

А.А. ЛАННЭ, Е.Д. МИХАЙЛОВА,
Б.С. САРКИСЯН, Я.Н. МАТВИЙЧУК

ОПТИМАЛЬНАЯ
РЕАЛИЗАЦИЯ
ЛИНЕЙНЫХ
ЭЛЕКТРОННЫХ
RLC-СХЕМ

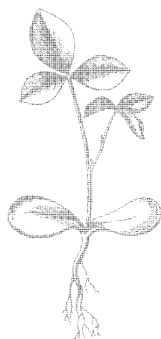
А.А. ЛАННЭ, Е.Д. МИХАЙЛОВА, Б.С. САРКИСЯН, Я.Н. МАТВИЙЧУК

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
им. Г. В. КАРПЕНКО

А. А. ЛАННЭ, Е. Д. МИХАЙЛОВА,
Б. С. САРКИСЯН, Я. Н. МАТВИЙЧУК

ОПТИМАЛЬНАЯ
РЕАЛИЗАЦИЯ
ЛИНЕЙНЫХ
ЭЛЕКТРОННЫХ
RLC-СХЕМ

КИЕВ «НАУКОВА ДУМКА» 1982



Scan AAW

УДК. 621.372

Оптимальная реализация линейных электронных *RLC*-схем / Лан-
нэ А. А., Михайлова Е. Д., Саркисян Б. С., Матвийчук Я. Н.— Киев :
Наук. думка, 1981.— 208 с.

Излагаются методы и алгоритмы оптимального синтеза (реализа-
ции) физически реализуемых операторов линейных электронных схем
с сосредоточенными параметрами, а также общие принципы расчета
параметрической структурной оптимизации микроэлектронных схем и
схем общего вида.

Для научных и инженерно-технических работников, а также
для аспирантов и инженеров, специализирующихся в области автома-
тизации проектирования радиоэлектронной, измерительной и другой
аппаратуры.

Ил. 79. Табл. 20. Список лит.: с. 204—206 (51 назв.).

Ответственный редактор *Б. И. Блажкевич*

Рецензенты *Я. Е. Беленький, Л. А. Сеницкий*

Редакция технической литературы

О $\frac{2403000000-049}{M221(04)-82}$ 395-82.

© Издательство «Наукова думка», 1982

ПРЕДИСЛОВИЕ

В современном синтезе электронных схем четко различаются два направления.

Первое, называемое параметрическим синтезом, связано с представлением оператора схемы F (например, схемной функции), описывающего отображение вход — выход, в форме $F = F(\vec{l})$, где $\vec{l} = \{l_1, \dots, \dots, l_n\}$ — вектор параметров элементов схемы. Задача синтеза в этом случае сводится к поиску вектора \vec{l}^* , при котором оператор $F(\vec{l}^*)$ удовлетворяет требованиям проекта: с необходимой точностью и в рамках нужных ограничений обеспечивает заданное отображение вход — выход. Подобное представление оператора связано с априорным выбором топологии схемы, т. е. с указанием типов элементов и способа соединений их между собой.

Второе направление, иногда именуемое классическим синтезом, характеризуется разбиением задачи синтеза на части (этапы).

На первом этапе (аппроксимации) конструируется оператор схемы в терминах, удобных для решения задачи аппроксимации. Так, например, если оператор F — передаточная функция, то параметрами F выступают коэффициенты этой функции либо ее нули и полюсы. Если же соотношение вход — выход задано интегралом свертки, то параметрами F являются параметры соответствующей функции Грина. В результате решения задачи аппроксимации строится математическая модель электронной схемы.

На втором этапе (реализации) по найденной математической модели восстанавливается электронная схема.

Главное отличие второго направления — потенциальная возможность поиска структур (топологий) схем на этапе реализации.

Первым понял значение проблемы поиска структур в задачах синтеза электронных схем В. Кауэр [51]. Эту проблему он относил к числу главнейших в синтезе цепей, и ее исследование начал в цикле работ по теории эквивалентных преобразований. Позднее задачи синтеза структур получили развитие в теории автоматического управления [33].

Однако значение структуры как богатого ресурса при синтезе электронных схем было наглядно продемонстрировано лишь спустя четверть века после выхода в свет первых теоретических работ. В связи с изложенным интересно проследить эволюцию структур в задачах теории фильтров.

Исторически первыми синтезированными устройствами были RLC -фильтры. Они появились в начале века и реализовались в форме лестничных структур. Выбор именно таких структур явился делом случая,

но он оказался удачным. Много лет спустя, в середине 60-х годов, выяснилось, что лестничные структуры высокостабильны и не слишком критичны к неидеальностям элементов.

Кроме лестничных в практике RLC -фильтростроения до настоящего времени в основном применяются мостовые структуры и их разновидности, которые удовлетворяли практику. Это объясняет структурную ограниченность схемотехники RLC -фильтров. Практика синтеза не стимулировала поиск новых топологий. Теория топологической реализации вплоть до 60-х годов практически не исследовалась.

По-иному разрабатывалась теория синтеза ARC -фильтров, импульсом в развитии которой явилось освоение диапазонов низких и инфранизких частот и успехи микроэлектроники.

Предложенные в этой области первые структуры [43] оказались неудачными: неизбежные неидеальности элементов и разбросы параметров «выводили схемы из строя», делали их неработоспособными. Фильтры возбуждались, характеристики оказались очень нестабильными. Стремление найти хорошие схемы привело к «массовому производству» новых топологий, что было естественной реакцией на требование практики. В результате были найдены весьма совершенные схемы, с помощью которых удалось создать устройства, превосходящие в ряде случаев по электрическим характеристикам RLC -аналоги [43, 45].

Таким образом, было доказано, что целенаправленный синтез структур является мощным ресурсом в задачах проектирования электронных схем. Этот факт особенно важен для оптимального синтеза схем, поскольку наличие источника новых свойств и возможностей влечет за собой необходимость разработки теории и инженерных методов, использующих эти свойства и возможности.

Настоящая монография посвящена исследованию методов реализации в рамках классического синтеза электронных схем, отличительной особенностью которых является поиск топологий. В этой связи полученные в ней результаты можно характеризовать как основы оптимальной топологической реализации, идеологически тесно примыкающие к проблемам оптимального синтеза, развитым в работе [28].

Основу методов реализации составляют алгоритмы построения и решения компонентных уравнений, связывающих коэффициенты схемных функций с параметрами элементов схемы. Обращение к компонентным уравнениям не ново [4], однако широкое и систематическое изучение применимости этих уравнений для решения разнообразных реализационных задач, включая и задачи оптимальной топологической реализации, выполнено, по-видимому, впервые.

Теоретический характер книги не исключает ее прикладного аспекта. Авторы стремились не только продемонстрировать принципиальную возможность топологической реализации, но и показать, как она может быть выполнена и что даст. В связи с этим в книге содержится довольно много примеров, из которых отдельные представляют самостоятельный интерес.

Настоящая монография — результат многолетнего творческого сотрудничества львовских и ленинградских специалистов.

Предисловие и главы I, IV, V, VII написаны А. А. Ланне и Б. С. Саркисяном, глава II — Я. Н. Матвийчуком, главы III, VI — Е. Д. Михайловой. В решении примеров и написании параграфа 2 главы V принимала участие О. Р. Кряжева.

МЕТОД КОМПОНЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Классификация задач реализации

Для постановки и обсуждения задач реализации электронных схем введем следующие определения.

Элементным базисом будем называть совокупность типов идеализированных элементов, составляющих электронные цепи данного класса. В RLC -цепях число базисных элементов равно трем (R , L и C), в RC - и RL -цепях — двум (R и C , R и L).

Топологическая структура схемы определяется способом соединений, не изменяющимся при любых преобразованиях ребер, которые не приводят к их разрыву [5]. В качестве примера рассмотрим схемы рис. 1, *a* и *б*, топологические структуры которых приведены на рис. 2, *a* и *б*. Эти схемы имеют мостовую топологическую структуру. В этом легко убедиться, если выполнить преобразования ребер графа схемы (рис. 2, *a*) так, чтобы получить топологическую структуру схемы в виде, изображенном на рис. 2, *б*.

Для определения связанной совокупности элементов, у которой указаны топологическая структура и типы элементов, образующих ветви, будем использовать понятие *топология схемы*. Таким образом, топология схемы отличается от топологической структуры тем, что для первой из них указывается тип элемента, образующего ребро графа.

Схемой полной топологической структуры называется схема, любые два узла которой связаны полной совокупностью базисных элементов¹. Трехузловая схема полной топологической структуры с элементным RLC -базисом представлена на рис. 3.

Если подчеркивается отсутствие хотя бы некоторых из упомянутых связей, то говорят о схеме *неполной топологической структуры*.

¹ В приведенной формулировке определение схемы полной топологической структуры относится только к схемам, элементный базис которых составляют двухполюсники.

Задача реализации электронной схемы заключается в определении топологии и значений параметров элементов в заданном элементном базисе, при которых цепь обладает необходимыми количественными и качественными призна-

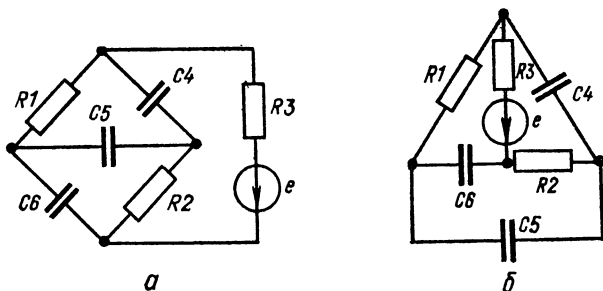


Рис. 1

ками (число и вид элементов, число внешних полюсов и т. д.), а также операторами (схемными функциями), несущими информацию об амплитудно-частотных, временных и других характеристиках.

При обсуждении различных вариантов задач реализации рассмотрим одну схемную функцию $S(\Theta, \vec{l})$, где Θ — аргумент (частота, квадрат частоты, время и т. д.), а \vec{l} — вектор

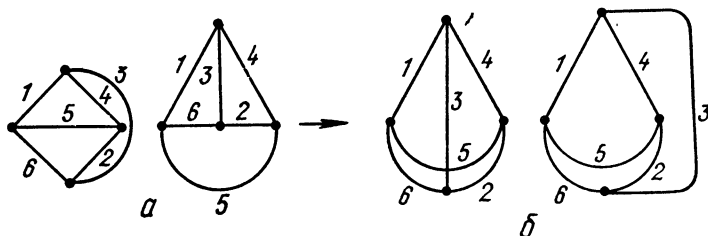


Рис. 2

параметров (нулей и полюсов, параметров элементов, коэффициентов и т. д.). Это не ограничивает общности подхода (соответствующие обобщения на случай совокупности функций проводятся без труда), но более наглядно. Кроме того, реализация цепи по одной функции имеет важное практическое значение в задачах синтеза двух- и четырехполюсников. Примеры решения таких задач и рассматриваются в настоящей книге.

Простейший вариант задачи реализации состоит в опре-

делении топологии и значений параметров элементов хотя бы одной цепи, схемная функция которой равна заданной $C_0(\Theta)$. Подобную задачу будем называть задачей *элементарной реализации*.

Известно, что часто функция $C_0(\Theta)$ может быть реализована множеством эквивалентных схем [27] и, в частности, множеством S эквивалентных схем с заданным числом узлов, которое представим в виде $S = \bigcup_{i \in D} S_i$, где S_i — множество

всех эквивалентных схем с фиксированной топологией отличающихся только значениями параметров элементов; D — число разновидностей топологий эквивалентных схем с числом узлов не выше заданного.

Пусть R_i — некоторое подмножество множества S_i , ($R_i \subset S_i$). Задачу определения по заданной схемной функции некоторого

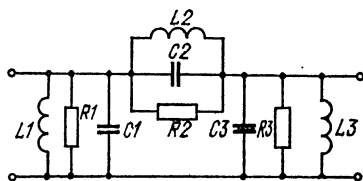


Рис. 3

множества S_i -эквивалентных схем назовем *задачей параметрической реализации*. Если множество R_i совпадает с S_i , то будем говорить о задаче *полной параметрической реализации*.

Более высокий уровень реализации электронных схем связан с определением некоторой совокупности топологий и топологических структур наряду с решением задачи параметрической реализации. Подобная реализация отображается задачей топологической реализации, которая формулируется следующим образом. По заданной функции $C_0(\Theta)$ найти множество R эквивалентных схем с функциями $C(\Theta, l) = C_0(\Theta)$. При этом $R \subset \bigcup_{i \in D} R_i$ и по крайней мере два множества R_i

и R_k , $k, l \in D$, $k \neq l$, не пусты. Если множество $R = S$, то имеем *задачу полной топологической реализации*.

По современным представлениям наиболее высокий уровень реализации электронных схем связан с поисками «наилучших» цепей с точки зрения некоторого критерия. Для оценки качества схемы вводится целевая функция Φ , которая в зависимости от целей проекта должна минимизироваться либо максимизироваться. Условимся задачу реализации называть оптимальной, если в заданном классе отыскивается цепь, для которой $\Phi = \min$ (\max).

На основе изложенного естественно вводятся задачи оптимальной параметрической, оптимальной полной

параметрической, оптимальной топологической и оптимальной полной топологической реализации.

Задачи параметрической и топологической реализации связаны с получением некоторого множества эквивалентных схем, число которых может быть достаточно большим (часто бесконечно большим). В таком виде указанные задачи не представляют особого практического интереса. В самом деле, если даже предположить, что имеется возможность получения множества эквивалентных схем, то возникает вопрос, какую из них выбрать. Таким образом, с позиций прикладных задач алгоритмы параметрической и топологической реализации должны быть дополнены процедурами сопоставления и выбора. В свете изложенного задачи оптимальной реализации становятся логически обоснованными. При их решении должны быть заданы множество эквивалентных схем и критерий, по которому эквивалентные схемы сопоставляются, а также указана процедура целенаправленного сопоставления и отбора. Следует подчеркнуть, что сопоставление и отбор обязательно должны быть целенаправленными, так как в противном случае поиск оптимальной схемы может продолжаться вечно.

2. Принципы решения задач реализации

Современная теория синтеза обладает богатым набором методов реализации линейных электронных схем. Рассмотрим основные принципы построения схем, подробно не анализируя известные методы реализации.

Едва ли не самым простым по идее является принцип, основанный на предварительном выборе цепи определенной топологии. Такой выбор осуществляется на основе информации о реализуемом операторе и обычно проводится на базе предварительно заготовленного комплекта схем с заранее известными свойствами схемных функций.

Пример 1. Пусть требуется реализовать ARC -цепью передаточную функцию

$$T(p) = \frac{\pm 1}{p^2 + 0,1p + 1} = \frac{\bar{u}_2}{\bar{u}_1}.$$

В теории ARC -цепей известно большое число схем, реализующих подобные функции [43]. Это так называемые ARC -звенья второго порядка. Одно из таких звеньев показано на рис. 4. Если оператор удовлетворяет соответствующим условиям реализуемости, что имеет место в нашем примере,

то успех реализации гарантируется. Итак, известно, что с помощью звена (рис. 4) функция $T(p)$ может быть реализована. Определим значения параметров элементов, приравняв функции $T(p)$ в буквенной и численной формах

$$\frac{1}{p^2 + 0,1p + 1} = \frac{-KG_1G_2D_1D_2}{p^2 + p[D_1(G_1 + G_2 + G_3) + D_2G_2] + G_2D_1D_2(G_1 + G_3 + KG_3)}$$

($D = \frac{1}{C}$, а в правой части записана передаточная функция схемы рис. 4) и решив систему уравнений

$$-KG_1G_2D_1D_2 = \pm 1;$$

$$D_1(G_1 + G_2 + G_3) + D_2G_2 = 0,1;$$

$$G_2D_1D_2(G_1 + G_3 + KG_3) = 1.$$

Обычно схемы, используемые для реализации, известны заранее. Выбор приемлемого варианта схемы в практике определяется информированностью и квалификацией разработчика. Пробелы в комплекте схем и просчеты при таком выборе могут привести к заметному ухудшению электрических и технических параметров проекта.

Рассмотренный принцип можно усовершенствовать, если вместо детальной схемы задавать укрупненную модель реализации. Модель реализации может быть задана в виде конкретной функциональной схемы либо в виде процедуры преобразования оператора. В первом случае укрупненный скелет схемы представлен в явном виде, во втором он замаскирован. Однако применение регулярной процедуры реализации (разложение на простые множители, простые дроби, расщепление матриц, разложение в цепную дробь и т. д.) всегда приводит к схеме строго определенной структуры, которую можно указать до проведения преобразований. Детали функциональной схемы цепи заранее неизвестны. Они определяются реализуемой функцией и особенностями реализационных процедур и проявляются в процессе реализации. Основное число известных к настоящему времени методов реализации является примером использования этого принципа. Указанные методы названы классическими.

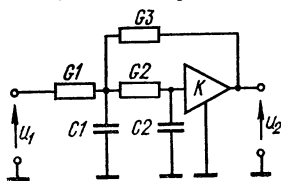


Рис. 4

Пример 2. Требуется реализовать передаточную функцию RLC -схемой

$$T(p) = 0,222139 \frac{p^3 + 1,385978p^2 + 9,98144 \cdot 10^{-2}p + 5,6445 \cdot 10^{-4}}{p^2 + 0,55008p^2 + 2,920759 \cdot 10^{-2}p + 1,34667 \cdot 10^{-4}}.$$

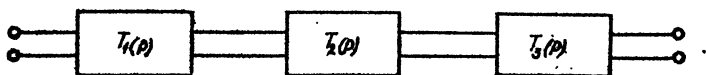


Рис. 5

Одним из популярных является метод каскадно-согласованной реализации [3]. Передаточная функция представляется в виде произведения простейших сомножителей, каждый из которых физически реализуем:

$$T(p) = \prod_{j=1}^3 T_j(p) = \left[0,772367 \frac{p + 0,0696728}{p + 0,053813} \right] \times \\ \times \left[0,374892 \frac{p + 1,31013}{p + 0,491172} \right] \left[0,767177 \frac{p + 0,00618352}{p + 0,00509494} \right].$$

Тогда функциональная схема цепи приобретает вид, представленный на рис. 5. Каждый четырехполюсник в общей схеме может быть реализован несколькими способами.

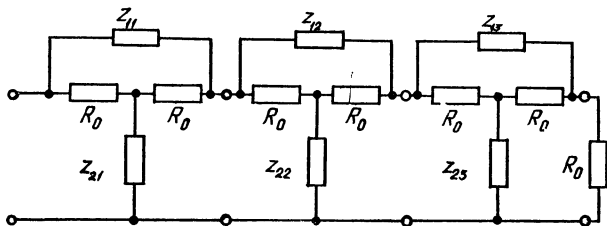


Рис. 6

Например, возможны мостовая и T -образная перекрытая реализация. Выберем последнюю для всех четырехполюсников. Это позволяет детализировать схему (рис. 5), представив ее в виде, данном на рис. 6, причем $z_{1j} = R_0 \left(\frac{1}{T_j(p)} - 1 \right)$, $j = \overline{1, 3}$. В последней схеме неизвестны топологии двухполюсников z_{ij} и значения параметров элементов. Для их определения применим процедуру разложения выражений z_{ij} в цепную дробь и получим

$$z_{11}(p) = R_0 \left(\frac{1}{T_1(p)} - 1 \right) \Big|_{R_0=1} = \left[\frac{1}{3,39304 + \frac{1}{4,23007p}} \right];$$

$$z_{12}(p) = R_0 \left(\frac{1}{T_2(p)} - 1 \right) \Big|_{R_0=1} = \left[\frac{1}{0,599723 + \frac{1}{1,27269p}} \right];$$

$$z_{13}(p) = R_0 \left(\frac{1}{T_3(p)} - 1 \right) \Big|_{R_0=1} =$$

$$= \left[0,0740089 + \frac{1}{4,35783 + \frac{1}{37,1102p}} \right].$$

Сопротивления двухполюсников $z_{2i}(p)$, $i = \overline{1, 3}$ являются взаимнообратными, т. е. $z_{2i}(p) = \frac{R_0^2}{z_{1i}(p)}$.

Окончательная схема цепи и значения параметров элементов приведены на рис. 7.

В рассмотренном примере вначале использовалась процедура разложения оператора (передаточная функция раз-

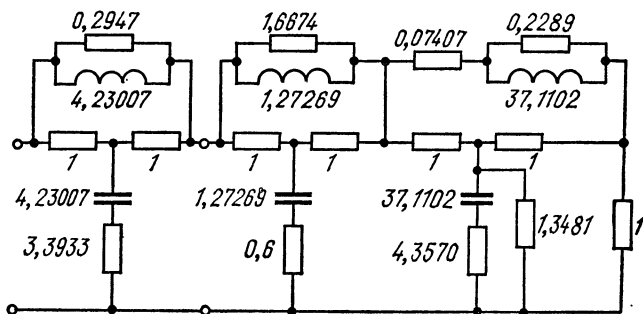


Рис. 7

лагалась на простейшие множители), затем выбиралась модель реализации (Т-образная перекрытая структура постоянного входного сопротивления). На заключительном этапе при реализации двухполюсников вновь применялось регулярное преобразование оператора — разложение функции сопротивления в цепную дробь.

Примерами реализации, в которых используется только процедура преобразования оператора, могут служить алгоритмы Кауэра и Фостера, реализации входных функций двухэлементных двухполюсников [3], алгоритмы лестничной реализации LC-, RC- (RL-) полиномиальных и квазиполиномиальных передаточных функций [3] и ряд других.

Описанный выше принцип — основной в теории синтеза. Методы, построенные на его основе, доминируют в теории реализации [3, 15, 23, 24, 49].

Анализ опубликованных методов реализации свидетельствует о том, что они оперируют с ограниченным числом топологических структур. Оказывается, что большая часть структур не применяется и их возможности не изучены. Это впервые отметил В. Кауэр [51] еще в тридцатые годы, когда им был разработан метод эквивалентных преобразований¹ — формальная процедура построения множества схем, эквивалентных по тому или иному оператору².

Существо метода эквивалентных преобразований состоит в том, что система уравнений состояния цепи, система узловых либо контурных уравнений, преобразуется таким образом, чтобы токи и напряжения в нужных участках цепи оставались неизменными, а вновь образованная система удовлетворяла условиям физической реализуемости (УФР). Математической основой подобных преобразований является теория линейных операторов, отображающих n -мерное пространство в себя (подобные матрицы) [14].

Пусть для n -узловой цепи система узловых уравнений в матричной форме имеет вид $Y\vec{u} = \vec{i}$, где $\vec{i} = \{i_1, \dots, i_n\}$ — матрица-столбец токов; $\vec{u} = \{u_1, \dots, u_n\}$ — матрица-столбец узловых напряжений, а Y — матрица проводимостей.

В работе [51] установлено, что матрицы проводимости Y' и Y двух схем, эквивалентных по входной проводимости либо по входной проводимости и передаточной функции, связаны соотношением $Y' = A^T Y A$, где A — матрица преобразования, а T — знак транспонирования.

Для построения эквивалентных двухполюсников принимаем

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad |A| \neq 0,$$

¹ Проблему эквивалентных схем В. Кауэр относил к числу важнейших в теории электрических цепей.

² Электрические схемы называются эквивалентными по некоторому оператору (схемной функции), если все они реализуют этот оператор. Преобразования, с помощью которых получают эквивалентные схемы, называют эквивалентными или инвариантными относительно заданного оператора.

а для четырехполюсников

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}, \quad |A| \neq 0.$$

Коэффициенты a_{ij} должны выбираться так, чтобы матрица Y' была физически реализуема.

Пример 3. Рассмотрим преобразование цепи, схема которой представлена на рис. 8. Преобразовывать будем инвариантно по отношению к входной проводимости. Исходные матрицы цепи имеют вид

$$C = \begin{vmatrix} C1 + C2 & -C2 \\ -C2 & C2 + C3 \end{vmatrix}, \quad \Gamma = \begin{vmatrix} \Gamma1 + \Gamma2 & -\Gamma2 \\ -\Gamma2 & \Gamma2 + \Gamma3 \end{vmatrix},$$

а матрица преобразований

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Напомним, что значения коэффициентов a_{ij} нельзя выбирать произвольно, так как в преобразованной цепи могут появиться отрицательные элементы.

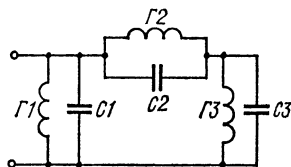


Рис. 8

Найдем матрицу емкостей преобразованной цепи

$$C' = A^T C A = \begin{vmatrix} 1 & a_{21} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C1 + C2 & -C2 \\ -C2 & C2 + C3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} C1 + a_{21}^2 C3 + (1 - a_{21})^2 C2 & a_{22} (a_{21} C2 + a_{21} C3 - C2) \\ a_{22} (C2 a_{21} - C2 + C3 a_{21}) & a_{22}^2 (C2 + C3) \end{vmatrix}.$$

Значения параметров емкостей эквивалентных цепей вычисляются на основании формул

$$C'_2 = a_{22} (C2 - C2 a_{21} - C3 a_{21});$$

$$C'_3 = a_{22}^2 (C2 + C3) - C'_2;$$

$$C'_1 = C1 + a_{21}^2 C3 + (1 - a_{21})^2 C2 - C'_2.$$

Аналогичные формулы имеют место и для обратных индуктивностей.

В рассматриваемом простейшем примере довольно просто определить допустимые границы изменения параметров a_{21} и a_{22} . В общем же случае задача весьма сложная.

Техника эквивалентных преобразований получила дальнейшее развитие в методе непрерывных эквивалентных преобразований [27]. Основной недостаток метода эквивалентных преобразований Кауэра и всех его модификаций — отсутствие в общем случае возможности получить полное множество n -узловых эквивалентных схем [26]. Другие недостатки метода связаны со сложностью учета условий физической и схемной реализуемости.

Развитие вычислительных методов и ЭВМ пока еще не привели к заметному прогрессу в решении реализационных задач. Попытка прямого использования существующих методов реализации показала, что имеется ряд трудностей. Это прежде всего необходимость высокой точности вычислений при классических способах преобразования операторов (разложение на простые дроби, разложение в цепную дробь), существенно нелинейный характер реализационных задач и большие размеры этих задач, так как очень часто число элементов схемы может заметно превосходить порядок функции цепи. Кроме этого в практике синтеза встречается целый ряд задач, решение которых либо затруднено, либо невозможно в рамках известных классических методов по принципиальным соображениям. Это расчет элементов эвристически найденных структур, для которых классические процедуры реализации непригодны; расчет схем (в том числе и традиционных) с учетом паразитных параметров либо сложных фрагментов, заданных априори; расчет элементов схем с учетом критерия оптимальности, т. е. оптимальная реализация электронных схем; топологическая и оптимальная топологическая реализация электронных схем.

Изложенное свидетельствует об актуальности разработок методов реализации электронных схем, позволяющих решать указанные задачи.

3. Сущность метода компонентных уравнений

Метод компонентных уравнений, или метод уравнивания коэффициентов, удобно пояснить на примере реализации четырехполюсника по заданной передаточной функции $T(p) = \bar{U}_{\text{вых}}(p) / \bar{U}_{\text{вх}}(p)$. Положим, что цепь пассивна с общим зажимом и не содержит трансформаторов (элементов взаимной индуктивности). Итак, пусть дан физически реализуе-

мый оператор

$$T(p) = \frac{\sum_{i=0}^d a_i p^i}{\sum_{i=d+1}^m a_i p^{i-d-1}}, \quad (I.1)$$

где $m - d - 1 \geq d$; $a_m \neq 0$; $a_d \neq 0$.

В силу сделанных предположений $a_i \geq 0$. Оператору $T(p)$ можно поставить в соответствие четырехполюсник (рис. 9), передаточная функция которого связана с матрицей проводимостей схемы Y следующим соотношением [42]:

$$T(p) = \frac{\Delta_{ij}}{\Delta_{ii} + G_H \Delta_{iij}}, \quad (I.2)$$

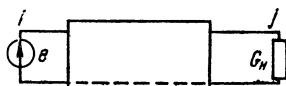


Рис. 9

где Δ_{ij} , Δ_{ii} , Δ_{iij} — соответствующие алгебраические дополнения матрицы проводимостей цепи¹; i, j — номера узлов внешних зажимов четырехполюсников; G_H — проводимость нагрузки четырехполюсника.

Чтобы четырехполюсник с передаточной функцией (I.2) реализовал заданный оператор (I.1), необходимо выполнение соотношения

$$\frac{\Delta_{ij}}{\Delta_{ii} + G_H \Delta_{iij}} = \frac{\sum_{i=0}^d a_i p^i}{\sum_{i=d+1}^m a_i p^{i-d-1}}. \quad (I.3)$$

Известно [42], что определители Δ_{ij} , Δ_{ii} , Δ_{iij} представляют собой рациональные функции от p . Их можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta_{ij} &= [f_d(\vec{l}) p^d + f_{d-1}(\vec{l}) p^{d-1} + \dots + f_0(\vec{l})] p^{-\alpha}; \\ \Delta_{ii} &= [g_{m-d-1}(\vec{l}) p^{m-d-1} + g_{m-d-2}(\vec{l}) p^{m-d-2} + \dots + \\ &\quad + g_0(\vec{l})] p^{-\alpha}; \\ \Delta_{iij} &= [h_{m-d-1}(\vec{l}) p^{m-d-1} + h_{m-d-2}(\vec{l}) p^{m-d-2} + \dots + \\ &\quad + h_0(\vec{l})] p^{-\alpha}, \end{aligned} \quad (I.4)$$

¹ Напомним, что Δ_{ij} — алгебраическое дополнение матрицы Y , получаемой вычеркиванием i -й строки и j -го столбца; Δ_{iij} — алгебраическое дополнение матрицы Y , получаемой вычеркиванием i -й строки и i -го столбца, а также j -й строки и j -го столбца.

где $f(\vec{l})$, $g(\vec{l})$, $h(\vec{l})$ — функции, зависящие от параметров элементов схемы (их конструкции определяются топологией); $\vec{l} = \{l_1, \dots, l_n\} = \{\bar{C}, \bar{G}, \bar{I}\}$; C_i , G_i , I_i — соответственно параметры емкостей, проводимостей и обратных индуктивностей; α — целое число, удовлетворяющее неравенству $0 \leq \alpha \leq N$; $N + 1$ — число узлов схемы.

Подставив выражения (1.4) в (1.2), получим соотношение, связывающее заданную передаточную функцию со значениями параметров элементов цепи:

$$T(p) = \frac{\sum_{i=0}^d a_i p^i}{\sum_{i=d+1}^m a_i p^{i-d-1}} = \frac{\sum_{i=0}^d f_i(\vec{l}) p^i}{\sum_{i=d+1}^m f_i(\vec{l}) p^{i-d-1}}. \quad (1.5)$$

Здесь $f_{d+1+i}(\vec{l}) = g_i(\vec{l}) + G_n h_i(\vec{l})$, $i = \overline{0, m-d-1}$. Равенство (1.3) или (1.5) эквивалентно равенству коэффициентов при одинаковых степенях p в числителях и знаменателях предыдущего уравнения, т. е.

$$f_i(\vec{l}) = a_i, \quad i = \overline{0, m}. \quad (1.6)$$

Система уравнений (1.6) называется *системой компонентных уравнений*, а описанный выше процесс установления связи между параметрами элементов цепи и значениями коэффициентов схемной функции — процедурой уравнивания коэффициентов.

Решение системы (1.6) при обязательном условии $l_j \geq 0$, $i = \overline{1, n}$ является решением задачи реализации оператора $T(p)$. Неравенства $l_j \geq 0$ выражают условия физической реализуемости рассматриваемого класса схем, сформулированные в терминах параметров элементов. Если бы в схеме допускались элементы взаимной индуктивности либо управляемые источники, то некоторые параметры элементов могли бы быть отрицательными и между ними должны были выполняться определенные соотношения.

Рассмотренная выше идея реализации достаточно общая. Она, очевидно, применима к задачам реализации операторов, заданных в форме векторов и матриц для цепей (пассивных и активных) как с сосредоточенными, так и с распределенными параметрами переменных.

Пример 4. По заданному оператору (передаточной функции по напряжению)

$$T(p) = \frac{a_2 p^2 + a_0}{a_6 p^3 + a_5 p^2 + a_4 p + a_3}$$

и топологии четырехполюсника (рис. 10) требуется составить систему компонентных уравнений. Передаточная функция по напряжению связана с матрицей проводимостей Y схемы (рис. 10) соотношением

$$T(p) = \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{11} + G_H \Delta_{1133}}.$$

Раскрыв определители Δ_{13} , Δ_{11} , Δ_{1133} , получим передаточную функцию по напряжению, выраженную через параметры элементов схемы:

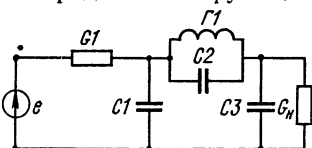


Рис. 10

$$T(p) = \frac{C2G1p^0 + \Gamma1G1}{(C2C1 + C1C3 + C2C3)p^3 + [\Gamma1(C2 + C3) + G_H(C1 + C2)]p^2 + [\Gamma1(C1 + C3) + G1G_H]p + \Gamma1(G1 + G_H)}$$

Сравнивая предыдущее выражение с первым, получаем систему компонентных уравнений:

$$\Gamma1G1 = a_0;$$

$$C2G1 = a_2;$$

$$\Gamma1(G1 + G_H) = a_3;$$

$$\Gamma1(C1 + C3) + G1G_H = a_4$$

$$G1(C2 + C3) + G_H(C1 + C2) = a_5;$$

$$C1C2 + C1C3 + C2C3 = a_6.$$

Пример 5. По заданному оператору (передаточной функции по напряжению)

$$T(p) = \frac{a_1 p + a_0}{a_3 p + a_2}$$

и топологии активной RC-схемы (рис. 11) составим систему компонентных уравнений. Согласно данным работы [43] передаточная функция для заданной активной схемы имеет вид

$$T(p) = K \left[T_1(p) - \frac{G1}{G2 + G1} \right].$$

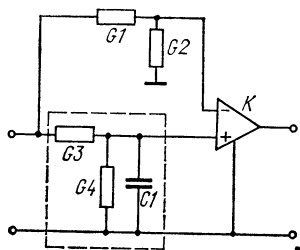


Рис. 11

Здесь $T_1(p)$ — передаточная функция части активной схемы, ограниченной пунктирной линией; K — коэффициент усиления усилителя.

Выразив передаточную функцию $T_1(p)$ через параметры элементов, получим

$$T_1(p) = \frac{G3}{C1p + G3 + G4}.$$

Подставив это выражение для $T_1(p)$ в предыдущее, получим

$$\begin{aligned} T(p) &= K \left[\frac{G3}{C1p + G3 + G4} - \frac{G1}{G2 + G1} \right] = \\ &= \frac{K(G3G2 - G1G4 - C1G1p)}{C1(G1 + G2)p + (G3 + G4)(G2 + G1)}. \end{aligned}$$

Сопоставив первое соотношение с последним, запишем систему компонентных уравнений:

$$\begin{aligned} K(G3G2 - G1G4) &= a_0; & (G3 + G4)(G2 + G1) &= a_2; \\ -KG1C1 &= a_1; & C1(G1 + G2) &= a_3. \end{aligned}$$

4. Свойства компонентных уравнений

С целью разработки методов решения системы компонентных уравнений рассмотрим подробно их свойства.

Из приведенных выше примеров следует, что компонентные уравнения в задачах реализации линейных электронных схем — нелинейные алгебраические уравнения. Левые части уравнений системы (I.6) представляют собой алгебраические суммы однородных функций¹, т. е.

$$f_i(\vec{l}) = \sum_{k=1}^{r_i} \prod_{j \in L_k} l_j,$$

где r_i — число слагаемых функции $f_i(\vec{l})$; L_k — множество номеров, определяющих индексы переменных в каждом слагаемом.

¹ Функция $f(l_1, \dots, l_n)$ от n переменных, определенная в области D , называется однородной функцией q -й степени, если при умножении каждого из ее аргументов на множитель t функция приобретает этот же множитель в q -й степени, т. е. $f(tl_1, \dots, tl_n) = t^q f(l_1, \dots, l_n)$ [46].

Число сомножителей в каждом слагаемом функции $f_i(\vec{l})$ одинаково и равно q_i . В сказанном легко убедиться, если рассмотреть выражение (I.4) и записать подробно любой из определителей Δ_{ii} , Δ_{ij} или Δ_{ijj} . Определитель матрицы q_i -го порядка представляет алгебраическую сумму произведений, каждое из которых включает q_i сомножителей.

Степени q_i для различных значений $i = \overline{0, m}$ могут отличаться в зависимости от типа реализуемой схемной функции. Для иллюстрации этого рассмотрим функцию проводимости $Y(p) = \frac{\Delta_{ii}}{\Delta}$ двухполосника, представленного на рис. 8. Выражения, связывающие параметры элементов схемы и коэффициенты при p в числителе $Y(p)$, представляют собой функции, степень однородности которых на единицу меньше степени однородности аналогичных функций знаменателя. Это следствие того, что порядки матриц, на основе которых определяются Δ_{ii} и Δ , отличаются на единицу. При необходимости всегда можно привести систему компонентных уравнений к виду, при котором степени однородности одинаковы для всех функций, входящих в левые ее части. Для этой цели заменим систему уравнений (I.6) эквивалентной ей системой, левые части которой также являются однородными функциями и $q_i = q$. Например, $l_{n+1}^{q_i - q} b_i(\vec{l}) - a_i = 0$, $i = \overline{0, m}$, $l_{n+1}^q - 1 = 0$, где l_{n+1} — дополнительная переменная; $q = \max\{q_0, q_1, \dots, q_m\}$; q_i — степень однородности функции $f_i(\vec{l})$.

Каждое из компонентных уравнений содержит некоторый необязательно полный набор неизвестных l_j , $j \in L_i$, т. е. L_i может быть частью $L = \overline{1, n}$. В силу этого в системе (I.6) может быть m_1 ($m_1 < m$) уравнений, не зависящих от части переменных.

В дальнейшем нам удобно будет пользоваться понятием *связанности* системы уравнений, характеризующим число неизвестных, участвующих в каждом уравнении. Если в каждом уравнении присутствуют все неизвестные, то связанность максимальна, если значительная часть, то уравнения в системе считаются хорошо связанными. Уравнения в системе связаны слабо, если число неизвестных в каждом уравнении незначительно. Компонентные уравнения в большинстве своем относятся к хорошо связанным. Исключение, как правило, представляют уравнения, составленные для уравнивания коэффициентов при наибольших и наименьших

степенях p полиномов числителя и знаменателя. В этом легко убедиться, рассмотрев систему компонентных уравнений, приведенную в примере 4.

В дальнейшем при обсуждении методов решения системы компонентных уравнений будет широко использоваться свойство *полилинейности* системы. Оно состоит в том, что если представить каждое уравнение системы (I.6) в виде полинома от одного из неизвестных $l_j, j \in \overline{1, n}$, получим систему m_2 уравнений первой степени, здесь $m_2 \leq m$.

В зависимости от типа схемной функции и топологии схемы, система компонентных уравнений может содержать одинаковые либо отличающиеся постоянным множителем уравнения. Так, при $G_n = 0$ первое и третье уравнения в системе компонентных уравнений примера 4 совпадают.

Особый интерес представляет система компонентных уравнений, левые части которых являются арифметической суммой однородных функций. Подобные уравнения характерны для широкого класса схем, не содержащих трансформаторов (пассивные четырехполюсники с общим зажимом, двухполюсники и ряд активных схем). Обоснование отмеченного свойства системы компонентных уравнений можно было бы привести для всего класса перечисленных схем, но ограничимся рассмотрением только пассивных четырехполюсников с общим зажимом.

В работе [41] приводится доказательство теоремы, согласно которой определитель Δ матрицы проводимостей Y пассивной схемы, не содержащей взаимных индуктивностей, равен арифметической сумме произведений проводимостей ветвей деревьев схемы¹. Эта теорема справедлива также и для алгебраических дополнений Δ_{ii} , Δ_{ij} и Δ_{iij} матрицы проводимостей цепи Y , входящих в выражение (I.2) со знаком плюс. Из изложенного следует, что левые части системы компонентных уравнений для рассматриваемого класса схем представляют собой арифметическую сумму однородных функций.

Примечательно, что для системы компонентных уравнений указанного типа появляется возможность перехода от исходных функций $f_i(\vec{l})$ к выпуклым. Для этого достаточно ввести новую переменную $l'_j, j = \overline{1, n}$, связанную с l_j соотно-

¹ Под проводимостью ветви здесь понимается проводимость двухполюсника, соответствующего данной ветви.

шением, $l_j = e_j'$. В этом случае

$$f_i(\vec{l}') = \sum_{k=1}^{r_i} \prod_{j \in L_k} e_j'$$

В соответствии с данными работы [17] $f_i(\vec{l}')$ — выпуклые функции.

Следует подчеркнуть возможность недоопределенности системы компонентных уравнений. Это означает, что для большинства электрических схем число уравнений системы меньше, чем число неизвестных параметров элементов. В сказанном легко убедиться на примере 5.

При решении задач реализации в рамках метода компонентных уравнений естественно учитываются ограничения на параметры элементов. Поскольку при исследовании этого

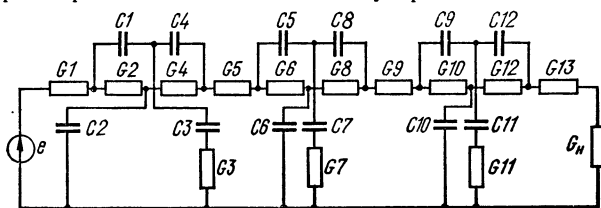


Рис. 12

метода топология должна задаваться, то могут быть заданы в качестве неизменных некоторые элементы цепи либо их совокупности (фрагменты схемы). В качестве последних могут выступать паразитные элементы, сложные сопротивления со стороны нагрузки и генератора, отдельные многополюсные подсхемы, например, операционные усилители и т. д.

Применение метода компонентных уравнений для решения обсуждавшихся во втором параграфе задач имеет ряд трудностей.

Если для простой схемы составление системы уравнений (I.6) не составляет труда, то для сложных схем это чрезвычайно громоздкая задача, в чем легко убедиться, рассмотрим схему (рис. 12), для которой число слагаемых системы компонентных уравнений равно 173775. Прямое решение задачи, связанное с перечислением слагаемых, их запоминанием и последующей обработкой, обречено на неудачу даже при использовании самых совершенных ЭВМ. Таким образом, необходима разработка эффективных методов формирования

компонентных уравнений в виде, удобном для их решения на ЭВМ.

Компонентные уравнения, как уже отмечалось,— нелинейные алгебраические уравнения, причем очень часто эти системы уравнений недоопределены. Проблема разработки способов решения таких систем также относится к числу центральных в методе компонентных уравнений, которые составляются по заданной топологии. В ряде случаев топология известна заранее. В тех задачах, где топология разыскивается в процессе реализации, необходима разработка процедуры составления и решения компонентных уравнений, допускающей указанный поиск. Это основной вопрос топологической реализации.

При поиске лучших схем возникают вопросы формализации задач и разработки методов их решения. Эти последние задачи составляют предмет оптимальной реализации электронных схем.

**АЛГОРИТМ СОСТАВЛЕНИЯ
КОМПОНЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ**

1. Основные понятия и определения

При решении компонентных уравнений численными методами нет необходимости в представлении этих уравнений в буквенной форме. Достаточно на каждом шаге по известным значениям компонентов вектора \vec{l} находить значения функций $f_i(\vec{l})$. Таким образом, при реализации численных методов решения систем компонентных уравнений составление последних сводится к вычислению коэффициентов схемных функций. Учитывая итерационный характер соответствующих алгоритмов, подобные расчеты должны быть высокоточными и скоростными.

Задача вычисления коэффициентов схемных функций не нова. Существует ряд методов ее решения, состоящих в вычислении определителей полиномиальных матриц и их алгебраических дополнений. Задачу можно рассматривать как проблему собственных значений некоторых матриц. Традиционные методы ее решения, например, с помощью интерполяционных многочленов Лагранжа, эффективны лишь при невысоких порядках матриц. Мощные же QR -алгоритмы [50] разработаны лишь для матриц вида $|A - \lambda E|$, что имеет место только при составлении уравнений электронных схем в системе переменных состояния.

Метод, разработанный в работе [44], достаточно универсален. Однако вследствие специфических свойств матриц электронных схем (высокий порядок, разреженность, большой разброс собственных значений и вместе с тем близость некоторых из них) он оказывается неэффективным.

Решить задачу определения коэффициентов схемной функции с достаточной точностью позволили топологические методы анализа, в разработку которых значительный вклад внесли советские ученые. Топологическими принято называть группу методов анализа электронных цепей,

основанных на исследовании графа, однозначно соответствующего анализируемой цепи. В зависимости от способа соответствия выделяют две подгруппы топологических методов.

Методы сигнальных графов исследуют граф, построенный на основании уравнений цепи произвольной формы и в произвольном координатном базисе. В методах полюсных графов анализируется граф, совпадающий с топологической структурой анализируемой цепи, описанной в системе узловых напряжений. Но разработанная методика анализа полюсных графов, основанная на понятиях дерева и прадерева, может быть распространена на любой координатный базис [32].

Ввиду того что существенное внимание в данной книге уделяется выработке конкретных рекомендаций для постановки задач на цифровых вычислительных машинах, в настоящей главе рассматривается лишь метод полюсных графов, который в достаточной мере был исследован на ЭВМ при определении схемных функций электронных схем.

Положим

$$\omega_{jk} = -y_{kj} \quad (j, k = 1, \dots, n-1, r; j \neq k), \quad (\text{II.1})$$

где ω_{jk} — вес дуги графа, исходящей из вершины j и входящей в вершину k ; G — вес R -дуги; $p^{-1}G$ — вес L -дуги; pC — вес C -дуги; y_{kj} — элемент неопределенной матрицы проводимостей на пересечении строки k и столбца j ; n — число узлов цепи; r — базисный узел цепи, которому в графе соответствует вершина-корень.

В этом случае граф является ориентированным и совпадает с топологической структурой цепи. Если цепь удовлетворяет принципу взаимности, то матрица проводимостей симметрична и веса встречных дуг совпадают ($\omega_{jk} = \omega_{kj}$). Такие дуги можно заменить одним ненаправленным ребром, после чего граф станет неориентированным.

Некоторые авторы используют несколько иной способ построения графа:

$$\omega_{jk} = -y_{jk} \quad (j; k = 1, \dots, n-1, r; j \neq k).$$

Хотя оба приведенных способа совершенно изоморфны, ряд топологических формул в первом случае получается проще. В дальнейшем будем считать, что граф построен по зависимости (II.1). Дадим несколько необходимых определений [6].

Частичным графом является граф, содержащий все вершины исходного графа, но не все дуги последнего.

Подграф содержит не все вершины исходного графа, однако все дуги, связывающие вершины подграфа.

Фундаментальным понятием для дальнейшего изложения является понятие прадерева.

Прадерево p' с корнем в вершине r — это граф, обладающий следующими свойствами: в каждую вершину, кроме вершины-корня r , заходит лишь одна дуга; в корень r не заходит ни одна дуга; дуги прадерева не образуют контуров.

Дерево d — это связный неориентированный граф, не имеющий контуров.

Два-прадерево p'^i будем называть граф, образованный из прадерева изъятием одной дуги, заходящей в вершину i . Очевидно, два-прадерево имеет две несвязанные части, в каждой из которых есть вершина-корень. Аналогично удалением одного ребра образуется два-дерево d'^i из дерева.

Путь — это незамкнутая последовательность вершин и дуг (ребер), причем каждой вершине инцидентны не более двух дуг.

В основу рассматриваемых топологических методов анализа электронных схем легли взаимно дуальные формулы Кирхгофа и Максвелла [7, 31], выражающие значение определителя матрицы сопротивлений или матрицы проводимостей схемы через топологические образы графа схемы. Впоследствии преимущественное развитие получила формула Максвелла для схем, удовлетворяющих принципу взаимности:

$$D = \sum_{k=1}^v [d_k], \quad (\text{II.2})$$

где D — определитель матрицы проводимостей схемы (или просто определитель схемы); v — число деревьев неориентированного графа схемы; $[d_k]$ — произведение весов ребер k -го дерева графа.

В работах [7, 31] дано математическое доказательство формулы Максвелла для ориентированных графов, т. е. для цепей, не удовлетворяющих принципу взаимности. В принятых терминах и обозначениях эта формула имеет вид

$$D = \sum_k [p'_k]. \quad (\text{II.3})$$

Здесь $[p'_k]$ — произведение весов дуг, составляющих k -е прадерево графа с корнем в вершине r .

Дальнейшее развитие этих результатов шло в направлении поиска аналогов формул (II.2) и (II.3) для алгебраических дополнений D_{ij} определителя схемы и разработки конкретных алгоритмов перечисления всех прадеревьев графа. Это объясняется тем, что схемные функции можно получить по общеизвестным формулам, исходя из определителя цепи и его алгебраических дополнений. Напомним некоторые

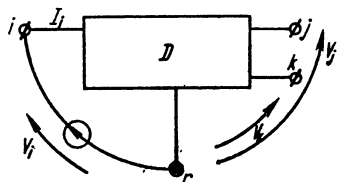


Рис. 13

из этих формул для цепей, приведенных к проходному четырехполюснику (рис. 13).

Передаточная функция по напряжению имеет вид

$$K_v = \frac{V_j - V_k}{V_i} = \frac{D_{ij} - D_{ik}}{D_{ii}}. \quad (\text{II.4})$$

Здесь и далее V_i, V_j, V_k — узловые напряжения узлов i, j, k по отношению к базисному узлу r .

Запишем передаточное сопротивление

$$Z_n = \frac{V_j - V_k}{I_i} = \frac{D_{ij} - D_{ik}}{D}$$

и входное

$$Z_{\text{вх}} = \frac{V_i}{I_i} = \frac{D_{ii}}{D}.$$

К настоящему времени топологические формулы для алгебраических дополнений определителя цепи получены как для взаимных цепей, так и для цепей, не удовлетворяющих принципу взаимности [7, 31].

Приведем эти формулы в системе принятых обозначений. Для взаимных цепей

$$D_{ii} = \sum_k [d_k^{i,r}]; \quad (\text{II.5})$$

$$D_{ij} = \sum_k [d_k^{i,j,r}], \quad (\text{II.6})$$

где $d_k^{i,j,r}$ — два-дерево с узлами i и j в одной части и узлом r в другой.

Для цепей, не удовлетворяющих принципу взаимности,

$$D_{ii} = \sum_k [p_k^{i,r}]; \quad (\text{II.7})$$

$$D_{ij} = \sum_k [p_k^{(j),r}], \quad (\text{II.8})$$

где $p^{(i)}$ — два-прадерево с корнями i и r , причем вершина j содержится в части два-прадерева с корнем i .

Можно вывести аналогичные топологические формулы и для двойных алгебраических дополнений определителя цепи. Отметим, что как взаимная цепь может быть частным случаем невязимной, так и неориентированный граф может рассматриваться как частный случай графа ориентированного, а формулы (II.2), (II.5), (II.6) — как частные случаи формул (II.3), (II.7), (II.8) соответственно. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать лишь ориентированные графы и соответствующие им топологические понятия.

Нельзя не заметить незначительную практическую ценность приведенных топологических формул самих по себе. Перечисление вручную элементов топологических формул возможно лишь для крайне простых схем и требует значительного внимания. Практическое использование топологических методов имеет смысл лишь при постановке на ЦВМ конкретных алгоритмов перечисления прадеревьев и два-прадереьев графа схемы. Разработка таких алгоритмов потребовала создания специализированного математического аппарата, удобного как для описания и преобразования топологических формул, так и для последующего перевода их на входной язык ЦВМ. Многолетняя работа разных исследователей убедительно продемонстрировала наилучшую пригодность для этой цели соответственно приспособленного аппарата теории множеств. Примерами первых серьезных разработок в этой области являются так называемая «алгебра Ванга» и теория «структурных чисел» [5]. Последовательное использование аппарата теории множеств [31] позволило обобщить предыдущие результаты и получить ряд оригинальных решений.

Исходным вопросом при топологическом анализе электронных схем является математическая запись графа схемы. Для ориентированных графов предложены две системы записи: вершинные множества номеров дуг, заходящих в данную вершину; множества смежностей, представляющие собой множества номеров начальных вершин дуг, заходящих в данную вершину. Выбор системы записи графа определяется конкретной задачей.

Кроме упомянутых множеств, позволяющих описать топологию графа, необходимо множество, содержащее информацию о количественных отношениях между элементами графа. В качестве последнего будем пользоваться множеством весов дуг графа. Между множеством дуг графа и

множеством весов устанавливается однозначное соответствие, так что отображением любого топологического образа графа в множество весов можно получить количественное выражение топологического образа.

В соответствии с принятым математическим аппаратом определитель цепи находим через характеристическое множество цепи, введенное в работе [31]. Характеристическим множеством P_r электронной цепи является множество, элементы которого соответствуют всем прадеревьям с корнями в вершине r ориентированного графа этой цепи, построенного по соотношениям (II.1). Очевидно, отображением характеристического множества в множество весов дуг получаем определитель цепи в соответствии с формулой (II.3):

$$D = [P_r] = \sum_k [p_k^r], \quad (\text{II.9})$$

где квадратные скобки обозначают операцию отображения в множество весов дуг.

Общий метод определения множества P_r состоит в декартовом перемножении вершинных множеств графа цепи с последующим выявлением и исключением частичных графов с контурами

$$R_r = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^n \tau_k = P_r + L_r, \quad (\text{II.10})$$

где τ_k — вершинное множество k -й вершины графа; P_r — подмножество, элементы которого соответствуют прадеревьям с корнем r , т. е. характеристическое множество; L_r — подмножество, элементы которого соответствуют частичным графам с контурами.

Множество два-прадеревьев $P_{r,i}$ с корнями в вершинах r и i может быть найдено аналогичным декартовым перемножением вершинных множеств графа, но без участия вершинного множества вершины i :

$$R_{r,i} = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq r,i}}^n \tau_k = P_{r,i} + L_{r,i}, \quad (\text{II.11})$$

где $L_{r,i}$ — подмножество частичных графов с контурами, не проходящими через вершины-корни r и i .

Разработаны эффективные алгоритмы обнаружения в множествах R_r и $R_{r,i}$ частичных графов с контурами [9], которые позволяют реализовать на ЭВМ конкретные процедуры определения множеств P_r и $P_{r,i}$. Отображением послед-

них в множество весов дуг находятся в соответствии с выражениями (II.7) и (II.9) определитель цепи D и алгебраическое дополнение D_{ii} .

Множество $P_{r,i(j)}$, как легко видеть, является подмножеством множества $P_{r,i}$. Все элементы множества $P_{r,i(j)}$ могут быть извлечены из множества $P_{r,i}$. Необходимо лишь проверить принадлежность вершины j части два-прадерева с корнем i . Это осуществляется проверкой пути из корня i в вершину j (если путь есть, то соответствующее два-прадерево принадлежит множеству $P_{r,i(j)}$). Отображая множество $P_{r,i(j)}$ в множество весов дуг, находим в соответствии с выражением (II.8) алгебраическое дополнение D_{ij} .

Таким образом, формулы (II.10) и (II.11) позволяют найти определитель цепи и его алгебраические дополнения топологическим методом с помощью ЭВМ.

Установим зависимость между множеством два-прадереьев $P_{r,i}$ и характеристическим множеством P_r . Это позволит находить множество два-прадереьев непосредственно из характеристического множества, не прибегая к громоздкой процедуре декартового перемножения вершинных множеств.

Пусть известно характеристическое множество P_r . Определим топологический смысл производной этого множества по номеру u_{ij} дуги, исходящей из вершины i и входящей в вершину j . Производную множества по номеру находим в соответствии с данными работы [31], отбрасывая все элементы множества, не содержащие нужный номер, и исключая этот номер в оставшихся элементах.

Запишем производную выражения (II.10) по номеру u_{ij} :

$$\frac{\partial R_r}{\partial u_{ij}} = \frac{\partial P_r}{\partial u_{ij}} + \frac{\partial L_r}{\partial u_{ij}}.$$

Рассмотрим множества $\frac{\partial R_r}{\partial u_{ij}}$, $\frac{\partial P_r}{\partial u_{ij}}$ и $\frac{\partial L_r}{\partial u_{ij}}$ как множества R_r^* , P_r^* и L_r^* нового графа, полученного из исходного вследствие некоторых топологических преобразований, характер которых нам предстоит выяснить.

По определению производной множества имеем

$$\frac{\partial R_r}{\partial u_{ij}} = R_r^* = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq r, j}}^n \tau_k,$$

так как номер u_{ij} содержится только в вершинном множестве τ_j . Из этого следует, что новый граф, соответствующий

множеству R_r^* , образуется путем исключения всех дуг, заходящих в вершину j .

В свою очередь, множество $\frac{\partial L_r}{\partial u_{ij}}$ состоит из таких сочетаний номеров дуг, которые, будучи дополнены номером u_{ij} , соответствуют частичным графам с контурами исходного графа. Очевидно, чтобы элементы множества $\frac{\partial L_r}{\partial u_{ij}}$ соответствовали частичным графам с контурами нового, преобразованного графа, последний нужно образовать закорачиванием вершин i и j . Контур-петля, возникающий при наличии в исходном графе дуги из вершины j в вершину i , должен отбрасываться.

Таким образом, множество $\frac{\partial P_r}{\partial u_{ij}}$ является характеристическим множеством графа, полученного из исходного путем исключения всех дуг, заходящих в вершину j , и закорачивания вершин i и j .

Прадеревья преобразованного графа являются два-прадеревьями исходного графа с корнями r и j , так как все дуги, заходящие в вершину j , отброшены. Вследствие закорачивания вершин i и j вершина i будет всегда находиться в частях два-прадеревьев с корнем r . Множество два-прадеревьев такого типа записываем в виде $P_{r(i),j}$.

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1.

