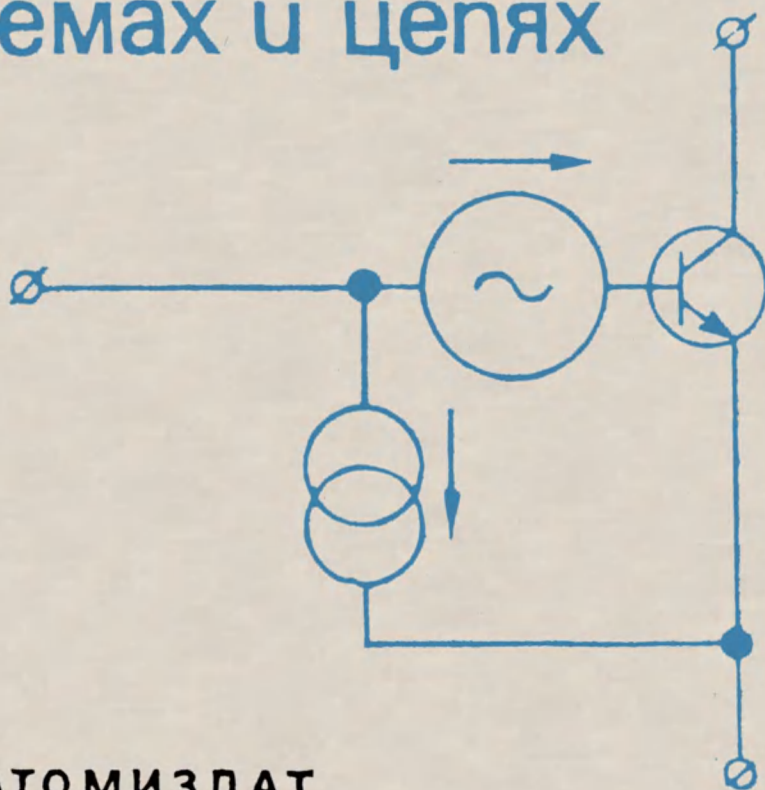


Ф.Н.Х. РОБИНСОН

ШУМЫ И ФЛУКТУАЦИИ в электронных схемах и цепях



АТОМИЗДАТ



**Noise and
fluctuations**
in electronic devices
and circuits

F. N. H. ROBINSON

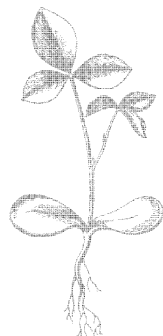
CLARENDON PRESS • OXFORD • 1974

Ф. Н. Х. РОБИНСОН

ШУМЫ И ФЛУКТУАЦИИ В ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМАХ И ЦЕПЯХ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО С. В. ПАНТЫКИНА,
Н. И. ЕЛИСЕЕВА, Ю. А. КАРЦЕВА
ПОД РЕДАКЦИЕЙ КАНДИДАТА ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК
Ю. А. КАРЦЕВА

МОСКВА • АТОМИЗДАТ • 1980



Scan AAW

Робинсон Ф. Н. Х. Шумы и флуктуации в электронных схемах и цепях. Пер. с англ. — М.: Атомиздат, 1980. 256 с.

Рассмотрены основные виды шумов в электронных устройствах (в частности, в входных каскадах линейных усилителей, генераторах и т. п.). Достижение малого уровня шума в этих устройствах — один из определяющих факторов получения хорошего амплитудного и временного разрешения в спектрометрии ионизирующих излучений и одна из важнейших проблем радиоэлектроники.

Книга предназначена для физиков и инженеров, разрабатывающих или эксплуатирующих чувствительную радиоаппаратуру. Она может быть полезна преподавателям, аспирантам и студентам радиотехнических и инженерно-физических специальностей.

Ил. 76. Библиогр. 52.

Р $\frac{30400-037}{034(01)-80}$ 37—80·2403000000

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Физики и инженеры, в сущности, по одной и той же причине проявляют интерес к шумам радиоэлектронных систем. Можно построить систему, чувствительность которой ограничивается не только конструктивными ее недостатками, но и более существенными причинами, обусловленными атомной структурой и статистическими свойствами вещества. Для физика шум радиоэлектронной системы представляет собой важное практическое подтверждение явлений, описываемых статистической механикой, и понимание практических последствий шума помогает внести ясность в значение некоторых концепций и результатов этого абстрактного направления физической теории. Для инженера шум радиоэлектронных систем является препятствием на пути практической реализации полезных устройств, и понимание его физической природы помогает свести к минимуму влияние шума за счет целенаправленного и тщательного проектирования. Имея в виду эти две категории читателей, я попытался написать книгу, в которой рассматривается связь практического проявления шумов с основными физическими законами, и именно поэтому она будет нужной и интересной для физика и достаточно полезной и доступной для инженера.

Полное описание шумов в радиоэлектронных системах требует рассмотрения не только природы шума, но и его статистических свойств и влияния на обнаружение пороговых сигналов, их оптимальное кодирование и обработку. Во многих трудах по шумам рассматривается преимущественно вторая группа вопросов: в данной книге этому аспекту уделяется весьма ограниченное внимание.

Главное в книге — физическая природа шумов электронных приборов и характер шумовых явлений в тех простых радиоэлектронных цепях, которые образуют унифицированные узлы сложных систем.

При работе над книгой мне были полезны дискуссии с д-ром К. А. Брунером из Кларендонской лаборатории, я глубоко благодарен также г-ну Д. Ф. Гиббсу из Бристольского университета, внимательное прочтение текста и ценные замечания которого помогли мне исключить многие ошибки и неясные формулировки или неточности.

Кларендонская лаборатория
Оксфорд
Август 1973 г.

Ф. Н. Х. РОБИНСОН

ВВЕДЕНИЕ

Шум в повседневной жизни, по выражению Амброза Бирса, представляет собой «зловоние в ушах», а для инженеров по радиоэлектронике, кроме того, шум — это любая случайная помеха, на фоне которой должна выделяться информация, связанная с когерентным сигналом. Сложность, совершенство и особенно степень усиления, достигаемые в радиоэлектронной аппаратуре, таковы, что фон в большинстве случаев определяется природой случайного статистического поведения составляющих вещества на атомном уровне. В этом случае предельная чувствительность устанавливается основополагающими законами, которые обуславливают поведение вещества и излучения. Нас будет интересовать только этот аспект шума и мы не будем уделять внимание всевозможным шипениям, всплескам и шумовым трескам, которые являются результатом интерференции или неисправности компонентов аппаратуры.

Эта книга предназначена главным образом для инженеров по радиоэлектронике или ученых-экспериментаторов, которые разрабатывают и эксплуатируют чувствительную радиоэлектронную аппаратуру и хотят понять, как влияет шум на ее характеристики. В книге рассматриваются природа и свойства шума в основных компонентах и узлах радиоэлектронных систем. Мы не касаемся в ней того, что может быть названо важной стратегией разработки систем, т. е. тех проблем, которые относятся к оптимальному кодированию или обработке сигналов. Но рассматриваемый в книге материал дает необходимый запас знаний, требуемый для решения стратегических задач.

Шум в радиоэлектронных системах снискал себе не вполне заслуженную репутацию трудной и неясной проблемы. Отчасти это обусловлено сложностью систем, в которых шум проявляется существенным образом, а отчасти непривычной природой некоторых описывающих его математических средств. Однако есть и другая причина сложности проблемы, которая кроется в том, что изучение шумов в радиоэлектронике основывается на результатах трех в корне отличных одна от другой научных дисциплин: статистической механики, теории цепей и статистического анализа. Основные процессы, обуславливающие шумы в электронных компонентах, проистекают из явлений, которые составляют предмет изучения статистической механики, а для анализа прохождения

шумов в радиоэлектронной аппаратуре требуется знание другой дисциплины — теории цепей. Наконец, когда в результате этого анализа мы подходим к описанию характеристики выхода системы, то должны делать это описание, пользуясь терминологией статистики.

Большей частью мы будем использовать понятия теории цепей, в которой особое значение придается частотным или спектральным составляющим сигнала и шума в системе, и для этой цели наиболее пригодна концепция энергетического спектра шума. Если зависящий от времени ток $I(t)$ содержит полезные сигналы и шум, то мы можем описать составляющие полезного сигнала тока $I(t)$ формулой

$$I_s(t) = \int_0^{\infty} I_s(f) \exp(2\pi jft) df,$$

а шум — отклонением тока $\Delta I(t) = I(t) - I_s(t)$ от его ожидаемого или среднего значения. Энергетический спектр шума $\omega(f)$ определяется таким образом, что вклад в $[\Delta I(t)]^2$ от спектральных составляющих в полосе df на частоте f равен $\omega(f) df$.

Исходя из этого, полные сведения о выходном сигнале шумящего устройства будут содержаться в аналитических выражениях для $I_s(f)$ и $\omega(f)$. Процесс вычисления выходного сигнала необходимо начинать с определения спектра входного сигнала. Затем следует определить энергетический спектр шума в узлах устройства и рассмотреть прохождение отдельных спектральных составляющих сигнала и шума через устройство. Наконец, для определения спектра выходного сигнала необходимо объединить прошедшие через устройство спектральные составляющие, принимая во внимание наличие или отсутствие любой корреляции между ними. При этом с позиций статистики $I_s(t)$ следует считать ожидаемым значением выходного сигнала в момент времени t , а

$$\langle (\Delta I(t))^2 \rangle = \int \omega(f) df$$

— средним квадратом отклонения выходного сигнала от ожидаемого значения.

Ясно, что этот прием подразумевает, что мы имеем некоторое совершенно определенное представление о смысле, который вкладывается в такие понятия, как ожидаемое или среднее значение величины. Это мы будем рассматривать в гл. 1. То, что мы имеем дело со статистическими положениями, объясняется в равной степени случайной природой основных шумовых процессов, а также связью между шумом как экспериментально наблюдаемым во времени процессом и флуктуациями, когда вещество и излучение рассматриваются на основе статистической и квантовой механики. Во всех случаях, представляющих практический интерес, исходя из простых статистических или термодинамических соображений, можно получить требуемые для анализа цепей основные

данные о шуме, не прибегая к каким-либо более серьезным математическим выкладкам. Тем не менее мы подробно рассматриваем эту проблему в гл. 5 и 6. Однако поскольку эти главы могут быть труднодоступными или не представлять интереса для читателя, имеющего чисто практический подход к делу, а в общепринятом изложении статистической механики эти вопросы обычно не рассматриваются, мы сделаем несколько замечаний общего характера о связи между шумом и статистической механикой.

Полное описание микроскопического состояния объекта, например резистора с сопротивлением 470 Ом, должно содержать данные о координатах и импульсах всех 10^{20} или около этого атомных и субатомных частиц, которые составляют его структуру. От попытки проведения подобного описания нас удерживают не только законы квантовой механики; если даже попытаться сделать это, то обширность задачи выводит ее за пределы практической возможности. Вместо этого мы будем довольствоваться весьма несовершенным описанием резистора через его химический состав и механическую конструкцию с учетом того факта, что резистор находится в динамическом и тепловом равновесии с окружающей средой.

Тем не менее статистическая механика все же позволяет нам сделать некоторые предположения относительно его свойств. В частности, мы можем вычислить вероятность существования любого возможного микроскопического состояния частиц. Так как каждое микроскопическое состояние соответствует конкретному значению макроскопически наблюдаемых величин, связанных с резистором, это позволяет нам вычислить вероятность того, что значение одной из величин, скажем, тока короткого замыкания через резистор, находится между I и $I+dl$. Эта вероятность представляет собой сумму вероятностей всех тех микроскопических состояний, которые ведут к появлению тока в этом интервале значений. Затем мы можем продолжить вычисление ожидаемого значения тока $\langle I \rangle$ и среднего значения квадрата отклонений $\langle \Delta I^2 \rangle$ относительно этого значения. Эти результаты имеют следующую интерпретацию: ток $\langle I \rangle$ дает ожидаемое или, иначе, среднее значение тока короткого замыкания, который наблюдается при проведении серии измерений на большом количестве (или ансамбле) идентичных резисторов, а величина $\langle \Delta I^2 \rangle$ дает средний квадрат отклонений этих результатов в выбранном ансамбле. Уместно предположить, что если мы имеем всего лишь один-единственный резистор, то значения $\langle I \rangle$ и $\langle \Delta I^2 \rangle$ могут также относиться к результатам серии измерений тока I , проведенных на одном резисторе с длительными интервалами времени измерения. Однако сами по себе эти результаты не говорят нам ничего об изменении тока I по всему непрерывному интервалу времени. Для получения этих сведений необходимо воспользоваться другими соображениями.

Хотя мы не можем точно определить состояние частиц в какой-либо момент времени, эти частицы подчиняются совершенно точ-

ным динамическим законам, которые управляют эволюцией одного микроскопического состояния во времени. Таким образом, если дано, что в момент времени t_1 система находится в одной из групп макроскопических состояний, которая порождает в ней ток I_1 , то мы, по меньшей мере, можем сделать статистические предположения относительно вероятности того, что в более поздний момент времени t_2 система будет обнаружена в группе состояний, которая вызывает в ней ток I_2 . Другими словами, мы можем описать эволюцию тока I во времени в терминологии статистики. Имея такую информацию, можно затем перейти к статистическим оценкам свойств спектральных составляющих или составляющих Фурье тока I и тем самым получить энергетический спектр. Такой подход, рассматриваемый подробно в гл. 5, приводит, например, к довольно четкому разграничению между такими приборами, как полевой транзистор, в котором шум рассматривается как тепловой процесс, и биполярный транзистор, в котором шум характеризуется дробовым процессом. В гл. 5 токи и напряжения трактуются с точки зрения классической теории, хотя частицы системы рассматриваются, по существу, в подчинении квантовым законам. Гл. 6 содержит последовательное рассмотрение токов и напряжений с позиций законов квантовой механики.

За исключением этих глав и гл. 3, в которых излагается основной математический аппарат, необходимый для дальнейшего изложения, от читателей книги не требуется особой математической подготовки. Но даже в гл. 3 все, что требуется от читателя, — это принятие без доказательств рядов и интегралов Фурье, а не их глубокое понимание.

В гл. 1—7 рассматриваются общие вопросы и основные источники шума, а в гл. 8—11 — шумы в наиболее распространенных активных приборах, используемых в диапазоне от низких до умеренно высоких частот. В гл. 12—14 обсуждаются шумы в усилителях, построенных на этих активных приборах, а в гл. 15—17 речь идет о шумах ультравысокочастотных и сверхвысокочастотных усилителей. В следующих четырех главах рассматриваются шумы нелинейных цепей и устройств и, наконец, в последней главе приводятся некоторые примеры практического применения изложенного в книге материала, подобраны наиболее интересные примеры и примеры, используемые в иллюстративных целях. Эта глава заканчивается краткими рекомендациями по практической разработке мал шумящих устройств.

В конце книги приводится перечень использованной литературы.

ГЛАВА 1

СИГНАЛЫ И ШУМ

1.1. Флуктуации

Если при измерении небольшого постоянного напряжения, например термо-ЭДС, использовать усилитель постоянного тока и измерительный прибор, то можно заметить, что увеличение коэффициента усиления усилителя позволяет обнаруживать все более и более слабые сигналы, но в конечном итоге чувствительность по отношению к слабым сигналам ограничивается случайными флуктуациями показаний измерительного прибора. В таком случае единичного отсчета показаний прибора недостаточно для того, чтобы определить истинное значение напряжения, поскольку вполне возможно, что этот единичный отсчет может быть обусловлен флуктуациями. Тем не менее мы могли бы оценить значение напряжения, если бы первоначально осуществили серию экспериментов для установления нулевого показания и значения уровня флуктуаций. Предположим, что при отсутствии сигнала на входе мы получили ряд отсчетов N_i ($i=1, \dots, n$), а с известным входным сигналом — ряд отсчетов $S_j(v)$ ($j=1, \dots, n$). В таком случае легко вычислить средние значения:

$$\langle I \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_i; \quad (1.1a)$$

$$\langle S(v) \rangle = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n S_j(v) \quad (1.1б)$$

и средние квадраты отклонений:

$$\langle \Delta N^2 \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (N_i - \langle N \rangle)^2; \quad (1.2a)$$

$$\langle \Delta S^2(v) \rangle = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [S_j(v) - \langle S(v) \rangle]^2. \quad (1.2б)$$

Логично предположить, что с увеличением n каждое из этих средних значений стремится к конечному пределу, так что величина

$$\langle U(v) \rangle = \langle S(v) \rangle - \langle N \rangle \quad (1.3)$$

является результатом действия входного напряжения v . По этим отсчетам мы можем также оценить вероятность того, что единичный отсчет $S_j(v)$ отличается от $\langle S(v) \rangle$ более чем на $\langle \Delta S^2(v) \rangle^{1/2}$.

Обычно в физике принято считать, что флуктуирующие величины нормально распределены относительно их средних значений, и во многих случаях для этого предположения существуют убедительные теоретические доводы, основанные на центральной предельной теореме теории вероятностей. Во всяком случае, вероятность того, что любой единичный отсчет будет отличаться от $\langle S(v) \rangle$ более чем на несколько значений $\langle \Delta S^2(v) \rangle^{1/2}$, очень мала. Поэтому мы принимаем среднеквадратичный критерий вероятной ошибки, полагая, что единичный отсчет $S_j(v)$ дает $\langle S(v) \rangle \pm \langle \Delta S^2(v) \rangle^{1/2}$. Если взять m отсчетов, то сумма квадратов ошибок возрастет пропорционально m , в то время как квадрат суммы отсчетов будет возрастать пропорционально m^2 ; таким образом, относительная погрешность, усредненная по всем m отсчетам, уменьшится, т. е.

$$\langle S(v) \rangle_m = \langle S(v) \rangle \pm \left(\frac{\langle \Delta S^2(v) \rangle}{m} \right)^{1/2}. \quad (1.4)$$

Если после калибровки измерительного прибора использовать его для измерения неизвестного напряжения u и при единичном отсчете определить $S = \langle S(v) \rangle$, то можно утверждать, что

$$u = v \pm \delta v,$$

где

$$\frac{\delta v}{v} = \frac{\langle \Delta S^2(v) \rangle^{1/2}}{\langle S(v) \rangle - \langle N \rangle}. \quad (1.5)$$

Обратную величину этого отношения называют отношением сигнал/шум (S/N). Относительная точность при единичном отсчете показаний измерительного прибора определяется значением N/S .

Теория шумов располагает математическим аппаратом для вычисления таких результатов, как, например, (1.5), а также для выявления зависимости отношения сигнал/шум от параметров системы. Следует особо отметить, что здесь предлагается определять отношение S/N как отношение амплитуд, а не как отношение мощностей. Обратная практика, хотя она и часто встречается, приводит к путанице, особенно при рассмотрении малых изменений в сильных сигналах.

1.2. Статистические ансамбли

Шум представляет собой случайный статистический процесс, а характеризующие его факторы являются вероятностными. Эти факторы легче всего рассматривать на основе понятия о статистическом ансамбле, заимствованного из статистической механики. Если известно, что проводник с определенной длиной имеет сопро-

тивление 100 Ом при давлении 1 ат и температуре T , то мы можем считать это достаточно полным макроскопическим описанием проволочного резистора с сопротивлением 100 Ом. Однако этого описания недостаточно для точного определения состояния всех атомов и электронов в проводнике, и существует много отдельных микроскопических состояний этих частиц, соответствующих данному макроскопическому описанию. Для некоторых из этих состояний разница потенциалов между концами резистора отличается от нуля, причем для одной группы возможных состояний она может превышать некоторое значение Θ , тогда как для всех других состояний будет меньше чем Θ . Иначе говоря, если имеется ансамбль идентичных резисторов, находящихся в одинаковых условиях, то для некоторой части $\pi(\Theta)$ всех резисторов в ансамбле напряжение будет меньше Θ , а для остальной части $1-\pi(\Theta)$ оно будет больше Θ . Далее, в статистической механике и ее приложении к шумовым вычислениям допускается, что собственно статистический ансамбль содержит копию оригинала системы в каждом единственно возможном микроскопическом состоянии, соответствующем полному макроскопическому описанию. В соответствии с этим $\pi(\Theta)$ равно части всех возможных микроскопических состояний, которые дают напряжение меньше Θ . Среднее значение разности потенциалов между концами всех резисторов в ансамбле представляет собой среднее по ансамблю значение:

$$\langle \Theta \rangle = \int \Theta d\pi(\Theta), \quad (1.6a)$$

являющееся также ожидаемой величиной напряжения для резистора, произвольно выбранного из ансамбля. Другими словами, это есть ожидаемое напряжение на концах одного фактического резистора, имеющегося в нашем распоряжении. Средний квадрат флуктуации напряжения, т. е. мера разброса возможных значений напряжения относительно среднего, или, иначе, ожидаемого значения определяется формулой

$$\langle \Delta\Theta^2 \rangle = \int (\Theta - \langle \Theta \rangle)^2 d\pi(\Theta). \quad (1.6b)$$

Таким образом, мы ожидаем, что напряжение исследуемого резистора будет близко к $\langle \Theta \rangle$ и не отличается от этой величины более чем на несколько значений $\langle \Delta\Theta^2 \rangle^{1/2}$. При введении таких представлений подразумевается, что если физическая система известна, то функция распределения вероятностей $\pi(\Theta)$ или по крайней мере величины $\langle \Theta \rangle$ и $\langle \Delta\Theta^2 \rangle^{1/2}$ могут быть вычислены.

Можно распространить такой прием на более сложные системы. Если физическая структура электронного прибора и группа всех внешних параметров (например, напряжение питания, температура и входное напряжение), которые описывают его состояние, известны, то эти параметры характеризуют определенный статистический ансамбль, к которому принадлежит данный прибор. Такой ансамбль состоит из идентичных копий прибора, находящихся

в одинаковых макроскопических внешних условиях. Однако любой внешний параметр прибора, например его выходное напряжение, будет зависеть не только от всех этих заданных параметров, но также и от точного микроскопического внутреннего состояния прибора, и каждая его копия в ансамбле даст различные результаты на выходе. Если часть $\pi(\Theta)$ элементов ансамбля соответствует результату, меньшему чем Θ , то ожидаемый выходной сигнал прибора будет средним по ансамблю значением (1.6а). Флуктуации на выходе прибора определяются формулой (1.6б). Применяя вероятностное представление о шумах к средним по ансамблю значениям, мы тем самым устанавливаем связь с теоретическими положениями статистической механики и термодинамики и в итоге в большинстве случаев можем получить необходимые результаты на основе простых физических соображений. Так, например, как утверждается в гл. 4, ожидаемое значение разности потенциалов между концами резистора R в тепловом равновесии при температуре T равно нулю. Однако если для измерения напряжения используется бесшумный прибор с полосой пропускания $\delta\nu$, то средний квадрат флуктуаций относительно средней величины равен $4RkT\delta\nu$, где $k=1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана. Иначе говоря, если измерять напряжение при различных интервалах времени, то среднее этих измерений будет равно нулю, а среднее квадратов измерений — $4RkT\delta\nu$.

В практической радиоэлектронике мы истолковали бы это положение как означающее, что сопротивление дает флуктуирующую ЭДС с указанным выше значением среднего квадрата.

1.3. Средние значения

Теоретически полученные средние по ансамблю значения применимы ко многим одновременно наблюдаемым системам. Серия наблюдений, выполненных на одной системе в различные промежуточные времена, эквивалентна результатам для ансамбля только в том случае, если эти промежутки эквивалентны, т. е. определены одинаково по отношению к любым известным параметрам системы и ее входному сигналу и если они разделены настолько, что вся «память» структуры системы уничтожается в промежутках между измерениями. Мы молчаливо допускали это при рассмотрении материала разд. 1.1. Позже рассмотрим примеры, подтверждающие это предположение.

Во всяком случае, средние по ансамблю значения, которые могут быть вычислены теоретически, должны отличаться от средних значений по времени, относящихся к непрерывному наблюдению системы. Мы всегда будем обозначать средние по ансамблю значения знаком $\langle \rangle$, а временные средние значения — чертой сверху; например,

$$\bar{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T I(t) dt \quad (1.7a)$$

Нам потребуются также средние значения за конечный промежуток времени от t до $t+\tau$, которые определяются формулой

$$\bar{I}^\tau = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} I(t) dt. \quad (1.76)$$

Во многих случаях единичное наблюдение выходного сигнала системы с конечной полосой пропускания или конечным временным разрешением представляет собой среднее значение, такое как \bar{I}^τ , и поэтому нас будут интересовать смешанные средние значения, например

$$\langle \bar{I}^\tau \rangle = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} I_j(t) dt, \quad (1.8)$$

где $I_j(t)$ является током в j -й системе ансамбля в момент времени t .

Существенное различие между усреднениями по ансамблю и по времени наиболее отчетливо видно при рассмотрении монохроматического сигнала $I_0 \cos \omega t$, для которого $\langle I(t) \rangle = I_0 \cos \omega t$ и $\bar{I} = 0$, в то время как

$$\bar{I}^\tau = [\sin \omega(t + \tau) - \sin \omega t] I_0 / \omega \tau.$$

1.4. Стационарные процессы

Стационарный процесс подчиняется статистическим законам и протекает в условиях, которые не изменяются со временем. Тогда все промежутки времени эквивалентны и ряд наблюдений, зафиксированных в моменты времени $t_1, \dots, t_j, \dots, t_n$, образует ансамбль при условии, что для всех i и j имеем $|t_i - t_j| > \tau$, где τ — более длительное время по сравнению с любым характеристическим временем наблюдаемых процесса или системы. Таким образом, если $\Theta(t)$ представляет собой эффект от стационарного процесса, то среднее значение $\bar{\Theta}$ можно записать в виде

$$\bar{\Theta} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \Theta_k(t_k + t') \right] dt',$$

где моменты времени t_k разделены интервалом τ . Каждый член в скобках представляет собой среднее по ансамблю значение величины Θ и, так как процесс стационарный, не зависит от времени. Следовательно,

$$\bar{\Theta} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \langle \Theta \rangle dt' = \langle \Theta \rangle. \quad (1.9)$$

Таким образом, для стационарного процесса усреднения по ансамблю и по времени эквивалентны¹.

Три основных вида шума, с которыми приходится сталкиваться в радиоэлектронной аппаратуре, — шум Джонсона (тепловой), дробовой шум и фликкер-шум, относятся к стационарным процессам².

1.5. Наблюдение случайных величин

Не существует мгновенных наблюдений физических величин: или мы открыто и сознательно усредняем, например отсчет показаний измерительного прибора за определенное время, или используем систему с конечной постоянной времени. В большинстве случаев мы делаем и то и другое. К этому добавляются и субъективные факторы, такие как инерционность зрительного восприятия и др. Для правильного понимания результатов теории шумов необходимо иметь такое определение единичного наблюдения, которое, насколько это возможно, исключает все неопределенные психологические и физиологические факторы. Поэтому будем считать единичным такое наблюдение, которое произведено за более короткое время по сравнению с истинным временем системы, т. е. временем, требуемым для заметного изменения выходного сигнала. Визуальный отсчет показаний прибора, постоянная времени которого составляет несколько секунд, будет единичным наблюдением, как и фотография изображения на экране электронно-лучевой трубки, сделанная в короткий промежуток времени по сравнению с периодом временной развертки (она будет воспринята наблюдателем лишь как одиночная световая точка). С другой стороны, визуальное наблюдение экрана, охватывающее несколько полных ходов развертки, или отсчет быстродействующего прибора, не будет единичным наблюдением.

Вычисления шумов дают среднее значение и статистические флуктуации единичных отсчетов, определенных указанным образом: В некоторых случаях, особенно когда индикатором является измерительный прибор, инерционность всей системы определяется прибором и может быть точно рассчитана. В других случаях, например с электронно-лучевой трубкой или звуковым индикатором, постоянная времени частично определяется свойствами физической системы, находящейся перед индикатором, самим индикатором и частично исследователем. Для того чтобы не рассматривать неточно определенные свойства индикатора и исследователя, условимся, что сигнал и шум, которые должны быть вычислены, действуют на выходе системы, непосредственно предшествующем индикато-

¹ Случайный процесс, для которого усреднения по ансамблю и по времени эквивалентны, называется эргодическим. Не всякий стационарный процесс является эргодическим. Примером этому может служить гармоническое колебание со случайной амплитудой и случайной фазой. — *Прим. ред.*

² Строго говоря, фликкер-шум можно считать стационарным процессом лишь при определенных допущениях. — *Прим. ред.*

ру, т. е. на зажимах измерительного прибора, отклоняющих пластинах или катушке громкоговорителя. Тем самым мы отделим свойства физического прибора от качеств исследователя.

1.6. Периодические сигналы

До сих пор мы рассматривали только те системы, ожидаемый выходной сигнал которых неизменен, и при этом можно было по следовательно использовать статистический подход. Если же входной сигнал изменяется во времени, то и ожидаемый выходной сигнал тоже будет изменяться, а отношение сигнал/шум не будет больше неизменным. Это можно считать либо как основную трудность, либо просто как особенность. Отсюда следует, что если $S(t)$ является выходным сигналом, то его можно характеризовать среднеквадратичным значением и найти отношение сигнал/шум по формуле

$$\frac{S}{N} = \left(\frac{\overline{S^2(t)}}{\langle \Delta U^2 \rangle} \right)^{1/2}, \quad (1.10)$$

где $\langle \Delta U^2 \rangle$ — ранее определенная статистическая флуктуация выходного сигнала. Соотношение (1.10) определяет ожидаемое отношение сигнал/шум при единичном измерении, но усредненное по всем возможным фазам сигнала. С этой точки зрения выходной сигнал представляется как непрерывный процесс, значение которого в любой момент времени представляет интерес и в принципе измеримо. Трудности возникают в том случае, когда мы сопоставляем ряд измерений и, пользуясь методом Фурье, пытаемся выделить различные частотные составляющие выходного сигнала, определить их амплитуды и вероятные ошибки. Это выполнимо только при условии, что измерения многочисленны и охватывают продолжительное время. При этом мы не должны больше заниматься единичным мгновенным измерением. Эта проблема более подробно рассматривается в разд. 3.4.

Однако в определенном смысле эта проблема в данном случае не относится к делу, так как на практике чаще всего наблюдаются стационарные выходные сигналы. Одно из основных исключений представляет звуковой сигнал, который будет рассмотрен отдельно. Таким образом, если на выходе системы имеется сигнал $S(t)$ с составляющими на частоте f_0 и ее гармониках mf_0 , то мы почти неизменно представим его на осциллографе с временной разверткой, имеющей частоту f_0 . Результирующий выходной сигнал представляется статическим изображением на экране осциллографа, и, если форма сигнала известна, то только одна величина — амплитуда — необходима для его характеристики. Эта величина может быть получена при правильном единичном измерении, выполненном за более короткий промежуток времени по сравнению с постоянной времени системы относительно изменения амплитуды сигнала. Таким образом, статистические положения, справедливые для сигналов постоянного тока, применимы и в этом случае. Де-

тали вычисления ожидаемого значения выходного сигнала и его флуктуаций, конечно, различны (см. разд. 3.5).

Уравнение (1.10) без извлечения квадратного корня совпадает с определением, использованным в большинстве работ по этому вопросу. Мы остановили свой выбор на отношении S/N , основываясь на амплитудных значениях, вместо того, чтобы использовать более употребительное отношение мощностей, так как последнее не соответствует сколь-нибудь простому критерию наблюдаемости и ведет к путанице при рассмотрении способности к обнаружению малых изменений в больших сигналах.

Звуковые выходные сигналы связаны с другой проблемой. При сложных сигналах, таких как музыка, ухо способно реагировать на среднюю мощность сигнала и воспринимать шум как фон. В таком случае уравнение (1.10) дает непосредственный критерий отношения сигнал/шум. Вместе с тем ухо может распознать очень слабые звуки одной определенной частоты на фоне значительного шума и эффективно действует как фильтр (см. разд. 3.4). В любом случае это проблема скорее физиологическая, чем физическая, и мы не будем в дальнейшем обсуждать ее.

1.7. Шумовые вычисления

Основная цель шумовых вычислений в электронных системах — раскрыть, какой наименьший сигнал можно обнаружить или какова точность, с которой можно измерить большой сигнал, а также показать, как результат зависит от параметров системы.

В последующих главах будет показано, что если система воспринимает сигналы в полосе частот Δf от резистивного источника при температуре T , то наименьшая мощность сигнала, которая может быть обнаружена при наиболее благоприятных обстоятельствах, определяется по формуле

$$P_{\text{мин}} = kT\Delta f, \quad (1.11a)$$

где k — постоянная Больцмана. При этом если сопротивление источника равно R , то для наименьшего изменения δU напряжения на зажимах разомкнутой цепи получим

$$\delta U = (4RkT\Delta f)^{1/2}. \quad (1.11b)$$

Из этого следует, что наименьшее определяемое изменение δP при большом уровне мощности P составляет

$$\delta P = 2(PkT\Delta f)^{1/2}. \quad (1.11в)$$

Такая чувствительность не достигается ни в одной из реальных систем, и поэтому введем критерий качества системы — коэффициент шума F . Тогда имеем

$$P_{\text{мин}} = FkT\Delta f; \quad (1.12a)$$

$$\delta U = (4RFkT\Delta f)^{1/2}; \quad (1.12б)$$

$$\delta P = 2(PFkT\Delta f)^{1/2}. \quad (1.12в)$$

Во всех системах, кроме простейших, полоса пропускания всей системы Δf не равна полосе пропускания составных частей системы. Например, как будет показано в гл. 10, если имеется высокочастотный усилитель с полосой пропускания Δf_1 , за которым следуют детектор и усилитель низкой частоты с полосой пропускания Δf_2 , намного меньшей чем Δf_1 , то соответствующая величина Δf в уравнении (1.11a) равна

$$\Delta f = (2\Delta f_1 \Delta f_2)^{1/2}. \quad (1.13)$$

Полоса Δf_2 определяет максимально допустимую скорость изменения амплитуды сигнала, тогда как полоса Δf_1 — допустимый интервал изменения несущей частоты.

В соотношениях (1.11) и (1.12) мы предположили, что выходной сигнал может быть обнаружен, когда соответствующее изменение выходного сигнала равно уровню шума и, следовательно, эти соотношения связаны с рассмотрением вопроса об отношении сигнал/шум. Мы понимаем, что можно определить чувствительность любой системы к сигналам определенных вида и значения, задавая только двумя параметрами для системы F и Δf , и вычисления шумов должны быть нацелены на то, чтобы определить эти два параметра. Они здесь не объединены в один параметр $F\Delta f$, только потому что во многих случаях F и Δf имеют простой физический смысл. Например, почти в любом случае значение F определяется шумом первых каскадов системы и является мерой ее качества, в то время как значение Δf связано со структурой системы. В приведенном выше примере Δf определяется параметрами системы, состоящей из разделенных детектором усилителей с полосой пропускания Δf_1 и $\Delta f_2 \ll \Delta f_1$. Коэффициент шума F такой системы зависит от тщательности разработки входного усилителя.

ГЛАВА 2

ДРОБОВОЙ ШУМ

Флуктуации тока насыщенного диода¹ представляют собой один из простейших примеров шумового тока, и поэтому, несмотря на их относительно малую практическую значимость, воспользуемся этими представлениями для введения в теорию шумов.

Если цепь содержит элемент с потенциальным барьером, например выпрямительный p — n -переход в транзисторе или поверхность катода в электровакуумной лампе, то ток в этой цепи определяется теми электронами, которые имеют достаточную тепловую энергию для преодоления потенциального барьера. Поэтому флуктуации тока в известной мере определяются обычными тепловыми

¹ В насыщенном диоде анодный ток ограничен температурой катода. — *Прим. ред.*

флуктуациями распределения электронов по положениям и энергиям. Во многих случаях простейшие свойства шума этого вида — дробового шума — не проявляются из-за пространственного заряда и времени пролета электронов, но в насыщенном диоде при малом межэлектродном расстоянии и достаточно высоком анодном напряжении этими эффектами можно пренебречь. Каждый электрон, испускаемый катодом, сразу же притягивается к аноду и вносит свой вклад в ток во внешней цепи.

2.1. Распределение Пуассона

При достаточно коротком интервале времени δt вероятность того, что электрон вылетает из катода за интервал δt , невелика и пропорциональна δt :

$$p = v\delta t. \quad (2.1)$$

Вероятность того, что два или более электронов вылетят за интервал времени δt , пренебрежимо мала. Таким образом, если возьмем конечный промежуток времени τ и разделим его на очень большое число равных интервалов δt , так что $\tau = N\delta t$, то вероятность вылета m электронов в m упомянутых интервалах δt составит $p^m(1-p)^{N-m}$. Эти интервалы могут быть выбраны различными способами, число которых равно C_m^N . Тогда вероятность того, что m электронов испускается за время τ , будет определяться выражением

$$P(m, \tau) = C_m^N p^m q^{N-m}, \quad (2.2)$$

где принято $q = 1 - p$.

В ансамбле интервалов среднее число испускаемых катодом электронов составляет

$$\langle m \rangle = \sum_{m=0}^N m P(m, \tau). \quad (2.3)$$

а средний квадрат этого числа равен

$$\langle m^2 \rangle = \sum m^2 P(m, \tau). \quad (2.4)$$

Эти суммы легко вычисляются, например:

$$\langle m \rangle = \sum C_m^N m p^m q^{N-m} = p \frac{\partial}{\partial p} (p + q)^N = Np (p + q)^{N-1} = Np \quad (2.5)$$

и

$$\langle m^2 \rangle = N^2 p^2 + Np - Np^2. \quad (2.6)$$

Если взять предел при $N \rightarrow \infty$, то $p \rightarrow 0$, а значение Np остается конечным. В этом случае последним членом в (2.6) можно пренебречь, и тогда

$$\langle \Delta m^2 \rangle \equiv \langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2 = Np = \langle m \rangle. \quad (2.7)$$

Это хорошо известный результат для флуктуаций в представлении распределения Пуассона.

2.2. Приложение к дробовому шуму

На рис. 2.1 показана цепь, с помощью которой в принципе возможно проверить соотношение (2.7) и определить значение заряда электрона.

В течение времени τ переключатель S подключен к контакту A и ток диода заряжает конденсатор C . В конце этого интервала переключатель S подключается к контакту B и заряд конденсатора измеряется баллистическим гальванометром. Если заряд элек-

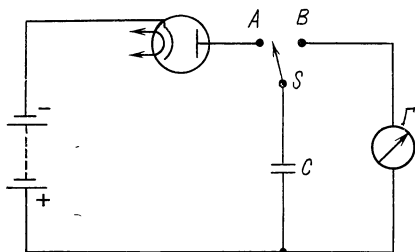


Рис. 2.1. Измерение дробового шума с помощью баллистического гальванометра

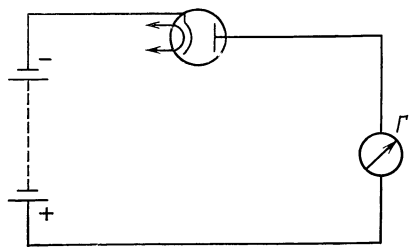


Рис. 2.2. Измерение дробового шума с помощью критически демпфированного гальванометра

трона равен e , то измеренный заряд конденсатора составит $Q = em$, а для серии измерений $\langle Q \rangle = e \langle m \rangle$, $\langle \Delta Q^2 \rangle = e^2 \langle \Delta m^2 \rangle = e^2 \langle m \rangle = e \langle Q \rangle$.

Можно рассматривать результат каждого измерения как средний ток за время τ

$$\bar{I}^\tau = Q/\tau = em/\tau.$$

При этом

$$\langle (\Delta I^\tau)^2 \rangle = \frac{e}{\tau} \langle \bar{I}^\tau \rangle = \frac{e}{\tau} \bar{I}. \quad (2.8)$$

Таким образом, флуктуации при каждом измерении тока I уменьшаются с ростом τ .

2.3. Теорема Кэмпбелла

Рассмотрим другую схему, приведенную на рис. 2.2, в которой ток I непрерывно регистрируется критически демпфированным гальванометром с периодом τ и отклонением $\Theta = kI$. Теорема Кэмпбелла [6] утверждает, что если отклик измерительного прибора, реагирующего на достаточно короткий импульс заряда q , в момент $t=0$ характеризуется отклонением $\Theta(t) = qF(t)$, то среднее значение отклика на случайную серию импульсов, следующих со средней

скоростью v , составляет

$$\langle \theta \rangle = vq \int_{-\infty}^{\infty} F(t) dt. \quad (2.9a)$$

При этом средний квадрат флуктуаций равен

$$\langle \Delta \theta^2 \rangle = vq^2 \int_{-\infty}^{\infty} F^2(t) dt. \quad (2.9b)$$

Выражение для отклика критически демпфированного гальванометра на импульс заряда q хорошо известно:

$$\Theta(t) = qk \left(\frac{2\pi}{\tau} \right)^2 t \exp\left(-\frac{2\pi t}{\tau}\right) \text{ для } t \geq 0.$$

Импульсы тока дробового шума имеют величину $q=e$ и следуют со средней скоростью $v=I_0/e$, где I_0 — постоянный ток. Таким образом, теорема Кэмпбелла дает

$$\langle \theta \rangle = I_0 \int_0^{\infty} k \left(\frac{2\pi}{\tau} \right)^2 t \exp\left(-\frac{2\pi t}{\tau}\right) dt = kI_0$$

и

$$\langle \Delta \theta^2 \rangle = eI_0 \int_0^{\infty} k^2 \left(\frac{2\pi}{\tau} \right)^4 t^2 \exp\left(-\frac{4\pi t}{\tau}\right) dt = \frac{\pi k^2 e I_0}{2\tau}. \quad (2.10)$$

Первый результат не нуждается в комментариях, а второй показывает, что флуктуации тока характеризуются средним квадратом:

$$\langle \Delta I^2 \rangle = \frac{\pi e I_0}{2\tau}. \quad (2.11)$$

Если сравнить это равенство с (2.8), то можно сделать вывод, что единичный мгновенный отсчет показаний гальванометра эквивалентен среднему току за предшествующий интервал длительностью $2\tau/\pi$.

Для доказательства теоремы Кэмпбелла рассмотрим ансамбль систем за продолжительный интервал времени T . В течение этого интервала единичное измерение Θ производится для каждой системы в определенный момент времени t , одинаковый для всех систем в ансамбле. Выберем из этого ансамбля подансамбль, состоящий из тех систем, в которых за время T поступает m импульсов. Если взять в одном из интервалов этого подансамбля моменты поступления импульсов $t_1, \dots, t_k, \dots, t_m$, то для отклика в момент времени t получим

$$\Theta_m(t) = q \sum_{k=1}^m F(t - t_k). \quad (2.12a)$$

Время поступления импульсов t_k случайно распределено по всему интервалу времени T . Поэтому вероятность того, что t_k находится в промежутке dt' в момент времени t'_1 , составляет dt'/T . Таким образом, усредняя по подансамблю величину $\Theta_m(t)$, получим

$$\langle \Theta(t) \rangle_m = q \int_0^T \frac{dt_1}{T} \dots \int_0^T \frac{dt_m}{T} \sum_{k=1}^m F(t - t_k).$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} \langle \Theta(t) \rangle_m &= q \sum_{k=1}^m \int_0^T F(t - t_k) \frac{dt_k}{T} = qm \int_0^T F(t - t') \frac{dt'}{t} = \\ &= qm \int_{t-T}^t F(t') \frac{dt'}{T}. \end{aligned} \quad (2.126)$$

Допустим, что значение интервала T больше по сравнению с интервалом времени Δ , в течение которого наблюдается эффект $F(t)$ от одиночного импульса. Тогда для всех значений t в интервале T , за исключением части $2\Delta/T$, будем иметь $\Delta < t < T - \Delta$ и без существенной ошибки можно заменить пределы интегрирования в выражении (2.126) на $\pm\infty$:

$$\langle \Theta(t) \rangle_m = \frac{qm}{T} \int_{-\infty}^{\infty} F(t') dt'. \quad (2.13a)$$

Проведем теперь усреднение по всем значениям m в ансамбле, имея в виду, что $\nu = \langle m \rangle / \tau$, и получим первую часть теоремы Кэмпбелла — выражение (2.9a).

Вторая часть теоремы доказывается вычислением

$$\Theta_m^2(t) = q^2 \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m F(t - t_k) F(t - t_l).$$

Среднее по подансамблю равно

$$\langle \Theta^2(t) \rangle_m = q^2 \sum \sum \int \frac{dt_1}{T} \dots \int \frac{dt_m}{T} F(t - t_k) F(t - t_l).$$

В этой сумме имеется m членов с $k=l$ и $m(m-1)$ членов с $k \neq l$, поэтому

$$\langle \Theta^2(t) \rangle_m = \frac{q^2 m}{T} \int_0^T F^2(t - t') dt' + \frac{q^2 m(m-1)}{T^2} \left[\int_0^T F(t - t') dt \right]^2. \quad (2.136)$$

Запишем это выражение с другими пределами интегрирования (как это было сделано выше):

$$\langle \theta^2(t) \rangle_m = \frac{q^2 m}{T} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(t) dt + \frac{q^2 m(m-1)}{T^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} F(t) dt \right]^2. \quad (2.14)$$

Теперь проведем усреднение по ансамблю для всех m , используя соотношение (2.7): $\langle m^2 \rangle = \langle m \rangle + \langle m \rangle^2$. В результате получим

$$\langle \theta^2 \rangle = q^2 \nu \int_{-\infty}^{\infty} F^2(t) dt + \langle \theta \rangle^2. \quad (2.15)$$

С учетом тождества $\langle \Delta \theta^2 \rangle = \langle \theta^2 \rangle - \langle \theta \rangle^2$ это дает вторую часть теоремы Кэмпбелла [см. выражение (2.9б)].

Теорема Кэмпбелла определяет флуктуации ансамбля мгновенных отсчетов какого-либо измерительного прибора, чувствительного к дробовому шуму, если этот прибор может быть представлен импульсной характеристикой вида $\Theta(t) = qF(t)$. Как мы видели, это приводит к относительно простому описанию гальванометров.

2.4. Частотная характеристика

Для большинства радиоэлектронных систем отклик на входное воздействие очень легко измерить и удобно выразить через их частотные характеристики. Например, если входным сигналом будет гармонический ток $J(f) \exp(2\pi jft)$, то выходной сигнал определяется выражением

$$\Theta(f) \exp(2\pi jft) = G(f) J(f) \exp(2\pi jft).$$

Хорошо известно, что импульсная характеристика $F(t)$ связана с $G(f)$. Пусть, например,

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} J(f) \exp(2\pi jft) dt$$

представляет собой произвольный входной ток. Тогда выражение для выходного тока можно записать в виде

$$\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t - t_1) I(t_1) dt_1$$

или

$$\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) J(f) \exp(2\pi jft) df.$$

Если теперь определить $J(f)$ как

$$J(f) = \int_{-\infty}^{\infty} I(t_1) \exp(-2\pi jft_1) dt_1,$$

то получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t - t_1) I(t_1) dt_1 = \int_{-\infty}^{\infty} I(t_1) \int_{-\infty}^{\infty} G(f) \exp [2\pi j f (t - t_1)] df dt_1.$$

Учитывая, что $I(t_1)$ — величина произвольная, получим

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) \exp (2\pi j f t) df. \quad (2.16)$$

Таким образом, $F(t)$ является преобразованием Фурье величины $G(f)$, и тогда можно использовать теорему Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) G^*(f) df.$$

Далее, $F(t)$ представляет собой действительную величину, и поэтому $G^*(f) = G(-f)$, а $G(f) G^*(f)$ является четной функцией f . Тогда можно избежать использования отрицательных частот и записать

$$\int_{-\infty}^{\infty} F^2(t) dt = 2 \int_0^{\infty} G(f) G^*(f) df. \quad (2.17)$$

Это эквивалентно общепринятому в теории цепей представлению функции $\cos \omega t$ посредством $\text{Re}[\exp(j\omega t)]$, а не

$$\frac{1}{2} (\exp(j\omega t) + \exp(-j\omega t)).$$

Теорему Кэмпбелла можно записать в виде

$$\langle \Delta \theta^2 \rangle = 2\nu q^2 \int_{-\infty}^{\infty} G(f) G^*(f) df. \quad (2.18)$$

В такой форме она может быть использована при рассмотрении дробового шума в обычных радиоэлектронных цепях, содержащих индуктивности и емкости.

Таким образом, если на входе усилителя с коэффициентом усиления по току $G(f)$ имеется ток насыщения со средним значением I_0 , то флуктуации на выходе определяются как

$$\langle \Delta \theta^2 \rangle = 2eI_0 \int_0^{\infty} GG^* df \quad (2.19)$$

2.5. Дробовой шум в резонансном усилителе

Для иллюстрации полученного в предыдущем разделе результата рассмотрим устройство, схема которого приведена на рис. 2.3. Если приложенное к усилителю входное напряжение U вызывает откло-

нение луча на экране осциллографа $\Theta = KU$ см, то среднее значение отсчета Θ равно нулю, а коэффициент усиления на частоте f будет равен

$$\frac{\Theta(f)}{J(f)} = G(f) = \frac{KR}{1 + jQ(f/f_0 - f_0/f)}, \quad (2.20)$$

где $Q = 2\pi f_0 CR$ и $(2\pi f_0)^2 LC = 1$. Тогда получим

$$\int_0^{\infty} GG^* df = \frac{\pi K^2 R^2 f_0}{2Q},$$

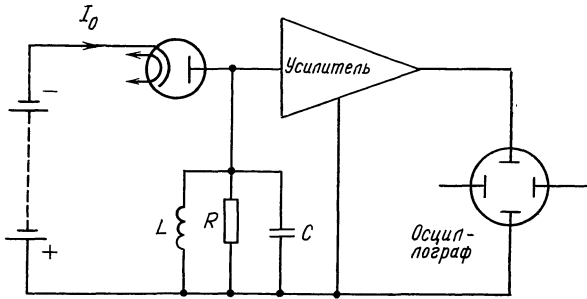


Рис. 2.3. Схема для иллюстрации воздействия дробового шума на резонансную цепь

и поэтому отдельные отсчеты Θ будут флуктуировать около нуля со средним квадратом отклонений

$$\langle \Delta\Theta^2 \rangle = \pi e I_0 R^2 K^2 \frac{f_0}{Q}. \quad (2.21)$$

Если на цепь воздействует сигнал в виде тока $J(f)$, то его отклик будет определяться выражением (2.20). Средний квадрат (по времени) величины $J(f)$ составляет $(1/2)J(f)J^*(f)$, и отношение сигнал/шум на резонансной частоте f_0 равно

$$\frac{S}{N} = \left(\frac{JJ^*Q}{2\pi e I_0 f_0} \right)^{1/2}. \quad (2.22)$$

Отношение сигнал/шум для такого же сигнала на других частотах будет, конечно, меньше.

Вид выражения (2.19) наводит на мысль, что можно характеризовать ток дробового шума спектром флуктуаций, значение среднего квадрата которых связано с интервалом частот df соотношением

$$dI_n^2 = 2e I_0 df. \quad (2.23)$$

Если сделать предположение, что флуктуации с различными частотами являются некоррелированными, то можно представить отношение (2.22) в виде

$$\frac{S}{N} = \left(\frac{\frac{1}{2} J J^*}{2eI_0 \Delta f_n} \right)^{1/2}, \quad (2.24)$$

где эффективная шумовая полоса пропускания системы определена выражением

$$\Delta f_n = \frac{\int_0^\infty G G^* df}{G(f_0) G^*(f_0)} = \frac{\pi f_0}{2Q}. \quad (2.25)$$

Этот результат утверждает, что шум на выходе системы эквивалентен флуктуирующему току со средним квадратом $2eI_0 \Delta f_n$ на входе.

Это общее представление действия шума, выраженное в терминах спектральной плотности $2eI_0$ источника шума и эффективной полосы пропускания системы. Общность такого представления объясняется тем, что многие системы имеют строго определенную полосу пропускания Δf , в пределах которой усиление составляет $G(f) = G_0$ и фактически равно нулю за ее пределами. В этих случаях эффективная шумовая полоса пропускания системы совпадает с полосой пропускания сигнала.

Для схемы на рис. 2.3 полоса пропускания полезного сигнала обычно определяется по уровню половинной мощности. Тогда полоса пропускания сигнала и шумовая полоса связаны соотношением

$$\Delta f_s = \frac{2}{\pi} \Delta f_n. \quad (2.26)$$

Можно также отметить, что вблизи границ полосы пропускания сигнала отношение сигнал/шум будет отличаться в $1/\sqrt{2}$ раз от значения, определяемого с помощью (2.24).

2.6. Квадратичное детектирование дробового шума

Рассмотрим, что произойдет, если заменить осциллограф (см. рис. 2.3) квадратичным измерительным прибором, отклик которого на напряжение U , поданное на вход усилителя, равен $\Theta = \alpha U^2$. При этом средний отклик прибора будет равен $\langle \Theta \rangle = \alpha \langle U^2 \rangle$, и, как следует из разд. 2.5:

$$\langle \Delta U^2 \rangle = 2eI_0 R^2 \Delta f_n.$$

Таким образом,

$$\langle \Theta \rangle = \alpha 2eI_0 R^2 \Delta f_n,$$

так что средний отсчет показаний прибора пропорционален среднему квадрату флуктуаций в полосе частот Δf_n .

Если постоянная времени прибора равна τ , то каждый отсчет прибора усредняется по всем предыдущим τ секунд. За τ секунд можно сделать $\tau\Delta f$ независимых отсчетов выходного сигнала системы, имеющей постоянную времени $1/\Delta f$. Таким образом, каждый отсчет соответствует значению $(\tau\Delta f)$, усредненному по количеству независимых отсчетов шума. Поэтому средний квадрат флуктуаций равен среднему квадрату выходной величины, уменьшенному в $\tau\Delta f$ раз:

$$\langle \Delta\theta^2 \rangle \sim \frac{\langle \theta \rangle^2}{\tau\Delta f}.$$

Таким образом, можно получить значение $\langle \theta \rangle$ с относительной погрешностью $(\tau\Delta f)^{-1/2}$ и поэтому для измерения флуктуаций дробового шума необходимо выбирать прибор с большой постоянной времени и широкополосным усилителем на входе. В гл. 20 вернемся к этому вопросу и рассмотрим его более детально.

2.7. Гауссов шум

Для большинства целей значение среднего квадрата шума служит полезной мерой его интенсивности, но иногда необходимо знать статистическое распределение шума, т. е. вероятность или отрезки времени, за которые шум превышает некоторое определенное значение. Если мы, например, знаем, что ожидаемое среднеквадратичное значение шума на выходе усилителя равно $\langle \Delta U^2 \rangle^{1/2}$, то нам хотелось бы также знать, насколько больше по сравнению с $\langle \Delta U^2 \rangle^{1/2}$ необходимо сделать динамический диапазон усилителя, чтобы усилитель не перегружался выбросами шума. Можно показать [32], что два наиболее схожих типа шумов в радиоэлектронных системах, т. е. дробовой и тепловой шумов (см. гл. 4), характеризуются гауссовым распределением. Таким образом, в любой линейной системе, в которой шум порождается этими процессами, вероятность dP (или отрезок времени) того, что значение напряжения шума со средним квадратом $\langle \Delta U^2 \rangle$ находится в интервале от U до $U + \Delta U$, равна

$$dP = \left(\frac{1}{2\pi\langle \Delta U^2 \rangle} \right)^{1/2} \cdot \exp \left(-\frac{U^2}{2\langle \Delta U^2 \rangle} \right) dU. \quad (2.27)$$

Конечно, этот результат неприменим для нелинейных систем. Например, если выходной шум линейной системы пропустить через устройство с квадратичной характеристикой, то результирующий выходной сигнал будет иметь заметно выраженные шумовые выбросы и ослабленные по величине небольшие флуктуации.

Мы не будем пытаться приводить здесь довольно трудное доказательство выражения (2.27), а остановимся лишь на вытекающих из него следствиях. Вероятность того, что значение напряжения шумов превышает U , равна

$$P_{>U} = \int_{-\infty}^{-U} \frac{dP}{dU} dU + \int_U^{\infty} \frac{dP}{dU} dU = 2 \int_U^{\infty} \frac{dP}{dU} dU. \quad (2.28)$$

Если представить U через среднеквадратичное значение шума, то

$$U = x \langle \Delta U^2 \rangle^{1/2}, \quad (2.29)$$

и

$$P_{>U} = (2/\pi)^{1/2} \int_x^\infty \exp(-u^2/2) du = \operatorname{erfc}(x/\sqrt{2}), \quad (2.30)$$

где erfc — дополнительный интеграл вероятности. Приведем некоторые значения $P_{>U}$:

Мы видим, что хотя значение величины шумов превышает

x	0	0,68	1	2	4	10
P	1	0,5	0,32	0,045	$6 \cdot 10^{-5}$	10^{-23}

$\langle \Delta U^2 \rangle^{1/2}$ в течение почти трети полного времени наблюдения, оно очень редко бывает больше чем $4 \langle \Delta U^2 \rangle^{1/2}$ и фактически никогда (много меньше пикосекунды за столетие) не превышает $10 \langle \Delta U^2 \rangle^{1/2}$. Поэтому если усилитель рассчитан на 10-кратную перегрузку, то шум с ожидаемым среднеквадратичным значением фактически не может перегрузить усилитель своими выбросами.

Очень быстрое уменьшение $P_{>U}$ с возрастанием U означает, что в том случае, когда сигнал заметно превышает среднеквадратичное значение шума, он может быть обнаружен с абсолютной достоверностью. Таким образом, если выходной сигнал усилителя внезапно вырос в 4 раза по сравнению со среднеквадратичным значением уровня шума, то вероятность того, что это увеличение произошло только из-за шума, равна 10^{-4} .

ГЛАВА 3

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР

В предыдущей главе мы показали, что в системе с коэффициентом усиления $G(f)$ флуктуации на ее выходе, соответствующие дробовому шуму на входе, могут быть выражены как

$$\langle \Delta \theta^2 \rangle = \int_0^\infty G(f) G^*(f) \omega(f) df, \quad (3.1)$$

где $\omega(f) = 2eI_0$. Это соответствует непрерывному спектральному распределению флуктуаций дробового шума на входе системы. Поскольку в этом случае величина $\omega(f)$ численно равна значению мощности, рассеянной в сопротивлении 1 Ом спектральными составляющими флуктуирующего тока, распределенными в частотном интервале 1 Гц вблизи частоты f , то ее называют спектральной плотностью мощности или энергетическим спектром флуктуаций. Эти названия сохраняются даже в том случае, когда шумовой процесс не связан с током. Рассмотрим, как обобщенные флуктуирующие величины могут быть описаны в этих терминах.

3.1. Определение

Пусть $I(t)$ является любой зависимой от времени когерентной или случайной величиной, определяемой или наблюдаемой в течение всего периода T . Эта величина может быть представлена рядом Фурье с основным периодом T :

$$I(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \exp\left(j \frac{2\pi n t}{T}\right), \quad (3.2)$$

где $I(t)$ — действительная величина, поэтому $x_n^* = x_{-n}$. Если, кроме того, $I(t)$ представляет собой стационарный случайный процесс, то все средние значения величин $I(t)$, $I^2(t)$ и т. п. должны быть независимы от t . Пусть

$$\langle I(t) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle x_n \rangle \exp\left(j \frac{2\pi n t}{T}\right), \quad (3.3)$$

и если левая часть этого выражения должна быть независима от t , то средние значения $\langle x_n \rangle$ коэффициентов Фурье, за исключением $\langle x_0 \rangle$, должны обращаться в нуль. Таким образом,

$$\langle I(t) \rangle = \langle x_0 \rangle. \quad (3.4)$$

Кроме того,

$$\langle I^2(t) \rangle = \sum_m \sum_n \langle x_m x_n^* \rangle \exp\left[j \frac{2\pi(m-n)t}{T}\right], \quad (3.5)$$

и если левая часть этого выражения должна быть независима от t , то все средние $\langle x_m x_n^* \rangle$ должны быть равны нулю, за исключением коэффициента с $m=n$. Следовательно,

$$\langle I^2(t) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle x_n x_n^* \rangle = \langle x_0^2 \rangle + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n x_n^* \rangle. \quad (3.6)$$

Коэффициент x_0 является усредненной по всему периоду T величиной $I(t)$. Если взять T достаточно большим, то во всякой разумной ситуации можно предположить, что x_0 имеет одно и то же значение для всех систем в статистическом ансамбле, использованном для образования средних значений. Таким образом, $\langle x_0^2 \rangle = \langle x_0 \rangle^2$, и среднее значение квадрата флуктуаций будет

$$\langle \Delta I^2 \rangle = \langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n x_n^* \rangle. \quad (3.7)$$

По мере удлинения периода T до бесконечно больших значений интервал $1/T$ между следующими одна за другой спектральными составляющими стремится к бесконечно малому значению, и если

коэффициент $\langle x_n x_n^* \rangle$ плавно изменяется с изменением n , то можно определить спектральную плотность как

$$\omega(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} 2T \langle x_n x_n^* \rangle, \quad (3.8)$$

где $f = n/T$, и записать (3.7) в виде

$$\langle \Delta I^2 \rangle = \int_0^{\infty} \omega(f) df. \quad (3.9)$$

Если $I(t)$ представляет собой входной сигнал для системы с коэффициентом усиления $G(f) = G(n/T)$, то для выходного сигнала имеем

$$\Theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G\left(\frac{n}{T}\right) x_n \exp\left(j \frac{2\pi n t}{T}\right). \quad (3.10)$$

Поскольку G не является случайной переменной, получим

$$\langle \Theta(t) \rangle = G(0) \langle x_0 \rangle$$

и

$$\langle \Delta \Theta^2 \rangle = 2 \sum_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{n}{T}\right) G^*\left(\frac{n}{T}\right) \langle x_n x_n^* \rangle.$$

Последнее соотношение можно представить в виде

$$\langle \Delta \Theta^2 \rangle = \int_0^{\infty} G(f) G^*(f) \omega(f) df,$$

где $\omega(f)$ — спектральная плотность, определяемая формулой (3.8). Таким образом, для стационарного случайного процесса это определение адекватно определению энергетического спектра.

Если $I(t)$ помимо случайной составляющей содержит известную когерентную составляющую или полезный сигнал $S(t)$, то, очевидно, изложенные выше соображения можно применить к случайной составляющей $I(t) - S(t)$. Однако иногда удобнее рассматривать плотность $\omega(f)$, определяемую формулой (3.8), как применимую к зависимой от времени величины любого вида. Такой переход представляет собой особый случай в продолжительной формальной математической дискуссии по сигналам и шумам в сложных системах и создает определенные математические затруднения. Если, например, $I(t)$ содержит гармонический член

$$A \cos 2\pi f_0 t = 0,5A \exp(2\pi j f_0 t) + 0,5A \exp(-2\pi j f_0 t),$$

то коэффициент $\langle x_n x_n^* \rangle$ не будет больше плавно изменяющейся функцией от n , а будет иметь разрывы при $n = f_0 T$. Переход от суммы (3.7) к интегралу (3.9) становится уже недопустимым и приводит к появлению особенности типа дельта-функции $0,5A^2 \delta(f -$

— j_0) в спектре $\omega(f)$. Коэффициент $1/(2A^2)$ представляет собой усредненную по времени мощность сигнала. Другой возможный подход заключается в том, что сумму (3.7) следует относить не к интегралу Римана, например (3.9), а к интегралу Стильтьеса.

При этом интеграл $\int_0^f dP(f)$ определяет мощность, связанную с составляющими Фурье вплоть до частоты f . Интегральный спектр $P(f)$ остается ограниченным, но имеет разрывы на частотах когерентных сигналов. Тогда отклик системы, имеющий коэффициент усиления $G(f)$, определяется выражением

$$\langle \Delta\theta^2 \rangle = \int_{f=0}^{\infty} G(f) G^*(f) dP(f), \quad (3.11)$$

и вклады в $\langle \Delta\theta^2 \rangle$ от разрывов в $P(f)$ уже не будут флуктуационными членами, а соответствуют сигналам. Средняя мощность выходного сигнала представляет собой сумму вкладов от точек разрыва спектра $P(f)$, а выходной шум определяется только непрерывной частью этого спектра.

До сих пор предполагалось, что ток $I(t)$ соответствует малому процессу на входе радиоэлектронной системы, но, несомненно, можно также рассматривать энергетический спектр $W(F)$ выходного сигнала $\Theta(t)$ и тогда для среднего квадрата флуктуаций на выходе имеем

$$\langle \Delta\theta^2 \rangle = \int_0^{\infty} W(F) dF. \quad (3.12)$$

Таким образом, если известен спектр $W(F)$, можно вычислить случайный разброс мгновенных значений выходного сигнала. Обычно это представляет собой окончательный итог вычисления полной шумовой характеристики радиоэлектронной системы. Таким образом, типичные шумовые расчеты сводятся к определению и вычислению энергетического спектра $\omega_i(f)$ различных шумовых процессов в отдельных элементах системы, а также к вычислению вклада каждого такого процесса в энергетический спектр выходного шума. Остальные главы этой книги посвящены главным образом этим двум проблемам.

В некоторых случаях, например при рассмотрении теплового шума в резисторах, физические соображения непосредственно дают выражение для энергетического спектра шума, связанного с элементами системы. В других же случаях, например при рассмотрении дробового шума в гл. 2, первоначальные вычисления дают не $\omega(f)$, а временные статистические параметры шумов. Тогда возникает необходимость в математических моделях, позволяющих получить $\omega(f)$. Относящиеся к этому вопросу теоремы обычно известны как формулы обращения; они рассматриваются в следующем разделе.

Хотя для большинства целей представление $I(t)$ в виде комплексных экспоненциальных рядов Фурье (3.2) вполне приемлемо, оно вызывает затруднения в тех случаях, когда приходится иметь дело с нелинейными системами, и поэтому желательно заменить (3.2) выражением

$$I(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T} + \varphi_n\right). \quad (3.13)$$

Легко видеть, что, поскольку $x_n = \frac{1}{2} c_n \exp(j\varphi_n)$, определение $\omega(f)$ сводится к

$$\omega(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2} \langle c_n^2 \rangle. \quad (3.14)$$

Иногда также удобно использовать как синусоидальный, так и косинусоидальный члены ряда Фурье:

$$I(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right]. \quad (3.15)$$

В этом случае

$$\omega(f) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{T}{2} \langle a_n^2 + b_n^2 \rangle, \quad (3.16)$$

и для стационарного случайного процесса имеем

$$\langle a_n^2 \rangle = \langle b_n^2 \rangle. \quad (3.17)$$

3.2. Формулы обращения

Прежде чем обсуждать эти формулы, полезно показать на примере вид вычислений, в котором они находят применение. Если образец полупроводникового материала имеет два контакта, то между ними во внешней цепи будет протекать флуктуирующий ток $I(t)$, обусловленный носителями заряда, генерируемыми и рекомбинирующими в этом материале. Генерируемый в определенный момент времени g_k носитель проходит определенный путь p_k и рекомбинирует в момент времени r_k . Этот носитель вносит в ток $I(t)$ поддающийся вычислению вклад $i_k(t)$, а $I(t)$ будет состоять из суммы таких вкладов:

$$I(t) = \sum_k i_k(t).$$

Любая функция от $I(t)$ может быть выражена через отдельные вклады. В частности, мы можем образовать

$$I(t) I(t + \tau) = \sum_k \sum_l i_k(t) i_l(t + \tau)$$

или

$$I^2(t) = \sum_k \sum_l i_k(t) i_l(t).$$

Теперь можно получить значения этих величин, усредненных по неопределенно большому или конечному интервалам времени. Статистическая механика вооружает нас знанием статистических свойств момента времени генерации g_k , момента времени рекомбинации r_k и пути пробега p_k . Это определяет отдельные величины $i_k(t)$, и, следовательно, мы можем вычислить средние по ансамблю, такие как $\langle i_k(t) \rangle$, $\langle i_k^2(t) \rangle$, $\langle i_k(t) i_l(t) \rangle$ или $\langle i_k(t) i_l(t) \times (t+\tau) \rangle$, и использовать их, например, для получения $\langle I^2(t) \rangle$ или более сложных функций от $I(t)$. Две такие функции представляют особую важность. Первая из них — это обычная корреляционная функция:

$$\psi(\tau) = \left\langle \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T I(t) I(t+\tau) dt \right\rangle, \quad (3.18)$$

а вторая — функция корреляции Макдональда $\chi(\tau)$. Покажем, как она определяется. Пусть

$$\bar{I}^\tau = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} I(t) dt$$

будет средним значением величины $I(t)$ по конечному интервалу τ , а \bar{I} — средним по более продолжительному интервалу, равным среднему по ансамблю, так что $\overline{\Delta I^\tau} = \bar{I}^\tau - \bar{I}$. Затем мы образуем среднее значение величины $(\Delta I^\tau)^2$ за большой промежуток времени, которое будет равно $\overline{(\Delta I^\tau)^2}$, и в итоге получим выражение для $\chi(t)$ через среднее по ансамблю значение этой величины:

$$\chi(\tau) = \tau^2 \langle \overline{(\Delta I^\tau)^2} \rangle. \quad (3.19)$$

Например, для простого процесса дробового шума это выражение имеет вид $\chi = eI_0\tau$. Величины $\psi(\tau)$ и $\chi(\tau)$ в принципе поддаются расчету, исходя из физической структуры системы и законов статистической механики. Теорема, доказанная Винером [52] и Хинчиным [20], определяет $\omega(f)$ через $\psi(\tau)$:

$$\omega(f) = 4 \int_0^\infty \psi(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau, \quad (3.20)$$

а теорема Макдональда [24, 34] определяет $\omega(f)$ через $\chi(\tau)$:

$$\omega(f) = 4\pi f \int_0^\infty \frac{d\chi}{d\tau} \sin 2\pi f \tau d\tau. \quad (3.21)$$

Для доказательства теоремы Винера — Хинчина выразим функцию $I(t)$, заданную на неопределенно длительном интервале T , в виде

$$I(t) = \sum_n c_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T} + \varphi_n\right). \quad (3.22a)$$

Тогда

$$I(t)I(t + \tau) = \sum_m \sum_n c_m c_n \cos\left(\frac{2\pi m t}{T} + \varphi_m\right) \cos\left(\frac{2\pi n (t + \tau)}{T} + \varphi_n\right), \quad (3.22b)$$

откуда следует

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T I(t)I(t + \tau) dt = \frac{1}{2} \sum_n c_n^2 \cos \frac{2\pi n \tau}{T},$$

а так как

$$\omega(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2} \langle c_n^2 \rangle,$$

то получим

$$\psi(\tau) = \int_0^{\infty} \omega(f) \cos(2\pi f \tau) df. \quad (3.23)$$

Спектральная плотность $\omega(f)$ неопределена для $f < 0$, и, следовательно, можно принять $\omega(-f) = \omega(f)$, представляя (3.23) в виде

$$\psi(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(f) \cos 2\pi f \tau df.$$

Поскольку $\psi(\tau)$ — четная функция от τ , то можно заменить нижний предел в обратном преобразовании Фурье нулем и получить результат Винера — Хинчина (3.20).

Для доказательства теоремы Макдональда используем то же самое разложение (3.22a), из которого следует, что $\overline{I} = c_0$, а

$$\overline{\tau \Delta I^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n T}{2\pi n} \cos\left(\frac{2\pi n (t + \tau/2)}{T} + \varphi_n\right) \sin \frac{\pi n \tau}{T}.$$

Возведение в квадрат правой части последнего выражения дает двойную сумму, включающую члены с c_n и c_m , но дальнейшее усреднение по всему периоду T исключает все члены, кроме членов с $n=m$, и поэтому получим

$$\chi(\tau) = \tau^2 \langle \overline{(\Delta I^2)^2} \rangle = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{T}{2\pi n}\right)^2 \langle c_n^2 \rangle \sin^2\left(\frac{2\pi n \tau}{T}\right).$$

Это дает

$$\frac{d\chi}{d\tau} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T}{2\pi n} \langle c^2_n \rangle \sin \frac{2\pi n \tau}{T},$$

и поскольку $n/T=f$, то, выражая последний результат через $\omega(f)$, получаем

$$\frac{d\chi}{d\tau} = 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi f} \omega(f) \sin 2\pi f \tau df. \quad (3.24)$$

Если снова принять $\omega(-f)=\omega(f)$, то получим интеграл Фурье

$$\frac{d\chi}{d\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi f} \omega(f) \sin 2\pi f \tau df$$

и его обратное преобразование

$$\omega(f) = 2\pi f \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\chi}{d\tau} \sin 2\pi f \tau d\tau = 4\pi f \int_0^{\infty} \frac{d\chi}{d\tau} \sin 2\pi f \tau d\tau,$$

поскольку очевидно, что $d\chi/d\tau$ является нечетной функцией от τ . Это результат Макдональда.

Обе формулы обращения находят применение в вычислениях энергетического спектра шума, вызываемого физическими процессами в электронных приборах. Эти формулы можно также использовать для рассмотрения свойств сигналов и шума в сложных радиоэлектронных системах, в особенности когда сигналы представлены либо в цифровой форме, либо в виде случайных последовательностей. Они убеждают нас в том, что энергетический спектр, который мы используем в наших вычислениях, может быть связан непосредственными расчетами с физическими процессами, имеющими место в конкретных приборах. Здесь не будут применены формулы обращения, за исключением выкладок в гл. 5, где теорема Винера — Хинчина используется при рассмотрении взаимосвязи между шумом и статистической механикой. Тем не менее в следующем разделе дается пример их использования применительно к дробовому шуму.

При наличии гармонических сигналов энергетический спектр обладает особенностями, и в таком случае обе теоремы (Винера — Хинчина и Макдональда) требуют осторожного применения. Например, если $I(t) = A \cos 2\pi f_0 t$, то

$$\psi(\tau) = A^2 (\cos 2\pi f_0 \tau) / 2,$$

и, следовательно, для спектра получим

$$\omega(f) = 2A^2 \int_0^{\infty} \cos 2\pi f_0 \tau \cos 2\pi f \tau d\tau.$$

Этот интеграл в обычном смысле не определен и представляет собой обобщенную функцию с особенностью при $f=f_0$. Однако интегральный спектр определен:

$$P(f) = \int_0^f \omega(f') df' = 2A^2 \int_0^\infty \int_0^f \cos 2\pi f_0 \tau \cos 2\pi f' \tau df' d\tau.$$

Интегрирование по f дает

$$P(f) = \frac{A^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos 2\pi f_0 \tau \sin 2\pi f \tau}{\tau} d\tau = \frac{A^2}{2\pi} \int_0^\infty \frac{[\sin 2\pi (f - f_0) \tau + \sin 2\pi (f + f_0) \tau]}{\tau} d\tau.$$

Если $f > f_0$, то оба интегральных члена равны $\pi/2$, в то время как при $f < f_0$ один член равен $-\pi/2$, а другой $+\pi/2$, так что $P(f) = 0$ для $f < f_0$ и $P(f) = A^2/2$ для $f > f_0$, как и следовало ожидать. Функция корреляции Макдональда в этом случае равна $\chi(\tau) = -2(A/2\pi f_0)^2 \sin^2 \pi f_0 \tau$, и, следовательно,

$$\omega(f) = 4\pi f \int_0^\infty \frac{d\chi}{d\tau} \sin 2\pi f \tau d\tau = 2A^2 \frac{f}{f_0} \int_0^\infty \sin 2\pi f_0 \tau \sin 2\pi f \tau d\tau.$$

Хотя спектр $\omega(f)$ и не определен в обычном смысле, однако очевидно, что мощность $P(f)$ возрастает скачком от нуля ниже $f=f_0$ до $A^2/2$ выше $f=f_0$.

3.3. Энергетический спектр дробового шума

В гл. 2 было сказано, что дробовой шум насыщенного диода оказывает на усилитель с коэффициентом усиления $G(f)$ воздействие, эквивалентное энергетическому спектру $2eI_0$, где I_0 — средний ток. Теперь рассмотрим, как этот спектр может быть определен сначала с помощью теоремы Макдональда, а затем — теоремы Винера — Хинчина.

Выражение (2.8) для дробового шума непосредственно дает корреляционную функцию Макдональда $\chi(\tau) = eI_0\tau$, откуда

$$\omega(f) = 4\pi f \int_0^\infty \frac{d\chi}{d\tau} \sin 2\pi f \tau d\tau = 4\pi f eI_0 \int_0^\infty \sin 2\pi f \tau d\tau.$$

В представленном виде спектр $\omega(f)$ является неопределенным, но если заменить верхний предел интегрирования на T , то получим

$$\omega(f) = 2eI_0(1 - \cos 2\pi f T),$$

откуда для интегрального спектра следует

$$P(f) = 2eI_0 \int_0^f (1 - \cos 2\pi f' T) df' = 2eI_0 \left(f - \frac{\sin 2\pi f T}{2\pi T} \right).$$

Отсюда при $T \rightarrow \infty$ имеем $P(f) = 2eI_0df$. Следовательно, интенсивность шума в определенной полосе df составит $2eI_0df$, а энергетический спектр фактически будет равен $w(f) = 2eI_0$.

По теореме Винера — Хинчина корреляционная функция для простого процесса дробового шума, в котором можно пренебречь эффектами времени пролета электронов, равна нулю при $|\tau| > 0$ и имеет особенность при $\tau = 0$. Для того чтобы не обсуждать природу этой особенности, мы рассмотрим реальную физическую ситуацию, при которой электроны, пролетающие через диод, достигают анода за конечное время τ_0 . Тогда во внешней цепи будет импульсный ток с длительностью τ_0 и полным зарядом e . Для простоты рассуждений предположим, что эти импульсы тока имеют прямоугольную форму. Следовательно, ток во внешней цепи представляет собой импульс с амплитудой e/τ_0 . Это приближение не совсем справедливо для лампового диода, оно больше подходит для случая прохождения электронов через обедненный слой в полупроводниковом диоде.

Если электрон, вылетевший из катода в момент времени t_k , создает ток $eF(t - t_k)$ в момент времени t , то в течение интервала T вылетит m электронов, и анодный ток составит

$$I_m(t) = e \sum_{k=1}^m F(t - t_k).$$

Усреднение по всем моментам вылета t_k за интервал T дает

$$\overline{I_m(t)I_m(t + \tau)} = e^2 \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \int_0^T \frac{dt_1}{T} \dots \int_0^T \frac{dt_m}{T} F(t - t_k) F(t + \tau - t_l).$$

Поступая так же, как и в случае теоремы Кэмпбелла (см. разд. 2.3), отделим члены с $k=l$ и заменим пределы интегрирования на $\pm\infty$, в результате чего получим

$$\langle m \rangle - \langle m^2 \rangle = \langle m \rangle^2 \text{ и } e \langle m \rangle = I_0 T.$$

Окончательное усреднение по всему количеству вылетевших электронов с учетом равенств $\langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2 = \langle m^2 \rangle$ и $e \langle m \rangle = I_0 T$ приводит к

$$\psi(\tau) = \overline{\langle I_m(t)I_m(t + \tau) \rangle} = eI_0 \int_{-\infty}^{\infty} F(t) F(t + \tau) dt + I_0^2. \quad (3.25)$$

Для

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/\tau, & 0 < t < \tau, \\ 0, & t > \tau. \end{cases}$$

из (3.25) следует:

$$\left. \begin{aligned} \psi(\tau) &= eI_0 \frac{\tau_0 - \tau}{\tau_0^2} + I_0^2, \quad \tau < \tau_0 \\ \psi(\tau) &= I_0^2, \quad \tau > \tau_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

Постоянный член I_0^2 дает спектральную составляющую:

$$\omega_0 = 4I_0^2 \int_0^{\infty} \cos 2\pi f_0 \tau d\tau,$$

которая в таком виде является неопределенной; но мы также имеем

$$P_0 = \int_0^f \omega_0 df = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \int_0^T 4I_0^2 \cos 2\pi f \tau d\tau df = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2I_0^2}{\pi} \int_0^T \frac{\sin 2\pi f \tau d\tau}{\tau}.$$

Полученное отсюда значение P_0 изменяется скачком от $-I_0^2$ до $+I_0^2$ при $f=0$, а при других значениях f оно будет постоянным. Это и есть член постоянного тока $2I_0^2$ в энергетическом спектре. Оставшийся член связан со спектром

$$\omega(f) = 4eI_0 \int_0^{\tau_0} \frac{\tau_0 - \tau}{\tau_0^2} \cos 2\pi f \tau d\tau,$$

откуда следует

$$\omega(f) = 2eI_0 \left(\frac{\sin \pi f \tau_0}{\pi f \tau_0} \right)^2. \quad (3.27)$$

На низких частотах, когда угол пролета электронов $2\pi f \tau_0$ стремится к нулю, значение $\omega(f)$ стремится к $2eI_0$, а на высоких частотах энергетический спектр шума приближается к нулю. Пролетные эффекты представляют некоторый практический интерес в том случае, когда насыщенные вакуумные диоды используются в качестве стандартных источников шума.

3.4. Непрерывное наблюдение сигнала и шума

Во многих случаях, особенно когда мы имеем дело с низкочастотными сигналами, получаемыми, например, от спектрометров магнитного резонанса, выходной сигнал системы каким-либо способом непрерывно записывается, и эту информацию можно анализировать позднее. Тогда интересно узнать связь между отношением сигнал/шум, полученным аналитически при обработке записи, и отношением среднеквадратичного значения сигнала к среднеквадратичному значению шума на входе записывающего устройства. Для этого рассмотрим систему со строго определенной полосой пропускания Δf , на выходе которой имеются составляющие сигнала

ла синусоидальной формы со среднеквадратичными значениями S_n и шум с энергетическим спектром $W(f)$. Мгновенные флуктуации на выходе системы характеризуются средним квадратом $W(f)\Delta f$ (для простоты рассмотрения мы предположим, что спектр является равномерным, по крайней мере в пределах полосы пропускания Δf), и отношение сигнал/шум для n -й компоненты равно $S_n/(W\Delta f)^{1/2}$. Если записанный выходной сигнал, включая шум, описывается временной функцией $U(t)$, то он может быть представлен рядом Фурье $\sum_m [a_m \cos(2\pi mt/T) + b_m \sin(2\pi mt/T)]$, при-

чем случайная часть m -й компоненты этого ряда имеет значение среднего квадрата $\langle a_m^2 + b_m^2 \rangle$, равное W/T , так как интервал частот между компонентами ряда составляет $1/T$. Поэтому отношение сигнал/шум, полученное в результате обработки записи, для m -й составляющей сигнала равно $S_m/(W/T)^{1/2}$. Таким образом, запись обеспечивает улучшение отношения сигнал/шум в $(T\Delta f)^{1/2}$ раз. Каждая составляющая определяется с той же самой неопределенностью, какую мы получили бы при анализе ее мгновенного значения, применяя систему с полосой пропускания $1/T$ на средней частоте сигнала. Так как усилителю с полосой пропускания $1/T$ для входения в установившийся режим требуется по крайней мере время T , то для проведения измерений даже мгновенных значений на практике требуется большое время. При записи выходного сигнала один интервал наблюдения T может быть использован для анализа многих составляющих сигнала, одновременно присутствующих на выходе системы.

