди всевозможных опор $\bar{A}_{\text{оп}}=A(\bar{I}_{\text{оп}}, \bar{J}_{\text{оп}})$, для которых $J_0\subset\bar{J}_{\text{оп}}$, $I_0\cap\bar{I}_{\text{оп}}=\varnothing$, найдем такую, при которой оценка субоптимальности (3) опорного плана $\{\bar{x}, \bar{A}_{\text{оп}}\}$ будет минимальной. Эта задача эквивалентна поиску оптимального плана задачи:

$$-\frac{1}{2}z'(\bar{J})D(\bar{J}, \bar{J})z(\bar{J})-b^{*\prime}(\bar{I})s(\bar{I})+b'_{*}(\bar{I})t(\bar{I})-$$

$$-d^{*\prime}(\bar{J})w(\bar{J})+d'_{*}(\bar{J})v(\bar{J})\to\max,$$

$$D(J_0, \bar{J})z(\bar{J})+A'(\bar{I}, J_0)y(\bar{I})+c(J_0)=0, \tag{6}$$

$$D(\bar{J}, \bar{J})z(\bar{J})+A'(\bar{I}, \bar{J})y(\bar{I})+w(\bar{J})-v(\bar{J})+c(\bar{J})=0,$$

$$y(\bar{I})+s(\bar{I})-t(\bar{I})=0,\ w(\bar{J})\geqslant 0,\ v(\bar{J})\geqslant 0,\ s(\bar{I})\geqslant 0,\ t(\bar{I})\geqslant 0,$$

где $\bar{J}=J\diagdown J_0$, $\bar{I}=I\diagdown I_0$, а, следовательно, искомая опора $\bar{A}_{\text{оп}}$ есть опора оптимального опорного плана задачи

$$\frac{1}{2}x'Dx+c'x\to\min, \tag{7}$$

$$b_*(\bar{I})\leqslant A(\bar{I}, J)x\leqslant b^*(\bar{I}),\ d_*(\bar{J})\leqslant x(\bar{J})\leqslant d^*(\bar{J}),$$

двойственной к (6). Для решения (7) можно применить любой из методов, описанных в § 1, 2.

Для построения новой опоры $\bar{A}_{\text{оп}}$, у которой мера неоптимальности лучше, чем у старой, можно воспользоваться линейным программированием. Как и в § 2, нетрудно показать, что если $\bar{A}_{\text{оп}}$ есть опора оптимального опорного коплана задачи

$$\begin{gathered}
-b^{*\prime}(\bar{I})s(\bar{I})+b'_{*}(\bar{I})t(\bar{I})-d^{*\prime}(\bar{J})w(\bar{J})+\\
+d'_{*}(\bar{J})v(\bar{J})\to\max,\\
A'(\bar{I}, J_0)y(\bar{I})=-f_x(J_0),\\
A'(\bar{I}, \bar{J})y(\bar{I})+w(\bar{J})-v(\bar{J})=-f_x(\bar{J}),\\
y(\bar{I})+s(\bar{I})-t(\bar{I})=0,\ w(\bar{J})\geqslant 0,\ v(\bar{J})\geqslant 0,\\
s(\bar{I})\geqslant 0,\ t(\bar{I})\geqslant 0,
\end{gathered} \tag{8}$$

или оптимального опорного плана задачи

$$f_x' p \to \min_p, \tag{9}$$

$$b_*(\bar I) \leqslant A(\bar I, J) p \leqslant b^*(\bar I), \; d_*(\bar J) \leqslant p(\bar J) \leqslant d^*(\bar J),$$

двойственной к (8), то $\bar\beta_{оп} \leqslant \beta_{оп}$, где $\bar\beta_{оп}$ — мера неоптимальности опоры $\bar A_{оп}$.

Таким образом, каждая итерация метода включает в себя решение производной задачи (2) для проверки текущего опорного плана на субоптимальность и построения подходящего направления $l^0$, а также решение задачи (7) ((8) или (9)) для выбора опоры $\bar A_{оп}$.

Итерацию метода назовем *регулярной*, если $\bar\beta_{оп} < \beta_{оп}$. Ясно, что если все итерации метода регулярны, то задача (1) будет решена за конечное число итераций.

Замечания. 1. Пусть опора $\bar A_{оп}$ строится посредством решения задачи (7), $\tilde x^0$ — ее оптимальный план. Нетрудно проверить, что $\bar l = \tilde x - \bar x$ — решение производной задачи (2), построенной по опорному плану $\{\bar x, A_{оп}\}$, а $\bar\beta = \frac{1}{2}\bar x' D \bar x + c'\bar x - \frac{1}{2}(\tilde x^0)' D \tilde x^0 + c' \tilde x^0$. Это практически означает, что в решении задачи (7) совмещено построение опоры $\bar A_{оп}$, вектора $\bar l^0$ и вычисление оценки субоптимальности $\bar\beta$ опорного плана $\{\bar x, \bar A_{оп}\}$, т. е. для всех итераций за исключением первой отпадает такая фаза итерации, как решение производной задачи.

2. Предположим, что задача (7) решается методом, описанным в § 2 ((8) — двойственным опорным методом, (9) — опорным методом с адаптивной нормировкой). В этом случае задачу (7) ((8) или (9)) не обязательно решать до конца. Процесс решения можно остановить на любой итерации кроме первой. Опора, на которой прервано решение, берется в качестве новой опоры $\bar A_{оп}$ задачи (1).

3. Выделение множеств $J_0$, $I_0$ из $J_{оп}$ и $I_н$ можно было производить по плану $\bar x$ и числу $\varepsilon_0$:

$$J_0 = \{j \in J_{оп}\colon d_{*j} + \varepsilon_0 < \bar x_j < d_j^* - \varepsilon_0\},$$

$$I_0 = \{i \in I_н\colon b_{*i} + \varepsilon_0 < A(i, J)\bar x < b_i^* - \varepsilon_0\}.$$

## § 4. Невыпуклые задачи

Кроме традиционных выпуклых задач в квадратичном программировании в последние годы интенсивно исследуются задачи с невыпуклой квадратичной целевой функцией. В данном параграфе исследуется задача подобного типа.

**1. Метод исследования.** Рассмотрим *задачу невыпуклого квадратичного программирования*

$$(p'x+\alpha)(q'x+\beta)\to\min,\ Ax=b,\ d_*\leqslant x\leqslant d^*, \qquad (1)$$

где $A$ — $m\times n$-матрица; $\operatorname{rank} A=m$; $p$, $q$, $d_*$, $d^*$, $x$ — $n$-векторы; $b$ — $m$-вектор; $\alpha$, $\beta$ — скалярные величины.

Множество планов задачи (1) обозначим через $X$. Пусть $\gamma_*=\min\limits_{x\in X}(q'x+\beta)$, $\gamma^*=\max\limits_{x\in X}(q'x+\beta)$. На отрезке $\gamma_*\leqslant\gamma\leqslant\gamma^*$ определим функции

$$\varphi_1(\gamma)=\min_{x\in X,\ q'x=\gamma-\beta}(p'x+\alpha)=p'x_*(\gamma)+\alpha;$$

$$\varphi_2(\gamma)=\max_{x\in X,\ q'x=\gamma-\beta}(p'x+\alpha)=p'x^*(\gamma)+\alpha.$$

Легко заметить, что задача (1) эквивалентна следующей:

$$F(\gamma)=\varphi(\gamma)\gamma\to\min,\ \gamma_*\leqslant\gamma\leqslant\gamma^*, \qquad (2)$$

где

$$F(\gamma)=\begin{cases}F_1(\gamma)=\varphi_1(\gamma)\gamma, & \text{если } \gamma\geqslant 0;\\ F_2(\gamma)=\varphi_2(\gamma)\gamma, & \text{если } \gamma<0.\end{cases}$$

**Теорема 1.** $\varphi_1(\gamma)$ — выпуклая, $\varphi_2(\gamma)$ — вогнутая кусочно-линейные функции на $[\gamma_*,\gamma^*]$, не дифференцируемые разве лишь в конечном числе точек.

Доказательство. Рассмотрим $\varphi_1(\gamma)$. Пусть

$$\gamma^1,\gamma^2\in[\gamma_*,\gamma^*],\ x_\lambda=x_*(\lambda\gamma^1+(1-\lambda)\gamma^2),\ 0\leqslant\lambda\leqslant 1.$$

Так как

$$q'(\lambda x_*(\gamma^1)+(1-\lambda)x_*(\gamma^2))+\beta=\lambda(q'x_*(\gamma^1)+\beta)+\\+(1-\lambda)(q'x_*(\gamma^2)+\beta)=\lambda\gamma^1+(1-\lambda)\gamma^2,$$

то

$$\varphi_1(\lambda\gamma_1+(1-\lambda)\gamma_2)=p'x_\lambda+\alpha\leqslant p'(\lambda x_*(\gamma^1)+\\+(1-\lambda)x_*(\gamma^2))+\alpha=\lambda(p'x_*(\gamma^1)+\alpha)+(1-\lambda)(p'x_*(\gamma^2)+\\+\alpha)=\lambda\varphi_1(\gamma^1)+(1-\lambda)\varphi_1(\gamma_2),\ 0\leqslant\lambda\leqslant 1,$$

из чего следует выпуклость $\varphi_1(\gamma)$.

В силу выпуклости функция $\varphi_1(\gamma)$ дифференцируема по направлению, т. е. существуют правосторонняя $\dfrac{\partial\varphi_1(\gamma)}{\partial\gamma^+}$, $\gamma\in[\gamma_*,\gamma^*)$, и левосторонняя $\dfrac{\partial\varphi_1(\gamma)}{\partial\gamma^-}$, $\gamma\in(\gamma_*,\gamma^*]$, производные.

План $x_*(\gamma)$ является решением задачи

$$p'x+\alpha\to\min,\ \bar{A}x=b(\gamma),\ d_*\leqslant x\leqslant d^*, \tag{3}$$

где $\bar{A}=\begin{Bmatrix}A\\ q'\end{Bmatrix}$; $b(\gamma)=\begin{Bmatrix}b\\ \gamma\end{Bmatrix}$. Согласно [ч.1],

$$\frac{\partial\varphi_1(\gamma)}{\partial\gamma^+}=-y^+_{m+1}(\gamma),\quad \frac{\partial\varphi_1(\gamma)}{\partial\gamma^-}=-y^-_{m+1}(\gamma),$$

где $y^+_{m+1}(\gamma)$ и $y^-_{m+1}(\gamma)$ — решения задач

$$\begin{gathered} y_{m+1}\to\min,\ \bar{A}'y+w-v=p,\\ b'(\gamma)y+d^{*\prime}w-d_*v=p'x_*(\gamma),\ w\geqslant 0,\ v\geqslant 0, \end{gathered} \tag{4}$$

и

$$\begin{gathered} y_{m+1}\to\max,\ \bar{A}'y+w-v=p,\\ b'(\gamma)y+d^{*\prime}w-d_*v=p'x_*(\gamma),\ w\geqslant 0,\ v\geqslant 0, \end{gathered} \tag{5}$$

соответственно.

Рассмотрим $\dfrac{\partial\varphi(\gamma^1)}{\partial\gamma^+}$, $\gamma^1\in[\gamma_*,\ \gamma^*)$. Построим задачу, двойственную к (4):

$$\begin{gathered} p'z+z_{n+1}p'x_*(\gamma^1)\to\max,\ \bar{A}z+z_{n+1}b(\gamma^1)=e_{m+1},\\ z+z_{n+1}d^*\leqslant 0,\ z+z_{n+1}d_*\geqslant 0, \end{gathered} \tag{6}$$

где $e_{m+1}=(0,\ \ldots,\ 0,\ 1)'$ — $m+1$-вектор. Пусть $\{z(\gamma^1),\ z_{n+1}(\gamma^1)\}$ — решение задачи (6). В силу структуры ограничений задачи (6) справедливо неравенство $z_{n+1}(\gamma^1)<0$. Как нетрудно проверить, вектор $-z(\gamma^1)/z_{n+1}(\gamma^1)$ является решением задачи (3) при $\gamma=\gamma^1-\dfrac{1}{z_n(\gamma^1)}$. Положим

$$\tilde{x}(\Delta\gamma)=x_*(\gamma^1)+\Delta\gamma[z(\gamma^1)+z_{n+1}(\gamma^1)x_*(\gamma^1)],\ \Delta\gamma>0. \tag{7}$$

Тогда

$$\bar{A}\tilde{x}(\Delta\gamma)=b(\gamma^1)+\Delta\gamma\,[\bar{A}z(\gamma^1)+z_{n+1}(\gamma^1)\,b(\gamma^1)]=b(\gamma^1+\Delta\gamma).$$

Предположим, что $d_*\leqslant\tilde{x}(\Delta\gamma)\leqslant d^*$, т. е. $\tilde{x}(\Delta\gamma)$ — план задачи (3) при $\gamma=\gamma^1+\Delta\gamma$. Построим $\tilde{z}=\tilde{x}(\Delta\gamma)/\Delta\gamma$, $\tilde{z}_{n+1}=-\dfrac{1}{\Delta\gamma}$. Пара $\{\tilde{z},\ \tilde{z}_{n+1}\}$ является планом задачи (6). Более того,

$$p'\tilde{z}+\tilde{z}_{n+1}\,p'x_*(\gamma^1)=p'\tilde{x}(\Delta\gamma)/\Delta\gamma-p'x_*(\gamma^1)/\Delta\gamma=$$

$$= \frac{1}{\Delta\gamma} p' [x_* (\gamma^1) + \Delta\gamma (z (\gamma^1) + z_{n+1} (\gamma^1) x_* (\gamma^1)) -$$

$$- x_* (\gamma^1)] = p' z (\gamma^1) + z_{n+1} (\gamma^1) x_* (\gamma^1),$$

что означает оптимальность плана $\{\tilde{z}, \tilde{z}_{n+1}\}$ в задаче (6). Поэтому, если вектор $\tilde{x}(\Delta\gamma)$, построенный согласно (7), является планом задачи (3) при $\gamma = \gamma^1 + \Delta\gamma$, то он оптимален для нее:

$$x_* (\gamma + \Delta\gamma) = \tilde{x} (\Delta\gamma). \tag{8}$$

Пусть $\gamma^2$ — наибольшее из тех $\gamma \in [\gamma^1, \gamma^*]$, для которых $d_* \leqslant \tilde{x} (\gamma - \gamma^1) \leqslant d^*$. Тогда

$$\varphi_1 (\gamma) = \varphi_1 (\gamma^1) + \frac{\partial \varphi (\gamma^1)}{\partial \gamma^+} (\gamma - \gamma^1), \quad \gamma \in [\gamma^1, \gamma^2],$$

т. е. функция $\varphi_1(\gamma)$ линейна на $[\gamma^1, \gamma^2]$ и дифференцируема по крайней мере на $(\gamma^1, \gamma^2)$. В точке $\gamma^2$ функция $\varphi_1(\gamma)$ может быть не дифференцируема. Ясно, что это связано с появлением у плана $x_*(\gamma^2)$ новых критических компонент по сравнению с $x_*(\gamma^1)$. Но число планов $x_*(\gamma)$, $\gamma_* \leqslant \gamma \leqslant \gamma^*$, с различными наборами критических компонент конечно. Следовательно, конечно и число точек, в которых $\varphi_1(\gamma)$ не дифференцируема.

Аналогично исследуется функция $\varphi_2(\gamma)$. Справедливы формулы

$$\frac{\partial \varphi_2 (\gamma)}{\partial \gamma^+} = y^+_{m+1} (\gamma); \quad \frac{\partial \varphi_2 (\gamma)}{\partial \gamma^-} = y^-_{m+1} (\gamma),$$

где $y^+_{m+1} (\gamma)$, $y^-_{m+1} (\gamma)$ — решения задач

$$\begin{gathered} y_{m+1} \to \min, \ \bar{A}' y + w - v = p, \\ b' (\gamma) y + d^{*\prime} w - d'_* v = p' x^* (\gamma), \ w \geqslant 0, \ v \geqslant 0, \end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered} y_{m+1} \to \max, \ \bar{A}' y + w - v = p, \\ b' (\gamma) y + d^{*\prime} w - d'_* v = p' x^* (\gamma), \ w \geqslant 0, \ v \geqslant 0, \end{gathered} \tag{10}$$

соответственно.

Следствие. $\dfrac{\partial \varphi_1 (\gamma)}{\partial \gamma^+}$, $\dfrac{\partial \varphi_1 (\gamma)}{\partial \gamma^-}$ — не убывающие, а $\dfrac{\partial \varphi_2 (\gamma)}{\partial \gamma^+}$, $\dfrac{\partial \varphi_2 (\gamma)}{\partial \gamma^-}$ — не возрастающие кусочно-постоянные функции на множествах их определения.

Перейдем теперь непосредственно к исследованию задачи (2). Предположим, что $\gamma_* \geqslant 0$. Тогда задача (2) имеет вид

$$F_1(\gamma) = \varphi_1(\gamma)\gamma \to \min, \quad \gamma_* \leqslant \gamma \leqslant \gamma^*. \tag{11}$$

Рассмотрим $\dfrac{\partial F_1(\gamma)}{\partial \gamma^+} = \dfrac{\partial \varphi_1(\gamma)}{\partial \gamma^+}\gamma + \varphi_1(\gamma)$, $\gamma \in [\gamma_*, \gamma^*)$, и $\dfrac{\partial F_1(\gamma)}{\partial \gamma^-} = \dfrac{\partial \varphi_1(\gamma)}{\partial \gamma^-}\gamma + \varphi_1(\gamma)$. Пусть $\gamma_0 = \gamma_* < \gamma_1 < \ldots < \gamma_N = \gamma^*$ — точки недифференцируемости $\varphi_1(\gamma)$. Так как

$$\frac{\partial^2 F_1(\gamma)}{\partial \gamma^{2+}} = \frac{\partial}{\partial \gamma^+}\left(\frac{\partial F_1(\gamma)}{\partial \gamma^+}\right) = 2\,\frac{\partial \varphi_1(\gamma)}{\partial \gamma^+},$$

то, в силу следствия теоремы 1, на каждом из промежутков $[\gamma_k, \gamma_{k+1}]$, $k = \overline{0, N-1}$, функция $F_1(\gamma)$ имеет определенный знак вогнутости, т. е. является выпуклой или вогнутой. Следовательно, на каждом из промежутков $[\gamma_k, \gamma_{k+1}]$, $k = \overline{0, N-1}$, существует единственный минимум $F_1(\gamma)$. Пусть $F_1(\gamma_k^0) = \min\limits_{[\gamma_k, \gamma_{k+1}]} F_1(\gamma)$. Понятно, что если $\dfrac{\partial F_1(\gamma_k)}{\partial \gamma^+} \neq 0$, то $\gamma_k^0$ определяется единственным образом. Не исключено, что некоторые из $\gamma_k^0$, $k = \overline{0, N-1}$, могут оказаться точками локального минимума функции $F_1(\gamma)$ на $[\gamma_*, \gamma^*]$. Так как для решения задачи (1), а в рассматриваемом случае — задачи (11) необходимо найти все точки локального минимума и выбрать из них ту, значение целевой функции в которой наименьшее, то представляют интерес условия, когда по имеющейся информации без непосредственных вычислений можно утверждать, что те или иные точки $\gamma_k^0$ не являются точками локального минимума. Специфика исследуемой задачи позволяет получить условия такого сорта.