Производная характеристического множества ориентированного графа по номеру u_{ij} дуги, исходящей из вершины i и входящей в вершину j , равна множеству два-прадеревьев графа с корнями r и j , причем вершина i содержится в частях два-прадеревьев с корнем r :

$$\frac{\partial P_r}{\partial u_{ij}} = P_{r(i),j}. \quad (\text{II.12})$$

В частном случае, когда дуга, по номеру которой определяется производная, выходит из вершины-корня r и заходит в вершину j , выражение (II.12) упрощается:

$$\frac{\partial P_r}{\partial u_{rj}} = P_{r,j}.$$

Исходя из формул (II.3), (II.7) и (II.8) с помощью доказанной теоремы нетрудно получить формулы, выражающие алгебраические дополнения определителя цепи через отображения производных характеристического множества цепи в множество весов дуг соответствующего графа.

Действительно, если учесть очевидную зависимость

$$P_{r,i} = P_{r,i(j)} + P_{r(j),i},$$

то можно записать

$$D_{ij} = [P_{r,i(j)}] = [P_{r,i}] - [P_{r(j),i}] = \left[\frac{\partial P_r}{\partial u_{ri}} \right] - \left[\frac{\partial P_r}{\partial u_{ji}} \right]; \quad (\text{II.13})$$

$$D_{ii} = [P_{r,i}] = \left[\frac{\partial P_r}{\partial u_{ri}} \right]. \quad (\text{II.14})$$

Формулы (II.13) и (II.14) позволяют выражать схемные функции через отображения характеристического множества и его производных без использования два-прадеревьев. Таким образом, не нужно преобразовывать граф и вести поиск два-прадеревьев, а достаточно найти характеристическое множество и вычислить его производные по номерам необходимых дуг. Так, для передаточной функции по напряжению (II.4) получаем

$$K_v = \frac{D_{ij} - D_{ik}}{D_{ii}} = \frac{\left[\frac{\partial P_r}{\partial u_{ki}} \right] - \left[\frac{\partial P_r}{\partial u_{ji}} \right]}{\left[\frac{\partial P_r}{\partial u_{ri}} \right]}.$$

Аналогично и для других схемных функций

$$Z_n = \frac{D_{ij} - D_{ik}}{D} = \frac{\left[\frac{\partial P_r}{\partial u_{ki}} \right] - \left[\frac{\partial P_r}{\partial u_{ji}} \right]}{[P_r]};$$

$$Z_{вх} = \frac{D_{ii}}{D} = \frac{\left[\frac{\partial P_r}{\partial u_{ri}} \right]}{[P_r]}.$$

Заметим, что в графах электронных схем обычно отсутствуют дуги, по номерам которых необходимо определять производные характеристического множества. Это затруднение легко обойти, введя в состав графа необходимые дуги, которые удобно назвать структурными. Если же веса структурных дуг принять равными нулю, то они, очевидно, никак не изменят численный результат отображения множеств в множество весов дуг.

Выше было отмечено, что множество два-прадеревьев типа $P_{r,i(j)}$ является подмножеством множества два-прадеревьев типа $P_{r,i}$. А именно, два-прадеревья $P_{r,i(j)}$ извлекаются из множества $P_{r,i}$ проверкой наличия пути из корня i в вершину j . Это обстоятельство позволяет находить

схемную функцию K_v , исходя непосредственно из формул (II.7) и (II.8):

$$K_v = \frac{[P_{r,i(k)}] - [P_{r,i(j)}]}{[P_{r,i}]}$$

Такой подход весьма удобен, так как достаточно найти только множество $\frac{\partial P_r}{\partial u_{ri}}$, из которого можно извлечь элементы подмножеств $P_{r,i(k)}$ и $P_{r,i(j)}$.

Топологические методы позволяют получать определитель схемы и его алгебраические дополнения в буквенно-числовом виде. Это достигается неполным отображением характеристического множества и его производных в множестве весов дуг, при котором часть дуг остается в буквенных (символических) обозначениях, а обозначения остальных дуг заменяются их весами с проведением необходимых арифметических действий. В число дуг, остающихся в буквенных обозначениях, удобно включать и структурные дуги.

Серьезным препятствием для применения топологических методов является стремительное увеличение числа прадеревьев графа с усложнением цепи. Так, перечисление прадеревьев графов цепей с 15—25-ю узлами даже с применением современной вычислительной техники может длиться десятки и сотни лет. Для иллюстрации приведем пример из книги [31].

Пусть граф цепи представляет собой полный многоугольник с числом вершин n , в котором дуги связывают все вершины. Время t , необходимое для перечисления всех прадеревьев такого графа машиной, способной перечислять 10^7 прадеревьев в секунду, приведено ниже.

n :	10;	12;	14;	16;	18;
t :	10 с;	1,72 ч;	65,6 сут;	228,5 лет;	385000 лет.

Следует отметить, что для неполных графов ситуация не столь критична. Современные алгоритмы перебора прадеревьев позволяют в практически приемлемое время перечислять все прадеревья графов, соответствующих реальным схемам с числом узлов 10—20.

Качественное изменение ситуации достигнуто лишь благодаря разработкам методов топологического анализа по частям.

2. Топологический метод определения схемной функции делением графа цепи на части

Выше показано, что любую схемную функцию можно найти, отобразив в множество весов дуг характеристическое множество и его производные по структурным дугам.

Назовем характеристическим полиномом цепи в буквенно-числовом виде характеристическое множество, неполностью отображенное в множество весов дуг. При таком неполном отображении в буквенных обозначениях остаются и структурные дуги наряду с некоторыми другими элементами цепи. Это позволяет вычислить производные такого характеристического полинома, необходимые для определения схемной функции.

Ниже изложен топологический метод определения характеристического полинома цепи в буквенно-числовом виде без перечисления всех прадеревьев графа цепи.

Это достигается разделением графа цепи на части, анализа каждой части в отдельности и последующего объединения результатов.

Расчленим граф цепи с корнем в вершине r линией разреза m , проходящей через вершины A и r , на два подграфа α и β (рис. 14). При этом часть дуг, входящих в вершину A , окажется в подграфе α , а остальные — в подграфе β . Вершинное множество τ_A разделится на два подмножества:

$$\tau_A = \tau_{A\alpha} + \tau_{A\beta}.$$

Характеристическое множество исходного графа P_r , как показано в предыдущем параграфе, определяется из зависимости

$$R_r = P_r + L_r. \quad (\text{II.15})$$

Для расчлененного графа

$$R_r = \prod_{k \neq r, A} \tau_k \times (\tau_{A\alpha} + \tau_{A\beta}) = \prod_{\substack{k \in \alpha \\ k \neq r, A\alpha}} \tau_k \times \prod_{\substack{s \in \beta \\ s \neq r, A\beta}} \tau_s \times (\tau_{A\alpha} + \tau_{A\beta}). \quad (\text{II.16})$$

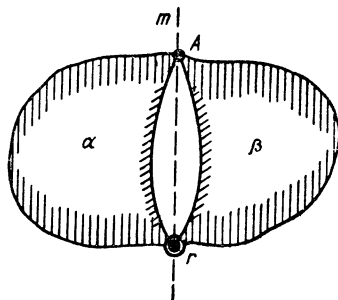


Рис. 14

Множество R_r было определено так:

$$R_r = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^n \tau_k.$$

Введем аналогичные множества для частей α и β :

$$R_r^\alpha = \prod_{\substack{k \in \alpha \\ k \neq r}} \tau_k; \quad R_{r, A_\alpha}^\alpha = \prod_{\substack{k \in \alpha \\ k \neq r, A_\alpha}} \tau_k; \quad (II.17)$$

$$R_r^\beta = \prod_{\substack{k \in \beta \\ k \neq r}} \tau_k; \quad R_{r, A_\beta}^\beta = \prod_{\substack{k \in \beta \\ k \neq r, A_\beta}} \tau_k. \quad (II.18)$$

С учетом обозначений (II.17) и (II.18) для расчлененного графа можем записать

$$P_r + L_r = R_r^\alpha \times R_{r, A_\beta}^\beta + R_r^\beta \times R_{r, A_\alpha}^\alpha.$$

Учитывая формулу (II.15), а также аналогичную формулу для множества двупрадеревьев с корнями r и v

$$P_{r,v} + L_{r,v} = R_{r,v},$$

получаем после простейших преобразований

$$P_r + L_r = P_r^\alpha \times P_{r, A_\beta}^\beta + P_{r, A_\alpha}^\alpha \times P_r^\beta + L_r^{\alpha, \beta}, \quad (II.19)$$

где P_r^α , P_r^β — характеристические множества частей α и β ; $L_r^{\alpha, \beta}$ — множество частичных графов, контуры которых образованы дугами одного из подграфов α или β .

В общем случае при нескольких разделяющих вершинах в множестве L_r , кроме указанных выше частичных графов $L_r^{\alpha, \beta}$, могут быть частичные графы с контурами, образованными дугами обоих подграфов α и β одновременно. Такие контуры, очевидно, распадаются при разделении графа на части. Таким образом,

$$L_r = L_r^{\alpha, \beta} + L_r^{\alpha+\beta}, \quad (II.20)$$

где $L_r^{\alpha+\beta}$ — множество частичных графов с контурами, распадающимися при разделении графа на части.

Окончательно получаем

$$P_r + L_r^{\alpha+\beta} = P_r^\alpha \times P_{r, A_\beta}^\beta + P_{r, A_\alpha}^\alpha \times P_r^\beta. \quad (II.21)$$

Нетрудно вывести аналогичное выражение для графа, представленного на рис. 15:

$$P_r + L_r^{\alpha+\beta} = P_r^\alpha \times P_{r, A_\beta, B_\beta}^\beta + P_{r, A_\alpha}^\alpha \times P_{r, B_\beta}^\beta + P_{r, B_\alpha}^\alpha \times P_{r, A_\beta}^\beta + P_{r, A_\alpha, B_\alpha}^\alpha \times P_r^\beta, \quad (II.22)$$

где $P_{r, A\alpha, B\alpha}^\alpha$ и $P_{r, A\beta, B\beta}^\beta$ — множества три-прадеревьев для частей α и β .

Характер формулы для P_r сохраняется и при большем числе разделяющих вершин, а также при делении на большее число частей. Сама формула при этом существенно усложняется.

Попытаемся упростить формулу для P_r , несколько иначе разделив граф на части. Пусть линии разреза графа расчленяют не вершины, как это было до сих пор, а разрезают

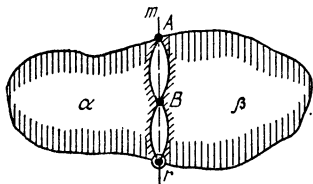


Рис. 15

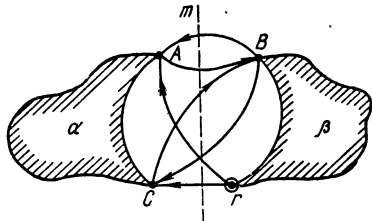


Рис. 16

дуги графа (рис. 16). Тогда ни одно из вершинных множеств исходного графа не распадается на подмножества, и формула (II.16) упростится:

$$R_r = \prod_{\substack{k \in \alpha \\ k \neq r}} \tau_k \times \prod_{\substack{s \in \beta \\ s \neq r}} \tau_1. \quad (\text{II.23})$$

Однако при таком делении графа на части обязательно образуется хотя бы один подграф, не содержащий вершины корня r . Характеристическое множество такого подграфа, а также подграфа с корнем будем определять, предварительно присоединив к корню свободные концы дуг, рассеченных линиями разреза. При этом сохраним возможность восстановить, если это будет необходимо, начальные вершины, из которых исходят разрезанные дуги.

В результате преобразований, незначительно отличающихся от приведенных выше и учитывающих формулу (II.23), получаем более простую формулу

$$P_r + L_r^{\alpha+\beta} = P_r^\alpha \times P_r^\beta.$$

Характерной особенностью последней формулы является то, что ее форма не зависит от числа дуг, пересекаемых разделяющей линией.

Нетрудно получить соответствующую формулу при разделении графа на части $\alpha, \beta, \dots, \omega$:

$$\begin{aligned} P_r + L_r &= R_r^\alpha \times R_r^\beta \times \dots \times R_r^\omega; \\ P_r + L_r &= P_r^\alpha \times P_r^\beta \times \dots \times P_r^\omega + L_r^{\alpha, \beta, \dots, \omega}; \\ P_r + L_r^{\alpha+\beta+\dots+\omega} &= P_r^\alpha \times P_r^\beta \times \dots \times P_r^\omega, \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

где $L_r^{\alpha, \beta, \dots, \omega}$ и $L_r^{\alpha+\beta+\dots+\omega}$ — аналогичны введенным в формулах (II.19) и (II.20) $L_r^{\alpha, \beta}$ и $L_r^{\alpha+\beta}$.

Как формулу (II.24), так и формулы (II.21) и (II.22) можно записать относительно отображений соответствующих множеств в множество весов дуг. Но для формулы (II.24) не нужно находить отображения множеств два-прадеревьев, что существенно упрощает алгоритм:

$$[P_r] = [P_r^\alpha] \times [P_r^\beta] \times \dots \times [P_r^\omega] - [L_r^{\alpha+\beta+\dots+\omega}]. \quad (\text{II.25})$$

Формула (II.25) выражает характеристический полином через характеристические полиномы частей графа. Но для практического использования формулы (II.25) нужно обладать удобным способом учета множества $L_r^{\alpha+\beta+\dots+\omega}$, элементы которого соответствуют частичным графам с контурами, распадающимися на части при разделении графа.

Множество $L_r^{\alpha+\beta+\dots+\omega}$ можно найти непосредственно из графа, однако это ничуть не менее громоздко, чем перечислять все прадеревья графа. Попытаемся разработать процедуру, позволяющую учитывать возникающие контуры в процессе перемножения характеристических полиномов частей графа.

С этой целью при отображении характеристических множеств частей графа в множество весов дуг сохраним информацию о структуре каждого прадеревья части графа, которая необходима и достаточна для выявления контуров, возникающих при перемножении характеристических множеств частей графа.

Легко заметить, что контур, распадающийся при разделении графа на части, должен обязательно состоять хотя бы из двух дуг, соединяющих части графа, а также из путей внутри частей графа, ведущих от конечной вершины одной из соединительных дуг к начальной вершине другой соединительной дуги. Таким образом, для выявления контуров при последующих перемножениях достаточно для каждого прадеревья части графа сохранить топологическую инфор-

мацию о соединяющих дугах, если они есть в составе прадерева, и о наличии путей в прадереве из конечных вершин этих дуг к начальным вершинам других соединительных дуг.

После записи этой информации нужно найти отображение прадерева части графа в множество весов дуг, т. е. вес прадерева.

Весьма существенно, что веса прадеревьев частей графа, если указанные сведения об их топологической структуре совпадают, могут суммироваться, образуя некоторый полином с соответствующим ему топологическим образом.

Упомянутой информации о соединительных дугах и путях в прадереве части графа достаточно для выявления контуров при окончательном перемножении характеристических полиномов частей графа.

Детали метода подробно излагаются в примере 3. Там же вводится понятие кортежа, позволяющего компактно записывать топологические образы, соответствующие членам характеристических полиномов частей графа.

Сформулируем окончательно правила перемножения характеристических полиномов частей графа:

1) кортеж каждого члена произведения образуется последовательной записью кортежей членов перемножаемых полиномов;

2) численное значение члена произведения равно произведению численных значений членов перемножаемых полиномов;

3) члены произведения, которым соответствуют частичные подграфы с контурами, не учитываются;

4) для каждого члена произведения сохраняются лишь те числа в кортеже, которые содержат информацию о наличии соединительных дуг и путей из конечных вершин соединительных дуг к начальным вершинам других соединительных дуг;

5) члены произведения с одинаковыми кортежами заменяются одним членом с суммарным численным значением.

Перемножение по изложенным правилам будем обозначать знаком \otimes :

$$[P_r] = [P_r^\alpha] \otimes [P_r^\beta] \otimes \dots \otimes [P_r^\varphi].$$

До сих пор характеристические полиномы первичных частей α и β графа находились по традиционному методу, выраженному формулой (II.10). Однако алгоритмически целесообразнее, чтобы единая система правил действовала на всем протяжении решения задачи.

Этого можно достичь, если рассматривать каждое вершинное множество графа совместно с весами дуг как характеристический полином части графа включающей лишь одну вершину. Тогда разработанные правила действуют с самого начала, необходимо лишь указать удобный порядок перемножения характеристических полиномов частей графа:

$$[P_r] = [P_r^{\alpha_1}] \otimes [P_r^{\alpha_2}] \otimes \dots \otimes [P_r^{\alpha_{n-1}}], \quad (\text{II.26})$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ — части графа, включающие лишь по одной вершине $1, \dots, n - 1$ соответственно.

Рассмотрим два алгоритма реализации формулы (II.26), отличающиеся порядком выполнения перемножений.

Алгоритм вершинных пар основан на попарном перемножении характеристических полиномов частей графа, пока не будет получен характеристический полином всего графа.

Пусть число вершин графа вместе с корнем удовлетворяет условию

$$n = 2^k + 1, \quad (\text{II.27})$$

где k — целое положительное.

Перемножив на первом этапе первый полином формулы (II.26) со вторым, третий с четвертым и так далее, получим

$$[P_r] = [P_r^{\alpha_{1,2}}] \otimes \dots \otimes [P_r^{\alpha_{n-2,n-1}}], \quad (\text{II.28})$$

где $\alpha_{i-3,i-2,i-1,i}$ — часть графа, включающая только вершины $i - 3, i - 2, i - 1, i$.

На втором этапе такие попарные перемножения производим в формуле (II.28):

$$[P_r] = [P_r^{\alpha_{1,2,3,4}}] \otimes \dots \otimes [P_r^{\alpha_{n-4,n-3,n-2,n-1}}],$$

где $\alpha_{i-3,i-2,i-1,i}$ — часть графа, включающая только вершины $i - 3, i - 2, i - 1, i$.

Продолжая попарные перемножения, на k -м этапе образуем характеристический полином всего графа:

$$[P_r] = [P_r^{\alpha_{1,2,\dots,n-1}}].$$

Если условие (II.27) не выполняется, то характеристический полином части графа, для которого не нашлось пары на данном этапе, без изменений переносится в следующий этап. Так, например, если $n - 1 = 11$, то поэтапно будут получены характеристические полиномы следующих частей

графа:

$$\alpha_{1,2}, \alpha_{3,4}, \alpha_{5,6}, \alpha_{7,8}, \alpha_{9,10}, \alpha_{11};$$

$$\alpha_{1,2,3,4}, \alpha_{5,6,7,8}, \alpha_{9,10,11};$$

$$\alpha_{1,2,3,4,5,6,7,8}, \alpha_{9,10,11};$$

$$\alpha_{1,2,\dots,10,11}.$$

По алгоритму дополнения по одной вершине вначале перемножаются первые два члена правой части формулы (II.26):

$$[P_r] = [P_r^{\alpha_{1,2}}] \otimes [P_r^{\alpha_3}] \otimes \dots \otimes [P_r^{\alpha_{n-1}}]. \quad (\text{II.29})$$

Затем перемножаются первые два члена формулы (II.29)

$$[P_r] = [P_r^{\alpha_{1,2,3}}] \otimes [P_r^{\alpha_4}] \otimes \dots \otimes [P_r^{\alpha_{n-1}}].$$

Такие перемножения продолжаются, пока не будет получен характеристический полином всего графа

$$[P_r] = [P_r^{\alpha_{1,2,\dots,n-1}}].$$

Исследованию на ЭВМ были подвергнуты только эти два алгоритма, имеющие наиболее общий характер. Не исключено, однако, что для каких-либо частных задач более уместными окажутся иные последовательности перемножения полиномов в формуле (II.26).

В результате исследования алгоритма вершинных пар и алгоритма дополнения по одной вершине было обнаружено, что время счета и необходимый объем машинной памяти существенно зависят от нумерации вершин графа. Это объясняется тем, что при различной нумерации вершин в ходе решения образуются полиномы разных частей графа с неодинаковым числом членов.

Были предприняты попытки автоматизировать выбор наилучшей нумерации вершин. Однако создать эффективный алгоритм наилучшей нумерации вершин графа удалось только для алгоритма дополнения по одной вершине. Это преимущество оказалось решающим. Алгоритм нумерации вершин описан ниже.

Рассмотрим подробнее алгоритм дополнения по одной вершине, используя структурную схему, представленную на рис. 17. Переменная s равна номеру присоединяемой на данном этапе вершины графа. В блоке \mathcal{Z} s присваивается начальное значение 2, так как характеристический полином части графа, включающей только первую вершину, совпадает с первым вершинным множеством. Конечное значение

s равно $n - 1$ — числу вершин графа без корневой. В массиве M_1 находится характеристический полином с номером $(s - 1)$ части графа из вершин $1, \dots, s - 1$, а также характеристический полином с номером s части графа, включаю-

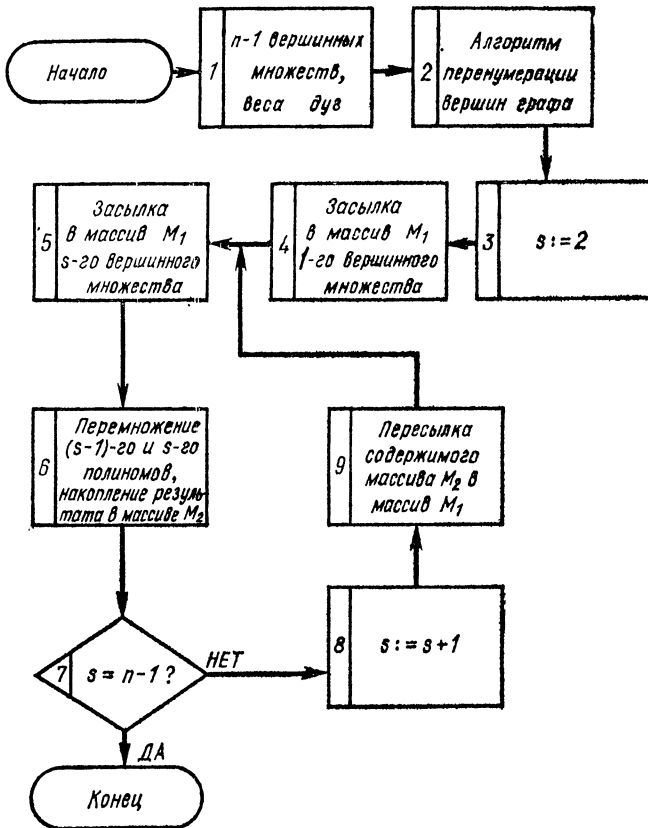


Рис. 17

щей только вершину s . В массиве M_2 накапливается характеристический полином части графа, включающей вершины $1, \dots, s - 1$. В блоке 9 после увеличения s на единицу в блоке 8 массив M_1 вновь заполняется полиномом части графа, включающей вершины $1, \dots, s - 1$.

В блоке 6 выполняются правила перемножения характеристических полиномов частей графа, разработанные выше. Работа блока 6 детально представлена структурной схемой на рис. 18.

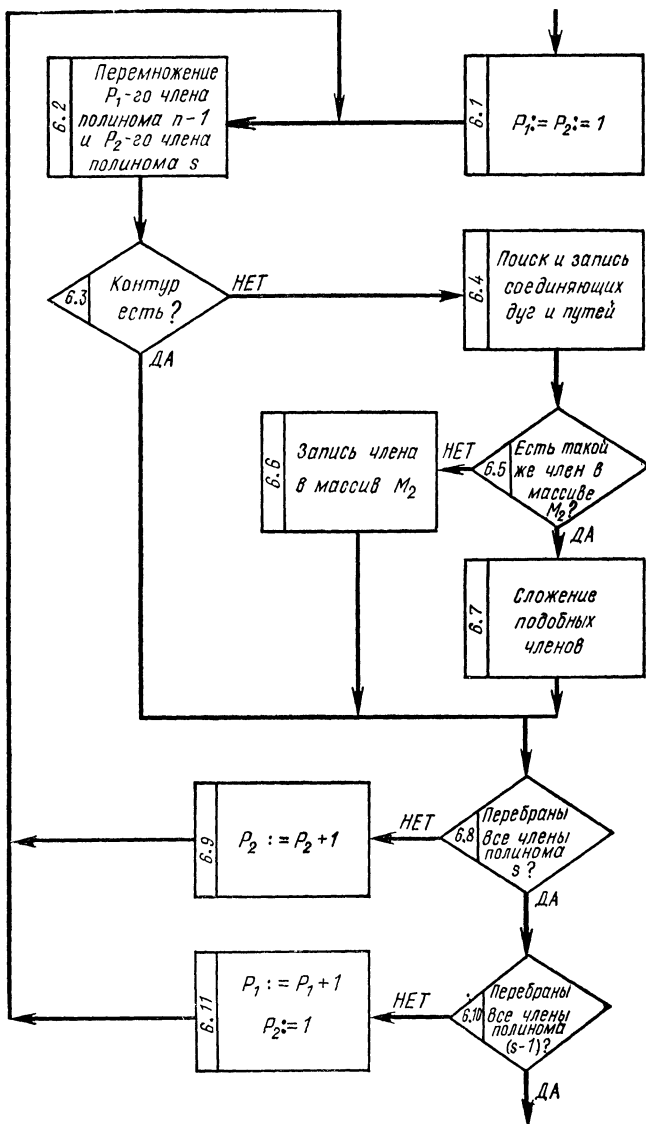


Рис. 18

Переменным P_1 и P_2 присваиваются порядковые номера перемножаемых членов полиномов частей графа. Вначале в блоке 6.1 переменным P_1 и P_2 присваиваются единицы. В блоке 6.9 P_2 увеличивается на единицу, пока не станет равным номеру последнего члена полинома. Тогда в блоке 6.1 на единицу увеличивается P_1 , а P_2 вновь присваивается первый номер полинома s . Перемножение полиномов заканчивается с исчерпанием полиномов $s - 1$ и s . В блоке 6.2 выполняются правила 1 и 2. В блоке 6.3 выполняется правило 3. Проверка отсутствия контура проста в связи с тем, что контур должен обязательно проходить через s -ю вершину графа и достаточно проследить путь из s -й вершины в корень. Если такой путь есть, то контур в топологическом образе отсутствует.

В блоке 6.4 в соответствии с правилом 4 выделяется и сохраняется в виде кортежа чисел нужная топологическая информация о каждом образованном члене характеристического полинома части графа.

В блоках 6.5—6.7 осуществляется правило 5. В блоке 6.5 все накопленные в M_2 члены характеристического полинома части графа, образованной соединением частей ($s - 1$) и s , сравниваются с новым членом. Если совпадают кортежи, то работает блок 6.7, иначе новый член в блоке 6.6 вписывается в вычисляемый характеристический полином.

На этом работа блока 6 (см. рис. 17) завершается. Блок 2 нумерует вершины графа для уменьшения времени получения характеристического полинома и необходимого объема памяти.

Рассмотрим алгоритм нумерации вершин графа.

Алгоритм нумерации вершин должен обеспечивать образование характеристических полиномов с минимальным числом членов в процессе решения графа схемы по алгоритму дополнения по одной вершине. Такой алгоритм должен быть компромиссным решением требований эффективности и простоты. Описанный ниже алгоритм продемонстрировал удовлетворительную эффективность нумерации при сравнительной простоте и быстродействии.

Введем понятие внешних связей части графа.

Внешними связями некоторой части графа, образованной разделением по дугам, будем называть:

— дуги, заходящие в выделенную часть графа, кроме дуг, исходящих из корня (дуги a , b , c на рис. 19, но не дуга d);

— вершины, из которых исходит хотя бы одна дуга, пересеченная разделяющей линией (вершины K , L на рис. 19).

Нетрудно заметить, что число внешних связей части графа непосредственно влияет на число членов характеристического полинома части графа.

Действительно, по пятому правилу перемножения полиномов члены полинома, топологические образы которых различаются хотя бы одной соединительной дугой, являются существенно различными. Различны также члены полинома, если у их топологических образов различен хотя бы один путь, связывающий конечную и начальную вершины соединительных дуг. Число таких путей зависит от числа вершин, являющихся внешними связями.

Итак, в общем случае число членов полинома части графа увеличивается с увеличением числа внешних связей. Условным числом, по которому оценивается возможное число членов полинома, принято суммарное число внешних связей данной части графа.

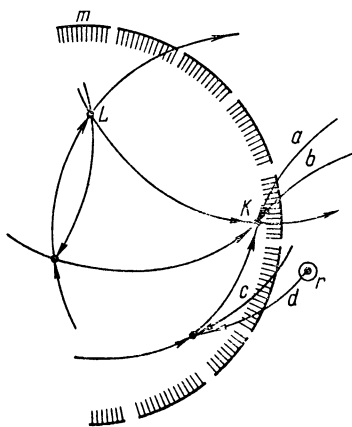


Рис. 19

Задача нумерации решается поэтапно.

На первом этапе подсчитываются условные числа для двухвершинных частей графа, включающих вершину с номером 1 и одну из остальных вершин, кроме корневой. Номера вершин, составивших часть графа с минимальным условным числом, запоминаются. Если найдено несколько частей графа с минимальным условным числом, то запоминается первая из них.

На втором этапе отыскивается трехвершинная часть графа с наименьшим условным числом, включающая две вершины, найденные на предыдущем этапе, и одну из остальных вершин. Соответствующие номера вершин запоминаются в порядке их отыскания.

На этапе $(n - 2)$ окончательно определяется наилучшая последовательность номеров вершин графа. Остается лишь произвести перенумерацию вершин, а именно: вершине,

первоначальный номер которой стоит на i -м месте в полученной последовательности, присваивается номер i .

Структурная схема алгоритма представлена на рис. 20.

В массиве V поэтапно накапливается наилучшая последовательность номеров вершин.

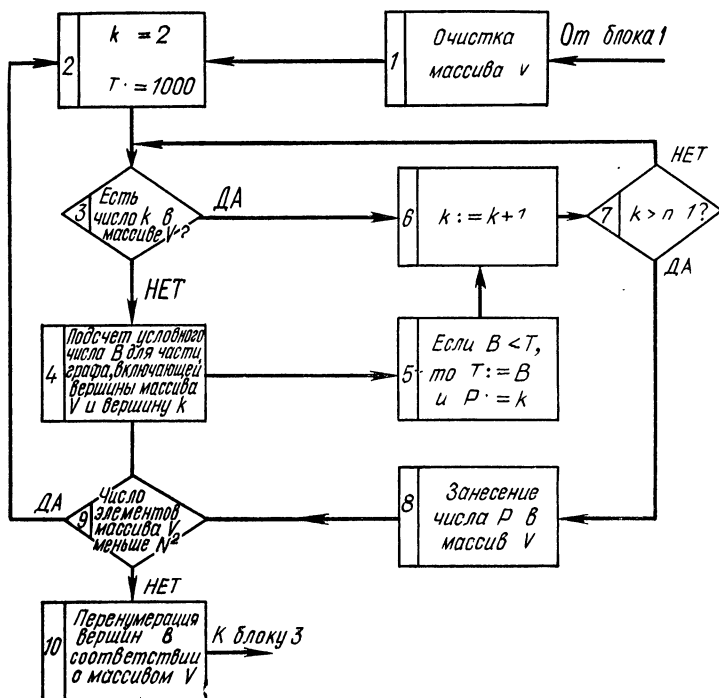


Рис. 20

Переменной k на каждом этапе присваиваются номера вершин от 2 до $n - 1$ с помощью блоков 2, 6 и 7. В блоках 2 и 5 переменной T присваивается наименьшее значение условного числа B , полученное на данном этапе. Переменной P в блоке 5 присваивается номер вершины, которая вместе с вершинами, выделенными на предыдущем этапе, образует часть графа с наименьшим условным числом. Блок 3 проверяет отсутствие вершины с номером k в части графа, полученной на предыдущем этапе. Блок 9 проверяет окончание $(n - 2)$ -го этапа, а блок 10 производит перенумерацию графа в соответствии с найденной наилучшей последовательностью вершин.

Некоторые характеристики конкретной программы, реализующей изложенные алгоритмы, опубликованы в работе [32].

В работе [21] приведены данные о программе АС-7, реализующей топологический метод анализа с разделением графа на части по вершинам. Программа выполнена в Ассемблере с очень тщательной обработкой основных блоков. Необходимо отметить высокое быстродействие последней программы при многократном вычислении схемных функций для неизменной топологии схемы. Это достигнуто благодаря созданию специального транслятора, составляющего для анализируемой схемы программу в машинных командах, способную весьма быстро и точно вычислять коэффициенты схемных функций при вариациях номиналов элементов схемы.

Некоторое представление о быстродействии программы АС-7 можно получить из рис. 21 (здесь l — число ветвей схемы).

3. Примеры расчета коэффициентов схемных функций

Пример 1. Построим граф по схеме и матрице. Определим характеристическое множество и схемную функцию.

Рассмотрим простую цепь, схема которой изображена на рис. 22. Транзистор считаем безреактивным трехполюсником, описанным межполюсными проводимостями.

Матрица проводимостей приведена ниже, а граф, построенный

$$\begin{vmatrix} pC_1 & -pC_1 & 0 & 0 & 0 \\ -pC_1 & pC_1 + G_1 + G_{кб} + G_{еб} & -G_{бк} & 0 & -G_1 - G_{бe} \\ 0 & -G_{кб} & pC_2 + p^{-1}\Gamma + G_{бк} + G_{ек} & -pC_2 & -p^{-1}\Gamma - G_{ке} \\ 0 & 0 & -pC_2 & pC_2 + G_2 & -G_2 \\ 0 & -G_1 - G_{еб} & -p^{-1}\Gamma - G_{ек} & -G_2 & G_1 + G_2 + p^{-1}\Gamma + G_{ке} + G_{бe} \end{vmatrix}$$

по зависимости (II.1) — на рис. 23. Дуги графа пронумерованы буквами латинского алфавита, а дуги, заходящие

в вершину-корень, исключены как ненужные. Веса дуг графа приведены ниже.

Номер дуги: a ; b ; c ; d ; e ; f ; g .
 Вес дуги: $pC1$; $G1 + G_{eб}$; $G_{кб}$; $G_{бк}$; $p^{-1} \Gamma + G_{ек}$; $pC2$; $G2$.

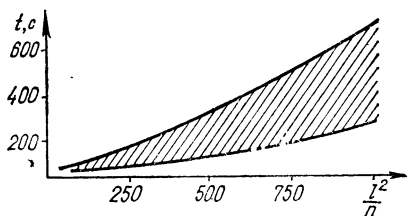


Рис. 21

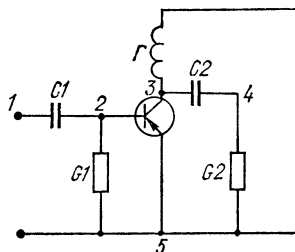


Рис. 22

Вершинные множества графа $\tau_1 = (a)$; $\tau_2 = (a, b, c)$; $\tau_3 = (d, e, f)$; $\tau_4 = (f, g)$.

Характеристическое множество P , находим по формуле (II.10), перемножая вершинные множества и отбрасывая

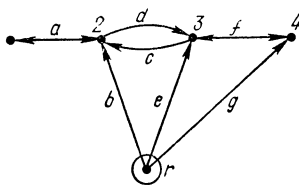


Рис. 23

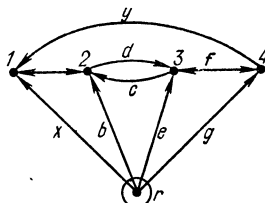


Рис. 24

сочетания, соответствующие частичным графам с контурами (например, $acdf$, $aaff$ и прочие):

$$P_r = (abdf, abdg, abef, abeg, abfg, acef, aceg, acfg).$$

Нетрудно убедиться, что каждый элемент множества P_r соответствует прадереву графа и других прадеревьев нет.

На рис. 24 изображен тот же граф, что и на рис. 23, но со структурными дугами u_{r1} , u_{41} , обозначенными x и y .

Вершинные множества последнего графа: $\tau_1 = (a, x, y)$; $\tau_2 = (a, b, c)$; $\tau_3 = (d, e, f)$; $\tau_4 (f, g)$. Характеристическое множество \tilde{P}_r этого графа включает множество P_r в качестве подмножества:

$$\tilde{P}_r = P_r + (x, y) \times \frac{\partial P_r}{\partial a} + (x) \times (adf, adg, aef, aeg, afg) + (y) \times (adg, aef, aeg, afg).$$

Передаточную функцию по напряжению запишем в виде

$$K_v = \frac{V_4}{V_1} = \frac{D_{14}}{D_{11}}.$$

Согласно формулам (II.13), (II.14) ее можно выразить через производные множества \tilde{P}_r :

$$K_v = \frac{\left[\frac{\partial \tilde{P}_r}{\partial x} \right] - \left[\frac{\partial \tilde{P}_r}{\partial y} \right]}{\left[\frac{\partial \tilde{P}_r}{\partial x} \right]}.$$

Выражения для производных имеют вид

$$\frac{\partial \tilde{P}_r}{\partial x} = (bdf, bdg, bef, beg, bfg, cef, ceg, cfg, adf, adg, acf, \\ aeg, afg);$$

$$\frac{\partial \tilde{P}_r}{\partial y} = (bdf, bdg, bef, beg, bfg, cef, ceg, cfg, adg, aef, \\ aeg, afg).$$

Легко убедиться, что элементы последних множеств являются два-прадеревьями графа, представленного на рис. 23. Отобразив последние множества в множество весов дуг, находим выражения для знаменателя и числителя схемной функции:

$$\left[\frac{\partial \tilde{P}_r}{\partial x} \right] = (G1 + G_{e6}) [(pC2G_{6к} + G2G_{6к}) + (p^{-1}\Gamma + G_{ек}) \times \\ \times (pC2 + G2) + pC2G2] + (p^{-1}\Gamma + G_{ек}) G_{к6} (pC2 + G2) + \\ + G_{к6} pC2G2; \left[\frac{\partial \tilde{P}_r}{\partial x} \right] - \left[\frac{\partial \tilde{P}_r}{\partial y} \right] = p^2 C1 C2 G_{6к}.$$

Выражение для числителя можно получить значительно проще, если воспользоваться формулами (II.13) и (II.14). В этом случае

$$K_u = \frac{[P_{2,1(4)}]}{[P_{2,1}]}.$$

Пример 2. Проиллюстрируем теорему 1 о топологической интерпретации производной характеристического множества на примере графа, изображенного на рис. 25.

Вершинные множества графа $\tau_1 = (a, d, f)$; $\tau_2 = (b, e, h)$; $\tau_3 = (c, g)$.

Характеристическое множество графа $P_r = (aeg, ahc, ahg, dbg, deg, dhg, fbc, fbg, fec, feg, fhc, fhg)$.

Найдем производную по номеру a

$$\frac{\partial P_r}{\partial a} = (eg, hc, hg).$$

Легко проверить, что элементы последнего множества соответствуют два-прадеревьям типа $P_{r(2),1}$ и других два-прадеревьев этого типа нет. Изложенное выше иллюстрирует смысл формулы (II.12).

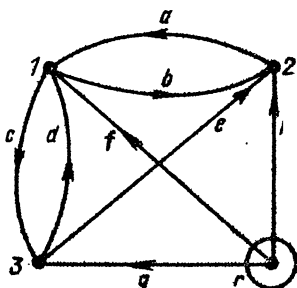


Рис. 25

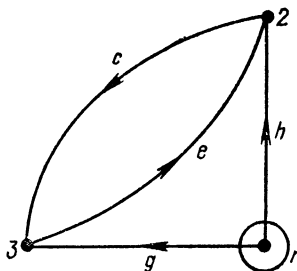


Рис. 26

На рис. 26 изображен граф, полученный из исходного исключением дуг, заходящих в вершину 1 (см. рис. 25) и закорачиванием вершин 1 и 2. Характеристическое множество P_r^* этого графа совпадает с множеством $\frac{\partial P_r}{\partial a}$:

$$P_r^* = (ge, hc, gh) = \frac{\partial P_r}{\partial a} = P_{r(2),1}.$$

Граф, полученный из исходного закорачиванием вершины 1 и корня r , изображен на рис. 27. Его характеристическое множество P_r^{**} совпадает с производной $\frac{\partial P_r}{\partial f}$ и соответствует множеству два-прадеревьев типа $P_{r,1}$:

$$P_r^{**} = (bc, bg, ec, eg, hc, hg) = \frac{\partial P_r}{\partial f} = P_{r,1}.$$

Пример 3. Определим характеристический полином делением графа на части. Рассмотрим подробно алгоритм вычисления коэффициентов характеристического полинома

путем деления графа (рис. 28) на части. Упрощенно считаем все дуги графа безреактивными с весом, равным единице.

Характеристические множества выделенных частей графа α , β и γ находятся так же, как в примере 1.

Все результаты вычислений сведены в табл. 1.

Каждый член характеристического полинома части графа представлен численным значением и топологическим образом. После численного значения, полученного в результате отображения прадерева в множество весов дуг, в круглых скобках записан закодированный топологический образ — упорядоченная по номерам конечных вершин дуг последовательность номеров начальных вершин дуг прадерева, информация о которых необходима для выявления контуров при определении $[P_r]$. Такие упорядоченные последовательности будем называть кортежами.

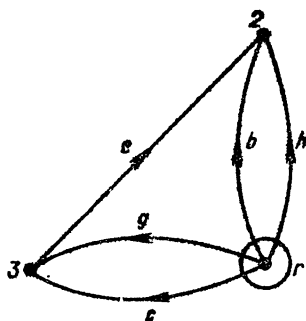


Рис. 27

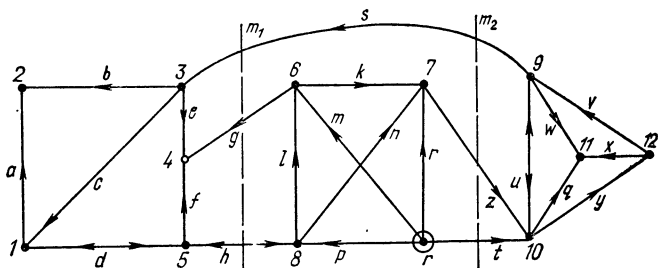
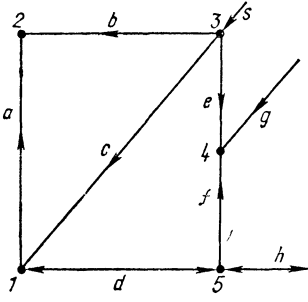
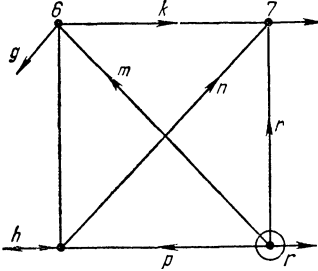
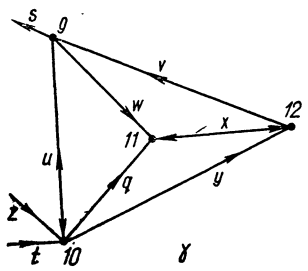


Рис. 28

Например, для прадерева $casgd$ части α (см. табл. 1) на третьем и четвертом местах стоят номера начальных вершин соединительных дуг s и g . Кроме того, в этом прадерева есть путь cd из вершины 3 в вершину 5, начальную для соединительной дуги h . Так как для обнаружения контура важно знать лишь наличие пути в прадерева, а не дуги, из которых он состоит, то путь cd обозначен номером 3 начальной вершины пути. Этот номер стоит на пятом месте; на первом и втором местах находятся нули, так как вершины 1 и 2

Часть графа	Вершинные множества
 <p style="text-align: center;">α</p>	$\begin{aligned} \tau_1 &= (c, d) \\ \tau_2 &= (a, b) \\ \tau_3 &= (s) \\ \tau_4 &= (e, f, g) \\ \tau_5 &= (d, h) \end{aligned}$
 <p style="text-align: center;">β</p>	$\begin{aligned} \tau_6 &= (l, m) \\ \tau_7 &= (k, n, r) \\ \tau_8 &= (h, p) \end{aligned}$
 <p style="text-align: center;">γ</p>	$\begin{aligned} \tau_9 &= (u, v) \\ \tau_{10} &= (u, t, z) \\ \tau_{11} &= (w, q, x) \\ \tau_{12} &= (x, y) \end{aligned}$

Характеристический

$$[P_r] = 4 \cdot 6 \cdot 9 + 4 \cdot 6 \cdot 9 + 4 \cdot 2 \cdot 9 + 4 \cdot 1 \cdot 9 + 4 \cdot 1 \cdot 9 + 4 \cdot 1 \cdot 9 + 4 \cdot 2 \cdot 9 + 4 \cdot 2 \cdot 9 + 9 + 2 \cdot 2 \cdot 9 + 2 \cdot 2 \cdot 9 +$$

Таблица 1

Подмножества прадеревьев	Характеристический полином части графа
$P_r(\alpha) = (caseh, cased, casfh, casfd, casgh, casgd, cbseh, cbsfd, cbsfh, cbsgd, cbsgh, daseh, dasfh, dasgh, dbseh, dbsfh, dbsgh)$	$[P_r(\alpha)] = 1(0, 0, 9, 0, 3) + 1(0, 0, 9, 0, 8) + 1(0, 0, 9, 0, 3) + 1(0, 0, 9, 0, 8) + 1(0, 0, 9, 6, 3) + 1(0, 0, 9, 6, 8) + 1(0, 0, 9, 0, 8) + 1(0, 0, 9, 0, 3) + 1(0, 0, 9, 0, 8) + 1(0, 0, 9, 6, 3) + 1(0, 0, 9, 6, 8) + 1(0, 0, 9, 0, 8) + 3(0, 0, 9, 0, 3) + 1(0, 0, 9, 0, 8) + 1(0, 0, 9, 6, 8) + 1(0, 0, 9, 0, 8) + 1(0, 0, 9, 6, 8) = 4(0, 0, 9, 0, 3) + 7(0, 0, 9, 0, 8) + 2(0, 0, 9, 6, 3) + 4(0, 0, 9, 6, 8)$
$P_r(\beta) = (lkh, lkp, lnh, lnp, lrh, lrp, mnp, mkh, mnp, mrp, mrh, mnh)$	$[P_r(\beta)] = 6(0, 0, 0, 0) + 2(8, 8, 5) + 1(8, 0, 5) + 1(0, 8, 5) + 2(0, 0, 5)$
$P_r(\gamma) = (utwx, utwy, utqx, utqy, utxy, uzwx, uzwy, uzqx, uzqy, uzxy, vtwy, vtqx, vtqy, vtxy, vtwy, vtqy, vzxxy, vzxqy)$	$[P_r(\gamma)] = 9(0, 0, 0, 0) + 9(10, 7, 0, 0)$

полином всего графа

$$\cdot 9 + 7 \cdot 6 \cdot 9 + 7 \cdot 6 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 9 + 2 \cdot 2 \cdot 9 + 2 \cdot 1 \cdot 9 + 2 \cdot 1 \cdot 9 + 2 \cdot 1 \times 4 \cdot 6 \cdot 9 + 4 \cdot 6 \cdot 9 = 2322.$$

не являются конечной или начальной вершинами ни одной из соединительных дуг.

Члены с одинаковыми кортежами заменяются одним членом с суммарным отображением (численным значением). Многочлены перемножаются, т. е. определяются сочетания членов по одному из каждого многочлена, не образующие контура. Поиск контура может осуществляться по алгоритму, изложенному в работе [9]. Необходимо лишь для каждого сочетания последовательно записать в круглых скобках кортежи членов, образующих данное сочетание, после чего непосредственно применять поиск контура. Так, для членов 4 (0, 0, 9, 0, 3), 2 (8, 8, 5) и 9 (10, 7, 0, 0) обнаруживается контур в кортеже (0, 0, 9, 0, 3, 8, 8, 5, 10, 7, 0, 0), что легко проверить непосредственно по графу. Такое сочетание отбрасывается. Напротив, члены 8 (0, 0, 9, 0, 8), 6 (0, 0, 0) и 9 (10, 7, 0, 0) контура не образуют и произведение их входит слагаемым в характеристический полином всего графа. Так как все дуги приняты безреактивными с единичным весом, то полученное значение характеристического полинома равно числу прадеревьев графа.

В излагаемом методе можно перемножать не сразу все полиномы частей графа, а поэтапно. Вначале перемножаются некоторые полиномы, в результате вычисляется характеристический полином части графа, включающей вершины тех частей, полиномы которых перемножались; затем перемножается следующая группа полиномов и так далее, пока не будет получен характеристический полином всего графа.

При таком перемножении необходимо сохранять указанную выше топологическую информацию о соединительных дугах и путях внутри части графа, полином которой образуется в результате перемножения. Это нетрудно осуществить, используя кортежи.

Перемножим, например, полиномы $[P, = (\alpha)]$ и $[P, = (\beta)]$ частей α и β графа на рис. 28. Запишем произведение первых членов 24 (0, 0, 9, 0, 3, 0, 0, 0), где в круглых скобках, как и раньше, последовательно записаны кортежи сомножителей.

Очевидно частичный подграф, соответствующий кортежу, не является прадеревом части графа ($\alpha + \beta$), образованной соединением частей α и β , так как сохранены лишь те детали топологических образов, которые необходимы для обнаружения контуров.

Проверка устанавливает отсутствие контура в рассматриваемом частичном подграфе.

Извлечем теперь необходимую топологическую информацию о соединительных дугах частичного подграфа и о путях внутри последнего из конечных вершин соединительных дуг к начальным вершинам других соединительных дуг. Число 9, стоящее на третьем месте, указывает, что в частичном подграфе есть дуга из вершины 9 в вершину 3.

Поскольку вершина 9 не принадлежит части $(\alpha + \beta)$, то дуга является соединительной и информацию о ней сохраняем. Число 3 на пятом месте обозначает путь из вершины 5 в вершину 3. Но вершина 5 не является начальной для других соединительных дуг, что видно из рис. 25, и этот путь мы отбрасываем.

В результате рассматриваемый член произведения принимает вид $24 (0, 0, 9, 0, 0, 0, 0, 0)$. Произведение $14 (0, 0, 9, 0, 8, 8, 8, 5)$ вторых членов полиномов $[P, (\alpha)]$ и $[P, (\beta)]$, как легко убедиться, содержит контур в соответствующем частичном подграфе и отбрасывается. В результате упрощения произведения $8 (0, 0, 9, 0, 3, 8, 8, 5)$ первого $[P, (\alpha)]$ и второго $[P, (\beta)]$ членов получаем $8 (0, 0, 9, 0, 0, 0, 3, 0)$, так как кроме соединительной дуги в частичном подграфе есть путь из вершины 3 в вершину 7.

После проверки отсутствия контура и извлечения нужной топологической информации для всех членов произведения, а также приведения подобных с одинаковыми кортежами получаем выражение для характеристического полинома части $(\alpha + \beta)$: $[P, (\alpha + \beta)] = 120 (0, 0, 9, 0, 0, 0, 0, 0) + 18 (0, 0, 9, 0, 0, 0, 3, 0)$.

Перемножив $[P, (\alpha + \beta)]$ с $[P, (\gamma)]$, получим выражение для характеристического полинома всего графа, совпадающее с полученным ранее.

В рассмотренном примере все дуги для упрощения приняты безреактивными. Это значит, что в вес каждой дуги комплексная переменная входит сомножителем в нулевой степени, и ее присутствие не сказывается нигде на протяжении всего решения. В общем случае вес каждой дуги является рациональной функцией комплексной переменной p , а значит и каждый член характеристического полинома части графа — рациональная функция p .

Характеристический полином в буквенно-числовом виде можно получить, не приписывая некоторым (структурным) дугам веса, а обозначив их условными символами-буквами.

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ
КОМПОНЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ**

**1. Основы метода исключения неизвестных
для решения нелинейных
алгебраических уравнений**

Общая теория исключения [13, 48] применительно к произвольным системам алгебраических уравнений от n неизвестных \vec{l} позволяет найти, по крайней мере теоретически, все решения этой системы:

$$f_i(\vec{l}, \vec{a}) = 0, \quad i = \overline{0, m}, \quad (\text{III.1})$$

где \vec{a} — числовые коэффициенты схемных функций; \vec{l} — неизвестные.

Метод решения (III.1) основывается на последовательном исключении всех неизвестных путем построения систем результатов. Последние представляют собой отдельные системы уравнений с исключенными неизвестными: первая система результатов не содержит неизвестную l_1 , во второй системе исключены уже две неизвестные l_1 и l_2 и т. д.

Результантом двух уравнений $f_1(l) = \sum_{k=0}^{s_1} A_k l^k$ и $f_2(l) = \sum_{k=0}^{s_2} B_k l^k$ (s_1 и s_2 — максимальные степени неизвестных соответственно в первом и втором уравнениях; A_k и B_k — вещественные числа) называется определитель матрицы $s = (s_1 + s_2)$ -го порядка, составленной из коэффициентов A_k и B_k этих уравнений, имеющий следующий вид:

$$\begin{aligned}
 & \text{REZ}(f_1, f_2, l) = \\
 & = \det \left\| \begin{array}{cccccc}
 A_{s_1} & A_{s_1-1} & \dots & A_1 & A_0 & 0 & 0 \\
 0 & A_{s_1} & A_{s_1-1} & \dots & A_1 & A_0 & 0 \\
 0 & 0 & A_{s_1} & A_{s_1-1} & \dots & A_1 & A_0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 B_{s_2} & B_{s_2-1} & \dots & B_1 & B_0 & 0 & 0 \\
 0 & B_{s_2} & B_{s_2-1} & \dots & B_1 & B_0 & 0 \\
 0 & 0 & B_{s_2} & B_{s_2-1} & \dots & B_1 & B_0
 \end{array} \right\| \begin{array}{l}
 s_2 \text{ — строк} \\
 s_1 \text{ — строк}
 \end{array} \quad (\text{III.2})
 \end{aligned}$$

Доказано [13], что уравнения $f_1(l) = 0$ и $f_2(l) = 0$ тогда и только тогда обладают общим решением, т. е. имеют хотя бы один общий корень, когда их результатив равен нулю.

Пример 1. Уравнение $f_1(l) = l^2 + l - 2 = 0$ второй степени $s_1 = 2$ относительно неизвестной с корнями $l = \{-2, +1\}$ и уравнение $f_2(l) = l^3 + l^2 - 4l - 4 = 0$, $s_2 = 3$ с корнями $l = \{+2, -1, -2\}$ имеют один общий корень $l = -2$. Согласно виду (III.2) запишем результатив

$$REZ(f_1, f_2, l) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение $f_3(l) = l^2 - l - 2 = 0$, $s_3 = 2$ с корнями $l = \{2, -1\}$ не имеет общих корней с уравнением $f_1(l) = 0$. Их результатив

$$REZ(f_1, f_3, l) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -8$$

не равен нулю.

Если коэффициенты A_k, B_k при неизвестной l_1 в уравнениях выражаются через другие неизвестные l_2, l_3, \dots, l_n , то аналитическая запись результатива $REZ(f_1, f_2, l_1) = 0$ представляет собой уравнение с исключенной неизвестной l_1 , зависящее от неизвестных l_2, l_3, \dots, l_n .

Пример 2. Пусть $f_1(l_1, l_2, l_3) = l_1^2 l_2^2 - l_1 l_3 - 1 = 0$, $f_2(l_1, l_2, l_3) = l_1 l_3^2 - l_1 l_2 - 2 = 0$.

Степень первого уравнения относительно неизвестной l_1 будет $s_1 = 2$, а второго — $s_2 = 1$. Поэтому результатив имеет порядок $s = s_1 + s_2 = 3$ и представляет уравнение от неизвестных l_2 и l_3 :

$$REZ(f_1, f_2, l_1) = \begin{vmatrix} l_2^2 & -l_3 & 1 \\ l_3^2 - l_2 & -2 & 0 \\ 0 & l_3^2 - l_2 & -2 \end{vmatrix} = \\ = -l_3^4 - 2l_3^3 + 2l_3^2 l_2 + 2l_3 l_2 - 5l_2^2 = 0.$$

Построение систем результативов для систем нелинейных алгебраических уравнений с n неизвестными продемон-

стрируем на системе компонентных уравнений, стараясь сохранить общность правила для систем уравнений более высокой степени относительно исключаемой неизвестной.

Представим систему (III.1) в виде системы уравнений от неизвестной l_1 :

$$l_1 A_{j1}(\vec{l}_{2,n}) - A_{j0}(\vec{l}_{2,n}, \vec{a}) = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (\text{III.3})$$

где $\vec{l}_{2,n} = \{l_2, l_3, \dots, l_n\}$; $A_{j1}(\vec{l}_{2,n})$ — коэффициент при неизвестной l_1 ; $A_{j0}(\vec{l}_{2,n}, \vec{a})$ — свободный член.

Из этой системы выберем только те $m' \leq m$ уравнений, для которых $A_{j1}(\vec{l}_{2,n}) \neq 0$. Для них образуем линейные комбинации с неопределенными коэффициентами $(\vec{u}) = (u_1, u_{m'})$ и $(\vec{v}) = (v_1, v_{m'})$ и просуммируем их. В результате получим два уравнения:

$$\begin{aligned} f_1(l_1, \vec{u}) &= l_1 \sum_{j=1}^{m'} A_{j1} u_j + \sum_{j=1}^{m'} A_{j0} u_j = 0; \\ f_2(l_1, \vec{v}) &= l_1 \sum_{j=1}^{m'} A_{j1} v_j + \sum_{j=1}^{m'} A_{j0} v_j = 0, \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

где $A_{j1} = A_{j1}(\vec{l}_{2,n})$; $A_{j0} = A_{j0}(\vec{l}_{2,n}, \vec{a})$; $s_1 = s_2 = 1$; $s = s_1 + s_2$.

При этом уравнение $f_1(l_1, \vec{u}) = 0$ не зависит от (\vec{v}) , а уравнение $f_2(l_1, \vec{v}) = 0$ не зависит от (\vec{u}) . Вследствие этого и результат $REZ(f_1, f_2, l_1)$ для системы (III.4), построенный относительно неизвестной l_1 ,

$$REZ(f_1, f_2, l_1) = \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{m'} A_{j1} u_j & \sum_{j=1}^{m'} A_{j0} u_j \\ \sum_{j=1}^{m'} A_{j1} v_j & \sum_{j=1}^{m'} A_{j0} v_j \end{vmatrix} \quad (\text{III.5})$$

не зависит от значений (\vec{u}) и (\vec{v}) . Он должен быть равным нулю, если система (III.4) имеет решение.

Результат (III.5) представляет собой уравнение, не содержащее неизвестную l_1 , и выражается через оставшиеся неизвестные $\vec{l}_{2,n} = \{l_2, l_3, \dots, l_n\}$, коэффициенты (\vec{a}) исходной системы и неопределенные коэффициенты (\vec{u}) и (\vec{v}) .