Этот пример поясняет более общий принцип. Если доступ к системе ограничен и доступна лишь пара зажимов AB , а между этими зажимами действует флуктуирующее напряжение $U(t)$, с которым могут быть связаны или не связаны сигналы, то, записав напряжение $U(t)$ в течение интервала времени T , можно проанализировать результат в удобное для нас время. Окончательный анализ с использованием априорных сведений о природе сигналов дает оптимальное отношение сигнал/шум, достижимое за время T . Фильтрация, корреляция или другие существующие процессы обработки, происходящие в реальном масштабе времени между зажимами AB , а также прерванная запись не могут дать лучшего отношения сигнал/шум по сравнению с тщательно выполненным анализом полностью завершенной записи. Обработка в реальном масштабе времени может быть более удобной, но, с другой стороны, при этом можно потерять потенциально важные сигналы.

3.5. Осциллографическое отображение периодического сигнала

Если на выходе системы имеется помимо шума периодический сигнал с составляющими на частотах $f_0, 2f_0 \dots$ и т. д., то наиболее естественным путем отображение выходного сигнала осуществля-

ется с помощью осциллоскопа, частота развертки которого равна основной частоте f_0 . Отображение такого вида используется в радиолокации, резонансных спектрометрах и во многих других применениях. Результирующая кривая на экране осциллоскопа будет стационарным изображением полного цикла сигнала вместе с флуктуациями, обусловленными шумом. При слабом послесвечении экрана следующие одна за другой кривые будут различаться, и если мы сосредоточим наше внимание на одной части кривой, скажем, на вершине ее пика, то заметим, что отклонение в этой точке будет флуктуировать от кривой к кривой. Обозначим: y — отклонение; U — пиковое значение выходного сигнала; W — энергетический спектр шума; Δf — полоса пропускания. Тогда для нескольких циклов развертки получим

$$\langle y \rangle = U, \quad (3.28a)$$

$$\langle \Delta y^2 \rangle = W \Delta f. \quad (3.28b)$$

Теперь предположим, что экран имеет экспоненциальное ослабление свечения с постоянной времени $1/\alpha$, так что непосредственная интенсивность свечения после n циклов развертки равна $I_0 \exp(-n\alpha/f_0)$. Предположим, что мы наблюдаем за центром яркости светового изображения, тогда по прошествии n циклов найдем его в положении

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=0}^n y_k \exp(-k\alpha/f_0)}{\sum \exp(-k\alpha/f_0)},$$

где y_k — фактическое отклонение за k периодов, предшествующих наблюдению.

Ожидаемое значение $\langle \bar{y} \rangle$ положения этого центра яркости равно

$$\langle \bar{y} \rangle = \frac{\sum \langle y_k \rangle \exp(-k\alpha/f_0)}{\sum \exp(-k\alpha/f_0)} = \langle y \rangle, \quad (3.29)$$

так как $\langle y_k \rangle$ не зависит от k . Таким образом, центр яркости соответствует среднему отсчету.

Для флуктуации центра яркости имеем

$$\langle \Delta \bar{y}^2 \rangle = \langle (\bar{y} - \langle y \rangle)^2 \rangle = \left\langle \left[\frac{\sum_0^n \Delta y_k \exp(-k\alpha/f_0)}{\sum_0^n \exp(-k\alpha/f_0)} \right]^2 \right\rangle,$$

где Δy_k является флуктуацией k -й кривой. Для упрощения вычислений предположим, что $n \rightarrow \infty$, т. е. $\exp(-n\alpha/f_0) \rightarrow 0$, и тогда имеем

$$\langle \Delta \bar{y}^2 \rangle = \{1 - \exp(-\alpha/f_0)\}^2 \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \Delta y_k \Delta y_l \exp[-(k+l)\alpha/f_0] \right\rangle.$$

Перекрестные члены с $k \neq l$ обращаются в нуль, а члены с $k=l$ имеют значение $\langle \Delta y^2_k \rangle \exp(-2k\alpha/f_0)$. Так как $\langle \Delta y^2_k \rangle = \langle \Delta y^2 \rangle$, то сумма представляется одной экспонентой, и мы получим

$$\langle \overline{\Delta y^2} \rangle = \langle \Delta y^2 \rangle \frac{\text{ch}(\alpha/f_0) - 1}{\text{sh}(\alpha/f_0)}. \quad (3.30a)$$

Если значение α/f_0 велико, т. е. свечение угасает между циклами, то коэффициент при $\langle \Delta y^2 \rangle$ в полученном выражении равен единице, а если значение α/f_0 мало, что соответствует длительному времени послесвечения, то имеем

$$\langle \overline{\Delta y^2} \rangle = \langle \Delta y^2 \rangle \frac{\alpha}{2f_0} = \frac{\alpha}{2f_0} W \Delta f. \quad (3.30б)$$

Следовательно, эффективная шумовая полоса пропускания уменьшается от Δf до $\Delta f \alpha / 2f_0$. Если, например, $\alpha = 10 \text{ с}^{-1}$, а $f_0 = 10^4 \text{ Гц}$, то полоса пропускания уменьшается в 2000 раз. Такое большое увеличение чувствительности может быть достигнуто, если только сигнал не изменяется за время $\sim 1/\alpha$. Хотелось бы отметить, что даже в том случае, когда послесвечение экрана мало, инерция зрительного восприятия дает аналогичный эффект.

Предположение, которое приводит к выражениям (3.30) и заключается в том, что перекрестные члены с $k \neq l$ обращаются в нуль, является справедливым в большинстве практических случаев. Однако следует заметить, что оно не будет справедливым, если подаваемый на вход осциллографа сигнал предварительно проходит через такое устройство, как гребенчатый фильтр. Такой фильтр пропускает составляющие сигнала и шума только через ряд очень узких частотных каналов, настроенных на основную частоту и гармоники временной развертки осциллографа.

Показав, что описание шума его энергетическим спектром эквивалентно статистическому описанию, мы можем теперь рассматривать различные источники шума в радиоэлектронной аппаратуре и их свойства полностью с точки зрения энергетического спектра.

3.6. Взаимный энергетический спектр

В последующих главах мы покажем, что шум в ряде распространенных активных приборов, например в транзисторе, может быть представлен на эквивалентной схеме прибора совокупностью двух шумовых генераторов, обычно источника напряжения и источника тока. Чаще всего эти два источника бывают некоррелированными, но в некоторых случаях, когда они целиком или частично происходят от одних и тех же основных случайных процессов, они будут коррелированными. Необходимо найти какой-либо способ представления корреляции между их составляющими в энергетическом спектре. Может быть, было бы полезно заметить по этому поводу, что в теории шумов термин «энергетический спектр» используется в общем смысле спектральной плотности, связанной с любым про-

изведением второго порядка двух флуктуирующих переменных. Например, это может относиться к квадрату одной переменной (до сих пор мы использовали только это выражение), к произведению двух различных токов в разных частях системы или к произведению тока и напряжения. Рассмотрим два случайных процесса, создающих шумовой ток $I(t)$ и шумовое напряжение $U(t)$, и предположим, что при большом интервале времени T эти переменные могут быть представлены рядами Фурье:

$$I(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[I_n \exp\left(j \frac{2\pi n t}{T}\right) + I_n^* \exp\left(-j \frac{2\pi n t}{T}\right) \right]$$

и

$$U(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[U_n \exp\left(j \frac{2\pi n t}{T}\right) + U_n^* \exp\left(-j \frac{2\pi n t}{T}\right) \right].$$

Произведение $I(t)U(t)$ содержит член I_0U_0 , сумму членов вида $I_0U_n \exp(j2\pi n t/T)$ и т. п. и двойную сумму членов, например $I_nU_m \exp[j \cdot 2\pi(n+m)t/T]$, $I_nU_m^* \exp[j2\pi(n-m)t/T]$ и т. п. При образовании среднего по ансамблю $\langle I(t)U(t) \rangle$, каково бы ни было соотношение между I и U (если даже $I(t) \equiv U(t)$), поскольку их фазы случайны, средние значения всех этих членов стремятся к нулю, за исключением члена I_0U_0 и перекрестных членов, например $I_nU_n^*$ и $I_n^*U_n$. Для $\langle I^2(t) \rangle$ имеем

$$\langle I^2 \rangle = I_0^2 + \sum_n \langle I_n I_n^* + I_n^* I_n \rangle$$

и, как было показано в разд. 3.1, соответствующее выражение для энергетического спектра имеет вид

$$\omega_I(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} 2T \langle I_n^* I_n \rangle, \quad (3.31)$$

где $f = n/T$. Поэтому подходящим определением для взаимного энергетического спектра, связанного с произведением $I(t)U(t)$, является

$$\omega_{IU} = \lim_{T \rightarrow \infty} T \langle I_n^* U_n \rangle. \quad (3.32)$$

Очевидно,

$$\omega_{UI} = \omega_{IU}^* = \lim_{T \rightarrow \infty} T \langle U_n^* I_n \rangle, \quad (3.33)$$

и вклад в $\langle I(t)U(t) \rangle$ спектральных составляющих в полосе частот df на частоте f составит

$$d\langle I(t)U(t) \rangle = (\omega_{UI} + \omega_{IU}) df. \quad (3.34)$$

Как видно из соотношения (3.33), для определения корреляции требуется только одна из величин ω_{IU} или ω_{UI} .

Если $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ представляют собой три случайных процесса и $C(t) \equiv A(t) + B(t)$, то, очевидно, энергетический спектр определяется соотношением

$$\omega_C = \omega_{A+B} = \omega_A + \omega_B + \omega_{AB} + \omega_{BA}. \quad (3.35)$$

Если, кроме того, $B(t)$ причинно связана с $A(t)$ так, что конкретная спектральная составляющая процесса $B(t)$ на частоте $f = \omega/2\pi$ может быть выражена в виде $B(\omega) = \Theta(\omega)A(\omega)$, где $\Theta(\omega)$ — комплексная постоянная, то мы имеем

$$\omega_{AB} = \Theta(\omega)\omega_A; \quad (3.36a)$$

$$\omega_B = \Theta(\omega)\Theta^*(\omega)\omega_A \quad (3.36b)$$

и

$$\omega_C = \omega_A(1 + \Theta + \Theta^* + \Theta\Theta^*). \quad (3.37)$$

Наконец, заметим, что если $\psi_{AB}(\tau)$ определяется как $A(t)B(t + \tau)$, а $\chi_{AB}(\tau)$ — как $\tau^2 \langle A(t)B(t)^\tau \rangle$, то существуют соотношения обращения, аналогичные теоремам Винера — Хинчина и Макдональда, которые устанавливают связь ψ и χ с ω_{AB} .

ГЛАВА 4

ТЕПЛОВОЙ ШУМ

В 1906 г. Эйнштейн предсказал [11], что броуновское движение носителей заряда должно приводить к возникновению флуктуирующей ЭДС между концами любого сопротивления при тепловом равновесии. Впервые это явление наблюдал Джонсон [19], а энергетический спектр флуктуаций был вычислен Найквистом [28]¹.

4.1. Теорема Найквиста

Рассмотрим два одинаковых сопротивления R_1 и R_2 , которые соединены параллельно и находятся при одинаковой температуре T . Если флуктуирующая ЭДС, развиваемая сопротивлением R_1 , в разомкнутой цепи характеризуется средним квадратом $\langle U^2_1 \rangle$, то мощность, поступающая от R_1 к R_2 , равна $1/4 \langle U^2_1 \rangle / R$. Если сопротивления находятся в тепловом равновесии, то эта мощность должна быть равна мощности, поступающей от R_2 к R_1 . Поэтому сделаем вывод, что флуктуирующие ЭДС, генерируемые двумя равными сопротивлениями, находящимися при одинаковой температуре, одинаковы и не зависят от их природы. Более того, это равенство должно быть справедливо для любой спектральной со-

¹ В зарубежной литературе тепловой шум называют «шумом Джонсона». — Прим. ред.

ставляющей флуктуаций. Так, если в некотором диапазоне частот $\langle U^2_1 \rangle$ больше $\langle U^2_2 \rangle$, то это значит, что мы могли нарушить общее равновесие перестройкой полосы с помощью фильтра, состоящего только из индуктивности и емкости. Таким образом, энергетический спектр флуктуаций является универсальной функцией от R , f и T . Для раскрытия этой функции мы рассмотрим два сопротивления, подключенных к противоположным концам длиной линии передачи с волновым сопротивлением R , длиной l и волновой скоростью c (рис. 4.1). Если $\omega(f)$ является энергетическим спектром флуктуаций в разомкнутой цепи, то средняя мощность, поставляемая одним сопротивлением в линию в полосе частот df , составляет

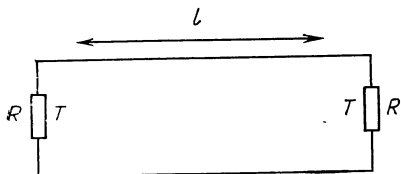


Рис. 4.1. Линия передачи, нагруженная с обоих концов сопротивлением R , равным волновому сопротивлению линии

налево. Следовательно, запасенная в линии энергия в полосе частот df равна

$$dP = \omega(f) df / 4R. \quad (4.1)$$

За время порядка l/c будет достигнуто состояние равновесия, при котором средняя мощность dP , определяемая формулой (4.1), передается слева направо и равна мощности, передаваемой справа

$$dU = \frac{2l}{c} dP = \frac{l}{2cR} \omega(f) df. \quad (4.2)$$

Если линию закоротить на обоих концах, то эта энергия будет связана со стоячей волной. Однако линия все еще находится в равновесии с температурой T , так как если мы нагрузим ее на сопротивление R , то полезная мощность не будет поступать в линию и выходить из нее. Поэтому мы можем рассматривать линию обычными методами статистической термодинамики и выражать энергию каждого типа собственных колебаний линии с частотой f как

$$\epsilon = \frac{hf}{\exp(hf/(kT)) - 1} \sim kT, \text{ если } hf \ll kT.$$

Частоты собственных колебаний закороченной линии определяются формулой $f = nc/2l$, где n — целое число. Таким образом, если длина l велика, то число типов собственных колебаний в полосе df составляет $dn = \frac{2l}{c} df$, а средняя тепловая энергия в полосе df равна

$$dU = \frac{2l}{c} kT df. \quad (4.3)$$

Сравнивая эти два выражения для dU , получаем

$$\omega(f) = 4RkT. \quad (4.4)$$

Спектр теплового шума, подобно дробовому шуму, является «белым», т. е. независимым от частоты f , и на любом сопротивлении R при температуре T существует шумовое напряжение со средним квадратом в полосе Δf :

$$\langle U_n^2 \rangle = 4kTR\Delta f. \quad (4.5)$$

При $R=10^6$ Ом, $\Delta f=10^6$ Гц и $T=293$ К (комнатная температура) среднеквадратичное напряжение шумов составит 127 мкВ.

Максимальная мощность, отдаваемая сопротивлением, будет получена в том случае, когда оно будет подключено к равной по величине нагрузке R :

$$\langle P_n \rangle = \langle U_n^2 \rangle / 4R = kT\Delta f. \quad (4.6)$$

При $\Delta f=1$ МГц и $T=293$ К эта мощность будет равна $4 \cdot 10^{-15}$ Вт.

4.2. Комплексные сопротивления

Теперь рассмотрим комплексное сопротивление $Z=R(f)+jX(f)$. Пусть энергетический спектр напряжения на нем будет $\omega(f)$ и пусть это сопротивление подключено к сопротивлению R , имеющему ту же температуру. Средняя мощность передачи в полосе df должна быть равна нулю, и поэтому

$$4kTRdf \frac{R(f)}{(R+R(f))^2 + X^2(f)} = \omega(f) df \frac{R}{(R+R(f))^2 + X^2(f)}, \quad (4.7)$$

откуда $\omega(f) = 4kTR(f)$.

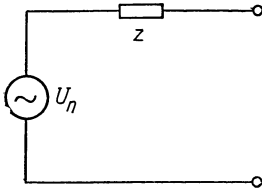


Рис. 4.2. Эквивалентная шумовая схема пассивного полного сопротивления

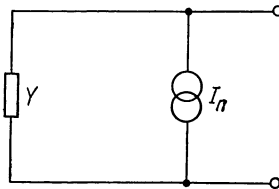


Рис. 4.3. Эквивалентная шумовая схема пассивной полной проводимости

Напряжение шумов на зажимах комплексного сопротивления определяется значением его действительной части. Чистые реактивности без потерь не генерируют шум, так как не имеет физического смысла тепловое равновесие с окружающей средой для реактивных сопротивлений.

На рис. 4.2 представлена эквивалентная схема комплексного сопротивления $Z=R(f)+jX(f)$ при тепловом равновесии с температурой T .

Генератор напряжения имеет энергетический спектр, определяемый соотношением (4.7). Иногда удобнее иметь дело с полной проводимостью и генератором тока. Если $Y = G(f) + jK(f)$, то эквивалентная схема принимает вид, показанный на рис. 4.3. Здесь генератор тока с бесконечно большим сопротивлением характеризуется спектром:

$$\omega(f) = 4kTG(f). \quad (4.8)$$

В любом случае в полосе частот df мощность шума, поступающая в согласованную нагрузку $Z^* = R(f) - jX(f)$ или $Y^* = G(f) - jK(f)$, равна

$$dP = kTdf. \quad (4.9)$$

4.3. Обобщения

Так как полученные результаты основаны только на термодинамических доводах, то они относятся к любой находящейся при тепловом равновесии системе, электрические свойства которой могут быть представлены комплексным сопротивлением или полной проводимостью. В частном случае в условиях неизменной температуры они применимы к расчетам параметров микрофонов, гальванометров и антенн. Расчеты применительно к антеннам были проделаны Бургессом [5]; им показано, что формула Найквиста приводит к выводам, соответствующим законам теплового излучения. Интересно отметить, что Лоренц еще в 1906 г. использовал очень похожее доказательство для вывода закона Рэлея — Джинса [22].

Тепловые шумы настолько универсальны по своей природе, что часто используются в качестве эталона, с которым сравниваются другие виды шума. Например, любой источник шума с равномерным спектром ω может быть представлен тепловым шумом в сопротивлении R_n , находящимся при температуре T , тогда $4kTR_n = \omega$. Если фактическое физическое сопротивление R связано с источником, то мы можем взять $R_n = R$ и соответственно изменить значение температуры T . В других случаях удобнее пользоваться температурой $T_0 = 293$ К (комнатной) и изменять значение R_n .

4.4. Коэффициент шума

Если имеется источник сигнала с сопротивлением R_s при температуре T_s и сигнал с номинальной мощностью P_s подается на вход шумящего усилителя с полосой пропускания Δf , то на выходе усилителя отношение сигнал/шум по мощности равно

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2 = \frac{4P_s R_s}{4kT_s R_s \Delta f} = \frac{P_s}{kT_s \Delta f}. \quad (4.10)$$

Это отношение не зависит от R_s и, следовательно, от преобразований сопротивления источника, осуществляемых без потерь.

Любой реальный усилитель сам создает шум, и поэтому действительное отношение сигнал/шум по мощности на выходе будет меньше, чем полученное расчетным путем по формуле (4.10). Следуя Фриису [14], можно определить критерий качества усилителя, или, иначе, коэффициент шума F следующим выражением:

$$F = \frac{(S/N)_{\text{вх}}^2}{(S/N)_{\text{вых}}^2}, \quad (4.11)$$

где $(S/N)_{\text{вх}}$ является отношением, определяемым формулой (4.10) через некоторую номинально полезную полосу пропускания системы. Коэффициент шума имеет точный смысл только для источника сигнала с определенной температурой, согласованного с линейным усилителем, имеющим конкретную полосу пропускания. Коэффициент шума линейных усилителей будет подробно рассмотрен в гл. 12.

4.5. Примеры

Теперь на двух простых примерах покажем использование результатов Найквиста.

На рис. 4.4 сопротивление потерь R в резонансном контуре находится при температуре T . Определим напряжение флуктуаций на контуре.

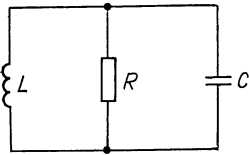


Рис. 4.4. Резонансный контур

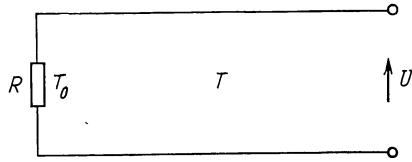


Рис. 4.5. Линия передачи с потерями при температуре T , нагруженная характеристическим полным сопротивлением R при температуре T_0

Сопротивление R зашунтировано полным сопротивлением Z , где $1/Z = 2\pi j f C + 1/(2\pi j f L)$. Следовательно, для энергетического спектра флуктуаций получим

$$\omega(f) = 4kTR \left| \frac{Z}{R+Z} \right|^2 = \frac{4kTR}{1 + Q^2 (f/f_0 - f_0/f)^2},$$

где $(2\pi f_0)^2 LC = 1$ и $Q = 2\pi f_0 CR$. Интенсивность флуктуаций напряжения выражается формулой

$$\langle \Delta U^2 \rangle = \int_0^{\infty} \omega(f) df = 4kTR \frac{\pi}{2} \frac{f_0}{Q} = \frac{kT}{C}$$

и не зависит от значений R и L . Средняя энергия конденсатора C определяется как $C\langle U^2 \rangle / 2 = kT/2$ и равна запасенной энергии в катушке индуктивности L . Следовательно, получается хорошо известный результат, с которого мы и начинали, а именно средняя тепловая энергия осциллятора равна kT .

На рис. 4.5 линия передачи с волновым сопротивлением R точно согласована с источником, имеющим такое же по значению внутреннее сопротивление. Источник находится при температуре T_0 , а линия, ослабляющая мощность сигнала P до значения αP , — при температуре T . Определим энергетический спектр напряжения на разомкнутом конце линии.

Сначала предположим, что линия согласована с обоих концов с сопротивлениями R , находящимися при той же температуре T . Одно сопротивление излучает мощность $kTdf$ и получает мощность $\alpha kTdf$ от другого сопротивления. Избыток мощности $(1-\alpha)kTdf$ должен быть поглощен линией. Таким образом, для рис. 4.5 номинальная мощность на разомкнутом конце линии равна $\alpha kT_0df + (1-\alpha)kTdf$, а энергетический спектр напряжения составляет $4kR[\alpha T_0 + (1-\alpha)T]$.

Эту главу закончим предостережением. Результаты Найквиста применимы только к системам с внутренним тепловым равновесием. Они не относятся непосредственно к системам, содержащим электронные лампы, батареи, или к системам с температурными различиями. Системы такого рода могут быть рассмотрены только при возможности их разделения на компоненты, каждая из которых находится в тепловом равновесии. Тогда можно применить результаты Найквиста отдельно к каждой компоненте системы.

ГЛАВА 5

ШУМЫ И СТАТИСТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

5.1. Введение

В любой макроскопической системе, например в резисторе, полупроводниковом диоде или электронной лампе, содержится чрезвычайно большое число атомных или субатомных частиц. Полное описание такой системы в классической физике включало бы не только описание ее физической структуры, но также координат и импульсов всех этих микроскопических частиц. В квантовой механике полное описание соответствовало бы заданию точного квантового состояния системы в целом и включало бы то же число параметров. В действительности для макроскопической системы мы обычно имеем только макроскопическое описание ее состояния, выполненное с относительно небольшим числом переменных, и это описание столь неполное, что определяет лишь большой ансамбль возможных микросостояний системы. Однако внутри этого ансамбля могут быть подансамбли микросостояний, которые хотя и соот-

ветствуют данному макроскопическому описанию, в действительности приводят к различным наблюдаемым или потенциально наблюдаемым свойствам. Например, если небольшой угольный стержень описывается только как сопротивление, равное 1 МОм при температуре 300 К, то существует несколько подансамблей, согласующихся с этим описанием, которые отличаются друг от друга распределением подвижного заряда в стержне. Некоторые из этих подансамблей соответствуют состояниям, в которых имеется макроскопически наблюдаемая разность потенциалов между концами стержня. Если, например, в какой-то момент времени измеренная разность потенциалов равна +10 мкВ, то это означает, что в данный момент стержень находится в состоянии, принадлежащем определенному подансамблю состояний. Но поскольку стержень, температура которого постоянна, должен находиться в контакте с другими системами или по крайней мере в нем должен происходить обмен энергией между различными внутренними степенями свободы, т. е. между носителями заряда и нормальными колебаниями кристаллической решетки, то состояние стержня не будет постоянно принадлежать этому определенному подансамблю состояний, и в более поздний момент времени разность потенциалов может быть совершенно иной.

Для другого случая два измерения следуют в близкой последовательности, тогда вторая разность потенциалов скорее всего будет близка по значению к первой. Корреляция между двумя последовательными результатами измерений будет зависеть как от интервала между измерениями, так и от динамики внутренних процессов в резисторе. Они определяют, как быстро исчезает одна ситуация в подансамбле состояний и реализуется другая. Очевидно, на практике разность потенциалов между концами стержня, значение которой не может быть предсказано, должна рассматриваться как шум. Таким образом, мы можем рассматривать шум и флуктуации как явления, представляющие собой случайные переходы системы из состояния, принадлежащего одному подансамблю, в другое состояние, принадлежащее другому подансамблю состояний, в пределах полного ансамбля возможных микросостояний. Ограничения, накладываемые на возможные микросостояния, определяются только макроскопическим описанием рассматриваемой системы. При условии, что каждый рассматриваемый подансамбль приводит к различным результатам измерений определенных величин, эти флуктуации будут экспериментально наблюдаться как шумы.

В нашем примере с угольным стержнем или резистором в случае разомкнутых выводов на его концах полный ансамбль содержит только микросостояния, которые не приводят к суммарному внешнему макроскопическому току. Однако флуктуации между подансамблями этого полного ансамбля могут рассматриваться как флуктуации в распределении заряда или разности потенциалов. И наоборот, если мы рассматриваем короткозамкнутый стержень, то полный ансамбль содержит только микросостояния, которые не

приводят к разности потенциалов, но теперь он, в свою очередь, содержит состояния, соответствующие ненулевому внешнему току. В этом случае мы будем наблюдать флуктуации между подансамблями, приводящие к различным величинам тока, и измеренный шум будет шумом тока во внешнем проводнике.

Представленная картина основывается на описании макроскопической систем, принятом в статистической механике. В ней макроскопическая система определяется заданием ее химического состава и ограниченного числа макроскопических параметров, таких как температура, объем, поверхностное натяжение. Набор параметров определяет ансамбль возможных микросостояний, в которых может находиться система. Каждому из этих возможных микросостояний будут соответствовать вполне определенные значения всех возможных макроскопических переменных, связанных с этой системой, например полной энергии, давления, разности потенциалов между двумя точками системы и тока в какой-то ее части. В свою очередь, определенная величина каждой из этих добавочных макроскопических переменных определяет группу микроскопических состояний или подансамбль, принадлежащий полному статистическому ансамблю. Тогда законы статистической механики позволяют вычислить вероятность появления каждого из этих подансамблей и, следовательно, вероятность определенных значений величин добавочных макроскопических переменных. Более того, внутренняя структура системы и динамические законы, которые определяют ее поведение, позволяют вычислить вероятность перехода этой системы из состояния, принадлежащего некоторому подансамблю в момент времени t_1 , в состояние, принадлежащее определенному подансамблю в момент времени t_2 . Так, например, если два подансамбля микросостояний определяются током I , текущим во внешнем проводнике, то можно вычислить функцию корреляции токов $\langle I(t_1)I(t_2) \rangle$. Этого в соответствии с теоремой Винера — Хинчина достаточно для того, чтобы получить энергетический спектр шума тока I . Мы используем такой подход для изучения тепловых шумов и дробового шума и их связи друг с другом и с основными понятиями статистической механики. Читатель, не знакомый со статистической механикой, может опустить разд. 5.2 и 5.3 или обратиться к «Элементарной статистической физике» Киттеля [21], где изложение основных законов статистической механики наиболее подходит к исследованию указанного круга вопросов.

Статистическая механика представляет прежде всего способы вычисления усредненных характеристик макроскопической системы, вполне достаточных для описания ее состояния равновесия. По существу это достигается вычислением вероятности появления некоторых групп или наборов микросостояний. Если, например, в сопротивлении определенной структуры мы определим группу состояний для электронов проводимости как состояния, в которых x — компонента скорости электрона находится между v_x и v'_x , то статистическая механика дает возможность найти вероятность то-

го, что в этой группе состояний могут находиться n электронов. Зная вероятность, можно вычислить среднее значение числа электронов в этих состояниях, а также флуктуации около среднего значения. Другими словами, если для определенной группы состояний среднее значение некоторой величины равно N_i и имеется последовательность мгновенных измерений вида $N_i + v_{i1}$, $N_i + v_{i2}$, $N_i + v_{i3}$ и т. д., то можно рассчитать средний квадрат отклонения:

$$\langle v_i^2 \rangle = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M v_{ik}^2.$$

Следовательно, статистическая механика дает сведения о мгновенных флуктуациях чисел заполнения состояний, исходя из их средних величин. Наша задача — связать ее выводы с результатами для временного развития флуктуаций макроскопических измеряемых величин, которые определяются числами заполнения.

5.2. Основные соотношения

Для определенности допустим, что мы имеем дело с такой системой, как сопротивление, полупроводниковый диод или электронная лампа, выводы которых соединены внешним проводником, имеющим незначительное сопротивление и что ток I в этом проводнике является макроскопической переменной, характеризующей рассматриваемую систему. Подвижные носители зарядов (которые для простоты считаем электронами, хотя они могут быть ионами или дырками) имеют заряд e и микроскопические состояния системы классифицируются таким образом, что если в момент времени t в группе состояний, обозначенных индексом i , имеется $n_i(t)$ электронов, то результирующий вклад этих состояний в ток I в момент времени t равен $\zeta_i n_i(t)$, где ζ_i — функция, определяемая структурой системы. Следовательно, общий ток есть сумма по всем группам состояний:

$$I(t) = \sum_i \zeta_i n_i(t). \quad (5.1)$$

Затем разобьем каждый член n_i на две части: среднее значение N_i и флуктуацию $v_i(t)$. Средний ток определяется выражением

$$\langle I \rangle = \sum_i \zeta_i N_i, \quad (5.2)$$

а флуктуация тока равна $\sum \zeta_i v_i(t)$. Пусть далее или $\langle I \rangle$ равен нулю, или мы исследуем только флуктуационную компоненту тока, произведя замену I на $I - \langle I \rangle$. Следовательно, можно выразить функцию корреляции для I как

$$\Psi(t) = \langle I(t)I(0) \rangle = \sum_i \sum_j \zeta_i \zeta_j \langle v_i(t) v_j(0) \rangle, \quad (5.3)$$

где в предположении стационарности процесса начало отсчета времени несущественно. Энергетический спектр тока I имеет вид

$$\omega(f) = 4 \int_0^{\infty} \Psi(t) \cos 2\pi f t dt = 4 \sum_i \sum_j \zeta_i \zeta_j \mu_{ij}, \quad (5.4)$$

где

$$\mu_{ij} = \int_0^{\infty} \langle v_i(t) v_j(0) \rangle \cos 2\pi f t dt. \quad (5.5)$$

Для вычисления μ_{ij} необходимо знать, как возникают флуктуации v_i и как они исчезают. Исчезновение флуктуаций, определяемое динамикой системы, будет рассмотрено далее. Корреляция флуктуации в начальный момент времени определяется законами статистической механики. Если в системе при температуре T среднее значение чисел заполнения групп состояний равно N_i , то средний квадрат отклонения от N_i в любой момент времени выражается в виде

$$\langle v_i^2 \rangle = kT \frac{\partial N_i}{\partial \mu}, \quad (5.6)$$

где k — постоянная Больцмана, а μ — химический потенциал. Для системы с постоянными температурой и давлением выражение (5.6) эквивалентно следующему:

$$\langle v_i^2 \rangle = -kT \frac{\partial N_i}{\partial E_i}, \quad (5.7)$$

где E_i — энергия, приходящаяся на одну частицу в данной группе состояний. Полученный результат можно упростить, если известно, какой статистике подчиняются частицы: Ферми — Дирака, классической статистике или статистике Бозе — Эйнштейна. Соответственно получаем

$$\left. \begin{aligned} \langle v_i^2 \rangle &= n_i (1 - n_i/g_i); \\ \langle v_i^2 \rangle &= n_i; \\ \langle v_i^2 \rangle &= n_i (1 + n_i/g_i), \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

где g_i — общее число различных микроскопических состояний в группе с индексом i . В отсутствие вырождения, когда $n_i \ll g_i$, классический результат справедлив для любой статистики. Важность этого вывода будет ясна далее при обсуждении дробовых шумов.

Все исходные соотношения мы используем в следующем разделе при исследовании тепловых шумов в проводнике. Такой подход обладает большой общностью и применим независимо от того, являются ли носители электронами или нет и является ли газ носителей в проводнике вырожденным или нет.

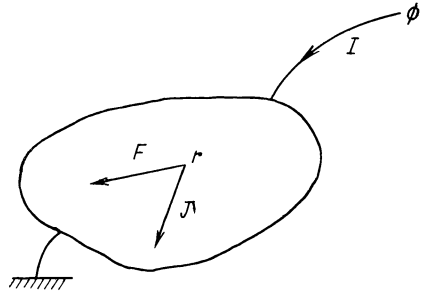
5.3. Тепловые шумы

На рис. 5.1 показан проводник произвольной формы с двумя выводами, один из которых заземлен, а другой находится под потенциалом ϕ . Потенциал ϕ создает поле \mathbf{F} в точке \mathbf{r} , и в результате ток с плотностью \mathbf{J} (не обязательно параллельной \mathbf{F}) протекает в проводнике в точке \mathbf{r} . Будем полагать, что система линейна и поэтому \mathbf{F} и \mathbf{J} пропорциональны ϕ . Запишем

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \phi \mathbf{S}(\mathbf{r}), \quad (5.9)$$

где \mathbf{S} — вещественная векторная функция координат.

Рис. 5.1. Проводник с двумя выводами



Пусть E — энергия системы. Тогда мощность P_i , выделяемая в системе в точке \mathbf{r} в результате действия поля \mathbf{F} на движущуюся i -ю частицу с зарядом e и импульсом \mathbf{p}_i , такова:

$$P_i = e(\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \nabla_i E) = e\phi(\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \nabla_i E), \quad (5.10)$$

где $\nabla_i E$ есть сокращенное обозначение величины $(\nabla_{\mathbf{p}} E)_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_i}$ [ее x -компонента равна $(\partial E / \partial p_x)_{\mathbf{p}_i}$] и, следовательно, $\nabla_i E$ есть скорость i -й частицы.

Движение отдельных носителей заряда в проводнике не вызывает изменения энергии поля системы (детальное обсуждение в приложении А), и поэтому мы можем приравнять P_i к мощности, вырабатываемой источником разности потенциалов ϕ . Таким образом, во внешней цепи в результате движения i -го носителя заряда течет ток

$$I_i = e(\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \nabla_i E). \quad (5.11)$$

Если теперь условимся определять i -ю группу состояний носителей заряда (электронов) координатой \mathbf{r} и их импульсом \mathbf{p}_i , то как величина ζ , так и числа заполнения в уравнении (5.1), выражающем ток I через числа заполнения i -й группы состояний, становятся функциями \mathbf{r} и \mathbf{p}_i . Представив указанную зависимость в виде

$$\zeta_{i\mathbf{r}} = e(\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \nabla_i E), \quad (5.12)$$

получим

$$I(t) = e \sum_i \sum_r [\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \nabla_i E] n_{ir}(t). \quad (5.13)$$

Величина μ_{ij} , которая появляется в уравнениях (5.4) и (5.5), становится теперь функцией четырех параметров: двух импульсов \mathbf{p}_i и \mathbf{p}_j и двух координат \mathbf{r} и \mathbf{s} . Не будем здесь явно указывать эту параметрическую зависимость, но для того чтобы показать, что в выражении вида

$$\Psi(t) = e^2 \sum_{ir} \sum_{js} (\mathbf{S} \cdot \nabla_i E) (\mathbf{S} \cdot \nabla_j E) \langle v_i(t) v_j(0) \rangle$$

один множитель \mathbf{S} зависит от \mathbf{r} в паре с \mathbf{p}_i , а другой — от \mathbf{s} в паре с \mathbf{p}_j , в то время как $v_i(t)$ зависит от \mathbf{p}_i и \mathbf{r} и $v_j(0)$ от \mathbf{p}_j и \mathbf{s} , условно вынесем индексы параметров под знаки суммирования. Теперь необходимо вычислить значение величины

$$\mu_{ij} = \int_0^\infty \langle v_{ir}(t) v_{js}(0) \rangle \cos 2\pi f t dt, \quad (5.14)$$

но перед этим кратко рассмотрим кинетическое уравнение Больцмана:

$$\frac{dn_i}{dt} = \left(\frac{dn_i}{dt} \right)_{\text{ст}}, \quad (5.15)$$

которое определяет динамическое поведение носителей. Это уравнение означает, что общий приток частиц в ячейку фазового пространства или группу состояний при движении равен притоку, обусловленному столкновениями. В отсутствие приложенного поля (т. е. когда проводники выводов на рис. 5.1 закорочены) средние значения чисел заполнения состояний не изменяются, и поэтому уравнение (5.15) сводится к уравнению движения для их флуктуаций:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \right)_{\text{ст}}. \quad (5.16)$$

Производная по времени в левой части уравнения есть частная производная, так как рассматривается группа состояний с определенными импульсом и координатами носителей. Для малых флуктуаций можно считать, что интеграл столкновений линеен по флуктуациям, но так как флуктуации в одной группе состояний влияют на флуктуации в другой близлежащей группе, то искомая связь получается в виде линейного оператора

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \sum_{js} C_{ij} v_j, \quad (5.17)$$

где строки матрицы C_{ij} определяются совокупностью индексов i и r , а столбцы — j и s .

Теперь вернемся к уравнению (5.14), которое дважды проинтегрируем по частям. Из-за $\langle v_{ir}(\infty) v_{js}(0) \rangle = 0$ получаем

$$(2\pi f)^2 \mu_{ij} = - \langle \dot{v}_i(0) v_j(0) \rangle - \int_0^{\infty} \langle \ddot{v}_i(t) v_j(0) \rangle \cos 2\pi f t dt. \quad (5.18)$$

Положив $\omega = 2\pi f$ и воспользовавшись уравнением (5.17) для того, чтобы исключить производные по времени, с учетом обозначений

$$u_{ij} = \langle v_i(0) v_j(0) \rangle, \quad (5.19)$$

получим

$$\omega^2 \mu_{ij} = -C_{ik} u_{kj} - C_{ik} C_{kl} \mu_{lj}, \quad (5.20)$$

где по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. В матричной записи это уравнение имеет вид

$$(\omega^2 + C^2) \mu = -C u. \quad (5.21)$$

Несмотря на то, что матрица C имеет по крайней мере пять нулевых собственных значений, соответствующих интегралам движения (число частиц, общая энергия и три компоненты суммарного импульса), матрица $\omega^2 + C^2$ положительно определена и потому имеет обратную матрицу.

Пусть

$$D = (\omega^2 + C^2)^{-1} C, \quad (5.22)$$

тогда решение уравнения (5.21) будет

$$\mu = -D u. \quad (5.23)$$

В покомпонентной записи со всем набором индексов, нумерующих состояния, это уравнение принимает вид

$$\mu_{ir,js} = -D_{ir,kl} u_{kl,js}. \quad (5.24)$$

Полученное уравнение выражает компоненты μ_{ij} [которые дают энергетический спектр $\omega(f)$, согласно уравнению (5.4), где ξ заменено в соответствии с уравнением (5.12)] через корреляцию u флуктуаций в один и тот же момент времени и матрицу D , которая отражает динамику системы. Матрица D описывает связь между носителями зарядов и термостатом, представленным кристаллической решеткой. Ясно, что эта матрица связана с сопротивлением системы, но сначала рассмотрим особый случай, который проясняет ее смысл. Если флуктуации в любой группе состояний имеют одно и то же время релаксации τ , то $C = -1/\tau$ и, следовательно, $D = -\tau/(1 + \omega^2 \tau^2)$.

Значением величины D оценивается вклад фурье-компоненты на частоте $\omega/(2\pi)$ флуктуаций в их затухание.

Корреляцию u флуктуации в один и тот же момент времени можно получить из уравнения (5.7), и так как в тот же момент

времени флуктуации чисел заполнения неперекрывающихся групп состояний не коррелированы, то

$$u_{ij} = -\delta_{ij}\delta_{rs}kT \frac{\partial N_{js}}{\partial E}. \quad (5.25)$$

Объединив полученные результаты, представим выражение для энергетического спектра в виде

$$\omega = 4e^2 kT \sum_i \sum_r \sum_j \sum_s (\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \nabla_i E) (\mathbf{S}(\mathbf{s}) \cdot \nabla_j E) D_{ir, js} \frac{\partial N_{js}}{\partial E}. \quad (5.26)$$

Теперь упростим это выражение.

Запишем для этого кинетическое уравнение Больцмана при наличии поля \mathbf{F} , вызванного приложенным потенциалом φ :

$$\frac{\partial v_{ir}}{\partial t} + e\mathbf{F} \cdot \nabla_p (N_{ir} + v_{ir}) = \sum_j \sum_s C_{ir, js} v_{js}, \quad (5.27)$$

где v_{ir} — небольшое возмущение среднего распределения N_{ir} , вызванное полем \mathbf{F} . Его можно решить с точностью до величины первого порядка по \mathbf{F} . Если предположить, что \mathbf{F} и v изменяются как $\exp(j\omega t)$, то получим

$$(C - j\omega)v = e(\mathbf{F} \cdot \nabla_p N), \quad (5.28)$$

так что

$$v = (C^2 + \omega^2)^{-1} (C + j\omega) e(\mathbf{F} \cdot \nabla_p N).$$

Мощность, рассеянная вблизи точки \mathbf{r} и обусловленная носителями с импульсом \mathbf{p}_i , равна действительной части выражения $1/2 \cdot v_{ir} e(\mathbf{F}^* \cdot \nabla_i E)$, в которое не входит мнимый член правой части уравнения (5.28). Оставшийся действительный член содержит матрицу D , определенную уравнением (5.22), и поэтому общая рассеиваемая мощность будет

$$P = \frac{1}{2} e^2 \sum_i \sum_r \sum_j \sum_s (\mathbf{F}^*(\mathbf{r}) \cdot \nabla_i E) D_{ir, js} (\mathbf{F}(\mathbf{s}) \cdot \nabla_j N_{js}).$$

Если $Y = jX + G$ есть полная проводимость, измеренная на выводах проводника [см. рис. (5.1)], то рассеиваемая мощность равна $1/2 \cdot \varphi \varphi^* G$, и учтя, что $\mathbf{F} = \varphi \mathbf{S}$, получим

$$G = e^2 \sum_i \sum_r \sum_j \sum_s (\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \nabla_i E) D_{ir, js} (\mathbf{S}(\mathbf{s}) \cdot \nabla_j N_{js}). \quad (5.29)$$

Учитывая также, что

$$\nabla_j N_{js} = \frac{\partial N_{js}}{\partial E} \nabla_j E, \quad (5.30)$$

можно видеть, что суммы в уравнениях (5.29) и (5.26) идентичны с точностью до коэффициента $4kT$. Следовательно, энергетический спектр тока во внешнем проводнике приводится к виду

$$\omega = 4kTG. \quad (5.31)$$

Это формула Найквиста [см. уравнение (4.8)]. Подход, представленный в этом разделе, конечно, не намного более строг, но, несомненно, гораздо более сложный, чем у Найквиста. Однако такой подход выявляет, как флуктуации исследуются методами статистической механики. А это важно, потому что широко известно, что флуктуации, исследуемые в статистической механике, непосредственно связаны с флуктуациями, наблюдаемыми как шумы. Представленный подход, по крайней мере, со всей очевидностью демонстрирует сложность этой связи.

Ранее мы показали, что энергетический спектр тока является взвешенной суммой взаимных энергетических спектров μ_{ij} флуктуаций населенностей. В свою очередь, эти взаимные спектры зависят от величины корреляции u_{ij} флуктуаций в один и тот же момент времени и от динамики процесса, описанного в уравнении Больцмана интегралом столкновения, который приводит к рассасыванию флуктуаций. Первая зависимость определяется только равновесным распределением носителей, в то время как вторая — взаимодействием между носителями и решеткой. В конечном итоге первая зависимость приводит к появлению в ω члена kT , а вторая — члена проводимости G . Такой анализ допустим вследствие предположения, что флуктуации чисел заполнения, которые определяют член u_{ij} , суть равновесные тепловые флуктуации. Если это справедливо, то энергетический спектр тока выражается уравнением (5.31), и оно применимо к любой системе, в которой носители зарядов находятся в равновесии с кристаллической решеткой и для которых может быть определена температура T , равная температуре решетки. Важность этого результата выяснится в гл. 11, в которой будут рассматриваться шумы в полевых транзисторах. В следующем разделе применим аналогичную аргументацию к дробовому шуму, когда будем рассматривать носители, не находящиеся в тепловом равновесии.

5.4. Дробовой шум

В электронных лампах и полупроводниковых приборах, использующих $p-n$ -переход, носители заряда взаимодействуют с полями, возникающими вследствие приложенных внешних напряжений, только в отдельных областях прибора: в первом случае — в вакуумном пространстве между катодом и другими электродами, во втором — в обедненном слое перехода. Причина этого в том, что поля внутри прибора, вызванные внешними источниками напряжения, равны нулю, за исключением указанных областей. Понятно, что в электронной лампе в области взаимодействия носителей с полем электроны не обмениваются энергией с тепловым резервуаром или кристаллической решеткой; в $p-n$ -переходе отсутствие такого обмена энергией менее очевидно и определяется тем, что в обедненном слое движение электронов происходит под действием макроскопического поля в слое и небольшое число столкновений в слое почти не влияет на это движение. Поэтому в обоих случаях

флуктуации в поведении электронов в области взаимодействия представляют собой следствие флуктуаций эмиссии электронов в эту область, т. е. дробового шума. Дробовой шум в этом смысле проще, чем шум теплового происхождения.

Будем классифицировать электроны, покидающие область эмиттера или катод, по их импульсу \mathbf{p}_i и координатам \mathbf{r} в тот момент, когда они пересекают границу эмиттера или поверхность катода. При этом возникает набор непересекающихся классов (i, r) излучаемых электронов. Рассмотрим число n_{riT} электронов, попадающих в полученный таким образом класс (i, r) за промежуток времени T .

Сначала разобьем промежуток времени T на K интервалов, обозначенных индексами k , каждый длиной t , малой по сравнению с любым временем релаксации в эмиттере. При таком разбиении отсутствуют столкновения электронов в эмиттере в течение промежутка времени t . В результате в течение k -го интервала времени существует взаимно однозначное соответствие между классом излучаемых электронов и группой состояний электронов в эмиттере. Так как флуктуации чисел заполнения различных групп состояний в один и тот же момент времени не коррелированы (это справедливо и в течение k -го элементарного интервала в силу выбора его продолжительности), а электроны определенного класса, покинув катод, далее не взаимодействуют, то отсутствуют как корреляции флуктуаций числа излученных электронов разных классов, так и корреляции флуктуаций числа электронов одного класса, излученных в течение различных временных интервалов. Следовательно, если v_{irt} — это флуктуация числа электронов класса (i, r) , излучаемых за один интервал, то флуктуации в конечном интервале T , содержащем K элементарных интервалов, удовлетворяют уравнениям

$$\langle v_{irT}^2 \rangle = \sum_{k=1}^K \langle v_{irt}^2 \rangle \quad (5.32)$$

и

$$\langle v_{irT} v_{jsT} \rangle = 0, \text{ если } r \neq s \text{ или } i \neq j. \quad (5.33)$$

Излучаемые электроны попадают в область взаимодействия с полем, в которой электронный газ невырожден и подчиняется классической статистике. Это следует из того, что или распределение в эмиттере было классическим, или что газ был вырожденным, но переход через потенциальный барьер резко снижает плотность излучаемых электронов по сравнению с плотностью электронов в эмиттере, снимая тем самым вырождение. Первый случай приблизительно соответствует $p-n$ -переходу, второй — термоэлектронному катоду. В любом случае флуктуации в числе излученных электронов определенного класса являются классическими, и поэтому

$$\langle v_{irt}^2 \rangle = N_{irt}, \quad (5.34)$$

где N_{irt} — среднее число электронов класса (i, r) , излученных за время t . Теперь мы имеем

$$\langle v_{irT}^2 \rangle = N_{irT} \quad (5.35)$$

и флуктуации тока

$$\langle (\overline{\Delta I})^2 \rangle = \frac{e^2}{T^2} \langle v_{irT}^2 \rangle = \frac{e}{T} \frac{eN_{irT}}{T} = \frac{e}{T} I_{oir}, \quad (5.36)$$

где I_{oir} — средний ток эмиссии, определяемый электронами класса (i, r) . Следовательно, функция корреляции Макдональда $\chi_{ir}(T)$ для каждого класса равна eTI_{oir} , и (см. гл. 3) каждый класс дает вклад в энергетический спектр шумового тока, определяемый формулой

$$\omega_{ir} = 2eI_{oir}. \quad (5.37)$$

Общий спектр для полного тока имеет вид

$$\omega = \sum_{ir} \omega_{ir} = 2e \sum_{ir} I_{oir} = 2eI_0. \quad (5.38)$$

Полученный результат совпадает с формулой, выведенной нами ранее, но существует дополнительная информация, содержащаяся в уравнении (5.37). Если эмиттированный ток произвольно разделен на непересекающиеся классы, например определяемые координатами \mathbf{r} на поверхности излучения или импульсом электронов \mathbf{p}_i во время эмиссии, то каждый класс отдельно отражает типичный спектр мощности для дробового шума и флуктуации в различных классах являются некоррелированными. В следующем разделе мы исследуем некоторые последствия такого вывода, а позднее воспользуемся этим результатом.

Теперь можно установить различие между процессами дробовых и тепловых шумов. При дробовых шумах область, в которой носители заряда взаимодействуют с внешними полями, физически отделена от области, в которой устанавливаются их статистические свойства. Следовательно, что касается взаимодействия носителей с внешними полями, то взаимодействия и случайные процессы, происходящие в области излучения, не влияют друг на друга. В шумах теплового происхождения, наоборот, область взаимодействия совпадает с областью, где возникают флуктуации носителей, и во время взаимодействия с полями носители остаются приблизительно в тепловом равновесии с термостатом или кристаллической решеткой. В этой области взаимодействия носителей заряда с полем флуктуации их чисел заполнения непрерывно появляются и исчезают, в то время как сами носители посредством столкновений взаимодействуют с решеткой. Амплитуда флуктуаций зависит от kT , а динамика их исчезновения — от природы процессов столкновения, которые, в свою очередь, определяют проводимость G .

Таким образом, в биполярном транзисторе флуктуации в потоке активных носителей устанавливаются в эмиттере, в меньшей степени, в базе, где происходят столкновения, но отсутствуют поля,

связанные с внешними приложенными напряжениями. Поля и взаимодействия носителей с полем появляются только в обедненных слоях переходов эмиттер — база и база — коллектор. Биполярные транзисторы — это типичные приборы с дробовыми шумами. Напротив, в полевом транзисторе флуктуации устанавливаются в канале, и там же носители взаимодействуют с полями, связанными с приложенными напряжениями, поэтому полевой транзистор является прибором, шумы которого определяются тепловыми шумами.

5.5. Дробовой шум, флуктуации скорости и температура эмиттера

В суммарном энергетическом спектре для полного излученного тока (5.38) явно не фигурирует температура эмиттера, но если мы рассмотрим отдельные его компоненты [уравнение (5.37)], то увидим, что температура эмиттера влияет на разделение полного излученного тока по классам, связанным с импульсом электронов p_i . Чем выше температура эмиттера, тем более высокие значения p_i вносят существенный вклад в полный ток. Это имеет важное значение и для электронных ламп, и для биполярных полупроводниковых приборов, которые мы сейчас рассмотрим.

В электронных лампах механизм усиления фактически не зависит от теплового разброса по скоростям излучаемых катодом электронов. В то же время взаимодействие электронов в активной области определяется дальнедействующими кулоновскими силами, и это ведет к корреляции между флуктуациями числа электронов в классах, различающихся тепловыми скоростями при эмиссии. Детальный механизм усиления достаточно сложен и зависит от того, имеем ли мы дело с прибором с пространственно-ограниченным зарядом, таким как триод на низких частотах, где время пролета электронов незначительно, или с электронно-лучевой лампой, такой как лампа бегущей волны, где время пролета электронов велико. В случае с триодом корреляции ведут к понижению общего энергетического спектра тока от величины $2eI_0$ до $\Gamma^2 2eI_0$, где коэффициент депрессии Γ^2 (коэффициент подавления шума пространственным зарядом) зависит от отношения средней тепловой энергии электронов в области сетка — катод к их потенциальной энергии. Чем больше диапазон тепловых скоростей при эмиссии, который вносит наибольший вклад в I_0 , тем менее эффективен процесс подавления шумов и, в общем случае, Γ^2 — величина порядка $kT/(eV_e)$, где T — температура катода (эмиттера), а eV_e — потенциальная энергия электронов вблизи сетки. Поэтому в триоде свойства сигнала не зависят от T , а средний квадрат шумового тока на выходе возрастает с ростом T .

В СВЧ электронно-лучевых приборах электроны взаимодействуют с внешними полями в пространстве дрейфа, значительно удаленном от катода, и появляющийся во внешней цепи шум протекает частично от флуктуаций тока в пучке электронов на входе

пространства дрейфа, а частично от флуктуаций скоростей электронов, входящих в пространство дрейфа. Как мы увидим, эти флуктуации зависят от T . Таким образом, отношение шум/сигнал на выходе прибора возрастает с ростом T .

В биполярном транзисторе шум на выходе (ток коллектора) имеет энергетический спектр, не зависящий от температуры T и определяемый уравнением (5.38). Процесс усиления сигнала, однако, зависит от крутизны характеристики или от скорости изменения токов коллектора и эмиттера при изменении напряжения, приложенного между базой и эмиттером. Этот процесс связан с изменением количества излучаемых электронов таким образом, что как только число излучаемых электронов возрастает с повышением температуры (температуры эмиттера), так уменьшается та часть общего тока эмиттера, которая меняется при данном изменении напряжения база — эмиттер. Выходной сигнал при фиксированном входном сигнале уменьшается с возрастанием температуры T . Следовательно, отношение шум/сигнал на выходе снова возрастает с увеличением температуры T . В каждом случае отношение шум/сигнал на выходе увеличивается с ростом температуры той области, которая определяет статистические свойства активных носителей заряда, и этот факт, по-видимому, представляет собой общее правило. В последующих главах мы рассмотрим несколько примеров, подтверждающих это правило. Оно применимо ко всем типам усилительных ламп и транзисторов, а также в несколько ином смысле к параметрическим усилителям и мазерам. Исключением из этого правила является фотодетектор, у которого статистические свойства активных носителей заряда (фотоэлектронов) определяются не процессом теплового равновесия, а по существу неравновесным фотоэлектрическим взаимодействием.

Теперь рассмотрим более внимательно концепцию флуктуаций скорости в потоке излученных электронов — понятие, впервые изложенное Рэком [31].

Если в течение некоторого интервала времени T n_i электронов со скоростью v_i пересекают неподвижную в пространстве плоскость, то средняя скорость этих электронов будет

$$\bar{v}^T = \frac{\sum_i n_i v_i}{\sum_i n_i}.$$

Теперь предположим, что среднее количество электронов, пересекающих эту плоскость на интервале времени T со скоростью v_i , равно N_i . Тогда средняя скорость за длительный период времени

$$\bar{v} = \frac{\sum_i N_i v_i}{\sum_i N_i},$$

и флуктуации средней скорости на интервале времени T будут равны

$$\overline{\Delta v^T} = \overline{v^T} - \bar{v} = \frac{\sum n_i v_i}{\sum N_i} - \frac{\sum N_i \bar{v}_i}{\sum N_i}.$$

Пусть $v_i = n_i - N_i$ — флуктуации в числе электронов n_i и допустим, что $|\sum v_i| \ll \sum N_i$. Тогда получим

$$\overline{\Delta v^T} \approx \frac{1}{\sum N_i} \left\{ \sum v_i v_i - \sum N_i v_i \left(\frac{\sum v_i}{\sum N_i} \right) \right\},$$

или в другом виде

$$\overline{\Delta v^T} = \frac{1}{\sum N_i} \{ \sum v_i v_i - \bar{v} \sum v_i \}. \quad (5.39)$$

Так как флуктуации в различных классах скоростей являются некоррелированными, то усреднение по ансамблю величины $(\Delta v^T)^2$ дает

$$\langle (\Delta v^T)^2 \rangle = \left(\frac{1}{\sum N_i} \right)^2 \{ \sum \langle v_i^2 \rangle v_i^2 - \bar{v}^2 \sum \langle v_i^2 \rangle \}.$$

Так как $\langle v_i^2 \rangle = N_i$, то

$$\langle (\Delta v^T)^2 \rangle = \frac{1}{\sum N_i} \{ \bar{v}^2 - (\bar{v})^2 \}. \quad (5.40)$$

Если I_0 — полный ток, то $e \sum N_i = I_0 T$ и, следовательно,

$$\langle (\Delta v^T)^2 \rangle = \frac{e}{I_0 T} \{ \bar{v}^2 - (\bar{v})^2 \}. \quad (5.41)$$

Поэтому функция Макдональда $\chi(T)$ имеет вид

$$\chi(T) = T^2 \langle (\Delta v^T)^2 \rangle = \frac{eT}{I_0} \{ \bar{v}^2 - (\bar{v})^2 \}$$

и определяет энергетический спектр флуктуаций скорости в рассматриваемой плоскости, равный

$$\omega_v = \frac{2e}{I_0} \{ \bar{v}^2 - (\bar{v})^2 \}. \quad (5.42)$$

Это результат Рэка.

Для флуктуации тока, очевидно, можно записать

$$\overline{\Delta I^T} = \frac{e}{T} \sum v_i,$$

а энергетический спектр тока определяется формулой

$$\omega_I(f) = 2eI_0.$$

Можно также вычислить взаимную корреляцию флуктуаций

$$\langle \overline{\Delta I^T} \overline{\Delta v^T} \rangle = \left\langle \frac{e}{T \sum N_i} (\sum v_i v_i - \bar{v} \sum v_i) \sum v_i \right\rangle,$$

и поскольку вновь флуктуации в различных классах являются некоррелированными, то полученное выражение приобретает вид

$$\begin{aligned} \langle \overline{\Delta I^T \Delta v^T} \rangle &= \frac{e}{T \Sigma N_i} (\Sigma v_i \langle v_i^2 \rangle - \bar{v} \Sigma \langle v_i^2 \rangle) = \\ &= \frac{e}{T \Sigma N_i} (\Sigma v_i N_i - \bar{v} \Sigma N_i) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, флуктуации скорости и тока не коррелированы при условии, конечно, что отсутствует когерентное взаимодействие между поверхностью эмиттера (катода) и плоскостью, на которой мы оцениваем флуктуации.

На поверхности катода, где для электронов распределение скоростей, нормальных к поверхности, является бальцмановским, получим средние значения, выраженные через температуру катода T :

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \int_0^{\infty} v \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) d\left(\frac{mv^2}{2kT}\right) = \left(\frac{\pi kT}{2m}\right)^{1/2}, \\ \bar{v}^2 &= 2kT/m, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\omega_v(f) = \frac{e}{m} \frac{4kT}{I_0} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right). \quad (5.43)$$

Можно также рассчитать значение величин \bar{v} , \bar{v}^2 и ω_v на плоскости с положительным относительно катода потенциалом φ . Так, например,

$$\bar{v} = \int \left(v^2 + \frac{2e\varphi}{m}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) d\left(\frac{mv^2}{2kT}\right),$$

и, полагая $\alpha = e\varphi/(kT)$, получаем

$$\bar{v}^2 - (\bar{v})^2 = \frac{2kT}{m} f(\alpha) \quad (5.44)$$

и

$$\omega_v = \frac{e}{m} \frac{4kT}{I_0} f(\alpha), \quad (5.45)$$

где

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= 1 + \alpha - \left\{ \alpha^{1/2} + \frac{1}{2} \pi^{1/2} e^{\alpha} (1 - \operatorname{erf} \alpha^{1/2}) \right\}^2, \\ \operatorname{erf} \alpha &= 2\pi^{-1/2} \int_0^{\alpha} \exp(-t^2) dt. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Для $\alpha=0$ имеем $f(\alpha)=1-\pi/4$ и для $\alpha>20$ имеем $f(\alpha)\sim(4\alpha)^{-1}$. В работе [33] составлена таблица функции $f(\alpha)$ для промежуточных значений α . Значение функции при $\alpha=3/4$ приблизительно равняется $(1-\pi/4)/2$.

Смысл вычисления Рэка состоит в том, что в высокочастотных электронных лампах шум главным образом определяется спектрами ω_I и ω_n в потоке электронов вблизи катода, где начинают сказываться когерентные взаимодействия.

ГЛАВА 6

ШУМЫ И КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

6.1. Введение

В большинстве электронных устройств величина кванта энергии $h\nu$ на рабочей частоте ν намного меньше, чем тепловая энергия kT , так что применима обычная формула тепловых шумов $dU^2 = 4kTRd\nu$. Для мазеров и лазеров это не справедливо. Поэтому необходимо описание шумов, которое учитывало бы квантовые эффекты. Такое описание выдвигает целый ряд сложных проблем, так как и в самой формуле Найквиста, и в производной от нее формуле понятия сопротивления рассеяния и номинальной мощности играют главную роль, а эти понятия не имеют простых квантово-механических эквивалентов. Хотя результат, полученный в гл. 5, и применяется к системам квантовых частиц, в своем окончательном виде он не содержит постоянной Планка. Это связано с тем, что, несмотря на самое общее описание носителей зарядов, приложенный потенциал и связанное с ним поле рассматривались как классические переменные. Найквист включил в свой первоначальный вывод квантовую статистическую формулу для средней энергии осциллятора, не учтя, правда, члена соответствующего нулевым колебаниям электромагнитного поля. Добавив этот член, получим

$$dU^2 = 4R \left\{ \frac{h\nu}{\exp[h\nu/(kT)] - 1} + \frac{1}{2} h\nu \right\} d\nu, \quad (6.1)$$

а номинальная мощность шума в интервале $d\nu$ станет такой:

$$dP = \left\{ \frac{h\nu}{\exp[h\nu/(kT)] - 1} + \frac{1}{2} h\nu \right\} d\nu. \quad (6.2)$$

Однако такая модификация может показаться неубедительной, так как выражение (6.2) является следствием формулы (6.1), которая включает в себя чисто классическое понятие сопротивления R , и если даже непосредственно вывести выражение (6.2), то понятие номинальной мощности шума все же будет подразумевать наличие сопротивления, в котором эта мощность может рассеиваться. Поэтому необходимо рассмотреть указанную проблему с самого начала и сформулировать теорию, согласующуюся с основными понятиями квантовой механики. Это означает, что мы будем рассматривать такие понятия, как сопротивление и диссипация (рассеяние), с точки зрения чисто статистических процессов, описывающих

связь между одной квантовой системой (цепью) и другой квантовой системой (термостатом), имеющей столько степеней свободы, что любая переданная ей энергия невозвратно теряется, перераспределяясь в ней случайным образом. Окончательный результат получим, рассмотрев ослабление сигналов и генерацию шумов в передающей линии с потерями и выразив его в такой форме, чтобы в дальнейшем этот результат можно было бы применить к системам с усилением типа мазера бегущей волны. Анализ в основном опирается на две работы [15, 37].

6.2. Принцип неопределенности

В классической механике движение системы частиц, взаимодействующих по известным законам динамики, в принципе определено, хотя необходимо признать, что практически, исключая простейшие системы, точный расчет сделать трудно. Тем не менее с полным основанием можно быть уверенным в том, что если координаты и импульсы всех частиц известны в момент времени $t=0$, то состояние системы в более поздний момент времени t будет однозначно определенным, и что если X есть наблюдаемая переменная, связанная с системой, то изменение X во времени от $X(0)$ до $X(t)$ также однозначно определено. В отличие от классической механики в квантовой механике принципиально невозможно описать начальное состояние системы, при котором $X(0)$ имело бы определенную величину, сохранив в то же самое время детерминированные уравнения движения для $X(t)$. Это ограничение выражается принципом неопределенности Гейзенберга, и законы квантовой механики дают схему для получения вероятностных заключений относительно $X(t)$, если $X(0)$ задано только в вероятностном смысле.

Обычно указанный факт формулируется следующим образом. Если в момент времени $t=0$ состояние системы определяется с наибольшей точностью, допускаемой принципом неопределенности, (при $t=0$) X , и его степени имеют средние значения $\langle X(0) \rangle$, $\langle X^2(0) \rangle$ и т. д., то мы можем составить уравнения, которые дадут средние значения X в более поздние моменты времени.

В шредингеровской картине квантовой механики состояние системы описывается функцией Ψ , которая изменяется со временем согласно уравнению Шредингера от $\Psi(0)$ до $\Psi(t)$. Определенные правила позволяют использовать Ψ для вычисления $\langle X \rangle$, $\langle X^2 \rangle$ и т. п. в любой момент времени. В гейзенберговской картине квантовой механики внимание сосредотачивается на временном развитии этих усредненных по состояниям величин. Все определяется начальным состоянием системы. Таким образом, в гейзенберговском подходе среднее значение, скажем, $X(t)$ в конечном итоге выражается через средние значения $X(0)$ и других переменных, например $Y(0)$ или $Z(0)$, характеризующих начальное состояние. По существу, расчет в гейзенберговской формулировке выглядит точно так же, как и в классической, хотя его интерпретация другая.

На начальное состояние системы $\Psi(0)$ налагаются ограничения, вытекающие из принципа неопределенности. Если система состоит из единственной частицы и наблюдаемые величины есть компоненты ее импульса p_i ($i=1, 2, 3$) и координаты r_i . Тогда принцип неопределенности гласит, что не существует состояния Ψ , для которого выполняется неравенство

$$\langle \Delta r_i^2 \rangle \langle \Delta p_j^2 \rangle \geq \left(\frac{\hbar}{4\pi} \right)^2 \delta_{ij},$$

где $\langle \Delta r_i^2 \rangle = \langle r_i^2 \rangle - \langle r_i \rangle^2$ и $\langle \Delta p_j^2 \rangle = \langle p_j^2 \rangle - \langle p_j \rangle^2$, δ_{ij} — символ Кронекера.

Записав $\hbar/(2\pi)$ как $\hbar/2$, можно переформулировать это утверждение, сказав, что для любого возможного состояния имеет место неравенство

$$\langle \Delta r_i^2 \rangle \langle \Delta p_i^2 \rangle \geq (\hbar/2)^2. \quad (6.3)$$

При этом подразумевается, что произведение неопределенностей для r_i и p_i больше или равно $\hbar/2$. Состояние, для которого выполняется равенство в (6.3), есть состояние с минимальной неопределенностью по отношению к r_i и p_i .

С точки зрения классической механики величины r_i и p_i представляют собой сопряженные переменные, или, иначе, канонически-сопряженные переменные. Что это означает, мы обсудим в следующем разделе, а сейчас обобщим соотношение (6.3). Если p_i и q_i — связанные с системой канонически-сопряженные переменные, которые могут соответствовать механическим или электрическим величинам, то для любого возможного состояния системы справедливо следующее выражение:

$$\langle \Delta p_i^2 \rangle \langle \Delta q_i^2 \rangle \geq (\hbar/2)^2. \quad (6.4)$$

Отметим также, что если p_i и q_i рассматриваются как линейные операторы, действующие на волновые функции, то соотношение (6.4) является следствием правил коммутации

$$[q_i, p_i] \equiv q_i p_i - p_i q_i = i\hbar, \quad (6.5)$$

где в правой части $i = -1^{1/2}$.

6.3. Уравнения движения Гамильтона и Гейзенберга

Понятие пар канонически-сопряженных переменных, связанных с физической системой, возникает в классической механике в формулировке Гамильтона, но нам необходимо более общее их определение, которое могло бы применяться для электромагнитных систем.

Состояние классической системы, например системы частиц, можно описать набором координат q_n ($n=1, 2, \dots, N$) и их производных по времени \dot{q}_n . Однако то же самое описание можно применить и для электрических цепей, предположив, что q_n есть заря-

ды на емкостях системы, а \dot{q}_n — токи. Полагаем также, что уравнения движения классической системы известны, они определяются законами Ньютона или Кирхгофа и имеют вид системы дифференциальных уравнений второго порядка. Исходя из этих уравнений, можно ввести такую функцию $L(q_n, \dot{q}_n)$, известную как лагранжиан системы, что уравнения движения примут вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0, \quad n = 1, 2 \text{ и т. д.} \quad (6.6)$$

Например, для резонансного контура, состоящего из индуктивности λ и подключенной параллельно ей емкости γ , справедливо выражение $L = 1/2\lambda\dot{q}^2 - q^2/(2\gamma)$, где q — заряд на γ . Отсюда $\lambda\ddot{q} + q/\gamma = 0$, что является обычным уравнением цепи. Для изолированной консервативной механической системы всегда можно представить L в виде $L = T - U$, где T — кинетическая, а U — потенциальная энергия, и получаемые отсюда аналогии полезны для определения функциональной зависимости L в немеханических системах.

Подстановка L в уравнение (6.6) приводит к верным уравнениям движения, что подтверждает правильность найденного выражения для L . Далее определим функцию H посредством соотношения

$$H = \sum_n \dot{q}_n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} - L, \quad (6.7)$$

откуда получим

$$\frac{dH}{dt} = \sum_n \left(\dot{q}_n \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} + \ddot{q}_n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) - \sum_n \left(\dot{q}_n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} + \ddot{q}_n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right).$$

На основании уравнения (6.6) правая часть (6.7) равна нулю. Следовательно, H — интеграл движения. Определим также импульс, канонически-сопряженный с q_n , как

$$p_n = \partial L / \partial \dot{q}_n, \quad (6.8)$$

откуда

$$H = \sum_n p_n \dot{q}_n - L. \quad (6.9)$$

Если в этом уравнении \dot{q}_n выражено через p_n и q_n , т. е. правая часть зависит только от p_n и q_n , то функция H в таком виде известна как гамильтониан системы. Обычно гамильтониан равняется общей энергии системы, которая, очевидно, представляет собой интеграл движения, но это равенство не обязательно. Для малых изменений p_n и q_n из уравнения (6.9) получаем

$$dH = \sum_n \left(\dot{q}_n dp_n + p_n d\dot{q}_n - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} d\dot{q}_n - \frac{\partial L}{\partial q_n} dq_n \right).$$

Принимая во внимание (6.8), можно второй и третий члены сократить, а для последнего члена из уравнения (6.6) получаем

$$\frac{\partial L}{\partial q_n} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = \dot{p}_n.$$

В результате

$$dH = \sum_n (\dot{q}_n dp_n - \dot{p}_n dq_n).$$

Поскольку H есть функция только p_n и q_n , то из предыдущего выражения следует, что

$$\dot{q}_n = \partial H / \partial p_n \quad (6.10a)$$

и

$$\dot{p}_n = -\partial H / \partial q_n. \quad (6.10б)$$

Это уравнения движения Гамильтона. Они заменяют N дифференциальных уравнений второго порядка (6.6) на систему $2N$ дифференциальных уравнений первого порядка. В примере с резонансным контуром имеем $p = \lambda \dot{q}$ и $H = p^2 / (2\lambda) + q^2 / (2\gamma)$, поэтому (6.10a) приобретает вид $\dot{q} = p / \lambda$, а (6.10б) — $\dot{p} = -q / \gamma$. Нетрудно увидеть, что p — это напряжение на индуктивности λ .

В классических задачах применение гамильтоновского подхода для простых систем редко бывает оправданным, но нужно учитывать, что после того как найдена функция Гамильтона, все уравнения движения в сложных системах сразу могут быть выписаны явно [используя уравнения (6.10a) и (6.10б)] и это часто приводит к значительному упрощению. Однако для нас наиболее важно в таком подходе то, что он ведет к непосредственной и общей связи между классическими уравнениями задачи и соответствующими квантовыми уравнениями. Чтобы сформулировать эту связь, необходимо сначала определить скобки Пуассона для двух динамических переменных. Если u и v являются двумя такими переменными, то для них скобки Пуассона определяются так:

$$(u, v) = \sum_n \left(\frac{\partial u}{\partial q_n} \frac{\partial v}{\partial p_n} - \frac{\partial u}{\partial p_n} \frac{\partial v}{\partial q_n} \right). \quad (6.11)$$

Прямой подстановкой можно легко проверить, что $(p_k, p_l) = 0$, $(q_k, q_l) = 0$ и

$$(q_k, p_l) = \delta_{kl}. \quad (6.12)$$

Полная производная по времени от динамической переменной имеет вид

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_n \left(\frac{\partial u}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial u}{\partial p_n} \dot{p}_n \right).$$

Отсюда, применяя уравнения Гамильтона для исключения \dot{q}_n и \dot{p}_n , получаем

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_n \left(\frac{\partial u}{\partial q_n} \frac{\partial H}{\partial p_n} - \frac{\partial u}{\partial p_n} \frac{\partial H}{\partial q_n} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} + (u, H). \quad (6.13)$$

Таким образом, если u от времени t явно не зависит, то производная от u по времени является просто ее скобкой Пуассона с H , т. е.

$$\frac{du}{dt} = (u, H). \quad (6.14)$$

Переменная u есть z -составляющая углового момента системы — вот типичный пример из механики. В электрической цепи такой переменной может быть напряжение между двумя узлами цепи.

В квантовой механике наблюдаемым величинам ставятся в соответствие линейные операторы, и если u есть наблюдаемая величина, то используется тот же символ для обозначения соответствующего ей оператора. Если система находится в состоянии $|\Psi\rangle$, то среднее значение u равно $\langle \Psi | u | \Psi \rangle$. Математическая процедура вычисления этого выражения зависит от того, представлена ли величина u как оператор, действующий на волновые функции, зависящие от координат в обычном пространстве (в этом случае $\langle \Psi | u | \Psi \rangle = \int_U \Psi^* u \Psi dU$), или же используется более общее

представление.

Как мы увидим впоследствии, здесь это несущественно. В таком случае связь между квантовыми и классическими уравнениями [9] получается при замене скобок Пуассона для двух динамических переменных на их коммутатор ($uv - vu$) согласно правилу

$$[u, v] \equiv uv - vu = i\hbar (u, v). \quad (6.15)$$

Уравнение движения для оператора, представляющего собой динамическую переменную, будет выглядеть следующим образом:

$$i\hbar \frac{du}{dt} = uH - Hu. \quad (6.16)$$

Уравнение (6.16) можно записать и так:

$$i\hbar \frac{du}{dt} = [u, H]. \quad (6.17)$$

Отметим также, что

$$[q_k, p_i] = i\hbar \delta_{ki}. \quad (6.18)$$

В представлении Гейзенберга вектор состояния системы не зависит от времени и является таким же, как и вектор начального состояния $|\Psi(0)\rangle$; таким образом, если $u(t)$ есть оператор, соответствующий динамической переменной u , то его среднее значение в момент времени t равно

$$\langle u(t) \rangle = \langle \Psi(0) | u(t) | \Psi(0) \rangle. \quad (6.19)$$

Рассмотрим достаточно большой набор динамических переменных и решим уравнения движения Гейзенберга (6.17) для всех этих переменных. Тогда можно выразить оператор, например $u(t)$, через операторы $u(0)$, $v(0)$, $w(0)$ и т. д. в момент времени $t=0$ и получить

$$\begin{aligned} \langle u(t) \rangle &= \langle \Psi(0) | f[u(0), v(0) \text{ и т. д.}] | \Psi(0) \rangle = \\ &= \langle f(u(0), v(0) \text{ и т. д.}) \rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, можно связать среднее значение наблюдаемых величин в произвольный момент времени t со средними значениями некоторой функции, зависящей от набора значений, наблюдаемых в более ранний момент времени $t=0$. Волновые функции или векторы состояния $|\Psi\rangle$ полностью исчезают из задачи. Замечательным результатом правила (6.15) и его следствий (6.16)—(6.18) является то, что получающиеся уравнения движения для операторов, представляющих наблюдаемые величины, — это классические уравнения движения для самих наблюдаемых величин. Отсюда следует, что уравнения движения для средних значений квантовых операторов в точности воспроизводят классическое поведение системы. Все же один специфически квантовомеханический результат заключается в том, что если в классической механике u и $\langle u \rangle$ идентичны и $\langle u^2 \rangle = u^2 = \langle u \rangle^2$, откуда $\langle \Delta u^2 \rangle = 0$, то в квантовой механике $\langle u^2 \rangle \geq \langle u \rangle^2$ и $\langle \Delta u^2 \rangle \geq 0$. При расчете шумов важна именно эта неопределенность или разброс в возможных значениях величины u .

Теперь приведем один простой пример для иллюстрации полученных результатов и рассмотрим квантовомеханическую систему, а именно ядро с внутренним угловым моментом \mathbf{I} и магнитным моментом \mathbf{m} в постоянном магнитном поле $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, параллельном оси z . Можно показать, что вектор \mathbf{m} обязательно параллелен \mathbf{I} , и поэтому полагаем $\mathbf{m} = \gamma \mathbf{I}$. Далее можно показать, что \mathbf{m} и \mathbf{I} можно рассматривать как собственно динамические переменные. Правило коммутации для \mathbf{I} , получаемое из (6.18), наиболее удобно выражается как $\mathbf{I} \times \mathbf{I} = i\hbar \mathbf{I}$ и гамильтониан имеет вид $H = -(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) = -\gamma(\mathbf{I} \cdot \mathbf{B})$ или $H = -\gamma I_z B$. Таким образом, уравнения движения для составляющих \mathbf{I} будут следующими:

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{I}_x &= [I_x, H] = -\gamma B [I_x, I_z] = \gamma B (\mathbf{I} \times \mathbf{I})_y = i\hbar \gamma B I_y; \\ i\hbar \dot{I}_y &= [I_y, H] = -\gamma B [I_y, I_z] = -\gamma B (\mathbf{I} \times \mathbf{I})_x = -i\hbar \gamma B I_x; \\ i\hbar \dot{I}_z &= [I_z, H] = -\gamma B [I_z, I_z] = 0. \end{aligned}$$

Сократим коэффициенты $i\hbar$ и получим уравнения:

$$\dot{I}_x = \gamma B I_y; \quad \dot{I}_y = -\gamma B I_x; \quad \dot{I}_z = 0.$$

Полученные уравнения по виду совпадают с классическими уравнениями движения $\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = \gamma \mathbf{I} \times \mathbf{B}$, записанными для вектор-

ных компонент. Положив $\omega = \gamma B$, запишем решение, справедливое как для операторов, так и для классических переменных, в следующем виде:

$$l_x(t) = l_x(0) \cos \omega t + l_y(0) \sin \omega t;$$

$$l_y(t) = -l_x(0) \sin \omega t + l_y(0) \cos \omega t;$$

$$l_z(t) = l_z(0).$$

В классической постановке задачи это окончательное решение, но в квантовой механике необходимо выписать такие выражения как

$$\langle l_x(t) \rangle = \langle l_x(0) \rangle \cos \omega t + \langle l_y(0) \rangle \sin \omega t$$

и

$$\begin{aligned} \langle l_x^2(t) \rangle = & \langle l_x^2(0) \rangle \cos^2 \omega t + \langle l_y^2(0) \rangle \sin^2 \omega t + \\ & + \langle l_x(0) l_y(0) + l_y(0) l_x(0) \rangle \cos \omega t \sin \omega t. \end{aligned}$$

Так как нет гарантии, что $\langle l_x^2(t) \rangle = \langle l_x(t) \rangle^2$, то квантовое решение дает, по существу, вероятностное распределение для $l_x(t)$, выраженное через вероятностные распределения $l_x(0)$ и $l_y(0)$, а также через величины взаимной корреляции.

Прежде чем приступить к конкретным детальным расчетам, рассмотрим в общих чертах значение полученных результатов для шумов в квантовомеханических системах. Предположим, что мы имеем систему (например, какой-нибудь усилитель) с выходным напряжением $U(t)$ такой большой амплитуды, что на выходе можно пренебречь всеми дальнейшими шумовыми процессами квантовомеханической или иной природы, и предположим также, что во входном каскаде системы имеется устройство, требующее квантового рассмотрения.

При математическом анализе устройства выходное напряжение $U(t)$ можно рассматривать как динамическую переменную. Конечными результатами расчетов будут выражения для $\langle U(t) \rangle$, $\langle U^2(t) \rangle$ и $\langle \Delta U^2(t) \rangle$, и частично разброс напряжений $\langle \Delta U^2(t) \rangle$ определяется из возникающих при расчетах квантовомеханического устройства ограничений, налагаемых законами квантовой механики. Именно в этом смысле флуктуации квантовомеханического происхождения имеют практическое и экспериментальное значение.

6.4. Диссипация в квантовой механике

Наличие трения или диссипации энергии в классических системах не представляет серьезной проблемы. При переходе от расчета движения свободной частицы под действием силы тяжести в вакууме к расчету того же движения в вязкой среде можно просто

включить добавочные члены в уравнение движения. Ясно, что механическая энергия частицы не сохраняется, а непрерывно уменьшается, переходя в тепло, и что потерянная энергия не играет дальнейшей роли в механической задаче. Известно также, что в замкнутой диссипативной системе при отсутствии внешних силовых полей или источников механической энергии всякое механическое движение в конечном итоге прекратится и координаты всех частиц зафиксируются, а их импульсы обратятся в нуль.