**Теорема 2.** а) Если $\varphi_1(\gamma_k) \geqslant 0$, $\dfrac{\partial \varphi_1(\gamma_k)}{\partial \gamma^+} \geqslant 0$, $0 \leqslant k \leqslant N-1$, то $\min\limits_{[\gamma_k, \gamma^*]} F_1(\gamma) = F_1(\gamma_k)$. б) Если $\varphi_1(\gamma_k) < 0$, то функция $F_1(\gamma)$ имеет на $[\gamma_k, \gamma^*]$ единственный минимум.

Доказательство. а) Согласно следствию теоремы 1, для любых $\gamma_1, \gamma_2 \in [\gamma_k, \gamma^*]$, $\gamma_1 < \gamma_2$, выполняется неравенство $\frac{\partial\varphi_1(\gamma_1)}{\partial\gamma^+} \leqslant \frac{\partial\varphi_1(\gamma_2)}{\partial\gamma^+}$. Поэтому $\varphi_1(\gamma^2) \geqslant \varphi_1(\gamma^1) \geqslant 0$, а, следовательно,

$$\frac{\partial F_1(\gamma)}{\partial\gamma^+} = \frac{\partial\varphi_1(\gamma)}{\partial\gamma^+}\gamma + \varphi_1(\gamma) \geqslant 0, \quad \gamma \in [\gamma_k, \gamma^*].$$

Последнее неравенство означает, что функция $F_1(\gamma)$ не убывает на $[\gamma_k, \gamma^*]$, в силу чего $\min\limits_{\gamma\in[\gamma_k, \gamma^*]} F_1(\gamma) = F_1(\gamma_k)$.

б) Рассмотрим наиболее общий случай, когда $\frac{\partial\varphi_1(\gamma_k)}{\partial\gamma^+} < 0$, $\frac{\partial\varphi_1(\gamma^*)}{\partial\gamma^-} > 0$. Тогда существует такой номер $k_0 > k$, что $\frac{\partial\varphi_1(\gamma_{k_0})}{\partial\gamma^-} \leqslant 0$, $\frac{\partial\varphi_1(\gamma_{k_0})}{\partial\gamma^+} \geqslant 0$. Так как $\frac{\partial\varphi_1(\gamma)}{\partial\gamma^+} \leqslant 0$, то $\varphi_1(\gamma) \leqslant \varphi_1(\gamma_k) < 0$ и, следовательно, $\frac{\partial F_1(\gamma)}{\partial\gamma^+} < 0$, $\gamma \in (\gamma_k, \gamma_{k_0})$, т. е. функция $F_1(\gamma)$ убывает на всем промежутке $[\gamma_k, \gamma_{k_0}]$.

Пусть $\gamma^1, \gamma^2 \in [\gamma_{k_0}, \gamma^*)$, $\gamma^1 < \gamma^2$. Тогда

$$\frac{\partial F_1(\gamma^2)}{\partial\gamma^+} - \frac{\partial F_1(\gamma^1)}{\partial\gamma^+} = \varphi_1(\gamma^2) + \frac{\partial\varphi_1(\gamma^2)}{\partial\gamma^+}\gamma^2 - \varphi_1(\gamma^1) -$$

$$- \frac{\partial\varphi_1(\gamma^1)}{\partial\gamma^+}\gamma^1 \geqslant \varphi_1(\gamma^1) + \frac{\partial\varphi_1(\gamma^1)}{\partial\gamma^+}(\gamma^2 - \gamma^1) + \frac{\partial\varphi_1(\gamma^2)}{\partial\gamma^+}\gamma^2 -$$

$$- \varphi_1(\gamma^1) - \frac{\partial\varphi_1(\gamma^1)}{\partial\gamma^+}\gamma^1 \geqslant \frac{\partial\varphi_1(\gamma^2)}{\partial\gamma^+}\gamma^2 - \frac{\partial\varphi_1(\gamma^1)}{\partial\gamma^+}\gamma^1 \geqslant 0,$$

так как $\frac{\partial\varphi_1(\gamma^2)}{\partial\gamma^+} \geqslant \frac{\partial\varphi_1(\gamma^1)}{\partial\gamma^+} \geqslant 0$. Поэтому функция $F_1(\gamma)$ выпукла на $[\gamma_{k_0}, \gamma^*]$.

Из свойств функции $F_1(\gamma)$ на промежутках $[\gamma_k, \gamma_{k_0}]$ и $[\gamma_{k_0}, \gamma^*]$ следует доказываемое утверждение.

Пусть $\gamma^* \leqslant 0$. Задача (2) примет вид

$$F_2(\gamma) = \varphi_2(\gamma)\gamma \to \min, \quad \gamma_* \leqslant \gamma \leqslant \gamma^*. \tag{12}$$

Предположим, что точки недифференцируемости $\varphi_2(\gamma)$ занумерованы в следующем порядке: $\gamma_0 = \gamma^* > \gamma_1 > \ldots > \gamma_N = \gamma_*$. Так же, как и $F_1(\gamma)$ в предыдущем случае, функция $F_2(\gamma)$ на каждом из промежутков $[\gamma_{k+1}, \gamma_k]$, $k =$

$=\overline{0, N-1}$, имеет определенный знак вогнутости и, следовательно, локальные минимумы функции $F_2(\gamma)$ могут достигаться только в точках $\gamma_k^0$, где $\gamma_k^0$ определяется из условия $F_2(\gamma_k^0) = \min\limits_{\gamma \in [\gamma_{k+1}, \gamma_k]} F_2(\gamma)$. Справедлива

**Теорема 3.** а) Если $\varphi_2(\gamma_k) \leqslant 0$, $\dfrac{\partial \varphi_2(\gamma_k)}{\partial \gamma^-} \geqslant 0$, то $\min\limits_{\gamma \in [\gamma_*, \gamma_k]} \times$ $\times F_2(\gamma) = F_2(\gamma_k)$. б) Если $\varphi_2(\gamma_k) > 0$, то на $[\gamma_*, \gamma_k]$ существует единственный минимум функции $F_2(\gamma)$.

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2.

Случай, когда $\gamma_* < 0 < \gamma^*$, сводится к двум рассмотренным выше разбиениям отрезка $[\gamma_*, \gamma^*]$ на $[\gamma_*, 0]$ и $[0, \gamma^*]$.

**2. Построение локально-оптимального плана.** Пусть $Z(\gamma, \ e) = \{(z, \ z_{n+1}) : \bar{A}z + z_{n+1} b(\gamma) = e, \ \ z + z_{n+1} d^* \leqslant 0, z + z_{n+1} d_* \geqslant 0\}$.

**Теорема 4.** Если $\{z(\gamma), z_{n+1}(\gamma)\}$ — решение задачи (6), то для достаточно малых $\Delta\gamma > 0$ имеет место

$$x_*(\gamma + \Delta\gamma) = x_*(\gamma) + \Delta\gamma[z(\gamma) + z_{n+1}(\gamma) x_*(\gamma)]. \qquad (13)$$

Если $\{z(\gamma), z_{n+1}(\gamma)\}$ — решение задачи

$$p'z + z_{n+1} p x_*(\gamma) \to \max, \ \{z, z_{n+1}\} \in Z(\gamma, -e_{m+1}), \qquad (14)$$

то для достаточно малых $\Delta\gamma > 0$ имеет место

$$x_*(\gamma - \Delta\gamma) = x_*(\gamma) + \Delta\gamma[z(\gamma) + z_{n+1}(\gamma) x_*(\gamma)]. \qquad (15)$$

Если $\{z(\gamma), z_{n+1}(\gamma)\}$ — решение задачи

$$p'z + z_{n+1} p x^*(\gamma) \to \max, \ \{z, z_{n+1}\} \in Z(\gamma, e_{m+1}), \qquad (16)$$

то для достаточно малых $\Delta\gamma > 0$ имеет место

$$x^*(\gamma + \Delta\gamma) = x^*(\gamma) + \Delta\gamma[z(\gamma) + z_{n+1}(\gamma) x^*(\gamma)]. \qquad (17)$$

Если $\{z(\gamma), z_{n+1}(\gamma)\}$ — решение задачи

$$p'z + z_{n+1} p' x^*(\gamma) \to \max, \ \{z, z_{n+1}\} \in Z(\gamma, -e_{m+1}), \qquad (18)$$

то для достаточно малых $\Delta\gamma$ имеет место

$$x^*(\gamma - \Delta\gamma) = x^*(\gamma) + \Delta\gamma[z(\gamma) + z_{n+1}(\gamma) x^*(\gamma)]. \qquad (19)$$

Первое утверждение теоремы 4 было показано при доказательстве теоремы 1 (см. (8)). Остальные доказываются аналогично.

Следствие. $Z(\gamma^*, e_{m+1}) = Z(\gamma_*, -e_{m+1}) = \varnothing$.

Из свойств функции $F(\gamma)$, необходимых условий локального минимума, а также теорем 2 и 3 следует

**Теорема 5** *(критерий локального минимума)*. Точка $\gamma \in (\gamma_*, \gamma^*)$ является точкой локального минимума задачи (2) тогда и только тогда, когда выполняется одна из групп соотношений:

1) $\dfrac{\partial F(\gamma)}{\partial \gamma^-} < 0, \ \dfrac{\partial F(\gamma)}{\partial \gamma^+} > 0;$

2) $\dfrac{\partial F(\gamma)}{\partial \gamma^-} \leqslant 0, \ \dfrac{\partial F(\gamma)}{\partial \gamma^+} \geqslant 0$ при $\varphi(\gamma) < 0, \ \gamma > 0$, или $\varphi(\gamma) > 0, \ \gamma < 0$ или $\gamma = 0$;

3) $\dfrac{\partial F(\gamma)}{\partial \gamma^-} < 0, \ \dfrac{\partial F(\gamma)}{\partial \gamma^+} = 0, \ \dfrac{\partial \varphi(\gamma)}{\partial \gamma^+} \geqslant 0$ при $\varphi(\gamma) \geqslant 0$, $\gamma > 0$, или $\dfrac{\partial F(\gamma)}{\partial \gamma^+} > 0, \ \dfrac{\partial F(\gamma)}{\partial \gamma^-} = 0, \ \dfrac{\partial \varphi(\gamma)}{\partial \gamma^-} \geqslant 0$ при $\varphi(\gamma) \leqslant 0, \ \gamma < 0$.

При $\gamma = \gamma^*$ или $\gamma = \gamma_*$ в 1)—3) должны выполняться соотношения только для лево- или правосторонних производных соответственно.

Теоремы 4 и 5 позволяют построить следующий алгоритм нахождения локально-оптимального плана.

Пусть известен план $x_*(\gamma^1)$, $\gamma^1 > 0$, задачи (1). Для вычисления производных $\dfrac{\partial \varphi(\gamma^1)}{\partial \gamma^+}, \dfrac{\partial \varphi(\gamma^1)}{\partial \gamma^-}$ решаем задачи (6) и (14). Будем считать, что они обе имеют решение. Согласно следствию теоремы 4, $\gamma^1 \in (\gamma_*, \gamma^*)$. По производным $\dfrac{\partial \varphi(\gamma^1)}{\partial \gamma^+}, \dfrac{\partial \varphi(\gamma^1)}{\partial \gamma^-}$ вычисляем $\dfrac{\partial F(\gamma^1)}{\partial \gamma^+}$ и $\dfrac{\partial F(\gamma^1)}{\partial \gamma^-}$. Предположим, что для плана $x_*(\gamma^1)$ не выполняется ни одна из групп соотношений 1) — 3) теоремы 5. Возможны три случая.

а) Условия локального минимума не выполняются для $\dfrac{\partial F(\gamma^1)}{\partial \gamma^+}$. Согласно теореме 4, направление $t(\gamma^1) = z(\gamma^1) + z_{n+1}(\gamma^1)\,x_*(\gamma^1)$ является подходящим для плана $x_*(\gamma^1)$. Если $x_*(\gamma^1) + \Delta\gamma t(\gamma^1)$ — план задачи (1), то

$$\frac{\partial F(\gamma^1 + \Delta\gamma)}{\partial \gamma^+} = \frac{\partial \varphi(\gamma^1 + \Delta\gamma)}{\partial \gamma^+}(\gamma^1 + \Delta\gamma) + \varphi(\gamma^1 + \Delta\gamma) =$$

$$= \frac{\partial \varphi(\gamma^1)}{\partial \gamma^+}(\gamma^1 + \Delta\gamma) + \varphi(\gamma^1) + \frac{\partial \varphi(\gamma^1)}{\partial \gamma^+}\Delta\gamma = \frac{F(\gamma^1)}{\partial \gamma^+} +$$

$$+ 2\frac{\partial\varphi(\gamma^1)}{\partial\gamma^+}\Delta\gamma.$$

Поэтому максимально допустимый шаг $\Delta\gamma^1$ вдоль $t(\gamma^1)$ вычисляется следующим образом:

$$\Delta\gamma^1 = \min\{\Delta^*\gamma^1,\ \Delta_*\gamma^1,\ \Delta^\sim\gamma^1\}, \tag{20}$$

где

$$\Delta^*\gamma^1 = \min\left\{\frac{d_j^* - x_{*j}(\gamma^1)}{t_j(\gamma^1)}, t_j(\gamma^1) > 0\right\}; \tag{21}$$

$$\Delta_*\gamma^1 = \min\left\{\frac{d_{*j} - x_{*j}(\gamma^1)}{t_j(\gamma^1)}, t_j(\gamma^1) < 0\right\}; \tag{22}$$

$$\Delta^\sim\gamma^1 = \begin{cases} \infty, \text{ если } \dfrac{\partial\varphi(\gamma^1)}{\partial\gamma^+} \leqslant 0; \\ -\dfrac{\partial F(\gamma^1)}{\partial\gamma^+} \Big/ 2\dfrac{\partial\varphi(\gamma^1)}{\partial\gamma^+}, \text{ если } \dfrac{\partial\varphi(\gamma^1)}{\partial\gamma^+} > 0. \end{cases} \tag{23}$$

Вычислим $\gamma^2 = \gamma^1 + \Delta\gamma^1$ и $x_*(\gamma^2) = x_*(\gamma^1) + \Delta\gamma^1 t(\gamma^1)$. Если $\Delta\gamma^1 = \Delta^\sim\gamma^1$, то $x_*(\gamma^2)$ — точка локального минимума задачи (1).

Пусть $\Delta\gamma^1 \neq \Delta^\sim\gamma^1$. В этом случае $\dfrac{\partial F(\gamma^2)}{\partial\gamma^-} > 0$. Поэтому для $x_*(\gamma^2)$ необходима проверка условий локального минимума только относительно $\dfrac{\partial F(\gamma^2)}{\partial\gamma^+}$.

По описанной схеме точка локального минимума $x_*(\gamma_{\text{лок}})$ задачи (1) будет построена за конечное число итераций. Процесс вычислений при этом может окончиться двояко: либо для $\dfrac{\partial F(\gamma_{\text{лок}})}{\partial\gamma^+}$ выполнится одно из условий 1) — 3) теоремы 5, либо окажется, что $Z(\gamma_{\text{лок}}, e_{m+1}) = \varnothing$. Последнее означает, что $\gamma_{\text{лок}} = \gamma^*$.

б) Условия локального минимума не выполняются для $\dfrac{\partial F(\gamma^1)}{\partial\gamma^-}$. По вектору $t(\gamma^1) = z(\gamma^1) + z_{n+1}(\gamma^1)\, x_*(\gamma^1)$ ($\{z(\gamma^1),\ z_{n+1}(\gamma^1)\}$ — решение задачи (14)) построим $\gamma^2 = \gamma^1 - \Delta\gamma^1$, $x_*(\gamma^2) = x_*(\gamma^1) + \Delta\gamma^1 t(\gamma^1)$, где $\Delta\gamma^1 = \min\{\Delta^*\gamma^1,\ \Delta_*\gamma^1,\ \Delta^\sim\gamma^1,\ \gamma^1\}$, где $\Delta^*\gamma^1$, $\Delta_*\gamma^1$ вычислены согласно (21), (22);

$$\Delta^{\sim}\gamma^1 = \begin{cases} \infty, \text{ если } \dfrac{\partial\varphi(\gamma^1)}{\partial\gamma^-} \geqslant 0; \\ -\dfrac{\partial F(\gamma^1)}{\partial\gamma^-} \Big/ 2\dfrac{\partial\varphi(\gamma^1)}{\partial\gamma^-}, \text{ если } \dfrac{\partial\varphi(\gamma^1)}{\partial\gamma^-} < 0. \end{cases}$$

Если $\Delta\gamma^1 = \Delta^{\sim}\gamma^1$, то $x_*(\gamma^2)$ — точка локального минимума задачи (1). В противном случае $\dfrac{\partial F(\gamma^2)}{\partial\gamma^+} > 0$, т. е. проверку условий локального минимума в $x_*(\gamma^2)$ необходимо осуществить только относительно $\dfrac{\partial F(\gamma^2)}{\partial\gamma^-}$.

Рассмотрим отдельно случай, когда $\Delta\gamma^1 = \gamma^1$. Вычисляем $x^*(0)$ и из решения задачи (18) находим производную $\dfrac{\partial\varphi(0)}{\partial\gamma^-}$. Дальнейшие построения производятся по правилам, которые аналогичны описанным в а). Отличия носят чисто технический характер и поэтому здесь опускаются.

