

В. Г. ГУСЕВ · МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ТОЧНОСТИ ЦИФРОВЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ



В. Г. ГУСЕВ

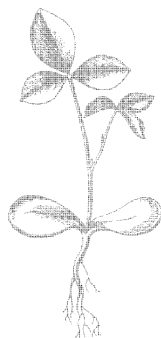
МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ
ТОЧНОСТИ
ЦИФРОВЫХ
АВТОМАТИЧЕСКИХ
СИСТЕМ





ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1973



Scan AAW

В. Г. ГУСЕВ

**МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ
ТОЧНОСТИ
ЦИФРОВЫХ
АВТОМАТИЧЕСКИХ
СИСТЕМ**

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1973

Методы исследования точности цифровых автоматических систем, Гусев В. Г., Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1973, 400 стр.

Книга посвящена методам исследования точности процессов управления и обработки информации в автоматических системах с управляющими цифровыми вычислительными машинами (ЦВМ). Предлагаются методы анализа и синтеза таких систем при регулярных и случайных воздействиях.

Особенностью развиваемых в книге методов является учет погрешности, порождаемой использованием в системе дискретного управляющего устройства — ЦВМ, что имеет определяющее значение при проектировании цифровых систем. Задачи статистической динамики цифровых систем решаются на основе использования операторных методов — одномерного и двумерного z -преобразований. Предлагаемые методы доведены до расчетных формул, применение которых иллюстрируется рядом примеров.

Книга предназначена для специалистов в области теории и проектирования цифровых систем, а также может быть использована студентами вузов.

Табл. 8. Илл. 49. Библ. 72 назв.

Предисловие	9
Глава I. Цифровые автоматические системы и способы их математического описания. Постановка задачи исследования погрешности, обусловленной использованием в автоматической системе цифровой машины	15
§ 1. Цифровые автоматические системы и задачи их исследования	15
§ 2. Расчетные схемы цифровых автоматических систем и способы математического описания их типовых элементов	20
1. Преобразователь непрерывных величин в дискретные (20). 2. Цифровая вычислительная машина (29). 3. Восстанавливающее устройство и объект управления (35). 4. Расчетные схемы разомкнутых и замкнутых цифровых автоматических систем (37).	
§ 3. Постановка задачи исследования погрешности, обусловленной дискретностью процессов управления и обработки информации в цифровых автоматических системах	43
1. Природа ошибок, вызванных использованием в системе цифровой вычислительной машины (43). 2. Способ определения погрешности, возникающей в цифровой автоматической системе (49). 3. Методы количественного исследования погрешности цифровой автоматической системы (55).	
Глава II. Двумерное z-преобразование, его основные свойства и правила	62
§ 4. Основные соотношения двумерного z -преобразования. Связь двумерного z -преобразования с двумерным преобразованием Лапласа и двойным рядом Фурье	63
1. Прямое двумерное z -преобразование (63). 2. Связь между двумерным z -преобразованием и двумерным преобразованием Лапласа (66). 3. Связь между двумерным z -преобразованием и двойным рядом Фурье (75). 4. Обратное двумерное z -преобразование (77).	
§ 5. Основные правила и теоремы двумерного z -преобразования	80
1. Линейность прямого и обратного двумерного z -преобразования (81). 2. Правило смещения независимых переменных в области оригиналов (81). 3. Правило смещения независимых переменных в области изображений (82). 4. Изображение разностей дискретных значений функции двух переменных (83). 5. Правила изменения порядка суммирования в многомерных суммах (83). 6. Изображение сумм дискретных значений функций двух переменных (85). 7. Изображение дискретной функции, соответствующей производной от непрерывной функции (87). 8. Изображение двойного интеграла непрерывной функции двух пере-	

	менных (88). 9. Изображение произведения интеграла на сумму (90). 10. Дифференцирование двумерного z -изображения по z и z_1 (90). 11. Умножение двумерных изображений (91). 12. Умножение двумерных оригиналов (92). 13. Сумма ординат дискретной функции двух переменных (93). 14. Сумма квадратов ординат дискретной функции двух переменных (93). 15. Объем, ограниченный огибающей смещенной дискретной функции двух переменных (94). 16. Объем, ограниченный квадратом огибающей смещенной дискретной функции двух переменных (94). 17. Соотношение между двумерными изображениями дискретной функции двух переменных и ее предельными одномерными изображениями (95). 18. Некоторые свойства двумерного z -преобразования с запаздыванием (100).	
§ 6.	Определение двумерных изображений наиболее употребимых дискретных функций двух переменных. Примеры применения прямого и обратного двумерного z -преобразования	101
	1. Двумерные изображения дискретных функций, зависящих от разности переменных (101). 2. Примеры определения двумерных изображений дискретных функций (108). 3. Примеры определения оригиналов, соответствующих двумерным z -изображениям (115).	
§ 7.	Изображения статистических характеристик дискретных случайных процессов	121
	1. Статистические характеристики дискретных случайных процессов (121). 2. Двумерные изображения статистических характеристик дискретных случайных процессов (125). 3. Предельные одномерные изображения моментов второго порядка дискретных случайных процессов (128).	
Глава III. Определение статистических характеристик в дискретных автоматических системах в переходном режиме с помощью методов теории двумерного и одномерного z-преобразований		
§ 8.	Соотношения между изображениями статистических характеристик входной и выходной переменных дискретной автоматической системы в переходном режиме	136
§ 9.	Определение математического ожидания, корреляционной функции и начального момента второго порядка выходной переменной дискретной системы в переходном режиме	142
	1. Вывод основных расчетных формул (142). 2. Случай комплексных полюсов (151). 3. Пример определения корреляционной функции (156).	
§ 10.	Способы определения дисперсии выходной переменной дискретной системы в переходном режиме	159
	1. Определение дисперсии из выражения для корреляционной функции (159). 2. Определение дисперсии исходя из основного соотношения (8.6) (168). 3. Примеры определения зависимости дисперсии от времени (171).	
§ 11.	Определение статистических характеристик погрешности цифровой автоматической системы в переходном режиме	175
	1. Определение корреляционной функции погрешности цифровой автоматической системы (176). 2. Определение дисперсии погрешности цифровой автоматической системы (184). 3. Определение статистических характеристик погрешности цифровой автоматической системы в случае, когда мате-	

математическое ожидание входного воздействия отлично от нуля (193). 4. Примеры определения статистических характеристик погрешности цифровой автоматической системы в переходном режиме (195).

Глава IV. Определение статистических характеристик в дискретных автоматических системах в установившемся режиме операторным и частотным методами	206
§ 12. Определение корреляционной функции выходной переменной дискретной системы в установившемся режиме	207
1. Вывод формулы для определения корреляционной функции выходной переменной дискретной системы в установившемся режиме путем использования выражения для указанной функции в переходном режиме (207). 2. Соотношение между изображениями корреляционных функций входной и выходной переменных дискретной системы и ее передаточной функцией (213). 3. Примеры определения корреляционной функции выходной переменной дискретной системы (217).	
§ 13. Определение дисперсии выходной переменной дискретной системы в установившемся режиме	219
1. Вывод формул для определения дисперсии выходной переменной дискретной системы в установившемся режиме путем использования зависимостей дисперсии от времени в переходном режиме (219). 2. Вывод формул для определения дисперсии выходной переменной дискретной системы в установившемся режиме путем использования изображения зависимости дисперсии от времени (222). 3. Примеры определения дисперсии выходной переменной дискретной системы в установившемся режиме (226).	
§ 14. Определение статистических характеристик погрешности цифровой автоматической системы в установившемся режиме	229
1. Определение корреляционной функции погрешности цифровой автоматической системы (229). 2. Определение дисперсии погрешности цифровой автоматической системы операторным методом (231). 3. Определение дисперсии погрешности цифровой автоматической системы частотным методом (240). 4. Пример определения дисперсии погрешности цифровой автоматической системы в установившемся режиме (248).	
Глава V. Анализ погрешностей, возникающих в цифровых автоматических системах, при детерминированных воздействиях	253
§ 15. Определение погрешности цифровой автоматической системы при регулярных воздействиях как функции времени	254
1. Определение погрешности в дискретные моменты времени (255). 2. Определение погрешности в промежутках между дискретными моментами времени (258). 3. Пример (260).	
§ 16. Определение величины суммарной (интегральной) квадратической погрешности цифровой автоматической системы операторным методом	262
1. Определение квадратической погрешности в переходном режиме (262). 2. Определение квадратической погрешности в установившемся режиме (266). 3. Пример (268).	
§ 17. Оценка относительной интегральной квадратической погрешности частотным методом	271

1. Зависимость, определяющая оценку относительной интегральной квадратической погрешности (272).	
2. Оценка относительной интегральной квадратической ошибки численных методов интегрирования и дифференцирования (279).	
3. Оценка относительной интегральной квадратической ошибки восстановления функции, квантованной по времени (288).	
§ 18. Определение погрешности дискретной автоматической системы при гармоническом входном воздействии	294
1. Определение относительной среднеквадратической погрешности при гармоническом входном воздействии (294).	
2. Оценка гармонической ошибки (301).	
3. Пример определения погрешности цифровой автоматической системы при гармоническом входном воздействии (302).	
Глава VI. Алгебраический метод синтеза оптимальных дискретных автоматических систем	308
§ 19. Определение статистических характеристик ошибки дискретной автоматической системы	309
1. Определение статистических характеристик ошибки по отношению к выходной переменной желаемой дискретной системы (310).	
2. Определение статистических характеристик ошибки по отношению к выходной переменной непрерывной желаемой системы (321).	
§ 20. Определение оптимальной передаточной функции дискретной динамической системы алгебраическим методом	327
1. Определение оптимальной передаточной функции, обеспечивающей минимум дисперсии ошибки (327).	
2. Определение оптимальной передаточной функции, обеспечивающей минимум начального момента второго порядка ошибки (339).	
3. Определение оптимальной передаточной функции, обеспечивающей минимум дисперсии огибающей ошибки (345).	
4. Примеры определения оптимальной передаточной функции дискретной системы (350).	
§ 21. Определение передаточной функции дискретного корректирующего устройства замкнутой автоматической системы, обеспечивающей наилучшее приближение выходной переменной системы к желаемому непрерывному процессу	356
1. Определение оптимальной передаточной функции дискретного корректирующего устройства, обеспечивающей минимум дисперсии ошибки (356).	
2. Определение оптимальной передаточной функции дискретного корректирующего устройства, обеспечивающей минимум дисперсии огибающей ошибки (364).	
3. Определение оптимальной передаточной функции дискретного корректирующего устройства в случае, когда задающее воздействие и возмущение приложены в различных точках замкнутой дискретной системы (366).	
4. Определение оптимальной передаточной функции дискретного корректирующего устройства при отличных от нуля математических ожиданиях входных воздействий (372).	
5. Задача синтеза передаточной функции цифровой вычислительной машины, обеспечивающей наилучшее приближение выходной переменной системы к желаемому непрерывному процессу (375).	
6. Примеры определения оптимальной передаточной функции корректирующего устройства (381).	
Указатель основных обозначений	392
Литература	396

Развитие теории автоматического управления и практики создания автоматических систем в последние полтора десятилетия неразрывно связано с идеей использования для управления цифровых вычислительных машин (ЦВМ). Стремление к проектированию автоматических систем, осуществляющих функции управления наилучшим образом (оптимальных систем), приводит часто к достаточно сложным алгоритмам (законам) управления, для реализации которых наиболее целесообразно использовать ЦВМ. С другой стороны, бурное развитие самой вычислительной техники и создание на ее базе совершенных цифровых управляющих машин, обладающих большими вычислительными возможностями, делает все более перспективным использование ЦВМ в качестве управляющих устройств автоматических систем. Системы с цифровыми машинами (цифровые автоматические системы) находят широкое практическое применение во многих областях техники. Вместе с тем развитие теории этих систем, методов их исследования и проектирования явно отстает от потребностей сегодняшнего дня. Создание такой теории наталкивается на трудности, связанные с необходимостью учета как дискретной информации (в тракте системы, включающем ЦВМ), так и непрерывной информации (в остальной части системы).

Практическая ситуация, возникающая при исследовании и проектировании цифровой автоматической системы, часто сводится к следующему. Объект управления и воздействия, которым подвержена система, имеют непрерывную природу, а в качестве технического устройства, реализующего алгоритм (закон) управления, используется ЦВМ. После того как сформулированы цель управления и установлены требования, предъявляемые к системе, необходимо определить требования к параметрам цифровых устройств системы — самой машине и

преобразователям. К числу таких наиболее важных параметров относятся: шаг дискретности по времени T , с которым осуществляется ввод исходной информации в цифровую машину и разрядности преобразователей и машины (или интервалы квантования информации по уровню в этих устройствах — соответственно $q_{\text{п}}$ и $q_{\text{м}}$). Кроме определения этих параметров необходимо выбрать численный метод, с помощью которого реализуется алгоритм управления в ЦВМ, а также способ восстановления управляющих сигналов на выходе машины в непрерывную форму. Для выработки управляющего сигнала ЦВМ должна выполнить некоторый объем вычислений, определяемый ее программой и отвечающий данному алгоритму и принятому численному методу. Эти вычисления должны быть выполнены в течение времени $\tau \leq T$. Величина τ и требуемый объем вычислений определяют необходимое быстродействие машины.

Для того чтобы иметь возможность выбрать упомянутые выше параметры цифровой автоматической системы, численный метод и способ восстановления, необходимо, очевидно, связать их с качеством функционирования данной автоматической системы. Увеличение параметров квантования информации по времени и уровню (T , $q_{\text{п}}$ и $q_{\text{м}}$), к которому обычно стремятся при проектировании цифровой системы, позволяет в принципе ослабить требования к ЦВМ и преобразователям (как к техническим устройствам) и делает их более простыми и дешевыми. Однако, с другой стороны, увеличение этих параметров для системы с непрерывными объектом управления и источниками информации вызывает ухудшение качества функционирования системы. Действительно, увеличение величин T и $q_{\text{п}}$ приводит к все более невосполнимой потере информации о входном воздействии; увеличение $q_{\text{м}}$ вызывает уменьшение точности выполнения арифметических действий на машине, а увеличение τ означает увеличение запаздывания в выдаче на объект управляющих сигналов. Поэтому важно уметь оценивать влияние указанных выше параметров, а также численного метода, принятого для реализации закона управления на ЦВМ, и способа восстановления на качество функционирования автоматической системы с цифровой машиной,

Это можно сделать так. Предположим, что ЦВМ обладает бесконечно большим быстродействием и бесконечной длиной разрядной сетки (так же, как и преобразователи), т. е. примем параметры квантования информации по времени и уровню равными нулю. Будем называть такую гипотетическую систему *идеальной*. В идеальной системе эффект, вызванный конечностью параметров T , $q_{\text{п}}$, $q_{\text{м}}$, а также τ будет отсутствовать. Сравнивая теперь процессы в реальной и идеальной системах при одних и тех же воздействиях, можно говорить о некоторой погрешности, обусловленной дискретностью процесса управления и порождаемой цифровой машиной, являющейся по своей природе дискретным управляющим устройством. На основе количественной оценки этой погрешности можно судить о том, насколько удовлетворительно выбраны параметры цифровой системы, численный метод и способ восстановления.

Основным направлением настоящей монографии и является развитие аналитических методов исследования точности и качества процессов управления и обработки информации в цифровых автоматических системах с учетом погрешности, обусловленной дискретностью. Полное исследование точности работы цифровой автоматической системы предполагает, с одной стороны, анализ величины ее ошибки, а с другой — синтез передаточной функции дискретного корректирующего устройства, обеспечивающей ее минимум. Методы анализа точности цифровой системы должны позволять находить ошибку, обусловленную дискретностью процесса управления, на основе заданных характеристик объекта управления, алгоритма, предназначенного для реализации на ЦВМ, входных воздействий и величин параметров T , τ , $q_{\text{п}}$ и $q_{\text{м}}$. Методы синтеза оптимальной передаточной функции корректирующего устройства цифровой системы (передаточной функции ЦВМ) также должны учитывать погрешность, вносимую квантованием информации по времени и уровню.

Указанные методы в существенной мере зависят от того, какими являются входные воздействия — детерминированными или случайными. В книге рассматриваются оба случая, однако наибольшее внимание уделяется вопросу исследования цифровых автоматических систем

при случайных воздействиях, так как воздействия этого класса типичны для реальных условий работы систем.

В отличие от методов, основанных на частотно-спектральных представлениях, используемых обычно в статистической динамике дискретных систем, в книге для этой цели широко применяются операторные методы — одномерное и двумерное z -преобразования. Это позволяет просто и в единообразном плане определять статистические характеристики выходной переменной цифровой автоматической системы как в неустановившемся, так и в установившемся режимах, естественным образом переходя от рассмотрения указанных характеристик в первом режиме к рассмотрению их во втором, как это обычно делается при детерминированных воздействиях. С помощью методов двумерного и одномерного z -преобразований определяются и статистические характеристики погрешности, обусловленной дискретностью процесса управления. Также на базе z -преобразования решается задача синтеза оптимальной передаточной функции дискретного корректирующего устройства цифровой системы. Для самой процедуры синтеза применяется алгебраический метод.

Развитие операторных методов и расширение области их использования в статистической динамике дискретных систем является вторым направлением книги.

Книга состоит из шести глав. В первой главе кратко рассматриваются структурные схемы цифровых автоматических систем, их расчетные схемы и способы математического описания. Здесь же в развернутом виде изложена постановка задачи исследования погрешности, обусловленной дискретностью. Рассматриваются природа ошибок, вызванных использованием в системе ЦВМ, и способ определения возникающей при этом погрешности, а также формулируются критерии для оценки величины самой погрешности или ее некоторых функциональных характеристик.

Вторая глава посвящена изложению теоретических основ функционального преобразования дискретных функций двух переменных — двумерного z -преобразования, являющегося эффективным математическим аппаратом исследования переходных процессов в дискретных системах при случайных воздействиях. Устанавливаются

основные соотношения и формулы двумерного z -преобразования, а также доказывается ряд теорем и правил. Находятся двумерные изображения наиболее употребимых дискретных функций двух переменных.

На основании результатов, приведенных во второй главе книги, в третьей главе рассматриваются методы определения статистических характеристик выходной переменной дискретной системы в переходном режиме работы. Здесь же приводятся формулы для определения статистических характеристик погрешности цифровой системы, обусловленной использованием в системе ЦВМ.

В четвертой главе выводятся формулы для определения основных статистических характеристик выходной переменной дискретной системы в установившемся режиме путем использования соотношений и формул, полученных в третьей главе для этих характеристик в переходном режиме. При этом применяются предельные зависимости для одномерного и двумерного z -преобразований, позволяющие осуществить указанный переход. Формулы для статистических характеристик погрешности цифровой системы в установившемся режиме выводятся как путем использования соответствующих формул, полученных в третьей главе для переходного режима, так и независимо от этого с помощью спектральных характеристик входных воздействий.

Пятая глава посвящена методам анализа погрешности, обусловленной дискретностью, при детерминированных воздействиях. Рассматриваются способы определения самой погрешности и ее функциональных характеристик — суммарного и интегрального квадратических значений. Кроме точных формул для определения этих характеристик получены наглядные и удобные выражения для их оценки.

В шестой главе книги излагается алгебраический метод синтеза оптимальных дискретных автоматических систем и их корректирующих устройств при случайных и детерминированных воздействиях. Оптимизация передаточной функции осуществляется исходя из минимума квадратической оценки ошибки дискретной системы, причем эта ошибка рассматривается как по отношению к выходной переменной дискретной преобразующей (желаемой) системы, так и по отношению к выходной

переменной непрерывной системы. В качестве статистических характеристик ошибки рассматриваются: дисперсия ошибки в произвольный момент интервала дискретности, начальный момент второго порядка ошибки (в случае, когда математическое ожидание входного воздействия не равно нулю) и дисперсия огибающей ошибки. Во всех случаях оптимальная передаточная функция находится с помощью единой процедуры — алгебраическим методом.

Методы исследования процессов управления и обработки информации в цифровых автоматических системах, предлагаемые в книге, доведены до расчетных формул, применение которых иллюстрируется рядом примеров. Чтобы сделать результаты расчетов более наглядными и продемонстрировать связь между собой разработанных методов, для примеров, по возможности, используются одни и те же или близкие автоматические системы.

Основным содержанием книги является изложение новых методов, относящихся к исследованию точности и качества работы цифровых автоматических систем при регулярных и случайных воздействиях. В последнем случае на формирование взглядов автора оказала влияние работа А. Н. Скляревича [47].

Автор глубоко признателен В. А. Бесекерскому за ценные замечания и пожелания, высказанные при рецензировании, а также А. С. Венкстерну, Ф. М. Килину и В. П. Перову за обсуждение содержания рукописи и ценные советы.

**ЦИФРОВЫЕ АВТОМАТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
И СПОСОБЫ ИХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ.
ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОГРЕШНОСТИ,
ОБУСЛОВЛЕННОЙ ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
В АВТОМАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ ЦИФРОВОЙ МАШИНЫ**

**§ 1. Цифровые автоматические системы
и задачи их исследования**

Цифровые автоматические системы относятся к классу дискретных систем, которые в зависимости от вида квантования информации, используемой в этих системах, подразделяются [62] на

— релейные системы, в которых осуществляется лишь квантование по уровню;

— импульсные системы, в которых происходит квантование лишь по времени;

— цифровые системы, в которых осуществляются оба вида квантования: как по времени, так и по уровню.

Операция квантования по времени является линейной, а операция квантования по уровню нелинейной. Следовательно, автоматическая система с цифровой машиной нелинейна даже в том случае, когда объект управления линеен. Однако при определенных условиях [58] цифровая система может быть исследована как линейная методами теории импульсных систем.

Для цифровой автоматической системы кроме объекта управления характерно наличие в общем случае следующих специфических элементов:

— преобразователя непрерывных величин в дискретные (ПНД);

— преобразователя дискретных величин в непрерывные, или, как его еще называют, восстанавливающего устройства (ВУ);

— цифровой вычислительной машины (ЦВМ).

Функции этих элементов, как известно, сводятся к следующему. ПНД осуществляет преобразование непрерывных величин в цифровой код, т. е. является устройством, выполняющим одновременно операции квантования входной величины по времени и уровню

(кодирование). ЦВМ в соответствии с программой ее работы преобразует входную числовую последовательность в выходную. И, наконец, ВУ выполняет преобразование (декодирование) цифрового кода, поступающего с выхода ЦВМ, в непрерывный управляющий сигнал, подаваемый на вход объекта управления (ОУ).

Цифровые автоматические системы подразделяются на разомкнутые и замкнутые. Структурная схема разомкнутой цифровой автоматической системы показана на рис. 1.1. Возможны различные варианты разомкнутых цифровых систем. Так, например, объект управления может представлять собой некоторую замкнутую

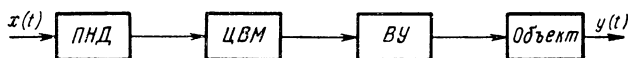


Рис. 1.1.

(или разомкнутую) непрерывную автоматическую систему, для которой ЦВМ вырабатывает задающее воздействие. Объект управления может отсутствовать, тогда разомкнутая цифровая система представляет собой

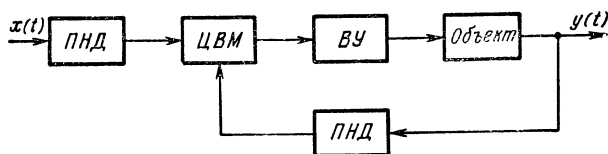


Рис. 1.2.

систему обработки информации от непрерывных источников с помощью ЦВМ. Если в системе имеется восстанавливающее устройство, то обработанная таким образом информация выдается на устройства в непрерывном виде, в противном случае она отображается в дискретном виде.

Структурная схема замкнутой цифровой системы представлена на рис. 1.2, где ЦВМ вырабатывает сигнал ошибки (сравнивает входную и выходную величины) в цифровом виде и осуществляет функции последова-

тельного цифрового корректирующего фильтра. В отдельных случаях ошибка рассогласования вырабатывается не в ЦВМ, а на ее входе с помощью сравнивающего устройства, т. е. в непрерывном виде. Возможны также разновидности замкнутых цифровых систем, при которых коррекция может осуществляться в цепи обратной связи или параллельно [31, 55, 62].

Теоретической базой для исследования цифровых автоматических систем является теория дискретных систем, методы которой по своей форме во многом подобны методам теории непрерывных систем. Существенное значение в теории дискретных (точнее, импульсных) систем играют функциональные преобразования — дискретное преобразование Лапласа [62, 39] и z -преобразование [18, 31, 52, 54], используемые для анализа и синтеза дискретных систем при детерминированных и случайных воздействиях. Правда, в последнем случае область применения операторных методов несколько сужена, поэтому в книге делается попытка ее расширить в том плане, как об этом говорилось в предисловии. Большую роль в теории дискретных систем, так же как и непрерывных, играют частотные методы [20, 62] и метод логарифмических характеристик [1, 31, 54]. Для исследования динамики сложных дискретных систем управления с нелинейными и нестационарными характеристиками с успехом применяются матричные методы и специальные рекуррентные соотношения [25], интерполяционный метод [65] и др.

Применительно к импульсным и релейным системам теория дискретных систем достигла высокого уровня. В то же время теория цифровых систем практически еще не создана [61], что объясняется сложностью процессов одновременного квантования информации по времени и уровню, происходящих в этих системах. Принципиальные трудности вызывает необходимость учета операции квантования по уровню, являющейся нелинейной. Тем не менее важные результаты в разработке точных методов исследования цифровых автоматических систем получены в ряде работ советских и зарубежных ученых [1, 7, 24, 28, 29, 31, 44, 52, 54, 58–62] и др.

Большое значение для исследования цифровых автоматических систем имеют методы теории импульсных

систем. Эта теория развивалась благодаря практическим потребностям автоматических систем, процесс работы которых сопровождается выработкой последовательности импульсов с различного рода модуляцией, их передачей и преобразованием в управляющие сигналы. Большинство таких систем являются импульсными по самому принципу своего действия, например, следящие системы по дальности или углу радиолокационных станций, импульсные системы с падающей дужкой и т. д.

Использование цифровых машин для управления непрерывными объектами, а также для обработки информации от непрерывных источников делает соответствующие автоматические системы дискретными, так как цифровая машина оперирует с информацией, квантованной по времени и уровню. С позиции теории дискретных систем наличие такой информации в системе рассматривается как нечто естественное, присущее самой природе системы. Однако в действительности дискретизация информации в указанной системе выполняется искусственно, вследствие того, что машина (как техническое устройство) по своей природе дискретна и оперирует с величинами, предварительно представленными в цифровом виде. Вместе с тем алгоритм управления, предназначенный для реализации с помощью ЦВМ в системах с непрерывным объектом управления и источниками информации, обычно задается или синтезируется в непрерывном виде так, чтобы удовлетворить требованиям, предъявляемым к процессу функционирования данной системы.

Применение же в системе цифровой машины вызывает дополнительную погрешность, обусловленную ошибками квантования информации по времени и уровню, использованием численных методов для реализации заданного алгоритма управления, ограниченностью быстродействия машины и неидеальностью процесса восстановления. Другими словами — машина привносит в непрерывную систему дополнительную погрешность, порождаемую дискретностью процесса управления. Ясно, что указанная погрешность равна нулю лишь в том случае, когда шаг дискретности по времени

и интервал квантования по уровню равны нулю, т. е. когда цифровая машина имеет бесконечно большое быстродействие и бесконечную разрядность.

При проектировании и исследовании цифровых систем важно уметь находить или оценивать погрешность, обусловленную дискретностью процесса управления; лишь в этом случае можно обоснованно решить задачу выбора параметров дискретных устройств, используемых в системе (ЦВМ и преобразователей), и численного метода, с помощью которого осуществляется реализация алгоритма управления в цифровой машине. К числу таких наиболее важных параметров относятся:

— величина шага квантования информации по времени, которая в совокупности с заданным алгоритмом определяет требуемое быстродействие машины;

— величины интервалов квантования информации по уровню, определяющие разрядные сетки преобразователей и машины.

Таким образом, величина погрешности, обусловленной дискретностью процесса управления, определяет основные требования к ЦВМ, используемой в системе управления. Методы определения и оценки указанной погрешности особенно полезны на начальной стадии проектирования цифровой системы, когда ее целесообразно рассматривать в более привычном для инженеров непрерывном плане. Это тем более приходится делать в связи с тем, что часто синтез алгоритма управления выполняется методами теории непрерывных автоматических систем, а уже после этого рассматриваются вопросы выбора численного метода для его реализации, величин параметров квантования, способа восстановления и т. д. Вместе с тем желательно уже на первых шагах проектирования цифровой системы уметь оценить хотя бы приближенно интервал дискретности, проанализировать возможные численные методы для реализации алгоритма управления и т. п. Следовательно, необходимость разработки методов определения и оценки погрешности, порождаемой использованием ЦВМ в автоматической системе, продиктована практическими потребностями задач проектирования и исследования цифровых автоматических систем.

§ 2. Расчетные схемы цифровых автоматических систем и способы математического описания их типовых элементов

Для перехода от реальных схем цифровых автоматических систем к расчетным необходимо располагать математическими описаниями элементов системы, в том числе описаниями преобразователя непрерывных величин в дискретные, цифровой вычислительной машины и восстанавливающего устройства.

Отдельные вопросы, связанные с математическим описанием элементов цифровых автоматических систем, рассмотрены в многочисленных работах, например [5, 18, 26, 27, 31, 39, 52, 58, 61], однако систематизированное и достаточно полное их изложение в какой-либо одной работе пока еще отсутствует. Поэтому ниже, на основании обобщения материалов указанных работ, приводятся способы математического описания элементов цифровых автоматических систем и их расчетных схем, которые необходимы для дальнейшего изложения.

1. Преобразователь непрерывных величин в дискретные. Преобразователь можно представить в виде математической модели, состоящей из последовательно соединенных между собой релейного (РЭ) и импульсного (ИЭ) элементов (рис. 1.3). Статическая характеристика

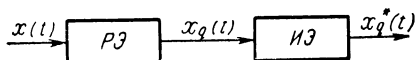


Рис. 1.3.

многоступенчатого релейного элемента [59, 26], входящего в модель ПНД, представлена на рис. 1.4. Характеристики релейного элемента определяются величиной шага квантования q , причем если входная величина x попадает в интервал $(i - 1/2)q$, $(i + 1/2)q$, где $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, то выходная величина $x_q = iq$. Заметим, что фактически с выхода ПНД снимается число $i = x_q/q$, представленное в двоичном коде. Однако далее при численных операциях с числом i в ЦВМ оно предварительно умножается на q , что делается при составлении программы. Поэтому при теоретических исследова-

ниях удобно считать, что на выходе ПНД мы имеем $x_q = iq$ и средний коэффициент усиления РЭ равен единице [50, 52, 59].

Операцию квантования входной величины $x(t)$ по уровню будем определять с помощью соотношения

$$x_q(t) = Q\{x(t)\} = qE \left[\frac{x(t)}{q} + \frac{1}{2} \text{sign } x(t) \right], \quad (2.1)$$

где $E(\alpha)$ — целая часть числа α . Рассмотренную выше характеристику квантователя удобно представить [59] в виде параллельного соединения линейного и нелинейного элементов (ЛЭ) и (НЭ). Первый имеет коэффициент усиления, равный единице, а характеристика второго получается путем вычитания из характеристики релейного элемента (рис. 1.4) характеристики указанного линейного элемента. Обозначив характеристику нелинейного элемента на рис. 1.5 через

$$\Xi\{x(t)\} = \varepsilon_q(t),$$

из (2.1) получаем

$$x_q(t) = Q\{x(t)\} = x(t) + \Xi\{x(t)\} = x(t) + \varepsilon_q(t). \quad (2.2)$$

Величину

$$\varepsilon_q(t) = x_q(t) - x(t) \quad (2.3)$$

называют *ошибкой (шумом) квантования*. Из рис. 1.5 видно, что

$$|\varepsilon_q(t)| = |\Xi\{x(t)\}| \leq q/2. \quad (2.4)$$

Возможны различные подходы к оценке ошибки квантования $\varepsilon_q(t)$ и различные методы определения погрешности цифровой автоматической системы. Рассмотрим их.

В простейшем случае, когда q мало, можно положить $\varepsilon_q(t) \approx 0$, т. е. $Q\{x(t)\} \approx x(t)$. В этом случае цифровая система может рассматриваться как импульсная, т. е. линейная система.

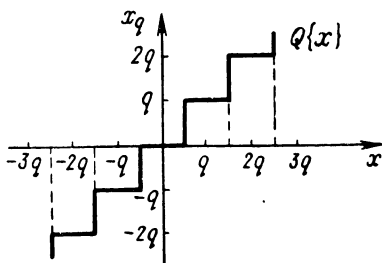


Рис. 1.4.

Для упрощения исследований цифровой системы иногда применяется гармоническая или статистическая линеаризация нелинейности квантователя [46, 61]. Линеаризация многоступенчатого релейного элемента выполняется путем представления его характеристики $Q\{x\}$ параллельным соединением, в ветвях которого находятся обычные релейные элементы, зоны нечувствительности которых равны величинам $\pm q/2$, $\pm 3q/2$ и т. д. В результате нетрудно определить эквивалентный коэффициент усиления релейного элемента [46, 61]. Функция

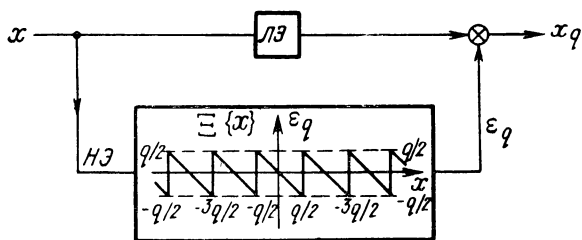


Рис. 1.5.

$\Xi(x)$ также может быть линеаризована. Характеристики эквивалентного линейного элемента при стационарном случайном воздействии с гауссовским распределением приведены в [61]. В результате замены нелинейного элемента, входящего в ПНД, квазилинейным цифровая автоматическая система может быть исследована методами теории линейных систем. Следует заметить, что такое исследование достаточно трудоемко. Вследствие того, что ПНД является нелинейным элементом, в цифровой автоматической системе могут возникнуть периодические режимы, аналогичные режиму автоколебаний в нелинейных автоматических системах (эти режимы лишь условно можно назвать «автоколебательными», так как частота их жестко связана с частотой квантования по времени в системе).

В работе [59] исследуется отклонение, вызванное квантованием по уровню, как разность выходных переменных цифровой и предельной импульсной систем. Установлено, что максимальное отклонение не превосходит суммы абсолютных значений импульсной переход-

ной функции предельной системы за рассматриваемое время, умноженной на шаг квантования q . Так, для системы с монотонной переходной функцией при единичном скачкообразном воздействии это отклонение не превосходит величины шага квантования q .

При случайных воздействиях на входе системы ошибку $\varepsilon_q(t)$ удобно рассматривать как случайную помеху. Статистические характеристики этой помехи могут быть определены. Такой подход рассматривается в работе [72], изложение которой дано в [27, 50], а также в [26, 48, 52, 68].

В работе [26] для определения статистических характеристик шума квантования через статистические характеристики входного сигнала использовано разложение функции $\Xi\{x\}$ в ряд Фурье

$$\varepsilon_q(t) = \Xi\{x(t)\} = \frac{q}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left[\frac{2\pi n}{q} x(t)\right]. \quad (2.5)$$

С помощью этого представления находятся выражения для моментов шума квантования $\varepsilon_q(t)$ и совместных моментов $\varepsilon_q(t)$ и входной величины $x(t)$ с помощью соответствующих характеристических функций случайного процесса $x(t)$. Из этих выражений следует, что если характеристическая функция

$$F_{1,x}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx$$

тождественно равна нулю при $|\lambda| > \lambda_{\max}$, причем $\lambda_{\max} < 2\pi/q$, то

$$M\{\varepsilon_q\} = 0, \quad \text{т. е.} \quad M\{x_q\} = M\{x\}, \quad (2.6)$$

$$M\{\varepsilon_q^2\} = D_{\varepsilon_q} = \frac{q^2}{12}, \quad \text{т. е.} \quad M\{x_q^2\} = M\{x^2\} + \frac{q^2}{12}, \quad (2.7)$$

где $M\{\dots\}$ — математическое ожидание соответствующей величины. Эти характеристики отвечают равномерному распределению значений случайной величины ε_q в интервале $(-q/2, q/2)$, т. е.

$$f(\varepsilon_q) = \begin{cases} 1/q & \text{при } |\varepsilon_q| \leq q/2, \\ 0 & \text{при } |\varepsilon_q| > q/2. \end{cases} \quad (2.8)$$

Кроме того, в случае, когда характеристическая функция

$$F_{2, x_1, x_2}(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) e^{j(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)} dx_1 dx_2$$

тождественно равна нулю при $|\lambda_1| > \lambda_{1 \max}$ и $|\lambda_2| > \lambda_{2 \max}$, причем $\lambda_{1 \max} < 2\pi/q$, $\lambda_{2 \max} < 2\pi/q$, то

$$M\{\varepsilon_q(t_1) \varepsilon_q(t_2)\} = M\{x(t_1) \varepsilon_q(t_2)\} = 0, \quad (2.9)$$

т. е. корреляционная функция ошибки квантования $\varepsilon_q(t)$ и взаимная корреляционная функция ошибки квантования $\varepsilon_q(t)$ и входной (неквантованной) величины $x(t)$ равны тождественно нулю. Следовательно, шум квантования не коррелирован с входным сигналом и представляет собой некоррелированный случайный процесс, что согласуется с выражением (2.8) для плотности распределения значений случайной величины $\varepsilon_q(t)$.

Указанные выше условия финитности характеристических функций для реальных входных сигналов $x(t)$ не выполняются. Вместе с тем для важного класса стационарных нормальных случайных процессов имеет место весьма хорошее приближение к этим условиям, так как одномерная и двумерная характеристические функции такого процесса убывают весьма быстро. Если $\sigma_x/q \geq 0,5$ (где σ_x — среднее квадратическое значение входного сигнала $x(t)$), то [26] ошибка в определении момента $M\{\varepsilon_q^2\}$ с помощью выражения (2.7) не превосходит одного процента, а эффект взаимной корреляции шума квантования и неквантованного сигнала весьма мал (коэффициент корреляции не превосходит 0,015). При этом же условии корреляционная функция шума квантования может быть представлена в следующем виде [26, 27, 48, 50]:

$$\rho_\varepsilon(\tau) \simeq \exp\left\{-\frac{4\pi^2\sigma_x^2}{q^2}[1 - \rho_x(\tau)]\right\}, \quad (2.10)$$

где $\rho_\varepsilon(\tau)$ и $\rho_x(\tau)$ — нормированные корреляционные функции ошибки квантования и входного сигнала. Зависимость ρ_ε от ρ_x показывает, что при $\sigma_x/q \geq 0,5$ величина ρ_ε близка к нулю при значениях ρ_x , близких к единице. Так как $\rho_x(\tau)$ близко к единице при τ , близких к нулю, то это означает, что время корреляции ошибки $\varepsilon_q(\tau)$

весьма мало, т. е. корреляционная функция $\rho_\varepsilon(\tau)$ близка к корреляционной функции физического белого шума [31, 50], для которого $\rho_\varepsilon(0) = 1$. Корреляционная функция ошибки квантования

$$K_\varepsilon(\tau) = \frac{q^2}{12} \rho_\varepsilon(\tau). \quad (2.11)$$

Таким образом, первая часть эквивалентной схемы ПНД (рис. 1.3) может быть представлена в соответствии с рис. 1.5 в виде, изображенном на рис. 1.6, где $\varepsilon_q(t)$ — помеха, вызванная эффектом квантования по уровню, близкая по своей природе к физическому белому шуму. Дисперсия помехи квантования, как это было показано выше, близка к величине

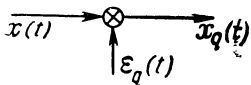


Рис. 1.6.

$q^2/12$ (2.7). Так как корреляционная функция $\rho_\varepsilon(\tau)$ имеет очень малое время корреляции и $\rho_\varepsilon(0) = 1$, то спектральная плотность такого процесса близка к $q^2\Delta\tau/12$, где $\Delta\tau$ — интервал корреляции.

Рассмотрим теперь математическое описание работы импульсного элемента в схеме на рис. 1.3. Импульсный элемент осуществляет квантования входного сигнала по времени (обычно с постоянным периодом, равным T сек), преобразуя непрерывный сигнал в дискретную (решетчатую) функцию $x^*(t) = x[nT]$. Квантование непрерывной функции по времени удобно описывать с помощью процесса импульсной модуляции [18, 20, 52, 62]

$$x_q^*(t) = x_q(t) \delta_T(t), \quad (2.12)$$

где $\delta_T(t)$ — последовательность дельта-функций

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (2.13)$$

Импульсный элемент, осуществляющий квантование непрерывного входного сигнала, можно представить в виде импульсного модулятора (рис. 1.7). Изображение по Лапласу сигнала импульсного элемента $X_q(s)$ связано с изображением выходного $X_q^*(s)$ зависимостью [18]

$$X_q^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_q(s + jk\omega_0) + \frac{1}{2} x_q(+0), \quad (2.14)$$

где $\omega_0 = 2\pi/T$ — частота квантования. Таким образом, можно считать, что с выхода импульсного элемента поступает последовательность дельта-функций. Каждая величина этой последовательности имеет вес, равный значению квантуемого сигнала в момент квантования

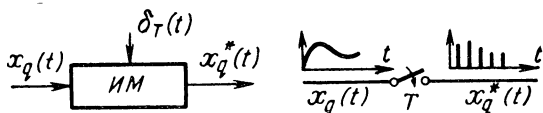


Рис. 1.7.

$t = nT$, который совпадает также с моментом выдачи импульса. Если входное воздействие испытывает разрывы в моменты времени $t = nT$, т. е.

$$x[nT - 0] \neq x[nT + 0],$$

то необходимо условиться, какое значение входной величины (левое или правое) фиксирует импульсный элемент. Если правое, то

$$x[nT] = x(t) |_{t=nT+0}. \quad (2.15)$$

Иногда полагают [39, 62], что момент выдачи импульса не совпадает с моментом квантования входного сигнала, считая, что само квантование происходит в момент времени $t = nT - 0$, т. е. непосредственно перед выдачей импульса. В этом случае вес импульса совпадает с левым значением входного сигнала при $t = nT - 0$:

$$x[nT] = x(t) |_{t=nT-0} = x[(n-1)T - (1-0)T], \quad (2.16)$$

т. е. определяется значением дискретной функции, смещенной относительно момента времени $t = (n-1)T$ на величину $(1-0)T$. Такое представление работы импульсного элемента более точно отражает физику процесса импульсной модуляции в тех случаях, когда входная величина имеет разрывы в моменты времени $t = nT$ и импульсная переходная функция непрерывной части дискретной системы отлична от нуля при $t = 0$.

Если импульсный элемент фиксирует правое значение входной величины, то z -преобразование выходной

величины

$$\sum_{n=0}^{\infty} x[nT] z^{-n} = X^*(z), \quad (2.17)$$

а если левое, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} x[nT - 0] z^{-n} = z^{-1} X^*(z, 1). \quad (2.18)$$

Если входное воздействие не имеет скачков, то обе рассмотренные выше модели импульсного элемента дают один и тот же эффект.

Теперь мы можем составить схему модели ПНД, отражающую совместную работу релейного и импульсного элементов. Исходя из зависимости (2.2), получаем

$$x_q[nT] = x[nT] + \varepsilon_q[nT]. \quad (2.19)$$

Этому равенству отвечает модель, показанная на рис. 1.8. Таким образом, на выходе ПНД имеем сумму

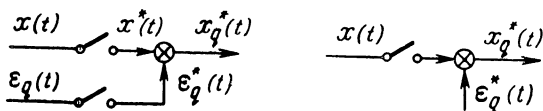


Рис. 1.8.

квантованной по времени входной величины $x(t)$ и $\varepsilon_q(t)$ — ошибки квантования по уровню, также квантованной по времени. Следовательно, $\varepsilon_q^*(t)$ представляет собой квантованный по времени «непрерывный белый шум», т. е. «дискретный белый шум» — числовую последовательность, соседние значения которой не коррелированы между собой. Если время корреляции $\Delta\tau < T$, то для получения аналитического выражения корреляционной функции ошибки квантования можно воспользоваться значением корреляционной функции (2.11) при $\tau = 0$ (т. е. значением $K_\varepsilon(0) = q^2/12$) и выражением для обобщенной дельта-функции [31]

$$\delta_0[nT] = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{при } n \neq 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

(подробное обсуждение этого вопроса см. ниже, в § 7, формула (7.63)). Правомерность представления ошибки

$\varepsilon_q^*(t)$ в виде дискретного белого шума можно проверить в каждом конкретном случае с помощью выражения (2.10) по заданной корреляционной функции входного воздействия $\rho_x(\tau)$. Действительно, если данный процесс близок к дискретному белому шуму, то можно пренебречь всеми значениями его корреляционной функции для $nT = \pm T, \pm 2T$ и т. д. Если значение $\rho_x[T]$, определенное из (2.10) при $\tau = T$, близко к нулю (например, меньше $0,05 \div 0,1$), то это означает, что с достаточной степенью точности можно рассматривать ошибку квантования как дискретный белый шум. Если ПНД используется в разомкнутой системе, то такая проверка выполняется весьма просто. Для этого достаточно найти корреляционную функцию на входе квантователя $\rho_x(\tau)$ по корреляционной функции входной переменной системы. Когда ПНД находится в контуре замкнутой системы, то система становится в принципе нелинейной. Однако вначале ее можно рассматривать как линейную, полагая, что квантователь представляет собой линейный элемент с коэффициентом усиления, равным единице. Таким образом, можно найти корреляционную функцию на входе квантователя. После этого можно определить ошибку для замкнутой системы с учетом шума квантования и уточнить при необходимости вновь корреляционную функцию входного воздействия квантователя и т. д. [50].

Таким образом, на основании сказанного для корреляционной функции ошибки $\varepsilon_q^*(t)$, которую обозначим символом $K_{q_x}[nT]$, окончательно получаем

$$K_{q_x}[nT] = \kappa_n \delta_0[nT], \quad (2.21)$$

где $\kappa_n = q_x^2/12$. (Обозначение q_x введено для того, чтобы отличить величину шага квантования в ПНД от шага квантования в цифровой вычислительной машине.) Выражению (2.19) соответствует следующее равенство в z -изображениях:

$$X_q^*(z) = X^*(z) + E_q^*(z) \quad (2.22)$$

(для случайных величин такая запись носит, конечно, формальный характер). Далее в основном будем поль-

зоваться представлением ошибки квантования по уровню в виде случайной функции времени.

2. Цифровая вычислительная машина. ЦВМ является устройством, преобразующим дискретную (цифровую) последовательность, поступающую на ее вход, в дискретную последовательность выхода. Указанное преобразование осуществляется в соответствии с определенной программой работы машины и сводится обычно к некоторому разностному уравнению. Это может быть разностное уравнение с постоянными параметрами (коэффициентами), с параметрами, изменяющимися во времени, или же нелинейное разностное уравнение [31]. Чаще всего это бывает уравнение первого типа

$$\sum_{k=0}^M a_k x[(i-k)T] = \sum_{k=0}^N b_k u[(i-k)T], \quad (2.23)$$

где $x[iT]$ и $u[iT]$ — соответственно входная и выходная величины, квантованные по времени (далее будем также использовать обозначения $x_k^* = x[(i-k)T]$ и $u_k^* = u[(i-k)T]$). Из уравнения (2.23) видно, что значение выходной величины $u[iT]$ определяется прошлыми значениями выходной величины и настоящими и прошлыми значениями входной, т. е. физически программа может быть реализована. Для этого, как нетрудно видеть из уравнения (2.23), необходимо, чтобы $b_0 \neq 0$. В программе могут не использоваться настоящее и несколько прошлых значений входной величины $x[iT]$ (всего r), тогда в левой сумме (2.23) суммирование начинается с $k=r$. Обычно $r=1$, или $a_0=0$, т. е. выходное значение в момент времени $t=iT$ определяется лишь прошлыми значениями как входных, так и выходных величин (работа ЦВМ в реальном времени). Это объясняется тем обстоятельством, что ЦВМ выполняет арифметические операции не мгновенно и поэтому вносит в процесс некоторое запаздывание, обычно на один такт. Разностному уравнению (2.23) соответствует передаточная функция ЦВМ

$$D^*(z) = \frac{U^*(z)}{X^*(z)},$$

где $U^*(z)$ и $X^*(z)$ — z -изображения функций $u[iT]$ и $x[iT]$ (рис. 1.9). Выражение для $D^*(z)$ получается путем определения z -изображения левой и правой частей разностного уравнения (2.23), которое предварительно удобно разделить на b_0 (или положить $b_0 = 1$). Для случая работы ЦВМ в реальном времени ($r = 1$)

$$D^*(z) = \frac{\sum_{k=1}^M a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}}. \quad (2.24)$$

При таком выражении передаточной функции $D^*(z)$ (относительно z^{-1}) она физически осуществима. В этом случае при делении числителя $D^*(z)$ на знаменатель (в

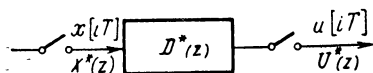


Рис. 1.9.