Таким образом, произведен первый шаг исключения $h = 1$ — исключена одна неизвестная l_1 .

Представим результат (III.5) в виде разложения по произведениям степеней u_j и v_j :

$$REZ(f_1, f_2, l_1) = \sum_{i=1}^{\Theta_h} (\overline{u, v})_i D_{i,h} = 0, \quad (\text{III.6})$$

где $(\overline{u, v})_i$ — i -й набор в общем случае из s_2 произведений степеней u_j и s_1 произведений степеней v_j , $j \in (\overline{1, m'})$; $D_{i,h} = D_{i,h}(\vec{l}_{2,n}, \vec{a})$ — коэффициенты в разложении результата; Θ_h — общее число слагаемых при h -м шаге исключения $\Theta \ll \ll \Theta_{h+1}$.

В силу независимости результата от выбора линейных множителей u_j и v_j и равенства его нулю уравнение (III.6) заменим эквивалентной системой соотношений

$$D_{i,h} = D_{i,1} = D_{i,1}(\vec{l}_{2,n}, \vec{a}) = 0, \quad i = \overline{1, \Theta_h}, \quad h = 1, \quad (\text{III.7})$$

которая называется системой результатов для уравнений (III.4) и представляет собой систему уравнений от неизвестных $(\vec{l}_{2,n})$ с исключенной неизвестной l_1 и не содержит множителей u_j и v_j .

Применение к системе (III.7) приема, аналогичного описанному выше, для исключения, например, неизвестной l_2 (второй шаг исключения $h = 2$), дает новую систему результатов, зависящую от оставшихся неисключенными неизвестных $(\vec{l}_{3,n})$. Если в начале исключения не были использованы $(m - m')$ компонентных уравнений, как не содержащих l_1 , то те из них, которые содержат неизвестную l_2 , прибавляются к этой второй системе результатов, а те, которые не содержат неизвестных l_1 и l_2 , но содержат неизвестную l_3 , прибавятся к $h = 3$ системе результатов и т. д.

Применение описанной процедуры исключения к получаемой на каждом шаге системе результатов даст на $h = n$ -м шаге систему результатов, зависящую только от числовых коэффициентов (\vec{a}) исходной системы компонентных уравнений. Если все результаты этой системы равны нулю, то это значит, что положительно решен вопрос о существовании решения системы (III.1) и система совместна. Если же хотя бы один из результатов не равен нулю, решение системы (III.1) отсутствует, т. е. она несовместна.

Таким образом, произведя исключение всех неизвестных еще до определения их значений, получаем информацию о совместности исходной системы нелинейных алгебраических уравнений.

При положительном ответе о существовании решения переходим ко второму этапу — поиску всех решений системы (III.1). Для этого из $(n - 1)$ -й системы результатов, представляющей полиномы s_i -й степени относительно неизвестной l_n , определяются все ее возможные значения $\{l_n\}$, которые по очереди подставляются в $n - 2$ систему результатов. После подстановки значения l_n эта $n - 2$ система результатов также будет системой полиномов некоторой s_j -й степени относительно неизвестной l_{n-1} . Продолжая определять корни полиномов и подставляя их в очередную систему результатов, получим все возможные решения системы компонентных уравнений. Такова в общих чертах процедура метода исключения для получения значений неизвестных в совместных системах нелинейных алгебраических уравнений с несколькими неизвестными. Основываясь на физических представлениях о способах реализации синтезируемой цепи, т. е. на предполагаемом элементарном базисе, будем отбирать только те решения, которые определяются неотрицательными вещественными значениями неизвестных $\vec{l}_{1,n}$.

Наличие хотя бы одного такого решения является критерием реализуемости заданных схемных функций исходной схемой с данной топологией и элементарным базисом. Отсутствие решения свидетельствует о том, что схема с данной структурой ни при каких значениях параметров элементов не сможет реализовать заданные схемные функции.

Описанная процедура получения всех решений справедлива для совместных определенных и переопределенных систем компонентных уравнений. В отличие от линейных систем переопределенность системы нелинейных алгебраических уравнений не предполагает при их совместности наличия линейно-зависимых уравнений, поскольку системы нелинейных алгебраических уравнений могут удовлетворяться при некоторой совокупности решений. Поэтому чем более переопределена система (III.1), тем более жесткие условия налагаются на существование решения.

При недоопределенных системах, когда фактически число t уравнений меньше числа n неизвестных, на $h = t$ -м шаге исключения будут получаться только тождественно равные нулю результаты, что автоматически прекращает про-

цесс исключения. Тождественность нулю результатов m -й системы, зависящей от неисключенных $\vec{l}_{m+1,n}$ неизвестных, свидетельствует о том, что этим неизвестным могут быть присвоены произвольные значения, а система имеет бесконечное множество решений.

Поскольку m -я система результатов нулевая, зависимостями, связывающими неисключенные неизвестные, являются уравнения $h = m - 1$ системы результатов, зависящей от $n - m + 1$ неизвестных. Произвольные значения присваиваются любым $n - m$ из $n - m + 1$ неизвестных. Какое из этих произвольных значений неизвестных необходимо им присвоить, чтобы получить желаемые значения остальных $\vec{l}_{1,m}$ неизвестных, решим путем анализа полученных зависимостей.

Пример 3. Пусть дана система из двух $m = 2$ уравнений

$$f_1(\vec{l}_{1,3}) = l_1 l_2 - 2l_3 = 0, \quad f_2(\vec{l}_{1,3}) = l_2 l_3 + l_1 l_3 - 3 = 0$$

с $n = 3$ тремя неизвестными $l_1, l_2, l_3, n > m$. Ищем решение при условии $l_1, l_2, l_3 > 0$. Первая и единственная система результатов, состоящая из одного уравнения, имеет вид

$$REZ(f_1, f_2, l_1) = \begin{vmatrix} l_2 & -2l_3 \\ l_3 & l_2 l_3 - 3 \end{vmatrix} = l_2^2 l_3 - 3l_2 + 2l_3^2 = 0.$$

Следующие системы результатов нулевые. Определяем из этого уравнения значение

$$l_2 = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8l_3^3}}{2l_3}.$$

Условие положительности и вещественности для l_2 следующие: $8l_3^3 \leq 9$ или $l_3 \leq \sim 1,04$. Для конкретных положительных значений неизвестной l_3 , например $l_3 = 1$, получим два решения $\{l_1, l_2, l_3\} = \{1, 2, 1\}$ и $\{l_1, l_2, l_3\} = \{2, 1, 1\}$ и для $l_3 = 0,5$ тоже два решения $\{l_1, l_2, l_3\} = \{0, 1717; 5,83; 0,5\}$ и $\{l_1, l_2, l_3\} = \{5,83; 0,1717; 0,5\}$. Очевидно, что и для всех значений $0 < l_3 \leq 1,04$ можно найти соответствующие значения l_1 и l_2 .

2. Особенности применения метода исключения неизвестных для решения компонентных уравнений

Трудоёмкость использования метода исключения в изложенном виде состоит в том, что с каждым новым шагом исключения возрастает число Θ_h уравнений в системах результатов, а также растёт порядок s результатов. Однако анализ зависимостей (III.6) и (III.7) показывает, что громоздкость и сложность процедуры исключения можно значительно уменьшить в частности сокращением числа Θ_h просматриваемых слагаемых в каждой системе результатов.

Действительно, разберём подробнее выражение (III.5). Каждый ненулевой элемент результата (III.5) является суммой из $m' \leq m$ слагаемых, а значит результат можно представить как определитель суммы m' матриц A_j , $j = 1, m'$ со структурой результата и составленных из коэффициентов j -го уравнения из системы (III.3). Причем s_2 их строк умножены на u_j , а s_1 остальных строк умножены на v_j .

Тогда результат (III.5) запишем в виде

$$REZ(f_1, f_2, l_1) = \det \left(\sum_{j=1}^{m'} A_j \right),$$

где матрица A_j для общего случая имеет вид

$$A_j = \begin{vmatrix} u_j A_{j,s1} & u_j A_{j,s1-1} & \dots & u_j A_{j,1} & u_j A_{j,0} & 0 & 0 \\ 0 & u_j A_{j,s1} & u_j A_{j,s1-1} & \dots & u_j A_{j,1} & u_j A_{j,0} & 0 \\ 0 & 0 & u_j A_{j,s1} & u_j A_{j,s1-1} & \dots & u_j A_{j,1} & u_j A_{j,0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_j A_{j,s1} & v_j A_{j,s1-1} & \dots & v_j A_{j,1} & v_j A_{j,0} & 0 & 0 \\ 0 & v_j A_{j,s1} & v_j A_{j,s1-1} & \dots & v_j A_{j,1} & v_j A_{j,0} & 0 \\ 0 & 0 & v_j A_{j,s1} & v_j A_{j,s1-1} & \dots & v_j A_{j,1} & v_j A_{j,0} \end{vmatrix},$$

$$j = \overline{1, \Theta_h},$$

а при $s = 2$

$$A_j = \begin{vmatrix} u_j A_{j1} & u_j A_{j0} \\ v_j A_{j1} & v_j A_{j0} \end{vmatrix}, \quad j = \overline{1, m'}.$$

Учитывая, что определитель суммы матриц A_j равен сумме определителей Δ_k всех возможных матриц A_k порядка s , составленных из всех Ω возможных комбинаций по $1, 2, \dots$

..., s строк, взятых из исходных матриц A_j , записываем

$$REZ(f_1, f_2, l_1) = \det \left(\sum_{j=1}^{m'} A_j \right) = \sum_{k=1}^{\Omega} \Delta_k, \quad (III.8)$$

где $\Omega = (m')^s$ — число всех возможных определителей Δ_k .

Учитывая наличие множителей u_j и v_j в строках матриц A_j и соответственно матриц A_k и вынося эти множители из строк, получаем

$$\bar{\Delta}_k = \underbrace{u_i u_j \dots u_p}_{s_2\text{-смножителей}} \underbrace{v_r v_s \dots v_t}_{s_1\text{-смножителей}} \Delta_k = (\overline{u, v})_k \Delta_k, \quad (III.9)$$

где $i, j, \dots, p, r, s, \dots, t$ — индексы, указывающие на принадлежность элементов строк матрицы A_k , $k = \overline{1, \Omega}$ к коэффициентам $i, j, \dots, t \in \overline{1, m'}$ уравнения в системе из m' уравнений.

Указанные наборы индексов при множителях u_k, v_k , записанных строго в порядке их принадлежности строкам матриц A_k от 1 до s -й, для всех Ω слагаемых будут образовывать список всех возможных упорядоченных выборок из m' элементов по s с повторениями [25]. Заметим, что это, в принципе, позволяет строить определитель Δ_k просто на основе уравнений системы, не прибегая к линейным преобразованиям, а только оперируя выборками и коэффициентами исходных уравнений.

В зависимости от набора индексов в множителях $(\overline{u, v})_k$ в выражении (III.9) все определители суммы (III.8) можно разбить на подгруппы. Можно выделить подгруппу определителей с одинаковыми множителями $(\overline{u, v})_k$. Индексы этих множителей в каждой из подгрупп $(\overline{u})_k$ и $(\overline{v})_k$ образуют перестановки чисел. Например, слагаемые $\bar{\Delta}_i = u_1 u_2 u_3 v_5 v_6 v_7 \Delta_i$ и $\bar{\Delta}_j = u_2 u_1 u_3 v_6 v_7 v_5 \Delta_j$ имеют одинаковые множители $(\overline{u, v})_i = (\overline{u, v})_j = (u, v)_j = (u_1 u_2 u_3 v_5 v_6 v_7)$, но определители Δ_i и Δ_j в общем случае различны в силу специфики структуры результата. С другой стороны, при разных множителях $(\overline{u, v})_k$ коэффициентами при них могут быть равные с точностью до знака определители Δ_k , отличающиеся лишь порядком строк. Во всех этих определителях индексы при коэффициентах u_j и v_j , записанных на j -й и $(s_2 + j)$ -й позициях в произведении $(\overline{u, v})_k$, будут меняться местами всеми возмож-

ными способами. Например, в слагаемых

$$\bar{\Delta}_i = u_1 u_2 u_3 v_4 v_5 v_6 \Delta_i;$$

$$\bar{\Delta}_j = u_4 u_2 u_3 v_1 v_5 v_6 \Delta_j;$$

$$\bar{\Delta}_s = u_4 u_5 u_3 v_1 v_2 v_6 \Delta_s;$$

$$\bar{\Delta}_t = u_1 u_5 u_6 v_4 v_2 v_3 \Delta_t,$$

и т. д.

коэффициенты $\Delta_i, \Delta_j, \Delta_s, \Delta_t$ равны по модулю, а $\Delta_i, \Delta_s, \Delta_t$ равны и по знаку. Кроме того, среди определителей $\bar{\Delta}_k$ найдется большое число составленных из одинаковых строк и поэтому тождественно равных нулю и не нуждающихся в вычислении. К таким определителям относятся те, у которых индексы i -го сомножителя в произведении $(\bar{u})_k$ равны индексу i -го сомножителя в произведении $(\bar{v})_k$, или, другими словами, в выборке i -й и $(s2 + i)$ -й индексы совпадают. Например, при $m' = 2, s = 4, s1 = s2 = 2$ из всех $\Omega = (m')^s = 16$ определителей Δ_k , образующих согласно выражению (III.8) результат, двенадцать тождественно равны нулю, как имеющие одинаковые строки, а остальные четыре равны друг другу, т. е. достаточно вычислить лишь один определитель.

Таким образом, общее число Ω' определителей, которое нужно сформировать и вычислить для получения системы результатов (III.7), можно значительно сократить по сравнению с числом Ω , а значит и уменьшить избыточность системы (III.7) за счет исключения одинаковых уравнений. Для этого необходимо специальным образом генерировать список всех полезных выборок либо отдельные группы выборок, что более эффективно. Например, большую группу выборок, приводящих к формированию отдельного уравнения в системе результатов, образуют выборки, являющиеся s -выборками из Θ_h элементов по 2 с повторениями одного индекса на позициях от 1 до 2 и второго на позициях от $s2 + 1$ до $s1 + s2$, что равносильно генерации сочетаний из Θ_h элементов по 2 с повторениями. Их число равно $\frac{1}{2} \Theta (\Theta - 1)$. Соответствующие этим выборкам определители являются результатами, построенными для каждой отдельной пары уравнений, входящих в отдельные системы, получаемые при исключениях неизвестных. Назовем такие результаты попарными в отличие от других, которые назовем комбинационными. Номера ин-

дексов у них состоят не менее чем из трех разных чисел. Например, в множителе $u_1 u_1 u_1 u_3 u_3 v_2 v_2 v_1 = (\overline{u, v})_k$, при $s_1 = s_2 = 5$, индексы образованы тремя числами 1, 2, 3. Для генерации таких «непарных» и других выборок, если в этом возникает необходимость, также может быть разработана эффективная процедура. Подобные задачи уже решались [19, 20] и останавливаться на них не будем, так как это является предметом комбинаторики. Главное, что уже известно, какие выборки нужно получить, чтобы система (III.7) не была избыточной. Ввиду полилинейности компонентных уравнений первая система результатов, полученная на первом шаге исключения, будет состоять только из парных результатов. В следующих системах результатов из-за возрастания степеней уравнений и соответственно порядков результатов, кроме парных определителей, могут быть и комбинационные. Итак, парные определители имеются в любой системе результатов, и если на каждом шаге ограничиться только их формированием, то вместо полной системы результатов получим «усеченную», являющуюся ее подмножеством. Оказывается, что по характеру этого подмножества можно оценить характер полной системы результатов. Действительно, если не удовлетворилась усеченная система результатов, т. е. выявилась несовместность уравнений, то это же тем более будет и для полной системы результатов. Если же усеченная система результатов имеет решения, то вполне возможно, что не все они будут справедливы для исходной системы, так как не были учтены все ограничения. Область решений, полученных для усеченной системы, часто оказывается значительно шире области истинных решений исходной системы, которая может быть и пустым множеством. Подстановка корней, найденных из усеченных систем результатов, во все исходные уравнения системы позволяет выявить множество пригодных, т. е. истинных корней системы. При этом процесс построения всех результатов — значительно более трудоемкая и громоздкая операция, чем проверка пригодности всех полученных для усеченных систем результатов решений. Таким образом, построение усеченных систем результатов дает возможность найти решение исходной системы уравнений более быстрым путем.

Теперь постараемся определить, до каких минимальных размеров можно сокращать системы результатов. Условием доведения процесса исключения до конца является получение на $n - 1$ шаге хотя бы одного уравнения, не

равного тождественно нулю относительно неизвестной. Для этого достаточно на всех промежуточных шагах исключения получать в системах результатов независимые уравнения. Если взять из всех $m' \leq m$ исходных уравнений только n независимых и на каждом h -м шаге исключения строить систему результатов, состоящую из $n - h$ уравнений, являющихся попарными результатами (например, берется первое уравнение с каждым из остальных), то на последнем $n - 1$ шаге получим одно уравнение от n -й неизвестной l_n . Действительно, в такой системе результатов каждый результат от другого будет отличаться хотя бы одним иным, взятым для его построения, уравнением, т. е. в каждом результате будет использован иной набор коэффициентов исходной системы. Это, а также отсутствие в исходной системе уравнений, являющихся линейной комбинацией остальных, будет приводить к разным по аналитическому представлению уравнениям в системах результатов. И только определенные числовые соотношения коэффициентов и значений неизвестных могут привести эти уравнения к равным или зависимым.

Одинаковые или отличающиеся линейным коэффициентом уравнения исходной системы компонентных уравнений отсеются при построении первой системы результатов, так как построенные для них попарные результаты будут тождественно равны нулю. Здесь уже может быть поставлен вопрос не только о возможности усечения систем результатов, но и об «усечении» переопределенной системы исходных уравнений. Конечно, выбор n уравнений из $m > n$, исходных для построения минимальных систем результатов, не может быть произвольным, так как среди случайно выбранных n уравнений могут оказаться одинаковые уравнения, либо уравнения, содержащие неполный набор неизвестных из системы. Поэтому каждое взятое в систему $k < n$ уравнение должно хотя бы на единицу дополнять список неизвестных, уже содержащихся в системе, если их число не было равно n . В любом случае выбранные $n' < m$ уравнений должны охватывать весь набор неизвестных исходной системы. Может статься, что следует взять даже несколько большее число, чем число неизвестных, уравнений $n' > n$ при $n < m$ уравнений, чтобы не нарушился процесс исключения неизвестных. Компонентные уравнения, как указывалось, относятся к хорошо связанным уравнениям, т. е. когда почти каждое уравнение зависит от всех неизвестных. Поэтому остается только веро-

ятность попадания в усеченную систему одинаковых уравнений из исходной системы. Но и это легко устраняется при построении первой системы результатов. Действительно, ее построение на базе всех исходных уравнений следует производить до тех пор, пока в первой системе результатов не будет получено $n - 1$ уравнение.

Усечение систем результатов до минимума исключает возможность составления n -й системы результатов, так как она всегда будет тождественно равна нулю для одного исходного уравнения, полученного в $n - 1$ системе результатов. При этом, конечно, придется считать доведение процесса исключения до $h = n - 1$ шага критерием совместности исходной системы уравнений. Истинность или ложность такого утверждения устанавливается только после проведения обратного хода, т. е. определения всех решений для усеченной системы и проверки их пригодности путем подстановки во все m исходные уравнения.

Итак показано, как построить минимальную усеченную систему результатов. Положительным свойством усеченных систем является при необходимости возможность их расширения. Для этого достаточно взять иной набор исходных уравнений или увеличить число уравнений в системе результатов путем построения комбинационных результатов.

В минимальных усеченных системах результатов за весь процесс исключения нужно построить $\frac{n(n-1)}{2}$ попарных результатов. Это не простая задача, если к тому же учесть, что все элементы определителей $REZ(f_k, f_l, l_i)$ являются аналитическими выражениями от многих переменных, а порядки определителей сильно растут в зависимости от числа неизвестных в системе и номера h шага исключения.

Проведем оценку максимальной и минимальной величин порядков определителей, которые нужно раскрыть при построении систем результатов. Предположим, что последовательность исключения неизвестных не влияет на сложность хода исключения, хотя практически это не всегда справедливо: выгоднее исключить неизвестные в такой очередности, какая соответствует номеру неизвестной, имеющей во всех уравнениях минимальную из наивысших степеней среди всех неизвестных. Тогда результаты будут иметь меньший порядок.

Элементы определителя представляют суммы одночленов, являющихся произведениями числовых коэффициентов

\vec{a} на $q \leq n$ буквенных символов l_j . При этом вначале слагаемые элементов определителей содержат неполные наборы по q_h из n_h неисключенных неизвестных. После раскрытия определителей систем результатов за счет перемножения элементов происходит увеличение степеней неизвестных в каждом слагаемом или же относительное удлинение кортежа — числа перемножаемых в отдельном слагаемом неисключенных неизвестных до $q_h \leq n_h$, где n_h — число еще не исключенных неизвестных. Таким образом, на первом шаге при $h = 1$ степень δ_h неизвестных в слагаемом может увеличиться до $\delta_1 \leq 2$, а длина кортежа — до $q_1 \leq 2$ ($q_0 - 1$) $\leq n_1$, где q_0 — начальная длина кортежа. При исключении второй неизвестной, считая, что порядок определителя равен $\sigma_2 \leq 2\delta_1$, степень неизвестной в уравнении может возрасти в $2\sigma_1$ раз и станет равной $\delta_2 \leq 2\delta_1\sigma_1$ и т. д. Поэтому, если предположить, что общие множители в слагаемых отсутствуют, а при приведении подобных члены с максимальными значениями степеней неизвестных не уничтожаются, то максимальная степень любой неисключенной неизвестной в системе результатов h -го шага будет определяться величиной

$$\delta_h = 2^{2^h - 1}.$$

Это, например, для компонентных уравнений при номере шага исключения $h = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$, составит $\delta_h = 1, 2, 8, 128, 22768\dots$; $\sigma_h = 2, 4, 16, 256, 45536\dots$. Если предположить, что за счет домножения, т. е. увеличения степеней неисключенных неизвестных в каждом слагаемом, появляются общие множители в виде кортежей из некоторых неисключенных неизвестных и по условию задачи можно предполагать, что эти неизвестные не могут принимать нулевых значений $l_j \neq 0$, то всегда можно произвести сокращение на такие общие множители. Поэтому, если на всех шагах исключения производится сокращение на общие множители, то степень уравнений от исключаемой неизвестной может быть всегда равной единице, а порядок результатов — двум. Такой разброс в границах оценок получен за счет противоположных предположений о наличии сокращающихся множителей.

В действительности сокращающиеся множители появляются, но не одинаково для всех результатов. Бывают и уничтожающиеся члены с максимальными значениями степеней неизвестных, но не обязательно для очередных

исключаемых неизвестных, что в принципе требовало бы изменения очередности исключения неизвестных с целью уменьшения порядков результатов. Так же сильно, как отсутствие сокращающихся множителей влияет на рост порядков результатов, наличие сокращающихся множителей уменьшает эти порядки. Например, если только на одном третьем шаге исключения появляется общий множитель $(l_3 l_4 l_5)^2$, то уже получим порядки $\sigma_h = 2, 4, 12, 140$, т. е. почти в два раза меньшие максимальных значения порядков результатов. Для компонентных уравнений из-за достаточно сильной связи уравнений между собой реально появление общих множителей уже на втором шаге исключения. Практическое решение примеров для $n = 5$ показало, что порядок результатов не превышал восьми на последнем $n = h = 5$ шаге исключения, тогда как оценка сверху дает значение $\sigma_5 = 45536 \gg 8$.

Но даже и для таких ($\sigma_h \leq 20$) сравнительно невысоких порядков определителей из-за большого числа слагаемых в определителе ограничения по необходимому объему памяти ЭВМ и времени раскрытия остаются очень существенными. Это объясняется тем, что для раскрытия аналитических определителей используется формула записи его значения через элементы, т. е.

$$\Delta = \sum_{l, j, k, \dots, r, s \in \overline{(1, s)}}^{s!} (-1)^\gamma a_{1l} a_{2j} a_{3k} \dots a_{ij} \dots a_{sr}, \quad (\text{III.10})$$

где a_{ij} — элементы определителя; γ — число инверсий в перестановках, образуемых вторыми индексами элементов; s — порядок определителя.

Этот алгоритм, даже реализованный с учетом специфики структуры результатов, когда производится генерация только $P \ll s!$ ненулевых слагаемых определителя в выражении (III.10), все равно требует больших массивов памяти ЭВМ для записи всех найденных слагаемых. Число P слагаемых в результатах значительно меньше величины $s!$ и не будет превышать значения

$$P < (s_{\min} + 1)^{s_{\max}} (s_{\min} - 1)!,$$

где $s_{\min} = \min \{s_1, s_2\}$; $s_{\max} = \max \{s_1, s_2\}$.

Но так как каждое слагаемое в формуле (III.10) — это произведение нескольких многочленов a_{ij} , то общее число одночленов, которые следует держать в памяти ЭВМ, с тем

чтобы рассортировать их по степеням исключаемой неизвестной, оказывается весьма существенным. Это и является главным ограничением к использованию метода.

3. Алгоритм решения компонентных уравнений

Изложенная выше процедура решения компонентных уравнений содержит следующие основные этапы: выбор уравнений из начальной системы компонентных уравнений в качестве исходных для построения усеченных систем результатов (если исходная система переопределена); построение систем результатов и, в случае выявленной совместности исходной системы, поиск всех решений системы, отвечающих требованиям реализуемости цепи; проверка пригодности полученных решений для исходной системы компонентных уравнений. Основанный на этой процедуре общий алгоритм решения компонентных уравнений состоит из следующих основных шагов.

1. Преобразование системы компонентных уравнений в уравнения от одной из неизвестных; переход на шаг 2, если исключение неизвестных еще не окончено, а если окончено, то в случае совместности системы переход на шаг 6; в случае несовместности — на шаг 10.

2. Определение общего множителя в уравнениях и сокращение на него.

3. Определение степени уравнения относительно исключаемой неизвестной.

4. Построение попарных результатов для всех уравнений системы результатов.

5. Раскрытие результата, переход на шаг 4, если еще не все результаты системы построены, если все — то переход на шаг 1.

6. Определение корней k -го уравнения h системы результатов и формирование массива корней.

7. Проверка корней на пригодность всем уравнениям h -й системы результатов; переход на шаг 8, если хотя бы один корень удовлетворяет всем уравнениям системы, в противном случае переход на шаг 7 для проверки пригодности следующего из корней.

8. Поочередная подстановка пригодных корней h -й системы в $h - 1$ систему результатов; при $h \neq 1$ переход на шаг 6; при $h = 1$ вывод решения и переход на шаг 8 для подстановки следующего из пригодных корней $h + 1$

системы в h -ю для получения следующего решения; если все решения просмотрены, то переход на шаг 9.

9. Конец решения системы компонентных уравнений. Система совместна.

10. Система не совместна.

Ход решения по такому алгоритму для каждой системы результатов тесно связан с числом не равных тождественно нулю уравнений и зависит от числа уравнений, содержащих исключаемую на данном шаге очередную неизвестную. В принципе возможны случаи исчезновения неисключенных неизвестных из уравнений за счет сокращения на общий множитель или взаимного уничтожения при приведении подобных. Поэтому алгоритмом должны быть предусмотрены различные разветвления, приводящие к продолжению нормального хода исключения неизвестных. Для этого вводятся различные параметры, характеризующие систему уравнений: AA — число уравнений в системе, зависящих от исключаемой неизвестной; A — число уравнений, не зависящих от исключаемой неизвестной; PQ — число уравнений в системе результатов; R — число результатов, формируемых на каждом шаге; HH — число исключенных неизвестных; ii — номер шага исключения; PP — число пропущенных неизвестных; FF — номер первой пропущенной неизвестной при нарушении нормального порядка исключения неизвестных.

Построение попарных результатов для первой системы результатов, учитывая возможное наличие среди исходных уравнений одинаковых, производится до тех пор, пока не будут получены, если это возможно, не менее $n - 1$ уравнение, не равное нулю тождественно. Таким образом, одинаковые уравнения из исходной системы компонентных уравнений не будут использованы для построения системы результатов.

При построении минимально усеченных систем следует задать число $n - 1$ уравнений в первой системе результатов и далее формировать результаты для первого уравнения с каждым из остальных. Тогда в каждой последующей системе результатов будет формироваться на одно уравнение меньше, чем в предыдущей. В этом случае вид систем результатов будет зависеть от порядка записи уравнений в исходной системе. Реализация же такой процедуры очень проста.

Если на каком-то h -м шаге или в исходной системе окажется, что не все уравнения системы содержат исключаемые

мую неизвестную, то формируются попарные результаты для AA зависящих уравнений. Остальные A уравнения просто переписываются в следующую систему результатов. В этом случае в каждой системе будет обеспечено необходимое число $PQ \geq (n - h)$ уравнений. Если на каком-то h -м шаге окажется, что ни одно из уравнений системы результатов не содержит исключаемую неизвестную l_h , т. е. произошло самоисключение неизвестной $AA = 0$, то считаем, что исходная система содержит зависимые неизвестные, в частности неизвестная l_h каким-то образом зависит от исключенных неизвестных $\vec{l}_{1,h-1}$. Процесс исключения неизвестных продолжается, т. е. пропустив исключение неизвестной l_h , переходим к исключению неизвестной l_{h+1} . Если на каком-то h -м, $h \neq n$ шаге окажется, что все PQ уравнений системы результатов тождественно равны нулю, то считаем, что исходная система недоопределена. А все неисключенные неизвестные $\vec{l}_{h,n}$ могут принимать произвольные значения. Если из всех уравнений в системе на любом шаге исключения только одно уравнение зависит от очередной исключаемой неизвестной l_h , т. е. $AA = 1$, то производится исключение следующей по очереди неизвестной l_{h+1} , а неизвестная l_h остается до конца исключения в системе, т. е. нарушается нормальный порядок исключения неизвестных. Когда все очередные неизвестные будут исключены, производится исключение пропущенных неизвестных начиная с первой FF пропущенной неизвестной до тех пор, пока все неизвестные будут исключены в удобном для расчетов порядке. Как уже указывалось, получение систем результатов при исключении неизвестных основывается на построении только попарных результатов, а их раскрытие осуществляется по алгоритму (III.10). При этом генерируются лишь все возможные ненулевые члены суммы. Необходимость приведения подобных относительно степеней исключаемой неизвестной в каждом результате системы результатов заставляет производить поэлементное перемножение всех сомножителей в произведении для всех слагаемых результата. Это требует большого объема памяти, если число слагаемых в элементах результата велико. Для сокращения требуемого объема памяти и числа операций умножение элементов определителя производится попарно, т. е. умножается a_{jk} на $a_{j+1,k}$, с немедленным приведением подобных в этом произведении. Только после этого производится умножение на следующий

множитель $a_{j+2,r}$ слагаемого в формуле (III.10) и опять приводятся подобные. Суммирование каждого найденного таким путем члена определителя с ранее найденными производится одновременно с приведением подобных в каждой частной сумме. Видимо и здесь еще могут быть получены более эффективные алгоритмы.

В минимальных усеченных системах числовые определители не подсчитываются. В неусеченных системах числовые определители, получаемые на n -м шаге исключения, должны вычисляться с большой точностью, так как от их значения зависит дальнейшее решение, т. е. достоверность вывода о совместности или несовместности исходных уравнений. Поэтому на $n - 1$ шаге исключения прежде всего определяется одинаковость уравнений в системе. Это заменяет раскрытие определителей: для одинаковых уравнений результат не подсчитывается, поскольку он всегда равен нулю, а сравнение двух уравнений между собой является более простой операцией, чем раскрытие числового определителя.

В случае совместности исходной системы осуществляется переход к нахождению всех решений системы. В противном случае решение принимается в зависимости от информации, полученной на этапе, когда исключение неизвестных прекратилось.

Остановимся более подробно на получении совокупности эквивалентных схем S_i , отличающихся только значениями параметров элементов. Итак, процесс исключения неизвестных при прямом ходе на $n - 1$ шаге для усеченных систем дает одно уравнение, а для неусеченных — систему из $PQ = \Theta_{n-1}$ уравнений от одной неизвестной l_n . Степень такого уравнения обозначим s_0 . Найдем $s \leq s_0$ разных корней этого уравнения, отвечающих условиям $l_n \neq 0$ или $l_n > 0$. Если $n - 1$ система результатов содержала $\Theta_{n-1} > 1$ уравнений, то для проверки подставим по очереди все s найденных корней во все $\Theta_{n-1} - 1$ остальных уравнений. Если какой-либо из s корней l_n не удовлетворил хотя бы одно из этих уравнений, то он исключается из списка корней в группе $\{l_n\}$. Хотя бы один из этих корней l_n вследствие совместности системы должен быть пригодным. Все содержащиеся в списке пригодные корни по очереди подставляются в $n - 2$ систему результатов. После подстановки эта система также будет представлять систему уравнений от одной неизвестной l_{n-1} . Найдем из любого ее уравнения все значения $\{l_{n-1}\}$ для неизвестной l_{n-1} .

Конечно, проще их находить из уравнения более низкой степени. Найденные значения $\{\bar{l}_{n-1}\}$ подставим во все, за исключением использованного для нахождения корней, уравнения этой системы с целью определения их пригодности. Непригодные корни l_{n-1} исключим из списка $\{\bar{l}_{n-1}\}$. Здесь может оказаться, что ни один из корней l_{n-1} не будет пригодным. Тогда следует взять другой из пригодных корней в группе $\{\bar{l}_n\}$, исключив предыдущий из списка, и произвести с ним определение новой группы $\{\bar{l}_{n-1}\}$ корней для неизвестной l_{n-1} . Вследствие совместности системы хотя бы один корень $\{\bar{l}_n\}$, хотя бы с одним корнем списка $\{\bar{l}_{n-1}\}$ должны удовлетворять $n - 2$ -ю систему результатов. Теперь список корней $\{\bar{l}_n, \bar{l}_{n-1}\}$ содержит корни $\{\bar{l}_n\}, \{\bar{l}_{n-1}\}$. Первые из пригодных корней групп $\{\bar{l}_{n-1}\}, \{\bar{l}_n\}$ списка $\{\bar{l}_n, \bar{l}_{n-1}\}$ подставляются в $n - 3$ систему результатов, после чего она будет представлять систему уравнений от одной неизвестной l_{n-2} . Поступаем, как и в случае $n - 2$ системы. Получим уточненный список $\{\bar{l}_n, \bar{l}_{n-1}, \bar{l}_{n-2}\}$. Переходим к $n - 4$ системе результатов, подставив в нее первые значения пригодных корней из групп $\{\bar{l}_n\}, \{\bar{l}_{n-1}\}$ и $\{\bar{l}_{n-2}\}$ общего списка корней $\{\bar{l}_n, \bar{l}_{n-1}, \bar{l}_{n-2}\}$. Получим список $\{\bar{l}_n, \bar{l}_{n-1}, \bar{l}_{n-2}, \bar{l}_{n-3}\}$ и так далее, пока не получим в списке корней группу $\{\bar{l}_2\}$. Подставив найденные первые из каждой группы пригодные корни в уравнение исходной системы, получим первое значение для l_1 . Если оно удовлетворит все уравнения системы, то это означает, что найдено первое истинное решение $\{\bar{l}_{1,n}\}$ исходной системы уравнений. Если это решение удовлетворит не все уравнения исходной системы, а только те, которые взяты для построения усеченных систем результатов, то это решение является ложным. Если же оказалось, что не удовлетворяются даже уравнения усеченной системы, то следует это значение для l_1 отбросить, взять следующее значение для l_2 , а если такового нет, то следующее значение для l_3 и так далее, и вновь искать новые значения для l_2 и l_1 . Вследствие совместности усеченной системы хотя бы одно решение будет найдено и его следует проверить на истинность путем подстановки во все исходные уравнения, если не все они были использованы для построения систем результатов. После того, как найдено одно решение, переход к поиску другого производится путем замены использованного зна-

чения l_2 на следующее, а если такового нет, то берется следующее значение из списка $\{\bar{l}_3\}$ и так далее и определяются новые значения l_2 и l_1 . Таким образом будут просмотрены все возможные наборы значений $\{\bar{l}_{1,n}\}$, из которых отберутся

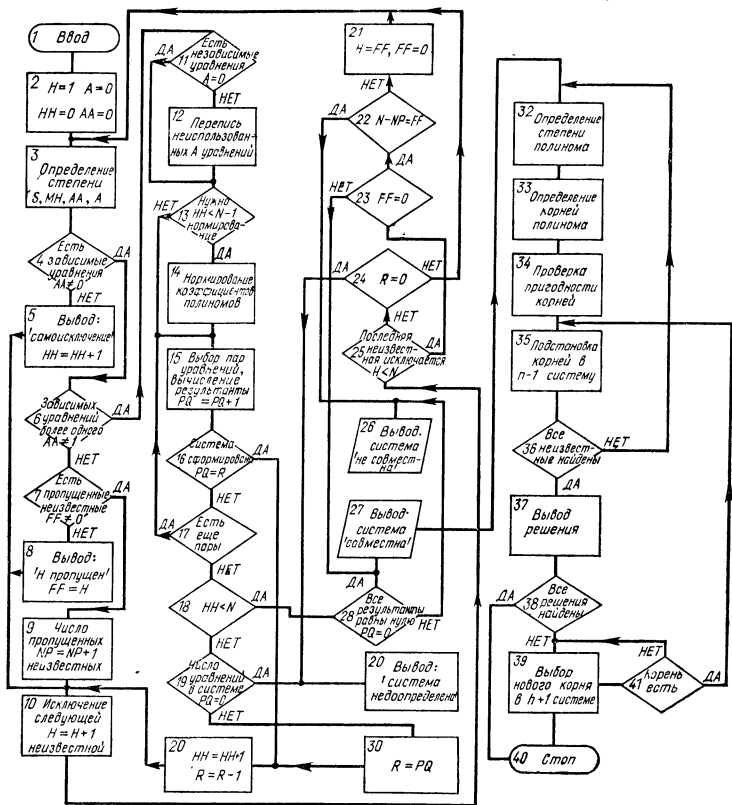


Рис. 29

только являющиеся истинными решения системы. Критерием конца решения служит просмотр решений с последним из пригодных корней группы $\{\bar{l}_n\}$, которая определяется один раз из $n - 1$ системы результатов. Каждое из истинных решений системы компонентных уравнений дает одну из искомых схем из множества эквивалентных по топологии и элементному базису.

Решение компонентных уравнений использует следующие известные математические задачи: определение корней

многочленов, вычисление значений многочленов, вычисление числовых определителей на n -м шаге исключения, а также оригинальные комбинаторные и логические задачи по формированию результатов и раскрытию определителей, элементы которых являются многочленами от многих неизвестных в произвольных степенях.

Использование числовых процедур при поиске корней полиномов, а также при определении значений функций и раскрытии числовых определителей в качестве подпрограмм

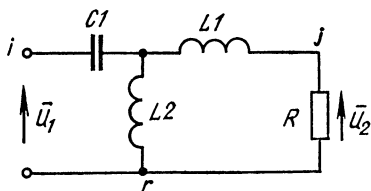


Рис. 30

для решения компонентных уравнений не приводит к принципиальным затруднениям. Однако практическая их реализация на ЭВМ осложнена ограничением ЭВМ на точность представления чисел и проведения арифметических операций над ними. Это может привести к осечкам, таким, на-

пример, как отсутствие пригодного решения для совместной системы уравнений. Для исключения подобных ситуаций следует применять более эффективные и точные подпрограммы поиска корней многочленов и определения значений функций полиномов. Если для совместной системы, как было определено из прямого хода, не удалось найти пригодного решения при обратном ходе, то следует увеличить точность расчета корней и значений функции.

Блок-схема алгоритма решения компонентных уравнений представлена на рис. 29.

Рассмотрим пример параметрической реализации простой схемы, приведенной на рис. 30, с помощью изложенного выше алгоритма.

Пример 4. Определить нормированные значения $C1 = l_1$, $\Gamma_1 = l_2$, $\Gamma_2 = l_3$, $g = l_4$ параметров элементов схемы рис. 30 при следующей передаточной функции по напряжению:

$$T(p) = \frac{\bar{u}_2}{u_1} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} = \frac{1}{0,6p + 1 + 0,7p^{-1} + 0,6p^{-2}}.$$

Система компонентных уравнений для заданной схемы и функции содержит пять ($m = 5$) уравнений:

$$f_1 = l_1 l_2 - 1 = 0;$$

$$f_2 = l_1 l_4 - 0,6 = 0;$$

$$\begin{aligned}
 f_3 &= l_1 l_2 - 1 = 0; \\
 f_4 &= l_3 l_4 + l_2 l_4 - 0,7 = 0; \\
 f_5 &= l_2 l_3 - 0,6 = 0.
 \end{aligned}$$

Так как число неизвестных параметров $n = 4$, а $m = 5$, то создается впечатление, что система переопределена. Однако это не так. Здесь первое и третье уравнения одинаковы. Первое уравнение отображает коэффициент при p^0 в числителе функции, а равное ему третье уравнение — аналогичный коэффициент в знаменателе. Известно, что для функций передачи по напряжению такая ситуация вполне возможна, ввиду того что числитель такой функции всегда является некоторой частью знаменателя [7]. Поэтому одно из этих уравнений в нашем случае лишнее и тогда система является определенной. Если бы в числителе этой функции стоял некоторый отличный от единицы числовой коэффициент K , то первое и третье уравнения отличались бы множителем, равным этому коэффициенту. Чтобы не усложнять алгоритм проверкой пропорциональности уравнений, отбраковка таких «лишних» уравнений производится при построении первой системы результатов. Результаты для таких пропорциональных уравнений, как и для одинаковых, равны нулю тождественно, как содержащие пропорциональные строки, и не дают уравнения в систему результатов, а раскрытие определителей второго порядка — очень простая операция. Составляем первую систему результатов относительно неизвестной l_1 , $AA(l_1) = 3$. Четвертое и пятое уравнения не зависят от l_1 , $A(l_1) = 2$, поэтому они переписываются в первую систему результатов без изменения, три оставшиеся уравнения зависят от l_1 , но дают лишь один, не равный тождественно нулю результат для первого и второго уравнений, поскольку первое и третье уравнения одинаковы:

$$\begin{aligned}
 f_{1,1} = REZ(f_1, f_2, l_1) &= \begin{vmatrix} l_2 & -1 \\ l_4 & -0,6 \end{vmatrix} = -0,6l_2 + l_4 = 0; \\
 f_{2,1} = REZ(f_1, f_3, l_1) &= \begin{vmatrix} l_2 & -1 \\ l_2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \equiv 0.
 \end{aligned}$$

Первое $f_{1,1} = 0$, не равное тождественно нулю уравнение, записывается в первую систему результатов. Итак, первая система результатов содержит три уравнения, а это, так как $n - 1 = 3$, достаточно для продолжения исключения

остальных неизвестных $\bar{l}_{2,4}$:

$$f_{1,I} = l_3 l_4 + l_2 l_4 - 0,7 = 0;$$

$$f_{2,I} = l_2 l_3 - 0,6 = 0;$$

$$f_{3,I} = -0,6l_2 + l_4 = 0.$$

Все уравнения этой системы содержат неизвестную l_2 в первой степени $AA(l_2) = 3$, поэтому строим $R = n - 2 = 2$ результата второго порядка:

$$f_{1,II} = REZ(f_{1,I}, f_{2,I}, l_2) = \begin{vmatrix} l_4 & l_3 l_4 - 0,7 \\ l_3 & -0,6 \end{vmatrix} = 0;$$

$$f_{2,II} = REZ(f_{1,I}, f_{3,I}, l_2) = \begin{vmatrix} l_4 & l_3 l_4 - 0,7 \\ -0,6 & l_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Получим вторую систему результатов

$$f_{1,II} = -l_3^2 l_4 + 0,7l_3 - 0,6l_4 = 0;$$

$$f_{2,II} = l_4^2 + l_3 l_4 0,6 - 0,42 = 0,$$

первое уравнение которой имеет степень $s1 = 2$, второе — степень $s2 = 1$ относительно третьей очередной исключаемой неизвестной l_3 . Третья система результатов содержит один результат третьего порядка $s = s1 + s2 = 3$:

$$f_{1,III} = REZ(f_{1,II}, f_{2,II}, l_3) = \\ = \begin{vmatrix} l_4 & 0,7 & -0,6l_4 \\ 0,6l_4 & l_4^2 - 0,42 & 0 \\ 0 & 0,6l_4 & l_4^2 - 0,42 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда единственное уравнение третьей системы результатов после сокращения на общий множитель l_4 имеет вид $f_{1,III} = l_4^2 = -0,204 = 0$. Найдем его корни: $\{l_4\} = \{-0,4516; +0,4516\}$. Отбрасывая отрицательный корень, имеем $\{l_4\} = 0,4516$. Подставляя это значение во вторую систему результатов, находим значения $\{\bar{l}_3\} = \{0,7982; 0,7538\}$ из первого уравнения. Только значение $l_3 = 0,7982$ является корнем второго уравнения этой системы. Подставляя найденные значения l_3 и l_4 в последнее уравнение первой системы результатов, получим $l_2 = 0,7519$. Это значение с ранее найденными l_3 и l_4 удовлетворяет все уравнения этой системы результатов, а найденное по l_2, l_3, l_4 значение $l_1 = 1,33$ из последнего уравнения исходной системы удовлетворяет все уравнения этой системы.

Итак, система компонентных уравнений имеет в рамках выбранной структуры единственное решение $\{1,33; 0,7519; 0,7982; 0,4516\}$. Схема, представленная на рис. 30, реализует заданную передаточную функцию с нормированными значениями параметров компонентов:

$$C_1 = 1,33; L_1 = \frac{1}{0,7519}, L_2 = \frac{1}{0,7982}; R = \frac{1}{0,4516}.$$

Пример 5. Требуется реализовать функцию

$$z_{12}(p) = \frac{\bar{u}_1}{\bar{i}_2} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta} = \frac{1}{0,925p^0 + 0,8p^{-1}}$$

с помощью цепи, изображенной на рис. 30, при условии положительности значений параметров элементов цепи, $l_1, l_2, l_3, l_4 > 0$. Система компонентных уравнений в этом случае недоопределена, $n > m$, $m = 3$, $n = 4$:

$$f_1 = l_1 l_2 - 1 = 0;$$

$$f_2 = l_1 l_2 l_4 + l_1 l_3 l_4 - 0,925 = 0;$$

$$f_3 = l_1 l_2 l_3 - 0,8 = 0.$$

Первая система результатов

$$f_{1,1} = REZ(f_1, f_2, l_1) = \begin{vmatrix} l_2 & -1 \\ l_2 l_4 - l_3 l_4 & -0,925 \end{vmatrix} = \\ = -0,925 l_2 + l_2 l_4 + l_3 l_4 = 0;$$

$$f_{2,1} = REZ(f_1, f_2, l_1) = \begin{vmatrix} l_2 & -1 \\ l_2 l_3 & -0,8 \end{vmatrix} = -0,8 l_2 + l_2 l_3 = 0,$$

или после сокращения на $l_2 f_{2,1} = -0,8 + l_3 = 0$. В этой системе только одно уравнение зависит от l_2 , поэтому $AA(l_2) = 1$. В этом случае по алгоритму необходимо перейти к исключению следующей неизвестной l_3 , оставив неизвестную l_2 в уравнениях. В этой системе относительно l_3 параметр $AA(l_3) = 2$. Исключаем l_3 , изменив порядок исключения:

$$f_{1,11} = REZ(f_{1,1}, f_{2,1}, l_3) = \\ = \begin{vmatrix} l_4 & -0,925 l_2 + l_2 l_4 \\ 1 & -0,8 \end{vmatrix} = -0,8 l_4 + 0,925 l_2 - l_2 l_4 = 0.$$

Вторая система результатов состоит из этого одного уравнения. На следующем $h = m = 3$ шаге процесс исключения прекращается, так как система компонентных уравнений недоопределена. Для поиска решения в последнем уравнении $f_{1,11} = 0$, зависящем от неизвестных l_2 и l_4 , необходимо задаться значением одной из неизвестных l_2 или l_4 . Запишем это уравнение в форме $-0,8 l_4 + (0,925 -$

— l_4) $l_2 = 0$. Из его анализа видно, что при требовании $l_1, l_2, l_3, l_4 > 0$ неизвестная $l_4 < 0,925$. В этом случае $l_2 > 0$. Пусть $l_4 = 0,6$; $0 < 0,6 < 0,929$, тогда $l_2 = 1,48$; $l_3 = 0,8$; $l_1 = 0,675$. Найденные значения неизвестных являются решением исходной системы. Если положить $l_4 = 0,8$; $0 < 0,8 < 0,925$, то получим $l_2 = 5,12$; $l_3 = 0,8$; $l_1 = 0,1953$, что также является решением системы. Вообще любое значение l_4 , выбранное в интервале $0 < l_4 < 0,925$, позволяет получить значения неизвестных l_1 , l_2 и l_3 , являющиеся решением системы. Среди этих решений будет и полученное в примере 4.

Пр и м е р 6. Пусть для реализации заданы две функции цепи

$$z_{\text{вх}}(p) = \frac{\bar{u}_1}{\bar{i}_1} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \frac{0,6p + 1,0p^0 + 0,7p^{-1} + 0,6p^{-2}}{0,925p^0 - 0,8p^{-1}};$$

$$T(p) = \frac{\bar{u}_2}{\bar{u}_1} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} = \frac{1,0p^0}{0,6p + 1,0p^0 + 0,7p^{-1} + 0,6p^{-2}}$$

при условии, что по-прежнему реализуется схема, изображенная на рис. 30. Система компонентных уравнений должна быть составлена с учетом двух функций $T(p)$ и $z_{\text{вх}}(p)$. Так как числитель $z_{\text{вх}}(p)$ совпадает с точностью до постоянного множителя со знаменателем $T(p)$, то в систему компонентных уравнений из примера 4 включим еще только два уравнения, составленных для знаменателя $z_{\text{вх}}(p)$. Пусть они записаны в конце системы. Общее число $m = 7$ уравнений в системе оказывается больше числа $n = 4$ неизвестных, система получилась переопределенной:

$$\begin{aligned} f_1 &= l_1 l_2 - 1 = 0; \\ f_2 &= l_1 l_4 - 0,6 = 0; \\ f_3 &= l_1 l_2 - 1 = 0; \\ f_4 &= l_3 l_4 + l_2 l_4 - 0,7 = 0; \\ f_5 &= l_2 l_3 - 0,6 = 0; \\ f_6 &= l_1 l_3 l_4 + l_1 l_2 l_4 - 0,925 = 0; \\ f_7 &= l_1 l_2 l_3 - 0,8 = 0. \end{aligned}$$

Использование для решения этой системы методики минимального усечения даст ход решения, аналогичный описанному в примере 4. Тогда, подставляя полученное решение $\{l_1, l_2, l_3, l_4\} = \{1,33; 0,7519; 0,7982; 0,4516\}$ в неиспользованные при решении уравнения $f_3 = 0$; $f_6 = 0$ и $f_7 = 0$,

убеждаемся в его пригодности и, следовательно, в совместности исходной системы уравнений. Это также служит подтверждением пригодности выбранной схемы для реализации заданных функций при найденных значениях параметров ее элементов.

Для примера покажем, что если бы коэффициент при p^0 в знаменателе $z_{вх}(p)$ был равным 0,9, то при подстановке найденного выше решения не удовлетворилось бы шестое и только шестое уравнение системы. Действительно, мы бы получили $f_6 = 0,025 \neq 0$. А это значит, что такая система уравнений несовместна.

Отметим, что по данному алгоритму порядок записи уравнений в системе существенно сказывается на ходе исключения неизвестных при применении методики минимального усечения систем результатов. Пусть уравнения в исходной системе будут записаны в следующем порядке:

$$f_6 = l_1 l_3 l_4 + l_1 l_2 l_4 - 0,925 = 0;$$

$$f_7 = l_1 l_2 l_3 - 0,8 = 0;$$

$$f_1 = l_1 l_2 - 1 = 0;$$

$$f_2 = l_1 l_4 - 0,6 = 0;$$

$$f_3 = l_1 l_2 - 1 = 0;$$

$$f_4 = l_3 l_4 + l_2 l_4 - 0,7 = 0;$$

$$f_5 = l_2 l_3 - 0,6 = 0.$$

Первая система результатов имеет вид

$$f_{1,I} = f_4 = l_3 l_4 + l_2 l_4 - 0,7 = 0;$$

$$f_{2,I} = f_5 = l_2 l_3 - 0,6 = 0;$$

$$f_{3,I} = REZ(f_6, f_7, l_1) = \begin{vmatrix} l_3 l_4 + l_2 l_4 & -0,925 \\ l_2 l_3 & -0,8 \end{vmatrix} =$$

$$= -0,8 l_3 l_4 - 0,8 l_2 l_4 + 0,925 l_2 l_3 = 0.$$

Здесь $AA(l_2) = 3$, поэтому вторая система запишется в виде

$$f_{1,II} = REZ(f_{1,I}, f_{2,I}, l_2) = \begin{vmatrix} l_4 & -0,7 + l_3 l_4 \\ l_3 & -0,6 \end{vmatrix} =$$

$$= -0,6 l_4 + 0,7 l_3 - l_3^2 l_4 = 0;$$

$$f_{2,II} = REZ(f_{1,I}, f_{3,I}, l_2) = \begin{vmatrix} l_4 & -0,7 + l_3 l_4 \\ -0,8 l_4 + 0,925 l_3 & -0,8 l_3 l_4 \end{vmatrix} =$$

$$= -0,56 l_4 + 0,6475 l_3 - 0,925 l_3^2 l_4 = 0.$$

Третья система результатов должна по алгоритму иметь одно уравнение, так как $AA(l_3) = 2$:

$$f_{1,III} = REZ(f_{1,II}, f_{2,II}, l_3) =$$

$$= \begin{vmatrix} -l_4 & 0,7 & -0,6l_4 & 0 \\ 0 & -l_4 & 0,7 & -0,6l_4 \\ -0,925l_4 & 0,6475 & -0,56l_4 & 0 \\ 0 & -0,925l_4 & 0,6475 & -0,56l_4 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Оказывается, что оно тождественно равно нулю и поэтому процесс исключения по алгоритму автоматически останавливается для выяснения причины: либо система недоопределена, либо в качестве исходных для построения усеченных систем результатов взяты пропорциональные уравнения. Анализ показал, что в данном примере причиной является скрытая пропорциональность шестого и четвертого уравнений, а также седьмого и пятого уравнений исходной системы компонентных уравнений. Коэффициентом пропорциональности в этих уравнениях является множитель, равный по значению неизвестной l_1 . Предусмотреть заранее в общем случае в алгоритме проверку всех исходных уравнений на такой тип пропорциональности нецелесообразно в связи с необходимостью осуществления полного перебора на выявление пропорциональности каждому элементу и к тому же при отсутствии значений этих элементов. Поэтому согласно алгоритму следует произвести расширение минимально усеченной системы. Расширение минимально усеченной системы можно провести разными способами. Наиболее разумно ввести в системы результатов уравнения, не использованные ранее. В примере это уравнения $f_1 = 0$; $f_2 = 0$; $f_3 = 0$. Введем в первую систему результатов уравнение

$$f_{4,I} = REZ(f_1, f_2, l_1) = \begin{vmatrix} l_2 & -1 \\ l_3 & -0,6 \end{vmatrix} = -0,6l_2 + l_4 = 0$$

и далее с его участием дополним остальные системы результатов:

$$f_{3,II} = REZ(f_{1,I}, f_{4,I}, l_2) = \begin{vmatrix} l_4 & -0,7 + l_3l_4 \\ -0,6 & l_4 \end{vmatrix} =$$

$$= l_4^2 - 0,42 + 0,6l_3l_4 = 0;$$

$$f_{2,III} = REZ(f_{1,II}, f_{3,II}, l_3) = \begin{vmatrix} -l_4 & 0,7 & -0,6l_4 \\ -0,6l_4 & l_4^2 - 0,42 & 0 \\ 0 & 0,6l_4 & l_4^2 - 0,42 \end{vmatrix} = \\ = -l_4^5 - 0,204l_4^3 = 0,$$

или после сокращения на l_4^3 $f_{2,III} = -l_4^2 + 0,204 = 0$. Теперь после расширения $n - 1$ система результатов содержит неравное тождественно нулю уравнение $f_{2,III} = 0$. Определяем из него значения неизвестной $l_4 > 0$: $\{l_4\} = \{0,4516\}$. Подставляя это значение в уравнение $f_{1,II} = 0$, найдем $\{l_3\} = \{0,7981; 0,7538\}$. Проверяем пригодность значений $\{l_3\}$ для уравнений $f_{2,II} = 0$ и $f_{3,II} = 0$. Значение $l_3 = 0,7538$ для $f_{3,II} = 0$ не пригодно. Исключаем его. Из уравнения $f_{1,I} = 0$ найдем $l_2 = 0,7519$; значения $\{l_2, l_3, l_4\} = \{0,7519; 0,7982; 0,4516\}$ удовлетворяют уравнения $f_{2,I} = 0$, $f_{3,I} = 0$, и $f_{4,I} = 0$. Из уравнения $f_6 = 0$, подставив $l_2, l_3, l_4 = \{0,7519; 0,7982; 0,4516\}$, найдем $l_1 = 1,330$. Подставив решение $\{\bar{l}_{1,4}\} = \{1,33; 0,7519; 0,7982; 0,4516\}$ во все уравнения исходной системы $f_i = 0$, видим, что оно пригодно и система совместна, а полученное решение не зависит от порядка записи уравнений, хотя ход решения отличается.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ КОМПОНЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Принципы решения компонентных уравнений

Рассмотрим возможные пути решения систем компонентных уравнений, ориентированные на применение числовых методов.

Итак, пусть требуется найти решение системы

$$f_i(\vec{l}) - a_i = 0, \quad i = \overline{0, m} \quad (\text{IV.1})$$

при ограничениях $l_j \geq 0, j = \overline{1, n}^1$.

Задачу (IV.1) легко свести к следующей задаче нелинейного программирования:

$$\Phi(\vec{l}) \rightarrow \min_{\vec{l}} \quad (\text{IV.2})$$

при ограничениях $f_i(\vec{l}) - a_i \leq 0, i = \overline{0, m}; l_j \geq 0, j = \overline{1, n}$,

где целевая функция $\Phi(\vec{l}) = -\sum_{i=0}^m f_i(\vec{l})$.