В квантовой механике положение совсем другое. Если мы попытаемся составить уравнение движения при наличии диссипации, то конечное состояние системы в итоге не будет соответствовать принципу неопределенности. Диссипация не является процессом или понятием, присущим микроскопическому квантовомеханическому описанию физической системы. Это полностью макроскопическое понятие, имеющее чисто статистическую связь с квантовой механикой. Если, например, мы имеем резонансный контур, содержащий активное сопротивление, то заряд q на емкости можно с полным основанием рассматривать и как динамическую переменную, и как одну из пары канонически сопряженных переменных в рассматриваемой квантовой системе. Мы также можем рассматривать q как единственно интересующую нас наблюдаемую величину. Однако имеется много других пар сопряженных переменных в системе, и среди них можно упомянуть механические переменные, описывающие движение носителей зарядов, и особенно переменные, описывающие состояние возбуждения колебаний кристаллической решетки (полагаем, что материал с активным сопротивлением в контуре имеет кристаллическую структуру).

Столкновения определяют связь этой единственной выделенной нами динамической переменной с остальными не интересующими нас переменными, а также с многочисленными переменными, описывающими решетку. Гамильтониан системы в целом не зависит от времени, и его можно использовать, чтобы получить уравнение движения для любой переменной. Движение системы подразумевает перенос энергии от одной степени свободы к другой внутри системы. Энергия, приходящаяся на одну макроскопическую степень свободы и соответствующая колебаниям заряда в контуре, передается нормальным колебаниям решетки, число которых порядка 10^{20} . Вероятность того, что эта энергия в течение любого конечного отрезка времени снова когерентно превратится в энергию, связанную с полем в конденсаторе, равна нулю (энергия рассеивается). Другими словами, обращается в нуль вероятность того, что передача энергии колебаний решетки в цепь приведет к макроскопическому колебанию заряда в цепи. Это преобразование энергии случайно и непредсказуемо и приводит к шуму.

Так как столкновения на микроскопическом уровне определяют как диссипацию энергии, так и генерацию шумов, то между этими двумя процессами существует прямая связь. В классическом пределе эта связь выражается в формуле Найквиста для тепловых шумов.

Можно расширить круг рассматриваемых явлений, включив сюда процессы, которые в классическом случае были бы названы усилением. Квантовая система, описывающая квантовомеханический усилитель, распадается на три составные части. Во-первых, имеется одна или небольшое количество макроскопических переменных и соответствующих им степеней свободы, которые описывают интересующие нас величины (например, выходное напряжение). Во-вторых, имеется подсистема с огромным числом степеней свободы, которая ответственна за все процессы рассеяния энергии. Эту подсистему, являющуюся источником тепловых потерь, условно назовем поглотителем тепла или теплоотводом. И, наконец, имеется активная составная часть полной системы с одной или, возможно, многими степенями свободы, которые возбуждаются извне. Механизм усиления обеспечивается обменом энергией между названными компонентами системы. Поскольку при таком обмене энергией, являющемся причиной усиления, происходит также обмен флуктуациями между составляющими системы, то переменные, связанные с сигналом, флуктуируют и из-за взаимодействия с другими компонентами системы, и часть флуктуаций в выходном напряжении $U(t)$ определяется именно этим взаимодействием.

6.5. Шум в линиях передачи с потерями

Рассмотрим длинную линию без потерь, связанную по всей своей длине с теплоотводом, который является моделью описания поглощения в линии. Генератор напряжения $U(t)$ располагается посередине линии, и если линия достаточно протяженная и потери велики, то вне зависимости от величины напряжения $U(t)$ эффекты влияния его на концах линии потребуют квантовомеханической

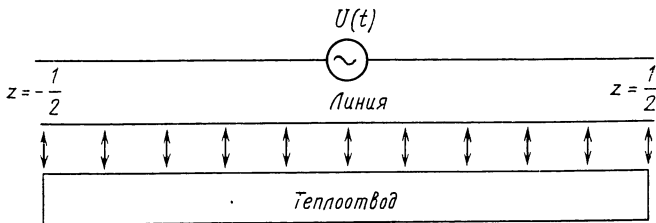


Рис. 6.1. Линия передачи, равномерно связанная с теплоотводом посредством некоторого механизма потерь.

трактовки. Предположим, что при этих условиях значение напряжения $U(t)$ таково, что его можно рассматривать как классический параметр. Ввиду сложности получающихся уравнений целесообразно выбрать такую систему единиц, в которой: постоянная Планка $\hbar=1$; длина линии взята за единицу и линия простирается от $z=-1/2$ до $z=1/2$; емкость и индуктивность на единицу длины линии также равны единице. Рассматриваемая модель изображена на рис. 6.1.

Теперь необходимо составить гамильтониан для этой системы, содержащей три члена: H_l , относящийся к линии без потерь; H_s — относящийся к теплопроводу, и H_{ls} , описывающий их взаимодействие. В этом гамильтониане $U(t)$ — скалярный параметр, но напряжение на линии является динамической переменной, или оператором. Так как система непрерывна, то линия имеет бесконечное число степеней свободы, и для ее описания необходимо ввести плотность гамильтониана \mathcal{H} и плотность лагранжиана \mathcal{L} , так что

$$H_L = \int_{-1/2}^{1/2} \mathcal{H} dz \quad (6.20a)$$

и

$$L = \int_{-1/2}^{1/2} \mathcal{L} dz. \quad (6.20b)$$

Для непрерывной системы уравнение движения Лагранжа имеет вид [16]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} + \frac{d}{dz} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0,$$

где $q' = \partial q / \partial z$. Пусть координата q есть общий заряд справа от z , так что $\dot{q} = I$ — ток в линии в точке z , а $q' = -U$ — это напряжение на линии. Отсюда автоматически получаем $\partial I / \partial z = -\partial U / \partial t$, что является одним из уравнений линии передач. Плотность функции Лагранжа, которая приводит к указанному уравнению, такова:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{q}^2 - q'^2).$$

Действительно, так как $\partial \mathcal{L} / \partial q = 0$, то уравнение Лагранжа $\dot{q} - q'' = 0$ или $\partial I / \partial t = -\partial U / \partial z$. Таким образом, найдя правильный вид L , получим для канонической переменной p , сопряженной с q , $p = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{q} = \dot{q}$, и поэтому

$$\mathcal{H} = p\dot{q} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} (p^2 + q'^2).$$

Если разделить линию на отрезки бесконечно малой длины в точках z_n , то переменные $q(n) = q(z_n)$ для различных n образуют множество независимых координат и коммутатор для канонически-сопряженных переменных таков:

$$[q(n), p(m)] = i\delta_{nm}.$$

Переходя к пределу, получаем

$$[q(z), p(z')] = i\delta(z - z'), \quad (6.21)$$

где $\delta(z - z')$ — дельта-функция (функция Дирака). Затем разложим $p(z, t)$ и $q(z, t)$ в ряд по полной системе ортогональных бегущих волн, например, так, что

$$p(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} (P_k(t) u_k(z) + P_k^+(t) u_k^*(z)), \quad (6.22)$$

где

$$u_k(z) = \exp(i\omega_k z) = \exp(2\pi i k z) \quad (6.23)$$

есть обычная алгебраическая функция, а коэффициенты $P_k(t)$ и $Q_k(t)$ — операторы, соответствующие динамическим переменным. Для $P_k(t)$, например, имеем

$$P_k(t) = \int_{-1/2}^{1/2} p(z, t) \exp(-2\pi i k z) dz, \quad k > 0,$$

и легко проверить, что коммутируют все коэффициенты P_k и Q_k , кроме двух пар:

$$[Q_k^+, P_k] = i \quad (6.24a)$$

и

$$[Q_k, P_k^+] = i. \quad (6.24b)$$

Введем операторы:

$$\begin{aligned} A_k(t) &= \left(\frac{1}{2\omega_k}\right)^{1/2} [P_k(t) - i\omega_k Q_k(t)]; \\ A_k^+(t) &= \left(\frac{1}{2\omega_k}\right)^{1/2} [P_k^+(t) + i\omega_k Q_k^+(t)] \end{aligned} \quad (6.25a)$$

и

$$B_k(t) = \left(\frac{1}{2\omega_k}\right)^{1/2} [P_k^+(t) - i\omega_k Q_k^+(t)]; \quad B_k^+(t) = \left(\frac{1}{2\omega_k}\right)^{1/2} [P_k(t) + i\omega_k Q_k(t)]. \quad (6.25b)$$

Единственные отличные от нуля коммутаторы этих операторов

$$[A_k(t), A_k^+(t)] = [B_k(t), B_k^+(t)] = 1. \quad (6.26)$$

Плотность гамильтониана линии выражается через введенные операторы в виде

$$H_l = \int_{-1/2}^{1/2} \mathcal{H}_l dz = \sum_k \omega_k [A_k^+(t) A_k(t) + B_k^+(t) B_k(t) + 1], \quad (6.27)$$

в то время как операторы, соответствующие току и напряжению, имеют иной вид:

$$I(z, t) = \sum_k \left(\frac{\omega_k}{2}\right)^{1/2} \{[A_k(t) + B_k^+(t)] u_k(z) + \text{э. с.}\} \quad (6.28)$$

и

$$U(z, t) = \sum_k \left(\frac{\omega_k}{2}\right)^{1/2} \{[A_k(t) - B_k^+(t)] u_k(z) + \text{э. с.}\}, \quad (6.29)$$

где э. с. означает эрмитовосопряженные члены.

Производные по времени операторов $A_k(t)$, $A_k^+(t)$, $B_k(t)$ и $B_k^+(t)$ можно получить из уравнений вида $i\dot{A}_k(t) = [A_k(t), H]$, с помощью правил коммутации (6.26) и уравнения (6.27). В результате имеем:

$$\begin{aligned} \dot{A}_k(t) &= -i\omega_k A_k(t); \quad \dot{B}_k(t) = -i\omega_k B_k(t); \\ \dot{A}_k^+(t) &= i\omega_k A_k^+(t); \quad \dot{B}_k^+(t) = i\omega_k B_k^+(t). \end{aligned}$$

Поскольку в I и U операторы $A_k(t)$ умножаются на множитель $u_k(z)$, для которого $\partial u_k / \partial z = i\omega_k u_k$, а $A_k^+(t)$ умножается на $u_k^*(z)$, для которого $\partial u_k^* / \partial z = -i\omega_k u_k^*$, то оба вклада в I и U от членов с операторами $A_k(t)$ и $A_k^+(t)$ удовлетворяют соотношению $\partial I / \partial t = -\partial I / \partial z$ и поэтому соответствуют падающим волнам. Напротив, $B_k(t)$ умножаются на $u_k^*(z)$ и $B_k^+(t)$ — на $u_k(z)$, следовательно, эти члены соответствуют отраженным волнам.

В шредингеровской картине квантовой механики операторы A_k^+ и B_k^+ были бы операторами рождения падающих и отраженных волн, а A_k и B_k были бы соответствующими операторами уничтожения. В гейзенберговском подходе они по сути являются операторами, соответствующими классическим амплитудам этих волн в том смысле, что $A_k^+ A_k$ и $B_k^+ B_k$ соответствуют их интенсивности.

Теплопровод — сложная динамическая система, но можно предположить, что она эквивалентна всевозможным колебаниям решетки твердого тела и может быть описана как набор гармонических осцилляторов. В конечном итоге мы будем рассматривать их как непрерывное распределение осцилляторов. Пусть $S_{pq}(t)$ — зависящий от времени гейзенберговский оператор, эквивалентный шредингеровскому оператору уничтожения для осциллятора с частотой ω_q , расположенного в точке $z=p$. Тогда гамильтониан теплопровода можно выразить в виде

$$H_s = \sum_p \sum_q \omega_q \left[S_{pq}^+(t) S_{pq}(t) + \frac{1}{2} \right] \quad (6.30)$$

и операторы S_{pq} и S_{pq}^+ удовлетворяют правилу коммутации:

$$[S_{pq}(t), S_{pq}^+(t)] = 1. \quad (6.31)$$

Осциллятор с частотой ω_q в точке $z=p$ связан с амплитудой волны при $z=p$. Если ограничиться членами первого порядка по константе связи и учесть, что любой гамильтониан взаимодействия должен быть эрмитовым, то можно получить наиболее общий вид такого гамильтониана.

$$H_{ls} = \sum_k \sum_p \sum_q \alpha_{kq} \{ [A_k(t) S_{pq}^+(t) + B_k^+(t) S_{pq}(t)] u_k(p) + \text{э. с.} \}, \quad (6.32)$$

где из-за однородности связи константа связи α_{kq} не зависит от координаты p . Более того, α_{kq} есть малые (по сравнению с ω_q) вещественные постоянные.

Введем в гамильтониан классический источник сигнала $U(t)$ в виде дополнительного члена H_d , так что $H = H_l + H_s + H_{ls} + H_d$. Если $U(t)$ зависит от времени следующим образом:

$$U(t) = U_0 \exp(-i\omega t) + U^*_0 \exp(i\omega t) \quad (6.33a)$$

и если принять во внимание, что источник сигнала поставляет мощность в линию со скоростью $U(t)I(0, t)$, то можно получить

$$U(t)I(0, t) = \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H_d}{\partial t}. \quad (6.33б)$$

Учитывая, что $I(0, t)$ выражается через операторы A_k и т. д. и что временная зависимость H от t при изменении этих операторов во времени не включена в $\partial H/\partial t$, можно проинтегрировать уравнение (6.33б), и тогда получим

$$H_d = F(t)I(0, t) = F(t) \sum_k \left(\frac{\omega_k}{2}\right)^{1/2} [A_k(t) + B_k^+(t) + \text{э. с.}], \quad (6.34)$$

где $F(t)$ — обычная алгебраическая функция:

$$F(t) = \frac{i}{\omega} [U_0 \exp(-i\omega t) - U^*_0 \exp(i\omega t)]. \quad (6.35)$$

Запишем уравнение движения Гейзенберга для $A_k(t)$:

$$i\dot{A}_k(t) = [A_k(t), H],$$

и если теперь учесть все вклады в H , то уравнение движения приводится к виду

$$\begin{aligned} & \dot{A}_k(t) + i\omega_k A_k(t) = \\ & = -i \left(\frac{\omega_k}{2}\right)^{1/2} F(t) - i \sum_p \sum_q \alpha_{kq} S_{pq}(t) u^*_k(p). \end{aligned} \quad (6.36)$$

Преобразуем это уравнение по Лапласу, определив

$$\begin{aligned} \bar{A}_k &= \int_0^\infty A_k(t) \exp(-\theta t) dt; \\ A_k(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \bar{A}_k \exp(\theta t) d\theta, \end{aligned}$$

и пусть символы A_k и другие без скобок обозначают операторы при $t=0$. Тогда имеем

$$(\theta + i\omega_k) \bar{A}_k = A_k - i \left(\frac{\omega_k}{2}\right)^{1/2} \bar{F} - i \sum_p \sum_q \alpha_{kq} \bar{S}_{pq} u^*_k(p). \quad (6.37a)$$

Соответствующие уравнения для других операторных переменных

$$(\Theta + i\omega_k) \bar{B}_k = B_k - i \left(\frac{\omega_k}{2} \right)^{1/2} \bar{F} - i \sum_p \sum_q \alpha_{kq} \bar{S}_{pq} u_k(p) \quad (6.37б)$$

и
$$(\Theta + i\omega_q) \bar{S}_{pq} = S_{pq} - i \sum_j \alpha_{jq} [\bar{A}_j u_j(p) + \bar{B}_j u_j^*(p)]. \quad (6.37в)$$

Чтобы исключить \bar{S}_{pq} из уравнения (6.37а), используем уравнение (6.37в), и с помощью соотношений ортогональности $\sum_p u_k(p) u_j^*(p) = \delta_{kj}$ и т. д. получаем

$$\begin{aligned} \left(\Theta + i\omega_k + \sum_q \frac{\alpha_{kq}^2}{\Theta + i\omega_q} \right) \bar{A}_k = A_k - i \left(\frac{\omega_k}{2} \right)^{1/2} \bar{F} - \\ - i \sum_p \sum_j \frac{\alpha_{kq} S_{pq} u_k^*(p)}{\Theta + i\omega_q}. \end{aligned} \quad (6.38)$$

В левой части полученного уравнения функция $\sum \alpha_{kq}^2 / (\Theta + i\omega_q)$ имеет нули и полюса на мнимой оси частот, что приводит к полюсам и нулям для функции \bar{A}_k на этой оси. Тот факт, что эти сингулярности располагаются на мнимой оси (а не слева от нее), означает, что энергия возбуждения линии всегда остается внутри системы (это с самого начала было заложено в наши расчеты), так как энергия может обмениваться между линией и осцилляторами теплоотвода, но никогда не может выходить за пределы всей системы. Однако близость расположения частот осцилляторов ω_q устанавливает цикл Пуанкаре, или цикл периодичности для этой системы, и в реальной системе продолжительность этого цикла не может быть бесконечной. Если система рассматривается в конечные отрезки времени, то энергия, первоначально поданная в линию, беспорядочно распределяется среди многих осцилляторов теплоотвода, и, с точки зрения линии, эта энергия потеряна. Таким образом, для конечных отрезков времени суммарный эффект связи линии с осцилляторами должен привести к затуханию возбуждения линии, которое аппроксимируется простыми экспоненциальными потерями. Такой результат можно получить из уравнения (6.38), но доказательство не простое. Доказательство можно найти в [37], где показано, что при устремлении распределения частот теплоотвода к непрерывному сумму можно заменить другим выражением по правилу

$$\sum_q \frac{\alpha_{kq}^2}{\Theta + i\omega_q} \rightarrow \pi \alpha_k^2 \sigma(\omega_k) = \mu_k, \quad (6.39)$$

где α_k означает α_{kk} , а $\sigma(\omega_k)$ — спектральная плотность осцилляторов вблизи ω_k . Заметим, что μ_k — действительная положительная величина. Теперь имеем

$$(\Theta + i\omega_k + \mu_k)\bar{A}_k = A_k - i\left(\frac{\omega_k}{2}\right)^{1/2}\bar{F} - i\sum_p \sum_q \frac{\alpha_{kq} S_{pq} u_k^*(p)}{\Theta + i\omega_q} \quad (6.40)$$

и аналогичные уравнения для \bar{B}_k , \bar{A}_k^+ и \bar{B}_k^+ .

Член \bar{F} , определяемый сигналом $U(t)$, можно с помощью уравнения (6.35) и преобразования Лапласа привести к виду

$$\bar{F} = \frac{i}{\omega} \left(\frac{U_0}{\Theta + i\omega} - \frac{U_0^*}{\Theta - i\omega} \right), \quad (6.41)$$

и его вклад в $A_k(t)$ получается при применении обратного преобразования Лапласа к величине

$$\bar{F}_k = -\frac{i(\omega_k/2)^{1/2}\bar{F}}{\Theta + i\omega_k + \mu_k}. \quad (6.42)$$

Вклад, который вносит этот член в напряжение сигнала в точке z ,

$$U_F(z, t) = \sum_k (\omega_k/2)^{1/2} \bar{F}_k(t) u_k(z), \quad (6.43)$$

и легко проверить, что в нем отсутствует слагаемое с U_0^* из уравнения (6.41). Член с U_0 приводит к следующему результату:

$$F_k(t) = (\omega_k/2)^{1/2} \frac{U_0}{\omega} \left\{ \frac{\exp[-i\omega t] - \exp[-(i\omega_k + \mu_k)t]}{i(\omega_k - \omega) + \mu_k} \right\}. \quad (6.44)$$

Подставив $F_k(t)$ в уравнение (6.43) и заменив сумму интегралом, получим

$$U_F(z, t) = \frac{1}{2\omega} U_0 \int \frac{\omega_k \{ \exp(-i\omega t) - \exp[-(i\omega_k + \mu_k)t] \}}{i(\omega_k - \omega) + \mu_k} \exp(i\omega_k z) \frac{d\omega_k}{2\pi}.$$

При вычислении вычетов для нахождения значения интеграла заметим, что полюс располагается выше действительной оси. Таким образом, при $z < 0$, замыкая контур интегрирования в нижней полуплоскости, получим в результате нуль. При $z > t$ контур замыкается в верхней полуплоскости, вычеты в полюсе для двух членов в интеграле сокращаются, и результат вновь равен нулю. Однако при $0 < z < t$ вклад одного члена равен нулю, а вклад другого отличен от нуля, так что

$$U_F(z, t) = \frac{1}{2} U_0 \exp[-i\omega(t-z) - \mu z], \quad 0 < z < t, \quad (6.45)$$

где $\mu = \mu_k$ при $\omega_k = \omega$. Конечно, это классический результат, определяемый принципом причинности, для линии, постоянная затухания которой равна μ .

Оставшиеся в уравнении (6.40) члены приводят к шуму, и если теперь опустить член, связанный с сигналом, то обращение преобразования Лапласа дает

$$A_k(t) = A_k \exp[-(i\omega_k + \mu_k)t] - i \sum_p \sum_q \frac{\alpha_{kq} S_{pq} u_k^*(p) \{ \exp(-i\omega_q t) - \exp[-(i\omega_k + \mu_k)t] \}}{i(\omega_k - \omega_q) + \mu_k}. \quad (6.46)$$

Так как средние значения операторов A_k и S_{pq} в первой части (6.46) равны нулю, то и среднее значение $A_k(t)$, а следовательно, и амплитуда прямой волны в линии для $z > 0$ тоже равны нулю. С другой стороны, имеем

$$\langle U_F^2(z, t) \rangle = \frac{1}{2} \sum_k \sum_j (\omega_k \omega_j)^{1/2} \langle A_k(t) A_j^+(t) \rangle u_k(z) u_j^*(z) + \text{э. с.}, \quad (6.47)$$

и эта величина в нуль не обращается.

Вклад в $\langle U_F^2 \rangle$, который связан с A_k в правой части (6.46) и который зависит от начального состояния линии, будет

$$\langle U_{FA}^2(z, t) \rangle = \sum_k \frac{1}{2} \omega_k \exp(-2\mu_k t) (\langle A_k A_k^+ \rangle + \langle A_k^+ A_k \rangle). \quad (6.48)$$

Мы видим, что в конце концов со временем исчезает всякая память о начальном состоянии линии. Член, который включает начальное состояние теплопровода, равен

$$\begin{aligned} \langle U_{Fs}^2(z, t) \rangle &= \frac{1}{2} \sum_p \sum_q \langle S_{pq}^+ S_{pq} \rangle \sum_k \sum_j (\omega_k \omega_j)^{1/2} \alpha_{kq} \alpha_{jq} \times \\ &\times \frac{\{ \exp(-i\omega_q t) - \exp[(i\omega_k + \mu_k)t] \} u_k(z-p)}{i(\omega_k - \omega_q) + \mu_k} \times \\ &\times \frac{\{ \exp(i\omega_q t) - \exp[(i\omega_j - \mu_j)t] \} u_j^*(z-p)}{i(\omega_q - \omega_j) + \mu_j} + \text{э. с.} \end{aligned} \quad (6.49)$$

Когда суммы по всем частотам осцилляторов с индексами k и j вычисляются с использованием контурного интегрирования, то результаты для каждого члена, обозначенного индексом p , равны нулю, если не выполняются неравенства $z-t < p < z$. Это не противоречит причинности. Осциллятор в точке p влияет на напряжение в точке z только через время t , соответствующее времени распространения волны до точки z . Конечный результат таков:

$$\begin{aligned} \langle U_{Fs}^2(z, t) \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{p=z-t}^z \sum_q \langle S_{pq} S_{pq}^+ + \\ &+ S_{pq}^+ S_{pq} \rangle \omega_q \alpha_q^2 \exp[-2\mu_q(z-p)]. \end{aligned} \quad (6.50)$$

Если теплоотвод находится в тепловом равновесии при температуре T_s , то среднее значение комбинации от операторов в правой части уравнения (6.50) имеет вид

$$\langle S_{pq} S_{pq}^+ + S_{pq}^+ S_{pq} \rangle = 1 + \frac{2}{\exp(\omega_q/T_s) - 1}, \quad (6.51)$$

и если в уравнении (6.50) выполнить суммирование по всем допустимым p , т. е. проинтегрировать в пределах от $p=z-t$ до $p=z$, то получим

$$\langle U_{Fs}^2(z, t) \rangle = \frac{1}{2} \sum_q \omega_q^{\alpha_q^2} \left[1 + \frac{2}{\exp(\omega_q/T_s) - 1} \right] [1 - \exp(-2\mu_q t)]. \quad (6.52)$$

Аналогично для линии с начальной температурой T_l уравнение (6.48) дает

$$\langle U_{FA}^2(z, t) \rangle = \frac{1}{2} \sum_k \omega_k \left[1 + \frac{2}{\exp(\omega_k/T_l) - 1} \right] \exp(-2\mu_k t). \quad (6.53)$$

Учитывая, что спектральная плотность осцилляторов вблизи $\omega_q = \omega$ имеет вид

$$\sigma(\omega) = \mu_q / (\pi \alpha_q^2),$$

для вклада в $U_{Fs}^2(z, t)$ от частот в интервале $d\omega$ вблизи ω получим

$$dU_{Fs}^2(z, t) = \frac{1}{2} \omega \left[1 + \frac{2}{\exp(\omega/T_s) - 1} \right] [1 - \exp(-2\mu t)] \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Аналогичный вклад в $U_{FA}^2(z, t)$ из уравнения (6.53) равен

$$dU_{FA}^2(z, t) = \frac{1}{2} \omega \left[1 + \frac{2}{\exp(\omega/T_l) - 1} \right] \exp(-2\mu t) \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Сумма полученных величин содержит не зависящее от времени слагаемое

$$dU_{F0}^2 = \frac{1}{2} \omega d\omega / (2\pi), \quad (6.54)$$

одинаковое для всех точек линии, каковы бы ни были величины T_l и T_s . Это слагаемое описывает неустранимую неопределенность в U_F , накладываемую принципом неопределенности. Отметим также, что по мере того как вклад в этот член, возникающий из квантовомеханической неопределенности в описании начального состояния линии, уменьшается, он восполняется вкладом, полученным из той же квантовой неопределенности в описании теплоотвода. В следующем разделе мы рассмотрим практическое значение этого результата.

Независимо от того, каков был первоначальный вклад в U_{F0}^2 от исходного состояния линии, в конечном итоге он уменьшается

до нуля, и поскольку уравнение (6.54) — это единственный результат, относящийся к переходным процессам, который нам понадобится, то сейчас продолжим обсуждение установившихся условий при $t \rightarrow \infty$, и в этом случае суммарные флуктуации определяются теплоотводом (6.50):

$$\langle U_F^2(z, t) \rangle = \sum_{p=-1/2} \sum_q \langle S_{pq} S_{pq}^+ + S_{pq}^+ S_{pq} \rangle \omega_q \alpha_q^2 \exp[-2\mu_q(z-p)]. \quad (6.55)$$

Здесь мы подошли к основному моменту всех вычислений. Систему, изображенную на рис. 6.1, можно рассматривать как источник сигнала $U(t)$, внутреннее сопротивление которого равно волновому сопротивлению линии и представлено линией слева от источника. К источнику сигнала подключена согласованная нагрузка, представленная линией справа от источника сигнала $U(t)$. Таким образом, мы нашли модель, которая дает квантовомеханическое описание генератора сигналов с вещественным (диссипативным) внутренним сопротивлением. Теперь предположим, что теплоотвод слева от источника сигнала $U(t)$ при $z < 0$ находится при температуре T_1 , а теплоотвод справа — при T_2 . Тогда, вычисляя правую часть уравнения (6.55), используя уравнение (6.51) и интегрируя по p , получаем

$$\begin{aligned} \langle U_F^2(z) \rangle = & \sum_q \left\{ \frac{1}{2} \omega_q + \frac{\omega_q \exp(-2\mu_q z)}{\exp(\omega_q/T_1) - 1} + \right. \\ & \left. + \frac{\omega_q [1 - \exp(-2\mu_q z)]}{\exp(\omega_q/T_2) - 1} \right\} \frac{\alpha_q^2}{2\mu_q}, \end{aligned} \quad (6.56)$$

где во втором члене мы заменили коэффициент $1 - \exp(-\mu_q)$ на единицу на том основании, что μ_q (затухание в линии слева от источника $U(t)$) велико. Первый член в уравнении (6.56) представляет собой чисто квантовомеханические флуктуации, второй член — тепловой шум, генерируемый на внутреннем сопротивлении источника и ослабленный в $\exp(-2\mu_q z)$ раз к моменту, когда он достигает точки z , а третий член представляет собой тепловой шум, генерируемый справа от источника $U(t)$. Поскольку величина $\alpha_q^2/(2\mu_q)$ связана со спектральной плотностью осцилляторов теплоотвода, то можно непосредственно перейти от уравнения (6.56) к выражению для спектральной плотности мощности или энергетическому спектру U_f . Если при этом введем практические единицы, заменим ω на $\nu = \omega/(2\pi)$ и положим, что волновое сопротивление линии равно Z_0 , то получим $dU_f^2(z) = \omega(\nu) d\nu$, где энергетический спектр имеет вид

$$\omega(\nu) = \frac{1}{2} h\nu Z_0 + \frac{h\nu Z_0 \exp(-2\mu z)}{\exp[h\nu/(kT_1)] - 1} + \frac{h\nu Z_0 [1 - \exp(-2\mu z)]}{\exp[h\nu/(kT_2)] - 1}. \quad (6.57)$$

Мы обсудим полученный результат в следующем разделе, а здесь отметим, что $\omega(\nu)$ — это энергетический спектр флуктуаций напряжения падающей волны в точке z , а не спектр флуктуаций напряжения разомкнутой цепи. В классическом пределе (μz велико) выражение (6.57) сводится к $kT_2 Z_0$, а не к $4kT_2 Z_0$.

6.6. Квантовые флуктуации и понятия цепи

Уравнение (6.45), приведенное в предыдущем разделе, показывает, что если сильный когерентный сигнал, описываемый классически, вводится в поглощающую систему, то даже в той точке, где сигнал уменьшился до уровня, сравнимого с квантовыми флуктуациями, его описание остается классическим. Среднее значение напряжения в этой точке — это величина, которую можно получить из классических уравнений, зная входной сигнал и поглощение в системе. Так, например, если радиопередатчик генерирует большую выходную мощность, то намного более слабые сигналы на выводах антенны дистанционного приемника можно трактовать классически. Вообще, сигналы описываются классически независимо от их уровня.

Еще один результат предыдущего раздела — уравнение (6.57) — интересен в двух аспектах. Первый касается флуктуаций в точке $z=0$. Они наблюдаются на выводах генератора сигнала с внутренним сопротивлением Z , находящимся при температуре T , согласованным с нагрузкой Z_0 , но коль скоро эти флуктуации связаны только с падающей или только с отраженной волной, то являются неполными в этой точке. Они не включают в себя флуктуаций, генерируемых в нагрузке. Тем не менее, на языке теории цепей мы бы сказали, что номинальная мощность шума в интервале $d\nu$ такова:

$$dP = dU^2/Z_0 = \left\{ \frac{1}{2} h\nu + \frac{h\nu}{\exp[h\nu/(kT_1)] - 1} \right\} d\nu. \quad (6.58)$$

При идеальном усилителе, не подверженном квантовомеханическим ограничениям, это была бы мощность сигнала, которая требуется для получения отношения сигнал/шум, равного единице. Как мы увидим в гл. 17, для мазера, который больше всего приближается к идеальному усилителю, но, как и все существующие усилители, подчиняется квантовомеханическим законам, справедлив другой результат для минимально обнаруживаемого сигнала. Тем не менее уравнение (6.58), интерпретируемое с точки зрения традиционной теории цепей, правильно описывает часть флуктуаций, относящихся к источнику.

Второй аспект уравнения (6.57) касается системы, состоящей из разнесенных мощного (классического) радиопередатчика и радиоприемника, на входе антенны которого присутствуют сигнал и шум. В этом случае, если сигнал будет передан через среду

с потерями при температуре T_2 , то шум генератора исчезнет и номинальная мощность шума приобретает вид

$$dP = dU^2/Z_0 = \left\{ \frac{1}{2} h\nu + \frac{h\nu}{\exp [h\nu/(kT_2)] - 1} \right\} d\nu. \quad (6.59)$$

Безусловно, и в этой системе сигнал будет классическим.

Могло бы показаться тогда, что квантовомеханическое обобщение классического результата Найквиста $dP = kT d\nu$ есть именно уравнение (6.58) или (6.59). Это не совсем верно. Если температура T_2 высока, то квантовомеханические особенности уравнения (6.59) не проявляются и мощность шума близка к $kT_2 d\nu$; однако если T_2 низка и конечность постоянной Планка h существенна, то можно обнаружить квантовомеханические эффекты только в том случае, когда используется усилитель, близкий к идеальному настолько, что на него самого накладываются квантовомеханические ограничения. Таким образом, исходя только из уравнения (6.59), мы не можем утверждать, что минимальная мощность сигнала, которая обнаруживается усилителем с полосой пропускания $d\nu$, дается уравнением (6.59) и что при $T_2 \rightarrow 0$ эта мощность уменьшается до $1/2 \cdot h\nu d\nu$. Прежде всего мы должны выяснить, вносит ли шум само усиление. Ответ на этот вопрос можно получить, обобщив подход, изложенный в предыдущем разделе [37], а также исходя из общих соображений, основанных на принципе неопределенности [18]. Результат таков, что минимально обнаружимый сигнал равен $h\nu d\nu$. Мы получим этот же результат в гл. 17, используя уравнение (6.59). С учетом указанного ограничения уравнение (6.59) является подходящей основой для обсуждения шума в квантовомеханических системах.

Хотя член $1/2 h\nu d\nu$ в уравнении (6.59) выглядит как передаваемая обычная мощность шума, мы должны помнить, что для того чтобы эта величина имела какой-нибудь смысл, она должна поставляться в реальную физическую систему, которая подчиняется законам квантовой механики. Эта система сама будет иметь флуктуации такой же природы. Из уравнений (6.52), (6.53) мы видим, что как только эти флуктуации переносятся из одной части системы в другую, они восполняются флуктуациями, переносимыми в противоположном направлении. Трактующее с точки зрения флуктуаций напряжения в одиночной системе, уравнение

$$dU^2 = \left(\frac{1}{2} Z_0 h\nu + \text{т. д.} \right) d\nu$$

является безусловно верным, но если рассматривать это уравнение как утверждение о наблюдаемых флуктуациях, то оно неполно. Здесь мы соприкасаемся с основным квантовым принципом. Заключение о физических величинах будут неполными без обсуждения способов их измерения.

ФЛИККЕР-ШУМ

На частотах выше 10^5 Гц шум большинства электронных приборов имеет равномерный энергетический спектр и может быть соответствующим образом описан тепловым или дробовым шумовыми процессами, протекающими внутри прибора. Однако на низких частотах уровень шума зачастую значительно превышает ожидаемую от этих двух процессов величину, а его спектральная плотность возрастает по мере понижения частоты. Обычно этот избыточный шум известен как фликкер-шум, и во многих случаях его спектр обратно пропорционален частоте. Частота, на которой избыточный шум равен по интенсивности белому шуму, значительно изменяется и для некоторых биполярных транзисторов при оптимальном смещении она составляет 1 Гц, а для СВЧ диодов с точечным контактом может достигать до 100 МГц. Как правило, эта частота лежит в области нескольких килогерц. Величина избыточного шума также очень непостоянна, и для двух приборов одного и того же типа она может различаться в 3 или более раз. Это наводит на мысль, что фликкер-шум чаще всего связан тонкими деталями структуры прибора, которые трудно поддаются контролю изготовителя. В приборах, рабочие характеристики которых определяются объемными эффектами, такие детали во многих случаях связаны с поверхностными эффектами. Довольно любопытным последствием этого является то, что на низких частотах лучшими часто оказываются те приборы, которые предназначены для использования на высоких частотах, так как для таких приборов требуется более строгий контроль параметров. Это относится как к вакуумным триодам, так и к полевым транзисторам с $p-n$ -переходом. В вакуумных триодах фликкер-шум возникает из-за больших флуктуаций эмиссии катода, и в триодах СВЧ, в которых расстояние между катодом и сеткой может быть меньше 10 мкм, катод должен быть изготовлен очень тщательно и иметь однородную поверхность. В полевых транзисторах возникновению фликкер-шума способствует утечка тока в цепь сток—затвор, поэтому контроль состояния этой области транзистора, необходимый для минимизации связанной с эффектом Миллера проходной емкости сток—затвор, приводит к уменьшению фликкер-шума. Это положение в меньшей степени касается биполярных транзисторов, у которых для улучшения высокочастотной характеристики требуется конструкция базы с большим отношением длины периферии к площади (для минимизации сопротивления базы), и поэтому отпадает необходимость тщательного контроля области базы и ее поверхности.

Любой прибор при тепловом равновесии подчиняется непосредственно законам термодинамики. Поэтому шум на его выходе является тепловым по своей природе и имеет равномерный спектр. Следовательно, фликкер-шум проявляется только при неравновесных состояниях в приборах, работающих при постоянном напря-

жении смещения или напряжения смещения, получаемом из полезного сигнала.

Если прибор генерирует шум за счет процесса, хотя и случайного, но характеризуемого постоянной времени τ_n , то корреляционная функция шума равна $A_n \exp(-t/\tau_n)$, где A_n — постоянная. Это приводит к энергетическому спектру

$$\omega(f) = 4 \int_0^{\infty} A_n \exp(-t/\tau_n) \cos 2\pi f t dt = \frac{4A_n \tau_n}{1 + (2\pi f \tau_n)^2}. \quad (7.1)$$

На низких частотах спектр $\omega(f)$ изменяется по (7.1) согласно зависимости $1/f^2$, а не $1/f$, и, следовательно, фликкер-шум нельзя объяснить шумовыми процессами, связанными с какой-либо одной постоянной времени. Распределение постоянной времени по случайному закону с нормированной вероятностью пребывания между значениями τ и $\tau + d\tau$, равной $g(\tau) d\tau$, дает спектр

$$\omega(f) = \int_0^{\infty} \frac{4A\tau g(\tau) d\tau}{1 + (2\pi f \tau)^2}. \quad (7.2)$$

Ван-дер-Зил рассмотрел случай [19], когда τ определяется энергией активации E в соответствии с выражением

$$\tau = \tau_0 \exp(E/kT), \quad (7.3)$$

где τ_0 — постоянная величина. Если все энергетические состояния, расположенные между значением E_1 , соответствующим τ_1 , и значением E_2 , соответствующим τ_2 , являются равновероятными, то с учетом $E = kT \ln \tau/\tau_0$ и $dE = kT d\tau/\tau$ для нормированной вероятности получим

$$g(\tau) d\tau = \frac{d\tau}{\tau \ln \tau_2/\tau_1}. \quad (7.4)$$

Следовательно,

$$\omega(f) = \frac{A}{2\pi \ln \tau_2/\tau_1} \frac{\operatorname{tg}^{-1} 2\pi f \tau_2 - \operatorname{tg}^{-1} 2\pi f \tau_1}{f}. \quad (7.5)$$

При условии, что значение $f\tau_2$ велико, а $f\tau_1$ мало, спектр обратно пропорционален f в широком диапазоне частот. Результат не очень изменится, если распределение энергии активации не будет строго равномерным.

Наблюдаемый спектр во многих случаях пропорционален $1/f$ вплоть до очень низких частот — порядка 10^{-2} Гц или меньше. Это свидетельствует о том, что наибольшая из постоянных времени τ_2 действительно должна быть очень большой.

Среднеквадратичное значение фликкер-шума в некоторых элементах, например угольном микрофоне и угольном резисторе, пропорционально току или напряжению смещения. В этом случае представляется естественным отнести шум за счет флуктуаций

в контактном сопротивлении между гранулами. Шумовая характеристика схемных элементов такого типа может быть выражена в виде отношения среднеквадратичного значения флуктуирующего напряжения к приложенному напряжению смещения, когда последнее обеспечивается источником неизменного тока или источником с высоким внутренним сопротивлением. В технических условиях эта характеристика приводится иногда для полосы пропускания 1 Гц на определенной частоте, но чаще для шума, проинтегрированного по некоторой полосе частот, например от 1 до 1000 Гц. Типичное значение интегрального шума в резисторах составляет 1 мкВ/В.

Если два одинаковых прибора, имеющих фликкер-шум и работающих в одних и тех же условиях, соединить параллельно, то средний квадрат шумового тока и средний ток удвоятся, так что отношение среднеквадратичного значения шума к среднему току уменьшится в $\sqrt{2}$ раз. Иногда это свойство может найти применение на практике, например при параллельной работе ряда триодов или транзисторов. Можно также предположить, что из двух приборов со схожей в общих чертах конструкцией один с большей площадью поперечного сечения для протекающего тока даст меньший шум при том же токе. По-видимому, это справедливо в какой-то мере для электронных ламп, но сомнительно в отношении полупроводниковых приборов.

В электронных лампах фликкер-шум возникает из-за медленных случайных изменений эмиссионной способности поверхности катода, в угольных резисторах — из-за флуктуаций в контактном сопротивлении между гранулами, а в некоторых типах керамических конденсаторов — из-за токов теплового возбуждения в объеме материала. В полупроводниковых приборах со смещением фликкер-шум является следствием главным образом процессов генерации и рекомбинации неосновных носителей заряда. Оба эти процесса могут протекать как внутри объема полупроводникового материала, так и на его поверхности. Если не предусмотрены специальные меры для устранения поверхностных явлений, эти процессы часто становятся доминирующими источниками избыточного низкочастотного шума. Связанные с поверхностными явлениями процессы не определяют нормальную работу прибора, а скорее являются причиной ухудшения его рабочих характеристик, если таковое наблюдается. Поэтому такие процессы следует строго контролировать, а при возможности и устранять при разработке малозумящих приборов. В биполярных и полевых транзисторах с $p-n$ -переходом, где поверхность не играет роли в создании эффекта усиления, это может быть достигнуто тщательной ее обработкой. Для транзисторов с изолированным затвором, в которых поверхность канала, расположенная напротив затвора, имеет существенное значение для процесса усиления, эта проблема до сих пор не решена. Хотя характеристики фликкер-шума в приборах с изолированным затвором могут быть увязаны с особенностями на поверхности канала (например, [40]), эти приборы

по сравнению с плоскостными полевыми транзисторами обладают наибольшим шумом и в настоящее время практически не применяются в малошумящих низкочастотных усилителях.

Там, где процессы генерации и рекомбинации носителей ведут к появлению токов во внешних цепях прибора, они порождают избыточную шумовую составляющую в этих токах. Так как средний ток во внешней цепи обычно пропорционален интенсивности процессов генерации и рекомбинации, а эта интенсивность определяет, в свою очередь, общую величину энергетического спектра избыточного шума, то, следовательно, избыточный шум должен быть пропорционален среднему току. Однако процессы генерации и рекомбинации могут быть причиной избыточного шума даже в том случае, когда участвующие в них носители не создают непосредственно токов во внешней цепи. Именно в этом состоит основной механизм возникновения избыточного шума, например, в полевом транзисторе с $p-n$ -переходом, в котором устранены все шумовые поверхностные эффекты. Внутри канала и затвора, где проводимость обуславливается главным образом основными носителями, генерация и рекомбинация неосновных носителей оказывают слабое влияние на шумовые характеристики. Однако в обедненном слое затвор—канал появление или исчезновение неосновных носителей оказывает значительное влияние на распределение потенциала и приводит к модуляции тока канала. По своему эффекту это равносильно подведению флуктуирующего напряжения к затвору. Таким образом, в малошумящих полевых транзисторах с $p-n$ -переходом основной добавочный шум на низких частотах может быть представлен генератором шумового напряжения, включенным последовательно в цепь затвора.

В биполярных транзисторах неосновные носители, генерируемые в объеме базы, оказывают незначительное действие, а рекомбинация неосновных носителей, инжектируемых в базу из эмиттера, является причиной прямого базового тока. Флуктуации, связанные со скоростью рекомбинации, приводят к появлению избыточного шума в токе базы, и так как средняя скорость пропорциональна базовому току, то и энергетический спектр также пропорционален этому току. Аналогично ток коллектора пропорционален базовому току и до некоторой степени является более доступной наблюдению переменной, поэтому обычно считают, что избыточный шум тока базы пропорционален коллекторному току.

В полевых транзисторах добавочный шум вида $1/f$ эквивалентен добавочным флуктуациям напряжения на входе (затворе) прибора. Так как для данной номинальной входной мощности средний квадрат напряжения входного сигнала пропорционален сопротивлению источника, то полевые транзисторы в области низких частот при большом сопротивлении источника (порядка 100 кОм) дают лучшее отношение сигнал/шум. В биполярных транзисторах, напротив, избыточный шум проявляется в виде флуктуирующего тока во входной (базовой) цепи, и поэтому требуется источник сигнала с низким сопротивлением, обеспечиваю-

ший большой ток при данной входной мощности. В действительности оптимальное значение сопротивления равно внутреннему последовательному сопротивлению базы прибора и обычно близко к 200 Ом. В этом случае избыточный шум возрастает с увеличением тока смещения, и так как белый шум имеет иную зависимость от тока, то обычно существует как оптимальное полное сопротивление, так и оптимальный ток смещения. При соответствующих значениях сопротивление источника для получения малошумящего усиления на низких частотах могут быть использованы приборы любого типа. Более подробно эти вопросы рассмотрены в последующих главах. Однако можно отметить, что между низкочастотными шумовыми характеристиками грубо изготовленных приборов и приборов, рассчитанных на минимальный избыточный шум, имеется значительное различие.

В диодах весь ток определяется инжекцией неосновных носителей через прямосмещенный переход, которые рекомбинируют в объеме материала или на его поверхности. Избыточный шум, связанный с этим процессом, обычно не имеет практического значения. Дело в том, что когда диоды используются в качестве детекторов, выпрямленный сигнал всегда вызывает появление среднего тока смещения в обратном направлении. Этот обратный ток существенно зависит от генерации неосновных носителей вблизи перехода, к флуктуации скорости генерации приводят к возникновению избыточного шума. На высоких частотах диодные детекторы применяются, как правило, только после предварительного значительного усиления по высокой частоте. Поэтому шум, генерируемый диодом, обычно несуществен по сравнению с усиленным шумом от входных цепей. На высоких частотах, как правило, не встречаются входные каскады с диодным смесителем. Однако в большинстве приемников СВЧ в качестве первого каскада используется диодный смеситель, и в этом случае шумом, генерируемым диодом в результате появления обратного смещения под действием сигнала гетеродина, пренебрегать нельзя. Так как СВЧ — диоды имеют очень малое поперечное сечение и большое отношение поверхности к объему, а контроль поверхностных состояний затруднителен, то избыточный шум имеет большое значение и может превышать уровень белого шума на выходе на спектральных частотах вплоть до 100 МГц. По этой причине, если нет каких-либо других ограничений в супергетеродинных приемниках СВЧ, следует использовать относительно высокую промежуточную частоту.

Энергетический спектр фликкер-шума не подчиняется строго закону $1/f$, но отступления от него обычно незначительны. Тогда представляется удобным описать фликкер-шум, используя понятие частоты f_0 , на которой он равен белому шуму. Таким образом, если представить полный спектр шума W через спектр белого шума ω в виде

$$W = \omega (1 + f_0/f), \quad (7.6)$$

то частота f_0^1 непосредственно определяет диапазон частот, в котором фликкер-шум становится значительным. На рис. 7.1 показаны шумовые источники для усилителей средних частот, выполненных на полевых и биполярных транзисторах. Генераторы напряжения и тока имеют энергетический спектр белого шума ω_v , ω_i или ω'_v , и ω'_i на умеренно высоких частотах. Для полевого транзистора на низких частотах параметры генератора шумового

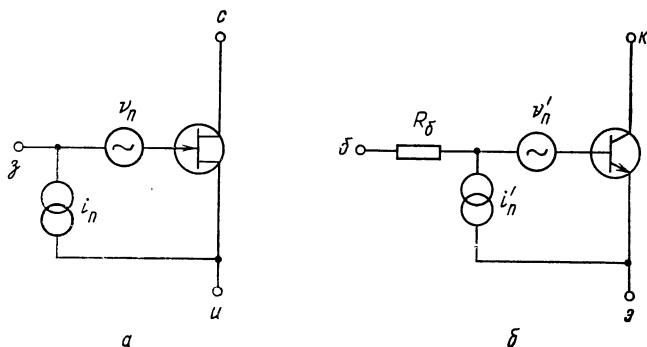


Рис. 7.1. Источники шума:

а — в полевом транзисторе; *б* — в биполярном транзисторе

тока не изменяются, а спектр генератора напряжения шума ω_v возрастает:

$$W_i = \omega_i, \quad W_v = \omega_v(1 + f_0/f). \quad (7.7a)$$

Для биполярного транзистора

$$W'_i = \omega'_i(1 + f'_0/f); \quad W'_v = \omega'_v. \quad (7.7б)$$

Отметим, что в этом случае генератор тока включен справа от последовательного сопротивления базы R_b и дает входное напряжение шума, равное $i_n R_b$, если даже внешний вывод базы *b* соединен с эмиттером *e*.

Хотя фликкер-шум проявляется непосредственно только в низкочастотных усилителях, в нелинейных радиочастотных цепях он может быть и в боковых полосах вблизи несущей. Это требует особого внимания при проектировании генераторов, которые по своему принципу работы в силу необходимости обеспечения стабильной амплитуды колебаний должны быть нелинейными устройствами. Уровень, с которым фликкер-шум модулирует выходной сигнал, создавая при этом случайную амплитудную, частотную или фазовую модуляцию, зависит не только от фликкер-шума на выходе активного прибора, но также и от схемы генератора. Вообще, фликкер-шум большое влияние оказывает на генераторы с относительно низким уровнем выходного сигнала, активный

¹ Иногда частоту f_0 называют «верхней частотой области белого шума». — Прим. ред.

прибор которых имеет передаточную характеристику с малой крутизной, и менее значительное влияние — на генераторы с высоким уровнем выходного сигнала, у которых передаточная характеристика активного прибора имеет резкий изгиб.

В отличие от дробового и теплового шумов, фликкер-шум не поддается точным или подробным расчетам. Те свойства прибора, которые определяют интенсивность фликкер-шума, хотя иногда и поддаются сложным измерениям, не так-то просто связаны с конструктивными признаками или с измеряемыми параметрами прибора. Таким образом, разработчик устройства больше обычного заинтересован в информации, предоставляемой изготовителем прибора. В некоторых случаях технические условия, например, компании Mullard на полевой транзистор BFW11 или транзистор BCY71 *p-n-p*-типа содержат все требуемые сведения. К сожалению, не всякий изготовитель дает необходимую информацию.

Хотя фликкер-шум активного прибора представляет в конечном счете большую практическую значимость, любой схемный элемент под воздействием напряжения источника постоянного тока или сильного сигнала переменного тока также может генерировать фликкер-шум. Мы уже упоминали об угольных резисторах и керамических конденсаторах (например, низковольтных дисковых проходного типа) со значительным током утечки, но этим перечень отнюдь не исчерпывается. Если в цепи на низкой частоте наблюдается явно необъяснимый избыточный шум, то почти любой элемент, через который протекает постоянный или переменный ток, должен быть поставлен под сомнение. Интенсивным источником избыточного шума является контактное сопротивление. Шум может возникать в спаянных, скрученных или сваренных соединениях, и такие соединения могут находиться внутри самих элементов. В одном случае из практики автора избыточный шум в спектрометре высокоуровневого ядерного квадрупольного резонанса был в конце концов обнаружен в одном, возможно, наименее вероятном из всех элементов, — серебряно-слюдяном конденсаторе с емкостью 5 пФ, установленном в высокочастотном резонансном контуре. Низкочастотная модуляция высокочастотного выходного сигнала генератора из-за контактного шума в этом конденсаторе почти вдвое превышала шум, обусловленный всеми остальными источниками. Установлено также, что существенная доля избыточного шума в низкочастотных усилителях бывает обусловлена использованием неподходящего по назначению типа конденсатора связи.

Из-за наличия фликкер-шума разработка малошумящих усилителей на очень низких частотах представляет во многих отношениях такую же сложную проблему, как и в случае сверхвысоких частот. Нет сомнения, что разработка малошумящих усилителей на основе имеющихся в настоящее время приборов, будет проще, если их рабочая частота лежит в диапазоне от 10 кГц до 50 МГц.

На очень низких частотах флуктуации, обусловленные фликкер-шумом, должны рассматриваться совместно с медленным

дрейфом рабочей точки усилителя, иначе меры, предпринимаемые для минимизации одного явления, могут усугубить другое. Так, например, действие фликкер-шума в усилителе на полевом транзисторе может быть уменьшено за счет использования источника с высоким внутренним сопротивлением, но это, к сожалению, вызовет увеличение дрейфа из-за изменения токов утечки во входной цепи. Равным образом попытки снизить дрейф использованием либо дополнительных элементов в цепи обратной связи по постоянному току, либо температурно-компенсирующих элементов могут увеличить общий фликкер-шум.

Для любого узла радиоэлектронной аппаратуры необходим источник питания, обеспечивающий требуемое напряжение смещения. Однако выходное напряжение большинства источников питания содержит заметные по значению шумовые составляющие, особенно на низких частотах. Так, например, если стабилизированный источник дает номинальное выходное напряжение U и поддерживает его постоянным с помощью дифференциального усилителя, часть выходного напряжения которого сравнивается с опорным напряжением U/n , то средний квадрат выходного напряжения шума не может быть меньше чем $n^2 v_n^2$, где v_n^2 — сумма средних квадратов флуктуаций в опорном напряжении и на входе дифференциального усилителя. Шум источника питания легко проникает во входные каскады усилителя и в равной степени легко принимается за шум, генерируемый внутри усилителя. По этой причине следует быть очень внимательным при проектировании цепей смещения для входных каскадов усилителя.

ГЛАВА 8

ШУМЫ В ЭЛЕКТРОННЫХ ЛАМПАХ

8.1. Введение

Ламповые усилители в большинстве применений заменены усилителями на транзисторах, к тому же они имеют обычно плохие шумовые характеристики. Тем не менее ламповые усилители иногда еще применяются, и поэтому необходимо иметь некоторое представление об их предельных возможностях в отношении шумов. Вместе с тем многое из того, что мы знаем о шумах в радиоэлектронике, было вначале установлено применительно к электронным лампам. Поэтому довольно трудно понять классическую литературу, не имея элементарных знаний о шумах в электронных лампах. Можно добавить к этому, что, хотя общие представления, полученные из анализа шумов в электронных лампах, не имеют прямого отношения к существующим полупроводниковым приборам, нет оснований считать их неприменимыми к приборам, которые еще предстоит создать.

8.2. Шумы в ненасыщенных диодах

Энергетический спектр шумового тока в насыщенном диоде¹ со средним током I_0 выражается простой формулой дробового шума $2eI_0$, что легко проверяется экспериментально. Однако из экспериментальных данных было найдено также, что шум в ненасыщенном диоде при том же самом токе намного меньше и в некоторых случаях — в 1000 раз. В течение многих лет это оставалось загадкой, и техническая литература 30-х годов отражает многочисленные попытки объяснить это явление. Большинство из объяснений тех лет полностью ошибочны, а некоторые из них, к сожалению, все еще бытуют. Однако понятно одно, что сглаживание флуктуаций является следствием действия пространственного заряда. Действительно, поскольку ток определяется только геометрией диода, приложенным анодным напряжением и постоянными e , m и ϵ_0 , первоначально ожидалось, что анодный ток не будет флуктуировать, каковы бы ни были флуктуации эмиссии катода. Этот результат и в самом деле был бы правильным, если бы все электроны испускались катодом с одной и той же скоростью. Было признано, что тепловое распределение скоростей испускаемых электронов играет важную роль, и это постепенно привело к созданию более строгой теории Шоттки [42], Шпенке [44] и особенно Томсоном, Нортоном и Харрисом [46]. Ниже изложение материала основано на работе последних авторов. Анализ ограничивается одномерным описанием плоской параллельной структуры диода и не принимает во внимание изменение потенциала и тока по всему ее сечению. Анализ также ограничен низкими частотами (ниже 400 МГц), на которых влиянием времени пролета электронов можно пренебречь.

Электроны, испускаемые катодом при температуре T , распределены по скоростям, и на данном этапе нас будет интересовать только скорость, направленная перпендикулярно к поверхности катода. Если энергия, связанная с этой составляющей скорости, обозначена E , а I — полный ток эмиссии, то ток, соответствующий интервалу значений энергии электронов от E до $E+dE$, равен

$$dI = I_0 \exp(-E/kT) dE/kT. \quad (8.1)$$

Как было показано в гл. 5, каждая составляющая полного тока содержит полный дробовой шум, и флуктуации составляющих с различными значениями E являются некоррелированными. Поэтому энергетический спектр, связанный с dI , равен $2edI$.

В области между катодом и анодом потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона $\partial^2\varphi/\partial x^2 = -\rho/\epsilon_0$, и поскольку величина ρ отрицательна, график зависимости φ от расстояния x от катода представляет собой вогнутую кривую.

¹ В ненасыщенных диодах анодный ток ограничен пространственным зарядом вблизи катода. — Прим. ред.

В насыщенном диоде распределение потенциала должно иметь минимум, как показано на рис. 8.1. В противном случае если всюду производная $d\phi/dx$ положительна или равна нулю, то все испускаемые электроны будут ускоряться анодом и пространственный заряд не возникнет. При наличии пространственного заряда только те электроны достигнут анода, энергия которых E превышает величину $e\phi_m$. Для анодного тока при этом имеем

$$I = \int_{e\phi_m}^{\infty} I_0 \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) \frac{dE}{kT} = I_0 \exp\left(-\frac{e\phi_m}{kT}\right). \quad (8.2)$$

Поскольку в области между точкой минимума потенциала и анодом ток все же определяется пространственным зарядом (обусловленная ток плотность заряда должна удовлетворять условию $d\phi/dx=0$ в точке минимума), существует единственное значение ϕ_m для данных значений

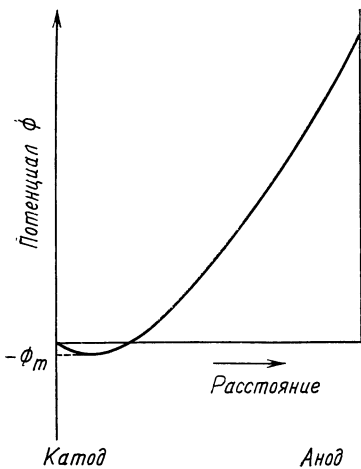


Рис. 8.1. Распределение потенциала в диоде с пространственным зарядом

анодного напряжения, межэлектродного расстояния температуры катода T и полного тока эмиссии I_0 . Очевидно также, что $e\phi_m = kT \log(I_0/I)$, и в типичном случае при $I_0 \sim 10$ А и $T \sim 1000$ К получим для минимума потенциала значение около 0,25 В, причем точка минимума расположена на расстоянии долей миллиметра от катода. Если ток I_0 флуктуирует, то величина ϕ_m также будет флуктуировать, и, как показал подробный расчет, полная флуктуация δI_0 полного тока эмиссии почти целиком компенсируется результирующими изменениями величины ϕ_m . Флуктуации фликкершума, которые являются следствием обычного изменения величины I_0 , связанного с отдельной областью поверхности катода, в действительности очень эффективно сглаживаются.

Однако мы должны рассмотреть независимые флуктуации в электронах, испускаемых в различных классах скоростей или энергий. Положительная флуктуация тока dI для класса энергий E оказывает двойное действие: она непосредственно увеличивает анодный ток и углубляет потенциальный минимум, тем самым возвращая обратно некоторые электроны, которые в противном случае могли бы достигнуть анода. Следует заметить, что эти компенсирующие флуктуации будут состоять только из электронов, вылетевших с энергией $E \sim e\phi_m$. Если дополнительные электроны принадлежат к классу энергий $E < e\phi_m$, они не достигнут

анода в любом случае, и поэтому их единственное влияние сводится к уменьшению анодного тока вследствие углубления минимума φ_m . Очевидно, мы должны выразить влияние на анодный ток флуктуации $\delta[dI(E)]$ с энергией E в виде $\gamma(E)\delta[dI(E)]$, где коэффициент $\gamma(E)$ зависит от E и может быть положительным или отрицательным. Так как флуктуации в каждом энергетическом классе не коррелированы, то флуктуация анодного тока будет суммой средних значений членов вида $\gamma^2(E)\{\delta[dI(E)]\}^2$. Тогда с учетом того, что спектр $dI(E)$ равен $2edI$, для спектра анодного тока получим

$$\omega(f) = \int_0^{\infty} 2\gamma^2(E) edI = \int_0^{\infty} 2\gamma^2(E) I_0 \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) \frac{dE}{kT}.$$

Вычисление $\gamma(E)$ и этого интеграла в общем случае сопряжено с очень большими математическими трудностями. Однако если I меньше чем $I_0/5$ и анодное напряжение U_a удовлетворяет условию $U_a > 30 kT/e \approx 3V$, конечный результат выражается в виде

$$\omega(f) = \Gamma^2 2eI, \quad (8.3)$$

где Γ^2 — коэффициент сглаживания¹, равный

$$\Gamma^2 = 9 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \frac{kT}{eU_a}. \quad (8.4)$$

Так, например, при $U_a = 100$ В и $T = 1000$ К имеем $\Gamma^2 = 2 \cdot 10^{-3}$, и уменьшение шумов очень заметно.

Флуктуации потока электронов, покидающих минимум потенциала и достигающих анода, состоят из двух компонент. Во-первых, имеются первичные флуктуации, которые возникают из-за флуктуации эмиссии катода в классе энергий $E > e\varphi_m$, т. е. в классе, к которому относятся достигающие анода электроны. Во-вторых, имеются компенсирующие флуктуации в классе энергий $E \sim e\varphi_m$. Эти компенсирующие флуктуации в сильной степени коррелированы с первичными флуктуациями, которые почти уничтожаются, но в них содержится также слабая компонента, которая является результатом флуктуаций эмиссии в классе энергий $E < e\varphi_m$. Электроны, принадлежащие к этому классу, не достигают анода.

Уравнения (8.3) и (8.4) могут быть записаны в другом, более употребительном виде. В диоде, в котором все электроны вылетают из катода с нулевой скоростью, анодный ток и напряжение связаны законом Чайльда $I = kU^{3/2}_a$ ². При условии, что eU_a

¹ Этот коэффициент называют еще коэффициентом подавления, или, иначе, депрессии. — *Прим. ред.*

² В отечественной литературе эта формула известна под названием «закон трех вторых». Этот закон связывают также с именами И. Ленгмюра и С. А. Богуславского. — *Прим. ред.*

намного больше чем kT , на этот результат очень незаметно влияют скорости эмиссии. Таким образом, проводимость диода может быть выражена в виде

$$g = \frac{\partial I}{\partial U_a} = \frac{3}{2} \frac{I}{U_a}. \quad (8.5)$$

Если этот результат использовать для исключения I и U_a в выражениях (8.3) и (8.4), то получим

$$\omega = 3(1 - \pi/4)4kTg \approx 0,64(4kTg). \quad (8.6)$$

Поэтому часто говорят, что флуктуации тока равны тепловому шуму в проводимости g при температуре, составляющей $2/3$ от температуры катода. Время от времени предпринимались различные бесплодные и, по существу, ошибочные попытки найти термодинамическое подтверждение этого результата. Совершенно очевидно, что диод с нагретым катодом, холодным анодом и подключенным источником питания является системой, не находящейся в термодинамическом равновесии. Несмотря на это, уравнение (8.6), без сомнения, полезно.

Эквивалентная схема диода состоит из проводимости g , параллельно подключенной к генератору шумового тока, средний квадрат которого равен $I_n^2 = 0,64 \cdot (4kTgdf)$, где df — соответствующая полоса пропускания. При расчетах эту схему можно рассматривать как пассивную проводимость g при температуре $0,64 T$, т. е. при температуре почти вдвое ниже комнатной. Полученные результаты можно также использовать для выражения Γ^2 через g и I . Если $T \approx 1000$ К, что типично для оксидного катода, то имеем $\Gamma^2 \approx g/(9I)$, где Γ имеет размерность A/B (обратную по отношению к размерности сопротивления), а I выражен в амперах.

Добавим, что эти результаты плохо подтверждаются на существующих диодах. Остаточный газ приводит к образованию положительных ионов, а так как эти ионы образуются случайно и предрасположены к захвату отрицательным минимумом потенциала, они порождают избыточный шум. Например, для проверки выражения (8.4) требуется диод с более высоким разрежением, чем это необходимо для других целей. Однако в триоде или многосеточной лампе наличие управляющей сетки, находящейся под отрицательным потенциалом, вызывает отталкивание ионов. В таких лампах, как мы увидим в следующих разделах, результаты, вытекающие из (8.4), подтверждаются с достаточной точностью.

8.3. Триоды

Поведение триода на переменном токе можно анализировать на основе эквивалентного диода, анодная плоскость которого совпадает с плоскостью сетки триода и эффективное напряжение которого $U_d = U_g + (1/\mu)U_a$, где U_g — напряжение сетки; U_a — анодное напряжение и μ — коэффициент усиления, который зависит от

геометрии лампы. Анодный ток определяется уравнением $I_a = KU_d^{3/2}$, и, следовательно, крутизна характеристики лампы равна

$$g_m = \frac{\partial I_a}{\partial U_g} = \frac{3}{2} \frac{I_a}{U_d}.$$

Энергетический спектр шума анодного тока равен $2e\Gamma^2 I_a$, где $\Gamma^2 \approx g_m / (9I_a)$, откуда следует

$$\omega = \frac{g_m}{9I_a} 2eI_a \approx \frac{e g_m}{4}. \quad (8.7)$$

Приложенное к сетке напряжение шума со спектром ω/g_m^2 вызовет идентичные флуктуации на выходе, которые удобно рассматривать как шум на входе лампы. Этот шум можно сравнить

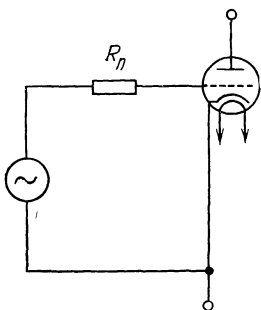


Рис. 8.2. Эквивалентная шумовая схема триода

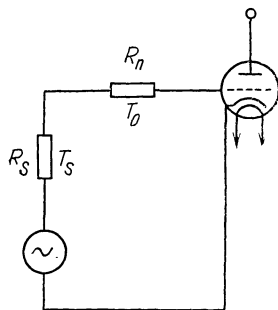


Рис. 8.3. Триод, подключенный к источнику сигнала с внутренним сопротивлением R_s при температуре T_s .

непосредственно с шумом источника входного сигнала. Поскольку сопротивление R_n при температуре T_0 имеет энергетический спектр шумового напряжения $4kT_0R_n$, шум, обусловленный лампой, равен шуму в эквивалентном сопротивлении:

$$R_n = \frac{e}{4g_m} \frac{1}{4kT_0}. \quad (8.8)$$

Если T_0 взять равной 293 К (20°C — обычная стандартная температура), то получим $kT_0/e \approx 25$ мВ, и, следовательно,

$$R_n = 2,5/g_m. \quad (8.9)$$

На рис. 8.2 показана шумовая эквивалентная схема усилителя на триоде, подключенного к источнику сигнала. Сопротивление R_n служит только для представления генератора шумового напряжения с энергетическим спектром $4kT_0R_n$ и не играет никакой роли в уравнениях цепи. Для того чтобы понять, чем такое пред-

ставление полезно, рассмотрим схему на рис. 8.3, в которой к триоду подключен источник сигнала с внутренним сопротивлением R_s и температурой T_s . При отсутствии других источников шума средний квадрат полного шумового напряжения, действующего на входе нешумящего триода, определяется суммой тепловых шумов в сопротивлениях R_s и R_n и спектр входного шума равен $4kT_sR_s + 4kT_0R_n$. Средний квадрат входного шума больше, чем шума, обусловленного только одним источником сигнала, на множитель $F = 1 + R_nT_0/(R_sT_s)$. Если, как это часто бывает, $T_s = T_0$, то мы получим очень простое выражение $F = 1 + R_n/R_s$ для определения избыточного шума.

На практике считается, что выражение (8.9) точно (с погрешностью в пределах около 20%) описывает шум большинства триодов в диапазоне частот от 10 кГц до 10 МГц. На низких частотах следует учитывать фликкер-шум, а на более высоких — увеличение шума из-за влияния времени пролета электронов (см. разд. 8.5). Отметим, что существующие триоды имеют g_m порядка 25 мА/В, так что значение R_n должно составлять лишь 100 Ом. Если сопротивление источника равно 10^5 Ом, то ухудшение шумовой характеристики вследствие дробового шума характеризуется числом, пренебрежимо мало отличающимся от единицы. Фактически в таком усилителе весь шум на выходе определяется усиленным тепловым шумом внутреннего сопротивления источника сигнала.

8.4. Многосеточные лампы — шум токораспределения

Даже в ламповых устройствах триоды встречаются относительно редко, так как их коэффициент усиления низок (обычно менее 100), а из-за проходной емкости анод — сетка усилителя на триодах становятся неустойчивыми (эффект Миллера) на относительно низких радиочастотах (около 1 МГц). Тетроды и их незначительная модификация — пентоды применяются много чаще. В этих лампах экранная сетка, находящаяся под положительным потенциалом, помещена между управляющей сеткой и анодом и управляет процессом протекания постоянного тока в лампе, а анод служит лишь для улавливания электронов, прошедших сквозь экранную сетку. Выходным сигналом является анодный ток, и так как изменения анодного напряжения оказывают небольшое влияние на ток, коэффициент усиления таких ламп велик. Расположенная между управляющей сеткой и анодом экранная сетка сводит почти на нет эффект Миллера. Однако ввиду того, что поток достигающих анода электронов является результатом случайного по своему характеру разделения катодного тока экранной сеткой, появляется дополнительный вид шума, известный под названием шума токораспределения.

Поток электронов, достигающий экранной сетки, сглаживается, так как первичные флуктуации дробового шума компенсируются коррелированными вторичными флуктуациями. Однако первичные

и компенсирующие флуктуации состоят из различных групп электронов и корреляция между их поперечными скоростями или траекториями отсутствует. Таким образом, каждая группа флуктуирующих электронов случайно и независимо разделяется экранной сеткой. Первичная флуктуация может попасть в сетку, а компенсирующая — пройти через нее, или наоборот. Количественный расчет [46] показывает, что эффективные коэффициенты сглаживания пространственным зарядом для токов анода и экранной сетки равны соответственно

$$\Gamma_a^2 = 1 - \alpha(1 - \Gamma^2) \quad (8.10a)$$

и

$$\Gamma_s^2 = \alpha + (1 - \alpha)\Gamma^2, \quad (8.10б)$$

где Γ^2 — исходный коэффициент сглаживания, а α — доля катодного тока, достигающая анода. Дополнительные флуктуации в токах анода и экранной сетки полностью коррелированы, и если эти два электрода соединены между собой и лампа используется в триодном режиме, то ее шумовая характеристика будет такой же, как и для триода. Соотношение (8.10a) может быть выражено через токи экранной сетки, анода и катода:

$$\Gamma_a^2 = \frac{I_s}{I_k} + \frac{I_a}{I_k} \Gamma^2. \quad (8.11)$$

Отсюда следует, что эквивалентное шумовое сопротивление пентода или тетрода равно

$$R_n = \frac{2,5}{g_m} \left(1 + 9 \frac{I_a I_k}{I_a g_m} \right), \quad (8.12a)$$

где $g_m = \partial I_k / \partial v_g$ — общая крутизна характеристики лампы. Исходя из крутизны анодной характеристики $g_a = \partial I_a / \partial v_g = g_m I_a / I_k$, имеем

$$R_n \approx \frac{2,5}{g_a} \frac{I_a}{I_k} \left(1 + 9 \frac{I_a}{g_a} \right). \quad (8.12б)$$

Если, например, $I_s = 1$ мА, $I_a = 9$ мА, $I_k = 10$ мА, а $g_m = 5$ мА/В, то коэффициент в скобках равен 3, и на практике шум пентодов и тетродов обычно примерно в 3 раза больше шума триодов с той же крутизной характеристики. Хотя аргументация, которая приводит к выражениям (8.12), плохо обоснована, эти выражения характеризуют шум в многосеточных лампах с погрешностью в пределах около 20%.

Заметим, что, как следует из (8.10б), по мере приближения α к единице коэффициент сглаживания пространственным зарядом для тока экранной сетки также стремится к единице независимо от величины Γ^2 . Это является общим результатом. Если электрод перехватывает только малую долю $1 - \alpha$ большего тока, то ток в цепи этого электрода будет воспроизводить полный дробовой

шум. По этой причине следует тщательно избегать использования сеток, находящихся под положительным потенциалом, в качестве выходных электродов в малошумящих системах (если только, конечно, все положительные электроды не соединены вместе).

8.5. Наведенный шум сетки

По мере того как электроны покидают катод и на пути к аноду проходят через сетку, они наводят в цепи сетки импульсы тока, сначала отрицательный и затем положительный. Полный заряд сетки для каждой пары импульсов равен нулю. Однако если период приложенного к сетке напряжения сигнала сравним со временем пролета электронов, то энергия входного сигнала будет расходоваться в цепи сетки и появится конечная входная проводимость, включенная параллельно с входной емкостью. Эта проводимость на частоте f равна

$$G_{\tau} \sim g_m (2\pi f \tau)^2 / 20 \sim 2g_m f^2 \tau^2, \quad (8.13)$$

где τ — время пролета электронов от катода до сетки. Таким образом, при $\tau = 10^{-9}$ с и $g_m = 20$ мА/В входная проводимость на частоте 100 МГц составляет 0,4 мА/В. Электроны при своем движении наводят также шумовой ток в цепи сетки, и хотя подробный расчет сложен, можно показать, что спектр этого тока также пропорционален g_m и $(2\pi f \tau)^2$. Приближенное выражение [27] для спектра наведенного шума имеет вид

$$\omega = \frac{20}{3} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) 4kT_k G_{\tau}. \quad (8.14)$$

Если температура катода T_k равна 1000 К, то наведенный шум эквивалентен тепловому шуму в проводимости G_{τ} при температуре 1450 К, что составляет около $5T_0$, где T_0 — стандартная температура 293 К. На рис. 8.4 показана эквивалентная схема входной цепи триода на высокой частоте, включающая в себя обусловленную пролетными эффектами проводимость G_{τ} , входную емкость C и обычное шумовое сопротивление R_n . Следует обратить внимание на то, что R_n включено между C , G_{τ} и сеткой лампы.

На рис. 8.5 приведена эквивалентная схема с входной проводимостью $Y = G_{\tau} + j\omega C$ и шумовыми генераторами напряжения и тока, спектр которых определяется соотношениями:

$$\omega_o = 4kT_o R_n = 10kT_o / g_m; \quad (8.15a)$$

$$\omega_i = 20kT_o G_{\tau} = 20kT_o / R_{\tau}. \quad (8.15b)$$

Изготовители ламп обычно дают значение R_{τ} , обратное значению G_{τ} на определенной частоте. Так, для пентода типа E180F имеем

$R_{\tau} = 1,5 \cdot 10^{10} f^{-2}$, Ом. На частоте 100 МГц значение R_{τ} составляет всего лишь 1500 Ом. Обобщая, отметим, что $R_{\tau} g_m$ имеет почти одно

и то же значение для всех усилительных пентодов. Это означает, что время пролета для промежутка катод — сетка одно и то же. Шумовые генераторы напряжения и тока, показанные на рис. 8.5, оказываются частично коррелированными, так как они представляют, в сущности, один и тот же основной процесс дробового шума. Степень корреляции невелика, причем коррелированные компоненты находятся в квадратуре. Это, как мы увидим в гл. 12, означает, что эффект от корреляции очень небольшой. Хотя пред-

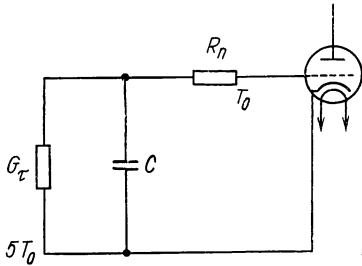


Рис. 8.4. Источники высокочастотного шума триода

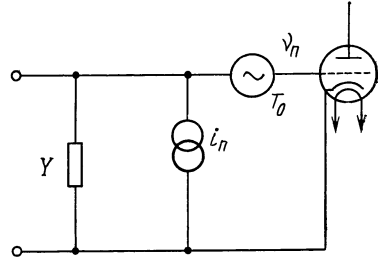


Рис. 8.5. Входные параметры триода

принятые в прошлом попытки использовать эту корреляцию для улучшения шумовых характеристик высокочастотных усилителей предоставили обширные возможности для широкого использования элементарной алгебры, достигнутые результаты незначительны. Аналогичные незначительные корреляции, встречающиеся как в биполярных, так и в полевых транзисторах, использовались подобным образом, но, к сожалению, с небольшой практической пользой.

8.6. Ионный шум, или шум сеточного тока

Разрежение в электронных лампах не идеально, и остаточный газ ионизируется электронами. Возникающие положительные ионы дрейфуют к сетке и вызывают конечный сеточный ток I_g . Этот ток характеризуется спектром дробового шума:

$$\omega = 2eI_g. \quad (8.16)$$

Однако этот шум будет заметно проявляться только в том случае, если сопротивление R в цепи сетки велико и обусловленные ионным шумом флуктуации напряжения $2eI_g R^2 df$ превышают тепловой шум $4kTRdf$ в сопротивлении R . Этому соответствует условие

$$eI_g R > 2kT_0$$

или

$$I_g R > 1/20. \quad (8.17)$$

Таким образом, если ток I_g составляет 10^{-9} — 10^{-7} А, что характерно для большинства усилительных ламп, то ионный шум будет значительным лишь при значениях сеточного сопротивления R порядка нескольких мегаом. Для применения в электрометрах выпускаются специальные лампы с более низким давлением остаточных газов и током I_g до 10^{-11} А. Допускаемые для таких ламп значения R превышают 10^9 Ом. Если электрометрический триод используется для измерения тока I , протекающего через сопротивление R , то отношение сигнал/шум в полосе частот Δf равно

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2 = \frac{R^2 I^2}{4kTR\Delta f + 2eI_g R^2 \Delta f}.$$

При очень больших значениях R это отношение стремится к предельному значению $I^2/(2eI_g\Delta f)$. Так, например, при $I_g=10^{-11}$ А и $\Delta f=1$ Гц ток $1,8 \cdot 10^{-15}$ А дает отношение сигнал/шум, равное единице. Поскольку требуемое значение R составляет около 10^{10} Ом, постоянная времени цепи с входной емкостью 10 пФ равна 0,1 с.

Если отрицательный потенциал сетки по отношению к катоду достаточно мал, то испускаемые катодом электроны высокой энергии могут достигнуть сетки. Так как флуктуации эмиссии электронов высокой энергии не сглаживаются пространственным зарядом, то в результирующем сеточном токе возникает полный дробовой шум. В некоторых применениях такой шум может быть существенным.

8.7. Заключение

Как было сказано в предисловии к этой главе, описание шумов в электронных лампах представляет интерес главным образом с исторической точки зрения. Это касается литературы, изданной до 1965 г. В настоящее время триоды и пентоды вытеснены транзисторами, используемыми в малошумящих усилителях на частотах до 5000 МГц (верхний предел для обоих типов ламп), а электрометрические триоды заменены полевыми транзисторами. Триоды и пентоды применяются только в высокочастотных усилителях и генераторах большой мощности. Тем не менее многие теоретические выводы, сделанные при изучении шумов в электронных лампах, используют и при исследовании шумов транзисторов. Следует заметить, однако, что часто их применяют ошибочно. Так, например, из-за внешнего сходства с шумами в триодах одно время считалось, что шум в полевых транзисторах представляет собой процесс сглаженного дробового шума. А в правильной интерпретации [51] это процесс тепловых шумов. Поэтому даже когда мы имеем дело с транзисторами, полезно некоторое знание о шумах в электронных лампах. К счастью, как мы увидим далее, шум в полупроводниковых приборах легче поддается анализу.

ШУМЫ В ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ПЛОСКОСТНЫХ ДИОДАХ

Основной вклад в теорию шумов в полупроводниковых приборах внесли три работы: Ван-дер-Зила и Бекинга [48] и Ван-дер-Зила [50, 51]. Изложение этой темы здесь и в следующих двух главах основано на представлениях этих авторов. Следует отметить, что после написания этой главы Бекингом и Фолкнер представили новый анализ шумов в диодах и транзисторах [4]. Хотя для большинства практических целей их результаты почти не отличаются от известных ранее, однако физическая основа анализа совершенно иная и, по нашему мнению, более реалистична. Поэтому краткое изложение их работы приведено в приложении Б, которое следовало бы читать вместе с гл. 9, 10 и 13.

9.1. Введение

Плоскостной диод содержит два контактирующих образца относительно высоколегированных полупроводниковых материалов с двумя различными типами проводимости. Оба образца снабжены металлическими контактами. Если проводимость в объеме образцов достаточно высока, то разность потенциалов, приложенная к металлическим контактам, почти не создает электрического поля внутри образцов и оказывается целиком приложенной к обедненному слою в переходе. Как будет показано далее, это означает, что шум во внешней цепи полностью определяется движением носителей заряда в обедненном слое. Объемы p - и n -областей не участвуют в образовании шумов, не считая небольшого вклада, вносимого тепловым шумом вследствие конечного значения их проводимостей.

Если два проводящих электрода (в нашем случае выводы и контакты) находятся под разностью потенциалов U (создаваемой, например, батареей), то между ними возникает электрическое поле E . Пусть в этом поле движется частица с зарядом q и скоростью v . Тогда работа, совершаемая над частицей в единицу времени, равна qEv . Энергия должна поставляться батареей, поэтому по внешней цепи будет протекать ток $I = (q/U)Ev$. Поскольку величина EU^{-1} есть чисто геометрический фактор, это выражение описывает ток, наведенный во внешней цепи движущейся частицей (см. приложение А, где приведен более подробный вывод этого выражения). Ток исчезает при движении частицы в области, где $E = 0$. Далее, если за время t частица перемещается из точки с потенциалом φ_1 в точку с потенциалом φ_2 , то переносимый во внешней цепи заряд δq равен

$$\delta q = \int I dt = \frac{q}{U} \int Ev dt = \frac{q}{U} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} -\nabla \varphi dr = -q \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{U}.$$

Знак в правой части этого соотношения не должен нас интересовать, так как он носит чисто условный характер. Полученный результат можно интерпретировать следующим образом: если заряженная частица q проходит через область, в которой изменение потенциала составляет часть α от приложенного напряжения U , то заряд, перенесенный во внешнюю цепь, равен αq . При полном перемещении частицы от одного контакта до другого имеем довольно очевидный результат: $\alpha=1$. В применении к плоскостному диоду это значит, что когда носитель заряда движется от одной области к другой, короткий импульс тока во внешней цепи имеет полный заряд q , который появляется, как только носитель пересечет обедненный слой. Движение частицы до и после этого перехода, т. е. движение в n - и p -областях, не производит никаких других внешних эффектов, помимо теплового шума.