в) Условия локального минимума не выполняются как относительно $\dfrac{\partial F(\gamma^1)}{\partial\gamma^+}$, так и относительно $\dfrac{\partial F(\gamma^1)}{\partial\gamma^-}$. В этом случае для построения локально-оптимального плана можно воспользоваться любой из схем вычислений, описанных в а) и б).

**3. Построение глобально-оптимального плана.** Построение глобально-оптимального плана может начинаться с любого плана $x(\gamma)$ ($x(\gamma) = x_*(\gamma)$ при $\gamma \geqslant 0$, $x(\gamma) = x^*(\gamma)$ при $\gamma \leqslant 0$) задачи (1). Однако ниже в качестве начального приближения выбирается специальный план $x(\gamma)$ задачи (1), построенный по ранее вычисленным $\gamma_*$ и $\gamma^*$. Это позволяет организовать решение задачи (1) наиболее простым и эффективным способом, полнее использовать текущую информацию о свойствах целевой функции.

Предположим, что $\gamma_* \geqslant 0$. В качестве начального приближения выбираем $x_*(\gamma_*)$. Пусть $x_*(\gamma^1)$, $x_*(\gamma^2)$, ... ..., $x_*(\gamma^k)$, $\gamma^k < \gamma^*$,— построенные точки локального минимума задачи (1) на $[\gamma_*, \gamma^k]$. Если

$$1)\ \ \varphi(\gamma^k) \geqslant 0, \ \ \frac{\partial\varphi(\gamma^k)}{\partial\gamma^+} \geqslant 0$$

или

$$2)\ \ \varphi(\gamma^k) < 0,$$

то, согласно теореме 2, на плане $x_*(\gamma^k)$ достигается минимум целевой функции при $\gamma \in [\gamma^k, \gamma^*]$. Следовательно, глобальный минимум целевой функции задачи (1) доставляет по крайней мере один из построенных планов $x_*(\gamma^i)$, $i=\overline{1, k}$. Решение задачи (1) оканчивается выбором такого плана.

Предположим, что на плане $x_*(\gamma^k)$ ни одно из условий 1), 2) не выполняется. По решению $\{z(\gamma^k), z_{n+1}(\gamma^k)\}$ задачи (1) строим

$$\gamma_1^k = \gamma^k + \Delta\gamma_1^k, \; x_*(\gamma_1^k) = x_*(\gamma^k) + \Delta\gamma_1^k t(\gamma^k), \qquad (24)$$

где $\Delta\gamma_1^k$ вычисляется по формулам типа (20) — (23).

Если $x_*(\gamma_1^k)$ — точка локального минимума, то полагаем $\gamma^{k+1} = \gamma_1^k$. В противном случае вычисляем по аналогии с (24) план $x(\gamma_2^k)$ и т. д.

Процесс вычислений окончится построением плана $x_*(\gamma^r)$, на котором либо выполняется одно из соотношений 1), 2), либо $\gamma^r = \gamma^*$. И в том и в другом случае решение задачи (1) доставляет один из построенных планов $x_*(\gamma^i)$, $i=\overline{1, r}$.

Аналогичный алгоритм строится при $\gamma^* < 0$. Если $\gamma_* < 0 < \gamma^*$, то задачу (1) сначала решаем при $\gamma \in [0, \gamma^*]$, а затем при $\gamma \in [\gamma_*, 0]$.

## Глава VI

## ДИСКРЕТНЫЕ ЗАДАЧИ

В классическом понимании нелинейное программирование представляет развитие линейного программирования в направлении замены линейных целевой функции и функций основных ограничений на нелинейные функции. При этом предполагается, что прямые ограничения остаются прежними. Другое важное в прикладном отношении и трудное в теоретическом плане обобщение линейного программирования связано с прямыми ограничениями. Если в задаче линейного программирования вместо континуума точек, задаваемых прямыми ограничениями, рассматривать только конечное (дискретное) множество точек, то получим *задачу дискретного программирования.* Дискретные задачи независимо от класса функций, участвующих в их формулировке, обладают существенной нелинейностью. По природе к ним близки задачи оптимизации с несвязными множествами планов. В настоящее время в дискретном программировании получен ряд общих схем поиска оптимальных планов, которые позволяют, используя эффективные методы недискретного (непрерывного) программирования и другие математические факты, построить алгоритмы решения практических задач, не прибегая, как правило, к полному перебору планов. В данной главе описываются реализации известных общих схем дискретного программирования в сочетании с методами линейного программирования, изложенными в предыдущих главах книги.

## § 1. Метод ветвей и границ

Схема метода ветвей и границ была впервые описана для общей задачи линейного программирования с целочисленными переменными [23]. Результат, полученный с помощью этой схемы для классической комбинаторной задачи о бродячем торговце [8], привлек к методу ветвей и границ широкое внимание (подробности см., например, в [16]). Следует отметить, что сама по себе общая схема метода не гарантирует хорошего результата. Успех во многом зависит от типа задачи и удачной реализации элементов схемы, что в свою очередь определяется знаниями, опытом, искусством исследователя.

**1. Общая схема.** Рассмотрим задачу

$$f(x) \to \max, \quad x \in X, \tag{1}$$

где $f(x)$ — скалярная функция, определенная на конечном множестве $X$ конечномерного пространства $R_n$.

Для каждого подмножества $\tilde{X} \subset X$ определим функцию

$$\xi(\tilde{X}) \geqslant \max f(x), \; x \in \tilde{X},$$

которую назовем *оценкой (границей)* множества $\tilde{X}$. Естественным и широко используемым в конкретных задачах способом построения оценок является способ расширения исходной задачи (1). Для любого расширения $\tilde{X}^* \supset \tilde{X}$ множества $\tilde{X}$, на котором определена функция $f(x)$, выполняется неравенство

$$\max_{x \in \tilde{X}^*} f(x) \geqslant \max_{x \in \tilde{X}} f(x)$$

и поэтому можно положить

$$\xi(\tilde{X}) = \max f(x), \quad x \in \tilde{X}^*. \tag{2}$$

Часто расширение сводится к замене дискретного множества точек его выпуклой оболочкой. Если задача трудна для решения из-за сложности функции $f(x)$, то в ней функцию $f(x)$ можно заменить на более простую мажоранту $\bar{f}(x): \bar{f}(x) \geqslant f(x)$ для всех $x \in \tilde{X}^*$.

Процесс решения задачи (1) начинается с вычисления оценки $\xi(X)$ начального множества. Предположим, что при этом были построены некоторые элементы множества $X$. Обозначим через $r^1 = f(x^1)$ максимальное значение целевой функции на указанных элементах и назовем его рекордом ($x^1$ — рекордный план). Если таких элементов построить не удается, то полагаем $r^1 = -\infty$.

Если $\xi(X) - r^1 \leqslant \varepsilon$, где $\varepsilon$ — заданная точность приближения к оптимальному плану по значению целевой функции, то процесс решения задачи (1) прекращается на $\varepsilon$-оптимальном плане $x^1$. При $\xi(X) - r^1 > \varepsilon$ множество $X$ разбиваем (*ветвим*) на подмножества *)

$$X_1^1,\ X_2^1,\ \ldots,\ X_{l_1}^1 \left(X_i^1 \cap X_j^1 = \varnothing \text{ при } i \neq j;\ \bigcup_{i=1}^{l_1} X_i^1 = X\right) \tag{3}$$

и вычисляем их оценки $\xi(X_i^1)$. Если при этом появились новые элементы множества $X$, то, сравнив $r^1$ со значениями $f(x)$ на новых элементах, находим новый рекорд $r^2$ и новый рекордный план $x^2$. Из списка (3) удаляем все множества $X_j^1$, для которых $\xi(X_j^1) \leqslant r^2 + \varepsilon$.

Если после этого в совокупности (3) не останется ни одного элемента, то $x^2$ — $\varepsilon$-оптимальный план задачи (1). В противном случае оставшиеся в (3) множества составят новый список на вторую итерацию.

Пусть к началу $k$-й итерации известны список множеств

$$X_1^k,\ X_2^k,\ \ldots,\ X_{l_k}^k, \tag{4}$$

оценки $\xi(X_i^k)$, рекорд $r^k$, рекордный план $x^k$, причем $r^k < \max \xi(X_i^k) - \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots, l_k$. Из совокупности (4) выбираем множество $X_{i(k)}^k$ для ветвления. Существует несколько принципов выбора $X_{i(k)}^k$. Часто среди (4) выбирается множество с наибольшей оценкой. В вычислитель-

*) Чаще всего множества ветвят только на два подмножества.

ном отношении иногда удобнее множество $X^k_{i(k)}$ выбирать среди тех, которые получились в результате предыдущего ветвления.

Обозначим через

$$X^k_{i(k)1},\ X^k_{i(k)2},\ \ldots,\ X^k_{i(k)l_k} \tag{5}$$

результат ветвления множества $X^k_{i(k)}$ $(X^k_{i(k)i} \cap X^k_{i(k)j} = \varnothing$, если $i \neq j$, $\bigcup\limits_{i=1}^{l_k} X_{i(k)i} = X^k_{i(k)})$. Пусть $\xi(X^k_{i(k)i})$—оценки мно-

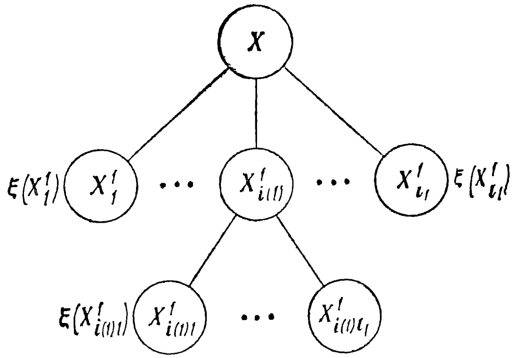


Рис. 3

жеств (5); $r^{k+1}$ — новое значение рекорда, полученное после сравнения $r^k$ со значениями $f(x)$ на новых элементах из $X$, построенных в связи с вычислениями оценок множеств (5); $x^{k+1}$ — новый рекордный план. Из совокупностей (4), (5) удалим множество $X^k_{i(k)}$ и все множества $X^k_{i(k)j}$, для которых $\xi(X^k_{i(k)j}) \leqslant r^{k+1} + \varepsilon$. Если в (4), (5) не останется элементов, то $x^{k+1}$ — $\varepsilon$-оптимальный план задачи (1). В противном случае из оставшихся в совокупностях (4), (5) элементов формируем список $X_1^{k+1}, \ldots$ $\ldots, X^{k+1}_{l_{k+1}}$ для $(k+1)$-й итерации.

Из конечности множества $X$ следует, что для любого $\varepsilon \geqslant 0$ через конечное число итераций будет найден $\varepsilon$-оптимальный план $x^\varepsilon$ $(f(x^\varepsilon) \geqslant \max f(x) - \varepsilon,\ x \in X)$.

Для наглядности метод ветвей и границ часто иллюстрируется геометрически с помощью дерева (рис. 3).

**2. Целочисленная общая задача линейного программирования.** Рассмотрим задачу

$$c'x \to \max,\ b_* \leqslant Ax \leqslant b^*,\ x \in \langle d_*,\ d^* \rangle, \tag{6}$$

где символом $\langle d_*,\ d^* \rangle$ обозначена совокупность целочисленных векторов $x$, компоненты $x_j$ которых равны одному из целых чисел на отрезке $[d_{*j},\ d^*_j]$.

Существуют задачи (6) (к ним относятся, например, транспортные [ч. 1]), где при замене ограничения $x \in \langle d_*,\ d^* \rangle$ ограничением $d_* \leqslant x \leqslant d^*$ можно обычными методами получить целочисленные решения задачи (6). Однако они составляют весьма узкий класс задач. В общем случае при решении задач линейного программирования методами, изложенными в книге, получаются нецелочисленные планы. Распространенным (особенно в случае, когда компоненты решения принимают большие значения) приемом является округление нецелочисленного решения до ближайшего целочисленного вектора. Однако можно на простых примерах показать, что это не всегда ведет к целочисленному решению задачи. Более того, существуют примеры, в которых любое округление «непрерывного» решения не дает даже плана целочисленной задачи. Поэтому проблема построения алгоритмов целочисленного программирования имеет самостоятельное значение.

Пусть $\{x,\ A_{\text{оп}}\}$ — начальный опорный план задачи (6). Множество планов $X$ задачи (6) расширим до множества $X^*$ планов задачи

$$c'x \to \max,\ b_* \leqslant Ax \leqslant b^*,\ d_* \leqslant x \leqslant d^*. \tag{7}$$

Исходя из плана $\{x,\ A_{\text{оп}}\}$, начинаем решать задачу (7). Пусть процесс решения задачи (7) остановлен на опорном плане $\{\tilde{x},\ \tilde{A}_{\text{оп}}\}$ с оценкой субоптимальности $\tilde{\beta} \leqslant \varepsilon$. Тогда число $\xi(X) = c'\tilde{x} + \tilde{\beta}$ является оценкой множества $X$. Если по ходу итераций адаптивного метода округлять текущие планы задачи (7) и проверять на них ограничения задачи (6), то в результате наряду с $x$ могут быть построены другие элементы множества $X$. По этим элементам вычислим рекорд $r^1$ и рекордный план $x^1$. Если $\xi(X) - r^1 \leqslant \varepsilon$, то $x^1$ — $\varepsilon$-оптимальный план задачи (6). При $\xi(X) - r^1 > \varepsilon$ приступаем к ветвлению множества $X$. Если все компоненты плана $\tilde{x}$ — целые числа, то $\tilde{x}$ — $\varepsilon$-оптимальный план задачи (6). Предположим, что $\tilde{x}$ —

нецелочисленный вектор. Пусть $j_1$ — индекс нецелочисленной компоненты плана $\tilde{x}$. Положим

$$X_1^1 = X \cap \{x\colon x_{j_1} \in < d_{*j_1},\ [\widetilde{x}_{j_1}] > \};$$
$$X_2^1 = X \cap \{x\colon x_{j_1} \in < [\widetilde{x}_{j_1}] + 1,\ d^*_{j_1} > \}, \tag{8}$$

где $[\alpha]$ — целая часть числа $\alpha$. Ясно, что $X_1^1 \cap X_2^1 = \varnothing$, $X_1^1 \cup X_2^1 = X$, т. е. $X_1^1$, $X_2^1$ — ветви множества $X$. Оценки множеств (9) находим из решения задач

$$c'x \to \max,\ b_* \leqslant Ax \leqslant b^*,\ d_* \leqslant x \leqslant d^*,\ d_{*j_1} \leqslant x_{j_1} \leqslant [\widetilde{x}_{j_1}];$$
$$c'x \to \max,\ b_* \leqslant Ax \leqslant b^*,\ d_* \leqslant x \leqslant d^*,\ [\widetilde{x}_{j_1}] + 1 \leqslant x_{j_1} \leqslant d^*_{j_1}. \tag{9}$$

(Если множество планов пусто, то оценке приписываем значение $-\infty$.) Решение задач (9) начинаем с опорного псевдоплана $\{\tilde{x}, \tilde{A}_{\text{оп}}\}$ согласно первой фазе адаптивного метода или с помощью двойственного метода, исходя из сопровождающего опору $\tilde{A}_{\text{оп}}$ двойственного плана. Дальнейшие операции очевидны.

## § 2. Метод отсечения

Идея метода отсечения исключительно прозрачна, и этим можно объяснить то, что она встречается уже во многих первых работах по линейным целочисленным задачам. Однако только с исследований Р. Гомори [24] началось научное изучение проблемы, когда интуитивные соображения стали заменяться теоретически обоснованными методами построения отсечений, ведущими к конечным алгоритмам решения дискретных задач. С историей вопроса и различными реализациями метода отсечения можно ознакомиться по [16]. Ниже излагается одна из схем применения отсечений в сочетании с адаптивным методом.

**1. Идея методов отсечения.** Рассмотрим задачу

$$c'x \to \max,\ Ax = b,\ x \in < d_*,\ d^* >, \tag{1}$$

параметры которой имеют такой же смысл, как и в § 1.

Наряду с (1) рассмотрим *(непрерывную)* задачу

$$c'x \to \max,\ Ax = b,\ d_* \leqslant x \leqslant d^*, \tag{2}$$

отличающуюся от предыдущей только отсутствием требования целочисленности плана.

Если $x^{\varepsilon}$ — $\varepsilon$-оптимальный план задачи (2), все компоненты которого целочисленны, то очевидно, что $x^{\varepsilon}$ — $\varepsilon$-оптимальный план задачи (1). В общем случае при решении задачи (2) будут получаться планы $x^{\varepsilon}$, не все компоненты которых представляют целые числа. Геометрически эта ситуация означает, что вектор $x^{\varepsilon}$ не принадлежит выпуклой оболочке планов задачи (1), или, другими словами, в окрестности точки $x^{\varepsilon}$ множество $X$ планов задачи (2) «выступает» из множества $X^{ц}$ планов задачи (1). Естественна мысль «отсечь» от $X$ часть вместе с $x^{\varepsilon}$, а на оставшемся множестве вновь найти $\varepsilon$-оптимальный план. Продолжая «аккуратно» этот процесс, можно «обтесать» $X$ до совпадения с $\operatorname{conv} X^{ц}$ в окрестности решения задачи (1). Трудность состоит в том, чтобы формализовать процесс отсечения, найти алгоритм, позволяющий за конечное число операций прийти к $\varepsilon$-оптимальному плану задачи (1).

Одной из простейших математических моделей процедуры отсечения является введение в ограничения задачи (2) дополнительных линейных неравенств

$$a'x \leqslant \alpha, \tag{3}$$

которым при определенных значениях $a$ и $\alpha$ не удовлетворяют точки из окрестности любой граничной точки множества $X$.

Будем говорить, что неравенство (3) задает *$\varepsilon$-отсечение,* если ему не удовлетворяет хотя бы один $\varepsilon$-оптимальный план задачи (2). $\varepsilon$-Отсечение, порожденное неравенством (3), называется *правильным,* если каждый план задачи (1) удовлетворяет неравенству (3). Разнообразные способы построения правильных $\varepsilon$-отсечений ($\varepsilon=0$) приведены в [16]. В следующем пункте описана одна схема построения отсечений, основанная на $\varepsilon$-оптимальных планах.