Убедиться в эквивалентности решений задач (IV.1) и (IV.2) просто. Для этого достаточно вспомнить, что для изучаемого класса схем при выполнении условия $l_j \geq 0, j = \overline{1, n}$ все функции $f_i(\vec{l}), i = \overline{0, m}$ неотрицательны. Следовательно, целевая функция $\Phi(\vec{l})$ будет минимальна, когда каждая из функций $f_i(\vec{l})$ будет максимальной. Но по ограничительному условию $f_i(\vec{l}) - a_i \leq 0$ это может быть, если $f_i(\vec{l}) = a_i, i = \overline{0, m}$. Таким образом, минимизация $\Phi(\vec{l})$ в задаче (IV.2) автоматически приводит к выполнению равенств $f_i(\vec{l}) =$

¹ Для простоты изложения разнообразные условия схемной реализуемости не рассматриваем.

$= a_i, i = \overline{0, m}$, т. е. к решению системы компонентных уравнений ¹. Нетрудно проверить, что для решения задачи (IV.2) можно применить многие из методов, рассмотренных в работе [39]. Однако здесь возможны осечки. Дело в том, что функции $\Phi(\vec{l})$ и $f_i(\vec{l})$ не выпуклы, а следовательно, целевая функция и допустимое множество решений не выпуклы. С помощью описанной замены переменной можно перейти к выпуклому множеству (см. главу I параграф 4). Однако при этом функция $\Phi(\vec{l})$ становится вогнутой ² и ее минимизация сопряжена с попаданием в локальные минимумы. Для нас же при решении задачи (IV.2) принципиально необходимо получение глобального минимума, так как в этом и только в этом случае мы можем говорить, что система компонентных уравнений решена.

В связи с изложенным заманчивой представляется идея поиска такой замены переменной l_j , при которой множество допустимых решений и целевая функция стали бы выпуклыми. Функция $\Phi(\vec{l})$ не обязательно должна иметь структуру, используемую в задаче (IV.2). Важно лишь, чтобы между задачей минимизации и задачей решения системы компонентных уравнений сохранялось необходимое соответствие. В плане реализации упомянутой идеи можно пока говорить о следующем негативном результате. Если функция $\Phi(\vec{l})$ и замена переменной таковы, что $\Phi(\vec{l}')$ — непрерывно дифференцируема на всем множестве допустимых решений, и если решение системы компонентных уравнений не единственно, то предполагаемый вариант решения задачи нереализуем.

Задачу (IV.1) можно свести к простейшей задаче безусловной минимизации:

$$\min_{\vec{l}} \Phi(\vec{l}) = \min_{\vec{l}} \sum_{i=0}^m [f_i(\vec{l}) - a_i]^2. \quad (\text{IV.3})$$

¹ Здесь и в последующем, если не делается оговорок, предполагается, что решение системы (IV.1) существует.

² $\Phi(\vec{l}') = - \sum_{i=0}^m f_i(\vec{l}')$, а после замены переменной $l_j = e^{l'_j}$ каждая из функций $f_i(\vec{l}')$ и, следовательно, и их сумма становятся выпуклыми. Таким образом, $\Phi(\vec{l}') = - \sum_{i=0}^m f_i(\vec{l}')$ — вогнутая функция.

При записи задачи (IV.3) предполагается, что произведена замена переменной $\vec{l} = \vec{l}'$ и новая переменная вновь обозначена \vec{l} . Замена здесь произведена с единственной целью исключить условия физической реализуемости $l_j \geq 0, j = \overline{1, n}$. Это можно выполнить различными способами. Например, $l_j = e^{l'_j}$, либо $l_j = (l'_j)^2$. Тогда при изменении l'_j на всей оси $(-\infty, \infty)$, l_j будет изменяться на полуоси $[0, \infty)$. Таким образом, в задаче (IV.3) $\vec{l}' \in E^n$, где E^n — n -мерное евклидово пространство.

Глобальное оптимальное решение задачи (IV.3) есть вектор \vec{l}^* , при котором $\Phi(\vec{l}^*) = 0$. Очевидно это возможно тогда и только тогда, если $f_i(\vec{l}^*) = a_i, i = \overline{0, m}$ и, таким образом, \vec{l}^* — решение системы компонентных уравнений. Для решения задачи (IV.3) могут быть использованы разнообразные методы безусловной оптимизации. Принципы построения этих методов и многие из них рассмотрены в работах [27, 39]. Такие методы проще процедур нелинейного программирования, что и послужило причиной их достаточно широкого практического использования в рассматриваемых задачах. Между тем последнему варианту решения присущи те же принципиальные недостатки, что и решению задачи (IV.2). Невыпуклость функции $\Phi(\vec{l})$ в задаче (IV.3) (в этом можно убедиться прямой проверкой на выпуклость) не позволяет гарантировать достижения глобального оптимума при произвольной точке начального приближения. Эти же гарантии отсутствовали и при решении задачи (IV.2)¹.

Еще один путь решения системы (IV.2) связан с применением прямых методов решения систем нелинейных уравнений [38]². Это возможно, если условия физической реализуемости исключить, введя подходящую замену перемен-

¹ Многие авторы считают методы оптимизации едва ли не самыми эффективными для решения нелинейных уравнений. Так, Зангвилл [22] пишет: «...нелинейное программирование является, возможно, самым мощным методом решения системы уравнений».

² В обширной литературе по теории и численным методам решения нелинейных уравнений системам рассматриваемого класса не уделялось внимания. В работе [38], едва ли не самой полной монографии по обсуждаемому вопросу, сказано: «Проблема «решения» m уравнений с n неизвестными при $m > n$ является предметом теории аппроксимации, а при $m < n$, по-видимому, не представляет большого интереса».

ной, о чем уже говорилось выше. К сожалению, гарантии решения и в данном случае отсутствуют, а успех во многом зависит от выбора точки начального приближения.

Методы решения системы уравнений можно заметно усилить, вводя вспомогательный параметр [16, 38]. Идея метода продолжения по параметру состоит в следующем. Вместо системы (IV.1), в которой уже произведена замена переменной и таким образом УФР учтены, рассматривается система

$$P_i(\vec{l}, t) = f_i(\vec{l}) - ta_i - (1 - t)f_i(\vec{l}^0) = 0, \quad i = \overline{0, m}, \quad (\text{IV.4})$$

в которой использован параметр t , принимающий значение из интервала $[0, 1]$. При $t = 1$ система (IV.4) имеет вид

$$P_i(\vec{l}, 0) = f_i(\vec{l}) - a_i = 0, \quad i = \overline{0, m}$$

и, следовательно, равна исходной. При $t = 0$ рассматриваемая система приводится к виду

$$P_i(\vec{l}, 0) = f_i(\vec{l}) - f_i(\vec{l}^0), \quad i = \overline{0, m}.$$

Решение последней системы очевидно и равно \vec{l}^0 .

Таким образом, известно решение при одном граничном значении параметра $t = 0$, а необходимо найти при другом $t = 1$. Строится последовательность решений для заданных возрастающих значений $t > 0$, т. е. $0 < t_1 < t_2, \dots, < t_k = 1$. В соответствии с данными работы [38] поиск решения системы (IV.4) при $t = t_k$ из точки начального приближения \vec{l}^{k-1} (\vec{l}^{k-1} — решение системы (IV.4) при $t = t_{k-1}$) можно проводить итерационными методами. Условия сходимости рассматриваемого метода изучены достаточно подробно [38]. Однако эффективно применить их к рассматриваемой задаче не удастся из-за недоопределенности системы, в связи с чем не удастся выбрать и оценить качество начального приближения и прогнозировать последующие итерации.

Следовательно, во всех изложенных методах встречаются принципиальные затруднения в ситуациях, когда глобальный минимум (в оптимизационных задачах) либо решение системы (IV.1) (при использовании прямых методов решения нелинейных уравнений) не найдены, а априори существование решения неизвестно. Здесь возможны два заключения: либо система компонентных уравнений несовместна, т. е. не существует ее вещественных решений, либо принято неудачное начальное приближение.

Если принято ложное заключение, то в одном случае мы ошибочно отказываемся от выбранной топологии, которая, возможно, обладает определенными достоинствами, в другом — все попытки подобрать удачную точку начального приближения приведут лишь к неоправданным затратам сил и средств.

2. Метод продолжения по параметру для решения компонентных уравнений

Излагаемый ниже метод приближенного решения компонентных уравнений представляет собой комбинацию методов продолжения по параметру и безусловной оптимизации. Его отличительными чертами являются регламентированный выбор стартовой точки и гарантия построения решения с любой наперед заданной степенью точности, если решение существует. Последнее обстоятельство при дальнейшем изложении постоянно предполагается. Точность решения будем оценивать по значению функции $\Phi(\vec{l}) = \sum_{i=0}^m [f_i(\vec{l}) - a_i]^2$ и говорить, что решение системы (IV.1)

получено с точностью ε , если $\Phi(\vec{l}^*) \leq \varepsilon$. На первом этапе изложения метода система (IV.1) рассматривается без учета условий физической реализуемости и в предположении, что $q_i = q$, $i = \overline{0, m}$. Исследуем подробно систему (IV.4). Пусть $\vec{l}^0 = 0$, тогда $f_i(\vec{l}^0) = 0$, $i = \overline{0, m}$ и система примет вид

$$P(\vec{l}, t) = f_i(\vec{l}) - ta_i = 0, \quad i = \overline{0, m}. \quad (IV.5)$$

Система (IV.5) имеет решение при любом значении параметра t , так как решение системы \vec{l}^* при $t = 1$ по принятому соглашению существует. Действительно, функции $f_i(\vec{l})$ имеют одинаковые степени однородности, равные q , и, следовательно, при $\vec{l}^k = \vec{l}^* t^{1/q}$ получим

$$f_i(\vec{l}^k) = f_i(\vec{l}^* t^{1/q}) = t_k f_i(\vec{l}^*) = t_k a_i.$$

Таким образом, \vec{l}^k является решением системы (IV.5) при любом t_k . При $t = 0$ обсуждаемая система имеет тривиальное решение $\vec{l}^0 = 0$, которое является следствием однородности

функций $f_i(\vec{l})$. Оно, однако, не может быть выбрано в качестве начального приближения, так как при $\vec{l}^0 = 0$ равны нулю все производные $\frac{\partial f_i(\vec{l})}{\partial l_j}$. Это не позволяет при использовании итерационных процедур «выйти» из точки \vec{l}^0 . Следовательно, точка \vec{l}^0 не должна быть нулевым вектором. Будем решать систему (IV.4), минимизируя функцию

$$\Phi(\vec{l}, t) = \sum_{i=0}^m [f_i(\vec{l}) - ta_i - (1-t)f_i(\vec{l}^0)]^2 \quad (\text{IV.6})$$

с точностью до ε при возрастающих вплоть до 1 значениях параметра t . Такие минимумы назовем квазиминимумами. Выберем точку начального приближения так, чтобы при $t_0 \Phi(\vec{l}^0, t_0) \leq \varepsilon$, и покажем, что при определенных условиях выполняется неравенство $\Phi(\vec{l}^k, t_k) \leq \varepsilon$, $t_k \in [0, 1]$. Для этого рассмотрим изменение функции $\Phi(\vec{l}, t)$ на кривой $\vec{l}^k = \vec{l}^0 (1 - t_k)^{1/q} + t_k^{1/q} \vec{l}^*$, крайние точки которой соответствуют $\vec{l}^k = \vec{l}^0$ при $t_k = 0$ и $\vec{l}^k = \vec{l}^*$ при $t_k = 1$, т. е. кривая соединяет точку начального приближения и точку решения. Подставив \vec{l}^k в выражение (IV.6), получим

$$\Phi(\vec{l}^k, t_k) = \sum_{i=0}^m \{f_i[\vec{l}^0 (1 - t_k)^{1/q} + \vec{l}^* t_k^{1/q}] - t_k a_i - (1 - t_k) f_i(\vec{l}^0)\}^2. \quad (\text{IV.7})$$

Примем $l_1^0 = l_2^0 = \dots = l_n^0 = l^0$. С учетом конструкции функций $f_i(\vec{l})$ найдем

$$f_i[\vec{l}^0 (1 - t_k)^{1/q} + \vec{l}^* t_k^{1/q}] = (1 - t_k) f_i(\vec{l}^0) + t_k a_i + h_i(\vec{l}^*, \vec{l}^0, t_k), \quad i = \overline{0, m}, \quad (\text{IV.8})$$

где h_i представляет собой сумму произведений, каждое из которых включает множитель l_j^0 . Следовательно формулу (IV.8) можно переписать в виде

$$f_i[\vec{l}^0 (1 - t_k)^{1/q} + \vec{l}^* t_k^{1/q}] = (1 - t_k) f_i(\vec{l}^0) + t_k a_i + l^0 h_i'(\vec{l}^*, \vec{l}^0, t_k), \quad i = \overline{0, m}. \quad (\text{IV.9})$$

Подставив выражение (IV.9) в формулу (IV.7), получим

$$\Phi(\vec{l}^k, t_k) = \sum_{i=0}^m [l^0 h'_i(\vec{l}^*, \vec{l}^0, t_k)]^2, \quad i = \overline{0, m}. \quad (\text{IV.10})$$

Точка \vec{l}^k , как уже отмечалось, является квазиминимумом, если $\Phi(\vec{l}^k, t_k) \leq \varepsilon$. Так как при ограниченных l_j^* и l_j^0 h_i ограничено, то всегда можно подобрать достаточно малое l^0 , такое, что

$$\Phi(\vec{l}^k, t_k) = \sum_{i=0}^m [l^0 h'_i(\vec{l}^*, \vec{l}^0, t_k)]^2 \leq \sum_{i=0}^m \varepsilon_i^2 = \varepsilon, \quad (\text{IV.11})$$

где $\varepsilon_i = \max_{t \in [0, 1]} l^0 h'_i(\vec{l}^*, \vec{l}^0, t)$.

Таким образом, для любого $t_k \in [0, 1]$ существует \vec{l}^k , при котором $\Phi(\vec{l}^k, t_k) \leq \varepsilon$, т. е. существует квазиминимум. Приведенное обоснование конструктивно, так как позволяя обосновать выбор начального приближения. Действительно, если в качестве начальной выбрать точку \vec{l}^0 , при которой выполняются условия

$$\varepsilon_i \geq \max_{t \in [0, 1]} l^0 h'_i(\vec{l}^*, \vec{l}^0, t), \quad i = \overline{0, m}, \quad (\text{IV.12})$$

то будет выполняться условие квазиминимума для функции $\Phi(\vec{l}, t_k)$, если $\vec{l} = \vec{l}^0 (1 - t_k)^{1/q} + \vec{l}^* t_k^{1/q}$. Очевидно для решения задачи реализации необходимо осуществлять минимизацию функции (IV.6) с учетом условий физической реализуемости. Исключим последнее, введя новые переменные l_j , связанные с первоначальными соотношением $l_j = e^{l_j}$. Для функции $\Phi(\vec{l}', t)$ при любом $t \in [0, 1]$ также существует квазиминимум. В этом легко убедиться, подставив в $\Phi(\vec{l}', t_k)$ $l_j = \ln t_j^k$. Здесь $t_j^k = l_j^0 (1 - t_k)^{1/q} + l_j^* t_k^{1/q}$, $l_j^0 = l^0$ удовлетворяет соотношениям (IV.12). Для удобства изложения вновь обозначим переменные l_j . Допустим далее, что точка $\{\vec{l}^k, t_k\}$, для которой $\Phi(\vec{l}^k, t_k) \leq \varepsilon$, определена. Задача состоит в определении точки \vec{l}^{k+1} , такой, что $\Phi(\vec{l}^{k+1}, t_{k+1}) \leq \varepsilon$ для $t_{k+1} = t_k + \Delta t$, $\Delta t > 0$. Предполагается, что поиск квазиминимума функции $\Phi(\vec{l}, t_{k+1})$ осуществляется методом безусловной оптимизации, обеспечивающим

нахождение точки \vec{l}^{k+1} (при условии ее существования) из точки начального приближения \vec{l}^k , если $\|\vec{l}^{k+1} - \vec{l}^k\| \leq \delta_0$. Здесь δ_0 — наперед заданное сколь угодно малое число.

Для определения \vec{l}^{k+1} указанным методом безусловной оптимизации необходимо выполнение двух условий:

1) точка $\{\vec{l}^{k+1}, t_{k+1}\}$, в которой $\Phi(\vec{l}^{k+1}, t_{k+1}) \leq \varepsilon$, существует;

2) для любого наперед заданного сколь угодно малого δ_0 можно подобрать сколь угодно малое, но конечное $\Delta t \geq \delta_1$, при котором $\|\vec{l}^{k+1} - \vec{l}^k\| \leq \delta_0$, где δ_1 не зависит от k .

Доказательство первого условия было проведено ранее.

Докажем второе условие, для чего рассмотрим функцию

$$\Phi_1(\vec{l}, t, y, z) = [\Phi(\vec{l}, t) - y^2]^2 + [y^2 + z^2 - \varepsilon]^2,$$

которая, как нетрудно видеть, дифференцируема по \vec{l}, t, y, z . Функции $\Phi(\vec{l}, t)$ и $\Phi_1(\vec{l}, t, y, z)$ обладают важными свойствами¹:

1) если $\Phi(\vec{l}^k, t_k) \leq \varepsilon$, то всегда существуют такие значения y_k и z_k , при которых $\Phi_1(\vec{l}^k, t_k, y_k, z_k) = 0$;

2) если $\Phi_1(\vec{l}^k, t_k, y_k, z_k) = 0$, то $\Phi(\vec{l}^k, t_k) \leq \varepsilon$.

Пусть в точке $\{\vec{l}^k, t_k\}$ выполняется условие $\Phi(\vec{l}^k, t_k) \leq \varepsilon$. Согласно первому свойству функций $\Phi_1(\vec{l}, t, y, z)$ и $\Phi(\vec{l}, t)$ существуют такие значения y_k и z_k , при которых $\Phi_1(\vec{l}^k, t_k, y_k, z_k) = 0$. Разложим функцию $\Phi_1(\vec{l}, t, y, z)$ в точке $\{\vec{l}^k, t_k, y_k, z_k\}$ в ряд Тейлора. Ограничиваясь членами первого и второго порядков малости, находим

$$\begin{aligned} \Phi_1(\vec{l}^k + \Delta\vec{l}, t_k + \Delta t, y_k + \Delta y, z_k + \Delta z) = \\ = \Phi_1(\vec{l}^k, t_k, y_k, z_k) + U_1(\Delta\vec{l}, \Delta t, \Delta y, \Delta z) + \frac{1}{2} \times \\ \times U_2(\Delta\vec{l}, \Delta t, \Delta y, \Delta z), \end{aligned}$$

¹ Ввиду простоты доказательство свойств функций $\Phi_1(\vec{l}, t, y, z)$ и $\Phi(\vec{l}, t)$ опускаем.

где

$$\begin{aligned}
 U_1(\vec{\Delta l}, \Delta t, \Delta y, \Delta z) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi_j}{\partial l_j} \Delta l_j + \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \Delta t + \\
 &+ \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Delta z; \\
 U_2(\vec{\Delta l}, \Delta t, \Delta y, \Delta z) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial l_j^2} \Delta l_j^2 + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} \Delta t^2 + \\
 &+ \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} \Delta y^2 + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} \Delta z^2 + 2 \left(\sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial l_j \partial l_r} \Delta l_j \Delta l_r + \right. \\
 &+ \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial l_j \partial t} \Delta l_j \Delta t + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial l_j \partial y} \Delta l_j \Delta y + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial l_j \partial z} \Delta l_j \Delta z + \\
 &\left. + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y \partial z} \Delta y \Delta z + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y \partial t} \Delta y \Delta t + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z \partial t} \Delta z \Delta t \right).
 \end{aligned}$$

Здесь под Φ_1 понимается $\Phi_1(\vec{l}^k, t_k, y_k, z_k)$.

В точке $\{\vec{l}^k, t_k, y_k, z_k\}$ все частные производные первого порядка функции Φ_1 равны нулю и, следовательно, $U_1(\vec{\Delta l}, \Delta t, \Delta y, \Delta z) = 0$. Учитывая это, получаем

$$\begin{aligned}
 \Phi_1(\vec{l}^k + \vec{\Delta l}, t_k + \Delta t, y_k + \Delta y, z_k + \Delta z) &= \\
 &= \frac{1}{2} U_2(\vec{\Delta l}, \Delta t, \Delta y, \Delta z). \quad (\text{IV.13})
 \end{aligned}$$

Согласно первому условию существуют такие значения $\vec{l}^{k+1} = \vec{l}^k + \Delta \vec{l}^k$ и $t_{k+1} = t_k + \Delta t_k$, при которых $\Phi(\vec{l}^k + \Delta \vec{l}^k, t_k + \Delta t_k) \leq \varepsilon$. Отсюда следует существование $y_{k+1} = y_k + \Delta y_k$ и $z_{k+1} = z_k + \Delta z_k$, при которых $\Phi_1(\vec{l}^{k+1}, t_{k+1}, y_{k+1}, z_{k+1}) = 0$. Учитывая это, имеем

$$\frac{1}{2} U_2(\Delta \vec{l}^k, \Delta t_k, \Delta y_k, \Delta z_k) = 0.$$

Допустим $\|\vec{l}^{k+1} - \vec{l}^k\| = \|\Delta \vec{l}^k\| > \delta_0$. В этом случае всегда можно подобрать такое конечное число N_k , что $\|\Delta \vec{l}^*\| = \|\Delta \vec{l}^k / N_k\| \leq \delta_0$. Подставив $\Delta \vec{l}^*$, $\Delta t^* = \Delta t_k / N_k$, $\Delta y^* =$

$= \Delta y_k / N_k, \Delta z^* = \Delta z_k / N_k$ в выражение (IV.13), получим

$$\begin{aligned} \Phi_1(\vec{l}^k + \Delta \vec{l}^*, t_k + \Delta t^*, y_k + \Delta y^*, z_k + \Delta z^*) &= \\ &= \frac{1}{2} U_2(\Delta \vec{l}^*, \Delta t^*, \Delta y^*, \Delta z^*). \end{aligned} \quad (\text{IV.14})$$

Функция $U_2(\Delta \vec{l}, \Delta t, \Delta y, \Delta z)$ является однородной (степень однородности равна двум). Тогда

$$\begin{aligned} U_2(\Delta \vec{l}^*, \Delta t^*, \Delta y^*, \Delta z^*) &= U_2(\Delta \vec{l}^k / N_k, \Delta y_k / N_k, \Delta t_k / N_k, \\ &(\Delta z_k / N_k)) = \frac{1}{N} U_2(\Delta \vec{l}^k, \Delta t_k, \Delta y_k, \Delta z_k) = 0. \end{aligned}$$

После подстановки $U_2(\Delta \vec{l}^*, \Delta t^*, \Delta y^*, \Delta z^*) = 0$ в выражение (IV.14) имеем

$$\Phi_1(\vec{l}^k + \Delta \vec{l}^k, t_k + \Delta t^*, y_k + \Delta y^*, z_k + \Delta z^*) = 0.$$

Согласно второму свойству функции $\Phi_1(\vec{l}, t, y, z)$ и $\Phi(\vec{l}, t)$ в точке $(\vec{l}^k + \Delta \vec{l}^k, t_k + \Delta t^*)$ справедливо соотношение $\Phi(\vec{l}^k + \Delta \vec{l}^k, t_k + \Delta t^*) \leq \varepsilon$. Следовательно, всегда можно подобрать значение $\Delta t = \Delta t^*$, для которого $\|\vec{l}^{k+1} - \vec{l}^k\| = \|\Delta \vec{l}^*\| \leq \delta_0$. Обозначим $\delta_1 = \min \{\Delta t_k / N_k\}$, где $k = 1, 2, \dots, r$. Тогда, очевидно, $\Delta t^* \geq \delta_1$. Таким образом выполняется и второе условие.

При выполнении изложенного обоснования сходимости предполагалось существование метода безусловной оптимизации, обеспечивающего определение \vec{l}^{k+1} из точки приближения \vec{l}^k , если $\|\vec{l}^{k+1} - \vec{l}^k\| \leq \delta_0$. Вопрос о существовании такого метода оптимизации является принципиальным. Для его решения необходимо рассмотреть конкретные методы оптимизации и выявить те условия, при которых указанное выше предположение справедливо.

Пусть последовательность приближений строится по итерационной формуле

$$\vec{l}^{k+1} = \vec{l}^k - \alpha^k \eta(\vec{l}^k) \nabla \Phi(\vec{l}^k, t_k + \Delta t). \quad (\text{IV.15})$$

$$\begin{aligned} \text{Здесь } \Delta^T \Phi(\vec{l}^k, t_k + \Delta t) &= \left[\frac{\partial \Phi(\vec{l}, t_k + \Delta t)}{\partial l_1}, \dots \right. \\ &\left. \dots, \frac{\partial \Phi(\vec{l}, t_k + \Delta t)}{\partial l_j}, \dots, \frac{\partial \Phi(\vec{l}, t_k + \Delta t)}{\partial l_n} \right] \Bigg|_{l_j = l_j^k} \end{aligned}$$

Если $\eta(\vec{l}^k)$ — положительно определенная матрица и $\nabla\Phi(\vec{l}^k, t_k + \Delta t) \neq 0$, то согласно данным работы [47] существует такое $\alpha^k \neq 0$, при котором $\Phi(\vec{l}^{k+1}, t_k + \Delta t) < \Phi(\vec{l}^k, t_k + \Delta t)$.

Таким образом, для определения \vec{l}^{k+1} на основе итерационной формулы (IV.15), исходя из точки начального приближения \vec{l}^k , необходимо выполнение, по меньшей мере, двух условий:

- 1) $\nabla\Phi(\vec{l}^k, t_k + \Delta t) \neq 0$;

- 2) $\eta(\vec{l}^k)$ — положительно определенная матрица.

Рассмотрим подробно условия выполнения первого пункта, т. е. условия, при которых \vec{l}^k не является стационарной для функции $\Phi(\vec{l}, t_k + \Delta t)$.

Из выражения (IV.6) следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi(\vec{l}^k, t_k + \Delta t)}{\partial l_j} &= \sum_{i=0}^m 2 [f_i(\vec{l}^k) - (1 - t_k - \Delta t) f_i(\vec{l}^0) - \\ &- (t_k + \Delta t) a_i] \frac{\partial f_i(\vec{l}^k)}{\partial l_j} = \sum_{i=0}^m 2 \{f_i(\vec{l}^k) - (1 - t) f_i(\vec{l}^0) - \\ &- t_k a_i - \Delta t [a_i - f_i(\vec{l}^0)]\} \frac{\partial f_i(\vec{l}^k)}{\partial l_j} = \sum_{i=0}^m 2 \{ \varepsilon_i \delta_i - \Delta t [a_i - \\ &- f_i(\vec{l}^0)] \} \frac{\partial f_i(\vec{l}^k)}{\partial l_j} = \sum_{i=0}^m 2 \varepsilon_i \delta_i \frac{\partial f_i(\vec{l}^k)}{\partial l_j} - 2\Delta t \sum_{i=0}^m [a_i - \\ &- f_i(\vec{l}^0)] \frac{\partial f_i(\vec{l}^k)}{\partial l_j}. \end{aligned}$$

Здесь $\delta_i \in [-1, 1]$; $j = \overline{1, n}$.

Допустим, точка \vec{l}^k является стационарной для $\Phi(\vec{l}, t_k + \Delta t)$:

$$\sum_{i=0}^m 2 \{ \varepsilon_i \delta_i - \Delta t [a_i - f_i(\vec{l}^0)] \} \frac{\partial f_i(\vec{l}^k)}{\partial l_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (\text{IV.16})$$

Рассмотрим, при каких условиях выбором соответствующего значения Δt можно добиться нарушения хотя бы одного из равенств (IV.16). Очевидно, если $\sum_{i=0}^m [a_i -$

$-f_i(\vec{l}^0)] \frac{\partial f_i(\vec{l}^k)}{\partial l_j} = 0$ для всех $j = \overline{1, n}$, то независимо от выбора Δt точка \vec{l}^k является стационарной для $\Phi(\vec{l}, t_k + \Delta t)$. Это возможно для функций $f_i(\vec{l})$, представляющих собой алгебраическую сумму слагаемых, часть из которых входит со знаком плюс, а часть со знаком минус. Для таких функций производные $\frac{\partial f_i(\vec{l})}{\partial l_j}$ могут иметь произвольный знак или обращаться в нуль. Следовательно, для компонентных уравнений, левые части которых представляют алгебраическую сумму слагаемых, гарантий выполнения условия $\nabla \Phi(\vec{l}^k, t_k + \Delta t) \neq 0$ нет. Допустим $f_i(\vec{l})$ — арифметическая сумма слагаемых. В этом случае $\frac{\partial f_i(\vec{l})}{\partial l_j} > 0$ для всех действительных $l_j > 0$. Если учесть, что выбор \vec{l}^0 осуществляется из условия $f_i(\vec{l}^0) < a_i$, то для рассматриваемого класса компонентных уравнений

$$\sum_{i=0}^m [a_i - f_i(\vec{l}^0)] \frac{\partial f_i(\vec{l})}{\partial l_j} \neq 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Учитывая это, принимаем Δt в качестве переменной и определяем ее значение Δt_1 , при котором имеет место равенство (IV.16)

$$\Delta t_1 = \frac{\sum_{i=0}^m \varepsilon_i \delta_i \frac{\partial f_i(\vec{l}^k)}{\partial l_j}}{\sum_{i=0}^m [a_i - f_i(\vec{l}^0)] \frac{\partial f_i(\vec{l})}{\partial l_j}}.$$

Допустим $\Delta t_1 \in [0, 1]$. Очевидно всегда можно подобрать достаточно малое Δt_2 , такое, что $\Delta t^* \geq \Delta t_2 \neq \Delta t_1$ ¹. Для $\Delta t = \Delta t_2$ равенства (IV.16) нарушаются:

$$\nabla \Phi(\vec{l}^k, t_k + \Delta t_2) \neq 0.$$

Следовательно, для системы компонентных уравнений, левые части которых представляют собой арифметическую сумму слагаемых, всегда существует такое Δt , при котором

¹ Если $\Delta t_1 = \Delta t^*$, то всегда можно выбрать $\Delta t_2 < \Delta t^*$ и, учитывая смысл Δt^* , считать $\Delta t^* = \Delta t_2$. Очевидно, в этом случае также выполняется условие $\Delta t^* \geq \Delta t_2 \neq \Delta t$.

точка \vec{l}^k не является стационарной для функции $\Phi(\vec{l}^k, t^k + \Delta t)$ ¹. Из этого следует, что задача реализации для указанного класса компонентных уравнений может быть решена на основе итерационной формулы (IV.15) любым методом оптимизации, гарантирующим построение положительно определенной матрицы $\eta(\vec{l}^k)$. Можно указать целый ряд методов оптимизации, отвечающих указанному условию. В частности в работе [47] изложены два из них: метод наискорейшего спуска и метод Дэвидона — Флетчера — Пауэлла (ДФП).

Таким образом, основной полученный результат можно сформулировать следующим образом: если система компонентных уравнений, левые части которой представляют арифметическую сумму однородных функций, имеет решение, то использование изложенного выше метода обеспечивает его нахождение². Однако еще раз заметим, что этот вывод не распространяется на системы компонентных уравнений произвольного типа.

3. Решение компонентных уравнений общего вида с учетом условий схемной реализуемости

Компонентные уравнения в задачах реализации обширного класса линейных электронных схем, включающие активные, незаземленные цепи и ряд других, характерны тем, что их левые части представляют алгебраические суммы слагаемых. Для обоснованного применения методики решения компонентных уравнений (см. главу IV, параграф 2) систему указанного вида необходимо привести к эквивалентной системе уравнений с левыми частями в виде арифметических сумм слагаемых.

Рассмотрим систему компонентных уравнений $f_i(\vec{l}) = a_i$, $i = \overline{0, m}$, где $f_i(\vec{l})$ — однородные функции, такие, что $q_i = q$.

Запишем исходную систему следующим образом:

$$f_i^{(1)}(\vec{l}) - f_i^{(2)}(\vec{l}) = a_i, \quad i = \overline{0, m}. \quad (\text{IV.17})$$

¹ Следует иметь в виду, что утверждение не справедливо, если часть или все $l_j = 0$.

² В настоящем параграфе мы рассмотрели вопрос о сходимости в чисто теоретическом аспекте без учета особенностей, связанных с реализацией алгоритма на реальных вычислительных средствах.

Здесь $f_i^{(1)}(\vec{l})$ представляет собой сумму слагаемых $f_i(\vec{l})$, входящих со знаком плюс, а $f_i^{(2)}(\vec{l})$ — со знаком минус.

Систему (IV.17) можно представить в виде

$$f_i^{(1)}(\vec{l}) = f_i^{(2)}(\vec{l}) + a_i, \quad i = \overline{0, m}.$$

Введем новые переменные $y_i \neq 0$, такие, что

$$f_i^{(1)}(\vec{l}) = \frac{1}{y_i}, \quad i = \overline{0, m};$$

$$f_i^{(2)}(\vec{l}) + a_i = \frac{1}{y_i}, \quad i = \overline{0, m}. \quad (\text{IV.18})$$

Умножим обе части системы (IV.18) на y_i :

$$y_i f_i^{(1)}(\vec{l}) = 1, \quad i = \overline{0, m};$$

$$y_i f_i^{(2)}(\vec{l}) + y_i a_i = 1, \quad i = \overline{0, m}. \quad (\text{IV.19})$$

Левые части уравнений $y_i f_i^{(2)}(\vec{l}) + y_i a_i = 1, \quad i = \overline{0, m}$ представляют собой сумму однородных функций с различной степенью однородности. Воспользовавшись изложенной (см. главу I, параграф 4) методикой выравнивания степени однородности функций, входящих в систему компонентных уравнений (IV.19), получим

$$\left. \begin{aligned} y_i f_i^{(1)}(\vec{l}) - 1 &= 0, \quad i = \overline{0, m}; \\ y_i f_i^{(2)}(\vec{l}) + y_i l_{n+1}^q a_i - 1 &= 0, \quad i = \overline{0, m}; \\ l_{n+1}^{q+1} - 1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.20})$$

Левые части системы (IV.20) представляют собой арифметическую сумму однородных функций, степень однородности которых равна $q + 1$. Следовательно, если система (IV.20) имеет хотя бы одно решение, оно может быть найдено изложенным (см. главу IV, параграф 2) методом решения компонентных уравнений.

На практике решение реализационных задач приходится выполнять, как правило, с учетом условий схемной реализуемости. Это приводит к необходимости учета ограничений на значения параметров элементов схемы.

Рассмотрим систему (IV.1), в которой условия схемной реализуемости заданы ограничительными неравенствами вида $l_{j\min} \leq l_j \leq l_{j\max}$, здесь $l_{j\min}$ и $l_{j\max}$ — соответственно минимальное и максимальное значения параметров элементов, причем $l_{j\min} \geq 0, \quad j = \overline{1, n}$.

Сведем обсуждаемую задачу к решению системы нелинейных уравнений без ограничений. С этой целью введем новые переменные $y_j, v_j, j = \overline{1, n}$, такие, что $l_j = l_{j\min} + y_j$. Для учета ограничений дополним уравнения системы:

$$y_j + v_j = l_{j\max} - l_{j\min}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Вводя их в систему компонентных уравнений, получаем

$$\begin{aligned} f_i(\vec{y}) &= a_i, \quad i = \overline{0, m}; \\ y_j + v_j &= l_{j\max} - l_{j\min}, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (\text{IV.21})$$

Любое решение системы (IV.21) при $y_j \geq 0; v_j \geq 0$ позволяет найти решение поставленной задачи. Сказанное подтверждается следующими рассуждениями. Из условий $l_j = l_{j\min} + y_j$ и $y_j \geq 0$ следует, что $l_j \geq l_{j\min}$. Из условий $y_j + v_j = l_{j\max} - l_{j\min}; y_j \geq 0; v_j \geq 0$ следует, что $y_j \leq l_{j\max} - l_{j\min}$. Таким образом, $l_j \leq l_{j\min} + l_{j\max} - l_{j\min}$ и $l_j \leq l_{j\max}$.

Для учета ограничений равенств $l_j = l_0$ нет необходимости во введении дополнительных переменных. Достаточно принять l_j равным l_0 и считать его неизменным на всех этапах решения системы.

Левые части системы (IV.21) представляют собой функции с различной степенью однородности. Воспользовавшись процедурой выравнивания степени однородности функций, входящих в левые части системы (IV.21), в общем случае получим

$$\begin{aligned} f_i(\vec{y}, \omega) - a_i &= 0, \quad i = \overline{0, m}; \\ (y_j + v_j)\omega^{q-1} - (l_{j\max} - l_{j\min}) &= 0, \quad j = \overline{1, n}; \\ \omega^q - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Следует заметить, что описанные преобразования не единственные и, быть может, не самые рациональные. Наша основная цель состояла в демонстрации принципиальных возможностей метода.

4. Особенности построения численных алгоритмов решения систем компонентных уравнений

Изложенный (см. главу IV, параграф 2) метод решения системы компонентных уравнений без особых затруднений может быть запрограммирован и включен в систему программ, предназначенную для решения задачи синтеза цепей. Отмеченная система должна содержать ряд вычислительных блоков (блок ввода исходных данных, блок контроля и корректировки входной информации, сервисный блок вывода результатов и т. д.), из числа которых необходимо выделить прежде всего блоки формирования аналитических или алгоритмических выражений $f_i(\vec{l})$ и решения системы компонентных уравнений. При разработке программы следует учитывать технические характеристики ЭВМ (объем оперативной памяти, быстродействие) и сложность реализуемых схем. Учет указанных факторов предопределяет выбор метода формирования выражений $f_i(\vec{l})$, решения системы компонентных уравнений и особенности построения машинных алгоритмов на их основе.

Следует отметить, что быстродействие программы реализации определяется в первую очередь затратами машинного времени на вычисление функций $f_i(\vec{l})$, поскольку обращение к этой процедуре выполняется многократно¹.

Наиболее целесообразными с точки зрения затрат машинного времени являются программы, в которых предусмотрено хранение в оперативной памяти ЭВМ символьных (буквенных) выражений слагаемых, входящих в $f_i(\vec{l})$. В этом случае появляется возможность наряду с функцией $\Phi(\vec{l})$ эффективно (по затратам машинного времени) вычислять производные $\nabla\Phi(\vec{l})$ и $\nabla^2\Phi(\vec{l})$. Действительно, вектор $\nabla\Phi(\vec{l})$ для функций рассматриваемого типа может быть представлен в виде $\nabla\Phi(\vec{l}) = 2W^T f$. Здесь $f = [(f_0(\vec{l}) - a_0), \dots, (f_m(\vec{l}) - a_m)]^T$; W — матрица Якоби, (i, j) -й элемент которой с учетом конструкции $f_i(\vec{l})$

¹ Как показывает опыт эксплуатации экспериментальной программы реализации [40], число вычислений функций $f_i(\vec{l})$ может достигать 1000.

определяется из соотношения

$$\frac{\partial f_i(\vec{l})}{\partial l_j} = \begin{cases} \frac{\sum_{ss_{lj}} \overbrace{l_j^2 l_r^2 \dots l_k^2}^q}{l_j}, & \text{если выполнена замена} \\ & \text{переменной } l \rightarrow l^2; l_j > 0; \\ \sum_{ss} \frac{\partial (e^{\overbrace{l_j + l_r + \dots + l_k}^q})}{\partial l_j} = \sum_{ss_{lj}} e^{l_j + l_r + \dots + l_k}, & \text{если} \\ & \text{выполнена замена переменной } l \rightarrow e^l, \end{cases}$$

где ss_{lj} — число слагаемых $f_i(\vec{l})$, содержащих переменную l_j ; ss — число слагаемых, составляющих $f_i(\vec{l})$.

Использование аналитических выражений для определения $\nabla \Phi(\vec{l})$ и $\nabla^2 \Phi(\vec{l})$ ¹ гарантирует высокую точность вычислений, что особенно важно на заключительных этапах решения задачи оптимизации.

Один из вариантов укрупненной блок-схемы программы реализации, в которой предусмотрено хранение слагаемых функций $f_i(\vec{l})$, представлен на рис. 31.

Изложенный план решения задачи удобен для реализации сравнительно несложных схем, либо схем, представляющих собой каскадное соединение, каждая из которых реализуется независимо от остальных. Примером таких цепей являются ARC-фильтры, амплитудные и фазовые корректоры.

Для сложных электронных схем хранение слагаемых, составляющих левые части системы компонентных уравнений, немислимо, и в этом случае необходимо неоднократно выполнять процедуру формирования $f_i(\vec{l})$. Топологические методы анализа электронных схем, которые могут быть использованы для построения указанных процедур, изложены в гл. II. Здесь необходимо лишь отметить, что их эффективность в большой степени зависит от тщательной проработки машинного алгоритма.

Рассмотрим вопрос о выборе начального приближения \vec{l}^0 . Допустим, необходимо решить систему уравнений (IV.1) с абсолютной погрешностью, не превышающей 0,1% отно-

¹ Вывод аналитического представления $\nabla^2 \Phi(\vec{l})$ выполняется аналогично.

сительно значений a_i . В этом случае выбирается \vec{l}^0 , удовлетворяющее для любого $t \in [0, 1]$ следующей системе неравенств:

$$0,001a_i \geq l^0 h'(\vec{l}^*, \vec{l}^0, t), \quad i = \overline{0, m}. \quad (IV.22)$$

Здесь $\vec{l}_{j\max}^* = \{l_{1\max}^*, l_{2\max}^*, \dots, l_{n\max}^*\}$, $l_{j\max}^*$ — максимально допустимое с практической точки зрения значение переменной.

Разумеется, в этом случае получают заведомо меньшие значения \vec{l}^0 , чем это необходимо, так как предполагается $l_{j\max}^* \geq l_j^*$. Сопоставление системы неравенств (IV.22) и последующее решение ее представляют довольно трудную задачу, и потому на практике целесообразно выбирать \vec{l}^0 настолько малым, насколько это позволяют технические средства. Далее решение системы проводится по изложенной выше методике с $\varepsilon = \sum_{i=0}^m (0,001 a_i)^2$. Если на каком-то

шаге не удастся найти \vec{l}^k , при котором $\Phi(\vec{l}^k, t_k) \leq \varepsilon$, то, как правило, это означает, что решения системы не существует. Осторожность последней фразы продиктована тем, что численные алгоритмы изложенного (см. главу IV параграф 2) метода не лишены недостатков. Так, например, когда $a_j/a_k \gg 1$, $j, k \in \overline{0, m}$, не всегда удастся добиться равномерного возрастания функций $f_i(\vec{l})$. В результате этого необходимая точность решения некоторых уравнений нарушается. В этом случае можно было бы воспользоваться введением весовых коэффициентов и рассмотреть функцию

$$\Phi(\vec{l}, t) = \sum_{i=0}^m K_i [f_i(\vec{l}) - (1-t)f(\vec{l}^0) - ta_i].$$

Однако процедура выбора значений K_i в настоящее время не формализована. Другим недостатком обсуждаемого метода является отсутствие четких рекомендаций по выбору Δt .

Следует отметить, что решение системы компонентных уравнений в описанном выше варианте требует, согласно данным работы [40], в шесть-десять раз больших затрат машинного времени, чем при использовании классических методов оптимизации. В связи с этим целесообразно вначале решать задачу реализации (IV.3) традиционными

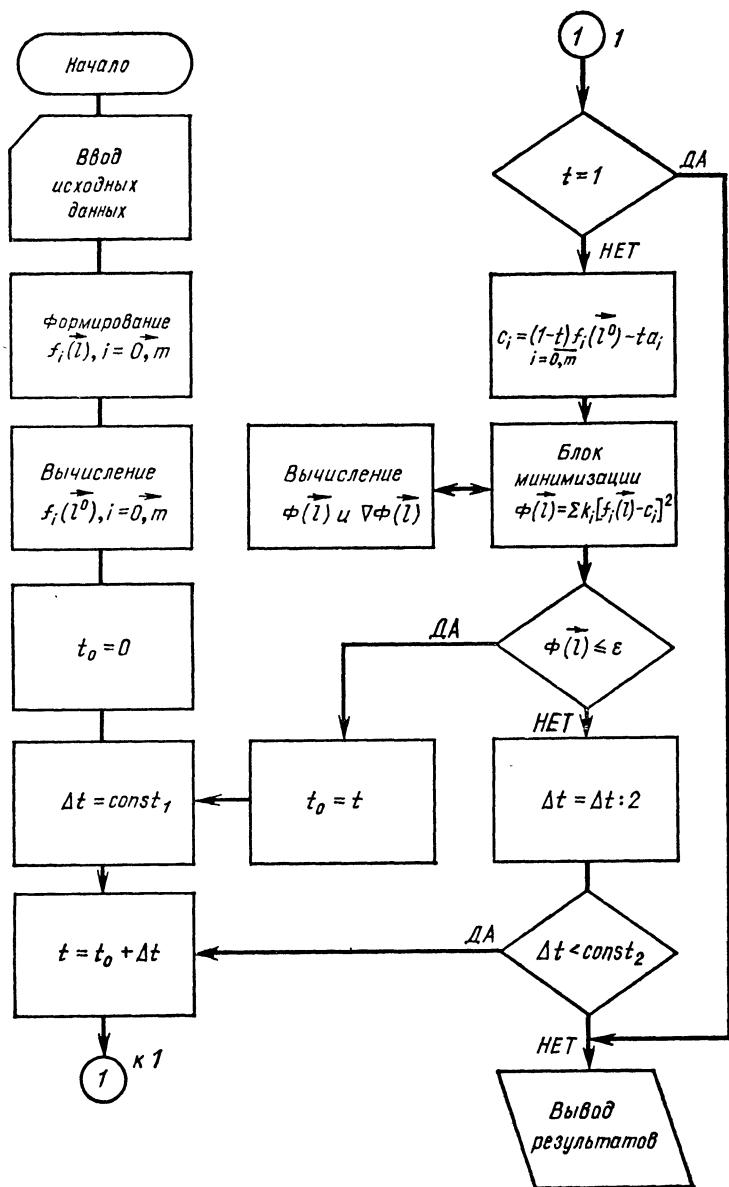


Рис. 31

способами оптимизации и подключать вычислительные алгоритмы, основанные на методе продолжения по параметру в ситуациях, когда не удастся получить результат иными методами.

Для иллюстрации основных теоретических результатов, изложенных в настоящей главе, рассмотрим несколько примеров реализации линейных электронных схем.

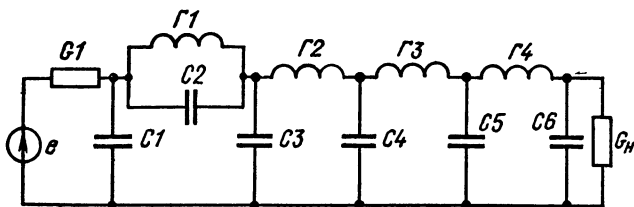


Рис. 32

Пример 1. Определим нормированные значения параметров элементов лестничной схемы, представленной на рис. 32. Нормированная передаточная функция по напряжению задана и имеет вид

$$T(p) = \frac{a_0 + a_2 p^2}{a_3 + a_4 p + \dots + a_{12} p^6}.$$

Значения коэффициентов a_i , $i = \overline{0, 12}$ приведены в табл. 2, графа «Задано».

После составления системы компонентных уравнений формируется функция $\Phi(\vec{I}, t)$. В качестве начального приближения была выбрана точка $e^{i_0^0} = e^{i_1^0} = e^{i_2^0} = \dots =$

Таблица 2

Индекс параметра i	Значение a_i		Индекс параметра i	Значение a_i	
	Задано	Получено		Задано	Получено
0	0,224203	0,224208	7	35,89600	35,89600
1	0	0	8	44,98940	44,98940
2	0,159915	0,159921	9	43,48710	43,48720
3	0,460169	0,460163	10	33,60840	33,60840
4	2,933190	2,983880	11	16,60230	16,60240
5	9,829950	9,829930	12	8,16033	8,160330
6	22,03360	22,03360			

$= e^{f_{12}^0} = 0,001$. Квазиминимумы оценивались неравенством

$$\Phi(\vec{l}^k, t_k) \leq \varepsilon = \sum_{i=0}^{12} (0,001 a_i)^2 = 0,007245.$$

В данном примере все функции $f_i(\vec{l})$ однородны с одинаковой степенью однородности. Параметр t изменялся при решении этой задачи с шагом $\Delta t = 0,05$. На каждом шаге минимизации $\Phi(\vec{l}, t)$ выполнялась методом ДФП [47]. Результаты решения при $t = 1$ и одинаковых начальных значениях параметров 0,001 для всех $i = \overline{0, 12}$ элементов дали следующие конечные значения этих параметров:

$\text{exp } l_1 = \hat{C}1 = 0,2000$	$\text{exp } l_7 = \hat{G}1 = 0,9352$
$\text{exp } l_2 = \hat{C}2 = 0,6670$	$\text{exp } l_8 = \hat{G}2 = 0,7678$
$\text{exp } l_3 = \hat{C}3 = 1,4244$	$\text{exp } l_9 = \hat{G}3 = 0,5780$
$\text{exp } l_4 = \hat{C}4 = 1,7685$	$\text{exp } l_{10} = \hat{G}4 = 0,5685$
$\text{exp } l_5 = \hat{C}5 = 1,9651$	$\text{exp } l_{11} = \hat{G}1 = 0,9499$
$\text{exp } l_6 = \hat{C}6 = 1,7157$	$\text{exp } l_{12} = \hat{G}_H = 0,9997$

Вычисленные по найденным l_j^* значения a_i коэффициентов передаточной функции представлены в табл. 2 в графе «Получено».

В приводимом ниже примере рассматривается одна из задач, где необходим учет ограничений.

Пример 2. Требуется реализовать передаточную функцию по напряжению

$$T(p) = \frac{0,186p^2 + 2,474}{0,327p^3 + 2,640p^2 + 4,945p + 4,949}$$

схемой лестничной структуры (см. рис. 10), заканчивающейся выходной емкостью, подключенной параллельно нагрузке. Подобное параллельное соединение имитирует вход следующего каскада, который может меняться. Известно, что нормированная проводимость больше 1,0. Таким образом, значения параметров цепи должны быть такими, чтобы $\hat{C}3 \geq 0,1$, а $\hat{G}_H \geq 1,0$.

Предварительный расчет параметров схемы без ограничительных условий схемной реализуемости дал следующие

значения нормированных параметров элементов:

$$l_1 = \hat{G}1 = 1,000; \quad l_2 = \hat{G}_H = 1,000; \quad l_3 = \hat{C}1 = 1,573;$$

$$l_4 = \hat{C}2 = 0,186; \quad l_5 = \hat{C}3 = 0,0197; \quad l_6 = \hat{F}1 = 2,474.$$

Они, как видно, не удовлетворяют условиям задачи.

По изложенной выше методике был выполнен второй вариант решения. Ограничительные условия записывались в виде $1 \leq l_2 \leq 5,0$; $0,1 \leq l_5 \leq 5,0$. Для учета ограничений введем четыре дополнительных переменных: y_1 , y_2 , v_1 , v_2 и дополнительные уравнения $y_1 + v_1 = 4,0$; $y_2 + v_2 = 4,9$ и обозначим $l_2 = 1,0 + y_1$; $l_5 = 0,1 + y_2$.

Система компонентных уравнений для схемы, данной на рис. 10, без учета ограничительных условий приведена в примере 4 гл. I. Для учета ограничений дополним указанную систему предыдущими уравнениями и заменим l_2 и l_5 соответствующими выражениями:

$$l_6 l_1 = a_0 = 2,474;$$

$$l_4 l_1 = a_2 = 0,186;$$

$$l_6 (l_1 + 1,0z_1 + y_1) = a_3 = 4,949;$$

$$l_6 (l_3 + 0,1z_1 + y_2) + l_1 (1,0z_1 + y_1) = a_4 = 4,945;$$

$$l_1 (l_4 + 0,1z_1 + y_2) + (1,0z_1 + y_1) (l_3 + l_4) = a_5 = 2,640;$$

$$l_5 l_4 + l_3 (0,1z_1 + y_2) + l_4 (0,1z_1 + y_2) = a_6 = 0,327;$$

$$z_1^2 = 1,0;$$

$$z_1 (y_1 + v_1) = 4,0; \quad z_1 (y_2 + v_2) = 4,9.$$

Переменную z_1 и уравнение $z_1^2 = 1,0$ введем в последнюю систему для приведения ее к виду, при котором ее левые части — однородные функции. Выполнив замену переменной $l_j = e^{l'_j}$, $y_j = e^{y'_j}$, $v_j = e^{v'_j}$, $z_1 = e^{z'_1}$, получим систему уравнений

$$e^{l'_6 + l'_1} = 2,474;$$

$$e^{l'_4 + l'_1} = 0,186;$$

$$e^{l'_6} (e^{l'_1} + e^{z'_1} + e^{y'_1}) = 4,949;$$

$$e^{l'_6} (e^{l'_3} + 0,1e^{z'_1} + e^{y'_2}) + e^{l'_1} (e^{z'_1} + e^{y'_1}) = 4,945;$$

$$\begin{aligned}
 e^{i_1'}(e^{i_4'} + 0,1e^{z_1'} + e^{y_2'}) + (e^{z_1'} + e^{y_1'}) (e^{i_3'} + e^{i_4'}) &= 2,640; \\
 e^{i_3'+i_4'} + e^{i_3'}(0,1e^{z_1'} + e^{y_2'}) + e^{i_4'}(0,1e^{z_1'} + e^{y_2'}) &= 0,327; \\
 e^{2z_1'} &= 1,0; \\
 e^{z_1'}(e^{y_1'} + e^{y_2'}) &= 4,0; \\
 e^{z_1'}(e^{y_2'} + e^{y_1'}) &= 4,9.
 \end{aligned}$$

Решение последней системы дает следующее значение параметров элементов:

$$\begin{aligned}
 e^{i_1'} = l_1 = \hat{G}_1 = 1,773; \quad 1,0 + e^{y_1'} = l_2 = \hat{G}_H = 1,760; \\
 e^{i_3'} = l_3 = \hat{C}_1 = 0,171; \quad e^{i_4'} = l_4 = \hat{C}_2 = 0,105; \\
 0,1 + e^{y_2'} = \hat{C}_3 = 1,112; \quad e^{i_6'} = l_6 = \hat{r}_1 = 1,402.
 \end{aligned}$$

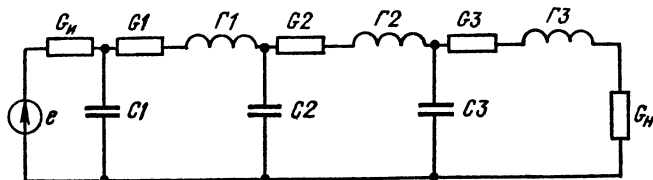


Рис. 33

Этим значениям соответствует передаточная функция

$$T(p) = \frac{0,186p^2 + 2,487}{0,325p^3 + 2,640p^2 + 4,942p + 4,949} .$$

Пример 3. Рассмотрим задачу реализации фильтра Баттерворта шестого порядка с учетом потерь

$$T(p) = \frac{0,5}{p^6 + 3,864p^5 + 7,464p^4 + 9,142p^3 + 7,464p^2 + 3,864p + 1,0} .$$

Схема фильтра с учетом потерь в индуктивностях (потери в конденсаторах пренебрегаем) представлена на рис. 33. Обозначим добротность j -й индуктивности на частоте ω_1 через

$$Q_j = \frac{\omega_1 L_j}{r_j} .$$

Подставив в последнее соотношение вместо L_j и r_j нормированные величины параметров элементов, получим

Таблица 3

Индекс параметра i	Значение a_i		Индекс параметра i	Значение a_i	
	Задано	Получено		Задано	Получено
0	0,5	0,5057	4	9,142	9,0510
1	1,000	0,9999	5	7,464	7,3820
2	3,864	3,8830	6	3,864	3,8120
3	7,464	7,4710	7	1,000	0,9960

$$Q_j = \frac{\omega_1}{\omega_0} \frac{\omega_0 L_j}{r_j/R_0} = \Omega_1 \frac{\hat{L}_j}{\hat{r}_j} = \Omega_1 \frac{\hat{G}_j}{\hat{r}_j},$$

где ω_0 и R_0 — нормализующие коэффициенты; \hat{L}_j и \hat{r}_j — нормированные значения параметров.

Для реализации фильтра с учетом потерь систему компонентных уравнений следует дополнить тремя уравнениями

$$Q_j \hat{r}_j = \Omega_1 \hat{G}_j, \quad j = \overline{1, 3}$$

и, таким образом, решить систему

$$f_i(\vec{l}) = a_i, \quad i = \overline{0, 7};$$

$$Q_j \hat{r}_j = \Omega_1 \hat{G}_j = 0, \quad j = \overline{1, 3},$$

где $\vec{l} = \{\hat{G}_n, \hat{G}_1, \hat{G}_2, \hat{G}_3, \hat{r}_1, \hat{r}_2, \hat{r}_3, \hat{C}_1, \hat{C}_2, \hat{C}_3, \hat{G}_n\}$;

численные значения a_i приведены в табл. 3 в графе «Задано».

В результате решения задачи реализации при $\Omega_1 = 1$, $Q_j = 100$, $j = \overline{1, 3}$ и одинаковых для всех параметров элементов начальных значениях 0,1 получены следующие конечные значения параметров элементов:

$$\begin{array}{lll} \hat{G}_n = 0,1490 & \hat{r}_1 = 0,1390 & \hat{C}_2^* = 0,2440 \\ \hat{G}_1 = 13,5400 & \hat{r}_2 = 0,0902 & \hat{C}_3 = 0,3070 \\ \hat{G}_2 = 8,9120 & \hat{r}_3 = 0,1460 & \hat{G}_n = 0,1390 \\ \hat{G}_3 = 14,3300 & \hat{C}_1 = 0,0547 & \end{array}$$

Из полученных данных следует, что

$$\frac{G_1}{\Gamma_1} = 97,4; \quad \frac{G_2}{\Gamma_2} = 98,8; \quad \frac{G_3}{\Gamma_3} = 98,1.$$

При решении примера параметр t изменяется с шагом $\Delta t = 0,025$. Вычисленные значения коэффициентов a_i приведены в табл. 3 в графе «Получено».