Движение носителей в обедненном слое, где они не имеют значительных тепловыделяющих соударений, удовлетворяет всем критериям, установленным в гл. 5, для процесса дробового шума. Таким образом, если в p — n -переходе прямосмещенного диода весь ток переносится электронами, инжектированными в p -область из зоны проводимости n -области, то энергетический спектр, связанный со средним током I , просто равен $2eI$. Рассмотрим, как этот результат видоизменяется под действием других процессов и как он зависит от изменений смещения и частоты.

При элементарном подходе принято считать, что ток через p — n -переход состоит из двух различных и независимых компонент: электронов, проводимости и электронов, которыми обмениваются две валентные зоны. Последний процесс обычно описывается как перенос дырки. Мы начнем наш анализ с рассмотрения этой модели, а продолжим его рассмотрением третьего процесса, который имеет большое значение в кремниевых диодах с обратным, нулевым или малым прямым смещением и весьма нежелателен в биполярных транзисторах. В этом процессе электроны меняют зоны внутри обедненного слоя. Механизм включает в себя промежуточный центр рекомбинации, или, иначе, ловушку, внутри обедненного слоя, и так как его чистым эффектом является генерация или рекомбинация пары дырка — электрон, результирующий ток известен под названием рекомбинационного.

9.2. Идеальный диод

В простейшем случае, когда рекомбинация не учитывается, электронные и дырочные процессы независимы и аддитивны по своему влиянию на средний ток и шум. Поэтому следует рассмотреть только один процесс — для ясности электронный. В этом случае ток состоит из двух компонент: прямого тока, который содержит электроны, переходящие из n -области в p -область, и обратного тока электронов, переходящих из p -области в n -область. При нулевом смещении эти токи в среднем уравниваются. Обратный ток определяется только концентрацией электронов (неосновных

носителей) в p -области. Для перехода этих электронов в n -область не существует потенциального барьера. Поэтому обратный ток не изменяется под действием приложенного смещения. Обозначим этот ток как I_{d0} . Прямой ток определяется частично концентрацией основных носителей (электронов) в n -области, но так как она велика, преобладающее влияние на ток оказывает тормозящий потенциальный барьер в переходе. Повышение положительного потенциала U p -области уменьшает этот барьер, и прямой ток увеличивается как $\exp(eU/kT)$. Таким образом, общий ток равен

$$I = I_{d0} [\exp(eU/kT) - 1]. \quad (9.1)$$

Каждая компонента тока I порождает полный дробовой шум, и поэтому спектр шумового тока будет

$$\omega = 2eI_{d0} [\exp(eU/kT) + 1]. \quad (9.2)$$

При большом прямом напряжении смещения, когда преобладает прямой ток, это выражение сводится к

$$\omega = 2eI, \quad (9.3)$$

Для большого обратного напряжения, когда $|I| = I_{d0}$, выражение для спектра (9.3) остается в силе. Дифференциальная, или, иначе, малосигнальная, проводимость диода определяется как

$$G = \frac{dI}{dU} = \frac{eI_{d0}}{kT} \exp\left(\frac{eU}{kT}\right). \quad (9.4)$$

Используя (9.4), общее выражение (9.2) можно представить в виде

$$\omega = 4kTG - 2eI. \quad (9.5)$$

При нулевом смещении диод представляет собой систему, пребывающую в термодинамическом равновесии (в противоположность вакуумному диоду). Поэтому можно быть уверенным, что если I (полезный ток) равен нулю, то получим результат Найквиста $\omega = 4kTG$.

До сих пор мы пренебрегали влиянием времени пролета электронов в обедненном слое. При скорости электронов порядка 10^5 м/с и ширине слоя порядка 10^{-6} м это время равно лишь 10^{-11} с. На любой рабочей частоте пролетные эффекты пренебрежимо малы или могут быть таковыми благодаря соответствующему выбору профиля легирования, при котором уменьшается ширина обедненного слоя. При конечном времени пролета электронов шум на высоких частотах становится меньше, но уменьшается также и отклик на полезный сигнал, что приводит к ухудшению характеристик. Однако имеется один частотно-зависимый эффект, который следует рассмотреть.

Составляющие часть прямого тока электроны инжектируются в p -область, для которой они являются неосновными носителями. Избыток инжектированных неосновных носителей оказывает за-

метное влияние на их общую концентрацию и на значение обратного тока. Этот эффект можно выразить иначе: имеется заметная вероятность возвращения инжектированного неосновного носителя через переход в свою исходную точку в n -область. Для электронов, прибывающих в n -область, этот эффект наблюдается в очень незначительной степени, так как концентрация уже имеющихся в ней электронов велика. Поэтому следует выяснить последствия этого процесса только для прямого тока. Начнем с рассмотрения компоненты $I_{\tau 0} \exp(eU/kT)$ прямого тока, которая возвращается через переход с определенной временной задержкой τ . С этой компонентой связаны добавочные члены полной проводимости диода

$$\begin{aligned} \Delta Y &= \Delta G + j\Delta B = \frac{dI}{dU} [1 - \exp(-j\omega\tau)] = \\ &= \frac{eI_{d0}}{kT} \exp\left(\frac{eU}{kT}\right) (1 - \cos\omega\tau + j \sin\omega\tau) \end{aligned}$$

и спектра шума

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= |1 - \exp(-j\omega\tau)|^2 2eI_{d0} \exp\left(\frac{eU}{kT}\right) = \\ &= 4eI_{d0} \exp\left(\frac{eU}{kT}\right) (1 - \cos\omega\tau). \end{aligned}$$

Последнее соотношение можно записать в виде

$$\Delta\omega = 4kT\Delta G. \quad (9.6)$$

Так как в это соотношение не входит τ , оно имеет силу и для хаотичного распределения времени жизни электронов. Можно показать, сочетая этот результат с (9.3) и (9.5), что спектр шума представляется формулой

$$\omega(\omega) = 4kTG(\omega) - 2eI, \quad (9.7)$$

откуда при большом напряжении прямого смещения получим

$$\omega(\omega) = 2eI + 4kT[G(\omega) - G(0)]. \quad (9.8a)$$

Так как $\omega(0) = 2eI + 4eI_{d0} = 2kTG(0)$, $\omega(\omega)$ можно выразить в виде

$$\omega(\omega) = 2kTG(0) + 4kT[G(\omega) - G(0)]. \quad (9.8b)$$

Из выражения (9.8b) видно, что на умеренных частотах, для которых можно пренебречь различием между $G(\omega)$ и $G(0)$, диод при прямом смещении генерирует половину шума, производимого эквивалентной пассивной проводимостью при той же температуре. Таким образом, если двухполосник при температуре T содержит прямосмещенный диод, то номинальная мощность шума на выводах этой цепи может быть меньше, чем kT , на единицу частотного интервала. Оказывается, диод действует подобно поглотителю шума или тепловому насосу, забирая мощность теплового шума

из цепи и отводя ее в виде тепла в окружающую среду. Это не связано с нарушением законов термодинамики, так как диод со смещением не является системой при тепловом равновесии; над системой непрерывно совершается работа, производимая источником смещения. Такая система аналогична домашнему холодильнику. До тех пор пока холодильник получает питание от электросети, он может переносить тепло из морозильного отделения в окружающий воздух, если даже воздух имеет более высокую температуру.

Этот результат иллюстрирует два общих вывода. Во-первых, если система, будь она даже и однородной по температуре, не находится в состоянии термодинамического равновесия, то номинальная мощность шума на выходах системы определяется не только ее температурой. Во-вторых, мы должны стараться не подходить с точки зрения термодинамики к системам, которые не находятся во внутреннем термодинамическом равновесии, если даже неравновесные компоненты этой системы «не активны» в том смысле, что они не могут усиливать полезные сигналы.

9.3. Рекомбинационные эффекты

Согласно выражению (9.1) все диоды имеют одинаковую форму вольт-амперной характеристики. Следовательно, если, например, обратный ток I_{d0} равен 10^{-9} А и $T=300$ К, то прямой ток при $U=0,6$ В должен быть больше 10 А. Каждый, кто знаком с поведением реальных диодов, знает, что на самом деле это не так; в частности, в кремниевых диодах обратному току 10^{-9} А соответствует, по всей вероятности, прямой ток 10^{-3} А при напряжении 0,6 В, и 10^{-6} А, а не 0,5 А при 0,5 В. Таким образом, идеальная модель не очень хорошо сочетается с реальными диодами. Причина заключена в том, что мы не приняли во внимание рекомбинацию и генерацию носителей в обедненном слое. В кремниевых диодах этот процесс определяет обратную ветвь вольт-амперной характеристики и поведение прибора при малом напряжении прямого смещения.

Начнем с предположения, что имеется локализованная группа ловушек (рекомбинационных центров) в обедненном слое, расположенная в том месте, где по мере изменения приложенного напряжения на U разность потенциалов изменяется на αU . Эти ловушки служат как для облегчения электронно-дырочной рекомбинации, так и для генерации электронно-дырочных пар, т. е. для переноса электронов из зоны проводимости в валентную зону и наоборот. Если в обедненном слое образовалась пара электрон — дырка, то поле заставляет двигаться электрон по направлению к n -области, а дырку — по направлению к p -области. Этот процесс содействует образованию обратного тока, и поскольку скорость процесса определяется характеристиками уровней захвата (номинальной тепловой энергией, концентрацией электронов в валентной зоне и концентрацией дырок в зоне проводимости, каждая из ко-

торых велика), этот ток незначительно меняется при изменении напряжения смещения. Напряжением смещения изменяется только концентрация электронов в зоне проводимости и концентрация дырок в валентной зоне. Напротив, процесс рекомбинации, благодаря которому электроны переносятся из зоны проводимости в валентную зону, зависит от концентрации электронов в зоне проводимости и концентрации дырок в валентной зоне и в конечном счете от напряжения смещения. Следовательно, можно предположить, что ток выражается в общем виде формулой $I_0[\exp(\alpha eU/kT) - 1]$. К сожалению, ситуация оказывается гораздо более сложной, чем мы могли ожидать (для более подробных сведений см. [41]), так как при конечном числе имеющихся ловушек эти два процесса будут взаимодействовать. Окончательное выражение для общего тока, обусловленного процессом рекомбинации в рассматриваемой группе ловушек, имеет вид

$$I_{r\alpha} = K \frac{pn - n_i^2}{n + p + a}, \quad (9.9)$$

где K и a — постоянные; p и n — концентрации дырок и электронов в месте расположения группы рекомбинационных центров; $n_i = p_i$ — концентрация электронов или дырок в p - и n -областях. Если напряжение смещения отсутствует, то $pn = n_i^2$ и два члена в числителе, из которых pn представляет прямой ток, а n_i^2 — обратный ток, компенсируются. При прямом смещении n увеличивается как $\exp[\alpha eU/kT]$, а p — как $\exp[(1-\alpha)eU/kT]$, так как αU и $-(1-\alpha)U$ представляют собой потенциал группы центров относительно потенциала n - и p -областей. Таким образом, выражение (9.9) можно записать в виде

$$I_{r\alpha} = K \frac{\exp\{eU/kT\} - 1}{\exp(\alpha eU/kT) + \exp[(1-\alpha)eU/kT] + a}. \quad (9.10)$$

Каждая компонента I_r проявляет полный дробовой шум, и поэтому для спектра имеем

$$\omega_r = 2eK \frac{\exp(eU/kT) + 1}{\exp(\alpha eU/kT) + \exp[(1-\alpha)eU/kT] + a}. \quad (9.11)$$

Легко показать, что при нулевом смещении дифференциальная проводимость равна

$$G_r = \frac{eK}{kT(2+a)},$$

а спектр $\omega_r = 4eK/(2+a)$. Следовательно, лишний раз убеждаемся в том, что если система находится при тепловом равновесии, то $\omega_r = 4kTG_r$. В случае, когда U отрицательно и велико, обратный ток равен $-K/a$. При этом соотношение (8.10) можно выразить через $I_{r\alpha 0}$:

$$I_{r\alpha} = i_{r\alpha 0} \frac{\exp(eU/kT) - 1}{\exp(\alpha eU/kT) + \exp[(1-\alpha)eU/kT] + a}. \quad (9.12)$$

Значение α находится между 0 и 1, а значение a в (9.12) зависит от энергии рекомбинационных центров и должно быть большим, но не более $\sim 10^6$. Таким образом, для малого напряжения прямого смещения имеем

$$I_{r\alpha} \sim \frac{I_{r\alpha 0}}{a} \exp\left(\frac{eU}{kT}\right).$$

Для напряжений прямого смещения U , не выходящих за предел, при котором $\exp(\alpha eU/kT)$ или $\exp[(1-\alpha)eU/kT]$ не превышает a и который даже при $\alpha=1/2$ составляет лишь около 0,3 В, выражение для $I_{r\alpha}$ сводится к виду

$$I_{r\alpha} \sim I_{r\alpha 0} \exp(\alpha eU/kT) \text{ при } \alpha < 1/2$$

или

$$I_{r\alpha} \sim I_{r\alpha 0} \exp[(1-\alpha)eU/kT] \text{ при } \alpha > 1/2.$$

Даже для одной локализованной группы рекомбинационных центров характеристика по постоянному току довольно сложна и выглядит не так просто, как (9.1). Очевидно, если мы попытаемся усреднить выражение (9.12), которое в любом случае приближенно [41], по всем положениям центров рекомбинации в обедненном слое, результирующее выражение получится еще более сложным. Тем не менее вытекающие из него следствия сравнительно просты. Ток диода может быть выражен через сумму диффузионной и рекомбинационной составляющих:

$$I = I_{d0} \left[\exp\left(\frac{eU}{kT}\right) - 1 \right] + I_r. \quad (9.13)$$

Для обратного смещения и малого напряжения прямого смещения рекомбинационный ток I_r с его сложной зависимостью от напряжения является определяющим, но в конечном счете при большом напряжении прямого смещения становится преобладающим диффузионный ток, для которого показатель степени eU/kT больше по сравнению с $eU/2kT$ для тока I_r . Более того, лишь прямой диффузионный ток связан с инжекцией неосновных носителей, что имеет исключительно важное значение для транзисторов. Для шума при нулевом смещении или для прямого и обратного смещений, когда пренебрежимо мал обратный или прямой ток, все относительно просто. При нулевом смещении имеем $w=4kTG$, а для заметного смещения любого знака $w=2eI$. Промежуточная область смещений не представляет большого интереса. Но очевидно также, что с учетом рекомбинации, процесс которой протекает с задержкой во времени, описание высокочастотной характеристики и шума чрезвычайно усложняется. Единственно простая ситуа-

ция в этом случае наблюдается при большом напряжении прямого смещения, когда прямой диффузионный ток $I_{d0} \exp(eU/kT)$ преобладает по сравнению с рекомбинационным током.

Проведенное выше обсуждение эффектов рекомбинации было необходимо не из-за их особой важности, а лишь потому, что при рассмотрении шумов в транзисторах мы основывались на простой формуле (9.1), хотя, как показывают обычные наблюдения, эта формула не соответствует поведению реального кремниевого диода. Важно отдавать себе отчет в том, что это несоответствие есть результат рекомбинации и что рекомбинация не ведет к инжекции неосновных носителей. Поэтому она не играет никакой роли в основном механизме, связанном с работой транзистора.

9.4. Шум диода в электрических цепях

На рис. 9.1 изображена шумовая эквивалентная схема диода, где дифференциальная полная проводимость диода $Y = G + jB$ и шумовой ток (i_n) — зависят от условий смещения.

Напряжение шума разомкнутой цепи v_n равно i_n/Y . Если диод находится в состоянии прямого смещения, то проводимость Y будет большой, а напряжение v_n — малым. Таким образом, для сильного прямого смещения $Y = eI/kT$ и $\omega_i = 2eI$, так что спектр шумового напряжения v_n равен

$$\omega_v = 2 \frac{(kT)^2}{eI} = \frac{2kT}{G}. \quad (9.14)$$

Например, для $I = 1$ мА эффективное сопротивление $1/G$ при комнатной температуре составляет 25 Ом и спектр ω_v равен спектру тепловых шумов в резисторе с сопротивлением 12,5 Ом. Номинальная мощность на единицу полосы пропускания равна $kT/2$, и при условии, что ток I велик, мощность от него не зависит. Для обратного смещения значение G мало, номинальная мощность оказывается большой и пропорциональной току I . В некоторых случаях диод можно применить в качестве регулируемого источника шума. Однако не следует применять диод в малошумящих усилителях. Таким образом, шум в диодах представляет незначительный практический интерес, поскольку они редко применяются во входных каскадах радиоэлектронных систем. Исключение составляет смесительный диод СВЧ, но его

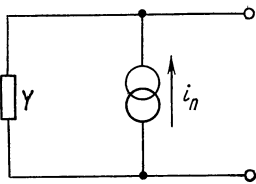


Рис. 9.1. Эквивалентная шумовая схема полупроводникового диода

основное влияние на общую шумовую характеристику обусловлено главным образом потерями преобразования (для сигнала) и избыточным фликкер-шумом. Основные процессы дробового шума имеют при этом довольно небольшое значение.

БИПОЛЯРНЫЕ ТРАНЗИСТОРЫ

10.1. Основные положения

Поведение транзисторов, особенно на высоких частотах, осложняется наличием паразитных элементов цепей, к которым относятся прежде всего последовательное сопротивление базы R_b и емкости двух переходов. Однако если пренебречь этими элементами, то основные результаты оказываются простыми. Так как приборы $n-p-n$ - и $p-n-p$ -типа ведут себя в сущности одинаково, для ясности рассмотрим только приборы $n-p-n$ -типа.

На рис. 10.1 показаны условно постоянные составляющие $I_э, I_б, I_к$ и малосигнальные или шумовые составляющие $i_э, i_б$ и $i_к$ токов соответственно в эмиттерном, базовом и коллекторном выводах транзисторов. Эти токи представляют собой импульсы, возникающие при пересечении электронами обедненных слоев и порождающие дробовой шум (см. гл. 5). В частности, постоянный ток коллектора $I_к$, являющийся фактически результатом последовательности случайных процессов, связан с полным дробовым шумом, спектр которого

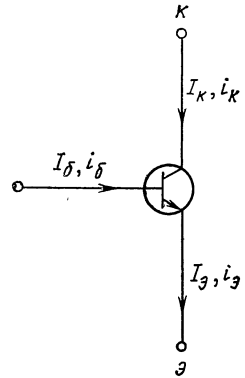


Рис. 10.1. Токи во внешних выводах биполярного транзистора

$$\omega_k = 2eI_k. \quad (10.1)$$

Ток эмиттера $I_э$ также приводит к полному дробовому шуму, но флуктуации эмиттерного тока содержат, кроме того, компоненту, которая обусловлена электронами, совершающими многократные переходы через обедненный слой. Таким образом, спектр эмиттерного тока равен

$$\omega_э = 2eI_э + 4kT\Delta G_e,$$

где ΔG_e — добавочная проводимость диодного участка эмиттер — база, обусловленная многократным прохождением электронов (см. приложение В).

Каждый электрон коллекторного тока принадлежал первоначально току эмиттера. Если всем электронам требуется одинаковое время τ для пересечения базы, то спектральная составляющая тока коллектора i_k на частоте f будет полностью коррелирована с той же составляющей эмиттерного тока в предшествующий момент времени. Отсюда следует

$$\langle i_э i_k^* \rangle = \langle i_k i_k^* \rangle \exp(2\pi j f \tau) \text{ или } \langle i_э^* i_k \rangle = \langle i_k^* i_э \rangle \exp(-2\pi j f \tau).$$

Однако ввиду того, что на самом деле время пролета через базу не одинаково для всех электронов, необходимо провести усредне-

ния по всем возможным значениям τ . Тогда для взаимного энергетического спектра $w_{\text{э.к}}$, связанного с $i_{\text{э}}^* i_{\text{к}}$, получим

$$w_{\text{э.к}} = w_{\text{к}} \overline{\exp(-2\pi j f \tau)} = 2eI_{\text{к}} \overline{\exp(-2\pi j f \tau)}. \quad (10.2)$$

Составляющая $i_{\text{э}}$ связана с составляющей $i_{\text{к}}$ на низких частотах соотношением $i_{\text{к}} = \alpha_0 i_{\text{э}}$, а на высоких частотах — соотношением

$$i_{\text{к}} = \alpha_0 \overline{\exp(-2\pi j f \tau)} i_{\text{э}},$$

откуда для коэффициента передачи по току на высоких частотах следует

$$\alpha(f) = \alpha_0 \overline{\exp(-2\pi j f \tau)}. \quad (10.3)$$

Таким образом, $w_{\text{э.к}} = 2eI_{\text{к}} \alpha(f) / \alpha_0$.

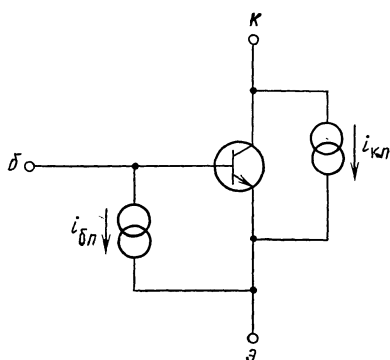


Рис. 10.2. Генераторы шумовых токов биполярного транзистора

Флуктуации тока базы непосредственно связаны с флуктуациями эмиттерного и коллекторного токов, так как $i_{\text{б}} = i_{\text{э}} - i_{\text{к}}$. Следовательно,

$$w_{\text{б}} = w_{\text{э}} + w_{\text{к}} - w_{\text{э.к}} - w_{\text{э.к}}^* = 2eI_{\text{э}} + 2eI_{\text{к}} \left(1 - \frac{\alpha(f) + \alpha^*(f)}{\alpha_0} \right) + 4kT\Delta G_{\text{э}},$$

или, поскольку $I_{\text{б}} = I_{\text{э}} - I_{\text{к}}$,

$$w_{\text{б}} = 2eI_{\text{б}} + \left(2 - \frac{\alpha(f) + \alpha^*(f)}{\alpha_0} \right) 2eI_{\text{к}} + 4kT\Delta G_{\text{э}}. \quad (10.4a)$$

Взаимный спектр, соответствующий $i_{\text{б}}^* i_{\text{к}}$, равен

$$w_{\text{б.к}} = w_{\text{э.к}} - w_{\text{к}} = \left(\frac{\alpha(f)}{\alpha_0} - 1 \right) 2eI_{\text{к}}. \quad (10.4б)$$

Заметим, что на низких частотах $\alpha(f) = \alpha_0$, и тогда имеем

$$\omega_0 = 2eI_0; \quad \omega_K = 2eI_K; \quad \omega_6 = 2eI_6; \quad \omega_{6,K} = 0 \quad (10.5)$$

и $\omega_{0,K} = 2eI_K$.

На этом анализ основных шумовых процессов заканчивается. На низких частотах все токи в транзисторе связаны с полным дробовым шумом, а шумовые токи базы и коллектора являются некоррелированными. На высоких частотах шумовой ток базы возрастает и оказывается частично коррелированным с шумовым током коллектора. Так как токи i_6 и i_K определяет ток i_0 , нет особого интереса рассматривать поведение тока i_0 . На рис. 10.2 показана основная шумовая эквивалентная схема активного прибора, которая остается справедливой при любых других эквивалентных схемах, используемых для представления свойств активного прибора.

10.2. Эквивалентные схемы с учетом паразитных параметров

Если пренебречь проводимостью коллектор — база, которая обычно достаточно мала, то малосигнальные свойства активного прибора могут быть представлены схемами на рис. 10.3, где g_e — дифференциальная проводимость диодного участка эмиттер — база и $g_m = \alpha g_e$; $Y = (1 - \alpha) g_e$.

На рис. 10.4,а показано символическое обозначение идеализированного прибора, учитывающее только направление проводимости. Эквивалентная схема прибора приведена на рис. 10.4,б, а схема реального транзистора с учетом паразитных элементов — на рис. 10.4,в.

Емкость обратной связи $C_{6,K}$ оказывает сильное влияние на свойства сигнала и шума в каскадах с большим усилением, из-за наличия R_6 ее нельзя нейтрализовать. Однако влияние этой емкости незначительно в каскадах с малым усилением или в каскадах, нагруженных на низкоомное входное полное сопротивление следующего каскада. Допустим, что влияние этой емкости всегда мало, и пренебрежем им.

Вследствие того, что α — комплексная величина, входная полная проводимость $Y = (1 - \alpha) g_e$ имеет две части: действительную и (на высоких частотах) мнимую с емкостным характером. Емкость эмиттер — база $C_{0,6}$ тоже состоит из двух частей, причем одна из них обусловлена электронами, совершающими многократные переходы, а другая является непосредственной емкостью перехода эмиттер — база. Доля емкости C' , обусловленная многократными переходами, связана с добавочной проводимостью ΔG_e и средним временем жизни многократно переходящих электронов τ' соотношением $\Delta G_e = (2\pi f)^2 \tau' C'$.

Если воспользоваться известным приближением

$$\alpha(f) = \frac{\alpha_0}{1 + jf/f_\alpha}, \quad (10.6)$$

то для входной полной проводимости получим

$$Y = (1 - \alpha_0) g_e + j \frac{f}{f_\alpha} g_e = (1 - \alpha_0) g_e + j 2\pi f C_\alpha.$$

Согласно (10.6) взаимная проводимость равна $g_m = \alpha_0 g_e \sim g_e$, а произведение усиления на полосу пропускания

$$f_\tau = \frac{g_m}{2\pi(C_\alpha + C_{э,б})} = \frac{f_\alpha}{1 + 2\pi f_\alpha C_{э,б}/g_e}.$$

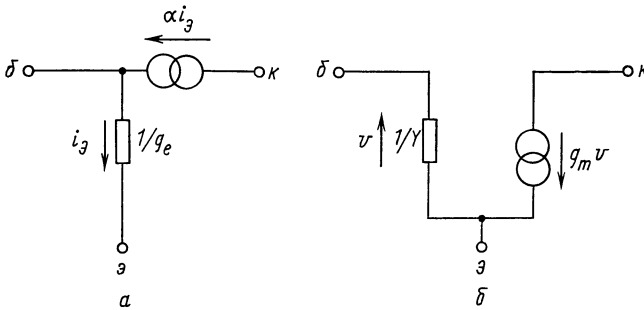


Рис. 10.3. Возможные эквивалентные схемы биполярного транзистора

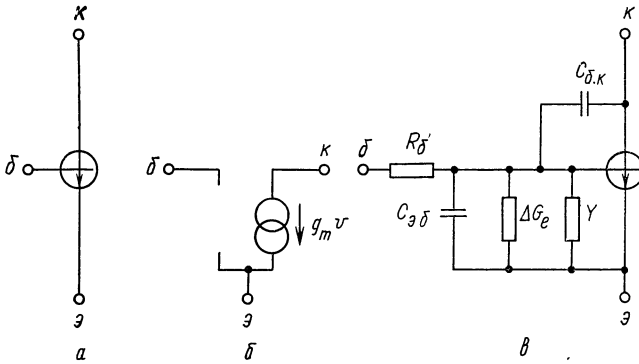


Рис. 10.4. Обозначение идеального биполярного транзистора (а); его эквивалентная схема (б) и эквивалентная схема транзистора с учетом паразитных элементов (в)

По мере увеличения тока смещения и проводимости g_e частота f_τ приближается к f_α . Экспериментально установлено, что обычно существует широкий интервал значений тока смещения, для которых величина f_τ почти постоянна и равна f_α . Таким образом, для обычного режима работы $C_{э,б} \ll C_\alpha$ и $2\pi f C_{э,б}$ намного меньше, чем $f g_e / f_\alpha$. Так как C' составляет только часть от $C_{э,б}$, то из этого следует, что

$$\Delta G_e \ll 2\pi f \tau' g_e (f / f_\alpha).$$

Полагая, что время жизни τ' меньше времени пролета базы τ , определяющего значение f_α , получаем

$$\Delta G_e \ll g_e (f/f_\alpha)^2.$$

С точностью до второго порядка величины f/f_α имеем

$$Y = \left(1 - \frac{\alpha_0}{1 + jf/f_\alpha}\right) g_e = [1 - \alpha_0 + j(f/f_\alpha) + (f/f_\alpha)^2] g_e.$$

Как видно, значением ΔG_e в сравнении с Y , несомненно, можно пренебречь. Добавочная проводимость ΔG_c фигурирует, кроме того, в выражении (10.4) для шума в сочетании со слагаемым

$$\left(2 - \frac{\alpha + \alpha^*}{\alpha_0}\right) 2eI_\kappa \sim 4eI_\kappa \frac{(f/f_\alpha)^2}{1 + (f/f_\alpha)^2} < 4kTg_e (f/f_\alpha)^2.$$

Нетрудно заметить, что и здесь влияние ΔG_e пренебрежимо мало. Впредь мы вообще не будем учитывать ΔG_e , а также емкость $C_{э.б.}$ и различие между f_α и f_τ . Параметр f_τ обычно приводится в справочных данных, поэтому мы предпочтем использовать его вместо f_α .

Итак, остался нерассмотренным единственный имеющий значение паразитный параметр прибора — последовательное сопротивление базы $R_б$. Его влияние на характеристику сигнала определяется значением величины $|R_б Y|$:

$$\begin{aligned} |R_б Y| &= g_e R_б |1 - \alpha_0 + j(f/f_\tau)| = \\ &= g_e R_б [(1 - \alpha_0)^2 + (f/f_\tau)^2]^{1/2}. \end{aligned}$$

На низких частотах это значение мало, если $g_e R_б \ll \beta_0$, где

$$\beta_0 = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0} \approx \frac{1}{1 - \alpha_0} \quad (10.7)$$

представляет собой коэффициент усиления по току на низкой частоте.

Если, однако, рабочая частота f приближается к f_τ , то пренебрегать величиной $R_б$ нельзя, и этот параметр действительно становится решающим при определении верхней граничной частоты усиления. Как мы увидим, его влияние на шумовые характеристики является еще более основательным.

Генератор шумового тока $i_{кн}$ из рис. 10.2 эквивалентен генератору напряжения $v_n = i_{кн}/g_m$, показанному на рис. 10.5,а. Соответствующие спектры определяются формулами:

$$\left. \begin{aligned} \omega_i &= 2eI_б + 2eI_\kappa \left(2 - \frac{\alpha(f) + \alpha^*(f)}{\alpha_0}\right); \\ \omega_v &= \frac{2eI_\kappa}{g_m(f)g_m^*(f)}; \\ \omega_{iv} &= \frac{2eI_\kappa}{g_m} \left(\frac{\alpha(f)}{\alpha_0} - 1\right). \end{aligned} \right\} \quad (10.8)$$

Спектр теплового шума в сопротивлении R_6 (см. рис. 10.5,б) равен

$$\omega_6 = 4kTR_6. \quad (10.9)$$

Имея в виду, что взаимная проводимость на низких частотах равна

$$g_m = \alpha_0 g_e = \alpha_0 \frac{eI_{\vartheta}}{kT} = \frac{\alpha_0}{\alpha_{dc}} \frac{eI_K}{kT} \approx \frac{eI_K}{kT}, \quad (10.10)$$

а на высоких частотах

$$g_m(f) = g_m \alpha(f) / \alpha_0, \quad (10.11)$$

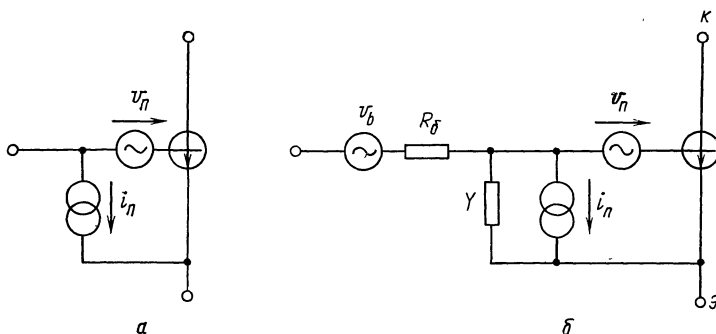


Рис. 10.5. источники шума и их местонахождение: а — в идеальном транзисторе; б — в реальном транзисторе

формулы для спектров можно записать в виде

$$\omega_i = \left[\frac{1}{\beta_{dc}} + \left(2 - \frac{\alpha(f) + \alpha^*(f)}{\alpha_0} \right) \right] 2kTg_m;$$

$$\omega_v = \frac{\alpha_0^2}{\alpha(f)\alpha^*(f)} \frac{2kT}{g_m}$$

$$\omega_{iv} = 2 \left(1 - \frac{\alpha_0}{\alpha(f)} \right) kT,$$

где $\beta_{dc} = I_K / I_6 = h_{FE}$ характеризует усиление по постоянному току. Используя (10.6), получим

$$\left. \begin{aligned} \omega_i &= \left[\frac{1}{\beta_{dc}} + \frac{2(f/f_T)^2}{1 + (f/f_T)^2} \right] 2kTg_m; \\ \omega_v &= [1 + (f/f_T)^2] \frac{2kT}{g_m}; \\ \omega_{iv} &= -2j(f/f_T) kT. \end{aligned} \right\} \quad (10.12)$$

Часто определяют эквивалентное шумовое сопротивление r_n в соответствии с $\omega_v = 4kTr_n$ и эквивалентную шумовую проводи-

мость g_n в соответствии с $\omega_i = 4kTg_n$, а ω_{iv} выражают в виде $c(\omega_i\omega_v)^{1/2}$. Из соотношений (10.12) для этих параметров имеем

$$g_n = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\beta_{dc}} + \frac{2(f/f_T)^2}{1 + (f/f_T)^2} \right] g_m; \quad (10.13)$$

$$r_n = \frac{1}{2g_m} [1 + (f/f_T)^2]; \quad (10.14)$$

$$c = \frac{-j\theta}{(1/\beta + 2\theta^2 + \theta^2/\beta)^{1/2}} \approx \frac{-j\theta}{(1/\beta + 2\theta^2)^{1/2}}. \quad (10.15)$$

Из полученных выражений видно, что $cc^* < 1/2$, а c является мнимой величиной. Таким образом, любая корреляция между i_n и v_n происходит в компонентах, различающихся по фазе на 90° .

Шум, обусловленный сопротивлением R_6 , должен быть сравним с шумом, представляемым $r_n \sim 1/(2g_m)$. Из этого следует, что величиной R_6 можно пренебречь только при условии, что $R_6g_m \ll 1/2$. Это, в свою очередь, может быть достигнуто лишь при работе прибора с очень низкими значениями тока коллектора и проводимости g_m . Однако при очень малых значениях I_K уменьшаются как f_T (так как не выполняется условие $C_\alpha \gg C_{\alpha\beta}$), так и β_{dc} (так как большое значение приобретают рекомбинационные токи в переходе база — эмиттер, не вносящие вклада в ток I_K). Следовательно, сопротивлением R_6 пренебречь нельзя.

Уже отмечалось, что c — величина мнимая и $cc^* < 1/2$. Как будет показано в гл. 12, это означает, что наличие корреляции между i_n и v_n слабо отражается на характеристиках маломощных усилителей. В большинстве случаев этим можно пренебречь, и тогда выражения (10.13) и (10.14) вместе с (10.9) составляют адекватное описание шумов. Более того, в соотношениях (10.13) и (10.14) при условии

$$f/f_T \ll (2\beta_{dc})^{-1/2} \quad (10.16)$$

можно также пренебречь частотно-зависимыми членами. Тогда получим

$$\omega_i = 4kTg_n = 2kTg_m/\beta_{dc}; \quad \omega_v = 4kTr_n = 2kT/g_m;$$

$$\omega_{iv} = 0; \quad \omega_6 = 4kTR_6.$$

Так, например, при $\beta_{dc} = 200$ и $f_T = 400$ МГц эти результаты будут приемлемыми для частот вплоть до 20 МГц (см. приложение Б). Заметим, что при закороченном переходе эмиттер — база из-за наличия R_6 спектр шумового тока коллектора возрастает от $\omega_K = 2eI_K$ до

$$\omega_K = 2eI_K(1 + 2g_mR_6) = 2eI_K + 4e^2I_K^2R_6/(kT). \quad (10.17)$$

Для $R_6 = 200$ Ом и $I_K = 1$ мА это возрастание будет шестнадцатикратным.

10.3. Фликкер-шум биполярного транзистора

Обычно транзистор проявляет на низких частотах очень заметный избыточный шум. Однако при высоком качестве технологических операций все вклады, обусловленные поверхностными эффектами, ограничены и остаточный избыточный шум будет обусловлен исключительно флуктуациями скорости рекомбинации неосновных носителей в базе. Этот шум оказывает небольшое влияние на общий шум коллекторного тока, но вызывает увеличение шума базового тока на величину, пропорциональную току базы и обратно пропорциональную частоте. Выражая этот добавочный шум в виде $2eI_0 f_0 / f$, получаем

$$w_i = 2eI_0(1 + f_0/f) = 2kTg_m(1 + f_0/f) / \beta_{dc}. \quad (10.18)$$

Это дает

$$g_n = (1 + f_0/f) g_m / (2\beta_{dc}). \quad (10.19)$$

Постоянная f_0 изменяется от прибора к прибору, но обычно имеет значение порядка 1 кГц.

10.4. Заключение

На средних частотах шум транзистора описывается в основном в понятиях дробового шума в базовом и коллекторном токах и теплового шума в сопротивлении базы. На низких и высоких частотах шумовой ток базы возрастает. Из пяти существенных параметров g_m , β_{dc} , f_T , R_0 и f_0 первые три представлены в справочниках. Однако значения параметров R_0 и f_0 приводятся реже и в лучшем случае должны быть вычислены. Это не всегда удобно. Но вычисления делать приходится, тем более что оба параметра оказывают существенное влияние на шумовые характеристики прибора. Некоторые изготовители приборов приводят сведения об эквивалентном среднеквадратичном значении входных шумов для случая, когда база закорочена с эмиттером. Если это значение обозначить e_n , то для низких частот получим

$$e_n^2 = 4kTR_0 + 2R_0^2 eI_0(1 + f_0/f) + 2kT/g_m.$$

Таким образом, если e_n дано в зависимости от I_0 (или I_K/β_{dc}) и f , то значения величин R_0 и f_0 можно вычислить.

ГЛАВА 11

ПОЛЕВЫЕ ТРАНЗИСТОРЫ

11.1. Введение

Полевой транзистор представляет собой по существу конденсатор, в котором одна из пластин — канал — выполнена в виде тонкого слоя полупроводника. Если материалом этой пластины служит полупроводник n -типа, то при подаче отрицательного потенциала на

другую пластину — затвор 3 — заряд в канале стремится стать положительным, а это приводит к уменьшению концентрации носителей. Возможность изменения проводимости канала может быть использована для управления током, текущим между двумя контактами на концах канала: истоком И и стоком С. Подробнее принцип действия прибора определяется особенностями его структуры, но принятая нами упрощенная модель адекватно описывает поведение большинства полевых транзисторов. Результаты, полу-

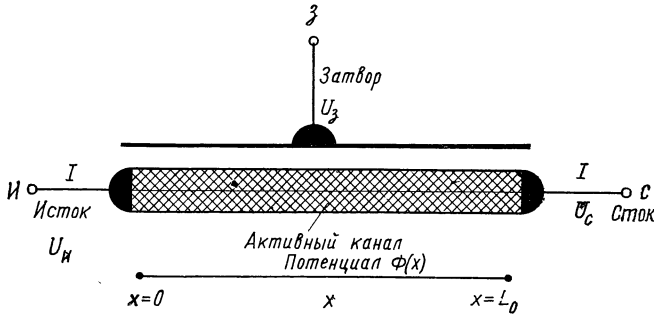


Рис. 11.1. Полевой транзистор

ченные на ее основе, до некоторой степени лучше согласуются с экспериментом, чем результаты, основанные на более сложных моделях.

На рис. 11.1 приведены условные обозначения токов и напряжений для канала длиной L_0 . Если подвижный заряд, приходящийся на единицу длины канала, равен $-q$, а подвижность носителей составляет $-\mu$, то сопротивление на единицу длины равно $1/(\mu q)$. Следовательно, при потенциале канала (относительно затвора) в точке x , равном φ , получим

$$I = -\mu q \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (11.1)$$

Так как ток I не зависит от x , то

$$I(x_2 - x_1) = - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \mu q d\varphi = - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} g d\varphi, \quad (11.2)$$

где

$$g = \mu q. \quad (11.3)$$

Применив этот результат для точек $x_1=0$ (исток) и $x_2=L_0$ (сток), получим для проводимостей истока и стока

$$G_H = \frac{\partial I}{\partial U_H} = \frac{\partial I}{\partial \varphi_H} = \frac{g_H}{L_0}; \quad (11.4)$$

$$G_C = - \frac{\partial I}{\partial U_C} = - \frac{\partial I}{\partial \varphi_C} = \frac{g_C}{L_0}. \quad (11.5)$$

Следовательно, взаимная (или, иначе, передаточная) проводимость равна

$$G_m = -\frac{\partial I}{\partial U_3} = \frac{\partial I}{\partial \varphi_n} + \frac{\partial I}{\partial \varphi_c} = G_n - G_c = \frac{g_n - g_c}{L_0}.$$

Подвижный заряд q на единицу длины связан с подвижным зарядом q_0 в необходимом канале выражением $-q = -q_0 + \gamma\varphi$, где γ — емкость на единицу длины между затвором и каналом. Так как подвижность носителей заряда $-\mu$ можно считать постоянной величиной, то

$$g = \mu q = \mu q_0 \left(1 - \frac{\gamma\varphi}{q_0}\right) = g_0 \left(1 - \frac{\varphi}{U_p}\right), \quad (11.6)$$

где $U_p = q_0/\gamma$ представляет собой напряжение, требуемое для полного обеднения канала, т. е. напряжение отсечки или пережатия¹. Выраженное через g_0 и U_p соотношение (11.1) принимает вид

$$I = -g_0 \left(1 - \frac{\varphi}{U_p}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (11.7)$$

После интегрирования правой части (11.7) получаем соотношение

$$I = -\frac{g_0 U_p}{L_0} \left(\frac{\varphi_c - \varphi_n}{U_p} - \frac{1}{2} \frac{\varphi_c^2 - \varphi_n^2}{U_p^2}\right), \quad (11.8)$$

которое для малых значений φ_c и φ_n принимает упрощенный вид

$$I = -G_0 (U_c - U_n), \quad (11.9)$$

где

$$G_0 = \frac{g_0}{L_0} = \frac{\mu q_0}{L_0} \quad (11.10)$$

проводимость канала без напряжения смещения.

Потенциал φ канала относительно затвора увеличивается в направлении к стоку, и при обычном режиме работы прибора значительно превышает напряжение U_p вблизи стока.

Однако, как это следует из проведенного нами анализа, канал при этом не полностью переходит в состояние пережатия, если только φ_n также не превышает U_p . Вместо этого оказывается, что канал вблизи стока почти лишен подвижных зарядов. В такой обедненной области силовые линии электрического поля частично выходят из находящихся в неуравновешенном состоянии положительных ионов канала, а частично — из электрода стока и замыкаются на отрицательно заряженный затвор. Условная схема распределения силовых линий изображена на рис. 11.2. Проводимость области сжатия вблизи стока крайне мала, и почти вся разность

¹ Термин «пережатие», по-видимому, заимствован из физики плазмы. Протекающие в канале явления имеют сходство, хотя и весьма отдаленное, с явлением эта-пинча в плазме — сжатием линий тока под действием нарастающего магнитного поля. При достаточно сильном поле (в нашем случае электрическом) происходит «пережатие», и ток прекращается. — *Прим. ред.*

потенциалов между затвором и стоком оказывается приложенной к области сжатия.

Так как значение g вблизи стока мало, G_c также невелика, и ею можно пренебречь. Тогда взаимная проводимость G_m будет равна G_n . Область сжатия занимает заметную часть длины канала L_0 . Однако малосигнальные и шумовые свойства прибора определяются только той областью, которая находится между $x=0$ и $x=L$, для которой $\varphi=U_p$. Для этой области справедливо выраже-

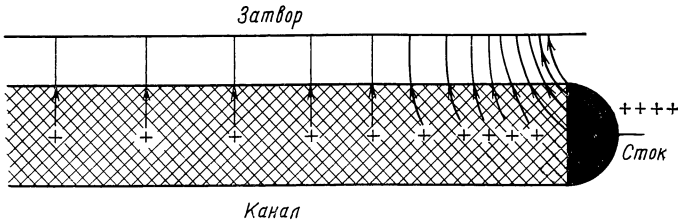


Рис. 11.2. Распределение зарядов и силовых линий вблизи стока в режиме сжатия. Вблизи стока силовые линии обуславливаются не только ненейтрализованными ионами донора в канале, но также непосредственно самим контактом стока

ние (11.7) и ток задается соотношением (11.8), в котором U_c необходимо заменить на U_p , а L_0 — на L . Из этого следует

$$I = - \frac{g_0 U_p}{2L} \left(1 - \frac{\varphi_n}{U_p} \right)^2. \quad (11.11)$$

Если положить $U_n=0$, то ток I будет связан с отрицательным напряжением на затворе U_3 выражением

$$I = - \frac{g_0 U_p}{2L} \left(1 + \frac{U_3}{U_p} \right)^2 = I_0 \left(1 + \frac{U_3}{U_p} \right)^2, \quad (11.12)$$

где I_0 — ток при нулевом напряжении смещения и $U_c > U_p$. Выражение (11.12) является основным уравнением полевого транзистора и хорошо согласуется с наблюдаемыми свойствами прибора. Получаемая из (11.12) взаимная проводимость равна

$$G_m = - 2 \frac{I_0}{U_p} \left(1 + \frac{U_3}{U_p} \right) = \frac{g_0}{L} \left(1 + \frac{U_3}{U_p} \right). \quad (11.13)$$

При нулевом смещении $G_m=G_0$, где G_0 — проводимость канала без напряжения смещения.

Полный заряд канала, который реагирует на изменение условий смещения, можно определить интегрированием выражения для распределения заряда $-q$ по области истока до точки L , в которой $\varphi=U_p$. За этой точкой в канале имеется очень мало подвижных носителей. Ток I определяется этим малым остаточным зарядом, но заряд движется с высокой скоростью благодаря большому градиенту потенциала в этой области. Итак, для полного заряда,

изменяющегося под действием затвора, получаем

$$Q = \int_0^L q dx = q_0 \int_0^L (1 - \varphi/U_p) dx.$$

Это выражение можно записать иначе:

$$Q = \frac{q_0}{g_0} \int_0^L g dx. \quad (11.14)$$

Интегралы вида

$$H_n = \int_0^L g^n dx \quad (11.15)$$

далее часто будут встречаться в расчетах. Они могут быть вычислены следующим образом:

$$\begin{aligned} H_n &= \int_{\varphi_n}^{U_p} g^n \frac{dx}{d\varphi} d\varphi = -\frac{1}{I} \int_{\varphi_n}^{U_p} g^{n+1} d\varphi = \\ &= -\frac{g_0^{n+1} U_p}{I} \int_{\varphi_n}^{U_p} \left(1 - \frac{\varphi}{U_p}\right)^{n+1} \frac{d\varphi}{U_p}, \end{aligned}$$

но так как

$$I = \frac{g_0 U_p}{2L} \left(1 - \frac{\varphi_n}{U_p}\right)^2,$$

то получаем

$$H_n = \frac{2}{n+2} g_0^n L \left(1 - \frac{\varphi_n}{U_p}\right)^n. \quad (11.16)$$

Итак,

$$Q = \frac{q_0}{g_0} H_1 = \frac{2}{3} q_0 L \left(1 + \frac{U_3 - U_n}{U_p}\right),$$

откуда для входной емкости имеем

$$C = \frac{\partial Q}{\partial U_3} = \frac{2}{3} \frac{q_0 L}{U_p} = \frac{2}{3} \gamma L. \quad (11.17)$$

Нетрудно показать, что произведение коэффициента усиления на полосу пропускания равно

$$\dot{f}_T = \frac{G_m}{2\pi C} = \frac{3}{4\pi} \frac{U_p G_0}{q_0 L} \left(1 + \frac{U_3}{U_p}\right) = \frac{3}{4\pi} \frac{\mu U_p}{L^2} \left(1 + \frac{U_3}{U_p}\right). \quad (11.18)$$

Значение \dot{f}_T будет максимальным при нулевом смещении. Если требуется \dot{f}_T с большим значением, то канал должен быть коротким, а подвижность носителей — высокой.

Входная емкость C заряжается током канала и в эквивалентной схеме прибора оказывается последовательно включенной с частью сопротивления канала. Это сопротивление имеет порядок $1/G_m$. Условное обозначение прибора приведено на рис. 11.3,а,

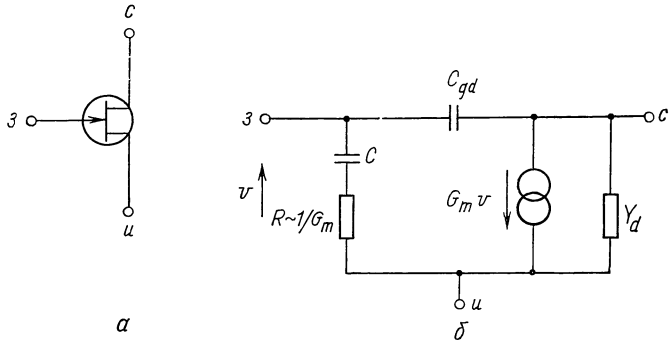


Рис. 11.3. Обозначение (а) и эквивалентная схема полевого транзистора (б).

а его эквивалентная схема — на рис. 11.3,б. На этой схеме показаны также паразитная емкость затвор — сток $C_{з,с}$ и небольшой, но конечный по значению параметр — полная проводимость Y_c .

11.2. Шумы полевых транзисторов

Электроны в активной области между истоком и точкой $x=L$, в которой $\varphi=U_p$, находятся в тепловом равновесии с кристаллической решеткой канала и поэтому генерируют тепловой шум. Энергетический спектр напряжений флуктуаций v_1 , генерируемых на интервале dx_1 около точки x_1 , равен $4kTdx_1/g_1$. Электроны в области сжатия между L и L_0 не находятся в тепловом равновесии, но тем не менее их статистические свойства определяются очень частыми столкновениями с атомами решетки. Они могут быть учтены тем же самым путем, если условиться, что температура T является функцией положения x_1 .

Если все электроды прибора электрически соединены вместе (для переменного тока), то флуктуация v_1 , возникшая на интервале dx_1 около точки x_1 , вызовет приращение i_1 тока канала и приращение $\delta_1\varphi(x)$ потенциала во всех точках канала между истоком и стоком. Применяя выражение (11.2) сначала для описания области между истоком и x_1 , а затем между x_1+dx_1 и стоком, получаем

$$i_1 = - \frac{g_1}{x_1} \delta_1\varphi_1, \quad (11.19a)$$

$$i_1 = \frac{g_1}{L_0 - x_1} (\delta_1\varphi_1 + v_1), \quad (11.19б)$$

где $\delta_1\varphi_1$ — приращение потенциала канала в точке x_1 . Можно исключить $\delta_1\varphi_1$, и тогда

$$i_1 = g_1 v_1 / L_0. \quad (11.20)$$

Флуктуации, например v_1 , возникающие в различных точках x_1 , являются некоррелированными, поэтому спектр полного тока канала просто выражается интегралом

$$\omega_{ic} = \int_0^{L_0} \left(\frac{g(x)}{L_0} \right)^2 \frac{4kT(x)}{g(x)} dx = \frac{1}{L_0^2} \int_0^{L_0} 4kT(x) g(x) dx. \quad (11.21)$$

На отрезке между $x=0$ и $x=L$ температура канала равна $T(x)=T$, но за точкой $x=L$ вплоть до стока $x=L_0$ имеем $T(x)>T$. С другой стороны, проводимость $g(x)$ будет большой для $x<L$ и крайне малой для $x>L$. Таким образом, можно не учитывать вклады в ω_{ic} от области сжатия, если только температура $T(x)$ в этой области будет меньше температуры перед пробоем. Тогда в (11.21) можно заменить L_0 на L , а $T(x)$ на T . Это дает

$$\omega_{ic} = \frac{4kT}{L_0^2} \int_0^L g dx = \frac{4kTH_1}{L_0^2} = \frac{4kTg_0}{L} \frac{2}{3} \left(1 + \frac{U_3 - U_H}{U_p} \right).$$

Полученный результат можно выразить через взаимную проводимость G_m в виде

$$\omega_{ic} = \frac{2}{3} 4kTG_m. \quad (11.22)$$

Флуктуации потенциала канала приводят к флуктуациям заряда затвора. Из выражений (11.2), (11.19а) и (11.19б) найдем изменение потенциала канала в обобщенной точке x , обусловленное флуктуацией v_1 на интервале длины dx_1 около точки x_1 :

$$\delta_1 \varphi = - \frac{xg(x_1)v_1}{Lg(x)} \quad \text{при } x < x_1, \quad (11.23a)$$

и

$$\delta_1 \varphi = \frac{(L-x)g(x_1)v_1}{Lg(x)} \quad \text{при } x > x_1. \quad (11.23б)$$

Тогда результирующая флуктуация заряда затвора Q в соответствии с выражением (11.14) равна

$$\delta_1 Q = \frac{q_0}{g_0} \int_0^L \frac{dg}{d\varphi} \delta_1 \varphi dx. \quad (11.24)$$

Отсюда следует

$$\delta_1 Q = \frac{q_0}{g_0} \left(\int_{x_1}^L \frac{1}{g} \frac{dg}{d\varphi} dx - \frac{1}{L} \int_0^L \frac{x}{g} \frac{dg}{d\varphi} dx \right) g(x_1) v_1. \quad (11.25)$$

Учитывая, что $dx/g = -d\varphi/I$, получим

$$\delta_1 Q = \frac{q_0 g(x_1) v_1}{g_0 I} \left(g(x_1) - \frac{1}{L} \int_0^L g dx \right) = \frac{q_0 g(x_1) v_1}{g_0 I} \left(g(x_1) - \frac{H_1}{L} \right). \quad (11.26)$$

Шумовой ток, втекающий в затвор, равен $i_3 = j\omega Q$, а спектр наведенного шумового тока затвора

$$w_{i_3} = \omega^2 \left(\frac{q_0}{g_0 I} \right)^2 \int_0^L g(x_1) \left(g(x_1) - \frac{H_1}{L} \right)^2 4kT dx_1. \quad (11.27)$$

Имея, в виду, что в (11.27) входят интегралы вида H_n , получаем

$$w_{i_3} = \omega^2 \left(\frac{q_0}{g_0 I} \right)^2 4kT \left(H_3 - 2 \frac{H_1 H_2}{L} + \frac{H_1^3}{L^2} \right) = \frac{4}{15} \frac{\omega^2 C^2}{G_m} 4kT. \quad (11.28)$$

Так как флуктуации тока затвора и тока канала протекают из одного и того же основного случайного процесса, они являются коррелированными. Используя (11.20) и (11.26), а также очевидное соотношение $i_3^* = -j\omega Q$, найдем взаимный спектр

$$w_{3c} = -j\omega \frac{q_0 4kT}{g_0 I} \int_0^L g(x) \left[g(x) - \frac{H_1}{L} \right] dx = \frac{4j\omega C kT}{6}. \quad (11.29)$$

В качестве меры степени корреляции возьмем величину

$$c^2 = \frac{w_{3c} w_{3c}^*}{w_{i_3} w_{i_3}} = \frac{5}{32} \approx 0,16. \quad (11.30)$$

В плоскостных транзисторах ток утечки затвора I_3 добавляет к наведенным флуктуациям дополнительную некоррелированную компоненту:

$$w_1 = 2eI_3. \quad (11.31)$$

Из соотношения

$$\frac{w_{i_3}}{w_1} = \frac{8\omega^2 C^2}{15G_m} \frac{kT}{eI_3} \quad (11.32)$$

следует, что на частотах ниже

$$f \sim \frac{1}{2\pi C} \left(\frac{15eI_3 G_m}{8kT} \right)^{1/2} \sim f_T \left(\frac{2eI_3}{G_m kT} \right)^{1/2} \sim f_T \left(\frac{80I_3}{G_m} \right)^{1/2} \quad (11.33)$$

шум тока утечки велик. Эта частота обычно находится в пределах от 100 кГц до 1 МГц.

В большинстве приборов затвор не полностью перекрывает весь канал и нерабочая зона вблизи истока представляется небольшим последовательным сопротивлением, значение которого обычно много меньше $1/G_0$. Однако связанные с этим сопротивления эффекты обычно несущественны.

11.3. Эквивалентные схемы

На рис. 11.4,а изображена шумовая эквивалентная схема с генераторами шумовых токов в цепях затвора и канала. Можно пересчитать ток канала i_c в цепь затвора через напряжение $v_n = -i_c/G$. Такая эквивалентная схема показана на рис. 11.4,б, и соответствующие спектры равны:

$$\omega_v = \frac{2}{3} \frac{4kT}{G_m}; \quad (11.34a)$$

$$\omega_i = \frac{4}{15} \frac{\omega^2 C^2}{G_m} 4kT + 2eI_3; \quad (11.34б)$$

$$\omega_{iv} = -\frac{1}{6} j\omega C \frac{4kT}{G_m}. \quad (11.34в)$$

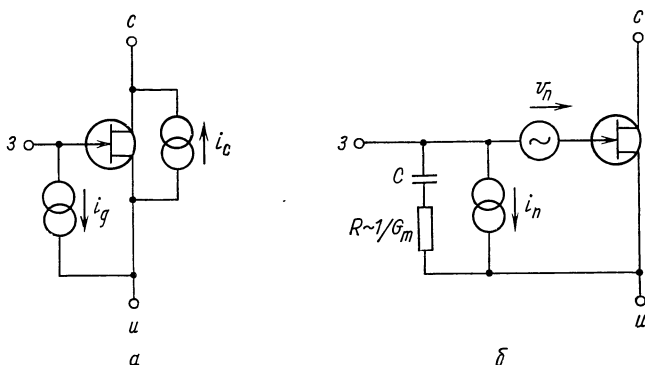


Рис. 11.4. Представление шумов полевого транзистора:
а — двумя генераторами тока; б — генератором тока и генератором напряжения

Поведение полевого транзистора во многом схоже с поведением вакуумного триода. Если учесть, что действительная часть входной полной проводимости транзистора приблизительно равна $G_{вх} \approx \omega^2 C^2 / G_m$, то для транзистора на высоких частотах $\omega_i \sim \frac{1}{4} G_{вх} 4kT$, в то время как для вакуумного триода $\omega_v \sim 2,5 (4kT / G_m)$ и $\omega_i \sim 5 G_{вх} 4kT$.

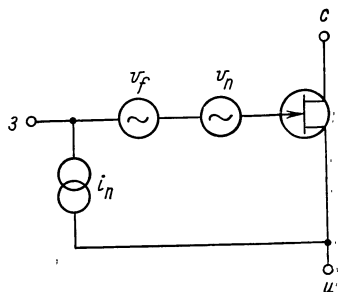
11.4. Приборы с двумя затворами

Двухзатворные полевые транзисторы с уменьшенной проходной емкостью (емкостью Миллера) являются аналогами вакуумных тетродов и пентодов. Однако в двухзатворных полевых транзисторах нет эквивалента шумам токораспределения в вакуумных лампах. Поэтому улучшенные малосигнальные характеристики транзисторов достигаются без какого-либо увеличения шума.

11.5. Фликкер-шум

В приборах, не предназначенных специально для маломушьящих низкочастотных усилителей, наблюдается значительное увеличение выходного шума на низких частотах, и это связано главным образом с поверхностными явлениями. Поверхностные явления можно устранить, однако в полевых транзисторах с $p-n$ -переходом имеется остаточный шум, обусловленный флуктуациями скорости рекомбинации носителей в обедненном слое затвор — канал. Эти флуктуации модулируют ток канала и поэтому эквивалентны дополнительному генератору шумового напряжения, включенному в цепь затвора. На токовый шум затвора оказывается небольшое влияние, так что шумовая эквивалентная схема прибора на низких частотах принимает вид, изображенный на рис. 11.5.

Рис. 11.5. Генератор избыточного фликкер-шума v_f полевого транзистора



Спектры двух генераторов белого шума равны

$$\omega_i = 2eI_3 \quad (11.35a)$$

и

$$\omega_v = \frac{2}{3} \frac{4kT}{G_m}. \quad (11.35б)$$

Спектр фликкер-шума удобно выразить формулой

$$\omega_f = \omega_v \frac{f_0}{f} = \frac{2}{3} \frac{4kT}{G_m} \frac{f_0}{f}, \quad (11.35в)$$

где f_0 — частота, на которой фликкер-шум становится заметным. Для многих маломушьящих приборов ее значение составляет около 20—30 кГц.

11.6. Транзисторы с изолированным затвором

На средних и высоких частотах имеется небольшое различие между прибором с $p-n$ -переходом и прибором с изолированным затвором. Однако на низких частотах из-за фликкер-шума приборы с изолированным затвором совершенно не пригодны для маломушьящих усилителей.

ЛИНЕЙНЫЕ УСИЛИТЕЛИ

12.1. Введение

Малосигнальная характеристика усилителя с определенной выходной нагрузкой может быть выражена через его частотно-зависимые входную полную проводимость $Y(f)$ и коэффициент усиления $A(f)$. Если усилитель подсоединить к определенному источнику сигнала, то его шумовая характеристика будет определяться энергетическим спектром $W(f)$ выходного сигнала. Хотя все основные источники шумов имеют белый или по крайней мере слабо зависящий от частоты спектр, спектр $W(f)$ видоизменен частотной характеристикой усилителя. Поэтому средний квадрат выходных флуктуаций

$$\langle \Delta \Theta \rangle^2 = \int_0^{\infty} W(f) df \quad (12.1)$$

будет иметь конечную величину. Если Θ_s — среднеквадратичное значение выходного сигнала $\Theta_s(t)$, то отношение сигнал/шум на выходе дается формулой

$$\left(\frac{S}{N} \right)^2 = \frac{\Theta_s^2}{\langle \Delta \Theta^2 \rangle}, \quad (12.2)$$

Это отношение описывает общую характеристику усилителя для входного сигнала определенной формы. Однако это не очень удобное описание. Представляется более полезным рассматривать отдельные спектральные составляющие сигнала и шума в узкой полосе частот df с серединой на частоте сигнала. Таким образом, если $\Theta(f)$ есть среднеквадратичное значение выходного сигнала на частоте f , то мы будем иметь дело с отношением $\Theta^2(f)$ к $W(f)df$. Мощность шумов на выходе представляет собой результат действия источников с более или менее равномерной спектральной плотностью, и нас будет в особенности интересовать, в какой степени спектр $W(f)$ определяется внутренними источниками, а в какой — наличием шума во входном сигнале. Шум на входе почти всегда бывает белым. Поэтому полезно выразить $W(f)$ в виде

$$W(f) = A^*(f) A(f) \omega, \quad (12.3)$$

где ω — белый шум на входе, который дает такой же шум на выходе, что и в случае нешумящего усилителя с тем же самым коэффициентом усиления $A(f)$.

Коэффициент усиления $A(f)$ или достигает максимума на некоторой частоте f_0 и быстро спадает на частотах, отличных от f_0 , или будет более или менее постоянным в некотором интервале частот, включая f_0 , и спадать до нуля на других частотах. Обычно спектр сигналов ограничивается частотами, в пределах которых

$A(f)$ имеет максимальное или до некоторой степени постоянное значение, которое мы обозначим A_0 . В этом случае можно ввести понятие эффективной ширины полосы пропускания Δf , определяемой по формуле

$$\Delta f = \int_0^{\infty} \frac{A^*(f) A(f) df}{A_0^* A_0}. \quad (12.4)$$

При этом выходные флуктуации удобно выражать в таком виде:

$$\langle \Delta \theta^2 \rangle = \int_0^{\infty} W(f) df = \omega A_0^* A_0 \Delta f. \quad (12.5)$$

Значение среднего квадрата сигнала s^2 в полосе пропускания [т. е. на частоте, где $A(f) = A_0$], соответствующее отношению сигнал/шум, равному единице, составляет

$$s^2 = \omega \Delta f. \quad (12.6)$$

В большинстве случаев ω и Δf определяют чувствительность системы.

Если усилитель состоит из n последовательно включенных каскадов с коэффициентами усиления $A_1(f)$, $A_2(f)$ и т. п. и энергетические спектры шумовых напряжений, действующих на входе каждого каскада, есть ω_1 , ω_2 и т. п., то имеем

$$W = \omega_1 A_1^* A_1 A_2^* A_2 \dots A_n^* A_n + \omega_2 A_2^* A_2 \dots \dots A_n^* A_n + \dots + \omega_n A_n^* A_n. \quad (12.7)$$

Большая часть выходного шума определяется ближайшими ко входу каскадами. Эквивалентный шум на входе имеет спектр

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 / A_1^* A_1 + \dots + \omega_n / A_1^* A_1 \dots A_{n-1}^* A_{n-1}. \quad (12.8)$$

Однако общая частотная характеристика, и особенно полоса пропускания, определяются всеми каскадами. Так как сигнал проходит через все каскады, полоса пропускания каждого из них должна быть увязана с этим сигналом, но не обязательно должна быть широкой, потому что всякое увеличение ширины полосы позволяет дополнительным спектральным компонентам шумов попасть на выход. Чрезмерно широкая полоса пропускания ближайших ко входу каскадов может быть допущена при условии, что по крайней мере последний каскад имеет соответствующую ширину полосы. Для удобства допустим, что общая полоса пропускания системы всегда определяется несколькими окончательными каскадами, собственный шум которых по сравнению с шумом, усиленным первыми каскадами, настолько мал, что им можно пренебречь. Другими словами, можно считать, что усилитель имеет строго определенную частотную характеристику и эффективную ширину полосы пропускания без оговорок в отношении полосы первых каскадов.

Характеристика полной системы описывается произведением

$\omega \Delta f$; ω определяется в основном несколькими первыми каскадами, а Δf — несколькими окончными каскадами или, возможно, фильтровым четырехполосником на выходе.

Эффективная ширина полосы пропускания Δf , определяемая выражением (12.4), не равна в точности обычной ширине полосы пропускания сигнала $\Delta f_{1/2}$, определяемой по уровню половинной мощности. Так, например, для резонансного контура, характеристика которого имеет лоренцеву форму

$$A(f) = \frac{A_0}{1 + jQ(f/f_0 - f_0/f)}, \quad (12.9a)$$

получаем

$$\Delta f = \frac{\pi f_0}{2Q} = \frac{\pi}{2} \Delta f_{1/2}, \quad (12.9b)$$

в то время как для гауссовой формы характеристики

$$A^*(f) A(f) = A_0^2 \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{f - f_0}{\Delta f_0} \right)^2 \right] \quad (12.10a)$$

справедливо

$$\Delta f = 1,34 \Delta f_{1/2}. \quad (12.10b)$$

12.2. Коэффициент шума и шумовая температура

Если сигнал со среднеквадратичным значением $S(f)$ на определенной частоте f сопровождается шумом с энергетическим спектром ω_s на той же частоте, то отношение сигнал/шум для бесконечно малой ширины полосы пропускания df вблизи f равно

$$\left(\frac{S}{N} \right)_{\text{вх}}^2 = \frac{s^2(f)}{\omega_s df} \quad (12.11)$$

Если теперь этот сигнал подать на вход усилителя с коэффициентом усиления $A(f)$ и спектром выходного шума $W(f)$, то отношение сигнал/шум на выходе для полосы df будет равно

$$\left(\frac{S}{N} \right)_{\text{вых}}^2 = \frac{A^*(f) A(f) s^2(f)}{W(f) df}. \quad (12.12)$$

Коэффициент шума на фиксированной частоте $F(f)$ определяется как отношение

$$F(f) = \frac{(S/N)_{\text{вх}}^2}{(S/N)_{\text{вых}}^2} = \frac{W(f)}{\omega_s A^*(f) A(f)}. \quad (12.13)$$

Спектр выходного шума связан со спектром эквивалентного входного шума ω соотношением (12.3), причем $\omega = \omega_s + \omega_a$, где ω_a — шумовой вклад усилителя. Поэтому имеем

$$F(f) = \frac{\omega}{\omega_s} = \frac{\omega_s + \omega_a}{\omega_s} = 1 + \frac{\omega_a}{\omega_s} \geq 1. \quad (12.14)$$

Для полной интенсивности флуктуаций на выходе получим

$$\langle \Delta\theta^2 \rangle = \int_0^{\infty} F(f) \omega_s A^*(f) A(f) df. \quad (12.15)$$

Как это обычно бывает, спектр ω_s не зависит от f или по крайней мере незначительно изменяется в полосе пропускания усилителя. В этом случае полезно ввести понятие среднего коэффициента шума:

$$\bar{F} = \frac{\int F(f) A^*(f) A(f) df}{\int A^*(f) A(f) df} = \frac{\int F(f) A^*(f) A(f) df}{A^*_0 A_0 \Delta f}. \quad (12.16)$$

Итак, интенсивность флуктуаций выходного сигнала равна

$$\langle \Delta\theta^2 \rangle = \bar{F} A^*_0 A_0 \omega_s \Delta f, \quad (12.17)$$

а среднеквадратичное значение сигнала, дающее на частоте f отношение сигнал/шум, равное единице, будет

$$s^2(f) = \frac{A^*_0 A_0}{A^*(f) A(f)} \bar{F} \omega_s \Delta f. \quad (12.18)$$

Если на входе действует дополнительный белый шум со спектром ω_n , то для флуктуаций на выходе получим

$$\begin{aligned} \langle \Delta\theta^2 \rangle &= \int_0^{\infty} [\omega_s F(f) + \omega_n] A^*(f) A(f) df = \\ &= (\bar{F} + \omega_n/\omega_s) \int \omega_s A^*(f) A(f) df. \end{aligned} \quad (12.19)$$

Так, если ω_s представляет собой известный шум, а ω_n — шум калиброванного источника, то средний коэффициент шума \bar{F} можно определить, зная отношение ω_n/ω_s , которое необходимо для удвоения выходного шума.

В некоторых случаях, особенно когда сказывается влияние фликкер-шума, а усилитель имеет широкую полосу пропускания, различие между средним коэффициентом шума \bar{F} и коэффициентом шума на одной частоте $F(f)$ становится существенным. Однако если $F(f)$ известен, то мы всегда можем определить \bar{F} . В дальнейшем будем иметь дело только с $F(f)$.

Средний квадрат напряжения на выходе разомкнутой цепи источника сигнала с номинальной мощностью P_s и внутренним полным сопротивлением $Z=R+jX$ равен

$$U_s^2 = 4P_s R. \quad (12.20a)$$

Если источник генерирует также шум со спектром ω_s , то средний квадрат шумового напряжения в полосе df определяется как

$$U_n^2 = 4\omega_s R df. \quad (12.20b)$$

Отношение

$$\frac{U_s^2}{U_n^2} = \frac{P_s}{\omega_s \Delta f} \quad (12.21)$$

не зависит от Z и, следовательно, от какого-либо преобразования Z , осуществляемого без потерь. Для таких источников сигнала, как резистивный четырехполюсник или длинная линия передачи с затуханием, которые генерируют тепловой шум при эффективной температуре T_s , имеем $\omega_s = kT_s$, откуда следует

$$\frac{U_s^2}{U_n^2} = \frac{P_s}{kT_s \Delta f} \quad (12.22)$$

Этот результат представляет собой отношение сигнал/шум источника. Если такой источник соединен с входом усилителя, коэффициент шума которого F , то отношение сигнал/шум на выходе уменьшается в $1/F$ раз, и будем иметь

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{вых}}^2 = \frac{P_s}{FkT_s \Delta f} = \frac{P_s}{k(T_s + T_n) \Delta f}, \quad (12.23)$$

где параметр

$$T_n = (F-1)T_s$$

характеризует дополнительный шум, обусловленный усилителем, и известен как шумовая температура усилителя. Эквивалентный шум на входе $\omega = \omega_s + \omega_a$ может быть выражен через энергетические величины, а не через напряжение в виде

$$\omega = kT_s + \omega_a = k(T_s + T_n). \quad (12.24)$$

Энергия шума на входе ω_a , обусловленная усилителем, зависит от полного сопротивления источника Z , поэтому T_n характеризует не только усилитель. Однако при некотором значении Z значения ω_a и T_n будут минимальны, причем F тоже будет минимальным. Эти минимальные значения относятся только к усилителю, и именно их мы обычно имеем в виду, когда говорим о шумовой температуре и коэффициенте шума усилителя. Если T_{n0} — минимальная шумовая температура усилителя с эффективной полосой пропускания Δf , то мощность сигнала при равном единице отношении сигнал/шум и эффективной температуре источника T_s составляет

$$P_s = k(T_s + T_{n0}) \Delta f. \quad (12.25)$$

Важно осознать, что T_n зависит от полного сопротивления источника. Например, усилитель с $T_{n0} = 10$ К при сопротивлении источника 10^6 Ом может также иметь $T_n > 10^5$ К, если сопротивление источника равно 10 Ом.

На практике коэффициент шума обычно определяется относительно источника с температурой 293 К и поэтому

$$T_n = (F-1)293 \text{ К}. \quad (12.26)$$

Например, если $F=2$ (3 дБ) при $T_n=293$ К, то коэффициент шума относительно источника с температурой 1 К равен 294 (25 дБ). Более полное обсуждение коэффициента шума читатель может найти в оригинальной работе Фриса [14].

12.3. Шумы в однокаскадном усилителе без обратной связи

На рис. 12.1 показан источник сигнала, подключенный к входу прибора, например электронной лампы, полевого или биполярного транзистора. Все внутренние источники шумов прибора представлены генераторами напряжения v и тока i . Проводимость $G+jB$ представляет собой полную проводимость прибора совместно с цепями связи, включающими в себя любую реактивную проводи-

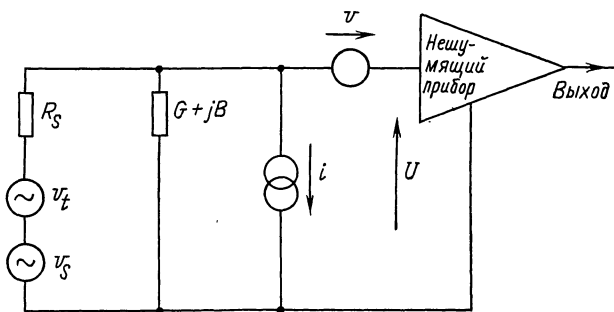


Рис. 12.1. Представление шумов в усилителе

мость, относящуюся к источнику сигнала. С активной проводимостью G не связан никакой шум, так как все потери связующих цепей учтены в трансформированном сопротивлении источника сигнала R_s , а все шумы прибора — в напряжении v и токе i . Тепловой шум в сопротивлении R_s представляется напряжением v_t со спектром $4kTR_s$, а средний квадрат напряжения v_s генератора сигнала связан с номинальной мощностью сигнала P_s равенством $v_s^2=4P_sR_s$. Энергетический спектр напряжения U на входе нешумящего прибора равен

$$\mathcal{W} = \omega_v + \frac{4kT}{R_s} \{ [G + (1/R_s)]^2 + B^2 \}^{-1} + \omega_i \{ [G + (1/R_s)]^2 + B^2 \}^{-1} - \omega_{iv} [G + (1/R_s) - jB]^{-1} - \omega_{iv}^* [G + (1/R_s) + jB]^{-1}, \quad (12.27)$$

где ω_{iv} — взаимный спектр, связанный с i и v . Для среднеквадратичного напряжения сигнала в той же точке схемы имеем

$$U_s^2 = \frac{4P_s}{R_s} \{ [G + (1/R_s)]^2 + B^2 \}^{-1}. \quad (12.28)$$

Коэффициент шума, характеризующий ухудшение отношения сигнал/шум, найдем делением правой части (12.27) на ее второе слагаемое, которое представляет собой вклад от шумов источника, так как это слагаемое и величина U_s^2 связаны соответственно с kT и P_s одним и тем же коэффициентом. В результате получим

$$4kT_n = 4kT(F-1) = R_s \omega_i + \{[G + (1/R_s)]^2 + B^2\} R_s \omega_v - \omega_{iv} [G + (1/R_s) + jB] R_s - \omega_{iv}^* [G + (1/R_s) - jB] R_s. \quad (12.29)$$

Параметры схемных элементов B и R_s можно изменять с помощью цепи связи, и для некоторых их значений шумовая температура T_n будет минимальной. Несложно показать, записывая $\omega_{iv} = \rho + j\Theta$, что B встречается только в комбинации $B^2 \omega_v + 2B\Theta$, и поэтому ее оптимальное значение равно

$$B = -\frac{\Theta}{\omega_v} = \frac{j(\omega_{iv} - \omega_{iv}^*)}{2\omega_v}. \quad (12.30)$$

С учетом этого имеем

$$4kT_n = R_s \left(\omega_i + G^2 \omega_v - \frac{\Theta^2}{\omega_v} - 2\rho G \right) + 2(G\omega_v - \rho) + \omega_i / R_s. \quad (12.31)$$

Если R_s выбрать равным

$$R_{s0} = \left[\frac{\omega_v}{\omega_i + G^2 \omega_v - (\Theta^2/\omega_v) - 2\rho G} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (12.32)$$

то T_n достигнет минимальной величины T_{n0} , определяемой выражением

$$4kT_{n0} = 2(G\omega_v - \rho) + 2\{\omega_v[\omega_i + G^2 \omega_v - (\Theta^2/\omega_v) - 2\rho G]\}^{1/2}. \quad (12.33)$$

Для всех приборов ω_{iv} можно считать чисто мнимой величиной ($\rho=0$), откуда следует, что $\Theta_0 = \omega_{iv} \omega_{iv}^*$ может быть выражена в виде $c^2 \omega_i \omega_v$, где

$$c^2 = \frac{\omega_{iv}^* \omega_{iv}}{\omega_i \omega_v}. \quad (12.34)$$

В таком случае имеем

$$R_{s0} = \left[\frac{\omega_v}{(1-c^2)\omega_i + G^2 \omega_v} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (12.35)$$

и

$$4kT_{n0} = 2G\omega_v + 2\{\omega_v[(1-c^2)\omega_i + G^2 \omega_v]\}^{\frac{1}{2}}. \quad (12.36)$$

Отметим, что при $R_s \neq R_{s0}$ выражение (12.31) можно представить в виде

$$4kT_n - 2G\omega_v = \frac{1}{2} \left(\frac{R_s}{R_{s0}} + \frac{R_{s0}}{R_s} \right) (4kT_{n0} - 2G\omega_v). \quad (12.37)$$

Из этого следует, что величина T_n относительно нечувствительна к небольшим отклонениям R_s от R_{s0} . Далее, максимальное значение c^2 , с которым мы сталкивались, составляет $1/2$ (для биполярного транзистора с нулевым сопротивлением базы на высоких частотах). Если при вычислении R_{s0} опустить c^2 , то в худшем случае погрешность будет определяться $1/\sqrt{2}$ и вызовет увеличение $1/2(R_s/R_{s0}) + (R_{s0}/R_s)$ лишь от 1 до 1,07. Таким образом, можно с уверенностью пренебрегать корреляцией при вычислении R_{s0} . Если совсем не принимать во внимание корреляцию и положить $B=0$, то в соответствии с (12.36) значение T_n при $c^2=0$ возрастет самое большее в $\sqrt{2}$ раз. На практике этим можно пренебречь.

Следует отметить, что благодаря этому упрощению получаем практическую методику расчета, так как можем сначала без учета корреляции вычислить R_{s0} , а затем для этого значения R_s можем подобрать значение B по минимуму шума. Если корреляция значительна, то при отклонении B от нуля T_n уменьшится в худшем случае в $\sqrt{2}$ раз. На практике вследствие того, что в вакуумных лампах и полевых транзисторах c^2 меньше $1/2$, а в биполярных транзисторах эффективное значение c^2 уменьшается из-за наличия сопротивления базы, это уменьшение будет совсем незначительным. Впредь мы не будем принимать в расчет корреляцию, и это намного упростит наши расчеты, так как при этом мы всегда будем иметь дело с чисто резистивной входной цепью. Итак, имеем

$$4kT_n = 2G\omega_v + 2(\omega_i\omega_v + G^2\omega_v^2)^{1/2} \quad (12.38)$$

и

$$R_{s0} = \left(\frac{\omega_v}{\omega_i + G^2\omega_v} \right)^{1/2}. \quad (12.39)$$

В качестве примера использования полученных результатов рассмотрим биполярный транзистор, работающий на низких частотах с коэффициентом усиления по постоянному току β_{dc} и последовательным сопротивлением базы R_6 . Предположим, что входная проводимость идеального прибора g_m/β ничтожно мала, поэтому $G=0$ и

$$\omega_v = 2kT/g_m + 4kTR_6; \quad \omega_i = 2kTg_m/\beta_{dc}.$$

Следовательно,

$$R_{s0} = \frac{\beta_{dc}^{1/2}}{g_m} (1 + 2g_m R_6)^{1/2}$$

и

$$T_n = T\beta_{dc}^{-\frac{1}{2}} (1 + 2g_m R_6)^{\frac{1}{2}}.$$

При этом коэффициент шума F_0 по отношению к источнику сигнала с той же самой температурой T , что и для транзистора,

равен

$$F_0 = 1 + \beta_{dc}^{-1/2} (1 + 2g_m R_6)^{1/2}.$$

Например, для $\beta_{dc}=100$, $R_6=250$ Ом и тока коллектора 50 мкА, соответствующего $g_m=2$ мА·В⁻¹, имеем $R_{s0} \approx 7000$ Ом и $F_0=1,14$. Отметим, что если $\beta/g_m=50\,000$ Ом, то мы поступили правильно, не учитывая G , так как G^{-1} больше, чем R_{s0} и R_6 . Коэффициент шума около 1/2 дБ соответствует почти оптимальному значению, получаемому при использовании существующих в настоящее время транзисторов.