**2. Алгоритм.** Пусть $x^*$ — план задачи (1). Приписав ему опору, адаптивным методом построим $\varepsilon$-оптимальный опорный план $\{x^{\varepsilon}, A_{оп}\}$ задачи (2). Предположим, что $x^{\varepsilon}$ — нецелочисленный вектор. Обозначим: $\Delta(J_{н})$ — вектор оценок неопорных компонент плана; $J_{н+}=\{j\in J_{н}: \Delta_j>0\}$; $J_{н-}=\{j\in J_{н}: \Delta_j<0\}$; $J_{н0}=\{j\in J_{н}: \Delta_j=0\}$; $J_*=\{j\in J_{н0}: x_j^{\varepsilon}-d_{*j}\leqslant d_j^*-x_j^{\varepsilon}\}$; $J^*=\{j\in J_{н0}: x_j^{\varepsilon}-d_{*j}>d_j^*-x_j^{\varepsilon}\}$.

По опоре $A_{оп}$ построим функции

$$z_i(x) = -\{\tilde{b}_i - \sum_{j \in J_{н-} \cup J^*} x_{ij} d_j^* - \sum_{j \in J_{н+} \cup J_*} x_{ij} d_{*j}\} + \\ + \sum_{j \in J_{н+} \cup J_*} \{x_{ij}\}(x_j - d_{*j}) + \\ + \sum_{j \in J_{н-} \cup J^*} \{-x_{ij}\}(-x_j + d_j^*),\ i \in J_{оп}, \tag{4}$$

где $\tilde{b}_i$ — $i$-я координата вектора $b$ в базисе $A_{оп}$; $x_{ij}$ — $i$-я координата вектора $a_j$ в базисе $A_{оп}$; $\{\beta\}$ — дробная часть числа $\beta$: $\beta = [\beta] + \{\beta\}$, $\{\beta\} \geqslant 0$.

Легко проверить, что $z_i(x^ц)$ — целое число на каждом плане $x^ц$ задачи (1) и при этом $z_i(x^ц) \geqslant 0$.

Возможны два случая: а) существует такой индекс $i_* \in J_{оп}$, что $z_{i_*}(x^\varepsilon) < 0$; б) $z_i(x^\varepsilon) \geqslant 0$ для всех $i \in J_{оп}$.

В случае а) неравенство

$$z_{i_*}(x) \geqslant 0 \tag{5}$$

задает правильное отсечение. К ограничениям задачи (2) добавим (5) и приступим к решению задачи

$$c'x \to \max,\ Ax = b,\ z_{i_*}(x) \geqslant 0,\ d_* \leqslant x \leqslant d^*, \tag{6}$$

исходя из опорного плана $\{\bar{x}, A_{оп}\}$, $\bar{x} = x^* + \lambda(x^\varepsilon - x^*)$, в котором число $\lambda$ найдено из условия $z_{i_*}(\bar{x}) = 0$. Поскольку начальный опорный план задачи (6) вырожден, то итерация начинается с построения новой опоры. С $\varepsilon$-оптимальным планом задачи (6) поступаем так же, как и с $\varepsilon$-оптимальным планом $x^\varepsilon$ задачи (2).

В случае б) продолжаем решение задачи (2), т. е. переходим к новому опорному плану $\{\tilde{x}, \tilde{A}_{оп}\}$, и если в нем $\tilde{x}$ — нецелочисленный вектор, то по $\tilde{A}_{оп}$ строим новые функции (4).

Предположим, что в процессе решения задачи (2) не удалось отсечь ни одного $\varepsilon$-оптимального плана и решение остановилось на оптимальном плане $\{x^0, A^0_{оп}\}$. Если план $x^0$—базисный (нецелочисленный), то найдется индекс $i_0 \in J_{оп}$ такой, что построенное на $\{x^0, A^0_{оп}\}$ неравенство $z_{i_0}(x) \geqslant 0$ задает правильное отсечение. В случае, когда $x^0$ — небазисный план, переходим к базисному плану и строим по последнему правильное отсечение. Вопрос конечности приведенного алгоритма здесь не рассматривается.

## § 3. Опорный метод

Требование целочисленности, накладываемое в дискретных задачах на планы классических задач линейного программирования, является основным препятствием при распространении на новый круг задач «непрерывных» методов. По-видимому, для каждого метода, с помощью которого пытаются так или иначе обойти перебор, можно построить соответствующий контрпример. Однако в «непатологических» дискретных задачах использование непрерывных методов может оказаться полезным. В данном параграфе описывается одна из схем применения адаптивного метода к общей задаче целочисленного линейного программирования.

Рассмотрим задачу

$$c'x \to \max, \; Ax=b, \; x \in \langle d_*, d^* \rangle, \tag{1}$$

где $A$ — $m \times n$-матрица; $d_*$, $d^*$, $c$ — $n$-векторы; $b$ — $m$-вектор. Пусть известен некоторый начальный опорный план $\{x^{ц}, A_{оп}\}$, $A_{оп}=A(I, J_{оп})$, задачи (1). Очевидно, что пара $\{l(J_{н})=0, \bar{A}_{оп}\}$, $\bar{A}_{оп}=\bar{A}(J^*_{оп}, J^*_{н})$, $J^*_{оп}=J^*_{н}=\varnothing$, является опорным планом задачи

$$-\Delta'(J_{н})\, l(J_{н}) \to \max,$$

$$d_*(J_{оп}) - x^{ц}(J_{оп}) \leqslant \bar{A}(J_{оп}, J_{н}) l(J_{н}) \leqslant d^*(J_{оп}) - x^{ц}(J_{оп}), \tag{2}$$

$$d_*(J_{н}) - x^{ц}(J_{н}) \leqslant l(J_{н}) \leqslant d^*(J_{н}) - x^{ц}(J_{н}),$$

где $\Delta'(J_{н}) = -c'(J_{оп})\bar{A}(J_{оп}, J_{н}) - c'(J_{н})$; $\bar{A}(J_{оп}, J_{н}) = -A^{-1}_{оп}A(I, J_{н})$. Легко проверить, что задача (2) эквивалентна непрерывной (без предположения целочисленности) задаче (1). Для решения задачи (2) воспользуемся адаптивным методом (см. введение § 1).

Пусть $\{l^{(k)}(J_{н}), \bar{A}(J^*_{оп}, J^*_{н})\}$—опорный план задачи (2) на $k$-й итерации. Вектор $l^{(k)} = l^{(k)}(J) = \{l^{(k)}(J_{оп}), l^{(k)}(J_{н})\}$, где $l^{(k)}(J_{оп}) = \bar{A}(J_{оп}, J_{н})\, l^{(k)}(J_{н})$, является подходящим направлением для плана $x^{ц}$ в задаче (1).

Если все компоненты вектора $l^{(k)}(J)$ целые, то строим новый план $\bar{x}^{ц} = x^{ц} + l^{(k)}$ задачи (1). Новую итерацию начинаем с опорного плана $\{\bar{x}^{ц}, A(I, \bar{J}_{оп})\}$, $\bar{J}_{оп} = J_{оп} \setminus J^*_{оп} \cup J^*_{н}$, задачи (1).

Пусть вектор $l^{(k)}(J)$ нецелочисленный. Попытаемся путем изменения компонент $l^{(k)}_j$, $j \in \bar{J}_{н} = J \setminus \bar{J}_{оп}$, построить целочисленный вектор $l^{ц}$ такой, что $c'l^{ц} > 0$ и вектор $x^{ц} + l^{ц}$ является планом задачи (1).

Пусть неопорные компоненты $l_j^{(k)}$, $j \in \overline{J}_{н}$, изменяются в пределах $[l_j^{(k)}] \leqslant l_j \leqslant \min\{[l_j^{(k)}] + 1,\ d_j^*\}$. Тогда поиск вектора $l^{ц}$ сводится к решению задачи

$$c'l \to \max,$$

$$Al = -\sum_{j \in \overline{J}_{н}} a_j\,[l_j^{(k)}],\ l_j \in \langle d_{*j} - x_j^{ц},\ d_j^* - x_j^{ц} \rangle,\ j \in \overline{J}_{оп}, \qquad (3)$$

$$l_j \in \langle 0,\ 1 \rangle, \text{ если } l_j^{(k)} \neq d_j^*;\ l_j = 0,$$
$$\text{если } l_j^{(k)} = d_j^*,\ j \in \overline{J}_{н},$$

где $a_j$ — $j$-й столбец матрицы $A$.

Пусть в результате решения задачи (3) построен план $l^{ц}$, удовлетворяющий условию

$$c'l^{ц} + \sum_{j \in \overline{J}_{н}} c_j\,[l_j^{(k)}] > 0. \qquad (4)$$

В этом случае переходим к новому плану $\overline{x}^{ц} = x^{ц} + \overline{l}^{ц}$ задачи (1). Здесь $\overline{l}^{ц} = \{\overline{l}_j^{ц} = l_j^{ц},\ j \in \overline{J}_{оп};\ \overline{l}_j^{ц} = [l_j^k] + l_j^{ц},\ j \in \overline{J}_{н}\}$. Очевидно, что $c'\overline{x}^{ц} > c'x^{ц}$.

Новую итерацию начинаем с опорного плана $\{\overline{x}^{ц},\ A(I,\ J_{оп})\}$. Пусть ограничения задачи (3) несовместны или на оптимальном плане $l^{ц0}$ задачи (3) не выполняется условие (4). Тогда можно либо продолжать решение задачи (2), исходя из опорного плана $\{l^{(k)}(J_{н}),\ \overline{A}(J_{оп}^*,\ J_{н}^*)\}$, либо продолжить поиск целочисленных подходящих направлений, близких к подходящему направлению $l^{(k)}$. В последнем случае пытаемся построить целочисленное направление, изменяя неопорные компоненты $l_{(1)j}$, $j \in \overline{J}_{н}$, вектора $l_{(1)} = \Theta_1 l^{(k)}$ при условии, что $\Theta_1 = 1 - \alpha_1 > 0$, где $\alpha_1 > 0$ — параметр итерации.

Если удалось построить подходящее целочисленное направление, то переходим к новому опорному плану $\{\overline{x}^{ц},\ A(I,\ \overline{J}_{оп})\}$, $\overline{x}^{ц} = x^{ц} + \overline{l}_{(1)}^{ц}$, задачи (1).

В противном случае пытаемся построить целочисленное подходящее направление, изменяя неопорные компоненты вектора $l_{(2)} = \Theta_2 l^{(k)}$, если $\Theta_2 = \Theta_1 - \alpha_2 > 0$, где $\alpha_2 > 0$ — параметр итерации, либо продолжаем решение задачи (2) и т. д.

Для каждого нового опорного плана $\{\bar{x}^{ц}, A(I, \bar{J}_{оп})\}$ задачи (1) проверяем критерий субоптимальности. Процесс решения задачи (1) прекращается, если оценка субоптимальности $\beta$ опорного плана $\{\bar{x}^{ц}, A(I, \bar{J}_{оп})\}$ меньше $\varepsilon$.

Предположим, что задача (2) решена, но для построенного опорного плана $\{\overline{x^{ц}}, A(I, \overline{J}_{оп})\}$ задачи (1) критерий субоптимальности не выполняется. Дальше задачу (1) будем решать с помощью метода ветвей и границ (см. § 1). Процесс ветвления начинается с оптимального плана $x^0$ непрерывной задачи (1). Очевидно, что $x^0 = \overline{x^{ц}} + l^0$, где $l^0 = \{l^0_{оп}, l^0_{н}\}$; $l^0_{оп} = -A^{-1}(I, \overline{J}_{оп})A(I, \overline{J}_{н})\, l^0(\overline{J}_{н})$; $l^0_{н} = l^0(\overline{J}_{н})$ — решение задачи (2), записанной для опорного плана $\{x^{ц}, A(I, \overline{J}_{оп})\}$.

Пусть в результате ветвления получено дерево, висячим узлам которого соответствуют $N$ подзадач с оптимальными планами $x^{0(s)}$, $s=\overline{1, N}$. Если для всех $s=\overline{1, N}$ $c'x^{0(s)} \leqslant c'\bar{x}^{ц}$, то $\bar{x}^{ц}$ — оптимальный план задачи (1). В противном случае продолжаем процесс ветвления, рассматривая при этом только те узлы $s$, для которых $c'x^{0(s)} > c'\bar{x}^{ц}$. Через конечное число итераций будет построен оптимальный план $x^{ц0}$ задачи (1).

Ясно, что чем ближе по значению целевой функции план $\bar{x}^{ц}$ (рекордный план) к оптимальному плану $x^{ц0}$, тем быстрее закончится процесс ветвления.

Замечание. Вместо решения задачи (3) при поиске целочисленного подходящего направления можно использовать более простую процедуру: неопорные компоненты векторов $l_{(0)} = l^{(k)}, l_{(1)}, \ldots, l_{(p)}$ округляем до ближайших целых; опорные компоненты находим из условия $Al = 0$. Если среди полученных векторов есть допустимые целочисленные векторы, удовлетворяющие условию (4), то улучшаем план $x^{ц}$ задачи (1). В противном случае продолжаем решение задачи (2). Очевидно, что предложенная процедура поиска целочисленных направлений проще процедуры, в которой используется решение задачи (3). Однако вероятность построения целочисленного подходящего направления во второй процедуре больше.

# Глава VII

# НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ

Линейные задачи, которым в основном посвящена данная книга, составляют весьма узкий класс нелинейных задач. Однако методы линейного программирования находят разнообразные применения и в нелинейном программировании. Это в некоторой степени подтверждают и результаты трех предыдущих глав. В данной главе приводятся дополнительные примеры использования методов линейного программирования для решения нелинейных задач. Предмет главы очень обширен, и поэтому пришлось ограничиться только несколькими ситуациями.

## § 1. Кусочно-линейные задачи

Один класс кусочно-линейных задач исследован в § 5 гл. IV. Ниже приводятся прямые опорные методы решения еще двух задач подобного типа [25].

**1. Первая задача.** Рассмотрим задачу

$$f(x) = \max_{\omega\in\Omega} |c'(\omega)x + \alpha(\omega)| \to \min_x, \quad Ax = b, \quad d_* \leqslant x \leqslant d^*, \tag{1}$$

где $x$ — $n$-вектор; $b$ — $m$-вектор; $\alpha$ — скаляр; $\Omega$ — конечное множество; остальные элементы имеют традиционный смысл и соответствующие размеры.

Пусть $\{x, A_{\text{оп}}\}$ — начальный опорный план задачи (1). Найдем приращение $\Delta f(x, \Delta x) = f(x+\Delta x) - f(x)$ целевой функции, порожденное планом $x+\Delta x$. Поскольку $A\Delta x = 0$, то с помощью опоры $A_{\text{оп}}$ получим

$$\Delta f(x, \Delta x) = \max_{\omega\in\Omega} |(c'_{\text{н}}(\omega) - c'_{\text{оп}}(\omega) A_{\text{оп}}^{-1} A_{\text{н}}) \Delta x_{\text{н}} + c'(\omega) x + \alpha(\omega)| - \max_{\omega\in\Omega} |c'(\omega) x + \alpha(\omega)|.$$

Ясно, что задача (1) эквивалентна задаче

$$f(x, \Delta x) \to \min_{\Delta x}, \quad d_* - x \leqslant \Delta x \leqslant d^* - x,$$
$$\Delta x_{\text{оп}} = -A_{\text{оп}}^{-1} A_{\text{н}} \Delta x_{\text{н}}. \tag{2}$$

Исходя из задачи (2), составим производную задачу

$$\beta(x, A_{\text{оп}}, l_{\text{н}}) = \max_{\omega\in\Omega} |(c'_{\text{н}}(\omega) - c'_{\text{оп}}(\omega) A_{\text{оп}}^{-1} A_{\text{н}}) l_{\text{н}} + c'(\omega) x + \alpha(\omega)| - \max_{\omega\in\Omega} |c'(\omega) x + \alpha(\omega)| \to \min_{l_{\text{н}}},$$
$$d_{*\text{н}} - x_{\text{н}} \leqslant l_{\text{н}} \leqslant d^*_{\text{н}} - x_{\text{н}}, \tag{3}$$

отличающуюся от (2) тем, что в ней не учитываются ограничения на опорные переменные $l_{\text{оп}}$.

Задача (3) представляет собой специальную задачу линейного программирования, для которой далее будет приведен специальный алгоритм решения.

**Критерий оптимальности.** Пусть $l_н^0$ — решение производной задачи. Равенство

$$\beta(x,\ A_{оп},\ l_н^0)=0 \qquad (4)$$

достаточно, а в случае невырожденности и необходимо для оптимальности опорного плана $\{x, A_{оп}\}$.

Доказательство. *Достаточность.* Если выполняется (4), то тем более будет выполняться равенство $\Delta f(x,\ \Delta x^0)=0$, где $\Delta x^0$ — решение задачи (2). Поэтому для каждого плана $x+\Delta x$ справедливо неравенство $f(x+\Delta x)\geqslant f(x)$, что доказывает утверждение.

*Необходимость.* Предположим, что на оптимальном невырожденном опорном плане $\{x,\ A_{оп}\}$ равенство (4) не выполняется: $\beta(x,\ A_{оп},\ l_н^0)<0$. При любом значении $\Theta$, $0<\Theta\leqslant 1$, вектор $\Theta l_н^0$ является планом задачи (3) и на нем $\beta(x,\ A_{оп},\ \Theta l_н^0)<0$. Для невырожденного опорного плана $\{x,\ A_{оп}\}$ при достаточно малых $\Theta>0$ вектор $\Theta l_{оп}^0=-\Theta A_{оп}^{-1}A_н l_н^0$ удовлетворяет неравенствам $d_{*оп}-x_{оп}\leqslant\Theta l_{оп}^0\leqslant d_{оп}^*-x_{оп}$. Отсюда следует, что при указанных $\Theta$ вектор $x+\Theta l^0$ является планом задачи (1) и $f(x+\Theta l^0)-f(x)<0$, что противоречит оптимальности плана $x$.