Следует заметить, что левые части последних трех уравнений системы представляют собой разность однородных функций. В данном случае мы не стали выполнять преобразования, приводящие к арифметическим суммам однородных функций. Если бы поиск решения оказался неудачным, эти преобразования пришлось бы сделать для выполнения условий, гарантирующих сходимость.

**ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ
ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ****1. Реализация RLC -цепей
на основе полной топологической структуры**

Рассмотрим задачу элементарной реализации RLC -цепи по одной заданной схемной функции — физически реализуемому оператору. При наличии алгоритма решения системы компонентных уравнений основным вопросом является выбор топологии схемы. Естественно, что эта акция должна гарантировать разрешимость соответствующей системы уравнений, по крайней мере, при условиях физической реализуемости. Решение обсуждаемой задачи неоднозначно, так как заданной схемной функции может отвечать множество схем, отличающихся и топологиями, и значениями параметров элементов. Одним из путей ее решения является использование результатов классической реализации. Сказанное становится понятным из обсуждения следующих примеров.

Пример 1. Реализации подлежит оператор $T(p)$ — функция входного сопротивления RLC -двухполюсника:

$$T(p) = \frac{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{a_5 p^2 + a_4 p + a_3}.$$

Из теории метода Ботта — Даффина [3] известно, что для биквадратной функции входного сопротивления наиболее общей является RLC -схема, изображенная на рис. 34. Иными словами, с помощью этой топологии при неотрицательных значениях параметров элементов может быть реализована любая физически реализуемая биквадратная функция сопротивления.

В качестве других могут быть приведены примеры реализации передаточных по напряжению функций квазиполиномиального типа лестничными цепями, а входных реактансных функций — каноническими реактивными двухполюсниками и т. д.

Излагаемый ниже метод основан на использовании некоторой универсальной схемы — схемы полной топологической структуры.

Итак, пусть задан оператор¹

$$T(p) = \frac{\sum_{i=1}^d a_i p^i}{\sum_{i=d+1}^{m_1} a_i p^{i-d-1}}. \quad (\text{V.1})$$

Здесь $m - d - 1 \geq d$; $a_m \neq 0$, $a_d \neq 0$.

Реализуем его схемой полной топологической структуры с заданным числом узлов в RLC -базисе. Запишем для схемы выражение соответствующей схемной функции

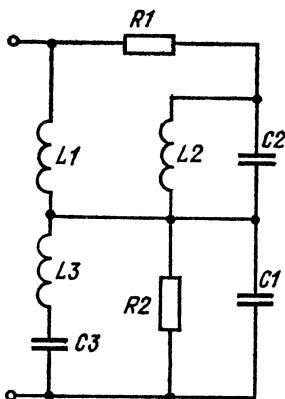


Рис. 34

$$T(p) = \frac{\sum_{i=0}^{d_1} f_i(\vec{l}) p^i}{\sum_{i=d_1+1}^{m_1} f_i(\vec{l}) p^{i-d_1-1}}. \quad (\text{V.2})$$

Если $m_1 - d_1 - 1 = m - d - 1$ и $d_1 \geq d$, то, сопоставив функции (V.1) и (V.2), получим систему компонентных уравнений

$$f_i(\vec{l}) = a_i, \quad i = \overline{0, m}. \quad (\text{V.3})$$

Если $d_1 = d$, то комментарии не требуются. Если же $d_1 > d$, то $f_{d+1}(\vec{l}) = 0, \dots, f_d(\vec{l}) = 0$.

Решение системы (V.3) при $l_j \geq 0$, $j = \overline{1, n}$, если оно существует, позволяет найти топологию и значение параметров элементов цепи, реализующей заданную схемную функцию. Топология найденной схемы может отличаться от топологии исходной, так как ряд параметров может обратиться в ноль либо в бесконечность, что соответствует закорачиванию либо разрыву соответствующих ветвей.

Если система компонентных уравнений несовместна, то это означает, что в рамках выбранной топологии заданная функция не может быть реализована. Схему нужно усложнить, введя, по крайней мере, еще один узел. Для схемы

¹ Для определенности рассматриваем передаточную функцию по напряжению, для которой степень полинома числителя не может превосходить степень полинома знаменателя [3].

с увеличенным числом узлов

$$I(p) = \frac{\sum_{i=0}^{d_2} f_i(\vec{l}) p^i}{\sum_{i=d_2+1}^{m_2} f_i(\vec{l}) p^{i-d_2-1}}, \quad (V.4)$$

где функции $f_i(\vec{l})$ не совпадают с $f_i(\vec{l})$ из выражения (V.2), $m_2 > m_1$ и $d_2 > d_1$. Следовательно, с помощью вновь образованной схемы полной топологической структуры можно реализовать передаточную функцию более высокого порядка, чем функция (V.1). Если все-таки с помощью этой схемы реализовать функцию (V.1), то зависимость (V.4) может превратиться в зависимость (V.1) при условии, что часть коэффициентов $f_i(\vec{l})$ становится равной нулю либо в числителе и знаменателе будут сокращаться множители. Таким образом, можно записать

$$T(p) = \frac{\left(\sum_{i=0}^d a_i p^i\right) \left(\sum_{k=0}^s y_k^q p^k\right)}{\left(\sum_{i=d+1}^m a_i p^{i-d-1}\right) \left(\sum_{k=0}^s y_k^q p^k\right)}. \quad (V.5)$$

В выражении (V.4) степень однородности функций $f_i(\vec{l})$ в числителе и знаменателе предполагается одинаковой и равной q . Параметр s должен быть равен $\min\{(m_2 - d_2 - 1) - (m - d - 1), (d_2 - d)\}$. Иными словами, степени полиномов числителя и знаменателя функции (V.5) не должны превосходить степени полиномов функции (V.4).

Раскрыв и сгруппировав коэффициенты при одинаковых степенях p в выражении (V.5), получим

$$T(p) = \frac{\sum_{i=0}^d \sum_{k=0}^s a_i y_k^q p^{i+k}}{\sum_{i=d+1}^m \sum_{k=0}^s a_i y_k^q p^{i+k-d-1}} = \frac{\sum_{i=0}^{d+s} h_i(\vec{y}) p^i}{\sum_{i=d+s+1}^{m+s} h_i(\vec{y}) p^{i-d-s-1}}, \quad (V.6)$$

где $\vec{y} = \{y_0, \dots, y_s\}$.

Сопоставив полученную схемную функцию с выражением (V.4), составим систему компонентных уравнений:

$$f_i(\vec{l}) = h_i(\vec{y}), \quad i = \overline{0, m+s}. \quad (V.7)$$

Для исключения тривиального решения $\vec{l} = 0, \vec{y} = 0$ дополним систему (V.7) уравнением $\sum_{k=0}^s y_k^q = b$, где b — положительная константа. Окончательно система компонентных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} f_i(\vec{l}) - h_i(\vec{y}) = 0, \quad i = \overline{0, m+s}, \\ \sum_{k=0}^s y_k^q = b. \end{aligned} \quad (\text{V.8})$$

Замечательной особенностью системы (V.8) является однородность левых частей ее уравнений. Это обстоятельство явилось следствием представления заданной передаточной функции в форме (V.5)¹.

Для решения системы (V.8) с дополнительными условиями реализуемости ее необходимо предварительно преобразовать, приведя левые части к виду арифметических (а не алгебраических) сумм слагаемых. Делается это аналогично изложенному ранее.

Обозначим $f_i(\vec{l}) - h_i(\vec{y}) = g'_i(\vec{l}, \vec{y}) - g''_i(\vec{l}, \vec{y})$, $i = \overline{0, m+s}$. Здесь g'_i и g''_i — арифметические суммы слагаемых, входящих в выражение $f_i - h_i$. Используя введенные обозначения, систему (V.8) можно записать в виде

$$\begin{aligned} g'_i(\vec{l}, \vec{y}) = g''_i(\vec{l}, \vec{y}), \quad i = \overline{0, m+s}, \\ \sum_{k=0}^s y_k^q = b. \end{aligned}$$

Далее введем вспомогательные переменные $z_i \neq 0$, такие, что $g'_i(\vec{l}, \vec{y}) = 1/z_i$, $g''_i(\vec{l}, \vec{y}) = 1/z_i$, и окончательно запишем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} z_i g'_i(\vec{l}, \vec{y}) &= 1, \quad i = \overline{0, m+s}; \\ z_i g''_i(\vec{l}, \vec{y}) &= 1, \quad i = \overline{0, m+s}; \\ \sum_{k=0}^s y_k^q &= b. \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.9})$$

¹ Если не использовать формулу (V.5), а составлять компонентные уравнения по способу (V.3), то из рассмотрения исключаются все схемы с характеристическими уравнениями порядков выше $m - n - 1$ и передаточными функциями (V.1), получаемыми из выражения (V.4) путем сокращения общих множителей.

В этой системе левые части уравнений — арифметические суммы однородных слагаемых. Ее решение с дополнительными условиями физической либо схемной реализуемости может быть найдено (если оно существует) изложенным в гл. IV численным методом.

Принципиальным является вопрос о полноте множества эквивалентных схем, которые могут быть получены из решения системы (V.8).

Рассмотрим его подробнее.

Пусть для определенности задана функция

$$T(p) = \frac{\sum_{i=0}^d a_i p^i}{\sum_{i=d+1}^m a_i p^{i-d-1}}, \quad (\text{V.10})$$

(здесь $a_d \neq 0$, $a_m \neq 0$, $i \in M_0 = \overline{0, m}$), удовлетворяющая УФР передаточной функции заземленной пассивной RLC-схемы. Ее реализацию можно провести на основе схемы полной топологической структуры с числом узлов N_A , схемную функцию которой запишем в виде

$$T(p) = \frac{\sum_{i=0}^{d_1} Q_j(\vec{l}) p^i}{\sum_{j=d_1+1}^{m_1} Q_j(\vec{l}) p^{j-d_1-1}}.$$

Здесь $\vec{l} = \{l_1, \dots, l_{n_A}\}$; n_A — число элементов схемы полной топологической структуры.

Обозначим эту схему через A , входной и выходной узлы соответственно 1 и N_A , тогда, согласно данным работы [42], имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{d_1} Q_j(\vec{l}) p^i &= \Delta_{1N_A}^A p^\alpha; \\ \sum_{j=d_1+1}^{m_1} Q_j(\vec{l}) p^{j-d_1-1} &= \Delta_{11}^A p^\alpha. \end{aligned} \quad (\text{V.11})$$

Здесь $\Delta_{1N_A}^A$ и Δ_{11}^A — соответствующие алгебраические дополнения матрицы проводимости Y^A схемы A^1 , представляющие собой дробно-рациональные функции с

¹ Соотношения (V.11) получены при условии, что значение сопротивления нагрузки G_H включено в матрицу проводимостей схемы.

неотрицательными степенями p ; α — степень полинома знаменателя Δ_{11}^A .

Для решения задачи реализации формируем систему компонентных уравнений вида (V.8)¹:

$$Q_j(\vec{l}) = \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^r a_i y_k, \quad j = k + i, \quad j = \overline{0, m}. \quad (V.12)$$

Теорема 1. Множество S решений системы компонентных уравнений (V.8) определяет полное множество эквивалентных схем в заданном элементарном базисе с числом узлов, не превосходящим N_A .

Доказательство теоремы проведем от противного.

1. Допустим существует N_B — узловая схема B с числом элементов n_B , реализующая заданную схемную функцию с точностью до сокращающихся множителей, т. е.:

$$T_B(p) = \frac{\sum_{e=0}^{d_2} f_e(\vec{l}^*) p^e}{\sum_{e=d_2+1}^{m_2} f_e(\vec{l}^*) p^{e-d_2-1}} = \frac{\sum_{i=0}^d a_i p^i \left(\sum_{k=0}^{r_1} y_k^{*q} p^k \right)}{\sum_{i=d+1}^m a_i p^{i-d-1} \left(\sum_{k=0}^{r_1} y_k^{*q} p^k \right)}.$$

Здесь $d + r_1 \leq d_2$, $m + r_1 = m_2$, $\vec{l}^* = \{l_1^*, \dots, l_{n_B}^*\}$; l_j^* , y_k^* — конкретные числа, $j = \overline{1, n_B}$, $k = \overline{0, r_1}$.

Из этого следует, что на ее основе можно составить систему компонентных уравнений

$$f_e(\vec{l}) = \sum_{i=0}^d \sum_{k=0}^{r_1} a_i y_k^{*q}, \quad e = i + k, \quad i = \overline{0, d}, \quad k = \overline{0, r_1}. \quad (V.13)$$

Для схемы B , согласно данным работы [42], имеем

$$\sum_{e=0}^{d_2} f_e(\vec{l}) p^e = \Delta_{1N_B}^B p^{\alpha_1};$$

$$\sum_{e=d_2+1}^{m_2} f_e(\vec{l}) p^{e-d_2-1} = \Delta_{11}^B p^{\alpha_1}.$$

¹ Если система (V.8) совместна, то она совместна при любом $b > 0$ в уравнении $\sum_{k=0}^s y_k^q = b$, поэтому при обсуждении рассматриваемого вопроса его можно не учитывать.

Здесь Δ_{i, N_B}^B , Δ_{11}^B — соответствующие алгебраические дополнения матрицы проводимости Y^B схемы B ; α_1 — степень полинома знаменателя Δ_{11}^B .

2. Допустим далее, что схема B не может быть определена в результате решения системы компонентных уравнений (V.12), т. е. вектор $\vec{l}^* = \{l_1^*, l_2^*, \dots, l_{n_B}^*, 0, \dots, 0\}$ не является решением системы (V.12).

Рассмотрим первый случай: $N_B = N_A$. Дополним схему B межузловыми связями с помощью элементов $l_{n_B+1}, \dots, l_{n_A}$ таким образом, чтобы получить схему полной топологической структуры A . Матрицу проводимостей Y^A представим в виде $Y^A = Y^B + Y^D$, где Y^D — матрица проводимостей части схемы полной топологической структуры A , которая составлена из элементов $l_{n_B+1}, \dots, l_{n_A}$. Используя теорему об определителе суммы двух матриц [42], имеем

$$\begin{aligned} \Delta_{iN_A}^A &= \Delta_{iN_A}^B + \Delta_{iN_A}^D + \sum_{i=1}^{q-1} \Delta_{iN_A}^{B^i D^{q-i}}; \\ \Delta_{11}^A &= \Delta_{11}^B + \Delta_{11}^D + \sum_{i=1}^{q-1} \Delta_{11}^{B^i D^{q-i}}. \end{aligned} \quad (\text{V.14})$$

Здесь $\Delta_{iN_A}^D$ и Δ_{11}^D — соответствующие алгебраические дополнения матрицы Y^D ; $\Delta_{iN_A}^{B^i D^{q-i}}$ ($\Delta_{11}^{B^i D^{q-i}}$) — определитель, образованный из i столбцов матрицы $Y_{iN_A}^B$ (Y_{11}^B) и $q-i$ столбцов матрицы $Y_{iN_A}^D$ (Y_{11}^D); Y_{ij}^B (Y_{ij}) — матрица q -го порядка, полученная в результате вычеркивания i -го столбца и j -й строки из матриц Y^B (Y^D); $q = N - 2$.

Второй знак суммы в выражениях (V.14) означает, что суммируются все полученные указанным способом определители.

Сопоставив выражения (V.11) и (V.14), получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{d_1} Q_j(\vec{l}) p^j &= \Delta_{iN_A}^B p^\alpha + \Delta_{iN_A}^D p^\alpha + p^\alpha \sum_{i=1}^{q-1} \Delta_{iN_A}^{B^i D^{q-i}}; \\ \sum_{j=d_1+1}^{m_1} Q_j(\vec{l}) p^j &= \Delta_{11}^B p^\alpha + \Delta_{11}^D p^\alpha + p^\alpha \sum_{i=1}^{q-1} \Delta_{11}^{B^i D^{q-i}}. \end{aligned} \quad (\text{V.15})$$

Примем $l_{n_B+1} = l_{n_B+2} = \dots = l_{n_A} = 0$. В этом случае элементы всех столбцов Y^D будут равны нулю, отсюда

$\Delta_{1N_A}^D = \Delta_{11}^D = 0$, $\sum_{i=0}^{q-1} \sum \Delta^{B^i D^{q-i}} = 0$ и, следовательно, выражение (V.15) примет вид

$$\sum_{j=0}^{d_1} Q_j(\vec{l}) p^j = \Delta_{1N_A}^B p^\alpha;$$

$$\sum_{j=d_1+1}^{m_1} Q_j(\vec{l}) p^{j-d_1-1} = \Delta_{11}^B p^\alpha.$$

Сопоставив последние два выражения с системой (V.13), найдем

$$\sum_{j=0}^{d_1} Q_j(\vec{l}) p^j = p^{\alpha-\alpha_1} \sum_{e=0}^{d_2} f_e(\vec{l}) p^e;$$

$$\sum_{j=d_1+1}^{m_1} Q_j(\vec{l}) p^{j-d_1-1} = p^{\alpha-\alpha_1} \sum_{e=d_2+1}^{m_2} f_e(\vec{l}) p^{e-d_2-1}. \quad (\text{V.16})$$

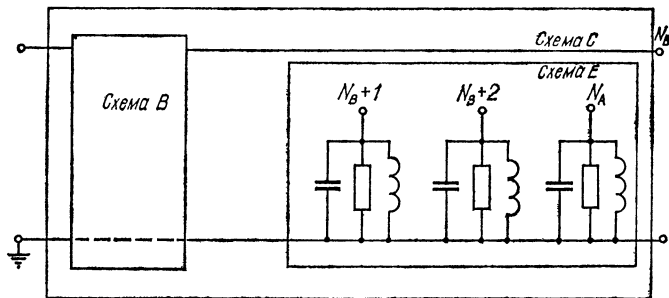


Рис. 35

Примем в системе (V.12) $y_k = y_k^*$ для $k = 0, 1, \dots, r_1$ и $y_k = 0$ для $k > r_1$, тогда с учетом выражений (V.16) заметим, что вектор $\vec{l}_{n_A}^* = \{l_1^*, \dots, l_{n_B}^*, 0, \dots, 0\}$ является решением системы (V.12). Таким образом, допущение 2 неверно, если $N_B = N_A$.

Рассмотрим второй случай: $N_B < N_A$. Исследуем схему С, приведенную на рис. 35. Матрица проводимостей Y^C такой схемы определяется следующим образом:

$$Y^C = \begin{vmatrix} Y^B & 0 \\ 0 & Y^E \end{vmatrix}.$$

Здесь Y^E — матрица проводимостей схемы Е.

Значения элементов E — произвольные положительные числа, отличные от нуля. Между каждым узлом схемы E и нулевым включены элементы, составляющие элементный базис схемы полной топологической структуры. Алгебраические дополнения Y^C можно представить в виде

$$\Delta_{11}^C = \Delta^E \Delta_{11}^B; \quad \Delta_{1N_B}^C = \Delta^E \Delta_{1N_B}^B,$$

откуда следует, что

$$T(p) = \frac{\Delta_{11}^C}{\Delta_{1N_B}^C} = \frac{\Delta_{11}^B \Delta^E}{\Delta_{1N_B}^B \Delta^E} = \frac{\Delta_{11}^B}{\Delta_{1N_B}^B}.$$

Таким образом, схема C с числом узлов N_A эквивалентна схеме B ; левые части системы компонентных уравнений, сформированной на ее основе, совпадают с левыми частями системы (V.13) с точностью до постоянного множителя Δ^E . Так как число узлов схемы C равно N_A , то согласно доказательству, изложенному выше, она может быть получена в результате решения системы (V.12). Следовательно, в результате решения системы (V.12) может быть получена схема B . Таким образом, допущение 2 неверно, если $N_B < N_A$. Теорема доказана.

Изложенный ранее способ реализации оператора предполагает последовательное решение компонентных уравнений для схем полной топологической структуры с различным числом узлов. При этом, конечно, должны быть априорные гарантии успеха такой тактики, т. е. заданный оператор должен удовлетворять УФР.

Решать задачу удобно по следующему плану. Выбирается некоторое начальное значение числа узлов $N_{нач}$, составляются и решаются компонентные уравнения. Если решение отсутствует, число узлов увеличивается на единицу и расчеты повторяются.

Выбор начального числа узлов схемы полной топологической структуры с элементным RLC -базисом осуществляется, согласно данным работы [5], по формуле

$$N_{нач} \geq \frac{\omega}{2} + 2. \quad (V.17)$$

Здесь ω — порядок полинома знаменателя передаточной функции; $N_{нач}$ — число узлов схемы, не считая базисного. Рассмотрим два примера элементарной реализации.

Пример 2. Реализуем передаточную функцию по напряжению

$$T(p) = \frac{0,5}{p^2 + 1,414p + 1,0}$$

заземленной схемой в RLC -базисе. Определим минимальное число узлов схемы, потенциально пригодной для реализации заданной передаточной функции. По формуле (V.17) имеем $N_{\text{нач}} \geq 2 \frac{2}{3}$. Выбираем $N_{\text{нач}} = 3$. Трехузловая схема

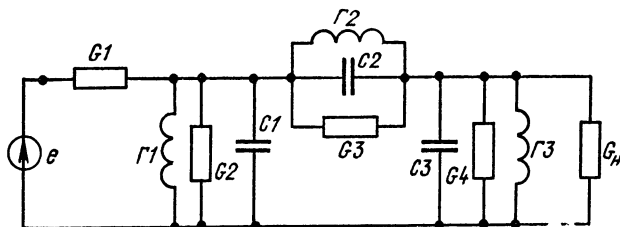


Рис. 36

полной топологической структуры в RLC -базисе представлена на рис. 36. Передаточная функция этой схемы, полученная на основе общих методов анализа, имеет вид

$$T(p) = \frac{f_1(\vec{l})p + f_2(\vec{l})p^2 + f_3(\vec{l})p^3}{f_4(\vec{l}) + f_5(\vec{l})p + f_6(\vec{l})p^2 + f_7(\vec{l})p^3 + f_8(\vec{l})p^4},$$

где

$$f_1(\vec{l}) = l_1 l_9;$$

$$f_2(\vec{l}) = l_1 l_3;$$

$$f_3(\vec{l}) = l_1 l_6;$$

$$f_4(\vec{l}) = l_8 l_9 + l_8 l_{10} + l_9 l_{10};$$

$$f_5(\vec{l}) = l_1(l_9 + l_{10}) + l_2(l_9 + l_{10}) + l_3(l_8 + l_{10}) + \\ + l_8 l_4 + l_9(l_4 + l_{11}) + l_{10} l_{11};$$

$$f_6(\vec{l}) = l_1 l_3 + l_1 l_4 + l_2 l_3 + l_5 l_9 + l_8 l_6 + l_2 l_4 + l_5 l_{10} + \\ + l_8 l_7 + l_3 l_4 + l_6 l_{10} + l_9 l_7 + l_3 l_{11} + l_4 l_{11};$$

$$f_7(\vec{l}) = l_1 l_6 + l_1 l_7 + l_2 l_6 + l_5 l_8 + l_2 l_7 + l_5 l_4 + l_3 l_7 +$$

$$\begin{aligned}
& + l_6 l_4 + l_6 l_{11} + l_7 l_{11}; \\
l_8(\vec{l}) &= l_5 l_6 + l_5 l_7 + l_6 l_7; \\
\vec{l} &= \{l_1, \dots, l_{11}\} = \\
&= \{G1, G2, G3, G4, C1, C2, C3, \Gamma1, \Gamma2, \Gamma3, G_H\}.
\end{aligned}$$

Поскольку степени полиномов числителя и знаменателя передаточной функции трехузловой схемы (рис. 36) выше соответствующих степеней заданной функции, примем $N_{\text{нач}} = 3$ и вместо исходной рассмотрим следующую схему функцию:

$$T(p) = \frac{0,5 \sum_{k=0}^2 y_k p^k}{(p^2 + 1,414p + 1,0) \left(\sum_{k=0}^2 y_k^2 p^k \right)},$$

где $q = 2$, так как степень однородности функций $f_i(\vec{l})$ равна двум.

Формально последнее выражение может быть записано в виде:

$$T(p) = \frac{0,5y_0^2 + 0,5y_1^2 p + 0,5y_2^2 p^2 + 0,0p^3}{y_2^2 p^4 + (y_1^2 + 1,414y_2^2) p^3 + (y_0^2 + 1,414y_1^2 + y_2^2) p^2 + (1,414y_0^2 + y_1^2) p + y_0^2}.$$

Таким образом, $h_0(\vec{y}) = 0,5y_0^2$; $h_1(\vec{y}) = 0,5y_1^2$; $h_2(\vec{y}) = 0,5y_2^2$; $h_3(\vec{y}) = 0$; $h_4(\vec{y}) = y_2^2$; $h_5(\vec{y}) = y_1^2 + 1,414y_0^2$; $h_6(\vec{y}) = y_0^2 + 1,414y_1^2 + y_2^2$; $h_7(\vec{y}) = y_1^2 + 1,414y_2^2$; $h_8(\vec{y}) = y_2^2$; $i = \overline{0, 8}$.

Система компонентных уравнений будет иметь вид $f_i(\vec{l}) = h_i(\vec{y})$, $i = \overline{0, 8}$. Для того чтобы установить соответствие рассматриваемого примера с формулами (V.1), (V.4) — (V.6), полезно отметить, что в данном примере $d = 0$; $m = 3$; $q = 2$; $s = 2$; $d_2 = 3$; $m_2 = 8$. В этом случае $g'_i = f_i$, $ag''_i = h_i$, и, таким образом, система компонентных уравнений записывается в виде

$$Z_i f_i(\vec{l}) = 1, \quad i = \overline{0, 8};$$

$$Z_i h_i(\vec{y}) = 1, \quad i = \overline{0, 8};$$

$$\sum_{k=0}^2 y_k^2 = b.$$

В качестве начального приближения при численном решении был принят вектор $\{\vec{l}, \vec{y}, \vec{z}\}$, каждый элемент которого равен 0,0001. Константа b принята равной 0,4.

В результате решения найдены следующие значения нормированных параметров элементов:

$$\begin{aligned} \hat{G}_1 &= 0,497; & \hat{G}_2 &= 0,220; & \hat{G}_3 &= 0,202; & \hat{G}_4 &= 0,067; \\ \hat{G}_H &= 0,206; & \hat{C}_1 &= 0,720; & \hat{C}_2 &= 0,99 \cdot 10^{-5}; & \hat{C}_3 &= 0,277; \\ \hat{I}_1 &= 0,99 \cdot 10^{-5}; & \hat{I}_2 &= 0,207; & \hat{I}_3 &= 0,99 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

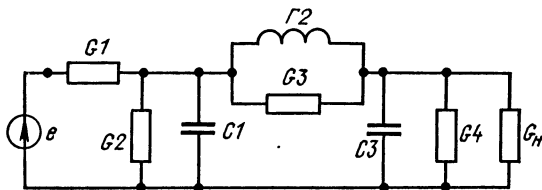


Рис. 37

При этом $y_0 = 0,0000$; $y_1 = 0,4538$; $y_2 = 0,4474$. Условия физической реализуемости учитывались путем следующей замены переменных: $l_j = e^{i_j}$, $j = \overline{1, n}$. Передаточная функция реализованной схемы оказалась следующей:

$$\begin{aligned} T(p) &= \frac{1,030p + 1,001p^2}{0,2002p^4 + 0,489p^3 + 0,4914p^2 + 0,2049p} = \\ &= \frac{0,5(0,206p + 0,2002p^2)}{(p^2 + 1,4134p + 0,995)(0,206p + 0,2002p^2)}. \end{aligned}$$

Окончательная схема, в которой отсутствуют элементы с параметрами C_2 , I_1 и I_3 , показана на рис. 37.

Пример 3. Рассматриваем реализацию более сложной передаточной функции по напряжению

$$\begin{aligned} T(p) &= \\ &= \frac{0,950p^5 + 1,100p^3}{4,120p^6 + 5,850p^5 + 10,750p^4 + 7,750p^3 + 7,001p^2 + 2,050p + 0,950} \end{aligned}$$

четыреполюсной заземленной схемы в LC -базисе, работающей в режиме двусторонней нагрузки G_i и G_H . Функция $T(p)$ удовлетворяет условиям физической реализуемости для заданного класса схем.

Используя обычные методы анализа, легко убедиться, что степени полиномов числителей и знаменателей схемных функций двух- и трехузловых схем полной топологической

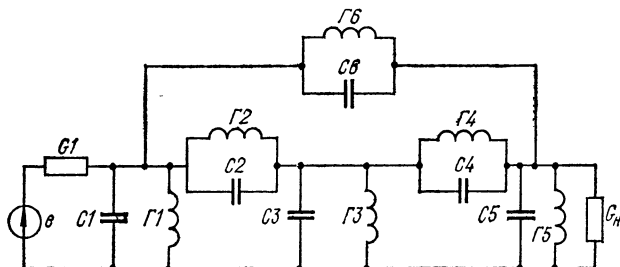


Рис. 38

структуры в LC -базисе меньше, чем степени соответствующих полиномов заданной схемной функции. Таким образом, указанные схемы не могут быть использованы для решения поставленной задачи.

Рассмотрим схему полной топологической структуры, изображенную на рис. 38¹. Для нее передаточная функция представляется формулой

$$T(p) = \frac{f_1(\vec{l})p + f_3(\vec{l})p^3 + f_5(\vec{l})p^5}{f_6(\vec{l}) + f_7(\vec{l})p + f_8(\vec{l})p^2 + f_9(\vec{l})p^3 + f_{10}(\vec{l})p^4 + f_{11}(\vec{l})p^5 + f_{12}(\vec{l})p^6}.$$

По структуре она соответствует заданной. Сопоставляя их, запишем систему компонентных уравнений

$f_i(\vec{l}) = a_i$. Уравнения для $i = 0, 2, 4$ по понятным причинам не выписываются. Остальные уравнения существуют и $a_i = 0$; $a_3 =$

$= 1,100$; $a_5 = 0,950$; $a_6 = 0,950$; $a_7 = 2,050$; $a_8 = 7,001$; $a_9 = 7,750$; $a_{10} = 10,750$; $a_{11} = 5,850$; $a_{12} = 4,120$. Подробно уравнения не выписываются из-за громоздкости выражений $f_i(\vec{l})$. Решение системы осуществляется с точностью

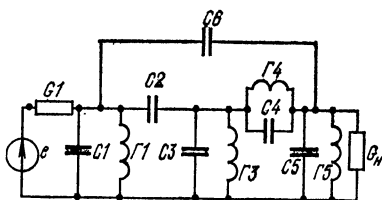


Рис. 39

¹ Эта схема является полной в LC -базисе, если не учитывать генератор и нагрузку.

$\varepsilon = 0,02824$ при начальном приближении $\vec{l}^0 = \{0,0001, \dots, 0,0001\}$.

В результате получены следующие нормированные значения параметров элементов схемы:

$$\begin{aligned} \hat{C}1 &= 2,966; & \hat{C}2 &= 0,910; & \hat{C}3 &= 0,304; & \hat{C}4 &= 0,282; \\ \hat{C}5 &= 0,279; & \hat{C}6 &= 0,312; & \hat{G}1 &= 1,200; & \hat{G}2 &= 0,1 \cdot 10^{-6}; \\ \hat{G}3 &= 0,534; & \hat{G}4 &= 0,549; & \hat{G}5 &= 0,459; & \hat{G}6 &= 0,1 \cdot 10^{-6}; \\ \hat{G}1 &= 1,310; & \hat{G}_n &= 0,778. \end{aligned}$$

Как и в предыдущем примере, условия физической реализуемости учитывались заменой переменной $l_j = e^{l_j}$. Передаточная функция схемы (рис. 39) при таких параметрах имеет вид

$$\begin{aligned} T(p) &= \\ &= \frac{0,950p^5 + 1,100p^3}{4,120p^6 + 5,850p^5 + 10,750p^4 + 7,750p^3 + 7,001p^2 + 2,050p + 0,950} \cdot \end{aligned}$$

2. Активные линейные электронные схемы

Изложенный выше материал относится к реализации пассивных цепей. Он в равной мере применим и к реализации пассивных подсхем активных схем. В этом случае задача формулируется следующим образом: по заданной схемной функции при выбранном типе, числе активных приборов и способе их включения определить топологию и значения пассивной части схемы. Подобная задача является частной в общей теории синтеза активных схем, однако ее практическое значение велико. Это объясняется тем, что в подавляющем большинстве аналоговых схем число активных элементов заранее определено. Более того, часто указано их место в общей схеме. Один из распространенных способов решения указанной задачи состоит в формировании и решении системы компонентных уравнений на основе схем, в которой активные приборы представлены соответствующими схемами замещения. В общем случае левые части системы компонентных уравнений электронной схемы представляют собой алгебраические суммы слагаемых. Для определения ее решения методом, изложенным в главе IV, систему необходимо привести к виду, при котором ле-

вые части являются арифметическими суммами слагаемых. Этого можем достигнуть, используя методику, приведенную в главе IV параграфе 3. Этот путь решения задачи реализации активных электронных схем не отличается от изложенного в предыдущем параграфе. В этом легко убедиться, если учесть, что в качестве пассивной части схемы можно принять схему полной топологической структуры.

Другой подход к решению задачи основан на том, что оператор в целом выражается через параметры активных приборов и схемные функции пассивных подсхем. Если функциональная схема активной цепи задана, то, в принципе, задачу реализации можно свести к реализации пассивных подсхем и, следовательно, воспользоваться ранее изложенной теорией и расчетными методами. Для этого достаточно выделить схемные функции пассивных подсхем.

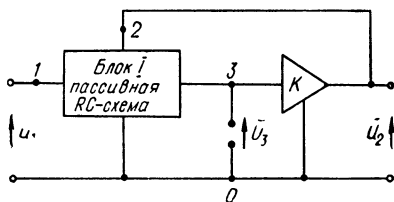


Рис. 40

Проиллюстрируем сказанное выше на примере реализации наиболее распространенной и достаточно общей модели ARC-цепи с одним управляемым источником — усилителем напряжения (рис. 40). Здесь блок I — заземленная пассивная RC-схема произвольной топологической структуры с матрицей проводимостей Y . Коэффициент усиления усилителя K . Для схемы рис. 40 передаточная функция по напряжению имеет вид [43]:

$$T(p) = \frac{KT_{31}(p)}{1 - KT_{32}(p)}, \quad (V.18)$$

где

$$T_{31}(p) = \left. \frac{\bar{U}_3}{\bar{U}_1} \right|_{\bar{U}_2=0}; \quad T_{32}(p) = \left. \frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_2} \right|_{\bar{U}_1=0}.$$

После выделения функций $T_{31}(p)$ и $T_{32}(p)$ задача сводится к реализации ARC-многополюсника по этим функциям.

Рассмотрим подробнее функцию $T_{31}(p)$, определенную при $\bar{U}_2(p) = 0$. Для выполнения последнего условия узел 2 (рис. 40) необходимо объединить с базисным узлом 0. При таком изменении топологической структуры в матрице

Y , описывающей вновь образованную схему, необходимо вычеркнуть строку и столбец с номером 2. Эту новую матрицу обозначим Y' . Согласно данным работы [42], функцию $T_{31}(p)$ можно представить через алгебраические дополнения Δ'_{11} , Δ'_{13} матрицы Y' следующим образом:

$$T_{31}(p) = \frac{\Delta'_{13}}{\Delta'_{11}},$$

причем $\Delta'_{11} = \Delta_{11,22}$; $\Delta'_{13} = \Delta_{22,33}$, где $\Delta_{11,22}$, $\Delta_{22,33}$ — алгебраические дополнения матрицы Y .

С учетом последних соотношений имеем

$$T_{31}(p) = \frac{\Delta_{22,33}}{\Delta_{11,22}}.$$

Передаточная функция $T_{32}(p)$ выражается через алгебраические дополнения матрицы Y :

$$T_{32}(p) = \frac{\Delta_{11,23}}{\Delta_{11,22}}.$$

Используя полученные выражения для $T_{31}(p)$ и $T_{32}(p)$, можно составить систему компонентных уравнений для решения задачи реализации по двум схемным функциям.

С учетом двух последних соотношений запишем выражение для $T(p)$ в следующем виде:

$$T(p) = \frac{K\Delta_{22,13}}{\Delta_{11,22} - K\Delta_{11,23}}. \quad (V.19)$$

Полученное соотношение, выраженное через алгебраические дополнения матрицы Y , можно непосредственно использовать для формирования системы компонентных уравнений. При $K > 0$ левые части системы будут содержать слагаемые с отрицательными знаками. Это обстоятельство следует иметь в виду при организации вычислительного алгоритма решения системы компонентных уравнений в задаче синтеза ARC-схем. В настоящей главе все примеры синтеза рассматриваемого класса активных схем решены с использованием соотношения (V.19).

Прежде чем рассмотреть примеры реализации ARC-звеньев, отметим следующее. Из анализа алгебраических дополнений матрицы Y , входящих в выражение для $T(p)$, можно прийти к выводу, что некоторые из параметров элементов схемы полной топологической структуры не

войдут в выражения $\Delta_{22,13}$, $\Delta_{11,22}$ и $\Delta_{11,23}$, а следовательно, и в систему компонентных уравнений. Действительно, $\Delta_{11,22}$ — это алгебраическое дополнение матрицы Y , в которой вычеркнуты строки и столбцы с номерами 1 и 2. Проводимости элементов RC -схемы, записанные только в вычеркиваемых строках и столбцах, не войдут в выражение для соответствующего определителя. Следовательно, в выражение $\Delta_{11,22}$ не войдут параметры элементов схемы полной топологической структуры, связывающие между собой узлы с номерами 1, 2 и базисный. Параметры указанных элементов не войдут и в выражения для $\Delta_{22,13}$, $\Delta_{11,23}$. Таким образом, для решения задачи реализации ARC -схем в рамках модели, представленной на рис. 40, без каких-либо потерь допустимо вместо пассивной RC -схемы

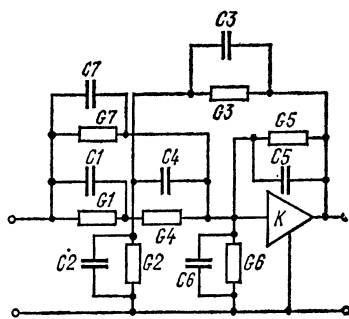


Рис. 41

полной топологической структуры применять более простую схему усеченной топологической структуры. Пример ARC -цепи с пятиузловой RC -схемой, усеченной в указанном выше смысле топологической структурой (удалены элементы, связывающие 1, 2 и базисный узлы), представлен на рис. 41.

Получившееся усечение полной топологической структуры явилось следствием свойств модели, изображенной на рис. 40, или, более конкретно, следствием режима возбуждения цепи (источник напряжения) и свойств активного прибора (источник напряжения, управляемый напряжением). Реализация любой передаточной функции, например второго порядка, в рамках схемы, представленной на рис. 41, позволяет, в принципе, получить те же результаты, что и реализация в рамках этой же схемы, дополненной до полной топологической структуры.

Пример 4. Реализуем передаточную функцию звена фильтра НЧ

$$T(p) = \frac{1,0}{1,0p^2 + 0,1p + 1,0}.$$

Задачу реализации проведем на основе ARC -схемы (рис. 41). Раскрыв определители, входящие в выражение $T(p)$ для

рассматриваемой схемы, получим

$$\tilde{T}(p) = \frac{f_0(\vec{l}) + f_1(\vec{l})p + f_2(\vec{l})p^2}{f_3(\vec{l}) + f_4(\vec{l})p + f_5(\vec{l})p^2},$$

где

$$\left. \begin{aligned} f_0(\vec{l}) &= K(G1G4 + G7G2 + G7G3 + G7G4 + G7G1); \\ f_1(\vec{l}) &= K(C1G4 + G1C4 + G7C2 + C7G3 + \\ &+ G7C3 + G7C4 + C7G4 + C7G1 + C1G7 + G2C7); \\ f_2(\vec{l}) &= K(C1C4 + C7C2 + C7C3 + C7C4 + C7C1); \\ f_3(\vec{l}) &= G1G6 + G2G6 + G2G4 + G3G6 + G4G6 + \\ &+ (1 - K)(G1G5 + G2G5 + G3G5 + G3G4 + \\ &+ G4G5) + f_0(\vec{l})/K; \\ f_4(\vec{l}) &= C1G6 + G1C6 + C2G6 + G2C6 + C2G4 + \\ &+ G2C4 + C3G6 + G3C6 + C4G6 + G4C6 + \\ &+ (1 - K)(C1G5 + G1C5 + C2G5 + C5G2 + \\ &+ G5C3 + G3C5 + C3G4 + G3C4 + C4G5 + \\ &+ G4C5) + f_1(\vec{l})/K; \\ f_5(\vec{l}) &= C1C6 + C2C6 + C2C4 + C2C6 + C4C6 + \\ &+ (1 - K)(C1C5 + C2C5 + C3C5 + C3C4 + \\ &+ C4C5) + f_2(\vec{l})/K. \end{aligned} \right\} \text{(V.20)}$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях p в последних двух выражениях $T(p)$ и $\tilde{T}(p)$, запишем систему компонентных уравнений

$$f_i(\vec{l}) = a_i, \quad i = 0, 1, \dots, 5.$$

Здесь $a_0 = 1,0$; $a_1 = 0,0$; $a_2 = 0,0$; $a_3 = 1,0$; $a_4 = 0,1$; $a_5 = 1,0$.

В результате решения системы компонентных уравнений методом Флетчера — Пауэлла (начальное приближение $l_i = 0,01$, $i = 1, 2, \dots, 14$) найдены следующие значения

параметров элементов:

$$\begin{aligned}\hat{G}1 &= 1,319; \quad \hat{G}2 = 1,400 \cdot 10^{-8}; \quad \hat{G}3 = 1,6 \cdot 10^{-9}; \\ \hat{G}4 &= 0,758; \quad \hat{G}5 = 6 \cdot 10^{-23}; \quad \hat{G}6 = 3,9 \cdot 10^{-16}; \\ \hat{G}7 &= 1,6 \cdot 10^{-6}; \quad \hat{C}1 = 9,67 \cdot 10^{-6}; \quad \hat{C}2 = 0,0014; \\ \hat{C}3 &= 21,184; \quad \hat{C}4 = 3,0 \cdot 10^{-8}; \quad \hat{C}5 = 1164,4; \\ \hat{C}6 &= 6,0 \cdot 10^{-4}; \quad \hat{C}7 = 3,0 \cdot 10^{-5}; \quad K = 0,999.\end{aligned}$$

Схемная функция с учетом определенных выше значений параметров элементов имеет вид

$$T(p) = \frac{7,0 \cdot 10^{-4}p^2 + 10^{-4}p + 0,999}{0,999p^2 + 0,100p + 1,000}.$$

Исключим из схемы (рис. 41) элементы $G2, G3, G5, G6, G7, C1, C4, C6$ и $C7$, значения параметров которых практически могут быть приравнены к нулю, получим схему, изображенную на рис. 42. Ей соответствует передаточная функция

$$T(p) = \frac{0,999}{1,000p^2 + 0,099p + 1,000}.$$

Следует обратить внимание на то, что в изложенном примере нам не пришлось использовать метод решения системы компонентных уравнений (см. главу IV, параграф 2), поскольку удовлетворительный результат удалось получить традиционным методом поиска.

Пример 5. Реализуем передаточную функцию звена фильтра высокой частоты (ВЧ)

$$T(p) = \frac{p^2}{p^2 + 0,01p + 1,0}.$$

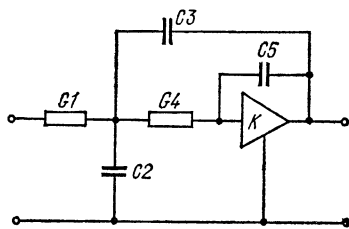


Рис. 42

Реализацию проведем на основе схемы, представленной на рис. 41. Воспользовавшись выражениями для функций $f_i(\vec{l})$, $i = 0, 1, \dots, 5$, приведенными в примере 4, составим систему компонентных уравнений для решения поставленной задачи: $f_0(\vec{l}) = 0$; $f_1(\vec{l}) = 0$; $f_2(\vec{l}) = 1$; $f_3(\vec{l}) = 1$; $f_4(\vec{l}) = 0,01$; $f_5(\vec{l}) = 1$.

В результате ее решения методом Флетчера — Пауэлла из точки начального приближения $l_j = 0,01$ получены следующие значения параметров элементов:

$$\begin{aligned}\hat{G}1 &= 0,0012; \hat{G}2 = 0,0038; \hat{G}3 = 0,0126; \hat{G}4 = 0,0033; \\ \hat{G}5 &= 0,1062; \hat{G}6 = 0,0179; \hat{G}7 = 0,0017; \hat{G}1 = 0,8977; \\ \hat{C}2 &= 0,1242; \hat{C}3 = 0,1059; \hat{C}4 = 0,5741; \hat{C}5 = 0,0648; \\ \hat{C}6 &= 0,053; \hat{C}7 = 0,2056; K = 1,1534.\end{aligned}$$

Значения производных функций цепи в точке экстремума не превосходят 10^{-3} , а $\Phi(\vec{l}) \approx 1$. Передаточная функция с учетом полученных значений параметров элементов имеет вид

$$T(p) = \frac{0,998p^2 + 0,012p + 4 \cdot 10^{-5}}{1,000p^2 + 0,016p + 8 \cdot 10^{-5}}.$$

Следовательно, решение системы компонентных уравнений методом Флетчера — Пауэлла не дало положительного результата. Судя по значениям частных производных функций цепи, мы, по-видимому, «попали» в точку экстремума. Вторично решение задачи проведено методом, изложенным в § 2 гл. IV. Получены следующие значения параметров элементов схемы:

$$\begin{aligned}\hat{G}1 &= 1,28 \cdot 10^{-4}; \hat{G}2 = 0,244; \hat{G}3 = 1,264; \hat{G}4 = 0,04; \\ \hat{G}5 &= 4,006; \hat{G}6 = 3,611; \hat{G}7 = 5 \cdot 10^{-5}; \hat{C}1 = 0,015; \\ \hat{C}2 &= 0,003; \hat{C}3 = 0,215; \hat{C}4 = 35,238; \hat{C}5 = 0,024; \\ \hat{C}6 &= 0,181; \hat{C}7 = 0,001; K = 1,725.\end{aligned}$$

Передаточная функция в этом случае имеет вид

$$T(p) = \frac{1,000p^2 + 0,0013p + 1,3 \cdot 10^{-4}}{0,998p^2 + 0,010p + 0,998}.$$

Исключив из схемы (см. рис. 41) элементы $G1$, $G4$, $G7$, $C2$ и $C7$, значения параметров которых практически могут быть приравнены к нулю, получим схему, изображенную на рис. 43. Передаточную функцию этой схемы запишем в виде

$$T(p) = \frac{0,931p^2}{0,842p^2 + 1,539p + 1,006}.$$

После уточнения параметров элементов путем повторного решения системы уравнений, в которой не присутствуют отмеченные выше элементы, получено

$$\begin{aligned}\hat{G}_2 &= 0,21353; \hat{G}_3 = 1,2561; \hat{G}_5 = 4,0527; \hat{G}_6 = 3,5788; \\ \hat{C}_1 &= 0,011527; \hat{C}_3 = 0,21353; \hat{C}_4 = 50,744; \\ \hat{C}_5 &= 0,02453; \hat{C}_6 = 0,17787; K = 1,7158.\end{aligned}$$

Этим значениям соответствует передаточная функция

$$T(p) = \frac{1,003p^2}{0,999p^2 + 0,010p + 0,996}.$$

При решении задач на основе схем полной топологической структуры не всегда ясно, какие из элементов следует исключить. В нашей практике встречались примеры, когда после исключения элементов функция недопустимо

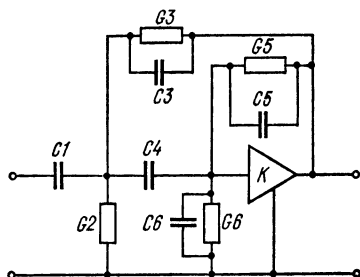


Рис. 43

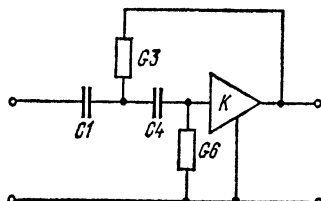


Рис. 44

искажалась, например, исчезли коэффициенты при заданных степенях p . Для оценки верности исключения передаточная функция после удаления «лишних» элементов считается заново (см. пример 5).

Можно применить и другой прием: пропорционально увеличить коэффициенты полиномов функции цепи и решить компонентные уравнения при новых значениях a_i . При этом, как показывают расчеты, происходит более четкое выявление элементов, подлежащих исключению.

Пример 6. При решении задачи по условиям примера 5 в действительности реализуется функция

$$T(p) = \frac{p^2 + 10^{-7}p + 10^{-7}}{p^2 + 0,01p + 1}, \text{ а не } T(p) = \frac{p^2}{p^2 + 0,01p + 1}.$$

Это является следствием метода реализации. Реализуем заданную схемную функцию, представив ее в виде

$$T(p) = \frac{100p^2 + 10^{-7}p + 10^{-7}}{100p^2 + p + 100},$$

т. е. увеличив ненулевые коэффициенты полиномов заданной функции в 100 раз. В результате решения системы компонентных уравнений имеем

$$\begin{aligned}\hat{C}1 &= 8,54; \hat{G}1 = 3,9 \cdot 10^{-31}; \hat{C}2 = 0,348; \hat{G}2 = 0,642; \\ \hat{C}3 &= 3,2 \cdot 10^{-4}; \hat{G}3 = 7,08; \hat{C}4 = 11,19; \hat{G}4 = 2,01 \cdot 10^{-5}; \\ \hat{C}5 &= 2,9 \cdot 10^{-9}; \hat{G}5 = 1,7 \cdot 10^{-16}; \hat{C}6 = 0,021; \hat{G}6 = 1,39; \\ \hat{C}7 &= 6,8 \cdot 10^{-4}; \hat{G}7 = 1,69 \cdot 10^{-25}; K = 1,045.\end{aligned}$$

Из данных решения отчетливо видно, какие элементы следует исключить. Итоговая схема содержит элементы с параметрами (рис. 44)

$$\begin{aligned}\hat{C}1 &= 0,56914; \hat{G}3 = 22,117; \hat{G}6 = 0,04521; \\ \hat{C}4 &= 1,7555; K = 1,00345.\end{aligned}$$

Ее передаточная функция имеет вид

$$T(p) = \frac{1,001}{0,999p^3 + 0,010p + 0,999}.$$

Заметим, что мы пришли к иному, чем в примере 5, решению.

3. Схемы усеченной топологической структуры в задаче реализации электронных цепей

Использование схем полных топологических структур необходимо для формализованного поиска топологий в рамках метода, изложенного в главе V, параграфе 1. Однако их применение ограничено схемами с относительно небольшим числом узлов (10—12), что определяется техническими возможностями современных ЭВМ. В этой связи большой практический интерес приобретает вопрос об использовании схем усеченной топологической структуры. Применение их, как правило, приводит к значительному упрощению задачи и, следовательно, экономии машинного времени и оперативной памяти ЭВМ. Сказанное подтверждается следующим примером.

Схемная функция вида

$$T(p) = \frac{b_0}{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$$

может быть реализована на основе схемы лестничной структуры (рис. 45). Число элементов этой схемы с учетом сопротивлений нагрузки и источника питания равно шести, число слагаемых, входящих в левые части системы компонентных уравнений, составленных на ее основе, равно 14. Если же для реализации рассматриваемой схемной функции воспользоваться четырехузловой схемой полной топологической структуры с элементным LC -базисом (см. рис. 38), то число варьируемых параметров, т. е. элементов схемы, составит 14, а число слагаемых, входящих в левые части системы компонентных уравнений,— 214. Затраты машинного времени при решении задачи реализации на основе схем, представленных на рис. 38 и 45,

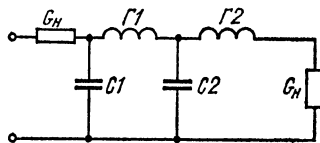


Рис. 45

относятся, как 1 : 20. Ясно, что применение схем полной топологической структуры не целесообразно в задачах элементарной реализации, если существует предварительная информация о топологии схемы. В этих случаях естественно использование схем усеченной топологической структуры. Их можно разбить на две группы:

- 1) структуры (топологии), включающие некоторое (неполное) множество эквивалентных схем;
- 2) структуры (топологии), на основе которых может быть найдено полное множество эквивалентных по заданному оператору схем при фиксированном числе узлов и элементном базисе.

Способы построения структур (топологий) первой группы излагаются в гл. VI. Общие методы построения топологий второй группы не изучались. В частных случаях решение задачи оказывается простым. Об этом свидетельствуют рассматриваемые ниже примеры реализации звеньев ARC -схем, проводимой в рамках моделей, представленных на рис. 40 и 41. Итак, задача состоит в том, чтобы из схемы на рис. 41 удалить те и только те элементы, значения параметров которых при реализации передаточной функции заданной структуры обращаются в нуль независимо от значений коэффициентов этой функции.

Пусть задана передаточная функция по напряжению звена фильтра нижних частот [43]:

$$T(p) = \frac{b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}.$$

Составляя систему компонентных уравнений (см. пример 4), видим, что для рассматриваемой схемной функции необходимо выполнение условий $f_1(\vec{l}) \equiv 0$ и $f_2(\vec{l}) \equiv 0$, так как коэффициенты b_1 и b_2 полинома числителя функции $T(p)$ равны нулю. Из анализа выражений (V.20) следует, что для обсуждаемой задачи $C7 = 0$; $G7 = 0$; $C4 = 0$; $C1 = 0$. Действительно, пусть $C7 \neq 0$ и (или) $G7 \neq 0$. В этом случае для выполнения условия $f_1(\vec{l}) \equiv 0$ необходимо равенство нулю $C1$, $C2$, $C3$, $C4$, но тогда $f_5(\vec{l}) \equiv 0$, что недопустимо. Из анализа выражения для $f_0(\vec{l})$ следует: $G4 \neq 0$, $G1 \neq 0$, если $G7 = 0$. В таком случае $C1 = 0$

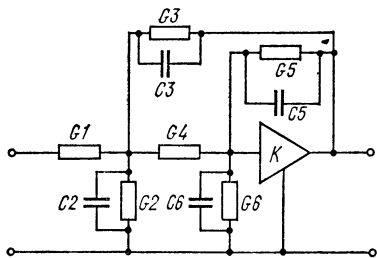


Рис. 46

и $C4 = 0$, если $C7 = 0$ и $G7 = 0$. Это вытекает из выражения для $f_2(\vec{l})$ (обратим внимание на первые два слагаемые). Таким образом, для формирования системы компонентных уравнений, множество решений которой соответствует полному множеству эквивалентных пятиузловых ARC-схем с одним усилителем, можно использовать схему, приведенную на рис. 46. Указанная схема усеченной топологической структуры получена путем удаления из схемы (см. рис. 41) элементов $C1$, $C4$, $C7$, $G7$. Система компонентных уравнений в задачах реализации рассматриваемых ARC-звеньев фильтров нижних частот имеет вид

$$\left. \begin{aligned} KG1G4 &= b_0; \\ G1G6 + G2G6 + G2G4 + G3G6 + G4G6 + \\ &+ (1 - K)(G1G5 + G2G5 + G3G5 + G3G4 + \\ &+ G4G5 + G1G4) = a_0; \\ G1G6 + G2G6 + G2G6 + C2G4 + C3G6 + C6G3 + \\ &+ G4C6 + (1 - K)(G1C5 + C2G5 + G2C5 + \\ &+ C3G5 + G3C5 + C3G4 + G4C5) = a_1; \\ C2C6 + C3C6 + (1 - K)(C2C5 + C3C5) &= a_2. \end{aligned} \right\} \quad (V.21)$$

Изложенная процедура ограничена схемами с малым числом узлов. Уже для схем с пятью узлами использо-

вать ее затруднительно. Однако с практической точки зрения полученный результат ценен, так как число слагаемых в системе (V.21) в два раза меньше, чем в системе (V.20), а затраты машинного времени при решении задачи реализации пропорциональны числу слагаемых, входящих в левые части системы компонентных уравнений.

Проведенный выше анализ системы компонентных уравнений элементарен. В связи с этим приведем результаты аналогичного анализа для реализации высокочастотного и полосового фильтров без обесчелования.

В задачах реализации звена высокочастотного фильтра с передаточной функцией

$$T(p) = \frac{b_2 p^2}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$$

следует использовать схему усеченной топологической структуры, представленную на рис. 47. Система компонентных уравнений имеет вид

$$KC1C4 = b_2;$$

$$G2G6 + G3G6 + (1 - K)(G2G5 + G3G5) = a_0;$$

$$\begin{aligned} & C1G6 + C2G6 + G2C6 + G2C4 + C3G6 + G3C6 + C4G6 + \\ & + (1 - K)(C1G5 + C2G5 + G2C5 + C3G5 + G3C5 + G3C4 + \\ & + C4G5) = a_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & C1C6 + C2C6 + C2C4 + C3C6 + C4C6 + (1 - K) \times \\ & \times (C1C5 + C2C5 + C3C5 + C4C5 + C3C4 + C1C4) = a_2. \end{aligned}$$

Она получена при условии, что $C7 = 0$; $G7 = 0$; $G4 = 0$; $G1 = 0$.