12.4. Многокаскадные усилители

Если, как и в последнем разделе, ток стока, коллектора или анодный ток взять в качестве выходной величины одиночного каскада, то тем самым мы не учтем тепловой шум, генерируемый в его нагрузочном сопротивлении. На рис. 12.2 приведена полная схема

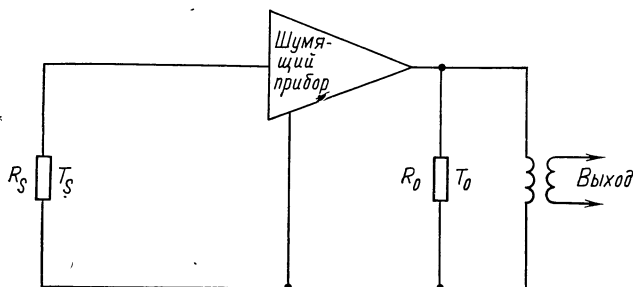


Рис. 12.2. Однокаскадный усилитель с источником сигнала и нагрузкой, находящимися соответственно при температуре T_s и T_0

усилителя с сопротивлением нагрузки R_0 , значение которого выбрано с точки зрения оптимизации характеристики усилителя. За этим сопротивлением следует идеальный трансформатор, обеспечивающий подходящее для следующего каскада выходное полное сопротивление усилителя. Пусть a_1 — коэффициент усиления по мощности этого каскада. Тогда номинальная мощность шума на выходных зажимах будет определяться энергетическим спектром

$$\omega_1 = a_1 F k T_s + k T_0, \quad (12.40)$$

где F — коэффициент шума самого прибора. Общий коэффициент шума

$$F_1 = F + T_0/a_1 T_s \quad (12.41)$$

приблизительно равен F , если только коэффициент усиления a_1 достаточно велик. Общая шумовая температура всей системы равна

$$T_1 = (F-1) T_s = (F-1) T_s + T_0/a_1. \quad (12.42)$$

Предположим, что выход первого каскада соединен со входом второго каскада, температура которого с учетом влияния нагрузки составляет T_2 , а коэффициент усиления a_2 . Тогда спектр шумов на выходе второго каскада

$$\omega_2 = a_2(\omega_1 + kT_2) = a_1 a_2 (kT_s + kT_1) + a_2 kT_2, \quad (12.43)$$

а общая шумовая температура

$$T_{12} = T_1 + T_2/a_1. \quad (12.44)$$

Очевидно, если коэффициент a_1 достаточно велик, то шум следующего каскада можно не принимать в расчет. Если поменять каскады местами, то общая шумовая температура будет равна

$$T_{21} = T_2 + T_1/a_2. \quad (12.45)$$

Эта температура будет меньше, чем T_{12} , если

$$T_2 + T_1/a_2 < T_1 + T_2/a_1$$

или

$$T_2/(1 - 1/a^2) < T_1(1 - 1/a_1). \quad (12.46)$$

Таким образом, выбор входного усилителя зависит не только от его шумовой температуры, но и до некоторой степени от коэффициента усиления. Для того чтобы выразить это взаимное отношение, Хаус и Адлер [17] ввели понятие меры шума (шумового числа):

$$M = \frac{F - 1}{1 - 1/a}. \quad (12.47)$$

Вместо этого можно использовать также

$$\Theta = T_n / (1 - 1/a). \quad (12.48)$$

Если последовательно включены N каскадов с шумовыми температурами T_1, T_2, \dots и коэффициентами усиления a_1, a_2 и т. д., то для спектра шума на выходе имеем

$$\omega = k[(T_s + T_1)a_1 a_2 \dots a_N + T_2 a_2 \dots a_N + \dots + T_N a_N],$$

а для общей шумовой температуры

$$T_n = T_1 + T_2/a_1 + \dots + T_N/a_1 a_2 \dots a_{N-1}. \quad (12.49)$$

В случае последовательности из N идентичных каскадов

$$T_n = T_1 [1 + 1/a + \dots + (1/a)^{N-1}] = T_1 \frac{1 - (1/a)^N}{1 - 1/a} \approx \frac{T_1}{1 - 1/a} = \Theta \quad (12.50)$$

и

$$F - 1 = \frac{F_1 - 1}{1 - 1/a} = M. \quad (12.51)$$

Таким образом, общая температура шума или общий коэффициент шума многокаскадного усилителя с большим усилением рав-

ны мерам шума отдельных каскадов. Когда соединенные последовательно каскады имеют различные меры шума, общая шумовая температура будет наименьшей, если каскады включены в порядке увеличения меры шума. При этом общая шумовая температура, вычисляемая из (12.49) подстановкой $T_1 = \Theta_1(1 - 1/a_1)$ и т. д., равна

$$T_n = \Theta_1 + \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{a_1} + \frac{\Theta_3 - \Theta_2}{a_1 a_2} + \dots \quad (12.52)$$

Как видно, T_n никогда не может быть меньше меры шума первого каскада. Нет смысла пытаться уменьшить шумовую температуру этого каскада, если при этом его коэффициент усиления снизится настолько, что возрастет мера шума.

12.5. Усилители с отрицательной обратной связью

Отрицательная обратная связь часто применяется для коррекции усиления и полной входной проводимости усилителя. Поэтому необходимо рассмотреть ее влияние на шумовые характеристики. Как будет показано ниже, это влияние обычно невелико, за исключением случая, когда усиление системы с цепью обратной связи мало.

На рис. 12.3 показано сопротивление источника сигнала R_s , подключенное к усилителю с коэффициентом усиления по напряжению $-A$ и входной проводимостью G . Свойства усилителя изменены введением обратной связи по напряжению (последовательной обратной связи) и обратной связи по току (параллельной обратной связи)¹.

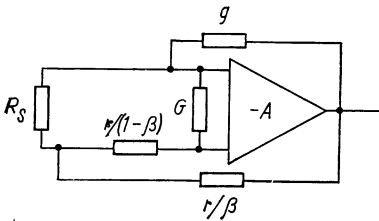


Рис. 12.3. Усилитель, охваченный отрицательной обратной связью по напряжению и току

На рис. 12.4 элементы обратной связи представлены в эквивалентной схеме сопротивлением r и связанным с ним генератором напряжения βAU , а также проводимостью g и связанным с ней генератором тока gAU . На схеме еще показаны генераторы v и i , представляющие шумы усилителя, а также генераторы v_s , v_r и i_g , представляющие тепловые шумы в R_s , r и g соответственно. Можно сразу же определить напряжение U на входе идеального усилителя:

$$U = \left[1 + \frac{\beta A + gA(R_s + r)}{1 + (G + g)(R_s + r)} \right]^{-1} \cdot \left[v + \frac{(i + i_g)(R_s + r) + v_s + v_r}{1 + (G + g)(R_s + r)} \right].$$

¹ В данном случае вид обратной связи — по напряжению или току — определяется тем, что вводится дополнительно во входную цепь — напряжение или ток. Иногда встречается другое, прямо противоположное определение, отражающее связь вводимых параметров с выходными. — *Прим. ред.*

Коэффициент шума найдем как отношение членов, зависящих от i , i_g , v и v_g , к члену, представляющему собой тепловой шум в R_s . Так как все шумовые источники не коррелированы, необходимо взять сумму квадратов отдельных членов. Тогда выражение для коэффициента шума через энергетические спектры имеет вид:

$$F - 1 = \frac{(R_s + r)^2 \omega_i + [1 + (G + g)(R_s + r)]^2 \omega_v + (R_s + r)^2 \omega_g + \omega_\tau}{\omega_s}$$

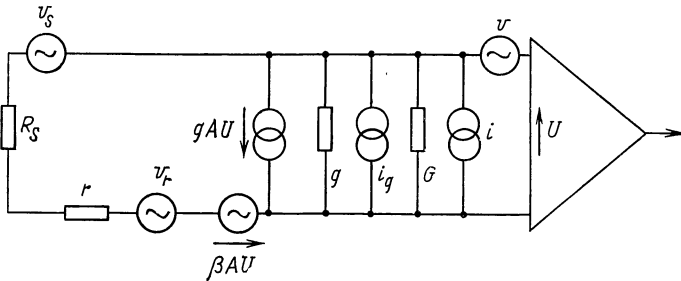


Рис. 12.4. Эквивалентная шумовая схема усилителя с отрицательной обратной связью

Предположим, что r и g находятся при одной и той же температуре T . Тогда $\omega_r = 4kTr$ и $\omega_g = 4kTg$. Одновременно запишем $\omega_i = 4kTg_n$, $\omega_v = 4kTr_n$ и $\omega_s = 4kT_s R_s$. Заменив $F - 1$ на T_n/T_s , получим

$$\frac{T_n}{T_s} = \frac{(R_s + r)^2 g_n}{R_s} + \frac{[1 + (G + g)(R_s + r)]^2 r_n}{R_s} + \frac{(R_s + r)^2 g}{R_s} + \frac{r}{R_s}. \quad (12.53)$$

Без обратной связи

$$\frac{T_n}{T_s} = R_s g_n + \frac{(1 + GR_s)^2 r_n}{R_s}, \quad (12.54)$$

откуда видно, что обратная связь всегда увеличивает шум. Этот вывод останется в силе даже в том случае, если в (12.53) опустить последние два члена, которые представляют собой тепловые шумы в элементах цепи обратной связи. Поэтому даже при чисто реактивных элементах шумовая температура все равно бы увеличилась. На практике произведение $(G + g)(R_s + r)$ почти всегда мало, поэтому соответствующим ему членом в (12.53) можно пренебречь. Тогда

$$T_n/T = 2g_n r + 2gr + R_s(g_n + g) + R_s^{-1}(r_n + r + r^2 g_n + r^2 g). \quad (12.55)$$

Для обратной связи только по напряжению ($g = 0$) отношение T_n/T уменьшается:

$$\frac{T_n}{T} = 2g_n r + R_s g_n + R_s^{-1}(r_n + r + r^2 g_n). \quad (12.56)$$

При этом оптимальное сопротивление источника сигнала равно

$$R_{s0} = \left(\frac{r_n}{g_n}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{r}{r_n} + r^2 \frac{g_n}{r_n}\right)^{1/2}, \quad (12.57)$$

а оптимальная шумовая температура

$$T_n = 2T \left[g_n r + (g_n r_n)^{1/2} \left(1 + \frac{r}{r_n} + r \frac{g_n}{r_n} \right)^{1/2} \right]. \quad (12.58)$$

Так, например, для усилителя с $r_n = 100$ Ом, $g_n = 10^{-4}$ Ом $^{-1}$ и $r = 1000$ Ом оптимальные значения без обратной связи равны $R_{s0} = 1000$ Ом и $T_n = T/5$, а с обратной связью $R_{s0} = 3500$ Ом и $T_n \approx T$. Этот пример скорее всего относится к биполярному транзистору с $I_k = 250$ мкА и сопротивлением в цепи эмиттера 1 кОм. При $r = 0$ (обратная связь только по току) имеем

$$T_n/T = R_s (g_n + g) + r_n R_s^{-1}. \quad (12.59)$$

Уменьшенное оптимальное сопротивление источника равно

$$R_{s0} = \left(\frac{r_n}{g_n} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{g}{g_n} \right)^{-1/2}, \quad (12.60)$$

а увеличенная оптимальная шумовая температура будет

$$T_{n0} = 2T (r_n g_n)^{1/2} \left(1 + \frac{g}{g_n} \right)^{1/2}. \quad (12.61)$$

Полевой транзистор с $p-n$ -переходом на рабочей частоте 100 кГц может иметь $r_n \approx 200$ Ом и $g_n \approx 2 \cdot 10^{-8}$ Ом $^{-1}$. Без обратной связи имеем $R_{s0} = 10^5$ Ом и $T_n = 4 \cdot 10^{-3} T$. Если сопротивление $R = 10^4$ Ом (соответственно $g = 10^{-4}$ Ом $^{-1}$) подключено между стоком и затвором, что обеспечивает отрицательную обратную связь по току, то R_{s0} уменьшится в 70 раз и во столько же раз увеличится T_n .

Если обратная связь вводится в фактически не шумящий усилитель [в этом случае g_n и r_n в (12.53) малы], то получаем

$$T_n/T = 2gr + R_s g + R_s^{-1} r (1 + gr).$$

Отсюда для обратной связи только по напряжению ($g = 0$)

$$T_n/T \sim r/R_s, \quad (12.62a)$$

а для обратной связи только по току ($r = 0$)

$$T_n/T \sim g R_s. \quad (12.62b)$$

Если эти две формулы дают значения T_n больше, чем ожидаемые для усилителя без обратной связи, то, следовательно, обратная связь оказывает заметное влияние на величину шума. Так, например, если усилитель без обратной связи имеет оптимальное сопротивление источника 500 Ом и характеризуется отношением $T_n/T = 1/2$, то введение сопротивления обратной связи $r = 500$ Ом по крайней мере удвоит шум.

12.6. Различные схемы включения прибора

До сих пор мы исходили из того, что активный прибор включается по обычной схеме с общим эмиттером, истоком или катодом. Теперь рассмотрим другие схемы, например схему с общей базой и

схему эмиттерного повторителя. Для простоты будем и далее считать, что в обычной схеме прибор имеет незначительную входную проводимость. На рис. 12.5,а показана схема каскада с заземленной базой, а на рис. 12.5,б — ее шумовая эквивалентная схема. Для этих схем имеем

$$U = v + iR_s + v_s - g_m R_s U,$$

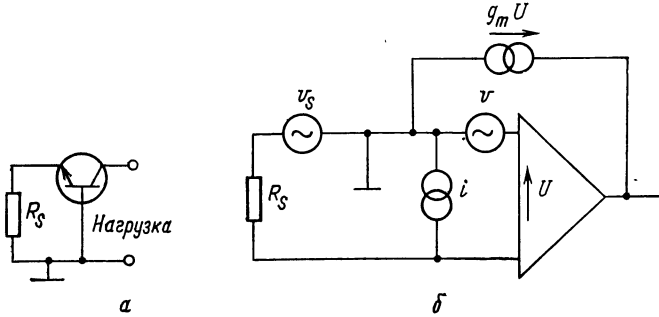


Рис. 12.5. Электрическая схема каскада с общей базой (а) и его эквивалентная схема (б).

откуда для энергетического спектра напряжения U получим

$$W = \left(\frac{1}{1 + g_m R_s} \right)^2 (4kTR_s + 4kTr_n + 4kTR_s^2 g_n).$$

Следовательно, шумовую температуру находят по формуле

$$T_n = T \left(\frac{r_n}{R_s} + R_s g_n \right),$$

причем как оптимальное соотношение источника $R_{s0} = (r_n/g_n)^{1/2}$, так и минимальная шумовая температура $T_{n0} = 2T(r_n g_n)^{1/2}$ оказываются такими же, как и для схемы с общим эмиттером. Между тем входная проводимость для рассматриваемой схемы велика и численно равна g_m . Для обычной схемы R_{s0} , как правило, намного меньше входного сопротивления G^{-1} , тогда как для схемы с общей базой R_{s0} больше, чем входное сопротивление g_m^{-1} . Ни в том, ни в другом случае R_{s0} не равно сопротивлению источника, при котором получается максимальное усиление.

На рис. 12.6 приведена эквивалентная схема эмиттерного, истокового или катодного повторителя. В этом случае необходимо учитывать шум, генерируемый в нагрузке R_H . Имеем

$$U(1 + g_m R_H) = v + v_s + iR_s - v_L$$

и $U_0 = v_L + g_m R_H U$, откуда следует, что

$$U_0 = \frac{v_L + g_m R_H (v + v_s + iR_s)}{1 + g_m R_H}.$$

Шумовая температура определяется формулой

$$T_n = T \left[\frac{r_n}{R_s} + g_n R_s + \frac{R_H}{R_s} (g_m R_H)^{-2} \right]. \quad (12.63)$$

Если $g_m R_H$ велико, то результат получится таким же, что и для других схем.

В данном случае входное сопротивление намного выше, чем R_{s0} , а выходное сопротивление мало и равно $1/g_m$. Если, однако, повторитель согласован с нагрузкой, т. е. $R_H = 1/g_m$, то для шумовой температуры получим

$$T_n = T \left(\frac{r_n}{R_s} + g_n R_s + \frac{1}{(g_m R_s)} \right).$$

Минимальная температура равна

$$T_{n0} = 2T (g_n r_n)^{1/2} (1 + 1/(g_m r_n))^{1/2}. \quad (12.64)$$

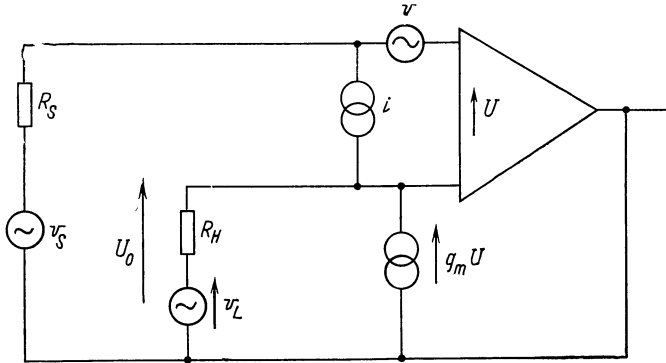


Рис. 12.6. Эквивалентная схема источника или эмиттерного повторителя с нагрузкой R_H . Выходное напряжение — U_0

Если в качестве активного прибора используется биполярный транзистор, работающий при таком малом токе коллектора, что можно пренебречь влиянием последовательного базового сопротивления, то эквивалентное шумовое сопротивление будет равно $r_n = g_m/2$. Следовательно, при согласованной нагрузке шум увеличивается в $\sqrt{3}$ раз.

12.7. Каскады с согласованным входным сопротивлением

Сопротивление источника R_{s0} , соответствующее оптимальным шумовым характеристикам входного каскада, обычно не равно входному сопротивлению этого каскада. Между тем в ряде случаев необходимо, чтобы усилитель представлял собой согласованное по отношению к источнику сопротивление. Это относится, например, к импульсным усилителям, подключенным к источнику при помощи согласованной линии передачи. Поэтому имеет смысл рассмотреть, как этого можно достичь и как это скажется на шумовой характеристике каскада.

На не слишком высоких частотах можно применить отрицательную обратную связь, охватывающую несколько каскадов с высоким общим усилением. Это не должно приводить к какому-либо

ухудшению шумовой характеристики, но может быть использовано для того, чтобы сделать входное сопротивление равным R_{s0} . Следовательно, использование обратной связи является одним из возможных приемов. Однако на более высоких частотах обратная связь, охватывающая несколько каскадов, по-видимому, приведет к нестабильности, и этот способ непригоден.

Пусть R_{s0} — оптимальное сопротивление источника, а T_{n0} — оптимизированная шумовая температура. Тогда величина T_n для других значений сопротивления источника определяется так:

$$T_n - 2Gr_nT = \frac{1}{2}(T_{n0} - 2Gr_nT) \left(\frac{R_{s0}}{R_s} + \frac{R_s}{R_{s0}} \right), \quad (12.65)$$

где G — входная проводимость прибора, а r_n — его эквивалентное шумовое сопротивление при температуре T . Если согласовать источник с прибором так, чтобы $R_sG = 1$, то будем иметь

$$T_n - 2Gr_nT = \frac{1}{2}(T_{n0} - 2Gr_nT) (GR_{s0} + 1/GR_{s0}). \quad (12.66)$$

Для примера обратимся к полевому транзистору с рабочей частотой 50 МГц, который может иметь $r_n = 200$ Ом при $T = 300$ К и $G = 3 \cdot 10^{-4}$ Ом $^{-1}$, так что $R_{s0} = 1600$ Ом и $GR_{s0} \approx 1/2$. При этом величина $1/2(GR_{s0} + 1/GR_{s0})$ составит лишь 1,25, и отклонение величины T_n от ее оптимального значения пренебрежимо мало. С другой стороны, для биполярного транзистора значение GR_{s0} порядка $\beta^{-1/2}$, так что

$$\frac{1}{2}(GR_{s0} + 1/GR_{s0}) \approx \frac{1}{2}\beta^{1/2} \approx 5.$$

Ясно, что иногда можно согласовать источник со входом усилителя без чрезмерного увеличения T_n , но в других случаях это может оказаться невозможным.

Если входное сопротивление G^{-1} больше R_{s0} , то обычно параллельно источнику подключают сопротивление $R \approx R_s$, а затем трансформируют результирующее сопротивление $R_s/2$ в равное R_{s0} . Напротив, когда G^{-1} намного меньше, чем R_{s0} , то дополнительное сопротивление включают последовательно с источником, а результирующее сопротивление $2R_s$ трансформируют до равного R_{s0} . Оба эти случая приводят к одинаковым результатам, и мы рассмотрим только первый из них. На рис. 12.7 показана эквивалентная схема усилителя. Шум усилителя сводится к минимуму, когда сопротивление $R_s/2$ трансформировано так, что оно равно $R_{s0} = (\omega_v/\omega_i)^{1/2}$. Тогда минимальная температура шума

$$T'_n = T + 2T_{n0}, \quad (12.67)$$

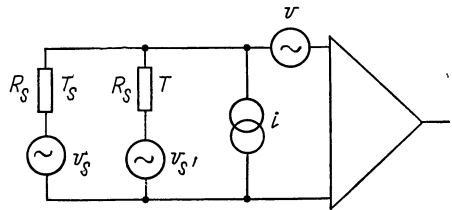


Рис. 12.7. Схема входного каскада усилителя с согласующим резистором R_s , находящимся при температуре T

где T_{n0} относится к оптимизированному усилителю. Например, при $T=300$ К и $T_{n0}=150$ К температура шума увеличивается за счет согласования от 150 до 600 К.

В некоторых случаях трудно трансформировать сопротивление источника так, чтобы параллельная комбинация сопротивлений $R_s/2$ была равна R_{s0} . Тогда имеем

$$T'_n = T + T_{n0} \left(\frac{R_s}{2R_{s0}} + \frac{2R_{s0}}{R_s} \right). \quad (12.68)$$

Увеличение шума в этом случае может быть весьма значительным. Пусть, например, источником является кабель с волновым сопротивлением 50 Ом, так что $R_s=50$ Ом, а входным каскадом служит биполярный транзистор, для которого требуется $R_{s0}=500$ Ом, чтобы получить минимальное значение шумовой температуры $T_{n0}=300$ К. Тогда $T_n=(300+6000)$ К=6300 К. Очевидно, этот простой прием согласования неудовлетворителен.

На низких частотах можно без нарушения стабильности изменить входное сопротивление, применяя отрицательную обратную связь, охватывающую несколько каскадов с большим усилением. При этом не должно быть заметного ухудшения шумовых характеристик. Что касается высоких частот, то мы можем охватить обратной связью только один каскад. Рассмотрим каскад с высоким входным сопротивлением и коэффициентом усиления по напряжению $-A$, входное сопротивление которого уменьшено до значения $R=1/A_g$ введением обратной связи по току. Согласно (12.59) имеем

$$T'_n/T = R_s(g_n + g) + r_n R_s^{-1}.$$

Если обеспечить равенство $R=R_s$, выбрав проводимость g равной $1/AR_s$, то получим

$$T'_n/T = R_s g_n + r_n R_s^{-1} + 1/A.$$

Трансформируя R_s в значение $R_{s0}=(r_n/g_n)^{1/2}$, получим $T_n=T_{n0} + T/A$ вместо $T_n=T_{n0}=2(g_n r_n)^{1/2}T$. Если, например, $T_{n0}=150$ К, $T=300$ К и $A=10$, то увеличение T_n будет незначительным. Даже при $A=2$ увеличение меньше, чем при любой схеме без обратной связи. Если трансформация R_s невозможна, то

$$T'_n = \frac{1}{2} \left(\frac{R_{s0}}{R_s} + \frac{R_s}{R_{s0}} \right) T_{n0} + \frac{T}{A}. \quad (12.69)$$

Это выражение можно сравнить с (12.68). При тех же числовых значениях $R_s=50$ Ом, $R_{s0}=500$ Ом, $T_{n0}=300$ К, $T=300$ К и $A=2$ выражение (12.69) дает $T_n=1650$ К. Это хотя и не совсем низкая шумовая температура, но все же лучше, чем 6300 К. Следовательно, довольно трудно получить хорошие шумовые характеристики и в то же время согласовать усилитель с источником сигнала, особенно на высоких частотах.

12.8. Дифференциальная чувствительность

Мощность входного сигнала, при которой отношение сигнал/шум равно единице на выходе усилителя с коэффициентом шума F и шириной полосы пропускания Δf , составляет $FkT\Delta f$. Однако в некоторых случаях нас интересуют наименьшие обнаруживаемые изменения δP сравнительно большой мощности P . Примем за наименьшее обнаруживаемое такое изменение, которое вызывает изменение амплитуды, равное среднеквадратичному значению шума $(FkT\Delta f)^{1/2}$. Тогда справедливо следующее соотношение:

$$\delta P = \frac{d(P)^{1/2}}{dP} = (FkT\Delta f)^{1/2},$$

из которого следует

$$\delta P = 2(PFkT\Delta f)^{1/2}. \quad (12.70)$$

Рассмотрим, например, мост переменного тока, который питается напряжением со среднеквадратичным значением U_0 , создающим напряжение разбаланса ηU_0 , где η зависит от балансировки моста. При известных значениях коэффициента шума F и ширины полосы пропускания Δf усилителя, подключенного к выходу моста с выходным сопротивлением R , минимальное обнаруживаемое изменение η дается формулой $U_0\delta\eta = (4RFkT\Delta f)^{1/2}$. Но, кроме того, имеем

$$\delta P = \frac{1}{4R} \delta(\eta U_0)^2 = \frac{\eta U_0^2 \delta\eta}{2R} = 2P \frac{\delta\eta}{\eta}.$$

Следовательно, $\delta\eta = (4RFkT\Delta f/U^2)^{1/2}$,

или $\delta\eta = (\eta^2 FkT\Delta f/P)^{1/2}$.

Эти два результата, очевидно, одинаковы. Если F и Δf не изменяются с изменением мощности выходного сигнала разбаланса P , то чувствительность к небольшим изменениям параметра баланса η не зависит от значения параметра η .

Если, с другой стороны, F или Δf изменяется с изменением входного сигнала, приложенного к усилителю, то чувствительность можно оптимизировать путем выбора определенного значения выходного сигнала разбаланса. Это, как мы увидим, имеет определенное значение в спектрометрах парамагнитного резонанса (см. гл. 22).

12.9. Заключение

Величину среднего квадрата флуктуаций на выходе усилителя можно выразить через энергетический спектр на выходе $W(f)$ в виде

$$\langle \Delta\theta^2 \rangle = \int_0^{\infty} W(f) df.$$

Величина $W(f)$, характеризующая шум на выходе усилителя с коэффициентом усиления $A(f)$, подключенного к источнику белого шума с энергетическим спектром ω_s , содержит вклад $A(f)A^*(f)\omega_s$, обусловленный этим источником, и дополнительный вклад от внутренних источников шума. Коэффициент шума на фиксированной частоте относительно внешнего источника $F(f)$ определяется так, что

$$W(f) = F(f)A(f)A^*(f)\omega_s.$$

Эффективная полоса пропускания Δf определяется как

$$\Delta f = \frac{\int_0^{\infty} A(f)A^*(f)df}{A_0A_0^*},$$

где A_0 — усиление в полосе пропускания. Средний коэффициент шума \bar{F} определяется через энергетический спектр:

$$\langle \Delta \theta^2 \rangle = \int_0^{\infty} W(f)df = \bar{F}A_0A_0^*\omega_s\Delta f.$$

Это удобно, так как во многих случаях Δf определяется последними каскадами усилителя, в то время как $F(f)$ и \bar{F} определяются более близкими ко входу каскадами, и поэтому параметры F и Δf можно рассматривать раздельно.

Если спектр ω_s связан с температурой источника T_s равенством $\omega_s = kT_s$, то F можно представить в виде $F = 1 + T_n/T_s$, где T_n — шумовая температура усилителя. Обычно F дается относительно источника с температурой 293 К, так что $T_n = 293(F - 1)$. Если усилитель состоит из нескольких каскадов, каждый из которых имеет коэффициенты усиления G' и шума F' , то общий коэффициент шума будет равен

$$F = 1 + \frac{F' - 1}{1 - 1/G'}.$$

Значение $M' = F' - 1/(1 - 1/G')$ известно как мера шума (шумовое число) отдельного каскада. Усилитель, состоящий из каскадов с мерами шума M_1, M_2 и т. д., не может иметь коэффициент шума меньший, чем самая меньшая из этих мер. Общий коэффициент шума довольно близко подходит к этому пределу, если каскад с наименьшей мерой шума стоит на входе усилителя.

Для любого входного каскада существует такое значение сопротивления источника сигнала, при котором коэффициент шума минимален. Обычно сопротивление источника в сочетании с входной реактивной проводимостью каскада представляет собой действительную или близкую к этому величину. Если обозначить оптимальное значение сопротивления R_{s0} , а оптимизированный коэффициент шума F_0 , то коэффициент шума для других значений со-

противления источника будет равен

$$F = 1 + a + \frac{1}{2} (F_0 - 1 - a) \left(\frac{R_s}{R_{s0}} + \frac{R_{s0}}{R_s} \right),$$

где a — постоянная, имеющая обычно малое значение, которое определяется главным образом отношением R_{s0} к действительной части полного входного сопротивления каскада. Когда a равна нулю, эквивалентные шумовые генераторы входного каскада характеризуются шумовой проводимостью g_n и шумовым сопротивлением r_n , имеем $R_{s0}^2 = r_n/g_n$ и $F_0 = 1 + 2(r_n g_n)^{1/2}$. Влияние входного сопротивления конечной величины сводится к увеличению коэффициента шума F_0 .

Корреляция между двумя эквивалентными шумовыми генераторами усилителя оказывает незначительное влияние на R_{s0} , и если входная цепь выполнена с малой реактивностью (обычно емкостной), то она может привести к небольшому уменьшению T_{n0} . Отрицательная обратная связь имеет тенденцию увеличивать T_n , но если усиление в кольце обратной связи велико, то могут быть достигнуты ощутимые изменения коэффициента усиления и входной проводимости усилителя без заметного увеличения T_n . Различные схемы включения одного и того же прибора дают одно и то же значение T_{n0} и требуют одного и того же значения R_{s0} .

В общем случае самая низкая шумовая температура не обеспечивается, когда прибор согласован с источником сигнала и усиление максимально. Трудно совместить эти два условия без существенного увеличения T_n даже при использовании отрицательной обратной связи.

ГЛАВА 13

ТРАНЗИСТОРНЫЕ УСИЛИТЕЛИ

На частотах, превышающих 1 ГГц, наиболее удовлетворительно работают малощумящие усилители на лампе бегущей волны, параметрические усилители и мазеры (речь о них пойдет в последних главах). На частотах ниже 1 кГц шумовые характеристики усилителей определяются всецело фликкер-шумом. Эта область частот будет рассмотрена в следующей главе. Здесь же ограничимся рассмотрением усилителей, работающих на средних частотах — от 1 кГц до 1 ГГц.

В полевых транзисторах эквивалентное шумовое напряжение на выводе затвора изменяется незначительно с изменением частоты. Однако шумовой ток затвора содержит две составляющие, одна из которых, обусловленная током утечки затвора, не зависит от частоты и имеет энергетический спектр $2eI_g$, а другая, обусловленная наведенным шумом затвора, растет с увеличением частоты по квадратичному закону и характеризуется энергетическим спек-

тром $g_m kT (f/f_T)^2$. Эти две составляющие имеют одинаковое значение при

$$\frac{f}{f_T} \sim \left(\frac{2eI_g}{g_m kT} \right)^{1/2},$$

равенство значений наблюдается на частоте около 0,5 МГц при $I_g = 10^{-9}$ А, $g_m = 5$ мА/В и $f_T = 100$ МГц.

В биполярных транзисторах эквивалентное шумовое напряжение на базовом выводе также не зависит от частоты вплоть до $f_T/2$, но шумовой ток базы содержит частотно-независимую и частотно-зависимую составляющие с энергетическими спектрами $2eI_b$ (или $2kTg/\beta$) и $4kTg_m(f/f_T)^2$ соответственно. Эти составляющие имеют одинаковые значения при частоте $f = f_T(2\beta)^{-1/2}$. Для $\beta \approx 200$ значение этой частоты составляет $f_T/20$ и в зависимости от значения f_T может находиться в пределах от 100 кГц до 100 МГц. Такие два характерных значения частоты определяют границу между низкочастотным и высокочастотным режимами работы транзистора.

13.1. Полевые транзисторы

Эквивалентная схема входной цепи полевого транзистора приведена на рис. 13.1. В большинстве практических случаев два шумовых генератора можно считать взаимно некоррелированными.

Энергетический спектр генератора напряжения находят из соотношения

$$\omega_v = \frac{2}{3} 4kT/g_m, \quad (13.1)$$

откуда для эквивалентного шумового сопротивления справедливо

$$r_n = \frac{2}{3} g_m. \quad (13.2)$$

На низких частотах в шумовом токе преобладает составляющая с энергетическим спектром

$$\omega_i = 2eI_g, \quad (13.3)$$

где I_g — ток утечки затвора. В этой области частот можно пренебречь емкостью C , и шумовая температура при сопротивлении источника сигнала R_s определяется простой формулой:

$$T_n = \frac{1}{2} T_{n0} \left(\frac{R_s}{R_{s0}} + \frac{R_{s0}}{R_s} \right), \quad (13.4)$$

где

$$R_{s0} = \left(\frac{\omega_v}{\omega_i} \right)^{1/2} = \left(\frac{4kT}{3eI_g g_m} \right)^{1/2} \sim \left(\frac{1}{30I_g g_m} \right)^{1/2}; \quad (13.5)$$

$$T_{n0} = T \left(\frac{4eI_g}{3kTg_m} \right)^{1/2} \sim T \left(\frac{50I_g}{g_m} \right)^{1/2}. \quad (13.6)$$

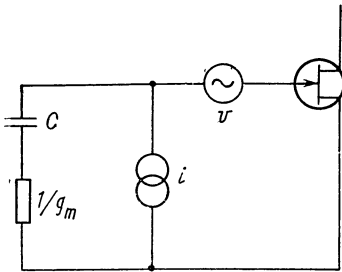


Рис. 13.1. Эквивалентная схема входной цепи полевого транзистора

Таким образом, если $I_g=10^{-10}$ А, а $g_m=5$ мА/В, то $R_{s0}=2,5 \times 10^5$ Ом и $T_n \approx 10^{-3} T \approx 0,3$ К. Если R_s сделать достаточно большим, то могут быть достигнуты весьма низкие шумовые температуры. Если такая возможность в отношении R_s отсутствует, то

$$T_n \sim \frac{1}{2} T n_0 \frac{R_{s0}}{R_s} = \frac{r_n}{R_s} T = \frac{2T}{3g_m R_s} \quad (13.7)$$

Например, для $g_m=5$ мА/В и $R_s=10^4$ Ом при $T=300$ К и имеем $T_n=4$ К, что для большинства случаев — величина пренебрежимо малая. На более высоких частотах к величине ω_i , определяемой соотношением (13.3), необходимо добавить составляющую, связанную с наведенным шумом затвора:

$$\omega_i = \frac{\omega^2 C^2}{4g_m} 4kT = \frac{1}{4} \left(\frac{f}{f_T} \right)^2 4kT g_m, \quad (13.8)$$

где

$$f_T = g_m / 2\pi C \quad (13.9)$$

представляет собой произведение коэффициента усиления на ширину полосы пропускания.

Представляя ω_i в виде $4kT g_n$, получаем

$$g_n = \frac{1}{4} g_m \left(\frac{f}{f_T} \right)^2. \quad (13.10)$$

Для значений частот, на которых добавляемая составляющая ω_i преобладает над основной, но все-таки еще можно пренебречь входной проводимостью

$$G = \frac{\omega^2 C^2 / g_m}{1 + \omega^2 C^2 / g_m} = \frac{(f/f_T)^2}{1 + (f/f_T)^2} g_m, \quad (13.11)$$

справедливы соотношения

$$R_{s0} = \left(\frac{r_n}{g_n} \right)^{1/2} = \left(\frac{8}{3} \right) \frac{f_T}{f g_m}; \quad (13.12)$$

$$T_{n0} = 2T (r_n g_n)^{1/2} = \left(\frac{2}{3} \right)^{1/2} T f / f_T. \quad (13.13)$$

При $f_T=200$ МГц и $I_g=10^{-10}$ А эти формулы справедливы для интервала частот от 200 кГц до 20 МГц и, например, для частоты 2 МГц они дают значения $R_{s0} \approx 30$ кОм и $T_{n0} \approx 3$ К.

На повышенных частотах пренебрегать величиной G уже нельзя, и в соответствии с выражениями (12.38) и (12.39)

$$T_{n0} = 2Gr_n T + 2(g_n r_n + G^2 r_n^2)^{1/2} T \quad \text{и} \quad R_{s0} = \left(\frac{r_n}{g_n + G^2 r_n} \right)^{1/2}.$$

Эти результаты можно записать в виде

$$T_{n0} = \left(\frac{2}{3} \right)^{1/2} T \frac{f}{f_T} \frac{[1 + (14/3) (f/f_T)^2 + (f/f_T)^4]^{1/2} + (8/3)^{1/2} (f/f_T)}{1 + (f/f_T)} \quad (13.14)$$

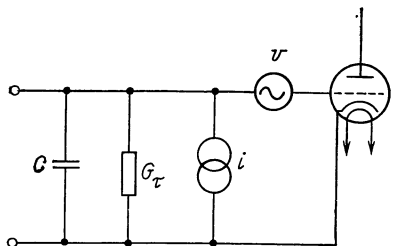
$$R_{so} = \frac{1}{g_m} \left(\frac{8}{3} \right)^{1/2} \frac{f_T}{f} \frac{1 + (f/f_T)^2}{[1 + (14/3)(f/f_T)^2 + (f/f_T)^4]^{1/2}}. \quad (13.15)$$

Если, например, $f = f_T/2$, то $T_{n0}/T \approx 0,75$, а $F = 1,75$ (или 2,5 дБ). Эти данные находятся в хорошем соответствии с результатами эксперимента. Примером может служить транзистор типа BFW-10 с $f_T \approx 200$ МГц, изготовители которого указывают коэффициент шума 2,5 дБ на частоте 100 МГц.

На рис. 13.2 приведена эквивалентная схема с источником шума для электронной лампы.

Если выражение (13.1) для ω_v заменить на $\omega_v = 2,5 \cdot 4kT/g_m$, откуда следует $r_n = 2,5/g_m$, а выражения (13.3) и (13.8) для ω_i — на $\omega_i = 2eI_g + 4kT(5G_\tau)$, где G_τ — обусловленная пролетными эффектами проводимость, пропорциональная f^2 , то расчет шумовых параметров электронной лампы можно производить по формулам, справедливым для полевых транзисторов, однако сами параметры оказываются худшими. Шумовую температуру $T_{n0} = 300$ К и коэффициент шума $F = 2$ (или 3 дБ) на частоте 100 МГц следует считать для электронной лампы исключительно хорошими.

Рис. 13.2. Эквивалентная схема входной цепи вакуумного триода



13.2. Биполярные транзисторы

Эквивалентная схема с источниками шумов для биполярного транзистора, подключенного к источнику сигнала с внутренним сопротивлением R_s , находящимся при температуре T_s , показана на рис. 13.3. На этой схеме, справедливой для частот, лежащих намного ниже f_T , резистор R_b представляет собой последовательное

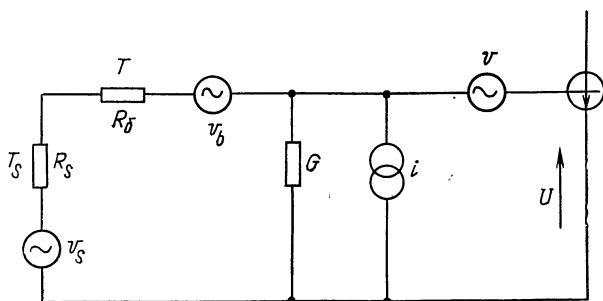


Рис. 13.3. Эквивалентная схема биполярного транзистора, подключенного к источнику сигнала с внутренним сопротивлением R_s при температуре T_s

сопротивление базы. Энергетические спектры четырех источников шума определяются выражениями:

$$\omega_v = 2kT/g_m = 4kTr_n; \quad (13.16a)$$

$$\omega_i = 2kTg_m/\beta_{dc} = 4kTg_n; \quad (13.16б)$$

$$\omega_b = 4kTR_b; \quad (13.16в)$$

$$\omega_s = 4kT_sR_s. \quad (13.16г)$$

Входная проводимость равна

$$G = g_m/\beta = eI_k/\beta kT. \quad (13.17)$$

Если пренебречь величинами R_b и G , то для коэффициента шума получим

$$F = 1 + \left(\frac{r_n}{R_s} + g_n R_s \right) \frac{T}{T_s}, \quad (13.18)$$

откуда

$$T_n = T \left(\frac{r_n}{R_s} + g_n R_s \right). \quad (13.19)$$

Величина T_n принимает минимальное значение:

$$T_{n0} = 2(r_n g_n)^{1/2} = \beta_{dc}^{-1/2} T \quad (13.20)$$

при

$$R_{s0} = \left(\frac{r_n}{g_n} \right)^{1/2} = g_m^{-1} \beta_{dc}^{1/2}. \quad (13.21)$$

Так, например, при $g_m^{-1} = 250$ Ом и $\beta_{dc} = 400$, что соответствует $I_k = 100$ мкА, получим $R_{s0} = 5000$ Ом и $T_{n0} = T/20 = 15$ К. Заметим при этом, что значение R_{s0} намного меньше, чем $G^{-1} = \beta g_m^{-1} \approx 100\,000$ Ом.

Обычно R_b находится в пределах от 10 до 1000 Ом, и поэтому можно пренебречь влиянием G . Однако пренебрегать величиной R_b в сравнении с $r_n = g_m/2$ нельзя. Таким образом, если учесть R_b и пренебречь величиной G , то в результате получим

$$(F - 1)T_s = T_n = T \left[\frac{R_b + r_n}{R_s} + g_n \frac{(R_s + R_b)^2}{R_s} \right]. \quad (13.22)$$

Минимальное значение T_n

$$T_{n0} = T [\beta_{dc}^{-1/2} (1 + 2R_b g_m + R_b^2 g_m^2 / \beta_{dc})^{1/2} + R_b g_m / \beta_{dc}] \quad (13.23)$$

достигается при

$$R_{s0} = \frac{\beta_{dc}^{1/2}}{g_m} (1 + 2R_b g_m + R_b^2 g_m^2 / \beta_{dc})^{1/2}. \quad (13.24)$$

Слагаемые, содержащие $R_6 g_m / \beta_{dc}$, почти всегда пренебрежимо малы. Поэтому (13.23) и (13.24) можно записать в более простом виде:

$$T_{n0} = T \beta_{dc}^{-1/2} (1 + 2R_6 g_m)^{1/2}; \quad (13.25)$$

$$R_{s0} = \frac{\beta_{dc}^{1/2}}{g_m} (1 + 2R_6 g_m)^{1/2}. \quad (13.26)$$

Например, при $R_6 = 200$ Ом и $g_m = 40$ мА/В, соответствующей току $I_K = 1$ мА, имеем $2R_6 g_m = 16$. Следовательно, из-за наличия R_6 как T_{n0} , так и R_{s0} возрастают в 4 раза. Для $\beta_{dc} = 200$ получим $T_{n0} = 80$ К и $F = 1,3$ (или 1 дБ). Если I_K уменьшить до 100 мкА, то T_{n0} снизится до 35 К, а F — до 1,12 (или около 0,5 дБ). Эти данные близки к наилучшим результатам, полученным на практике. Таким образом, дополнительное уменьшение I_K подчеркивает важность токов рекомбинации в переходе эмиттер — база и приводит к уменьшению β_{dc} .

Биполярный транзистор обладает тем специфическим и весьма полезным свойством, что, изменяя коллекторный ток I_K , можно изменять g_m и тем самым подбирать требуемое значение R_{s0} .

Перепишем выражение (13.22) в виде

$$T_n = T \left[\frac{R_6}{R_s} + \frac{1}{2g_m R_s} + \frac{g_m}{2\beta_{dc}} \frac{(R_s + R_6)^2}{R_s} \right], \quad (13.27)$$

считая значения R_6 и R_s фиксированными. Если затем попытаться минимизировать T_n , изменяя g_m , то найдем оптимальное значение g_m , равное

$$g_{m0} = \beta_{dc}^{1/2} / (R_s + R_6). \quad (13.28)$$

При этом

$$T_{n0} = T \left[\frac{R_6}{R_s} + \beta_{dc}^{-1/2} \frac{(R_6 + R_s)}{R_s} \right] \sim T \left(\beta_{dc}^{-1/2} + \frac{R_6}{R_s} \right). \quad (13.29)$$

Так, например, для $R_6 = 200$ Ом и $R_s = 2000$ Ом при $\beta_{dc} = 100$ можно получить $T_{n0} = T/5$, регулируя ток питания транзистора и добиваясь значения $g_m = 1/220$, соответствующего коллекторному току $I_K \approx 100$ мкА.

На более высоких частотах для энергетических спектров ω_v и ω_i вместо (13.16а) и (13.16б) необходимо использовать формулы:

$$\omega_v = \frac{2kT}{g_m} [1 + (f/f_T)^2]; \quad (13.30а)$$

$$\omega_i = 2kT g_m [\beta_{dc}^{-1} + 2(f/f_T)^2]. \quad (13.30б)$$

Высокочастотные эффекты начинают оказываться на частоте:

$$f \sim f_T (2\beta_{dc})^{1/2} \sim f_T / 20. \quad (13.31)$$

Если f заметно превышает это значение, но все-таки значительно меньше, чем f_T , то для определения шумовых параметров можно использовать соотношения (13.23)—(13.26), заменив в них величину β_{dc}^{-1} на $2(f/f_T)^2$. При этом

$$R_{s0} \sim \frac{f_T}{f g_m} \left(\frac{1}{2} + R_0 g_m \right)^{1/2}; \quad (13.32)$$

$$T_{n0} \sim 2T \frac{f}{f_T} \left(\frac{1}{2} + R_0 g_m \right)^{1/2}. \quad (13.33)$$

Так, для $R_0 = 100$ Ом, $I_R = 1$ мА, $g_m = 40$ мА/В, $f_T = 1000$ МГц и $f = 100$ МГц имеем $T_{n0}/T \sim 0,5$ и $F = 1,5$ (или около 1,5 дБ).

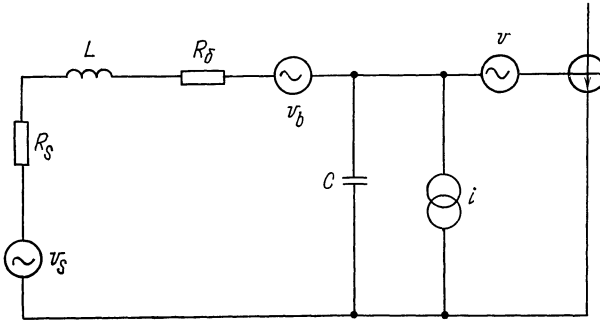


Рис. 13.4. Резонансный транзисторный входной каскад

На высоких частотах входная проводимость имеет в основном емкостный характер:

$$Y = jB = j\omega C = j \frac{f}{f_T} g_m. \quad (13.34)$$

На рис. 13.4 изображена эквивалентная схема каскада с резонансной входной цепью. Если значение L выбрано в соответствии с равенством $\omega^2 LC = 1$, то, используя выражения (13.30а) для ω_v и (13.30б) для ω_i и обозначив $\Theta = f/f_T$, получим для T_n

$$\begin{aligned} \frac{T_n}{T} = & g_m R_0 \Theta^2 (1 + \Theta^2) + \frac{1}{2} R_s g_m \Theta^2 (1 + \Theta^2) + \\ & + \frac{1 + g_m R_0 (1 + \Theta^2) + (1/2) g_m^2 R_0^2 \Theta^2 (1 + \Theta^2)}{g_m R_s (1 + \Theta^2)}. \end{aligned}$$

Минимальное значение T_n равно

$$\begin{aligned} \frac{T_{n0}}{T} = & \Theta \sqrt{2} \left[1 + g_m R_0 (1 + \Theta^2) + \frac{1}{2} g_m^2 R_0^2 \Theta^2 (1 + \Theta^2) \right]^{1/2} + \\ & + g_m R_0 \Theta^2 (1 + \Theta^2). \end{aligned} \quad (13.35)$$

Если Θ меньше 0,5, то нет заметного отличия от результатов, полученных в пренебрежении емкостью C с помощью соотношения

(13.33). Для $\Theta=1$ имеем $T_{n0}/T=\sqrt{2}+(2+\sqrt{2})g_mR_b$, и при $g_mR_b=1$ коэффициент шума составляет 5,8 (или около 8 дБ). Сопротивление базы R_b , несомненно, оказывает существенное влияние на шумовые характеристики на всех частотах (см. также приложение В).

13.3. Каскодная схема

Транзисторы обоих типов являются потенциально неустойчивыми приборами из-за наличия проходной емкости сток—затвор или коллектор—база (эффект Миллера). Поэтому на высоких частотах для нейтрализации этого эффекта обычно используют второй каскад с малым входным сопротивлением. В каскодной схеме, показанной на рис. 13.5,а, второй транзистор T_2 используется в ка-

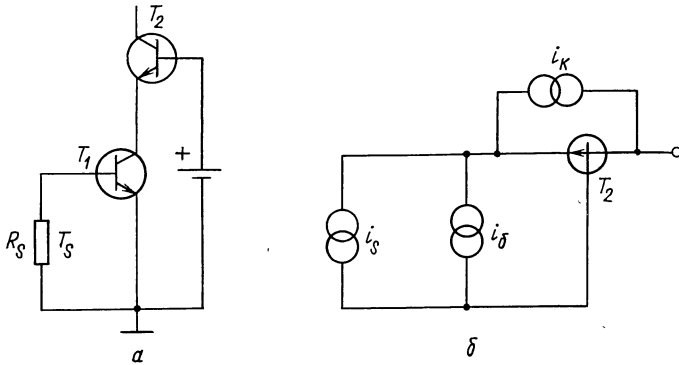


Рис. 13.5. Каскодная схема (а) и эквивалентная шумовая схема для ее второго транзистора T_2 (б)

честве каскада с общей базой. При этом первый транзистор T_1 является для этого каскада источником тока с большим внутренним сопротивлением. Эквивалентная схема с источниками шумов для второго транзистора приведена на рис. 13.5,б. Шумы прибора на этой схеме представлены генераторами тока i_b и i_k , а не генератором напряжения в цепи базы. Выходной ток представляет собой сумму $i_s+i_b+i_k$, а энергетический спектр выходного тока равен $\omega_s+\omega_b+\omega_c$, где $\omega_s=4F_1kT_sR_s g_m^2$, $\omega_b=2eI_b$ и $\omega_c=2eI_k$. Таким образом, $\omega=4F_1kT_sR_s g_m^2+2e(I_b+I_k)=4F_1kT_sR_s g_m^2+2eI_a$ и полный коэффициент шума равен

$$F = F_1 + \frac{2eI_a}{4kT_sR_s g_m^2}. \quad (13.36)$$

В силу того, что ток I_a второго транзистора равен току I_k первого транзистора и $eI_k=kTg_m$, имеем

$$F = F_1 + \frac{1}{2R_s g_m}.$$

Кроме того, если величина R_s оптимизирована, то она намного превышает величину $1/g_m$, и поэтому $F \sim F_1$. Таким образом, коэффициент шума для каскодной схемы ненамного больше, чем для одиночного транзистора T_1 .

Другая схема, которая часто оказывается более приемлемой, изображена на рис. 13.6. Для разнообразия первый каскад выполнен на полевом транзисторе. Если сопротивление нагрузки R_n удовлетворяет условию $R_n \gg f_T R / f$, то полный коэффициент усиления равен приблизительно $g_m R$ и второй каскад эффективно действует как каскад с общей базой, входная проводимость которого равна его взаимной проводимости. При этом опять-таки мы приходим к соотношению (13.36). В данном случае g_m представляет собой взаимную проводимость первого каскада, которая прямо не связана с током I_c . С другой стороны, оптимальное значение сопротивления R_s близко к $f_T / f g_m$, и поэтому

$$F \sim F_1 + \frac{e I_3 f}{2kT_s g_m f_T}. \quad (13.37)$$

Положив, например, $T_s = 300$ К, $I_3 = 1$ мА, $f = f_T / 2$ и $g_m = 5$ мА/В, получим для коэффициента шума величину $F = F_1 + 2$, избыток которой чаще всего неприемлем. Если же первый каскад выполнить на биполярном транзисторе с тем же самым коллекторным током, что и для транзистора T_2 , то получим $F \sim F_1$. Следовательно, если даже полевой транзистор имеет $F_1 = 1,5$, а биполярный $F_1 = 2$, в первом случае будем иметь $F \sim 2$, а во втором $F \sim 3,5$.

13.4. Сравнительный анализ полевых и биполярных транзисторов

На относительно низких частотах шумовая температура биполярных транзисторов составляет в лучшем случае $\beta_{dc}^{1/2} T \sim T/20$, а полевых транзисторов — $T/200$ и даже меньше, особенно для источников сигнала с высоким внутренним сопротивлением. Поэтому в критических ситуациях на частотах от 1 до 10 МГц предпочтение следует отдавать полевым транзисторам. Однако в большинстве случаев, когда различие между $T/20$ и $T/200$ оказывается несущественным, выбор того или иного типа транзистора может быть произведен на основе других соображений, например простоты обеспечения оптимального значения сопротивления источника сигнала, или соображений, непосредственно не относящихся к шумо-

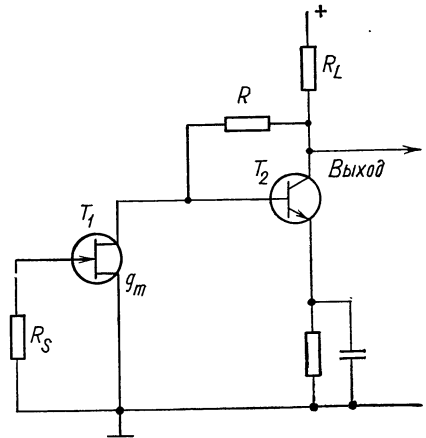


Рис. 13.6. Рассогласованная пара Черри и Хупера

вым характеристикам. Одним из них является соотношение между величиной g_m и постоянным током питания. Как правило, для полевого транзистора требуется в 50 раз больший ток питания, чем для биполярного, при одном и том же значении g_m .

Шумовая температура транзисторов обоих типов возрастает по мере приближения частоты f к значению f_T . Однако в полевых транзисторах возрастание шумовой температуры начинается на частотах, более близких к f_T , чем в биполярных транзисторах. Поэтому подлинные значения шумовых температур транзисторов разных типов оказываются сравнимыми при различных отношениях f к f_T . К примеру, полевой транзистор при $f \approx f_T/2$ имеет такие же плохие шумовые характеристики, как и биполярный при $f = f_T/10$. На частотах выше f_T шумовые параметры обоих транзисторов очень быстро ухудшаются. Ввиду того, что полевые транзисторы со значением f_T , превышающим приблизительно 200 МГц, стоят дорого, тогда как биполярные транзисторы с f_T вплоть до 2000 МГц относительно дешевы, на частотах выше 100 МГц стремятся применять чаще всего биполярные транзисторы. На частотах выше 500 МГц биполярные транзисторы являются единственно используемыми приборами.

К моменту окончания написания этой книги появилось сообщение [2] о достижении коэффициента шума 5 дБ на частоте 10 000 МГц и 2 дБ на частоте 2000 МГц с помощью полевых транзисторов, в которых канал выполнен из арсенида галлия и использован затвор типа барьера Шоттки. Арсенид галлия имеет большую подвижность носителей, чем кремний, и поэтому меньший перемещающийся заряд в канале требуется для обеспечения той же самой проводимости. Уменьшение заряда приводит к уменьшению емкости затвор — канал и тем самым к увеличению $f_T = g_m / (2\pi C)$. В то же время биполярные транзисторы с $f_T \approx 5000$ МГц стали дешевле и более доступны. Таким образом, за небольшой промежуток времени верхний предел рабочих частот транзисторов обоого типа существенно возрос.

Электронные лампы являются, вообще говоря, более шумящими приборами, чем транзисторы любого типа, тем не менее они обладают приемлемыми шумовыми характеристиками ($T < 300$ К) на частотах приблизительно до 100 МГц. Электронные лампы имеют одно главное преимущество: они устойчивы к воздействиям кратковременных перегрузок. Усилитель на электронных лампах, способный сохранять шумовую температуру 300 К, при неблагоприятных окружающих условиях может оказаться предпочтительнее по сравнению с транзисторным усилителем, шумовая температура которого в этих условиях быстро возрастает от 30 до 3000 К.

В заключение заметим, что во многих случаях шумовую температуру 1000 К можно считать вполне приемлемой. В этих случаях разработка более совершенного устройства с намного меньшей шумовой температурой будет напрасной тратой времени и усилий.

НИЗКОЧАСТОТНЫЕ УСИЛИТЕЛИ

14.1. Полевые транзисторы

Интенсивность шума в канальном токе плоскостного полевого транзистора возрастает по мере уменьшения частоты и обычно удваивается на частоте 25 кГц. Эквивалентная схема усилительного каскада с внутренним сопротивлением R_s источника сигнала показана на рис. 14.1. Энергетические спектры трех источников шума определяются следующими соотношениями:

$$\omega_s = 4kT_s R_s; \quad (14.1a)$$

$$\omega_i = 2eI_3 = 4kTg_n; \quad (14.1б)$$

$$\omega_v = \frac{8}{3} \frac{kT}{g_m} \left(1 + \frac{f_0}{f}\right) = 4kT r_n, \quad (14.1в)$$

где f_0 — частота, на которой начинает существенно проявляться фликкер-шум.

Оптимальное сопротивление источника сигнала равно

$$R_{s0} = \left(\frac{r_n}{g_n}\right)^{1/2} = \left(\frac{4kT}{3eI_3 g_m}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{f_0}{f}\right)^{1/2}, \quad (14.2)$$

а оптимальная шумовая температура

$$T_{n0} = 2T (r_n g_n)^{1/2} = T \left(\frac{4eI_3}{3kT g_m}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{f_0}{f}\right)^{1/2}. \quad (14.3)$$

Характерные значения I_3 и g_m для малошумящих приборов равны соответственно 10^{-11} А и 5 мА/В, так что

$$R_{s0} \sim 10^6 \left(1 + \frac{f_0}{f}\right)^{1/2} \text{ Ом}. \quad (14.4)$$

При $f_0 = 25 \cdot 10^3$ Гц и $f = 10$ Гц имеем $R_{s0} \approx 5 \cdot 10^7$ Ом. Как правило, сопротивление источника сигнала бывает меньше этого значения, и, как будет показано в разд. 14.3, возможность трансформировать R_s до такого большого значения отсутствует. Поэтому будем считать, что $R_s \ll R_{s0}$, а при этом

$$T_n \sim T \cdot \frac{r_n}{R_s} = \frac{2T}{3R_s g_m} \left(1 + \frac{f_0}{f}\right). \quad (14.5a)$$

Если $g_m = 5$ мА/В и $f_0 = 25 \cdot 10^3$ Гц, то

$$\frac{T_n}{T} \sim \frac{3 \cdot 10^6}{R_s f}. \quad (14.5б)$$

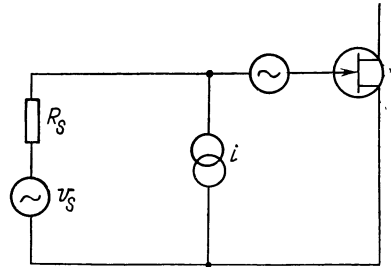
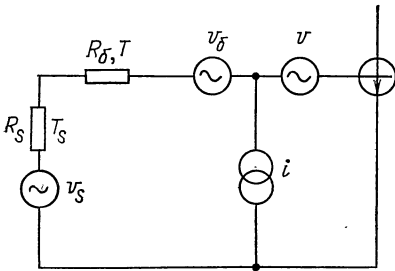


Рис. 14.1. Входной каскад на полевом транзисторе

Таким образом, при $R_s=10^6$ Ом и $f=10$ Гц получим $T_n/T \sim 0,3$ и $F=1,3$. Если же $R_s=3000$ Ом, то $T_n/T \approx 100$ и $F \approx 100$. Легко видеть, что малозумящее усиление на низких звуковых частотах осуществимо лишь при больших значениях R_s .

14.2. Биполярные транзисторы

В этих приборах дополнительный низкочастотный шум связан с током базы. Энергетические спектры генераторов шума, показанных на рис. 14.2, равны:



$$\omega_s = 4kT_s R_s; \quad (14.6a)$$

$$\omega_{v_б} = 4kTR_б; \quad (14.6б)$$

$$\omega_v = \frac{2kT}{g_m} = 4kTr_n; \quad (14.6в)$$

$$\omega_i = \frac{2kTg_m}{\beta_{dc}} \left(1 + \frac{f_0}{f}\right) = 4kTg_n. \quad (14.6г)$$

Рис. 14.2. Входной каскад на биполярном транзисторе

Шумовая температура определяется соотношением

$$T_n = T \left[\frac{R_б}{R_s} + \frac{r_n}{R_s} + \frac{(R_s + R_б)^2}{R_s} g_n \right], \quad (14.7)$$

которое можно представить в форме

$$T_n = T \left[\frac{R_б}{R_s} + \frac{1}{2g_m R_s} + \frac{(R_s + R_б)^2}{2\beta_{dc} R_s} g_m + \frac{(R_s + R_б)^2 f_0}{2\beta_{dc} R_s f} g_m \right]. \quad (14.8)$$

Как видно, независимо от тока питания и величины g_m составляющая избыточного шума всегда минимальна при $R_s=R_б$. Однако следует заметить, что при $R_s=R_б$ имеем $T_n > T$. Минимум шумовой температуры будет при

$$R_{s0} = \frac{\beta_{dc}^{1/2}}{g_m} \left(\frac{1 + 2R_б g_m}{1 + f_0/f} + R_б^2 g_m^2 \beta_{dc}^{-1} \right) \quad (14.9)$$

и

$$\frac{T_{n0}}{T} = \left(1 + \frac{f_0}{f}\right) R_б \frac{g_m}{\beta_{dc}} + \beta_{dc}^{-1/2} \left\{ \left(1 + \frac{f_0}{f}\right) \left[1 + 2R_б g_m + \dots\right] + \left(1 + \frac{f_0}{f}\right) R_б^2 g_m^2 \beta_{dc}^{-1} \right\}^{1/2}. \quad (14.10)$$

Отметим, что значение T_{n0} уменьшается по мере того, как коллекторный ток I_k и g_m , уменьшаясь, стремятся к наименьшему воз-

можному значению, совпадающему с высоким значением β_{dc} . Например, транзистор ВСУ-71А *p-n-p*-типа имеет $\beta_{dc} \approx 100$ при $I_K = 10$ мкА и $g_m = 400$ мкА/В, а так как для этого транзистора $R_6 = 200$ Ом и $f_0 = 1000$ Гц, то можно пренебречь всеми содержащими R_6 слагаемыми на частотах порядка нескольких единиц герц. При этом

$$R_{s0} \sim \frac{\beta_{dc}^{1/2}}{g_m} \left(1 + \frac{f_0}{f}\right)^{1/2} \sim 2,5 \cdot 10^4 \left(1 + \frac{1000}{f}\right)^{1/2} \text{ Ом} \quad (14.11a),$$

и

$$\frac{T_{n0}}{T} \sim \left(\frac{1 + f_0/f}{\beta_{dc}}\right)^{1/2} \sim \frac{1}{10} \left(1 + \frac{1000}{f}\right)^{1/2}. \quad (14.11b),$$

Для частоты 10 Гц из этих соотношений следует $R_{s0} \approx 2500$ Ом и $T_{n0} \approx T$ или $F \approx 2$. При том же самом сопротивлении источника сигнала для полевого транзистора мы имели бы $F \approx 100$.

Для фиксированного значения R_s величину T_n можно минимизировать, изменяя ток питания транзистора и добиваясь такого значения:

$$g_m = \left(\frac{\beta_{dc}}{1 + f_0/f}\right)^{1/2} (R_s + R_6)^{-1}, \quad (14.12),$$

при котором

$$\frac{T_n}{T} = \frac{R_6}{R_s} + \frac{R_6 + R_s}{R_s} \left(\frac{1 + f_0/f}{\beta_{dc}}\right)^{1/2}. \quad (14.13),$$

Для $R_6 = 200$ Ом, $R_s = 100$ Ом, $\beta_{dc} = 100$ и $f_0/f = 100$ имеем $g_m \approx 3$ мА/В, что соответствует току $I_K = 75$ мкА. При этом $T_n/T = 5$ или $F = 6$.

14.3. Трансформаторы на низких частотах

На средних и высоких частотах обычно удается создать трансформатор с малыми потерями, который может обеспечить любое требуемое значение сопротивления источника сигнала. Однако на низких частотах это трудно выполнимо. На рис. 14.3 изображен источник сигнала v_s с внутренним сопротивлением R_s , соединенный с трансформатором, первичная и вторичная обмотки которого характеризуются индуктивностями L_1 и L_2 соответственно. Трансформатор считается идеальным в том смысле, что сопротивления его обмоток пренебрежимо малы и первичный магнитный поток полностью связан с вто-

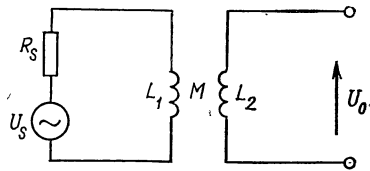


Рис. 14.3. Трансформатор с источником сигнала, имеющим внутреннее сопротивление R_s

ричным потоком, так что $M^2=L_1L_2$. Выходное сопротивление равно

$$R=R_s \left(\frac{U_0}{U_s} \right)^2 = \frac{R_s \omega^2 M^2}{R_s^2 + \omega^2 L_1^2} = \frac{R_s \omega^2 L_1 L_2}{R_s^2 + \omega^2 L_1^2}$$

и увеличивается с ростом L_2 . Допустим, что значение L_2 уже выбрано настолько большим, насколько это реализуемо на практике. В этом случае R достигает максимума, если число витков первичной обмотки выбрано из условия $\omega L_1=R_s$. Максимальное значение R равно

$$R=\omega L_2/2. \quad (14.14)$$

Предположим, что на частоте 10 Гц требуется получить $R=3$ МОм. Для этого необходимо иметь $L_2=10^5$ Гн — это граница осуществимости. Типичный небольшой микрофонный трансформатор имеет $L_2=300$ Гн. Таким образом, при разработке малoshумящих низкочастотных усилителей не удастся трансформировать сопротивление источника до значения, при котором реализуются хорошие шумовые характеристики, присущие полевым транзисторам. Хотя при $R_s \approx 50$ МОм полевой транзистор может обеспечить $T_n \approx 10$ К на частоте 10 Гц, это представляет академический интерес, если фактическое сопротивление источника составляет 1 кОм. При таком сопротивлении лучше использовать биполярный транзистор, который в соответствии с (14.13) дает $T_n \approx 1,4$, $T \approx 400$ К, тогда как из (14.5) для полевого транзистора следует $T_n \approx 300$, $T \approx 90\,000$ К.

14.4. Заключение

Существующие полевые и биполярные транзисторы позволяют достичь малoshумящего усиления на низких частотах как при очень больших, так и при умеренных (нескольких тысяч Ом) значениях сопротивления источника сигнала. Однако в усилителях имеются другие элементы, которые могут генерировать шум под воздействием напряжения постоянного тока. Интенсивно шумят некоторые типы резисторов, особенно угольные, поэтому следует избегать их применения. Изготовители резисторов обычно указывают среднеквадратичное значение генерируемого шумового напряжения, отнесенное к величине приложенного напряжения постоянного тока. Типичное значение этого параметра, относящегося к полному интегральному низкочастотному шуму, составляет 0,1 мкВ/В. Для того чтобы получить представление о порядке величины этого параметра, укажем, что среднеквадратичное значение напряжения теплового шума в полосе 1 Гц для сопротивления 1 МОм при температуре 300 К составляет также около 0,1 мкВ.

Как и следовало ожидать, шумят также электролитические конденсаторы, термисторы и зенеровские диоды, но несколько неожиданно то, что генерировать шум могут и такие элементы, как дисковые керамические конденсаторы. Следовательно, при проектировании малoshумящих низкочастотных усилителей следует проявлять повышенное внимание к выбору как активных приборов, так и всех других элементов.

ЭЛЕКТРОННО-ЛУЧЕВЫЕ УСИЛИТЕЛИ**15.1. Введение**

На частотах выше 1 ГГц осуществление малощумящего усиления с помощью транзисторов или обычных электронных ламп постепенно становится все более затруднительным, и в тех случаях, когда шумовые характеристики оказываются решающими, необходимо применять параметрические усилители или мазеры, которые рассмотрим в последующих двух главах. Тем не менее существует область применений, для которой коэффициент шума 3—10 дБ считается допустимым и могут быть использованы электронно-лучевые усилители, особенно лампы бегущей или обратной волны. Такие усилители характеризуются широкой полосой пропускания (произведение коэффициента усиления на ширину полосы пропускания для лампы бегущей волны обычно превышает 10^5 МГц) и высокой устойчивостью к перегрузкам.

Электронно-лучевые усилители могут быть разделены на два обширных класса: усилители, в которых высокочастотная цепь взаимодействует с продольными волнами пространственного заряда в электронном пучке, и усилители, в которых взаимодействие высокочастотной цепи осуществляется с поперечными циклотронными волнами. Лампа бегущей волны (ЛБВ) принадлежит к первому классу, а лампа Адлера [1] — ко второму.

15.2. Коэффициент усиления в лампах с продольной волной пространственного заряда

Механизм усиления во всех лампах с продольной волной пространственного заряда, будь то клистроны или ЛБВ, по существу один и тот же и может быть рассмотрен на основе понятия о двух волнах пространственного заряда в электронном пучке, имеющем однородную скорость дрейфа v_0 . Одна из этих волн распространяется несколько быстрее, а другая несколько медленнее, чем дрейфующий пучок электронов. Эти волны подобны волнам сжатия или звуковым волнам в потоке жидкости, перемещающейся со сверхзвуковой скоростью. В быстрой волне пространственного заряда уплотнения и глубина модуляции скорости находятся в фазе, и пучок с быстрой волной имеет увеличенную энергию. В медленной же волне уплотнения и модуляция скорости происходят в противофазе, и пучок теряет свою энергию. Если пучок электронов со средней скоростью дрейфа v_0 и средним током I_0 несет волны пространственного заряда с малой глубиной модуляции скорости v_1 и глубиной модуляции тока I_1 , то переносимая этим пучком мощность сигнала равна $(mv_0/e) v_1 I_1$ [7]. Величины v_1 и I_1 связаны, в свою очередь, с амплитудами быстрой a_2 и медленной a_3 волн пространственного заряда. При соответствующей нормировке

имеем

$$I_1 = Z^{-1/2} (a_2 + a_3); \quad (15.1a)$$

$$\frac{mv_0}{e} v_1 = Z^{1/2} (a_2 - a_3), \quad (15.1b)$$

где Z — параметр, зависящий от частоты, I_0 и v_0 . Средняя мощность, выраженная через среднеквадратичные значения, равна

$$P = \operatorname{Re} \left(\frac{mv_0}{e} v_1 I_1^* \right) = a_2 a_2^* - a_3 a_3^*. \quad (15.2)$$

Быстрая волна характеризуется положительной энергией, а медленная — отрицательной. Если пучок дрейфует в свободном пространстве или под действием ускоряющего статического поля, то значение P остается неизменным. Если же пучок взаимодействует с высокочастотной цепью, то энергия может либо отбираться пучком из цепи, либо, наоборот, передаваться из пучка в цепь.

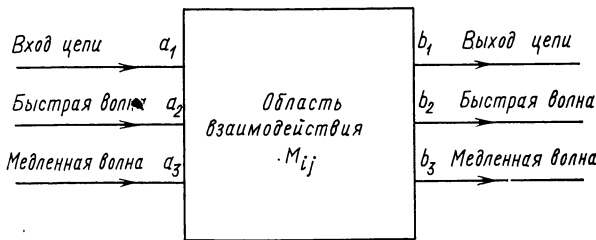


Рис. 15.1. Электронно-лучевой усилитель в обобщенном виде

На рис. 15.1 показан наиболее обобщенный вид электронно-лучевого усилителя. Электронный пучок с амплитудами волн пространственного заряда a_2 и a_3 и энергия высокочастотной цепи $a_1 a_1^*$ (нормированная амплитуда электромагнитной волны a_1) входят в область взаимодействия. Выходящие из этой области волны имеют амплитуды b_1 , b_2 и b_3 . Коэффициент усиления по мощности для высокочастотной цепи равен $b_1 b^*_{11} / a_1 a^*_{11}$. Если это отношение больше единицы, то это означает, что либо стала меньше амплитуда быстрой волны, либо увеличилась амплитуда медленной волны. Иначе говоря, должен соблюдаться баланс мощностей

$$b_1 b^*_{11} + b_2 b^*_{22} - b_3 b^*_{33} = a_1 a^*_{11} + a_2 a^*_{22} - a_3 a^*_{33}. \quad (15.3)$$

Эффект взаимодействия можно описать с помощью квадратной матрицы, содержащей девять элементов M_{ij} :

$$b_i = \sum_j M_{ij} a_j. \quad (15.4)$$

Считая a и b матрицами-столбцами, перепишем (15.4) в матричной форме:

$$b = Ma. \quad (15.5)$$

Введя эрмитово-сопряженные с a и b матрицы-столбцы a^+ и b^+ (т. е. транспонированные матрицы с комплексно-сопряженными элементами) и диагональную матрицу:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

перепишем выражение (15.3) в виде $b^+Pb = a^+Pa$. Но $b^+ = a^+M^+$ и $b = Ma$, поэтому в силу произвольности a имеем

$$M^+PM = P. \quad (15.6)$$

Это соотношение накладывает ряд ограничений на вид элементов матрицы M . Детерминант матрицы P отличен от нуля, поэтому и детерминант матрицы M не должен быть равен нулю. Иначе говоря, M должна быть обратимой матрицей. Учитывая, кроме того, что $P = P^{-1}$, и проведя ряд преобразований $M^+P = PM^{-1}$, $MPM^+P = MP^2M^{-1} = MM^{-1} = 1$, $MPM^+ = P^{-1}$, получим

$$MPM^+ = P. \quad (15.7)$$

Из этого матричного уравнения следует $M_{11}M^*_{11} + M_{12}M^*_{12} - M_{13}M^*_{13} = 1$. Величина $M_{11}M^*_{11}$ представляет собой коэффициент усиления мощности G , и поэтому

$$M_{13}M^*_{13} = G - 1 + M_{12}M_{12}. \quad (15.8)$$

При большом коэффициенте усиления G оказывается большим и коэффициент M_{13} . Коэффициент M_{13} характеризует прохождение шума, который имеется во входной медленной волне пространственного заряда, на выход усилителя. Любой шум, связанный с этой волной, попадает на выход усиленным. Далее, шум в медленной волне пространственного заряда приводит к уменьшению энергии электронного пучка. Этот шум можно устранить только добавлением энергии коррелированного шума от внешнего источника, что не представляется возможным, или переносом тем или иным образом энергии коррелированного шума из быстрой волны в медленную. Шум, содержащийся в медленной волне, определяет нижний предел коэффициента шума электронно-лучевого усилителя.

Приведенное описание возмущений в электронном потоке справедливо, если только скорость электронов в пучке будет однозначной функцией положения и времени. Тем не менее можно показать, что это условие оказывается очень хорошим приближением даже для пучков, в которых электроны разбросаны по скоростям относительно среднего значения v_0 , если только средний квадрат разброса скоростей удовлетворяет условию $\langle \Delta v^2 \rangle \langle (\omega_q/\omega) v^2 \rangle$, где ω — частота рассматриваемых волновых составляющих, а ω_q — эффективная плазменная частота. Величина $\langle \Delta v^2 \rangle$ является мерой интенсивности взаимодействий в пространственном заряде, которые уменьшают хаотичность электронного потока. Для электронов, только что вышедших из катода при тем-

пературе T_c и ускоряемых напряжением U , это критическое условие имеет вид $kT_c < (\omega_q/\omega) eU$. Для электронных пучков, используемых в сверхвысокочастотных лампах, оно удовлетворяется при $U > 1$ В. Таким образом, волновое описание обосновано для электронного пучка на всем протяжении лампы, включая точку, расположенную вблизи катода. Полагая, что эта точка представляет собой вход в область взаимодействия и принимая во внимание соотношение $b_1 = M_{11}a_1 + M_{12}a_2 + M_{13}a_3$, шум на выходе усиления можно выразить через энергетические спектры ω_1 , ω_2 , ω_3 и ω_{32} падающей электромагнитной волны и волн пространственного заряда на входе. Энергетический спектр волны b_1 определяется соотношением

$$W = M_{11}M^*_{11}\omega_1 + M_{12}M^*_{12}\omega_2 + \\ + M_{13}M^*_{13}\omega_3 + M^*_{12}M_{13}\omega_{32} + M_{12}M^*_{13}\omega_{32},$$

из которого вытекает выражение для коэффициента шума:

$$F = 1 + \frac{M_{12}M^*_{12}\omega_2 + M_{13}M^*_{13}\omega_3 + M_{12}M^*_{13}\omega_{32} + M^*_{12}M_{13}\omega_{32}}{G\omega_1}, \quad (15.9)$$

где величина $M_{11}M^*_{11}$ заменена коэффициентом усиления G . Представляя все входящие в (15.9) комплексные величины в показательной форме, например $M_{12} \rightarrow M_{12} \exp j\Theta_{12}$; $\omega_{32} \rightarrow \omega_{32} \exp j\varphi_{32}$ и т. д., получим

$$G\omega_1(F-1) = M^2_{12}\omega_2 + M^2_{13}\omega_3 + \\ + 2M_{12}M_{13}\omega_{32} \cos(\Theta_{12} - \Theta_{13} + \varphi_{32}).$$

На аргументы коэффициентов M_{12} и M_{13} не накладывается никаких ограничений, и поэтому их можно взять такими (за счет соответствующего изменения высокочастотной цепи), чтобы $\Theta_{12} - \Theta_{13} + \varphi_{32} = \pi$. В этом случае

$$G\omega_1(F-1) = M^2_{12}\omega_2 + M^2_{13}\omega_3 - 2M_{12}M_{13}\omega_{32}. \quad (15.10)$$

Нас будет интересовать минимальное значение правой части выражения (15.10) при заданном значении G и известных энергетических спектрах. Коэффициенты M_{12} и M_{13} при этом рассматриваются как переменные, удовлетворяющие соотношению (15.8), которое с учетом выбранных фазовых соотношений принимает вид $M^2_{13} = G - 1 + M^2_{12}$. Результат выразим через шумовые параметры:

$$S = [(\omega_2 + \omega_3)^2 - 4\omega^2_{32}]^{1/2}; \quad (15.11)$$

$$\Pi = \omega_2 - \omega_3.$$

Окончательно для минимального коэффициента шума имеем

$$F - 1 = \frac{G - 1}{G} \frac{S - \Pi}{2\omega_1}. \quad (15.12)$$

Нетрудно заметить, что как F , так и мера шума

$$M = \frac{F - 1}{1 - 1/G} = \frac{S - \Pi}{2\omega_1} \quad (15.13)$$

имеют фиксированное значение при неизменном содержании шума $(S - \Pi)$ в том месте пучка, откуда начинает распространяться волна пространственного заряда.

Из выражений (15.1а) и (15.1б) следуют соотношения

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \left(Z^{1/2} I_1 + \frac{mv_0}{e} Z^{-1/2} v_1 \right);$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2} \left(Z^{1/2} I_1 - \frac{mv_0}{e} Z^{-1/2} v_1 \right),$$

которые можно использовать для того, чтобы выразить ω_2 , ω_3 и ω_{32} или S и Π через энергетические спектры I_1 и v_1 . В результате получим

$$S = \frac{mv_0}{e} [4\omega_i\omega_v + (\omega_{iv} - \omega_{iv}^*)^2]^{1/2};$$

$$\Pi = \frac{mv_0}{2e} (\omega_{iv} + \omega_{iv}^*). \quad (15.14)$$

При этом значения ω_i , ω_v и ω_{iv} должны быть рассчитаны для точки, находящейся вблизи катода. Этот вопрос обсуждается в следующем параграфе.

15.3. Содержание шума в электронном пучке

Состояние электронного потока, находящегося в непосредственной близости к катоду, оказывается весьма сложным. Скорость электронов в таком потоке не бывает однозначной функцией времени и положения. Заметно проявляется максвелловское распределение тепловых скоростей и усиливаются взаимодействия в пространственном заряде. В связи с этим для определения ω_i , ω_v и ω_{iv} приходится вводить весьма существенные допущения. Существует в основном два крайних подхода. В первом подходе полагают, что взаимодействия в пространственном заряде в прикатодной области пренебрежимо слабы, а электроны прибывают к входной плоскости области взаимодействия взаимно независимо и случайным образом. При втором подходе условия в области катода считаются квазистатическими, что дает возможность использовать трактовку сглаживания пространственным зарядом [46].