разложении $D^*(z)$ в ряд Лорана относительно начала координат) не получаются члены с положительными степенями z . Выражение $D^*(z)$ относительно z получается путем умножения числителя и знаменателя (2.24) на z^L , где $L = \max(M, N)$. Нетрудно видеть, что передаточная функция ЦВМ, работающей в реальном времени ($r = 1$), выраженная относительно z , является правильной дробной рациональной функцией, порядки числителя и знаменателя которой равны соответственно $L - 1$ и L .

Разностное уравнение (2.23) можно представить в виде равенства [35]

$$\sum_{k=0}^M a_k x(t - kT) \delta_T(t) = \sum_{k=0}^N b_k u(t - kT) \delta_T(t), \quad (2.25)$$

где $\delta_T(t)$ определяется формулой (2.13). Записи (2.23) и (2.25) эквивалентны, что следует из известного свойства дельта-функции $\delta(t)$. Возьмем преобразование Лапласа от левой и правой частей равенства (2.25), положив в левой сумме нижний предел суммирования равным единице (для машины, работающей в реальном

времени). Получаем

$$D^*(s) = \frac{\sum_{k=1}^M a_k e^{-sT_k}}{1 + \sum_{k=1}^N b_k e^{-sT_k}} = \frac{U^*(s)}{X^*(s)}, \quad (2.26)$$

где $U^*(s)$ и $X^*(s)$ — преобразования по Лапласу дельта-модулированных непрерывных функций $u(t)$ и $x(t)$, которые обладают тем свойством, что в дискретные моменты времени $t = iT$ ($i = 0, 1, 2$ и т. д.) они совпадают с функциями $u[iT]$ и $x[iT]$. Из выражения (2.26) видно, что $D^*(s)$ есть фактически функция e^{sT} , т. е. $D^*(e^{sT})$. При замене e^{sT} на z выражение (2.26) переходит в (2.24).

Рассмотренные выражения представляют собой передаточные функции импульсного фильтра, так как они отражают лишь эффект квантования информации по времени. Для того чтобы учесть ошибки, вызванные ограниченностью разрядной сетки машины, рассмотрим структурную схему на рис. 1.10, а, которая отвечает реализации разностного уравнения (2.23) (при $a_0 = 0$) на ЦВМ методом прямого (непосредственного) программирования. Линии задержки z^{-1}, \dots, z^{-M} и z^{-1}, \dots, z^{-N} символизируют ячейки оперативного запоминающего устройства, в которых хранятся значения входной и выходной величин $x[iT]$ и $u[iT]$, необходимые для выполнения вычислений. Элементы a_1, a_2, \dots, a_M и $-b_1, -b_2, \dots, -b_N$ можно рассматривать как арифметические устройства (фактически в машине обычно одно арифметическое устройство), с помощью которых вычисляются произведения $a_k x_k^*$ ($k = 1, 2, \dots, M$) и $-b_k u_k^*$ ($k = 1, 2, \dots, N$). Вследствие ограниченности длины разрядной сетки машины при вычислении указанных произведений возникают ошибки округления, которые можно рассматривать как случайные величины, равномерно распределенные в интервале $\pm q_M/2$, где q_M — величина шага квантования информации в ЦВМ [5]. Действительно, возникновение погрешностей от округления при вычислении произведений $a_k x_k^*$ и $-b_k u_k^*$ можно объяснить с помощью схемы, аналогичной по своей сущности схеме, приведенной на рис. 1.5, где на вход подается величина

x_k^* или u_k^* , а коэффициент усиления верхней ветви равен вместо единицы величине a_k или $-b_k$.

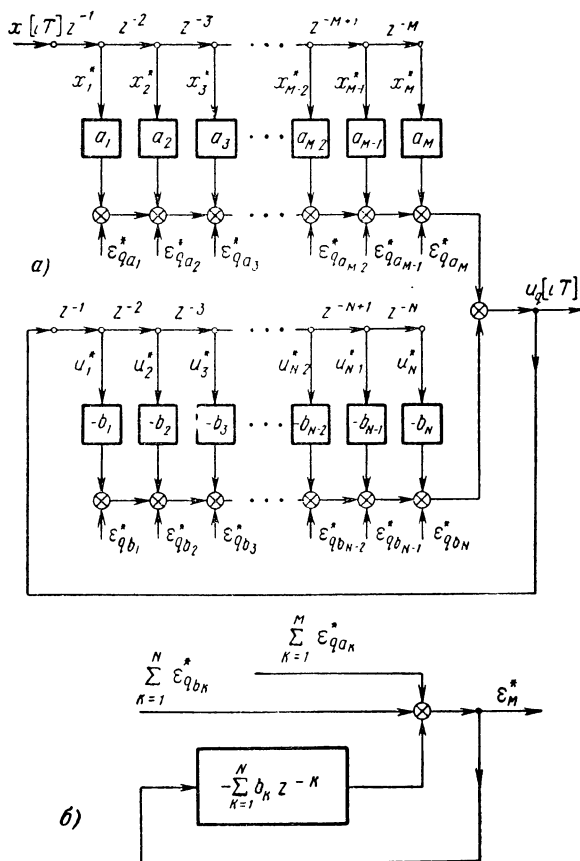


Рис. 1.10.

Таким образом, при вычислении произведений $a_k x_k^*$ и $-b_k u_k^*$ возникают ошибки

$$\varepsilon_{qa_k}^* = \varepsilon_{qa} [(i-k)T], \quad \varepsilon_{qb_k}^* = \varepsilon_{qb} [(i-k)T],$$

образующие результирующую ошибку ε_M^* на выходе дискретного фильтра (ЦВМ), вызванную суммарными

ошибками

$$\sum_{k=1}^M \varepsilon_{q_{a_k}}^* \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^N \varepsilon_{q_{b_k}}^*,$$

как это показано на рис. 1.10, а и б. Так как корреляционные функции ошибок $\varepsilon_{q_{a_k}}^*$ и $\varepsilon_{q_{b_k}}^*$ одинаковы и определяются выражениями, аналогичными (2.21), то

$$K_{\varepsilon_{q_{a_k}}^*}[nT] = K_{\varepsilon_{q_{b_k}}^*}[nT] = \frac{q_M^2}{12} \delta_0[nT].$$

Таким образом, корреляционная функция суммы ошибок

$$\sum_{k=1}^M \varepsilon_{q_{a_k}}^* + \sum_{k=1}^N \varepsilon_{q_{b_k}}^* = \varepsilon_{q_M}[iT]$$

определяется выражением

$$K_{q_M}[nT] = \frac{(M+N)}{12} q_M^2 \delta_0[nT],$$

так как величины $\varepsilon_{q_{a_k}}^*$ и $\varepsilon_{q_{b_k}}^*$ между собой не коррелированы. Поскольку ЦВМ эквивалентна некоторой замкнутой импульсной системе, то с учетом ошибки $\varepsilon_{q_M}[iT]$ обозначим выходную величину ЦВМ через $u_q[iT]$. Тогда по аналогии с (2.23) можно записать

$$u_q[iT] = \varepsilon_{q_M}[iT] + \sum_{k=1}^M a_k x[(i-k)T] - \sum_{k=1}^N b_k u_q[(i-k)T],$$

или в изображениях

$$U_q^*(z) = E_{q_M}^*(z) + X^*(z) \sum_{k=1}^M a_k z^{-k} - U_q^*(z) \sum_{k=1}^N b_k z^{-k},$$

где

$$E_{q_M}^*(z) = \mathcal{Z}\{\varepsilon_{q_M}[iT]\}, \quad U_q^*(z) = \mathcal{Z}\{u_q[iT]\}.$$

Отсюда

$$U_q^*(z) = \frac{\sum_{k=1}^M a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} X^*(z) + \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} E_{q_M}^*(z).$$

Второй член этого равенства представляет собой изображение ошибки $E_{q_m}^*(z)$, приведенной к выходу ЦВМ. С учетом обозначения

$$D^*(z) = \frac{A_D^*(z)}{B_D^*(z)} \quad (2.27)$$

представим этот член в виде (рис. 1.11, а)

$$E_m^*(z) = \frac{1}{B_D^*(z)} E_{q_m}^*(z). \quad (2.28)$$

Таким образом, соотношение (2.28) связывает между собой изображение $E_{q_m}^*(z)$ погрешности, обусловленной

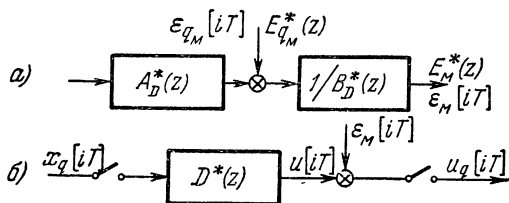


Рис. 1.11.

конечной длиной разрядной сетки ЦВМ (ее внутреннего шума), с изображением $E_m^*(z)$ — ошибки, вызванной этой погрешностью, на выходе ЦВМ (рис. 1.10, б). Следовательно, спектральная плотность результирующей ошибки $\epsilon_m[iT]$ на выходе ЦВМ определяется выражением

$$\Phi_m^*(z) = \frac{\kappa_m}{B_D^*(z) B_D^*(z^{-1})}, \quad (2.29)$$

где

$$\kappa_m = \frac{(M+N)q_m^2}{12}, \quad (2.30)$$

а дисперсия ошибки $\epsilon_m[iT]$

$$D_m = \frac{\kappa_m}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{1}{B_D^*(z) B_D^*(z^{-1})} z^{-1} dz,$$

где Γ — окружность единичного радиуса. Таким образом, с учетом того, что на вход ЦВМ поступает величина $x_q[nT]$ (2.19), а также ошибки округления $\epsilon_{q_m}[nT]$,

структурная схема модели ЦВМ может быть представлена в виде, показанном на рис. 1.11, б, где

$$u_q[nT] = u[nT] + \varepsilon_m[nT]. \quad (2.31)$$

Соответственно в z -изображениях

$$U_q^*(z) = U^*(z) + E_m^*(z) = D^*(z) X_q^*(z) + \frac{E_{q_m}^*(z)}{B_D^*(z)}. \quad (2.32)$$

3. Восстанавливающее устройство и объект управления. Величины $u_q[iT]$, поступающие с выхода машины, представляют собой дискретную последовательность, которая обычно преобразуется в некоторую непрерывную функцию с помощью восстанавливающего устройства — преобразователя дискретных величин в непрерывные. Характеристика ВУ должна быть близка к характеристике низкочастотного фильтра, для того чтобы по возможности отфильтровать высокочастотные составляющие. Наиболее распространено ВУ нулевого порядка, которое обеспечивает на выходе величину, равную амплитуде входного сигнала; иногда используется ВУ первого порядка, при котором выходная величина определяется амплитудой входного сигнала и его первой разностью [18, 31, 52, 62]. Математически ВУ описывается передаточной функцией, которую будем обозначать через $W_0(s)$. Также передаточной функцией (обозначим ее через $W_1(s)$) описывается объект управления. Произведение

$$W(s) = W_0(s) W_1(s) \quad (2.33)$$

представляет собой передаточную функцию приведенной непрерывной части, выходом которой является некоторая непрерывная величина $y(t)$. Величины на входе и выходе приведенной непрерывной части связаны между собой уравнением

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= \sum_{m=0}^n \omega(t - mT) u_q[mT], \\ nT &\leq t \leq (n+1)T, \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

где $\omega(t)$ — импульсная переходная функция приведенной непрерывной части. Применяя преобразование

Лапласа к левой и правой частям (2.34), находим

$$Y(s) = W(s) U_q^*(s), \quad (2.35)$$

где

$$U_q^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} u_q[nT] e^{-nTs}$$

есть изображение по Лапласу дельта-модулированной непрерывной функции $u_q(t)$, а $Y(s)$ — изображение $y(t)$. Часто в уравнении (2.34) переходят к переменной $t = (n + \gamma)T$, где $0 \leq \gamma < 1$ — параметр запаздывания

$$y[(n + \gamma)T] = \sum_{m=0}^n w[(n - m + \gamma)T] u_q[mT]. \quad (2.36)$$

Применяя z -преобразование с запаздыванием к левой и правой частям равенства (2.36), находим

$$Y^*(z, \gamma) = W^*(z, \gamma) U_q'(z), \quad (2.37)$$

где

$$W^*(z, \gamma) = Z_{\gamma} \{W_0(s) W_1(s)\}. \quad (2.38)$$

Заметим, что в уравнении (2.35) величины зависят как от комплексной переменной s , так и от e^{sT} , а в (2.37) лишь от $z = e^{sT}$. В (2.35) $Y(s)$ есть изображение по Лапласу непрерывной функции $y(t)$, а в (2.37) $Y^*(z, \gamma)$ — z -изображение дискретной функции $y[(n + \gamma)T]$, причем $Z_{\gamma}\{Y(s)\} = Y^*(z, \gamma)$.

Если восстанавливающий элемент в системе отсутствует (это бывает вообще крайне редко), то можно считать, что на вход непрерывной части поступают узкие прямоугольные импульсы длительностью λT ($\lambda \ll 1$) и высотой K_n , модулированной по $u_q[nT]$. Следовательно, передаточная функция

$$W_0(s) = K_n \frac{1 - e^{-s\lambda T}}{s} \approx K_n \lambda T.$$

Для сокращения записи удобно считать, что в этом случае $K_n = 1/\lambda$, поэтому получаем просто $W_0(s) = T$, как это иногда принимают [31].

При дискретно-аналоговом преобразовании кода, поступающего с выхода ЦВМ, обычно используется лишь часть разрядной сетки машины, относящаяся к старшим разрядам. В пределах указанной части разрядов кода его преобразование в аналоговую величину представляет со-

бой линейную операцию. Обычно число разрядов в ЦВМ несколько больше, чем в ПНД, а число разрядов в ВУ меньше, чем число разрядов как в ЦВМ, так и в ПНД. Это обстоятельство отвечает правилам действий с приближенными числами, поэтому можно считать, что отбрасываемая часть разрядов выходного кода ЦВМ не вносит дополнительной ошибки и рассматривать ВУ как линейный преобразователь [61]. Если же число разрядов в ВУ существенно меньше, чем в ПНД и ЦВМ, то указанная ошибка может быть значительна и тогда ВУ должно рассматриваться как нелинейный преобразователь типа ПНД. В результате ВУ с малым числом разрядов может явиться источником возникновения в цифровой системе автоколебаний [1, 54, 55]. Особенности систем подобного типа подробно исследованы в работе [1], где рассматриваются также вопросы выбора числа разрядов выходного преобразователя. Будем придерживаться первой [59, 61], более обычной трактовки представления ВУ, когда оно может рассматриваться как линейный преобразователь.

4. Расчетные схемы разомкнутых и замкнутых цифровых автоматических систем. Рассмотрим вначале схему разомкнутой системы, отвечающей блок-схеме на рис. 1.1. На основании приведенного выше математического описания типовых элементов цифровых систем и их эквивалентных схем расчетная схема разомкнутой цифровой системы может быть представлена в виде, показанном на рис. 1.12. В соответствии с этой схемой

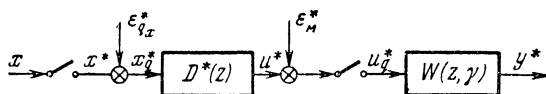


Рис. 1.12.

связь между z -изображениями выходной и входной величин $Y^*(z, \gamma)$ и $X^*(z)$ определяется выражением

$$\begin{aligned} Y^*(z, \gamma) &= \{D^*(z)[X^*(z) + E_{q_x}^*(z)] + E_M^*(z)\} W^*(z, \gamma) = \\ &= D^*(z) W^*(z, \gamma) X^*(z) + D^*(z) W^*(z, \gamma) E_{q_x}^*(z) + \\ &\quad + \frac{W^*(z, \gamma)}{B_D^*(z)} E_M^*(z). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Если пренебречь эффектом квантования по уровню, т. е. положить $\varepsilon_{q_x}^* = \varepsilon_{q_m}^* = 0$, то получаем обычное соотношение между $X^*(z)$ и $Y^*(z, \gamma)$:

$$Y^*(z, \gamma) = D^*(z) W^*(z, \gamma) X^*(z) = G^*(z, \gamma) X^*(z), \quad (2.40)$$

где $G^*(z, \gamma)$ — передаточная функция так называемой *предельной* [59, 61] разомкнутой импульсной системы. Формулы (2.39) и (2.40) записаны в предположении, что выходная величина импульсного элемента в момент $t = nT$ определяется значением квантуемой непрерывной функции в этот же момент (ее правым значением). Если считать, что выходная величина импульсного элемента определяется значением непрерывной функции в момент $t = nT - 0$, непосредственно предшествующий выдаче импульса (ее левым значением) [39, 62], то изображение равно $z^{-1}X^*(z, 1)$ (см. (2.18)), отсюда вместо (2.40) получаем

$$Y^*(z, \gamma) = z^{-1}D^*(z) W^*(z, \gamma) X^*(z, 1) = z^{-1}G^*(z, \gamma) X^*(z, 1). \quad (2.41)$$

Аналогично записывается и формула (2.39). Выражение (2.41) удобно также использовать, исходя из следующих соображений. Имеют место случаи, когда степень полинома знаменателя передаточной функции приведенной непрерывной части лишь на единицу больше степени числителя. В этом случае импульсная переходная функция, соответствующая $W(s)$, не равна нулю при $t = 0$, т. е. система мгновенно реагирует на входные воздействия (модулированные по амплитуде дельта-функции), поступающие с выхода импульсного элемента. В частности, получается, что выходная величина непрерывной части системы не равна нулю в начальный момент $t = 0$, если входное воздействие при $t = 0$ также не равно нулю (например, когда входное воздействие представляет собой скачкообразную функцию, затухающую экспоненту, косинусоиду и т. д.). Такое положение не отвечает физической сущности процесса, а связано с принятым математическим описанием работы импульсного элемента. Если считать, что импульсный элемент фиксирует левое значение входного воздействия, то подобного осложнения не возникает.

Проиллюстрируем это на простейшем примере. Положим, что $D^*(z) = 1$, восстанавливающий элемент отсутствует, т. е. $W_0(s) = T$, а $W_1(s) = K/s$, т. е. $W(s) = KT/s$. Пусть на вход такой системы подается воздействие $x(t) = e^{-at}$. Тогда на основании формулы (2.40) (при $\gamma = 0$)

$$Y^*(z) = \frac{KTz}{z-1} \cdot \frac{z}{z-e^{-aT}} = KTz \frac{z}{(z-1)(z-e^{-aT})}. \quad (2.42)$$

Так как

$$z \frac{z}{(z-1)(z-e^{-aT})} = \frac{1}{1-e^{-aT}} \left[\frac{z}{z-1} - e^{-aT} \frac{z}{z-e^{-aT}} \right], \quad (2.43)$$

находим, что

$$y[nT] = \frac{KT}{1-e^{-aT}} [1 - e^{-aT(n+1)}]. \quad (2.44)$$

При $T \rightarrow 0$ и $nT \rightarrow t$ выход этой дискретной системы совпадает с выходом соответствующей непрерывной системы

$$\lim_{\substack{T \rightarrow 0 \\ nT \rightarrow t}} y[nT] = y(t) = \frac{K}{a} (1 - e^{-aT}). \quad (2.45)$$

Кроме того,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y[nT] = \frac{KT}{1-e^{-aT}}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{K}{a}. \quad (2.46)$$

Однако при $n = 0$ из (2.44) следует $y[0] = KT$, с чем трудно согласиться. Если же воспользоваться формулой (2.41), то

$$Y^*(z) = z^{-1} \frac{KTz}{z-1} \cdot \frac{ze^{-aT}}{z-e^{-aT}} = KTe^{-aT} \frac{z}{(z-1)(z-e^{-aT})}. \quad (2.47)$$

Так как

$$z \frac{1}{(z-1)(z-e^{-aT})} = \frac{1}{1-e^{-aT}} \left[\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-aT}} \right], \quad (2.48)$$

получаем, что

$$y[nT] = \frac{KTe^{-aT}}{1-e^{-aT}} (1 - e^{-aTn}). \quad (2.49)$$

В этом случае соотношение (2.45) сохраняется, однако $y[0] = 0$, что отвечает физическому смыслу. Заметим,

что уравнению (2.40), составленному относительно z -изображений, соответствует уравнение

$$Y^*(s) = D^*(s) W^*(s) X^*(s) \quad (2.50)$$

относительно изображений по Лапласу. В (2.50) $D^*(s)$ определяется формулой (2.26), а $X^*(s)$ — есть изображение по Лапласу дельта-модулированной функции $x(t)$.

Рассмотрим теперь расчетную схему замкнутой цифровой автоматической системы, отвечающей блок-схеме на рис. 1.2. Это схема представлена на рис. 1.13, где

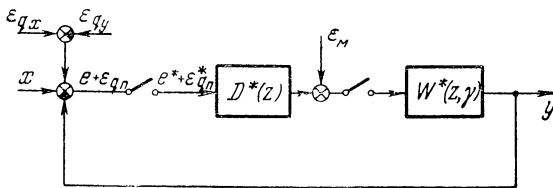


Рис. 1.13.

ϵ_{q_x} и ϵ_{q_y} — ошибки (непрерывные величины), вызванные квантованием в преобразователях непрерывных величин x и y в дискретные, а ϵ_m — ошибка от округления. Таким образом, на вход машины поступает дискретная ошибка рассогласования e^* , а также помеха от преобразования $\epsilon_{q_n}^*$, т. е.

$$e^* = x^* - y^*, \quad \epsilon_{q_n}^* = \epsilon_{q_x}^* - \epsilon_{q_y}^*.$$

Рассматривая ошибку $\epsilon_{q_n}^*$ как случайную, ее можно характеризовать корреляционной функцией

$$K_{q_n}[nT] = \kappa_n \delta_0[nT], \quad (2.51)$$

где

$$\kappa_n = \frac{q_x^2 + q_y^2}{12}.$$

Изображение выходной переменной

$$Y^*(z, \gamma) = \{D^*(z)[E^*(z) + E_{q_n}^*(z)] + E_m^*(z)\} W^*(z, \gamma),$$

где

$$E^*(z) = X^*(z) - Y^*(z, 0), \quad E_{q_n}^*(z) = E_{q_x}^*(z) - E_{q_y}^*(z),$$

а изображение $E_m^*(z)$ определяется формулой (2.28). Отсюда, исключив $E^*(z)$, путем простых преобразований получаем

$$Y^*(z, \gamma) = \frac{D^*(z) W^*(z, \gamma)}{1 + D^*(z) W^*(z, 0)} [X^*(z) + E_{q_n}^*(z)] + \frac{1}{1 + D^*(z) W^*(z, 0)} \cdot \frac{W^*(z, \gamma)}{B_D^*(z)} E_{q_m}^*(z). \quad (2.52)$$

Если пренебречь ошибками $\varepsilon_{q_n}^*$ и $\varepsilon_{q_m}^*$, то из (2.52) находим обычное соотношение между $Y^*(z, \gamma)$ и $X^*(z)$ для предельной замкнутой импульсной системы [59, 61]

$$Y^*(z, \gamma) = \frac{D^*(z) W^*(z, \gamma)}{1 + D^*(z) W^*(z, 0)} X^*(z). \quad (2.53)$$

Введем обозначение

$$C^*(z) = \frac{D^*(z)}{1 + D^*(z) W^*(z, 0)}. \quad (2.54)$$

С учетом выражений (2.28) и (2.54) из (2.52) находим

$$Y^*(z, \gamma) = C^*(z) W^*(z, \gamma) [X^*(z) + E_{q_n}^*(z)] + W^*(z, \gamma) \frac{C^*(z)}{A_D^*(z)} E_{q_m}^*(z). \quad (2.55)$$

Если в этом выражении обозначение $C^*(z)$ заменить на $D^*(z)$, то оно совпадет с (2.39), т. е. замкнутой системе

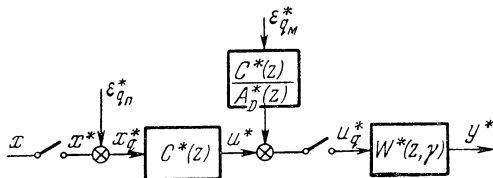


Рис. 1.14.

отвечает эквивалентная разомкнутая система, изображенная на рис. 1.14. В этой системе дискретный фильтр описывается передаточной функцией $C^*(z)$ (2.54); помеха $\varepsilon_{q_m}^*$ дополнительно проходит через фильтр

с передаточной функцией $C^*(z)/A_D^*(z)$, а помеха на входе фильтра $C^*(z)$ есть $\varepsilon_{q_n}^*$. Будем обозначать передаточную функцию замкнутой системы через $G^*(z, \gamma)$, где

$$G^*(z, \gamma) = C^*(z) W^*(z, \gamma). \quad (2.56)$$

Если импульсная переходная функция, соответствующая приведенной непрерывной части $W(s)$, отлична от нуля при $t = 0$, то выражения (2.52) и (2.53) определяются несколько иначе [31, 39, 62]. В этом случае предполагают, что импульсный элемент фиксирует левое значение воздействия на его входе. Тогда выражение (2.53) принимает вид

$$Y^*(z, \gamma) = \frac{D^*(z) W^*(z, \gamma)}{1 + z^{-1} D^*(z) W^*(z, 1)} z^{-1} X^*(z, 1). \quad (2.57)$$

Формула (2.52) записывается аналогично. Выражения (2.53) и (2.57) совпадают, если $w(0) = 0$ и $x[nT - 0] = x[nT + 0]$. Вместо уравнения замкнутой системы, записанного относительно z -изображений, иногда пользуются уравнением в изображениях по Лапласу. Так, уравнение (2.53) в этом случае имеет вид

$$Y(s) = \frac{D^*(s) W(s)}{1 + D^*(s) W^*(s)} X^*(s), \quad (2.58)$$

где

$$W^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} W(s + jn\omega_0) \quad (2.59)$$

или

$$W^*(s) = W_0 W_1^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_0(s + jn\omega_0) W_1(s + jn\omega_0). \quad (2.60)$$

Выражение (2.58) будем также записывать в виде

$$Y(s) = C^*(s) W(s) X^*(s) = G(s) X^*(s), \quad (2.61)$$

где

$$C^*(s) = \frac{D^*(s)}{1 + D^*(s) W^*(s)}. \quad (2.62)$$

Если в выражениях, полученных выше для разомкнутой и замкнутой систем, в комплексной переменной s положить вещественную часть равной нулю, т. е. $s = j\omega$ и $z = e^{j\omega T}$, то получаем соотношения для частотных характеристик.

§ 3. Постановка задачи исследования погрешности, обусловленной дискретностью процессов управления и обработки информации в цифровых автоматических системах

1. Природа ошибок, вызванных использованием в системе цифровой вычислительной машины. Как уже отмечалось в предисловии, в большинстве случаев цифровые машины применяются для управления непрерывными объектами, а также для обработки информации от непрерывных источников. Поэтому цифровая машина, являющаяся дискретным устройством, делает дискретной и всю систему в целом. В тракте автоматической системы, включающем цифровую машину, присутствуют сигналы, квантованные по времени и уровню, что, как известно, сопровождается необратимой потерей информации, а следовательно — дополнительными ошибками. Рассмотрим природу этих ошибок.

Положим, что задан объект управления, описываемый передаточной функцией $W_1(s)$. Пусть, исходя из определенных соображений, принят или синтезирован некоторый непрерывный закон (алгоритм) управления, описываемый передаточной функцией $D(s)$. Будем считать, что указанный закон управления отвечает требованиям, которые предъявляются к процессу функционирования данной системы. Таким образом, заданием передаточных функций $W_1(s)$ и $D(s)$ полностью определены желаемые динамические свойства системы. Положим, что для реализации закона управления $D(s)$ решено использовать цифровую машину. В общем случае $D(s)$ представляет собой изображение по Лапласу некоторого линейного оператора, включающего операции интегрирования и дифференцирования. С помощью дискретного устройства закон управления $D(s)$ может быть реализован лишь приближенно, путем использования численных методов интегрирования и дифференци-

рования. Поэтому передаточной функции $D(s)$, в случае использования цифровой машины, отвечает некоторая передаточная функция $D^*(z)$ (или $D^*(s)$, что одно и то же, см. (2.24) и (2.26)).

Существует целый ряд методов перехода от $D(s)$ к $D^*(z)$. Передаточной функции $D(s)$ отвечает определенное интегро-дифференциальное уравнение, от которого с помощью численных методов можно перейти к соответствующему разностному уравнению. Применив к последнему z -преобразование, находим $D^*(z)$. Можно осуществить и непосредственный переход от $D(s)$ к $D^*(z)$ путем представления $D(s)$ относительно отрицательных степеней s и выражения оператора s^{-n} в функции $z = e^{sT}$ с помощью численных методов. Так, способу прямоугольников отвечает непосредственное определение для s^{-n} соответствующего z -преобразования, способу трапеций отвечает метод Тастина, весьма удобным является метод z -форм Боксера — Таллера [31, 62]. Обзор ряда методов дискретной аппроксимации сделан в работе [69].

Цифровая система по отношению к непрерывной имеет еще один дополнительный элемент—восстанавливающее устройство, описываемое передаточной функцией $W_0(s)$.

Природу погрешностей, обусловленных дискретностью процесса управления, нетрудно установить путем сравнения двух разомкнутых систем — непрерывной и дискретной, каждая из которых определяется указанными выше передаточными функциями, и обе они подвержены одному и тому же входному воздействию $x(t)$.

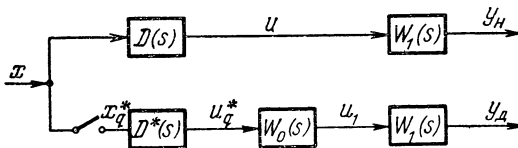


Рис. 1.15.

Структурные схемы таких систем показаны на рис. 1.15 (на рис. 1.15 схема дискретной системы изображена менее подробно, чем на рис. 1.12, но с сохранением тех же обозначений). Непрерывную систему по отношению к дискретной можно рассматривать как не-

которую желаемую систему с передаточной функцией $D(s)W_1(s)$, осуществляющую требуемое преобразование входного воздействия x в выходную величину y_n . Выходные величины непрерывной и дискретной систем y_n и y_d различны. Это различие обусловлено рядом причин. Так, в результате квантования входного воздействия по времени на выходе импульсного элемента кроме основного частотного спектра входного сигнала возникают дополнительные (боковые) высокочастотные составляющие, сдвинутые влево и вправо на величину, кратную частоте квантования ω_0 [18, 31, 52, 62]:

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[j(\omega + k\omega_0)] \quad (x(0) = 0). \quad (3.1)$$

Таким образом, дискретной временной функции $x^*(t)$ отвечает периодический спектр $X^*(j\omega)$. Зная спектр непрерывного входного сигнала $x(t)$, нетрудно определить или построить спектр $X^*(j\omega)$, пользуясь (3.1). Полезной составляющей входного сигнала является член правой части $X(j\omega)$ при $k = 0$. Влияние боковых составляющих тем меньше, чем больше частота квантования ω_0 , так как непрерывная часть системы играет роль низкочастотного фильтра. Если спектр входного воздействия ограничен частотой ω_c и $\omega_0 \geq 2\omega_c$, то составляющие спектра (3.1) не перекрывают друг друга. Указанное неравенство включает условие $\omega_0 = 2\omega_c$ теоремы В. А. Котельникова о восстановлении непрерывного сигнала по его дискретным значениям. Ниже этот вопрос будет рассмотрен подробно.

Физически появление боковых составляющих на выходе импульсного элемента (стробоскопический эффект [62]) объясняется потерей информации в результате квантования входного воздействия по времени. Выходная величина импульсного элемента определяется лишь значениями входного воздействия в моменты квантования, между этими моментами входное воздействие может быть любым, однако выход импульсного элемента от этого не изменится. Так как входное воздействие кроме квантования по времени квантуется еще и по уровню, то возникает дополнительная ошибка, определяемая величиной шага квантования (см. предыдущий параграф).

Другой существенной причиной отличия выходных величин y_n и y_d является погрешность, вносимая переходом от передаточной функции $D(s)$ к $D^*(s)$. При этом реализация операций, включающих предельный переход (дифференцирования и интегрирования) осуществляется с помощью некоторого численного метода. Допускаемая при этом ошибка определяется совершенством принятого метода и величиной шага дискретности T . Кроме того, возникают дополнительные ошибки, связанные с округлением при выполнении арифметических операций на цифровой машине, т. е. ошибки, вызванные тем, что величины в машине представлены конечным числом двоичных разрядов (см. предыдущий параграф).

И, наконец, преобразование дискретных величин, поступающих с выхода цифровой машины, в непрерывные управляющие сигналы вносит ошибку, так как реальные восстанавливающие устройства осуществляют экстраполяцию дискретных величин с помощью полиномов определенного порядка — чаще всего нулевого или первого. Невозможность точного восстановления дискретных данных на выходе машины связана с двумя известными обстоятельствами, затрудняющими практическое применение теоремы Котельникова. Это, во-первых, неограниченность спектра реальных сигналов, так как эти сигналы имеют конечную длительность во времени, и, во-вторых, физическая нереализуемость идеального фильтра нижних частот, необходимого для восстановления дискретных сигналов в соответствии с теоремой. Указанные выше причины и приводят к тому, что в схемах на рис. 1.15 присутствуют отличные между собой величины x , u , y_n ; x_q^* , u_q^* , u_1 , y_d .

Резюмируя сказанное, можно сделать вывод о том, что при реализации заданного алгоритма на цифровой машине возникает погрешность, обусловленная следующими четырьмя факторами:

- потерей информации вследствие квантования входного воздействия по времени;
- использованием численных методов для реализации на цифровой машине алгоритмов (законов) управления (обработки информации), содержащих операции дифференцирования и интегрирования;

— неидеальностью процесса восстановления дискретных сигналов, вырабатываемых на выходе цифровой машины;

— эффектом квантования информации по уровню.

Эти факторы и приводят к тому, что выходные величины непрерывной и дискретной систем y_n и y_d на рис. 1.15 не совпадают между собой. Частотная характеристика $Y_n(j\omega)$ определяется выражением

$$Y_n(j\omega) = D(j\omega) W_1(j\omega) X(j\omega), \quad (3.2)$$

а $Y_d(j\omega)$ в соответствии с (2.50) выражением

$$Y_d(j\omega) = D^*(j\omega) W_0(j\omega) W_1(j\omega) X^*(j\omega), \quad (3.3)$$

где $X^*(j\omega)$ определено формулой (3.1) (выражение (3.3) записано без учета эффекта квантования по уровню, т. е. для импульсной системы).

В связи с рассматриваемой проблемой целесообразно остановиться на вопросе о роли теоремы Котельникова в теории дискретных систем. Иногда, как нам кажется, существует переоценка возможности использования условия теоремы для выбора частоты, с которой осуществляется вычисление управляющих сигналов цифровой машиной. Положим, что входное воздействие имеет спектр, ограниченный частотой ω_c , и выполняется условие

$$\omega_0 \geq 2\omega_c \quad (3.4)$$

(заметим, что теореме Котельникова в (3.4) отвечает знак равенства). Пусть, кроме того, амплитудно-частотная характеристика объекта $|W_1(j\omega)|$ является фильтром нижних частот, т. е. отлична от нуля лишь при частотах, меньших некоторой частоты ω_n , причем

$$\omega_n \leq \omega_0 - \omega_c. \quad (3.5)$$

Указанные выше условия иллюстрированы рис. 1.16. При выполнении (3.4) и (3.5) рассматриваемая дискретная система может быть исследована как непрерывная в диапазоне частот, не превышающих величины ω_c , а в выражении (3.3) в соответствии с (3.1) $X^*(j\omega)$ можно заменить на $\frac{1}{T} X(j\omega)$. В этом случае вместо

соотношения (3.3) можно написать

$$Y_d(j\omega) = \frac{1}{T} D^*(j\omega) W_0(j\omega) W_1(j\omega) X(j\omega). \quad (3.6)$$

Как видим, даже при выполнении условия теоремы Котельникова и ограниченности амплитудно-частотных характеристик объекта выходная переменная дискретной системы не равна выходной переменной соответствующей непрерывной системы. Отличие указанных переменных обусловлено отличием передаточной функции

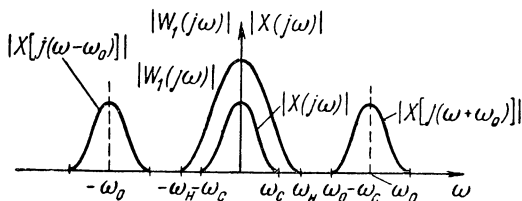


Рис. 1.16.

$D^*(s)$ от $D(s)$ и отличием характеристики реального восстанавливающего устройства $W_0(j\omega)$ от идеального фильтра нижних частот. При этом оказывается, что хотя при выполнении указанных условий дискретную систему и можно рассматривать как непрерывную, однако получающееся при этом отличие выходных переменных непрерывной (желаемой) системы y_n и дискретной системы y_d мало лишь в том случае, если ω_0 существенно (часто на порядок) больше величины $2\omega_c$, минимально необходимой, исходя из условия теоремы Котельникова. И совершенно недопустимо принимать $\omega_0 = 2\omega_c$, т. е. определять частоту работы системы (в том числе и цифровой машины) из этого равенства.

Указанное положение далее (см. главу V) будет подробно подтверждено целым рядом примеров. Здесь же отметим, что сопоставление дискретной и непрерывной систем, выполненное выше, несколько отличается от традиционного [62]. Это отличие заключается в следующем. Во-первых, рассматривается дискретная система, содержащая не только приведенную непрерывную часть, но и дискретный фильтр, описываемый передаточной функцией $D^*(s)$. Эта передаточная функция даже при

выполнении условий (3.4) и (3.5) остается функцией e^{sT} , а не s и отличается от $D(s)$ тем больше, чем больше T . Во-вторых, указанные условия используются обычно [62] для установления эквивалентности частотной характеристики дискретной системы без дискретного фильтра (при $D^*(s) = 1$) и частотной характеристики ее приведенной непрерывной части (в нашем случае характеристик $W_0 W_1^*(j\omega)$ и $W_0(j\omega) W_1(j\omega)$). Таким образом, сравниваются характеристики одной и той же дискретной системы. Выше сравнивались между собой две различные системы: дискретная система и желаемая непрерывная система. Хотя при выполнении условий (3.4) и (3.5) дискретную систему и можно рассматривать как непрерывную, она отнюдь не эквивалентна желаемой непрерывной системе.

Выполненное выше сопоставление дискретной и непрерывной систем дает возможность оценить [10] погрешность, вызванную использованием в системе машины, однако оно, в силу ограничений (3.4) и (3.5), имеет несколько частный характер, хотя и будет далее использовано в главе V. Основная цель этого сопоставления здесь — подчеркнуть, что условие теоремы Котельникова облегчает в определенном смысле анализ интересующей нас погрешности, однако оно не может быть использовано для непосредственного выбора требуемой частоты вычислений при реализации на цифровой машине заданного алгоритма.

2. Способ определения погрешности, возникающей в цифровой автоматической системе. Анализ природы ошибок, вызванных использованием в системе цифровой машины, выполненный выше путем сравнения дискретной и соответствующей ей непрерывной (желаемой) систем, дает возможность определить погрешность, обусловленную дискретностью процесса управления, как разность выходов дискретной и непрерывной систем

$$\varepsilon(t) = y_d(t) - y_n(t) \quad (3.7)$$

при одном и том же входном воздействии $x(t)$. Схема формирования погрешности $\varepsilon(t)$ для разомкнутой дискретной системы изображена на рис. 1.17; она следует из схемы на рис. 1.15. Схемой рис. 1.17 далее будем неоднократно пользоваться. Назовем желаемую непрерывную

и дискретную системы взаимно соответствующими друг другу (коротко-соответствующей непрерывной (дискретной) системой), если выполняется условие

$$\lim_{\substack{q \rightarrow 0 \\ T \rightarrow 0}} y_d(t) = y_n(t). \quad (3.8)$$

При $q \rightarrow 0$ цифровая система превращается в импульсную (в предельную импульсную систему — по терминологии работы [59]), так как ошибки, обусловленные

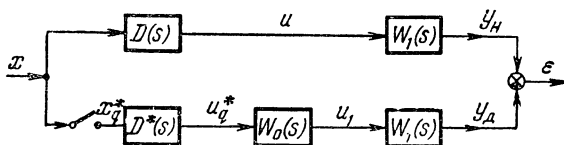


Рис. 1.17.

квантованием по уровню, в этом случае равны нулю. Соотношению (3.8) при $q = 0$ и $T \rightarrow 0$ отвечают следующие предельные зависимости между изображениями $Y_d^*(s) = D^*(s) W_0(s) W_1(s) X^*(s)$, $Y_d(z, \gamma) = D^*(z) W^*(z, \gamma) X^*(z)$ и изображением $Y_n(s) = D(s) W_1(s) X(s)$. Обычно функции $D^*(s)$ и $D^*(z)$ зависят от величины T так, что

$$\lim_{T \rightarrow 0} D^*(s) = \lim_{T \rightarrow 0} D^*(z) = D(s). \quad (3.9)$$

Так как при малом T

$$W_0(s) = T + 0(T^2), \quad \text{то} \quad \lim_{T \rightarrow 0} [W_0(s) X^*(s)] = X(s),$$

поэтому

$$\lim_{T \rightarrow 0} Y_d^*(s) = \lim_{T \rightarrow 0} D^*(s) \lim_{T \rightarrow 0} [W_0(s) X^*(s)] W_1(s) = Y_n(s). \quad (3.10)$$

При использовании типовых восстанавливающих устройств

$$\lim_{T \rightarrow 0} W^*(z, \gamma) = \lim_{T \rightarrow 0} [Z_\gamma \{W_0(s) W_1(s)\}] = W_1(s),$$

следовательно,

$$\lim_{T \rightarrow 0} [T Y_d^*(z, \gamma)] = \lim_{T \rightarrow 0} D^*(z) \lim_{T \rightarrow 0} W^*(z, \gamma) \lim_{T \rightarrow 0} [T X^*(z)] = Y_n(s). \quad (3.11)$$

Из последнего выражения видно, что

$$\lim_{T \rightarrow 0} [D^*(z) W^*(z, \gamma)] = D(s) W_1(s) = G(s). \quad (3.12)$$

Из изложенного ясно, что желаемую непрерывную систему можно рассматривать как идеальную дискретную систему, в которой цифровая машина имеет бесконечное быстродействие и бесконечную длину разрядной сетки, что как раз соответствует условию $q = T = 0$.

Рассмотрим теперь погрешность, вносимую дискретностью процесса управления, в случае замкнутой системы. Основная суть определения погрешности остается той же, что и для разомкнутой системы. Положим, что закон управления $D(s)$ обеспечивает желаемый процесс работы замкнутой непрерывной системы с объектом управления, описываемым передаточной функцией $W_1(s)$. Передаточная функция такой системы определяется, как известно, формулой

$$G(s) = C(s) W_1(s), \quad (3.13)$$

где

$$C(s) = \frac{D(s)}{1 + D(s) W_1(s)}. \quad (3.14)$$

Структурная схема формирования погрешности, обусловленной использованием дискретного устройства управления для замкнутой системы, показана на рис. 1.18,

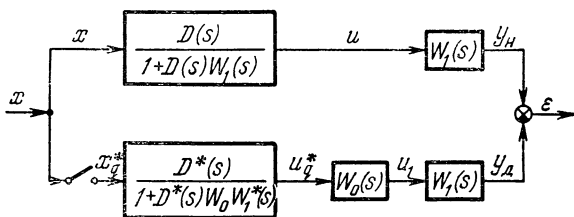


Рис. 1.18.

где для дискретной системы вместо (2.54) применено обозначение передаточной функции из (2.61), а сама схема показана менее подробно, чем на рис. 1.14, но с сохранением обозначений переменных. Схемы на рис. 1.17 и 1.18 для разомкнутых и замкнутых систем

структурно сходны между собой и отличаются лишь передаточными функциями элементов, на входы которых подаются воздействия x и x_q^* , т. е. они совпадают, если в схеме рис. 1.17 $D(s)$ заменить на $C(s)$ из (3.14), а $D^*(s)$ на $C^*(s)$ из (2.62). Поэтому для схемы на рис. 1.18 можно провести те же рассуждения, что и для схемы рис. 1.17. Далее, если это возможно, не будем делать различия при рассмотрении погрешностей для разомкнутых и замкнутых систем.

Следует подчеркнуть отличие ошибки (3.7) от ошибки регулирования, являющейся распространенной характеристикой точности автоматических систем. Ошибками регулирования соответственно непрерывной и дискретной систем являются разности между выходной и входной переменными

$$\varepsilon_n(t) = y_n(t) - x(t), \quad (3.15)$$

$$\varepsilon_d(t) = y_d(t) - x(t). \quad (3.16)$$

Ошибка непрерывной системы $\varepsilon_n(t)$ определяется динамическими свойствами системы, ее инерционностью (способностью элементов системы накапливать энергию); ошибка $\varepsilon_d(t)$ дискретной системы определяется как инерционностью системы, так и дискретностью процесса управления. Разность

$$\begin{aligned} \varepsilon_d(t) - \varepsilon_n(t) &= [y_d(t) - x(t)] - [y_n(t) - x(t)] = \\ &= y_d(t) - y_n(t) = \varepsilon(t) \end{aligned} \quad (3.17)$$

позволяет из всей динамической ошибки дискретной системы выделить в «чистом виде» ту ее часть, которая обусловлена лишь дискретностью процесса управления, без участия составляющей ошибки, вызванной динамическими свойствами системы, хотя и с учетом этих свойств. Схемы на рис. 1.17 и 1.18 представляют собой, таким образом, структурные схемы формирования ошибки (погрешности), обусловленной лишь дискретностью процесса управления. Вернемся к рассмотрению погрешности (3.7). Она определяется четырьмя факторами, перечисленными в п. 1. Символически будем представлять это как зависимость ошибки (3.7) от параметров квантования q и T , т. е.

$$\varepsilon(t, q, T) = y_d(t, q, T) - y_n(t). \quad (3.18)$$

Если дискретная система соответствует данной непрерывной, то, как следует из (3.8),

$$\lim_{\substack{q \rightarrow 0 \\ T \rightarrow 0}} \varepsilon(t, q, T) = 0. \quad (3.19)$$

Разность (3.18), обусловленную дискретностью процесса управления, имеет смысл рассматривать как ошибку, очевидно, лишь в том случае, когда непрерывная система функционирует в определенном смысле лучше, чем соответствующая дискретная система, т. е. когда дискретная система в принципе не может обеспечить качество управления лучшее, чем непрерывная.