Задача реализации звена полосового фильтра с передаточной функцией вида

$$T(p) = \frac{b_1 p}{p^2 + a_1 p + a_0}$$

решается на основе схемы, представленной на рис. 48, которая получена путем исключения из схемы, изображенной на рис. 41, элементов $G7$ и $C7$. Система компонентных уравнений при решении обсуждаемой задачи реализации

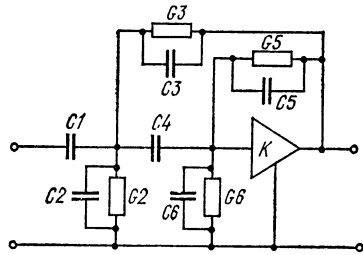


Рис. 47

имеет вид

$$KG1G4 = b_0;$$

$$K(C1G4 + G1C4) = b_1;$$

$$KC1C4 = b_2;$$

$$G1G6 + G2G6 + G2G4 + G3G6 + G4G6 + (1 - K) \times \\ \times (G1G5 + G2G5 + G3G5 + G3G4 + G4G5) + b_0/K = a_0; \\ C1G6 + G1C6 + C3G6 + G2C6 + C2G4 + G2C4 + C3G6 + \\ + G3C6 + C4G6 + G4C6 + (1 - K)(C1G5 + G1C5 + \\ + C2G5 + G2C5 + C3G5 + C3G4 + G3C4 + C4G5 + \\ + G4C5) + b_1/K = a_1;$$

$$C1C6 + C2C6 + C2C4 + C3C6 + C4C6 + (1 + K) \times \\ \times (C1C5 + C2C5 + C3C5 + C3C4 + C4C5) + b_2/K = a_2.$$

Из анализа последней системы (достаточно рассмотреть хотя бы первые три уравнения) следует, что дополнительно необходимо исключить либо элементы $C1, G4$, либо $C4, G1$.

Поскольку заранее неизвестно, какая из указанных пар элементов будет исключена, они обе присутствуют в схеме, изображенной на рис. 48.

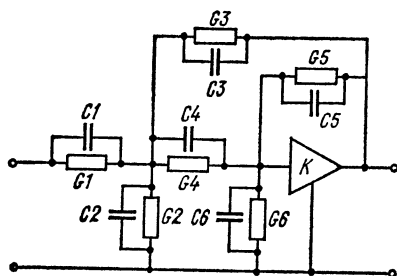


Рис. 48

В качестве упражнения покажем, что передаточная функция режекторного звена

$$T(p) = \frac{b_2 p^2 + b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$$

не может быть реализована схемой, представленной на рис. 41.

Пр и м е р 7. Реализуем звено фильтра нижних частот

$$T(p) = \frac{1}{p^2 + 0,1p + 1}$$

на основе схемы, представленной на рис. 46.

Подставив в правые части системы (V.21) $b_0 = 1,0$; $a_0 = 1,0$; $a_1 = 0,1$ и $a_2 = 1,0$, получим компонентные уравнения для решения поставленной задачи. В результате решения системы компонентных уравнений из точки на-

чального приближения $l_j = 0,01$ методом ДФП получены следующие значения параметров элементов схемы:

$$\hat{G}_1 = 0,193; \hat{G}_2 = 0,035; \hat{G}_3 = 0,089; \hat{G}_4 = 0,884;$$

$$\hat{G}_5 = 0,155; \hat{G}_6 = 0,230; \hat{C}_2 = 9,107; \hat{C}_3 = 43,716;$$

$$\hat{C}_5 = 0,033; \hat{C}_6 = 0,033.$$

Схемная функция с учетом найденных значений параметров элементов запишется в виде

$$T(p) = \frac{1,0027}{0,9931p^2 + 0,0996p + 0,9930}.$$

РЕАЛИЗАЦИЯ УСЕЧЕННЫХ ТОПОЛОГИЙ ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ

1. Формы представления схемной функции и топология схемы

Структура схемной функции связана с топологией схемы. Зафиксируем число узлов и поставим задачу перечислить все топологии с данным либо меньшим числом узлов, схемные функции которых по структуре совпадают с желаемой. Не все схемы с такими топологиями пригодны для реализации предложенной функции. Однако они могут рассматриваться как потенциальные претенденты (схемы-претенденты), окончательный вывод о пригодности которых делается только после решения системы компонентных уравнений. Остальные же схемы заведомо исключаются из рассмотрения. Таким образом, речь идет о предварительной структурной (топологической) селекции. Подобная селекция позволяет определить схемы усеченной топологической структуры, на базе которых решение задачи реализации заметно упрощается, в частности, выделить схемы-претенденты, минимальные по числу реактивных элементов, и т. д.

Исходной для решения задачи реализации является схемная функция $F(p)$. Она может быть представлена различными способами. Обычно это такое представление, когда минимальная степень комплексной частоты p в полиноме числителя и (или) знаменателя равна нулю. Оно называется каноническим:

$$F(p) = \frac{a_0 p^0 + a_1 p^1 + \dots + a_{d_1} p^{d_1}}{a_{d_1+1} + \dots + a_{d_2} p^{d_2}}. \quad (\text{VI.1})$$

Другие представления получаются из выражения (VI.1) умножением числителя и знаменателя на p^α , $\alpha \leq 0$:

$$F(p) = \frac{\left(\sum_0^{d_1} a_k p^k \right) p^\alpha}{\left(\sum_{d_1+1}^{d_2} a_k p^{k-d_1-1} \right) p^\alpha} = \frac{\sum_{t_1}^{t_1} a_k p^k}{\sum_{r_2}^{r_2} b_k p^k}, \quad (\text{VI.2})$$

где r_1, r_2 — минимальные, а t_1, t_2 — максимальные степени p в числителе (знаменателе) функции (VI.2).

В дальнейшем схемную функцию (VI.2) будем характеризовать следующими признаками: 1) полиномы, образованные из Y матрицы схемы и определяющие схемную функцию; 2) граничные степени $\{r_i, t_i\}$; 3) тип числового ряда степеней p в полиномах числителя и знаменателя (спектр степеней); 4) соотношения значений граничных степеней и типов спектров у полиномов схемной функции; 5) характеристика коэффициентов схемной функции.

Пусть $F(p)$ — передаточная функция по напряжению

$$F(p) = \frac{u_2}{u_1} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} = \frac{1,2p^2 + 1,0p^0 + 1,2p^{-2}}{1,4p^3 + 1,2p^2 + p + 0,7p^0 + 1,0p^{-1} + p^{-2}}.$$

Тогда ее признаки такие:

- 1) определяющие полиномы Δ_{12}, Δ_{11} ;
- 2) граничные степени $r_{12} = r_1 = -2, r_{11} = r_2 = -2; t_{12} = t_1 = 2, t_{11} = t_2 = 3$;
- 3) ряд степеней p в числителе — четные числа $\{+2, 0, -2\}$; ряд степеней p в знаменателе — последовательность целых чисел от -2 до $+3$;
- 4) нижние граничные степени p числителя и знаменателя совпадают, верхние отличаются на единицу;
- 5) коэффициенты функции — действительные положительные числа и значения коэффициентов числителя не превышают значения коэффициентов знаменателя.

Изменение формы представления (VI.2) путем изменения α приводит только к изменению ряда степеней p , включая и граничные. Остальные признаки функции не меняются.

Известно [4, 10], что у реальных схем модули граничных степеней $\{|r_1|, |r_2|, |t_1|, |t_2|\}$ не могут превышать число n узлов цепи:

$$n > \max \{|r_i|, |t_i|\}, \quad (\text{VI.3})$$

а число n_L L -элементов или число n_C C -элементов, не образующих замкнутый контур в схеме, подчинены неравенствам

$$\left. \begin{aligned} n_C &\geq \max \{t_i\}, \quad t_i > 0; \\ n_L &\geq \max \{|r_i|\}, \quad r_i < 0; \\ n_R &\geq \max \{(n-1-n_C), (n-1-n_L)\}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.4})$$

Так, например, если в выражении (VI.2) хотя бы одно значение степени p^k равно десяти, то в схеме число емкостных элементов, не образующих контур, не может быть

менее десяти. Если же $k = -5$, то в схеме должно быть не менее пяти индуктивных элементов, не образующих контур. Таким образом, величины граничных степеней схемных функций связаны с топологией схемы, числом узлов, числом и типом элементов. Следовательно, выбор α , т. е. форма представления $F(p)$, определяет физическую сущ-

Таблица 4

Минимальное число элементов схемы	Вариант схемы			
	I	II	III	IV
n_L	1	2	3	4
n_C	9	9	9	9
n_R	7	5	3	1

ность задаваемой схемной функции в смысле ее реализуемости определенной электрической схемой. Формально величина α может быть любым целым числом. Однако условия физической и схемной реализуемости ограничивают возможные значения α . Так, при $\alpha \geq 0$ схемные функции не могут быть реализованы в RL -базисе, а при $\alpha < 0$ — в RC -базисе.

Таблица 5

Минимальное число элементов схемы	Вариант схемы	
	I	II
n_L	5	5
n_C	4	5
n_R	2	1

Каждому представлению (VI.2) соответствует некоторое минимально допустимое число узлов и элементов цепи. Из формулы (VI.3) следует, что потенциально минимально допустимое число узлов схемы, реализующей функцию (VI.1), будет обеспечено, если $\alpha = -[0, 5 \max \{d_1, d_2\}]$. При реализации функции $F(p)$ число узлов в принципе может

быть сколько угодно увеличено сверх минимально допустимого.

Выше указаны только самые очевидные зависимости между формой представления схемной функции и топологическими особенностями схемы-pretендента, которая должна быть взята для ее реализации. Ниже дается детальное исследование этого вопроса и показано, как для каждого представления схемной функции перечислить свой набор топологий схем-pretендентов.

Схемы, обеспечивающие при минимальном числе узлов минимум числа элементов хотя бы одного типа, будем называть схемами минимальной структуры.

Пример 1. Пусть даны две функции:

$$F_1(p) = z_{\text{вх}} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \frac{a_0 p^0 + a_1 p^1 + \dots + a_9 p^9}{a_{10} p^0 + a_{11} p^1 + \dots + a_{19} p^9};$$

$$F_2(p) = \frac{a_0 p^{-5} + a_1 p^{-4} + \dots + a_9 p^{-4}}{a_{10} p^{-5} + a_{11} p^{-4} + \dots + a_{19} p^{-4}}, \quad \alpha = -5,$$

отличающиеся формой представления.

Для реализации функции $F_1(p)$ схема-претендент может быть выполнена в RC -базисе и должна содержать $n_{\min} = 10$ узлов, $(n_L)_{\min} = 0$; $(n_C)_{\min} = 9$; $(n_R)_{\min} = 9$. При ее реализации в RLC -базисе при том же числе ($n_{\min} = 10$) узлов может быть уже четыре варианта набора элементов (четыре схемы минимальной структуры) при $(n_C)_{\min} = 9$ (табл. 4).

Реализацию функции $F_2(p)$ нельзя осуществить в RC -базисе, так как отрицательные степени оператора могут быть получены только при наличии в схеме индуктивных элементов. При этом схема должна содержать минимум $n_{\min} = 7$ узлов и возможны два варианта наборов элементов ($(n_L)_{\min} = 5$) (табл. 5).

Для функции $F_1(p)$ число элементов в схемах минимальных структур $N_s = 14 \div 18$, а для реализации функции $F_2(p) - N_s = 11$, т. е. реализация второй функции «экономичнее» первой. Примеры схем-претендентов минимальной структуры приведены на рис. 49, а, б и соответствуют четвертому и второму варианту наборов элементов, реализующих $F_1(p)$ и $F_2(p)$ соответственно. Можно привести и другие схемы минимальной структуры, которые будут удовлетворять по форме заданным функциям $F_1(p)$ и $F_2(p)$.

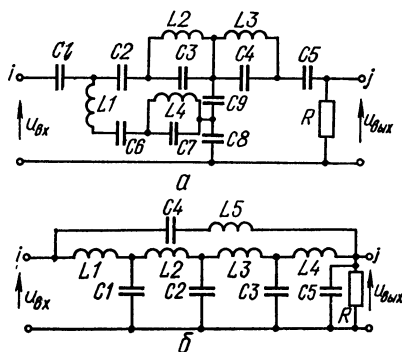


Рис. 49

2. Структурные параметры графа схемы и граничные степени

Выявление связи указанных признаков схемных функций со структурой схемы наиболее удобно проводить, анализируя топологические соотношения в графах проводимостей схем.

Ненаправленный граф проводимостей линейной взаимной RLC -схемы, образованной двухполюсными элементами, по структуре подобен самой схеме: узлы схемы отображаются вершинами графа, а ветви — ребрами. Вес ребер принимается равным значению проводимости отображаемой им ветви. Для резистивной ветви операторная проводимость

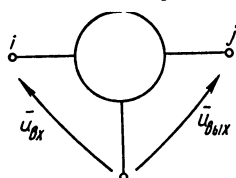


Рис. 50

$1/R = p^0g$, для емкостной — pC , для индуктивной $1/pL = p^{-1}L$. Степень α оператора p^α в весе ребра будем называть степенью ребра.

Направленный граф проводимостей взаимной RLC -схемы, состоящей из двухполюсных элементов, получается из ненаправленного графа путем замены его ребер парой противоположно ориентированных дуг, имеющих каждая тот же вес, что и ребро. Направленный граф проводимостей многополюсной взаимной или невзаимной линейной схемы строится на основе графов проводимостей, соответствующих RLC -схемам отдельных ее элементов, по правилам, приведенным в работе [7], или по графам многополюсников, эквивалентных схемам замещения с двухполюсными элементами.

Известно [7, 42], что все параметры z , y , a , h трехполюсной подсхемы могут быть выражены через определитель Δ матрицы коэффициентов в системе уравнений, составленных по методу узловых напряжений, или через алгебраические дополнения элементов этой матрицы Δ_{ii} , Δ_{jj} , Δ_{ij} , Δ_{ji} , Δ_{iij} , где индексы i и j — соответственно номера входного и выходного полюсов трехполюсной подсхемы. Буквой r обозначается номер базисного полюса (общего для входа и выхода схемы, приведенной на рис. 50). Выражение параметров трехполюсной подсхемы через полиномы Δ и $\{\Delta_k\} = \{\Delta_{ii}, \Delta_{jj}, \Delta_{ij}, \Delta_{ji}, \Delta_{iij}\}$, $k = 1, 2, \dots, 5$, приведено в табл. 6.

Проводимый ниже анализ справедлив только для схем с двухполюсными R -, L - и C -элементами, параметры которых неотрицательны. Каждый из полиномов Δ и $\{\Delta_k\}$ мо-

жет быть представлен суммой прадеревьев либо графа проводимостей цели G , либо суммой прадеревьев одного из пяти производных от него графов $\{G_{ii}, G_{jj}, G_{ij}, G_{ji}, G_{iijj}\}$. Граф G_{ii} (или граф G_{jj}) получается из графа G исключением из него дуг, заходящих в вершину x_r , соответствующую базисному узлу r подсхемы, и совмещением этой вершины

Таблица 6

Параметр	Индекс параметра			
	11	12	21	22
z	$\frac{u_1}{i_1} \Big _{i_2=0} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta}$	$\frac{u_1}{i_2} \Big _{i_1=0} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta}$	$\frac{u_2}{i_1} \Big _{i_2=0} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta}$	$\frac{u_2}{i_2} \Big _{i_1=0} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta}$
y	$\frac{i_1}{u_1} \Big _{u_2=0} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{1122}}$	$\frac{i_1}{u_2} \Big _{u_1=0} = -\frac{\Delta_{21}}{\Delta_{1122}}$	$\frac{i_2}{u_1} \Big _{u_2=0} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{1122}}$	$\frac{i_2}{u_2} \Big _{u_1=0} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{1122}}$
a	$\frac{u_1}{u_2} \Big _{i_2=0} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{12}}$	$\frac{u_1}{i_2} \Big _{u_2=0} = -\frac{\Delta_{1122}}{\Delta_{12}}$	$\frac{i_1}{u_2} \Big _{i_2=0} = \frac{\Delta}{\Delta_{12}}$	$\frac{i_1}{i_2} \Big _{u_2=0} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{12}}$
h	$\frac{u_1}{i_1} \Big _{u_2=0} = \frac{\Delta_{1122}}{\Delta_{22}}$	$\frac{u_1}{u_2} \Big _{i_1=0} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{22}}$	$\frac{i_2}{i_1} \Big _{u_2=0} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{22}}$	$\frac{i_2}{u_2} \Big _{i_1=0} = \frac{\Delta}{\Delta_{22}}$

x_r с вершиной x_i (или вершиной x_j). Получающиеся при объединении вершин петли удаляются из графа. Объединенная вершина x_0 принимается за корень прадеревьев.

Граф G_{ij} (или G_{ji}) при $i \neq j$ получается из графа G путем исключения дуг, заходящих в базисную вершину x_r , и объединения вершины x_r с вершиной x_i (или x_j). Петли исключаются, но в отличие от графа G_{ii} (или G_{jj}) за корень принимается вершина x_j (или x_i).

Граф G_{iijj} получается из графа G путем исключения дуг, заходящих в его базисную вершину, и совмещения в одну вершину трех вершин x_r , x_j и x_i . Объединенная вершина x_0 принимается за корень прадеревьев. Образовавшиеся петли удаляются из графа. При несимметричном графе

G за корень его прадревьев принимается базисная вершина x_r ; в симметричном графе G за корень может быть взята любая его вершина [7].

Ввиду того что в производных графах из объединенной вершины x_0 исходят однонаправленные дуги, эти графы не являются симметричными, а значит представляются только направленными графами.

Граф G и каждый из графов $\{G_k\}$ характеризуются своими структурными параметрами: числом n вершин, числами n_C, n_L, n_R соответственно C -, L -, R -элементов, их общим числом $N_s = n_C +$

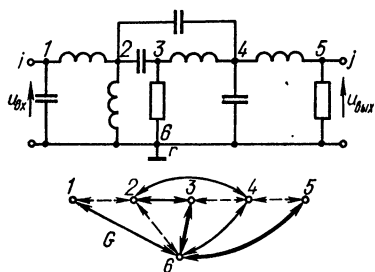


Рис. 51

$+ n_L + n_R$, числами S_C, S_L, S_{RC}, S_{RL} компонентов связности в частичных C -, L -, RC -, RL - графах [7, 41], получаемых из исходного графа. Частичный C -граф получается путем удаления из графа всех дуг, кроме C -дуг; L -граф получается при удалении из графа всех дуг, кроме L -дуг; RC -граф состоит только из R - и

C -дуг графа, а RL -граф образован только R - и L -дугами графа. Эти структурные параметры графов позволяют определить граничные степени полиномов и их соотношения в числителях и знаменателях схемных функций. В симметричном графе всегда L -дуга, смежная с некоторой вершиной, входит в прадревье T , минимальной степени r , а C -дуга, смежная с той же вершиной, входит в прадревье T_t максимальной степени t . Для несимметричных графов это утверждение в общем случае не справедливо.

Граничные степени деревьев в симметричном ненаправленном и направленном связных графах определяются зависимостями:

$$\begin{aligned} t &= n - (S_C + S_{RC}) + 1; \\ r &= -[n - (S_L + S_{RL}) + 1]. \end{aligned} \quad (\text{VI.5})$$

Очевидно, что $1 \leq S_{RL} \leq S_L \leq n$; $1 \leq S_{RC} \leq S_C \leq n$ и при $S_C = 1$ $S_{RC} = 1$, а при $S_L = 1$ $S_{RL} = 1$. Например, граничные степени прадревьев в графе G (рис. 51) будут: $t = 6 - (2 + 1) + 1 = 4$; $r = [6 - (2 + 1) + 1] = -4$, где $n = 6$; $S_C = 2$; $S_L = 2$; $S_{RC} = 1$; $S_{RL} = 1$.

Если граф несимметричный, т. е. содержит однонаправ-

ленные дуги, то в принципе формулы (VI.5) не пригодны для определения граничных степеней. Однако если относительно однонаправленных дуг известно, что каждая из них входит хотя бы в одно прадререво, то значения граничных степеней прадревьев в таком несимметричном графе могут быть определены по формулам (VI.5). Если в графе есть однонаправленные дуги, которые не входят ни в одно из прадревьев, то формулы применимы лишь при условии, что при подсчете числа компонентов связности в частичных графах такие дуги будут обязательно исключены из соответствующих частичных графов.

В графах G_{ii} , G_{jj} , G_{iij} все однонаправленные дуги, как исходящие из корневой вершины, будут принимать участие хотя бы в одном прадреве этого графа и поэтому формулы (VI.5) без каких либо ограничений могут быть использованы для определения граничных степеней прадревьев в этих графах. За счет объединения вершин при получении графов G_{ii} и G_{jj} из графа G число вершин в них уменьшается на единицу по сравнению с графом G . Поэтому зависимости (VI.5) запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} t_{ii} &= n - (S_{C,ii} + S_{RC,ii}); & t_{jj} &= n - (S_{C,jj} + S_{RC,jj}); \\ r_{ii} &= -[n - (S_{L,ii} + S_{RL,ii})]; \\ r_{jj} &= -[n - (S_{L,jj} + S_{RL,jj})]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.6})$$

Для схем, состоящих исключительно из L - и C -элементов, в их графах не будет R -дуг. Поэтому $S_C = S_{RC}$; $S_L = S_{RL}$ и зависимости (VI.5), (VI.6) примут вид

$$\left. \begin{aligned} t &= n - 2S_C + 1; & r &= -(n - 2S_L + 1); \\ t_{ii} &= n - 2S_{C,ii}; & r_{ii} &= -(n - 2S_{L,ii}); \\ t_{jj} &= n - 2S_{C,jj}; & r_{jj} &= -(n - 2S_{L,jj}). \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.7})$$

В формулах (VI.6) и (VI.7) индексы ii и jj при S указывают на определение числа компонентов связности из частичных графов G_{ii} и G_{jj} .

Если совмещаемые вершины x , и x_i (или x , и x_j) принадлежали разным компонентам связности в частичных графах графа G , то число компонентов в аналогичных частичных графах графов G_{ii} (G_{jj}) уменьшится по сравнению с их числом в частичных графах графа G на единицу. Если объединяемые вершины принадлежали одному компоненту частичного графа, то число компонентов при объединении вершин не изменится. Анализ возможных ситуаций для всех частичных графов и вычисления по формулам (VI.6) и

(VI.7) показывают, что граничные степени прадеревьев графов G_{ii} (G_{jj}) и G не могут различаться более, чем на единицу, т. е.

$$r - 1 \leq (r_{ii}, r_{jj}) \leq r + 1; \quad t - 1 \leq (t_{ii}, t_{jj}) \leq t + 1. \quad (\text{VI.8})$$

Проводя аналогичные рассуждения для графа G_{iij} , получаем зависимости для определения граничных степеней r_{iij} и t_{iij} прадеревьев этого графа

$$\begin{aligned} t_{iij} &= n - (S_{c,u_{ij}} + S_{RG,u_{ij}}) - 1; \\ r_{iij} &= -[n - (S_{L,u_{ij}} + S_{RL,u_{ij}})] - 1, \end{aligned} \quad (\text{VI.9})$$

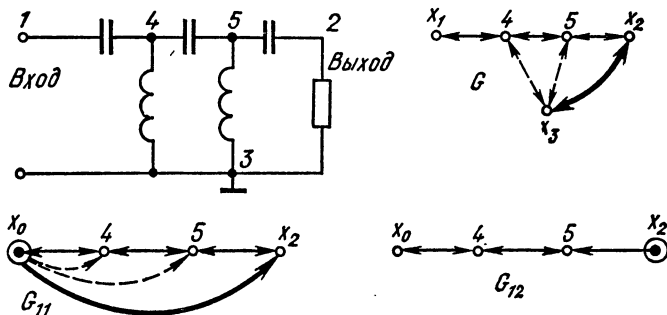


Рис. 52

а для возможных отклонений граничных степеней прадеревьев графов G_{ii} и G_{iij} соотношения

$$\left. \begin{aligned} r - 2 \leq r_{iij} \leq r + 2; \quad t - 2 \leq t_{iij} \leq t + 2; \\ r_{ii} - 1 \leq r_{iij} \leq r_{ii} + 2; \quad t_{ii} - 1 \leq t_{iij} \leq t_{ii} + 1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.10})$$

Таким образом, отклонение граничных степеней прадеревьев графов G_{iij} от граничных степеней графов G не превышает числа два, а от граничных степеней графов G_{ii} , G_{jj} — единицы.

В графах G_{ij} и G_{ji} , $i \neq j$, однонаправленные дуги исходят из объединенной вершины x_0 , которая не является корнем, и поэтому возможны случаи, когда отдельные из этих дуг не участвуют в образовании прадеревьев. Тот факт, что отмеченные однонаправленные дуги (x_0, x_s) исходят из одной вершины x_0 , позволяет выявить те из них, которые не войдут ни в одно из прадеревьев. Признаком отсутствия дуги (x_0, x_s) в любом прадереве является то, что в графе все возможные пути из корня в вершину x_0 (исток однонаправленной дуги) обязательно проходят через сток x_s этой же дуги (x_0, x_s) . Исключение однонаправленной дуги не изменяет число компонентов связности, если эта дуга

образует контур с остальными дугами частичного графа. Ее удаление в этом случае не нарушает связности компонентов. Если исключаемых дуг нет или их исключение не изменяет числа компонентов, то граничные степени графов G_{ij} (G_{ji}) и $G_{,i}$ ($G_{,j}$) могут быть одинаковыми, так как сохраняются неизменными структурные параметры этих графов и лишь меняется корень.

Пр и м е р 2. Для схемы, данной на рис. 52, граничные степени графа G_{11} , найденные по выражениям (VI.6), (VI.7), где $S_{C,11} = 1$; $S_{RC,11} = 1$; $S_{L,11} = 2$; $S_{RL,11} = 1$ будут:

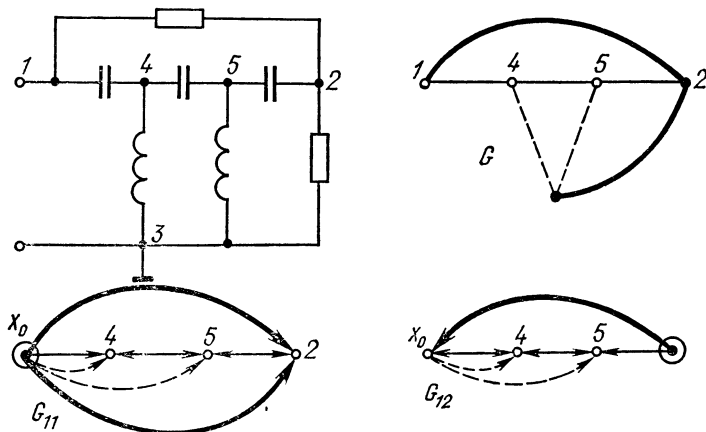


Рис. 53

$t_{11} = 5 - (1 + 1) = 3$; $r_{11} = -(5 - (2 + 1)) = -2$. В графе G_{12} исключению подлежат L -дуги (x_0, x_4) и (x_0, x_5) и R -дуга (x_0, x_2) , как заходящая в корень. Тогда граф G_{12} принимает вид, показанный на рис. 52. В нем имеется единственное прадерево с корнем x_2 , его степень $r_{12} = t_{12} = +3$. Действительно, $S_{C,12} = 1$; $S_{RC,12} = 1$; $S_{L,12} = 4$; $S_{RL,12} = 4$, тогда по формулам (VI.6), (VI.7) найдем $t_{12} = 5 - (1 + 1) = +3$; $r_{12} = -(5 - (4 + 4)) = +3$.

Пр и м е р 3. Для схемы, представленной на рис. 53, из графов G_{11} и G_{12} получим: $S_{C,11} = 1$; $S_{RC,11} = 1$; $S_{L,11} = 2$; $S_{RL,11} = 1$; $S_{G,12} = 1$; $S_{RC,12} = 1$; $S_{L,12} = 2$; $S_{RL,12} = 1$, откуда $t_{11} = 5 - (1 + 1) = +3$; $r_{11} = -(5 - (2 + 1)) = -2$; $t_{12} = 5 - (1 + 1) = +3$; $r_{12} = -(5 - (2 + 1)) = -2$, т. е. граничные степени прадеревьев графов G_{11} и G_{12} совпадут.

Анализ показал, что исключаемые дуги появляются только в графах схем вполне определенной лестничной

структуры (см. рис. 45, 52). Из-за увеличения числа компонентов связности при исключении дуг в частичных графах G_{ij} и G_{ji} в соответствии с формулой (VI.6) граничные степени графа G_{ij} (или G_{ji}) по отношению к граничным степеням графов G_{ii} (или G_{jj}) могут быть только в пределах чисел, определяемых нижней и верхней граничной степенью прадеревьев графов G_{ii} и G_{jj} , т. е.

$$|r_{ij}| \leq |r_{ii}|; |t_{ij}| \leq |t_{ii}|; |r_{ji}| \leq |r_{jj}|; |t_{ji}| \leq |t_{jj}|. \quad (\text{VI.11})$$

Кроме того, так как удаление дуг только обедняет состав графа, то среди прадеревьев графов G_{ij} и G_{ji} вообще не может быть прадеревьев, которые не содержались в графах G_{ii} и G_{jj} , если граф G симметричный [7].

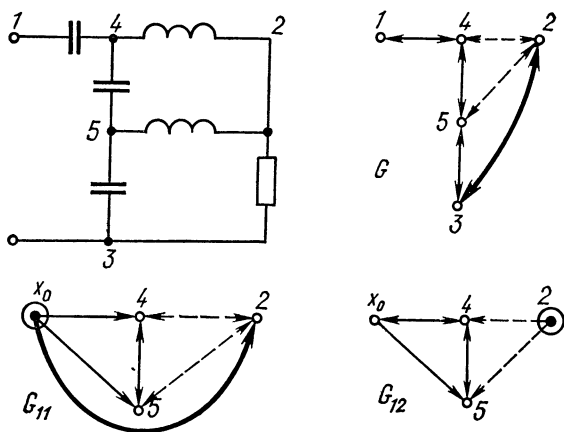


Рис. 54

Исследования различных схем при $n = \text{const}$ с целью выяснения возможных отклонений граничных степеней прадеревьев показали, что при переходе от графа цепи G к графам $\{G_k\}$ можно получить различные значения граничных степеней в одних и тех же графах $\{G_k\}$, если изменять нумерацию вершин исходного графа так, что каждый раз будут взяты другие вершины для внешних полюсов подсхемы.

Пример 4. Переименуем узлы в схеме, данной на рис. 52, так, как показано на рис. 54, вычислим граничные степени прадеревьев графов G_{11} и G_{12} : $S_{C,11} = 2$; $S_{RC,11} = 1$; $S_{L,11} = 2$; $S_{RL,11} = 1$; $t_{11} = 5 - (2 + 1) = +2$; $r_{11} = -(5 - (2 + 1)) = -2$; $S_{C,12} = 2$; $S_{RC,12} = 2$; $S_{L,12} = 2$; $S_{RL,12} = 2$; $t_{12} = 5 - (2 + 2) = +1$; $r_{12} = -(5 - (2 +$

+ 2)) = -1. Как видно, они существенно изменились по отношению друг к другу и к граничным степеням основного графа G , для которого, как симметричного графа, в обоих случаях получим $S_C = 2$; $S_{RC} = 1$; $S_L = 3$; $S_{RL} = 2$; $t = 5 - (2 + 1) + 1 = +3$; $r = -(5 - (3 + 2) + 1) = -1$.

Таблица 7

r_{ij}	t_{ii}	Минимальное число вершин		
(r_{ij})	(t_{ij})	$ r > t $	$ r = t $	$ r < t $
$r - 1$	$t - 1$	$n = r - 1 + 2$	$n = r - 1 + 2$	при $ t = r - 1 $ $n = t + 2$ при $ E > r - 2 $, $n = t + 1$
$r - 1$	t	$n = r - 1 + 2$	$n = r - 1 + 2$	$n = t + 2$
$r - 1$	$t + 1$	$n = r - 1 + 2$	$n = r - 1 + 2$	$n = t + 2$
r	$t - 1$	$n = r + 2$	$n = r + 2$	$n = t + 2$
r	t	$n = r + 2$	$n = r + 2$	$n = t + 2$
r	$t + 1$	$n = r + 2$	$n = t + 1 + 2$	$n = t + 1 + 2$
$r + 1$	$t - 1$	$n = r + 1$	$n = r + 1$	$n = t + 1$
$r + 1$	t	$n = r + 1$	$n = r + 2$	$n = t + 1$
		при $ t =$ $= r - 1$		
$r + 1$	$t + 1$	$n = t + 1 + 2$ при $ t > r $ $n = r + 1$	$n = t + 1 + 2$	$n = t + 1 + 2$

В общем случае с помощью перенумерации вершин не удастся получить произвольные соотношения граничных степеней.

Чтобы обеспечить заданные соотношения граничных степеней, граф G схемы должен иметь число вершин не менее некоторого определенного числа n . В табл. 7, 8 приведены необходимые минимальные значения числа вершин в графе, вычисленные для заданных отклонений граничных степеней r_{ijj} , r_{ii} , r_{jj} от r и t_{ijj} , t_{ii} , t_{jj} от t с помощью зависимостей (VI.6) — (VI.9).

Данные табл. 7 относятся к схемам, характеризуемым двумя полиномами Δ и Δ_{kk} , $k = i, j$; данные табл. 8 — к схемам, характеризуемым тремя и более полиномами. Например, Δ , Δ_{ii} , Δ_{ij} или Δ , Δ_{ii} , Δ_{jj} , Δ_{ijj} и т. д. Если заданы

Таблица 8

Минимально необходимое число вершин											
r_{ij} (t_{ii})	r_{ii} (t_{jj})	r_{jii}	t_{ij} (t_{ii})	t_{ii} (t_{jj})	t_{jii}	t_{ij} (t_{ii})	t_{ii} (t_{jj})	t_{jii}	t_{ij} (t_{ii})	t_{ii} (t_{jj})	t_{jii}
t	t	t	t	t	$t-1$	t	t	$t-1$	t	$t+1$	$t-1$
r	r	r	$n = \max\{ r , t \} + 3$	при $ r \geq t $ $n = r + 3$	при $ r \geq t $ $n = r + 3$	при $ r > t $ $n = r + 3$	при $ r > t $ $n = r + 3$	при $ r \geq t $ $n = r + 3$	при $ r \geq t $ $n = r + 3$	при $ r > t $ $n = r + 3$	при $ r \geq t $ $n = r + 3$
r	r	$r+1$	при $ r > t $ $n = r + 2$	при $ t > r $ $n = t + 2$	при $ r > t $ $n = \max\{ r , t \} + 2$	при $ r > t $ $n = r + 2$	при $ t > r $ $n = t + 2$	при $ r > t $ $n = r + 2$	при $ t > r $ $n = t + 2$	при $ r > t $ $n = r + 2$	при $ t > r $ $n = t + 2$
r	$r-1$	$r-1$	при $ r-1 \geq t $ $n = r + 4$	при $ r \geq t $ $n = r + 4$	при $ r \geq t $ $n = r + 4$	при $ r-1 \geq t $ $n = r + 4$	при $ r \geq t $ $n = r + 4$	при $ r \geq t $ $n = r + 4$	при $ t \geq r $ $n = t + 4$	при $ r \geq t $ $n = \max\{ r , t \} + 4$	при $ r \geq t $ $n = r + 4$
r	$r+1$	$r+1$	при $ r > t $ $n = r + 3$	при $ r > t $ $n = t + 3$	при $ r > t $ $n = \max\{ r , t \} + 2$	при $ r > t $ $n = r + 2$	при $ t > r $ $n = t + 2$	при $ r > t $ $n = r + 2$	при $ t > r $ $n = t + 2$	при $ r > t $ $n = \max\{ r , t \} + 2$	при $ t > r $ $n = t + 2$

$r - 1$	$r - 1$	$n = \max \{ r , t \} + 3$	при $ r \geq t $ $n = r + 3$ при $ t > r $ $n = t + 2$	при $ r > t $ $n = r + 3$ при $ t \geq r $ $n = t + 4$	при $ r \geq t $ $n = r + 3$ при $ t > r $ $n = t + 2$
$r - 1$	$r + 1$	$n = \max \{ r , t \} + 3$	при $ r \geq t $ $n = r + 3$ при $ t > r $ $n = t + 2$	при $ r > t $ $n = r + 3$ при $ t \geq r $ $n = t + 4$	при $ r \geq t $ $n = r + 3$ при $ t > r $ $n = t + 2$
$r + 1$	$r + 1$	при $ r > t $ $n = r + 1$ при $ t \geq r $ $n = t + 3$	при $ r > t $ $n = r + 1$ при $ t \geq r $ $n = t + 2$	при $ r > t $ $n = r + 1$ при $ t \geq r $ $n = t + 4$	при $ r > t $ $n = r + 1$ при $ t \geq r $ $n = t + 2$
$r - 1$	$r - 1$	при $ r - 2 \geq t$ $n = r + 5$ при $ t > r $ $n = t + 3$	при $ r \geq t $ $n = r + 5$ при $ t > r $ $n = t + 2$	при $ r \geq t $ $n = r + 5$ при $ t > r $ $n = t + 4$	при $ r > t $ $n = r + 5$ при $ t > r $ $n = t + 2$

Минимально необходимое число вершин

r_{ij} (r_{11})	r_{ii} (r_{jj})	r_{jii}	Минимально необходимое число вершин														
			t_{ij} (t_{ii})	t_{ji}	t_{jji}	t_{ij} (t_{ii})	t_{ji}	t_{jji}	t_{ii} (t_{jj})	t_{jj} (t_{ii})	t_{jii}	t_{ii} (t_{jj})	t_{jj} (t_{ii})	t_{jii}			
			$t+1$	t_i (t_{jj})	t_{jii}	t_{ij} (t_{ii})	t_{ji}	t_{jji}	t_{ii} (t_{jj})	t_{jj} (t_{ii})	t_{jii}	t_{ii} (t_{jj})	t_{jj} (t_{ii})	t_{jii}	$t+1$	$t+1$	$t+2$
			$t+1$	t	t	$t+1$	$t-1$	t	$t-1$	$t-1$	$t-2$	$t-1$	$t-2$	$t+1$	$t+1$	$t+2$	$t+2$
r	r	r	$n = \max\{ r , t \} + 3$	$n = \max\{ r , t \} + 3$		$n = \max\{ r , t \} + 3$			при $ r \geq t $ $n = r + 3$			при $ r \geq t $ $n = r + 3$		при $ r > t $ $n = r + 3$			
r	r	$r+1$	при $ r > t $ $n = r + 2$	при $ r > t $ $n = r + 2$		при $ r > t $ $n = r + 2$			при $ r \geq t $ $n = t + 1$			при $ r \geq t $ $n = t + 1$		при $ r > t $ $n = t + 1$			
r	$r-1$	$r-1$	при $ r-1 \geq t $ $n = r + 4$	при $ r-1 \geq t $ $n = r + 4$		при $ r-1 \geq t $ $n = r + 4$			при $ r \geq t $ $n = t + 1$			при $ r \geq t $ $n = t + 1$		при $ r > t $ $n = t + 1$			
r	$r+1$	$r+1$	при $ t > r $ $n = t + 3$	при $ t > r $ $n = t + 3$		при $ t > r $ $n = t + 3$			при $ r \geq t $ $n = r + 2$			при $ r \geq t $ $n = r + 2$		при $ t > r $ $n = t + 2$			

$r-1$	$r-1$	$n = \max\{ r , t \} + 3$	$n = \max\{ r , t \} + 3$	при $ r \geq t $ $n = r + 3$ при $ t \geq r $ $n = t + 1$	при $ r > t $ $n = r + 3$ при $ t \geq r $ $n = t + 5$
$r-1$	$r+1$	$n = \max\{ r , t \} + 3$	$n = \max\{ r , t \} + 3$	при $ r \geq t $ $n = r + 3$ при $ t \geq r $ $n = t + 1$	при $ r \geq t $ $n = r + 3$ при $ t \geq r $ $n = t + 1$
$r+1$	$r+1$	при $ r > t $ $n = r + 1$ при $ t \geq r $ $n = t + 3$	при $ r > t $ $n = r + 1$ при $ t \geq r $ $n = t + 3$	$n = \max\{ r , t \} + 1$	при $ r > t $ $n = r + 1$ при $ r \leq t $ $n = t + 5$
$r-1$	$r-2$	при $ r \geq t $ $n = r + 5$ при $ t > r $ $n = t + 3$	при $ r \geq t $ $n = r + 5$ при $ t > r $ $n = t + 3$	при $ r \geq t $ $n = r + 5$ при $ t > r $ $n = t + 1$	$n = \max\{ r , t \} + 5$

полиномы Δ_{ij} и Δ_{ji} , то значения их граничных степеней должны не противоречить зависимости (VI.11). Если какие-либо полиномы не заданы, то их граничные степени могут быть приняты в рамках данных табл. 8. Тогда число узлов схемы выбирается в соответствии с рекомендациями таблиц по заданным и принятым величинам граничных степеней. В этом случае может быть выбрано несколько вариантов значений граничных степеней для незаданных полиномов и, следовательно, получено несколько вариантов числа узлов.

Таким образом, по граничным степеням заданных схемных функций можно определить минимально необходимое число узлов синтезируемой схемы, а по зависимостям (VI.4) — число элементов различных типов.

3. Топологии и спектры степеней

В зависимости от состава элементов схемы ее граф может содержать прадеревья, степени которых¹ будут представлять вполне определенную последовательность чисел, начиная от минимальной r и кончая максимальной степенью t . В любом графе все прадеревья образованы четным или нечетным (в зависимости от четности числа вершин графа) числом дуг. Если степени дуг равны $+1$ или -1 , что справедливо для LC -графа, то степени прадеревьев, равные сумме степеней образующих их дуг, будут либо все четные, либо все нечетные, как суммы четного или нечетного числа единиц с разными знаками. В случае RL -, RC - или RLC -графов возможны как четные, так и нечетные степени прадеревьев, поскольку в зависимости от числа R -дуг, входящих в прадеерево и имеющих нулевую степень, будет суммироваться либо четное, либо нечетное число единиц, являющихся степенями остальных L - или C -дуг прадеререва. Но если структура RLC -графа такова, что в любом его прадереве содержится всегда постоянное число R -дуг, то степени всех прадеревьев такого графа тоже будут, как и в случае LC -графа, либо четными, либо нечетными числами. Ясно, что такой граф должен иметь определенную структуру. Подобной структурой является шарнирная, граф которой содержит двухполюсный шарнирный R -под-

¹ Степенью прадеререва называют показатель степени p в весе прадеререва (в произведении всех весов дуг прадеререва).

граф¹, соединенный с остальными частями графа не более, чем двумя вершинами (рис. 55).

Следовательно, от топологии зависит тип спектра степеней оператора в схемных функциях, а зная тип спектра, можно сделать предположение о структуре схемы.

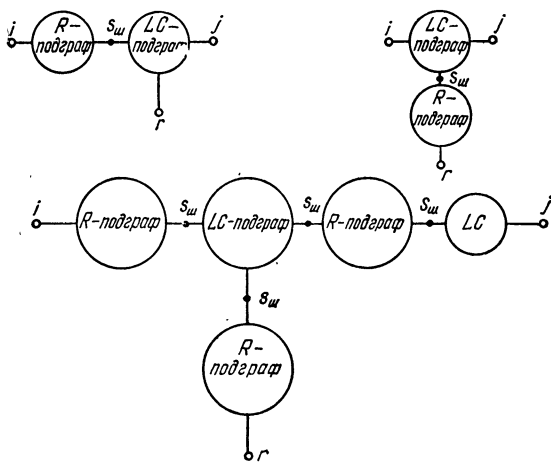


Рис. 55

Для возможных типов числовых последовательностей, образуемых степенями всех без исключения прадеревьев графов, имеет место следующая лемма.

Лемма [8]. От прадререва T_1 с заданным корнем всегда можно перейти к прадререву T_2 с тем же корнем этого же графа путем поочередной замены одной из дуг, принадлежащей прадререву T_1 , дугой, принадлежащей прадререву T_2 , выбранных таким образом, что частичный граф, получаемый после каждой замены дуг, является прадревом².

В дальнейшем индекс r или t в обозначении прадререва означает его степень r , t .

В графах LC -, LR -, CR -схем при каждом шаге перехода от прадререва $T_1 = T_r$ к прадререву $T_2 = T_t$ степень нового прадререва не зависит от порядка замены, если заменялись однородные дуги, либо увеличивается каждый раз на

¹ Шарнирным называют подграф, связанный с остальной частью графа через одну или две шарнирные вершины. Шарнирная вершина — вершина, удаление которой со смежными ей дугами нарушает связность графа. На рис. 55 — вершины $s_{ш}$ шарнирные.

² Здесь и далее все утверждения относительно прадеревьев направленных графов справедливы и для деревьев ненаправленных графов.

величину, равную разности степеней элементов базиса, если заменялись неоднородные дуги. Если степень нового прадерева не остается неизменной, то при замене дуг прадерева $T_1 = T_t$ на дуги прадерева $T_2 = T_r$, она с каждым шагом замены будет уменьшаться на величину, равную разности степеней p элементов базиса. Эта разность в LC -базисе равна двум, а в RL - и RC -базисах — единице. Исходя из этого можно сделать следующие выводы.

В LC -графах степени прадеревьев будут в общем случае исчерпывать все числа непрерывного ряда только четных или только нечетных чисел в пределах от r до t , где r и t — граничные степени прадеревьев в графе. Эту последовательность четных или нечетных чисел назовем *гребенчатым* спектром степеней. Следовательно, если граф G образован только LC -дугами, то его спектр степеней и спектр степеней графа G_{ijij} — гребенчатые, спектры степеней графов G_{ii} , G_{ji} , G_{ij} и G_{ji} также гребенчатые, но другой четности, вследствие разной четности числа вершин в этих графах.

В любых RL - или RC -графах графов $\{G_k\}$ и G прадеревья будут исчерпывать все числа натурального ряда чисел от r_k до t_k , причем в RC -графах спектр степеней — это не отрицательные числа, а в RL -графах — не положительные. Такой вид спектра назовем *сплошным*.

Для графов RLC -схем разность степеней элементов базиса может быть — 1, 0, 1, 2. Поэтому в зависимости от порядка замены дуг при переходе от одного прадерева к другому будет каждый раз получаться иной ряд чисел. Перевзав все возможные способы замен и составив список всех полученных степеней прадеревьев, можно определить тип спектра. Имеет место следующая теорема [10].

Теорема 1. Для того, чтобы степени прадеревьев связанного графа исчерпывали все числа непрерывного ряда целых чисел в пределах, определяемых степенями r , t двух разных его LC -прадеревьев, необходимо и достаточно, чтобы в графе кроме L - и C -дуг были введены хотя бы две противоположно ориентированные R -дуги, смежные с одной и той же парой вершин.

При введении таких R -дуг в связный LC -граф они будут образовывать нешарнирный R -подграф. В теореме 1 утверждается, что введение двух противоположно ориентированных R -дуг приводит к тому, что в LC -графе с LC -прадеревьями T_r и T_t появятся прадеревья, степени которых будут принадлежать непрерывному ряду целых чисел от r до t , и ничего не говорится о том, появятся или нет прадеревья,

степени которых выходят за пределы этих чисел. Проанализировав все условия образования прадеревьев со степенями, выходящими за пределы $(r' - t')$, можно доказать следующую теорему [11].

Теорема 2. Для того, чтобы степени прадеревьев графа проводимостей LC -цепи, содержащего прадеревья, степени которых находятся в пределах $(r - t)$, и дополненного двухнаправленной R -дугой, не выходили за пределы $(r' - t')$, необходимо и достаточно, чтобы: а) при $r' = r$ и $t' = t$ вводимая двухнаправленная R -дуга была смежной с вершинами, в каждую из которых заходит по одной L -дуге, принадлежащей LC -прадереву r -й степени, и по одной C -дуге, принадлежащей LC -прадереву t -й степени; б) при $r' = r - 1$ и $t' = t$ вводимая двухнаправленная R -дуга была смежной хотя бы с одной из вершин, в которую в LC -прадеревьях r -й и t -й степеней заходят исключительно C -дуги; в) при $r' = r$ и $t' = t + 1$ двухнаправленная R -дуга была смежной хотя бы с одной из вершин, в которую в LC -прадеревьях r -й и t -й степеней заходят исключительно L -дуги.

Таким образом, если графы состоят из R -, L - и C -дуг и содержат хотя бы одну пару противоположно ориентированных R -дуг, смежных одной паре вершин, то их спектры, являющиеся непрерывным рядом чисел от r до t , — сплошные. Если в RLC -графе содержалась единственная пара противоположно ориентированных дуг, то она при преобразовании графа G в графы $\{G_k\}$ может оказаться исключенной вообще или из пары R -дуг останется одна однонаправленная R -дуга. В первом случае граф G_k становится LC -графом, во втором — LC -графом, содержащим лишь одну R -дугу. Поэтому условия теорем 1 и 2 не выполняются и следует выяснить, каков станет спектр графов $\{G_k\}$. Учитывая правила (см. главу VI параграф 2) получения произвольных графов $\{G_k\}$, следует рассмотреть только случаи, когда R -дуги в графе G смежны вершинам x_r, x_t, x_j , поскольку в остальных случаях пара R -дуг остается смежной прежним вершинам. При этом в одном случае однонаправленная R -дуга будет исходить из корневой вершины графов $\{G_k\}$, а в другом — из некорневой.

В первом случае каждое из LC -прадеревьев графа G_{ij} с корнем в объединенной вершине x_0 преобразуется в RLC -прадереве, включающее однонаправленную дугу, исходящую из этой же корневой вершины. Действительно, в любом LC -прадереве есть путь из корня x_0 в стоковую вершину

x_s R -дуги (x_0, x_s) . Если исключить в LC -прадерева L - или C -дугу, заходящую в вершину x_s , то прервется путь из корня в те вершины прадерева, в которые он шел через вершину x_s . Если теперь ввести R -дугу (x_0, x_s) , исходящую из корня x_0 и заходящую в вершину x_s , то полученный частичный граф будет снова представлять прадерево, так как в каждую из его вершин имеется путь из корня x_0 и сохраняются остальные признаки прадерева. В этих условиях справедлива теорема 2. Следовательно, если есть одно LC -прадерево степени S_1 , другое — степени S_2 , причем $S_2 = S_1 + 2$, $r_{ij} \leq S_1$, $S_2 \leq t_{ij}$, и вершине x_s смежны только L -дуги, то при их замене на R -дугу (x_0, x_s) в каждом LC -прадерева со степенями от r_{ij} до t_{ij} получим RLC -прадерева со степенями от $r'_{ij} = r_{ij} + 1$ до $t'_{ij} = t_{ij} + 1$. Если в вершину x_s заходят только C -дуги, то при замене их в каждом из LC -прадерева на R -дугу получим RLC -прадерева со степенями от $r'_{ij} = r_{ij} - 1$ до $t'_{ij} = t_{ij} - 1$. Таким образом, спектр $(r'_{ij} - t'_{ij})$ подмножества RLC -прадерева имеет иную четность, чем спектр $(r_{ij} - t_{ij})$ подмножества LC -прадерева, и составляет гребенчатый спектр от r'_{ij} до t'_{ij} , а суммарный спектр LC - и RLC -прадерева оказывается сплошным от r_{ij} до $t_{ij} + 1$ или от $r_{ij} - 1$ до t_{ij} .

Если же вершине x_s смежны как L -, так и C -дуги, то получается гребенчатый спектр подмножества RLC -прадерева графа G_{ij} от $r'_{ij} = r + 1$ до $t'_{ij} = t_{ij} + 1$, что в сумме со спектром подмножества LC -прадерева даст сплошной спектр с граничными степенями от r_{ij} до t_{ij} .

Рассмотрим случай, когда единственная R -дуга (x_0, x_s) исходит из некорневой вершины x_0 графа G_{ij} (или G_{ji}). Тогда LC -прадерева графа G_{ij} с путями, проходящими в вершину x_0 через вершину x_s , не могут быть преобразованы в RLC -прадерева, так как удаление из них L - или C -дуги, заходящей в вершину x_s , прервет путь из корня x_j в вершину x_s и соответственно в вершину x_0 , а введение R -дуги, исходящей из вершины x_0 , в которую нет пути из корня, не даст прадерева, а лишь приведет к образованию контура. Найдем подграф графа G_{ij} , включающий все пути из корня в вершину x_0 , которые не идут через вершину x_s . Для этого удалим из графа вершину x_s и все смежные с ней дуги. Оставшийся LC -подграф \hat{G}_{ij} с $(n - 2)$ вершинами будет либо связным, либо распадется на части, если вершина x_s была шарнирной. Если при этом корневая вершина x_j и исток x_0 R -дуги оказываются в разных не связных частях под-

графа, то не существует ни одного пути из корневой вершины в вершину x_0 — исток R -дуги, не проходящего через вершину x_s . Это значит, что нельзя образовать ни одного RLC -прадеревья и, следовательно, спектр такого графа G_{ij} определяется его LC -прадеревьями, т. е. он — гребенчатый. Пример схемы и ее графы G_{ii} , G_{ij} и \tilde{G}_{ij} приведены на рис. 56. Спектр графа G_{ij} имеет вид $\{+1, +3\}$, а графа $G_{ii} = \{-1, 0, +1, +2, +3\}$.

Во втором случае LC -подграф \tilde{G}_{ij} , полученный после удаления вершины x_s вместе со смежными ей дугами, оказывается связным, а значит содержит прадеревья с некоторым гребенчатым спектром ($r_{ij} - t_{ij}$).

Введение в подграф \tilde{G}_{ij} вершины x_s и только R -дуги, заходящей в эту вершину из вершины x_0 , приведет к образованию RLC -прадеревьев графа G_{ij} , имеющих тот же спектр ($r_{ij} - t_{ij}$), что и LC -прадеревья подграфа

\tilde{G}_{ij} . Степени этих прадеревьев не выйдут за пределы $(-(n-3) - (n-3))$.

Если вершине x_s кроме R -дуги были смежны L -, C -дуги (а хотя бы одна такая должна была бы быть, чтобы граф G_{ij} был связным), то их введение приведет к появлению новых RLC -прадеревьев с введенными L - и C -дугами, исходящими из вершины x_s , при условии, что среди путей из корня x_i в вершину x_0 , не проходящих через вершину x_s , были такие, которые проходили лишь по части вершин подграфа \tilde{G}_{ij} , а среди остальных вершин были вершины, являющиеся стоковыми для дуг, исходящих из вершины x_s . Если же через стоки всех L -, C -дуг, исходящих из вершин x_s , проходят в подграфе G_{ij} все пути от корня до вершины x_0 , то с L - и C -дугами, исходящими из вершины x_s , не будет образовано ни одно новое RLC -прадеревье. Если LC -подграф граф \tilde{G}_{ij} , полученный после удаления вершины x_s вместе со смежными ей дугами, представляет собой единственный путь, проходящий из вершины x_j в вершину x_0 через все

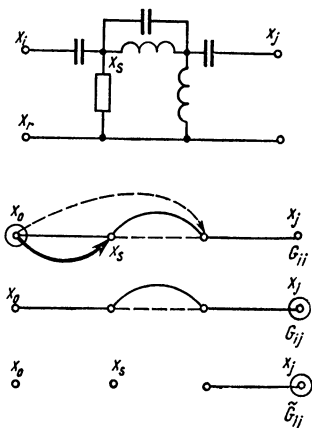


Рис. 56

вершины подграфа \tilde{G}_{ij} , то в этом случае будет всего одно RLC -прадерево, а значит спектр RLC -прадереьев графа G_{ij} имеет вид: $(r'_{ij} - t'_{ij}) = (\tilde{r}_{ij} - \tilde{t}_{ij})$.

Новые RLC -прадереья образуются за счет замены L - или C -дуг в прежних RLC -прадереьях на L - или C -дуги, исходящие из вершины x_s . Поэтому тип четности степеней этих новых RLC -прадереьев останется прежним. Если при указанной замене дуг происходит замена L -дуг RLC -прадерева — $T_{t_{ij}}$ — на C -дуги, исходящие из вершины x_s , или замена C -дуг RLC -прадерева — $T_{r_{ij}}$ — на L -дуги, исходящие из вершины x_s , то гребенчатый спектр $(r'_{ij} - t'_{ij}) = (\tilde{r}_{ij} - \tilde{t}_{ij})$ RLC -прадереьев графа G_{ij} с каждой такой заменой расширяется на одну позицию. Для этого необходимо, чтобы L -дуги, исходящие из вершины x_s , заходили бы в вершины подграфа \tilde{G}_{ij} , смежные только с C -дугами, а C -дуги, исходящие из вершины x_s , заходили бы в вершины подграфа \tilde{G}_{ij} , смежные только с L -дугами. В противном случае спектр $(r'_{ij} - t'_{ij})$ RLC -прадереьев графа G_{ij} будет определяться спектром $(\tilde{r}_{ij} - \tilde{t}_{ij})$ LC -прадереьев подграфа \tilde{G}_{ij} , хотя и будут получены новые RLC -прадереья, содержащие L -, C -дуги, исходящие из вершины x_s .

Из сказанного выше и предположения, что в графе \tilde{G}_{ij} , дополненном вершиной x_s , имеется только одна R -дуга, следует: если в граф \tilde{G}_{ij} вводятся исходящие из вершины x_s только C -дуги, то $\Delta\tilde{S}_L = \Delta\tilde{S}_{RL} = 0$, так как число \tilde{S}_L и \tilde{S}_{RL} соответственно L - и RL -компонентов связности не изменяется, а $\Delta\tilde{S}_C = \Delta\tilde{S}_{RC} < 0$, потому что число компонентов связности в C - и RC -частичных графах при введении C -дуг может только одинаково уменьшаться. Если же вводятся исходящие из вершины x_s только L -дуги, то по тем же причинам $\Delta\tilde{S}_C = \Delta\tilde{S}_{RC} = 0$, а $\Delta\tilde{S}_L = \Delta\tilde{S}_{RL} < 0$. Поэтому на основе зависимостей (VI.6) и учитывая, что при одной R -дуге $S_{RL} = S_L - 1$; $S_{RC} = S_C - 1$, получаем в первом случае $r'_{ij} = \tilde{r}_{ij}$; $t'_{ij} = \tilde{t}_{ij} + 2\Delta S$, а во втором — $r'_{ij} = \tilde{r}_{ij} - 2\Delta\tilde{S}_L$; $t'_{ij} = \tilde{t}_{ij}$. Если же вершине x_s смежны как L -, так и C -дуги, то возможное расширение спектра RLC -прадереьев будет определяться следующими

зависимостями:

$$r'_{ij} = \tilde{r}_{ij} - 2\Delta\tilde{S}_L; \quad t'_{ij} = \tilde{t}_{ij} + 2\Delta\tilde{S}_C, \quad (\text{VI.12})$$

где $\Delta S_L; \Delta S_C \geq 0$.

Таким образом, гребенчатый спектр RLC -прадеревьев $(r'_{ij} - t'_{ij})$ может быть либо равным спектру $(\tilde{r}_{ij} - \tilde{t}_{ij})$ LC -прадеревьев подграфа \tilde{G}_{ij} , либо шире его (VI.12).