В соответствии с первым подходом можно использовать результаты, полученные в разд. 5.4. Для плоскости, где потенциал относительно катода имеет значение $U = \alpha kT_c / e$, получим

$$\omega_i = 2eI_0; \quad \omega_{iv} = 0; \quad \omega_v = \frac{4ekT_c}{mI_0} f(\alpha), \quad (15.15)$$

так что $\Pi = 0$, а

$$S = \frac{mv_0}{e} (\omega_i\omega_v) = [2mv_0^2 kT_c 4f(\alpha)]^{1/2} = 2kT_c [4(1 + \alpha)f(\alpha)]^{1/2}. \quad (15.16)$$

Функция $4(1 + \alpha)f(\alpha)$ равномерно увеличивается от $0,86 = 4 - \pi$ до единицы с увеличением α от нуля до бесконечности. Поэтому, используя очень хорошее приближение $S = 2kT_c$ и учитывая очевидное соотношение $\omega_1 = kT$, где T — температура источника сигнала,

легко найти, что

$$F \sim 1 + T_c / T, \quad (15.17a)$$

$$T_n \sim T_c. \quad (15.17b)$$

Согласно второму подходу флуктуации тока в значительной мере уменьшаются за счет сглаживания пространственным зарядом, и поэтому [35]

$$\omega_i = \Gamma^2 2eI_0 = 9 \frac{f(0)}{1 + \alpha} 2eI_0.$$

Величина ω_v определяется все тем же соотношением (15.15), но в связи с тем, что увеличенный ток связан с увеличенной эмиссией быстрых электронов, флуктуации тока и напряжения почти полностью взаимно коррелированы, так что $\omega_{iv} = (\omega_i \omega_v^*)^{1/2}$ будет действительной величиной. В результате

$$S = \Pi = \frac{mv_0}{e} (\omega_i \omega_v)^{1/2} = 12kT_c [f(\alpha) f(0)]^{1/2}. \quad (15.18)$$

Заметим, что если значение $\alpha = eU / kT_c$ невелико, то величина S оказывается почти такой же, как и определенная по формуле (15.16). Однако содержание шума ($S - \Pi$) почти равно нулю. Следовательно, вклад шумов электронного пучка в шумы лампы также близок к нулю. Применимость полученных результатов на практике мы обсудим в последнем параграфе.

15.4. Лампа Адлера

Несмотря на то, что лампа Адлера¹ не получила широкого применения, она представляет определенный интерес, так как на ней можно продемонстрировать, по крайней мере в принципе, возможность получения почти бесшумного усиления в электронно-лучевых усилителях. В этом приборе, схематически изображенном на рис. 15.2, пространственным зарядом в слаботочном низковольт-

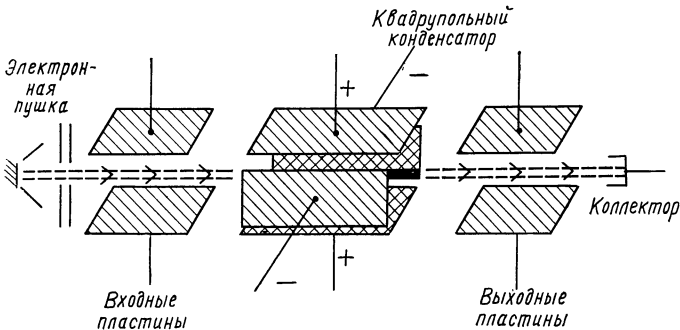


Рис. 15.2. Лампа Адлера

¹ В отечественной научно-технической литературе лампа Адлера известна под названиями «электронно-лучевой параметрический усилитель» и «квадрупольный усилитель». — Прим. ред.

ном электронном пучке можно практически пренебречь. Лампа помещается в продольное, направленное параллельно пучку, магнитное поле B , подобранное таким образом, чтобы частота сигнала f совпадала с циклотронной частотой $f_c = eB / (2\pi m)$. Сигнал подводится к первой паре пластин, и если их длина и ток пучка выбраны правильно, то вся мощность входного сигнала перейдет в пучок и заставит электроны двигаться по спирали вокруг оси. После этого пучок входит в область усиления, представляющую собой квадрупольный конденсатор, который возбуждается внешним генератором с частотой $2f_c$. В этой области амплитуда спиралеобразного движения электронов возрастает, сохраняя пропорциональность по отношению к исходному движению, вызванному входным сигналом на входных пластинах. Вышедший из квадрупольного конденсатора пучок отдает свою энергию выходным пластинам.

Ввиду того, что все активные цепи связаны только с поперечным движением электронов, флуктуации продольных тока и скорости не приводят к возникновению шума на выходе лампы. Шумовая температура определяется исключительно флуктуацией поперечной скорости пучка в том месте, где он входит в первую пару пластин. Нетрудно показать, что эффективная шумовая температура будет приблизительно равна $mv^2/2k$, где v^2 — средний квадрат разброса поперечных скоростей. Эта величина определяется не только температурой катода, но и углом раскрыва коллиматора, используемого в электронной пушке. Для малых углов раскрыва 2Θ имеем $v^2 \sim (1/3)\Theta^2 v_0^2$, где v_0 — продольная скорость пучка, откуда следует, что $kT_n \sim (2/3)\Theta^2 eU_0$, где U_0 — ускоряющее напряжение постоянного тока. При $U_0 = 6$ В и $\Theta = 1/20$ рад (или $2,8^\circ$) получим $T_n \approx 100$ К.

Дополнительная коллимация электронного пучка приводит к снижению T_n , и практический предел T_n определяется лишь необходимостью иметь достаточную величину (несколько микроампер) тока пучка. К сожалению, это требование не тривиально и поэтому заметно затрудняет разработку ламп Адлера, особенно на частотах выше 1 ГГц. К тому же для этих ламп требуется источник энергии накачки на частоте $2f_c$, а с точки зрения экономичности, лучше использовать такой источник в сочетании с параметрическим усилителем. Однако лампа Адлера имеет одно практически важное свойство: она не только устойчива к перегрузкам, но и защищает от них последующие усилительные каскады, действуя как ограничитель мощности.

15.5. Лампы бегущей волны

Хотя соображения, обсуждаемые в разд. 15.3, применимы ко всем лампам с продольным электронным пучком, на практике же минимальные коэффициенты шума, приближающиеся к теоретическому пределу, могут быть получены только на лампе бегущей волны (ЛБВ) и ее ближайшем аналоге — лампе обратной волны (ЛОВ). Причина этого заключается по сути дела в том, что в лам-

пах этих двух типов осуществляется сильное взаимодействие между электронным пучком и высокочастотной цепью. За счет этого можно получить большой коэффициент усиления при весьма малых токах пучка: порядка нескольких сотен микроампер.

Далее, полученные соотношения для нижнего предела шумовых характеристик, достижимого при термокатоде, не учитывают никаких ухудшений свойств электронного пучка, вызываемых плохой электронной оптикой. Любой процесс, сводящийся к перехватыванию части пучка или появлению дополнительного разброса осевых составляющих скоростей электронов, вызывает значительное увеличение шумов в электронном пучке. Эти эффекты легко устраняются только при малых токах пучка, сформированного с помощью относительно простой электронно-оптической системы. Вот почему предельные шумовые характеристики достигаются только в слаботочных приборах, к которым и относится ЛБВ.

Вычисление шумового содержания электронного пучка без учета взаимодействий в пространственном заряде вблизи катода дает $S \sim 2kT_c$, $\Pi = 0$ и $T_n \sim T_c$. При температуре катода $T_c \approx 900$ К это соответствует коэффициенту шума $F = 4$ (или 6 дБ) по отношению к источнику сигнала, находящемуся при температуре 293 К. Большинство простых малощумящих ЛБВ фактически имеют коэффициент шума такого порядка. Более того, непосредственные измерения шумов электронного пучка подтверждают, что $S \sim 2kT_c$.

Вместе с тем можно рассмотреть лампы с уменьшенными значениями F вплоть до $F \approx 2,5$, что соответствует $T_n \approx 450$ К. При таких значениях шумовых параметров уже нельзя пренебрегать шумом, генерируемым высокочастотной цепью за счет омических потерь. Поэтому вклад в величину T_n от шума электронного пучка несомненно меньше, чем 450 К, и наиболее вероятное значение этого вклада $300 \text{ К} \sim T_c/3$. Очевидно, в таких лампах сглаживание пространственным зарядом вблизи катода играет значительную роль. Это можно подтвердить двояко. Во-первых, непосредственным измерением значения величины S установлено, что она незначительно изменяется в малощумящих электронных пучках. Следовательно, уменьшение значения $kT_n = 1/2 (S - \Pi)$ может происходить только за счет увеличения Π . Как было показано выше, это возможно при эффективном сглаживании пространственным зарядом. Во-вторых, все приборы, в которых достигаются малощумящие характеристики, работают с электронными пучками, создаваемыми катодами, имеющими весьма малую поверхность. Это означает, что плотность тока вблизи катода будет большой, а следовательно, будет выше плазменная частота ω_q в этой области. Поскольку переход от истинно высокочастотного режима, при котором сглаживание пространственным зарядом не действует, к квазистатическому режиму, при котором сглаживание проявляется, зависит от отношения ω/ω_q , увеличение плазменной частоты ω_q приводит к повышению эффективности сглаживающих процессов на любой данной частоте.

Имеются ЛБВ с коэффициентом шума F вплоть до 3,5 дБ в диапазоне частот 1—3 ГГц, а ЛБВ с $F \approx 7$ дБ в том же диапазоне доступны при гораздо меньшей стоимости. Значения F увеличиваются с частотой; 10 дБ является типичным значением на частоте 20 ГГц. Конечно, приведенные цифры, соответствующие шумовым температурам порядка сотен или тысяч градусов по Кельвину, не идут ни в какое сравнение с результатами, достигаемыми с помощью параметрических усилителей или, если охлаждение до 4 К не является препятствием, то и мазеров. Однако они могут быть приемлемыми во многих случаях. Следует отметить также, что ЛБВ помимо электрической прочности отличаются необыкновенно широкой полосой пропускания. В то время как для любого другого прибора коэффициент усиления по напряжению 10 (по мощности 20 дБ) в полосе частот пропускания 100 МГц оценивается как значительное достижение, для ЛБВ затруднительно получить тот же самый коэффициент усиления в узкой полосе частот. Полоса частот ± 1000 МГц с центральной частотой 4000 МГц является более чем типичным примером. Если сравнить значения произведения коэффициента усиления на ширину полосы пропускания для ЛБВ (20 000 МГц), хорошего биполярного транзистора (около 2000 МГц) и полевого транзистора или триода (обычно 200 МГц), то можно заметить существенное преимущество ЛБВ перед любым другим усилительным прибором.

ГЛАВА 16

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ УСИЛИТЕЛИ

16.1. Введение

В цепи, содержащей нелинейный реактивный элемент, возбуждаемый несколькими колебаниями с различными частотами, будут возникать колебания с комбинационными частотами. При определенных условиях может оказаться, что для одной из частот возбуждения, скажем, ω_1 , мощность возникающих колебаний с той же частотой превышает мощность, отдаваемую источником возбуждения в цепь. Такая система называется усилителем.

Параметрические явления в механических системах известны со времени Рэлея. Однако в качестве потенциальных источников усиления эти явления не рассматривались, хотя и было давно известно, что они играют значительную роль в некоторых процессах, протекающих в твердом теле. Использовать параметрические явления в целях усиления впервые предложил Сул [45], который занимался их изучением при исследовании ферромагнитного резонанса. На основе этого частного вида параметрических явлений не были созданы практические устройства. Параметрические усилители, разрабатываемые в настоящее время, почти исключительно основаны на использовании нелинейной зависимости между

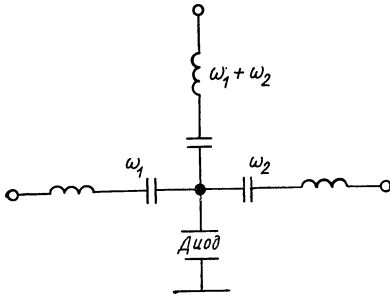


Рис. 16.1. Параметрический усилитель на диоде

напряжением и зарядом, присущей обратносмещенным $p-n$ -переходам.

Хотя практические усилители имеют разнообразные схемные решения, все они сводятся к основной схеме, показанной на рис. 16.1. На этой схеме диод соединен с внешними источниками колебаний через последовательные резонансные контуры, каждый из которых настроен на одну из частот: ω_1 , ω_2 и $\omega_1 + \omega_2$.

Если вольт-кулонная характеристика диода имеет вид $U = aq + \beta q^2$, а приложенный заряд определяется соотношением

$$q = \frac{1}{2} \{ Q_1 \exp(j\omega_1 t) + Q_1^* \exp(-j\omega_1 t) + Q_2 \exp(j\omega_2 t) + Q_2^* \exp(-j\omega_2 t) + Q_{12} \exp[j(\omega_1 + \omega_2)t] + Q_{12}^* \exp[-j(\omega_1 + \omega_2)t] \},$$

то для протекающего через диод тока получим

$$I = \dot{q} = \frac{1}{2} [j\omega_1 Q_1 \exp(j\omega_1 t) - j\omega_1 Q_1^* \exp(-j\omega_1 t) + \dots].$$

Напряжение на зажимах диода помимо линейных составляющих, например вида $(1/2)\alpha Q_1 \exp(j\omega_1 t)$, содержит ряд нелинейных составляющих с частотами ω_1 , ω_2 и $\omega_1 + \omega_2$. Для нелинейных составляющих имеем

$$U = \frac{1}{2} \beta [Q_1 Q_2 \exp\{j(\omega_1 + \omega_2)t\} + \text{к. с.} + Q_{12} Q_1^* \exp(j\omega_2 t) + \text{к. с.} + Q_{12} Q_2^* \exp(j\omega_1 t) + \text{к. с.}],$$

где к. с. обозначает величину, комплексно-сопряженную с каждым из впереди стоящих слагаемых.

Средние мощности, доставляемые к диоду от внешних источников колебаний с частотами ω_1 , ω_2 и $\omega_1 + \omega_2$, определяются соотношениями:

$$P_1 = \frac{1}{4} j\omega_1 \beta (Q_1 Q_2 Q_{12}^* - Q_1^* Q_2^* Q_{12});$$

$$P_2 = \frac{1}{4} j\omega_2 \beta (Q_1 Q_2 Q_{12}^* - Q_1^* Q_2^* Q_{12});$$

$$P_{12} = \frac{1}{4} j(\omega_1 + \omega_2) \beta (Q_1^* Q_2^* Q_{12} - Q_1 Q_2 Q_{12}^*).$$

Заметим, что, как следует из этих соотношений, $P_1 + P_2 + P_{12} = 0$, так что баланс энергии соблюдается. Кроме того,

$$P_1/\omega_1 = P_2/\omega_2 = -P_{12}/(\omega_1 + \omega_2). \quad (16.1)$$

Это соотношение впервые было получено Мэнли и Роу [25] и представляет собой частный случай общих соотношений, названных их именем (соотношения Мэнли-Роу). Когда устройство действует как усилитель на частоте ω_1 , оно должно отдавать на этой частоте бóльшую мощность, чем та, которую она получает от источника сигнала, т. е. значение P_1 должно быть отрицательным. Это означает, что значение P_2 также должно быть отрицательным, а значение P_{12} — положительным. Если устройство возбуждается извне генератором накачки на частоте $\omega_1 + \omega_2$, то мощность, генерируемая на холостой частоте ω_2 , должна рассеиваться в нагрузке, т. е. в резистивном элементе. Таким образом, для осуществления параметрического усиления требуется не только реактивный элемент (потенциально не шумящий), как это казалось на первый взгляд, но также и резистивная, а следовательно, и шумящая холостая нагрузка. В результате этого параметрические усилители, вопреки возлагаемым на них надеждам, оказались шумящими. Как показано ниже, минимально возможная температура усилителя определяется температурой T_i холостой нагрузки и составляет

$$T_n = T_i \omega_1 / \omega_2. \quad (16.2)$$

На практике при охлаждении диода и резонансной системы могут быть достигнуты значения T_n порядка нескольких десятков градусов по Кельвину в диапазоне СВЧ. Следовательно, параметрический усилитель значительно менее шумящий, чем ЛБВ, хотя и не в такой степени, как мазер.

Рассмотрим теперь более подробно механизм параметрического усиления. Несомненно, что усиление обусловливается наличием накачки, но представляется удобным исключить ее из рассмотрения и учесть параметром модуляции p реактивной проводимости диода, которая возникает благодаря наличию нелинейного члена βq^2 . Запишем выражение, определяющее дифференциальный реактанс диода для малых сигналов на частотах ω_1 и ω_2 , в виде

$$\frac{dU}{dq} = \frac{1}{C} \{1 + p \exp [j(\omega_1 + \omega_2)t] + p^* \exp [-j(\omega_1 + \omega_2)t]\}, \quad (16.3)$$

где C — среднее значение емкости диода.

Малосигнальные составляющие напряжения, заряда и тока для диода зададим соотношениями:

$$v = \frac{1}{2} \{U_1 \exp(j\omega_1 t) + U_1^* \exp(-j\omega_1 t) + U_2 \exp(j\omega_2 t) + \\ + U_2^* \exp(-j\omega_2 t)\};$$

$$q = \frac{1}{2} \{Q_1 \exp(j\omega_1 t) + Q_1^* \exp(-j\omega_1 t) + Q_2 \exp(j\omega_2 t) + Q_2^* \exp(-j\omega_2 t)\};$$

$$I = \dot{q} = \frac{1}{2} \{I_1 \exp(j\omega_1 t) + I_1^* \exp(-j\omega_1 t) + I_2 \exp(j\omega_2 t) + I_2^* \exp(-j\omega_2 t)\}.$$

Тогда из выражения (16.3) получим следующие основные соотношения для малых сигналов:

$$U_1 = I_1 / (j\omega_1 C) - p I_2 / (j\omega_2 C); \quad (16.4a)$$

$$U_2^* = -I_2 / (j\omega_2 C) + p^* I_1 / (j\omega_1 C). \quad (16.4б)$$

На рис. 16.2 индуктивности L_1 и L_2 совместно со средней емкостью диода C образуют контуры, настроенные соответственно на

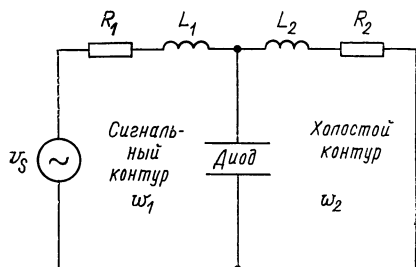


Рис. 16.2. Упрощенная схема параметрического усилителя

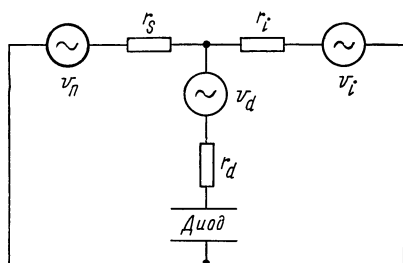


Рис. 16.3. Параметрический усилитель с шумовыми источниками

частоты ω_1 и ω_2 . Если входной сигнал с напряжением v_s и частотой ω_1 выразить в виде

$$v_s = \frac{1}{2} [U_s \exp(j\omega_1 t) + U_s^* \exp(-j\omega_1 t)], \quad (16.5)$$

то для сигнального и холостого контуров можно составить следующие уравнения:

$$U_s = R_1 I_1 + j\omega_1 L_1 I_1 + U_1 = R_1 I_1 - \frac{1}{j\omega_1 C} I_1 + U_1;$$

$$0 = R_2 I_2^* + \frac{1}{j\omega_2 C} I_2^* + U_2^*.$$

Решив эти уравнения с учетом соотношений (16.4a) и (16.4б), получим

$$I_1 = \frac{\omega_1 \omega_2 C^2 R_2 U_s}{\omega_1 \omega_2 C^2 R_1 R_2 - pp^*}; \quad (16.6a)$$

$$I_2^* = \frac{j\omega_2 C p^* U_s}{\omega_1 \omega_2 C^2 R_1 R_2 - pp^*}. \quad (16.6б)$$

Допустим, что $R_1 = r_s + r_1$, где r_s — внутреннее сопротивление источника, а r_1 — сопротивление нагрузки. Тогда мощность, выделяемая в нагрузке (напряжения и токи представлены среднеквадратичными значениями), будет равна $I_1 I_2^* r_1$, а мощность, потребляемая от источника сигнала, $U_s U_s^* / (4r_s)$, и для коэффициента усиления мощности получим

$$G = \frac{4\omega_1^2 \omega_2^2 R_2^2 r_s r_1 C^4}{(\omega_1 \omega_2 R_1 R_2 C^2 - pp^*)^2}. \quad (16.7)$$

Система будет устойчивой при условии $pp^* < \omega_1 \omega_2 R_1 R_2 C^2$, а коэффициент усиления — большим при

$$pp^* \sim \omega_1 \omega_2 R_1 R_2 C^2. \quad (16.8)$$

Поскольку $R_1 = r_s + r_1$, можно получить высокий коэффициент усиления при сколь угодно малом значении r_1 , так как если условие (16.8) можно выполнить для некоторого произвольного значения r_1 , то оно будет выполняться и при малом r_1 . Когда мы приступим к рассмотрению шумовых характеристик, это позволит нам пренебречь напряжением теплового шума в нагрузке r_1 .

Из (16.7) видно, что коэффициент усиления зависит не только от параметров цепи R_1 , R_2 , C и т. п., но и от параметра p , который представляет собой, по сути дела, относительное изменение реактивной проводимости диода под действием накачки. Для заданной системы параметров цепи увеличение интенсивности накачки будет повышать коэффициент усиления до тех пор, пока при некотором критическом значении система не превратится в генератор.

В следующем разделе будут рассмотрены шумовые характеристики усилителя, схема которого показана на рис. 16.2. Рассмотрение будет основано на элементарной классической основе. Тех читателей, которые интересуются квантовыми ограничениями, налагаемыми на характеристики параметрических усилителей, а также значением параметрических явлений в других отношениях, мы отсылаем к книге Льюиселла [23]. Для читателей, интересующихся более общими вопросами построения параметрических усилителей, будет полезной монография Пенфилда и Рэфьюза [29].

16.2. Шумы

Основными и неизбежными источниками шумов в параметрическом усилителе являются внутреннее сопротивление источника сигнала и нагрузка холостого контура. Кроме того, на практике заметный шумовой вклад может давать последовательное сопротивление диода r_d . Влияние шумов в нагрузке сигнального контура, как было показано выше, может быть незначительным. Однако в любой практической конструкции необходимо принимать особые меры по обеспечению этого.

На рис. 16.3 изображены основные элементы усилителя совместно с шумовыми генераторами v_n , v_i и v_d , соединенными соответственно с сопротивлением источника r_s , находящегося при температуре T_s , сопротивлением холостого контура r_i при температуре T_i и сопротивлением диода r_d при температуре T_d . Эти три источника шумов взаимно не коррелированы, и, кроме того, составляющие шумового напряжения v_d с частотой ω_1 , возбуждающие сигнальный контур, не коррелированы с составляющими v_d , возбуждающими холостой контур на частоте ω_2 .

Для простоты на рис. 16.3 мы опустили индуктивности, и ясно, что в любом случае полное сопротивление в сигнальном контуре

составляет $R_1=r_s+r_d$, а в холостом контуре $R_2=r_i+r_d$. Аналогичным образом обстоит дело и с источниками шумов; для сигнального контура это источники v_n и v_d , а для холостого контура v_i и v_d . Из симметрии системы следует, что если выражение (16.6б) определяет I_2^* через напряжение в сигнальном контуре, то его можно использовать для определения I_1 через напряжение в холостом контуре

$$I_1 = \frac{-j\omega_1 C p U_2^*}{\omega_1 \omega_2 C^2 R_1 R_2 - p p^*}.$$

Тогда, полагая $dU_2^n = 4kT_s r_s df$ и т. д., получим для тока I_1

$$dI_1^2 = \left(\frac{\omega_1 \omega_2 C^2 R_2}{\omega_1 \omega_2 C^2 R_1 R_2 - p p^*} \right)^2 (4kT_s r_s df + 4kT_{d_r} df) + \frac{|\omega_1^2 C^2 p p^*|}{(\omega_1 \omega_2 C^2 R_1 R_2 - p p^*)^2} (4kT_i r_i df + 4kT_{d_d} df).$$

Поделив это выражение на значение шума, генерируемого одним только сопротивлением r_s , получим для коэффициента шума

$$F = 1 + \frac{r_d T_d}{r_s T_s} \left(1 + \frac{p p^*}{\omega^2 C^2 R_2^2} \right) + \frac{r_i T_i}{r_s T_s} \left(\frac{p p^*}{\omega^2 C^2 R_2^2} \right), \quad (16.9)$$

откуда для шумовой температуры имеем

$$T_n = T_d \frac{r_d}{r_s} \left(1 + \frac{p p^*}{\omega^2 C^2 R_2^2} \right) + T_i \frac{r_i}{r_s} \left(\frac{p p^*}{\omega^2 C^2 R_2^2} \right). \quad (16.10)$$

На практике диод и холостой контур имеют одинаковую температуру, и если учесть, что $R_2=r_i+r_d$, то

$$T_n = T_d \frac{r_d}{r_s} \left(1 + \frac{p p^*}{\omega^2 C^2 r_d (r_i + r_d)} \right). \quad (16.11)$$

На первый взгляд кажется, что шумовую температуру можно неограниченно уменьшать, увеличивая r_s . Однако необходимо помнить, что заметный коэффициент усиления достигается при

$$\omega_1 \omega_2 C_2 (r_s + r_d) (r_i + r_d) \sim p p^*. \quad (16.12)$$

Отсюда следует, что для данного диода, характеризуемого конкретными значениями параметров r_d , C и $p p^*$, максимальное значение r_s имеет предел. Используя (16.12), можно исключить все переменные из соотношения (16.11), кроме ω_1 , ω_2 , r_s и r_d :

$$T_n = T_d \frac{r_d}{r_s} \left(1 + \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{r_s + r_d}{r_d} \right) = T_d \left[\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{r_d}{r_s} \left(1 + \frac{\omega_1}{\omega_2} \right) \right]. \quad (16.13)$$

При условии, что $r_s \gg r_d$, выражение (16.13) сводится к $T_n = (\omega_1/\omega_2) T_d$. Это минимально возможная шумовая температура для заданных значений ω_1 и ω_2 . Из (16.12) следует, что она относительно легко достигается при малых значениях ω_1 и ω_2 .

Определим характеристическую частоту $\omega_0/(2\pi)$ диода через его сопротивление r_d , среднее значение емкости C и максимально

возможное значение параметра модуляции p :

$$\omega_0^2 C^2 r_d^2 = pp^*. \quad (16.14)$$

Тогда соотношение (16.12) примет следующий вид:

$$\frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_0^2} \left(1 + \frac{r_s}{r_d}\right) \left(1 + \frac{r_i}{r_d}\right) = 1, \quad (16.15)$$

откуда следует, что можно обеспечить высокий коэффициент усиления, и при этом выполнить условие $r_s \gg r_d$, если только $\omega_1 \omega_2 \ll \omega_0^2$. Таким образом, параметр $\omega_0/(2\pi)$ определяет верхнюю граничную частоту, при которой достижима шумовая температура $(\omega_1/\omega_2) \times T_d$.

Если $\omega_1 \omega_2$ намного меньше, чем ω_0^2 , то можно взять сопротивление r_i большим по сравнению с r_d . Тогда (16.10) сводится к приближенному соотношению

$$T_n \sim T_i \frac{pp^*}{\omega_2^2 r_s r_i C^2} \sim T_i \frac{\omega_1}{\omega_2}. \quad (16.16)$$

В этом случае шумовая температура будет ограничена характеристиками холостого контура и отношением ω_1/ω_2 , если даже температура диода несколько превышает температуру T_i . Однако такая ситуация не представляет особого практического интереса, так как на низких частотах имеются намного более лучшие усилители других типов, и поэтому параметрические диоды используются на очень высоких частотах, на которых нельзя пренебрегать величиной r_d .

Для того чтобы выявить ограничения на величину T_n со стороны высоких частот, следует только заметить, что в соответствии с (16.13) T_n уменьшается с увеличением r_s при фиксированном значении ω_2 , а значение r_s достигает максимума, как это следует из (16.15), при $r_i=0$, так что нагрузка холостого контура определяется потерями в диоде. При этом имеем

$$\frac{r_s}{r_d} = \frac{\omega_0^2 - \omega_1 \omega_2}{\omega_1 \omega_2}; \quad (16.17)$$

$$T_n = T_d \frac{\omega_1}{\omega_0} \frac{\omega_0/\omega_2 + \omega_2/\omega_0}{1 - \omega_1 \omega_2/\omega_0^2}. \quad (16.18)$$

Оптимальное значение ω_2 дается соотношением

$$\omega_2 = (\omega_0^2 + \omega_1^2)^{1/2} - \omega_1, \quad (16.19)$$

и для полного минимума значения величины T_n имеем

$$T_n = 2 \frac{\omega_1}{\omega_2} T_d = \frac{2\omega_1 T_d}{(\omega_0^2 + \omega_1^2)^{1/2} - \omega_1}. \quad (16.20)$$

Следует заметить, что $T_n = T_d$ при $\omega_1 = \omega_0/\sqrt{8}$ и $\omega_2 = \omega_0/\sqrt{2}$, и эти значения можно рассматривать как верхний частотный предел применимости параметрического диода.

Если считать, что параметр p в выражении (16.3) действительная величина, то можно показать, что минимальное и максимальное значения емкости диода связаны соотношением

$$1/C_{\min} - 1/C_{\max} = 4p/C.$$

Изготовители диодов обычно указывают величину параметра

$$f'_c = \frac{1}{r_d} \left(\frac{1}{C_{\text{мин}}} - \frac{1}{C_{\text{макс}}} \right),$$

который, как это нетрудно заметить, связан с параметром ω_0 :

$$f'_c = 4\omega_0 / (2\pi). \quad (16.21)$$

Например, диод с $f'_c = 100$ ГГц обеспечивает приемлемое усиление с $T_n \leq T_d$ на частоте около $f'_c / 12 \approx 9$ ГГц.

Как было сказано выше, на низких частотах лучше применяют усилители на полевых или биполярных транзисторах. Параметрические усилители используются главным образом только на частотах выше 500 МГц. В этой области частот они конкурируют с ЛБВ, имеющими T_n порядка 500—2000 К, и мазерами с T_n порядка 1—10 К. ЛБВ с их широкой полосой пропускания и большим коэффициентом усиления заметно превосходят как параметрические усилители, так и мазеры, а по стоимости сравнимы с параметрическими усилителями, но намного дешевле мазеров. ЛБВ, кроме того, гораздо менее чувствительны к перегрузкам, чем параметрические усилители. Таким образом, несмотря на то, что параметрический усилитель с охлажденным диодом способен обеспечить шумовую температуру в несколько десятков градусов по Кельвину, применение его в радиоэлектронной технике довольно ограничено. Типичный пример использования параметрического усилителя — это приемник для спутниковой связи, в котором в качестве первого усилительного каскада использован мазер с температурой около 3 К и коэффициентом усиления 20 дБ. Если недопустимо, чтобы общая шумовая температура приемника определялась вторым каскадом, он должен иметь шумовую температуру $T_n < 300$ К. Очевидным претендентом на роль второго каскада в этом случае является параметрический усилитель; он проще мазера и меньше шумит, чем ЛБВ. Кроме того, первый мазер уже имеет охлаждение, и поэтому нет необходимости в серьезном обсуждении проблемы охлаждения диода на практике.

До сих пор мы обсуждали высокочастотные параметрические усилители на варакторных диодах. Однако необходимо заметить, что различные нелинейные явления в оптических и инфракрасных характеристиках некоторых твердых сред приводят к процессу параметрического усиления на этих частотах. Здесь существенными становятся квантовые эффекты, и хотя на пути осуществления усиления могут встретиться практические трудности, наименьшая мощность сигнала, соответствующая отношению сигнал/шум, равному единице в полосе df на частоте f , равна

$$dP = \left\{ hf + \frac{hf}{\exp [hf / (kT_i)] - 1} \right\} df,$$

где T_i — температура нагрузки эквивалентного холостого контура.

МАЗЕРЫ

Разработаны и применяются разнообразные типы мазеров, мы же рассмотрим один из них, представленный в наиболее обобщенном виде на рис. 17.1. Устройство в целом состоит из источника сигнала, линии передачи и структуры с активной средой (собственно мазера). Источник сигнала с внутренним сопротивлением при температуре T согласован с линией передачи, конец которой нагружен на структуру с активной средой. Активная среда представляет собой вещество, атомы которого имеют два энергетических уровня конечной ширины, разделенных интервалом $h\nu$.

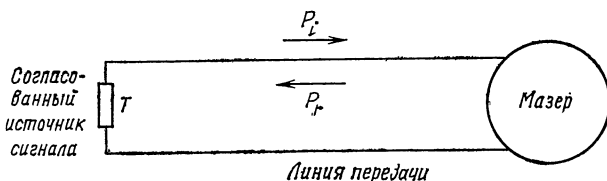


Рис. 17.1. Основная функциональная схема мазера

Сигнал с мощностью P_i падает на структуру с активной средой и отражается от нее, возрастая по мощности до величины P_r . В реальных конструкциях мазеров для того, чтобы разделить падающий и отраженный сигналы, должен присутствовать невзаимный элемент, например циркулятор, который для простоты на рисунке не указан и в дальнейшем рассматриваться не будет.

Во время как активную среду необходимо исследовать квантовомеханически, для сигналов допустима классическая трактовка, что следует из результатов гл. 6. Падающий сигнал с частотой ν и мощностью P_{si} вызывает переходы между уровнями с равной вероятностью в обоих направлениях. Введем вероятность перехода в единицу времени:

$$\omega = AP_{si}, \tag{17.1}$$

где A — постоянная (в общем случае зависящая от частоты). Если на верхнем уровне имеется n_+ атомов, а на нижнем уровне — n_- , то мощность, извлекаемая из активной среды, равна $h\nu\omega(n_+ - n_-) = h\nu A(n_+ - n_-)P_{si}$, а мощность отраженного сигнала

$$P_{sr} = P_{si} + h\nu A(n_+ - n_-)P_{si}, \tag{17.2}$$

и для коэффициента усиления по мощности получаем

$$G = 1 + h\nu A(n_+ - n_-). \tag{17.3}$$

Коэффициент усиления будет больше единицы, если в системе имеется инверсная населенность уровней, т. е. $n_+ > n_-$.

Из результатов гл. 6 также следует, что мощность шума dP_{ni} источника сигнала, падающего на мазер, в интервале частот $d\nu$

равна

$$dP_{ni} = \left\{ \frac{h\nu}{\exp[h\nu/(kT)] - 1} + \frac{1}{2} h\nu \right\} d\nu. \quad (17.4)$$

Нулевые флуктуации $h\nu/2$ поля излучения не участвуют в процессе поглощения и приводят лишь к спонтанному излучению при переходах с верхнего уровня на нижний. Поэтому можно не прибегать к детальному квантовомеханическому анализу, приводящему по существу к тем же самым результатам.

Таким образом, для скорости переходов из нижнего энергетического состояния в верхнее имеем

$$r_u = n_- A \left(dP_{ni} - \frac{1}{2} h\nu d\nu \right). \quad (17.5)$$

Выражение для скорости обратных переходов r_d можно получить, не прибегая к дегаальным вычислениям. Для этого рассмотрим ситуацию, когда источник и активная среда находятся в тепловом равновесии при одной и той же температуре. Тогда $r_d = r_u$ и $n_+ = n_- \exp[-h\nu/(kT)]$, а dP_{ni} дается выражением (17.4). В результате

$$r_d = n_+ A \left(dP_{ni} + \frac{1}{2} h\nu d\nu \right). \quad (17.6)$$

Для лазера с инверсной населенностью уровней, когда уже нет теплового равновесия, мощность выходного шума определяется так

$$dP_{nr} = dP_{ni} + h\nu(r_d - r_u) = dP_{ni} \{1 + h\nu A(n_+ - n_-)\} + \frac{1}{2} h^2 \nu^2 A(n_+ + n_-) d\nu. \quad (17.7)$$

Можно допустить, что значение этой мощности достаточно велико (оно больше, чем значение GdP_{ni}) для того, чтобы ее можно было измерить. Тогда собственным шумом последующего усилителя, используемого при измерениях, можно пренебречь. Таким образом, мощность входного сигнала, соответствующая отношению сигнал/шум на выходе, равном единице, составляет

$$P_{si} = dP_{ni} + \frac{1}{2} h^2 \nu^2 d\nu \frac{A}{G} (n_+ + n_-) = dP_{ni} + \left(1 - \frac{1}{G}\right) \frac{n_+ + n_-}{n_+ - n_-} \frac{1}{2} h\nu d\nu. \quad (17.8)$$

Можно определить отрицательную температуру T_m активной среды лазера с помощью соотношения

$$\frac{n_+}{n_-} = \exp\left(\frac{h\nu}{kT_m}\right) \quad (17.9)$$

и в результате выразить P_{si} в виде

$$P_{si} = \left\{ \left(\frac{h\nu}{2} + \frac{h\nu}{\exp[h\nu/(kT)] - 1} \right) + \left(1 - \frac{1}{G}\right) \left[\frac{h\nu}{2} + \frac{h\nu}{\exp[h\nu/(kT_m)] - 1} \right] \right\}. \quad (17.10)$$

В классическом низкочастотном пределе (17.10) упрощается:

$$P_s = [kT + (1 - 1/G)kT_m] \nu \nu. \quad (17.11)$$

Из выражения для коэффициента шума

$$F = 1 + (1 - 1/G) \frac{T_m}{T} \quad (17.12)$$

для шумовой температуры получаем

$$T_n = (1 - 1/G) T_m. \quad (17.13)$$

Для каскадного соединения N идентичных усилителей с коэффициентом шума F и усилением G суммарный коэффициент шума равен

$$F' = F + \frac{F}{G} + \dots + \frac{F}{G^{N-1}} = F \frac{1 - (1/G)^N}{1 - 1/G} \approx \frac{F}{1 - 1/G}.$$

Таким образом, хотя из уравнения (17.12) следует, что F снижается при уменьшении G , в действительности общий коэффициент шума не уменьшается, когда для получения высокого общего усиления используется несколько каскадов с небольшим G . Ясно, что параметр $F/(1 - 1/G)$ является лучшей мерой шума, чем коэффициент шума F . В дальнейшем будем предполагать, что коэффициент усиления G всегда велик, и в этом случае (17.12) сводится к $F = 1 + T_m/T$, а (17.13) — к $T_n = T_m$.

При $G \gg 1$ основное соотношение (17.10) приобретает вид

$$P_{si} = h\nu \nu \nu + \frac{h\nu \nu \nu}{\exp[h\nu/(kT)] - 1} + \frac{h\nu \nu \nu}{\exp[h\nu/(kT_m)] - 1}. \quad (17.14)$$

Видно, что даже при $T=0$ и $T_m=0$ (последнее равенство соответствует полной инверсии населенности уровней в лазере, т. е. $n_{-} = 0$) минимальная мощность сигнала, доступная измерениям, равна $h\nu \nu \nu$, а не $h\nu \nu \nu / 2$. Эта величина действительно измерима, так как нет причин, по которым при столь малом входном сигнале выходной сигнал лазера не был бы достаточно большим, чтобы его можно было измерить. Но в этом случае нет особого смысла определять коэффициент шума, так как хотя отношение шум/сигнал на входе вполне определено и равно $1/2h\nu \nu \nu / P_{si}$, оно является ненаблюдаемой квантовой величиной. Так что хотя и можно из (17.4) получить формально предельное значение коэффициента шума $F=2$, полученный результат бессмыслен. Мазеры на практике обычно работают где-то недалеко от этого квантового пре-

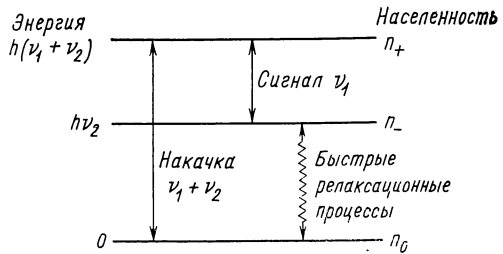


Рис. 17.2. Энергетические уровни, населенности и переходы в трехуровневом лазере

ла, т. е. $h\nu \sim kT$ при $T \sim T_m \sim 4 \text{ К}$ и $\nu \approx 10^{11} \text{ Гц}$, что соответствует длинам волн около 3 мм. Следовательно, важно понять факторы, влияющие на величину T_m . Для этого рассмотрим трехуровневый мазер, схема которого приведена на рис. 17.2. Пусть внешний сигнал накачки на частоте $\nu_1 + \nu_2$ обладает такой интенсивностью, что индуцированные переходы между внешними уровнями полностью преобладают над тепловыми релаксационными процессами, и устанавливается равенство населенностей n_+ и n_0 . В то же самое время тепловые релаксационные процессы с малым временем релаксации устанавливают равновесие в системе двух нижних уровней с относительной населенностью $n_-/n_0 = \exp[-h\nu_2/(kT_0)]$, где T_0 — температура окружающей среды.

Относительная населенность активных уровней равна $n_+/n_- = n_0/n_- = \exp[h\nu_1/(kT_0)]$, и так как $h\nu_1$ — разность их энергий, для эффективной отрицательной температуры, характеризующей активные уровни, получаем

$$T_m = T_0 \nu_1 / \nu_2. \quad (17.15)$$

В низкочастотном пределе эта величина будет шумовой температурой лазера. Отметим, что $T_m \ll T_0$ при $\nu_1 \ll \nu_2$. Нет особых причин, по которым прибор, обмениваясь тепловой энергией с окружающей средой при температуре T_0 , не мог бы иметь шумовую температуру, меньшую T_0 . Другим хорошим примером этого является полевой транзистор. На частотах около 1 МГц его шумовая температура может быть на несколько порядков ниже температуры канала. К сожалению, в мазерах для того чтобы выполнить условие $\nu_1 \ll \nu_2$, необходимо использовать частоту накачки $\nu_1 + \nu_2$ много большую, чем ν_1 . Если ν_1 — частота диапазона СВЧ, то это непрактично.

Теперь пренебрежем мощностью тепловых шумов источника, тогда мощность сигнала в полосе $d\nu_1$, соответствующая отношению сигнал/шум, равному единице, будет равна

$$P_s = \left\{ h\nu_1 + \frac{h\nu_1}{\exp[h\nu_1/(kT_m)] - 1} \right\} d\nu_1 = \left\{ h\nu_1 + \frac{h\nu_1}{\exp[h\nu_2/(kT_0)] - 1} \right\} d\nu_1,$$

и даже при $h\nu_1 \ll kT_0$, но при $\nu_2 \gg \nu_1$ вклад от члена $h\nu_1 d\nu_1$, соответствующего нулевым колебаниям поля излучения, будет значительным.

Очевидно, что результаты приведенного анализа справедливы и для усилителей, использующих активную среду на частотах оптического (или инфракрасного) диапазона, но пока что технология лазеров не достигла еще такого уровня, чтобы их шумовые характеристики имели практическое значение.

Интересно сравнить результат (17.15) с соответствующим результатом (16.20) для параметрического усилителя. Они идентичны, если считать ν_2 холостой частотой, а T_0 — температурой холостой нагрузки. Можно показать [15, 23], что параметрический усилитель действительно тесно связан по принципу своей работы с мазером.

В заключение отметим, что полученные результаты применимы только к идеализированному устройству. На практике вклад в шум мазеров как резонаторного типа, так и типа бегущей волны дает тепловые шумы резонансных цепей, фидерных линий и циркуляторов. Так как уровень собственных шумов мазера низок, то дополнительные тепловые шумы, которыми в других усилителях можно пренебречь, здесь начинают играть важную роль.

ГЛАВА 18

ГЕНЕРАТОРЫ

18.1. Введение

Для классификации генераторов колебаний используют форму выходного сигнала (синусоидальную или несинусоидальную). Классифицируют их также по различиям внутренней структуры. Можно, например, выделить генераторы с частотно-избирательными элементами в виде резонансного контура и генераторы с RC -цепями. Можно различать генераторы и по типу ограничивающего амплитуду колебаний нелинейного элемента (безынерционного или инерционного). В этой главе мы рассмотрим только генераторы синусоидальных колебаний с резонансным контуром и безынерционным нелинейным элементом, так как именно для таких генераторов анализ шумов имеет важное практическое значение.

В идеальном случае на выходе генератора имеется монохроматический сигнал с постоянными амплитудой, частотой и фазой. На практике на выходной сигнал накладывается генерируемый в цепи шумовой фон. Если выходной сигнал $U(t)$ генератора наблюдается в течение большого промежутка времени T и за единицу времени взята величина $T/(2\pi)$, то мы можем представить $U(t)$ в виде

$$U(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n \exp(jnt). \quad (18.1)$$

В этом ряду два члена с $n = \pm n_0$ соответствуют монохроматическому выходному сигналу, а остальные члены ряда представляют собой шум. Однако $U(t)$ можно выразить и в виде $U_0(t) \exp \times [j\varphi(t)] \exp [jn_0 t] + \text{к. с.}$ и рассматривать флуктуации $U(t)$ как амплитудную $U_0(t)$ и фазовую $\varphi(t)$ модуляции по случайному закону. Коэффициенты U_n в (18.1) определяют $U_0(t)$, $\varphi(t)$ и все их статистические свойства. Правда, для этого необходимо знать как амплитуды, так и фазы U_n , знания же энергетического спектра напряжения $U(t)$ самого по себе недостаточно для полного определения свойств $U_0(t)$ и $\varphi(t)$. Тем не менее интенсивность шума, т. е. его энергетический спектр, позволяет указать порядок величины амплитудных и фазовых модуляционных шумов, и мы ограничимся здесь именно этой стороной проблемы исследования шумов ге-

нератора. Для знакомства с более полным обсуждением проблемы мы отсылаем читателя к работе Роу [39].

Любой генератор стабильных колебаний содержит частотно-избирательный контур, петлю положительной обратной связи или прибор с отрицательной дифференциальной проводимостью, а также нелинейный элемент, ограничивающий амплитуду колебаний. Присутствие такого нелинейного элемента приводит к серьезным математическим трудностям в строгом анализе как установившихся монохроматических колебаний, так и шума, и по существу точные решения или же решения в достаточно строгих приближениях могут быть получены для нескольких чрезвычайно идеализированных моделей, зачастую весьма далеких от реальных генераторов. Сравнение результатов анализа явлений даже в наиболее строгой математической постановке с характеристиками реальных генераторов приводит только к качественному совпадению. По этой причине мы не будем пытаться выйти за рамки простой эвристической модели, качественно учитывающей шумы генератора.

Такой подход, тем не менее, позволяет получить порядок значений величин, характеризующих шумы в реальных генераторах, и указать параметры цепи, имеющие с этой точки зрения наиболее важное значение. Читатель, интересующийся формальной математической стороной проблемы изучения шумов в генераторах, может обратиться к классической статье Ван-дер-Поля [47] и к связанным с ней работам, ссылки на которые указаны в книге «Классики современной математики. Анализ» (под ред. Р. Беллмана) [3].

В учебниках по радиоэлектронике описание генераторов обычно приводится в сжатой форме и посвящено главным образом таким вопросам, как выходная мощность, КПД, стабильность частоты. Поэтому перед тем как обсудить шумы генератора, мы коротко рассмотрим поведение генератора как такового.

18.2. Схемы генераторов

Некоторые генераторы, например на туннельных диодах или давно известные динатронные генераторы на тетроде, используют в качестве активного элемента прибор с отрицательной дифференциальной проводимостью. Все же большинство генераторов на практике строятся по схеме, использующей усилитель и петлю положительной обратной связи. Такая типичная схема, предложенная Фолкнером и Хольманом [12], изображена на рис. 18.1. Мы вернемся к ней позднее, учитывая, что при различных значениях тока питания I_0 эта схема позволяет выявить почти все наиболее существенные черты поведения генератора. Пока же достаточно отметить, что резонансный LC -контур с проводимостью потерь G и активная цепь (двухполюсная) соединены друг с другом на зажимах $x-x'$. Схему, изображенную на рис. 18.1, можно заменить схемой, изображенной на рис. 18.2, на которой активный двухполюсник представлен отрицательной проводимостью $-H$.

Такая замена справедлива, если активный двухполюсник не вносит фазового сдвига. Проводимость H представляет собой функцию от напряжения U на резонансном контуре. Эта функциональная зависимость отражает тот факт, что проводимость H зависит от характеристик приборов в активном двухполюснике, что и обуславливает нелинейность цепи.

Другое, иногда более полезное, но, по существу, эквивалентное представление схемы генератора приведено на рис. 18.3. Здесь к выходу линейного усилителя A подключен нелинейный прибор $НП$, а результирующий выходной ток I по цепи обратной связи поступает в контур и поддерживает колебания в нем. Элемент $НП$ может представлять собой удобное выражение внутренней нелинейности, присущей усилителю A , или же может представлять отдельный прибор в цепи. Все усилители, встречающиеся на практике, в том числе усилители с взаимно индуктивной обратной связью (т. е. триодные генераторы с контуром в цепи анода) и усилители с частичной емкостной обратной связью (т. е. генераторы Колпица), можно анализировать с помощью или схемы рис. 18.2, или схемы рис. 18.3.

Очевидно, что H на рис. 18.2 равна I/U

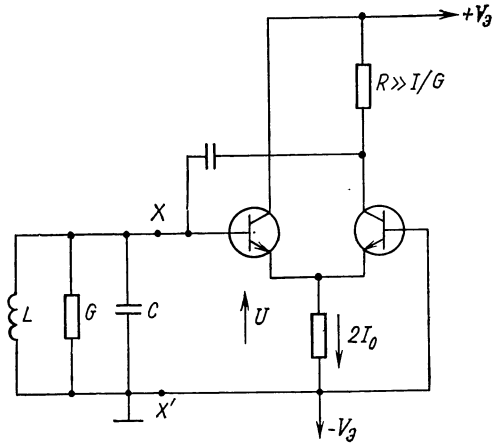


Рис. 18.1. Генератор Фолкнера и Хольмана

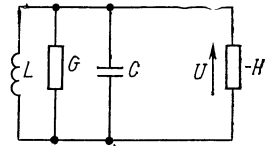


Рис. 18.2. Генератор на отрицательной проводимости

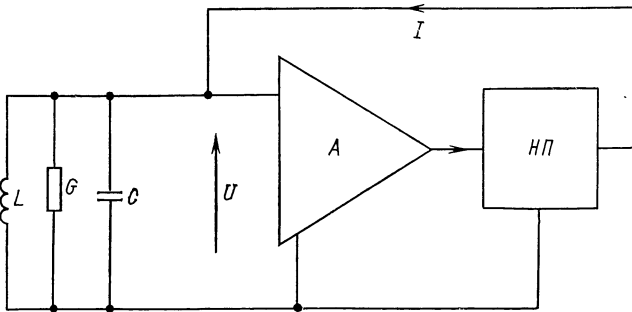


Рис. 18.3. Основная схема генератора

(см. рис. 18.3). Обе схемы соответствуют генераторам, в которых амплитуда колебаний устанавливается за счет наличия безынерционной нелинейности активного элемента или цепи. Однако на практике во многих генераторах имеется дополнительный инерционный элемент, который изменяет коэффициент усиления усилителя A (см. рис. 18.3) в соответствии с изменениями средней амплитуды колебаний. Триодный генератор с автосмещением является типичным примером такого генератора.

На первом этапе установления колебаний управление амплитудой осуществляется безынерционно за счет нелинейности характеристики триода, а инерционность в цепи автосмещения приводит к медленному изменению амплитуды за время, соответствующее большому числу колебаний.

18.3. Установившиеся колебания

Амплитуда собственных колебаний на резонансной частоте $\omega = \omega_0 = (LC)^{-1/2}$ в параллельном LC -контуре с потерями, представленными параллельной проводимостью G , будет экспоненциально убывать с показателем $\omega / (2Q)$, где $Q = \omega C / G$. Однако если параллельно контуру подключить линейную отрицательную проводимость $-H$ (при этом $H > G$), то амплитуда колебаний будет нарастать экспоненциально с показателем $\omega / (2Q')$, где $Q' = \omega C / (H - G)$. Ясно, что установление колебаний с постоянной амплитудой возможно только при условии убывания H с ростом амплитуды. Таким образом, колебания в резонансном контуре с усилителем, показанном на рис. 18.3, также будут нарастать при $I > GU$ и устанавливаются только при наличии нелинейного прибора HP . Колебания самопроизвольно возникают при некотором близком к нулю начальном шумовом возбуждении, если при малых напряжениях выполняются условия $H > G$ или $I > GU$. Мы будем предполагать в дальнейшем, что эти условия выполнены, хотя необходимо отметить, что для многих генераторов, особенно на биполярных транзисторах, может потребоваться конечное, вполне определенное начальное возбуждение для того, чтобы ввести их в режим установившихся колебаний.

Для поддержания установившихся синусоидальных колебаний $U(t) = U_0 \sin \omega t$ необходимо, чтобы средняя мощность $1/2 GU_0^2$, рассеиваемая в диссипативной нагрузке G , компенсировалась мощностью, поступающей от активного прибора или цепи. В обозначениях, соответствующих рис. 18.2, имеем

$$\frac{1}{2} GU_0^2 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} H(U) U_0^2 \sin^2 \omega t dt, \quad (18.2)$$

а для рис. 18.3

$$\frac{1}{2} GU_0^2 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} I(U) U_0 \sin \omega t dt. \quad (18.3)$$

Эти уравнения в неявном виде определяют амплитуду U_0 через зависимости $H(U)$ или $I(U)$. Вообще говоря, $H(U)$ и $I(U)$ являются сложными нелинейными функциями от U , но можно выделить два крайних случая, когда функциональная зависимость упрощается. В первом случае для любых величин U , действующих в цепи, $H(U)$ — гладкая непрерывная функция от U , которую можно представить в виде степенного ряда

$$H = H_0 + H_1 U + H_2 U^2 + H_3 U^3 + \dots \quad (18.4)$$

Аналогично для $I(U)$ имеем

$$I = H_0 U + H_1 U^2 + H_2 U^3 + \dots \quad (18.5)$$

Генератор, для которого справедливы эти представления, известен как генератор Ван-дер-Поля [47]. В другом крайнем случае на кривой $I(U)$ наблюдаются резкие изломы при некоторых значениях $|U|$. В пределе $I(U)$ — ступенчатая функция вида $I(U) = A_0(U/|U|)$, где A_0 — положительная постоянная. Генератор с резкими изломами вольт-амперной характеристики активного двухполюсника известен как генератор Робинсона [36]. На рис. 18.4 показаны зависимости $I(U)$ для генератора Ван-дер-Поля (*a*), генератора Робинсона (*б*), генератора Робинсона в предельном случае (*в*) и для генератора, описываемого характеристикой промежуточной формы (*г*). Для генератора, схема которого изображена на рис. 18.1, имеем

$$I \sim I_0 \operatorname{th} [eU / (2kT)].$$

Для больших значений U_0 эта зависимость аппроксимируется кривой (*в*), в то время как при $U \ll 2kT/e$

$$I \sim I_0 \left[\frac{eU}{2kT} - \frac{1}{3} \left(\frac{eU}{2kT} \right)^3 \right], \quad (18.6)$$

что соответствует генератору Ван-дер-Поля.

Для генератора Ван-дер-Поля из уравнения (18.2) следует

$$\frac{1}{2} G U_0^2 = \frac{1}{2} H_0 U_0^2 + \frac{3}{8} H_2 U_0^4 + \frac{5}{16} H_4 U_0^6 + \dots \quad (18.7)$$

Для существования ненулевого решения U_0 необходимо, чтобы был отрицательным по крайней мере один из четных коэффициен-

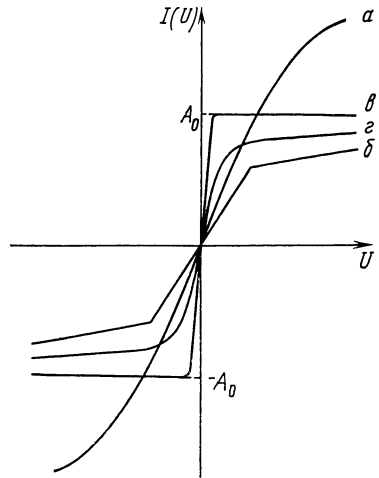


Рис. 18.4. Передаточные характеристики генератора Ван-дер-Поля (*a*), Робинсона (*б*), Робинсона в предельном случае (*в*) и промежуточной формы (*г*)

гов H_2 , H_4 и т. д., в то время как для обеспечения самовозбуждения колебаний коэффициент H_0 должен быть положительным и превышать G . Очевидно, что при $H_2 < 0$ и малости модулей последующих коэффициентов амплитуда колебаний возрастает от нуля до значения, определяемого соотношением

$$U_0^2 = \frac{4}{3} \frac{H - G}{-H_2}. \quad (18.8)$$

Для предельного случая генератора Робинсона ток I (на рис. 18.3) имеет прямоугольную форму с амплитудой A_0 и привязан по частоте и фазе к напряжению $U = U_0 \sin \omega t$. Из уравнения (18.3) получим

$$\frac{1}{2} G U_0^2 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\pi/\omega} A_0 U_0 \sin \omega t dt = \frac{2 I_0 U_0}{\pi},$$

так что

$$U_0 = 4 I_0 (\pi G). \quad (18.9)$$

По мере роста тока питания I_0 (см. рис. 18.1) колебания возникают при значении $I_0 = 2kTG/e$ и вначале увеличиваются с ростом I_0 по закону

$$U_0 = \frac{4kT}{e} \left(\frac{I_0 - 2kTG/e}{I_0} \right)^{1/2}$$

до тех пор, пока I_0 не превзойдет значения порядка $4kTG/e$, при котором для колебаний асимптотически выполняется соотношение (18.9).

На выходе петли обратной связи генератора Робинсона в токе прямоугольной формы велико содержание третьей гармоники с амплитудой $[4/(3\pi)] I_0 = (1/3) G U_0$. Однако при высокой добротности Q резонансного контура эта гармоника мало искажает форму напряжения колебания. Амплитуда третьей гармоники напряжения равна $U_3 \sim U_0/9Q$. Квадратичная нелинейность в H для генератора Ван-дер-Поля также вызывает генерацию третьей гармоники с амплитудой

$$U_3 \sim \frac{U_0}{9Q} \frac{H_0 - G}{G}$$

и при значении H_0 , близком к пороговому и соответствующему условию $H_0 - G \ll G$, выходной сигнал генератора Ван-дер-Поля имеет чисто синусоидальную форму. В то же время, если в разложении (18.4) член $H_1 U$ отличен от нуля, в выходном сигнале генератора Ван-дер-Поля может быть значительное содержание второй гармоники. На практике для обеих схем (см. рис. 18.2, 18.3) при $Q > 100$ имеем почти чистую синусоиду.

В общем случае в генераторах Робинсона нелинейность вводится специально схемным путем. Схема на рис. 18.1 представляет собой типичный подобный пример, но аналогичные решения возможны и при использовании электронных ламп [36] или полевых

транзисторов. Вместе с тем нелинейность в генераторах Ван-дер-Поля внутренне присуща активному элементу или усилителю. В этих генераторах наблюдается критическая зависимость амплитуды колебаний от величин H_0 — G и H_2 , которые, в свою очередь, сильно зависят от параметров прибора. В результате малые изменения в температуре или питании активного прибора приводят к непропорционально большому изменению U_0 . Таким образом, поведение генератора Ван-дер-Поля довольно неустойчиво и непредсказуемо, и в реальных генераторах этого типа обычно требуется дополнительный механизм стабилизации медленно меняющейся амплитуды колебаний, чтобы получить повторяющиеся результаты. При неправильной схемной реализации такого дополнительного механизма часто возникают побочные эффекты, например скачкообразные или прерывистые колебания. Напротив, генераторы Робинсона имеют предсказуемые и воспроизводимые характеристики.

Из-за высокой чувствительности выходного сигнала генератора Ван-дер-Поля к малым изменениям H_0 фликкер-шум в активном приборе (в некоторой степени он эквивалентен медленным случайным изменениям крутизны характеристики прибора, приводящим к изменениям H_0) вызывает случайные изменения U_0 . Таким образом, уровень амплитудно-модулированных и частотно-модулированных шумов генератора Ван-дер-Поля превышает уровень шумов генератора Робинсона. Независимо от этого общее поведение генераторов обоих типов в других отношениях весьма схоже, и большинство математических исследований шумовых характеристик генераторов основывается на модели генератора Ван-дер-Поля. Напомним читателю, что немногие реальные генераторы полностью соответствуют этим двум типам генераторов. Далее мы коротко обсудим, почему реализация генератора Ван-дер-Поля относительно проста на электронных лампах, а на транзисторах затруднительна.

Для большинства генераторов отрицательная проводимость активного двухполюсника, включенного в резонансный контур, пропорциональна крутизне характеристики активного прибора. Пусть для какого-либо активного прибора $I=f(U, U_p)$, где U_p — напряжение питания. Тогда значение H_0 пропорционально dI/dU , а значение H_2 пропорционально d^3I/dU^3 . Для тока, соответствующего модели генератора Ван-дер-Поля, dI/dU и d^3I/dU^3 должны иметь противоположные знаки. Для электронных ламп, когда справедлив закон трех вторых, т. е. $I=K(U+A)^{3/2}$, где K и A — постоянные, получаем

$$dI/dU = \frac{3}{2} K(U+A)^{1/2} \text{ и } d^3I/dU^3 = -\frac{3}{8} K(U+A)^{-3/2}.$$

Следовательно, электронные лампы, такие как триоды и пентоды, приемлемы для использования в генераторах Ван-дер-Поля. Для полевых транзисторов $I=I_0[1+(U/U_p)]^2$, и d^3I/dU^3 и производные высших порядков исчезают. Таким образом, если генера-

тор на полевом транзисторе дает стабильный синусоидальный сигнал, это значит, что либо в схеме генератора имеются добавочные нелинейные элементы, либо характеристика транзистора несколько отличается от идеальной характеристики $I=I_0[1+(U/U_p)]^2$. При этом в последнем случае, соответствующем неидеальной характеристике транзистора, режим работы генератора предсказать чрезвычайно трудно. Для биполярных транзисторов $I=I_0 \exp \times [eN/(kT)]$ и все производные имеют одинаковый знак. Вряд ли генератор на биполярных транзисторах будет работать, как генератор Ван-дер-Поля, если схема генератора тщательно не продумана, как, например, схема на рис. 18.1. Вообще говоря, если генератор на транзисторах любого типа заранее не спроектирован, как генератор Ван-дер-Поля или генератор Робинсона, можно почти наверняка ожидать, что вершина синусоидальных колебаний в нем будет «срезаться», когда размах напряжения колебаний превзойдет приложенное напряжение. В этом случае колебания на выходе генератора не будут иметь ничего общего с синусоидальными колебаниями.

18.4. Вынужденные колебания

Генерация колебаний в автогенераторе любого типа, возбуждаемого внешним источником с частотой $\omega=\omega_0+\delta\omega$, отличной от собственной частоты ω_0 , будет в значительной степени зависеть от амплитуды возбуждающего сигнала и частотной расстройки $\delta\omega$. Эффект генерации в этом случае поддается строгому анализу

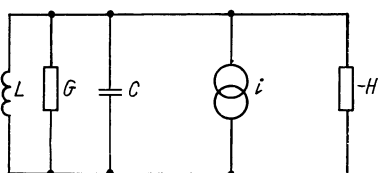


Рис. 18.5. Основная схема генератора с источником шумового тока

только для генератора Ван-дер-Поля. Такой анализ приведен Ван-дер-Полем в его статье [47], послужившей основой для всех последующих исследований характеристик генератора. Однако возможен и качественный подход, приведенный ниже. На схеме, представленной на рис. 18.5, генератор тока i замещает внешний источник.

В течение промежутка времени порядка $1/(\delta\omega)$ внешний сигнал и свободные колебания с частотой ω_0 взаимно привязаны по фазе, точнее, фазовые соотношения между током источника и свободными колебаниями меняются медленно. За это время источник тока поставляет в цепь энергию порядка $1/2U_0i_0/(\delta\omega)$, где U_0 и i_0 — эффективные значения напряжения U свободного колебания и возмущающего тока i соответственно. Множитель $1/2$ отражает медленно меняющиеся во времени фазовые соотношения. Если эта энергия сравнима с энергией CU^2_0 , накопленной в резонансном контуре, наличие возмущающего тока i существенно изменит всю картину колебаний, и, как показал Ван-дер-Поль, колебания цепи будут захвачены по фазе и частоте внешним источником. Очевид-

но, что ширина полосы захватывания выражается следующим соотношением:

$$\delta f = \frac{\delta \omega}{2\pi} = \frac{i_0}{4\pi C U_0}. \quad (18.10)$$

Этот результат с точностью до численного множителя по существу не зависит от того, имеем ли мы дело с генератором Ван-дер-Поля, генератором Робинсона или генератором с инерционным механизмом установления колебаний.

Шум в цепях генератора, показанного на рис. 18.5, складывается из теплового шума с энергетическим спектром $4kTG$, возникающего на проводимости G , и шума активного прибора с отрицательной проводимостью H . Представим энергетический спектр суммарного шумового тока i в виде $4nkTG$, где $n > 1$.

Рассмотрим промежуток времени, соответствующий привязке по фазе внешнего монохроматического сигнала и свободных колебаний. Влияние внешнего сигнала на свободные колебания существенно лишь только в том случае, если энергия, поставляемая этим сигналом в колебательную систему за указанный промежуток времени, сравнима с энергией свободных колебаний. Общая энергия шума — это величина порядка nkT . Очевидно, что соотношение энергии такого порядка с энергией CU_0^2 является критерием степени влияния шумов на свободные колебания. Величина $nkT/(CU_0^2)$ представляет собой отношение среднего квадрата шумового напряжения к квадрату амплитуды напряжения свободных колебаний. В качестве критерия эта величина появляется и при другом подходе к рассматриваемым явлениям.

Допустим, что шумовой ток из-за частотной избирательности колебательной системы существует только в полосе частот порядка f_0/Q . Тогда, подставляя его эффективное значение в этой полосе в правую часть соотношения (18.10), для оценки ширины полосы захватывания получим

$$\delta f = \frac{(4nkT G f_0/Q)^{1/2}}{4\pi C U_0}. \quad (18.11)$$

Шум вряд ли «захватит» свободные колебания, если $\delta f < f_0/Q$. Используя (18.11), этому условию можно придать следующий вид:

$$nkT/2\pi C U_0^2 < 1. \quad (18.12)$$

Для типичных величин $n \approx 10$, $T \approx 100$ К, $C \approx 10^{-10}$ Ф из условия (18.12) получим

$$10^{-10}/U_0^2 < 1,$$

и, таким образом, для любых реальных значений амплитуд U_0 можно считать, что шум незначительно влияет на свободные колебания. На выходе цепи будем иметь смесь слабоискаженного свободного колебания и почти независимого шумового фона. Можно рассчитать уровень фона, рассматривая отклик системы на отдельную частотную компоненту шума, не принимая во внимание при этом возможность сильного взаимодействия или захватывания колебаний.

18.5. Выходной шум

Энергетический спектр напряжения на одиночном резонансном контуре, возбуждаемом шумовым током, выражается следующим образом:

$$W = \frac{4nkTG}{G^2 + (2\pi f_0 C)^2 (f/f_0 - f_0/f)^2}. \quad (18.13)$$

Выражение (18.13) для W остается справедливым и в том случае, если G в знаменателе соответствует включенной в контур отрицательной проводимости, а возможность захватывания колебаний шумовым током считается маловероятной. Таким образом, если бы проводимость H (см. рис. 18.5) была линейной и равной H_0 , то мы имели бы

$$W = \frac{4nkTG}{(H_0 - G)^2 + (2\pi f_0 C)^2 (f/f_0 - f_0/f)^2}.$$

Но в генераторе Ван-дер-Поля отрицательная проводимость H нелинейна и ее реакция на шумовое напряжение на частоте f в значительной степени видоизменяется в присутствии свободных колебаний с большой амплитудой U_0 . Этот эффект сложен, но при $|f - f_0| \gg f_0/Q$ его влиянием можно пренебречь, а при $|f - f_0| \ll \ll f_0/Q$ его можно учесть заменой $H_0 - G$ на $2(H_0 - G)$. Влияние амплитуды U_0 свободных колебаний с частотой $\omega_0 = 2\pi f_0$ на спектральную шумовую компоненту v с частотой ω обусловлено в основном тем, что величина $H_3 U^3$, для которой справедливо $H_3 U^3 = H_3 (U_0 \sin \omega_0 t + v \sin \omega t)^3$, содержит член $U^2_0 v \sin^2 \omega_0 t \cdot \sin \omega t = \frac{1}{2} U^2_0 v (1 - \cos 2\omega_0 t) \sin \omega t$, пропорциональный v .

Анализ выходного шума для генератора Робинсона в некотором смысле проще. Малое напряжение $v \sin \omega t$ на контуре приводит только к фазовой модуляции импульсов тока в цепи обратной связи, и глубина этой модуляции линейно зависит от v . Результирующее изменение напряжения в колебательном контуре квадратично зависит от глубины фазовой модуляции, и этим изменением из-за его малости можно пренебречь. Шумовой ток i , таким образом, непосредственно воздействует на резонансный контур и энергетический спектр шумового напряжения вычисляется по формуле (18.13).

Нас интересуют в первую очередь шумы вблизи резонансной частоты, когда $|f - f_0| \ll f_0/Q$. В этом случае для генератора Ван-дер-Поля

$$W_p = \frac{4nkTG}{4(H_0 - G)^2 + (2\pi f_0 C)^2 (f/f_0 - f_0/f)^2} \approx \frac{4nkT}{G} \left(\frac{G}{2(H_0 - G)} \right)^2, \quad (18.14)$$

а для генератора Робинсона

$$W_p = 4nkT/G. \quad (18.15)$$

Соотношение (18.14) можно представить иначе:

$$W_p \approx \frac{4nkT}{G} \left(\frac{2G}{3H_2 U^2_0} \right)^2 \quad (18.16)$$

Отсюда видно, что уровень выходных шумов убывает с ростом амплитуды U_0 свободных колебаний. Такая зависимость наблюдалась экспериментально. Действительно, уровень шумов в эксперименте, имея большое значение при малых U_0 , уменьшался с ростом U_0 , но далее зависимость (18.16) нарушалась. Причину такого нарушения можно объяснить. Если $-H_2U_0^2$ превосходит G , то членами высшего порядка при разложении H в ряд по U пренебрегать нельзя. Ими можно пренебречь в том случае, когда значение величины $-H_2U_0^2=4/3(H_0-G)$ мало по сравнению с H_0 и G (так как $H_0 \sim G$). При увеличении U_0 до значений, при которых $-H_2U_0^2 \approx G$ (чего можно добиться, увеличив H_0 или уменьшив G), генератор Ван-дер-Поля по своим характеристикам все больше становится подобным генератору Робинсона, и уровень шума никогда не падает ниже значения, определяемого соотношением (18.15). Однако отношение шума к сигналу на выходе пропорционально W/U_0^2 и падает с ростом амплитуды сигнала. Следовательно, в том случае, когда на выходе генератора необходимо получить особо чистые синусоидальные колебания, желательно ввести генератор в режим колебаний с большой амплитудой (но это уже будет не генератор Ван-дер-Поля). Желательно также увеличить добротность Q колебательного контура, уменьшив тем самым G . Все это обеспечивает условия, при которых активная цепь не приводит к большим значениям коэффициента шума n . Далее рассмотрим факторы, которые определяют значение n .

18.6. Коэффициент шума

Коэффициент шума, а, вернее, величина $4(n-1)kT$, характеризует шум, вносимый активным прибором и элементами связанной с ним цепи. Активный прибор представляет собой элемент с отрицательной проводимостью, значение коэффициента шума которого n зависит от физических процессов, происходящих в приборе. Один из таких приборов, а именно, отражательный клистрон, будет рассмотрен ниже. Здесь же речь пойдет о генераторах, в которых усиление мощности обеспечивается усилителем, охваченным обратной связью, причем генераторы Ван-дер-Поля и Робинсона не-

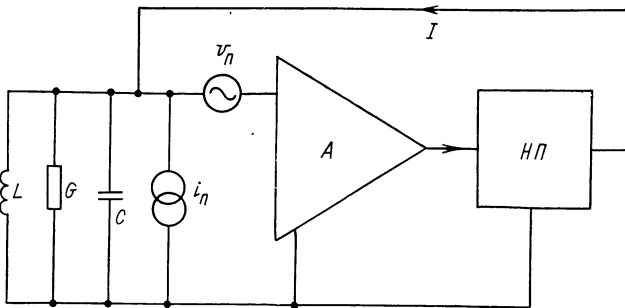


Рис. 18.6. Шумовые источники v_n и i_n , связанные с генератором

необходимо исследовать отдельно. На рис. 18.6 показана исходная схема с двумя шумовыми генераторами — генератором шумового тока i_n и генератором шумового напряжения v_n , условно представляющими шумы усилителя. Очевидно, что i_n представляет собой добавочный ток к току теплового шума проводимости G , а v_n необходимо рассмотреть особо. Шумовое напряжение v_n приводит к появлению шумового тока Hv_n в цепи обратной связи. Тогда сумма $4kT + \omega_i + H^2\omega_v$ представляет собой энергетический спектр полного шумового тока в колебательном контуре, и если выразить ω_i как $4kTg_n$, а ω_v как $4kTr_n$, для коэффициента шума получим

$$n = 1 + g_n/G + Gr_n(H/G)^2. \quad (18.17)$$

Если амплитуда колебаний генератора невелика ($H \sim H_0 \sim G$), то

$$n \approx 1 + g_n/G + Gr_n. \quad (18.18)$$

Выражение (18.18) представляет собой коэффициент шума F усилителя A с источником сигнала, имеющим внутреннее сопротивление $1/G$. Например, если первый каскад усилителя построен на биполярном транзисторе с коллекторным током I_K и $g_m = eI_K/(kT)$, то $g_n = 1/2g_m\beta^{-1}$ и $r_n = 1/2g_m^{-1}$, где β — коэффициент усиления по постоянному току. Пусть $\beta = 100$, $I_K = 1$ мА и $g_m = 40$ мА/В, тогда при $1/G = 10^4$ Ом получим $n = 1 + 2 + 10^{-3} \approx 3$.

Если схема, изображенная на рис. 18.6, соответствует генератору Робинсона, то шумовой ток i_n по-прежнему аддитивен, а влияние v_n уже не сводится к амплитудной модуляции тока I в цепи обратной связи. Действие генератора шумового напряжения v_n в этом случае приводит к фазовой модуляции.

Рассмотрим, как влияет на шумовые характеристики усилителя добавка к напряжению свободных колебаний $U_0 \sin \omega_0 t$ спектральной компоненты $v \sin[(\omega_0 + \delta\omega)t + \varphi]$ шумового напряжения. Напряжение на входе усилителя

$$\begin{aligned} U &= U_0 \sin \omega_0 t + v \sin[(\omega_0 + \delta\omega)t + \varphi] = \\ &= [U_0^2 + 2U_0v \cos(\delta\omega t + \varphi) + v^2]^{1/2} \sin\left(\omega_0 t + \arctg \frac{v \sin \delta\omega t}{U_0 + v \cos \delta\omega t}\right) \end{aligned}$$

можно приближенно записать в виде

$$U \approx [U_0^2 + 2U_0v \cos(\delta\omega t + \varphi) + v^2]^{1/2} \sin\left(\omega_0 t + \frac{v}{U_0} \sin \delta\omega t\right).$$

При условии $\delta\omega \ll \omega_0$ ток в цепи обратной связи, поступающий на вход усилителя, модулирован по фазе с низкой частотой, и при прямоугольной форме тока с амплитудой I_0 для основной его составляющей вблизи ω_0 получаем

$$I = \frac{4I_0}{\pi} \sin\left(\omega_0 t + \frac{v}{U} \sin \delta\omega t\right) \approx \frac{4I_0}{\pi} \left(\sin \omega_0 t + \frac{v}{U_0} \cos \omega_0 t \sin \delta\omega t\right).$$

Так как $U_0 = \frac{4}{\pi} \frac{I_0}{G}$, добавочный член в I имеет вид

$$i' = vG \cos \omega_0 t \sin \delta \omega t = \frac{1}{2} vG [\sin(\omega_0 + \delta \omega) t - \sin(\omega_0 - \delta \omega) t].$$

Спектральная компонента шума усилителя при $\omega_0 + \delta \omega$ создает взаимно коррелированный шум в боковых полосах при $\omega_0 + \delta \omega$ и $\omega_0 - \delta \omega$. Очевидно, что простейшее описание результата действия шума усилителя выражается как фазовая модуляция U_0 , и мы кратко обсудим этот вопрос ниже. А сейчас, не учитывая взаимной корреляции, рассмотрим энергетический спектр i' . Источником шума на частоте $\omega_0 + \delta \omega$ является шум v_n при $\omega_0 \pm \delta \omega$, и, следовательно,

$$w'_i = 2G^2 (w_v/4) = \frac{1}{2} G^2 w_v = \frac{1}{2} G^2 4kTr_n;$$

$$n = 1 + g_n/G + Gr_n/2. \quad (18.19)$$

С точностью до множителя $1/2$ последний член в (18.19) такой же, как и в выражении для коэффициента шума (18.18) генератора Ван-дер-Поля, и на практике использование любой из этих двух формул, вероятно, не представляет особой разницы.

Глубина фазовой модуляции свободного колебания с амплитудой U_0 вблизи ω_0 , вызванной спектральной компонентой шума с амплитудой v , равна v/U_0 . Если же добротность колебательного контура велика, то даже при $\delta \omega \ll \omega_0$ сопротивление контура не равно $1/G$, а выражается в виде

$$Z = \frac{1/G}{1 + jQ(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)},$$

и глубина фазовой модуляции дается формулой

$$\varphi(v) = \frac{v/U_0}{[1 + Q^2(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)]^{1/2}}.$$

Введя энергетический спектр v в виде $4kTr_n$, получим выражение для среднего квадрата отклонения фазы, обусловленного вкладом всех спектральных компонент v , в виде

$$\langle \varphi^2 \rangle = \frac{1}{U_0^2} \int_0^\infty \frac{4kTr_n df}{1 + Q^2(f/f_0 - f_0/f)^2} = \frac{\pi}{2} \frac{4kTr_n f_0}{QU_0^2},$$

или

$$\langle \varphi^2 \rangle = \frac{kT}{CU_0^2} Gr_n.$$

Например, для $T=300$ К, $G^{-1}=10^4$ Ом, $r_n=100$ Ом и $C=100$ пФ имеем $\langle \varphi^2 \rangle \approx 4 \cdot 10^{-13} / U_0^2$. Для $U_0=1$ В среднеквадратичное отклонение фазы приблизительно равно $7 \cdot 10^{-7}$ рад. Это же значение будет и грубой оценкой относительной девиации частоты $\Delta f/f_0$. В приведенных расчетах принимался во внимание только шум,

связанный с усилителем. Необходимо учесть также вклад шумового тока колебательного контура в фазовые флуктуации. В результате как для генератора Ван-дер-Поля, так и для генератора Робинсона полный квадрат фазовых отклонений

$$\Delta\varphi^2 \sim \frac{nkT}{CU_0^2}. \quad (18.20)$$

Для некоторых генераторов, например генератора Колпица, схема которого представлена на рис. 18.7, только некоторая часть

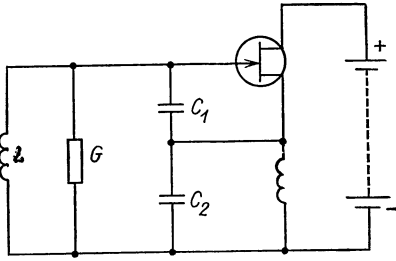


Рис. 18.7. Генератор Колпица на полевом транзисторе

α напряжения на контуре прикладывается к активному прибору, для схемы генератора Колпица $\alpha = C_2 / (C_1 + C_2)$.

Для схемы, изображенной на рис. 18.6, это эквивалентно трансформации проводимости $G \rightarrow G/\alpha^2$, и все полученные ранее результаты остаются справедливыми с учетом такой замены. В конечном счете можно получить как уменьшение, так и увеличение коэффициента шума n в зависимости от того, насколько значение вели-

чины α^2/G по сравнению с $1/G$ близко к оптимальному значению внутреннего сопротивления источника для активного прибора.

Вообще говоря, исключая спектрометры ядерного резонанса и супергетеродинные системы с генератором в качестве гетеродина, значение шумов генераторов на практике не столь уж велико. Все же в том случае, когда требуется обработать сигнал с напряжением порядка милливольт, с точки зрения шумовых характеристик лучше получить его от ослабленного большого сигнала мощного генератора, чем пытаться специально сделать маломощный генератор.

18.7. Отражательные клистроны

Многие приемники СВЧ представляют собой простые супергетеродинные системы без высокочастотного усиления, в первом каскаде которых стоит смеситель на полупроводниковом диоде с гетеродином — отражательным клистроном. Шумы клистроны на частотах $f_0 \pm f_i$, где f_0 — частота гетеродина, а f_i — промежуточная частота, будут поступать на вход усилителя промежуточной частоты.

Тепловой шум электронного пучка является основным источником шумов отражательного клистроны. Обычно эффективный ток пучка I_0 несколько меньше катодного тока, так как не все испускаемые катодом электроны пересекают резонансную полость. Более того, так как пучок частично сглажен пространственным зарядом, энергетический спектр флуктуаций тока в пучке может быть несколько меньше по значению, чем $2eI_0$.

Пусть Q — нагруженная добротность резонатора, а Z — эффективное шунтирующее полное сопротивление на резонансной частоте. Тогда энергетический спектр выходного шума на частотах, не слишком близких к f_0 , можно представить в виде

$$W_n \sim 2eI_0Z[1 + Q^2(f/f_0 - f_0/f)^2]^{-1}, \quad (18.21)$$

и энергия шума в резонаторе равна $2eI_0Z$.

Значение энергии шума необходимо сравнить со значением величины $Q^2P/2\pi f$ — энергией колебаний с выходной мощностью P . Отношение этих значений показывает, как шум влияет на поведение генератора. В типичном случае, при $I_0=15$ мА, $Z=10^4$ Ом, $Q=1000$, $f_0=10^{10}$ Гц и $P_0=30$ мВт это отношение приблизительно равно 10^{-7} , т. е. шум оказывает малое влияние на генерацию колебаний. Если в приемнике при промежуточной частоте 50 МГц используется генератор с такими параметрами, значение суммарного шума генератора вблизи f_0+f_i составляет заметную величину: $4eI_0Z/100 \approx 250$ кТ. Только часть мощности гетеродина, приблизительно 1 мВт, необходимо подать на диод. И хотя на диод поступает ослабленный шум, его значение велико — порядка 10 кТ. В приемниках с низким коэффициентом шума для того чтобы исключить шум гетеродина, используют различные схемы с балансным смесителем. Отметим также, что использование как можно более высоких значений промежуточных частот дает определенные преимущества с точки зрения минимизации шумов.