Рассмотрим этот вопрос более подробно. В общем случае кроме управляющего воздействия $x(t)$ на систему может действовать возмущение (помеха) $v(t)$. Тогда качество процесса управления в непрерывной системе будет определяться некоторым функционалом

$$\varphi[x(t), v(t), y_n(t), t], \quad (3.20)$$

а в дискретной системе — функционалом

$$\varphi[x(t), v(t), y_d(t), t]. \quad (3.21)$$

Если цель управления заключается в минимизации указанных функционалов, то условие того, что непрерывная система функционирует лучше, чем дискретная, будет определяться неравенством

$$\varphi[x, v, y_n, t] < \varphi[x, v, y_d, t]. \quad (3.22)$$

В качестве примера рассмотрим задачу преобразования полезного сигнала $x(t)$ в соответствии с желаемой передаточной функцией $H_0(s)$ при одновременном действии на вход помехи $v(t)$. На рис. 1.19 приведена схема формирования погрешностей для непрерывной и дискретной систем $\varepsilon_n(t)$ и $\varepsilon_d(t)$ и разность этих погрешностей

$$\Delta(t) = \varepsilon_d(t) - \varepsilon_n(t). \quad (3.23)$$

Функционалам (3.20) и (3.21) отвечают в рассматриваемом случае

$$\varphi[\varepsilon_n(t), t], \quad \varphi[\varepsilon_d(t), t], \quad (3.24)$$

а условию (3.22)

$$\varphi[\varepsilon_n(t), t] < \varphi[\varepsilon_d(t), t]. \quad (3.25)$$

Так, например, в случае интегральной квадратичной оценки на интервале $[0, t]$

$$\varphi[\varepsilon_n(t), t] = \int_0^t [y_0(\tau) - y_n(\tau)]^2 d\tau, \quad (3.26)$$

$$\varphi[\varepsilon_d(t), t] = \int_0^t [y_0(\tau) - y_d(\tau)]^2 d\tau, \quad (3.27)$$

где $y_0(t)$ — желаемое преобразование полезного сигнала $x(t)$ оператором $H_0(s)$. Условие (3.25) означает, что

$$\int_0^t \{ [y_0(\tau) - y_n(\tau)]^2 - [y_0(\tau) - y_d(\tau)]^2 \} d\tau < 0. \quad (3.28)$$

Для автоматической системы с непрерывным объектом управления и непрерывными воздействиями условие

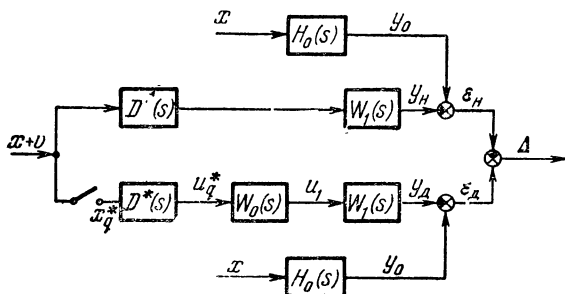


Рис. 1.19.

(3.28) в подавляющем большинстве случаев будет соблюдаться, т. е. система с идеальным непрерывным корректирующим устройством будет обеспечивать лучшее качество управления, чем та же система с дискретным корректирующим устройством (минимум функционала (3.26) меньше минимума функционала (3.27)).

Это утверждение ни в коем случае не умаляет роли и значения цифровых вычислительных машин — их использование в автоматических системах позволяет до-

биться такого качества управления, которое часто недостижимо в системах с помощью непрерывных устройств управления в силу целого ряда технических трудностей. В то же время дискретность процесса управления, порождаемая использованием цифровой машины, несколько снижает качество работы системы по сравнению с желаемой (идеальной) непрерывной системой. Известно, например, [43], что при случайных воздействиях дисперсия выходной переменной дискретной системы всегда больше, чем дисперсия соответствующей непрерывной системы.

Следует отметить, что иногда дискретная система может обеспечить бóльшую точность. Это имеет место в случае, когда система используется для определения статистических характеристик стационарных случайных процессов (непрерывная часть отсутствует, или $W_0(s)W_1(s) = 1$). Так, при определении математического ожидания и дисперсии случайной функции при некоторых условиях, осреднение с помощью среднеарифметического обеспечивает бóльшую точность, чем с помощью среднеинтегрального [6]. То же положение имеет место иногда при решении задачи сглаживания [6, 23]. Эти частные случаи использования цифровых машин всегда могут быть выявлены. Они относятся фактически к системам с конечной памятью. Условие конечного времени наблюдения, как известно [31], точно может быть выполнено лишь для дискретных систем, а для непрерывных выполняется лишь приближенно.

3. Методы количественного исследования погрешности цифровой автоматической системы. В случае разомкнутых цифровых систем (например, систем программного управления) или систем цифровой обработки информации ошибка $\varepsilon(t, q, T)$ (3.18) является единственной основой для анализа погрешности и определения требований к параметрам системы и численному методу, реализующему заданный алгоритм.

При проектировании замкнутых цифровых систем (например, систем стабилизации и следящих систем) обычно рассматривают ошибку регулирования $\varepsilon_d(t)$ (3.16) при типовых входных воздействиях. Если таким подходом можно ограничиться для непрерывных систем, то рассмотрение только ошибки регулирования при

анализе цифровой системы недостаточно. Действительно, при исследовании цифровой системы всегда интересуются тем, как ошибка $\epsilon_d(t)$ зависит от шага дискретности T . Рассматривая малые величины шага, естественно приходят к граничному случаю $T = 0$ и ошибке регулирования $\epsilon_n(t)$ (3.15), отвечающей идеальной системе.

Поэтому целесообразно сразу отдать себе отчет в том, каковы наилучшие возможности данной системы и насколько они ухудшаются за счет дискретности процесса управления. Соответствующая непрерывная система (идеальная дискретная) и является системой, позволяющей ответить на эти вопросы. Как уже отмечалось выше, необходимость рассмотрения такой системы естественно возникает на первоначальном этапе проектирования дискретной системы. Связь между передаточными функциями упомянутых выше систем устанавливается с помощью простого предельного перехода $T \rightarrow 0$. Поэтому, если даже характеристика ошибки $\epsilon_d(t)$ удовлетворительна, то не следует считать сразу приемлемыми те параметры цифровой системы и численный метод, для которых это имеет место, так как остается неясным, какая доля всей ошибки определяется динамикой системы (в том числе и принятым законом управления), а какая обусловлена дискретностью процесса управления. Может быть, что возможно добиться лучшей (или той же) характеристики ошибки $\epsilon_d(t)$ при предъявлении менее жестких требований к цифровой машине, например, за счет более рационального выбора численного метода, способа восстановления дискретных данных и т. д. Эталонном для такого анализа и является идеальная система.

Вернемся к рассмотрению возможных методов определения погрешности $\epsilon(t, q, T)$ (3.18). Иногда указанную погрешность определяют экспериментально с помощью моделирования процесса на универсальной ЦВМ. Делают это следующим образом. Вначале просчитывают величину $y_d(t)$ численным методом с очень маленьким шагом T , используя полную разрядную сетку машины. Полученные результаты вычислений принимают за точные. Далее последовательно увеличивают шаг T для численного моделирования оператора $D(s)$

(оставляя шаг малым для заданной части системы $W_1(s)$), а также искусственно «обрубают» разрядную сетку машины. Сравнивая результаты, определяют шаг дискретности T и длину разрядной сетки машины, обеспечивающие удовлетворительную точность.

Однако, несмотря на такую практическую возможность определения ошибки, важное значение имеет развитие теоретических методов ее определения или оценки. Экспериментальный метод требует многократных просчетов выходной величины $y_d(t)$ при различных входных воздействиях $x(t)$, численных методах и т. д., оставаясь в то же время методом «проб и ошибок», — перебора вариантов. Умение же определять, или хотя бы оценивать, величину погрешности $\varepsilon(t, q, T)$ аналитически дает возможность проанализировать в общем виде влияние на точность работы системы не только величин параметров квантования q и T , но и численного метода, принятого для реализации желаемого оператора $D(s)$, способа восстановления дискретных данных, а также свойств входного воздействия $x(t)$.

Таким образом, первая задача исследования погрешности $\varepsilon(t, q, T)$ заключается в анализе ее величины или величины ее некоторой характеристики — чаще всего функционала $\varphi[\varepsilon(t, q, T), t]$. Для детерминированных воздействий $x(t)$ в качестве такого функционала может быть принята интегральная или суммарная квадратичские оценки на интервале $[0, t]$ или $[0, nT]$:

$$\int_0^t \varepsilon^2(\tau, q, T) d\tau, \quad \sum_{i=0}^n \varepsilon^2[iT, q, T]; \quad (3.29)$$

эти же оценки на бесконечном интервале имеют вид

$$\int_0^{\infty} \varepsilon^2(\tau, q, T) d\tau, \quad \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^2[iT, q, T], \quad (3.30)$$

а их среднеквадратические значения —

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \varepsilon^2(\tau, q, T) d\tau, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \varepsilon^2[iT, q, T]. \quad (3.31)$$

Удобна относительная нормированная интегральная квадратическая оценка ошибки

$$e^2 = \frac{\int_0^{\infty} \varepsilon^2(\tau, q, T) d\tau}{\int_0^{\infty} y_H^2(\tau) d\tau}, \quad (3.32)$$

определяющая «энергию» ошибки в долях «энергии» выходной переменной желаемой непрерывной системы. Величина e характеризует меру близости дискретной и соответствующей непрерывной системы. Характеристикой погрешности может служить также значение ее в какой-либо характерный момент времени t_0 , т. е. $\varepsilon(t_0, q, T)$. Полезна также оценка

$$\max_t |\varepsilon(t, q, T)|, \quad (3.33)$$

или ее относительное значение

$$\frac{\max_t |\varepsilon(t, q, T)|}{\max_t |y_H(t)|}. \quad (3.34)$$

Выбор того или иного вида оценки погрешности $\varepsilon(t, q, T)$ осуществляется в каждом конкретном случае, исходя из сущности задач, возлагаемых на систему управления.

Вторым видом воздействий $x(t)$, имеющих важное значение, являются случайные функции времени. При этом погрешность также является случайной функцией, оцениваемой с помощью статистических характеристик. К таким характеристикам относятся

— математическое ожидание погрешности

$$m_\varepsilon(t, q, T) = M\{\varepsilon(t, q, T)\}, \quad (3.35)$$

— корреляционная функция погрешности

$$\begin{aligned} K_\varepsilon(t, t_1, q, T) = \\ = M\{[\varepsilon(t, q, T) - m_\varepsilon(t, q, T)][\varepsilon(t_1, q, T) - m_\varepsilon(t_1, q, T)]\}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

— дисперсия погрешности

$$D_\varepsilon(t, q, T) = M \{[\varepsilon(t, q, T) - m_\varepsilon(t, q, T)]^2\}. \quad (3.37)$$

Зависимости (3.35) — (3.37) характеризуют ошибку $\varepsilon(t, q, T)$ в переходном режиме работы системы. В установившемся режиме (для стационарных воздействий) выражениям (3.35) и (3.37) отвечают величины

$$m_\varepsilon(q, T) = \lim_{t \rightarrow \infty} m_\varepsilon(t, q, T), \quad (3.38)$$

$$D_\varepsilon(q, T) = \lim_{t \rightarrow \infty} D_\varepsilon(t, q, T), \quad (3.39)$$

а выражению (3.36) — корреляционная функция

$$K_\varepsilon(\tau, q, T), \quad \text{где } \tau = t - t_1. \quad (3.40)$$

Правильность определения оценки погрешности всегда можно проверить с помощью условия (3.19), которое для функционала ошибки также дает в пределе нуль, т. е.

$$\lim_{\substack{q \rightarrow 0 \\ T \rightarrow 0}} \Phi[\varepsilon(t, q, T)] = 0. \quad (3.41)$$

Указанным условием будем в дальнейшем неоднократно пользоваться при решении задач анализа погрешности $\varepsilon(t, q, T)$.

Вторая задача исследования погрешности $\varepsilon(t, q, T)$ связана с проблемой синтеза оптимальной передаточной функции дискретной системы или ее корректирующего устройства. Непрерывная желаемая система, по отношению к которой рассматривается ошибка дискретной системы, задается обычно с помощью некоторой передаточной функции $H(s)$, осуществляющей преобразование полезного сигнала $x(t)$ в требуемую выходную непрерывную величину $y_n(t)$. На синтезируемую систему может воздействовать помеха $v(t)$ и шум квантования (если последний учитывается), обозначенный на рис. 1.20 через $\varepsilon_q^*(t)$. Задача заключается в определении передаточной функции дискретной системы $G^*(z, \gamma)$ (или передаточной функции корректирующего устройства $D^*(z)$ при заданной непрерывной части системы), обеспечивающей минимум некоторого функционала

ошибки. Для случайных воздействий это обычно дисперсия ошибки как решетчатой функции при $t = (n + \gamma)T$ или дисперсия огибающей ошибки, т. е. самой ошибки; для детерминированного воздействия $x(t)$ (и $v(t) = 0$) — суммарное или интегральное квадратическое значение ошибки. Оптимальная передаточная функция $D^*(z)$ определяет программу работы цифровой машины, осуществляющей роль корректирующего устройства системы.

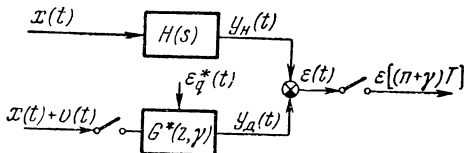


Рис. 1.20.

Отметим одно важное обстоятельство. В общем случае оптимальное значение функционала ошибки зависит от величин q и T , как от параметров. Поэтому желательно стремиться к решению задачи синтеза в общем

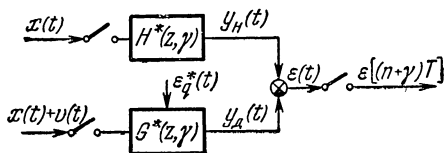


Рис. 1.21.

виде так, чтобы параметры q и T входили в выражение для функционала ошибки в виде алгебраических величин, тогда можно проанализировать зависимость ошибки от их численных значений. К сожалению, это возможно не всегда; поэтому для решения задачи синтеза приходится задавать значения q и T заранее. Для того чтобы учесть влияние указанных параметров на точность системы, необходимо решать задачу синтеза в два этапа. Вначале нужно найти оптимальную передаточную функцию непрерывной системы $G(s)$ (непрерывного корректирующего устройства $D(s)$) при $q = T = 0$ и определить соответствующее значение функционала ошибки. После этого, решив задачу синтеза для дис-

кретной системы при $q \neq 0$ и $T \neq 0$ и найдя значение функционала ошибки в этом случае, путем сравнения последнего со значением функционала ошибки непрерывной системы, можно оценить влияние параметров q и T на точность работы системы. Следовательно, при решении задачи синтеза оптимальной передаточной функции дискретной системы необходимо анализировать погрешность цифровой системы, обусловленную дискретностью процесса управления.

Иногда, при решении задачи синтеза, ошибка дискретной системы определяется также по отношению к дискретной желаемой системе (рис. 1.21). Далее будут рассмотрены оба случая.

ДВУМЕРНОЕ z -ПРЕОБРАЗОВАНИЕ, ЕГО ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА И ПРАВИЛА

В настоящее время одномерные функциональные преобразования широко используются в теории автоматического управления. Все большее применение находят и двумерные функциональные преобразования.

Так, в работе [4] двумерное (вообще n -мерное) преобразование Лапласа применяется для анализа и синтеза нелинейных систем. В результате использования свойства сепарабельности ядра многомерной свертки осуществляется переход от двумерного преобразования Лапласа к одномерному. Аналогичный прием использован в статье [67] для анализа дискретных систем. Здесь применено двумерное z -преобразование, которое также приводится к одномерному. Существенные результаты в указанном направлении получены в работе [47], где двумерное преобразование Лапласа используется для описания переходных процессов в непрерывных системах, подверженных случайным воздействиям.

В статье [22] двумерное z -преобразование применяется для определения корреляционной функции выходного сигнала импульсной системы. В работах [13, 14] исследованы основные свойства двумерного z -преобразования, как прямого, так и обратного. Установлена связь двумерного z -преобразования с двумерным преобразованием Лапласа и двойным рядом Фурье, аналогичная указанной связи для одномерного случая. Рассмотрено двумерное z -преобразование без запаздывания и с запаздыванием. Изложению этих вопросов посвящен ниже четвертый параграф. В пятом параграфе формулируется и доказывается ряд теорем и правил двумерного z -преобразования. Определение двумерных изображений, наиболее важных для практических расчетов дискретных функций двух переменных, выполнено в шестом параграфе. В последнем параграфе этой главы приведены двумерные и одномерные изображения ста-

гистических характеристик стационарных случайных процессов, необходимые для дальнейших исследований переходных и установившихся режимов работы в дискретных системах.

§ 4. Основные соотношения двумерного z -преобразования. Связь двумерного z -преобразования с двумерным преобразованием Лапласа и двойным рядом Фурье

1. Прямое двумерное z -преобразование. Обозначим через $f(t, t_1)$ непрерывную функцию двух действительных переменных. Будем считать, что эта функция задана лишь в области, где $0 \leq t < \infty$, $0 \leq t_1 < \infty$, а при $t < 0$, $t_1 < 0$ будем принимать $f(t, t_1) \equiv 0$. Соответствующую дискретную функцию двух переменных обозначим символом $f[nT, n_1T]$, где T — шаг дискретности, n и n_1 — целые числа. Смещенную дискретную функцию обозначим символом $f[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma_1)T]$, где параметры смещения γ и γ_1 удовлетворяют условиям $0 \leq \gamma < 1$, $0 \leq \gamma_1 < 1$.

Двумерное z -преобразование дискретной функции $f[nT, n_1T]$ определяется соотношением

$$F^*(z, z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} f[nT, n_1T] z^{-n} z_1^{-n_1}, \quad (4.1)$$

а двумерное z -преобразование с запаздыванием дискретной смещенной функции $f[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma_1)T]$ — соотношением

$$F^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} f[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma_1)T] z^{-n} z_1^{-n_1}, \quad (4.2)$$

где $z = e^{sT}$ и $z_1 = e^{s_1T}$, а $s = \sigma + j\omega$ и $s_1 = \sigma_1 + j\omega_1$ — комплексные числа. Если в выражениях (4.1) и (4.2) заменить z и z_1 с помощью указанных соотношений, то получим выражения для двумерного дискретного преобразования Лапласа. Выражения (4.1) и (4.2) представляют собой функциональные преобразования, устанавливающие соответствия между оригиналами (функциями двух переменных) и их двумерными изображениями.

Для краткости будем использовать следующие эквивалентные записи:

$$F^*(z, z_1) = \mathcal{L}_2 \{f(t, t_1)\} = \mathcal{L}_2 \{f[nT, n_1T]\},$$

$$F^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1) = \mathcal{L}_{2\gamma} \{f(t, t_1)\} = \mathcal{L}_{2\gamma} \{f[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma_1)T]\},$$

где \mathcal{L}_2 и $\mathcal{L}_{2\gamma}$ — соответственно операторы двумерного z -преобразования и двумерного z -преобразования с запаздыванием. Кроме того, будем применять записи

$$\mathcal{L}_2 \{F(s, s_1)\} = F^*(z, z_1), \quad \mathcal{L}_{2\gamma} \{F(s, s_1)\} = F^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1),$$

которые символически обозначают операции двумерного z -преобразования функции двух переменных, имеющей двумерное изображение по Лапласу $F(s, s_1)$ (4.6). Так как параметры γ и γ_1 не влияют на свойства двумерного z -преобразования, то здесь будем в основном рассматривать соотношения (4.1). Выражение (4.1) можно записать в виде

$$F^*(z, z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n_1=0}^{\infty} f[nT, n_1T] z_1^{-n_1} \right\} z^{-n}, \quad (4.3)$$

откуда следует, что внутренняя сумма является одномерным z -преобразованием функции $f[nT, n_1T]$ по переменной n_1 при параметре n . Таким образом, двумерное z -преобразование сводится к последовательному выполнению двух одномерных z -преобразований по разным аргументам. Для существования двумерного изображения $F^*(z, z_1)$ необходимо, чтобы двойной ряд (4.1) сходился. Определим условия сходимости. Для этого рассмотрим вместо двойного ряда (4.1) двойной ряд, составленный из абсолютных величин членов указанного ряда

$$F_1^*(z, z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} |f[nT, n_1T] z^{-n} z_1^{-n_1}|. \quad (4.4)$$

В теории двойных рядов [37], так же как и в теории простых, существует понятие абсолютной сходимости: если сходится двойной ряд (4.4), то сходится и ряд (4.1). Найдем условия, при которых ряд (4.4) сходится. Положим, что существуют такие постоянные величины M , c и c_1 , что при $n > 0$ и $n_1 > 0$

$$|f[nT, n_1T]| \leq Me^{(cn + c_1n_1)T}. \quad (4.5)$$

Величины c и c_1 представляют собой показатели роста функции $f[nT, n_1T]$ по переменным n и n_1 . Рассмотрим член ряда (4.4)

$$\begin{aligned} |f[nT, n_1T] z^{-n} z_1^{-n_1}| &= |f[nT, n_1T] e^{-(\sigma+j\omega)nT} e^{-(\sigma_1+j\omega_1)n_1T}| = \\ &= |f[nT, n_1T] e^{-(cn+c_1n_1)T} | e^{-[(\sigma-c)n+(\sigma_1-c_1)n_1]T}, \end{aligned}$$

так как $|e^{-j\omega T n}| = |e^{-j\omega_1 T n_1}| = 1$. Подставим последнее выражение в (4.4). С учетом условия (4.5) находим

$$\begin{aligned} F_1^*(z, z_1) &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} |f[nT, n_1T] e^{-(cn+c_1n_1)T} | e^{-[(\sigma-c)n+(\sigma_1-c_1)n_1]T} \leq \\ &\leq M \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} e^{-[(\sigma-c)n+(\sigma_1-c_1)n_1]T} = \\ &= M \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(\sigma-c)nT} \sum_{n_1=0}^{\infty} e^{-(\sigma_1-c_1)n_1T}. \end{aligned}$$

Простые ряды, стоящие в правой части последнего выражения и представляющие собой суммы геометрических прогрессий, сходятся, если $\sigma > c$ и $\sigma_1 > c_1$. При этом условии

$$F_1^*(z, z_1) \leq \frac{M}{[1 - e^{-(\sigma-c)T}][1 - e^{-(\sigma_1-c_1)T}]},$$

т. е. ряд (4.4) сходится, а следовательно, сходится и ряд (4.1). Таким образом, двумерное изображение $F^*(z, z_1)$ существует, если дискретная функция двух переменных $f[nT, n_1T]$ удовлетворяет условию (4.5), а действительные части z и z_1 таковы, что всегда $\sigma > c$ и $\sigma_1 > c_1$. Заметим, что в основных соотношениях (4.1) и (4.2) суммирование по n и n_1 можно выполнять в любом порядке, при этом изображение остается одним и тем же. Это ясно из рассмотренных выше соотношений, определяющих условия сходимости. Они не меняются при изменении порядка суммирования. Члены абсолютно сходящегося двойного ряда можно переставлять в любом порядке, не изменяя его суммы [37].

Выбор показателей роста c и c_1 может быть, естественно, неоднозначным. Нижние границы этих величин σ_c и σ_{c_1} , такие что при $\sigma > \sigma_c$ и $\sigma_1 > \sigma_{c_1}$ ряд (4.1) сходится, а при $\sigma < \sigma_c$ и $\sigma_1 < \sigma_{c_1}$ — расходится, называются,

как известно, абсциссами сходимости. Их обычно труднее определить, чем показатели роста, поэтому будем пользоваться в основном последними. Таким образом, двумерное изображение существует, если показатели роста функции конечны.

2. Связь между двумерным z -преобразованием и двумерным преобразованием Лапласа. Двумерное преобразование Лапласа непрерывной функции двух переменных $f(t, t_1)$ определяется соотношением [19, 47]

$$F(s, s_1) = \mathcal{L}_2 \{f(t, t_1)\} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(t, t_1) e^{-st - s_1 t_1} dt dt_1. \quad (4.6)$$

Между выражениями (4.1), (4.2) и (4.6) существует вполне очевидная аналогия. Более того, между изображением $F(s, s_1)$ непрерывной функции и изображением $F^*(s, s_1)$ соответствующей ей дискретной функции существует связь, подобная одномерному случаю. Для установления этой связи необходимо аналитически описать процесс импульсной модуляции непрерывной функции двух переменных, аналогично тому, как это выполняется в одномерном случае. Сделаем это.

Определим двумерную дельта-функцию $\delta(t, t_1)$ следующим образом:

$$\delta(t, t_1) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = t_1 = 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \delta(t, t_1) dt dt_1 = 1. \quad (4.8)$$

Для функции $\delta(t, t_1)$ подобно одномерному случаю справедливо соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, t_1) \delta(t - u, t_1 - u_1) dt dt_1 = f(u, u_1). \quad (4.9)$$

По аналогии с аналитическим описанием процесса импульсной модуляции функции одной переменной запишем выражение для процесса импульсной модуляции функции двух переменных в виде

$$f^*(t, t_1) = f(t, t_1) \delta_T(t, t_1). \quad (4.10)$$

где $\delta_T(t, t_1)$ представляет собой выражение для последовательности двумерных импульсов (объем которых равен единице), равноотстоящих друг от друга по переменным t и t_1 на величину шага дискретности T и простирающихся в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ по каждой из переменных (рис. 2.1); $f^*(t, t_1)$ — функция $f(t, t_1)$, модулированная указанной последовательностью $\delta_T(t, t_1)$. Пользуясь соотношением (4.7), последовательность двумерных дельта-функций можно определить выражением

$$\delta_T(t, t_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \times \\ \times \delta(t - nT, t_1 - n_1T). \quad (4.11)$$

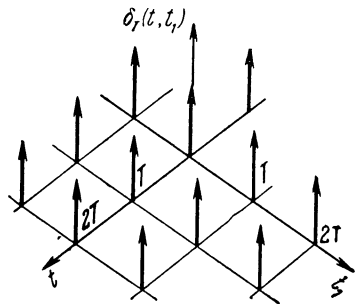


Рис. 2.1.

Применим двумерное преобразование Лапласа (4.6) к левой и правой частям равенства (4.10). Учитывая выражения (4.11) и (4.9), находим зависимость

$$F^*(s, s_1) = \mathcal{L}_2 \{f^*(t, t_1)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} f[nT, n_1T] e^{-sTn - s_1Tn_1} \quad (4.12)$$

(здесь нижние пределы суммирования приняты равными нулю, так как по условию $f(t, t_1) \equiv 0$ при $t < 0$, $t_1 < 0$). Сделав в выражении (4.12) замену $e^{sT} = z$, $e^{s_1T} = z_1$, получаем соотношение (4.1). Если теперь рассмотреть последовательность двумерных дельта-функций, смещенных по переменным t и t_1 соответственно на величины γT и $\gamma_1 T$, то вместо соотношения (4.11) имеем

$$\delta_T(t, t_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT - \gamma T, t_1 - n_1T - \gamma_1 T). \quad (4.13)$$

В результате аналогично (4.12) находим

$$F^*(s, \gamma; s_1, \gamma_1) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} f[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma_1)T] e^{-s(n + \gamma)T - s_1(n_1 + \gamma_1)T}. \quad (4.14)$$

Выполнив замену $e^{sT} = z$ и $e^{s_1 T} = z_1$, из последнего выражения с учетом формулы (4.2) получаем

$$F^*(s, \gamma; s_1, \gamma_1) = F^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1) z^{-\gamma} z_1^{-\gamma_1}. \quad (4.15)$$

Таким образом, двумерное z -преобразование (двумерное z -преобразование с запаздыванием) представляет собой двумерное преобразование Лапласа непрерывной функции двух переменных, модулированной последовательностью двумерных дельта-функций (последовательностью двумерных смещенных дельта-функций соответственно). Следовательно, соотношения (4.12) и (4.14) с точностью до T^2 (при $T \rightarrow 0$) являются аналогами двумерного преобразования (4.6). Из сравнения формул (4.12), (4.14) и (4.6) видно, что между функциями $F^*(z, z_1)$, $F^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1)$ и $F(s, s_1)$ существует следующая предельная зависимость:

$$\lim_{T \rightarrow 0} [T^2 F^*(z, z_1)] = \lim_{T \rightarrow 0} [T^2 F^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1)] = F(s, s_1), \quad (4.16)$$

аналогичная подобной зависимости в теории одномерного z -преобразования [31]. Найдем теперь аналитические зависимости, связывающие между собой двумерные z -изображения решетчатых функций $F^*(z, z_1)$ и $F^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1)$ с двумерным преобразованием Лапласа $F(s, s_1)$ соответствующей непрерывной функции. Для этого нам потребуется соотношение, связывающее между собой двумерное изображение по Лапласу произведения двух функций с двумерными изображениями самих функций. Для этого докажем следующую теорему.

Теорема. Если $f_1(t, t_1)$ и $f_2(t, t_1)$ суть функции, удовлетворяющие условиям

$$|f_1(t, t_1)| \leq M e^{c_1 t + c_2 t_1}, \quad |f_2(t, t_1)| \leq L e^{d_1 t + d_2 t_1},$$

где M, c, c_1, L, d, d_1 — постоянные, а $F_1(s, s_1)$ и $F_2(s, s_1)$ — двумерные изображения этих функций, то в области, где действительные части комплексных аргументов $s = \sigma + j\omega$ и $s_1 = \sigma_1 + j\omega_1$ удовлетворяют условиям $\sigma > c + d$ и $\sigma_1 > c_1 + d_1$, двумерное изображение произведения $f_1(t, t_1)f_2(t, t_1)$ может быть определено по

формуле

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 \{f_1(t, t_1) f_2(t, t_1)\} = \\ = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} \int_{a_1-j\infty}^{a_1+j\infty} F_1(\omega, \omega_1) F_2(s-\omega, s_1-\omega_1) d\omega d\omega_1, \end{aligned} \quad (4.17)$$

где $a > c$, $a_1 > c_1$.

Доказательство. Воспользуемся формулой обращения двумерного преобразования Лапласа [19, 47] для непрерывной функции $f_1(t, t_1)$, не имеющей скачков:

$$f_1(t, t_1) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} \int_{a_1-j\infty}^{a_1+j\infty} F_1(\omega, \omega_1) e^{\omega t + \omega_1 t_1} d\omega d\omega_1, \quad (4.18)$$

где $a > c$ и $a_1 > c_1$. Подставим (4.18) в равенство, определяющее левую часть выражения (4.17),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 \{f_1(t, t_1) f_2(t, t_1)\} = \int_0^\infty \int_0^\infty f_1(t, t_1) f_2(t, t_1) e^{-st-s_1 t_1} dt dt_1 = \\ = -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\int_{a-j\infty}^{a+j\infty} \int_{a_1-j\infty}^{a_1+j\infty} F(\omega, \omega_1) e^{\omega t + \omega_1 t_1} d\omega d\omega_1 \right] \times \\ \times f_2(t, t_1) e^{-st-s_1 t_1} dt dt_1. \end{aligned}$$

Изменим порядок интегрирования в последнем выражении и запишем его в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 \{f_1(t, t_1) f_2(t, t_1)\} = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} \int_{a_1-j\infty}^{a_1+j\infty} F_1(\omega, \omega_1) \times \\ \times \left[\int_0^\infty \int_0^\infty f_2(t, t_1) e^{-(s-\omega)t - (s_1-\omega_1)t_1} dt dt_1 \right] d\omega d\omega_1. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, представляет собой двумерное изображение $F_2(s-\omega, s_1-\omega_1)$ функции $f_2(t, t_1)$, если точки $s-\omega$ и $s_1-\omega_1$ находятся в области абсолютной сходимости указанного несобственного двойного интеграла. Найдем условия сходимости. Пусть комплексные переменные ω и ω_1

определяются равенствами

$$\omega = a + j\Omega, \quad \omega_1 = a_1 + j\Omega_1.$$

Рассмотрим абсолютную величину подынтегральной функции двойного интеграла, заключенного в (4.19) в квадратные скобки:

$$\begin{aligned} |f_2(t, t_1) e^{-(s-\omega)t} e^{-(s_1-\omega_1)t_1}| &= \\ &= |f_2(t, t_1) e^{-[\sigma-a+j(\omega-\Omega)]t} e^{-[\sigma_1-a_1+j(\omega_1-\Omega_1)]t_1}| = \\ &= |f_2(t, t_1) e^{-(\sigma-a)t} e^{-(\sigma_1-a_1)t_1} \leq L e^{dt+d_1t_1} e^{-(\sigma-a)t} e^{-(\sigma_1-a_1)t_1} = \\ &= L e^{-(\sigma-a-d)t} e^{-(\sigma_1-a_1-d_1)t_1}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty |f_2(t, t_1) e^{-(s-\omega)t-(s_1-\omega_1)t_1}| dt dt_1 &\leq \\ \leq L \int_0^\infty e^{-(\sigma-a+d)t} dt \int_0^\infty e^{-(\sigma_1-a_1-d_1)t_1} dt_1 &= \frac{L}{(\sigma-a-d)(\sigma_1-a_1-d_1)}. \end{aligned}$$

Таким образом, рассмотренный интеграл сходится абсолютно, если $\sigma > a + d$ и $\sigma_1 > a_1 + d_1$. Так как по условию теоремы $a > c$ и $a_1 > c_1$, то и подавно $\sigma > c + d$ и $\sigma_1 > c_1 + d_1$, что и требовалось доказать. Записывая в квадратные скобки выражения (4.19) изображение $F_2(s - \omega, s_1 - \omega_1)$, получаем формулу (4.17).

Найдем, пользуясь формулой (4.17), изображение правой части равенства (4.10), т. е. найдем изображение функции $f^*(t, t_1)$, выраженное через изображения функций $f(t, t_1)$ и $\delta_T(t, t_1)$, где $\delta_T(t, t_1)$ определяется соотношением (4.11). Будем полагать, что функция $f(t, t_1)$ не имеет скачков (разрывов первого рода) [19, 47]. Для того чтобы воспользоваться формулой (4.17), найдем изображение по Лапласу функции $\delta_T(t, t_1)$. Из формулы (4.6) и выражения (4.11) (с учетом соотношения (4.9)) получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2\{\delta_T(t, t_1)\} &= \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ \sum_{n=-\infty}^\infty \sum_{n_1=-\infty}^\infty \delta(t - nT, t_1 - n_1T) \right\} e^{-st-s_1t_1} dt dt_1 = \\ &= \sum_{n=0}^\infty \sum_{n_1=0}^\infty e^{-sTn-s_1Tn_1} = \frac{1}{(1-e^{-sT})(1-e^{-s_1T})}. \end{aligned}$$

Отсюда, используя равенство (4.10) и формулу (4.17), находим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 \{f^*(t, t_1)\} &= F^*(s, s_1) = \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} \int_{a_1-j\infty}^{a_1+j\infty} \frac{F(\omega, \omega_1)}{[1 - e^{-(s-\omega)T}][1 - e^{-(s_1-\omega_1)T}]} d\omega d\omega_1. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Представим этот двойной интеграл в виде повторного

$$\begin{aligned} F^*(s, s_1) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} \frac{1}{1 - e^{-(s-\omega)T}} \times \\ &\times \left[\frac{1}{2\pi j} \int_{a_1-j\infty}^{a_1+j\infty} \frac{F(\omega, \omega_1)}{1 - e^{-(s_1-\omega_1)T}} d\omega_1 \right] d\omega. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Рассмотрим расположение полюсов подынтегральной функции внутреннего интеграла (4.21) (заклученного в

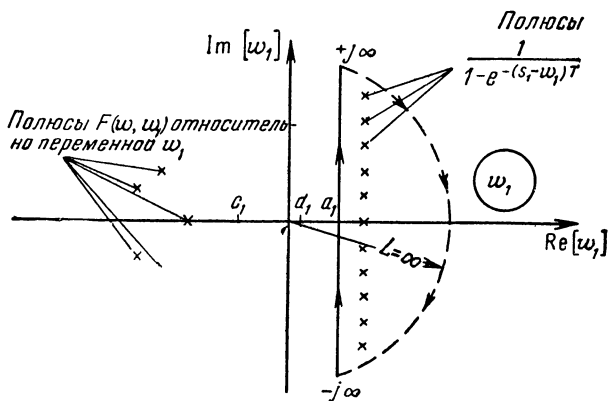


Рис. 2.2.

квадратные скобки) относительно переменной ω_1 . Так как по условию теоремы $a_1 > c_1$, то полюсы функции $F(\omega, \omega_1)$ на плоскости ω_1 (рис. 2.2) расположены левее линии $a_1 + j\infty, a_1 - j\infty$. Кроме того, полюсы подынтегральной функции определяются нулями знаменателя, т. е. уравнением

$$e^{-(s_1-\omega_1)T} = 1. \quad (4.22)$$

Так как $e^{j2\pi n_1} = 1$ при целых n_1 , удовлетворяющих условию $-\infty < n_1 < \infty$, то уравнение (4.22) имеет решение в точках

$$\omega'_1 = s_1 + j \frac{2\pi}{T} n_1. \quad (4.23)$$

Ввиду того, что $\operatorname{Re}[\omega'_1] = \operatorname{Re}[s_1] = \sigma_1$ и $\sigma_1 > a_1 + d_1$ (в соответствии с доказанной теоремой), а также $d_1 > 0$ (так как абсцисса сходимости $\delta_T(t_1)$ равна нулю), точки, определяемые формулой (4.23), лежат справа от линии $a_1 + j\infty, a_1 - j\infty$.

Таким образом, точки, в которых находятся полюсы подынтегральной функции, определены. Для того чтобы вычислить внутренний интеграл (4.21) с помощью теории вычетов, дополним справа линию интегрирования $a_1 - j\infty, a_1 + j\infty$ дугой окружности бесконечного радиуса, которая охватывает бесконечное число особых точек (полюсов), определяемых выражением (4.23). Если подынтегральная функция удовлетворяет условию леммы Жордана [33], то, как известно, интеграл по дуге окружности бесконечного радиуса равен в пределе нулю. Подынтегральная функция внутреннего интеграла (4.21) удовлетворяет указанной лемме, если у дробной рациональной (по ω_1) функции $F(\omega, \omega_1)$ разность порядков знаменателя и числителя не меньше единицы (если же эта разность не меньше двух, то изображению $F(\omega, \omega_1)$, в котором ω_1 является независимой комплексной переменной, а ω — комплексным параметром, отвечает оригинал (зависящий от ω), равный нулю при $t_1 = 0$).

В соответствии с рис. 2.2 обход контура интегрирования осуществляется в отрицательном направлении. Поэтому

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi j} \int_{a_1 + j\infty}^{a_1 - j\infty} \frac{F(\omega, \omega_1)}{1 - e^{-(s_1 - \omega_1)T}} d\omega_1 = \\ & = - \sum_{n_1 = -\infty}^{\infty} \operatorname{Res} \left[\frac{F(\omega, \omega_1)}{1 - e^{-(s_1 - \omega_1)T}}; \omega_1 = \omega'_1 = s_1 + j \frac{2\pi}{T} n_1 \right] = \\ & = \frac{1}{T} \sum_{n_1 = -\infty}^{\infty} F\left(\omega, s_1 + j \frac{2\pi}{T} n_1\right). \quad (4.24) \end{aligned}$$

Таким образом, из (4.21) получаем

$$F^*(s, s_1) = \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} \frac{1}{T} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \frac{F\left(\omega, s_1 + j \frac{2\pi}{T} n_1\right)}{1 - e^{-(s-\omega)T}} d\omega. \quad (4.25)$$

При фиксированном значении n_1 интеграл (4.25) определяется точно так же, как и (4.24). В результате окончательно находим

$$F^*(s, s_1) = \frac{1}{T^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} F(s + j\omega_0 n, s_1 + j\omega_0 n_1), \quad (4.26)$$

где $\omega_0 = 2\pi/T$. Двойной ряд (4.26) и определяет искомую связь между двумерными изображениями дискретной и соответствующей ей непрерывной функций. Как видно из выражения (4.26), оно подобно зависимости, устанавливающей указанную связь для одномерных изображений [31, 62].

Выше (при доказательстве теоремы об изображении произведения оригиналов) предполагалось, что непрерывная функция двух переменных $f(t, t_1)$, подвергаясь процессу импульсной модуляции, не имеет скачков — разрывов первого рода [19]. Если функция $f(t, t_1)$ имеет указанные разрывы, то формула обратного двумерного преобразования Лапласа, использованная выше для доказательства теоремы, дает значения этой функции на линии разрыва, которые однозначно связаны с ее предельными значениями [19, 47]. Последние, естественно, могут не отвечать значениям скачков, принятым для оригинала (на результат прямого двумерного преобразования Лапласа это отличие не сказывается).

Таким образом, при установлении соответствия между двумерными изображениями дискретной и соответствующей ей непрерывной функции возникают те же осложнения, что и в одномерном случае, когда для непрерывной функции $f(t)$, имеющей разрыв первого рода при $t = 0$, удобно для определения ее z -изображения принять $f(0) = f(+0)$; при использовании же обратного преобразования Лапласа для такой функции в

точке $t = 0$ получается среднее арифметическое ее значений слева и справа от $t = 0$, т. е. $\frac{1}{2}[f(-0) + f(+0)] = \frac{1}{2}f(+0)$. Поэтому в формуле, аналогичной (4.26) для одномерного случая, для желаемого соответствия добавляют справа $\frac{1}{2}f(+0)$. Так, например, для единичной функции при определении ее z -изображения удобно принять $1(0) = 1(+0) = 1$, в то же время, как известно, значение единичной функции при $t = 0$ в результате обратного преобразования Лапласа равно $\frac{1}{2}$. Таким образом, в случае, когда функция $f(t, t_1)$ имеет скачки, соотношение (4.26) должно быть дополнено в указанном выше смысле с учетом желаемого соответствия.

Теперь остается установить связь между двумерными изображениями смещенной дискретной и соответствующей ей непрерывной функций. Воспользовавшись вместо выражения (4.11) зависимостью (4.13), определяющей последовательность смещенных двумерных импульсов, и проделав те же выкладки, что и при выводе формулы (4.26), находим

$$F^*(s, \gamma; s_1, \gamma_1) = \frac{1}{T^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} F(s + j\omega_0 n, s_1 + j\omega_0 n_1) e^{2\pi j(n\gamma + n_1\gamma_1)}. \quad (4.27)$$

Учитывая формулу (4.15), получаем

$$F^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1) = \frac{1}{T^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} F(s + j\omega_0 n, s_1 + j\omega_0 n_1) e^{(sT + 2\pi jn)\gamma + (s_1 T + 2\pi jn_1)\gamma_1}. \quad (4.28)$$

Это соотношение также аналогично соответствующей зависимости для одномерного случая [62]. Если $\gamma = \gamma_1 = 0$ и функция $f(t, t_1)$ не имеет скачков, то выражение (4.28) переходит в (4.26).

Так же как и в одномерном случае, можно по изображению $F^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1)$ смещенной решетчатой функции $f[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma_1)T]$ найти изображение $F(s, s_1)$ соответствующей ей непрерывной функции $f(t, t_1)$. Для этого следующим образом преобразуем формулу (4.6),

определяющую изображение $F(s, s_1)$ функции $f(t, t_1)$

$$F(s, s_1) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(t, t_1) e^{-st-s_1t_1} dt dt_1 = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} \sum_{n_1=0}^{\infty} \int_{n_1T}^{(n_1+1)T} f(t, t_1) e^{-st-s_1t_1} dt dt_1.$$

Выполним в правой части последнего равенства замену переменных t и t_1 с помощью соотношений

$$t = (n + \gamma) T, \quad t_1 = (n_1 + \gamma_1) T,$$

а также изменим порядок суммирования и интегрирования. В результате, учитывая выражение (4.14), находим

$$F(s, s_1) = T^2 \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} f[(n + \gamma) T, (n_1 + \gamma_1) T] \times \\ \times e^{-s(n+\gamma)T - s_1(n_1+\gamma_1)T} d\gamma d\gamma_1 = T^2 \int_0^1 \int_0^1 F^*(s, \gamma; s_1, \gamma_1) d\gamma d\gamma_1.$$

Следовательно,

$$F(s, s_1) = \left[T^2 \int_0^1 \int_0^1 F^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1) z^{-\gamma} z_1^{-\gamma_1} d\gamma d\gamma_1 \right] \Bigg|_{\substack{z=e^{sT} \\ z_1=e^{s_1T}}}. \quad (4.29)$$

Из соотношений (4.26), (4.28) и (4.29) видно, что они являются двумерными аналогами прямого и обратного одномерных \mathcal{D} - и \mathcal{D}^{-1} -преобразований [62]. Так же как и последние, они устанавливают прямую и обратную зависимости между двумерными изображениями дискретной и соответствующей ей непрерывной функций двух переменных.

3. Связь между двумерным z -преобразованием и двойным рядом Фурье. Рассмотрим периодическую функцию двух переменных $\varphi(t, t_1)$ с одинаковым периодом T по каждой из переменных t и t_1 . Тогда двойной ряд Фурье в комплексной форме для функции $\varphi(t, t_1)$

может быть записан в виде [51]

$$\varphi(t, t_1) = \frac{1}{T^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} C_{n, n_1} e^{j\omega_0(nt+n_1t_1)}, \quad (4.30)$$

где $\omega_0 = 2\pi/T$, а коэффициенты ряда C_{n, n_1} определяются формулой

$$C_{n, n_1} = \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} \varphi(t, t_1) e^{-j\omega_0(nt+n_1t_1)} dt dt_1 \quad (4.31)$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; n_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Для установления связи между двумерным z -преобразованием и двойным рядом Фурье вернемся к рассмотрению соотношения (4.10), определяющего процесс импульсной модуляции функции двух переменных. Воспользуемся формулами (4.30) и (4.31) для представления с помощью двойного ряда Фурье выражения (4.11), определяющего последовательность двумерных импульсов и являющегося, как это видно из рис. 2.1, периодической функцией двух переменных t и t_1 с одинаковым периодом T . Подставим в формулу (4.31) вместо функции $\varphi(t, t_1)$ выражение (4.11) для $\delta_T(t, t_1)$. В соответствии с соотношением (4.8) получаем, что коэффициенты C_{n, n_1} двойного ряда Фурье равны единице для всех указанных значений переменных n и n_1 . Следовательно, из (4.30) имеем

$$\delta_T(t, t_1) = \frac{1}{T^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0(nt+n_1t_1)}. \quad (4.32)$$

Подставим выражение (4.32) в правую часть формулы (4.10). В результате находим

$$f^*(t, t_1) = \frac{1}{T^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} f(t, t_1) e^{j\omega_0(nt+n_1t_1)}. \quad (4.33)$$

Найдем двумерное преобразование Лапласа левой и правой частей равенства (4.33). Учитывая теорему сдвига для оригиналов [47] двумерного преобразования Лапласа, получаем соотношение (4.26).

Приведенный выше способ получения зависимости (4.26) еще более подчеркивает аналогию между процессом импульсной модуляции функции одной переменной с помощью последовательности одномерных импульсов и процессом импульсной функции двух переменных путем использования последовательности двумерных импульсов.

Если в выражениях, определяющих двумерное преобразование Лапласа, положить $s = j\omega$ и $s_1 = j\omega_1$, то получаем формулы для двумерного преобразования Фурье [56], конечно, если преобразуемые функции удовлетворяют необходимым условиям сходимости. В результате можно установить соответствия между двумерными спектрами непрерывных функций двух переменных и спектрами соответствующих им дискретных функций, подобно тому, как это сделано в работе [31]. Многомерные спектральные плотности находят применение, например, при рассмотрении процесса волнения моря как случайной функции нескольких переменных (времени и координат) [63].