Если на опорном плане $\{x,\ A_{оп}\}$ вместо (4) выполняется неравенство $-\beta(x,\ A_{оп},\ l_н^0)\leqslant\varepsilon$, то $x$ будет $\varepsilon$-оптимальным планом задачи (1) *(достаточное условие субоптимальности).*

Пусть $-\beta(x,\ A_{оп},\ l_н^0)>\varepsilon$, где $\varepsilon$ — заданная точность приближения к оптимальному плану $x^0$ задачи (1) по значениям целевой функции. Тогда строим новый план $\bar{x}=x+\Theta l^0$, где $l^0=\{l_{оп}^0,\ l_н^0\}$; $l_{оп}^0=-A_{оп}^{-1}A_н l_н^0$; $\Theta=\min(1,\ \Theta_{i_0})$; $\Theta_{i_0}=\min\Theta_i,\ \ i\in I_{оп}$; $\Theta_i=(d_i^*-x_i)/l_i^0$, если $l_i^0>0$; $\Theta_i=(d_{*i}-x_i)/l_i^0$, если $l_i^0<0$; $\Theta_i=\infty$, если $l_i^0=0$.

При $\Theta=1$ план $\bar{x}=x+l^0$ оптимален. Пусть $\Theta=\Theta_{i_0}$.

При $-\beta(\bar{x},\ A_{оп},\ l_н^0)\leqslant\varepsilon$ процесс решения задачи (1) останавливается на $\varepsilon$-оптимальном плане $\bar{x}$. Если $-\beta(\bar{x},\ A_{оп},\ l_н^0)>\varepsilon$, то плану $\bar{x}$ приписываем новую опору $\bar{A}_{оп}$ и приступаем к новой итерации с опорного плана $\{\bar{x},\ \bar{A}_{оп}\}$. Опора $\bar{A}_{оп}$ получается из $A_{оп}$ удалением столбца $a_{i_0}$ и введением такого столбца $a_{j_0}$, что $x_{i_0j_0}\neq 0$ ($x_{ij}$ — $i$-я координата вектора $a_{j_0}$ в базисе $A_{оп}$). Проблема выбора оптимального $a_{j_0}$ здесь не рассматривается.

Приведем теперь метод решения производной задачи (3). Она представляет собой частный случай задачи

$$f(x) = \max_{i \in I} |f_i(x)| \to \min_x, \; d_* \leqslant x \leqslant d^*,$$
$$f_i(x) = a_i' x + b_i, \; a_i = A(i, J). \tag{5}$$

Вектор $x$ называется *планом* задачи (5), если $d_* \leqslant x \leqslant d^*$. *Опорой* задачи (5) назовем любую невырожденную матрицу $A_{\text{оп}} = A(I_{\text{оп}}, J_{\text{оп}}) = \{a_{ij}, i \in I_{\text{оп}}, j \in J_{\text{оп}}\}$, $I_{\text{оп}} \subset I$, $J_{\text{оп}} \subset J$. Пара $\{x, A_{\text{оп}}\}$ — опорный план, который называется невырожденным, если $d_*(J_{\text{оп}}) < x(J_{\text{оп}}) < d^*(J_{\text{оп}})$, $|f_i(x)| < f(x)$, $i \in I_{\text{н}}$.

Пусть $\{x, A_{\text{оп}}\}$ — начальный невырожденный опорный план. Строим новый план $\overline{x} = x + \Theta l$, где $l = \left\{ l(J_{\text{оп}}) = -A_{\text{оп}}^{-1} \begin{Bmatrix} f_i(x) \\ i \in I_{\text{оп}} \end{Bmatrix}, \; l(J_{\text{н}}) = 0 \right\}$ — подходящее направление для плана $x$; $\Theta = \min\{1, \Theta_{i_0}, \Theta_{j_0}\}$; $\Theta_{j_0} = \min \Theta_j$, $j \in J_{\text{оп}}$; $\Theta_j = (d_j^* - x_j)/l_j$, если $l_j > 0$; $\Theta_j = (d_{*j} - x_j)/l_j$, если $l_j < 0$; $\Theta_j = \infty$, если $l_j = 0$; $\Theta_{i_0} = \min \Theta_i$, $i \in I_{\text{н}}$; $\Theta_i = (f(x) - f_i(x))/(f(x) + a_i' l)$, если $a_i' l \geqslant f(x)$ или $|a_i' l| < f(x)$ и $f_i(x) + a_i' l \geqslant 0$; $\Theta_i = (f(x) + f_i(x))/(f(x) - a_i'(l))$, если $a_i' l \leqslant -f(x)$ или $|a_i' l| < f(x)$ и $f(x) + a_i' l < 0$.

Оценка субоптимальности нового плана равна $\overline{\beta} = f(\bar{x})$. При $\overline{\beta} \leqslant \varepsilon$, где $\varepsilon$ — заданная точность приближения по значениям целевой функции, процесс решения задачи (5) прекращается на $\varepsilon$-оптимальном плане $\bar{x}$.

Очевидно, что при $\Theta = 1$ план $\bar{x}$ оптимален в задаче (5). Пусть $\overline{\beta} > \varepsilon$. Переходим к замене опоры.

Пусть $\Theta = \Theta_{j_0} < 1$. Рассмотрим множества:

$$I_0 = \{i\colon i \in I_{\text{оп}}; \; |f_i(\overline{x})| < f_i(\overline{x}), \; x^l_{j_0 i} \neq 0; \; f_i(\overline{x}) = f(\overline{x}),$$
$$k x^l_{j_0 i} < 0; \; f_i(\overline{x}) = -f(x), \; k x^l_{j_0 i} > 0\},$$
$$J_0 = \{j\colon j \in J_{\text{н}}, \; d_{*j} < x_j < d_j^*, \; x_{j_0 j} \neq 0; \; x_j = d_{*j},$$
$$k x_{j_0 j} < 0; \; x_j = d_j^*, \; k x_{j_0 j} > 0\}, \tag{6}$$

где $k = 1$, если $\overline{x}_{j_0} = d_{*j_0}$; $k = -1$, если $\overline{x}_{j_0} = d^*_{j_0}$; $\{x^l_{j_0 i}, i \in I_{\text{оп}}\}$, $\{x_{j_0 j}, j \in J_{\text{н}}\}$ — элементы $j_0$-й строки матриц $A_{\text{оп}}^{-1}$ и $A_{\text{оп}}^{-1} A(I_{\text{оп}}, J_{\text{н}})$.

Если $I_0 \cup J_0 = \varnothing$, то план $\bar{x}$ — оптимальный план задачи (5).

Пусть $I_0 \cup J_0 \neq \varnothing$. Если непусто множество $\{i \in I_0: |f_i(\bar{x})| < f(\bar{x})\} \cup \{j \in J_0: d_{*j} < \bar{x}_j < d_j^*\}$, то выбираем элемент $s$, принадлежащий этому множеству. В противном случае выбираем любой элемент $s$ из $I_0 \cup J_0$. Плану $\bar{x}$ приписываем новую опору $\bar{A}_{\text{оп}} = A(\bar{I}_{\text{оп}}, \bar{J}_{\text{оп}})$, где $\bar{I}_{\text{оп}} = I_{\text{оп}} \setminus s$, $\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}} \setminus j_0$, если $s \in I_0$; $\bar{I}_{\text{оп}} = I_{\text{оп}}$, $\bar{J}_{\text{оп}} = (J_{\text{оп}} \setminus j_0) \cup s$, если $s \in J_0$.

Рассмотрим случай, когда $\Theta = \Theta_{i_0} < 1$. Построим множества (6) при $k = 1$, если $f_{i_0}(\bar{x}) = f(\bar{x})$, и $k = -1$, если $f_{i_0}(\bar{x}) = -f(\bar{x})$, а также при $\{x_{i_0 i}^l, \ i \in I_{\text{оп}}\} = -A(i_0, J_{\text{оп}}) A_{\text{оп}}^{-1}$, $\{x_{j_0 j}, \ j \in J_{\text{н}}\} = A(i_0, J_{\text{н}}) - A(i_0, J_{\text{оп}}) A_{\text{оп}}^{-1} A(I_{\text{оп}}, J_{\text{н}})$, заменяя в (6) индекс $j_0$ индексом $i_0$. Если $I_0 \cup J_0 = \varnothing$, то план $\bar{x}$ оптимален.

В противном случае по правилам, описанным выше, выбираем элемент $s \in (I_0 \cup J_0)$. Новая опора $\bar{A}_{\text{оп}} = A(\bar{I}_{\text{оп}}, \bar{J}_{\text{оп}})$ строится следующим образом: $\bar{I}_{\text{оп}} = (I_{\text{оп}} \setminus s) \cup i_0$, $\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}}$, если $s \in I_0$; $\bar{I}_{\text{оп}} = I_{\text{оп}} \cup i_0$, $\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}} \cup s$, если $s \in J_0$.

Замечание. Для сокращения размеров опоры можно потребовать, чтобы для начального опорного плана $\{x, A_{\text{оп}}\}$ в множество $I_{\text{оп}}$ входили только такие $i$, для которых $f_i(x) = f(x)$. В этом случае на всех последующих итерациях множество $I_{\text{оп}}$ будет состоять из индексов, активных на текущем плане.

**2. Вторая задача.** Рассмотрим задачу

$$f(x) = \sum_{\omega \in \Omega} |c'(\omega) x + \alpha(\omega)| \to \min_x, \quad Ax = b, \quad d_* \leqslant x \leqslant d^*, \tag{7}$$

где все параметры имеют тот же смысл, что и в п. 1.

Пусть $\{x, A_{\text{оп}}\}$ — начальный опорный план задачи (7). Найдем приращение $\Delta f(x, \Delta x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ целевой функции, порожденное планом $x + \Delta x$. Поскольку $A\Delta x = 0$, то с помощью опоры $A_{\text{оп}}$ получим

$$\Delta f(x, \Delta x) = \sum_{\omega \in \Omega} |(c_{\text{н}}'(\omega) - c_{\text{оп}}'(\omega) A_{\text{оп}}^{-1} A_{\text{н}}) \Delta x_{\text{н}} + c'(\omega) x + \alpha(\omega)| - \sum_{\omega \in \Omega} |c'(\omega) x + \alpha(\omega)|.$$

Ясно, что задача (7) эквивалентна задаче

$$\Delta f(x, \Delta x) \to \min_{\Delta x}, \quad d_* - x \leqslant \Delta x \leqslant d^* - x,$$
$$\Delta x_{\text{оп}} = -A_{\text{оп}}^{-1} A_{\text{н}} \Delta x_{\text{н}}. \tag{8}$$

Исходя из задачи (8), составим производную задачу

$$\beta(x, A_{\text{оп}}, l_{\text{н}}) = \sum_{\omega\in\Omega} |(c'_{\text{н}}(\omega) - c'_{\text{оп}}(\omega) A_{\text{оп}}^{-1} A_{\text{н}}) l_{\text{н}} + c'(\omega)x + \alpha(\omega)| - \\ - \sum_{\omega\in\Omega} |c'(\omega)x + \alpha(\omega)| \to \min_{l_{\text{н}}}, \quad d_{*\text{н}} - x_{\text{н}} \leqslant l_{\text{н}} \leqslant d^*_{\text{н}} - x_{\text{н}}, \quad (9)$$

которая отличается от (8) тем, что в ней не учитываются ограничения на опорные переменные $l_{\text{оп}}$.

Задача (9) эквивалентна следующей задаче линейного программирования:

$$\sum_{\omega\in\Omega} (\xi(\omega) + \eta(\omega)) \to \min,$$

$$(c'_{\text{н}}(\omega) - c'_{\text{оп}}(\omega) A_{\text{оп}}^{-1} A_{\text{н}}) l_{\text{н}} + c'(\omega)x + \alpha(\omega) = \xi(\omega) - \eta(\omega), \quad \omega\in\Omega,$$

$$\xi(\omega) \geqslant 0, \quad \eta(\omega) \geqslant 0, \quad \omega \in \Omega.$$

**Критерий оптимальности.** Пусть $l_{\text{н}}^0$ — решение производной задачи. Равенство

$$\beta(x, A_{\text{оп}}, l_{\text{н}}^0) = 0 \qquad (10)$$

достаточно, а в случае невырожденности и необходимо для оптимальности опорного плана $\{x, A_{\text{оп}}\}$.

Доказательство. *Достаточность.* Если выполняется (10), то тем более выполняется равенство $\Delta f(x, \Delta x^0) = 0$, где $\Delta x^0$ — решение задачи (8). Поэтому для каждого плана $x + \Delta x$ справедливо неравенство $f(x+\Delta x) \geqslant \geqslant f(x)$, что доказывает утверждение.

*Необходимость.* Предположим, что на оптимальном невырожденном опорном плане $\{x, A_{\text{оп}}\}$ равенство (10) не выполняется: $\beta(x, A_{\text{оп}}, l_{\text{н}}^0) < 0$. При любом $0 < \Theta \leqslant 1$ вектор $\Theta l_{\text{н}}^0$ является планом задачи (9) и на нем $\beta(x, A_{\text{оп}}, \Theta l_{\text{н}}^0) < 0$. Для невырожденного опорного плана $\{x, A_{\text{оп}}\}$ при достаточно малых $\Theta > 0$ вектор $\Theta l_{\text{оп}}^0 = -\Theta A_{\text{оп}}^{-1} A_{\text{н}} l_{\text{н}}^0$ удовлетворяет неравенствам $d_{*\text{оп}} - x_{\text{оп}} \leqslant \Theta l_{\text{оп}}^0 \leqslant d^*_{\text{оп}} - x_{\text{оп}}$. Отсюда следует, что при указанных $\Theta$ вектор $x + \Theta l^0$ является планом задачи (1) и $f(x + \Theta l^0) - f(x) < 0$, что противоречит оптимальности плана $x$.

Если на опорном плане $\{x, A_{\text{оп}}\}$ вместо (10) выполняется неравенство $-\beta(x, A_{\text{оп}}, l_{\text{н}}^0) \leqslant \varepsilon$, то $x$ будет $\varepsilon$-оптимальным планом задачи (7) (*достаточное условие субоптимальности*).

Пусть $-\beta(x, A_{\text{оп}}, l^0_{\text{н}}) > \varepsilon$, где $\varepsilon$ — заданная точность приближения к оптимальному плану $x^0$ задачи (1) по значениям целевой функции. Тогда строим новый план $\bar{x} = x + \Theta l^0$, где $l^0 = \{l^0_{\text{оп}}, l^0_{\text{н}}\}$; $l^0_{\text{оп}} = -A^{-1}_{\text{оп}} A_{\text{н}} l^0_{\text{н}}$; $\Theta = \min\{1, \Theta_{i_0}\}$; $\Theta_{i_0} = \min \Theta_i$, $i \in I_{\text{оп}}$; $\Theta_i = (d^*_i - x_i)/l^0_i$, если $l^0_i > 0$; $\Theta_i = (d_{*i} - x_i)/l^0_i$, если $l_i < 0$; $\Theta_i = \infty$, если $l^0_i = 0$.

При $\Theta = 1$ план $\bar{x} = x + l^0$ оптимален. Пусть $\Theta = \Theta_{i_0}$. При $-\beta(\bar{x}, A_{\text{оп}}, l^0_{\text{н}}) \leqslant \varepsilon$ процесс решения задачи (7) останавливается на $\varepsilon$-оптимальном плане $\bar{x}$. Если $-\beta(\bar{x}, A_{\text{оп}}, l^0_{\text{н}}) > \varepsilon$, то плану $\bar{x}$ приписываем новую опору $\bar{A}_{\text{оп}}$ и приступаем к новой итерации, начиная с опорного плана $\{\bar{x}, \bar{A}_{\text{оп}}\}$. Опора $\bar{A}_{\text{оп}}$ получается из опоры $A_{\text{оп}}$ удалением столбца $a_{i_0}$ и введением такого столбца $a_{j_0}$, что $x_{i_0 j_0} \neq 0$ ($x_{ij}$ — $i$-я координата вектора $a_j$ в базисе $A_{\text{оп}}$). Проблема выбора оптимального $a_{j_0}$ здесь не рассматривается.

## § 2. Позиномные задачи

Исследование ряда прикладных задач привело к созданию *геометрического программирования* [26] — специального раздела нелинейного программирования, в котором задачи оптимизации формулируются с помощью своеобразных функций, называемых *позиномами*. В данном параграфе дается новое обоснование теории геометрического программирования, которое в отличие от [26], где используются специфические неравенства типа геометрического неравенства, давшего название всему разделу, исходит из общей теории двойственности выпуклого программирования. Переход к задачам выпуклого программирования позволяет рассматривать позиномные задачи как одни из простейших задач, к которым применима техника решения нелинейных задач, излагаемая в § 4.

**1. Безусловная минимизация.** Рассмотрим задачу минимизации *позинома*

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(t) \to \min, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где $t = \{t_1, \ldots, t_m\}$; $u_i(t) = c_i \prod_{j=1}^{m} t_j^{a_{ij}}$, $c_i > 0$, $i = \overline{1, n}$; $\left\{\begin{matrix} a_{ij}, \ j = \overline{1, m} \\ i = \overline{1, n} \end{matrix}\right\}$ — матрица экспонент.

Прологарифмировав функции $u_i$ и введя новые переменные $x_j = \ln t_j$, $j = \overline{1, m}$; $x_{m+i} = \ln u_i$; $b_i = -\ln c_i$, $i = \overline{1, n}$, от задачи (1) перейдем к эквивалентной задаче выпуклого программирования с линейными ограничениями типа равенств

$$\sum_{i=1}^{n} e^{x_{m+i}} \to \min, \quad \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j - x_{m+i} = b_i, \quad i = \overline{1, n}. \tag{2}$$

С помощью *нормальной функции Лагранжа*

$$F(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} e^{x_{m+i}} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left( \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j - x_{m+i} - b_i \right),$$

применение которой здесь законно, запишем задачу, двойственную к (2):

$$\psi(\lambda) = \inf_x F(x, \lambda) \to \max_\lambda. \tag{3}$$

Опишем множество двойственных планов $\{\lambda: \psi(\lambda) < < +\infty\}$. Нижняя грань функции $F(x, \lambda)$ по $x_{m+i}$ достигается в точке

$$x_{m+i} = \ln \lambda_i. \tag{4}$$

Следовательно, двойственные планы удовлетворяют неравенствам

$$\lambda_i \geqslant 0, \ i = \overline{1, n}. \tag{5}$$

Подсчитав $\inf F(x, \lambda)$ по переменным $x_j$, $j = \overline{1, m}$, найдем, что двойственные планы удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{ij} = 0, \quad j = \overline{1, m}. \tag{6}$$

Обратно: каждый вектор $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, удовлетворяющий соотношениям (5), (6), является двойственным планом.