ГЛАВА 19

СМЕСИТЕЛИ И ФАЗОЧУВСТВИТЕЛЬНЫЕ ДЕТЕКТОРЫ

19.1. Введение

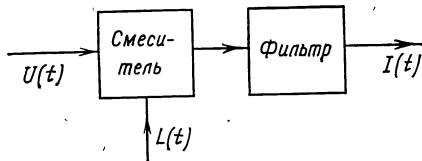
Смеситель преобразует входной сигнал с частотным спектром, сосредоточенным вблизи несущей частоты f_r , в пропорциональный сигнал со спектром, сосредоточенным вблизи другой, обычно более низкой, частоты f_i . Частота f_i называется промежуточной. Такое преобразование достигается путем смешения на нелинейном элементе входного сигнала с сигналом гетеродина на частоте f_0 , равной сумме или разности частот f_r и f_i . Если смеситель установлен на выходе усилителя с высоким коэффициентом усиления, то шум смесителя и коэффициент преобразования (потери преобразования) не играют значительной роли. Однако оба эти фактора совместно с шумами гетеродина необходимо учитывать, если смеситель, как это часто делается в технике СВЧ, является первым каскадом приемника.

Фазочувствительный детектор представляет собой по существу тот же смеситель, в котором частота f_0 гетеродина совпадает с несущей частотой f_r , так, что спектр выходного сигнала сосредоточен в области очень низких частот вблизи нулевой частоты. Значение и знак постоянной составляющей выходного сигнала зависят

от разности фаз колебания гетеродина (или опорного генератора) и несущей. Фазочувствительный детектор используется в основном в системах, в которых заранее известны фазовые соотношения между принимаемым сигналом и сигналом опорного источника. Появляется возможность идентификации принимаемого сигнала даже на фоне шумов очень высокого уровня, сосредоточенных на других частотах.

19.2. Процесс смешения

Смеситель можно рассматривать как устройство, выходной сигнал которого $I(t)$ представляет собой произведение входного сигнала $U(t)$ на $L(t)$ — некоторую периодическую функцию с частотой повторения f_0 , описывающую возбуждение нелинейного элемента гетеродином:



$$I(t) = L(t)U(t). \quad (19.1)$$

Рис. 19.1. Функциональная схема смесителя

Нет необходимости в том, чтобы $L(t)$ соответствовала синусоидальным колебаниям, часто эти колебания имеют прямоугольную форму. В общем случае

$$L(t) = L_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [L_n \exp(2\pi j n f_0 t) + \text{к. с.}]. \quad (19.2)$$

На рис. 19.1 изображена функциональная схема смесителя, на выходе которого стоит полосовой фильтр или усилитель с полосой пропускания Δf_i вблизи f_i . Частоты f_0 , f_i и Δf_i обычно выбираются так, чтобы выполнялись условия $\Delta f_i \ll f_i$ и $f_i < f_0/2$. Тогда если представить входное напряжение в виде

$$U(t) = \int_0^{\infty} [U(f) \exp(2\pi j f t) + \text{к. с.}] df, \quad (19.3)$$

то выходной сигнал $I(t)$ будет содержать суммарные и разностные частоты, образованные основной частотой функции $L(t)$ при $n=1$ и частотами входного напряжения $U(t)$. Это значит, что при

$$I(t) = \int_0^{\infty} [I(F) \exp(2\pi j F t) + \text{к. с.}] dF \quad (19.4)$$

для $I(F)$ имеем

$$I(F) = L_1 U^*(f_0 - F) + L^*_{-1} U(f_0 + F). \quad (19.5)$$

Из (19.5) сразу же следует, что

$$W(F) = L_1 L^*_{-1} [\omega(f_0 - F) + \omega_0(f_0 + F)], \quad (19.6)$$

где $\omega(f)$, $W(F)$ — энергетические спектры $U(t)$ и $I(t)$ соответственно.

Спектр сигнала $U(t)$ ограничен шириной полосы частот, равной Δf_i вблизи частоты $f_0 - f_i$ или $f_0 + f_i$, и для определенности будем полагать, что $f_0 - f_i$ соответствует частоте канала полезного сигнала, а $f_0 + f_i$ — частоте зеркального канала. Как будет видно из дальнейшего, на выходе смесителя содержится шум обоих каналов. Отношение шум/сигнал на выходе удваивается, если входной сигнал $U(t)$ не отфильтрован и ω соответствует белому шуму. Таким образом, желательно, и обычно осуществимо, ограничить ширину полосы входного усилителя так, чтобы на его выходе отсутствовал усиленный шум зеркального канала. Если это сделано, то Δf_i определяет как ширину спектра выходного сигнала, так и ширину полосы шумов.

19.3. Фазочувствительное детектирование

В фазочувствительных детекторах полоса пропускания входной цепи обычно расширяется вниз вплоть до частот, близких к нулю, или по крайней мере до частот гораздо более низких, чем $f_r = f_0$, и на выходе стоит фильтр низких частот с характеристикой, начинающейся от нулевой частоты. Низкочастотный сигнал на выходе можно представить выражением

$$I(F) = L_0 U(F) + \sum_{n=1}^{\infty} [L_n U^*(nf_0 - F) + L_n^* U(nf_0 + F)] \quad (19.7)$$

с постоянной составляющей, равной

$$I_0 = L_1 U^*(f_0) + L_1^* U(f_0). \quad (19.8)$$

Фазочувствительные детекторы на практике устроены так, что L_0 и все члены L_n с четным n равны нулю. Если же на входе имеется шум вблизи частот $3f_0$, $5f_0$ и т. д., то этот шум совместно с шумом вблизи частоты f_0 появится на выходе. Поэтому необходимо фильтровать входной сигнал так, чтобы его спектр $\omega(f)$ быстро стремился к нулю при $f > f_0$. Если $\omega(f)$ соответствует белому шуму вблизи f_0 , то энергетический спектр шума на выходе при низких F таков:

$$W(F) = L_1 L_1^* [\omega(f_0 - F) + \omega(f_0 + F)] = 2L_1 L_1^* \omega. \quad (19.9)$$

Будем считать, что L_1 — вещественная величина, и выразим входной сигнал через его эффективное значение U_s в виде

$$U_s(t) = \frac{U_s}{\sqrt{2}} [\exp j(2\pi f_0 t + \varphi) + \text{к. с.}]. \quad (19.10)$$

Тогда для постоянной составляющей на выходе получим

$$I_0 = 2^{1/2} U_s L_1 \cos \varphi. \quad (19.11)$$

При $\varphi = 0$ средний квадрат отношения шум/сигнал на выходе

$$\left(\frac{N}{S}\right)^2 = \frac{1}{2U_s^2} \int_0^{\Delta F} 2\omega df = \frac{\omega \Delta F}{U_s^2}. \quad (19.12)$$

Отсюда следует, что ширина полосы шумов системы в целом равна шумовой полосе выходного фильтра. Если, к примеру, в качестве выходного фильтра используется простая RC -цепь, то $\Delta F = 1/(4\tau)$.

На практике типичные значения $\tau = 100$ с при полосе пропускания на входе 100 Гц, так что при отношении сигнал/шум после детектирования, равном единице, это отношение до детектирования должно быть равно 1/200. При среднеквадратичном значении шума, превосходящем сигнал в 200 раз, пиковое напряжение шума может превосходить сигнал в 1000 раз, что ставит практически важную проблему при проектировании фазочувствительного детектора. Коль скоро фазочувствительный детектор рассчитан на работу в широком динамическом диапазоне, он не должен перегружаться пиковыми напряжениями шума, намного превышающими напряжение ожидаемого сигнала. Если в отсутствие шума максимальный выходной сигнал, не приводящий к перегрузке детектора, равен $I_{\text{макс}}$ и дрейф постоянной составляющей на выходе, вызванный несовершенствами в устройстве, равен δI , то отношение минимального значения сигнала доступного обнаружению к значению входного сигнала при перегрузке равно $\delta I/I_{\text{макс}}$. Это отношение определяет также наименьшее значение величины $(4\tau\Delta f)^{-1/2}$.

19.4. Смеситель в качестве входного каскада

В диапазоне частот до 1000 МГц можно просто и недорого осуществить усиление с низким уровнем шумов, и поэтому в устройствах, работающих в этом диапазоне, смеситель не бывает входным каскадом приемника. Но в СВЧ-диапазоне такое усиление осуществить затруднительно, и в приемниках СВЧ диодный смеситель и усилитель промежуточной частоты (за редкими исключениями, связанными с особо точными системами) стоят на входе приемника.

Промежуточная частота обычно составляет лишь малую часть от частоты гетеродина, и так как гетеродины, используемые в СВЧ приемниках, как правило, маломощные, а потому шумящие, то становятся существенными шумы гетеродина как на частоте сигнала $f_0 + f_i$, так и на зеркальной частоте $f_0 - f_i$. Однако уровень шума можно существенно снизить, используя балансный смеситель с двумя смесительными диодами. Если напряжение гетеродина подводится к диодам синфазно, то шумы на выходе диодов на промежуточной частоте, связанные с шумом гетеродина, будут взаимно коррелированы и тоже синфазны.

При противофазном включении диодов относительно сигнала их выходные сигналы будут противофазны. Однако включение входного контура усилителя промежуточной частоты по двухтактной схеме обеспечивает суммирование выходных сигналов диодов и исключение шумов гетеродина. В малошумящих приемниках СВЧ такой метод используется почти повсеместно, это позволяет

снизить уровень шумов гетеродина до вполне приемлемых значений.

Диодный смеситель имеет коэффициент преобразования G , определяемый как отношение выходной мощности промежуточной частоты к входной мощности высокой частоты, меньшей единицы. К тому же смеситель сам генерирует шумы, и если мы опишем их посредством энергетического спектра kT_d на промежуточной частоте, то общая шумовая температура приемника имеет вид

$$T_n = T_s + \frac{1}{G} (T_d + T_a), \quad (19.13)$$

где T_a — шумовая температура усилителя промежуточной частоты; T_s связана с преобразованным шумом зеркального канала. Значения параметров G и T_d зависят от многих факторов, в том числе и от физических свойств и природы самого диода. Коэффициент преобразования G для данного диода зависит не только от полного сопротивления диода на частотах сигнала, зеркального канала и гетеродина, но и на гармониках частоты гетеродина. Он также зависит от переменной емкости диода, которая привносит в устройство некоторые свойства параметрического усилителя. При определенных условиях G может превышать единицу, но для существующих диодов это обычно не связано со снижением T_d . Значение T_d зависит в какой-то степени от мощности гетеродина и из-за важности фликкер-шума ($1/f$ -шума) от значения промежуточной частоты. До недавнего времени значения $G < 1/4$ и $T_d > 300$ К были стандартными, но с появлением диодов с барьером Шоттки значение G заметно увеличилось, и наилучшие смесители имеют шумовую температуру (при исключении шумов зеркального канала) около 300 К. Обзор последних результатов приведен Драгоне [10]. Необходимо, однако, отметить, что шумовая температура, даже такая, как 300 К, значительно превышает шумовую температуру, обеспечиваемую параметрическими усилителями и тем более лазерами, и в наиболее ответственных применениях, таких как спутниковая связь, использование этих приборов предпочтительнее.

ГЛАВА 20

ДЕТЕКТОРЫ

Детекторы, используемые на практике, делятся, как правило, на две категории: квадратичные детекторы и линейные, различающиеся законом зависимости их выходного тока от входного напряжения

$$I = aU^2, \quad (20.1a)$$

или

$$\left. \begin{aligned} I &= aU; \quad U \geq 0; \\ I &= 0; \quad U < 0 \end{aligned} \right\} \quad (20.16)$$

Работа детекторов зависит от уровня входного напряжения. При низком уровне все они подобны квадратичному детектору. Болметры при любом уровне входного напряжения являются квадратичными детекторами, в то время как поведение полупроводниковых и диодных детекторов при большом уровне входного напряжения приблизительно соответствует идеальному линейному детектору.

Для усилителей с большим коэффициентом усиления достаточно знать влияние детектора на их выходные шумы. Если же детектор стоит на входе приемника, то важны и собственные его шумы.

20.1. Детектирование

Типичная функциональная схема детектора показана на рис. 20.1. На вход подается сигнал с напряжением $U(t)$ в полосе частот Δf_0 вблизи f_0 на фоне шума, а на выходе возникает ток в диапазоне низких частот от нуля до Δf_0 . Здесь нет необходимости строго определять ширину полосы Δf_0 . Оговорим лишь, что входное напряжение пренебрежимо мало на частотах вне интервала с границами $f_0 \pm 2\Delta f_0$ и что Δf_0 меньше, чем величина порядка $f_0/4$.

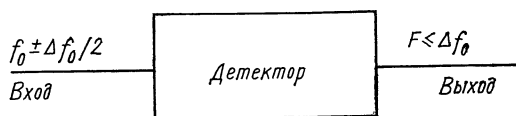


Рис. 20.1. Основная функциональная схема детектора

Компоненты спектра в области низких частот от нуля до Δf_0 на выходе детектора связаны с возникновением разностных частот компонент спектра на входе. Спектр на выходе содержит также суммарные частоты вблизи f_0 , $2f_0$ и т. д., которыми мы будем пренебрегать.

Свойства низкочастотного выходного сигнала наиболее удобно исследовать, пользуясь понятием огибающей входного сигнала. Разложим напряжение входного сигнала в ряд Фурье на интервале T , принимая за единицу времени величину $T/(2\pi)$:

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nt + \varphi_n).$$

Заметно отличны от нуля только те коэффициенты ряда a_n , для которых выполняется условие $f_0 - \Delta f_0/2 < n/T < f_0 + \Delta f_0/2$.

После простых тригонометрических преобразований $U(t)$ можно представить в виде

$$U(t) = A \cos n_0 t - B \sin n_0 t,$$

где

$$A = \sum a_n \cos[(n - n_0)t + \varphi_n];$$

$$B = \sum a_n \sin[(n - n_0)t + \varphi_n],$$

и значение $n_0 = f_0 T$ соответствует центральной частоте. В результате выражение для $U(t)$ можно записать так:

$$U(t) = R(t) \cos(n_0 t + \Theta), \quad (20.2a)$$

где

$$R(t) = +\sqrt{A^2 + B^2}; \quad (20.2б)$$

$$\operatorname{tg} \Theta = A/B.$$

Так как число n изменяется в ограниченном интервале $(f_0 \pm \Delta f_0/2)T$, то в A и B нет компонент с частотами, превышающими $\Delta f_0/2$, а в $R(t)$ нет компонент с частотами большими Δf_0 .

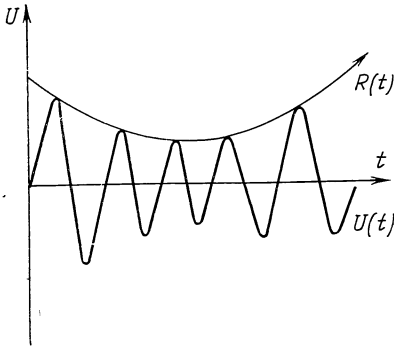


Рис. 20.2. Огибающая $R(t)$ амплитудно-модулированного сигнала $U(t)$

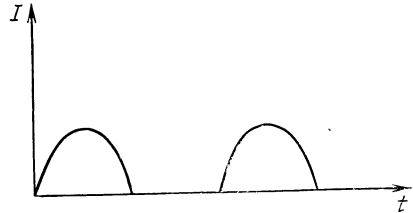


Рис. 20.3. Синусоидальный сигнал после линейного детектирования

Следовательно, функция времени $R(t)$ будет медленно меняться по сравнению с $\cos n_0 t$ и представляет собой огибающую сигнала, изображенную на рис. 20.2.

Напряжение $U_0 \cos n_0 t$ на входе квадратичного детектора создает на выходе ток

$$I = \alpha^2 U_0^2 \cos^2 n_0 t = \frac{1}{2} \alpha U_0^2 (1 + \cos 2n_0 t),$$

и единственной низкочастотной компонентой этого тока является постоянная составляющая $I_{dc} = \frac{\alpha}{2} U_0^2$. Ясно, что для сигнала вида

$U(t) = R(t) \cos(n_0 t + \Theta)$ низкочастотный ток на выходе детектора равен

$$I_{lf} = \frac{\alpha}{2} R^2(t). \quad (20.3)$$

Форма тока на выходе линейного детектора при входном гармоническом сигнале $U_0 \cos n_0 t$ показана на рис. 20.3. В этом случае единственной низкочастотной компонентой выходного тока

опять-таки будет постоянная составляющая $I_{dc} = \frac{\alpha}{\pi} U_0$, а для входного сигнала вида $R(t) \cos(n_0 t + \Theta)$ — $I_{lf} = \frac{\alpha}{\pi} R(t)$.

20.2. Шум на входе квадратичного детектора

Низкочастотный ток на выходе квадратичного детектора (20.3) можно представить в виде

$$I_{lf} = \frac{\alpha}{2} (A^2 + B^2) = \frac{\alpha}{2} \sum_n \sum_m a_n a_m \cos[(n - m)t + \varphi_n - \varphi_m].$$

Если I_{lf} разложить в ряд Фурье

$$I_{lf} = \sum_k C_k \cos(kt + \theta_k),$$

то k -е члены возникают при $m = n \pm k$. В частности, для постоянной составляющей получим

$$I_{dc} = C_0 = \frac{\alpha}{2} \sum_n a_n^2.$$

Когда на вход детектора подается шум с энергетическим спектром $\omega(f)$, имеем

$$\sum \langle a_n^2 \rangle = 2 \int_{f_0 - \Delta f_0/2}^{f_0 + \Delta f_0/2} \omega(f) df,$$

и поэтому

$$I_{dc} = C_0 = \alpha \int_{f_0 - \Delta f_0/2}^{f_0 + \Delta f_0/2} \omega(f) df.$$

Для члена с частотой k получим

$$C_k \cos(kt + \theta_k) = \frac{\alpha}{2} \left[\sum_n a_n a_{n-k} \cos(kt + \varphi_n - \varphi_{n-k}) + \sum_n a_n a_{n+k} \cos(kt + \varphi_{n+k} - \varphi_n) \right].$$

Обе суммы в этом выражении примерно одинаковы, так как отличаются только членами с $n < k$, или, иначе, $f < \Delta f_0$, для которых входное напряжение равно нулю. В результате получаем

$$C_k \cos(kt + \theta_k) = \alpha \sum_n a_n a_{n+k}' \cos(kt + \varphi_{n+k} - \varphi_n). \quad (20.4)$$

Фазы φ_{n+k} и φ_n — некоррелированные случайные величины, и поэтому среднее по ансамблю от выражения (20.4) равно нулю. Следовательно, $\langle C_k \rangle = 0$, $k \neq 0$.

Для квадрата выражения (20.4) имеем

$$C_k^2 \cos^2(kt + \theta_k) = \alpha^2 \sum_n \sum_m a_n a_m a_{n+k} a_{m+k} \cos(kt + \varphi_{n+k} - \varphi_n) \times \\ \times \cos(kt + \varphi_{m+k} - \varphi_m).$$

Перекрестные члены с $m \neq n$ при усреднении по ансамблю из-за взаимной независимости фаз исчезают, что дает

$$\langle C_k^2 \rangle = \alpha^2 \sum_n \langle a_n^2 a_{n+k}^2 \rangle.$$

Из-за взаимной независимости a_n для разных n имеем

$$\langle C_k^2 \rangle = \alpha^2 \sum_n \langle a_n^2 \rangle \langle a_{n+k}^2 \rangle.$$

Если выразить $\langle C_k^2 \rangle$ через энергетический спектр $W(F)$, где $F = k/T$, то получим

$$\langle C_k^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} 2W(F)/T; \quad \langle a_n^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} 2\omega(f)/T.$$

Заменяя суммирование по n интегрированием по правилу

$$\sum_n \rightarrow T \int df,$$

получаем окончательный результат:

$$W(F) = 2\alpha^2 \int_{f_0 - \Delta f_0/2}^{f_0 + \Delta f_0/2} \omega(f) \omega(f + F) df. \quad (20.5)$$

Таким образом, нам удалось выразить энергетический спектр на выходе детектора через энергетический спектр на входе.

20.3. Шум на входе линейного детектора

В этом случае из-за наличия квадратного корня в выражении (20.26) задача существенно усложняется. Строгое решение получено Райсом [32], результатами которого мы и воспользуемся. Постоянная составляющая тока на выходе такова:

$$I_{dc} = \alpha \left[\int \frac{\omega(f)}{2\pi} df \right]^{1/2},$$

а для энергетического спектра имеем

$$W(F) = \frac{\alpha^2 \int \omega(f) \omega(f + F) df}{4\pi \int \omega(f) df}.$$

20.4. Белый шум на входе в полосе Δf_0

При наличии на входе белого шума с равномерным энергетическим спектром в полосе Δf_0 полученные выше выражения дают: для квадратичного детектирования

$$I_{dc} = \alpha \omega \Delta f_0; \quad (20.6)$$

$$W(F) = 2\alpha^2 \omega^2 \Delta f_0 [1 - F/(\Delta f_0)], \quad (20.7)$$

для линейного детектирования

$$I_{dc} = \alpha \left(\frac{\omega \Delta f_0}{2\pi} \right)^{1/2};$$

$$W(F) = \frac{\alpha^2 \omega}{4\pi} (1 - F/\Delta f_0). \quad (20.8)$$

Следовательно, для детекторов обоих типов спектр шума имеет максимум вблизи нулевой частоты и уменьшается до нуля при $F = \Delta f_0$.

Полная интенсивность низкочастотного шума на выходе получается из соотношений (20.7), (20.8) интегрированием от нуля до $F \geq \Delta f_0$:

для квадратичного детектирования

$$\Delta I^2 = \alpha^2 \omega^2 \Delta f_0, \quad (20.9)$$

для линейного детектирования $\Delta I^2 = \alpha^2 \omega \Delta f_0 / (8\pi)$.

Если ширина полосы частот ΔF измерительного прибора много меньше Δf_0 , то постоянную составляющую можно измерить с точностью $I_{dc} \pm (\omega \Delta F)^{1/2}$. Таким образом, относительная точность измерения I для квадратичного детектора равна $(2\Delta F/\Delta f_0)^{1/2}$, а для линейного детектора — $[\Delta F/(2\Delta f_0)]^{1/2}$. Точность измерения ω в любом случае равна $[2\Delta F/(\Delta f_0)]^{1/2}$.

20.5. Сигнал и шум на входе квадратичного детектора

Если на вход квадратичного детектора подается немодулированный синусоидальный сигнал $S \cos 2\pi f_0 t$ на фоне белого шума ω в полосе Δf_0 , то ток на выходе можно рассчитать, используя результаты разд. 20.2. Вычисления просты. Окончательное выражение для постоянной составляющей тока имеет вид

$$I_{dc} = \frac{\alpha}{2} (S^2 + 2\omega \Delta f_0), \quad (20.10)$$

следовательно, сигнал и шум детектируются независимо.

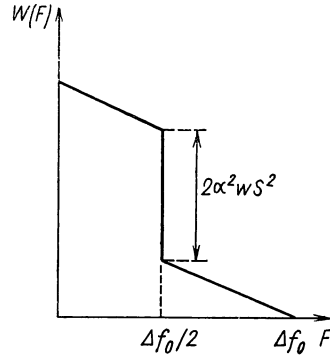
Выражение для энергетического спектра шума на выходе усложняется в этом случае из-за того, что возникают спектральные компоненты шума на частотах от нуля до $F = \Delta f_0/2$ в результате нелинейного взаимодействия колебаний как отдельных шумовых компонент, так и колебания, описывающего сигнал, с колебаниями шумовых компонент. Спектр шума в области частот

от $\Delta f_0/2$ до Δf_0 связан только с нелинейным взаимодействием колебаний спектральных компонент шума.

В результате получаем

$$\left. \begin{aligned} W(F) &= 2\alpha^2\omega \{S^2 + \omega\Delta f_0 [1 - F/(\Delta f_0)]\}; & 0 < F < \Delta f_0/2; \\ W(F) &= 2\alpha^2\omega^2\Delta f_0 [1 - F/(\Delta f_0)]; & \Delta f_0/2 < F < \Delta f_0. \end{aligned} \right\} \quad (20.11)$$

Рис. 20.4. Энергетический спектр $W(F)$ низкочастотного выходного сигнала квадратичного детектора при наличии на входе белого шума в полосе Δf_0 и сигнала S с частотой в середине полосы пропускания



На рис. 20.4 приведен полученный спектр $W(F)$. Выразим общую интенсивность шума, которую можно легко получить интегрируя уравнения (20.11) от нуля до $F \geq \Delta f_0$:

$$\Delta I^2 = \alpha^2\omega\Delta f_0 (S^2 + \omega\Delta f_0). \quad (20.12)$$

Следовательно, сильный сигнал увеличивает интенсивность шума на выходе квадратичного детектора.

20.6. Сигнал и шум на входе линейного детектора

Результаты анализа для линейного детектора более сложны. Но можно получить простые асимптотические формулы для двух предельных случаев: отношение сигнал/шум на входе $x = S^2/(2\omega\Delta f_0)$ мало; указанное отношение велико. Если $x \ll 1$ (отношение сигнал/шум мало), то

$$I_{dc} = \alpha \left(\frac{\omega\Delta f_0}{2\pi} \right)^{1/2} (1 + x/2); \quad (20.13)$$

$$W(F) = \frac{\alpha^2\omega}{4\pi} (1 - F/\Delta f_0); \quad (20.14)$$

$$\Delta I^2 = \frac{\alpha^2}{8\pi} \omega\Delta f_0. \quad (20.15)$$

Если $x \gg 1$ (S/N — отношение сигнал/шум велико), то

$$I_{dc} = \frac{\alpha S}{\pi} \left(1 + \frac{1}{4x} \right); \quad (20.16)$$

$$\left. \begin{aligned} W(F) &= \frac{2\alpha^2\omega}{\pi^2} \left[1 + \frac{1-F/(\Delta f_0)}{8x} \right]; \quad 0 < F < f_0/2; \\ W(F) &= \frac{2\alpha^2\omega}{\pi^2} \left[\frac{1-F/(\Delta f_0)}{8x} \right]; \quad \Delta f_0/2 < F < \Delta f_0; \end{aligned} \right\} \quad (20.17)$$

$$\Delta I^2 = \frac{\alpha^2\omega\Delta f_0}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{8x} \right). \quad (20.18)$$

Отметим, что сильный сигнал согласно (20.18) увеличивает интенсивность шума в $8/\pi$ раз. Из уравнения (20.13) видно также, что при малых отношениях сигнал на выходе уменьшается. Для вклада сигнала в постоянную составляющую тока на выходе детектора имеем

$$I_s = \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{\omega\Delta f_0}{2\pi} \right)^{1/2} x = \frac{\alpha S^2}{4(2\pi\omega\Delta f_0)^{1/2}}.$$

Этот результат можно получить из качественных соображений, разбив $R(t)$ на часть $n(t)$, связанную с шумом, и на часть $S(t)$, связанную с сигналом: $I_{dc} \approx Rt = +(n^2 + S^2)^{1/2} \approx |n| + \frac{1}{2} S^2/|n|$.

В результате $I_s \approx S^2/|n|$.

20.7. Отношение сигнал/шум после квадратичного детектирования

На практике ширина полосы пропускания ΔF после детектирования обычно много меньше или приблизительно равна Δf_0 . Рассмотрим первый случай, когда $\Delta F \ll \Delta f_0$. Из уравнения (20.10) следует, что сигнал на выходе равен $S_0 = I_{dc} - \alpha\omega\Delta f_0 = \alpha S^2/2$, в то время как из уравнений (20.12) для выходного шума получаем

$$N_0^2 = 2\alpha^2\omega\Delta F (S^2 + \omega\Delta f_0).$$

Отношение сигнал/шум на выходе, таким образом, равно

$$X = \frac{S_0^2}{N_0^2} = \frac{x^2\Delta f_0}{2(1+2x)\Delta F},$$

$x = S^2/(2\omega\Delta f_0)$ — отношение сигнал/шум до детектирования. Для слабых сигналов имеем $X \sim x^2$ и $X=1$ при

$$x = \sqrt{2\Delta F/(\Delta f_0)}. \quad (20.19)$$

В этом случае мощность входного сигнала равна

$$P_s = S^2/2 = x\omega\Delta f_0 = \omega \sqrt{2\Delta F\Delta f_0}. \quad (20.20)$$

Иногда полученный результат интерпретируют иначе: эффективная шумовая полоса усилителя с полосой Δf_0 , за которым следуют детектор и фильтр с полосой $\Delta F \ll \Delta f_0$, определяется как

$$\Delta f_n = \sqrt{2\Delta F\Delta f_0}. \quad (20.21)$$

Необходимо, однако, отметить, что не соблюдается ни пропорциональность между выходным и входным сигналами, ни пропорциональность отношений сигнал/шум на входе и выходе.

В случае сильных сигналов ($x \gg 1$) для X имеем

$$X = \frac{x\Delta f_0}{4\Delta F}, \quad (20.22)$$

откуда следует пропорциональность отношений сигнал/шум до и после детектирования. В этом случае можно с полным основанием говорить об эффективной шумовой полосе, которая, очевидно, равна $\Delta f_n = 4\Delta F$. Если детектор следует за усилителем с коэффициентом шума F_0 , то при мощности входного сигнала P_s отношение сигнал/шум на выходе равно

$$X = \left(\frac{S}{N}\right)_0^2 = \frac{P_s}{F_0 k T_0 \Delta f_n}.$$

Из уравнения (20.10) можно получить увеличение выходного сигнала δS_0 при повышении мощности P_s сильного входного сигнала на величину δP_s в виде $\delta S_0 = \alpha \delta P_s$. Выведем эффективное значение шума на выходе из (20.12):

$$N_0 = \alpha \sqrt{4P_s \omega \Delta F} = \alpha \sqrt{P_s \omega \Delta f_n},$$

так что $\delta S_0 = N_0$ при $\delta P_s = \sqrt{P_s \omega \Delta f_n}$, а не при $2\sqrt{P_s \omega \Delta f_n}$, как для линейной системы.

Когда $\Delta F \approx \Delta f_0$, из уравнений (20.10) и (20.12)

$$X = x^2 / (1 + 2x), \quad (20.23)$$

откуда для равенства единице выходного отношения сигнал/шум необходимо, чтобы $x = 1 + \sqrt{2}$ или

$$P_s = 2,4 \omega \Delta f_0. \quad (20.24)$$

Для сильных сигналов $X = x/2$, и при тех же самых допущениях для эффективной шумовой полосы получаем

$$\Delta f_n = 2\Delta f_0.$$

20.8. Отношение сигнал/шум после линейного детектирования

Здесь также необходимо различать случаи малых и больших значений величины x . При малых x и $\Delta F \ll \Delta f_0$ из уравнений (20.13) и (20.14) для ($x \ll 1$, $\Delta F \ll \Delta f_0$) имеем

$$X = \left(\frac{S}{N}\right)_0^2 = x^2 \frac{2\Delta f_0}{\Delta F}. \quad (20.25)$$

Следовательно, и для линейного детектора отношение сигнал/шум на выходе пропорционально квадрату этого отношения на входе, и мощность сигнала на входе при $X=1$ дается выражением (20.20), а «эффективная шумовая полоса» равна $(2\Delta f_0 \Delta F)^{1/2}$.

Для больших значений отношения сигнал/шум на входе, но при ΔF , малых по сравнению с Δf_0 , из уравнений (20.16) и (20.17)

при $x \gg 1$, $\Delta F \ll \Delta f_0$ следует

$$X = x \frac{\Delta f_0}{\Delta F}, \quad (20.26)$$

и в этом случае, так как $X \sim x$ и значение сигнала на выходе пропорционально значению входного сигнала, можно определить эффективную шумовую полосу без всяких оговорок:

$$\Delta F_n = \Delta F. \quad (20.27)$$

Для слабых сигналов при $\Delta F \sim \Delta f_0$ из уравнений (20.13) и (20.15) следует ($x \ll 1$, $\Delta F \sim \Delta f_0$)

$$X = x^2, \quad (20.28)$$

а для сильных сигналов из уравнений (20.16) и (20.18) (при $x \gg 1$, $\Delta F \sim \Delta f_0$) получаем

$$X = 2x. \quad (20.29)$$

Ни одна из полученных формул для $\Delta F \sim \Delta f_0$ не позволяет рассчитать величину x , при которой $X=1$. Тем не менее можно оценить значение входного сигнала P_s для этого случая, учитывая, что $x \sim X$ при $X=1$, и в результате $P_s \sim \omega \Delta f_0$.

Эффективная шумовая полоса при $x \gg 1$, как это следует из уравнения (20.29), равна

$$\Delta f_n = \Delta f_0 / 2. \quad (20.30)$$

Полученный, на первый взгляд, парадоксальный результат ($\Delta f_n < \Delta f_0$) связан с исходным допущением о строгой монохроматичности входного сигнала с большой амплитудой. Для реального сигнала с конечной шириной полосы частот, например для модулированного радиосигнала, анализ, представленный в разд. 20.5—20.8 и использующий предположение об одночастотности сигнала, неприменим.

20.9. Шум детектора

Для детектора, установленного во входном каскаде приемника, представляют интерес как процесс прохождения шума через него, приводящий к понятию эффективной шумовой полосы, так и собственные шумы детектора, а также его КПД выпрямления, определяемый как отношение низкочастотной мощности на выходе к радиочастотной входной мощности.

Если КПД выпрямления низок, то роль шумов низкочастотного усилителя, установленного на выходе детектора, заметно возрастает. К тому же необходимо иметь в виду различие между пороговой чувствительностью, определяемой как минимально обнаружимый сигнал, и дифференциальной чувствительностью к малым изменениям в сильном сигнале. Детекторы с низкой пороговой чувствительностью могут, однако, иметь высокую дифференциальную чувствительность. Вообще говоря, нет принципиальных ограничений, приводящих к низкой пороговой чувствительности детекторов. Фотоумножитель, представляющий собой помимо всего прочего квадратичный детектор, может при идеаль-

ных условиях обнаруживать отдельные фотоны с энергией $h\nu \approx 300 kT$, и если бы лавинное умножение в фотодиодах контролировалось еще проще, указанный предел можно было бы снизить на порядок. В этом смысле относительная неэффективность радиочастотных детекторов имеет, скорее, технический, чем фундаментальный характер.

Детекторы можно разбить на два больших класса — это детекторы, использующие нелинейность передаточной характеристики активного прибора, например такого, как транзистор, и детекторы, использующие пассивные приборы, в основном диоды. Активные приборы анализировать отчасти проще, так как в них входные и выходные цепи развязаны и уровень выходного шума таков, что шумы, генерируемые в последетекторном усилителе, несущественны.

Если выходной ток I активного прибора связан с входным напряжением v зависимостью

$$I = I_0 + g_m v + \gamma v^2 \quad (20.31)$$

и прибор имеет бесконечно большое входное сопротивление, то постоянная составляющая выходного тока, связанная с сигналом, такова:

$$I_s = 4R_s \gamma P_s, \quad (20.32)$$

где R_s — внутреннее сопротивление источника сигнала, а P_s — его мощность. Представив шумовой ток на выходе в виде

$$I_n^2 = 4nkTg_m \delta f, \quad (20.33)$$

для величины порогового сигнала получим

$$P_{\text{мин}} = \frac{(nkTg_m \delta f)^{1/2}}{2\gamma R_s}. \quad (20.34)$$

Для примера рассмотрим полевой транзистор с фиксированным (отрицательным) смещением затвора — U_0 и током насыщения в цепи сток — исток $I_{c.н}$, для которого

$$I = I_{c.н} \left(1 - \frac{U_0}{U_p} + \frac{v}{U_p} \right)^2. \quad (20.35)$$

Из (20.31) и (20.35) имеем:

$$\begin{aligned} I_0 &= I_{c.н} \left(1 - \frac{U_0}{U_p} \right)^2; \\ g_m &= \frac{2I_{c.н}}{U_p} \left(1 - \frac{U_0}{U_p} \right); \\ \gamma &= \frac{I_{c.н}}{U_p^2}. \end{aligned}$$

В результате получим

$$P_{\text{мин}} = \frac{U_p}{R_s g_0} \left(\frac{g_m}{g_0} \right)^{1/2} (nkTg_0 \delta f)^{1/2}, \quad (20.36)$$

где g_0 — взаимная проводимость при нулевом смещении. Коэффициент шума равен

$$n \sim 1 + f_0/f_2,$$

где f_0 — частота, при которой заметно начинает проявляться фликкер-шум, а f_2 — частота на выходе. Если, например, $g_0 = 5$ мА/В, $U_p = 2$ В, $g_m/g_0 = 1/4$, $T = 300$ К и $R_s = 25$ кОм, что соответствует достаточно высокой Q входного контура, то для $P_{\text{мин}}$ получаем $P_{\text{мин}} \approx 3,6 \cdot 10^{-14} (n\delta f)^{1/2}$. При $f_0 = 5000$ Гц и полосе последетекторного усилителя от 10 до 10^4 Гц коэффициент шума равен

$$n = \frac{1}{\delta f} \int_{10}^{10^4} \left(1 + \frac{5000}{f} \right) df \approx 6, \quad (20.37)$$

и $P_{\text{мин}} \approx 10^{-11}$ Вт. Полученный результат можно сравнить со значением мощности теплового шума в той же самой полосе, приблизительно равным $4 \cdot 10^{-17}$ Вт. Ясно, что такой детектор по значению величины $P_{\text{мин}}$ в $2,5 \cdot 10^5$ раз уступает идеальному, но не видно практических путей изменения параметров детектора, которые бы значительно его улучшили.

Выражение (20.36) определяет также дифференциальную чувствительность детектора, которую можно сравнить с дифференциальной чувствительностью стоящего перед ним линейного усилителя с коэффициентом шума F и той же самой полосой пропускания:

$$P_{\text{мин}} = 2(FkT\delta f P_s)^{1/2}. \quad (20.38)$$

Приравнявая (20.36) к (20.38), получаем выражение для эквивалентного коэффициента шума

$$F = \frac{ng_m}{4R_s^2 \gamma^2 P_s} = n \frac{g_m}{g_0} \frac{1}{g_0 R_s} \frac{U_p^2}{4P_s R_s} = n \frac{g_m}{g_0} \frac{1}{g_0 R_s} \frac{U_p^2}{v^2}. \quad (20.39)$$

Для численных значений параметров, приведенных выше, из (20.39) получаем $F = 1,6 \cdot 10^{-2} U_p^2/v^2$. При входном напряжении v , стремящемся к U_p , значение величины F становится малым, и поэтому в суммарный шум на выходе необходимо включить шум, возникающий в процессе детектирования входного шума, которым мы до сих пор здесь пренебрегали. Таким образом, соотношение (20.39) заменяется следующим:

$$F = F_0 + n \frac{g_m}{g_0} \frac{1}{g_0 R_s} \frac{U_p^2}{v^2}, \quad (20.40)$$

где F_0 — коэффициент шума транзистора, рассматриваемого как усилитель. Если среднеквадратичное напряжение v входного сигнала превосходит $U_p/5$, то эффективный коэффициент шума примерно равен F_0 . Видно, что рассмотренный детектор, обладая низкой пороговой чувствительностью, имеет хорошие характеристики при детектировании малых изменений в сильном сигнале.

Схема несколько более сложного детектора на активном приборе показана на рис. 20.5. Это очень плохой пороговый детектор, но, как мы увидим, хороший линейный дифференциальный детектор. При больших значениях $g_0 R_1$ входной сигнал с относительно

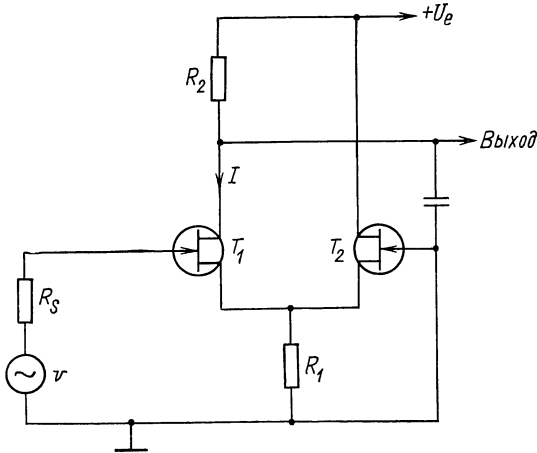


Рис. 20.5. Детектор огибающей

малым значением напряжения v переключает транзисторы T_1 и T_2 . Зависимость тока транзистора T_1 от v показана на рис. 20.6. Транзистор T_2 выключается при v , соответствующем точке A , и при дальнейшем росте напряжения ток I увеличивается линейно с v как v/R_1 . Для достаточно больших амплитуд напряжения выпрямленный ток равен

$$I_s = \frac{v}{\pi R_1}. \quad (20.41)$$

Если $g_m R_1 > n$ [n — коэффициент шума, фигурирующий в (20.33)], то низкочастотный шумовой ток в транзисторе T_1 при однополупериодном выпрямлении дается соотношением

$$I_n^2 = \frac{2kT\delta f}{R_1}. \quad (20.42)$$

Следовательно, для приращения δv величины v , при котором отношение сигнал/шум на выходе равно единице, получаем

$$\delta v = \pi(2R_1 kT\delta f)^{1/2}. \quad (20.43)$$

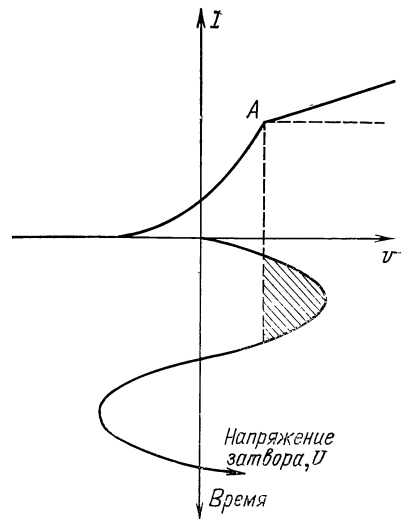


Рис. 20.6. Детектирование огибающей

Полученное значение необходимо сравнить с эффективным значением шумового напряжения источника сигнала

$$\delta v_s = (4F_0 R_s k T \delta f)^{1/2}, \quad (20.44)$$

и при условии $R_s F_0 \gg \frac{\pi^2}{2} R_1$ значения δv_s заметно превосходит δv .

Рассматриваемый детектор, будучи линейным, представляет собой почти идеальный дифференциальный детектор. Требуемое для этого значение величины R_1 можно найти из уравнений

$$g_0 R_1 = \left(\frac{g_0}{g_m} \right)^2 - \frac{g_0}{g_m};$$

$$g_m R_1 = \frac{g_0}{g_m} - 1,$$

где g_m — взаимная проводимость в статическом режиме, а g_0 — взаимная проводимость при нулевом смещении. Так, например, если $g_m/g_0 = 1/10$, то $g_m R_1 = 9$ и $g_0 R_1 = 99$. Входное напряжение, требуемое для переключения транзисторов $v = U_p (g_m/g_0)$, в рассматриваемом случае равно $U_p/10$.

Требуемое значение напряжения питания несколько больше, чем v , скажем, $U_p/2$. В результате сопротивление источника сигнала должно удовлетворять неравенству $R_s > 1/2 \pi^2 R_1 \approx 500/g_0$, и при $g_0 =$

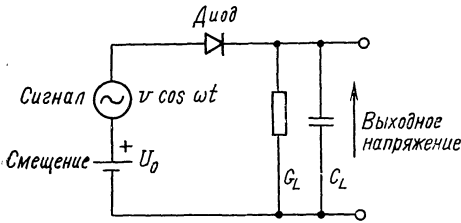


Рис. 20.7. Диодный детектор

$= 5$ мА/В потребуется $R_s > 100$ кОм. Полученные значения довольно трудно реализовать на практике, тем не менее реальные приборы, построенные по схеме рис. 20.5, в диапазоне частот до 30 МГц имеют эффективные коэффициенты шума меньше 10 для входных напряжений с амплитудой около 1 В.

Обобщенная схема включения диодного детектора показана на рис. 20.7, и для нее мы рассмотрим совместно шумы, генерируемые детектором, и тепловые шумы, связанные с нагрузочной проводимостью G_L . Если пренебречь емкостью диода и предположить, что ωC_L велико, а характеристика диода имеет вид

$$I(U) = I_0 [\exp(\beta U) - 1], \quad (20.45)$$

то при входном сигнале мощностью P в цепи возникает выпрямленное выходное напряжение

$$v_s = \frac{\beta P/2}{G_L + \beta(I + I_0)}, \quad (20.46)$$

где I — ток смещения.

Средний квадрат шумового напряжения на выходе равен:

$$v_n^2 = \frac{2e(I + 2I_0)\delta f + 4kTG_L\delta f}{[G_L + \beta(I + I_0)]^2}, \quad (20.47)$$

и для пороговой мощности сигнала получаем

$$P_{\text{мин}} = [8e(I + 2I_0) \delta f + 16kTG_L \delta f]^2 / \beta. \quad (20.48)$$

Для идеального детектора можно пренебречь I_0 по сравнению с I и заменить β на $e/(kT)$. Если выбрать I так, чтобы проводимость диода βI и источника сигнала G_s были равны, то выражение (20.48) преобразуется к виду

$$P_{\text{мин}} = \frac{kT}{e} [(8G_s + 16G_L) kT \delta f]^2, \quad (20.49)$$

так что

$$\frac{P_{\text{мин}}}{kT \delta f} = \left(\frac{24kT}{e^2 R \delta f} \right)^{1/2}. \quad (20.50)$$

При выводе (20.50) мы положили $R = G^{-1}_s = G^{-1}_L$. Так, например, при $T = 300$ К, $R = 1000$ Ом и $\delta f = 10^7$ Гц полученное отношение имеет значение порядка 10^4 , показывающее, что при выбранных типичных значениях параметров прибора диод в схеме порогового детектора будет работать неудовлетворительно.

Эффективный коэффициент шума диодного детектора, рассматриваемого в качестве дифференциального детектора, таков:

$$F = \frac{P^2_{\text{мин}}}{4kTP_s \delta f} = \frac{24}{4R_s P_s} \left(\frac{kT}{e} \right)^2 = 6 \left(\frac{kT}{eV} \right)^2. \quad (20.51)$$

При входном напряжении порядка $kT/e = 25$ мВ для F получаем вполне приемлемое значение. Однако при таких уровнях сигнала первых членов разложения $\exp(\beta U)$ в степенной ряд недостаточно, и работу детектора необходимо рассматривать в режиме линейного детектирования.

На схеме рис. 20.8 диод представляет собой идеальный ключ, который замыкает цепь только при $U_s \cos \omega t > U_0$. Пусть $\Theta = \arccos(U_0/U_s)$. Тогда мощность, поставляемая источником в цепь и усредненная за период, такова:

$$\frac{U_0^2}{R_L} = P = \frac{1}{2\pi R_s} \int_{-\Theta}^{\Theta} U_0 (U_s \cos \omega t - U_0) d(\omega t),$$

что дает

$$U_0^2/R_L = U_0/\pi R_s (U_s \sin \Theta - U_0 \Theta); \quad \pi R_s/R_L = \text{tg } \Theta - \Theta,$$

и для КПД выпрямления получаем

$$\alpha = \frac{4PR_s}{U_s^2} = \frac{4}{\pi} \cos \Theta (\sin \Theta - \Theta \cos \Theta).$$

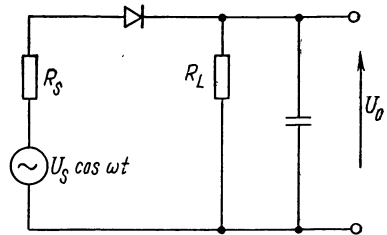


Рис. 20.8. Линейный детектор на диоде

При значении Θ немного большим 1 рад, что соответствует $R_s \approx 0,4 R_L$, получаем максимальное значение КПД выпрямления около 1/4. Для двухполупериодного выпрямления КПД приблизительно равен 1/2. Таким образом, эффективный коэффициент шума при двухполупериодном выпрямлении стремится к $2F_0$, где F_0 — коэффициент шума последетекторного усилителя.

Приведенные выше соображения качественно применимы и к полупроводниковым детекторам СВЧ, для которых КПД выпрямления часто выражается через входную мощность эмпирически:

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{\eta P}{1 + \mu P}. \quad (20.52)$$

Типичные значения величин η и μ равны 10^3 Вт^{-1} и $2 \cdot 10^3 \text{ Вт}^{-1}$ соответственно. В этом случае фликкер-шумом диода пренебрегать нельзя, и он обычно описывается посредством шумового коэффициента n , так что номинальная выходная мощность шума равна $nkT\delta f$.

Шумовой коэффициент n возрастает с ростом выходной мощности, и эта зависимость имеет вид

$$n = 1 + \gamma P_0 / f, \quad (20.53)$$

где $P_0 = \alpha P$ — выходная мощность. Типичное значение величины η равно 10^{12} Дж^{-1} . Далее, можно найти эффективный коэффициент шума при дифференциальном детектировании

$$F = \left(\frac{1 + \mu P_i}{2 + \mu P_i} \right)^2 \left[\frac{2(1 + \mu P_i)}{\eta P_i} + \frac{\gamma P_i}{f} \right]. \quad (20.54)$$

Значение величины F минимально при

$$P_i \sim [2f / (\eta \gamma)]^{1/2}. \quad (20.55)$$

$P_i \approx 1,4 \cdot 10^{-6} \text{ Вт}$ при $f = 1 \text{ кГц}$, $\eta = 10^3 \text{ Вт}^{-1}$ и $\gamma = 10^{12} \text{ Дж}^{-1}$, и такое значение P_i соответствует режиму квадратичного детектирования. При этом

$$F_{\text{мин}} \sim [\gamma F_0 / (2\eta f)]^{1/2}, \quad (20.56)$$

что при выбранных выше численных параметрах равно 700.

При пороговом детектировании получаем

$$P_{\text{мин}} \sim \left(\frac{2kT\delta f}{\eta} \right)^{1/2}. \quad (20.57)$$

$P_{\text{мин}} \approx 3 \cdot 10^{-9} \text{ Вт}$ при $\eta = 10^3 \text{ Вт}^{-1}$ и $\delta f = 1 \text{ МГц}$.

В заключение отметим, что реальные детекторы всегда обладают низкой пороговой чувствительностью, и всегда, когда необходимо приблизиться к теоретически возможному пределу при обнаружении слабых сигналов, требуется предварительное значительное усиление по высокой частоте. Гораздо менее заметны потери в чувствительности при дифференциальном детектировании малых изменений в сильном сигнале. Это особенно важно для

таких физических приборов, как радиочастотные спектрометры, где полезный сигнал представляет собой слабую модуляцию несущей.

ГЛАВА 21

ФОТОУМНОЖИТЕЛИ И ФОТОДИОДЫ

21.1. Введение

Фотоумножители и фотодиоды являются квадратичными приборами, выходной ток которых пропорционален входной мощности, однако они во многом отличаются от радиочастотных квадратичных детекторов. Отличие связано, в первую очередь, с тем, что значение энергии $h\nu$, падающего на прибор кванта излучения, намного превосходит значение тепловой энергии kT , характерной для радиочастотных детекторов, и при определенных обстоятельствах флуктуации в выходном токе приборов почти полностью определяются флуктуациями в падающем потоке лучистой энергии. В этом отношении фотоумножители и фотодиоды занимают промежуточное положение между квадратичными радиочастотными детекторами и счетчиками частиц. Последние из-за огромной энергии падающих квантов могут не только считать отдельные кванты, но и измерять их энергию.

Возникновение свободного электрона при поглощении фотона представляет собой основной процесс, происходящий в фотодетекторах обоих типов. В некоторых случаях, например в кремниевом фотодиоде при длинах волн приблизительно 9000 \AA , квантовый выход этого процесса близок к единице, т. е. в среднем каждый падающий фотон высвобождает один электрон. В других случаях, например в фотоэмиссионных детекторах на длинноволновом краю видимого спектра, квантовый выход мал, и в среднем примерно только один фотон из сотни высвобождает электрон.

Идеальным считается такой фотодетектор, в котором не только квантовый выход фотоэффекта равен единице, но и существует возможность усиления результирующего фотоэлектронного тока без внесения дополнительных шумов. Реальные фотодетекторы не обладают подобными свойствами, и, более того, в них могут существовать флуктуации выходного тока даже при отсутствии внешнего источника света. Относительная важность указанных факторов для разных приборов не одинакова. В фотодиодах квантовый выход может быть близким к единице и фоновый ток пренебрежимо мал, но даже при использовании лавинного умножения результирующий уровень усиления слишком низок для того, чтобы можно было пренебречь шумами последующего усилителя. Фотоумножитель, напротив, благодаря процессам, связанным с вторичной эмиссией, имеет достаточно высокий уровень усиления, но обладает обычно низким квантовым выходом и, если фотокатод специально не охлажден, значительным темновым током.

Флуктуации в падающем излучении зависят от природы источника, и при использовании достаточно чувствительного детектора их регистрация (или же регистрация корреляции флуктуаций в схеме с двумя детекторами и общим источником) позволяет судить о свойствах самого источника излучения. Для наших целей, однако, достаточно представить падающее излучение в виде потока фотонов, содержащего дробовой шум. В этом случае если при наблюдении в течение некоторого промежутка времени τ среднее число падающих фотонов равно N , то среднеквадратичное отклонение от N результатов измерения числа фотонов равно $N^{1/2}$. При падающей мощности, равной P , среднее число фотонов, поступающих в единицу времени на вход фотоприемника, равно $P/(h\nu)$. При квантовом выходе, равном единице, появляется первичный ток с энергетическим спектром $2eI = 2e^2P/(h\nu)$, содержащий дробовой шум. Если бы этот ток можно было усилить малошумящим усилителем с постоянной времени, меньшей $h\nu/P$, то такой прибор позволил бы обнаруживать отдельные фотоны. Рассматривая возможность такого детектирования, предположим, что каждый первичный электрон попадает на вход усилителя, полное входное сопротивление которого состоит из параллельно соединенных емкости C и сопротивления R . При температуре T и сопротивлении R средний квадрат флуктуаций заряда на емкости C равен kTC , и если он превышает значение величины e^2 , то детектирование отдельных электронов (и соответственно фотонов) становится невозможным. Действительно, так как $e^2 \approx 2,5 \cdot 10^{-38}$ Кл², а для флуктуаций заряда даже при $C = 1$ пФ и $T = 1$ К получаем $kTC = 1,4 \cdot 10^{-35}$ Кл². Это значение на несколько порядков превышает e^2 , и регистрация единичных фотонов исключается при традиционных методах усиления.

Теперь допустим, что необходимо измерить малые изменения в потоке излучения с большой интенсивностью. В этом случае требуется сравнить энергетический спектр $2eI$ токовых флуктуаций в первичном фототоке с энергетическим спектром $4kT/R$ тока теплового шума, связанного с R . Если выполняется условие $eIR > 2kT$ или же $20IR > 1$ (при $T = 300$ К), то флуктуации на входе усилителя будут в основном определяться флуктуациями излучения. Например, при $R = 10^5$ Ом получаем значение тока $I > 2 \cdot 10^{-6}$ А, которое при энергии фотонов 2 эВ и единичном квантовом выходе соответствует мощности падающего потока фотонов порядка 10^{-6} Вт, или же около 10^{13} фотонов в 1 с. Входная емкость усилителя непосредственно не вошла в приведенные расчеты, но она накладывает на R (при заданной полосе δf) ограничение $R < 1/(2\pi C\delta f)$.

21.2. Квантовый выход

Вычислим теперь флуктуации в первичном фотоэлектронном токе при условии, что в среднем на один падающий фотон приходится $\eta < 1$ испускаемых электронов. Рассмотрим сначала случай, когда за промежуток времени τ приходит точно k фотонов. Пусть α —

вероятность испускания электрона при поглощении одного фотона. Тогда вероятность выхода m электронов на k фотонов равна $C_m^k \alpha^m (1-\alpha)^{k-m}$, и среднее число электронов за время τ равно

$$\langle m \rangle_k = \sum_{m=0}^k m C_m^k \alpha^m (1-\alpha)^{k-m} = \alpha k. \quad (21.1)$$

Далее,

$$\langle m(m-1) \rangle_k = k(k-1) \alpha^2 = \langle m \rangle^2 - k \alpha^2,$$

так что

$$\begin{aligned} \langle \Delta m^2 \rangle &= \langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2 = \langle m \rangle - k \alpha^2 = k \alpha (1-\alpha) = \\ &= (1-\alpha) \langle m \rangle. \end{aligned} \quad (21.2)$$

Из (21.1) следует $\alpha = \eta$ (η — квантовый выход), а из (21.2) заключаем, что при $\alpha = \eta = 1$ процесс фотоэмиссии добавочных флуктуаций не вносит, в то время как при $\alpha = \eta \ll 1$ фотоэлектронный ток содержит полный дробовой шум, так как $\langle \Delta m^2 \rangle = \langle m \rangle$. Рассмотрим теперь случай, когда время прихода фотонов представляет собой случайную величину. Разделим промежуток времени τ на N бесконечно малых интервалов t и введем вероятность p появления одного фотона за время t , которая будет очень мала. Тогда вероятность прихода k фотонов за время τ есть $P(k, \tau) = C_k^N p^k (1-p)^{N-k}$. Для совместной вероятности прихода k фотонов и испускания m электронов имеем

$$P(m, k, \tau) = C_k^N p^k (1-p)^{N-k} C_m^k \alpha^m (1-\alpha)^{k-m}.$$

Отсюда для $\langle m \rangle$ получаем

$$\begin{aligned} \langle m \rangle &= \sum_{k=0}^N C_k^N p^k (1-p)^{N-k} \sum_{m=0}^k m C_m^k \alpha^m (1-\alpha)^{k-m} = \\ &= \sum_{k=0}^N \alpha k C_k^N p^k (1-p)^{N-k} = \alpha N p. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\langle m(m-1) \rangle = \alpha^2 p^2 N(N-1) = \langle m \rangle^2 (1-1/N) \simeq \langle m \rangle^2,$$

и отсюда

$$\langle \Delta m^2 \rangle = \langle m \rangle. \quad (21.3)$$

Очевидно, что в этом случае ток фотоэмиссии независимо от значения величины квантового выхода $\alpha = \eta$ представляет собой дробовой ток. При $\eta < 1$ среднеквадратичные флуктуации электронного тока меньше флуктуаций излучения в $\eta^{1/2}$ раз, но и ток сигнала уменьшается в η раз, так что отношение сигнал/шум ухудшается в $\eta^{-1/2}$ раз. Это первоначальное ухудшение отношения сигнал/шум неустранимо независимо от способа последующего процесса усиления.

21.3. Умножение электронов с использованием вторичной эмиссии

Во вступлении к этой главе было показано, что однофотонное детектирование, или счет фотонов, невозможно, если первичный фототок попадает на вход обычного усилителя. В фотоумножителе испускаемые фотокатодом электроны вначале ускоряются до энергий порядка 100 эВ, а затем бомбардируют поверхность, обладающую вторично-эмиссионными свойствами. Далее вторичные электроны с этой поверхности размножаются в последующих идентичных каскадах, число которых не менее пяти, а чаще всего равно десяти и более. Необходимо теперь рассмотреть добавочные флуктуации, возникающие в процессе умножения.

Если первичный фототок содержит дробовой шум, число первичных электронов, поступающих за интервал времени τ , имеет пуассоновское распределение со средним значением N , а первичные электроны ударяются о вторично-эмиссионную поверхность, на которой в среднем на один электрон испускается $\langle \sigma \rangle$ вторичных электронов, то среднее число вторичных электронов $\langle n \rangle = N \langle \sigma \rangle$ и средний квадрат отклонения этого числа $\langle \Delta n^2 \rangle = N \langle \sigma \rangle^2$, а, точнее, $\langle \Delta n^2 \rangle = N \langle \sigma \rangle^2 + N \langle \Delta \sigma \rangle^2$ (см., например, работу [13], гл. 12). Эмиссия вторичных электронов представляет собой результат большого числа различных случайных процессов, происходящих на поверхности электрода, и поэтому можно считать, что σ есть случайная величина с пуассоновским распределением около среднего значения $\langle \sigma \rangle$. Тогда

$$\langle \Delta n^2 \rangle = N \langle \sigma \rangle^2 + N \langle \sigma \rangle. \quad (21.4)$$

При среднем входном токе I_0 средний выходной ток после одного каскада умножения составляет $I_1 = \sigma I_0$ (здесь и далее обозначим через σ средний коэффициент умножения, т. е. $\langle \sigma \rangle$). Энергетический спектр выходного тока имеет вид

$$\omega_1 = 2eI_0\sigma^2 + 2eI_1 = \sigma(\sigma + 1)2eI_0 = (\sigma + 1)2eI_1. \quad (21.5)$$

После k каскадов квадрат выходного тока равен

$$I_k^2 = \sigma^{2k} I_0^2, \quad (21.6)$$

а для энергетического спектра флуктуаций тока на выходе получаем

$$\omega_k = 2eI_0(\sigma^{2k} + \sigma^{2k-1} + \dots + \sigma^k) = 2eI_0\sigma^{2k} \frac{1 - \sigma^{-(k+1)}}{1 - \sigma^{-1}}. \quad (21.7)$$

Если σ значительно больше единицы и k достаточно велико, то для ω_k имеем приближенное выражение

$$\omega_k = 2eI_0\sigma^{2k} \frac{\sigma}{\sigma - 1}. \quad (21.8)$$

Сравнив ω_k/I_k^2 с первоначальным значением величины $\omega_0/I_0^2 = 2e/I_0$, придем к выводу, что средний квадрат отношения сиг-

нал/шум в процессе умножения понизился в F^{-1} раз, где

$$F = \sigma / (\sigma - 1). \quad (21.9)$$

Этот результат впервые получен Шокли и Пирсом [43]. Например, $F=1,5$ при $\sigma=3$. Суммарный коэффициент усиления по току умножителя $\Gamma = \sigma^h$, и среднее значение отдельных выходных импульсов равно Γe . При подаче этих импульсов на вход усилителя с входной емкостью C и входной проводимостью при температуре T можно зарегистрировать одиночный импульс, если выполняется условие

$$\Gamma^2 e^2 > kTC. \quad (21.10)$$

Например, если $C=10$ пФ и $T=300$ К, то необходимо, чтобы $\Gamma > 10^3$. При $\sigma=3$ потребуется всего семь или восемь каскадов умножения. В свою очередь, если выходной ток умножителя течет в цепи с нагрузочным сопротивлением R , то необходимо выполнение следующего условия:

$$\Gamma^2 e I_0 > 2kT/R. \quad (21.11)$$

При 12 каскадах умножения $\Gamma=10^5$. Условие (21.11) сводится в этом случае ($T=300$ К) к неравенству $I_0 R > 5 \cdot 10^{-12}$ В. Так, если $R=1000$ Ом, то $I_0 > 5 \cdot 10^{-15}$ А, что соответствует примерно $3 \cdot 10^4$ электрон/с. При $C=10$ пФ полоса пропускания входного каскада составляет $16 \cdot 10^6$ Гц, и ясно, что такое устройство позволит регистрировать отдельные импульсы, возникающие при попадании на его вход единичных первичных электронов.

Хотя чаще всего вторично-эмиссионные умножители используются в сочетании с фотоэмиссионной поверхностью в фотоумножителях, с их помощью можно усиливать токи, связанные с любыми потоками заряженных частиц, например ионов в масс-спектрометрах. В последнем случае можно легко получить при большом числе каскадов

$$F = 1 + \frac{\sigma}{\sigma_1(\sigma - 1)}. \quad (21.12)$$

Величина σ_1 характеризует первый каскад, и если $\sigma_1 > \sigma$, то последующие каскады не столь важны с точки зрения шумов. Например, $F=1,33$ при $\sigma_1=5$ и $\sigma=2,5$.

Заканчивая раздел, еще раз подчеркнем, что использование вторично-эмиссионного умножения позволяет поднять уровень сигнала и шума, связанного с первичными фотоэлектронами, до уровня, превосходящего уровень входных шумов последующего усилителя. На численных примерах, в которых выполнялись неравенства (21.10) и (21.11), мы убедились, что это несложно.

21.4. Фотоумножители

В фотоумножителе световой поток падает на фотоэмиссионную поверхность, и если значение величины энергии фотона $h\nu$ превосходит значение работы выхода W поверхности, то испускаемые электроны затем ускоряются и бомбардируют поверхность пер-

вого динода вторично-эмиссионного умножителя. Выход электронов, или квантовый выход η , в большей степени зависит от разности $h\nu - W$ и имеет малое значение, если эта разность мала. Так как величина W для фотоэмиссионных поверхностей не бывает меньше 1,5 эВ, то квантовый выход очень мал (10^{-2} и меньше) на длинноволновой части видимого спектра и может превышать 10^{-1} на коротковолновой части. При квантовом выходе η средний квадрат отношения сигнал/шум уменьшается в η раз, и общий коэффициент шума фотоумножителя равен

$$F = \frac{1}{\eta} \frac{\sigma}{\sigma - 1}, \quad (21.13)$$

где σ — коэффициент умножения динода.

Процессом термоэмиссии с поверхности нельзя пренебрегать даже при комнатной температуре из-за необходимости использовать фотоэмиссионную поверхность с малой работой выхода. Оценим грубо значение термоэмиссионного тока, воспользовавшись формулой Дэшмана¹: $I = 10AT^2 \exp[-W/(kT)]$, где A — поверхность катода в квадратных сантиметрах. При $W = 1,5$ эВ и $A = 10$ см² для I получаем 10^{-18} А, что соответствует шести электронам в секунду при температуре 300 К. При квантовом выходе 10^{-2} это было бы эквивалентно входному потоку в 600 фотонов за секунду. Так как фотоэмиссионные поверхности, обладающие заметным квантовым выходом, достаточно сложны, реальное значение темнового тока сильно отличается от значений, полученных по формуле Дэшмана, которая справедлива для чистых металлических поверхностей. Все же отметим, что темновой ток при комнатной температуре ограничивает чувствительность фотоумножителей по отношению к малым световым потокам. Темновой ток можно существенно уменьшить, охлаждая прибор.

21.5. Фотодиоды

При падении на полупроводник, например кремний, излучения с квантом энергии $h\nu$, большим значения ширины запрещенной зоны, поглощение фотона может привести к переходу электрона из валентной зоны в зону проводимости. Если полупроводник имеет первоначально очень низкую проводимость и скорость электронно-дырочной рекомбинации мала, то увеличение концентрации подвижных носителей, электронов и дырок может привести к значительному увеличению проводимости, и такое устройство будет работать как детектор, основанный на фотопроводимости. Совершенно другой принцип работы фотодиода, представляющего собой обратно смещенный диод с $p-n$ -переходом. Обратное смещение практически полностью исключает переходы электронов (основных носителей в материале с электронной проводимостью) из n -области в p -область и аналогично переходы дырок в обратном

¹ В отечественной литературе известна под названием формулы Ричардсона. — Прим. ред.

направлении. С другой стороны, часть неосновных носителей (дырок в материале n -типа и электронов в материале p -типа) пересекают обедненный слой p — n -перехода и дают вклад во внешний ток. Ток, связанный с неосновными носителями теплового происхождения, представляет собой обычный обратный ток диода или темновой ток фотодиода. При поглощении фотона в области p — n -перехода как дырка, возникающая в n -области, так и электрон, возникающий в p -области, будут давать добавочный вклад во внешний ток. Выполнив определенные требования, можно получить квантовый выход фотодиодов, близкий к единице. Тогда все фотоны будут поглощаться вблизи p — n -перехода, и каждый фотон будет рождать электронно-дырочную пару. Последнее справедливо, если значение $h\nu$ ненамного превосходит значение E_g — ширины запрещенной зоны и, в отличие от фотоэмиссионных поверхностей, квантовый выход фотодиода падает при дальнейшем увеличении $h\nu$.

При квантовом выходе, равном единице, в каждом акте поглощения фотона появляется электрон во внешней цепи, и результирующий ток должен быть усилен обычными способами. Так как и усилитель, и диод обладают значительной емкостью, то эти способы не позволяют использовать фотодиод для детектирования одиночных фотонов. С другой стороны, если величина потока фотонов велика и дробовой шум результирующего тока превосходит приведенный ко входу шум усилителя, то появляется возможность наблюдать флуктуации в приходящем световом потоке. Например, при мощности падающего излучения $15 \cdot 10^{-6}$ Вт и энергии фотонов 1,5 эВ результирующий ток равен 10^{-5} А. При сопротивлении нагрузки 10^4 Ом с температурой 300 К это приводит к тому, что дробовой шум, связанный с флуктуациями в потоке, превосходит тепловой шум сопротивления в 2 раза. В этом смысле фотодиод хотя и не может быть использован для счета отдельных фотонов, но приближается по своим характеристикам к идеальному детектору для больших значений уровня входного сигнала.

В лавинных фотодиодах обратное напряжение, приложенное к p — n -переходу, увеличивают до такого значения, при котором каждая первичная электронно-дырочная пара приводит к появлению лавины вторичных электронно-дырочных пар за счет ударной ионизации. Используя этот процесс, можно получить устойчивое усиление по току в 100 и более раз. Если бы процесс лавинного умножения не вносил собственных шумов, можно было бы во столько же раз увеличить общую чувствительность устройства, состоящего из диода и усилителя. Однако этот процесс во многом аналогичен процессу умножения за счет вторичной эмиссии при низком среднем коэффициенте умножения на одно соударение, так что и он приводит к возрастанию шума.

Все же использование лавинных фотодиодов при малых входных сигналах позволяет в целом улучшить отношение сигнал/шум комбинированного устройства диод — усилитель. При значениях

уровня сигнала на входе, для которых характеристика простого фотодиода близка к идеальной, использование лавинного диода не дает никаких преимуществ, а по существу только ухудшает отношение сигнал/шум.

Основные преимущества фотодиодов перед фотоумножителями заключаются в более высоком квантовом выходе первичного фотоэффекта и в способности работать при высоких уровнях мощности на входе без перегрузки. При мощностях, обычно превышающих 1 мкВт, их чувствительность близка к идеальной, но фотодиоды по сравнению с фотоумножителями обладают низкой чувствительностью при малых значениях входной мощности.

21.6. Смешение на фотодиоде

Для входных сигналов больших значений фотодиод представляет собой идеальный квадратичный прибор. Если фотодиод облучается двумя пучками света с частотами ν и $\nu + \delta\nu$, причем пучки пространственно-когерентны в активной области диода, то в нем возникает ток на разностной частоте $\delta\nu$. Пусть при мощности падающего излучения P ток диода $I = \alpha P$ и пусть P_1 — мощность в пучке света с частотой ν , а P_2 — с частотой $\nu + \delta\nu$. Тогда средний ток равен $\alpha(P_1 + P_2)$, а эффективное значение амплитуды тока на разностной частоте равно $\alpha(2P_1P_2)^{1/2}$. Отношение сигнал/шум на выходе при полосе пропускания устройства δf таково:

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2 = \frac{2\alpha^2 P_1 P_2}{2e\alpha(P_1 + P_2)\delta f} = \frac{\eta P_1 P_2}{h\nu(P_1 + P_2)\delta f}, \quad (21.14)$$

где α выражено через квантовый выход η в виде $\eta e/h\nu$.

В смесителе одна из входных мощностей, например P_2 , представляет собой мощность гетеродина и намного превосходит мощность сигнала P_1 . Если нагрузочное сопротивление диода R и $[e\eta/(h\nu)]P_2 \gg 2kT/R$, то шумом сопротивления R можно пренебречь, и выражение (21.14) характеризует отношение сигнал/шум устройства в целом. Для $P_2 \gg P_1$ получаем

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2 = \frac{\eta P_1}{h\nu\delta f}, \quad (21.15)$$

и при $\eta = 1$ отсюда следует, что фотосмешение с сильным сигналом накачки имеет $S/N = 1$ при появлении на входе одного фотона в течение промежутка времени $1/(\delta f)$, т. е. смеситель обладает почти идеальной чувствительностью.

Это свойство смесителя будет бесполезным, если источники мощности P_1 и P_2 некогерентны во времени, так как при выборе полосы пропускания δf необходимо учитывать большой разброс значений величин $\delta\nu$. Однако когда источниками мощности P_1 и P_2 будут стабильные одночастотные лазеры, то, используя смеситель на фотодиоде, можно создать очень чувствительный оптический супергетеродинный приемник.

22.1. Измерение коэффициента шума

Обычный способ измерения коэффициента шума или шумовой температуры усилителя заключается в измерении приращения уровня выходных шумов при подаче на вход усилителя калиброванного белого шума. Этот способ не требует измерения коэффициента усиления и частотной характеристики усилителя или наличия источника калиброванного маломощного сигнала.

Экспериментальная техника зависит от частоты и ожидаемого значения шумовой температуры T_n . Если T_n меньше 500 К, то обычно достаточно подключить ко входу усилителя эквивалент источника сигнала с точно известным входным сопротивлением и

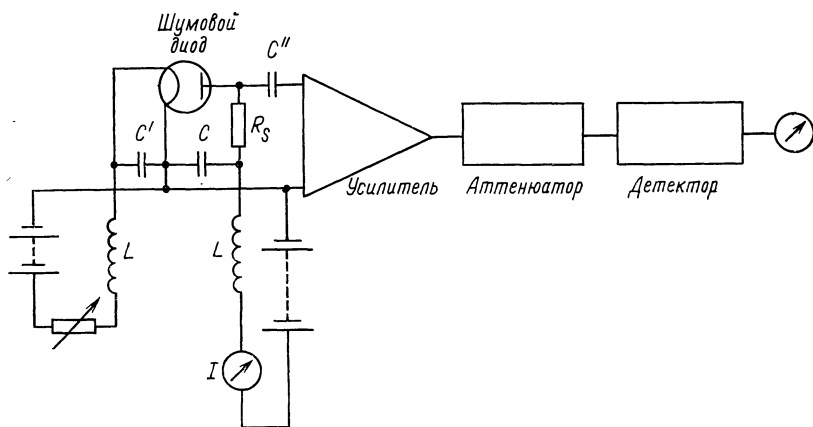


Рис. 22.1. Использование насыщенного диода для измерения коэффициента шума усилителя

построить график зависимости среднего квадрата выходного шума (т. е. выходного сигнала квадратичного детектора) от температуры источника. Если детектор будет точно квадратичным, то график представляет собой прямую линию, которая пересекает ось T в точке $-T_n$. Отклонение от прямой линии означает, что детектор не совсем квадратичный. Если использование квадратичного детектора по каким-либо причинам неудобно, то можно применить линейный детектор, выходной сигнал которого изображается графически в зависимости от $T^{1/2}$.

На частотах до 200 МГц для повышенных значений T_n удобным регулируемым и рассчитываемым источником шума является ламповый диод, работающий в режиме насыщения. Типичная схема такого источника приведена на рис. 22.1. Значения параметров его элементов, таких как дроссели фильтра L , блокировочные конденсаторы C' и конденсатор связи C'' , зависят от диапазона рабо-

чих частот. Может также возникнуть необходимость включения дополнительных элементов для компенсации емкости диода, для того чтобы R_s на рис. 22.1 соответствовала истинному сопротивлению источника шума. Ток диода изменяется благодаря изменению напряжения подогревателя, и энергетический спектр эквивалентного шума на входе усилителя равен

$$\begin{aligned} W &= 2eIR_s^2 + 4k(T+T_n)R_s = \\ &= 2eIR_s^2 + 4FkTR_s. \end{aligned} \quad (22.1)$$

Зависимость среднего квадрата выходного шума от тока I имеет точку пересечения с осью T при

$$I = -\frac{2FkT}{eR_s}. \quad (22.2)$$

Если, например, $F=10$, а $R_s=100$ Ом, то требуемые значения тока находятся в интервале от 0 до 20 мА.

Шумовые диоды выпускаются многими изготовителями. Например, фирма General Electric Company выпускает диод типа CV 2398, имеющий максимальный анодный ток 70 мА и производящий белый шум в диапазоне частот от 1 кГц до 200 МГц. С поправкой на прелетные эффекты его можно использовать на частотах до 500 МГц.

Из-за того, что немногие детекторы являются точно квадратичными или точно линейными, для выравнивания характеристики используют калиброванный аттенюатор, включаемый между усилителем и детектором. С помощью этого аттенюатора показание измерителя выходного сигнала детектора поддерживается постоянным при изменении тока I .

На СВЧ иногда используют шумовые диоды в сочетании с коаксиальной линией, но чаще всего шумовым источником служит газоразрядная трубка [26]. Электроны в положительном столбе газового разряда находятся при высокой температуре $T_e \approx 15\,000\text{ K} \approx 50 T_0$. Если разрядная трубка связана с линией передачи или волноводом таким образом, что она представляет собой согласованную нагрузку, то энергетический спектр шума на выходе линии равен kT_e . Этого достаточно по крайней мере для того, чтобы удвоить уровень шума на выходе большинства усилителей.

Если шумовой источник подключен к усилителю через аттенюатор с затуханием α при температуре T , то энергетический спектр эквивалентного шума на входе будет равен

$$W = \alpha kT_e + (1-\alpha)kT + kT_n = \alpha k(T_e - T) + FkT, \quad (22.3)$$

и график зависимости среднего квадрата выходного шума от α имеет точку пересечения при

$$\alpha = -\frac{FT}{T_e - T} \sim -\frac{F}{50}.$$

Абсолютные измерения шума, дающие значения T_n с погрешностью не более $\pm 25\%$, весьма затруднительны. Если шумовые

характеристики аппаратуры приводятся с более высокой точностью, то это должно по меньшей мере с одинаковой вероятностью означать как некритический подход к измерениям, так и их хорошее качество.

22.2. Шумы антенны

При возбуждении передающей антенны источником сигнала часть подводимой к ней мощности (η) излучается, а часть $(1-\eta)$ из-за омических потерь рассеивается в виде тепла в самой антенне и согласующих цепях. Если входное сопротивление антенны дано в виде $Z=R+jX$, где R представляет собой сумму сопротивления потерь R_a и сопротивления излучения R_r , то КПД антенны равен

$$\eta=R_r/(R_r+R_a). \quad (22.4)$$

За исключением некоторых частных случаев отношения размеров антенны к длине волны λ , реактивное сопротивление X намного превышает сопротивление R_r , а сопротивление потерь R_a большей частью (если не полностью) связано с цепью, имеющей реактивное сопротивление $(-X)$ и обеспечивающей согласование антенны. Это в особенности характерно для коротких диполей с длиной $l \ll \lambda$.

Излучаемая мощность равна

$$P=I^2R_r=\frac{1}{6\pi}\left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0}\right)^{1/2}\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)^2I^2, \quad (22.5)$$

где I — эффективное значение тока смещения, протекающего через емкость C между двумя частями диполя. Таким образом, в эквивалентной схеме последовательно с R_r включена емкость C . Основная доля подводимой к антенне мощности будет рассеиваться в индуктивном элементе, компенсирующем емкость C , если только добротность антенны не превышает

$$Q=1/(\omega CR_r). \quad (22.6)$$

Добротность антенны пропорциональна величине $(\lambda/l)^3$. Только при длинах диполя, составляющих целое число полуволн, реактивное сопротивление равно нулю и полный КПД антенны близок к единице.

Диаграмма передающей антенны в полярных координатах описывается ее коэффициентом направленного действия $g(\Theta, \varphi)$, определяемым через часть dP полной излучаемой мощности P , сосредоточенной в телесном угле $d\Omega$ при (Θ, φ) :

$$dP=Pg(\Theta, \varphi)d\Omega/(4\pi). \quad (22.7)$$

Если антенна используется для приема, то ее эффективная площадь $A(\Theta, \varphi)$ определяется через поток энергии S ($\text{Вт}/\text{м}^2$), падающий на антенну в направлении (Θ, φ) и развивающий на ее зажимах мощность

$$P=SA(\Theta, \varphi). \quad (22.8)$$

Только часть мощности η поступает во внешнюю нагрузку.

Покажем, что

$$A(\Theta, \varphi) = \lambda^2 g(\Theta, \varphi) / (4\pi). \quad (22.9)$$

Для этого рассмотрим согласованную с резистивной нагрузкой антенну, находящуюся при температуре T и излучающую полную мощность kT в единице частотного интервала. Пусть на расстоянии r от антенны помещено черное тело, которое характеризуется по отношению к антенне площадью a . Тогда мощность, принимаемая черным телом от антенны, равна $akTg(\Theta, \varphi) / (4\pi r^2)$. Если это тело также находится при температуре T , то излучаемая им мощность на единицу частотного интервала в телесном угле $d\Omega$ составляет согласно закону Рэлея—Джинса $akTd\Omega/\lambda^2$, следовательно, принимаемая антенной мощность равна $akTA(\Theta, \varphi) / (\lambda^2 r^2)$. Мощности излучений, принимаемые черным телом и антенной, должны быть одинаковы, а отсюда и вытекает соотношение (22.9). Очевидно, изотропная антенна имеет эффективную площадь $\lambda^2/(4\pi)$ во всех направлениях. Для короткого диполя коэффициент усиления в направлении под углом Θ к его оси составляет

$$g = \frac{3}{2} \sin^2 \Theta, \quad (22.10)$$

а эффективная площадь для этого направления

$$A = \frac{3\lambda^2}{8\pi} \sin^2 \Theta. \quad (22.11)$$

В направлении, перпендикулярном оси, величина A максимальна и равна

$$A = 3\lambda^2 / (8\pi). \quad (22.12)$$

Заметим, что A не зависит от длины диполя, пока последняя много меньше длины волны. С длиной диполя изменяются только R_r и η .