4. Обратное двумерное z -преобразование. Найдем формулу обращения двумерного z -преобразования. Наиболее просто это сделать, если воспользоваться формулой обращения двумерного преобразования Лапласа (4.18) и выполнить замену переменных t и t_1 с помощью равенств $t = nT$ и $t_1 = n_1T$. В результате получаем

$$f[nT, n_1T] = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} \int_{a_1-j\infty}^{a_1+j\infty} F(\omega, \omega_1) e^{j\omega nT + j\omega_1 n_1T} d\omega d\omega_1. \quad (4.34)$$

В этом выражении интегрирование по каждой из переменных производится вдоль линий, параллельных мнимым осям $j\omega$ и $j\omega_1$ и расположенных справа от этих осей соответственно на расстояниях a и a_1 (если $a > 0$ и $a_1 > 0$). Путь интегрирования можно разделить на отрезки равной длины. Обычно [52] величины этих отрезков принимают равными $j\omega_0$, где ω_0 — частота квантования по времени. Границы этих отрезков определяются величинами $\pm \frac{j\omega_0}{2}(2n+1)$ ($n=0, 1, 2, \dots$). В соответствии со сказанным выражение (4.34) можно

представить следующим образом:

$$f[nT, n_1T] = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{a+j(n+1/2)\omega_0}^{a+j(n-1/2)\omega_0} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \int_{a_1+j(n_1+1/2)\omega_0}^{a_1+j(n_1-1/2)\omega_0} \times \\ \times F(\omega, \omega_1) e^{\omega T n + \omega_1 T n_1} d\omega d\omega_1.$$

Изменив порядок суммирования и интегрирования в последнем равенстве, а также выполнив замену переменных ω и ω_1 с помощью соотношений

$$\omega = s + j\omega_0 n, \quad \omega_1 = s_1 + j\omega_0 n_1,$$

после преобразования находим

$$f[nT, n_1T] = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{a-j\frac{\omega_0}{2}}^{a+j\frac{\omega_0}{2}} \int_{a_1-j\frac{\omega_0}{2}}^{a_1+j\frac{\omega_0}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \times \\ \times F(s + j\omega_0 n, s_1 + j\omega_0 n_1) e^{sT n + s_1 T n_1} ds ds_1. \quad (4.35)$$

На основании формулы (4.26) получаем

$$f[nT, n_1T] = \\ = -\frac{T^2}{4\pi^2} \int_{a-j\frac{\omega_0}{2}}^{a+j\frac{\omega_0}{2}} \int_{a_1-j\frac{\omega_0}{2}}^{a_1+j\frac{\omega_0}{2}} F^*(s, s_1) e^{sT n + s_1 T n_1} ds ds_1.$$

Выполнив замену переменных s и s_1 с помощью соотношений $e^{sT} = z$ и $e^{s_1 T} = z_1$ ($T ds = z^{-1} dz$ и $T ds_1 = z_1^{-1} dz_1$), окончательно находим

$$f[nT, n_1T] = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma_1} F^*(z, z_1) z^{n-1} z_1^{n_1-1} dz dz_1, \quad (4.36)$$

где Γ — контур интегрирования в плоскости z с радиусом e^{aT} , Γ_1 — контур интегрирования в плоскости z_1 с радиусом $e^{a_1 T}$. Формула обращения двумерного z -преобразования с запаздыванием выводится аналогично путем подстановки в выражение (4.18) $t = (n + \gamma)T$ и $t_1 = (n_1 + \gamma_1)T$. В результате преобразований вместо

выражения (4.35) получаем

$$f[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma_1)T] = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{a-j\frac{\omega_0}{2}}^{a+j\frac{\omega_0}{2}} \int_{a_1-j\frac{\omega_0}{2}}^{a_1+j\frac{\omega_0}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \times \\ \times F(s + j\omega_0 n, s_1 + j\omega_0 n_1) e^{2\pi j(n\gamma + n_1\gamma_1)} e^{sT(n+\gamma) + s_1 T(n_1 + \gamma_1)} ds ds_1.$$

Отсюда, на основании формулы (4.27), находим

$$f[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma_1)T] = -\frac{T^2}{4\pi^2} \int_{a-j\frac{\omega_0}{2}}^{a+j\frac{\omega_0}{2}} \int_{a_1-j\frac{\omega_0}{2}}^{a_1+j\frac{\omega_0}{2}} \times \\ \times F^*(s, \gamma; s_1, \gamma_1) e^{sT\gamma + s_1 T\gamma_1} e^{sTn + s_1 Tn_1} ds ds_1.$$

С учетом формулы (4.15) и замены переменных s и s_1 окончательно получаем

$$f[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma_1)T] = \\ = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma_1} F^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1) z^{n-1} z_1^{n_1-1} dz dz_1. \quad (4.37)$$

Обратное двумерное z -преобразование, определяемое формулами (4.36) и (4.37), проще всего выполнить, сведя входящие в эти выражения двойные интегралы к повторным. Так, например, из (4.36) следует

$$f[nT, n_1T] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} F^*(z, z_1) z_1^{n_1-1} dz_1 \right\} z^{n-1} dz.$$

Внутренний интеграл этого выражения представляет собой формулу обращения одномерного z -преобразования, причем изображение $F^*(z, z_1)$ следует считать зависящим от комплексной переменной z_1 и комплексного параметра z . В результате вычисления внутреннего интеграла определяем «оригинал», зависящий от действительной переменной n_1 и комплексного параметра z . Обозначим этот «оригинал» через $F_{n_1}^*(z, n_1)$. Далее, также с помощью формулы обращения одномерного z -преобразования находим оригинал, соответствующий «изображению» $F_{n_1}^*(z, n_1)$, т. е. находим $f[nT, n_1T]$.

Из этих рассуждений ясно, что контур Γ_1 , имеющий радиус $e^{a_1 T}$, содержит внутри все полюсы функции $F^*(z, z_1)$ относительно переменной z_1 (z — здесь параметр). Контур Γ , имеющий радиус e^{aT} , содержит внутри все полюсы функции $F_{n_1}^*(z, n_1)$ относительно переменной z (n_1 — здесь действительный параметр). Таким образом, выражения (4.36) и (4.37) представляют собой обратные функциональные преобразования, устанавливающие соответствия между двумерными изображениями и их оригиналами (дискретными функциями двух переменных). Для краткости будем пользоваться следующей записью:

$$f [nT, n_1T] = \mathcal{L}_2^{-1} \{F^*(z, z_1)\},$$

$$f [(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma_1)T] = \mathcal{L}_{2\gamma}^{-1} \{F^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1)\},$$

где \mathcal{L}_2^{-1} и $\mathcal{L}_{2\gamma}^{-1}$ — соответственно операторы обратного двумерного z -преобразования.

Основные соотношения двумерного z -преобразования, рассмотренные в этом параграфе, записаны для дискретных функций, представленных в реальном, а не в относительном (безразмерном) времени. Такая запись, так же как и в случае одномерного z -преобразования, упрощает их использование в практических расчетах.

§ 5. Основные правила и теоремы двумерного z -преобразования

Так же, как и в случае одномерного z -преобразования и одномерного дискретного преобразования Лапласа [31, 62], большое значение имеют правила и теоремы двумерного z -преобразования, устанавливающие соответствие между операциями, выполняемыми в областях оригиналов и их изображений. Часто они позволяют отыскивать изображения новых функций, не прибегая к использованию основных соотношений (4.1) и (4.2), требующих выполнения двойного суммирования. Некоторые из этих теорем по своим формулировкам близки к соответствующим теоремам двумерного преобразования Лапласа [19, 47] и одномерного z -преобразования (одномерного дискретного преобразования Лапласа) [31, 62].

1. Линейность прямого и обратного двумерного z -преобразования.

Теорема. Если a_i и b_i — постоянные величины, то

$$\mathcal{L}_{2\gamma} \left\{ \sum_{i=1}^m a_i f_i(t, t_1) \right\} = \sum_{i=1}^m a_i \mathcal{L}_{2\gamma} \{f_i(t, t_1)\}, \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2\gamma}^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^m b_i F_i^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1) \right\} &= \\ &= \sum_{i=1}^m b_i \mathcal{L}_{2\gamma}^{-1} \{F_i^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1)\}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Доказательства соотношений (5.1) и (5.2) следуют непосредственно из основных выражений, определяющих прямое и обратное преобразования (4.2) и (4.37).

2. Правило смещения независимых переменных в области оригиналов.

Теорема. Если

$$\mathcal{L}_{2\gamma} \{f(t, t_1)\} = F^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1),$$

то

$$а) \quad \mathcal{L}_{2\gamma} \{f(t + kT, t_1 + k_1T)\} = z^k z_1^{k_1} F^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1), \quad (5.3)$$

когда

$$f[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma_1)T] = 0 \quad \text{при } n < k \text{ и } n_1 < k_1;$$

$$б) \quad \mathcal{L}_{2\gamma} \{f(t - kT, t_1 - k_1T)\} = z^{-k} z_1^{-k_1} F^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1), \quad (5.4)$$

когда

$$f[(n - k + \gamma)T, (n_1 - k_1 + \gamma_1)T] = 0 \quad \text{при } n < k \text{ и } n_1 < k_1.$$

Рассмотрим случай а). По определению имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2\gamma} \{f(t + kT, t_1 + k_1T)\} &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} f[(n + k + \gamma)T, (n_1 + k_1 + \gamma_1)T] z^{-n} z_1^{-n_1}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Выполним замену переменных n и n_1 , пользуясь равенствами $n + k = i$ и $n_1 + k_1 = i_1$. Находим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2\gamma} \{f(t + kT, t_1 + k_1T)\} &= \\ &= \sum_{i=k}^{\infty} \sum_{i_1=k_1}^{\infty} f[(i + \gamma)T, (i_1 + \gamma_1)T] z^{-(i-k)} z_1^{-(i_1-k_1)} = \\ &= \sum_{i=\gamma}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} f[\dots] z^{-(i-k)} z_1^{-(i_1-k_1)} - \\ &\quad - \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{i_1=0}^{k_1-1} f[\dots] z^{-(i-k)} z_1^{-(i_1-k_1)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует равенство (5.3) при выполнении условия, указанного в а).

Рассмотрим случай б). Заменяя в равенстве (5.5) перед k и k_1 знаки плюс на минус, а также положив $n - k = i$ и $n_1 - k_1 = i_1$, находим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2\gamma} \{f(t - kT, t_1 - k_1T)\} &= \\ &= \sum_{i=-k}^{\infty} \sum_{i_1=-k_1}^{\infty} f[(i + \gamma)T, (i_1 + \gamma_1)T] z^{-(i+k)} z_1^{-(i_1+k_1)} = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} f[\dots] z^{-(i+k)} z_1^{-(i_1+k_1)} + \\ &\quad + \sum_{i=-k}^{-1} \sum_{i_1=-k_1}^{-1} f[\dots] z^{-(i+k)} z_1^{-(i_1+k_1)}. \end{aligned}$$

Выполнив в последней двойной сумме замену переменных с помощью соотношений $i = -m$ и $i_1 = -m_1$, убеждаемся, что равенство (5.4) справедливо, если выполняется условие, указанное в б).

3. Правило смещения независимых переменных в области изображений.

Теорема. Если

$$\mathcal{L}_{2\gamma} \{F(s, s_1)\} = F^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1),$$

то

$$\mathcal{L}_{2\gamma} \{F(s \pm \lambda, s_1 \pm \lambda_1)\} = e^{\mp(\lambda\gamma + \lambda_1\gamma_1)} T F^*(ze^{\pm\lambda T}, \gamma; z_1 e^{\pm\lambda_1 T}, \gamma_1). \quad (5.6)$$

Для двумерного преобразования Лапласа [47]

$$F(s \pm \lambda, s_1 \pm \lambda_1) = \mathcal{L}_2 \{e^{\mp \lambda t \mp \lambda_1 t_1} f(t, t_1)\}.$$

Таким образом, при $t = (n + \gamma)T$ и $t_1 = (n_1 + \gamma_1)T$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2\gamma} \{F(s \pm \lambda, s_1 \pm \lambda_1)\} &= \mathcal{L}_{2\gamma} \{e^{\mp \lambda t \mp \lambda_1 t_1} f(t, t_1)\} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} e^{\mp \lambda (n+\gamma)T \mp \lambda_1 (n_1+\gamma_1)T} f[(n+\gamma)T, (n_1+\gamma_1)T] z^{-n} z_1^{-n_1} = \\ &= e^{\mp (\lambda\gamma + \lambda_1\gamma_1)T} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} f[(n+\gamma)T, (n_1+\gamma_1)T] \times \\ &\quad \times (ze^{\pm \lambda T})^{-n} (z_1 e^{\pm \lambda_1 T})^{-n_1}, \end{aligned}$$

откуда следует (5.6).

4. Изображение разностей дискретных значений функции двух переменных. Обозначим

$$\Delta_n f[nT, n_1T] = f[(n+1)T, n_1T] - f[nT, n_1T]; \quad (5.7)$$

$$\Delta_{n_1} f[nT, n_1T] = f[nT, (n_1+1)T] - f[nT, n_1T]; \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{nn_1} f[nT, n_1T] &= \Delta_{n_1} \Delta_n f[nT, n_1T] = f[(n+1)T, (n_1+1)T] - \\ &- f[nT, (n_1+1)T] - f[(n+1)T, n_1T] + f[nT, n_1T]. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Теорема. Если

$$f[0, n_1T] = f[nT, 0] = f[0, 0] = 0,$$

то

$$\mathcal{L}_2 \{\Delta_n f[nT, n_1T]\} = (z-1) F^*(z, z_1), \quad (5.10)$$

$$\mathcal{L}_2 \{\Delta_{n_1} f[nT, n_1T]\} = (z_1-1) F^*(z, z_1), \quad (5.11)$$

$$\mathcal{L}_2 \{\Delta_{nn_1} f[nT, n_1T]\} = (z-1)(z_1-1) F^*(z, z_1), \quad (5.12)$$

где

$$F^*(z, z_1) = \mathcal{L}_2 \{f[nT, n_1T]\}.$$

Соотношения (5.10)–(5.12) доказываются путем определения изображений правых частей равенств (5.7) ÷ (5.9) с учетом правила смещения независимых переменных в области оригиналов п. 2. При этом значения параметров смещения k и k_1 принимаются соответственно равными: $k=1, k_1=0$; $k=0, k_1=1$; $k=k_1=1$.

5. Правила изменения порядка суммирования в многомерных суммах. Далее, как при доказательстве некоторых теорем двумерного z -преобразования, так и в ряде других случаев, потребуется менять порядок суммирования сумм, в которых оно осуществляется по двум

и четырем индексам. При этом будут полезны следующие соотношения:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i f[i, j] = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=j}^{\infty} f[i, j], \quad (5.13)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \sum_{j_1=0}^{i_1} f[i, i_1, j, j_1] = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{i=j}^{\infty} \sum_{i_1=j_1}^{\infty} f[i, i_1, j, j_1]. \quad (5.14)$$

Докажем вначале соотношение (5.13). Область изменения переменных i и j , в которой осуществляется суммирование в левой части (5.13), определяется неравенствами

$$0 \leq i \leq \infty \text{ (а)}, \quad 0 \leq j \leq i \text{ (б)},$$

а в правой — неравенствами

$$0 \leq j \leq \infty \text{ (в)}, \quad j \leq i \leq \infty \text{ (г)}.$$

Докажем, что неравенства (в), (г) и (а), (б) эквивалентны, т. е. определяют одну и ту же область изменения переменных i и j . Из неравенства (г) следует $j \leq i$, а из (в) — $0 \leq j$. Отсюда имеем неравенство (б). Так как из этого неравенства следует, что $0 \leq i$, а из (г), что $i \leq \infty$, то получаем (а). Таким образом, в соотношении (5.13) суммирование как слева, так и справа осуществляется по одним и тем же точкам (i, j) . Справедливость соотношения (5.13) нетрудно также усмотреть непосредственно из рис. 2.3. Дей-

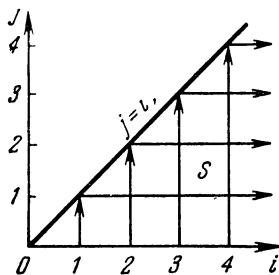


Рис. 2.3.

ствительно, в левой части равенства суммирование осуществляется по точкам области S в вертикальном направлении, а в правой его части по тем же точкам в горизонтальном направлении.

Для доказательства соотношения (5.14) также сравним области изменения переменных i, i_1, j и j_1 , по которым осуществляется суммирование в левой и правой частях:

левая часть

$$\begin{aligned} 0 \leq i \leq \infty \quad (\text{а}), \quad 0 \leq i_1 \leq \infty \quad (\text{д}), \\ 0 \leq j \leq i \quad (\text{б}), \quad 0 \leq j_1 \leq i_1 \quad (\text{е}) \end{aligned}$$

правая часть

$$\begin{aligned} 0 \leq j \leq \infty \quad (\text{в}), \quad 0 \leq j_1 \leq \infty \quad (\text{ж}), \\ j \leq i \leq \infty \quad (\text{г}), \quad j_1 \leq i_1 \leq \infty \quad (\text{з}). \end{aligned}$$

Эквивалентность неравенств (в), (г) и (а), (б) была доказана выше. Ясно, что неравенства (ж), (з) и (д), (е) также эквивалентны.

6. Изображение сумм дискретных значений функций двух переменных.

Теорема.

$$\mathcal{L}_2 \left\{ \sum_{m=0}^{n-1} f[mT, n_1T] \right\} = \frac{1}{z-1} F^*(z, z_1), \quad (5.15)$$

$$\mathcal{L}_2 \left\{ \sum_{m_1=0}^{n_1-1} f[nT, m_1T] \right\} = \frac{1}{z_1-1} F^*(z, z_1), \quad (5.16)$$

$$\mathcal{L}_2 \left\{ \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{m_1=0}^{n_1-1} f[mT, m_1T] \right\} = \frac{1}{(z-1)(z_1-1)} F^*(z, z_1), \quad (5.17)$$

где

$$F^*(z, z_1) = \mathcal{L}_2 \{ f[nT, n_1T] \}.$$

Для доказательства соотношения (5.15) найдем изображение суммы (в фигурных скобках) с помощью основного соотношения (4.1), причем суммирование по n и n_1 выполним в обратном порядке (см. § 4, п. 1)

$$\mathcal{L}_2 \left\{ \sum_{m=0}^{n-1} f[mT, n_1T] \right\} = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} f[mT, n_1T] z^{-n} z_1^{-n_1}.$$

Изменим порядок суммирования по переменным n и m на обратный, используя при этом соотношение (5.13), а также выполним замену переменной n с помощью

равенства $n = i + m + 1$. В результате находим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2\{\dots\} &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m+1}^{\infty} f[mT, n_1T] z^{-n} z_1^{-n_1} = \\ &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} f[\dots] z^{-(i+m+1)} z_1^{-n_1} = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} z^{-i-1} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} f[mT, n_1T] z^{-m} z_1^{-n_1}, \end{aligned}$$

откуда следует соотношение (5.15). Соотношение (5.16) доказывается аналогично.

Для доказательства (5.17) проделаем аналогичные выкладки с двойной суммой левой части (5.17), воспользовавшись для изменения порядка суммирования соотношением (5.14) и выполнив замену переменных n и n_1 с помощью равенств $n = i + m + 1$ и $n_1 = i_1 + m_1 + 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{m_1=0}^{n_1-1} f[mT, m_1T] z^{-n} z_1^{-n_1} &= \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{n=m+1}^{\infty} \sum_{n_1=m_1+1}^{\infty} f[\dots] z^{-n} z_1^{-n_1} = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} z^{-i-1} \sum_{i_1=0}^{\infty} z_1^{-i_1-1} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} f[mT, m_1T] z^{-m} z_1^{-m_1}. \end{aligned}$$

Отсюда следует соотношение (5.17). Таким образом, операциям взятия разности (п. 4) и суммирования в области оригиналов отвечают в области изображений соответственно операции умножения и деления на $z - 1$ и $z_1 - 1$.

Из выражений (5.10) — (5.12) и (5.15) — (5.17) видно, что множители $(z - 1)$ и $(z_1 - 1)$ в двумерном z -преобразовании играют роль параметров преобразования s и s_1 в двумерном преобразовании Лапласа (ср. с [47]). Более того, если учесть, что при $T \rightarrow 0$

$$z - 1 \rightarrow sT \quad \text{и} \quad z_1 - 1 \rightarrow s_1T,$$

то можно убедиться, что указанные выражения перефо-

дят в аналогичные соотношения двумерного преобразования Лапласа, определяющие изображения частных производных и интегралов непрерывных функций двух переменных.

7. Изображение дискретной функции, соответствующей производной от непрерывной функции.

Теорема.

$$\mathcal{L}_{2\gamma} \left\{ \frac{\partial^{k+k_1} f(t, t_1)}{\partial t^k \partial t_1^{k_1}} \right\} = \frac{1}{T^{k+k_1}} \cdot \frac{\partial^{k+k_1} F^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1)}{\partial \gamma^k \partial \gamma_1^{k_1}}. \quad (5.18)$$

Для доказательства формулы (5.18) продифференцируем основное соотношение (4.2), определяющее двумерное изображение смещенной дискретной функции, k раз по γ и k_1 раз по γ_1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{k+k_1} F^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1)}{\partial \gamma^k \partial \gamma_1^{k_1}} &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{\partial^{k+k_1} f[(n+\gamma)T, (n_1+\gamma_1)T]}{\partial \gamma^k \partial \gamma_1^{k_1}} z^{-n} z_1^{-n_1}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

При $t = (n+\gamma)T$ и $t_1 = (n_1+\gamma_1)T$ и изменении указанных переменных в интервалах

$$nT \leq t \leq (n+1)T \quad \text{и} \quad n_1T \leq t_1 \leq (n_1+1)T$$

$$\frac{\partial^{k+k_1} f(t, t_1)}{\partial t^k \partial t_1^{k_1}} = \frac{1}{T^{k+k_1}} \cdot \frac{\partial^{k+k_1} f[(n+\gamma)T, (n_1+\gamma_1)T]}{\partial \gamma^k \partial \gamma_1^{k_1}}.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2\gamma} \left\{ \frac{\partial^{k+k_1} f(t, t_1)}{\partial t^k \partial t_1^{k_1}} \right\} &= \\ &= \frac{1}{T^{k+k_1}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{\partial^{k+k_1} f[(n+\gamma)T, (n_1+\gamma_1)T]}{\partial \gamma^k \partial \gamma_1^{k_1}} z^{-n} z_1^{-n_1}. \end{aligned}$$

Сравнивая последнее выражение с равенством (5.19), получаем соотношение (5.18).

8. Изображение двойного интеграла непрерывной функции двух переменных.

Теорема.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2\gamma} \left\{ \int_0^t \int_0^{t_1} f(\tau, \tau_1) d\tau d\tau_1 \right\} = \\ = \frac{T^2}{(z-1)(z_1-1)} \int_0^1 \int_0^1 F^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1) d\gamma d\gamma_1 + \\ + T^2 \int_0^\gamma \int_0^{\gamma_1} F^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1) d\gamma d\gamma_1. \quad (5.20) \end{aligned}$$

Для доказательства соотношения (5.20) положим $t = (n + \gamma)T$ и $t_1 = (n_1 + \gamma_1)T$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^{t_1} f(\tau, \tau_1) d\tau d\tau_1 = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{m_1=0}^{n_1-1} \int_{mT}^{(m+1)T} \int_{m_1T}^{(m_1+1)T} f(\tau, \tau_1) d\tau d\tau_1 + \\ + \int_{nT}^{(n+\gamma)T} \int_{n_1T}^{(n_1+\gamma_1)T} f(\tau, \tau_1) d\tau d\tau_1. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных τ и τ_1 в первом члене с помощью соотношений

$$\tau = (m + \gamma)T \quad \text{и} \quad \tau_1 = (m_1 + \gamma_1)T,$$

а во втором, используя соотношения

$$\tau = (n + \gamma)T \quad \text{и} \quad \tau_1 = (n_1 + \gamma_1)T.$$

В результате находим

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^{t_1} f(\tau, \tau_1) d\tau d\tau_1 = \\ = T^2 \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{m_1=0}^{n_1-1} \int_0^1 \int_0^1 f[(m + \gamma)T, (m_1 + \gamma_1)T] d\gamma d\gamma_1 + \\ + T^2 \int_0^\gamma \int_0^{\gamma_1} f[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma_1)T] d\gamma d\gamma_1. \quad (5.21) \end{aligned}$$

Найдем изображение первого члена правой части равенства (5.21):

$$\mathcal{L}_2\{\dots\} = T^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \left\{ \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{m_1=0}^{n_1-1} \int_0^1 \int_0^1 f[(m+\gamma)T, (m_1+\gamma_1)T] d\gamma d\gamma_1 \right\} z^{-n} z_1^{-n_1}.$$

Изменив порядок суммирования (см. (5.14)) и выполнив замену переменных n и n_1 с помощью соотношений

$$n = i + m + 1 \quad \text{и} \quad n_1 = i_1 + m_1 + 1,$$

находим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2\{\dots\} &= T^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=m+1}^{\infty} \sum_{n_1=m_1+1}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 f[(m+\gamma)T, (m_1+\gamma_1)T] d\gamma d\gamma_1 \right\} \times \\ &\times z^{-n} z_1^{-n_1} = T^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 f[(m+\gamma)T, (m_1+\gamma_1)T] d\gamma d\gamma_1 z^{-(i+m+1)} z_1^{-(i_1+m_1+1)} = T^2 (zz_1)^{-1} \times \\ &\times \sum_{i=0}^{\infty} z^{-i} \sum_{i_1=0}^{\infty} z_1^{-i_1} \int_0^1 \int_0^1 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} f[(m+\gamma)T, (m_1+\gamma_1)T] \times \\ &\times z^{-m} z_1^{-m_1} d\gamma d\gamma_1. \end{aligned}$$

Отсюда следует первый член правой части соотношения (5.20), а его второй член получается непосредственно путем определения изображения второго члена равенства (5.21) с помощью основного соотношения (4.1). Положив в (5.21) $\gamma = \gamma_1 = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 \left\{ \int_0^t \int_0^{t_1} f(\tau, \tau_1) d\tau d\tau_1 \right\} &= \\ &= \frac{T^2}{(z-1)(z_1-1)} \int_0^1 \int_0^1 F^i(z, \gamma; z_1, \gamma_1) d\gamma d\gamma_1. \quad (5.22) \end{aligned}$$

Выражение (5.22) определяет двумерное z -изображение без запаздывания кратного интеграла.

9. Изображение произведения интеграла на сумму. Теорема.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2\gamma} \left\{ \int_0^t f_1(\tau) d\tau \sum_{m_1=0}^{n_1} f_2[(m_1 + \gamma_1)T] \right\} = \\ = \frac{z_1 T}{(z-1)(z_1-1)} F_2^*(z_1, \gamma_1) \int_0^1 F_1^*(z, \gamma) d\gamma + \\ + \frac{z_1 T}{z_1-1} F_2^*(z_1, \gamma_1) \int_0^\gamma F_1^*(z, \gamma) d\gamma. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Выполнив замены переменных аналогично тому, как это было сделано в п. 8, находим

$$\begin{aligned} \int_0^t f_1(\tau) d\tau \sum_{m_1=0}^{n_1} f_2[(m_1 + \gamma_1)T] = \\ = T \sum_{m=0}^{n-1} \int_0^1 f_1[(m + \gamma)T] d\gamma \sum_{m_1=0}^{n_1} f_2[(m_1 + \gamma_1)T] + \\ + T \int_0^\gamma f_1[(n + \gamma)T] d\gamma \sum_{m_1=0}^{n_1} f_2[(m_1 + \gamma_1)T]. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Далее доказательство также аналогично изложенному в п. 8, лишь с тем отличием, что замена переменных n и n_1 выполняется с помощью соотношений $n = i + m + 1$ и $n_1 = i_1 + m_1$.

10. Дифференцирование двумерного z -изображения по z и z_1 . Теорема.

$$\mathcal{L}_2 \{ n^{(k)} n_1^{(k_1)} f[nT, n_1 T] \} = (-1)^{k+k_1} z^{-k} z_1^{-k_1} \frac{\partial^{k+k_1} F^*(z, z_1)}{\partial z^k \partial z_1^{k_1}}, \quad (5.25)$$

где

$$\begin{aligned} n^{(k)} &= n(n-1) \dots (n-k+1), & n^{(0)} &= 1; \\ n_1^{(k_1)} &= n_1(n_1-1) \dots (n_1-k_1+1), & n_1^{(0)} &= 1. \end{aligned}$$

Соотношение (5.25) доказывается путем дифференцирования выражения (4.1) k раз по z и k_1 раз по z_1 .

11. Умножение двумерных изображений.

Теорема. Если даны изображения

$$F_1^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1) = \mathcal{L}_{2\gamma} \{f_1[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma_1)T]\},$$

$$F_2^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1) = \mathcal{L}_{2\gamma} \{f_2[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma_1)T]\},$$

то произведению изображений

$$F^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1) = F_1^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1) F_2^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1) \quad (5.26)$$

соответствует оригинал, определяемый эквивалентными формулами

$$\begin{aligned} f[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma_1)T] &= \\ &= \sum_{m=0}^n \sum_{m_1=0}^{n_1} f_1[(n + \gamma - m)T, (n_1 + \gamma_1 - m_1)T] \times \\ &\quad \times f_2[(m + \gamma)T, (m_1 + \gamma_1)T], \quad (5.27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma_1)T] &= \\ &= \sum_{m=0}^n \sum_{m_1=0}^{n_1} f_1[(m + \gamma)T, (m_1 + \gamma_1)T] \times \\ &\quad \times f_2[(n + \gamma - m)T, (n_1 + \gamma_1 - m_1)T]. \quad (5.28) \end{aligned}$$

Для доказательства теоремы запишем выражение двумерного изображения правой части (5.27) и изменим порядок суммирования

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{m_1=0}^{n_1} f_1[(n + \gamma - m)T, (n_1 + \gamma_1 - m_1)T] \times \\ &\quad \times f_2[(m + \gamma)T, (m_1 + \gamma_1)T] z^{-n} z_1^{-n_1} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{n_1=m_1}^{\infty} f_1[(n + \gamma - m)T, (n_1 + \gamma_1 - m_1)T] \times \\ &\quad \times f_2[(m + \gamma)T, (m_1 + \gamma_1)T] z^{-n} z_1^{-n_1}. \end{aligned}$$

После замены переменных n и n_1 с помощью соотношений $n - m = r$ и $n_1 - m_1 = r_1$ из правой части

последнего равенства находим

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{r_1=0}^{\infty} f_1[(r+\gamma)T, (r_1+\gamma_1)T] z^{-r} z_1^{-r_1} \times \\ \times \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} f_2[(m+\gamma)T, (m_1+\gamma_1)T] z^{-m} z_1^{-m_1},$$

откуда следует выражение (5.26). Соотношение (5.28) доказывается аналогично.

12. Умножение двумерных оригиналов.

Теорема. Если $f_1[(n+\gamma)T, (n_1+\gamma_1)T]$ и $f_2[(n+\gamma)T, (n_1+\gamma_1)T]$ — оригиналы с показателями роста по переменной n соответственно c и d , а переменной n_1 — c_1 и d_1 , а $F_1^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1)$ и $F_2^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1)$ — соответствующие им изображения, то в областях, где действительные части σ и σ_1 комплексных переменных $s = \sigma + j\omega$ и $s_1 = \sigma_1 + j\omega_1$, входящих в показатели степени $z = e^{sT}$ и $z_1 = e^{s_1T}$, удовлетворяют соответственно неравенствам $\sigma > c + d$ и $\sigma_1 > c_1 + d_1$, двумерное изображение произведения указанных оригиналов может быть определено по формуле

$$\mathcal{L}_{2\gamma} \{f_1[(n+\gamma)T, (n_1+\gamma_1)T] f_2[(n+\gamma)T, (n_1+\gamma_1)T]\} = \\ = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_a} \oint_{\Gamma_{a_1}} F_1^*(\omega, \gamma; \omega_1, \gamma_1) F_2^*(z\omega^{-1}, \gamma; z_1\omega_1^{-1}, \gamma_1) \times \\ \times \omega^{-1} \omega_1^{-1} d\omega d\omega_1, \quad (5.29)$$

где Γ_a — контур интегрирования в плоскости z с радиусом e^{aT} , $a > c$, Γ_{a_1} — контур интегрирования в плоскости z_1 с радиусом e^{a_1T} , $a_1 > c_1$; или по формуле

$$\mathcal{L}_{2\gamma} \{f_1[(n+\gamma)T, (n_1+\gamma_1)T] f_2[(n+\gamma)T, (n_1+\gamma_1)T]\} = \\ = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_b} \oint_{\Gamma_{b_1}} F_1^*(z\omega^{-1}, \gamma; z_1\omega_1^{-1}, \gamma_1) \times \\ \times F_2^*(\omega, \gamma; \omega_1, \gamma_1) \omega^{-1} \omega_1^{-1} d\omega d\omega_1, \quad (5.30)$$

где Γ_b — контур интегрирования в плоскости z с радиусом e^{bT} , $b > d$, Γ_{b_1} — контур интегрирования в плоскости z_1 с радиусом e^{b_1T} , $b_1 > d_1$.

Теорема доказывается аналогично теореме, доказанной в п. 2 предыдущего параграфа для двумерного изображения произведения непрерывных функций. При доказательстве нужно вместо формулы обращения двумерного преобразования Лапласа (4.18) воспользоваться формулой обращения двумерного z -преобразования (4.37) и подставить ее в левую часть (5.29). Далее нужно определить двумерное изображение с запаздыванием этого выражения с помощью формулы (4.2).

13. Сумма ординат дискретной функции двух переменных.

Теорема. Если показатели роста c и c_1 (см. (4.5)) функции $f[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma_1)T]$ отрицательны, то

$$\begin{aligned} F^*(1, \gamma; 1, \gamma_1) &= \lim_{z \rightarrow 1} [\lim_{z_1 \rightarrow 1} F^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1)] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} f[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma_1)T]. \end{aligned} \quad (5.31)$$

При указанных в теореме условиях формула (5.31) следует непосредственно из основного соотношения (4.2). Геометрически формула (5.31) определяет объем, получающийся при аппроксимации огибающей непрерывной функции двух переменных квадратами (размером $T \times T$), параллельными плоскости изменения переменных t, t_1 . Указанная формула может быть использована для суммирования двойных рядов. При $\gamma = \gamma_1 = 0$ из (5.31) получаем формулу для суммы ординат несмещенной функции.

14. Сумма квадратов ординат дискретной функции двух переменных.

Теорема. При условиях, указанных в теореме п. 13,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} f^2[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma_1)T] &= \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma} F^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1) F^*(z^{-1}, \gamma; z_1^{-1}, \gamma_1) z^{-1} z_1^{-1} dz dz_1, \end{aligned} \quad (5.32)$$

где Γ — контур интегрирования с радиусом, равным единице.

Доказательство формулы (5.32) следует из выражения (5.29) п. 12 при $f_1 = f_2 = f$ и формулы (5.31) п. 13. В полученном, таким образом выражении переменные w и w_1 нужно заменить соответственно на z и z_1 . Так как по условию теоремы показатели роста (абсциссы сходимости) отрицательны, то радиусы контуров интегрирования могут быть приняты равными единице.

15. Объем, ограниченный огибающей смещенной дискретной функции двух переменных.

Теорема. Если показатели роста c и c_1 функции $f[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma_1)T]$ отрицательные, то объем V_1 , ограниченный огибающей указанной функции (т. е. соответствующей непрерывной функцией $f(t, t_1)$), равен

$$V_1 = T^2 \int_0^1 \int_0^1 F^*(1, \gamma; 1, \gamma_1) d\gamma d\gamma_1, \quad (5.33)$$

где

$$V_1 = \int_0^\infty \int_0^\infty f(t, t_1) dt dt_1.$$

Доказательство выражения (5.33) следует из рассмотрения правой части формулы (4.29) (при $z = z_1 = 1$) и левой ее части, определяемой соотношением (4.6) при $s = s_1 = 0$.

16. Объем, ограниченный квадратом огибающей смещенной дискретной функции двух переменных.

Теорема. При условиях, указанных в теореме п. 15, объем V_2 , ограниченный функцией, представляющей собой квадрат огибающей, равен

$$V_2 = -\frac{T^2}{4\pi^2} \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma} \int_0^1 \int_0^1 F^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1) \times \\ \times F^*(z^{-1}, \gamma; z_1^{-1}, \gamma_1) z^{-1} z_1^{-1} d\gamma d\gamma_1 dz dz_1, \quad (5.34)$$

где

$$V_2 = \int_0^\infty \int_0^\infty f^2(t, t_1) dt dt_1.$$

Формула (5.34) доказывается следующим образом. Положим в выражении (5.29) $f_1 = f_2 = f$. В результате

получим изображение квадрата огибающей, т. е. функции f^2 . Подставим правую часть (5.29) (где $F_1^* = F_2^* = F^*$) в выражение (4.29) вместо подынтегральной функции $F^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1)$. В соответствии с условием теоремы положим в правой части полученного выражения $z = z_1 = 1$. В полученном таким образом выражении заменим переменные ω и ω_1 соответственно на z и z_1 . Находим правую часть (5.34). Левая часть выражения (4.29) определяется зависимостью (4.6), где подынтегральная функция равна $f^2(t, t_1)$. В соответствии с условием теоремы при $s = s_1 = 0$ это выражение равно V_2 , т. е. левой части (5.34).

17. Соотношение между двумерными изображениями дискретной функции двух переменных и ее предельными одномерными изображениями. При исследовании работы дискретных автоматических систем в переходном режиме качество процессов управления в них оценивается с помощью дискретных функций двух переменных n и n_1 . В установленном режиме качество процессов управления оценивается с помощью дискретных функций, зависящих от разности этих переменных, т. е. $n - n_1 = \nu$. Для перехода от анализа неустановившихся режимов

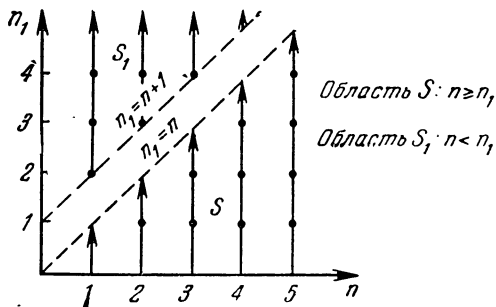


Рис. 2.4.

работы к анализу установившихся режимов удобно ввести величину $N = \min(n, n_1)$, аналогично тому, как это сделано в работе [47] для непрерывных систем. Величина N определяет предварительное время работы системы, которое не больше времени, прошедшего с момента ее включения в работу. Полагая $N \rightarrow \infty$, а разность

$n - n_1 = \nu$ оставляя конечной, можно осуществить указанный переход. Для этого удобно установить соотношение, связывающее двумерные изображения дискретной функции двух переменных с ее предельными одномерными изображениями, предварительно осуществив переход от переменных n и n_1 к $N = \min(n, n_1)$ и $\nu = n - n_1$.

Рассмотрим изображение смещенной дискретной функции двух переменных. Обозначим изображение этой функции через $\Phi^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1)$ и представим его в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Phi^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} f[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma_1)T] z^{-n} z_1^{-n_1} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^n f[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma_1)T] z^{-n} z_1^{-n_1} + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=n+1}^{\infty} f[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma_1)T] z^{-n} z_1^{-n_1}. \quad (5.35) \end{aligned}$$

В первой двойной сумме равенства (5.35) суммирование осуществляется по области S , где $n \geq n_1$, а во второй по области S_1 , где $n < n_1$ (см. рис. 2.4, где вертикальные линии соединяют между собой точки, в которых осуществляется суммирование по n_1 в этих областях). Изменим порядок в первой двойной сумме выражения (5.35)

$$\begin{aligned} \Phi^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1) &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n=n_1}^{\infty} f[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma_1)T] z^{-n} z_1^{-n_1} + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=n+1}^{\infty} f[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma_1)T] z^{-n} z_1^{-n_1}. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных в последнем выражении. В первой двойной сумме (где $n \geq n_1$) перейдем от переменных n и n_1 к $\nu = n - n_1$ и $N = \min(n, n_1)$. Эта замена дает $n = N + \nu$ и $n_1 = N$. Во второй двойной сумме (где $n < n_1$) замену переменных выполним с помощью соотношений $\nu_1 = -\nu = n_1 - n$ и $N = \min(n, n_1)$; отсюда получаем $n_1 = N + \nu_1$ и $n = N$. Выполнив за-

мену переменных указанным образом и изменив соответственно пределы суммирования, а также добавив к членам последней суммы с противоположными знаками выражение $f[(N + \gamma)T, (N + \gamma_1)T]$, после преобразований находим

$$\Phi^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1) = \sum_{N=0}^{\infty} \left\{ \sum_{v=0}^{\infty} f[(N + v + \gamma)T, (N + \gamma_1)T] z^{-v} + \sum_{v_1=0}^{\infty} f[(N + \gamma)T, (N + v_1 + \gamma_1)T] z_1^{-v_1} - f[(N + \gamma)T, (N + \gamma_1)T] \right\} (zz_1)^{-N}. \quad (5.36)$$

Внутренние суммы правой части равенства (5.36) определяют одномерные z -изображения функций, стоящих под знаками этих сумм. Аргументом преобразования первой суммы является v , а второй $v_1 = -v$. Обозначив

$$\left. \begin{aligned} \sum_{v=0}^{\infty} f[(N + v + \gamma)T, (N + \gamma_1)T] z^{-v} &= \\ &= F_1^*[z, (N + \gamma)T, (N + \gamma_1)T], \\ \sum_{v_1=0}^{\infty} f[(N + \gamma)T, (N + v_1 + \gamma_1)T] z_1^{-v_1} &= \\ &= F_2^*[z_1, (N + \gamma)T, (N + \gamma_1)T], \end{aligned} \right\} \quad (5.37)$$

из соотношения (5.36) находим

$$\Phi^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1) = \sum_{N=0}^{\infty} \{ F_1^*[z, (N + \gamma)T, (N + \gamma_1)T] + F_2^*[z_1, (N + \gamma)T, (N + \gamma_1)T] - f[(N + \gamma)T, (N + \gamma_1)T] \} (zz_1)^{-N}. \quad (5.38)$$

Последнее выражение представляет собой одномерное z -преобразование оригинала, заключенного в фигурные скобки, относительно аргумента N по переменной zz_1 . Изображение этого оригинала есть $\Phi^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1)$. Найдем предельное значение этого оригинала (при $N \rightarrow \infty$), выраженное через его изображение. Обозначим указанный оригинал (т. е. выражение, стоящее в (5.38) в фигурных скобках) через $\varphi[z, z_1, (N + \gamma)T, (N + \gamma_1)T]$.

Здесь N — аргумент, z, z_1 — комплексные параметры, γ, γ_1 — действительные параметры. Следуя методике вывода формулы предельного значения одномерной дискретной функции [62], находим z -изображение первой разности $\Delta\varphi[z, z_1, (N + \gamma)T, (N + \gamma_1)T]$ оригинала $\varphi[\dots]$, помня, что переменной преобразования является произведение zz_1 :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\Delta\varphi[z, z_1, (N + \gamma)T, (N + \gamma_1)T]\} &= \\ &= (zz_1 - 1)\Phi^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1) - zz_1\varphi[z, z_1, \gamma T, \gamma_1 T], \end{aligned}$$

так как в соответствии со сказанным выше изображение функции $\varphi[\dots]$ есть $\Phi^*[\dots]$. С другой стороны, по определению одномерного z -преобразования

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\Delta\varphi[z, z_1, (N + \gamma)T, (N + \gamma_1)T]\} &= \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \Delta\varphi[z, z_1, (N + \gamma)T, (N + \gamma_1)T] (zz_1)^{-N}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{N=0}^{\infty} \Delta\varphi[z, z_1, (N + \gamma)T, (N + \gamma_1)T] (zz_1)^{-N} &= \\ &= (zz_1 - 1)\Phi^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1) - zz_1\varphi[z, z_1, \gamma T, \gamma_1 T]. \end{aligned}$$

Найдем предел левой и правой частей этого выражения при $zz_1 \rightarrow 1$ (т. е. при $z_1 \rightarrow z^{-1}$), полагая, что оригинал $\varphi[\dots]$ имеет отрицательную абсциссу сходимости. Для левой части

$$\begin{aligned} \lim_{zz_1 \rightarrow 1} \left\{ \sum_{N=0}^{\infty} \Delta\varphi[\dots] (zz_1)^{-N} \right\} &= \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \Delta\varphi[z, z^{-1}, (N + \gamma)T, (N + \gamma_1)T] = \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \{\varphi[z, z^{-1}, (N + 1 + \gamma)T, (N + 1 + \gamma_1)T] - \\ &\quad - \varphi[z, z^{-1}, (N + \gamma)T, (N + \gamma_1)T]\} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \varphi[z, z^{-1}, (N + \gamma)T, (N + \gamma_1)T] - \varphi[z, z^{-1}, \gamma T, \gamma_1 T]. \end{aligned}$$

Для правой части

$$\begin{aligned} \lim_{zz_1 \rightarrow 1} \{(zz_1 - 1)\Phi^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1) - zz_1\varphi[z, z_1, \gamma T, \gamma_1 T]\} &= \\ &= \lim_{zz_1 \rightarrow 1} \{(zz_1 - 1)\Phi^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1)\} - \varphi[z, z^{-1}, \gamma T, \gamma_1 T]. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \varphi [z, z^{-1}, (N + \gamma) T, (N + \gamma_1) T] = \\ = \lim_{zz_1 \rightarrow 1} [(zz_1 - 1) \Phi^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1)]. \end{aligned}$$

Возвращаясь к обозначению оригинала $\varphi[...]$, из выражения (5.38) окончательно находим

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \{F_1^*[z, (N + \gamma) T, (N + \gamma_1) T] + \\ + F_2^*[z^{-1}, (N + \gamma) T, (N + \gamma_1) T] - f[(N + \gamma) T, (N + \gamma_1) T]\} = \\ = \lim_{zz_1 \rightarrow 1} [(zz_1 - 1) \Phi^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1)]. \quad (5.39) \end{aligned}$$

Так как абсцисса сходимости оригинала в левой части (5.39) отрицательная, то в пределе, при $N \rightarrow \infty$, члены, содержащие N , исчезают, поэтому можно ввести такие обозначения для предельных значений выражений в левой части (5.39):

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} F_1^*[z, (N + \gamma) T, (N + \gamma_1) T] &= F_1^*(z, \gamma, \gamma_1), \\ \lim_{N \rightarrow \infty} F_2^*[z_1, (N + \gamma) T, (N + \gamma_1) T] &= F_2^*(z_1, \gamma, \gamma_1), \\ \lim_{N \rightarrow \infty} f[(N + \gamma) T, (N + \gamma_1) T] &= f[\gamma T, \gamma_1 T], \end{aligned}$$

и функций, стоящих под знаком сумм в левой части выражений (5.37):

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} f[(N + \nu + \gamma) T, (N + \gamma_1) T] &= f_1[\nu T, \gamma T, \gamma_1 T], \\ \lim_{N \rightarrow \infty} f[(N + \gamma) T, (N + \nu_1 + \gamma_1) T] &= f_2[\nu_1 T, \gamma T, \gamma_1 T]. \end{aligned}$$

Отсюда на основании соотношений (5.37) можно заключить, что функции $F_1^*(z, \gamma, \gamma_1)$ и $F_2^*(z_1, \gamma, \gamma_1)$ являются одномерными изображениями оригиналов $f_1[\nu T, \gamma T, \gamma_1 T]$ и $f_2[\nu_1 T, \gamma T, \gamma_1 T]$, т. е.

$$\begin{aligned} F_1^*(z, \gamma, \gamma_1) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} f_1[\nu T, \gamma T, \gamma_1 T] z^{-\nu}, \\ F_2^*(z_1, \gamma, \gamma_1) &= \sum_{\nu_1=0}^{\infty} f_2[\nu_1 T, \gamma T, \gamma_1 T] z_1^{-\nu_1}. \end{aligned}$$

Обычно

$$f_1[\gamma T, \gamma_1 T] = f_2[\gamma T, \gamma_1 T] = f[\gamma T, \gamma_1 T].$$

С учетом последних обозначений равенство (5.39) можно записать в виде

$$\lim_{zz_1 \rightarrow 1} [(zz_1 - 1) \Phi^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1)] = F_1^*(z, \gamma, \gamma_1) + F_2^*(z^{-1}, \gamma, \gamma_1) - f[\gamma T, \gamma_1 T]. \quad (5.40)$$

Если

$$f_1[vT] = f_2[-vT] = f[vT],$$

т. е. функция четная, то

$$\lim_{zz_1 \rightarrow 1} [(zz_1 - 1) \Phi^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1)] = F^*(z, \gamma, \gamma_1) + F^*(z^{-1}, \gamma, \gamma_1) - f[\gamma T, \gamma_1 T], \quad (5.41)$$

где

$$F^*(z, \gamma, \gamma_1) = \sum_{v=0}^{\infty} f[vT, \gamma T, \gamma_1 T] z^{-v}. \quad (5.42)$$

Из выражений (5.40) и (5.41) видно, что предельные одномерные z -изображения дискретных функций двух переменных (предельные в том смысле, как они определялись в начале настоящего пункта) представляют собой двустороннее одномерное z -изображение [31, 62] соответствующей функции одного дискретного аргумента v . Для существования двустороннего изображения функции $f_1[vT]$ и $f_2[vT]$ должны иметь соответственно показатели роста c_1 и c_2 , такие, что $c_1 < c_2$. Тогда двустороннее изображение существует в кольце $e^{c_1 T} < |z| < e^{c_2 T}$.