Подставив (4) в (3), с учетом (5), (6) получим двойственную к (2) задачу

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + \ln \prod_{i=1}^{n} (c_i / \lambda_i)^{\lambda_i} \to \max, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{ij} = 0, \\ j = \overline{1, m}, \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1, n}. \end{gathered} \tag{7}$$

Если строки матрицы экспонент образуют *положительный базис* $\left(\text{из } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{ij} = 0,\ j = \overline{1, m},\ \lambda_i \geqslant 0,\ i = \overline{1, n}, \text{ следует } \lambda_i \equiv 0,\ i = \overline{1, n}\right)$, то задача (7) имеет единственный план $\lambda_i \equiv 0$, $i = \overline{1, n}$. Из теории двойственности выпуклого программирования следует, что исходная задача (1) решается тривиально: $t_j \equiv 0$, $j = \overline{1, m}$.

В дальнейшем из рассмотрения исключается тривиальный случай: строки матрицы экспонент образуют положительный базис.

В силу однородности ограничений задачи (2) ее решение ищем в виде $\lambda_i = \alpha\delta_i$, $\delta_i \geqslant 0$, $i = \overline{1, n}$; $\sum_{i=1}^{n} \delta_i = 1$, $\alpha > 0$. Задача (7) в новых переменных имеет вид

$$\begin{gathered} \alpha \sum_{i=1}^{n} \delta_i \left(1 + \ln c_i / \alpha\delta_i\right) \to \max_{\alpha,\, \delta}; \quad \sum_{i=1}^{n} \delta_i a_{ij} = 0,\ j = \overline{1, m}; \\ \sum_{i=1}^{n} \delta_i = 1,\ \delta_i \geqslant 0,\ i = \overline{1, n};\ \alpha > 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Переменная $\alpha$ входит только в целевую функцию. Вычислив в (8) максимум по $\alpha$, получим другую эквивалентную форму двойственной задачи (7):

$$\begin{gathered} \prod_{i=1}^{n} \left(c_i / \delta_i\right)^{\delta_i} \to \max; \quad \sum_{i=1}^{n} \delta_i a_{ij} = 0,\ j = \overline{1, m}; \\ \sum_{i=1}^{n} \delta_i = 1,\ \delta_i \geqslant 0,\ i = \overline{1, n}. \end{gathered} \tag{9}$$

Понятно, что вместо целевой функции задачи (9) можно использовать функцию $\sum_{i=1}^{n} \delta_i \left(\ln c_i - \ln \delta_i\right)$, полученную из прежней логарифмированием.

**2. Условная минимизация.** Во избежание громоздких выкладок рассмотрим задачу геометрического программирования только с одним дополнительным позиномным ограничением

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(t) \to \min_t, \ \sum_{k=1}^{l} u_{n+k}(t) \leqslant 1, \ t \geqslant 0, \qquad (10)$$

где $u_{n+k}(t) = c_{n+k} \prod_{j=1}^{m} t_j^{a_{n+k,\, j}}$; $c_{n+k} > 0$; $k = \overline{1, l}$. Положив $x_{m+n+k} = \ln u_{n+k}$, $b_{n+k} = -\ln c_{n+k}$, $k = \overline{1, l}$, по аналогии с п. 1 от задачи (10) перейдем к задаче выпуклого программирования

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{n} e^{x_{m+i}} \to \min_x, \ \sum_{k=1}^{l} e^{x_{m+n+k}} \leqslant 1, \\ \sum_{j=1}^{m} a_{sj} x_j - x_{m+s} = b_s, \ s = \overline{1, n+l}. \end{gathered} \qquad (11)$$

Будем считать, что для задачи (11) выполнено *условие Слейтера*: существует план $x^*$, что $\sum_{k=1}^{l} e^{x^*_{m+n+k}} < 1$ $\left(\text{в исходной задаче: } \sum_{k=1}^{l} u_{n+k}(t^*) < 1, \ t^* \geqslant 0\right)$. В терминах функции Лагранжа

$$F(x, \lambda, \nu) = \sum_{i=1}^{n} e^{x_{m+i}} + \nu \left( \sum_{k=1}^{l} e^{x_{m+n+k}} - 1 \right) + \\ + \sum_{s=1}^{n+l} \lambda_s \left( \sum_{j=1}^{m} a_{sj} x_j - x_{m+s} - b_s \right), \ \nu \geqslant 0, \qquad (12)$$

двойственная задача имеет вид $\inf_x F(x, \lambda, \nu) \to \sup_{\lambda,\, \nu \geqslant 0}$. Нижняя грань функции Лагранжа (12) по $x_{m+i}$ достигается в точке (4). Минимизация $F(x, \lambda, \nu)$ по $x_{m+n+k}$ приводит к следующим точкам минимума:

1) $x_{m+n+k}$ — произвольное число, если $\nu = 0$;
2) $x_{m+n+k} = \ln \lambda_{n+k}/\nu$, если $\nu > 0$.

При минимизации по $x_j$ получаем $\sum_{s=1}^{n+l} \lambda_s a_{sj} = 0$, $j = \overline{1, m}$.

Таким образом, при $\nu > 0$ задача, двойственная к (11), имеет вид

$$\sum_{s=1}^{n+l} \lambda_s - \nu + \ln \prod_{i=1}^{n} (c_i/\lambda_i)^{\lambda_i} + \ln \prod_{k=1}^{l} (\nu c_{n+k}/\lambda_{n+k})^{\lambda_{n+k}} \to \max_{\lambda,\, \nu},$$
$$\sum_{s=1}^{n+l} \lambda_s a_{sj} = 0,\ j = \overline{1, m};\ \lambda_s \geqslant 0,\ s = \overline{1, n+l};\ \nu > 0. \tag{13}$$

Максимум по $\nu$ целевой функции в (13) достигается в точке $\nu = \sum_{k=1}^{l} \lambda_{n+k}$. Поэтому вместо (13) получаем задачу

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i + \ln \prod_{s=1}^{n+l} (c_s/\lambda_s)^{\lambda_s} \left( \sum_{k=1}^{l} \lambda_{n+k} \right)^{\sum_{k=1}^{l} \lambda_{n+k}} \to \max_{\lambda},$$
$$\sum_{s=1}^{n+l} \lambda_s a_{sj} = 0,\ j = \overline{1, m};\ \lambda_s \geqslant 0,\ s = \overline{1, n+l}, \tag{14}$$

которая при $\sum_{k=1}^{l} \lambda_{n+k} \to 0$ совпадает с задачей (7), соответствующей случаю $\nu = 0$.

Исключим из рассмотрения тривиальный случай, когда из $\sum_{s=1}^{n+l} \lambda_s a_{sj} = 0$, $j = \overline{1, m}$; $\lambda_s \geqslant 0$, $s = \overline{1, n+l}$, следует $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$.

Используя однородность ограничений задачи (14), решение будем искать в форме $\lambda_s = \alpha\delta_s$, $\alpha > 0$, $\delta_s \geqslant 0$, $s = \overline{1, n+l}$, $\sum_{i=1}^{n} \delta_i = 1$.

По аналогии с п. 1 подставим эти значения в (14) и после вычисления максимума по $\alpha$ получим задачу, двойственную к (11):

$$\prod_{s=1}^{n+l} (c_s/\delta_s)^{\delta_s} \left( \sum_{k=1}^{l} \delta_{n+k} \right)^{\sum_{k=1}^{l} \delta_{n+k}} \to \max_{\delta},$$
$$\sum_{s=1}^{n+l} \delta_s a_{sj} = 0, j = \overline{1, m};\ \sum_{i=1}^{n} \delta_i = 1,\ \delta_s \geqslant 0,\ s = \overline{1, n+l}. \tag{15}$$

З а м е ч а н и е. Максимум по $\alpha$ при переходе от (14) к (15) достигается в точке с координатой, равной значению целевой функции задачи (15).

## § 3. Аппроксимация нелинейных задач

Одна из наиболее известных схем решения задач нелинейного программирования состоит в замене исходной сложной задачи последовательностью более простых задач, для решения которых имеются эффективные методы. В эту схему укладывается большинство из современных методов оптимизации. Существует много способов аппроксимации нелинейных задач. В данном параграфе описываются только некоторые из них. Общая схема аппроксимации приводится в § 9 гл. I.

**1. Аппроксимация функций.** Рассмотрим задачу

$$f(x)\to\max,\ g_i(x)\leqslant 0,\ h_j(x)=0,\ i=\overline{1,\ k},\ j=\overline{1,\ m};\quad d_*\leqslant x\leqslant d^*, \tag{1}$$

с нелинейной целевой функцией $f(x)$ и нелинейными функциями $g_i(x)$, $h_j(x)$ основных ограничений типа неравенств и равенств.

Существо вопроса, которому посвящен данный пункт, поясним для определенности только на функции $f(x)$. Пусть $f(x)\in C^{(1)}$, т. е. функция $f(x)$ определена и непрерывна вместе со всеми производными первого порядка в некоторой области пространства $R^n$, где рассматривается задача (1). Тогда в окрестности $S(x^1)=\{x\colon x^1+S_*(x^1)\leqslant \leqslant x\leqslant x^1+s^*(x^1)\}$ любой точки $x^1$ ее поведение можно приближенно описать линейной функцией

$$f_1(x;\ x^1)=f(x^1)+\frac{\partial f'(x^1)}{\partial x}(x-x^1),$$

которая называется *линейной аппроксимацией* функции $f(x)$ в окрестности $S(x^1)$. Векторы $S_*(x^1)\leqslant 0$, $S^*(x^1)\geqslant 0$ являются параметрами аппроксимации и вырабатываются по ходу решения задачи (1).

Более точное описание поведения функции $f(x)\in C^{(2)}$ достигается с помощью *квадратичной аппроксимации*

$$f_2(x;\ x^1)=f(x^1)+\frac{\partial f'(x^1)}{\partial x}(x-x^1)+$$
$$+\frac{1}{2}(x-x^1)'\frac{\partial^2 f(x^1)}{\partial x^2}(x-x^1),\ x\in S(x^1).$$

Другой путь улучшения аппроксимации функции $f(x)\in C^{(2)}$ состоит в следующем. Пусть $S_*(x^1)=\{x^{1t}, t=\overline{1, n+1}\}$ — совокупность точек из $S(x^1)$, находящаяся в общем положении: $\operatorname{rank}\{x^{1t}-x^{11}, t=\overline{2, n+1}\}=n$. Функцию

$$f_1(x;\ S_*(x^1))=\begin{cases}\max\limits_{1\leqslant t\leqslant n+1} f_1(x;\ x^{1t}), \text{ если } \partial^2 f(x^1)/\partial x^2>0,\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x\in S(x^1),\\ \min\limits_{1\leqslant t\leqslant n+1} f_1(x;\ x^{1t}), \text{ если } \partial^2 f(x^1)/\partial x^2<0,\end{cases}$$

назовем *кусочно-линейной аппроксимацией* функции $f(x)$ в окрестности $S(x^1)$ по *остову* $S_*(x^1)$. Понятно, что функция $f_1(x;\ S_*(x^1))$ более точно описывает поведение функции $f(x)$, чем функция $f_1(x;\ x^1)$. Остов $S_*(x^1)$ относится к параметрам аппроксимации.

**2. Аппроксимация ограничений.** *Линейной аппроксимацией в $S(x^1)$ ограничения типа неравенства*

$$g_i(x)\leqslant 0 \tag{2}$$

назовем замену неравенства (2) неравенством

$$g_{i1}(x;\ x^1)\leqslant\xi_i,\ x\in S(x^1),$$

где $\xi_i=\xi_i(x^1)\geqslant 0$ — параметр аппроксимации.

Аналогично под *линейной аппроксимацией в $S(x^1)$ ограничения типа равенства*

$$h_j(x)=0 \tag{3}$$

будем понимать замену равенства (3) двумя неравенствами

$$\xi_{j*}\leqslant h_{j1}(x;\ x^1)\leqslant\xi_j^*$$

с параметрами аппроксимации $\xi_{j*}=\xi_{j*}(x^1)\leqslant 0$, $\xi_j^*=\xi_j^*(x^1)\geqslant 0$.

Не останавливаясь на аппроксимациях ограничений высокого порядка из-за их редкого употребления, перейдем к аппроксимациям ограничений другого типа. В основу нового подхода положены аппроксимации не самих функций ограничений, а множеств их значений.

Обозначим через

$$X=\{x\colon g_i(x)\leqslant 0,\ i=\overline{1, k};\ h_j(x)=0,\ j=\overline{1, m};\ d_*\leqslant x\leqslant d^*\} \tag{4}$$

ограниченное множество планов задачи (1). Множество $X$ представляет пересечение $X=X_1\cap X_2$ двух множеств

$$X_1=\{x\colon g_i(x)\leqslant 0,\ i\in I_1;\ h_j(x)=0,\ j\in J_1\},$$
$$I_1\subset I=\{1, 2, \ldots, k\},\ J_1\subset J=\{1, 2, \ldots, m\};$$
$$X_2=\{x\colon g_i(x)\leqslant 0,\ i\in I_2=I\setminus I_1;\ h_j(x)=0,$$
$$j\in J_2=J\setminus J_1;\ d_*\leqslant x\leqslant d^*\}.$$

Пусть $x^s$, $s\in S$,— некоторая совокупность элементов из $X_2$.

*Выпуклой аппроксимацией ограничений* задачи (1) назовем замену множества (4) множеством

$$\widetilde{X}=\{x\colon x=\sum_{s\in S}\lambda_s x^s\in X_1,\ x^s\in X_2,\ \lambda_s\geqslant 0,\ s\in S;\ \sum_{s\in S}\lambda_s=1\}.$$

Если множество $X_1$ формировать только из ограничений, заданных с помощью линейных функций $g_i(x)$, $h_j(x)$, то множество $\tilde{X}$ будет определено через линейные операции, т. е. выпуклая аппроксимация ограничений станет своеобразной линеаризацией ограничений задачи (1).

**3. Аппроксимация задачи.** Пусть $x^1$ — начальное приближение к оптимальному плану $x^0$ задачи (1): $g(x^1)\leqslant\eta^1$, $\eta^1_*\leqslant h(x^1)\leqslant\eta^*_1$, где $\eta_1$, $\eta^1_*$, $\eta^*_1$ — параметры аппроксимации. Предположим, что построено $p$-е приближение $x^p$: $g(x^p)\leqslant\eta^p$, $\eta^p_*\leqslant h(x^p)\leqslant\eta^*_p$. Введем *производную задачу*

$$f_1(x;\ x^p)\to\max_x,\ g_1(x;\ x^p)\leqslant\xi(x^p),$$
$$\xi_*(x^p)\leqslant h_1(x;\ x^p)\leqslant\xi^*(x^p);$$
$$x^p+S_*(x^p)\leqslant x\leqslant x^p+S^*(x^p),\ d_*\leqslant x\leqslant d^*. \tag{5}$$

По решению *) $x^{p0}$ задачи (5) построим $(p+1)$-е приближение

$$x^{p+1}=x^p+\Theta^p l^p,\ l^p=x^{p0}-x^p, \tag{6}$$

где число $\Theta^p$ найдено из соотношений

$$g(x^p+\Theta^p l^p)\leqslant\eta^{p+1},\ \eta^{p+1}_*\leqslant h(x^p+\Theta^p l^p)\leqslant\eta^*_{p+1},$$
$$d_*\leqslant x^p+\Theta^l l^p\leqslant d^*. \tag{7}$$

Последовательность задач (5)—(7), $p=1, 2, \ldots$, назовем *линейной аппроксимацией задачи* (1).

---

*) Вместо $x^{p0}$ можно использовать субоптимальный план.

Если в (5) функцию $f_1(x;\ x^p)$ заменить функцией $f_2(x;\ x^p)$, то полученная последовательность задач (5)—(7), $p=1, 2, \ldots$, называется *квадратичной аппроксимацией задачи* (1).

Выбор параметров аппроксимаций, стратегия управления ими в процессе решения задачи (1) определяют особенность каждого конкретного метода.

Использование выпуклых аппроксимаций ограничений для решения задачи (1) в общих чертах совпадает с техникой метода Данцига — Вулфа (см. § 4 гл. I).

**4. Сходимость алгоритмов минимизации.** *Методом (алгоритмом) первого порядка* решения задач нелинейного программирования называется каждый метод (алгоритм), в котором в процессе итераций применяются значения функций цели и ограничений вместе с их производными не выше первого порядка. Таким образом, при использовании только линейных аппроксимаций п. 3 получаются методы первого порядка. Основной вопрос исследования методов решения нелинейных задач состоит в изучении их сходимости и связанных с ней характеристик, важных с точки зрения реализации методов на ЭВМ.

Большинство из известных методов решения задач нелинейного программирования сводится к построению последовательности

$$x^{p+1}=x^p+\Theta^p l^p,\quad p=1, 2, \ldots, \tag{8}$$

в которой первый элемент $x^1$ *(начальное приближение)* задается, а остальные строятся рекуррентно с помощью векторов (направлений) $l^p$, $p=1, 2, \ldots$, и чисел (шагов вдоль направления) $\Theta^p$, $p=1, 2, \ldots$.

Метод называется *сходящимся,* если для каждой точки $x^1$ из некоторой окрестности оптимального плана $x^0$ выполняется соотношение $x^0=\lim x^p$, $p=1, 2, \ldots$.