Спектр $(r''_{ij} - t''_{ij})$ LC -прадеревьев LC -подграфа G''_{ij} графа G_{ij} имеет по сравнению со спектром $(\tilde{r}_{ij} - \tilde{t}_{ij})$ иную четность, так как в этом подграфе число вершин на одну больше. Кроме того, если граф G''_{ij} рассматривать, как подграф \tilde{G}_{ij} , дополненный вершиной x_s со всеми смежными ей L - и C -дугами, то на основе формулы (VI.7) можно записать

$$r''_{ij} = \tilde{r}_{ij} - 1 - 2\Delta S_L; \quad t''_{ij} = \tilde{t}_{ij} + 1 + 2\Delta S_C, \quad (\text{VI.13})$$

где ΔS_L — изменение числа компонентов связности в L - и RL -графе, ΔS_C — в C - и RC -графе подграфа \tilde{G}_{ij} при введении в него вершины x_s со смежными ей L -, C -дугами.

Указанные изменения ΔS_L и ΔS_C связаны с изменениями числа $\Delta\tilde{S}_L$ и $\Delta\tilde{S}_C$ компонентов в RLC -подграфе соотношениями $|\Delta S_L| \geq |\Delta\tilde{S}_L|$; $|\Delta S_C| \geq |\Delta\tilde{S}_C|$, так как в образовании новых RLC -прадеревьев участвуют не все L -, C -дуги, смежные вершине x_s , а только те, через стоки которых не идут все пути от корня до вершины x_0 . Поэтому суммарный спектр LC - и RLC -прадеревьев графа G_{ij} с одной R -дугой будет представлять собой либо (при знаке равенства в приведенных соотношениях) сплошной спектр от r_{ij} до t_{ij} , где $r_{ij} = r''_{ij}$, $t_{ij} = t''_{ij}$, либо (при знаке неравенства) смешанный спектр, содержащий один сплошной участок от $\tilde{r}'_{ij} - 1$ до $\tilde{t}'_{ij} + 1$, расположенный внутри при $r''_{ij} \leq r'_{ij} - 3$, $t''_{ij} \leq t_{ij} + 3$, или с краю от гребенчатого: слева при $r''_{ij} = r'_{ij} - 1$; $t''_{ij} \geq t_{ij} + 3$ или справа при $r''_{ij} \leq \tilde{r}'_{ij} - 3$; $t''_{ij} = \tilde{t}_{ij} + 1$. Других типов спектра $(r_{ij} - t_{ij})$ при наличии одной R -дуги не может быть.

На рис. 57, а, б приведены примеры цепей, для которых прадеревья графов G_{ij} имеют смешанные спектры с одним и двумя гребенчатыми участками по краям сплошного.

Теперь рассмотрим случай наличия в графе G_{ij} двух и более R -дуг, исходящих из вершины x_0 , не являющейся корнем прадеревьев рассматриваемого графа. Если все верши-

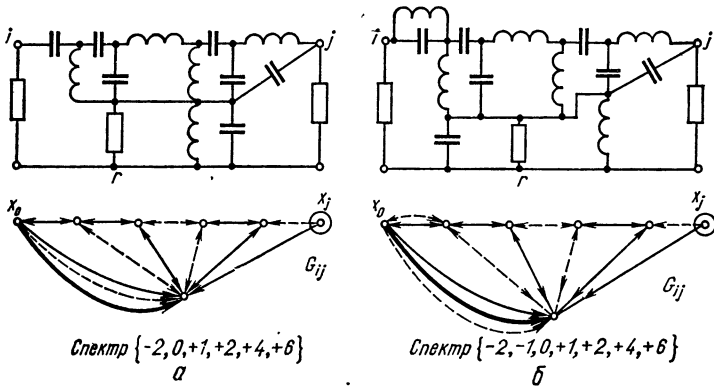


Рис. 57

ны x_s в LC -подграфе графа G_{ij} шарнирные, то ни с одной R -дугой не будет RLC -прадерева, а значит спектр $(r_{ij} - t_{ij})$ — гребенчатый. Если из всех вершин x_s , в которые заходят R -дуги, только одна не является шарнирной, то

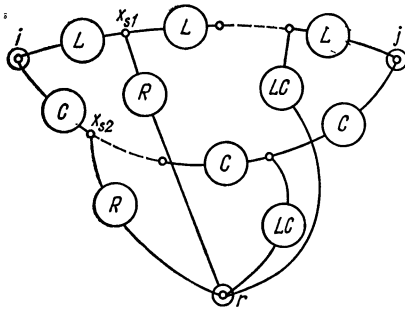


Рис. 58

справедливы все выводы о типах спектров, сделанные при наличии в графе G одной R -дуги (x_r, x_s) .

Если в графе G_{ij} есть две разные однонаправленные R -дуги, заходящие в нешарнирные вершины x_{s1} и x_{s2} , то, как и в случае одной R -дуги, для выяснения типа спектра следует применить методику поочеред-

ного удаления из графа G_{ij} вершин x_{s1} и x_{s2} вместе со смежными им дугами. Проанализировав спектры отдельных образовавшихся LC - и RLC -подграфов графа G_{ij} , спектр графа G_{ij} представляется как их сумма.

Проведенные исследования структур графов G_{ij} при наличии в них двух разных однонаправленных R -дуг показали, что возможны две различающиеся структуры: в пер-

вой — через стоковые вершины x_{s1} и x_{s2} R -дуг проходят не все пути из корня в вершину x_0 — исток этих R -дуг; во второй — любой такой путь проходит либо через x_{s1} , либо через x_{s2} , либо через обе эти вершины. В первом случае, как и в случае только одной R -дуги, в графе G_{ij} возможен сплошной или описанный выше смешанный (тип a) спектр. Во втором случае появляется новый вид (тип b) смешанного спектра, представляющий числовой ряд от r_{ij} до t_{ij} лишь с одним пропущенным числом \bar{r}_{ij} ; $r_{ij} < \bar{r}_{ij} < t_{ij}$. На рис. 58 показан общий вид структуры схемы, граф G_{ij} (или G_{ji}) которой имеет смешанный спектр типа b .

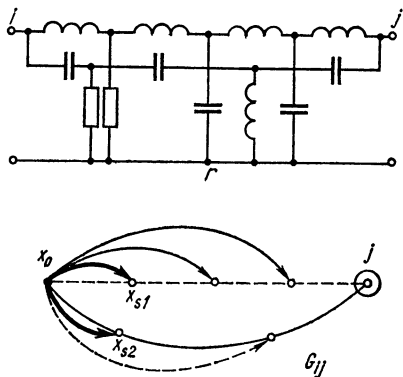


Рис. 59

На рис. 59 представлена конкретная схема и ее граф G_{ij} , имеющий смешанный спектр типа b : $\{r_{ij} - t_{ij}\} = \{-5, -4, -3, -2, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ при сплошном спектре $\{r_{ii} - t_{ii}\} = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Если число однонаправленных R -дуг больше двух, то спектры графов G_{ij} (G_{ji}) оказываются сплошными. Доказательство этого проводится с помощью методики, изложенной выше.

Итак, в зависимости от структуры схемы спектры степеней полиномов Δ_{ij} , $i \neq j$ могут быть сплошными, гребенчатыми и смешанными двух типов: a и b . Спектры же полиномов Δ , Δ_{ii} , Δ_{jj} , Δ_{ijj} могут быть либо сплошными для RLC -схем, либо гребенчатыми для LC -схем.

4. Соотношения граничных степеней и типов спектров в полиномах схемных функций

Рассмотрим по очереди параметры z , y , a и h трехполюсной подсхемы, выражения которых через определитель Δ и алгебраические дополнения $\{\Delta_k\}$ приведены в табл. 6. Анализ возможных отклонений граничных степеней в полиномах Δ и $\{\Delta_k\}$, проведенный выше, показал, что в общем случае конкретные их значения можно указать только для полиномов

Δ_{ii} , Δ_{jj} , Δ_{iij} . Для полиномов Δ_{ij} и Δ_{ji} , если не рассматривается конкретная структура, можно указать лишь пределы их изменения согласно выражениям (VI.11).

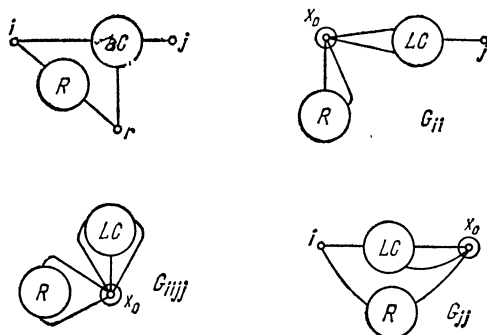


Рис. 60

Аналогичны ситуации и с типами спектров для полиномов Δ_{ij} и Δ_{ji} или, что то же, для прадеревьев графов G_{ij} и G_{ji} . Для специальных структур в общем виде можно указать, сохраняется или нет вид спектра графа G при переходе

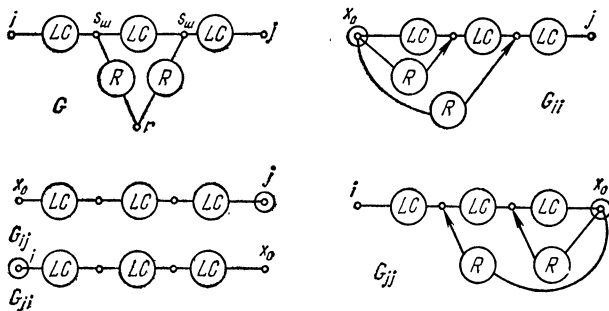


Рис. 61

к графам $\{G_k\}$. Так, если в графе G имеется нешарнирный R -подграф, который с остальной частью графа имеет только две общие вершины x_r и x_i (или x_j) (рис. 60), то при получении графов G_{iijj} , G_{ij} , G_{ii} (или G_{jj} , G_{ji}) он переходит в шарнирный R -подграф, связанный с остальной частью этих графов (рис. 61) только через вершину x_0 . Поэтому если других R -дуг, кроме R -дуги (x_r, x_i) , в графе G нет, то сплошной спектр прадеревьев графа G преобразуется в гребенчатые спектры прадеревьев графов G_{iijj} , G_{ii} , G_{ij} , а спектры

графов G_{ii} и G_{ij} будут сплошными, как и у графа G . Таким образом, при сплошном спектре знаменателя только числитель одного из параметров z_{ii} или z_{jj} данной структуры будет гребенчатым, а второго — сплошным. Возможна ситуация, когда сплошной спектр графа G преобразуется в сплошные спектры одновременно в графах G_{ii} и G_{jj} и гребенчатые в графах G_{ij} и G_{ji} . Это возникает, когда все R -дуги в графе G исходят из базисной вершины x , и заходят в шар-

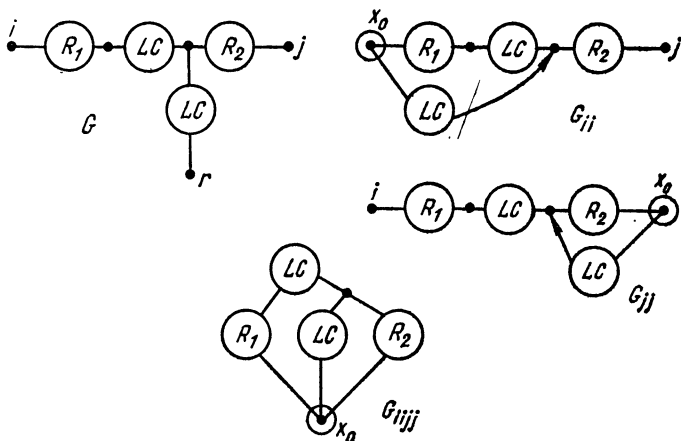


Рис. 62

нирные вершины графа G (рис. 61), т. е. в графах G_{ij} и G_{ji} ставшие однонаправленными R -дуги могут быть вообще исключены.

Гребенчатый спектр графа G может быть преобразован в сплошные спектры графов G_{ii} , G_{jj} или G_{ijj} , если шарнирные R -подграфы графа G преобразуются в нешарнирные R -подграфы графов G_{ii} , G_{jj} , G_{ijj} , как это показано на рис. 62.

Ситуация, при которой спектр графа G_{ijj} сплошной, а графа G_{ii} или G_{jj} — гребенчатый, возможна только при равенстве граничных степеней прадеревьев в этих графах. Спектр второго графа G_{jj} (или G_{ii}) будет обязательно сплошной, так как шарнирный R -подграф, смежный с вершиной x_j (или x_i), перейдет в графе G_{jj} (или G_{ii}) в нешарнирный R -подграф (рис. 63).

Таким образом, возможность существования различных типов спектров у полиномов одного или разных собственных параметров схемы может быть обеспечена за счет

определенной топологии. Особенностью структур таких схем являются шарнирные или нешарнирные, но подключенные параллельно входу или выходу схемы двухполюсные R -подсхемы. Результаты анализа вариантов спектров степеней полиномов схемных функций для различных структур, отличающихся способами включения R -подсхемы, приведены в табл. 9—16. В табл. 9 приведены соотношения типов спектров для числителя Δ_{ii} (Δ_{jj}) и знаменателя Δ при

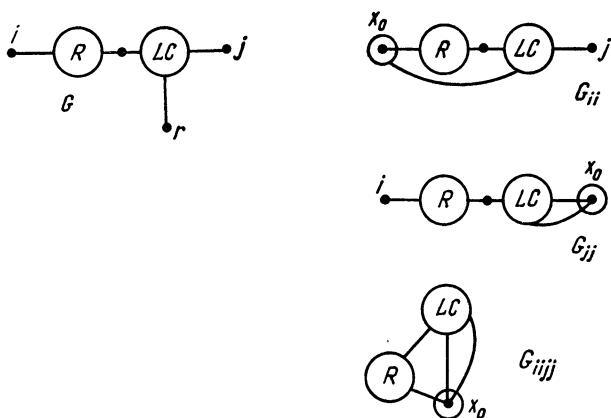


Рис. 63

конкретных соотношениях граничных степеней r_{ii} , t_{ii} (r_{jj} , t_{jj}) числителя и r , t знаменателя. В табл. 10—соотношения видов спектров, возможные одновременно для параметров z_{ii} и z_{jj} . Во всех таблицах возможные сочетания обозначены знаком «+».

В табл. 11 и 12 представлены результаты анализа аналогичных соотношений для параметров y . Граничные степени числителей Δ_{ij} и Δ_{ji} параметров y_{ij} и y_{ji} не могут превысить по модулю значений граничных степеней знаменателя Δ_{iiij} более чем на единицу. Но спектр степеней числителя может быть значительно уже спектра знаменателя, что следует из зависимостей (VI.11). Все варианты сужения спектра числителя, вплоть до одной единственной степени, возможны.

Знаменателем параметров a является сумма прадеервьев графа G_{ij} . Поэтому в общем случае имеется большое разнообразие граничных степеней r_{ij} и t_{ij} при одних и тех же значениях степеней r , t , r_{ii} , t_{ii} , r_{iiij} и t_{iiij} . Соотношения

Таблица 9

Спектр числителя Δ_{ii} (Δ_{jj})	r_{ij}	Спектр знаменателя: Δ параметров z					
		сплошной			гребенчатый		
Сплошной	$r - 1$	+	+	+	-	+	+
	r	+	+	+	-	+	+
	$r + 1$	+	+	+	-	-	-
Гребенчатый	$r - 1$	-	-	-	+	-	+
	r	+	+	-	-	+	-
	$r + 1$	+	+	-	+	-	+
t_{jj}		$t - 1$	t	$t + 1$	$t - 1$	t	$t + 1$

Таблица 10

Спектр числителя Спектр знаменателя $z_{jj} = \frac{\Delta_{ii}}{\Delta}$	Спектр числителя Спектр знаменателя, $z_{ii} = \frac{\Delta_{jj}}{\Delta}$			
	сплошной сплошной	гребенчатый сплошной	сплошной гребенчатый	гребенчатый гребенчатый
Сплошной	+	+	-	-
Сплошной	+	-	-	-
Гребенчатый	+	-	-	-
Сплошной	-	-	+	+
Сплошной	-	-	+	+
Гребенчатый	-	-	+	+
Гребенчатый	-	-	+	+
Гребенчатый	-	-	+	+

Таблица 11

Спектр числителя Δ_{ij} (Δ_{ii})	r_{ij}	Спектр знаменателя Δ_{iij} параметров y					
		сплошной			гребенчатый		
Сплошной	$r_{iij} - 1$	+	+	+	-	+	+
	r_{iij}	+	+	+	-	-	+
	$r_{iij} + 1$	+	+	+	-	-	-
Гребенчатый	$r_{iij} - 1$	-	-	-	+	-	+
	r_{iij}	-	+	-	-	-	-
	$r_{iij} + 1$	-	-	-	+	-	+
t_{ij}		$t_{iij} - 1$	t_{iij}	$t_{iij} + 1$	$t_{iij} - 1$	t_{iij}	$t_{iij} + 1$

спектров для случая отклонения граничных степеней на 0 и +1 сведены в табл. 13 и 14.

Соотношения граничных степеней числителей и знаменателей для параметров h приведены в табл. 15, а соотношения типов спектров одновременно для двух параметров h_{ii} и h_{jj} — в табл. 16. Когда реализация схемы ведется по нескольким параметрам, необходимо знать допустимые сочетания значений граничных степеней и видов спектров

Т а б л и ц а 12

Спектр числителя Спектр знаменателя $y_{jj} = \frac{\Delta_{ii}}{\Delta_{iij}}$	Спектр числителя Спектр знаменателя, $y_{ii} = \frac{\Delta_{jj}}{\Delta_{iij}}$			
	сплошной сплошной	гребенчатый сплошной	сплошной гребенчатый	гребенчатый гребенчатый
Сплошной	+	+	-	-
Сплошной				
Гребенчатый	+	-	-	-
Сплошной				
Сплошной	-	-	+	+
Гребенчатый				
Гребенчатый	-	-	+	+
Гребенчатый				

во всех используемых полиномах. Последнее очень важно, так как если каждая из задаваемых отдельно схемных функций отвечает условиям физической реализуемости, то это еще не означает, что их совокупность удовлетворяет условиям их соответствия одной и той же схеме. Для каждой конкретной схемы сочетание задаваемых схемных функций должно отвечать вполне определенным требованиям с тем, чтобы они не противоречили друг другу. Ввиду большого возможного разнообразия задаваемых для реализации сочетаний независимых схемных функций в различных системах параметров, целесообразен анализ возможных сочетаний граничных степеней полиномов Δ , Δ_{ii} , Δ_{jj} , Δ_{iij} безотносительно к выбранной системе параметров. Результаты такого анализа содержатся в табл. 17. Этих данных, совместно с данными табл. 9—16, достаточно для определения требований, которым должны удовлетворять структуры схемных функций, реализуемые RLC -цепями.

Таблица 13

Числитель параметров a	Спектр числителя	r_{ji}	Спектр знаменателя Δ_{ji} ; параметров a											
			сплошной		гребенчатый		смешанный (типа a)		смешанный (типа b)					
Δ	Сплошной	$r-1$ r $r+1$	+++	+++	-	+++	-	+++	-	+++	+++	+++		
	Гребенчатый	$r-1$ r $r+1$	---	+++	+	+-	+	+-	---	---	---	---		
t_{ji}			$t-1$	t	$t+1$	$t-1$	t	$t+1$	$t-1$	t	$t+1$	$t-1$	t	$t+1$
Δ_{tji}	Сплошной	$r_{jii}-1$ r_{jii} $r_{jii}+1$	+++	+++	+	+-	+	+-	---	---	---	---	+++	+++
	Гребенчатый	$r_{jii}-1$ $r_{jii}+1$	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
t_{ji}			$t_{jii}-1$	t_{jii}	$t_{jii}+1$	$t_{jii}-1$	t_{jii}	$t_{jii}+1$	$t_{jii}-1$	t_{jii}	$t_{jii}+1$	$t_{jii}-1$	t_{jii}	$t_{jii}+1$
Δ_{ij}	Сплошной	$r_{ij}+1$ r_{ij}	++	++	---	++	++	---	++	++	---	++	++	---
	Гребенчатый	r_{ij}	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
t_{ij}			$t_{ij}-1$	t_{ij}	$t_{ij}+1$	$t_{ij}-1$	t_{ij}	$t_{ij}+1$	$t_{ij}-1$	t_{ij}	$t_{ij}+1$	$t_{ij}-1$	t_{ij}	$t_{ij}+1$

Спектр числителя Спектр знаменателя $a_{jj} = \frac{\Delta_{ii}}{\Delta_{jj}}$	Спектр числителя Спектр знаменателя $z_{ii} = \frac{\Delta_{jj}}{\Delta_{ii}}$				
	сплошной сплошной	сплошной гребенчатый	гребенчатый гребенчатый	сплошной смешанный (типа а)	сплошной смешанный (типа б)
Сплошной Сплошной	+	-	-	-	-
Сплошной Гребенчатый	-	+	+	-	-
Гребенчатый Гребенчатый	-	+	+	-	-
Сплошной Смешанный типа а	-	-	-	+	-
Сплошной Смешанный типа б	-	-	-	-	+

Например, для реализации RLC-схемы, $i = 1$, $j = 2$, можно задать две функции $z_{22}(p) = z_{\text{вых}} = \frac{\bar{u}_2}{\bar{i}_2} \Big|_{i_1=0} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta}$ и

$$h_{11}(p) = z_{\text{вх}} = \frac{\bar{u}_1}{\bar{i}_1} \Big|_{u_2=0} = \frac{\Delta_{1122}}{\Delta_{22}} \text{ в виде}$$

$$z_{22}(p) = \frac{\sum_{k=r}^{k=t} a_k p^k}{\sum_{k=r}^{k=t} b_k p^k}; \quad h_{11}(p) = \frac{\sum_{k=t}^{k=t+1} C_k p^k}{\sum_{k=r}^{k=t} d_k p^k},$$

но нельзя задать их в виде

$$z_{22}(p) = \frac{\sum_{k=r}^{k=t} a_k p^k}{\sum_{k=r}^{k=t} b_k p^k}; \quad h_{11}(p) = \frac{\sum_{k=r-1}^{k=t-2} C_k p^k}{\sum_{k=r}^{k=t-1} d_k p^k},$$

так как это противоречит условиям реализуемости, хотя каждая из этих функций реализуема ¹.

Из приведенных в табл. 7, 8, 17 данных следует, что граничные степени числителей всех параметров $F_{kk}(p) = \{z_{11}, z_{22}, y_{11}, y_{22}, h_{11}, h_{22}\}$ могут отличаться от граничных

¹ Подчеркнем, что в данной главе обсуждаются только условия реализуемости, связанные со структурой схемной функции.

Таблица 15

Спектр числителя Δ_{ij}	r_{ij}	Спектр знаменателя Δ_{ji} параметров h_{jj}		
		сплошной		гребенчатый
Сплошной	r_{jj}	+	+	—
	$r_{jj} + 1$	+	+	—
Гребенчатый	r_{jj}	+	+	+
	$r_{jj} + 1$	+	+	—
Смешанный	r_{jj}	+	+	—
	$r_{jj} + 1$	+	+	—
t_{ij}		$t_{jj} - 1$	t_{jj}	t_{jj}

степеней их знаменателей не более чем на единицу. В то же время для всех функций $F_{ij}(p)$, $i \neq j$, и всех параметров a (см. табл. 14) граничные степени числителей и знаменателей могут различаться соответственно на величину $\leq |t - r|$; $\leq |t_{jj} - r_{jj}|$; $\leq |t_{iij} - r_{iij}|$, превышающую единицу.

Пр и м е р 5. Пусть для реализации RLC-схемы заданы функции

$$z_{11}(p) = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = z_{\text{вх}}(p); \quad y_{22}(p) = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{1122}} = y_{\text{вых}}(p);$$

$$a_{11}(p) = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{12}} = \frac{1}{T(p)}.$$

Тогда в соответствии с данными табл. 17 $z_{11}(p)$ и $y_{22}(p)$ могут быть представлены при сплошных типах спектров в числи-

Таблица 16

Спектр числителя Спектр знаменате- ля $h_{jj} = \frac{\Delta_{jji}}{\Delta_{jj}}$	Спектр числителя Спектр знаменателя, $h_{ii} = \frac{\Delta}{\Delta_{ii}}$			
	сплошной сплошной	гребенчатый сплошной	сплошной гребенчатый	гребенчатый гребенчатый
Сплошной	+	+	—	—
Сплошной				
Гребенчатый	+	—	—	—
Сплошной				
Сплошной	—	—	+	+
Гребенчатый				
Гребенчатый	—	—	+	+
Гребенчатый				

<i>r</i> <i>t</i>	<i>r</i> <i>t</i>			
	<i>r, t</i>	<i>r+1, t</i>	<i>r, t-1</i>	<i>r+1, t-1</i>
<i>r, t</i>	<i>r, t</i> <i>r, t-1</i> <i>r+1, t</i> <i>r+1, t-1</i>	<i>r+1, t</i> <i>r+1, t-1</i>	<i>r, t-1</i> <i>r+1, t-1</i>	<i>r+1, t-1</i>
<i>r+1, t</i>	<i>r+1, t</i> <i>r+1, t-1</i>	<i>r+2, t</i> <i>r+2, t-1</i>	<i>r+1, t-1</i>	<i>r+2, t-1</i>
<i>r, t-1</i>	<i>r, t-1</i> <i>r+1, t-1</i>	<i>r+1, t-1</i>	<i>r, t-2</i> <i>r+1, t-2</i>	<i>r+1, t-2</i>
<i>r+1, t-1</i>	<i>r+1, t-1</i>	<i>r+2, t-1</i>	<i>r+1, t-2</i>	<i>r+2, t-2</i>
<i>r, t+1</i>	<i>r, t+1</i> <i>r+1, t+1</i>	<i>r+1, t+1</i>	<i>r, t</i> <i>r+1, t</i>	<i>r+1, t</i>
<i>r-1, t</i>	<i>r-1, t</i> <i>r-1, t-1</i>	<i>r, t</i> <i>r, t-1</i>	<i>r-1, t-1</i>	<i>r, t-1</i>
<i>r-1, t-1</i>	<i>r-1, t-1</i>	<i>r, t-1</i>	<i>r-1, t-2</i>	<i>r, t-2</i>
<i>r+1, t+1</i>	<i>r+1, t+1</i>	<i>r+2, t+1</i>	<i>r+1, t</i>	<i>r+2, t</i>
<i>r-1, t+1</i>	<i>r-1, t+1</i>	<i>r, t+1</i>	<i>r-1, t</i>	<i>r, t</i>

телях и знаменателях в виде

$$z_{11}(p) = \frac{\sum_{k=r+1}^{k=t} a_k p^k}{\sum_{k=r} b_k p^k}; \quad y_{22}(p) = \frac{\sum_{k=r+1}^{k=t} C_k p^k}{\sum_{k=r+2} d_k p^k},$$

где $r_{11} = r + 1$; $t_{11} = t$; $r_{1122} = r + 2$; $t_{1122} = t - 1$.

Для полинома знаменателя Δ_{12} параметра a_{11} , исходя из данных табл. 13, можно при сплошном типе спектра выбрать значение $r_{12} \geq r_{11} = r + 1$, например, $r_{12} = r_{11}$, и значение $t_{12} \leq t_{11} = t$, например, $t_{12} = t_{11}$. Схема-претендент, реализующая такие функции при $r = -5$, $t = +4$, показана на рис. 64, а. Если считать, что тип спектра в полиноме Δ_{1122} — гребенчатый, а в полиномах Δ и Δ_{11} — сплошной, то для Δ_{12} (см. табл. 13) также можно принять гребенчатый спектр при соответствующем изменении структуры цепи. На рис. 64, б показана схема-претендент,

t_{ij}				
t_{ii}				
$r, t+1$	$r-1, t$	$r-1, t-1$	$r+1, t+1$	$r-1, t+1$
$r, t+1$ $r+1, t+1$	$r-1, t$ $r-1, t-1$	$r-1, t-1$	$r+1, t+1$	$r-1, t+1$
$r+1, t+1$	r, t $r, t-1$	$r, t-1$	$r+2, t+1$	$r, t+1$
r, t $r+1, t$	$r-1, t-1$	$r-1, t-2$	$r+1, t$	$r-1, t$
$r+1, t$	$r, t-1$	$r, t-2$	$r+2, t$	r, t
$r, t+2$ $r+1, t+2$	$r-1, t+1$	$r-1, t$	$r+1, t+2$	$r-1, t+2$
$r-1, t+1$	$r-2, t$ $r-2, t-1$	$r-2, t-1$	$r, t+1$	$r-2, t+1$
$r-1, t$	$r-2, t-1$	$r-2, t-2$	r, t	$r-2, t$
$r+1, t+2$	$r, t+2$	r, t	$r+2, t+2$	$r, t+2$
$r-1, t+2$	$r-2, t+1$	$r-2, t$	$r, t+2$	$r-2, t+2$

реализующая функции с такими особенностями. Эти функции имеют вид

$$z_{11}(p) = \frac{\sum_{k=r}^{k=t} a_k p^k}{\sum_{k=r}^{k=t} b_k p^k}; \quad y_{22}(p) = \frac{\sum_{k=r}^{k=t} c_k p^k}{\sum_{k=r+1}^{k=t} d_k p^k};$$

$$a_{11}(p) = \frac{\sum_{k=r}^{k=t} f_k p^k}{\sum_{k=r}^{k=t-3} g_k p^k}$$

при $r = -4$; $t = +3$.

Здесь $r_{12} = r = r_{11}$; $t_{12} = t - 3 = 0 < t_{11} = t$.

Для каждой структуры схемы обеспечение предельных степеней и спектров возможно лишь при определенном выборе вершин этой схемы в качестве ее внешних полюсов.

Критериями выбора полюсов служат соотношения минимальных и максимальных граничных степеней в разных полиномах. Так, если степени $|r_{kk}|$ ($|t_{kk}|$), $k = i, j$, меньше степеней $|r|$ ($|t|$), то вершина x_i (x_j) и вершина x_r должны принадлежать одному связному L - (C -) компоненту частного L - (C -) графа цепи. Это означает, что от вершины x_r до вершины x_k должен быть хотя бы один путь, проходящий только по L - (C -) дугам.

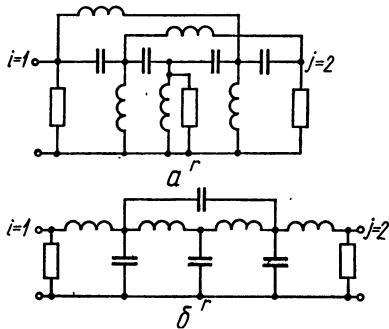


Рис. 64

Если же $|r_{kk}|$, ($|t_{kk}|$) более $|r|$ ($|t|$), то вершины x_i (x_j) и x_r должны принадлежать разным L - (C -) компонентам связности L - (C -) графа, или же между этими вершинами не должен проходить ни один L - (C -) путь и ни один RL - (RC -) путь. Если $r_{kk} = r$ ($t_{kk} = t$), то между вершинами x_k и x_r должен быть обязательно

RL - (или RC -) путь и не должно быть L - (C -) пути. Аналогично и для соотношения между r_{ij} (t_{ij}) и r (t), r_{kk} (t_{kk}): если $r_{ij} = r$ ($t_{ij} = t$), то между вершинами x_i и x_r и между вершинами x_j и x_r должны существовать только RL - (RC -) пути и не должно быть ни одного L - (C -) пути. При этом, очевидно, должно быть $r = r_{ii} = r_{jj} = r_{ij}$, $t = t_{ii} = t_{jj} = t_{ij}$. Если же $|r_{ij}| = |r| - 2$ ($|t_{ij}| = |t| - 2$), то должен быть обязательно L - (C -) путь от вершины x_i до x_r и от x_j до x_r . При $|r_{ij}| = |r| + 1$ ($|t_{ij}| = |t| + 1$) либо между x_i и x_r существует L - (C -) путь, а между x_j и x_r такой путь обязательно отсутствует, но имеется хотя бы один RL - (RC -) путь, либо L - (C -) путь существует между вершинами x_j и x_r , а между вершинами x_i и x_r — отсутствует, но имеется хотя бы один RL - (RC -) путь от x_i до x_r .

Нужно заметить, что требования к выбору полюсов, удовлетворение которых необходимо для обеспечения соотношений граничных степеней, могут не совпадать с требованиями их выбора по структурным соображениям. Например, может оказаться, что в графе имеется три шарнирные части, но только в одной из них есть вершины, которые принадлежат разным L - (C -) компонентам графа. Тогда нельзя обеспечить выбор внешних полюсов в каждой шарнирной части, хотя по структурным соображениям этот граф не должен исключаться из рассмотрения.

5. Требования к структуре схемы при задании схемных функций с сокращающимися множителями

Одним из критериев реализуемости схемных функций является наличие общего знаменателя для каждого из типов параметров z , y , a и h трехполюсной схемы, а в случае задания разнотипных параметров должны быть приведены в соответствие виды всех числителей и знаменателей, выражающиеся одинаковыми полиномами.

При приведении вида схемных функций в соответствие с критериями реализуемости или при аппроксимации схемных функций в полиномах числителей и знаменателей могут оказаться общие множители. Анализ показал, что в линейных RLC -цепях сокращающиеся множители в схемных функциях могут возникать как за счет числовых значений параметров цепи, так и за счет структурных особенностей схемы.

На рис. 65 показана схема с такими значениями элементов, при которых в ее схемных функциях $z_{ii}(p)$ и $T(p)$ имеются сокращающиеся множители:

$$z_{ii}(p) = \frac{48p^4 + 32p^3 + 28p^2 + 8p + 3}{96p^5 + 288p^4 + 184p^3 + 104p^2 + 22p + 6} =$$

$$= \frac{\left(4p^2 + \frac{2}{3}p + 1\right)}{\left(8p^3 + 20p^2 + \frac{10}{3}p + 2\right)},$$

$$T(p) = \frac{12p^2 + 6p + 3}{48p^4 + 32p^3 + 28p^2 + 8p + 3} = \frac{1}{\left(4p^2 + \frac{2}{3}p + 1\right)}.$$

Структурной особенностью схем, схемные функции которых обязательно содержат сокращающиеся множители, является наличие в схеме шарнирно включенных подсхем. Графы таких схем содержат шарнирные подграфы. Суммы прадеревьев графа с шарнирными подграфами представ-

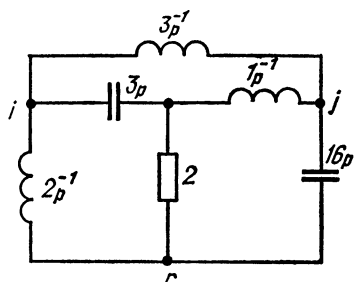


Рис. 65

ляются произведением сумм прадеревьев каждого из подграфов [7]. Из проведенного анализа схем с шарнирно включенными подсхемами следует, что шарнирные подграфы графа G схемы могут сохраниться при его преобразовании в графы $\{G_k\}$ только в отдельных случаях (см. рис. 62 и 63). В других же случаях они преобразуются в нешарнирные подграфы (см. рис. 61). Анализировались и структуры, при которых шарнирные подграфы появлялись лишь в некоторых производных графах $\{G_k\}$ (см. рис. 60), а в графе цепи G они отсутствовали. Это происходит при наличии в схеме двухполюсных подсхем, включенных параллельно входу или выходу. Общий вид структуры схем, в схемных функциях которой имеются сокращающиеся множители, показан на рис. 66.

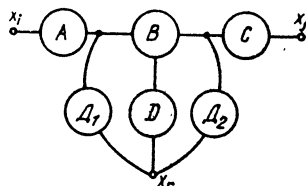


Рис. 66

Каждая из A -, B -, C -, D_1 -, D_2 -, D -частей может состоять из R -, L -, C -элементов. Проанализируем разновидности этой структуры при исключении из нее отдельных подсхем. Сумму прадеревьев каждого из шарнирных подграфов будем обозначать той же буквой, что и саму подсхему или ее подграф.

В зависимости от обязательного наличия или отсутствия в основной структуре цепи частей A, B, C, D, D_1, D_2 возможны четыре основных варианта групп структур, отличающихся типом общих множителей.

1. В основной структуре отсутствуют части A и C . Опре-

Параметр	Струк-							
	Есть части A и C				Нет части C			
	Индекс параметров							
	11	12	21	22	11	12	21	22
z	C	C A	C A	A	—	A	A	A
y	—	—	—	—	D_2	D_2	D_2	—
a	C	—	C A	A	—	D_2	A	A D_2
h	—	A	A	A	D_2	A D_2	A D_2	A

делитель Δ и алгебраические дополнения $\{\Delta_k\}$ для представленной на рис. 66 цепи можно записать в виде $\Delta = AC$ [сумма прадеревьев графа остальной части D_1, D_2, D, B цепи] = $= AC [D_1, D_2, D, B]$. При отсутствии D_1 - и D_2 -частей это выражение упрощается: $\Delta = ACD [B]$;

$\Delta_{ii} = C$ [сумма прадеревьев графа остальной части D_1, D_2, A, B, D цепи с корнем в совмещенной вершине x_0] = $= C [A, D_1, D_2, B, D]$;

$\Delta_{ij} = C$ [сумма прадеревьев графа остальной части D_1, D_2, A, B, D цепи с корнем в вершине x_j] = $= C [A, D_1, D_2, B, D]$;

$\Delta_{jj} = A$ [сумма прадеревьев графа остальной части D_1, D_2, C, B, D цепи с корнем в вершине x_0] = $= A [D_1, D_2, C, B, D]$;

$\Delta_{ji} = A$ [сумма прадеревьев графа остальной части D_1, D_2, C, B, D цепи с совмещенными в одну вершину x_0 вершинами x_r и x_j и корнем в вершине x_i] = $= A [D_1, D_2, C, B, D]$;

$\Delta_{iij} = [A, B, C, D_1, D_2, D]$ [сумма прадеревьев графа цепи с совмещенными в вершину x_0 вершинами x_r, x_i, x_j].

2. Отсутствует шарнирная часть A и присутствуют части C и D_1 :

$$\Delta = C [D_1, D_2, B, D]; \quad \Delta_{jj} = [D_1, D_2, C, B, D];$$

$$\Delta_{ii} = CD_1^* [D_2, B, D]; \quad \Delta_{ji} = [D_1^{**}, D_2, C, B, D];$$

$$\Delta_{ij} = CD_1^* [D_2, B, D]; \quad \Delta_{iij} = D_1^* [D_2, B, C, D].$$

Т а б л и ц а 18

тура								
Нет части A				Нет частей A и C				
z, y, a, h								
	11	12	21	22	11	12	21	22
C	C	C	—	—	—	—	—	—
—	D ₁	D ₁	D ₁	D ₂	D ₁	D ₂	D ₁	D ₁
C	D ₁	C	—	D ₁	D ₁	—	—	D ₂
D ₁	—	—	—	D ₂	D ₂	D ₂	D ₂	—

Параметр	Струк							
	Есть части A и C				Нет части C			
	Индекс параметров							
	11	12	21	22	11	12	21	22
<i>z</i>	C	A	C	A	—	A	—	A
<i>y</i>	—	—	—	—	D ₂	D ₂	D ₂	—
<i>a</i>	—	—	A	A	—	D ₂	A	A D ₂
<i>h</i>	—	—	A	A	D ₂	D ₂	A D ₂	A

3. Отсутствует шарнирная часть C и присутствуют части A и D₂:

$$\Delta = A[D_1, D_2, B, D]; \quad \Delta_{jj} = AD_2^*[D_1, B, D];$$

$$\Delta_{ii} = [A_1, D_1, D_2, B, D]; \quad \Delta_{ji} = AD_2^*[D_1, B, D];$$

$$\Delta_{ij} = [A, D_1, D_2, B, D]; \quad \Delta_{iij} = D_2^*[A, D_1, B, D].$$

4. Отсутствуют обе шарнирные части A и C, но есть обе двухполюсные части D₁ и D₂:

$$\Delta = [D_1, D_2, B, D]; \quad \Delta_{jj} = D_2^*[D_1, B, D];$$

$$\Delta_{ii} = D_1^*[D_2, B, D]; \quad \Delta_{ji} = D_2^*[D_1^{**}, B, D];$$

$$\Delta_{ij} = D_1^*[D_2^*, B, D]; \quad \Delta_{iij} = D_1^*D_2^*[B, D].$$

Множители D_i^{*}, i = 1, 2 могут быть равными единице, если двухполюсник D_i не имеет внутренних вершин, т. е. в графе G_k он преобразуется в петлю, которая исключается из графа.

Если D_i^{**}-двухполюсник без внутренних вершин, то он исключается из графа G_{ij}, i ≠ j, как состоящий из однопольных дуг, заходящих в корень.

На основании зависимостей, приведенных выше, составлены табл. 18 и 19 наличия и типа общих множителей во всех параметрах трехполюсных подсхем. При этом в табл. 18 приведены результаты анализа для обратимых, а в табл. 19 для необратимых цепей.

В схемных функциях необратимых цепей число общих множителей меньше, чем для обратимых, так как суммы прадеревьев несимметричных подграфов в общем случае зависят от выбора корня прадеревьев. Это замечание отно-

тура								
Нет части A				Нет частей A и C				
z, y, a, h								
	11	12	21	22	11	12	21	22
C	—	—	C	—	—	—	—	—
—	D_1	D_1	D_1	D_2	D_1	D_2	D_1	D_1
D_1	—	—	—	—	D_1	D_2	—	D_2
—	—	—	—	—	D_2	D_2	D_2	—

сится лишь к суммам прадеревьев необратимых частей A и C , так как в некоторые зависимости они входят с различными корневыми вершинами. В подграфах остальных частей D_1, D_2, B, D корневая вершина остается неизменной при любом преобразовании графов. Если части A и C цепи являются обратимыми подсхемами при необратимых остальных частях, то для таких цепей справедливы соотношения, приведенные в табл. 18.

Укажем, что наличие сокращающихся множителей из-за структурных особенностей схемы с точки зрения физических процессов, протекающих в схеме, свидетельствует о том, что ее часть, описываемая сокращающимися множителями, не принимает участия в энергетических процессах, протекающих в схеме в соответствующем режиме. Если же сокращающиеся множители обеспечиваются только за счет параметров элементов цепи, то в любых режимах ее работы все элементы цепи участвуют в энергетических процессах, протекающих в ней.

Проведенный выше анализ связи признаков схемных функций со структурными особенностями схем показал, что такие связи существуют и могут быть использованы для формулирования рекомендаций по выбору структур схем-претендентов. Упомянутые рекомендации компактно можно изложить следующим образом.

1. Если в заданных схемных функциях присутствуют полиномы $\Delta, \Delta_{ii}, \Delta_{jj}, \Delta_{ijj}$, а соотношения граничных степеней не удовлетворяют ни одному из случаев, рассмотренных в табл. 7, 8 и 17, то такие функции не могут быть реализованы трехполюсными RLC -цепями с положительными значениями параметров RLC -элементов.

2. Если для реализации заданы схемные функции, выражаемые полиномами Δ_{ij} и Δ_{ji} , не включенными в табл. 7, 8 и 17, и при этом граничные степени их соответствуют условиям (VI.11), то при сужениях спектров Δ_{ij} и Δ_{ji} более чем на ± 1 , по сравнению с другими заданными полиномами, структура цепи должна обязательно содержать подсхему, имеющую лестничную структуру.

3. Если соотношения спектров степеней p в числителях и знаменателях всех заданных схемных функций не удовлетворяют ни одному из вариантов, указанных в табл. 9—16, то такие функции не могут быть реализованы трехполюсными RLC -цепями.

4. Если заданные функции содержат полином со смешанным спектром, то схема в зависимости от разновидности этого спектра должна иметь структуру типа, приведенного на рис. 57 или 58.

5. Если схемные функции содержат общие множители, то осуществляется проверка соответствия этих функций одному из возможных структурных вариантов табл. 18, 19 и при наличии соответствия выбирается схема с необходимыми структурными особенностями.

6. Построение множества графов проводимостей схем по заданным схемным функциям

Сформулированные выше рекомендации позволяют определить, может ли некоторый класс электрических линейных RLC -схем определенной структуры служить физической моделью для получения заданных схемных функций. При положительном ответе, учитывая доминирующее требование минимальности числа элементов, следует выбирать схему минимальной структуры. Если на следующем этапе, при решении компонентных уравнений, окажется, что реализация схемы минимальной структуры невозможна, то следует изменить топологию, т. е. увеличить число узлов или число элементов, или то и другое одновременно, оставаясь в рамках схем-претендентов.

В нашем случае речь идет о построении графа схемы G по заданным полиномам Δ или $\{\Delta_k\}$. После этого, учитывая однозначное соответствие между графом проводимостей цепи G и RLC -схемой, может быть построена и сама схема, выбраны среди всех ее узлов полюса и найдены значения параметров образующих ее R -, L -, C -элементов. Так по-

ставленная задача не решается однозначно, и если найдено несколько решений, т. е. совокупность схем, удовлетворяющих заданным схемным функциям, то можно по тем или другим дополнительным требованиям выбрать для реализации одну из полученных.

На основе леммы, теорем 1, 2 и того факта, что графы многополюсных элементов схем (транзисторов, трансформаторов), как и RLC -двухполюсников, могут быть представлены в виде симметричных графов, предлагается простой способ построения графа схемы G , в том числе и невзаимной. Необходимо объединить два дерева, одно из которых имеет степень r , а другое степень t , и в отображающей этот граф схеме узлы в качестве ее внешних полюсов x_i, x_j, x_r выбрать так, чтобы удовлетворились спектры степеней полиномов заданных функций.

Процедура перебора возможных графов по способу объединения двух деревьев может быть упорядочена следующим образом.

1. По данным табл. 7 и 8 и заданным схемным функциям определяются $|r|$ и $|t|$, которые являются граничными степенями полинома Δ . Здесь же определяется число вершин n .

2. По зависимостям (VI.4) устанавливается минимально необходимое число реактивных элементов n_C и n_L .

3. Для каждого из деревьев определяются значения δ_r и δ_t возможных наборов n_C, n_L и n_R , при которых обеспечиваются заданные r и t .

4. Находятся все неизоморфные конфигурации деревьев, общее число которых равно β .

5. Определяются все σ_r для одного и σ_t для другого дерева, различающиеся (неизоморфные) размещением типов ребер.

6. Строится полное множество схем минимальной структуры путем объединения пар различных вариантов деревьев.

7. Из этого множества структур выделяются схемы с требуемыми структурными признаками схемных функций.

Рассмотрим описанную процедуру подробнее. Если заданы параметры z или a_{22} схемы, то степени двух объединяемых деревьев соответствуют граничным степеням r, t полинома Δ . Если заданы иные параметры, то, пользуясь данными табл. 7 и 8, следует установить возможные значения степеней r и t полинома Δ по значениям граничных степеней заданных полиномов $\{\Delta_k\}$. Выбор значений r, t в этом случае неоднозначен: так, при определении по сте-

пеням r_{ii} , t_{ii} (r_{jj} , t_{jj}) получим девять возможностей для значений r , t :

$$r = \{r_{ii} - 1, r_{ii}, r_{ii} + 1\}; \quad t = \{t_{ii} - 1, t_{ii}, t_{ii} + 1\}, \quad (\text{VI.14})$$

а при определении по степеням r_{iij} , t_{iij} получим уже двадцать пять возможных значений для r , t :

$$\begin{aligned} r &= \{r_{iij}, r_{iij} + 1, r_{iij} - 1, r_{iij} + 2, r_{iij} - 2\}; \\ t &= \{t_{iij}, t_{iij} + 1, t_{iij} - 1, t_{iij} + 2, t_{iij} - 2\}, \end{aligned} \quad (\text{VI.15})$$

т. е. на каждый выбор значений r имеется пять вариантов выбора значений t и наоборот.

Некоторые из вариантов (VI.14), (VI.15) при учете значений граничных степеней в остальных полиномах могут оказаться неприемлемыми, что выясняется по данным

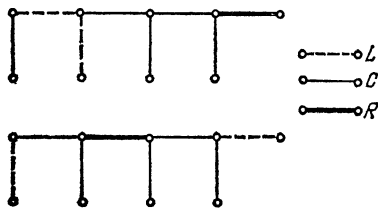


Рис. 67

табл. 7 и 8. После того как выбран допустимый вариант значений r , t , по этим же таблицам определяется минимально необходимое число узлов цепи, а по зависимостям (VI.4) — минимально необходимые числа L - и C -элементов схемы.

Теперь для пары деревьев со степенями r и t нам известно число вершин n и числа $(n_L)_{\min}$, $(n_C)_{\min}$ и $(n_R)_{\min}$ разных типов ребер. В дереве r -й степени должно быть не менее $(n_L)_{\min}$ L -ребер, а в дереве t -й степени — $(n_C)_{\min}$ C -ребер. При $(n_L)_{\min} < (n - 1)$ остальные $[(n - 1) - (n_L)_{\min}]$ ребер в дереве r -й степени могут быть или все R -ребрами, или некоторыми числами R -, L - и C -ребер при выполнении условия $(n - 1) = n_{Lr} + n_{Cr} + n_{Rr}$, где $r = -(n_{Lr} - n_{Cr})$; а в дереве t -й степени при $(n_C)_{\min} < n - 1$ должно выполняться условие $(n - 1) = n_{Ct} + n_{Lt} + n_{Rt}$, где $t = n_{Ct} - n_{Lt}$. Например, при $t = 5$, $n = 11$ и $(n_C)_{\min} = 5$ можно построить дерево с $n_{Ct} = 5$; $n_{Lt} = 0$; $n_{Rt} = 5$ или дерево с $n_{Ct} = 6$; $n_{Lt} = 1$; $n_{Rt} = 3$ или $n_{Ct} = 7$; $n_{Lt} = 2$; $n_{Rt} = 1$, т. е. при $n - 1 = 10$, $\delta_t = 3$.

Принятое число типов ребер в каждом дереве можно разместить тем или иным способом. Число таких способов размещения запишем в виде

$$A_i = \frac{(n - 1)!}{n_{L_i}! n_{C_i}! n_{R_i}}, \quad i = r, t. \quad (\text{VI.16})$$

Из них выбираются σ_l и σ_r неизоморфных размещений. Для примера на рис. 67 показано дерево с разными способами размещения в нем L -, C -, R -ребер: $n_L = 2$; $n_C = 5$; $n_R = 1$; $n = 9$.

При числе вершин в дереве больше двух возможны различные конфигурации деревьев: от дерева-линии до дерева $(n - 1)$ -лучевая звезда. Число β неизоморфных, т. е. различающихся по конфигурации, деревьев для каждого числа вершин различно. На рис. 68 представлены все $\beta = 6$ возможные конфигурации деревьев для $n = 6$.

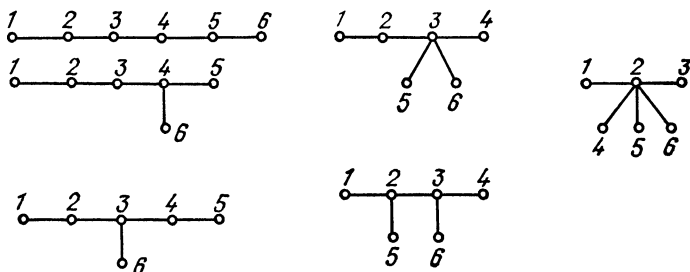


Рис. 68

Получить все конфигурации деревьев для заданного числа вершин можно путем поиска деревьев в полном графе и сравнения их по форме между собой или же более эффективным способом, изложенным в работе [35].

Число v_r вариантов дерева T_r и число v_t вариантов дерева T_t зависят от общего числа β конфигураций, значений δ_r , δ_t и значений $\sigma_{r,ik}$, $\sigma_{t,ik}$ для конкретных β_i , $\delta_{r,k}$, $\delta_{r,k}$. Из деревьев T_r и T_t образуются пары и объединяются следующим образом. Нумеруются n номерами от 1 до n вершины первого T_r и отдельно второго T_t деревьев. Затем вершины с одинаковыми номерами совмещаются. Полученный граф состоит из n вершин и $2(n - 1)$ ребер.

Чтобы при объединении деревьев в полученном графе G степени всех его деревьев не выходили за пределы r , t исходных деревьев, необходимо, чтобы структурные параметры исходных деревьев сохранялись в полученном графе согласно условиям

$$S_L = S_{Lr}; \quad S_C = S_{Ct}; \quad S_{RL} = S_{RLr}; \quad S_{RC} = S_{RCt}, \quad (\text{VI.17})$$

где индексы r и t указывают на принадлежность параметра дереву r -й или t -й степени.

Условия (VI.17) будут соблюдены, если каждый из C -компонентов дерева T_r при объединении будет смежным вершинам одного из C -компонентов дерева T_i , а каждый из L -компонентов дерева T_i будет смежным вершинам одного из L -компонентов дерева T_r . Это в свою очередь требует, чтобы при размещении типов ребер в дереве ни один из C -компонентов дерева T_r не содержал C -ребер больше, чем любой из C -компонентов в дереве T_i , и ни один из L -компонентов дерева T_i не содержал L -ребер больше, чем любой из L -компонентов в дереве T_r ; R -ребра дерева T_i должны быть смежны с вершинами RL -компонентов дерева T_r , а R -ребра дерева T_r должны быть смежны с вершинами RC -компонентов дерева T_i . Все перечисленные требования легко выполнить при ручном объединении деревьев благодаря наглядности процедуры. Автоматизация же учета условий (VI.17), хотя и возможна, но не эффективна.

Полное множество $\{G\}$ графов схем-претендентов можно получить, если нумерацию вершин одного из деревьев сохранить неизменной, а вершины второго поочередно перенумеровать всеми возможными $n!$ способами. Безразлично, какое из двух деревьев (T_r или T_i) принимать за первое, а какое за второе. Объединяя первое дерево со вторым при изменяющейся нумерации его вершин, получаем $n!$ графов для каждой отдельной пары деревьев. Это число Q множества $\{G\}$ графов оценивается соотношением

$$Q \leq n! v_i v_r. \quad (\text{VI.18})$$

Анализ всех Q графов показал, что множество $\{G\}$ избыточно, поскольку среди них встречаются изоморфные, т. е. отличающиеся лишь нумерацией вершин, а также такие, которые не могут быть приняты в качестве графа схемы из-за невыполнения требований, предъявляемых к структуре схемных функций. К последним относятся графы, в структуре которых число шарнирных подграфов превышает число внешних полюсов синтезируемой подсхемы.

Кроме шарнирных подграфов в графе могут оказаться последовательно соединенными ξ однотипных ребер. Если не выбрать в качестве полюса вершину, соединяющую такую пару ребер, то при переходе к схеме последовательное соединение элементов всегда может быть заменено одним элементом, а значит во всех схемных функциях появится сокращающийся множитель типа:

$$g = \prod_1^k \left(\sum_1^{\xi} g_i \right)_k; \quad \text{где } g_i = \frac{1}{R_i};$$

$$p^{-k}\Gamma = \prod_1^k \left(p^{-1} \sum_1^{\xi} \Gamma_i \right)_k; \quad \text{где } \Gamma_i = \frac{1}{L_i};$$

$$p^k C = \prod_1^k \left(p \sum_1^{\xi} C_i \right)_k,$$

где k — число последовательных цепочек; ξ — число последовательно соединенных ребер в k -й цепочке.

Последовательное соединение одинаковых ребер в графе может образоваться, если такое их соединение имеется в обоих деревьях или же оба дерева имеют концевые ребра одного и того же типа (рис. 69).

Изоморфные графы при данном способе получения мини-

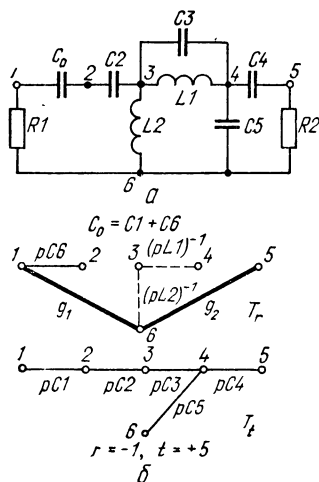


Рис. 69

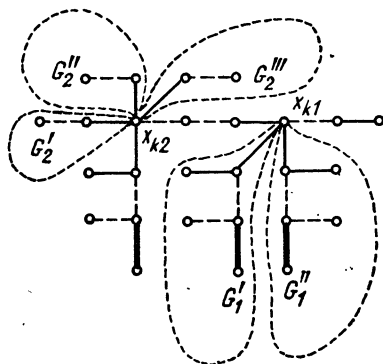


Рис. 70

мальных структур образуются вследствие особенностей конфигураций объединяемых деревьев. Такой особенностью является присутствие хотя бы в одном из объединяемых деревьев не менее двух одинаковых по структуре и размещению типов ребер подграфов, смежных некоторой вершине x_i , которые будем называть изоморфными подграфами. Число изоморфных подграфов может быть произвольным. На рис. 70 показано дерево с двумя изоморфными подграфами одной структуры и тремя — другой структуры. В принципе можно представить деревья с большим разнообразием изоморфных подграфов.

Если при одной нумерации вершин второго дерева вершины одного из его изоморфных подграфов были пронумерованы номерами i, j, k, \dots, l , второго — номерами z ,

y, v, \dots , а при какой-то из следующих нумераций этими же номерами i, j, k, \dots, l были пронумерованы вершины второго из изоморфных подграфов, номерами z, y, \dots, v — первого подграфа, а остальные вершины в обоих случаях не изменили своих номеров, то при объединении первого дерева с каждым из этих двух вторых деревьев получим одинаковые (изоморфные) графы G (рис. 71).