18. Некоторые свойства двумерного z -преобразования с запаздыванием. В соответствии с основными формулами (4.2) и (4.1) имеем

$$F^*(z, 1; z_1, 1) = f[T, T] + f[2T, 2T] z^{-1} z_1^{-1} + f[3T, 3T] z^{-2} z_1^{-2} + \dots, \quad (5.43)$$

$$F^*(z, z_1) = f[0, 0] + f[T, T] z^{-1} z_1^{-1} + f[2T, 2T] z^{-2} z_1^{-2} + \dots \quad (5.44)$$

Сравнив между собой равенства (5.43) и (5.44), устанавливаем соотношение

$$F^*(z, 1; z_1, 1) = [F^*(z, z_1) - f(0, 0)] z z_1. \quad (5.45)$$

Из сравнения формул (4.1) и (4.2) непосредственно следует

$$F^*(z, 0; z_1, 0) = F^*(z, z_1). \quad (5.46)$$

В заключение рассмотрим случай, когда параметры смещения γ и γ_1 дискретной функции двух переменных $f[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma_1)T]$ меньше нуля. Так как все формулы двумерного z -преобразования относятся к случаю, когда γ и γ_1 больше нуля, то, очевидно, вместо указанной выше функции нужно рассматривать следующую дискретную функцию:

$$f[(n - 1 + 1 + \gamma)T, (n_1 - 1 + 1 + \gamma_1)T], \quad (5.47)$$

в которой параметры смещения удовлетворяют условиям

$$0 \leq 1 + \gamma < 1, \quad 0 \leq 1 + \gamma_1 < 1.$$

Найдем изображение функции (5.47). На основании правила смещения независимых переменных в области оригинала (п. 2) находим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2\gamma} \{f[(n - 1 + 1 + \gamma)T, (n_1 - 1 + 1 + \gamma_1)T]\} = \\ = z^{-1} z_1^{-1} F^*(z, 1 + \gamma; z_1, 1 + \gamma_1), \end{aligned} \quad (5.48)$$

где $\gamma < 0$, $\gamma_1 < 0$.

§ 6. Определение двумерных изображений наиболее употребимых дискретных функций двух переменных. Примеры применения прямого и обратного двумерного z -преобразования

1. Двумерные изображения дискретных функций, зависящих от разности переменных. Указанные функции играют важную роль при определении статистических характеристик выходной переменной дискретной динамической системы, подверженной стационарному случайному воздействию. В этом случае корреляционную функцию входного воздействия, даже когда оно стационарно, приходится рассматривать как функцию двух переменных, зависящую от их разности. Подробно этот вопрос рассмотрен ниже, здесь же ограничимся определением двумерных изображений таких функций, которые в дальнейшем используем для определения изображений корреляционных и взаимных корреляционных функций дискретных случайных процессов.

Найдем двумерное изображение функции $f[(n+\gamma)T - (n_1 + \gamma_1)T] = f[(n - n_1 + \delta)T]$, где $\delta = \gamma - \gamma_1$. Запишем выражение для двумерного изображения этой функции в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Phi^*(z, z_1, \delta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} f[(n - n_1 + \delta)T] z^{-n} z_1^{-n_1} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^n f[(n - n_1 + \delta)T] z^{-n} z_1^{-n_1} + \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=n+1}^{\infty} f[(n - n_1 + \delta)T] z^{-n} z_1^{-n_1}, \quad (6.1) \end{aligned}$$

где в первой двойной сумме выражения (6.1) суммирование осуществляется по области, где $n \geq n_1$, а во второй по области, где $n < n_1$ (см. рис. 2.4). Далее рассмотрим два случая, первый, когда $\delta \geq 0$, и второй, когда $\delta \leq 0$.

Положим, что $\delta \geq 0$. Изменим порядок суммирования в первой двойной сумме (6.1)

$$\begin{aligned} \Phi^*(z, z_1, \delta) &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n=n_1}^{\infty} f[\dots] z^{-n} z_1^{-n_1} + \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=n+1}^{\infty} f[\dots] z^{-n} z_1^{-n_1} \end{aligned}$$

и выполним замену переменной n в первом члене с помощью соотношения $v = n - n_1$, а во втором заменим переменную n_1 с помощью соотношения $v_1 = -v = n_1 - n$. Изменив соответственно пределы суммирования, находим

$$\begin{aligned} \Phi^*(z, z_1, \delta) &= \sum_{n_1=0}^{\infty} (zz_1)^{-n_1} \sum_{v=0}^{\infty} f[(v + \delta)T] z^{-v} + \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} (zz_1)^{-n} \sum_{v_1=1}^{\infty} f[(v_1 + \delta)T] z_1^{-v_1}. \quad (6.2) \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \Phi^*(z, z_1, \delta) &= \\ &= \frac{zz_1}{zz_1 - 1} \left\{ \sum_{v=0}^{\infty} f[(v + \delta)T] z^{-v} + \sum_{v_1=1}^{\infty} f[(-v + \delta)T] z_1^{-v} \right\}. \quad (6.3) \end{aligned}$$

В последней сумме выражения (6.2) у переменной суммирования v_1 опущен индекс, а у аргумента функции соответственно поставлен знак минус. Добавим к членам последней суммы выражения (6.3) с обратными знаками $f[\delta T]$. В результате находим

$$\Phi^*(z, z_1, \delta) = \frac{zz_1}{zz_1 - 1} [F_1^*(z, \delta) + F_2^*(z_1, \delta) - f(\delta T)], \quad (6.4)$$

где

$$\begin{aligned} F_1^*(z, \delta) &= \sum_{v=0}^{\infty} f[(v + \delta) T] z^{-v}, \\ F_2^*(z_1, \delta) &= \sum_{v=0}^{\infty} f[(-v + \delta) T] z_1^{-v}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Если $\delta \leq 0$, то выражение (6.3) нужно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Phi^*(z, z_1, \delta) &= \frac{zz_1}{zz_1 - 1} \left\{ \sum_{v=0}^{\infty} f[(v - 1 + 1 + \delta) T] z^{-v} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{v=1}^{\infty} f[(-v - 1 + 1 + \delta) T] z_1^{-v} \right\}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Рассмотрим суммы, стоящие в правой части последнего равенства:

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^{\infty} f[(v - 1 + 1 + \delta) T] z^{-v} &= \\ &= f[\delta T] + f[(1 + \delta) T] z^{-1} + f[(2 + \delta) T] z^{-2} + \dots = \\ &= f[\delta T] + z^{-1} \{ f[(0 + 1 + \delta) T] + \\ &\quad + f[(1 + 1 + \delta) T] z^{-1} + \dots \} = \\ &= f[\delta T] + z^{-1} \sum_{v=0}^{\infty} f[(v + 1 + \delta) T] z^{-v} = \\ &= f[\delta T] + z^{-1} F_1^*(z, 1 + \delta). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Ко второй сумме (6.6) добавим с противоположными знаками $f[\delta T] = f[(-1 + 1 + \delta)T]$. Находим

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=1}^{\infty} f[(-\nu - 1 + 1 + \delta)T] z_1^{-\nu} + f[(-1 + 1 + \delta)T] - \\ & \quad - f[(-1 + 1 + \delta)T] = f[(-1 + 1 + \delta)T] + \\ & \quad + f[(-2 + 1 + \delta)T] z_1^{-1} + f[(-3 + 1 + \delta)T] z_1^{-2} + \dots \\ & \quad \dots - f[\delta T] = z_1 \{ f[(-1 + 1 + \delta)T] z_1^{-1} + \\ & \quad + f[(-2 + 1 + \delta)T] z_1^{-2} + \dots + f[(0 + 1 + \delta)T] - \\ & \quad - f[(0 + 1 + \delta)T] \} - f[\delta T] = \\ & = z_1 \sum_{\nu=0}^{\infty} f[(-\nu + 1 + \delta)T] z_1^{-\nu} - z_1 f[(1 + \delta)T] - f[\delta T] = \\ & = z_1 F_2^*(z_1, 1 + \delta) - z_1 f[(1 + \delta)T] - f[\delta T]. \quad (6.8) \end{aligned}$$

Подставив равенства (6.7) и (6.8) в правую часть (6.6), получаем, что при $\delta \leq 0$

$$\begin{aligned} & \Phi^*(z, z_1, \delta) = \\ & = \frac{zz_1}{zz_1 - 1} \{ z^{-1} F_1^*(z, 1 + \delta) + z_1 F_2^*(z_1, 1 + \delta) - z_1 f[(1 + \delta)T] \}. \quad (6.9) \end{aligned}$$

Запишем выражения (6.4) и (6.9) в виде одной формулы

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{2\gamma} \{ f[(n + \gamma)T - (n_1 + \gamma_1)T] \} = \Phi^*(z, z_1, \delta) = \\ & = \begin{cases} \frac{zz_1}{zz_1 - 1} [F_1^*(z, \delta) + F_2^*(z_1, \delta) - f[\delta T]] & \text{при } \gamma \geq \gamma_1, \\ \frac{zz_1}{zz_1 - 1} [z^{-1} F_1^*(z, 1 + \delta) + z_1 F_2^*(z_1, 1 + \delta) - \\ \quad - z_1 f[(1 + \delta)T]] & \text{при } \gamma \leq \gamma_1, \end{cases} \quad (6.10) \end{aligned}$$

где $\delta = \gamma - \gamma_1$, а изображения F_1^* и F_2^* определяются формулами (6.5). Выражение (6.10) имеет важное практическое значение, так как оно позволяет для функций двух переменных вида $f[(n + \gamma)T - (n_1 + \gamma_1)T]$ находить их двумерные z -изображения через одномерные z -изображения функций, зависящих от разности переменных $\nu = n - n_1$ и параметра смещения $\delta = \gamma - \gamma_1$.

Рассмотрим некоторые частные случаи формулы (6.10), также важные для приложений.

Пусть $\delta = 0$. Покажем, что из формулы (6.10) следует одно и то же выражение

$$\mathcal{L}_2 \{f[(n - n_1) T]\} = \frac{zz_1}{zz_1 - 1} [F_1^*(z) + F_2^*(z_1) - f(0)]. \quad (6.11)$$

Из верхнего выражения (6.10) при $\delta = 0$ сразу получаем (6.11). Рассмотрим нижнее выражение при $\delta = 0$. Так как

$$\begin{aligned} z^{-1} F_1^*(z, 1) &= z^{-1} \sum_{v=0}^{\infty} f[(v+1)T] z^{-v} = \\ &= f[T] z^{-1} + f[2T] z^{-2} + f[3T] z^{-3} + \dots + f(0) - f(0) = \\ &= \sum_{v=0}^{\infty} f[vT] z^{-v} - f(0) = F_1^*(z) - f(0) \end{aligned} \quad (6.12)$$

и

$$\begin{aligned} z_1 F_2^*(z_1, 1) - z_1 f[T] &= z_1 \sum_{v=0}^{\infty} f[(-v+1)T] z_1^{-v} - z_1 f[T] = \\ &= f[T] z_1 + f[0] + f[-T] z_1^{-1} + f[-2T] z_1^{-2} + \dots \\ &\dots - z_1 f[T] = \sum_{v=0}^{\infty} f[-vT] z_1^{-v} = F_2^*(z_1), \end{aligned} \quad (6.13)$$

из второго выражения (6.10) также находим (6.11). Положим, что рассматриваемая функция четная, т. е. $f[-vT] = f[vT] = f[|n - n_1|T]$. Установим, какой вид принимает в этом случае формула (6.10), начав со случая, когда $\delta \geq 0$. Обозначим

$$F^*(z, \delta) = \sum_{v=0}^{\infty} f[(v + \delta)T] z^{-v}. \quad (6.14)$$

Таким образом, $F_1^*(z, \delta) = F^*(z, \delta)$. Выразим $F_2^*(z, \delta)$ (6.5) через $F^*(z, \delta)$ (6.14). Из рис. 2.5 видно, что вследствие четности функция

$$f[(-v + \delta)T] = f[(v - 1 + 1 - \delta)T],$$

ПОЭТОМУ

$$\begin{aligned}
 F_2^*(z_1, \delta) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} f[(\nu - 1 + 1 - \delta)T] z_1^{-\nu} = f[-\delta T] + \\
 &+ z_1^{-1} \{f[(0 + 1 - \delta)T] + f[(1 + 1 - \delta)T] z_1^{-1} + \\
 &+ f[(2 + 1 - \delta)T] z_1^{-2} + \dots\} = f[-\delta T] + \\
 &+ z_1^{-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} f[(\nu + 1 - \delta)T] z_1^{-\nu} = f[-\delta T] + z_1^{-1} F^*(z_1, 1 - \delta).
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

Подставив в первое выражение формулы (6.10) значение $F_1^*(z, \delta) = F^*(z, \delta)$ и $F_2^*(z, \delta)$ из (6.15), получаем, что при $\delta \geq 0$

$$\Phi^*(z, z_1, \delta) = \frac{z z_1}{z z_1 - 1} [F^*(z, \delta) + z_1^{-1} F^*(z_1, 1 - \delta)]. \tag{6.16}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\delta \leq 0$, т. е. второе выражение формулы (6.10). В первом члене заменяем

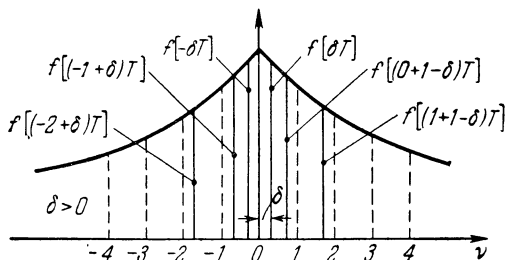


Рис. 2.5.

$F_1^*(z, 1 + \delta)$ на $F^*(z, 1 + \delta)$. Два других члена на основании соотношения (6.8) равны

$$\begin{aligned}
 z_1 F_2^*(z_1, 1 + \delta) - z_1 f[(1 + \delta)T] &= \\
 &= \sum_{\nu=1}^{\infty} f[(-\nu + \delta)T] z_1^{-\nu} + f[\delta T].
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

Из рис. 2.6 видно, что вследствие четности функция

$$f[(-\nu + \delta)T] = f[(\nu - \delta)T],$$

поэтому правую часть равенства (6.17) можно переписать так:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\infty} f[(\nu - \delta)T] z_1^{-\nu} + f[-\delta T] &= \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} f[(\nu - \delta)T] z_1^{-\nu} = F^*(z_1, -\delta). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Отсюда, а также из второго выражения формулы (6.10) (при $\delta \leq 0$) находим

$$\Phi^*(z, z_1, \delta) = \frac{zz_1}{zz_1 - 1} [z^{-1}F^*(z, 1 + \delta) + F^*(z_1, -\delta)]. \quad (6.19)$$

Объединим формулы (6.16) и (6.19) в одну

$$\Phi^*(z, z_1, \delta) = \begin{cases} \frac{zz_1}{zz_1 - 1} [F^*(z, \delta) + z^{-1}F^*(z_1, 1 - \delta)] & \text{при } \nu \geq \nu_1, \\ \frac{zz_1}{zz_1 - 1} [z^{-1}F^*(z, 1 + \delta) + F^*(z_1, -\delta)] & \text{при } \nu \leq \nu_1, \end{cases} \quad (6.20)$$

где изображение $F^*(z, \delta)$ определяется формулой (6.14).

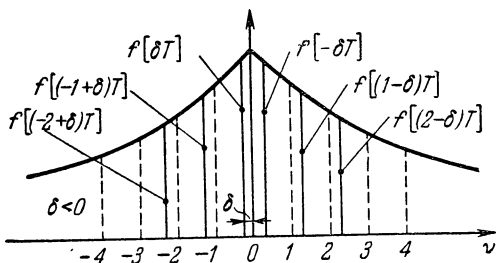


Рис. 2.6.

И, наконец, рассмотрим случай, когда функция четная и $\delta = 0$. Из формулы (6.11) имеем

$$\mathcal{L}_2 \{f[|n - n_1|T]\} = \frac{zz_1}{zz_1 - 1} [F^*(z) + F^*(z_1) - f(0)], \quad (6.21)$$

где изображение $F^*(z)$ определяется формулой (6.14) при $\delta = 0$. Тот же результат следует из формулы (6.20), так как при $\delta = 0$ оба выражения этой формулы

переходят в (6.21). В этом нетрудно убедиться, если воспользоваться известной зависимостью

$$F^*(z, 1) = [F^*(z) - f(0)]z. \quad (6.22)$$

В формулах (6.10), (6.11), (6.20) и (6.21) множитель $\frac{zz_1}{zz_1 - 1}$ аналогичен множителю $\frac{1}{s + s_1}$ в двумерном изображении по Лапласу непрерывной функции вида $f(t - t_1)$ [19, 47].

В заключение этого пункта найдем предельные одномерные изображения для полученных выше двумерных изображений, пользуясь соотношением (5.40) при $\gamma - \gamma_1 = \delta$. Для формулы (6.10)

$$\lim_{zz_1 \rightarrow 1} [(zz_1 - 1)\Phi^*(z, z_1, \delta)] = \begin{cases} F_1^*(z, \delta) + F_2^*(z^{-1}, \delta) - f[\delta T] & \text{при } \gamma \geq \gamma_1, \\ z^{-1}F_1^*(z, 1 + \delta) + z^{-1}F_2^*(z^{-1}, 1 + \delta) - \\ - z^{-1}f[(1 + \delta)T] & \text{при } \gamma \leq \gamma_1; \end{cases} \quad (6.23)$$

для формулы (6.11)

$$\lim_{zz_1 \rightarrow 1} [(zz_1 - 1)\Phi^*(z, z_1)] = F_1^*(z) + F_2^*(z^{-1}) - f(0); \quad (6.24)$$

для формулы (6.20)

$$\lim_{zz_1 \rightarrow 1} [(zz_1 - 1)\Phi^*(z, z_1, \delta)] = \begin{cases} F^*(z, \delta) + zF^*(z^{-1}, 1 - \delta) & \text{при } \gamma \geq \gamma_1, \\ z^{-1}F^*(z, 1 + \delta) + F^*(z^{-1}, -\delta) & \text{при } \gamma \leq \gamma_1; \end{cases} \quad (6.25)$$

для формулы (6.21)

$$\lim_{zz_1 \rightarrow 1} [(zz_1 - 1)\Phi^*(z, z_1)] = F^*(z) + F^*(z^{-1}) - f(0). \quad (6.26)$$

Отметим, что формулы (6.23) — (6.26), определяющие предельные одномерные изображения, справедливы, если функции $f[vT]$ и $f[-vT]$ имеют показатели роста c_1 и c_2 , удовлетворяющие условию $c_1 < c_2$.

2. Примеры определения двумерных изображений дискретных функций. Пример 1. Найдем двумерное z -изображение функции

$$f[nT, n_1T] = f_1[nT]f_2[n_1T]. \quad (6.27)$$

Применив к равенству (6.27) основное соотношение (4.1), находим

$$\begin{aligned} F^*(z, z_1) &= \mathcal{L}_2 \{f[nT, n_1T]\} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} f_1[nT] f_2[n_1T] z^{-n} z_1^{-n_1} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_1[nT] z^{-n} \sum_{n_1=0}^{\infty} f_2[n_1T] z_1^{-n_1} = F_1^*(z) F_2^*(z_1). \end{aligned} \quad (6.28)$$

Если $f_1[nT] = f_2[nT] = 1$, то

$$\mathcal{L}_2 \{1\} = \frac{zz_1}{(z-1)(z_1-1)}. \quad (6.29)$$

Определим двумерное изображение по Лапласу, соответствующее двумерному z -изображению (6.29), воспользовавшись формулой (4.16):

$$\lim_{T \rightarrow 0} \left[\frac{T^2 z z_1}{(z-1)(z_1-1)} \right] = \lim_{T \rightarrow 0} \left[\frac{T^2 e^{(s+s_1)T}}{(e^{sT}-1)(e^{s_1T}-1)} \right] = \frac{1}{s s_1},$$

что соответствует [47].

Пример 2. Найдем изображение обобщенной двумерной дельта-функции. Определим указанную функцию следующим выражением:

$$\delta[nT, n_1T] = \begin{cases} \frac{1}{T_2} & \text{при } n = n_1 = 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (6.30)$$

Из этого выражения видно, что при $T \rightarrow 0$ оно переходит в выражение двумерной дельта-функции $\delta(t, t_1)$, определяемой формулой (4.7)

$$\lim_{T \rightarrow 0} \delta[nT, n_1T] = \delta(t, t_1).$$

Воспользовавшись основным соотношением (4.1), получаем

$$\mathcal{L}_2 \{\delta[nT, n_1T]\} = \frac{1}{T^2}. \quad (6.31)$$

С помощью формулы (4.16) и выражения (6.31) находим, что

$$\lim_{T \rightarrow 0} [T^2 \mathcal{L}_2 \{\delta[nT, n_1T]\}] = \mathcal{L}_2 \{\delta(t, t_1)\} = 1.$$

Пример 3. Пусть

$$f[nT, n_1T] = \delta[(n - k)T, (n_1 - k_1)T].$$

В соответствии с правилом смещения независимых переменных в области оригиналов (5.4) и выражением (6.31) находим

$$\mathcal{L}_2 \{ \delta[(n - k)T, (n_1 - k_1)T] \} = \frac{z^{-k} z_1^{-k_1}}{T^2}. \quad (6.32)$$

Пример 4. Дано $f[nT, n_1T] = \delta[(n - n_1)T]$, где

$$\delta[(n - n_1)T] = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{при } n = n_1, \\ 0 & \text{при } n \neq n_1. \end{cases} \quad (6.33)$$

Найдем изображение этой функции, воспользовавшись формулой (4.3):

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n_1=0}^{\infty} \delta[(n - n_1)T] z_1^{-n_1} \right\} z^{-n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{T} z_1^{-n} z^{-n} = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{\infty} (zz_1)^{-n} = \frac{zz_1}{T(zz_1 - 1)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathcal{L}_2 \{ \delta[(n - n_1)T] \} = \frac{zz_1}{T(zz_1 - 1)}. \quad (6.34)$$

Множитель $\frac{zz_1}{zz_1 - 1}$, который фигурировал выше в п. 1, есть, таким образом, двумерное изображение функции

$$\delta_0[(n - n_1)T] = T \delta[(n - n_1)T] = \begin{cases} 1 & \text{при } n = n_1, \\ 0 & \text{при } n \neq n_1, \end{cases}$$

т. е.

$$\mathcal{L}_2 \{ \delta_0[(n - n_1)T] \} = \frac{zz_1}{zz_1 - 1}. \quad (6.35)$$

Функция (6.33) зависит от разности аргументов, поэтому для определения ее изображения можно воспользоваться

ся также формулой (6.21). Так как $\delta[(n - n_1)T] = \delta[|n - n_1|T] = \delta[|v|T]$, причем

$$\mathcal{L}\{\delta[vT]\} = \sum_{v=0}^{\infty} \delta[vT] z^{-v} = \frac{1}{T},$$

то в соответствии с (6.21)

$$\mathcal{L}_2\{\delta[(n - n_1)T]\} = \frac{zz_1}{zz_1 - 1} \left[\frac{1}{T} + \frac{1}{T} - \frac{1}{T} \right] = \frac{zz_1}{T(zz_1 - 1)},$$

что совпадает с (6.34). Из формулы (6.33) видно, что при $T \rightarrow 0$ функция $\delta[(n - n_1)T]$ переходит в «непрерывную» дельта-функцию, поэтому при $T \rightarrow 0$ выражение (6.34) должно стремиться к изображению «непрерывной» дельта-функции $\delta(t - t_1)$. Проверим это. Применив к выражению (6.34) формулу (4.16), находим

$$\lim_{T \rightarrow 0} \left[T^2 \frac{zz_1}{T(zz_1 - 1)} \right] = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{T e^{(s+s_1)T}}{e^{(s+s_1)T} - 1} = \frac{1}{s + s_1}, \quad (6.36)$$

что совпадает с двумерным изображением по Лапласу функции $\delta(t - t_1)$ [47]:

$$\mathcal{L}_2\{\delta(t - t_1)\} = \frac{1}{s + s_1}.$$

Пример 5. Найдем изображение функции $f(t, t_1) = e^{-\alpha|t-t_1|}$ при $t = (n + \gamma)T$, $t_1 = (n_1 + \gamma_1)T$ и $\gamma > \gamma_1$ ($\gamma - \gamma_1 = \delta > 0$), т. е. функции

$$f[(n + \gamma)T - (n_1 + \gamma_1)T] = e^{-\alpha|n - n_1 + \delta|T}. \quad (6.37)$$

Так как рассматриваемая функция является четной и $\delta > 0$, то для определения ее двумерного изображения можно воспользоваться первым выражением формулы (6.20). Одномерное изображение функции (6.37) при $n - n_1 = v$ и $v > 0$ равно

$$\mathcal{L}_\delta\{e^{-\alpha(v+\delta)T}\} = \frac{ze^{-\alpha T \delta}}{z - e^{-\alpha T}}, \quad (6.38)$$

поэтому из формулы (6.20) получаем

$$\mathcal{L}_{2\delta}\{e^{-\alpha|n - n_1 + \delta|T}\} = \frac{zz_1}{zz_1 - 1} \left[\frac{ze^{-\alpha T \delta}}{z - e^{-\alpha T}} + \frac{e^{-\alpha T} e^{\alpha T \delta}}{z_1 - e^{-\alpha T}} \right], \quad (6.39)$$

Таблица 2.1

Непрерывная функция	Двумерное изображение по Лапласу	Дискретная функция	Двумерное z -изображение	№
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
$f(t - t_1)$, $t - t_1 = \tau$	$\frac{1}{s + s_1} [F_1(s) + F_2(s_1)]$, где $F_1(s) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau$, $F_2(s_1) = \int_0^{\infty} f(-\tau) e^{-s_1\tau} d\tau$	$f[(n + \nu)T - (n_1 + \nu_1)T] =$ $= f[(n - n_1 + \delta)T]$, где $\delta = \nu - \nu_1$, $n - n_1 = \nu$	$\frac{zz_1}{zz_1 - 1} [F_1^*(z, \delta) + F_2^*(z_1, \delta) - f[\delta T]]$ ($\delta \geq 0$), $\frac{zz_1}{zz_1 - 1} [z^{-1}F_1^*(z, 1 + \delta) + z_1 F_2^*(z_1, 1 + \delta) - z_1 f[(1 + \delta)T]]$ ($\delta \leq 0$), $\frac{zz_1}{zz_1 - 1} [F_1^*(z) + F_2^*(z_1) - f(0)]$ ($\delta = 0$)	(1) (2) (3)
$f(t - t_1)$, причем функция четная, т. е. $f[\tau] = f[-\tau]$ $= f(t - t_1)$	$\frac{1}{s + s_1} [F(s) + F(s_1)]$, где $F(s) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau$	$f[(n - n_1 + \delta)T]$, причем функция четная, т. е. $f[-\nu T] = f[\nu T] =$ $= f[n - n_1 T]$	$\frac{zz_1}{zz_1 - 1} [F^*(z, \delta) + z_1^{-1}F^*(z_1, 1 - \delta)]$ ($\delta \geq 0$), $\frac{zz_1}{zz_1 - 1} [z^{-1}F^*(z, 1 + \delta) + F^*(z_1, -\delta)]$ ($\delta \leq 0$), $\frac{zz_1}{zz_1 - 1} [F^*(z, -\delta)]$ ($\delta = 0$)	(4) (5)

			$\frac{zz_1}{zz_1 - 1} [F^*(z) + F^*(z_1) - f(0)] \quad (\delta = 0),$ <p>где $F_1^*(z, \delta) = F^*(z, \delta) =$ $= \sum_{v=0}^{\infty} f[(v + \delta) T] z^{-v},$</p> $F_2^*(z_1, \delta) =$ $= \sum_{v=0}^{\infty} f[(-v + \delta) T] z_1^{-v}$	(6)
$f_1(t) f_2(t)$	$F_1(s) F_2(s_1)$	$f_1[nT] f_2[nT]$	$F_1^*(z) F_2^*(z_1),$ где $F_1^*(z) = \mathcal{L}\{f_1[nT]\},$ $F_2^*(z) = \mathcal{L}\{f_2[nT]\}$	(7)
1	$\frac{1}{ss_1}$	1	$\frac{zz_1}{(z-1)(z_1-1)}$	(8)

Продолжение табл. 2.1

Непрерывная функция (1)	Двумерное изображение по Лапласу (2)	Дискретная функция (3)	Двумерное z -изображение (4)	№
$\delta(t, t_1) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = t_1 = 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$	1	$\delta[nT, n_1T] = \begin{cases} \frac{1}{T^2} & \text{при } n = n_1 = 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$	$\frac{1}{T^2}$	(9)
$\delta(t - u, t_1 - u_1)$	$e^{-us} e^{-u_1 s_1}$	$\delta[(n - k)T, (n_1 - k_1)T]$	$\frac{z^{-k} z_1^{-k_1}}{T^2}$	(10)
$\delta(t - t_1) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = t_1, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$	$\frac{1}{s + s_1}$	$\delta[(n - n_1)T] = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{при } n = n_1, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$	$\frac{zz_1}{T(z z_1 - 1)}$	(11)
$e^{-\alpha t-t_1 }$	$\frac{1}{s + s_1} \left[\frac{1}{s + \alpha} + \frac{1}{s_1 + \alpha} \right]$	$e^{-\alpha n-n_1 T}$	$\frac{zz_1}{zz_1 - 1} \left[\frac{z}{z - e^{-\alpha T}} + \frac{z_1}{z_1 - e^{-\alpha T}} - 1 \right]$	(12)

При $\delta = 0$ из формулы (6.39) имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 \{e^{-\alpha|n-n_1|T}\} &= \frac{zz_1}{zz_1 - 1} \left[\frac{z}{z - e^{-\alpha T}} + \frac{e^{-\alpha T}}{z_1 - e^{-\alpha T}} \right] = \\ &= \frac{zz_1}{zz_1 - 1} \left[\frac{z}{z - e^{-\alpha T}} + \frac{z_1}{z_1 - e^{-\alpha T}} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Этот же результат получается, если для определения двумерного изображения рассматриваемой функции при $\delta = 0$ воспользоваться формулой (6.21). Так как при $\alpha = 0$ экспоненциальная функция превращается в единичную функцию, то и изображения (6.39) и (6.40) при $\alpha = 0$ должны переходить в выражение (6.29). Нетрудно видеть, что указанный переход действительно имеет место.

Убедимся, что из формул (6.39) и (6.40) следует двумерное изображение по Лапласу функции $f(t, t_1) = e^{-\alpha|t-t_1|}$. Применим к выражению (6.39) формулу (4.16)

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} [T^2 \mathcal{L}_{2\delta} \{e^{-\alpha|n-n_1+\delta|T}\}] &= \\ &= \lim_{T \rightarrow 0} \left\{ \frac{Tzz_1}{zz_1 - 1} \left[\frac{Tze^{-\alpha T\delta}}{z - e^{-\alpha T}} + \frac{Te^{-\alpha T}e^{\alpha T\delta}}{z_1 - e^{-\alpha T}} \right] \right\} = \\ &= \lim_{T \rightarrow 0} \left\{ \frac{Te^{(s+s_1)T}}{e^{(s+s_1)T} - 1} \left[\frac{Te^{sT}e^{-\alpha T\delta}}{e^{sT} - e^{-\alpha T}} + \frac{Te^{-\alpha T}e^{\alpha T\delta}}{e^{s_1T} - e^{-\alpha T}} \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{s + s_1} \left[\frac{1}{s + \alpha} + \frac{1}{s_1 + \alpha} \right], \end{aligned}$$

что совпадает с двумерным изображением по Лапласу рассмотренной функции [47]. Аналогичный результат следует из формулы (6.40).

Полученные выше изображения дискретных функций двух переменных представлены таблицей 2.1, где также приведены соответствующие этим дискретным функциям непрерывные функции двух переменных и их двумерные изображения по Лапласу.

3. Примеры определения оригиналов, соответствующих двумерным z -изображениям. Проанализируем на нескольких примерах особенности применения формулы обращения двумерного z -преобразования. Для этого найдем оригиналы, соответствующие некоторым

изображениям, полученным в п. 2 настоящего параграфа. Другие случаи применения формулы обращения даны в § 9 следующей главы.

Пример 1. Найти оригинал, соответствующий изображению (6.29), т. е.

$$F^*(z, z_1) = \frac{zz_1}{(z-1)(z_1-1)}.$$

Воспользуемся для этого формулой (4.36)

$$\begin{aligned} f[nT, n_1T] &= -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma_1} \frac{zz_1}{(z-1)(z_1-1)} z^{n-1} z_1^{n_1-1} dz dz_1 = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{z^n}{z-1} dz \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} \frac{z_1^{n_1}}{z_1-1} dz_1 = \\ &= \text{Res} \left[\frac{z^n}{z-1}; z=1 \right] \text{Res} \left[\frac{z_1^{n_1}}{z_1-1}; z_1=1 \right] = 1, \end{aligned}$$

что соответствует выражению (6.29).

Пример 2. Найдем оригинал, соответствующий изображению (6.40), т. е.

$$F^*(z, z_1) = \frac{zz_1}{zz_1-1} \left[\frac{z}{z-e^{-aT}} + \frac{z_1}{z_1-e^{-aT}} - 1 \right].$$

В соответствии с формулой (4.36) имеем

$$\begin{aligned} f[nT, n_1T] &= -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma_1} \frac{zz_1}{zz_1-1} \times \\ &\times \left[\frac{z}{z-e^{-aT}} + \frac{z_1}{z_1-e^{-aT}} - 1 \right] z^{n-1} z_1^{n_1-1} dz dz_1 = \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma_1} \frac{z^{n+1} z_1^{n_1}}{(zz_1-1)(z-e^{-aT})} dz dz_1 - \\ &- \frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma_1} \frac{z^n z_1^{n_1+1}}{(zz_1-1)(z_1-e^{-aT})} dz dz_1 - \\ &- \left[-\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma_1} \frac{z^n z_1^{n_1}}{zz_1-1} dz dz_1 \right] = \\ &= f_1[nT, n_1T] + f_2[nT, n_1T] - f_3[nT, n_1T], \quad (6.41) \end{aligned}$$

где $f_1[\dots]$, $f_2[\dots]$ и $f_3[\dots]$ — оригиналы, соответствующие членам формулы обращения в последнем выражении. Представим двойной интеграл, определяющий функцию $f_1[nT, n_1T]$ в следующем виде:

$$f_1[nT, n_1T] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{z^n}{z - e^{-\alpha T}} \left[\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} \frac{z_1^{n_1}}{z_1 - z^{-1}} dz_1 \right] dz. \quad (6.42)$$

Найдем внутренний интеграл, воспользовавшись формулой вычетов

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} \frac{z_1^{n_1}}{z_1 - z^{-1}} dz_1 = \text{Res} \left[\frac{z_1^{n_1}}{z_1 - z^{-1}}; z_1 = z^{-1} \right] = z^{-n_1}.$$

Отсюда

$$f_1[nT, n_1T] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{z^{n-n_1}}{z - e^{-\alpha T}} dz. \quad (6.43)$$

Если в выражении (6.43) положить $n - n_1 = \nu$, то получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{z^{n-n_1}}{z - e^{-\alpha T}} dz &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{z^{\nu}}{z - e^{-\alpha T}} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{z}{z - e^{-\alpha T}} z^{\nu-1} dz, \end{aligned}$$

т. е. формулу обращения одномерного z -преобразования, определяющую оригинал при $\nu \geq 0$ [62] или $n \geq n_1$. В этом случае находим из (6.43)

$$f_1[nT, n_1T] = \text{Res} \left[\frac{z^{n-n_1}}{z - e^{-\alpha T}}; z = e^{-\alpha T} \right] = e^{-\alpha T(n-n_1)} \quad (n \geq n_1). \quad (6.44)$$

Найдем теперь оригинал $f_1[nT, n_1T]$ при $n \leq n_1$. Для этого представим двойной интеграл, определяющий функцию $f_1[\dots]$, через повторные интегралы в порядке, обратном (6.42):

$$f_1[nT, n_1T] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} z_1^{n_1-1} \left[\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{z^{n+1}}{(z - z_1^{-1})(z - e^{-\alpha T})} dz \right] dz_1. \quad (6.45)$$

Внутренний интеграл (6.45) равен сумме вычетов

$$\begin{aligned} & \operatorname{Res} \left[\frac{z^{n+1}}{(z - z_1^{-1})(z - e^{-\alpha T})}; z = z_1^{-1} \right] + \\ & \quad + \operatorname{Res} \left[\frac{z^{n+1}}{(z - z_1^{-1})(z - e^{-\alpha T})}; z = e^{-\alpha T} \right] = \\ & = \frac{z_1^{-(n+1)}}{z_1^{-1} - e^{-\alpha T}} + \frac{e^{-\alpha(n+1)T}}{e^{-\alpha T} - z_1^{-1}} = \frac{z_1 e^{-\alpha n T} - e^{\alpha T} z_1^{-n}}{z_1 - e^{\alpha T}}. \quad (6.46) \end{aligned}$$

Положим в последнем выражении $n_1 - n = -\nu = \nu_1$, тогда из (6.45) и (6.46) находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} \frac{z_1^{n_1} e^{-\alpha n T} - e^{\alpha T} z_1^{n_1 - n - 1}}{z_1 - e^{\alpha T}} dz_1 = \\ = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} \frac{z_1^{n_1+1} e^{-\alpha n T} - e^{\alpha T}}{z_1 - e^{\alpha T}} z_1^{\nu_1 - 1} dz_1. \end{aligned}$$

Последнее выражение определяет оригинал, зависящий от одной переменной ν_1 при $\nu_1 \geq 0$. Таким образом, в этом случае

$$\begin{aligned} f_1[nT, n_1T] = \operatorname{Res} \left[\frac{z_1^{n_1} e^{-\alpha n T} - e^{\alpha T} z_1^{n_1 - n - 1}}{z_1 - e^{\alpha T}}; z_1 = e^{\alpha T} \right] = \\ = e^{\alpha n_1 T} e^{-\alpha n T} - e^{\alpha T} e^{\alpha T(n_1 - n - 1)} = 0. \quad (6.47) \end{aligned}$$

Заметим, что оригинал, зависящий от ν_1 в соответствии с выражением (6.47), оказался равным нулю как при $\nu_1 > 0$, так и при $\nu_1 = n_1 - n = 0$. Это связано с тем обстоятельством, что для непрерывных функций, имеющих разрыв первого рода при $t = 0$, в операционном исчислении принимают предельное правое значение функции при $t = +0$. Рассматриваемая дискретная функция соответствует такой непрерывной, для которой ее предельное правое значение равно нулю. Это очевидно и является причиной того, что при $\nu_1 = 0$ выше было получено $f_1[\dots] = 0$. В то же время при $\nu = 0$ (т. е. $n = n_1$) из (6.44) следует, что $f_1[\dots] = 1$. То, что в этом случае оригинал равен 1, имеет аналогичное объяснение, так как соответствующая непрерывная функция имеет правое предельное значение, равное 1.

На основании выражений (6.44) и (6.47), а также учитывая сказанное относительно значения оригинала $f_1[nT, n_1T]$ при $\nu = \nu_1 = 0$, запишем

$$f_1[nT, n_1T] = \begin{cases} e^{-aT(n-n_1)} & \text{при } n > n_1, \\ 1 & \text{при } n = n_1, \\ 0 & \text{при } n < n_1. \end{cases} \quad (6.48)$$

Определим теперь оригинал $f_2[nT, n_1T]$.

$$f_2[nT, n_1T] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} z^{n-1} \left[\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} \frac{z_1^{n_1+1}}{(z_1 - z_1^{-1})(z_1 - e^{-aT})} dz_1 \right] dz. \quad (6.49)$$

Нетрудно заметить, что выражение (6.49) аналогично (6.45) с точностью до обозначений. Определив с помощью вычетов внутренний интеграл (6.49), находим, что он равен выражению

$$\frac{ze^{-an_1T} - e^{aT}z^{-n_1}}{z - e^{aT}}.$$

Поэтому из (6.49) следует

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{z^n e^{-an_1T} - e^{aT}z^{n-n_1-1}}{z - e^{aT}} dz &= \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{z^{n_1+1} e^{-an_1T} - e^{aT}}{z - e^{aT}} z^{\nu-1} dz, \end{aligned}$$

где $\nu = n - n_1$. Таким образом, это выражение определяет оригинал, зависящий от одной переменной ν при $\nu \geq 0$. Вычислив этот интеграл с помощью вычета при $z = e^{aT}$, находим аналогично (6.47), что величина интеграла равна нулю. Таково значение оригинала $f_2[\dots]$ при $n \geq n_1$. Для определения оригинала при $n \leq n_1$ изменим в выражении (6.49) порядок интегрирования. В результате получим выражение, аналогичное (6.42) с точностью до обозначений

$$\begin{aligned} f_2[nT, n_1T] &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} \frac{z_1^{n_1}}{z_1 - e^{-aT}} \left[\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{z^n}{z - z_1^{-1}} dz \right] dz_1 = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} \frac{z_1^{n_1-n}}{z_1 - e^{-aT}} dz_1 = e^{-aT(n_1-n)}. \end{aligned} \quad (6.50)$$

Таким образом, мы определили оригинал $f_2[. . .]$ при $\nu_1 \geq \geq 0$ ($n_1 \geq n$). Аналогично выражению (6.48) запишем выражение для $f_2[nT, n_1T]$ в следующем виде:

$$f_2[nT, n_1T] = \begin{cases} 0 & \text{при } n > n_1, \\ 1 & \text{при } n = n_1, \\ e^{-\alpha T(n_1-n)} & \text{при } n < n_1. \end{cases} \quad (6.51)$$

Найдем, наконец, оригинал $f_3[nT, n_1T]$. Имеем

$$\begin{aligned} f_3[nT, n_1T] &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} z^{n-1} \left[\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} \frac{z_1^{n_1}}{z_1 - z^{-1}} dz_1 \right] dz = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} z^{n-n_1-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} z^{\nu-1} dz = \text{Res}[z^{\nu}; z=0]. \end{aligned} \quad (6.52)$$

Последний вычет равен нулю при $\nu > 0$ и равен 1 при $\nu = 0$ (по аналогии с пределом функции x^x при $x \rightarrow 0$, равным $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1$). Если в (6.52) изменить порядок

интегрирования, то находим, что оригинал равен $\text{Res}[z_1^{\nu_1}; z_1=0]$, т. е. также равен нулю при $\nu_1 > 0$ и равен 1 при $\nu_1 = 0$. Таким образом, выражение $f_3[nT, n_1T]$ можно записать в виде

$$f_3[nT, n_1T] = \begin{cases} 0 & \text{при } n > n_1, \\ 1 & \text{при } n = n_1, \\ 0 & \text{при } n < n_1, \end{cases} \quad (6.53)$$

т. е. это есть функция $\delta_0[(n - n_1)T]$ (см. (6.35)). Найдем теперь с помощью выражений (6.48), (6.51) и (6.53) правую часть равенства (6.41)

$$f[nT, n_1T] = \begin{cases} e^{-\alpha T(n-n_1)} & \text{при } n > n_1, \\ 1 & \text{при } n = n_1, \\ e^{-\alpha T(n_1-n)} & \text{при } n < n_1 \end{cases} \quad (6.54)$$

или

$$f[nT, n_1T] = e^{-\alpha T|n-n_1|}.$$

Таким образом, мы другим путем (путем обратного двумерного z -преобразования) пришли к выражению (6.40).

§ 7. Изображения статистических характеристик дискретных случайных процессов

1. Статистические характеристики дискретных случайных процессов. В подавляющем большинстве практических случаев дискретный случайный процесс образуется из некоторого непрерывного случайного процесса путем выборки дискретных значений с шагом T . Такой процесс называют *дискретным случайным процессом* или *случайной последовательностью* [31, 62]. Поэтому при анализе дискретных случайных процессов целесообразно исходить из рассмотрения соответствующих непрерывных процессов. Статистическими характеристиками последних являются [42, 45]:

— математическое ожидание

$$m_x(t) = M\{x(t)\}; \quad (7.1)$$

— корреляционная функция (центральный момент второго порядка случайной функции)

$$K_x(t, t_1) = M\{[x(t) - m_x(t)][x(t_1) - m_x(t_1)]\}; \quad (7.2)$$

— начальный момент второго порядка случайной функции

$$\Pi_x(t, t_1) = M\{x(t)x(t_1)\}. \quad (7.3)$$

При $t_1 = t$ из выражений (7.2) и (7.3) следуют формулы для дисперсии

$$D_x(t) = K_x(t, t) = M\{[x(t) - m_x(t)]^2\} \quad (7.4)$$

и математического ожидания квадрата случайной функции

$$\Pi_x(t) = \Pi_x(t, t) = M\{x^2(t)\}. \quad (7.5)$$

Последним характеристикам отвечают

$$\sqrt{D_x(t)} \quad \text{и} \quad \sqrt{\Pi_x(t)},$$

являющиеся соответственно средним квадратическим отклонением и средним квадратическим значением случайной функции. Между характеристиками (7.2) и (7.3) существует соотношение

$$\Pi_x(t, t_1) = m_x(t)m_x(t_1) + K_x(t, t_1), \quad (7.6)$$

а между (7.4) и (7.5) —

$$\Pi_x(t) = m_x^2(t) + D_x(t). \quad (7.7)$$

Для системы двух случайных функций $x(t)$ и $v(t)$ используются следующие статистические характеристики:

— взаимная корреляционная функция

$$K_{xv}(t, t_1) = M \{[x(t) - m_x(t)][v(t_1) - m_v(t_1)]\}; \quad (7.8)$$

— взаимный начальный момент второго порядка

$$\Pi_{xv}(t, t_1) = M \{x(t) v(t_1)\}. \quad (7.9)$$

При $t_1 = t$ из (7.8) и (7.9) имеем

$$D_{xv}(t) = K_{xv}(t, t) = M \{[x(t) - m_x(t)][v(t) - m_v(t)]\}, \quad (7.10)$$

$$\Pi_{xv}(t) = \Pi_{xv}(t, t) = M \{x(t), v(t)\}. \quad (7.11)$$

Указанные выше статистические характеристики связаны соотношениями

$$\Pi_{xv}(t, t_1) = m_x(t) m_v(t_1) + K_{xv}(t, t_1), \quad (7.12)$$

$$\Pi_{xv}(t) = m_x(t) m_v(t) + D_{xv}(t). \quad (7.13)$$

Моменты случайного процесса $x(t)$ являются симметричными функциями t и t_1 , а взаимные начальные моменты случайных процессов $x(t)$ и $v(t)$ зависят от порядка расположения этих функций:

$$K_x(t, t_1) = K_x(t_1, t), \quad \Pi_x(t, t_1) = \Pi_x(t_1, t), \quad (7.14)$$

$$K_{xv}(t, t_1) = K_{vx}(t_1, t), \quad \Pi_{xv}(t, t_1) = \Pi_{vx}(t_1, t). \quad (7.15)$$

Если случайный процесс является стационарным, то, как известно, его моменты второго порядка зависят лишь от разности величин t и t_1 , т. е. от $t - t_1 = \tau$. Математическое ожидание такого процесса постоянно. То же самое имеет место по отношению к характеристикам двух стационарно связанных случайных процессов.

Очень часто стационарные процессы обладают свойством эргодичности. Для таких процессов среднее по множеству реализаций совпадает со средним по времени, полученным с помощью одной реализации. При исследовании таких случайных процессов можно пользоваться как формулами осреднения по множеству, так и формулами осреднения по времени. Результаты при

этом, естественно, не изменяются. В дальнейшем будем пользоваться первыми формулами, так как при исследованиях, связанных с анализом прохождения случайных сигналов через динамическую систему, удобнее пользоваться средними по множеству. При этом промежуточные математические выкладки становятся более простыми и обозримыми. Заметим, во избежание возможных недоразумений, что для взаимной корреляционной функции стационарно связанных эргодических процессов соотношение между средним по множеству (7.8) и средним по времени таково:

$$\begin{aligned} K_{xv}(t, t_1) &= K_{xv}(t - t_1) = K_{xv}(\tau) = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \hat{x}(t + \tau) \hat{v}(t) dt, \end{aligned} \quad (7.16)$$

где $\hat{x}(t)$ и $\hat{v}(t)$ — центрированные случайные функции. Иногда подынтегральную функцию выражения (7.16) записывают в виде $\hat{x}(t)\hat{v}(t + \tau)$, что, очевидно, не отвечает определению $\tau = t - t_1$ и относится к $\tau = t_1 - t$.