Одной из самых известных характеристик сходящихся методов является их *скорость сходимости.* Принято говорить, что метод имеет линейную *скорость сходимости (скорость сходимости геометрической прогрессии),* если при некоторых $p_*\geqslant 1$, $\gamma<1$ выполняется неравенство $\|x^{p+1}-x^0\|\leqslant\gamma\|x^p-x^0\|$, $p\geqslant p_*$. При выполнении неравенств

$$\|x^{p+1}-x^0\|\leqslant\gamma\|x^p-x^0\|^{1+\alpha},\ p\geqslant p_*,\ \alpha>0, \tag{9}$$

говорят о *сверхлинейной скорости сходимости.* Если в (9) $\alpha=1$, то метод обладает *квадратичной скоростью сходимости.*

При построении последовательности (8) очередные (текущие) векторы $l^p$ и числа $\Theta^p$ находятся по определенным правилам (составляющим суть метода) через значения функций цели и ограничений и их производных в точках $x^r$, $q \leqslant r \leqslant p$, уже построенных до рассматриваемого этапа. Для случая $q=p$ (*одношаговые* методы) получаются зависимости

$$l^p = l^p(x^p), \quad \Theta^p = \Theta^p(x^p). \tag{10}$$

Если функции (10) подставить в (8), то получим дискретную систему

$$x^{p+1} = F^p(x^p), \quad p=1,\ 2,\ \ldots . \tag{11}$$

Для большинства соотношений (8), (10) выполняется условие $l(x^0)=0$. В этом случае правая часть системы (11) обладает свойством $F^p(x^0) \equiv x^0$, $p=1, 2, \ldots$, т. е. $x^0$ — *неподвижная точка* преобразований $F^p(x)$, $p=1$, $2, \ldots$.

В качественной теории систем (11) центральное место занимает *проблема устойчивости* неподвижных (особых) точек этой системы.

Особая точка $x^0=0$ системы (11) называется *устойчивой,* если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что при некотором $p_* \geqslant 1$ из $\|x^1\|<\delta$ следует $\|x^p\|<\varepsilon$ для всех $p \geqslant p_*$.

Устойчивая особая точка $x^0$ называется *асимптотически устойчивой,* если $0=\lim x^p$, $p=1, 2, \ldots$.

Из приведенных определений следует, что исследование сходимости минимизирующей последовательности (8) тесно связано с исследованием устойчивости [27] особых точек дискретной системы (11).

Приведем результаты исследований А. В. Покатаева по сходимости алгоритма (8), полученные им под руководством Н. Г. Булгакова и Б. С. Калитина в процессе работы над устойчивостью дискретных систем (11). В этих исследованиях изучаются ситуации более общие, чем те, о которых только что шла речь.

Рассмотрим алгоритм (8). Изучим вопрос о достижении последовательностью $\{x^p,\ p=1,\ 2,\ \ldots\}$ заданного ограниченного множества $X$.

Введем определения. Алгоритм называется *устойчивым,* если $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \delta_\varepsilon$ такое, что $\forall\ x \in R^m$, $\rho(x, X)<\delta_\varepsilon$, справедливо неравенство $\rho(x^p(x), X)<\varepsilon$, $\forall\ p \geqslant 1$. Здесь

$\rho(x, X)$ — расстояние между $x$ и $X$. Алгоритм называется *сходящимся,* если он устойчив и $\exists\, \delta_0 > 0$ такое, что $\forall\, x \in R^m$ и из $\rho(x, X) < \delta_0$ следует $\rho(x^p(x), X) \to 0$ при $p \to +\infty$. Алгоритм называется *абсолютно сходящимся,* если он устойчив и $\forall\, x \in R^m$, $\rho(x^p(x), X) \to 0$ при $p \to +\infty$. Алгоритм называется *условно сходящимся* во множестве $Y$, если $\forall\, \{x^p(x),\ p=1, 2, \ldots\} \in Y$ и имеет место $\rho(x^p(x), X) \to 0$ при $p \to +\infty$. *Положительной траекторией* по алгоритму (8) с начальным условием $x$ называется последовательность $\{x^p(x),\ p=1, 2, \ldots\}$, если она определена. *Отрицательной траекторией* по алгоритму (8) с начальным условием $x$ называется любая последовательность $\{x^p,\ p=-1, -2, \ldots\}$, где $x^{p+1}$ получено из $x^p$ по алгоритму (8) ($p=-2, -3, \ldots$), если эта последовательность существует, причем $x^{-1}=x$. Будем говорить, что алгоритм (8) обладает *интегральной непрерывностью,* если $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall\, N > 1$ $\exists\, \delta(\varepsilon, N)$ такое, что если последовательность $\{x^p(x),\ p=\overline{1, N}\}$ определена, то $\forall\, y \in R^m$, $\|x-y\| < \delta(\varepsilon, N)$, последовательность $\{x^p(y),\ p=\overline{1, N}\}$ определена и выполняется неравенство $\|x^p(x) - x^p(y)\| < \varepsilon$, $\forall\, p=\overline{1, N}$. Всюду далее рассматриваются алгоритмы, обладающие интегральной непрерывностью.

**Теорема 1.** Пусть можно указать непрерывную функцию $V(x)$ такую, что 1) $V(x) \geqslant 0$, $\forall\, x \in R^m$; $V(x)=0$, $\forall\, x \in X$; 2) $V(x^2(x)) - V(x) \leqslant 0$, $\forall\, x \in R^m$; 3) множество $M=\{x \in R^m \setminus X\colon\ V(x^2(x)) = V(x)\}$ не содержит целых ограниченных траекторий, 4) $\|x^p(x)\| < D(x) < +\infty$, $\forall\, x \in R^m$, $\forall\, p \geqslant 1$. Тогда алгоритм (8) абсолютно сходится.

Следствие 1. Если условия теоремы 1 выполняются в некотором множестве $Y \subset R^m$, то алгоритм (8) условно сходится в множестве $Y$.

Следствие 2. Если для данной последовательности $\{x^p(x),\ p=1, 2, \ldots\}$ выполнены условия 1, 2, 4 теоремы 1 и у этой последовательности нет предельных точек в множестве $M \setminus X$, то $\rho(x^p(x), X) \to 0$ при $p \to +\infty$.

**Теорема 2.** Пусть можно указать непрерывную функцию $V(x)$ такую, что

1) $V(x) \geqslant m[\rho(x, X)]^\alpha$, $m$, $\alpha > 0$ — const, $\forall\, x \in R^m$, $V(x)=0$, $\forall\, x \in X$;

2) $V(x^2(x)) \leqslant \gamma V(x)$, $\forall\, x \in R^m$, $0 < \gamma < 1$.

Тогда алгоритм (8) сходится абсолютно и справедлива оценка

$\rho(x^p(x), X) \leqslant c\gamma^{(p-1)/\alpha}$, $c=c(x)$—const.

Следствие 3. Если условия теоремы 2 выполняются в некотором множестве $Y \subset R^m$, то алгоритм (8) условно сходится в множестве $Y$ и справедлива оценка теоремы 2.

**Теорема 3.** Пусть можно указать такую непрерывную функцию $V(x)$, что 1) $V(x) \geqslant m[\rho(x, X)]^\alpha$, $m$, $\alpha > 0$—const, $\forall x \in R^m$, $V(x)=0$, $\forall x \in X$; 2) $V(x^2(x)) \leqslant (\gamma V(x))^\mu$, $1 \geqslant \gamma > 0$, $\mu > 1$—const, $\forall x \in R^m$. Тогда алгоритм (8) сходится условно во множестве $Y=\{x\colon V(x) < 1/\gamma\}$ и справедлива оценка

$$\rho(x^p(x), X) \leqslant c(q^{\mu^{p-1}})^{1/\alpha}, \ 0 < q = q(x) < 1, \ \forall x \in Y.$$

Следствие 4. Если условия теоремы 3 выполняются в некотором множестве $Y \subset R^m$, то алгоритм (8) условно сходится в множестве $Y \cap \{x\colon V(x) < 1/\gamma\}$.

Замечание. Заметим, что при $\gamma < 1$ выполняется более сильная оценка $\rho(x^p(x), X) \leqslant \dfrac{1}{m^{1/\alpha}} \gamma^{(\mu^p-\mu)/(\mu-1)\alpha} (V(x))^{\mu^{p-1}/\alpha}$.

Из доказанных теорем можно получить разнообразные утверждения о сходимости алгоритмов. Приведем простейший результат, где функция Ляпунова строится на основе минимизируемой функции. Рассмотрим задачу

$$f(x) \to \min, \ x \in R^m.$$

Эту задачу будем решать по алгоритму вида (8). Интегральной непрерывностью обладают стационарные алгоритмы (в которых $\Theta^p = \Theta(x^p)$, $l^p = l(x^p)$) с непрерывными функциями $\Theta(x)$, $l(x)$.

**Метод наискорейшего спуска.** Рассмотрим реализацию алгоритма (8):

$$x^{p+1} = x^p - \Theta^p \operatorname{grad} f(x^p), \ \Theta^p > 0.$$

Выбор шага $\Theta^p = \Theta(x^p)$ производится по следующему правилу: а) выбирается некоторое произвольное $\Theta > 0$ (одно и то же на всех итерациях) и определяется точка $x = x^p - \Theta \operatorname{grad} f(x^p)$; б) проверяется неравенство

$$f(x) - f(x^p) \leqslant \varepsilon\Theta \|\operatorname{grad} f(x^p)\|^2, \tag{9}$$

где $0 < \varepsilon < 1$ постоянная (одна и та же на всех итерациях). Если это неравенство выполняется, то $\Theta^p = \Theta$. Если это неравенство не выполняется, то производим дробление $\Theta$: $\Theta := \Theta\lambda$, где $0 < \lambda < 1$.

Пусть: 1) функция $f(x) \in C^{(1)}$ ограничена снизу, $\operatorname{grad} f(x)$ удовлетворяет условию Липшица:

$$\|\operatorname{grad} f(x) - \operatorname{grad} f(y)\| \leqslant R\|x-y\|, \ \forall\, x, y \in R^m.$$

Кроме того, $\|x^p(x)\| < D(x) < +\infty$, $\forall\, x \in R^m$, $\forall\, p \geqslant 1$; 2) $X$ — множество стационарных точек функции $f(x)$. Тогда алгоритм (8) сходится абсолютно.

## § 4. Дробно-линейная задача

Рассматривается общая задача дробно-линейного программирования в канонической форме [29]. Для нее строится аналог метода максимального приращения [ч. 2].

**1. Схема метода.** Рассмотрим общую задачу дробно-линейного программирования в канонической форме:

$$f(x) = \frac{p'x + \alpha}{q'x + \beta} \to \max, \ Ax = b, \ d_* \leqslant x \leqslant d^*, \qquad (1)$$

где $p$, $q$ — $n$-векторы; $\alpha$, $\beta$ — скаляры; остальные символы пояснены в § 1 гл. I. Считаем, что знаменатель $q'(x) + \beta$ целевой функции не меняет знак на множестве планов.

Пусть $\{x, A_{\text{оп}}\}$ — начальный опорный план задачи (1). Обозначим через $\bar{x} = x + \Delta x$ другой план задачи (1). Легко заметить, что задача (1) эквивалентна задаче построения оптимального приращения $\Delta x^0$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{p'\Delta x\,(q'x + \beta) - q'\Delta x\,(p'x + \alpha)}{(q'x + \beta)\,[q'\,(x + \Delta x) + \beta]} \to \max,$$
$$A\Delta x = 0, \ d_* - x \leqslant \Delta x \leqslant d^* - x. \qquad (2)$$

Пользуясь опорой, найдем $\Delta x_{\text{оп}} = -A_{\text{оп}}^{-1} A_{\text{н}} \Delta x_{\text{н}}$, и, введя обозначения $\Delta_{\text{н}}^{p'} = p_{\text{оп}} A_{\text{оп}}^{-1} A_{\text{н}} - p_{\text{н}}$; $\Delta_{\text{н}}^{q} = q'_{\text{оп}} A_{\text{оп}}^{-1} A_{\text{н}} - q_{\text{н}}$, $\Delta_{\text{н}}^{\text{общ}} = \Delta_{\text{н}}^{p}\,(q'x + \beta) - \Delta_{\text{н}}^{q}\,(p'x + \alpha)$, получим задачу, эквивалентную (2):

$$\frac{-\Delta_{\text{н}}^{\text{общ}\,\prime} \Delta x_{\text{н}}}{(q'x + \beta)\,(q'x + \beta - \Delta_{\text{н}}^{q\,\prime} \Delta x_{\text{н}})} \to \max,$$

$$d_{*\text{н}} - x_{\text{н}} \leqslant \Delta x_{\text{н}} \leqslant d_{\text{н}}^* - x_{\text{н}}, \ d_{*\text{оп}} - x_{\text{оп}} \leqslant \Delta x_{\text{оп}} \leqslant d_{\text{оп}}^* - x_{\text{оп}}. \qquad (3)$$

Производной задачей на опорном плане $\{x, A_{\text{оп}}\}$ назовем задачу

$$\varphi(x, A_{\text{оп}}, l_{\text{н}}) = \frac{-\Delta_{\text{н}}^{\text{общ}\,\prime} l_{\text{н}}}{(q'x + \beta)\,(q'x + \beta - \Delta_{\text{н}}^{q\,\prime} l_{\text{н}})} \to \max_{l_{\text{н}}},$$

$$d_{*\text{н}} - x_{\text{н}} \leqslant l_{\text{н}} \leqslant d_{\text{н}}^* - x_{\text{н}}, \qquad (4)$$

которая отличается от (3) отсутствием группы ограничений на опорные компоненты $l_{\text{оп}}$. Если $q'x+\beta>0$, то производная задача (4) эквивалентна задаче

$$\frac{-\Delta_{\text{н}}^{\text{общ}'} l_{\text{н}}}{q'x+\beta-\Delta_{\text{н}}^{q'} l_{\text{н}}} \to \max_{l_{\text{н}}}, \quad d_{*\text{н}}-x_{\text{н}} \leqslant l_{\text{н}} \leqslant d_{\text{н}}^{*}-x_{\text{н}}.$$

Если $q'x+\beta<0$, то производная задача (4) эквивалентна задаче

$$\frac{\Delta_{\text{н}}^{\text{общ}'} l_{\text{н}}}{q'x+\beta-\Delta_{\text{н}}^{q'} l_{\text{н}}} \to \max_{l_{\text{н}}}, \quad d_{*\text{н}}-x_{\text{н}} \leqslant l_{\text{н}} \leqslant d_{\text{н}}^{*}-x_{\text{н}}.$$

Метод решения производной задачи приведен в п. 2. Пусть $l_{\text{н}}^{0}$ — вектор, на котором останавливается процесс решения задачи (4).

**Теорема.** Неравенство

$$\varphi(x,\ A_{\text{оп}},\ l_{\text{н}}^{0}) \leqslant 0 \qquad (5)$$

достаточно, а в случае невырожденности и необходимо для оптимальности опорного плана $\{x, A_{\text{оп}}\}$.

Если

$$\varphi(x,\ A_{\text{оп}},\ l_{\text{н}}^{0}) \leqslant \varepsilon, \qquad (6)$$

то $x$ — $\varepsilon$-оптимальный план задачи (1).

Доказательство. Докажем первое утверждение.

*Достаточность.* Пусть $\varphi(x,\ A_{\text{оп}},\ l_{\text{н}}^{0}) \leqslant 0$. Из определения производной задачи и вектора $l^{0}=\{l_{\text{оп}}^{0},\ l_{\text{н}}^{0}\}$, $l_{\text{оп}}^{0}= -A_{\text{оп}}^{-1}A_{\text{н}}l_{\text{н}}^{0}$, следует, что

$$\varphi(x,\ A_{\text{оп}},\ l_{\text{н}}^{0}) = f(x+l^{0})-f(x) = \max_{\substack{d_{*\text{н}}-x_{\text{н}} \leqslant l_{\text{н}} \leqslant d_{\text{н}}^{*}-x_{\text{н}} \\ Al=0}} \{f(x+l)-f(x)\} \geqslant$$

$$\geqslant \max_{\substack{d_{*}-x \leqslant \Delta x \leqslant d^{*}-x \\ A\Delta x=0}} f(x+\Delta x)-f(x),$$

т. е. для всех допустимых приращений выполняется неравенство

$$\varphi(x,\ A_{\text{оп}},\ l_{\text{н}}^{0}) \geqslant f(x+\Delta x)-f(x).$$

С учетом (5) получаем $f(x+\Delta x) \leqslant f(x)$, т. е. план $x$ оптимальный.

*Необходимость.* Пусть $\{x,\ A_{\text{оп}}\}$ — невырожденный оптимальный опорный план. Предположим, что $\varphi(x,\ A_{\text{оп}},$

$l_н^0) > 0$. Из предположения о невырожденности плана $x$ и ограничений производной задачи имеем $d_{*оп} < x_{оп} < d_{оп}^*$, $d_{*н} \leqslant x_н + l_н^0 \leqslant d_н^*$. Поэтому найдется достаточно малое число $\Theta > 0$ такое, что

$$d_{*оп} \leqslant x_{оп} + \Theta l_{оп}^0 \leqslant d_{оп}^*, \; d_{*н} \leqslant x_н + \Theta l_н^0 \leqslant d_н^*,$$

$$l_{оп}^0 = -A_{оп}^{-1} A_н l_н^0,$$

т. е. $\bar{x} = x + \Theta l^0$ — план задачи (1). Так как знак производной целевой функции $f(x)$ по выбранному направлению не меняется вдоль этого направления, то для плана $\bar{x}$ справедливо неравенство $f(\bar{x}) > f(x)$, которое противоречит оптимальности плана $x$.

Докажем второе утверждение. Пусть выполнено (6). Из предыдущего известно, что для всех допустимых приращений $\Delta x$ выполняется неравенство $\varphi(x, A_{оп}, l_н^0) \geqslant f(x + \Delta x) - f(x)$. С учетом (6) получаем $f(x + \Delta x) \leqslant f(x) + \varepsilon$, т. е. $x$ — $\varepsilon$-оптимальный план в задаче (1). Теорема доказана.