Для каждой конфигурации деревьев и размещения типов ребер имеется свое определенное число изоморфных подграфов и для них могут быть определены типы перестано-

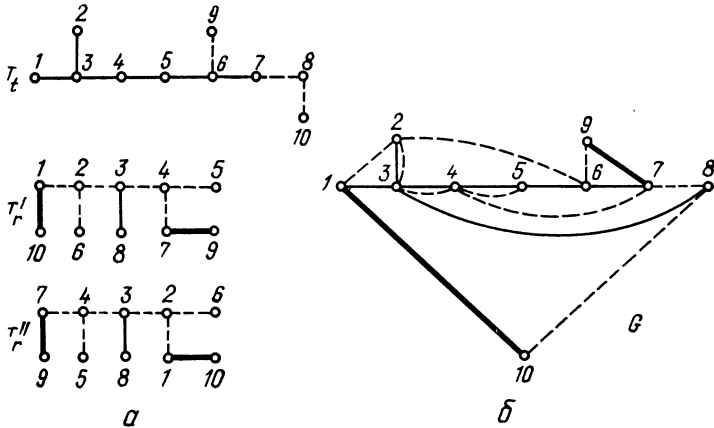


Рис. 71

вок номеров вершин, приводящие при объединении деревьев к изоморфным графам. Такие перестановки номеров вершин назовем изоморфными. Их исключение из общего числа $n!$ перестановок номеров вершин для конкретного дерева не представляет сложности и может быть легко алгоритмизировано [18]. Из-за исключения изоморфных перестановок внутри подмножества графов, полученных для данной конкретной пары деревьев, изоморфные графы не будут присутствовать. Однако для другой пары деревьев или при другом размещении типов ребер, т. е. в другом подмножестве, могут оказаться графы, изоморфные графам первого подмножества. Их выявление осуществляется способом определения изоморфизма графов [34].

Если генерирование графов производится только с учетом получения неизоморфных графов, а выполнение условий (VI.17) не контролируется, то среди графов данного подмножества найдутся такие, которые не обеспечивают

граничные степени или типы спектров. В этом случае каждый из полученных графов проверяется на соответствие граничных степеней и типа спектра степеней деревьев. Графы, в которых это соответствие не выполняется, исключаются из списка схем-претендентов минимальной структуры. Из списка претендентов также исключаются графы, имеющие избыток шарнирных подграфов и последовательных цепочек из однотипных ребер.

Если схема минимальной структуры не реализуема в заданном элементном базисе или реализуема, но при этом не выполняются другие требования, то можно произвести расширение цепи, увеличив число ее узлов и элементов. При этом в расширенной схеме должны сохраниться виды спектров в числителях и знаменателях всех заданных схемных функций. Если все минимальные структуры при $n = n_{\min}$ не приводят к реализации схемы, то, в принципе, можно генерировать следующее множество структур, увеличив число вершин на единицу или более. Когда нет необходимости в просмотре всего множества минимальных структур при $n = \text{const}$ и требуется имеющуюся структуру расширить, то сохранение вида схемных функций обеспечивается при соблюдении некоторых, излагаемых в работе [12], правил. Изложенные выше результаты позволяют предложить алгоритм построения топологий схем-претендентов по заданным для реализации схемным функциям. Функциональная схема такого алгоритма приведена на рис. 72, а его применение поясняется следующим примером.

Пример 6. Пусть для реализации заданы функция входного сопротивления

$$z_{\text{вх}}(p) = \frac{a_1 p^{-2} + a_2 p^{-1} + a_3 p^0 + a_4 p^1 + a_5 p^2}{a_6 p^{-3} + a_7 p^{-2} + a_8 p^{-1} + a_9 p^0 + a_{10} p^1 + a_{11} p^2} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta}$$

и передаточная функция по напряжению

$$T(p) = \frac{b_1 p^{-2} + b_2 p^{-1} + b_3 p^0 + b_4 p^1 + b_5 p^2}{a_1 p^{-2} + a_2 p^{-1} + a_3 p^0 + a_4 p^1 + a_5 p^2} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}}$$

без сокращающихся множителей.

Схема нагружена со стороны входа и выхода сопротивлением R_n . Требуется найти все схемы-претенденты.

Структурные признаки заданных функций следующие: заданы полиномы Δ_{11} , Δ_{12} , Δ ;

граничные степени $r_{11} = r_{12} = -2$, $r = -3$, $t_{11} = t_{12} = t = 2$;

спектр степеней во всех полиномах — сплошной.

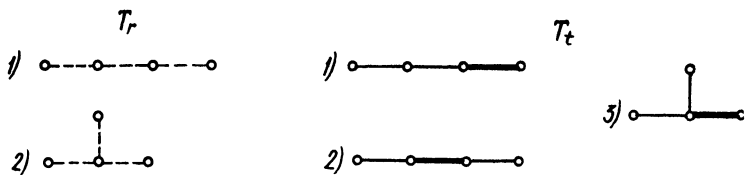


Рис. 73

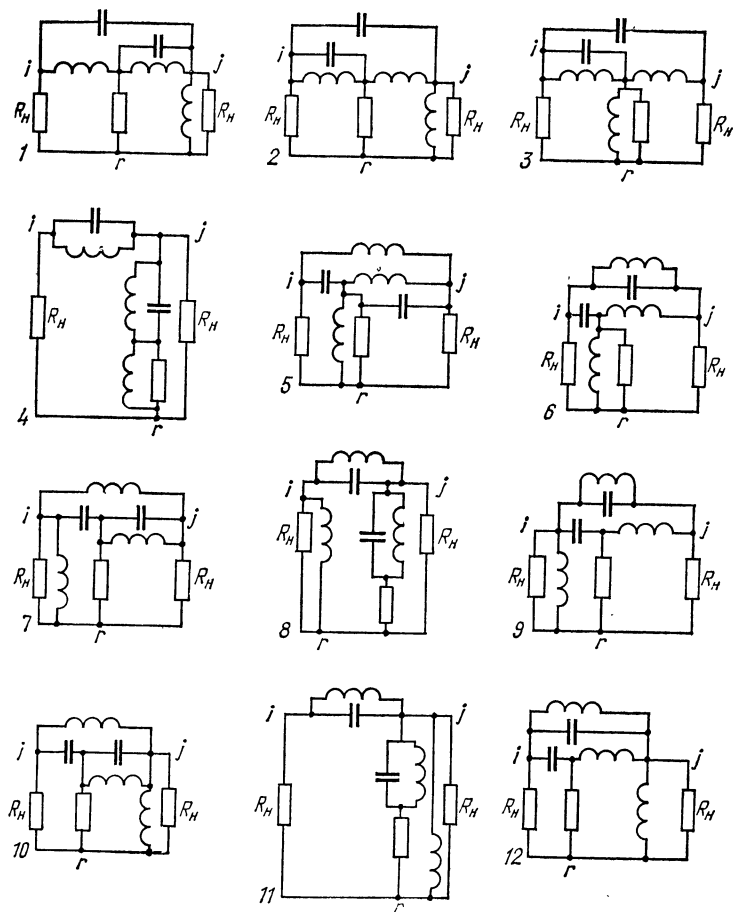


Рис. 74

По данным табл. 7 найдем $n = |r| + 1 = 4$. По зависимости (VI.4) определяем $n_C = 2$; $n_L = 3$. Степень исходного дерева T_r будет $r = -3$, а дерева T_t — $t = +2$. При числе ребер в дереве, равном $(n - 1) = 3$, и при $n_L = 3$, в дереве T_r возможно единственное размещение L -ребер, т. е. $\delta_r = 1$. В дереве T_t при $n_C = 2$ возможен также единственный набор типов дуг — две C -дуги и одна R -дуга, т. е. $\delta_t = 1$. Отсюда число различных способов размещения дуг следующее: $\sigma_r = 1$; $\sigma_t = 2$. Для $n = 4$ имеются две неизоморфные конфигурации деревьев, $\beta = 2$. Возможные варианты деревьев показаны на рис. 73. Отсюда максимальное число подлежащих анализу графов, полученных методом наложения двух деревьев, согласно соотношению (VI.18) имеет вид $Q = (4!) \cdot 2 \cdot 3 = 144$, где $v_r = 2$, $v_t = 3$.

Каждый полученный граф проверяется на избыток шарнирных частей и последовательных цепочек. При их избытке он исключается из рассмотрения. В противном случае для трехполюсной подсхемы в полученном графе выбираются всеми возможными способами три вершины в качестве внешних полюсов. После этого граничные степени и типы спектров для полиномов Δ_{11} , Δ_{12} и Δ каждого графа проверяются на соответствие заданным.

Для рассматриваемого примера получены 24 схемы-претенденты, 12 из которых представлены на рис. 74, а остальные ($1'—12'$) отличаются от них только тем, что полюс j считаем входом, а полюс i — выходом. При этом в функциях схем $4'$, $8'$ и $11'$, полученных из схем 4 , 8 , 11 , будут присутствовать сокращающиеся множители из-за их структурных особенностей, и поэтому схемы $4'$, $8'$, $11'$ также нужно исключить из рассмотрения.

РЕАЛИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ ПО КРИТЕРИЯМ ОПТИМАЛЬНОСТИ

1. Численный метод реализации электронных схем

Задача выбора схемы, лучшей по некоторому признаку либо совокупности признаков, составляет суть проблемы оптимальной реализации. Возможность выбора обусловлена наличием эквивалентных схем, т. е. схем, отличающихся значениями параметров элементов либо топологиями, либо тем и другим одновременно и при этом обладающих одними и теми же схемными функциями. В зависимости от целей задача оптимальной реализации может проводиться на множестве эквивалентных схем заданной топологии, на множестве всех эквивалентных схем с заданным числом узлов либо на подмножествах указанных множеств. Элементный базис при этом предполагается заданным. Во всех случаях важно, чтобы множество допустимых схем было, во-первых, описано и, во-вторых, описано полно. Последнее означает, что принятая формализация не должна исключать из рассмотрения, вообще говоря, ни одной конкурентно способной схемы.

В предыдущих главах было показано, что в рамках компонентных уравнений не только полно описываются схемы заданной топологии, но и все эквивалентные схемы с фиксированным числом узлов. В рамках того же формализма легко описать подмножества отмеченных выше множеств схем. В качестве простого упражнения можно описать множество трехполюсных схем заданной топологии, эквивалентных по передаточной функции и функции входного сопротивления, подмножество указанного множества схем, часть параметров элементов которых подчинена дополнительным ограничениям типа линейных неравенств, равенств и т. д.

Целью настоящей главы является разработка метода поиска на множестве эквивалентных схем схемы, достав-

ляющей \min либо \max некоторой целевой функции. В принципе, если целевая функция определена, решение такой задачи может быть выполнено методами нелинейного программирования. Однако почти всегда функция цели и система ограничений в задачах оптимальной реализации не являются выпуклыми и потому использование указанных методов не гарантирует решения задачи. Мы не будем рассматривать этот тривиальный путь, полагая, что при необходимости читатель сможет формализовать свою конкретную задачу и воспользоваться стандартными алгоритмами.

Обратимся к частному варианту задачи оптимальной реализации и покажем, что при некоторых условиях удастся построить оптимальные решения. Пусть требуется найти $\Phi(\vec{l}) \rightarrow \min$ при ограничениях ¹

$$f_i(\vec{l}) - a_i = 0, \quad i = \overline{0, m}. \quad (\text{VII.1})$$

Будем предполагать, и это существенно, что $\Phi(\vec{l})$ имеет такую же структуру, что и $f_i(\vec{l})$, т. е. является однородной функцией и арифметической суммой произведений. Идея метода поиска $\Phi(\vec{l})$ состоит в решении последовательности систем нелинейных уравнений:

$$\Phi(\vec{l}) - \lambda_k = 0; \quad (\text{VII.2})$$

$$f_i(\vec{l}) - a_i = 0, \quad i = \overline{0, m},$$

с пошаговым уменьшением параметра λ_k и нахождении предельно малого значения $\lambda_k = \lambda_{\min}$, при котором решение (VII.2) еще существует. При этом λ_1 выбирается из условия $\lambda_1 < \Phi(\vec{l}^1)$, где \vec{l}^1 — решение системы $f_i(\vec{l}) = 0$, найденное лишь с учетом условий физической реализуемости.

Понятно, что одномерная задача минимизации λ_k при ограничениях, представляющих собой систему (VII.2), эквивалентна задаче (VII.1), и, поскольку структура уравнений (VII.2) удовлетворяет условиям, изложенным в главе I параграфе 4, эта система для каждого λ_k может быть решена с использованием описанного ранее алгоритма, если решение существует. На этом пути, однако, возможны осечки следующего рода. Допустим, что множество эк-

¹ Для простоты условия физической реализуемости здесь опускаются.

вивалентных схем содержит всего две схемы. Для первой из них $\Phi(\vec{l}^1) = \bar{\lambda}_1$, а для второй $\Phi(\vec{l}^2) = \bar{\lambda}_2$ и $\bar{\lambda}_1 > \bar{\lambda}_2$. Поскольку заранее значение $\bar{\lambda}_2$ неизвестно, то, выбрав произвольно ряд $\bar{\lambda}_1 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k$, из которых ни одно λ_k не равно $\bar{\lambda}_2$, каждый раз будем обнаруживать несовместность системы (VII.2) и не найдем решения, которое, однако, существует.

В качестве примера можно привести задачу реализации передаточной функции

$$T(p) = \frac{K(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_2^2)}{p^5 + a_4 p^4 + \dots + a_0}$$

схемой лестничного типа с параллельными контурами в продольных ветвях в режиме заданных нагрузок.

Для устранения описанного эффекта уравнение $\Phi(\vec{l}) - \lambda_k = 0$ заменяется другим: $h(\vec{y}) \Phi(\vec{l}) - \lambda_k = 0$, где $h(\vec{y})$ — непрерывная функция вектора $\vec{y} = \{y_1, \dots, y_D\}$, имеющая структуру функций $\Phi(\vec{l})$, $f_i(\vec{l})$ и удовлетворяющая условию $1 \leq h(\vec{y})$. Система

$$\begin{aligned} h(\vec{y}) \Phi(\vec{l}) - \lambda_k &= 0; \\ f_i(\vec{l}) - a_i &= 0, \quad i = \overline{0, m}, \end{aligned} \tag{VII.3}$$

в отличие от системы (VII.2), не может быть несовместной из-за описанной выше «несогласованности» $\Phi(\vec{l})$ и λ_k . Действительно, рассмотрим систему на k -м шаге решения. Пусть существует хотя бы один вектор \vec{l}^k , удовлетворяющий условиям

$$\begin{aligned} f_i(\vec{l}^k) - a_i &= 0, \quad i = \overline{0, m}; \\ \lambda_k &> \Phi(\vec{l}^k), \end{aligned}$$

тогда, как нетрудно видеть, с помощью рассмотренного ранее алгоритма решение системы (VII.3) будет найдено, если принять

$$h(\vec{y}^k) = \frac{\lambda_k}{\Phi(\vec{l}^k)} > 1.$$

Такова идея метода решения задачи оптимизации. Фор-

мально эта задача может быть представлена таким образом:

$$\lambda \rightarrow \min^1 \quad (\text{VII.4})$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} h(\vec{y}) \Phi(\vec{l}) - \lambda &= 0; \\ f_i(\vec{l}) - a_i &= 0, \quad i = \overline{0, m}. \end{aligned} \quad (\text{VII.5})$$

Здесь $\vec{l} = \{l_1, \dots, l_n\}$; $\vec{y} = \{y_1, \dots, y_D\}$; $h(\vec{y})$ — непрерывная функция и $h(\vec{y}) \geq 1$; λ — вспомогательный параметр.

Ниже излагается алгоритм решения задачи (VII.4) и приводится его обоснование для класса функций $f_i(\vec{l})$, $\Phi(\vec{l})$ и $h(\vec{y})$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) существует метод определения решения \vec{l}^k системы (VII.5), если оно существует;

б) для всех действительных неотрицательных компонентов вектора $\vec{l} \Phi(\vec{l}) \geq 0$.

Алгоритм (VII.1) решения задачи (VII.4) состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Определить решение \vec{l}^1 системы $f_i(\vec{l}) - a_i = 0, i = \overline{0, m}$.

Если \vec{l}^1 существует и $\lambda_1 = \Phi(\vec{l}^1) = 0$, решение найдено, достигнут глобальный минимум. Если \vec{l}^1 не существует, то задача (VII.4) не имеет решения. Если \vec{l}^1 существует и $\lambda_1 = \Phi(\vec{l}^1) \neq 0$, то можно принять $\lambda_0 = 0$.

Шаг 2. Если $\lambda_1 - \lambda_0 < \varepsilon$, где ε — положительное наперед заданное сколь угодно малое число, процесс прерывается и значения $\lambda^* = \lambda_1$ и $\vec{l}^* = \vec{l}^1$ принимаются за решение задачи (VII.4).

Шаг 3. Если $\lambda_1 - \lambda_0 > \varepsilon$, вычисляются $\lambda_2 = (\lambda_1 - \lambda_0) : 2 + \lambda_0$ и находится решение \vec{l}^2 системы (VII.5) при $\lambda = \lambda_2$.

Шаг 4. Если \vec{l}^2 существует, принимаем $\lambda_1 = \lambda_2 : h(\vec{y})$, $\vec{l}^1 = \vec{l}^2$ и переходим к выполнению шага 2.

Шаг 5. Если \vec{l}^2 не существует, принимаем $\lambda_0 = \lambda_2$ и переходим к выполнению шага 2.

¹ Для удобства изложения в дальнейшем индекс k при λ опущен.

Приведенный алгоритм обосновывает следующая теорема.

Теорема. Пусть для $f_i(\vec{l})$, $\Phi(\vec{l})$ и $h(\vec{y})$ выполняются условия а) и б). Тогда \vec{l}^* , полученное в результате решения по алгоритму (VII.1), доставляет квазиглобальный экстремум в задаче (VII.4), причем $|\Phi(\vec{l}^*) - \lambda_{\text{опт}}| \leq \varepsilon$.

Здесь $\lambda_{\text{опт}}$ — глобальный минимум функции $\Phi(\vec{l})$ в задаче (VII.4), т. е. $\lambda_{\text{опт}} = \Phi(\vec{l}_{\text{опт}})$.

Доказательство проведем от противного. Допустим, $|\Phi(\vec{l}^*) - \lambda_{\text{опт}}| > \varepsilon$, т. е. $|\lambda^* - \lambda_{\text{опт}}| > \varepsilon$, так как $\lambda^* = \Phi(\vec{l}^*)$. В этом случае необходимо исследовать два варианта.

Первый вариант:

$$\lambda^* - \lambda_{\text{опт}} > \varepsilon. \quad (\text{VII.6})$$

Алгоритм (VII.1) гарантирует выполнение условия $\lambda^* - \lambda_0 \leq \varepsilon$. Учитывая последние два неравенства и условие б), из которого следует, что $\lambda^* \geq 0$, $\lambda_{\text{опт}} \geq 0$ и $\lambda_0 \geq 0$, получаем

$$\lambda_0 > \lambda_{\text{опт}}. \quad (\text{VII.7})$$

Точка $\{\lambda_{\text{опт}}, \vec{l}_{\text{опт}}\}$ является решением системы уравнений (VII.5) при $h(\vec{y}) = 1$. Существование решения системы VII.5) при $\lambda = \lambda_{\text{опт}}$ и $\vec{l} = \vec{l}_{\text{опт}}$ означает существование решения ее и при $\lambda = \lambda_0$. Действительно, в точке $\vec{l}_{\text{опт}}$ система равенств $f_i(\vec{l}_{\text{опт}}) - a_i = 0$, $i \in M$, удовлетворяется. Выбором соответствующего \vec{y}^1 можно добиться выполнения соотношения $\lambda_{\text{опт}} h(\vec{y}^1) = \lambda_0$, а следовательно, и выполнения равенства $h(\vec{y}^1) \Phi(\vec{l}_{\text{опт}}) - \lambda_0 = 0$.

Таким образом, точка $\{\lambda_0, \vec{y}^1, \vec{l}_{\text{опт}}\}$ есть решение системы (VII.5). В соответствии с алгоритмом (VII.1) λ_0 — это то значение λ , при котором решения системы (VII.5) не существует. Следовательно, условию а) противоречат соотношение (VII.7) и, как следствие, неравенство (VII.6).

Второй вариант:

$$\lambda^* - \lambda_{\text{опт}} < -\varepsilon. \quad (\text{VII.8})$$

Из неравенства (VII.8) с учетом условия б) следует, что $\lambda^* < \lambda_{\text{опт}}$. Последнее неравенство противоречит определению глобального экстремума.

Таким образом, неравенство (VII.6) противоречит условию а), а неравенство (VII.8) — определению глобального экстремума. Предположение, что $|\Phi(\vec{l}^*) - \lambda_{\text{опт}}| > \varepsilon$, неверно. Теорема доказана.

Распространение рассмотренного алгоритма на задачи реализации почти очевидно и связано с формированием функции $\Phi(\vec{l})$ и выбором функции $h(\vec{y})$. Компонентные уравнения, а следовательно, и любые другие алгебраические уравнения, имеющие структуру и особенности компонентных, решаются. Таким образом, функция цели $\Phi(\vec{l})$ и вспомогательная функция $h(\vec{y})$ должны быть сконструированы так, чтобы $h(\vec{y}) \times \Phi(\vec{l}) - \lambda = 0$ было уравнением типа компонентного.

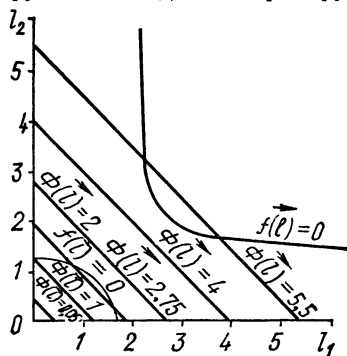


Рис. 75

Здесь возможны различные варианты. Простейший состоит в следующем. Функция $\Phi(\vec{l})$ строится как алгебраическая, рациональная, полиномиальная, однородная. Функция $h(\vec{y})$ полагается $h(\vec{y}) = y_1^2 + y_2^2$. В число дополнительных ограничений вводится условие $y_1^2 = 1$. В этом случае $h(\vec{y}) \geq 1$, а задача (VII.4) формулируется так: $\lambda \rightarrow \min$ при ограничениях

$$\begin{aligned} (y_1^2 + y_2^2) \Phi(\vec{l}) - \lambda &= 0; \\ f_i(\vec{l}) - a_i &= 0, \quad i = \overline{0, m}; \\ y_1^2 - 1,0 &= 0. \end{aligned}$$

Проиллюстрируем основные положения метода следующим примером.

Пример 1. Определим вектор \vec{l}^* , доставляющий минимум функции $\Phi(\vec{l}) = l_1 + l_2$ при ограничениях $f(\vec{l}) = -l_1 l_2 - 1,5 l_1 - 2l_2 + 2,64 = 0$; $l_1 \geq 0$; $l_2 \geq 0$ с точностью $\varepsilon = 0,01$, т. е. $|\Phi(\vec{l}^*) - \Phi(\vec{l}_{\text{опт}})| \leq \varepsilon$.

Графики линий равного уровня $\Phi(\vec{l}) = \text{const}$ и $f(\vec{l}) = 0$ приведены на рис. 75.

Для системы уравнений

$$\begin{aligned}l_1 + l_2 - \lambda &= 0; \\ l_1 l_2 - 1,5l_1 - 2,0l_2 + 2,64 &= 0\end{aligned}$$

известен метод, гарантирующий определение решения, если оно существует. Действительно, из первого уравнения системы $l_1 = \lambda - l_2$. Подставив полученное для l_1 значение во второе уравнение, имеем $l_2^2 + l_2(0,5 - \lambda) + 1,5\lambda - 2,64 = 0$. Решение квадратного уравнения с одним неизвестным l_2 (λ на каждом этапе решения системы фиксируется) элементарно.

Решим задачу $\lambda \rightarrow \min$ при ограничениях

$$\begin{aligned}l_1 + l_2 - \lambda &= 0; \\ l_1 l_2 - 1,5l_1 - 2,0l_2 + 2,64 &= 0; \\ l_1 \geq 0, l_2 \geq 0.\end{aligned}$$

Используя замечания, изложенные в начале этого параграфа, на первом этапе не введем функцию $h(\vec{y})$. Пусть в результате решения уравнения $f(\vec{l}) = 0$ получены следующие значения переменных: $l_1^1 = 2,2$; $l_2^1 = 3,3$. Примем $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_1 = \Phi(\vec{l}^1) = 2,2 + 3,3 = 5,5$. Так как $|\lambda_0 - \lambda_1| > 0,01$, дальнейшее решение задачи заключается согласно алгоритму (VII.1) в последовательном уменьшении λ , начиная с $\lambda_1 = 5,5$, и решении системы ограничений. Это позволит определять те значения l_1 и l_2 , при которых $\Phi(\vec{l}) = \lambda_k$, где $\lambda_k < \lambda_{k-1} < \dots < \lambda_1$. Примем $\lambda_2 = (\lambda_1 - \lambda_0)/2 + \lambda_0 = 2,75$.

В результате решения указанной выше системы не могут быть получены действительные $l_i \geq 0$, при которых $\Phi(\vec{l}) = 2,75$ (рис. 75). Подобная ситуация имеет принципиальные затруднения, так как в этом случае возможны два вывода: либо $\lambda_{\text{опт}} > 2,75$ и необходимо осуществить поиск $\lambda_{\text{опт}}$ на интервале $[5,5; 2,75]$, либо множество решений системы не связное¹.

Для устранения указанного затруднения конструируем и вводим в задачу функцию $h(y) = y_1^2 + y_2^2$ и уравнение

¹ Множество будем называть связным, если любые две его точки можно соединить путем, каждая точка которого принадлежит этому множеству.

$\lambda = \frac{(\lambda_1 - \lambda_0)}{2 + \lambda_0} :$	l_1	l_2	y_1	y_2
1,5000	0,2	1,3	1,0	0
1,2500	—	—	—	—
1,3750	0,0606	1,3143	1,0	0
1,3125	—	—	—	—
1,3437	0,0264	1,3173	1,0	0
1,3281	0,0091	1,3190	1,0	0
1,3203	0,0005	1,3198	1,0	0

$y_1^2 = 1$. Легко проверить, что система

$$\begin{aligned} (y_1^2 + y_2^2)(l_1 + l_2) - \lambda &= 0; \\ l_1 l_2 - 1,5l_1 - 2,0l_2 + 2,64 &= 0; \\ y_1^2 &= 1, \end{aligned}$$

в отличие от рассматриваемой в начале примера, имеет решение при $\lambda = 2,75$. Одно из таких решений — $y_1 = 1$; $y_2 = 1,18$; $l_1 = 0,8$ и $l_2 = 1,2$. В этом случае $\Phi(\vec{l}) = 2,0$. Примем $\lambda_1 = 2,0$. Так как $|\lambda_0 - \lambda_1| > 0,01$, то $\lambda_2 = = (\lambda_1 - \lambda_0) : 2 + \lambda_0 = 1,0$.

Решение последней системы при $\lambda = 1,0$ не существует и, следовательно, $\lambda_{\text{опт}} \in [1, 0; 2, 0]$. Дальнейшие этапы решения задачи по алгоритму (VII.1) сведены в табл. 20, из которой следует, что условие $|\lambda_{\text{опт}} - \lambda^*| \leq 0, 01$ выполняется при $l_1 = 0,0005$ и $l_2 = 1,3198$. Для полученных значений переменных $\Phi(\vec{l}) = l_1 + l_2 = 1,3203$. Точное решение задачи — $l_1 = 0,00$; $l_2 = 1,32$ и $\Phi(\vec{l}) = 1,32$.

Итак, если удастся сконструировать функцию цели $\Phi(\vec{l})$ так, что удовлетворяются условия а) и б), то задачу оптимальной реализации, оказывается, можно решить, достигнув глобального экстремума. Существенно при этом, что оптимум отыскивается на множестве схем, порождаемом компонентными уравнениями. При этом ни одна из схем, являющаяся следствием системы компонентных уравнений, не пропускается. Обоснование изложенного в завуалированной форме содержится в доказательстве теоремы. Можно непосредственно построить подобное обоснование, применив схему доказательства от противного.

В заключение еще раз обратим внимание на вопрос о выборе множества эквивалентных схем и на его описание.

λ_1	λ_0	$ \lambda_1 - \lambda_0 $	$\Phi(\vec{l})$
1,5	1,0	0,5	1,500
1,5	1,25	0,25	—
1,375	1,25	0,125	1,375
1,375	1,3125	0,0625	—
1,3437	1,3125	0,0312	1,3437
1,3281	1,3125	0,0156	1,3281
1,3203	1,3125	0,0078	1,3203

Выбор диктуется условиями решаемой задачи: это может быть схема заданной топологии, может рассматриваться группа топологий (например, только планарные), могут конкурировать все возможные топологии и тогда вводится схема полной топологической структуры. От выбранного множества схем зависят способ его описания и форма записи компонентных уравнений. При реализации схемы заданной топологии — это обычно компонентные уравнения (I.6). В случае схемы полной топологической структуры — это расширенные компонентные уравнения (V.9). В иных задачах форма описания множества эквивалентных схем в терминах компонентных уравнений должна быть определена дополнительно.

2. Реализация схем с минимальной суммарной емкостью и минимальным разбросом номиналов

Реализация электронных схем с минимальной суммарной емкостью (индуктивностью). Задача реализации электронных схем с минимальной суммарной емкостью (индуктивностью) тесно связана с проблемами проектирования электронных схем с минимальными массой и габаритами. Помимо этого существует целый ряд важнейших технических задач, где рассматриваемая проблема актуальна (проектирование схем микроэлектроники).

Функция цели в случае реализации цепей с минимальной суммарной емкостью имеет вид $\Phi_1(\vec{l}) = \sum_{i=1}^{E_1} l_i$, где E_1 — число включенных в схему емкостей, а нумерация элементов проведена так, что l_1, l_2, \dots, l_{E_1} — параметры емкостей.

Если необходимо получить цепь с минимальной суммарной индуктивностью, используется целевая функция типа $\Phi_2(\vec{l}) = \sum_{i=E_1+1}^{E_2} l_i$, где $E_2 - E_1$ — число включенных в схему индуктивностей, и принимается соответствующий порядок нумерации элементов.

Поскольку решение задачи реализации цепей с минимальной суммарной емкостью (индуктивностью) на основе

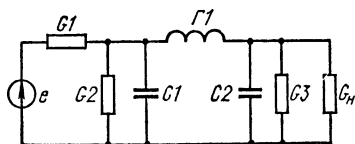


Рис. 76

классических методов нелинейного программирования не гарантирует получения глобального минимума целевой функции, воспользуемся методом решения задачи оптимизации, описанным в главе VII параграфа 1. Для

этого задачу реализации заземленной бестрансформаторной RLC -цепи по заданной передаточной функции представим в следующей форме:

$$\lambda \rightarrow \min \quad (\text{VII.9})$$

при ограничениях ¹

$$\begin{aligned} (y_1^2 + y_2^2) \Phi_1(\vec{l}) - \lambda &= 0; \\ f_i(\vec{l}) - a_i &= 0, \quad i = \overline{0, m}; \\ y_1^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Здесь $y_1^2 + y_2^2 = h(\vec{y})$.

Все левые части уравнений последней системы — однородные функции. Для задачи (VII.9) выполняются условия теоремы, и следовательно, она может быть решена с применением алгоритма (VII.1), т. е. может быть найдена схема, доставляющая глобальный минимум функции $\Phi(\vec{l})$ (схема с минимальной суммарной емкостью) ².

Пример 2. В результате реализации фильтра (рис. 76) по заданной передаточной функции по напряжению

$$T(p) = \frac{3,0}{1,0p^3 + 15,3p^2 + 34,8p + 13,5}$$

¹ Условия физической реализуемости не включены в число ограничений, так как могут быть учтены при решении задачи заменой переменной $l_i \rightarrow e^{l_i}$.

² Для простоты рассматриваем случай бестрансформаторной заземленной цепи, реализуемой по заданной передаточной функции. Применяя приемы, описанные в главе IV, легко обобщить эту задачу на случай реализации иных операторов и более общих классов схем.

с применением стандартной процедуры расчета получены следующие значения параметров элементов:

$$\hat{G}_1 = 1,0; \quad \hat{G}_2 = 2,0; \quad \hat{G}_3 = 0,5;$$

$$\hat{G}_H = 1,0; \quad \hat{C}_1 = 10,0; \quad \hat{C}_2 = 0,1;$$

$$\Gamma_1 = 3,0.$$

Суммарная емкость в этом случае составляет $\Phi_1 = \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 10,0 + 0,1 = 10,1$. Определим схему, реализующую заданную схемную функцию, с минимальной суммарной емкостью и $\hat{G}_H = 1,0$. В формализованном виде задача записывается в виде $\lambda \rightarrow \min$ при ограничениях $(y_1 + y_2)(l_6 + l_7) - \lambda = 0$, $l_1 l_5 = 3,0$; $l_4^2 = 1,0$; $l_6 l_7 = 1,0$;

$$l_1 l_5 + l_2 l_5 + l_5 l_3 + l_5 l_4 = 13,5; \quad y_1^2 = 1,0; \quad l_1 l_4 + l_1 l_3 +$$

$$+ l_2 l_3 + l_6 l_5 + l_5 l_7 + l_2 l_4 = 34,8; \quad l_j \geq 0; \quad l_1 l_7 + l_2 l_7 + l_6 l_3 +$$

$$+ l_6 l_4 = 15,3; \quad y_1 > 0, \quad y_2 \geq 0.$$

Здесь $\vec{l} = \{l_1, l_2, \dots, l_7\} = \{G_1, \dots, G_H, \Gamma_1, C_1, C_2\}$.

Вместо уравнений $l_4 = 1,0$ и $y_1 = 1,0$ включены эквивалентные им $l_4^2 = 1,0$ и $y_1^2 = 1,0$ при условии $l_4 \geq 0$ и $y_1 > 0$. Это позволило уравнивать степени однородности всех левых частей уравнений, входящих в систему ограничений задачи. Исключив ограничения-неравенства заменой переменных $l_j = e^{l_j}$, $y_1 = e^{y_1}$, $y_2 = e^{y_2}$ и обозначив новые переменные опять через l_j , y_1 и y_2 , окончательно получим $\lambda \rightarrow \min$ при ограничениях

$$(e^{y_1} + e^{y_2})(e^{l_6} + e^{l_7}) - \lambda = 0;$$

$$e^{l_1+l_5} = 3,0;$$

$$e^{l_4+l_4} = 1,0;$$

$$e^{l_1+l_5} + e^{l_2+l_5} + e^{l_5+l_3} + e^{l_5+l_4} = 13,5;$$

$$e^{l_1+l_4} + e^{l_1+l_3} + e^{l_2+l_3} + e^{l_6+l_5} + e^{l_5+l_7} + e^{l_2+l_4} = 34,8;$$

$$e^{l_1+l_7} + e^{l_2+l_7} + e^{l_6+l_3} + e^{l_6+l_4} = 15,3;$$

$$e^{2l_4} = 1,0;$$

$$e^{2y_1} = 1,0.$$

В результате решения задачи по алгоритму (VII.1) найдены следующие значения параметров элементов схемы:

$$e^{t_1} = \hat{G}_1 = 3,400; \quad e^{t_2} = \hat{G}_2 = 9,298; \quad e^{t_3} = \hat{G}_3 = 1,602;$$

$$e^{t_4} = \hat{G}_H = 1,000; \quad e^{t_5} = \hat{C}_1 = 0,9988; \quad e^{t_6} = \hat{C}_2 = 1,0002;$$

$$e^{t_7} = \hat{G}_1 = 0,882.$$

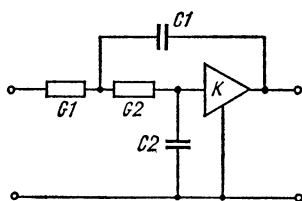


Рис. 77

Минимальное значение целевой функции будет $\Phi_1 = 0,9988 + 1,0002 = 2,000$. Таким образом, удалось уменьшить суммарную емкость по сравнению с исходным вариантом в пять раз. Можно утверждать, что найден глобальный минимум целевой функции в пределах точности

выполненных вычислений. Передаточная функция итоговой схемы имеет вид

$$T(p) = \frac{2,9998}{0,999p^3 + 15,3020p^2 + 34,8044p + 13,4999}.$$

Пример 3. Реализуем передаточную функцию по напряжению

$$T(p) = \frac{10,0}{p^2 + 1,4142p + 1,0}$$

ARC-цепью с минимальной суммарной емкостью.

Решение задачи проведем на основе схемы усеченной топологической структуры (см. рис. 46), в рамках которой может быть определено полное множество эквивалентных четырехузловых цепей, реализующих фильтр нижних частот.

После решения задачи реализации без учета целевой функции $\Phi = C2 + C3 + C5 + C6$ получены следующие значения параметров элементов:

$$\hat{G}_1 = 50,8627; \quad \hat{G}_2 = 0,356750 \cdot 10^{-1};$$

$$\hat{G}_3 = 0,173012 \cdot 10^{-2}; \quad \hat{G}_4 = 0,634450 \cdot 10^{-1};$$

$$\hat{G}_5 = 0,102547; \quad \hat{G}_6 = 0,169425; \quad \hat{C}_2 = 43,2157;$$

$$\hat{C}_3 = 2,99636; \quad \hat{C}_5 = 0,854564 \cdot 10^{-1};$$

$$\hat{C}_6 = 0,200992; \quad K = 3,0998.$$

Суммарная емкость в этом случае составляет $\Phi = 46,49$. Решение той же задачи с учетом целевой функции привело к схеме со следующими данными:

$$\hat{G}1 = 3,43716; \quad \hat{G}2 = 0,216408 \cdot 10^{-1};$$

$$\hat{G}3 = 0,253844 \cdot 10^{-1}; \quad \hat{G}4 = 0,321239;$$

$$\hat{G}5 = 0,149109 \cdot 10^{-2}; \quad \hat{G}6 = 0,687674 \cdot 10^{-4};$$

$$\hat{C}2 = 0,213304 \cdot 10^{-2}; \quad \hat{C}3 = 0,966811;$$

$$\hat{C}5 = 0,198477 \cdot 10^{-2}; \quad \hat{C}6 = 1,04804; \quad K = 9,0567;$$

$$\Phi = 2,0189,$$

где часть элементов можно исключить ввиду их малости.

Получим схему, изображенную на рис. 77. Здесь $\hat{G}1 = 3,43716$; $\hat{G}2 = 0,32124$; $\hat{C}1 = 0,96681$; $\hat{C}2 = 1,04804$; $K = 9,05673$.

Передаточная функция этой схемы будет

$$T(p) = \frac{9,99998}{1,01326p^2 + 1,43671p + 1,10415}.$$

Последняя схема и соответствующие параметры элементов были использованы в качестве нулевого приближения для последующего решения задачи оптимальной реализации.

В ходе ее решений найдено, что $\hat{G}1 = 3,35794$; $\hat{G}2 = 0,29806$; $\hat{C}1 = 0,93327$; $\hat{C}2 = 1,07174$; $K = 9,99211$. Этим значениям параметров элементов соответствует функция

$$T(p) = \frac{10,00067}{1,00022p^2 + 1,41697p + 1,00086}.$$

Значение целевой функции Φ равно 2,005.

Основное назначение рассмотренного примера состоит в иллюстрации практической возможности решения задачи полной оптимальной топологической реализации.

Реализация цепей с минимальным разбросом номиналов. Подобная задача связана с проектированием цепей, в которых по техническим условиям следует минимизировать отличие элементов одного вида по номиналу друг от друга. В этом случае необходимо, чтобы каждый элемент возможно меньше отличался от среднеквадратичного значения

всех элементов данного вида. Целевая функция с учетом такого критерия оптимальности имеет вид

$$\Phi(\vec{l}) = \sum_{j=1}^{E_1} (l_j - l_0)^2,$$

где $l_0 = \frac{1}{E_1} \sum_{j=1}^{E_1} l_j$, E_1 — число элементов определенного вида (индуктивностей, сопротивлений или емкостей, включенных в цепь); элементы данного вида имеют номера от 1 до E_1 .

Данную задачу также легко свести к задаче нелинейного программирования $\Phi(\vec{l}) \rightarrow \min$ при ограничениях

$$\begin{aligned} f_i(\vec{l}) - a_i &= 0, \quad i = \overline{0, m}; \\ l_j &\geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Существующие способы решения рассматриваемой задачи не гарантируют получения глобального минимума. Исследуем возможность такого преобразования исходной задачи, которое позволило бы свести ее к задаче (VII.4)¹. Примем

$$\Phi(\vec{l}) = \sum_{j=1}^{E_1} (l_j - l_0)^2 = v^2.$$

Раскроем скобки в последнем выражении и перенесем отрицательные слагаемые в правую часть

$$\sum_{j=1}^{E_1} (l_j^2 + l_0^2) = 2 \sum_{j=1}^{E_1} l_j l_0 + v^2. \quad (\text{VII.10})$$

Введем новую переменную $z_1 \neq 0$:

$$\sum_{j=1}^{E_1} (l_j^2 + l_0^2) = \frac{1}{z_1}; \quad v^2 + z \sum_{j=1}^{E_1} l_j l_0 = \frac{1}{z_1}.$$

Умножив обе части уравнений на z_1 , получим систему из двух уравнений, эквивалентную равенству (VII.10):

$$\begin{aligned} z_1 \sum_{j=1}^{E_1} (l_j^2 + l_0^2) &= 1; \\ z_1 v^2 + 2z_1 \sum_{j=1}^{E_1} l_j l_0 &= 1. \end{aligned}$$

¹ Функция $\Phi(\vec{l})$ является однородной, однако часть слагаемых входит со знаком минус. Это обстоятельство и требует дополнительных преобразований задачи.

Далее рассмотрим равенство $l_0 = \frac{1}{E_1} \sum_{j=1}^{E_1} l_j$. Введем новую переменную $z_2 \neq 0$ и обозначим $l_0 = \frac{1}{z_2}$. Тогда $z_2 l_0 = 1$; $z_2 \frac{1}{E_1} \sum_{j=1}^{E_1} l_j = 1$.

С учетом проведенных преобразований исходную задачу оптимизации можно сформулировать следующим образом¹:

$$\lambda \rightarrow \min \quad (\text{VII.11})$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} v^2 (y_1^2 + y_2^2) - \lambda &= 0, \quad z_2 l_0 = 1; \\ z_1 v^2 + z_1 \sum_{j=1}^{E_1} 2l_j l_0 &= 1; \quad f_t(\vec{l}) - a_t = 0, \quad i = \overline{0, m}; \\ z_1 \sum_{j=1}^{E_1} (l_j^2 + l_0^2) &= 1, \quad y_1^2 = 1; \\ \frac{1}{E_1} z_2 \sum_{j=1}^{E_1} l_j &= 1. \end{aligned}$$

Анализ задачи (VII.11) показал, что для ее решения может быть использован алгоритм (VII.1) и при этом гарантируется получение глобального минимума целевой функции.

Пример 4. Определим значения параметров элементов фильтра Баттерворта четвертого порядка

$$T(p) = \frac{0,707}{1,414p^4 + 3,695p^3 + 4,828p^2 + 3,695p + 1,414}$$

с минимальным разбросом номиналов индуктивностей. Значения параметров элементов фильтра (рис. 78), определенные по табличным данным [1], следующие:

$$\begin{aligned} \hat{G}1 &= 1,000; \quad \hat{C}1 = 0,765; \quad \hat{L}1 = 0,540; \\ \hat{G}_n &= 1,000; \quad \hat{C}2 = 1,848; \quad \hat{L}2 = 1,306. \end{aligned}$$

Величины индуктивностей различаются более чем в два раза. Значение функции Φ будет: $\Phi = [\Gamma 1 - 0,5 (\Gamma 1 + \Gamma 2)]^2 + [\Gamma 2 - 0,5 (\Gamma 1 + \Gamma 2)]^2 = 0,58$.

¹ Предполагается, что неравенства $l_j \geq 0$ учтены известной заменой переменной.

Решение задачи минимизации разброса номиналов индуктивностей проведем на основе схемы, представленной на рис. 79. Включение дополнительного резистора G_2 позволяет увеличить число переменных и расширить множество допустимых решений.

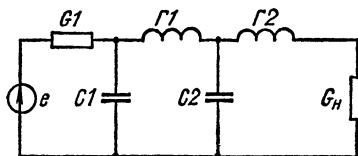


Рис. 78

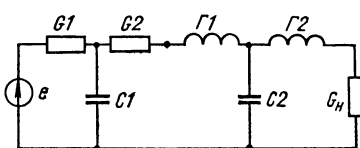


Рис. 79

В формализованном виде задача записывается следующим образом: $\lambda \rightarrow \min$ при ограничениях

$$v^2 (y_1^2 + y_2^2) - \lambda = 0;$$

$$z_1 v^2 + 2z_1 l_5 l_0 + 2z_1 l_6 l_0 = 1,0;$$

$$z_1 (l_5^2 + l_0^2) + z_1 (l_6^2 + l_0^2) = 1,0;$$

$$z_2 l_0 = 1,0;$$

$$0,5z_2 l_5 + 0,5z_2 l_6 = 1,0;$$

$$f_0(\vec{l}) = l_1 l_2 l_5 l_6 = 0,707;$$

$$f_1(\vec{l}) = l_1 l_2 l_5 l_6 + l_2 l_5 l_6 l_7 + l_1 l_5 l_6 l_7 = 1,414;$$

$$f_2(\vec{l}) = l_1 l_5 l_4 l_6 + l_2 l_5 l_4 l_6 + l_3 l_2 l_5 l_6 + l_1 l_2 l_5 l_7 + \\ + l_1 l_2 l_6 l_7 + l_3 l_5 l_6 l_7 = 3,695;$$

$$f_3(\vec{l}) = l_1 l_2 l_4 l_6 + l_2 l_5 l_4 l_7 + l_3 l_2 l_5 l_7 + l_3 l_2 l_6 l_7 + l_1 l_5 l_4 l_7 + \\ + l_3 l_4 l_5 l_6 = 4,828;$$

$$f_4(\vec{l}) = l_3 l_2 l_4 l_6 + l_1 l_2 l_4 l_7 + l_3 l_5 l_4 l_7 = 3,655;$$

$$f_5(\vec{l}) = l_3 l_2 l_4 l_7 = 1,414;$$

$$y_1^2 = 1,0; \quad l_i \geq 0.$$

Здесь $\vec{l} = \{l_1, \dots, l_7\} = \{G1, G2, C1, C2, \Gamma1, \Gamma2, G_H\}$.

В результате решения ¹ по алгоритму (VII.1) записанной выше задачи получены следующие значения параметров элементов:

$$l_1 = \hat{G}1 = 0,945; \quad l_7 = \hat{G}_n = 0,695; \quad l_2 = \hat{G}2 = 2,776;$$

$$l_4 = \hat{C}2 = 1,298; \quad l_3 = \hat{C}1 = 0,563; \quad l_6 = \hat{\Gamma}2 = 0,519.$$

$$l_8 = \hat{\Gamma} = 0,516.$$

Значение функции цели с учетом найденных значений $\hat{G}1$ и $\hat{G}2$ будет $\Phi(\vec{l}) = 1,0 \cdot 10^{-5}$.

Таким образом, в результате решения задачи оптимизации удалось получить практически равные величины индуктивностей. Итоговая схема имеет следующую передаточную функцию:

$$T(p) = \frac{0,709}{1,405p^4 + 3,707p^3 + 4,825p^2 + 3,693p + 1,419}.$$

Можно показать, что к описанным выше вариантам сводится задача реализации схемы оптимальной по критериям чувствительности частотных характеристик [40]. При этом, однако, размерность задачи сильно возрастает.

В заключение подчеркнем, что главной особенностью метода является возможность при реализации определять наряду с номиналами элементов структуру цепи. Последняя, как известно, является мощным (если не самым существенным) ресурсом повышения качественных показателей электронных схем. Таким образом, в рамках метода оптимальной реализации с использованием компонентных уравнений принципиально возможно генерировать структуры и наборы номиналов элементов, в максимальной мере отвечающих целям проекта.

¹ Решение задачи, как и в предыдущем примере, выполнялось с учетом замены переменных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Альбац М. Е. Справочник по расчету фильтров и линий задержки.— М.; Л. : Госэнергоиздат, 1963.— 200 с.
2. Анисимов В. И. Топологический расчет электронных схем.— Л. : Энергия, 1977.— 240 с.
3. Балабанян Н. Синтез электрических цепей / Под ред. Г. И. Атабекова.— М.; Л. : Госэнергоиздат, 1961.— 416 с.
4. Бандман О. Л. Синтез электронных RC-схем.— М. : Наука, 1966.— 247 с.
5. Беллерт С., Возняцкий Г. Анализ и синтез электрических цепей методом структурных чисел.— М. : Мир, 1972.— 33 с.
6. Берж К. Теория графов и ее применение.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 320 с.
7. Блашкевич Б. I. Топологічні методи аналізу електричних кіл.— К. : Наук. думка, 1971.— 312 с.
8. Блашкевич Б. И., Воробкевич А. Ю. О возможности упрощения системы булевых уравнений при синтезе трехполюсных RLC-цепей.— М., 1970.— 14 с.— Рукопись деп. в НИИЭИР, № Д—1925 Деп.
9. Блашкевич Б. И., Дерябина А. Г. К вопросу о поиске прадеревьев графа с помощью ЭЦВМ.— Теорет. электротехника, 1970, вып. 9, с. 39—42.
10. Блашкевич Б. И., Михайлова Е. Д. Условия непрерывности ряда степеней прадеревьев в графе проводимости RLC-цепи.— Теорет. электротехника, 1972, вып. 13, с. 50—52.
11. Блашкевич Б. И., Михайлова Е. Д. Топологический метод поиска минимальных структур RLC-цепей. Ч. 1.— Теорет. электротехника, 1972, вып. 14, с. 14—19.
12. Блашкевич Б. И., Михайлова Е. Д. Условия сохранения предельных степеней прадеревьев в графе проводимостей электрической цепи при изменении его структуры.— Отбор и передача информ., 1974, вып. 38, с. 21—28.
13. Ван-дер-Варден Б. А. Современная алгебра. Ч.2.— М. : ОГИЗ, 1947.— 341 с.
14. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— М. : Наука, 1966.— 576 с.
15. Гиллемин Э. А. Синтез пассивных цепей.— М. : Связь, 1970.— 718 с.
16. Давиденко Д. Р. Об одном новом методе численного решения нелинейных уравнений.— Докл. АН СССР, 1953, 38, № 4, с. 601—602.
17. Даффин Р., Питерсон Э., Зенер К. Геометрическое программирование.— М. : Мир, 1972.— 311 с.

18. *Дерябина А. Г., Михайлова Е. Д.* Исключение изоморфности схем при их синтезе методом объединения двух деревьев.— Отбор и передача информ., 1978, вып. 54, с. 23—28.
19. *Дерябина А. Г., Михайлова Е. Д.* Перечисление перестановок в лексикографическом порядке.— Киев, 1975.— 7 с.— Деп. в Укр. РФАП, Рег. № 168.
20. *Дерябина А. Г., Михайлова Е. Д.* Перечисление размещений.— Киев, 1975.— 7 с.— Деп. в Укр. РФАП, Рег. № 167.
21. *Дмитришин Р. В., Шаповалов Ю. И.* Вычисление схемных функций при многовариантном анализе схем.— Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1978, 21, № 6, с. 151—153.
22. *Зангвилл У. И.* Нелинейное программирование : Единый подход.— М. : Сов. радио, 1973.— 310 с.
23. *Ионкин П. А., Миронов В. Г.* Синтез RC-схем с активными не-взаимными элементами (вопросы реализации).— М. : Энергия, 1976.— 240 с.
24. *Карни Ш.* Теория цепей : Анализ и синтез.— М. : Связь, 1973.— 368 с.
25. *Котман А.* Введение в прикладную комбинаторику.— М. : Мир, 1975.— 479 с.
26. *Кривошейкин А. В., Ланнэ А. А.* К теории эквивалентных электрических цепей.— Теорет. электротехника, 1970, вып. 10, с. 82—86.
27. *Ланнэ А. А.* Оптимальный синтез линейных электрических цепей.— М. : Связь, 1969.— 293 с.
28. *Ланнэ А. А.* Оптимальный синтез линейных электронных схем.— М. : Связь, 1978.— 336 с.
29. *Ланнэ А. А., Саркисян Б. С.* Оптимальная реализация линейных электронных схем.— Радиотехника, 1979, т. 34, № 7, с. 14—20.
30. *Ланнэ А. А., Саркисян Б. С.* Решение компонентных уравнений в задачах реализации электронных схем.— Радиотехника, 1977, т. 32, № 7, с. 27—33.
31. *Максимович Н. Г.* Методы топологического анализа электрических цепей.— Изд-во Льв. ун-та, 1970.— 257 с.
32. *Матвейчук Я. Н.* Разработка метода и программ анализа линейных схем по частям.— Теорет. электротехника, 1980, вып. 29, с. 62—71.
33. *Мееров М. В.* Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности.— М. : Наука, 1967.— 423 с.
34. *Михайлова Е. Д., Балицкая Е. Е.* Алгоритм выявления изоморфизма двух произвольных графов.— Теорет. электротехника, 1974, вып. 17, с. 8—13.
35. *Михайлова Е. Д., Балицкая Е. Е.* Способ получения графов цепей минимальной структуры при структурном синтезе электрических цепей.— Отбор и передача информ., 1973, вып. 36, с. 46—53.
36. *Мэзон С., Циммерман Г.* Электронные цепи, сигналы и системы.— М. : Изд-во иностр. лит., 1963.— 619 с.
37. *Нагорный Л. А.* Моделирование электронных цепей на ЦВМ.— Киев : Техніка, 1974.— 360 с.
38. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных уравнений со многими неизвестными.— М. : Мир, 1975.— 558 с.
39. *Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М.* Численные методы в экстремальных задачах.— М. : Наука, 1975.— 319 с.
40. *Саркисян Б. С.* Машинные методы реализации линейных электрических схем : Автореф. дис. ... канд. техн. наук.— Л., 1976.— 25 с.

41. *Сешу С., Рид М. Б.* Линейные графы и электрические цепи.— М. : Высш. школа, 1971.— 445 с.
42. *Сигорский В. П., Петренко А. И.* Основы теории электронных схем.— Киев : Техніка, 1967.— 607 с.
43. *Синтез активных RC-цепей.* Современное состояние и проблемы / Под ред. А. А. Ланнэ.— М. : Связь, 1975.— 296 с.
44. *Смирнова Т. Н.* Полиномиальный прораб и проведение аналитических выкладок на ЭВМ.— Тр. мат. ин-та, 1962, вып. 66.— с. 77—112.
45. *Миниатюризованные фильтры* — М., 1979.— 210 с.— (ТИИЭР; Т. 67. № 1).
46. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления : В 3-х т.— М. : Физматгиз, 1962.— Т. 1. 607, Т. 2. 800; Т. 3. 656 с.
47. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование.— М. : Мир, 1975.— 634 с.
48. *Ходж В., Пидо Д.* Методы алгебраической геометрии.— М. : Изд-во иностр. лит., 1954. Т. 1.— 188 с.
49. *Хьюлман Л. П.* Теория и расчет активных RC-цепей.— М. : Связь, 1973.— 238 с.
50. *Чуа Л. О., Лин Пен-Мин.* Машинный анализ электронных схем: Алгоритмы и вычислительные методы / Пер. с англ.— М. : Энергия, 1980.— 640 с.
51. *Cauer W.* Theorie der linearen Wechselstromhaltungen. — Akademie — Verlag, 1954.— 770 S.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава I.	
Метод компонентных уравнений	5
1. Классификация задач реализации	5
2. Принципы решения задач реализации	8
3. Сущность метода компонентных уравнений	14
4. Свойства компонентных уравнений	18
Глава II	
Алгоритм составления компонентных уравнений	23
1. Основные понятия и определения	23
2. Топологический метод определения схемной функции делением графа цепи на части	33
3. Примеры расчета коэффициентов схемных функций	45
Глава III	
Аналитическое решение компонентных уравнений	54
1. Основы метода исключения неизвестных для решения нелинейных алгебраических уравнений	54
2. Особенности применения метода исключения неизвестных для решения компонентных уравнений	60
3. Алгоритм решения компонентных уравнений	68
Глава IV	
Численное решение систем компонентных уравнений	82
1. Принципы решения компонентных уравнений	82
2. Метод продолжения по параметру для решения компонентных уравнений	86
3. Решение компонентных уравнений общего вида с учетом условий схемной реализуемости	94
4. Особенности построения численных алгоритмов решения систем компонентных уравнений	97
Глава V	
Топологическая реализация электронных схем	107
1. Реализация <i>RLC</i> -цепей на основе полной топологической структуры	107
2. Активные линейные электронные схемы	120
3. Схемы усеченной топологической структуры в задаче реализации электронных цепей	128

Глава VI

Реализация усеченных топологий электронных схем	134
1. Формы представления схемной функции и топология схемы	134
2. Структурные параметры графа схемы и граничные степени	138
3. Топологии и спектры степеней	150
4. Соотношения граничных степеней и типов спектров в полиномах схемных функций	159
5. Требования к структуре схемы при задании схемных функций с сокращающимися множителями	171
6. Построение множества графов проводимостей схем по заданным схемным функциям	176

Глава VII

Реализация электронных схем по критериям оптимальности . . .	187
1. Численный метод реализации электронных схем . . .	187
2. Реализация схем с минимальной суммарной емкостью и минимальным разбросом номиналов	195
Список литературы	204

АРТУР АБРАМОВИЧ ЛАННЭ, ЕВГЕНИЯ ДМИТРИЕВНА МИХАЙЛОВА, БОРИС СУРЕНОВИЧ САРКИСЯН, ЯРОСЛАВ НИКОЛАЕВИЧ МАТВИЙЧУК

ОПТИМАЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ RLC-СХЕМ

Утверждено к печати ученым советом Физико-механического института АН УССР им. Г. В. Карпенко

Редактор *Н. И. Сухомлинская*. Художественный редактор *И. В. Козий*. Технический редактор *Г. Р. Боднер*. Корректоры *Р. С. Коган, Е. А. Михалец*.

Информ. бланк № 4425

Сдано в набор 16.06.81. Подп. в печ. 08.01.82. БФ 00605. Формат 84×108/32. Бум. тип. № 1. Лит. гарн. Выс. печ. Усл. печ. л. 10,92. Усл. кр.-отт. 11,12. Уч.-изд. л. 10,49. Тираж 1450 экз. Зак. № 1—1322. Цена 1 руб. 60 коп.

Издательство «Наукова думка». 252601. Киев, ГСП, Репина, 3.

Напечатано с матриц головного предприятия РПО «Полиграфкнига» 252057, Киев-57, Довженко, 3 в Киевской книжной типографии научной книги. 252004, Киев-4, Репина, 4. Зак. 2-61.

1 р. 60 к.

«НАУКОВА ДУМКА»