Статистические характеристики дискретного случайного процесса, образующегося в результате выборки дискретных значений непрерывного случайного процесса, получаются из приведенных выше выражений путем замены переменных t и t_1 с помощью равенств $t = (n + \gamma)T$ и $t_1 = (n_1 + \gamma_1)T$. Если непрерывный случайный процесс, из которого осуществляется выборка, является стационарным, то моменты второго порядка такого дискретного случайного процесса будут зависеть от разности

$$t - t_1 = (n - n_1)T + (\gamma - \gamma_1)T = \nu T + \delta T, \quad (7.17)$$

где $\nu = n - n_1$ и $\delta = \gamma - \gamma_1$. В результате для такого дискретного процесса $x[(n + \gamma)T]$ статистические характеристики (на основании приведенных формул и указанной замены) определяются следующими выражениями:

$$m_x[(n + \gamma)T] = m_x[\gamma T] = \text{const}, \quad (7.18)$$

$$K_x[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma_1)T] = K_x[(\nu + \delta)T], \quad (7.19)$$

$$\Pi_x[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma_1)T] = \Pi_x[(\nu + \delta)T], \quad (7.20)$$

$$\Pi_x[(\nu + \delta)T] = m_x[\gamma T] m_x[\gamma_1 T] + K_x[(\nu + \delta)T]. \quad (7.21)$$

Статистические характеристики системы случайных процессов $x[(n + \gamma)T]$ и $v[(n_1 + \gamma_1)T]$ в аналогичных условиях определяются выражениями

$$K_{xv}[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma_1)T] = K_{xv}[(v + \delta)T], \quad (7.22)$$

$$\Pi_{xv}[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma_1)T] = \Pi_{xv}[(v + \delta)T], \quad (7.23)$$

$$\Pi_{xv}[(v + \delta)T] = m_x[\gamma T] m_v[\gamma_1 T] + K_{xv}[(v + \delta)T]. \quad (7.24)$$

При $n = n_1$, т. е. $v = 0$, из приведенных выше формул имеем

$$K_x[(v + \delta)T] |_{v=0} = D_x[\delta T], \quad (7.25)$$

$$\Pi_x[(v + \delta)T] |_{v=0} = \Pi_x[\delta T], \quad (7.26)$$

$$\Pi_x[\delta T] = m_x[\gamma T] m_x[\gamma_1 T] + D_x[\delta T], \quad (7.27)$$

$$K_{xv}[(v + \delta)T] |_{v=0} = D_{xv}[\delta T], \quad (7.28)$$

$$\Pi_{xv}[(v + \delta)T] |_{v=0} = \Pi_{xv}[\delta T], \quad (7.29)$$

$$\Pi_{xv}[\delta T] = m_x[\gamma T] m_v[\gamma_1 T] + D_{xv}[\delta T]. \quad (7.30)$$

Из выражений (7.18) — (7.30) видно, что статистические характеристики дискретных случайных процессов, полученных из соответствующих непрерывных стационарных случайных процессов, зависят не только от разности $n - n_1 = v$, но и от моментов времени γT и $\gamma_1 T$ внутри интервалов дискретности, в которые осуществляется выборка, или же разности величин $(\gamma - \gamma_1)T = \delta T$. Поэтому, строго говоря, дискретный процесс стационарен лишь когда параметры γ и γ_1 фиксированы, в частности, когда $\gamma = \gamma_1 = 0$, т. е. $\delta = 0$ [31, 41].

Для дискретного случайного процесса (полученного из соответствующего непрерывного стационарного) первому соотношению (7.14) отвечает зависимость

$$K_x[(-v + \delta)T] = \begin{cases} K_x[(v-1 + 1-\delta)T] & \text{при } \delta \geq 0, \\ K_x[(v - \delta)T] & \text{при } \delta \leq 0 \end{cases} \quad (7.31)$$

(см. п. 1 предыдущего параграфа). При $\delta = 0$

$$K_x[-vT] = K_x[vT] = K_x[|v|T]. \quad (7.32)$$

Аналогичные соотношения имеют место для второй зависимости (7.14). Найдем теперь для дискретного случайного процесса соотношение, отвечающее первой зави-

симости (7.15). Так как $K_{xv}(-\tau) = K_{vx}(\tau)$, то ветви кривых, определяемых функцией $K_{xv}(\tau)$ при $\tau < 0$ и функцией $K_{vx}(\tau)$ при $\tau > 0$, симметричны относительно оси ординат (рис. 2.7). Таким образом, эти две ветви

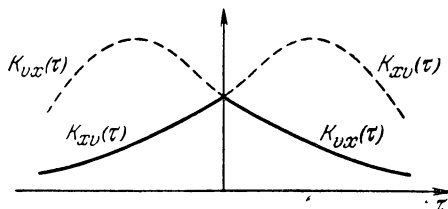


Рис. 2.7.

указанных кривых образуют кривую, которая отвечает четной функции. Поэтому

$$K_{xv}[(-v + \delta)T] = \begin{cases} K_{vx}[(v - 1 + 1 - \delta)T] & \text{при } \delta \geq 0, \\ K_{vx}[(v - \delta)T] & \text{при } \delta \leq 0 \end{cases} \quad (7.33)$$

и при $\delta = 0$

$$K_{xv}[-vT] = K_{vx}[vT]. \quad (7.34)$$

Аналогичные соотношения имеют место для второй зависимости (7.15).

2. Двумерные изображения статистических характеристик дискретных случайных процессов. Найдем двумерные изображения функций (7.19), (7.20), (7.22) и (7.23). Для этого воспользуемся формулами, полученными в п. 1 предыдущего параграфа, так как указанные функции зависят от разности переменных $n - n_1 = v$ и параметра $\delta = \gamma - \gamma_1$. В силу того, что корреляционная функция (7.19) является четной относительно переменной v , ее двумерное изображение можно определить с помощью формул (6.20) и (6.21)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2\gamma} \{K_x[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma_1)T]\} &= \Phi_x^*(z, z_1, \delta) = \\ &= \begin{cases} \frac{zz_1}{zz_1 - 1} [F_x^*(z, \delta) + z_1^{-1}F_x^*(z_1, 1 - \delta)] & \text{при } \delta \geq 0, \\ \frac{zz_1}{zz_1 - 1} [z^{-1}F_x^*(z, 1 + \delta) + F_x^*(z_1, -\delta)] & \text{при } \delta \leq 0; \end{cases} \end{aligned} \quad (7.35)$$

$$\Phi_x^*(z, z_1) = \frac{zz_1}{zz_1 - 1} [F_x^*(z) + F_x^*(z_1) - K_x(0)], \quad (7.36)$$

где

$$F_x^*(z, \delta) = \mathcal{L}_\delta \{K_x[(v + \delta)T]\} \quad (7.37)$$

есть одностороннее одномерное z -преобразование корреляционной функции $K_x[(v + \delta)T]$ при $v \geq 0$. Изображение начального момента второго порядка (7.20)

$$\mathcal{L}_{2v}\{\Pi_x[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma_1)T]\} = \bar{\Phi}_x^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1)$$

может быть определено по формулам, аналогичным (7.35) и (7.36), в которых вместо $F_x^*(z, \delta)$ нужно подставить одностороннее одномерное z -изображение функции $\Pi_x[(v + \delta)T]$, которое обозначим символом $\bar{F}_x^*(z, \delta)$. Так как согласно равенству (7.21)

$$\bar{F}_x^*(z, \delta) = m_x[\gamma T] m_x[\gamma_1 T] \frac{z}{z-1} + F_x^*(z, \delta), \quad (7.38)$$

то из формул (7.35) и (7.36) и выражения (7.27), после замены F_x^* на \bar{F}_x^* с помощью зависимости (7.38) и учета (6.29), находим

$$\bar{\Phi}_x^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1) = m_x[\gamma T] m_x[\gamma_1 T] \frac{zz_1}{(z-1)(z_1-1)} + \Phi_x^*(z, z_1, \delta), \quad (7.39)$$

$$\bar{\Phi}_x^*(z, z_1) = m_x^2 \frac{zz_1}{(z-1)(z_1-1)} + \Phi_x^*(z, z_1). \quad (7.40)$$

Таким образом, двумерные изображения начальных моментов второго порядка определяются через двумерные изображения корреляционных функций и единичной функции (6.29).

Так как взаимная корреляционная функция (7.22) не является четной, то для определения ее изображения воспользуемся формулами (6.10) и (6.11). В этих выражениях фигурируют изображения $F_1^*(z, \delta)$ и $F_2^*(z_1, \delta)$, определяемые формулами (6.5). В рассматриваемом случае вместо $F_1^*(z, \delta)$ нужно взять изображение функции $K_{xv}[(v + \delta)T]$, а вместо $F_2^*(z_1, \delta)$ взять изображение функции $K_{vx}[(v + \delta)T]$ (см. вторую формулу (6.5) и соотношения (7.33) и (7.34)). В результате находим

$$\mathcal{L}_{2v}\{K_{xv}[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma_1)T]\} = \Phi_{xv}^*(z, z_1, \delta) = \begin{cases} \frac{zz_1}{zz_1 - 1} [F_{xv}^*(z, \delta) + z_1^{-1} F_{vx}^*(z_1, 1 - \delta)] & \text{при } \delta \geq 0, \\ \frac{zz_1}{zz_1 - 1} [z^{-1} F_{xv}^*(z, 1 + \delta) + F_{vx}^*(z_1, -\delta)] & \text{при } \delta \leq 0; \end{cases} \quad (7.41)$$

$$\Phi_{xv}^*(z, z_1) = \frac{zz_1}{zz_1 - 1} [F_{xv}^*(z) + F_{vx}^*(z_1) - K_{xv}(0)], \quad (7.42)$$

где

$$\left. \begin{aligned} F_{xv}^*(z, \delta) &= \mathcal{L}_\delta \{K_{xv}[(v + \delta)T]\}, \\ F_{vx}^*(z, \delta) &= \mathcal{L}_\delta \{K_{vx}[(v + \delta)T]\} \end{aligned} \right\} \quad (7.43)$$

есть односторонние одномерные z -преобразования корреляционных функций $K_{xv}[(v + \delta)T]$ и $K_{vx}[(v + \delta)T]$ при $v \geq 0$.

Для изображения взаимного начального момента второго порядка (7.23)

$$\mathcal{L}_{2\gamma} \{\Pi_{xv}[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma_1)T]\} = \bar{\Phi}_{xv}^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1) \quad (7.44)$$

аналогично формулам (7.39) и (7.40) находим

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{xv}^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1) &= \\ &= m_x[\gamma T] m_v[\gamma_1 T] \frac{zz_1}{(z-1)(z_1-1)} + \Phi_{xv}^*(z, z_1, \delta), \end{aligned} \quad (7.45)$$

$$\bar{\Phi}_{xv}^*(z, z_1) = m_x m_v \frac{zz_1}{(z-1)(z_1-1)} + \Phi_{xv}^*(z, z_1). \quad (7.46)$$

Из полученных выше выражений видно, что двумерные изображения моментов второго порядка находятся с помощью одномерных односторонних изображений этих моментов, рассматриваемых как функция переменной $v = n - n_1$.

Приведем для наиболее употребимых типов корреляционных функций одномерные изображения по Лапласу $F_x(s)$ и их z -изображения $F_x^*(z, \delta)$ и $F_x^*(z)$ (при $\tau, v \geq 0$).

$$\left. \begin{aligned} 1. \quad K_x(\tau) &= D_x e^{-\alpha|\tau|}, & F_x(s) &= D_x \frac{1}{s + \alpha}, \\ F_x^*(z, \delta) &= D_x \frac{ze^{-\alpha T \delta}}{z - e^{-\alpha T}}, & F_x^*(z) &= D_x \frac{z}{z - e^{-\alpha T}}. \end{aligned} \right\} \quad (7.47)$$

$$\left. \begin{aligned} 2. \quad K_x(\tau) &= D_x e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta \tau, \\ F_x(s) &= D_x \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}, \\ F_x^*(z, \delta) &= D_x \frac{ze^{-\alpha T \delta} [z \cos \delta \beta T - e^{-\alpha T} \cos((1 - \delta) \beta T)]}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}}, \\ F_x^*(z) &= D_x \frac{z(z - e^{-\alpha T} \cos \beta T)}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}}. \end{aligned} \right\} \quad (7.48)$$

$$\left. \begin{aligned} 3. \quad K_x(\tau) &= D_x e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right), \\ F_x(s) &= D_x \frac{s + 2\alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}, \\ F_x^*(z) &= D_x \frac{z [z\beta + e^{-\alpha T} (\alpha \sin \beta T - \beta \cos \beta T)]}{\beta (z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T})}. \end{aligned} \right\} (7.49)$$

$$\left. \begin{aligned} 4. \quad K_x(\tau) &= D_x e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|), \\ F_x(s) &= D_x \frac{s + 2\alpha}{(s + \alpha)^2}, \\ F_x^*(z) &= D_x \frac{z [z + e^{-\alpha T} (\alpha T - 1)]}{(z - e^{-\alpha T})^2}. \end{aligned} \right\} (7.50)$$

5. Для взаимной корреляционной функции типа

$$\left. \begin{aligned} K_{xv}(\tau) &= D_{xv} e^{-\alpha|\tau|} \sin \beta\tau, \quad F_{xv}(s) = D_{xv} \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}, \\ F_{xv}^*(z) &= D_{xv} \frac{ze^{-\alpha T} \sin \beta T}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}}. \end{aligned} \right\} (7.51)$$

Подставляя эти выражения в формулы, полученные выше, нетрудно найти двумерные изображения соответствующих моментов второго порядка.

3. Предельные одномерные изображения моментов второго порядка дискретных случайных процессов. Полученные выше двумерные изображения моментов второго порядка будут использованы в дальнейшем для исследования нестационарных случайных процессов. С их помощью можно найти и предельные одномерные изображения моментов второго порядка, которые также потребуются дальше. Кроме того, такой переход интересен в теоретическом отношении. Как было показано в § 5, он осуществляется путем замены переменных n и n_1 на $\nu = n - n_1$ и $N = \min(n, n_1)$ при $N \rightarrow \infty$ и постоянном ν . В § 6 были найдены выражения предельных одномерных изображений для функций, зависящих от разности переменных n и n_1 (6.23) — (6.26). Воспользуемся этими формулами для определения предельных одномерных изображений моментов второго порядка дискретного случайного процесса. Последние получаются путем замены в указанных формулах обозначений на использо-

ванные выше. В результате из выражений (7.35), (7.36), (7.41) и (7.42) для корреляционных и взаимных корреляционных функций находим

$$\Phi_x^*(z, \delta) = \begin{cases} F_x^*(z, \delta) + zF_x^*(z^{-1}, 1 - \delta) & \text{при } \delta \geq 0, \\ z^{-1}F_x^*(z, \delta + 1) + F_x^*(z^{-1}, -\delta) & \text{при } \delta \leq 0; \end{cases} \quad (7.52)$$

$$\Phi_x^*(z) = F_x^*(z) + F_x^*(z^{-1}) - K_x(0); \quad (7.53)$$

$$\Phi_{xv}^*(z, \delta) = \begin{cases} F_{xv}^*(z, \delta) + zF_{vx}^*(z^{-1}, 1 - \delta) & \text{при } \delta \geq 0, \\ z^{-1}F_{xv}^*(z, 1 + \delta) + F_{vx}^*(z^{-1}, -\delta) & \text{при } \delta \leq 0; \end{cases} \quad (7.54)$$

$$\Phi_{xv}^*(z) = F_{xv}^*(z) + F_{vx}^*(z^{-1}) - K_{xv}(0). \quad (7.55)$$

Отсюда видно, что выражения (7.52) и (7.53) представляют собой одномерные двусторонние z -изображения функций $K_x[(v + \delta)T]$ и $K_x[vT]$, а (7.54) и (7.55) — одномерные двусторонние z -изображения функций $K_{xv}[(v + \delta)T]$ и $K_{xv}[vT]$ при $-\infty \leq v \leq \infty$ [31, 62]. Эти изображения используются при анализе стационарных процессов. Из полученных выше выражений следует

$$\Phi_x^*(z^{-1}) = \Phi_x^*(z), \quad \Phi_{xv}^*(z^{-1}) = \Phi_{vx}^*(z). \quad (7.56)$$

Применить аналогичный переход непосредственно к выражениям (7.39), (7.40), (7.45) и (7.46) для определения одномерных предельных изображений начальных моментов второго порядка нельзя, так как в эти выражения входит изображение единичной функции, обусловленное наличием величин m_x и m_v . Двустороннее z -изображение дискретной единичной функции сходится в кольце, внешний и внутренний радиусы которого совпадают с окружностью единичного радиуса (см. п. 17 § 5), так как для единичной функции абсцисса сходимости равна нулю (кольцо вырождается в окружность); т. е. имеет место положение, аналогичное непрерывному случаю, когда полоса сходимости двустороннего преобразования Лапласа единичной непрерывной функции вырождается в линию $\text{Re } s = 0$ [3].

Двустороннее z -изображение дискретной единичной функции по аналогии с двусторонним изображением по Лапласу непрерывной единичной функции можно

представить с помощью дельта-функции в виде

$$\mathcal{L}_{\text{двуст}} \{1 [nT]\}_{-\infty < n < \infty} = \frac{2\pi}{T} \delta\left(\frac{\ln z}{T}\right) = \begin{cases} \frac{2\pi}{T} & \text{при } z = 1, \\ 0 & \text{при } z \neq 1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\bar{\Phi}_x^*(z) = \frac{2\pi}{T} \delta\left(\frac{\ln z}{T}\right) m_x^2 + \Phi_x^*(z), \quad (7.57)$$

$$\bar{\Phi}_{xv}^*(z) = \frac{2\pi}{T} \delta\left(\frac{\ln z}{T}\right) m_x m_v + \Phi_{xv}^*(z). \quad (7.58)$$

При $z = e^{j\omega T}$ полученные выше выражения представляют собой спектральные плотности дискретных процессов, т. е. суммы рядов Фурье, коэффициентами которых являются значения соответственно корреляционной и взаимной корреляционной функций дискретных процессов [31, 62]. Пределы произведений указанных изображений на T при $T \rightarrow 0$ переходят в спектральные плотности соответствующих непрерывных случайных процессов [31]. Последние представляют собой, как известно, преобразования Фурье корреляционных и взаимных корреляционных функций этих процессов, или же двусторонние одномерные преобразования этих функций по Лапласу при $s = j\omega$. В непрерывном случае выражениям (7.53) и (7.55) соответствуют

$$\Phi_x(s) = F_x(s) + F_x(-s), \quad (7.59)$$

$$\Phi_{xv}(s) = F_{xv}(s) + F_{vx}(-s), \quad (7.60)$$

где $F_x(s)$, $F_{xv}(s)$ и $F_{vx}(s)$ — односторонние изображения по Лапласу функций $K_x(\tau)$, $K_{xv}(\tau)$ и $K_{vx}(\tau)$ при $\tau \geq 0$. Из приведенных выше выражений следует, что

$$\lim_{T \rightarrow 0} [T\Phi_x^*(z, \delta)] = \lim_{T \rightarrow 0} [T\Phi_x^*(z)] = \Phi_x(s), \quad (7.61)$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} [T\Phi_{xv}^*(z, \delta)] = \lim_{T \rightarrow 0} [T\Phi_{xv}^*(z)] = \Phi_{xv}(s). \quad (7.62)$$

Здесь целесообразно рассмотреть вопрос о корреляционной функции дискретного белого шума и связи ее с корреляционной функцией непрерывного белого шума. С помощью указанных случайных процессов часто описывают помехи, действующие на автоматические системы,

Известно, что корреляционная функция непрерывного белого шума представляет собой дельта-функцию, а его спектральная плотность (изображение по Лапласу) постоянна. Такой процесс является математической идеализацией, так как он не имеет конечной дисперсии. Физически белый шум является моделью случайного процесса, у которого спектральная плотность приблизительно постоянна в некоторой полосе частот. Представление случайного процесса для данной системы в виде физического белого шума требует знания его корреляционной функции [31, 50] (см., например, вывод (2.21)). Часто при описании характеристик непрерывного процесса, рассматриваемого как белый шум, ограничиваются заданием лишь величины его плотности. Переход к описанию соответствующего дискретного физического белого шума может быть в этом случае основан на следующей идеализированной схеме.

Пусть непрерывный физический белый шум имеет отличную от нуля спектральную плотность $c_{\text{н}}^2$ в полосе частот, ограниченной величиной ω_c (в этом случае его дисперсия конечна). Корреляционная функция такого процесса

$$K(\tau) = c_{\text{н}}^2 \delta(\tau).$$

Если этот процесс подвергнуть квантованию с частотой $\omega_0 \geq 2\omega_c$, то на основании соотношения между спектрами непрерывного и дискретного процессов (аналогично п. 1 § 3) имеем, что спектральная плотность дискретного процесса $c_{\text{д}}^2 = c_{\text{н}}^2/T$. Корреляционной функции $K(\tau)$ для дискретного процесса соответствует выражение

$$K[nT] = c_{\text{д}}^2 \delta_0[nT] = \frac{c_{\text{н}}^2}{T} \delta_0[nT] = c_{\text{н}}^2 \delta[nT], \quad (7.63)$$

где $\delta[nT]$ — «дискретная» дельта-функция:

$$\delta[nT] = \frac{1}{T} \delta_0[nT] = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{при } n \neq 0. \end{cases}$$

Отсюда изображения

$$\mathcal{Z}\{K[nT]\} = \frac{c_{\text{н}}^2}{T}, \quad \mathcal{Z}\{\delta[nT]\} = \frac{1}{T}. \quad (7.64)$$

Формула (7.63) отвечает представлению в виде физического белого шума процесса $x(t)$ с такой корреляционной функцией $K_x(\tau)$, что интервал корреляции $\Delta\tau = T$. В этом случае

$$c_n^2 = K_x(0)T, \quad c_n^2 = c_n^2/T = K_x(0).$$

Легко видеть, что выражения (7.63) и (7.64) приводят к следующим предельным зависимостям:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \delta[nT] = \begin{cases} \infty & \text{при } t = 0 \\ 0 & \text{при } t \neq 0 \end{cases} = \delta(t),$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} [T\mathcal{L}\{\delta[nT]\}] = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1,$$

т. е. «дискретная» дельта-функция и ее z -изображение при $T \rightarrow 0$ переходят в непрерывную дельта-функцию и ее изображение по Лапласу. Покажем на одном характерном примере правомерность использования выражений (7.63) и (7.64) для дискретного белого шума.

Пример. Рассмотрим непрерывный случайный процесс $x(t)$, характеризуемый корреляционной функцией

$$K_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|},$$

для которой изображение по Лапласу (при $\tau \geq 0$)

$$F_x(s) = \frac{1}{s + \alpha}.$$

Таким образом,

$$\Phi_x(s) = F_x(s) + F_x(-s) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 - s^2}.$$

Кроме того, рассмотрим непрерывный белый шум $v(t)$ с единичной плотностью $c_n^2 = 1$, т. е.

$$F_v(s) = F_v(-s) = 1/2, \quad \Phi_v(s) = 1.$$

При синтезе оптимальных систем часто приходится пользоваться функцией

$$\Psi(s) = \Phi_x(s) + \Phi_v(s)$$

и находить ее корни, т. е. решение уравнения $\Psi(s) = 0$.

В рассматриваемом случае

$$\Psi(s) = \frac{2\alpha + \alpha^2 - s^2}{\alpha^2 - s^2}, \quad s_{1,2} = \pm \sqrt{2\alpha + \alpha^2}. \quad (7.65)$$

Для соответствующего дискретного процесса

$$F_x^*(z) = \frac{z}{z - e^{-\alpha T}}, \quad \Phi_x^*(z) = \frac{(1 - e^{-2\alpha T})z}{(z - e^{-\alpha T})(1 - ze^{-\alpha T})}.$$

На основании формулы (7.64) для дискретного белого шума

$$F_v^*(z) = \frac{1}{T}, \quad \Phi_v^*(z) = \frac{1}{T}. \quad (7.66)$$

Изображения $\Phi_x^*(z)$ и $\Phi_v^*(z)$ определены с помощью формулы (7.53); при этом учтено, что $K_x(0) = 1$ и $K_v(0) = \frac{1}{T}$. Таким образом,

$$\Psi_x^*(z) = \Phi_x^*(z) + \Phi_v^*(z) = \frac{z^2 - 2 \operatorname{ch} \alpha_1 T z + 1}{T(z - e^{-\alpha T})(z - e^{\alpha T})}, \quad (7.67)$$

где

$$\operatorname{ch} \alpha_1 T = \operatorname{ch} \alpha T + T \operatorname{sh} \alpha T.$$

Корни уравнения

$$\Psi_x^*(z) = 0, \quad z_{1,2} = e^{\mp \alpha_1 T}. \quad (7.68)$$

Покажем, что при выражении характеристик дискретного белого шума с помощью формул (7.66) (т. е. (7.64)) имеют место предельные переходы

$$\Psi(s) = \lim_{T \rightarrow 0} [T\Psi^*(z)] \quad \text{и} \quad s_{1,2} = \lim_{T \rightarrow 0} z_{1,2}.$$

Находим

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} [T\Psi^*(z)] &= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{z^2 - 2 \operatorname{ch} \alpha_1 T z + 1}{(z - e^{-\alpha T})(z - e^{\alpha T})} = \\ &= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1 + 2sT + 2s^2T^2 + \dots - 2 \left(1 + \frac{\alpha_1^2 T^2}{2} + \dots \right) \left(1 + sT + \frac{s^2 T^2}{2} + \dots \right) + 1}{(1 + sT + \dots - 1 + \alpha T - \dots)(1 + sT + \dots - 1 - \alpha T - \dots)} = \\ &= \frac{-\alpha_1^2 + s^2}{(s + \alpha)(s - \alpha)}. \quad (7.69) \end{aligned}$$

Выразим α_1 через α при $T \rightarrow 0$. Так как $e^{\alpha T} + e^{-\alpha T} + T(e^{\alpha T} - e^{-\alpha T}) = e^{\alpha_1 T} + e^{-\alpha_1 T}$, то, раскладывая экспоненциальные функции в ряд, находим, что

$$\alpha_1^2 = \alpha^2 + 2\alpha. \quad (7.70)$$

Из выражений (7.69) и (7.70) получаем

$$\lim_{T \rightarrow 0} [T\Psi^*(z)] = \frac{2\alpha + \alpha^2 - s^2}{\alpha^2 - s^2} = \Psi(s).$$

Из второго выражения (7.68) находим

$$1 + sT + \dots = 1 \mp \alpha_1 T \mp \dots,$$

откуда $s_{1,2} = \pm \alpha_1$ или с учетом (7.70) получаем второе выражение (7.65). Таким образом, использование выражения (7.63) обеспечивает необходимые предельные переходы.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК
В ДИСКРЕТНЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ
В ПЕРЕХОДНОМ РЕЖИМЕ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ
ТЕОРИИ ДВУМЕРНОГО
И ОДНОМЕРНОГО Z -ПРЕОБРАЗОВАНИЙ**

Полный анализ качества работы автоматической системы предполагает определение ее ошибок как в переходном, так и в установившемся режимах. Для статистических воздействий часто ограничиваются рассмотрением лишь последнего. Одна из причин этого связана с трудностями, возникающими при определении статистических характеристик выходной переменной в переходном режиме.

Вместе с тем необходимость рассмотрения переходных режимов возникает даже в том случае, когда входное воздействие стационарно, но система начинает работать немедленно после ее включения. Статистические характеристики выходной переменной такой системы в течение переходного режима зависят от времени, и лишь после затухания переходного процесса выходную переменную можно рассматривать как стационарную случайную функцию (если, конечно, сама система стационарна). Существуют случаи, когда при стационарном входном воздействии дисперсия выходной переменной неограниченно нарастает. Это имеет место, например, при обработке навигационной информации для счисления пути и использовании сигнала измерителя скорости [64]. В результате осуществления операции интегрирования передаточная функция системы имеет полюс на мнимой оси (единичной окружности плоскости z), что приводит к указанному обстоятельству.

Хотя и существуют общие формулы для определения статистических характеристик выходной переменной как функций времени, однако использование их в случае дискретных систем связано с необходимостью довольно трудных вычислений сумм, в том числе двойных. Процедура определения указанных характеристик может быть существенно упрощена, если использовать для этой цели функциональные преобразования. Для

анализа переходных режимов в непрерывных системах, подверженных случайным воздействиям, это успешно сделано в книге [47] с помощью двумерного преобразования Лапласа. Для анализа переходных режимов в дискретных системах целесообразно использовать функциональные преобразования дискретных последовательностей — одномерное и двумерное z -преобразования [13, 14], что и сделано в настоящей главе.

В восьмом параграфе устанавливаются соотношения между статистическими характеристиками входной и выходной переменных дискретной автоматической системы в переходном режиме. В качестве указанных характеристик рассматриваются: математические ожидания, корреляционные функции и начальные моменты второго порядка. Расчетные формулы для определения этих характеристик выводятся в девятом параграфе. Там же дана таблица соответствий между двумерными изображениями и оригиналами, упрощающая использование расчетных формул. Выражения, устанавливающие зависимость дисперсии от времени в переходном режиме, приводятся в десятом параграфе. Полученные результаты используются в одиннадцатом параграфе для определения статистических характеристик погрешности цифровой автоматической системы в переходном режиме [16]. Погрешность рассматривается в том смысле, как сформулировано выше.

§ 8. Соотношения между изображениями статистических характеристик входной и выходной переменных дискретной автоматической системы в переходном режиме

Используем результаты предыдущей главы для определения статистических характеристик выходной переменной дискретной системы в переходном режиме. Обозначим через $g[(n + \gamma)T]$ импульсную переходную функцию дискретной системы, а через $G^*(z, \gamma)$ — соответствующую ей передаточную функцию. Положим, что на вход системы подается непрерывная случайная функция $x(t)$, характеризуемая математическим ожиданием $m_x(t)$, дисперсией $D_x(t)$, корреляционной функцией $K_x(t, t_1)$ и начальным моментом второго порядка

$\Pi_x(t, t_1)$. Выходную переменную системы обозначим через $y(t)$.

Уравнение, связывающее между собой входное и выходное воздействия, имеет различный вид в зависимости от того, какое значение входного воздействия фиксирует импульсный элемент — левое или правое. В первом случае это —

$$y[(n + \gamma)T] = \sum_{m=0}^n g[(n + \gamma - m)T] x[mT - 0]; \quad (8.1)$$

а во втором —

$$y[(n + \gamma)T] = \sum_{m=0}^n g[(n + \gamma - m)T] x[mT]. \quad (8.2)$$

Как уже отмечалось в § 2 (см. (2.40) и (2.41)), такое представление входного воздействия связано с тем обстоятельством, что в случае, когда $g[0] \neq 0$ и $x[0] \neq 0$ в соответствии с формулой (8.2) $y[0] = g[0]x[0] \neq 0$, что не отвечает физике явления, а связано с особенностями математического описания работы импульсного элемента. Если же воспользоваться формулой (8.1), то $y[0] = 0$, так как $x[0 - 0] = 0$. Если $g[0] = 0$, то формулы (8.1) и (8.2) дают один и тот же результат. Следовательно, выражение (8.1) является более общим. Будем и далее им пользоваться, указывая в отдельных случаях, какие изменения претерпевают окончательные выражения, если за исходную формулу принять (8.2) вместо (8.1).

Найдем статистические характеристики выходной переменной дискретной системы, используя для этого выражение (8.1)

$$\begin{aligned} m_y[(n + \gamma)T] &= M\{y[(n + \gamma)T]\} = \\ &= \sum_{m=0}^n g[(n + \gamma - m)T] m_x[mT - 0]; \quad (8.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_y[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma_1)T] &= \\ &= M\{[y[(n + \gamma)T] - m_y[(n + \gamma)T]] \times \\ &\quad \times [y[(n_1 + \gamma_1)T] - m_y[(n_1 + \gamma_1)T]]\} = \\ &= \sum_{m=0}^n \sum_{m_1=0}^{n_1} g[(n + \gamma - m)T] g[(n_1 + \gamma_1 - m_1)T] \times \\ &\quad \times K_x[mT - 0, m_1T - 0]; \quad (8.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_y[(n + \gamma) T, (n_1 + \gamma_1) T] &= M \{y[(n + \gamma) T] y[(n_1 + \gamma_1) T]\} = \\ &= \sum_{m=0}^n \sum_{m_1=0}^{n_1} g[(n + \gamma - m) T] g[(n_1 + \gamma_1 - m_1) T] \times \\ &\quad \times \Pi_x[mT - 0, m_1T - 0]; \quad (8.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_y[(n + \gamma) T] &= M \{[y[(n + \gamma) T] - m_y[(n + \gamma) T]]^2\} = \\ &= \sum_{m=0}^n \sum_{m_1=0}^n g[(n + \gamma - m) T] g[(n + \gamma - m_1) T] \times \\ &\quad \times K_x[mT - 0, m_1T - 0]. \quad (8.6) \end{aligned}$$

Найдем изображения статистических характеристик выходной переменной, определяемых формулами (8.3) — (8.6). Применив к обеим частям равенства (8.3) одномерное z -преобразование, получим

$$M_y^*(z, \gamma) = z^{-1} G^*(z, \gamma) M_x^*(z, 1), \quad (8.7)$$

где

$$M_y^*(z, \gamma) = \mathcal{L}_\gamma \{m_y[(n + \gamma) T]\},$$

$$M_x^*(z, 1) = \mathcal{L} \{m_x[(n + 1 - 0) T]\}.$$

Определим теперь изображение корреляционной функции (8.4). Так как эта функция зависит от двух переменных, то воспользуемся двумерным z -преобразованием. Применив формулу (4.2) к левой и правой частям равенства (8.4), находим

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} K_y[(n + \gamma) T, (n_1 + \gamma_1) T] z^{-n} z_1^{-n_1} &= \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \left\{ \sum_{m=0}^n \sum_{m_1=0}^{n_1} g[(n + \gamma - m) T] g[(n_1 + \gamma_1 - m_1) T] \times \right. \\ &\quad \left. \times K_x[mT - 0, m_1T - 0] \right\} z^{-n} z_1^{-n_1}. \quad (8.8) \end{aligned}$$

Обозначим

$$\Phi_y^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} K_y[(n + \gamma) T, (n_1 + \gamma_1) T] z^{-n} z_1^{-n_1}. \quad (8.9)$$

Изменим порядок суммирования в правой части выражения (8.8), воспользовавшись при этом формулой

(5.14). В результате получаем

$$\begin{aligned} \Phi_y^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1) &= \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} K_x[mT-0, m_1T-0] \times \\ &\times \left\{ \sum_{n=m}^{\infty} g[(n+\gamma-m)T] z^{-n} \sum_{n_1=m_1}^{\infty} g[(n_1+\gamma_1-m_1)T] z_1^{-n_1} \right\}. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Рассмотрим первую сумму в фигурных скобках последнего выражения. Под знак суммы входит импульсная переходная функция динамической системы, удовлетворяющая условию $g[(n+\gamma-m)T]=0$ при $n+\gamma-m < 0$, поэтому нижний предел суммы можно принять равным нулю. Тогда, учитывая теорему одномерного z -преобразования о смещении аргумента в оригинале, можно записать

$$\begin{aligned} \sum_{n=m}^{\infty} g[(n+\gamma-m)T] z^{-n} &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} g[(n+\gamma-m)T] z^{-n} = z^{-m} G^*(z, \gamma). \end{aligned} \quad (8.11)$$

Аналогично находим

$$\sum_{n_1=m_1}^{\infty} g[(n_1+\gamma_1-m_1)T] z_1^{-n_1} = z_1^{-m_1} G^*(z_1, \gamma_1). \quad (8.12)$$

Подставив выражения (8.11) и (8.12) в правую часть равенства (8.10), получаем

$$\begin{aligned} \Phi_y^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1) &= \\ &= G^*(z, \gamma) G^*(z_1, \gamma_1) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} K_x[mT-0, m_1T-0] z^{-m} z_1^{-m_1}. \end{aligned}$$

Двойная сумма правой части последнего равенства представляет собой двумерное z -преобразование корреляционной функции входной переменной. В соответствии с выражением (5.48) находим, что

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2\gamma} \{K_x[nT-0, n_1T-0]\} &= \\ &= \mathcal{L}_{2\gamma} \{K_x[(n-1)T+(1-0)T, (n_1-1)T+(1-0)T]\} = \\ &= z^{-1} z_1^{-1} \Phi_x^*(z, 1; z_1, 1), \end{aligned}$$

где

$$\Phi_x^*(z, 1; z_1, 1) = \mathcal{Z}_{2\gamma} \{K_x[(n+1-0)T, (n_1+1-0)T]\}.$$

В результате окончательно получаем

$$\Phi_y^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1) = z^{-1} z_1^{-1} G^*(z, \gamma) G^*(z_1, \gamma_1) \Phi_x^*(z, 1; z_1, 1). \quad (8.13)$$

Выражение (8.13) устанавливает зависимость между двумерными изображениями корреляционных функций входной и выходной переменных дискретной системы и ее передаточной функцией. Аналогичным образом находим зависимость между изображениями начальных моментов второго порядка входной и выходной переменных:

$$\bar{\Phi}_y^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1) = z^{-1} z_1^{-1} G^*(z, \gamma) G^*(z_1, \gamma_1) \bar{\Phi}_x^*(z, 1; z_1, 1), \quad (8.14)$$

где

$$\bar{\Phi}_y^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1) = \mathcal{Z}_{2\gamma} \{\Pi_y[(n+\gamma)T, (n_1+\gamma_1)T]\},$$

$$\bar{\Phi}_x^*(z, 1; z_1, 1) = \mathcal{Z}_{2\gamma} \{\Pi_x[(n+1-0)T, (n_1+1-0)T]\}.$$

Таким образом, мы определили изображения статистических характеристик выходной переменной (8.3) — (8.5). Что касается изображения дисперсии (8.6), то вопросы, связанные с его определением, будут подробно рассмотрены в § 10.

Если бы при определении статистических характеристик выходной переменной мы воспользовались зависимостью (8.2), то вместо выражений (8.7), (8.13) и (8.14) соответственно бы получили

$$M_y^*(z, \gamma) = G^*(z, \gamma) M_x^*(z), \quad (8.15)$$

$$\Phi_y^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1) = G^*(z, \gamma) G^*(z_1, \gamma_1) \Phi_x^*(z, z_1), \quad (8.16)$$

$$\bar{\Phi}_y^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1) = G^*(z, \gamma) G^*(z_1, \gamma_1) \bar{\Phi}_x^*(z, z_1). \quad (8.17)$$

Рассмотрим полученные выше выражения для двумерных изображений моментов выходной переменной. Так как выражения (8.13) и (8.14) аналогичны выражениям (8.16) и (8.17), то ограничимся последними.

Установим в первую очередь связь указанных выражений для дискретной системы с соответствующими выражениями системы непрерывной. Воспользуемся для этого предельной зависимостью (4.16), которую применим к левой и правой частям равенства (8.16):

$$\lim_{T \rightarrow 0} [T^2 \Phi_y^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1)] = \Phi_y(s, s_1),$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} [T^2 G^*(z, \gamma) G^*(z_1, \gamma_1) \Phi_x^*(z, z_1)] = G(s) G(s_1) \Phi_x(s, s_1),$$

откуда

$$\Phi_y(s, s_1) = G(s) G(s_1) \Phi_x(s, s_1), \quad (8.18)$$

где $\Phi_x(s, s_1)$ и $\Phi_y(s, s_1)$ — двумерные изображения по Лапласу корреляционных функций входной и выходной переменных, $G(s)$ — передаточная функция непрерывной системы. Выражение (8.18) [47] устанавливает для непрерывной системы ту же зависимость, что и выражение (8.16) для дискретной системы. Подобная зависимость получается и для формулы, аналогичной (8.17), связывающей между собой двумерные изображения моментов второго порядка непрерывной системы.

Выполним теперь переход в соотношении (8.16) от двумерных изображений корреляционных функций входной и выходной переменных к их предельным одномерным изображениям. Для этого применим формулу (5.41) к левой и правой частям соотношения (8.16):

$$\begin{aligned} \lim_{zz_1 \rightarrow 1} [(zz_1 - 1) \Phi_y^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1)] = \\ = F_y^*(z, \gamma, \gamma_1) + F_y^*(z^{-1}, \gamma, \gamma_1) - K_y[\gamma T, \gamma_1 T], \end{aligned}$$

где

$$F_y^*(z, \gamma, \gamma_1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} K_y[\nu T, \gamma T, \gamma_1 T] z^{-\nu};$$

$$\begin{aligned} \lim_{zz_1 \rightarrow 0} [(zz_1 - 1) G^*(z, \gamma) G^*(z_1, \gamma_1) \Phi_x^*(z, z_1)] = \\ = G^*(z, \gamma) G^*(z^{-1}, \gamma_1) [F_x^*(z) + F_x^*(z^{-1}) - K_x(0)], \end{aligned}$$

где

$$F_x^*(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} K_x[\nu T] z^{-\nu}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} F_y^*(z, \gamma, \gamma_1) + F_y^*(z^{-1}, \gamma, \gamma_1) - K_y[\gamma T, \gamma_1 T] = \\ = G^*(z, \gamma) G^*(z^{-1}, \gamma_1) [F_x^*(z) + F_x^*(z^{-1}) - K_x(0)]. \end{aligned} \quad (8.19)$$

При $z = e^{j\omega T}$ из формулы (8.19) следует известное соотношение [31, 62], устанавливающее связь между спектральными плотностями входного и выходного сигналов и частотной характеристикой дискретной системы. Действительно, при указанной замене левая часть равенства (8.19) представляет собой спектральную плотность выходного сигнала, а выражение в квадратных скобках есть спектральная плотность входного сигнала.

Таким образом, пользуясь зависимостью (8.16), полученной для переходного режима работы дискретной системы, мы перешли с помощью предельного соотношения (5.41) к зависимости (8.19), справедливой для установившегося режима работы. Такой не традиционный путь вывода формулы (8.19), минуя непосредственное использование преобразования Фурье, представляет известный интерес.

§ 9. Определение математического ожидания, корреляционной функции и начального момента второго порядка выходной переменной дискретной системы в переходном режиме

1. Вывод основных расчетных формул. Положим, что воздействие $x(t)$, подаваемое на вход дискретной системы, которая рассматривалась в предыдущем параграфе, представляет собой стационарную случайную функцию, характеризуемую математическим ожиданием m_x , корреляционной функцией $K_x(\tau)$ и начальным моментом $\Pi_x(\tau)$ ($\tau = t - t_1$). Найдем, воспользовавшись полученными в предыдущем параграфе формулами, изображение статистических характеристик выходной переменной; далее определим соответствующие им оригиналы, т. е. получим выражения для самих статистических характеристик.

Изображение математического ожидания выходной переменной определяется формулой (8.7), откуда для

рассматриваемого случая находим

$$M_y^*(z, \gamma) = \frac{m_x}{z-1} G^*(z, \gamma). \quad (9.1)$$

Так как входное воздействие стационарно, то его корреляционная функция

$$K_x[(n+1-0)T, (n_1+1-0)T] = K_x[|n-n_1|T]$$

является четной функцией переменного $\nu = n - n_1$. Используя формулу (7.36), находим двумерное изображение этой корреляционной функции

$$\begin{aligned} \Phi_x^*(z, 1; z_1, 1) &= \Phi_x^*(z, z_1) = \\ &= \frac{zz_1}{zz_1-1} [F_x^*(z) + F_x^*(z_1) - K_x(0)], \end{aligned} \quad (9.2)$$

где

$$F_x^*(z) = \mathcal{Z}\{K_x[nT]\} = \sum_{n=0}^{\infty} K_x[nT] z^{-n}$$

(заметим, что указанному изображению более точно отвечает формула (7.35), где $\gamma = \gamma_1 = 1$ и $\delta = \gamma - \gamma_1 = 0$). Подставив изображение (9.2) в правую часть формулы (8.13), находим

$$\begin{aligned} \Phi_y^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1) &= \\ &= \frac{1}{zz_1-1} G^*(z, \gamma) G^*(z_1, \gamma_1) [F_x^*(z) + F_x^*(z_1) - K_x(0)]. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Изображение начального момента второго порядка определим с помощью формулы (8.14) и выражения (7.40) (или (7.39) при $\gamma = \gamma_1 = 0$ и $\delta = 0$). Учитывая также соотношения (9.1) и (9.2), получаем

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_y^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1) &= M_y^*(z, \gamma) M_y^*(z_1, \gamma_1) + \\ &+ \frac{1}{zz_1-1} G^*(z, \gamma) G^*(z_1, \gamma_1) [F_x^*(z) + F_x^*(z_1) - K_x(0)]. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Так как изображение (9.4) определяется изображениями (9.1) и (9.3), то будем далее рассматривать лишь последние. Для упрощения расчетных формул, которые будут получены дальше, примем в выражении (9.3)

$\gamma_1 = \gamma$ и запишем его в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Phi_y^*(z, z_1, \gamma) = & \\ = & \frac{zz_1}{zz_1 - 1} \left[\frac{G^*(z, \gamma)}{z} \cdot \frac{G^*(z_1, \gamma) F_x^*(z_1)}{z_1} + \frac{G^*(z_1, \gamma)}{z_1} \cdot \frac{G^*(z, \gamma) F_x^*(z)}{z} \right] - \\ - & \frac{K_x(0)}{2} \cdot \frac{zz_1}{zz_1 - 1} \left[\frac{G^*(z, \gamma)}{z} \cdot \frac{G^*(z_1, \gamma)}{z_1} + \frac{G^*(z_1, \gamma)}{z_1} \cdot \frac{G^*(z, \gamma)}{z} \right]. \quad (9.5) \end{aligned}$$

Рассмотрим структуру $G^*(z, \gamma)$ и $G^*(z, \gamma) F_x^*(z)$, представляющих собой дробно-рациональные функции от аргумента z . В общем случае порядки полиномов числителя и знаменателя этих функций могут быть равны между собой. В этом случае указанные функции являются неправильными алгебраическими дробями. Так как нам потребуется в дальнейшем выполнять разложение на простые дроби, то умножение $G^*(z, \gamma)$ и $G^*(z, \gamma) F_x^*(z)$ на z^{-1} (см. (9.5)) дает возможность сразу выделить правильные части из этих выражений, избежав тем самым процедуры деления многочлена на многочлен.

Положим, что изображение $G^*(z, \gamma)$ имеет k полюсов, а изображение $F_x^*(z)$ — l полюсов. Будем считать, что среди полюсов указанных функций нет кратных и совпадающих между собой полюсов. Такое допущение практически не вызывает ограничений. Действительно, корреляционные функции определяются путем аппроксимации результатов эксперимента функциями типа затухающей экспоненты и произведения последней на косинус. Поэтому случаи, когда кратность полюсов больше единицы, могут быть легко устранены без каких-либо натяжек. Что касается функции $G^*(z, \gamma)$, то для полюсов приведенной непрерывной части $W(s)$, отличных от нуля, в практических случаях всегда легко добиться кратности, равной единице; наличие нулевого полюса $W(s)$ и использование наиболее распространенного восстанавливающего элемента нулевого порядка приводит к тому, что $G^*(z, \gamma)$ в этом случае также не имеет кратных полюсов. Те же соображения относятся и к допущению о несовпадении полюсов функций $F_x^*(z)$ и $G^*(z, \gamma)$. Указанные выше ограничения, касающиеся кратности и

совпадения полюсов, не имеют принципиального значения. Все последующее изложение можно было бы вести и для общего случая. Однако это вызвало бы усложнение преобразований и окончательных результатов, неоправданное практической необходимостью.

Итак, с учетом сказанного, разложим функции

$$G^*(z, \gamma) z^{-1} \quad \text{и} \quad G^*(z, \gamma) F_x^*(z) z^{-1} \quad (9.6)$$

на простые дроби

$$\frac{G^*(z, \gamma)}{z} = \sum_{i=0}^k \frac{A_i(\gamma)}{z - p_i}, \quad (9.7)$$

$$\frac{G^*(z, \gamma) F_x^*(z)}{z} = \sum_{j=0}^{k+l} \frac{B_j(\gamma)}{z - p_j}, \quad (9.8)$$

где p_i — точки полюсов первой функции (9.6), а p_j — точки полюсов второй, $A_i(\gamma)$, $B_j(\gamma)$ — постоянные, определяемые по известным правилам. В выражениях (9.7) и (9.8) значения индексов i и j , равные нулю, учитывают нулевые полюсы $p_{i=0} = p_{j=0} = 0$ функций $G^*(z, \gamma) z^{-1}$ и $F_x^*(z) z^{-1}$ в том случае, когда

$$A_0(\gamma) = G^*(0, \gamma) \neq 0, \quad B_0(\gamma) = G^*(0, \gamma) F_x^*(0) \neq 0.$$

Проиллюстрируем особенности разложения по формулам (9.7) и (9.8) на простейшем примере.