Предположим, что на опорном плане $\{x, A_{оп}\}$ выполняется неравенство $\varphi(x, A_{оп}, l_н^0) > \varepsilon$, где $\varepsilon$ — заданная точность приближения к оптимальному плану $x^0$ задачи (1) по значениям целевой функции. Тогда строим новый план $\bar{x} = x + \Theta l^0$, $l^0 = \{l_{оп}^0, l_н^0\}$, $l_{оп}^0 = -A_{оп}^{-1} A_н l_н^0$, где $\Theta$ — максимально допустимый шаг вдоль $l^0$, $\Theta = \min\{1, \Theta_{i_0}\}$, $\Theta_{i_0} = \min \Theta_i$, $i \in I_{оп}$;

$$\Theta_i = \begin{cases} \dfrac{d_i^* - x_i}{-\sum\limits_{j \in J_н} a_{ij} l_j^0}, & \text{если } -\sum\limits_{j \in J_н} a_{ij} l_j^0 > 0; \\ \dfrac{d_{*i} - x_i}{-\sum\limits_{j \in J_н} a_{ij} l_j^0}, & \text{если } -\sum\limits_{j \in J_н} a_{ij} l_j^0 < 0. \end{cases}$$

При $\Theta = 1$ план $x$ оптимален для задачи (1). Если при $\Theta < 1$ выполняется неравенство $\varphi(x, A_{оп}, l_н^0) \leqslant \varepsilon + \varphi(x, A_{оп}, \Theta l_н^0)$, то $\bar{x}$ — $\varepsilon$-оптимальный план задачи (1). В противном случае плану $\bar{x}$ приписываем новую опору $\bar{A}_{оп}$, которую получаем из $A_{оп}$ удалением столбца $a_{i_0}$ и добавлением любого столбца $a_{j_0}$, для которого $x_{i_0 j_0} \neq 0$ ($x_{ij}$ — $i$-я координата вектора $a_j$ в базисе из столбцов $A_{оп}$). Проблема выбора наилучшей опоры здесь не рассматривается. Новая итерация начинается с опорного плана $\{\bar{x}, \bar{A}_{\text{оп}}\}$.

**2. Решение производной задачи.** Производная задача (4) является задачей типа (1) с простыми ограничениями:

$$\frac{p'x+\alpha}{q'x+\beta} \to \max, \quad d_* \leqslant x \leqslant d^*. \tag{7}$$

Здесь $p$, $q$, $d_*$, $d^*$, $x$ — $n$-векторы; $\alpha$, $\beta$ — скалярные величины. Считаем, что $p_i$ и $q_i$, $i=\overline{1, n}$, не равны нулю одновременно. Анализ всех возможных расположений множества планов $d_* \leqslant x \leqslant d^*$ относительно гиперплоскостей $p'x+\alpha=0$, $q'x+\beta=0$ приводит к следующим случаям:

$$\text{I.} \quad \sum_{\substack{i=1\\ q_i<0}}^{n} q_i d_i^* + \sum_{\substack{i=1\\ q_i>0}}^{n} q_i d_{*i} + \beta < 0,$$

$$\sum_{\substack{i=1\\ q_i>0}}^{n} p_i d_i^* + \sum_{\substack{i=1\\ q_i<0}}^{n} p_i d_{*i} + \alpha > 0;$$

$$\text{II.} \quad \sum_{\substack{i=1\\ q_i<0}}^{n} p_i d_i^* + \sum_{\substack{i=1\\ q_i>0}}^{n} p_i d_{*i} + \alpha \geqslant 0,$$

$$\sum_{\substack{i=1\\ p_i>0}}^{n} p_i d_i^* + \sum_{\substack{i=1\\ p_i<0}}^{n} p_i d_{*i} + \alpha > 0;$$

$$\text{III.} \quad \sum_{\substack{i=1\\ q_i>0}}^{n} q_i d_i^* + \sum_{\substack{i=1\\ q_i<0}}^{n} q_i d_{*i} + \beta \leqslant 0,$$

$$\sum_{\substack{i=1\\ p_i<0}}^{n} p_i d_i^* + \sum_{\substack{i=1\\ p_i>0}}^{n} p_i d_{*i} + \alpha < 0;$$

$$\text{IV.} \quad \sum_{\substack{i=1\\ q_i<0}}^{n} q_i d_i^* + \sum_{\substack{i=1\\ q_i>0}}^{n} q_i d_{*i} + \beta \geqslant 0,$$

$$\sum_{\substack{i=1\\ p_i>0}}^{n} p_i d_i^* + \sum_{\substack{i=1\\ p_i<0}}^{n} p_i d_{*i} + \alpha \leqslant 0;$$

$$\text{V.}\quad \sum_{\substack{i=1\\ q_i>0}}^{n} q_i d_i^* + \sum_{\substack{i=1\\ q_i<0}}^{n} q_i d_{*i} + \beta \leqslant 0,$$

$$\sum_{\substack{i=1\\ p_i<0}}^{n} p_i d_i^* + \sum_{\substack{i=1\\ p_i>0}}^{n} p_i d_{*i} + \alpha \geqslant 0.$$

Опишем процедуру построения решений задачи (7) для случая 1. Аналогичны процедуры для остальных случаев.

I. Известно, что в этом случае целевая функция неограниченно возрастает на множестве планов. Положим $\dfrac{p'x^0+\alpha}{q'x^0+\beta} = \infty$, где $x^0$ находится следующим образом. Для всех $i=\overline{1,\ n}$ таких, что $q_i = 0$, $p_i \neq 0$, положим $x_i = d_i^*$, если $p_i > 0$, и $x_i = d_{*i}$, если $p_i < 0$. Пусть $\{i_1, \ldots, i_r\}$, $r \leqslant n$, — множество индексов таких, что $q_{i_j} \neq 0$, $j = \overline{1,\ r}$.

**Итерация 1.** Положим

$$x_{i_1}^0 = \min\left\{\frac{-\beta}{q_{i_1}},\ d_{i_1}^*\right\}, \text{ если } \frac{-\beta}{q_{i_1}} > 0,$$

$$x_{i_1}^0 = \max\left\{\frac{-\beta}{q_{i_1}},\ d_{*i_1}\right\}, \text{ если } \frac{-\beta}{q_{i_1}} < 0.$$

Пусть $x_{i_1}^0 = \dfrac{-\beta}{q_{i_1}}$. Тогда положим $x_{i_2}^0 = x_{i_3}^0 = \ldots = x_{i_r}^0 = 0$. Искомый план построен. Если $x_{i_1}^0 = d_{i_1}^*$ или $x_{i_1}^0 = d_{*i_1}$, то переходим ко второй итерации.

**Итерация 2.** Положим

$$x_{i_2}^0 = \min\left\{\frac{-\beta - q_{i_1}d_{i_1}^*}{q_{i_2}},\ d_{i_2}^*\right\}, \text{ если } \frac{-\beta - q_{i_1}d_{i_1}^*}{q_{i_2}} > 0,$$

$$x_{i_2}^0 = \max\left\{\frac{-\beta - q_{i_1}d_{i_1}^*}{q_{i_2}},\ d_{*i_2}\right\}, \text{ если } \frac{-\beta - q_{i_1}d_{i_1}^*}{q_{i_2}} < 0.$$

Пусть, например, для $k \leqslant r$ имеем $x_{i_1}^0 = d_{i_1}^*, \ldots, x_{i_{k-1}}^0 = d_{i_{k-1}}^*$.

**Итерация** $k$. Положим

$$x_{i_k}^0 = \min\left\{\frac{-\beta - \sum\limits_{j=1}^{k-1} q_{i_j}d_{i_j}^*}{q_{i_k}},\ d_{i_k}^*\right\}, \text{ если } \frac{-\beta - \sum\limits_{j=1}^{k-1} q_{i_j}d_{i_j}^*}{q_{i_k}} > 0,$$

$$x^0_{i_k} = \max\left\{\frac{-\beta - \sum\limits_{j=1}^{k-1} q_{i_j} d^*_{i_j}}{q_{i_k}},\ d_{*i_k}\right\},\ \text{если}\ \frac{-\beta - \sum\limits_{j=1}^{k-1} q_{i_j} d^*_{i_j}}{q_{i_k}} < 0.$$

Если $x^0_{i_k} = \dfrac{-\beta - \sum\limits_{j=1}^{k-1} q_{i_j} d^*_{i_j}}{q_{i_k}}$, то положим $x^0_{i_{k+1}} = \ldots = x^0_{i_n} = 0$. Искомый план $x^0$ построен. Если $x^0_{i_k} = d^*_{i_k}$ или $x^0_{i_k} = d_{*i_k}$, то переходим к $(k+1)$-й итерации.

Замечание. Пусть задача (7) возникает как производная задачи (1), т. е. при решении задачи (7) получается направление $l^0_{\text{н}}$ для задачи (1). Пусть $x^0$ — решение задачи (7). Если при этом $p'x^0+\alpha>0$, то положим $l^0_{\text{н}} = x^0$. Пусть $p'x^0+\alpha\leqslant 0$. Решаем задачу $p'x+\alpha\to\max$, $q'x+\beta=0$, $d_*\leqslant x\leqslant d^*$, с начальным планом $x^0$. Если на какой-то итерации получим план $\tilde{x}$ такой, что $p'\tilde{x}+\alpha>0$, то положим $l^0_{\text{н}} = \tilde{x}$. Если ни на одной итерации не выполнится условие $p'\tilde{x}+\alpha>0$, то положим $l^0_j = d^*_j$ при $p_j>0$; $l^0_j = d_{*j}$ при $p_j<0$, $j\in I_{\text{н}}$. Если при этом для $l^0_{\text{н}}$ не выполнится критерий оптимальности и шаг $\Theta$ окажется равным 1, то план $\bar{x} = x^0+\Theta l^0$ нельзя считать оптимальным для задачи (1). В этом случае продолжим решение задачи, начиная новую итерацию с опорного плана $\{\bar{x}, A_{\text{оп}}\}$. Размеры задач (1) и (7), очевидно, согласованы соответствующим образом.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Книга содержит результаты работы, которую авторы вели вместе с сотрудниками в течение 1970—1978 гг. Толчком к занятиям методами линейного программирования послужили, с одной стороны, обязанности по обеспечению учебного процесса на факультете прикладной математики Белгосуниверситета им. В. И. Ленина, с другой — естественное развитие наших научных интересов. По роду своей научной деятельности мы длительное время были далеки от линейного программирования и, занимаясь проблемами оптимального управления, основное внимание уделяли качественным вопросам теории, хотя понимали, что истинный смысл и значение методов оптимизации рано или поздно приведут к изучению конструктивных вопросов оптимального управления. Для нас (как и для всех специалистов по оптимальному управлению) было очевидным, что в новом деле не обойтись без знакомства с вычислительными методами нелинейного программирования. Этот раздел методов оптимизации в последние годы привлекает огромное внимание теоретиков и прикладников. В нем получен ряд первоклассных результатов. Казалось естественным, опираясь на новейшие достижения, попытаться построить соответствующие модификации для оптимального управления. Обстоятельства сложились таким образом, что одновременно нам пришлось читать лекции по методам оптимизации, в которых, разумеется, невозможно было обойти линейное программирование и симплекс-метод. Симплекс-метод прекрасно зарекомендовал себя на практике и реализован на всех современных ЭВМ в виде универсальных и мощных систем программирования. Трудно было в начале 70-х гг. предположить, что наше знакомство с симплекс-методом затянется на долгие годы и приведет к появлению данной книги.

Сейчас, оглядывая проделанную нами работу, можно выделить в ней несколько основных моментов, которые в конечном счете определили характер книги. Прежде всего, в связи с учебным процессом возникло стремление изложить методы линейного программирования в стиле общих вычислительных схем нелинейного программирования. Поэтому пришлось отказаться от наиболее популярных обоснований симплекс-метода и привлечь известный в нелинейном программировании, но не очень популярный в линейном программировании принцип допустимых направлений. Этот шаг привел к первому результату [28]. Известно, что алгоритмы принципа допустимых направлений работают на произвольных планах, а не только на специальных базисных планах, на которые опирается симплекс-метод. Возникла мысль о такой модификации симплекс-метода, чтобы в ней использовались произвольные планы, но остались без изменения остальные элементы симплекс-метода. Так появился опорный метод и опорные планы [ч. 1]. Следует признать, что мы не сразу осознали, что основным элементом метода является пара $\{x, A_{оп}\}$. Несмотря на то что в определении опорного плана компоненты $x$, $A_{оп}$ не зависят друг от друга, долгое время это обстоятельство нами не использовалось для построения новых методов. Впервые такая мысль возникла при разработке модификаций опорного метода [ч. 1], допускающих свободу выбора ведущего столбца. Размышляя одновременно о наилучших условиях нормировки, согласованных со структурой задачи и текущей информацией, мы заменили принцип допустимых направлений методом приращений, что позволило обосновать опорный метод с адаптивной нормировкой [ч. 2, дополнения], существенно отличающийся по ряду признаков от всех предыдущих методов линейного программирования. С помощью анализа операций для построения каждой итерации в задачах с основными ограничениями типа неравенств было введено общее определение опорного плана и построен адаптивный метод [ч. 3, введение].

В схему опорных методов укладываются не все классические методы линейного программирования. Остальные точные методы нами объединены в безопорные и комбинированные. Общие схемы этих методов изложены в [ч. 1]. Однако их истинное значение выясняется только при реализации на специальных классах задач. В [ч. 2] приведена реализация безопорных методов на транспортных задачах. Новым элементом здесь является систематическое использование второго общего принципа оптимизации, динамического программирования. Хотя последний метод уже давно широко использовался для решения разнообразных задач оптимизации, форма его реализации в [ч. 2] является новой. Она позволила с единых позиций трактовать многие известные алгоритмы и предложить новые.

После разработки в [ч. 1] общих схем методов книги в последующих частях основное внимание уделялось их реализации. Отличие [ч. 2] от [ч. 3] состоит в том, что если в первом случае на примере одного класса задач детально рассмотрены опорные и безопорные (в прямом и двойственном вариантах) методы, то во втором излагается только один метод (как правило, прямой опорный) для разнообразных специальных задач линейного и нелинейного программирования. Реализация остальных методов [ч. 1] оставляется читателям.

За пределами книги остались многошаговые методы и быстро развивающиеся в последние годы приближенные методы. Наши первые результаты в этих областях линейного программирования представлены в [30, 31].

Опыт работы с методами линейного программирования убеждает нас в том, что целесообразен (и неизбежен) периодический анализ классических методов, ибо со временем меняются обстоятельства и средства, при которых они были созданы, а для учета изменившихся условий нужны соответствующие модификации.

Результаты книги представляют лишь начальные шаги в направлении решения задач оптимального управления, ради которых была предпринята и продолжается вся наша работа.

# ЛИТЕРАТУРА


1. *Канторович Л. В.* Математические методы организации и планирования производства. Л., Изд-во ЛГУ, 1939.

2. *Данциг Дж.* Линейное программирование, его применения и обобщения. М., Прогресс, 1964.

3. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Методы линейного программирования, ч. 1, 2. Минск, Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1977, 1978.

4. *Булавский В. А., Звягина Р. А., Яковлева М. А.* Численные методы линейного программирования. М., Наука, 1977.

5. *Мееров М. В., Литвак Б. Л.* Оптимизация систем многосвязного управления. М., Наука, 1972.

6. *Charnes A., Granot D., Granot G.* A Primal Algorithm for Interval Linear-Programming Problems.— Linear Algebra and its Applications, 1977, v. 17, N 1.

7. *Лэсдон Л. С.* Оптимизация больших систем. М., Наука, 1975.

8. *Романовский И. В.* Алгоритмы решения экстремальных задач. М., Наука, 1977.

9. *Гилл Ф., Мюррей У.* Численные методы условной оптимизации. М., Мир, 1977.

10. *Первозванский А. А., Гайцгори В. Г.* Декомпозиция, агрегирование и приближенная оптимизация. М., Наука, 1979.

11. *Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б.* Новые направления в линейном программировании. М., Советское радио, 1966.

12. *Понтрягин Л. С.* и др. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.

13. *Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И.* Опорные методы решения больших задач линейного программирования. Препринт № 11 (43). Ин-т математики АН БССР. Минск, 1978.

14. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Оптимизация линейных систем. Минск, Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1973.

15. *Зуховицкий С. И., Радчик И. А.* Математические методы сетевого планирования. М., Наука, 1965.

16. *Ху Т.* Целочисленное программирование и потоки в сетях. М., Мир, 1974.

17. *Мухамадиев Б. М.* О решении задачи билинейного программирования и отыскания всех ситуаций равновесия в билинейных матричных играх. Журн. Вычислительная математика и математическая физика, 1978, т. 18, № 2.

18. *Юдин Д. В.* Математические методы управления в условиях неполной информации. М., Советское радио, 1974.

19. *Ермольев Ю. М.* Методы стохастического программирования. М., Наука, 1974.

20. *Гороховик В. В.* Условия слабой эффективности в конечномерных задачах векторной оптимизации. Препринт № 12 (12). Институт математики АН БССР. Минск, 1978.

21. *Кюнци Г., Крелле В.* Нелинейное программирование. М., Советское радио, 1965.

22. *Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М.* Численные методы в экстремальных задачах. М., Наука, 1974.

23. *Land A. H., Doig A. G.* An automatic method of solving discrete programming problems.— Econometrica, 1960, v. 28, N 3, p. 497—520.

24. *Gomory R. E.* Outline of an algorithm for integer solution to linear programs.— Bull. Amer. Math. Soc., 1958, v. 64, N 5, p. 275—278.

25. *Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.* Введение в минимакс. М., Наука, 1972.

26. *Даффин Р., Питерсон Э., Зенер К.* Геометрическое программирование. Мир, 1972.

27. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости. М., Наука, 1967.

28. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Построение субоптимальных планов транспортной задачи.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1975, № 6.

29. *Гольштейн Е. Г.* Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М., Наука, 1971.

30. *Габасов Ф., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И.* Двухшаговый метод решения общей задачи линейного программирования. Докл. АН БССР. Минск, Наука и техника, 1980.

31. *Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И.* Приближенные методы решения общей задачи линейного программирования. Докл. АН БССР. Минск, Наука и техника, 1980.

*Рафаил Габасов*
*Фаина Михайловна Кириллова*

**МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

**Часть 3. Специальные задачи**

Редакторы *Т. А. Акулович, Л. Ф. Верниковская.* Художественный редактор *Л. П. Дубовицкая.* Технический редактор *В. П. Безбородова* Корректор *Л. В. Лебедева*

ИБ № 371

Сдано в набор 11 07.79. Подписано в печать 20.06.80. АТ 04643. Формат $84\times108^{1}/_{32}$. Бумага типографская № 3. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 19,32. Уч.-изд. л. 19,55. Тираж 2900 экз. Заказ 422. Цена 3 р. 10 к.

Издательство БГУ им. В. И. Ленина Минвуза БССР и Госкомиздата БССР. Минск, Парковая магистраль, 11. Ордена Трудового Красного Знамени типография издательства ЦК КП Белоруссии. Минск, Ленинский пр., 79.

3 р. 10 к.