Если антенна, все части которой находятся при температуре T_0 , имеет КПД η , коэффициент усиления $g(\Theta, \varphi)$ и принимает энергию шумов из области пространства, где в направлении (Θ, φ) расположена поглощающая среда при температуре $T(\Theta, \varphi)$, то номинальная мощность шумов на зажимах антенны равна kT_a , где

$$T_a = (1 - \eta)T_0 + \eta \int g(\Theta, \varphi) T(\Theta, \varphi) d\Omega. \quad (22.13)$$

Введя понятие об эффективной температуре неба T_s , можно записать (22.13) в более удобной форме:

$$T_a = (1 - \eta)T_0 + \eta T_s. \quad (22.14)$$

Величина сигнала, характеризуемая потоком энергии S в направлении (Θ, φ) при отношении сигнал/шум на зажимах антенны, равном единице, составляет

$$S_{\min} = \frac{4\pi}{\lambda^2 g(\Theta, \varphi)} \left[kT_s + kT_0 \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right) + \frac{kT_n}{\eta} \right] B, \quad (22.15)$$

где T_n — шумовая температура приемника с шириной полосы пропускания B . Как видно, увеличение $g(\Theta, \varphi)$ за счет использования более направленной антенны всегда приводит к повышению чув-

ствительности. Однако увеличение $g(\theta, \varphi)$ свыше $3/2$ — максимального значения для диполя — достигается лишь в том случае, если размеры антенны намного превышают длину волны. Это осуществимо только на коротких волнах, которые оказываются, кроме того, очень удобны для применения вследствие зависимости $S_{\text{мин}}$ от длины волны вида $1/\lambda^2$. Значимость КПД также зависит от длины волны. В диапазоне СВЧ эффективная температура неба T_s низка (несколько градусов по Кельвину), но ниже 300 МГц ($\lambda=1$ м) она возрастает по мере того, как становится ощутимым действие ионосферного шума. На частоте 10 МГц температура неба может превышать $500 T_0$. В этом случае малость величины η оказывает слабое влияние, если только шумовая температура усилителя не слишком высока. Но нужно учитывать, что на коротких волнах намного легче создать высоконаправленные и эффективные антенны, чем на длинных, для которых такие антенны обычно и не нужны.

Если размеры антенны значительно меньше длины волны, то сопротивление излучения пренебрежимо мало, а ее свойства определяются главным образом напряжением на разомкнутых зажимах и свойствами согласующей цепи. Обратимся к примеру. В большинстве радиовещательных приемников диапазона 500—1500 кГц применяются антенны на ферритовом стержне с эффективной магнитной проницаемостью $\mu \approx 20$, радиусом $a \approx 5$ мм и длиной $l \approx 15$ см, что намного меньше длины волны. Если число витков намотанной на стержень катушки составляет N , то напряжение холостого хода на ее выводах равно $U = \omega \mu_0 \mu \pi a^2 N \dot{H}$, где \dot{H} — составляющая магнитного поля падающей волны, направленная вдоль оси стержня. Если к тому же катушка является элементом резонансного контура с добротностью Q , то напряжение сигнала на конденсаторе настройки составляет $U' = Q U$. Выражая это напряжение через плотность падающего потока энергии, получаем

$$U' \approx 400 Q \mu a^2 N S^{1/2} / \lambda. \quad (22.16)$$

Например, при $Q=50$, $\mu=20$, $a=5 \cdot 10^{-3}$ м, $N=50$ и $\lambda=400$ м имеем $U \sim S^{1/2}$. Для плотности потока 10^{-6} Вт/м² это дает около 1 мВ. Среднеквадратичное значение эквивалентного шума для контура с полосой пропускания 10 кГц и эквивалентным резонансным сопротивлением 50 кОм составляет около 5 мкВ. Таким образом, отношение сигнал/шум при выбранном значении плотности потока (такую плотность дает передатчик мощностью 100 кВт на расстоянии 100 км) должно составлять 46 дБ.

22.3. Модуляционный радиометр (радиометр Дике)

При выпрямлении квадратичным детектором белого шума с энергетическим спектром ω среднее значение выходного тока в полосе частот B_1 равно $I = \alpha \omega B_1$, а средний квадрат флуктуаций в узкой полосе B_2 — $I^2_n = 2\alpha^2 \omega^2 B_1 B_2$. Приращение $\delta\omega$ спектра ω , приводящее к приращению среднего тока I , равному величине I_n , опреде-

ляется по формуле $\delta\omega = \omega(2B_2/B_1)^{1/2}$. Для линейного детектора имеем $I = \alpha'[\omega B_1 / (2\pi)]^{1/2}$; $I_n = \alpha'\omega B_1 B_2 / (4\pi)$, откуда по-прежнему

$$\delta\omega = \omega(2B_2/B_1)^{1/2}. \quad (22.17)$$

Таким образом, при любом типе детектора можно измерить ω с относительной точностью

$$\delta\omega/\omega = (2B_2/B_1)^{1/2}.$$

Пусть имеется усилитель с шириной полосы пропускания B_1 , шумовой температурой T_n и коэффициентом усиления по мощности A , подключенный к источнику сигнала с температурой T_s . За усилителем следуют детектор и низкочастотный усилитель с шириной полосы пропускания B_2 , причем на входе детектора $\omega = Ak(T_s + T_n)$. Тогда, зная A , T_n и B_1 и считая эти величины кон-

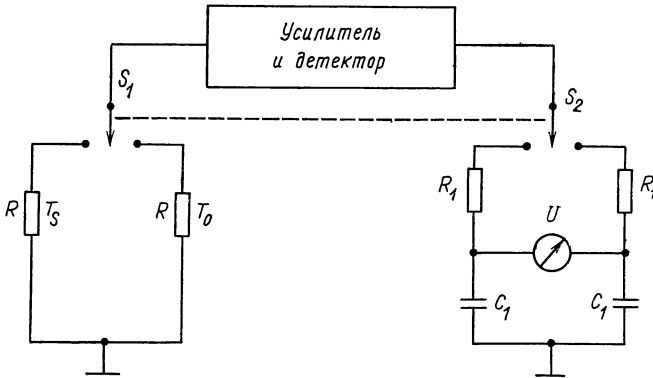


Рис. 22.2. Схема радиометра

стантами, можно измерять приращения величины T_s порядка $(T_s + T_n)(2B_2/B_1)^{1/2}$. Например, при $T_s + T_n = 1000$ К, $B_1 = 10^8$ Гц и $B_2 = 0,5$ Гц точность составляет 0,1 К.

Необходимость в знании параметров A , T_n и B отпадает, если воспользоваться устройством, предложенным Дике [8] и схематически изображенным на рис. 22.2. Вход усилителя периодически переключается (посредством ключа S_1) от источника с неизвестной температурой T_0 , а выход детектора синхронно переключается от одного зажима интегрирующего вольтметра к другому. Ширина полосы пропускания выходной части устройства составляет $B_2 = 1/(4R_1C_1)$. Если для простоты предположить, что детектор квадратичный, то интегральное напряжение, действующее на одном конденсаторе C_1 , будет равно

$$U_1 = \frac{1}{2} \alpha A B_1 (T_s + T_n),$$

а на другом конденсаторе C_1

$$U_2 = \frac{1}{2} \alpha A B_1 (T_0 + T_n).$$

Для средних квадратов соответствующих шумовых напряжений имеем

$$U_{1n}^2 = \frac{1}{2} \alpha^2 A^2 (T_s + T_n)^2 2B_1 B_2;$$

$$U_{2n}^2 = \frac{1}{2} \alpha^2 A^2 (T_0 + T_n)^2 2B_1 B_2.$$

Следовательно, среднеквадратичное значение шумового напряжения, действующее на вольтметре, равно

$$U_n = (U_{1n}^2 + U_{2n}^2)^{1/2} = 2A (B_1 B_2)^{1/2} \times \\ \times [(T_0 + T_n)^2 + (T_s + T_n)^2]^{1/2},$$

а наименьшая обнаруживаемая разность между T_s и T_0 составляет

$$T_s - T_0 = 2 \left(\frac{B_2}{B_1} \right)^{1/2} [(T_0 + T_n)^2 + (T_s + T_n)^2]^{1/2} \approx 2 \left(\frac{2B_2}{B_1} \right) (T_s + T_n). \quad (22.18)$$

Если значение T_0 устанавливать по нулевому показанию вольтметра, то выражение (22.18) будет определять точность, с которой может быть измерена температура T_s .

Модуляционный радиометр может быть использован по-разному, например в качестве измерителя шумовой температуры, но наиболее важные применения он находит в радиоастрономии.

22.4. Определение шумовых характеристик транзистора

Шумовые характеристики полевых транзисторов обусловлены тремя параметрами: током утечки затвора I_3 , взаимной проводимостью g_m и входной емкостью C или произведением ширины полосы пропускания на коэффициент усиления $g_m / (2\pi C)$. Эти параметры почти всегда приводятся изготовителями приборов в справочных данных, поэтому при выборе конкретного прибора или при переходе к расчету малозумящей аппаратуры затруднений не возникает.

На низких частотах эквивалентное шумовое сопротивление возрастает от $2/3g_m$ до

$$r_n = \frac{2}{3g_m} \left(1 + \frac{f_0}{f} \right). \quad (22.19)$$

При этом среднеквадратичное значение входного шумового напряжения e_n в полосе частот 1 Гц определяется соотношением

$$e_n^2 = \frac{8kT}{3g_m} \left(1 + \frac{f_0}{f} \right). \quad (22.20)$$

В некоторых случаях приводится график зависимости e_n от f . Частота, на которой e_n в два раза превышает свое значение на высоких частотах, согласно (22.20) равна $f_0/3$. В других случаях дается значение e_n для одной низкочастотной точки, и соотношение (2.20) по-прежнему может быть использовано для определения f_0 . Если же вообще не приводится никаких сведений о шуме в диапазоне низких частот, то это обычно означает, что прибор не предназначен для использования в этом диапазоне.

Шумовые параметры биполярных транзисторов зависят от взаимной проводимости g_m , коэффициента усиления по постоянному току $\beta_{dc} = h_{FE}$, произведения коэффициента усиления на ширину полосы пропускания f_T , последовательного сопротивления базы R_b и частоты f_0 , входящей в выражение для шума базового тока:

$$\omega_i = 2eI_b(1 - f_0/f). \quad (22.21)$$

Взаимная проводимость $g_m = eI_K/(kT)$ контролируется потребителем и зависит от режима смещения. Параметры β_{dc} и f_T обычно даются как функции I_K . Поэтому нам остается рассмотреть только R_b и f_0 .

В справочных данных величина сопротивления базы R_b приводится лишь в исключительных случаях. Вместе с тем она заметно сказывается как на оптимальной шумовой температуре, так и на оптимальном сопротивлении источника сигнала. Поэтому необходимо вывести эту величину из других данных, что можно сделать несколькими способами.

На средних частотах оптимизированный коэффициент шума равен

$$F_0 = \beta_{dc}^{-1/2} (1 + 2g_m R_b)^{1/2} = \beta_{dc}^{-1/2} \left(1 + 2 \frac{eI_K R_b}{kT}\right)^{1/2}. \quad (22.22)$$

Если коэффициент F_0 задан в виде функции I_K , то из (22.22), зная величину β_{dc} , можно найти R_b :

$$R_b = \frac{kT}{2eI_K} [F_0^2 \beta_{dc} - 1]. \quad (22.23)$$

Среднеквадратичное значение эквивалентного входного шумового напряжения e_n (В/Гц^{1/2}) удовлетворяет соотношению

$$e_n^2 = \frac{2kT}{g_m} + 4kTR_b \left(1 + \frac{g_m R_b}{2\beta_{dc}}\right), \quad (22.24)$$

которое может быть использовано для определения R_b , особенно когда e_n^2 как функция I_K принимает минимальное значение

$$e_{n0}^2 = 4kTR_b \left[1 + \left(\frac{1}{2} \beta_{dc}\right)^{1/2}\right] \sim 4kTR_b \quad (22.25)$$

при

$$I_K = kT \beta_{dc}^{1/2} / (eR_b). \quad (22.26)$$

Представляемые сведения о низкочастотных шумовых характеристиках могут быть выражены в виде графика функциональной

зависимости среднеквадратичного значения шумового тока базы i_n (А/Гц^{1/2}) от тока I_K и частоты. Поскольку

$$i_n^2 = \frac{2eI_K}{\beta_{dc}} \left(1 + \frac{f_0}{f} \right), \quad (22.27)$$

открывается возможность определения f_0 . В других случаях может быть задан избыточный вклад в коэффициент шума на низких частотах в виде $F' = \varphi/f$, где φ — заданная функция тока I_K и сопротивления источника. Ввиду того, что

$$F' = \frac{gm_0}{2\beta_{dc}f} \frac{(R_s + R_6)^2}{R_s},$$

имеем

$$\varphi = \frac{gm_0}{2\beta_{dc}} \frac{(R_s + R_6)^2}{R_s}. \quad (22.28)$$

Нетрудно видеть, что при любых значениях частоты и коллекторного тока функция φ принимает минимальное значение при $(R_s = R_6)$. Это часто дает наиболее достоверную оценку величины R_6 . Ясно, что формула (22.28) может быть использована также и для определения f_0 .

Иногда полнота приводимых данных допускает получение нескольких независимых оценок величины R_6 , что позволяет вынести некоторые суждения о точности различных оценок. По-видимому, точность составляет порядка $\pm 30\%$, что достаточно для большинства целей. Обычно нам требуется знать только порядок значения R_6 . Как правило, усилительные транзисторы с f_T менее 500 МГц имеют чаще всего значение R_6 около 200 Ом, тогда как высокочастотные транзисторы имеют иногда сравнительно малые значения R_6 .

22.5. Спектрометры парамагнитного резонанса

Явления парамагнитного резонанса и ядерного магнитного резонанса (обсуждаемого в следующем разделе) приводят к возникновению пика в частотной зависимости комплексной магнитной восприимчивости на частоте, которая определяется значением приложенного постоянного магнитного поля и внутренней структурой вещества. Запишем восприимчивость в виде $\chi' - j\chi''$ и будем использовать систему единиц СИ (в этой системе χ' и χ'' в 4π раз больше значений тех же величин, выраженных в системе единиц СГС). Если поместить исследуемый образец в резонансный контур, то для изменения добротности Q контура получим

$$\delta(1/Q) = +\eta\chi'', \quad (22.29)$$

где η — коэффициент заполнения. Эта величина представляет собой отношение интеграла $\int H^2 dV$, вычисленного по объему образца, к аналогичному интегралу, вычисленному по всему объему в резонансном контуре. Парамагнитный резонанс обычно наблю-

дается в СВЧ-диапазоне, и параллельным резонансным контуром в этом случае будет объемный резонатор. Ядерный магнитный резонанс, в свою очередь, наблюдается на частотах ниже 400 МГц, и резонансная цепь здесь состоит из катушки индуктивности и конденсатора. Техника измерения для обоих случаев неодинакова, и они будут рассматриваться раздельно.

Пусть линия передач с волновым сопротивлением Z связана с резонатором, собственная добротность которого Q , а внешняя добротность Q_e . Тогда при падении волны с эффективным значением напряжения $U_i = (ZP_i)^{1/2}$ возникает отраженная волна с напряжением

$$U_r = U_i \frac{1/Q - 1/Q_e}{1/Q + 1/Q_e}. \quad (22.30)$$

Коэффициент стоячей волны в линии равен

$$r = Q_e/Q. \quad (22.31)$$

В результате резонансного поглощения напряжения отраженной волны U_r меняется с изменением добротности, что выражается соотношением вида

$$\delta U_r = \frac{4r}{(1+r)^2} \frac{1}{2} Q U_i \delta(1/Q). \quad (22.32)$$

Величина δU_r представляет собой полезный сигнал. Напряжение сигнала необходимо сравнить со среднеквадратичным шумовым напряжением U_n приемника, согласованного с линией и имеющего коэффициент шума F и полосу пропускания B . Для U_n имеем

$$U_n = \frac{1}{2} (4ZFkT_0B)^{1/2}. \quad (22.33)$$

Отсюда выразим величину минимально обнаружимого сигнала:

$$\delta U_r = (ZFkT_0B)^{1/2}. \quad (22.34)$$

Полученный результат не зависит от того, является ли δU_r напряжением всего отраженного сигнала или же его малого изменения. Следовательно, значение величины минимально обнаружимого сигнала не зависит от степени согласования резонатора с линией, или, что то же самое, от коэффициента стоячей волны r , и можно выбрать Q_e и r так, чтобы оптимизировать δU_r . Согласно (22.32) δU_r максимальна, когда $r \approx 1$, т. е. $Q_e \approx Q$. Как будет видно из дальнейшего анализа, необходимо, чтобы значение r было близко к единице, но не равнялось ей точно, поэтому

$$\delta U_r \sim \frac{1}{2} Q U_i \delta(1/Q). \quad (22.35)$$

Теперь запишем минимальное изменение добротности, которое можно обнаружить:

$$\eta\chi'' = \delta(1/Q) = 2[FkT_0B / (P_i Q)]^{1/2}. \quad (22.36)$$

При фиксированных P_i и Q необходимо рассмотреть, как значения величин F и B зависят от значения отраженной мощности и от выбора схемы измерений.

В большинстве спектрометров сигнал $\delta(1/Q)$, связанный с поглощением в образце, промодулирован по частоте вблизи резонанса периодическим изменением приложенного внешнего магнитного поля с низкой частотой f_m . Если развертка по полю значительно превосходит ширину резонансной линии, то сигнал имеет форму, показанную на рис. 22.3, и его частота повторения равна $2f_m$. Для воспроизведения сигнала полоса приемника должна быть не меньше $10f_m$. Если же развертка по полю меньше приблизительно половины ширины резонансной линии и значение величины постоянной составляющей поля соответствует поглощению на частоте, расположенной по одну из сторон от резонансной частоты, то сигнал имеет форму синусоиды с частотой f_m . Сле-

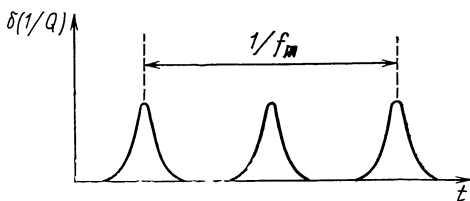


Рис. 22.3. Сигнал резонансного поглощения, когда девиация поля или частоты превышает ширину линии. Частота модуляции — f_m

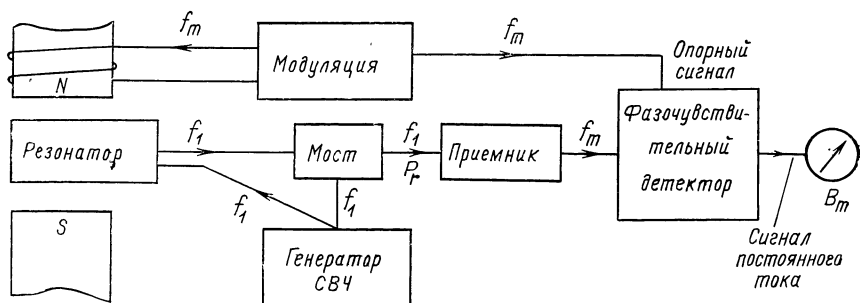


Рис. 22.4. Спектрометр парамагнитного резонанса

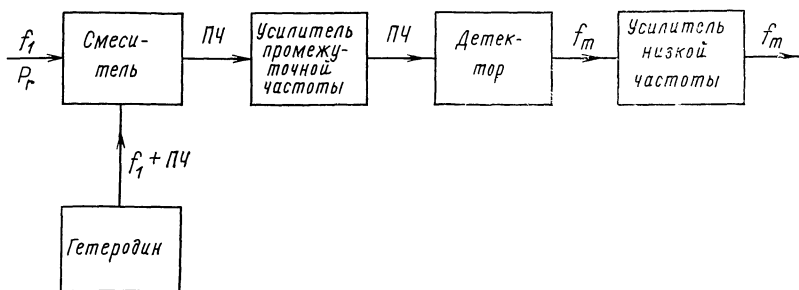


Рис. 22.5. Супергетеродинный приемник

довательно, в устройство спектрометра можно ввести фазочувствительный детектор, использующий в качестве опорного сигнала сигнал генератора модулирующих магнитное поле колебаний. Полосу же пропускания B можно выбрать настолько узкой, насколько это позволяет частотная стабильность спектрометра. Блок-схема такого устройства показана на рис. 22.4. Мост СВЧ включен в схему так, что независимо от значения величины сигнала, отраженного от резонатора, можно регулировать мощность, поступающую в приемник, и оптимизировать его чувствительность.

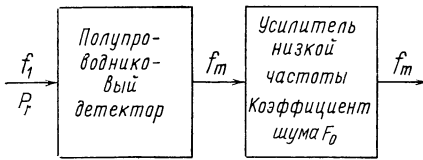


Рис. 22.6. Система прямого детектирования

можно было пренебречь шумом детектора, необходимо, чтобы усилитель имел большое усиление (порядка 60 дБ), и, следовательно, мощность P_r не должна превышать 10^{-8} Вт. Если это выполняется и если используется балансный смеситель, то на частоте 10 ГГц можно получить коэффициент шума меньше 10 дБ.

Ширина полосы измерительного прибора, установленного после детектора, равна B_m при условии, что частота среза низкочастотного усилителя меньше $3f_m$. Однако эффективная ширина полосы всего устройства равна B_m только тогда, когда уровень несущей на входе детектора намного превышает уровень шумов. Если это не так, то эффективная ширина полосы равна $(2B_i B_m)^{1/2}$, где B_i — ширина полосы на промежуточной частоте. Так как B_m меньше 1 Гц и B_i больше 1 МГц, то важно предусмотреть достаточный уровень несущей, а это, в свою очередь, обеспечивается мостом СВЧ. Положив в уравнении (22.36) $F=10$, $B=0,1$ Гц, $P_i=10^{-2}$ Вт и $Q=5000$, получим предельную чувствительность для эффективного значения глубины модуляции $\delta(1/Q) \sim 2,5 \cdot 10^{-13}$. Величина $\eta\chi''$ определяется полным размахом модулированных колебаний, и, следовательно, ее минимальное значение, которое можно обнаружить, равно приблизительно 10^{-12} .

Когда не требуется столь высокая чувствительность, аппарата заметно упрощается путем замены супергетеродинного приемника на простой полупроводниковый диодный детектор и низкочастотный усилитель так, как это показано на рис. 22.6. Ширина полосы B теперь совпадает с шириной полосы низкочастотного усилителя или с шириной полосы измерительного прибора, если за усилителем стоит фазочувствительный детектор. В выражении для коэффициента шума кристаллического детектора (20.45) представлена зависимость этого параметра от падающей

На рис. 22.5 изображена блок-схема супергетеродинного приемника СВЧ. Его коэффициент шума будет зависеть от характеристик смесителя, значения промежуточной частоты и мощности гетеродина, но не будет зависеть от мощности отраженного сигнала P_r до тех пор, пока сигнал не перегружает усилитель промежуточной частоты. Для того чтобы

мощности P_r , коэффициента шума F_0 низкочастотного усилителя и параметров детектора μ , η и γ . Это выражение имеет вид

$$F = \left(\frac{1 + \mu P_r}{2 + \mu P_r} \right)^2 \left\{ \frac{2F_0}{\eta P_r} (1 + \mu P_r) + \frac{\gamma P_r}{f_m} \right\}. \quad (22.37)$$

При типичных значениях величин правой части (22.37) $\gamma = 10^{12} \text{ (Вт} \cdot \text{с)}^{-1}$, $\eta = 10^3 \text{ Вт}^{-1}$, $\mu = 2 \cdot 10^3 \text{ Вт}^{-1}$, $f_m = 50 \text{ Гц}$ и $P_r = 10^{-3} \text{ Вт}$ (это значение P_r соответствует $P_i = 10^{-2} \text{ Вт}$ и коэффициенту стоячей волны $r = 2$) получаем $F \approx 10^7$, что приводит к чувствительности по параметру η'' для схемы прямого детектирования в тысячи раз худшей, чем чувствительность супергетеродинного приема. Если, однако, для P_r посредством регулировки моста СВЧ выполнить соотношение

$$P_r = \left(\frac{2F_0 f_m}{\eta \gamma} \right)^{1/2}, \quad (22.38a)$$

то коэффициент шума F будет минимален и равен

$$F = \frac{\mu F_0}{2\eta} + \left(\frac{\gamma F_0}{2\eta f_m} \right)^{1/2}. \quad (22.38b)$$

При тех же самых параметрах детектора и $f_m = 50 \text{ Гц}$ получаем $F \approx 3000$. Если f_m увеличить до 100 кГц , то значение отраженной мощности, приводящее к минимуму F , увеличится с $1/3 \cdot 10^{-6}$ до $14 \cdot 10^{-6} \text{ Вт}$, а F уменьшится с 3000 до 70 . В результате чувствительность рассматриваемой схемы будет только в 3 раза хуже чувствительности схемы с супергетеродинным приемником.

Хотя наилучшей чувствительностью обладает устройство с супергетеродинным приемником, ясно, что при использовании высокой частоты модуляции вполне приемлемую чувствительность можно получить и в устройстве с прямым детектированием. В добавок ко всему, если в первом случае для того чтобы понизить мощность на входе приемника P_r до 10^{-8} Вт , накладываются высокие требования к балансировке моста СВЧ, во втором случае параметры моста не столь критичны, поскольку уже достаточна входная мощность 10^{-5} Вт .

Минимально обнаружимая величина χ'' зависит от входной мощности и Q в комбинации $P_i^{-1/2} Q^{-1}$, и в некоторых случаях P_i ограничивается сверху только наличием мощного генератора гармонических колебаний. В других случаях имеется насыщение в резонансе при определенных предельных значениях высокочастотного магнитного поля и соответственно при определенных значениях плотности энергии в резонаторе. Так как плотность энергии пропорциональна QP , то чувствительность теперь изменяется при изменении Q по закону $Q^{-1/2}$, а не по закону Q^{-1} . Иногда, особенно при сильных линиях поглощения, может оказаться более удобным вместо резонатора использовать простую длинную линию.

Рассмотрим линию передач без потерь, содержащую среду, для которой $\chi = \chi' - j\chi''$ и χ' и χ'' малы. Мощность, поглощенная в единице объема в среде, равна $1/2\omega\mu_0\chi''H^2$, где H — высокочастотное магнитное поле. Введем теперь эффективное поперечное сечение структуры A , и для скорости убывания мощности с расстоянием запишем

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{1}{2}\mu_0\omega\chi''H^2A.$$

Величину мощности можно представить в виде $\frac{1}{2}\mu_0H^2Av_g$, где v_g — групповая скорость, и тогда $\frac{dP}{dx} = -\frac{\omega}{v_g}\chi''P$.

Отсюда следует, что амплитуда поля убывает с расстоянием по закону $\exp[-\omega\chi''x/(2v_g)]$. Для напряжения сигнала δU при напряжении U_i на входе справедливо

$$\delta U \sim \frac{\omega\chi''x}{2v_g}U_i = \frac{\pi x}{\lambda_g}\chi''U_i = \pi n\chi''U_i, \quad (22.39)$$

где λ_g — длина волны в линии передачи, а n — длина линии, выраженная в длинах волн. Если сравнить это выражение с выражением (22.32) при $r=1$, то можно увидеть, что линия эквивалентна резонатору с $\eta Q = 2\pi n$. При длинах волн больших 2 см в качестве такой линии пригодна спираль, и можно получить $n \geq 1$ при длине спирали 1 см, диаметре 1 мм, содержащей 10 мм³ исследуемого материала. Так как при длине волны 3 см резонатор должен иметь объем 4 см³, что соответствует $\eta = 2,5 \cdot 10^{-3}$ для того же самого количества исследуемого материала, то потребуются добротность Q не хуже 2500 для того, чтобы получить с резонатором результаты лучше, чем с линией. На практике потерями в спирали полностью пренебречь нельзя, но, тем не менее, она вполне подходит для многих целей.

Уравнение (22.39) совместно с уравнением (22.33) дает минимально обнаружимую величину χ'' для устройства, использующего линию передач длиной n длин волн:

$$\chi''_{\text{мин}} = \text{tg } \delta = \frac{1}{\pi n} \left(\frac{FkT_0B}{P_i} \right)^{1/2}. \quad (22.40)$$

Здесь δ — угол потерь. В таком виде выражение (22.40) может быть использовано для анализа устройств, содержащих среду с диэлектрическими потерями, обусловленными электрическими, а не магнитными дипольными переходами.

22.6. Ядерный магнитный резонанс

Обычно ядерный магнитный и квадрупольный резонансы изучаются на частотах до 500 МГц, когда еще применима техника обычных цепей с сосредоточенными постоянными, и в этом случае эффекты резонансного поглощения можно наблюдать по изменению

добротности Q параллельного резонансного контура, в катушку индуктивности которого помещена поглощающая среда.

Мощность, поглощенная в среде, в единице ее объема, равна $1/2\omega\mu_0\chi''H_1^2$, где H_1 — пиковое значение магнитного поля в катушке. Энергия, накопленная в единице объема катушки, равна $1/2\mu_0H_1^2$, и если η — коэффициент заполнения, представляющий собой отношение объема образца к объему катушки, то изменение величины $1/Q$ в результате поглощения будет

$$\delta(1/Q) = \eta\chi'' \quad (22.41)$$

Для соответствующего изменения самой добротности имеем $\delta Q/Q = -Q\delta(1/Q)$, и относительное изменение параллельного активного сопротивления контура выражается в виде

$$\delta Z/Z = \delta Q/Q = -Q\eta\chi'' \quad (22.42)$$

Для параллельного контура, возбуждаемого в резонансе генератором тока, полученное выражение определяет также и относительное изменение высокочастотного напряжения U_1 на катушке. Следовательно, напряжение сигнала

$$\delta U_1 = -C\eta\chi''U_1 \quad (22.43)$$

Средний квадрат шумового напряжения на катушке, используемой в сочетании с усилителем с коэффициентом шума F , равно $4kTZF\delta f$, и его можно выразить через резонансную частоту и емкость C , параллельную индуктивности катушки, в следующем виде:

$$U_n^2 = \frac{4FkTZQ\delta f}{\omega C} \quad (22.44)$$

Теперь можно записать выражение для минимально обнаруживаемой величины $\eta\chi''$:

$$\eta\chi'' = \left(\frac{4FkTZ\delta f}{Q\omega CU_1^2} \right)^{1/2} \quad (22.45)$$

где U_1 — эффективное значение напряжения. Высокочастотное поле H_1 в катушке связано с U_1 посредством соотношения

$$CU_1^2 = \frac{1}{2} \mu_0 H_1^2 V \quad (22.46)$$

Здесь V — объем катушки.

Если существенны эффекты насыщения, то значение H_1 ограничено сверху, так как χ'' выражается в виде

$$\chi'' = \frac{\chi''_0}{1 + (H_1/H_r)^2} \quad (22.47)$$

Здесь χ''_0 — величина мнимой части восприимчивости в нулевом высокочастотном поле. Значение H_r определяется свойствами образца. В этом случае возникают ограничения сверху и на U_1 . Допустимые значения U_1 меняются в широком диапазоне: от 10^{-4}

до 10 В и шире. Оптимальным значение U_1 будет при $H_1=H_r$, тогда для U_1 получаем

$$\eta\chi''_0 = \left(\frac{32FkT\delta f}{Q\omega\mu_0 H^2 r V} \right)^{1/2}. \quad (22.48)$$

Отсюда чем больше значения величин η , V , Q и ω , тем выше чувствительность. В типичном примере протонного магнитного резонанса в воде в постоянном магнитном поле напряженностью 10^4 Гс имеем $H_r \approx 1 \text{ Ам}^{-1}$ (0,01 Гс), $V=10^{-6} \text{ м}^3$ (1 см³), $Q=100$, $F=2$, $\delta f=1 \text{ кГц}$, $\omega=2,7 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$, что дает $\eta\chi''_0 \approx 10^{-6}$. Так как при таких условиях значение χ''_0 равно по крайней мере 10^{-3} , то значение отношения сигнал/шум получается отличным.

Когда эффекты насыщения не важны, как, например, в случае широких линий поглощения и в ядерном квадрупольном резонансе, тогда значение U_1 ограничивается сверху, что обеспечивает работу электронных устройств без перегрузки. В этой ситуации лучше пользоваться выражением для чувствительности в виде (22.45).

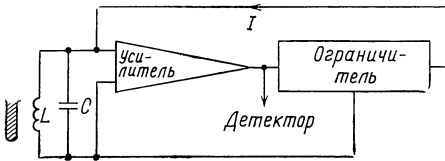


Рис. 22.7. Генератор с ограничителем

Если применить рассмотренный выше резонансный контур в качестве колебательного контура генератора, то можно получить множество практических преимуществ: легкость перестройки, отсутствие шумов, обусловленных микрофонным эффектом, и возможность модуляции частоты. Устройства такого типа известны как пороговые генераторы. В первоначальных устройствах из которых, вероятно, наиболее широко известен спектрометр Паунда — Найта — Уоткинса [30], использовались генераторы, работающие в режиме генератора Ван-дер-Поля. Но поведение генератора Ван-дер-Поля в значительной степени непредсказуемо, так как амплитуда колебаний критически зависит от кривизны характеристик активных приборов в регенеративном контуре обратной связи.

Генераторы, использующие ограничитель [36], обладают более стабильными и предсказуемыми характеристиками и приводят к эквивалентной или лучшей чувствительности, особенно при очень малых или очень больших амплитудах колебаний. Их принцип работы показан на рис. 22.7. Выходной ток ограничителя с эффективным значением амплитуды I приводит при резонансе к падению напряжения $U_1=IZ$ на активном сопротивлении Z колебательного контура. Сигнал, обусловленный поглощением, имеет вид

Генераторы, использующие ограничитель [36], обладают более стабильными и предсказуемыми характеристиками и приводят к эквивалентной или лучшей чувствительности, особенно при очень малых или очень больших амплитудах колебаний. Их принцип работы показан на рис. 22.7. Выходной ток ограничителя с эффективным значением амплитуды I приводит при резонансе к падению напряжения $U_1=IZ$ на активном сопротивлении Z колебательного контура. Сигнал, обусловленный поглощением, имеет вид

$$\delta U_1 = -U_1 Q \eta \chi'', \quad (22.49)$$

и, как это следует из гл. 18, средний квадрат эквивалентного шумового напряжения на тех же зажимах будет равен $U_n^2 = 4FkTZ\delta f$, где F — коэффициент шума усилителя. Чувствительность определя-

ется формулой (22.45), т. е. будет аналогичной, как и в случае того же усилителя и детектора с отдельным возбуждающим генератором. Экспериментальные измерения чувствительности этого устройства и как спектрометра, и при калибровке его внешним источником белого шума подтверждают полученный выше вывод.

На обычно используемых частотах можно объединить функции ограничителя и детектора в одной схеме так, как показано на рис. 22.8. Детектирующие свойства этой схемы обсуждались в гл. 20, откуда следует, что для достаточно больших возбуждающих входных сигналов выходной ток имеет прямоугольную форму и амплитуда его равна значению постоянного тока в каждом транзисторе.

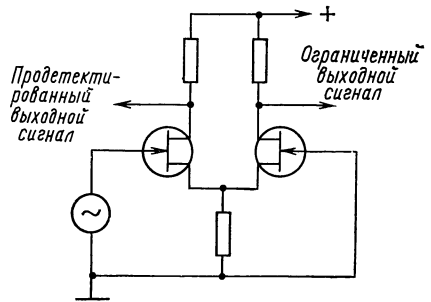


Рис. 22.8. Ограничитель — детектор

Если высокочастотное напряжение на контуре мало (меньше 0,5 В) и позволяет осуществить высокочастотное усиление без перегрузок в элементах схемы, включенных между колебательным контуром и ограничителем, то эффективность детектирования очень высока и чувствительность почти полностью определяется коэффициентом шума высокочастотного усилителя.

Для усилителя, входные каскады которого выполнены на полевых транзисторах, коэффициент шума не должен намного превышать единицу. Когда необходим высокий уровень высокочастотного напряжения в колебательном контуре, тогда дальнейшее усиление становится затруднительным. В этом случае хорошо работает схема, изображенная на рис. 22.9. Для оптимальности характеристик при детектировании требуются сравнительно малые токи транзисторов. Это противоречит требованиям к устройству, связаным с необходимостью получения достаточной регенерации и

большого значения на выходе ограничителя, позволяющего возбудить в контуре колебания с большой амплитудой. Указанное противоречие отчасти устраняется, если добротность контура Q , определяемая параметрами катушки индуктивности, велика, а контур имеет большое параллельное активное сопротивление. Можно относительно легко получить коэффициент шума порядка 20 и меньше, осо-

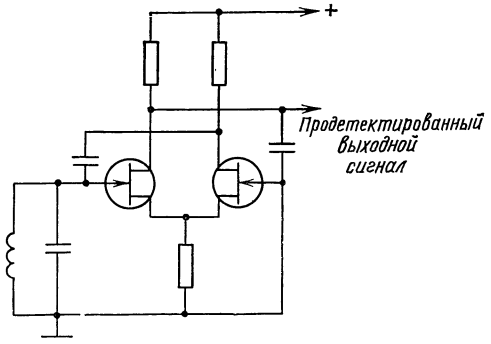


Рис. 22.9. Простой генератор для исследования магнитного резонанса

бенно при использовании высокочастотных катушек с большим объемом. Если частота колебаний не очень высока, то коэффициент шума можно понизить еще больше. Часто такие значения коэффициента шума вполне пригодны. Так, например, на осциллографе можно легко наблюдать чистую линию азота при квадрупольном резонансе на ядрах N^{14} в соединении гексаметилентетрамин. На частотах свыше 30 МГц при уменьшении сопротивления колебательного контура чувствительность падает, но, тем не менее, она остается на уровне порядка $\delta (1/Q) \approx 10^{-7}$ (при ширине полосы 1 кГц после детектирования) вплоть до частот порядка 500 МГц. Такие значения чувствительности достаточны, например, для обнаружения протонного ядерного резонанса в очень сильных, но в то же время и очень неоднородных внешних полях.

22.7. Практические рекомендации

Окончательной мерой качества радиоэлектронной системы, реагирующей на слабые сигналы, является отношение сигнал/шум на оконечном выходе. Это отношение определяется эффективной шумовой полосой пропускания системы, а также уровнями шума, имеющегося на входе, и шума, генерируемого внутри системы. В идеальной системе эффективная шумовая полоса не шире, чем это необходимо для обнаружения, передачи и усиления сигнала, а внутренние шумы отсутствуют. Эффективная полоса пропускания обуславливается структурой системы, т. е. устройством входящих в нее усилителей, смесителей, детекторов и фильтров, а также способом окончательного отображения или обработки выходного сигнала. Внутренние шумы системы почти целиком определяются источниками, расположенными в первых каскадах. Степень возможного сужения шумовой полосы пропускания зависит от природы как входного, так и требуемого выходного сигнала, и по отношению к каждому из них можно выделить два различных случая. В первом случае, например при радиовещательном приеме характер входного сигнала обусловлен обстоятельствами, выходящими из-под контроля разработчика приемника, тогда как во втором случае форма сигнала в некоторой степени, если не полностью, может контролироваться. Так, например, в спектрометрах ядерного резонанса характер модуляции приложенного поля (или частоты), а следовательно, и форму сигнала может выбирать разработчик. Разработчик систем космической связи имеет возможность сформировать сигнал, легко поддающийся обработке.

По отношению к выходному сигналу различные ситуации связаны с требованием обработки сигнала в реальном масштабе времени, как, например, в телефонии и радиовещании, или допустима некоторая задержка, так что выходной сигнал можно анализировать и обрабатывать в другое, более свободное время. Несомненно, лучшие характеристики могут быть достигнуты в тех случаях, когда выходной сигнал обрабатывается и используется не сразу, а с задержкой, тогда полезный сигнал может быть зако-

дирован в соответствии со стратегией оптимальной обработки. Вид такой стратегии ограничивается лишь изобретательностью разработчика. Если, однако, выходной сигнал требуется мгновенно и обработка должна производиться в реальном масштабе времени, возможности стратегии будут ограничены как фундаментальными соображениями, например соотношениями Крамерса — Кронига и причинностью, так и физической реализуемостью необходимых радиотехнических цепей. Выбор общей стратегии обработки для радиоэлектронной системы определяется в некоторой степени имеющимися электронными и полупроводниковыми приборами для каждого ее каскада. Однако эти соображения почти всегда приводят к необходимости выполнения первого каскада системы малошумящим и сравнительно широкополосным усилителем, пропускающим все спектральные составляющие входного сигнала. Любая другая, более сложная обработка сигнала, например фильтрация, преобразование частоты или детектирование, может быть осуществлена на таких его уровнях, при которых шумом или затуханием, обусловленными этими операциями, можно пренебречь. Основные практические проблемы, характерные для малошумящей аппаратуры, связаны с расчетом и конструированием предусилительного каскада. Поэтому сконцентрируем наше внимание на одном этом вопросе.

Из изложенного ранее замечаем, что автор почти исключительно занимался выводом теоретических выражений для предельной чувствительности устройств и приборов. Полученные результаты позволяют правильно выбрать прибор для конкретного применения и произвести расчет устройства. Теперь же рассмотрим, какие практические меры предосторожности необходимо предпринять, чтобы достичь ожидаемых характеристик.

Выбор активного прибора для входного каскада зависит как от рабочей частоты, так и от входного сопротивления источника сигнала. Если, например, сопротивление источника составляет 500 Ом, то его можно трансформировать, чтобы согласовать с конкретным прибором, но в равной мере можно подобрать прибор, для которого сопротивление 500 Ом отвечает идеальному согласованию. Поскольку все трансформаторы в той или иной степени имеют потери и генерируют тепловой шум, второй вариант, в принципе, следует считать предпочтительным. На практике этот вариант может быть лучшим еще и потому, что каждый лишний элемент на входе является потенциальным источником как несправности, так и помех, проникающих в систему извне. Следует считать общим правилом, что конструкция входной цепи должна быть как можно проще и, в частности, не должна содержать дополнительных частотно-компенсирующих, нейтрализующих или температурно-компенсирующих элементов.

Существует множество причин, в силу которых разработанное устройство может не обеспечить ожидаемых характеристик, но мы укажем некоторые, наиболее важные из них.

1. В расчетах допущена ошибка, например неправомерно игнорировался резистор в цепи смещения или обратной связи.

2. Схемные элементы, установленные в устройстве, не соответствуют расчетным данным. Легко перепутать выводы транзисторов или номиналы резистора 47 кОм и 470 Ом. Контроль напряжения смещения постоянного тока в соответствующих точках схемы обычно позволяет выявить ошибку этого рода.

3. Источник питания генерирует шум, который проникает на вход первого каскада по цепи смещения.

4. Блокировочные или проходные конденсаторы имеют утечку и генерируют фликкер-шум.

5. Внешний шум или посторонние сигналы наводятся радиопередатчиками, другой аппаратурой или электросетью.

6. Возникают паразитные колебания на частотах, лежащих за пределами рабочего диапазона устройства или измерительной аппаратуры.

7. Имеются плохие контакты в монтаже или внутри схемных элементов. Эти контакты генерируют фликкер-шум или воздействуют непосредственно на характеристики.

8. Система механически неустойчива: звук и вибрации создают микрофонный шум. В низкочастотных усилителях этот шум прямо проявляется на выходе, а в высокочастотных приводит к паразитной модуляции несущей.

9. Имеются неисправные схемные элементы.

Меры по устранению неисправностей, указанных в пп. 1—3, очевидны, неисправности п. 4 можно избежать за счет тщательного выбора элементов. Идентификация неисправных элементов часто оказывается затруднительной, так как слабые эффекты (например, избыточный ток утечки коллектор — база в транзисторе), не оказывая заметного воздействия на режим по постоянному току или малосигнальные характеристики, могут иметь катастрофические последствия для шума.

Микрофонный шум может быть устранен применением жесткой механической конструкции и кратчайших монтажных проводников. Последнее, как мы увидим, желательно и по другим причинам.

В местах расположения большинства лабораторий напряженность окружающего электрического поля, создаваемого радио- и телевизионными передатчиками, значительно превышает 1 мВ/м. Если во входном каскаде усилителя с большим коэффициентом усиления наводится ощутимое напряжение, то оно может или проявиться на выходе, или вызвать перегрузку последнего каскада. Вследствие нелинейности результирующей характеристики может произойти смещение постороннего входного сигнала с полезным сигналом. От высокочастотных наводок избавляются, применяя тщательную экранировку и фильтрацию в цепях питания (смещения). При этом степень экранировки снижается, если все проводники выполнены короткими, а монтаж — компактным. Короткие провода и отсутствие контуров в цепи заземления обеспе-

чивают снижение наводок и на низких частотах. Для малошумящих усилителей на любой частоте важно, чтобы имелась хорошо выполненная заземляющая общая шина, а монтаж всех цепей был выполнен так, чтобы циркулирующие в каждом каскаде токи ограничивались контурами по возможности наименьших размеров.

Большинство активных приборов, используемых на низких частотах, имеют значительный коэффициент усиления на более высоких частотах. То обстоятельство, что усилитель рассчитывался, скажем, для использования на частоте 1 МГц, само по себе не гарантирует невозможности генерации колебаний на частоте 1000 МГц. Наличие слабых паразитных колебаний на частотах, далеко отстоящих от диапазона рабочих частот, является одной из возможных причин плохих шумовых характеристик. Такие колебания чаще всего возникают вследствие того, что излишне длинный вывод коллектора или проходного конденсатора, не доставляющий беспокойства на расчетной частоте, может представлять собой высокодобротную индуктивность на некоторой частоте, на которой активный прибор проявляет способность к усилению.

Существует два средства борьбы с этим явлением. Разработчик должен, во-первых, рассмотреть вероятные свойства проектируемого устройства на всех частотах, а во-вторых, сделать все провода короткими и избегать возникновения контуров в цепи заземления. По-видимому, наиболее известным примером проблемы паразитных колебаний служит предрасположенность источникового или эмиттерного повторителя к превращению в генератор Колпица, если на какой-либо частоте полное входное сопротивление прибора имеет индуктивный характер. Существование паразитных колебаний обычно обнаруживается по существенному изменению характеристик усилителя при небольших изменениях в монтаже или при касании монтажных проводов отверткой.

Сопротивление контакта может генерировать фликкер-шум, если даже оно стабильно. Однако чаще всего эта проблема связана с контактным сопротивлением, которое само по себе флуктуирует. Если, например, в эмиттерном выводе входного транзистора имеется флуктуирующее контактное сопротивление порядка 10^{-3} Ом, а ток эмиттера составляет 1 мА, то это сопротивление будет создавать шум с эквивалентным напряжением 1 мкВ на входе. Эффект становится еще более заметным, когда контактное сопротивление находится в резонансном контуре, к которому приложено значительное высокочастотное напряжение. В этом случае сопротивление со значением 10^{-3} Ом, которое легко может возникнуть в переменном конденсаторе настройки, может генерировать шум в несколько милливольт при напряжении на контуре 1 В. Это представляет особенно серьезную проблему в аппаратуре, применяемой для исследования ядерного магнитного резонанса. Основная мера борьбы с контактными шумами сводится к использованию элементов с жестко прикрепленными (сваркой или пайкой) выводами и к обеспечению прочности соединения всех проводов. Обычным источником контактного шума бывает

соединение облуженного кабельного наконечника с шасси из оксидированного алюминия.

Из приведенных замечаний следует, что усилитель, по всей вероятности, должен обеспечивать расчетные характеристики, если его конструкция достаточно жестка, он сам хорошо экранирован, провода выполнены короткими, имеется хорошо определенная заземляющая шина и тщательно подобраны пассивные элементы. Эти соображения не делают предпочтительными обычные разновидности метода печатного монтажа.

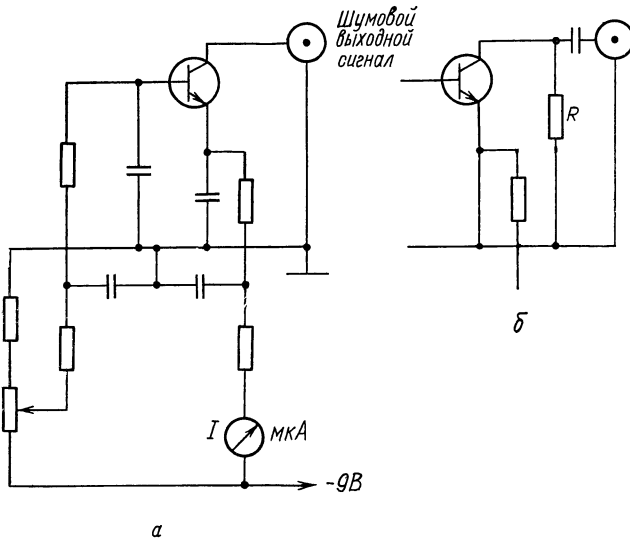


Рис. 22.10. Использование транзистора в качестве источника шума

Точность шумовых вычислений такова, что соответствующим образом рассчитанный и сконструированный усилитель должен иметь близкие к ожидаемым характеристики. Если чувствительность или коэффициент шума составляет лишь половину от ожидаемой величины, то это почти наверняка указывает на неисправность. Как следует из опыта автора, реальное устройство обеспечивает или очень близкие к ожидаемым, или намного худшие характеристики. Промежуточные случаи встречаются редко.

Для того чтобы точно определить рабочие характеристики, требуется широкий набор контрольно-измерительной аппаратуры. Полезно проводить грубый контроль коэффициента шума, что делается довольно просто. Наиболее легко это осуществляется путем подачи на вход исследуемого усилителя шума с более или менее известным уровнем. Приемлемым источником является дробовый шум в коллекторном токе транзистора, база которого соединена через конденсатор с эмиттером. Основная схема изображена на рис. 22.10,а. Показанный на схеме измерительный прибор используется для контроля тока транзистора, который регулируется по-

тенциометром. Если бы последовательное сопротивление базы R_b было равно нулю, то энергетический спектр составлял бы $2eI$. Наличие сопротивления базы приводит к тому, что спектр характеризуется большей величиной. Таким образом, если этот источник шума подключить ко входу усилителя совместно с резистором, определяющим внутреннее сопротивление R_s источника, а ток I отрегулировать по удвоению выходного шума усилителя, то коэффициент шума последнего не может быть меньше чем $eIR_s/(2kT) \sim 20IR_s$. Точность этого способа невелика, но достаточна для того, чтобы выявить основное отклонение от ожидаемых характеристик. Заметим, что при $R_s=10$ кОм и близком к единице ожидаемом коэффициенте шума требуемое значение тока составляет лишь 5 мкА.

На рис. 22.10,б показана видоизмененная схема, применение которой оправдано при недопустимости попадания постоянной составляющей тока транзистора на вход первого каскада усилителя. Сопротивление резистора R берется или равным истинному сопротивлению источника R_s , или намного большим, если уже имеется резистор, определяющий R_s . При этом, конечно, важно, чтобы падение напряжения на резисторе R не приводило к изменению режима коллекторного смещения в транзисторе.

Транзисторные усилители не являются линейными устройствами; биполярный транзистор имеет экспоненциальную передаточную характеристику, а полевой — квадратичную. Если относительная модуляция среднего тока транзистора равна Θ , то отношение квадратичного члена к линейному в разложении в степенной ряд передаточной характеристики составляет $\Theta/2$ для биполярного и $\Theta/4$ для полевого прибора. В сложной радиоэлектронной системе обычно стремятся поднять уровень сигнала и шума на выходе предусилителя по крайней мере до 50 мВ. Во многих случаях это напряжение затем подводится к следующему каскаду с помощью линии передачи с низким полным входным сопротивлением. Если волновое сопротивление линии равно, скажем, 50 Ом, то требуемое среднеквадратичное значение выходного тока предусилителя будет равно 1 мА. Эта величина может составлять заметную долю установившегося тока последнего транзистора. В этом случае возможно, что шум или нежелательные сигналы, находящиеся за рабочей полосой частот пропускания, из-за нелинейных эффектов окажутся преобразованными в эту полосу частот и произведут на оконечном выходе дополнительный шум. Этого явления нетрудно избежать, но его, несомненно, следует принимать во внимание при проведении первоначальных расчетов усилителя.

В супергетеродинных приемниках усиленный, но все еще слабый сигнал под действием сигнала гетеродина как бы попеременно подключается к смесителю. Выходной сигнал смесителя содержит слабую составляющую промежуточной частоты f_i , а также ряд других составляющих, из которых особенно сильной будет составляющая с частотой гетеродина f_0 . По значению эта составляющая на несколько порядков превышает сигнал промежуточной частоты,

и если ее не отфильтровывать, то она легко может перегрузить первый каскад усилителя промежуточной частоты. Эта проблема приобретает особую остроту в радиовещательных приемниках, в которых частота f_0 может быть всего лишь в 2 раза больше, чем f_i , а контуры промежуточной частоты имеют сравнительно низкую добротность $Q = f_i / (\Delta f_i) \approx 50$. При заметной перегрузке первого каскада промежуточной частоты уровень шума должен возрастать, а уровень сигнала должен уменьшаться, так что сигнал может стать нераспознаваемым.

В большинстве систем полоса пропускания оконечных каскадов очень узкая, а полоса пропускания предшествующих каскадов выполняется намного более широкой. Так, например, в системе, оканчивающейся фазочувствительным детектором, ширина полной полосы пропускания может составлять всего лишь 1 Гц, в то время как ширина полосы каскада, стоящего непосредственно перед детектором, может достигать 10^4 Гц. В этой части системы уровень сигнала должен быть достаточным для обеспечения существенного значения выходного сигнала, и шум может быть большим. Если, например, пороговый сигнал дает выходной сигнал детектора в $1/10$ полной величины, то среднееквадратичное значение шума на входе будет соответствовать значению сигнала, при котором выходной сигнал в 10 раз превышает полную величину. Вероятность того, что выбросы шума в несколько раз превысят его среднееквадратичное значение, достаточно велика. Поэтому необходимо принимать меры по исключению перегрузки в этой части системы.

В настоящее время имеется большое разнообразие пакетированных малошумящих усилителей и малошумящих интегральных схем, которые часто могут быть использованы вместо новых разработок. Однако при этом важно быть уверенным, что усилитель приемлем для конкретного применения. Выбранный усилитель должен не только иметь удовлетворительные шумовые характеристики в интересующем диапазоне частот, но и соответствовать полному внутреннему сопротивлению источника сигнала. Шумовая характеристика многих усилителей дается в выражении через среднееквадратичное значение эквивалентного напряжения входного шума, отнесенное к корню квадратному из 1 Гц. Сам по себе это не адекватный показатель качества, если только он не сопровождается информацией о входном эквивалентном шумовом токе или о зависимости шумовой характеристики от полного входного сопротивления источника.

В заключение отметим, что радиоэлектронная система усиливает и обрабатывает только тот сигнал, который в действительности присутствует на ее входных зажимах. Поскольку кабели имеют значительное затухание на высоких частотах, часто оказывается желательным устанавливать предусилитель вблизи источника сигнала. Эта задача облегчается, если предусилитель выполнен компактным. Компактная конструкция не только стимулирует, но и требует, чтобы расположение схемных элементов было тщательно продуманным, а монтажные проводники были короткими.

В настоящее время установилась хорошая практика делать предусилители по возможности небольшими. Это требование особенно необходимо учитывать при использовании стандартных печатных плат. Такие платы рассчитаны на применение в более сложных, чем предусилитель, устройствах, и свободное место, имеющееся на типичных платах, является признаком легкомысленного отношения к расположению элементов и монтажу.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Ток, наводимый движущимся зарядом

В разд. 5.3 и 9.1 используется формула

$$I = evE/\varphi_0, \quad (A1)$$

которая определяет ток I , наводимый во внешней цепи двух электродов частицей заряда e , движущейся со скоростью v . Электроды находятся под разностью потенциалов φ_0 , создающей поле E . Эта формула выведена из уравнения баланса энергий. Однако такой подход не может считаться удовлетворительным, так как не учитывает изменения энергии электрического поля, вызываемого движением заряженной частицы. Здесь мы дадим более строгий вывод.

Рассмотрим два электрода, один из которых заземлен, а другой имеет постоянный потенциал φ_0 , создаваемый источником питания. Поле в межэлектродном пространстве, заполненном произвольной диэлектрической средой, определяется как $E = -\nabla\varphi$. Допустим, что диэлектрическая среда линейна и $D = \epsilon\epsilon_0 E$, где ϵ хотя и является функцией координат (среда может быть и анизотропной), но не зависит от E . Пусть между электродами движутся заряженные частицы, составляющие ток с плотностью J . Тогда, пренебрегая магнитными эффектами, получим

$$I\varphi_0 = \int E \cdot (J + \dot{D}) dV, \quad (A2)$$

где I — ток, вытекающий из батареи. Это выражение представляет собой уравнение полного баланса энергий и является прямым следствием уравнений поля [38]. Пусть теперь φ^*_0 , E^*_0 и D^* обозначают соответственно потенциал, напряженность электрического поля и электрическую индукцию при тех же самых разности потенциалов и диэлектрической среде, но в отсутствие подвижных носителей заряда, так что $\nabla D^* = 0$. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} E \cdot (J + \dot{D}) &= (E - E^*) \cdot (J + \dot{D}) + E^* \cdot J + E^* \cdot \dot{D} = \\ &= (E - E^*) \cdot (J + \dot{D}) + E^* \cdot J + \dot{D}^* \cdot E. \end{aligned}$$

Вследствие того, что $\nabla \cdot (J + \dot{D}) = 0$ и $\nabla \cdot \dot{D}^* = 0$, объемный интеграл от первого члена правой части сводится к поверхностному интегралу от $-(\varphi - \varphi^*)(J_n + \dot{D}_n)$, а объемный интеграл от второго члена — к поверхностному интегралу от $-\dot{D}^*_n \varphi$. Каждый из этих интегралов равен нулю, потому что $\varphi = \varphi^*$ в любой точке поверхности, а значение φ на поверхности не зависит от времени. Поэтому

$$I\varphi_0 = \int E \cdot (J + \dot{D}) dV. \quad (A3)$$

Если ток обусловлен частицами заряда e_i , имеющими скорость v_i в точке r_i , то общий результат будет иметь вид

$$I\varphi_0 = \sum_i e_i v_i \cdot E^*(r_i). \quad (A4)$$

Отсюда следует выражение

$$I_i = \frac{e_i}{\varphi_0} \cdot v_i \cdot E^*(r_i) \quad (A5)$$

для тока, наведенного одиночным движущимся зарядом при условии, что в процессе этого движения не происходит перераспределения других зарядов. Эта формула должна точно описывать ток, обусловленный переходом носителя заряда через обедненный слой в полупроводниковом плоскостном диоде. Таким образом, поле в разд. 9.1 следует характеризовать величиной E^* (поле в обедненном слое при наличии неуравновешенных как донорных, так и акцепторных ионов и малом количестве подвижных носителей). Для плоского обедненного слоя шириной d имеем $E^* = \varphi_0/d$, так что $I_i = ev_i/d$. Мы не привлекали внимание к этому вопросу в разд. 9.1 частично из-за того, чтобы не нарушать последовательность рассуждений, а частично потому, что используемые в этом разделе соотношения не зависят от различия между E и E^* . Поскольку нам необходимо знать только то, что переход одного электрона производит короткий импульс с полным зарядом e , различие между E^* и E не имеет значения. Использование E вместо E^* отражается лишь на форме импульса.

Несмотря на то, что выражение (A4) для полного тока, обусловленного всеми зарядами, является справедливым при любых обстоятельствах, соотношение (A5) для тока одиночного заряда имеет меньшую общность. В проводящей среде остальные заряды перемещаются таким образом, чтобы сохранять нейтральность полного заряда по мере движения одиночного заряда. Тем самым они стремятся уменьшить эффект от движущегося заряда. Однако при нейтральности полного заряда имеем $D=0$, откуда следует, что выражение

$$I\varphi_0 = \sum_i e_i v_i \cdot E(r_i) \quad (A6)$$

дает тот же самый результат, что и (A4), если даже E заметно отличается от E^* . Более того, поскольку $D=0$, энергия поля является постоянной и строгое уравнение сохранения энергии для одиночного заряда имеет вид

$$I_i \varphi_0 = e_i v_i E(r_i). \quad (A7)$$

Определяемый в соответствии с (A7) ток I_i содержит как прямой вклад $e_i v_i E^*/\varphi_0$, так и компенсирующий вклад, обусловленный экранирующим действием других частиц. Таким образом, использование в разд. 5.3 истинного поля в проводящей среде сочетается с другими аргументами, которые основываются на интерпретации (A7) как подлинного уравнения баланса энергий.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Шумы в $p-n$ -переходе

Для простоты мы рассмотрим только такой диод, в котором можно пренебречь рекомбинацией носителей в обедненном слое. При этом статическая характеристика диода дается выражением

$$I = I_0 \{ \exp [eU/(kT)] - 1 \}. \quad (B1)$$

Существенным моментом работы [4] является то, что поток носителей I_F через обедненный слой в прямом направлении, как выяснилось, не равен $I_0 \exp [eU/(kT)]$, а поток носителей I_R в обратном направлении не равен I_0 . Оба эти потока значительно превышают величину I_0 (приблизительно во столько раз, во сколько диффузионная длина больше средней длины свободного пробега носителей между соударениями), так что (B1) описывает лишь небольшое различие между I_F и I_R . В то время как эти большие по значению токи определяются исключительно концентрацией носителей в непосредственной окрестности обедненного слоя, токи, которые фигурируют в (B1), определяются скоростью, с которой носители могут диффундировать по всему объему материала по направлению к обедненному слою и от него. Хотя флуктуации во внешней цепи диода

все же непосредственно связаны с флуктуацией скорости, с которой носители пересекают обедненный слой, сами по себе они не являются следствием дробового шума, содержащегося в токах I_F и I_R . Поскольку объемный диффузионный процесс является «узким местом» в потоке носителей заряда, и флуктуации потоков I_F и I_R приводят к накоплению заряда, а это изменяет поле в обедненном слое таким образом, что сводит на нет внешние эффекты от этих флуктуаций. Как показали Бекингем и Фолкнер, это явление настолько эффективно, что дробовой шум, связанный с токами I_R и I_F , почти не вносит вклада во внешний шум диода. Последний обязан своим происхождением почти полностью флуктуациям скорости неосновных носителей, диффундирующих взад и вперед по объему материала и тем самым управляющих полным потоком носителей через обедненный слой.

В объеме материала движение основных носителей стремится сохранить нейтральность полного заряда, а движение неосновных носителей целиком обусловлено диффузией. Решение диффузионного уравнения в объеме материала дает выражение для среднего потока неосновных носителей через их концентрации p_0 и p_w на двух границах объемной области. Из этого выражения, в свою очередь, вытекает выражение для полной проводимости перехода $Y(\omega) = G(\omega) + jB(\omega)$, поскольку концентрация p_0 на границе обедненного слоя зависит от приложенного напряжения смещения.

Движение отдельного неосновного носителя между соударениями в объемной области вызывает местное изменение концентрации неосновных носителей, и эти эффекты распространяются на границы этой области. Полный ток на краю обедненного слоя может быть представлен суммой эффектов от всех перемещений носителей в объемной области. Если перемещения отдельных носителей рассматривать как независимые случайные события, то сумма квадратов отклонений от их среднего поведения дает шум. Мы не будем вдаваться в детали оригинальных выкладок Бекингема и Фолкнера, а изложим только их наиболее важные результаты.

Выражение для энергетического спектра шумов в прямосмещенном плоскостном диоде, полученное в [4], имеет следующий вид:

$$\omega = 2eI + 4kT[G(\omega) - G(0)]. \quad (B2)$$

Это выражение идентично (9.8а). Если считать, что $G(\omega)$ является эмпирической величиной, то оба выражения дают одинаковые результаты. Однако в силу того, что Бекингем и Фолкнер связывают $G(\omega)$ с высокочастотной характеристикой диффузионного процесса, а не с нашим несколько надуманным представлением о многократных переходах носителей через обедненный слой, связь $G(\omega)$ с физическими параметрами перехода оказывается различной в обоих случаях.

Эффекты рекомбинации в обедненном слое, а также шумы в коллекторном токе транзистора, рассчитанные по формулам работы [4], совпадают с результатами, изложенными в гл. 9 и 10. Расчет шума базового тока на низких частотах по Бекингему и Фолкнеру также эквивалентен расчету, приведенному в гл. 10. Поскольку выражение (B2) имеет такой же вид, как и (9.8а), можно было бы ожидать, что оба выражения приведут к одинаковым окончательным результатам. Однако это не так. Хотя в обоих подходах высокочастотное увеличение шумов базового тока считается обусловленным случайной задержкой во времени между флуктуациями токов коллектора и базы, характер производимых расчетов различен. Такое же различие имеет место при расчете высокочастотных эффектов от рекомбинационных явлений в базе. Результаты Бекингема и Фолкнера легче всего сравнивать с результатами, приведенными в гл. 10 и используемыми в гл. 13 при рассмотрении главных членов в разложениях по степеням (f/f_a) шума базового тока и его корреляции с шумом коллекторного тока. Из формул (10.4а) и (10.4б) следует:

$$\omega_0 = 2eI_0 + 4(f/f_a)^2 eI_k; \quad (B3)$$

$$\omega_{0,k} = -2j(f/f_a) eI_k.$$

Результаты Бекингема и Фолкнера имеют вид

$$\omega_{\sigma} = 2eI_{\sigma} + \frac{2}{3} (f/f_{\alpha})^2 eI_{\kappa}; \quad (Б4)$$

$$\omega_{\sigma, \kappa} = -\frac{2}{3} j(f/f_{\alpha}) eI_{\kappa}.$$

В обоих случаях энергетический спектр коллекторного тока определяется как $2eI_{\kappa}$. Вместе с тем видно, что согласно Бекингему и Фолкнеру рассчитанный высокочастотный шум имеет меньший уровень, а справедливость низкочастотных аппроксимаций $\omega_{\sigma} = 2eI_{\sigma}$ и $\omega_{\sigma, \kappa} = 0$ распространяется на более высокие частоты — порядка $(3/\beta)^{1/2} f_{\alpha}$, а не $(1/2\beta)^{1/2} f_{\alpha}$.

В действительности, как отмечают Бекингем и Фолкнер, следствия, вытекающие из их результатов, не настолько существенны, насколько можно было бы ожидать исходя из довольно-таки большого различия между числовыми коэффициентами в (Б3) и (Б4). Это объясняется тем, что для частот, на которых проявляется указанное различие, преобладающее влияние на шумовые характеристики оказывает до некоторой степени недоступный параметр R_{σ} — сопротивление базы. Грубая, но простая коррекция соответствующих формул гл. 10, которая может быть использована при расчетах, сводится к замене f_T на $2f_T$.

Помимо более обоснованной физической интерпретации шумовых процессов в $p-n$ -переходах анализ Бекингема и Фолкнера имеет и другие преимущества. Этот анализ устанавливает связь полной проводимости $Y(\omega)$ перехода эмиттер-база с доступными параметрами транзистора и, как показано в [4], дает про-

Теперь, когда мы возложили ответственность за шумы в $p-n$ -переходе на диффузионные процессы в объеме материала, а не на процессы дробового шума в потоке основных носителей через обедненный слой, некоторые из положений гл. 5 требуют оговорок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Adler R., Hrbek G., Wade G. Proc. Inst. Radio Engrs, 1959, v. 47, p. 1713.
2. Baechthold W., Balfer W., Wolf P. Electronics Lett., 1972, v. 8, p. 35.
3. Bellman R. (Ed.). Modern mathematical classics: analysis. N. Y., Dover, 1961.
4. Buckingham M. J., Faulkner E. A. The radio and electronic engineer. V. 44. N 3. March 1974, p. 125—140. «The Theory of inherent noise in $p-n$ injection diodes and bipolar transistors».
5. Burgess R. S. Proc. Phys. Soc., 1941, v. 53, p. 293.
6. Campbell N. R. Proc. Camb. phil. Soc. Math. Phys. Sci., 1909, v. 15, p. 117, 130.
7. Chu L. J. Inst. Radio Engrs Conference, June, New Hampshire, 1951.
8. Dicke R. H. Rev. Scient. Instrum., 1946, v. 17, p. 268.
9. Dirac P. A. M. Principles of Quantum Mechanics. London, Oxford University Press, N. Y., 1959.
10. Dragone C. Bell. Syst. tech. J., 1972, v. 51, p. 2169.
11. Einstein A. Annal. Phys., 1906, v. 19, p. 289, 371.
12. Faulkner E. A., Holman A. J. Scient. Instrum., 1967, v. 44, p. 391.
13. Feller W. An introduction to probability theory and its applications. N. Y., Wiley, 1957.

14. **Friis H. T.** Proc. Inst. Radio Engrs, 1944, v. 32, p. 419.
15. **Gordon J. P., Walker L. R., Louisell W. H.** Phys. Rev., 1963, v. 130, p. 807.
16. **Goldstein H.** Classical Mechanics, Addison-Wesley, 1950.
17. **Haus H. A., Adler R. B.** Circuit theory of linear noisy networks. Technology Press, N. Y., 1959.
18. **Heffner H.** Proc. Inst. Radio Engrs, 1962, v. 50, p. 1604.
19. **Johnson J. B.** Phys. Rev., 1928, v. 32, p. 97.
20. **Khintchiene A. I.** Math. Annal., 1934, v. 109, p. 604.
21. **Kittel C.** Elementary Statistical Physics, N. Y., Wiley, 1958.
22. **Lorentz H. A.** Theory of electrons. N. Y., Wiley, 1958.
23. **Louisell W. H.** Radiation and noise in quantum electronics. N. Y., McGraw-Hill, 1964.
24. **MacDonald D. K. C.** Philos. Mag., 1949, v. 40, p. 561.
25. **Manley J. M., Rowe H. E.** Proc. Inst. Radio Engrs, 1956, v. 44, p. 904; 1959, v. 47, p. 2115.
26. **Mumford W. W.** Bell Syst. Tech. J., 1949, v. 28, p. 608.
27. **North D. O., Ferris W. R.** Proc. Inst. Radio Engrs, 1941, v. 29, p. 49.
28. **Nyquist H.** Phys. Rev., 1928, v. 32, p. 110.
29. **Penfield P., Rafuse R. P.** Varactor applications. M. I. T. Press, 1962.
30. **Pound R. V.** Progr. Nucl. Phys., 1952, v. 2, p. 21.
31. **Rack A. J.** Bell Syst. Tech. J., 1938, v. 17, p. 592.
32. **Rice S. O.** Bell Syst. Tech. J., 1944, v. 23, p. 282; 1945, v. 24, p. 46.
33. **Robinson F. N. H.** Philos. Mag., Ser. 7, 1952, v. 43, p. 51.
34. **Robinson F. N. H.** Philos. Mag., 1958a, v. 3, p. 909.
35. **Robinson F. N. H. J.** Electron Control, 1958b, v. 5, p. 152.
36. **Robinson F. N. H. J.** Scient. Instrum., 1959, v. 36, p. 481.
37. **Robinson F. N. H.** Proc. Roy. Soc., 1965, v. A286, p. 525.
38. **Robinson F. N. H.** Macroscopic electromagnetism. Oxford, Pergamon Press, 1973.
39. **Rowe H. E.** Signals and noise in communication systems. N. Y., Van Nostrand, 1965.
40. **Sah C.-T., Hielscher F. H.** Phys. Rev. Lett., 1966, v. 17, p. 956.
41. **Sah C.-T., Noyce R. M., Shockley W.** Proc. Inst. Radio Engrs, 1957, v. 45, p. 1228.
42. **Schottky W.** Wiss. Veröff. Siemens-Werken, 1937, Bd 16, S. 1.
43. **Shockley W., Pierce J. R.** Proc. Inst. Radio Engrs, 1938, v. 26, p. 321.
44. **Spence E.** Wiss. Veröff. Siemens-Werken, 1937, Bd 16, S. 19.
45. **Suhl H.** Phys. Rev., 1957, v. 106, p. 384.
46. **Thompson B. J., North D. O., Harris W. A.** RCA Rev., 1940, v. 4, p. 269, 441; v. 5, p. 244, 371, 505; v. 6, p. 114.
47. **Van der Pol B.** Phil. Mag., 1927, p. 3, p. 65.
48. **Van der Ziel A., Becking A. G. T.** Proc. Inst. Radio Engrs, 1958, v. 46, p. 589.
49. **Van der Ziel A., Becking A. G. T.** In: Noise in electron devices. Eds L. D. Smullin, H. A. Haus. N. Y., Wiley, 1959.
50. **Van der Ziel A., Becking A. G. T.** Proc. Inst. Radio Engrs, 1962, v. 50, p. 1808.
51. **Van der Ziel A., Becking A. G. T.** Proc. Inst. Radio Engrs, 1963, v. 51, p. 117.
52. **Wiener N.** Acta math., Stockh., 1930, v. 55, p. 117.

АЛФАВИТНО-ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адлера лампа, 166
Болометр, 199
Ван-дер-Поля генератор, 185
Взаимный энергетический спектр, 41
Волны пространственного заряда, 161
Вынужденные колебания, 188
Гальванометр, 20
Гамильтониан, 66
Гауссов шум, 27
Гейзенберга уравнение, 69
Генератор с отрицательной проводимостью, 183
— шума транзисторный, 45
Дельта-функция (функция Дирака), 74
Детектор диодный, 212
Дике радиометр, 227
Диод насыщенный, 20
Диоды с барьером Шоттки, 199
— сверхвысоких частот, 198
Диссипация в квантовой механике, 71
Дифференциальная чувствительность, 145
Источники питания, 92
Каскад с общей базой, 141
— с общим коллектором, 141
Каскодная схема, 154
Квадратичное детектирование, 26, 199
Квантовый выход, 216
Коэффициент шума, 46, 130, 133, 134
Кэмпбелла теорема, 20
Лавинно-пролетный фотодиод, 221
Лагранжиан, 67
Лампа бегущей волны, 167
Мак-Дональда функция корреляции, 33
Минимум потенциала, 94
Многокаскадный усилитель, 136
Наблюдение, 15
— непрерывное, 38
Напряжение отсечки, 120
Огибающая шума, 201
Отношение сигнал/шум, 11
Отражательный клистрон, 194
Парамагнитный резонанс, 231
Парсеваля теорема, 24
Пентоды, 99
Перегрузки в фазочувствительных детекторах 198
Периодические сигналы, 16
Полное сопротивление в квантовой механике, 83
Практические соображения, 240
Принцип неопределенности, 65, 81
Пуассона распределение, 19
— скобки, 68
Развертка в осциллокопе, 16, 40
Разложение в ряд Фурье, 32
Рассогласованная пара, 155
Резонансная входная цепь, 153
Рекомбинация, 104, 107
Робинсона генератор, 185
Рэлея—Джинса закон, 46
Сглаживание пространственным зарядом, 94, 95
Синхронизация, 197
Сопряжение по Эрмиту, 75
Среднее значение, 13, 14
Статистические ансамбли, 11
Стационарные процессы, 14
Теплоотвод, 76
Тетроды, 98
Транзистор арсенид-галлиевый, 156
Транзистор с изолированным затвором, 127
— характеристики, 158, 229
— эквивалентная схема 113, 116
Трехуровневый лазер, 179
Триоды, 96
Угольный микрофон, 86
— резистор, 86
Ферми—Дирака статистика, 52
Фликкер-шум в транзисторах, 86, 87, 88
Флуктуации скорости, 60
Формулы обращения, 32
Функция корреляции, 33
Характеристика импульсная, 23
— частотная, 23
Характеристики транзисторов, 160, 229
Чайльда закон, 95
Шпирна полосы пропускания, 18, 26, 129
— — — эффективная, 129, 207
Шум антенны, 46, 225
— избыточный, 88
— в резисторах, 88
— ионный, 101
— конденсатора, 91
Шум линии передачи, 47
— наведенный сетки, 100
— низкочастотный вида $1/f$, 86
— рекомбинации, 108
— сеточного тока, 101
— токораспределения, 98
— холостого контура, 173
Шумовая температура, 132
Шумовое число, 137
Шумовые измерения, 223
Шумы детектора, 208
— в диодах, 223
— в генераторах, 45
— в электронных лампах, 224
Энергетический спектр шума, 7
Ядерный магнитный резонанс, 236

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие автора	5
Введение	6
Глава 1. Сигналы и шум	10
1.1. Флуктуации	10
1.2. Статистические ансамбли	11
1.3. Средние значения	13
1.4. Стационарные процессы	14
1.5. Наблюдение случайных величин	15
1.6. Периодические сигналы	16
1.7. Шумовые вычисления	17
Глава 2. Дробовой шум	18
2.1. Распределение Пуассона	19
2.2. Приложение к дробовому шуму	20
2.3. Теорема Кэмпбелла	20
2.4. Частотная характеристика	23
2.5. Дробовой шум в резонансном усилителе	24
2.6. Квадратичное детектирование дробового шума	26
2.7. Гауссов шум	27
Глава 3. Энергетический спектр	28
3.1. Определение	29
3.2. Формулы обращения	32
3.3. Энергетический спектр дробового шума	36
3.4. Непрерывное наблюдение сигнала и шума	38
3.5. Осциллографическое отображение периодического сигнала	39
3.6. Взаимный энергетический спектр	41
Глава 4. Тепловой шум	43
4.1. Теорема Найквиста	43
4.2. Комплексные сопротивления	45
4.3. Обобщения	46
4.4. Коэффициент шума	46
4.5. Примеры	47
Глава 5. Шумы и статистическая механика	48
5.1. Введение	48
5.2. Основные соотношения	51
5.3. Тепловые шумы	53
5.4. Дробовой шум	57
5.5. Дробовой шум, флуктуации скорости и температура эмиттера	60
Глава 6. Шумы и квантовая механика	64
6.1. Введение	64
6.2. Принцип неопределенности	65
6.3. Уравнения движения Гамильтона и Гейзенберга	66

	6.4. Диссипация в квантовой механике	71
	6.5. Шум в линиях передачи с потерями	73
	6.6. Квантовые флуктуации и понятия цепи	83
Глава 7.	Фликкер-шум	85
Глава 8.	Шумы в электронных лампах	92
	8.1. Введение	92
	8.2. Шумы в ненасыщенных диодах	93
	8.3. Триоды	96
	8.4. Многосеточные лампы — шум токораспределения	98
	8.5. Наведенный шум сетки	100
	8.6. Ионный шум, или шум сеточного тока	101
	8.7. Заключение	102
Глава 9.	Шумы в полупроводниковых плоскостных диодах	103
	9.1. Введение	103
	9.2. Идеальный диод	104
	9.3. Рекомбинационные эффекты	107
	9.4. Шум диода в электрических цепях	110
Глава 10.	Биполярные транзисторы	111
	10.1. Основные положения	111
	10.2. Эквивалентные схемы с учетом паразитных параметров	113
	10.3. Фликкер-шум биполярного транзистора	118
	10.4. Заключение	118
Глава 11.	Полевые транзисторы	118
	11.1. Введение	118
	11.2. Шумы полевых транзисторов	123
	11.3. Эквивалентные схемы	126
	11.4. Приборы с двумя затворами	126
	11.5. Фликкер-шум	127
	11.6. Транзисторы с изолированным затвором	127
Глава 12.	Линейные усилители	128
	12.1. Введение	128
	12.2. Коэффициент шума и шумовая температура	130
	12.3. Шумы в однокаскадном усилителе без обратной связи	133
	12.4. Многокаскадные усилители	136
	12.5. Усилители с отрицательной обратной связью	138
	12.6. Различные схемы включения прибора	140
	12.7. Каскады с согласованным входным сопротивлением	142
	12.8. Дифференциальная чувствительность	145
	12.9. Заключение	145
Глава 13.	Транзисторные усилители	147
	13.1. Полевые транзисторы	148
	13.2. Биполярные транзисторы	150
	13.3. Каскодная схема	154
	13.4. Сравнительный анализ полевых и биполярных транзисторов	155
Глава 14.	Низкочастотные усилители	157
	14.1. Полевые транзисторы	157
	14.2. Биполярные транзисторы	158
	14.3. Трансформаторы на низких частотах	159
	14.4. Заключение	160
Глава 15.	Электронно-лучевые усилители	161
	15.1. Введение	161
	15.2. Коэффициент усиления в лампах с продольной волной пространственного заряда	161
	15.3. Содержание шума в электронном пучке	165

	15.4. Лампа Адлера	166
	15.5. Лампы бегущей волны	167
Глава 16.	Параметрические усилители	169
	16.1. Введение	169
	16.2. Шумы	173
Глава 17.	Мазеры	177
Глава 18.	Генераторы	181
	18.1. Введение	181
	18.2. Схемы генераторов	182
	18.3. Установившиеся колебания	184
	18.4. Вынужденные колебания	188
	18.5. Выходной шум	190
	18.6. Коэффициент шума	191
	18.7. Отражательные клистроны	194
Глава 19.	Смесители и фазочувствительные детекторы	195
	19.1. Введение	195
	19.2. Процесс смещения	196
	19.3. Фазочувствительное детектирование	197
	19.4. Смеситель в качестве входного каскада	198
Глава 20.	Детекторы	199
	20.1. Детектирование	200
	20.2. Шум на входе квадратичного детектора	202
	20.3. Шум на входе линейного детектора	203
	20.4. Белый шум на входе в полосе Δf_0	204
	20.5. Сигнал и шум на входе квадратичного детектора	204
	20.6. Сигнал и шум на входе линейного детектора	205
	20.7. Отношение сигнал/шум после квадратичного детектирования	206
	20.8. Отношение сигнал/шум после линейного детектирования	207
	20.9. Шум детектора	208
Глава 21.	Фотоумножители и фотодиоды	215
	21.1. Введение	215
	21.2. Квантовый выход	216
	21.3. Умножение электронов с использованием вторичной эмиссии	218
	21.4. Фотоумножители	219
	21.5. Фотодиоды	220
	21.6. Смещение на фотодиоде	222
Глава 22.	Применения	223
	22.1. Измерение коэффициента шума	223
	22.2. Шумы антенны	225
	22.3. Модуляционный радиометр (радиометр Дике)	227
	22.4. Определение шумовых характеристик транзистора	229
	22.5. Спектрометры парамагнитного резонанса	231
	22.6. Ядерный магнитный резонанс	236
	22.7. Практические рекомендации	240
Приложения	247
	Приложение А	247
	Приложение Б	248
Список литературы	250
Алфавитно-предметный указатель	252

ИБ 768

Ф. Н. Х. Робинсон

**ШУМЫ И ФЛУКТУАЦИИ В ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМАХ
И ЦЕПЯХ**

Редактор **Б. М. Васильев**
Художественный редактор **А. Т. Кирьянов**
Переплет художника **А. И. Шаварда**
Технический редактор **Н. А. Власова**
Корректор **М. В. Косарева**

Сдано в набор 18.03.80. Подписано к печати 17.06.80.
Формат 60×90^{1/16} Бумага машинномелованная. Гарнитура литературная.
Печать высокая. Усл. печ. л. 16,0. Уч.-изд. л. 16,06. Тираж 3500 экз.
Зак. изд. 76400. Зак. тип. 587. Цена 2 р. 70 к.

Атомиздат, 103031 Москва К-31, ул. Жданова, 5

Московская типография № 10 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли 113114 Москва М-114, Шлязовая наб., 10.