Пример. Пусть дискретная система состоит из объекта с передаточной функцией

$$W_1(s) = \frac{K}{s(s+a)}$$

и нулевого восстанавливающего элемента. Тогда

$$\begin{aligned} G^*(z, \gamma) &= \mathcal{Z}_\gamma \left\{ \frac{K}{s(s+a)} \cdot \frac{1 - e^{-sT}}{s} \right\} = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}_\gamma \left\{ \frac{K}{s^2(s+a)} \right\} = \\ &= \frac{TK}{a(z-1)} + \frac{K(a\gamma T - 1)}{a^2} + \frac{Ke^{-aT\gamma}(z-1)}{a^2(z - e^{-aT})}; \\ \frac{G^*(z, \gamma)}{z} &= \frac{KT}{az(z-1)} + \frac{K(a\gamma T - 1)}{a^2 z} + \frac{Ke^{-aT\gamma}(z-1)}{a^2 z(z - e^{-aT})}. \end{aligned}$$

Разложим первый и третий члены последнего выражения на простые дроби

$$\frac{KT}{az(z-1)} = -\frac{KT}{a} \cdot \frac{1}{z} + \frac{KT}{a} \cdot \frac{1}{z-1},$$

$$\frac{Ke^{-aT\gamma}(z-1)}{a^2z(z-e^{-aT})} = \frac{Ke^{-aT\gamma}}{a^2e^{-aT}} \cdot \frac{1}{z} + \frac{K[e^{-aT\gamma} - e^{aT(1-\gamma)}]}{a^2} \cdot \frac{1}{z - e^{-aT}}.$$

Отсюда окончательно получаем

$$\frac{G^*(z, \gamma)}{z} = \frac{K[e^{aT(1-\gamma)} - aT(1-\gamma) - 1]}{a^2} \cdot \frac{1}{z} +$$

$$+ \frac{KT}{a} \cdot \frac{1}{z-1} + \frac{K[e^{-aT\gamma} - e^{aT(1-\gamma)}]}{a^2} \cdot \frac{1}{z - e^{-aT}}.$$

Следовательно,

$$A_0(\gamma) = G^*(0, \gamma) = \frac{K[e^{aT(1-\gamma)} - aT(1-\gamma) - 1]}{a^2},$$

$$A_1(\gamma) = \frac{KT}{a}, \quad A_2(\gamma) = \frac{K[e^{-aT\gamma} - e^{aT(1-\gamma)}]}{a^2}.$$

Таким образом, мы выполнили приведение дробно-рациональной функции $G^*(z, \gamma)$ к виду (9.7), не выделяя ее целой части. Разделив эту функцию предварительно на z , мы далее действовали обычным способом. Заметим, что в частных случаях (например, когда $\gamma=0$) использование формул (9.7) и (9.8) существенно упрощается.

Вернемся теперь к вопросу определения изображения (9.5) и соответствующего ему оригинала. Подставив в формулу (9.5) выражения (9.7) и (9.8) с параметром z и аналогичные им с параметром z_1 , получаем

$$\Phi_y^*(z, z_1, \gamma) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k+1} A_i(\gamma) B_j(\gamma) F^*(p_i, p_j) -$$

$$- \frac{K_x(0)}{2} \sum_{i=0}^k \sum_{r=0}^k A_i(\gamma) A_r(\gamma) F^*(p_i, p_r), \quad (9.9)$$

где

$$F^*(p_i, p_j) = \frac{zz_1}{zz_1 - 1} \left[\frac{1}{(z-p_i)(z_1-p_j)} + \frac{1}{(z-p_j)(z_1-p_i)} \right], \quad (9.10)$$

а $F^*(p_i, p_r)$ имеет тот же вид, что и выражение (9.10), в котором индекс j заменен на r . Найдем оригинал $f[nT, n_1T]$, отвечающий двумерному изображению (9.10). Обозначим слагаемые $F^*(p_i, p_j)$ через

$$F_1^*(p_i, p_j) = \frac{zz_1}{(zz_1 - 1)(z - p_i)(z_1 - p_j)}, \quad (9.11)$$

$$F_2^*(p_i, p_j) = \frac{zz_1}{(zz_1 - 1)(z - p_j)(z_1 - p_i)} \quad (9.12)$$

и определим соответствующие им оригиналы $f_1[nT, n_1T]$ и $f_2[nT, n_1T]$. Воспользуемся для этого формулой обращения двумерного z -преобразования (4.36):

$$f_1[nT, n_1T] = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma_1} \frac{z^n z_1^{n_1}}{(zz_1 - 1)(z - p_i)(z - p_j)} dz dz_1.$$

Запишем это выражение в виде

$$f_1[nT, n_1T] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{z^n}{z - p_i} \left[\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} \frac{z_1^{n_1}}{(zz_1 - 1)(z_1 - p_j)} dz_1 \right] dz. \quad (9.13)$$

Используя теорему о вычетах, получаем

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} \frac{z_1^{n_1}}{(zz_1 - 1)(z_1 - p_j)} dz_1 = \frac{p_j^{n_1} - z^{-n_1}}{zp_j - 1},$$

откуда

$$f_1[nT, n_1T] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{p_j^{n_1} z^n - z^{n-n_1}}{(z - p_i)(zp_j - 1)} dz.$$

В числитель подинтегральной функции последнего выражения входит член z^{n-n_1} , поэтому применение формулы обращения одномерного z -преобразования возможно лишь при положительных значениях разности $n - n_1$ (см. также п. 3 § 6). Действительно, обозначая $n - n_1 = \nu$, откуда $n = \nu + n_1$, имеем функцию $f_1[\nu T]$ переменной ν , зависящую также от параметра n_1 . Для этой функции формула обращения может быть применена при $\nu > 0$ [62]. Таким образом, при $n > n_1$ из

последнего выражения находим

$$f_1[nT, n_1T] = \frac{p_i^{n-n_1}}{1-p_i p_j} (1 - p_i^n p_j^{n_1}) \quad (9.14)$$

(зависимость функции $f_1[nT, n_1T]$ от T определяется зависимостью p_i и p_j от T). Для того чтобы найти функцию $f_1[nT, n_1T]$ при $n < n_1$, запишем выражение (9.13) в виде

$$f_1[nT, n_1T] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} \frac{z_1^{n_1}}{z_1 - p_j} \left[\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{z^n}{(z z_1 - 1)(z - p_i)} dz \right] dz_1,$$

в результате чего при вычислении внешнего интеграла подынтегральная функция будет содержать член $z_1^{n_1-n}$ с положительным показателем степени. Выполнив преобразования, аналогичные проделанным выше, находим, что при $n < n_1$

$$f_1[nT, n_1T] = \frac{p_j^{n_1-n}}{1-p_i p_j} (1 - p_i^n p_j^{n_1}). \quad (9.15)$$

При $n = n_1$ выражения (9.14) и (9.15) совпадают. Для получения единой формулы введем новые переменные $\nu = n - n_1$ и $N = \min(n, n_1)$. Если $n \geq n_1$, то $n - n_1 = |\nu|$ и $N = n_1$; если $n_1 \geq n$, то $n_1 - n = -\nu = |\nu|$ и $N = n$. С учетом новых обозначений выражения (9.14) и (9.15) принимают вид

$$f_1[nT, n_1T] = \begin{cases} \frac{p_i^{|\nu|}}{1-p_i p_j} [1 - (p_i p_j)^N] & \text{при } n \geq n_1, \\ \frac{p_j^{|\nu|}}{1-p_i p_j} [1 - (p_i p_j)^N] & \text{при } n \leq n_1. \end{cases} \quad (9.16)$$

Так как двумерные изображения $F_1^*(p_i, p_j)$ и $F_2^*(p_i, p_j)$ ((9.11) и (9.12)) симметричны относительно p_i и p_j , то на основании (9.16) получаем

$$f_2[nT, n_1T] = \begin{cases} \frac{p_j^{|\nu|}}{1-p_i p_j} [1 - (p_i p_j)^N] & \text{при } n \geq n_1, \\ \frac{p_i^{|\nu|}}{1-p_i p_j} [1 - (p_i p_j)^N] & \text{при } n \leq n_1. \end{cases} \quad (9.17)$$

Складывая формулы (9.16) и (9.17), находим, что двумерному z -изображению $F^*(p_i, p_j)$ (9.10) при всех значениях $n \geq 0$ и $n_1 \geq 0$ соответствует оригинал

$$f[nT, n_1T] = \frac{1}{1 - p_i p_j} (p_i^{n_1} + p_j^{n_1}) [1 - (p_i p_j)^N]. \quad (9.18)$$

Таким образом, в пространстве оригиналов изображению (9.9) соответствует

$$\begin{aligned} & K_y[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma)T] = \\ &= \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k+i} \frac{A_i(\gamma) B_j(\gamma)}{1 - p_i p_j} (p_i^{n_1} + p_j^{n_1}) [1 - (p_i p_j)^N] - \\ & - \frac{K_x(0)}{2} \sum_{i=0}^k \sum_{r=0}^k \frac{A_i(\gamma) A_r(\gamma)}{1 - p_i p_r} (p_i^{n_1} + p_r^{n_1}) [1 - (p_i p_r)^N]. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Выражение (9.19) позволяет определить корреляционную функцию выходной переменной дискретной системы в переходном режиме; для этого необходимо знать передаточную функцию дискретной системы и корреляционную функцию входной переменной.

Возможны некоторые частные случаи, имеющие практический интерес, когда между величинами p_i и p_j существуют определенные соотношения. Рассмотрим, какой вид принимают при этом основные соотношения (9.10) и (9.18).

а) Пусть $p_i = p_j = p$, тогда

$$F^*(p, p) = \frac{2zz_1}{(zz_1 - 1)(z - p)(z_1 - p)}, \quad (9.20)$$

$$f[nT, n_1T] = \frac{2p^{n_1}}{1 - p^2} (1 - p^{2N}). \quad (9.21)$$

б) Если $p_j = p_i = 1$, то

$$F^*(1, 1) = \frac{2zz_1}{(zz_1 - 1)(z - 1)(z_1 - 1)}, \quad (9.22)$$

выражение же (9.18) становится неопределенным. Раскрывая неопределенность, находим, что в этом случае

$$f[nT, n_1T] = 2N. \quad (9.23)$$

в) Наконец, когда $p_i = p$ и $p_j = p_i^{-1} = p^{-1}$, то

$$F^*(p, p^{-1}) = \frac{zz_1}{zz_1 - 1} \left[\frac{1}{(z - p)(z_1 - p^{-1})} + \frac{1}{(z - p^{-1})(z_1 - p)} \right]. \quad (9.24)$$

В этом случае выражение (9.18) также становится неопределенным. Раскрывая эту неопределенность, получаем, что

$$f[nT, n_1T] = N(p^{|v|} + p^{-|v|}). \quad (9.25)$$

Найдем теперь выражения для определения математического ожидания $m_y[(n + \gamma)T]$ выходной переменной дискретной системы. На основании (9.1) и (9.7) получаем

$$M_y^*(z, \gamma) = \frac{m_x}{z - 1} \sum_{i=0}^k \frac{A_i(\gamma) z}{z - p_i}. \quad (9.26)$$

Так как изображению

$$\frac{z}{(z - 1)(z - p_i)} = \frac{1}{1 - p_i} \left(\frac{z}{z - 1} - \frac{z}{z - p_i} \right)$$

соответствует оригинал

$$\frac{1 - p_i^n}{1 - p_i},$$

то из (9.26) определяем

$$m_y[(n + \gamma)T] = m_x \sum_{i=0}^k \frac{A_i(\gamma)(1 - p_i^n)}{1 - p_i}. \quad (9.27)$$

Найдем далее выражение для начального момента второго порядка выходной переменной. На основании формулы (9.4), определяющей изображение указанной статистической характеристики, получаем

$$\begin{aligned} & \Pi_y[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma_1)T] = \\ & = m_y[(n + \gamma)T] m_y[(n_1 + \gamma_1)T] + K_y[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma_1)T], \end{aligned} \quad (9.28)$$

где члены, входящие в правую часть этой формулы, определяются выражениями (9.27) и (9.19).

Если бы при определении корреляционной функции выходной переменной вместо (8.13) мы воспользовались

другой формулой — (8.16), то получили бы выражения, отличающиеся от (9.18) и (9.19) лишь тем, что в них вместо величины N всюду присутствовала бы величина $N + 1$. То же самое имело бы место для формул (9.21), (9.23) и (9.25). Отметим, что при $n = n_1 = 0$ из формулы (9.19), соответствующей случаю фиксации левого значения входной переменной, следует $K_y[0, 0] = 0$. Для случая фиксации правого значения входного воздействия, когда в формулу (9.19) входит $N + 1$, при $n = n_1 = 0$ получаем

$$K_y[0, 0] = 2 \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k+l} A_i(\gamma) B_j(\gamma) - K_x(0) \sum_{i=0}^k \sum_{r=0}^k A_i(\gamma) A_r(\gamma),$$

причем $K_y[0, 0] = 0$ лишь, если $g[0] = 0$ (см. § 8).

2. Случай комплексных полюсов. Если среди полюсов функции (9.6) имеются комплексные, то при использовании формулы (9.18) потребуются дополнительные преобразования для освобождения от мнимых членов. Комплексные величины могут появиться, если корреляционная функция входного сигнала содержит тригонометрическую функцию, а также когда указанные функции входят в импульсную функцию системы. Поэтому в формуле (9.9) вместо двумерного изображения (9.10) возможны две следующие структуры:

$$\Phi^*(z, z_1) = \frac{zz_1}{zz_1 - 1} \left[\frac{1}{z - p} \cdot \frac{cz_1 + d}{z_1^2 + az_1 + b} + \frac{1}{z_1 - p} \cdot \frac{cz + d}{z^2 + az + b} \right], \quad (9.29)$$

$$\Phi^*(z, z_1) = \frac{zz_1}{zz_1 - 1} \left[\frac{c_1z + d_1}{z^2 + a_1z + b_1} \cdot \frac{c_2z_1 + d_2}{z_1^2 + a_2z_1 + b_2} + \frac{c_1z_1 + d_1}{z_1^2 + a_1z_1 + b_1} \cdot \frac{c_2z + d_2}{z^2 + a_2z + b_2} \right], \quad (9.30)$$

где p — вещественное, $b > a^2/4$, $b_1 > a_1^2/4$, $b_2 > a_2^2/4$. Рассмотрим вначале выражение (9.29). Путем разложения на простые дроби находим

$$\frac{cz + d}{z^2 + az + b} = \frac{A}{z - \lambda} + \frac{\bar{A}}{z - \bar{\lambda}}, \quad (9.31)$$

где λ и $\bar{\lambda}$ — сопряженные корни знаменателя левой части (9.31):

$$\lambda = -\frac{a}{2} + j \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2}, \quad (9.32)$$

$$A = \frac{c\lambda + d}{\lambda - \bar{\lambda}} = \frac{c}{2} + j \frac{ac - 2d}{2\sqrt{4b - a^2}}. \quad (9.33)$$

Подставив выражение (9.31) в формулу (9.29), получаем

$$\Phi^*(z, z_1) = AF^*(p, \lambda) + \bar{A}F^*(p, \bar{\lambda}), \quad (9.34)$$

где $F^*(p, \lambda)$ и $F^*(p, \bar{\lambda})$ определяются формулой (9.10) при $p_i = p$ и $p_j = \lambda, \bar{\lambda}$. Используя формулу (9.18), получаем оригинал, соответствующий изображению (9.34), который после преобразований может быть приведен к виду

$$f[nT, n_1T] = 2 \{p^{|\nu|} \operatorname{Re}[B] + \operatorname{Re}[B\lambda^{|\nu|}] - p^{|\nu|+N} \operatorname{Re}[B\lambda^N] - p^N \operatorname{Re}[B\lambda^{|\nu|+N}]\}, \quad (9.35)$$

где

$$B = \frac{A}{1 - p\lambda}.$$

Найдем выражение комплексной величины B через постоянные a, b, c, d и p . Обозначим

$$A = |A| e^{j\varphi}, \quad 1 - p\lambda = |1 - p\lambda| e^{j\psi}.$$

Отсюда

$$B = \frac{|A|}{|1 - p\lambda|} e^{j(\varphi - \psi)} = |B| e^{j(\varphi - \psi)}. \quad (9.36)$$

Используя выражения (9.32) и (9.33), получаем

$$|B| = \sqrt{\frac{c^2b - acd + d^2}{(4b - a^2)(1 + ap + p^2b)}},$$

$$\cos \varphi = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{4b - a^2}{c^2b - acd + d^2}},$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{ac - 2d}{\sqrt{c^2b - acd + d^2}},$$

$$\cos \psi = \frac{2 + ap}{2\sqrt{1 + ap + p^2b}},$$

$$\sin \psi = -\frac{p}{2} \sqrt{\frac{4b - a^2}{1 + ap + p^2b}}.$$

Для комплексного корня λ находим

$$\lambda = \sqrt{b} e^{i\theta},$$

где

$$\cos \theta = -\frac{a}{2\sqrt{b}}, \quad \sin \theta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4b - a^2}{b}}.$$

Выше для однозначного определения углов φ , ψ и θ в диапазоне от 0 до 2π приведены формулы как для синусов, так и для косинусов этих углов. В соответствии с формулой (9.35) нужно знать комплексную величину λ^k возведенную в некоторую степень k , т. е.

$$\lambda^k = (\sqrt{b})^k e^{ik\theta}.$$

На основании формулы (9.36) и последнего выражения находим для типовых членов равенства (9.35)

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[B] &= |B| \cos(\varphi - \psi), \\ \operatorname{Re}[B\lambda^k] &= |B| (\sqrt{b})^k \cos(\varphi - \psi + k\theta). \end{aligned} \quad (9.37)$$

Величины, входящие в формулы (9.37), определены выше. Подставив выражения (9.37) в равенство (9.35), находим окончательную формулу для оригинала, которая приведена в таблице 3.1. С помощью аналогичных преобразований двумерное изображение (9.30) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \Phi^*(z, z_1) &= A_1 A_2 F^*(\lambda_1, \lambda_2) + \bar{A}_1 A_2 F^*(\bar{\lambda}_1, \lambda_2) + \\ &+ A_1 \bar{A}_2 F^*(\lambda_1, \bar{\lambda}_2) + \bar{A}_1 \bar{A}_2 F^*(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2), \end{aligned} \quad (9.38)$$

где A_1 , A_2 , λ_1 и λ_2 выражаются формулами, подобными (9.33) и (9.32) с соответствующими индексами. Оригинал, отвечающий изображению (9.38), после использования формулы (9.18) приводится к виду

$$\begin{aligned} f[nT, n_1T] &= 2 \{ \operatorname{Re}[C\lambda_1^{v|}] + \operatorname{Re}[C\lambda_2^{v|}] - \\ &- \operatorname{Re}[C\lambda_1^{v|+N}\lambda_2^N] - \operatorname{Re}[C\lambda_1^N\lambda_2^{v|+N}] \} + 2 \{ \operatorname{Re}[D\bar{\lambda}_1^{v|}] + \\ &+ \operatorname{Re}[D\lambda_2^{v|}] - \operatorname{Re}[D\bar{\lambda}_1^{v|+N}\lambda_2^N] - \operatorname{Re}[D\bar{\lambda}_1^N\lambda_2^{v|+N}] \}, \end{aligned} \quad (9.39)$$

где

$$C = \frac{A_1 A_2}{1 + \lambda_1 \lambda_2}, \quad D = \frac{\bar{A}_1 A_2}{1 - \bar{\lambda}_1 \lambda_2}.$$

Т а б л и ц а 3.1

$F^*(z, z_1) = \frac{zz_1}{zz_1 - 1} \left[\frac{1}{(z - p_i)(z_1 - p_j)} + \frac{1}{(z - p_j)(z_1 - p_i)} \right],$ $f[nT, n_1T] = \frac{1}{1 - p_i p_j} (p_i^{ \nu } + p_j^{ \nu }) [1 - (p_i p_j)^N],$ <p>где</p> $\nu = n - n_1, \quad N = \min(n, n_1)$	(1)
$F^*(z, z_1) = \frac{2zz_1}{(zz_1 - 1)(z - p)(z_1 - p)},$ $f[nT, n_1T] = \frac{2p^{ \nu }}{1 - p^2} (1 - p^{2N})$	(2)
$F^*(z, z_1) = \frac{2zz_1}{(zz_1 - 1)(z - 1)(z_1 - 1)}, \quad f[nT, n_1T] = 2N$	(3)
$F^*(z, z_1) = \frac{zz_1}{zz_1 - 1} \left[\frac{1}{(z - p)(z_1 - p^{-1})} + \frac{1}{(z - p^{-1})(z_1 - p)} \right],$ $f[nT, n_1T] = N(p^{ \nu } + p^{- \nu })$	(4)
$\Phi^*(z, z_1) = \frac{zz_1}{zz_1 - 1} \left[\frac{1}{z - p} \cdot \frac{cz_1 + d}{z_1^2 + az_1 + b} + \frac{1}{z_1 - p} \cdot \frac{cz + d}{z^2 + az + b} \right],$ <p>p — вещественное, $b > a^2/4$,</p> $f[nT, n_1T] = r [p^{ \nu } \cos \omega + q^{ \nu } \cos(\omega + \nu \theta)] -$ $- r (pq)^N [p^{ \nu } \cos(\omega + N\theta) + q^{ \nu } \cos(\omega + (\nu + N)\theta)],$ <p>где</p> $r = 2 \sqrt{\frac{D}{EK}}, \quad \omega = \varphi - \psi, \quad \cos \varphi = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{E}{D}},$ $\sin \varphi = \frac{1}{2} \frac{ac - 2d}{\sqrt{D}}, \quad \cos \psi = \frac{2 + ap}{2\sqrt{K}}, \quad \sin \psi = -\frac{p}{2} \sqrt{\frac{E}{K}},$ $\cos \theta = -\frac{a}{2\sqrt{b}}, \quad \sin \theta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E}{b}}, \quad q = \sqrt{b},$ $D = c^2b - acd + d^2, \quad E = 4b - a^2, \quad K = 1 + ap + p^2b$	(5)

Продолжение

$$\Phi^*(z, z_1) = \frac{zz_1}{zz_1 - 1} \left[\frac{c_1 z + d_1}{z^2 + a_1 z + b_1} \cdot \frac{c_2 z_1 + d_2}{z_1^2 + a_2 z + b_2} + \frac{c_1 z_1 + d_1}{z_1^2 + a_1 z_1 + b_1} \cdot \frac{c_2 z + d_2}{z^2 + a_2 z + b_2} \right],$$

$$f[nT, n_1 T] = r_1 \{q_1^{|\nu|} \cos(\omega_1 + |\nu| \theta_1) + q_2^{|\nu|} \cos(\omega_1 + |\nu| \theta_2)\} - r_1 (q_1 q_2)^N \{q_1^{|\nu|} \cos[\omega_1 + |\nu| \theta_1 + N(\theta_1 + \theta_2)] + q_2^{|\nu|} \times \times \cos[\omega_1 + |\nu| \theta_2 + N(\theta_1 + \theta_2)]\} + r_2 \{q_1^{|\nu|} \cos(\omega_2 - |\nu| \theta_1) + q_2^{|\nu|} \cos(\omega_2 + |\nu| \theta_2)\} - r_2 (q_1 q_2)^N \{q_1^{|\nu|} \cos[\omega_2 - |\nu| \theta_1 + (\theta_2 - \theta_1) N] + q_2^{|\nu|} \cos[\omega_2 + |\nu| \theta_2 + (\theta_2 - \theta_1) N]\},$$

где

$$r_i = 2 \sqrt{\frac{D_i D_2}{E_1 E_2 K_i}}, \quad \omega_1 = \varphi_1 + \varphi_2 - \psi_i,$$

$$\omega_2 = -\varphi_1 + \varphi_2 - \psi_2, \quad \cos \varphi_i = \frac{c_i}{2} \sqrt{\frac{E_i}{D_i}}, \quad (6)$$

$$\sin \varphi_i = \frac{1}{2} \frac{a_i c_i - 2d_i}{\sqrt{D_i}},$$

$$\cos \psi_i = \frac{4 - a_1 a_2 + (-1)^{i+1} \sqrt{E_1 E_2}}{4 \sqrt{K_i}},$$

$$\sin \psi_i = \frac{(-1)^{i+1} a_2 \sqrt{E_1} + a_1 \sqrt{E_2}}{4 \sqrt{K_i}}, \quad \cos \theta_i = -\frac{a_i}{2 \sqrt{b_i}},$$

$$\sin \theta_i = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_i}{b_i}}, \quad q_i = \sqrt{b_i}, \quad D_i = c_i^2 b_i - a_i c_i d_i + d_i^2,$$

$$E_i = 4b_i - a_i^2, \quad K_1 = 1 - \frac{a_1 a_2}{2} + b_1 b_2 + \frac{1}{2} \sqrt{E_1 E_2},$$

$$K_2 = 1 - \frac{a_1 a_2}{2} + b_1 b_2 - \frac{1}{2} \sqrt{E_1 E_2}, \quad i = 1, 2$$

Далее, найдя выражения комплексных величин C , D , λ_1 и λ_2 через постоянные $a_1, \dots, d_1, a_2, \dots, d_2$, подобно тому, как это было сделано выше, получаем окончательное выражение для оригинала (9.39). Последнее приведено в таблице 3.1.

Формулы, полученные в настоящем параграфе и объединенные в таблице 3.1, являются основными расчетными соотношениями, которые могут быть использованы во многих практических задачах для определения статистических характеристик выходной переменной дискретной автоматической системы в переходном режиме. Ниже приведен пример, иллюстрирующий применение полученных формул.

3. Пример определения корреляционной функции.

Положим, что на вход дискретной системы, состоящей из цифровой машины и восстанавливающего элемента нулевого порядка, подается случайная функция $x(t)$, характеризующаяся корреляционной функцией

$$K_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau.$$

ЦВМ осуществляет операцию численного интегрирования случайной функции $x(t)$ на основе использования способа прямоугольников (эффектом квантования по уровню пренебрежем). Определим корреляционную функцию выходной переменной. Следовательно,

$$G^*(z) = D^*(z) W^*(z) = \frac{Tz}{z-1} \mathcal{L} \left\{ \frac{1-e^{-sT}}{s} \right\} = \frac{Tz}{z-1},$$

$$K_x[nT] = D_x e^{-\alpha T n} \cos \beta T n \quad (n \geq 0),$$

$$F_x^*(z) = \frac{D_x z (z - e^{-\alpha T} \cos \beta T)}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}},$$

$$\frac{G^*(z)}{z} = \frac{T}{z-1},$$

$$\frac{G^*(z) F_x^*(z)}{z} = \frac{D_x T z (z - e^{-\alpha T} \cos \beta T)}{(z-1)(z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T})}.$$

Разложим последнее выражение на простые дроби, имея в виду, что полином второго порядка в знаменателе имеет комплексные корни

$$\frac{G^*(z) F_x^*(z)}{z} = \frac{ID_x}{z-1} + \frac{D_x (cz + d)}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}}, \quad (9.40)$$

где l , c и d — постоянные, выражения для которых приведены ниже. Подставив $z^{-1}G^*(z)$ и $z^{-1}G^*(z)F_x^*(z)$ в формулу (9.5), находим

$$\begin{aligned} \Phi_y^*(z, z_1) = & lTD_x \frac{2zz_1}{(zz_1 - 1)(z - 1)(z_1 - 1)} - \\ & - \frac{T^2 D_x}{2} \cdot \frac{2zz_1}{(zz_1 - 1)(z - 1)(z_1 - 1)} + \\ & + TD_x \frac{zz_1}{zz_1 - 1} \left[\frac{1}{z - 1} \cdot \frac{cz_1 + d}{z_1^2 - 2z_1 e^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{z_1 - 1} \cdot \frac{cz + d}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}} \right]. \quad (9.41) \end{aligned}$$

В обозначениях, использованных в выражении (5) таблицы 3.1, имеем

$$a = -2e^{-\alpha T} \cos \beta T, \quad b = e^{-2\alpha T}, \quad c = \frac{T}{K} (e^{-\alpha T} - \cos \beta T) e^{-\alpha T},$$

$$d = \frac{T}{K} (1 - e^{-\alpha T} \cos \beta T) e^{-2\alpha T}, \quad l = \frac{T}{K} (1 - e^{-\alpha T} \cos \beta T),$$

$$p = 1, \quad E = 4e^{-2\alpha T} \sin^2 \beta T, \quad K = e^{-2\alpha T} - 2e^{-\alpha T} \cos \beta T + 1,$$

$$D = \frac{T^2}{K} e^{-4\alpha T} \sin^2 \beta T, \quad r = \frac{T}{K} e^{-\alpha T}, \quad q = e^{-\alpha T},$$

$$\cos \theta = \cos \beta T, \quad \sin \theta = \sin \beta T, \quad \text{т. е. } \theta = \beta T,$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{K}} (e^{-\alpha T} - \cos \beta T), \quad \sin \varphi = -\frac{\sin \beta T}{\sqrt{K}},$$

$$\cos \psi = \frac{1}{\sqrt{K}} (1 - e^{-\alpha T} \cos \beta T), \quad \sin \psi = -\frac{e^{-\alpha T} \sin \beta T}{\sqrt{K}},$$

$$\varphi - \psi = \omega.$$

Первому и второму членам изображения (9.41) отвечает оригинал (3) таблицы 3.1, а третьему члену оригинал (5) той же таблицы. Используя указанные выражения, находим, что изображению (9.41) в целом отвечает оригинал

$$\begin{aligned} K_y[nT, n_1T] = & 2lD_x T N - D_x T^2 N + \\ & + TD_x r \{ \cos \omega + e^{-\alpha T |v|} \cos(\omega + \beta T |v|) \} - \\ & - TD_x r e^{-\alpha T N} \{ \cos(\omega + \beta T N) + \\ & + e^{-\alpha T |v|} \cos[\omega + \beta T (|v| + N)] \}. \quad (9.42) \end{aligned}$$

Последнее выражение после простых преобразований приводится к следующему виду:

$$K_y[nT, n_1T] = 2lD_xTN - D_xT^2N + \\ + TD_xr \{ \cos \omega [1 + e^{-\alpha T} |\nu| \cos \beta T |\nu| - e^{-\alpha TN} \cos \beta TN - \\ - e^{-\alpha T(N+|\nu|)} \cos(\beta T(N+|\nu|))] - \sin \omega [e^{-\alpha T} |\nu| \sin \beta T |\nu| - \\ - e^{-\alpha TN} \sin \beta TN - e^{-\alpha T(N+|\nu|)} \sin(\beta T(N+|\nu|))] \}, \quad (9.43)$$

где $\cos \omega$ и $\sin \omega$ выражаются через тригонометрические функции $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, $\sin \psi$ и $\cos \psi$:

$$\cos \omega = \frac{1}{K} (2e^{-\alpha T} - \cos \beta T - e^{-2\alpha T} \cos \beta T),$$

$$\sin \omega = \frac{1}{K} (e^{-2\alpha T} - 1) \sin \beta T.$$

Выражение (9.43) и представляет собой искомую корреляционную функцию выходной переменной рассматриваемой системы. Найдем предел выражения (9.43) при $T \rightarrow 0$, что отвечает выражению корреляционной функции выходной переменной непрерывной системы, которая получается из данной дискретной при указанном предельном переходе. В нашем случае

$$\lim_{T \rightarrow 0} G^*(z) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{T e^{sT}}{e^{sT} - 1} = \frac{1}{s},$$

т. е. непрерывная система представляет собой интегрирующее звено. Следовательно, при $T \rightarrow 0$ и $Tn \rightarrow t$, $Tn_1 \rightarrow t_1$, $|\nu|T \rightarrow |\tau|$, $NT \rightarrow t_m$ (где $\tau = t - t_1$, $t_m = \min(t, t_1)$) формула (9.43) должна перейти в выражение корреляционной функции выходной переменной непрерывной системы с передаточной функцией $1/s$, на вход которой подается принятая в примере случайная функция. Действительно, учитывая, что

$$\lim_{T \rightarrow 0} l = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \lim_{T \rightarrow 0} Tr = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2},$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} T^2N = 0, \quad \lim_{T \rightarrow 0} \cos \omega = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2},$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} \sin \omega = -\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2},$$

из формулы (9.43) находим выражение

$$K_y(t, t_1) = \frac{D_x}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \{2\alpha(\alpha^2 + \beta^2)t_m + (\beta^2 - \alpha^2) \times \\ \times [1 + e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau - e^{-\alpha t_m} \cos \beta t_m - \\ - e^{-\alpha(|\tau| + t_m)} \cos(\beta(|\tau| + t_m))] + 2\alpha\beta [e^{-\alpha|\tau|} \sin \beta|\tau| - \\ - e^{-\alpha t_m} \sin \beta t_m - e^{-\alpha(|\tau| + t_m)} \sin(\beta(|\tau| + t_m))]\}, \quad (9.44)$$

которое получается для непрерывного случая в результате применения формул работы [47].

§ 10. Способы определения дисперсии выходной переменной дискретной системы в переходном режиме

1. **Определение дисперсии из выражения для корреляционной функции.** Зависимость дисперсии от времени (8.6) в общем виде была получена выше. Из сравнения формул (8.4) и (8.6) видно, что выражение для дисперсии получается из выражения для корреляционной функции при $n_1 = n$. Этому соотношению переменных соответствует

$$\nu = n - n_1 = 0, \quad N = \min(n, n_1) = n. \quad (10.1)$$

Подставив значения $\nu = 0$ и $N = n$ в формулу (9.19), находим

$$D_y[(n + \nu)T] = K_y[(n + \nu)T, (n + \nu)T] = \\ = 2 \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k+i} \frac{A_i(\nu) B_j(\nu)}{1 - p_i p_j} [1 - (p_i p_j)^n] - \\ - K_x(0) \sum_{i=0}^k \sum_{r=0}^k \frac{A_i(\nu) A_r(\nu)}{1 - p_i p_r} [1 - (p_i p_r)^n]. \quad (10.2)$$

Формула (10.2) определяет зависимость от времени дисперсии выходной переменной дискретной системы по заданным изображениям $G^*(z, \nu)$ и $F_x^*(z)$. Однако для определения зависимости дисперсии от времени можно получить более простую формулу, нежели выражение (10.2). Для этого найдем оригиналы, соответствующие изображениям $G^*(z, \nu)$ и $G^*(z, \nu) F_x^*(z)$. На основании

формул (9.7) и (9.8) получаем

$$g[(n + \gamma)T] = \sum_{i=0}^k A_i(\gamma) p_i^n, \quad (10.3)$$

$$h[(n + \gamma)T] = \sum_{j=0}^{k+l} B_j(\gamma) p_j^n. \quad (10.4)$$

Заметим, что в случае, когда $G^*(0, \gamma) \neq 0$, выражение $g[(n + \gamma)T]$ содержит член $G^*(0, \gamma) \delta_0[nT]$, где $\delta_0[nT]$ — обобщенная дельта-функция, равная 1 при $n=0$ и нулю в остальных случаях. В принятой выше записи для $g[(n + \gamma)T]$ этому члену соответствует произведение $A_i(\gamma) p_i^n$ при $i=0$ и $p_0=0$. Выражения $G^*(0, \gamma) \delta_0[nT]$ и $A_0(\gamma) p_0^n$ эквивалентны друг другу, так как $A_0(\gamma) = G^*(0, \gamma)$ (см. (9.7)), а при $p_0=0$ можно принять $\delta_0[nT] = p_0^n$ (по аналогии с пределом функции $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1$).

То же обстоятельство имеет место и для функции $h[(n + \gamma)T]$ при $j=0$.

Перемножим функции $g[(n + \gamma)T]$ и $h[(n + \gamma)T]$, а также найдем квадрат $g[(n + \gamma)T]$:

$$g[(n + \gamma)T] h[(n + \gamma)T] = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k+l} A_i(\gamma) B_j(\gamma) (p_i p_j)^n, \quad (10.5)$$

$$g^2[(n + \gamma)T] = \sum_{i=0}^k \sum_{r=0}^k A_i(\gamma) A_r(\gamma) (p_i p_r)^n. \quad (10.6)$$

Найдем суммы левой и правой частей равенства (10.5) по переменной m от 0 до $n-1$:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{n-1} g[(m + \gamma)T] h[(m + \gamma)T] &= \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k+l} A_i(\gamma) B_j(\gamma) (p_i p_j)^m = \\ &= \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k+l} A_i(\gamma) B_j(\gamma) \sum_{m=0}^{n-1} (p_i p_j)^m = \\ &= \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k+l} A_i(\gamma) B_j(\gamma) \frac{1 - (p_i p_j)^n}{1 - p_i p_j}. \quad (10.7) \end{aligned}$$

Аналогично для равенства (10.6) получаем

$$\sum_{m=0}^{n-1} g^2[(m + \gamma)T] = \sum_{i=0}^k \sum_{r=0}^k A_i(\gamma) A_r(\gamma) \frac{1 - (p_i p_r)^n}{1 - p_i p_r}. \quad (10.8)$$

Сравнив выражения (10.7) и (10.8) с формулой (10.2), находим

$$\begin{aligned} D_y[(n + \gamma)T] &= \\ &= 2 \sum_{m=0}^{n-1} g[(m + \gamma)T] h[(m + \gamma)T] - K_x(0) \sum_{m=0}^{n-1} g^2[(m + \gamma)T]. \end{aligned} \quad (10.9)$$

В отдельных случаях для определения зависимости дисперсии от времени можно пользоваться полученным выражением. Так, например, если входным воздействием является дискретный белый шум, для которого в соответствии с (7.64) (при единичной плотности $c_{\frac{n}{n}}^2$)

$$K_x(0) = \frac{1}{T}, \quad F_x^*(z) = \frac{1}{T},$$

$$G^*(z, \gamma) F_x^*(z) = \frac{G^*(z, \gamma)}{T}, \quad h[(n + \gamma)T] = \frac{g[(n + \gamma)T]}{T}.$$

В результате из формулы (10.9) находим

$$D_y[(n + \gamma)T] = \frac{1}{T} \sum_{m=0}^{n-1} g^2[(m + \gamma)T]. \quad (10.10)$$

Зависимость дисперсии от времени в общем случае находится проще всего, если в выражении (10.9) перейти от оригиналов к z -изображениям. Для выполнения указанного перехода воспользуемся теоремой z -преобразования об изображении произведения оригиналов [50], причем сформулируем эту теорему в следующем виде.

Теорема. Если $f_1[(n + \gamma)T]$ и $f_2[(n + \gamma)T]$ — оригиналы с показателями роста c_1 и c_2 , а $F_1^*(z, \gamma)$ и $F_2^*(z, \gamma)$ — соответствующие им изображения, то в области, где действительная часть комплексной переменной $s = \sigma + j\omega$, входящей в показатель степени $e^{sT} = z$, удовлетворяет условию $\sigma > c_1 + c_2$, изображение произведения

указанных функций может быть определено по формуле

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\gamma \{f_1[(n+\gamma)T]f_2[(n+\gamma)T]\} &= \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} F_1^*(\omega, \gamma) F_2^*(z\omega^{-1}, \gamma) \omega^{-1} d\omega, \end{aligned} \quad (10.11)$$

или по формуле

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\gamma \{f_1[(n+\gamma)T]f_2[(n+\gamma)T]\} &= \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_2} F_1^*(z\omega^{-1}, \gamma) F_2^*(\omega, \gamma) \omega^{-1} d\omega, \end{aligned} \quad (10.12)$$

где Γ_1 — контур радиуса $e^{a_1 T}$, а Γ_2 — контур радиуса $e^{a_2 T}$, причем $a_1 > c_1$ и $a_2 > c_2$.

Для доказательства теоремы в равенство

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\gamma \{f_1[(n+\gamma)T]f_2[(n+\gamma)T]\} &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_1[(n+\gamma)T]f_2[(n+\gamma)T]z^{-n} \end{aligned}$$

подставим выражение

$$f_1[(n+\gamma)T] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} F_1^*(\omega, \gamma) \omega^{n-1} d\omega.$$

Находим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\gamma \{f_1[\dots]f_2[\dots]\} &= \\ &= \frac{1}{2\pi j} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \oint_{\Gamma_1} F_1^*(\omega, \gamma) \omega^{n-1} d\omega \right\} f_2[(n+\gamma)T]z^{-n} = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} F_1^*(\omega, \gamma) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} f_2[(n+\gamma)T](z\omega^{-1})^{-n} \right\} \omega^{-1} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} F_1^*(\omega, \gamma) F_2^*(z\omega^{-1}, \gamma) \omega^{-1} d\omega. \end{aligned}$$

Изображение $F_2^*(z\omega^{-1}, \gamma)$ существует, если точка $z\omega^{-1}$ находится в области абсолютной сходимости функции $f_2[(n+\gamma)T]$. При $z = e^{sT}$ и $\omega = e^{vT}$, где $s = \sigma + j\omega$ и $v = a_1 + jb_1$, для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$|z\omega^{-1}| = |e^{(s-v)T}| = e^{(\sigma-a_1)T} > e^{c_2 T}.$$

Следовательно, необходимо, чтобы, в свою очередь, выполнялось неравенство $\sigma - a_1 > c_2$ или $\sigma > a_1 + c_2$. Но по условию теоремы $a_1 > c_1$, следовательно, $\sigma > c_1 + c_2$. Таким образом, формула (10.11) доказана. Аналогично доказывается и формула (10.12).

Чтобы воспользоваться приведенной теоремой, применим z -преобразование к обеим частям равенства (10.9)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\gamma \{D_y [(n + \gamma) T]\} &= D_y^*(z, \gamma) = \\ &= \frac{2}{z-1} \mathcal{L}_\gamma \{g [(n + \gamma) T] h [(n + \gamma) T]\} - \\ &\quad - \frac{K_x(0)}{z-1} \mathcal{L}_\gamma \{g^2 [(n + \gamma) T]\} \quad (10.13) \end{aligned}$$

(при выводе равенства (10.13) учтена теорема z -преобразования об изображении суммы). Применим формулу (10.11) для определения изображения произведений функций в правой части (10.13). Так как

$$\mathcal{L}_\gamma \{h [(n + \gamma) T]\} = G^*(z, \gamma) F_x^*(z),$$

находим

$$\begin{aligned} D_y^*(z, \gamma) &= \frac{1}{\pi_j(z-1)} \oint_{\Gamma_1} G^*(w, \gamma) G^*(zw^{-1}, \gamma) F_x^*(zw^{-1}) w^{-1} dw - \\ &\quad - \frac{K_x(0)}{2\pi_j(z-1)} \oint_{\Gamma_1} G^*(w, \gamma) G^*(zw^{-1}, \gamma) w^{-1} dw, \quad (10.14) \end{aligned}$$

где Γ_1 — контур радиуса $e^{a_1 T}$ ($a_1 > c_1$, c_1 — показатель роста функции $g [(n + \gamma) T]$). Рассмотрим как расположены полюсы подынтегральных функций в (10.14) по отношению к окружности Γ_1 . В соответствии с условием доказанной теоремы $a_1 > c_1$, поэтому полюсы функции $G^*(w, \gamma)$ лежат внутри круга, ограниченного окружностью Γ_1 . Полюсы же функций $G^*(zw^{-1}, \gamma)$ и $F_x^*(zw^{-1})$ лежат вне этого круга. Действительно, пусть $e^{\alpha_i T}$ есть полюс функции $G^*(w, \gamma)$, тогда ему будет соответствовать полюс $ze^{-\alpha_i T}$ функции $G^*(zw^{-1}, \gamma)$. Рассмотрим величину модуля $ze^{-\alpha_i T}$. Так как при доказательстве сформулированной выше теоремы было установлено неравенство $\sigma > a_1 + c_2$, то

$$|ze^{-\alpha_i T}| = e^{\sigma T} e^{-\alpha_i T} > e^{a_1 T} e^{c_2 T} e^{-\alpha_i T}.$$

Функция $G^*(\omega, \gamma)$ является изображением оригинала $g[(n + \gamma)T]$, кроме того, $G^*(\omega, \gamma)$ входит в изображение оригинала $h[(n + \gamma)T]$. Следовательно, $c_2 \geq c_1$, поэтому

$$|ze^{-\alpha_i T}| > e^{\alpha_i T} e^{c_2 T} e^{-\alpha_i T} > e^{\alpha_i T} e^{c_1 T} e^{-\alpha_i T}. \quad (10.15)$$

Но так как $\alpha_i < c_1$, то $e^{\alpha_i T} < e^{c_1 T}$ и $e^{c_1 T} e^{-\alpha_i T} > 1$. Поэтому в неравенстве (10.15) можно опустить два последних члена, в результате чего получаем

$$|ze^{-\alpha_i T}| > e^{\alpha_i T},$$

что и доказывает сформулированное выше утверждение относительно расположения полюсов функции $G^*(z\omega^{-1}, \gamma)$. То же самое имеет место и по отношению к функции $F_x^*(z\omega^{-1})$. Таким образом, при использовании теоремы вычетов, которой мы будем пользоваться ниже для получения интегралов в (10.14), нужно учитывать лишь полюсы функции $G^*(z, \gamma)$, лежащие внутри круга, органиченного контуром Γ_1 , а также полюс, расположенный в нулевой точке.

Положим, что величины p_i при $1 \leq i \leq k$ определяют положение полюсов функции $G^*(z, \gamma)$, причем полюс p_i имеет кратность m_i . Воспользовавшись правилом определения вычетов относительно кратных полюсов, из выражения (10.14) находим

$$\begin{aligned} D_y^*(z, \gamma) &= \frac{2}{z-1} \sum_{i=1}^k \frac{1}{(m_i-1)!} \times \\ &\times \frac{d^{m_i-1}}{dw^{m_i-1}} [G^*(\omega, \gamma) G^*(z\omega^{-1}, \gamma) \times \\ &\times F_x^*(z\omega^{-1}) \omega^{-1} (\omega - p_i)^{m_i}]_{\omega=p_i} - \frac{K_x(0)}{z-1} \sum_{i=1}^k \frac{1}{(m_i-1)!} \times \\ &\times \frac{d^{m_i-1}}{dw^{m_i-1}} [G^*(\omega, \gamma) G^*(z\omega^{-1}, \gamma) \omega^{-1} (\omega - p_i)^{m_i}]_{\omega=p_i} + \\ &+ \frac{1}{z-1} [2G^*(0, \gamma) G^*(\infty, \gamma) F_x^*(\infty) - \\ &- K_x(0) G^*(0, \gamma) G^*(\infty, \gamma)]. \quad (10.16) \end{aligned}$$

Так как $F_x^*(\infty) = K_x(0)$, то в выражении (10.16) вместо последних двух членов можно оставить лишь второй с обратным знаком. Рассмотрим наиболее часто встречающийся случай, когда для функции $G^*(z, \gamma)$ кратность полюсов $m_i = 1$. Обозначим

$$G^*(z, \gamma) = \frac{Q^*(z, \gamma)}{R^*(z)}, \quad F_x^*(z) = \frac{L^*(z)}{M^*(z)}. \quad (10.17)$$

Тогда, учитывая, что

$$[G^*(w, \gamma)(w - p_i)]_{w=p_i} = \frac{Q^*(p_i, \gamma)}{\dot{R}^*(p_i)}, \quad (10.18)$$

где

$$\dot{R}^*(p_i) = \left[\frac{d}{d\omega} R^*(\omega) \right]_{\omega=p_i},$$

из выражения (10.16) находим

$$\begin{aligned} D_y^*(z, \gamma) &= \frac{1}{z-1} \sum_{i=1}^k \frac{p_i^{-1} Q^*(p_i, \gamma) Q^*(z p_i^{-1}, \gamma)}{\dot{R}^*(p_i) R^*(z p_i^{-1})} \times \\ &\times \left[\frac{2L^*(z p_i^{-1})}{M^*(z p_i^{-1})} - K_x(0) \right] + \frac{K_x(0)}{z-1} G^*(0, \gamma) G^*(\infty, \gamma). \end{aligned} \quad (10.19)$$

Таким образом, формулы (10.16) и (10.19) позволяют найти изображение дисперсии выходной переменной в переходном режиме работы дискретной системы, на вход которой подается стационарное случайное воздействие с известной корреляционной функцией. Заметим, что если бы мы воспользовались моделью импульсного элемента, фиксирующего правое значение входной переменной, то в формулах (10.9) и (10.10) верхний предел суммирования равнялся бы n вместо $n-1$, соответственно во всех последующих формулах для изображения дисперсии — (10.13), (10.14), (10.16) и (10.19) в правых частях появился бы множитель z .

Проанализируем выражение (10.19). Учитывая формулу разложения $G^*(z, \gamma)$ на простые дроби (9.7), первое выражение (10.17), а также зависимость (10.18), нетрудно видеть, что

$$\frac{p_i^{-1} Q^*(p_i, \gamma)}{\dot{R}^*(p_i)} = A_i(\gamma). \quad (10.20)$$

Таким образом, формулу (10.19) можно переписать так:

$$\begin{aligned} D_y^*(z, \gamma) = & 2 \sum_{i=1}^k A_i(\gamma) \frac{1}{z-1} G^*(z p_i^{-1}, \gamma) F_x^*(z p_i^{-1}) - \\ & - K_x(0) \sum_{i=1}^k A_i(\gamma) \frac{1}{z-1} G^*(z p_i^{-1}, \gamma) + \\ & + \frac{K_x(0)}{z-1} G^*(0, \gamma) G^*(\infty, \gamma). \end{aligned} \quad (10.21)$$

В соответствии с формулами (9.7) и (9.8)

$$G^*(z p_i^{-1}, \gamma) = \sum_{r=0}^k \frac{A_r(\gamma) z p_i^{-1}}{z p_i^{-1} - p_r} = \sum_{r=0}^k \frac{A_r(\gamma) z}{z - p_r p_i}, \quad (10.22)$$

$$G^*(z p_i^{-1}, \gamma) F_x^*(z p_i^{-1}) = \sum_{j=0}^{k+l} \frac{B_j(\gamma) z p_i^{-1}}{z p_i^{-1} - p_j} = \sum_{j=0}^{k+l} \frac{B_j(\gamma) z}{z - p_j p_i} \quad (10.23)$$

(в выражении (10.22) для удобства переменная суммирования i заменена на r). Подставив последние формулы в (10.21), находим

$$\begin{aligned} D_y^*(z, \gamma) = & 2 \sum_{i=1}^k A_i(\gamma) \sum_{j=0}^{k+l} B_j(\gamma) \frac{z}{(z-1)(z-p_j p_i)} - \\ & - K_x(0) \sum_{i=1}^k A_i(\gamma) \sum_{r=0}^k A_r(\gamma) \frac{z}{(z-1)(z-p_r p_i)} + \\ & + \frac{K_x(0) G^*(0, \gamma) G^*(\infty, \gamma)}{z-1}. \end{aligned} \quad (10.24)$$

Так как изображениям

$$\frac{z}{(z-1)(z-p_j p_i)} \quad \text{и} \quad \frac{z}{(z-1)(z-p_r p_i)}$$

отвечают соответственно оригиналы

$$\frac{1 - (p_j p_i)^n}{1 - p_j p_i} \quad \text{и} \quad \frac{1 - (p_r p_i)^n}{1 - p_r p_i}$$

(см. вывод формулы (9.27)), то изображению (10.24) в целом отвечает оригинал, определяемый выражением

(10.2), полученным ранее другим путем. Заметим, что последнему члену изображения (10.24) отвечают в (10.2) члены при значении индекса суммирования i , равного нулю (а также равной нулю при этом величине $p_{i=0}$). Действительно, в соответствии с формулами (9.7) и (9.8) имеем

$$G^*(0, \gamma) = A_0(\gamma), \quad G^*(\infty, \gamma) F_x^*(\infty) = \sum_{j=0}^{k+l} B_j(\gamma),$$

$$G^*(\infty, \gamma) = \sum_{i=0}^k A_i(\gamma), \quad F_x^*(\infty) = K_x(0). \quad (10.25)$$

Проведенный анализ подтверждает правильность выкладок, проделанных при выводе упоминавшихся выше формул, и иллюстрирует связь полученных выше соотношений.

Для определения зависимости дисперсии от времени в прикладных исследованиях нет необходимости обязательно осуществлять переход от формулы (10.19) к (10.21) и т. д. Вполне достаточно ограничиться формулой (10.19) для определения изображения $D_y^*(z, \gamma)$, а затем осуществить переход к оригиналу $D_y[(n + \gamma)T]$ с помощью любого метода обратного z -преобразования (используя таблицы соответствий, формулу обращения и т. д.). Символически запишем эту операцию в виде зависимости

$$D_y[(n + \gamma)T] = \mathcal{L}_\gamma^{-1} \{D_y^*(z, \gamma)\}. \quad (10.26)$$

Примеры выполнения указанного перехода приведены в конце параграфа. Здесь же ограничимся рассмотрением одного частного, но важного для приложений случая, когда среди членов формулы (10.19) имеются выражения вида

$$\frac{z(cz + d)}{(z - 1)(z^2 + az + b)}, \quad b > \frac{a^2}{4}. \quad (10.27)$$

Подобные члены появляются, когда передаточная функция объекта содержит интегрирующее звено, а корреляционная функция входного воздействия включает тригонометрическую функцию. Раскладывая изображение (10.27) на простые дроби, находим

$$\frac{z(cz + d)}{(z - 1)(z^2 + az + b)} = \frac{A_0 z}{z - 1} + \frac{B_1 z}{z - \lambda} + \frac{\bar{B}_1 z}{z - \bar{\lambda}},$$

где

$$A_0 = \frac{c + d}{1 + a + b}, \quad B_1 = \frac{c\lambda + d}{(\lambda - 1)(\lambda - \bar{\lambda})},$$

а λ определяется формулой (9.32). Учитывая формулы § 9, нетрудно получить, что

$$B_1 = -B|_{\rho=1} \quad \text{и} \quad \lambda - 1 = -(1 - \rho\lambda)|_{\rho=1},$$

следовательно,

$$B_1 = |B|_{\rho=1} \exp[j(\varphi - \psi - \pi)]_{\rho=1}.$$

Таким образом, изображению (10.27) соответствует оригинал

$$f[nT] = \frac{c + d}{K} - r q^n \cos(\varphi - \psi + \theta n), \quad (10.28)$$

где выражения для постоянных q , φ , θ , K , ψ и r приведены в таблице 3.1 (5); в выражениях трех последних постоянных, приведенных в указанной таблице, нужно положить $\rho = 1$.

2. Определение дисперсии исходя из основного соотношения (8. 6). Полагая, что входное воздействие стационарно, запишем выражение (8.6) в следующем виде:

$$D_y[(n + \gamma)T] = \sum_{m=0}^n \sum_{m_1=0}^n g[(n + \gamma - m)T] \times \\ \times g[(n + \gamma - m_1)T] K_x[(m - m_1)T]. \quad (10.29)$$

Заметим, что такая запись выражения корреляционной функции входного воздействия отвечает математической модели импульсного элемента, фиксирующего правое значение входного воздействия. Результат этого будет виден ниже. Представим выражение (10.29) следующим образом:

$$D_y[(n + \gamma)T] = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{m_1=m+1}^n g[(n + \gamma - m)T] \times \\ \times g[(n + \gamma - m_1)T] K_x[(m - m_1)T] + \\ + \sum_{m_1=0}^n \sum_{m=m_1}^n g[(n + \gamma - m)T] \times \\ \times g[(n + \gamma - m_1)T] K_x[(m - m_1)T]. \quad (10.30)$$

Выражение (10.30) следует непосредственно из рассмотрения области изменения переменных m и m_1 , определяемой пределами сумм в формуле (10.29) (ср. с рис. 2.4, где обозначения переменных n и n_1 нужно заменить соответственно на m и m_1). Заменим в правой части выражения (10.30) переменные суммирования. Рассмотрим вначале вторую двойную сумму, где $m \geq m_1$. Выполним замену переменных суммирования m и m_1 с помощью равенств

$$v = m - m_1, \quad \mu = n - m_1.$$

В результате после преобразования и замены пределов суммирования получим, что второй двойной сумме правой части (10.30) отвечает выражение

$$\sum_{\mu=0}^n g[(\mu + \gamma)T] \sum_{v=0}^{\mu} g[(\mu + \gamma - v)T] K_x[vT]. \quad (10.31)$$

В первой двойной сумме (10.30), где $m < m_1$, переменные m и m_1 заменим с помощью равенств

$$v_1 = -v = m_1 - m, \quad \mu_1 = n - m.$$

Находим, что первая двойная сумма правой части (10.30) равна

$$\sum_{\mu_1=1}^n g[(\mu_1 + \gamma)T] \sum_{v_1=1}^{\mu_1} g[(\mu_1 + \gamma - v_1)T] K_x[-v_1T]. \quad (10.32)$$

Добавим к внутренней сумме последнего выражения с противоположными знаками член $g[(\mu_1 + \gamma)T]K_x(0)$, а также опустим индексы у переменных суммирования. Положив в (10.32) нижний предел $\mu_1 = 0$ (что не меняет результата), находим

$$\sum_{\mu=0}^n g[(\mu + \gamma)T] \left\{ \sum_{v=0}^{\mu} g[(\mu + \gamma - v)T] K_x[-vT] - g[(\mu + \gamma)T] K_x(0) \right\}. \quad (10.33)$$

Сложим выражения (10.31) и (10.33). Так как $K_x[-vT] = K_x[vT]$, окончательно получаем

$$D_y[(n + \gamma)T] = 2 \sum_{\mu=0}^n g[(\mu + \gamma)T] \sum_{\nu=0}^{\mu} g[(\mu + \gamma - \nu)T] \times \\ \times K_x[vT] - K_x(0) \sum_{\mu=0}^n g^2[(\mu + \gamma)T]. \quad (10.34)$$

Сравним полученное выражение с формулой (10.9). Так как отличия в обозначениях переменных суммирования не имеют значения,

$$h[(\mu + \gamma)T] = \sum_{\nu=0}^{\mu} g[(\mu + \gamma - \nu)T] K_x[vT];$$

действительно, по определению

$$h[(m + \gamma)T] = \mathcal{Z}_v^{-1}\{G^*(z, \gamma) F_x^*(z)\},$$

с другой стороны,

$$\mathcal{Z}_v \left\{ \sum_{\nu=0}^{\mu} g[(\mu + \gamma - \nu)T] K_x[vT] \right\} = G^*(z, \gamma) F_x^*(z).$$

Поэтому выражения (10.9) и (10.34) отличаются между собой лишь тем, что в (10.9) верхний предел суммирования по m равен $n - 1$, а в (10.34) этот предел равен n . Такое различие обусловлено указанной выше формой записи выражения (10.29) для зависимости дисперсии от времени, отвечающей модели импульсного элемента, фиксирующего правое значение входного воздействия. Ясно, что изображение дисперсии $D_y^*(z, \gamma)$, полученное с помощью формулы (10.34), будет отличаться от изображений (10.14), (10.16) и (10.19) лишь наличием множителя z в правой части. Запишем конечное выражение для определения изображения дисперсии, соответствующее оригиналу (10.34):

$$D_y^*(z, \gamma) = \frac{z}{z-1} \sum_{i=1}^k \frac{p_i^{-1} Q^*(p_i, \gamma) Q^*(z p_i^{-1}, \gamma)}{\dot{R}^*(p_i) R^*(z p_i^{-1})} \times \\ \times \left[\frac{2L^*(z p_i^{-1})}{M^*(z p_i^{-1})} - K_x(0) \right] + \frac{z}{z-1} K_x(0) G^*(0, \gamma) G^*(\infty, \gamma). \quad (10.35)$$

Этим выражением целесообразно пользоваться, когда импульсная функция дискретной системы $g(0) = 0$. Если $g(0) \neq 0$, то для использования формулы (10.35) нужно ее правую часть умножить на z^{-1} . С этой оговоркой далее будем пользоваться лишь выражением (10.35).

Полученные выше формулы (10.2), (10.9), (10.19), (10.34) и (10.35) могут быть использованы для определения дисперсии выходной переменной дискретной системы в переходном режиме. Проиллюстрируем применение указанных формул на нескольких примерах.

3. Примеры определения зависимости дисперсии от времени.

Пример 1. На вход дискретной системы, состоящей из объекта с передаточной функцией

$$W_1(s) = \frac{K}{s+a}$$

и не имеющей восстанавливающего элемента, подается случайное воздействие, определяемое корреляционной функцией

$$K_x[\nu T] = e^{-bT|\nu|}.$$

Найдем зависимость дисперсии выходной переменной от времени. Система не имеет восстанавливающего элемента, поэтому (п. 3 § 2)

$$G^*(z) = T \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{s+a} \right\} = \frac{KTz}{z-d}, \quad \text{где } d = e^{-aT},$$

$$F_x^*(z) = \mathcal{L} \{ e^{-bTn} \} = \frac{z}{z-c}, \quad \text{где } c = e^{-bT}.$$

Так как у рассматриваемой системы $g[0] \neq 0$, то для определения зависимости дисперсии от времени воспользуемся формулой (10.9). Имеем

$$g[nT] = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{KTz}{z-d} \right\} = KTd^n,$$

$$h[nT] = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{KTz}{z-d} \cdot \frac{z}{z-c} \right\} = KT \frac{d^{n+1} - c^{n+1}}{d-c};$$

из (10.9) находим

$$\begin{aligned}
 D_y[nT] &= 2 \sum_{m=0}^{n-1} KT d^m KT \frac{d^{m+1} - c^{m+1}}{d - c} - \sum_{m=0}^{n-1} K^2 T^2 d^{2m} = \\
 &= \frac{K^2 T^2 (d + c)}{(d - c)(1 - d^2)} (1 - d^{2n}) - \frac{2K^2 T^2 c}{(1 - dc)(d - c)} [1 - (dc)^n].
 \end{aligned} \tag{10.36}$$

Из этого выражения видно, что $D_y[0] = 0$, как и должно быть. Если для определения дисперсии мы верхний предел суммирования в (10.9) приняли бы равным n (т. е. фактически воспользовались формулой (10.34)), то получили бы вместо (10.36) выражение, в котором вместо показателей степени n имели бы $n + 1$, откуда $D_y[0] = K^2 T^2$. Такой результат не отвечает физическому смыслу, хотя при $T \rightarrow 0$ $D_y \rightarrow 0$. Нетрудно показать, используя (10.36), что

$$\begin{aligned}
 \lim_{\substack{T \rightarrow 0 \\ nT \rightarrow t}} D_y[nT] &= \frac{K^2}{a(a+b)} + \\
 &+ \frac{K^2}{a(a-b)} e^{-2at} - \frac{2K^2}{(a+b)(a-b)} e^{-(a+b)t}.
 \end{aligned} \tag{10.37}$$

Как будет показано ниже (§ 11, п. 4), выражение (10.37) отвечает дисперсии выходной переменной непрерывной системы, соответствующей рассматриваемой дискретной, с тем же входным воздействием.

Пример 2. Найдём дисперсию на выходе дискретной системы, рассмотренной в примере предыдущего параграфа. Имеем

$$G^*(z) = \frac{Q^*(z)}{R^*(z)} = \frac{Tz}{z - 1},$$

$$F_x^*(z) = \frac{L^*(z)}{M^*(z)} = \frac{D_x z (z - e^{-\alpha T} \cos \beta T)}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}},$$

$$k = 1, \quad p_1 = 1, \quad \dot{R}^*(p_1) = 1, \quad K_x(0) = D_x, \quad G^*(0) = 0.$$

Так как для системы $g(0) = T \neq 0$, то из формулы (10.19) (или (10.35)), где правая часть имеет множитель

z^{-1}), находим

$$\begin{aligned} D_y^*(z) &= \frac{1}{z-1} \cdot \frac{T T z}{1(z-1)} \left[\frac{2D_x z (z - e^{-\alpha T} \cos \beta T)}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}} - D_x \right] = \\ &= 2T^2 D_x \frac{z^2 (z - e^{-\alpha T} \cos \beta T)}{(z-1)^2 (z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T})} - D_x T^2 \frac{z}{(z-1)^2}. \end{aligned} \quad (10.38)$$

Запишем первый член (10.38) в виде произведения

$$2T D_x \frac{z}{z-1} \cdot \frac{Tz (z - e^{-\alpha T} \cos \beta T)}{(z-1)(z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T})}$$

и разложим второй сомножитель на простые дроби (ср. с (9.40))

$$\begin{aligned} \frac{Tz (z - e^{-\alpha T} \cos \beta T)}{(z-1)(z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T})} &= \\ &= \frac{l}{z-1} + \frac{cz + d}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}}, \end{aligned}$$

где значения постоянных l , c и d приведены в обозначениях к формуле (9.41). С учетом последних двух выражений изображение (10.38) можно представить в виде суммы

$$\begin{aligned} D_y^*(z) &= 2l D_x \frac{Tz}{(z-1)^2} + \\ &+ 2T D_x \frac{z(cz + d)}{(z-1)(z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T})} - D_x T \frac{Tz}{(z-1)^2}. \end{aligned} \quad (10.39)$$

Теперь нетрудно найти выражение для зависимости дисперсии от времени $D_y[nT]$. Первому и третьему членам (10.39) отвечает оригинал nT с соответствующими коэффициентами, а второму — оригинал, определяемый выражением (10.28). Так как в обозначениях величин, использованных в формуле (9.41),

$$\varphi - \psi = \omega, \quad \frac{c+d}{K} = r \cos \omega, \quad q = e^{-\alpha T}, \quad \theta = \beta T,$$

то изображению (10.39) в целом отвечает оригинал

$$\begin{aligned} D_y[nT] &= 2l D_x nT - D_x T^2 n + \\ &+ 2T D_x r [\cos \omega - e^{-\alpha T n} \cos(\omega + \beta T n)] \end{aligned} \quad (10.40)$$

(заметим, что $D_y[0] = 0$ при $n = 0$, как и должно быть). То же самое выражение, что и (10.40), следует из полученной выше формулы (9.42) для корреляционной функции выходной переменной при $\nu = 0$ и $N = n$. Найдем дисперсию на выходе соответствующей непрерывной системы, т. е. при $T \rightarrow 0$. Так как

$$D_y[nT] = 2ID_x nT - D_x T^2 n + \\ + 2TD_x r [\cos \omega (1 - e^{-\alpha T n} \cos \beta T n) + \sin \omega e^{-\alpha T n} \sin \beta T n],$$

то, учитывая пределы, полученные при выводе формулы (9.44), находим

$$D_y(t) = \lim_{\substack{T \rightarrow 0 \\ nT \rightarrow t}} D_y[nT] = \frac{2D_x}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} [\alpha(\alpha^2 + \beta^2)t + \\ + (\beta^2 - \alpha^2)(1 - e^{-\alpha t} \cos \beta t) - 2\alpha\beta e^{-\alpha t} \sin \beta t]. \quad (10.41)$$

Из формул (10.40) и (10.41) видно, что если на вход дискретной или непрерывной системы, содержащей интегрирующее звено, подается стационарная случайная

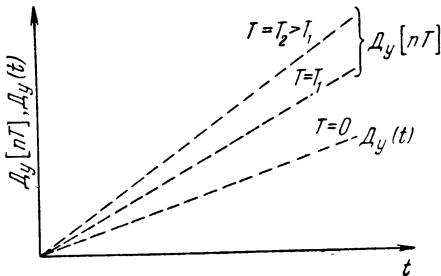


Рис. 3.1.

функция, то дисперсия выходной переменной неограниченно нарастает (см. рис. 3.1). В рассматриваемом примере для дискретной системы нарастание дисперсии обусловлено членом

$$D_x T \frac{1 - e^{-2\alpha T}}{1 - 2e^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}} nT = \frac{D_x T \operatorname{sh} \alpha T}{\operatorname{ch} \alpha T - \cos \beta T} nT,$$

а для непрерывной — членом

$$\frac{2D_x \alpha}{\alpha^2 + \beta^2} t.$$

§ 11. Определение статистических характеристик погрешности цифровой автоматической системы в переходном режиме

Положим, что задан объект управления и выбран (или синтезирован) некоторый закон управления, отвечающий требованиям, предъявляемым к процессу управления в данной непрерывной системе. Обозначим передаточную функцию такой непрерывной (желаемой) системы через $H(s)$, а соответствующую ей импульсную переходную функцию через $h(t)$. Входным воздействием рассматриваемой системы является стационарная случайная функция $x(t)$, характеризующаяся корреляционной функцией $K_x(\tau)$.

Пусть в качестве управляющего устройства в данной системе решено использовать цифровую вычислительную машину, реализующую заданный закон управления на основе принятого численного метода. Положим также, что выбран тип восстанавливающего элемента, используемого в системе. Обозначим передаточную функцию получающейся таким образом дискретной системы через $G^*(z, \gamma)$, а соответствующую ей импульсную переходную функцию через $g[(n + \gamma)T]$. Величина $y_n(t)$ на выходе непрерывной (желаемой) системы будет определяться уравнением

$$y_n(t) = \int_0^t h(t - \tau) x(\tau) d\tau. \quad (11.1)$$

Величина $y_d(t)$ на выходе соответствующей дискретной системы с учетом ошибок от квантования информации по уровню в преобразователях и ошибок округления в цифровой машине (см. § 2) определяется уравнением

$$y_d(t) = \sum_{m=0}^n g(t - mT) \{x[mT - 0] + \varepsilon_{q_n}[mT - 0]\} + \\ + \sum_{m=0}^n p(t - mT) \varepsilon_{q_m}[mT - 0], \quad (11.2)$$

где $\varepsilon_{q_n}[mT]$ и $\varepsilon_{q_m}[mT]$ — ошибки, обусловленные указанными выше причинами, а $p(t)$ — импульсная переходная функция, соответствующая передаточной функции

$W^*(z, \gamma)/B_D^*(z)$ в случае разомкнутой системы (2.39) и передаточной функции $W^*(z, \gamma)C^*(z)/A_D^*(z)$ в случае замкнутой системы (2.55). Далее будем обозначать $\mathcal{L}_\gamma\{p(t)\} = P^*(z, \gamma)$.

Ошибка, вызванная использованием цифровой машины в данной системе (3.7) (рис. 3.2)

$$\varepsilon(t) = y_d(t) - y_n(t). \quad (11.3)$$

Ошибка $\varepsilon(t)$ является случайной функцией времени, статистические характеристики которой — корреляционная функция и дисперсия будут определены ниже.

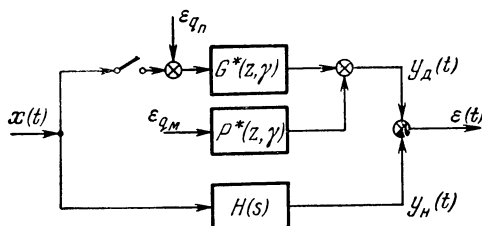


Рис. 3.2.

1. Определение корреляционной функции погрешности цифровой автоматической системы. В дальнейшем будем рассматривать дискретное время $t = (n + \gamma)T$, пользуясь иногда для краткости записи также левой частью указанного равенства. Положим пока, что входное воздействие $x(t)$ имеет равное нулю математическое ожидание. Случай, когда последнее отлично от нуля, будет рассмотрен ниже. Корреляционная функция ошибки $\varepsilon(t)$ на основании ее определения и равенства (11.3) равна

$$\begin{aligned} K_\varepsilon(t, t_1) &= M\{\varepsilon(t)\varepsilon(t_1)\} = \\ &= K_d(t, t_1) - K_{нд}(t, t_1) - K_{дн}(t, t_1) + K_n(t, t_1), \end{aligned} \quad (11.4)$$

где

$$\begin{aligned} K_d(t, t_1) &= M\{y_d(t)y_d(t_1)\}, & K_{нд}(t, t_1) &= M\{y_n(t)y_d(t_1)\}, \\ K_{дн}(t, t_1) &= M\{y_d(t)y_n(t_1)\}, & K_n(t, t_1) &= M\{y_n(t)y_n(t_1)\}. \end{aligned}$$

В выражении (11.4) первый член определяет корреляционную функцию выходной переменной дискретной

системы, а последний — корреляционную функцию выходной переменной желаемой непрерывной системы; второй и третий члены — взаимные корреляционные функции выходных переменных указанных систем.

Задачу далее будем решать в следующей последовательности: найдем выражения указанных корреляционных функций с помощью уравнений (11.1) и (11.2), осуществим далее переход к двумерным изображениям и, наконец, найдем соответствующие этим изображениям оригиналы. При этом будем пользоваться формулами, полученными в предыдущих главах. Имеем

$$\begin{aligned}
 K_{\alpha}[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma)T] &= M \{y_{\alpha}[(n + \gamma)T] y_{\alpha}[(n_1 + \gamma)T]\} = \\
 &= \sum_{m=0}^n \sum_{m_1=0}^{n_1} g[(n + \gamma - m)T] g[(n_1 + \gamma - m_1)T] \times \\
 &\times K_x[mT - 0, m_1T - 0] + \sum_{m=0}^n \sum_{m_1=0}^{n_1} g[(n + \gamma - m)T] \times \\
 &\times g[(n_1 + \gamma - m_1)T] K_{\eta}[mT - 0, m_1T - 0] + \\
 &+ \sum_{m=0}^n \sum_{m_1=0}^{n_1} p[(n + \gamma - m)T] p[(n_1 + \gamma - m_1)T] \times \\
 &\times K_{\mu}[mT - 0, m_1T - 0], \quad (11.5)
 \end{aligned}$$

где

$$K_x[mT - 0, m_1T - 0] = M \{x[mT - 0] x[m_1T - 0]\},$$

$$K_{\eta}[mT - 0, m_1T - 0] = M \{\varepsilon_{q_{\eta}}[mT - 0] \varepsilon_{q_{\eta}}[m_1T - 0]\},$$

$$K_{\mu}[mT - 0, m_1T - 0] = M \{\varepsilon_{q_{\mu}}[mT - 0] \varepsilon_{q_{\mu}}[m_1T - 0]\}.$$

В выражении (11.5) опущены взаимные корреляционные функции случайных процессов $x[nT]$, $\varepsilon_{q_{\eta}}[nT]$ и $\varepsilon_{q_{\mu}}[nT]$ на основании известных статистических свойств ошибок, вызванных эффектом квантования по уровню (см. § 2). На основании формулы (8.13) находим изображение корреляционной функции (11.5)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{2\gamma} \{K_{\alpha}[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma)T]\} &= \Phi_{\alpha}^*(z, z_1, \gamma) = \\
 &= z^{-1} z_1^{-1} [G^*(z, \gamma) G^*(z_1, \gamma) \Phi_x^*(z, 1; z_1, 1) + \\
 &+ G^*(z, \gamma) G^*(z_1, \gamma) \Phi_{\eta}^*(z, 1; z_1, 1) + \\
 &+ P^*(z, \gamma) P^*(z_1, \gamma) \Phi_{\mu}^*(z, 1; z_1, 1)]. \quad (11.6)
 \end{aligned}$$

Найдем теперь взаимную корреляционную функцию

$$\begin{aligned}
 K_{нд}[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma)T] &= M\{y_n[(n + \gamma)T]y_n[(n_1 + \gamma)T]\} = \\
 &= \int_0^{(n+\gamma)T} h[(n + \gamma)T - \tau] \sum_{m_1=0}^{n_1} g[(n_1 + \gamma - m_1)T] \times \\
 &\quad \times K_x[\tau, m_1T - 0] d\tau. \quad (11.7)
 \end{aligned}$$

Преобразуем выражение (11.7) (см. § 5, пп. 8 и 9); для этого заменим переменную интегрирования с помощью равенства $\tau = (m + \delta)T$. Так как при этом

$$\begin{aligned}
 \int_0^{(n+\gamma)T} h[(n + \gamma)T - \tau] x(\tau) d\tau &= \\
 &= T \sum_{m=0}^{n-1} \int_0^1 h[(n - m + \gamma - \delta)T] x[(m + \delta)T] d\delta + \\
 &\quad + T \int_0^\gamma h[(\gamma - \delta)T] x[(n + \delta)T] d\delta,
 \end{aligned}$$

то из (11.7) находим

$$\begin{aligned}
 K_{нд}[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma)T] &= T \sum_{m=0}^{n-1} \int_0^1 h[(n - m + \gamma - \delta)T] \times \\
 &\quad \times \sum_{m_1=0}^{n_1} g[(n_1 + \gamma - m_1)T] K_x[(m + \delta)T, m_1T - 0] d\delta + \\
 &\quad + T \int_0^\gamma h[(\gamma - \delta)T] \sum_{m_1=0}^{n_1} g[(n_1 - m_1 + \gamma)T] \times \\
 &\quad \times K_x[(n + \delta)T, m_1T - 0] d\delta. \quad (11.8)
 \end{aligned}$$

Ограничимся рассмотрением случая, когда $\gamma = 0$, т. е. $t = nT$, что вполне достаточно для практических приложений. В этом случае второй член выражения (11.8) обращается в нуль. Найдем изображение правой части

равенства (11.8)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_2\{K_{\text{нд}}[nT, n_1T]\} &= \Phi_{\text{нд}}^*(z, z_1) = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \left\{ T \sum_{m=0}^{n-1} \int_0^1 h[(n-m-\delta)T] \sum_{m_1=0}^{n_1} g[(n_1-m_1)T] \times \right. \\
 &\quad \left. \times K_x[(m+\delta)T, m_1T-0] d\delta \right\} z^{-n} z_1^{-n_1} = \\
 &= T \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{n_1} \int_0^1 h[\dots] g[\dots] K_x[\dots] z^{-n} z_1^{-n_1} d\delta = \\
 &= T \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m+1}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{n_1=m_1}^{\infty} \int_0^1 h[\dots] g[\dots] K_x[\dots] z^{-n} z_1^{-n_1} d\delta.
 \end{aligned} \tag{11.9}$$

Сделаем в последнем выражении замену переменных суммирования n и n_1 , пользуясь соотношениями $i = n - m - 1$, $i_1 = n_1 - m_1$, а также заменим обозначение переменной интегрирования δ на γ . Находим

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\text{нд}}^*(z, z_1) &= T \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \int_0^1 h[(i+1-\gamma)T] g[i_1T] \times \\
 &\quad \times K_x[(m+\gamma)T, m_1T-0] z^{-(i+m+1)} z_1^{-(i_1+m_1)} d\gamma = \\
 &= T z^{-1} \int_0^1 \sum_{i=0}^{\infty} h[(i+1-\gamma)T] z^{-i} \sum_{i_1=0}^{\infty} g[i_1T] z_1^{-i_1} \times \\
 &\quad \times \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} K_x[(m+\gamma)T, m_1T-0] z^{-m} z_1^{-m_1} d\gamma = \\
 &= z^{-1} z_1^{-1} G^*(z_1) T \int_0^1 H^*(z, 1-\gamma) \Phi_x^*(z, \gamma; z_1, 1) d\gamma. \tag{11.10}
 \end{aligned}$$

Взаимная корреляционная функция

$$\begin{aligned}
 K_{\text{дн}}[(n+\gamma)T, (n_1+\gamma)T] &= M\{y_{\text{д}}[(n+\gamma)T] y_{\text{н}}[(n_1+\gamma)T]\} = \\
 &= \sum_{m=0}^n g[(n+\gamma-m)T] \int_0^{(n_1+\gamma)T} h[(n_1+\gamma)T-\tau_1] \times \\
 &\quad \times K_x[mT-0, \tau_1] d\tau_1. \tag{11.11}
 \end{aligned}$$

Путем замены $\tau_1 = (m_1 + \delta)T$ при $\gamma = 0$ аналогично (11.8) находим

$$K_{\text{дн}}[nT, n_1T] = T \sum_{m=0}^n g[(n-m)T] \sum_{m_1=0}^{n_1-1} \times \\ \times \int_0^1 h[(n_1 - m_1 - \delta)T] K_x[mT - 0, (m_1 + \delta)T] d\delta, \quad (11.12)$$

откуда подобно (11.10) получаем

$$\mathcal{L}_2\{K_{\text{дн}}[nT, n_1T]\} = \Phi_{\text{дн}}^*(z, z_1) = \\ = z^{-1} z_1^{-1} G^*(z) T \int_0^1 H^*(z_1, 1 - \gamma) \Phi_x^*(z, 1; z_1, \gamma) d\gamma. \quad (11.13)$$

Наконец, корреляционная функция выходной переменной непрерывной системы

$$K_{\text{н}}[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma)T] = M\{y_{\text{н}}[(n + \gamma)T] y_{\text{н}}[(n_1 + \gamma)T]\} = \\ = \int_0^{(n+\gamma)T} h[(n + \gamma)T - \tau] \int_0^{(n_1+\gamma)T} h[(n_1 + \gamma)T - \tau_1] \times \\ \times K_x(\tau, \tau_1) d\tau d\tau_1. \quad (11.14)$$

Заменяем переменные интегрирования τ и τ_1 с помощью равенств

$$\tau = (m + \delta)T, \quad \tau_1 = (m_1 + \delta_1)T.$$

Для того чтобы не усложнять выкладки, так же как и при определении взаимных корреляционных функций, ограничимся рассмотрением случая, когда $\gamma = 0$. Получаем

$$K_{\text{н}}[nT, n_1T] = T^2 \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{m_1=0}^{n_1-1} \int_0^1 \int_0^1 h[(n - m - \delta)T] \times \\ \times h[(n_1 - m_1 - \delta_1)T] K_x[(m + \delta)T, (m_1 + \delta_1)T] d\delta d\delta_1. \quad (11.15)$$

Найдем изображение правой части последнего равенства

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2\{K_H[nT, n_1T]\} &= \Phi_H^*(z, z_1) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} z^{-n} z_1^{-n_1} \left\{ T^2 \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{m_1=0}^{n_1-1} \int_0^1 \int_0^1 h[(n-m-\delta)T] \times \right. \\ &\times h[(n_1-m_1-\delta_1)T] K_x[(m+\delta)T, (m_1+\delta_1)T] d\delta d\delta_1 \left. \right\} = \\ &= T^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{n=m+1}^{\infty} \sum_{n_1=m_1+1}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 h[\dots] h[\dots] \times \\ &\times K_x[\dots] z^{-n} z_1^{-n_1} d\delta d\delta_1. \end{aligned}$$

Сделаем в последнем выражении замену переменных суммирования n и n_1 , пользуясь соотношениями $i = n - m - 1$, $i_1 = n_1 - m_1 - 1$, а также заменим обозначения переменных интегрирования δ и δ_1 на γ . Получаем

$$\begin{aligned} \Phi_H^*(z, z_1) &= T^2 \int_0^1 \int_0^1 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} h[(i+1-\gamma)T] \times \\ &\times h[(i_1+1-\gamma)T] K_x[(m+\gamma)T, (m_1+\gamma)T] \times \\ &\times z^{-(i+m+1)} z_1^{-(i_1+m_1+1)} d\gamma d\gamma = \\ &= T z^{-1} z_1^{-1} \int_0^1 \int_0^1 \sum_{i=0}^{\infty} h[(i+1-\gamma)T] z^{-i} \times \\ &\times \sum_{i_1=0}^{\infty} h[(i_1+1-\gamma)T] z_1^{-i_1} \times \\ &\times \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} K_x[(m+\gamma)T, (m_1+\gamma)T] z^{-m} z_1^{-m_1} d\gamma d\gamma = \\ &= z^{-1} z_1^{-1} T^2 \int_0^1 \int_0^1 H^*(z, 1-\gamma) H^*(z_1, 1-\gamma) \times \\ &\times \Phi_x^*(z, \gamma; z_1, \gamma) d\gamma d\gamma. \quad (11.16) \end{aligned}$$

На основании выражений (11.6), (11.10), (11.13) и (11.16), а также равенства (11.4) находим, что изображение корреляционной функции ошибки (11.3) при

$$\gamma = 0$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 \{K_\varepsilon [nT, n_1T]\} = \Phi_\varepsilon^*(z, z_1) = & \\ = z^{-1} z_1^{-1} \left[G^*(z) G^*(z_1) \Phi_x^*(z, 1; z_1, 1) + \right. & \\ + G^*(z) G^*(z_1) \Phi_n^*(z, 1; z_1, 1) + P^*(z) P^*(z_1) \Phi_m^*(z, 1; z_1, 1) - & \\ - G^*(z_1) T \int_0^1 H^*(z, 1 - \gamma) \Phi_x^*(z, \gamma; z_1, 1) d\gamma - & \\ - G^*(z) T \int_0^1 H^*(z_1, 1 - \gamma) \Phi_x^*(z, 1; z_1, \gamma) d\gamma + & \\ \left. + T^2 \int_0^1 \int_0^1 H^*(z, 1 - \gamma) H^*(z_1, 1 - \gamma) \Phi_x^*(z, \gamma; z_1, \gamma) d\gamma d\gamma \right]. & \end{aligned} \quad (11.17)$$

Для получения окончательного выражения изображения $\Phi_\varepsilon^*(z, z_1)$ нужно определить двумерные изображения корреляционных функций воздействия $x[nT]$ и ошибок квантования $\varepsilon_{q_n}[nT]$ и $\varepsilon_{q_m}[nT]$, входящих в выражение (11.17).

Изображение $\Phi_x^*(z, 1; z_1, 1)$ было определено выше, в § 9 (см. (9.2)). Остальные изображения корреляционных функций $x[nT]$ найдем с помощью соотношений, полученных в § 6 предыдущей главы. Учитывая четность рассматриваемой корреляционной функции, для определения ее двумерного изображения воспользуемся формулой (6.20). В обозначениях указанной формулы для изображения $\Phi_x^*(z, \gamma; z_1, 1)$ имеем $\delta = \gamma - 1 < 0$, поэтому

$$\Phi_x^*(z, \gamma; z_1, 1) = \frac{zz_1}{zz_1 - 1} [z^{-1} F_x^*(z, \gamma) + F_x^*(z_1, 1 - \gamma)], \quad (11.18)$$

где

$$F_x^*(z, \gamma) = \sum_{\nu=0}^{\infty} K_x[(\nu + \gamma)T] z^{-\nu} \quad (\nu \geq 0).$$

Для изображения $\Phi_x^*(z, 1; z_1, \gamma)$ величина $\delta = 1 - \gamma > 0$, поэтому

$$\Phi_x^*(z, 1; z_1, \gamma) = \frac{zz_1}{zz_1 - 1} [F_x^*(z, 1 - \gamma) + z_1^{-1} F_x^*(z_1, \gamma)]. \quad (11.19)$$

И, наконец, для $\Phi_x^*(z, \gamma; z_1, \gamma)$ величина $\delta = \gamma - \gamma = 0$, поэтому это изображение определяется упомянутой выше формулой (9.2). Найдем теперь изображения $\Phi_{\Pi}^*(z, 1; z_1, 1)$ и $\Phi_M^*(z, 1; z_1, 1)$. Случайные процессы $\varepsilon_{q_{\Pi}}[nT]$ и $\varepsilon_{q_M}[nT]$ представляют собой дискретный белый шум, корреляционные функции которого

$$K_{q_{\Pi}}[nT] = \kappa_{\Pi} \delta_0[nT], \quad K_{q_M}[nT] = \kappa_M \delta_0[nT]. \quad (11.20)$$

Величины κ_{Π} и κ_M определены выше, в § 2 ((2.21), (2.51) и (2.30)), $\delta_0[nT]$ — обобщенная дельта-функция. Так как рассматриваемые случайные процессы стационарны, то корреляционные функции $K_{\Pi}[nT, n_1T]$ и $K_M[nT, n_1T]$, использованные в (11.5), зависят от разности аргументов. Отсюда, с учетом формул (11.20) и выражения (6.35), получаем

$$\Phi_{\Pi}^*(z, 1; z_1, 1) = \kappa_{\Pi} \frac{zz_1}{zz_1 - 1}, \quad \Phi_M^*(z, 1; z_1, 1) = \kappa_M \frac{zz_1}{zz_1 - 1}. \quad (11.21)$$

На основании полученных зависимостей из формулы (11.17), после соответствующей группировки членов, окончательно находим

$$\begin{aligned} \Phi_{\Sigma}^*(z, z_1) = & \frac{1}{zz_1 - 1} \left\{ G^*(z) G^*(z_1) [F_x^*(z) + F_x^*(z_1) - K_x(0)] + \right. \\ & + G^*(z) G^*(z_1) \kappa_{\Pi} + P^*(z) P^*(z_1) \kappa_M - \\ & - T \int_0^1 \left[\frac{H^*(z, 1 - \gamma) F_x^*(z, \gamma)}{z} G^*(z_1) + \right. \\ & \left. + \frac{H^*(z_1, 1 - \gamma) F_x^*(z_1, \gamma)}{z_1} G^*(z) \right] d\gamma - \\ & - T \int_0^1 [H^*(z, 1 - \gamma) F_x^*(z_1, 1 - \gamma) G^*(z_1) + \\ & + H^*(z_1, 1 - \gamma) F_x^*(z, 1 - \gamma) G^*(z)] d\gamma + \\ & + T^2 \int_0^1 \int_0^1 H^*(z, 1 - \gamma) H^*(z_1, 1 - \gamma) \times \\ & \left. \times [F_x^*(z) + F_x^*(z_1) - K_x(0)] d\gamma d\gamma \right\}. \quad (11.22) \end{aligned}$$

Таким образом, мы выразили двумерное изображение корреляционной функции ошибки $\Phi_e^*(z, z_1)$ через передаточные функции $G^*(z)$, $P^*(z)$, $H^*(z, \gamma)$, изображение корреляционной функции входного воздействия $F_x^*(z, \gamma)$ и параметры ошибок квантования κ_n и κ_m .

Сравним полученное выражение (11.22) с формулой (9.5). Убеждаемся, что структура их совпадает. Поэтому для определения оригинала, соответствующего изображению $\Phi_e^*(z, z_1)$, можно использовать зависимости, полученные в § 9. Действительно, для каждого члена выражения (11.22) можно воспользоваться формулами, аналогичными (9.5), (9.7) и (9.8), и найти, таким образом, выражение, подобное (9.9). Отличие будет заключаться лишь в том, что необходимо выполнить осреднение по γ (интегрирование в пределах от 0 до 1) коэффициентов простых дробей, зависящих от γ , или их произведений. Основное же выражение, входящее в (9.9) и определяемое формулой (9.10), остается тем же самым. Поэтому для отыскания оригиналов, соответствующих отдельным членам выражения (11.22), можно пользоваться таблицей 3.1. Ввиду громоздкости выражения оригинала, соответствующего в общем виде изображению (11.22), его записывать нецелесообразно. В каждом отдельном случае его можно найти, используя формулу (11.22) и таблицу 3.1. Заметим, что корреляционную функцию выходной переменной непрерывной системы, двумерное изображение которой определяется последним членом выражения (11.22), можно найти как непрерывную функцию переменных t и t_1 , пользуясь методами работы [47], а затем положить $t = nT$ и $t_1 = n_1T$.

2. Определение дисперсии погрешности цифровой автоматической системы. Дисперсия ошибки $\varepsilon(t)$ на основании ее определения и равенства (11.3) равна

$$D_\varepsilon [(n + \gamma) T] = M \{ \varepsilon^2 [(n + \gamma) T] \} = \\ = D_d [(n + \gamma) T] - 2D_{nd} [(n + \gamma) T] + D_n [(n + \gamma) T], \quad (11.23)$$

где

$$D_d [(n + \gamma) T] = M \{ y_d^2 [(n + \gamma) T] \}, \\ D_{nd} [(n + \gamma) T] = M \{ y_d [(n + \gamma) T] y_n [(n + \gamma) T] \}, \\ D_n [(n + \gamma) T] = M \{ y_n^2 [(n + \gamma) T] \}.$$

Первый член выражения (11.23) определяет дисперсию выходной переменной дискретной системы, а последний — дисперсию выходной переменной непрерывной (желаемой) системы; второй член (11.23) представляет собой удвоенный корреляционный момент выходных переменных указанных систем.

Найдем вначале выражения составляющих дисперсии ошибки (11.23), затем определим их изображения и, наконец, осуществим переход к соответствующим им оригиналам.

Так как

$$D_d[(n + \gamma)T] = K_d[(n + \gamma)T, (n + \gamma)T],$$

то дисперсия выходной переменной дискретной системы определяется выражением (11.5) при $n_1 = n$. При условии, что воздействия стационарны и $n_1 = n$, первый член выражения (11.5) совпадает с формулой (10.29) предыдущего параграфа, а остальные члены имеют такую же структуру. В соответствии с изложенным в п. 2 предыдущего параграфа изображение каждого из этих членов (с точностью до обозначений) определяется формулой (10.14), правую часть которой следует умножить на z . Так как на основании (11.20)

$$F_{q_n}^*(z) = K_{q_n}(0) = \kappa_n, \quad F_{q_m}^*(z) = K_{q_m}(0) = \kappa_m, \quad (11.24)$$

то в соответствии со сказанным получаем, что изображение

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\gamma\{D_d[(n + \gamma)T]\} &= D_d^*(z, \gamma) = \\ &= \frac{z}{\pi j(z-1)} \oint_{\Gamma_1} G^*(w, \gamma) G^*(zw^{-1}, \gamma) F_x^*(zw^{-1}) w^{-1} dw - \\ &- \frac{[K_x(0) - \kappa_n]z}{2\pi j(z-1)} \oint_{\Gamma_1} G^*(w, \gamma) G^*(zw^{-1}, \gamma) w^{-1} dw + \\ &+ \frac{\kappa_m z}{2\pi j(z-1)} \oint_{\Gamma_2} P^*(w, \gamma) P^*(zw^{-1}, \gamma) w^{-1} dw, \quad (11.25) \end{aligned}$$

где Γ_1 и Γ_2 — контуры радиуса $e^{a_1 T}$ и $e^{a_2 T}$ ($a_1 > c_1$, $a_2 > c_2$), c_1 и c_2 — показатели роста соответственно функций $g[(n + \gamma)T]$ и $p[(n + \gamma)T]$. Для более четкого отличия выражений для дискретной и непрерывной систем введем

обозначения

$$G^*(z, \gamma) = \frac{Q_d^*(z, \gamma)}{R_d^*(z)}, \quad P^*(z, \gamma) = \frac{Q_p^*(z, \gamma)}{R_p^*(z)}, \quad (11.26)$$

$$F_x^*(z) = \frac{L^*(z)}{M^*(z)},$$

где для разомкнутой и замкнутой систем соответственно

$$P^*(z, \gamma) = \frac{W^*(z, \gamma)}{B_D^*(z)} \quad \text{и} \quad P^*(z, \gamma) = \frac{W^*(z, \gamma) C^*(z)}{A_D^*(z)},$$

а $C^*(z)$ определяется формулой (2.54), $A_D^*(z)$ и $B_D^*(z)$ — формулами (2.24) и (2.27). Положим для простоты (без потери общности), что функции $G^*(z, \gamma)$ и $P^*(z, \gamma)$ имеют лишь простые полюсы. Обозначим полюсы функции $G^*(z, \gamma)$ через p_i ($i = 1, 2, \dots, k_d$), а полюсы функции $P^*(z, \gamma)$ — через p_j ($j = 1, 2, \dots, k_p$). Для получения формулы, определяющей $D_d^*(z, \gamma)$, вычислим контурные интегралы в выражении (11.25). Учтем при этом характер расположения полюсов подынтегральных функций в (11.25) (см. п. 1 предыдущего параграфа). Контур Γ_1 охватывает лишь полюсы функции $G^*(z, \gamma)$, а контур Γ_2 — полюсы функции $P^*(z, \gamma)$. На основании теоремы о вычетах из выражения (11.25) с учетом обозначений (11.26) находим (ср. с (10.35))

$$D_d^*(z, \gamma) = \frac{z}{z-1} \left\{ \sum_{i=1}^{k_d} \frac{p_i^{-1} Q_d^*(p_i, \gamma) Q_d^*(z p_i^{-1}, \gamma)}{\dot{R}_d^*(p_i) R_d^*(z p_i^{-1})} \times \right.$$

$$\times \left[\frac{2L^*(z p_i^{-1})}{M^*(z p_i^{-1})} - K_x(0) + \kappa_{\Pi} \right] + \kappa_M \sum_{j=1}^{k_p} \frac{p_j^{-1} Q_p^*(p_j, \gamma) Q_p^*(z p_j^{-1}, \gamma)}{\dot{R}_p^*(p_j) R_p^*(z p_j^{-1})} +$$

$$\left. + [K_x(0) + \kappa_{\Pi}] G^*(0, \gamma) G^*(\infty, \gamma) + \kappa_M P^*(0, \gamma) P^*(\infty, \gamma) \right\}, \quad (11.27)$$

где

$$\dot{R}_d^*(p_i) = [R_d^*(\omega)]' \Big|_{\omega=p_i}, \quad \dot{R}_p^*(p_j) = [R_p^*(\omega)]' \Big|_{\omega=p_j}.$$

При выводе формулы (11.27) учтено, что $F_x^*(\infty) = K_x(0)$. Так как

$$D_{\text{нд}}[(n + \gamma)T] = K_{\text{нд}}[(n + \gamma)T, (n + \gamma)T],$$

то корреляционный момент выходных переменных дискретной и непрерывной систем определяется выражением (11.8) при $n_1 = n$. Учитывая, кроме того, что входное воздействие стационарно, из выражения (11.8) находим

$$\begin{aligned} D_{\text{нд}}[(n + \gamma)T] = & T \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{m_1=0}^n \int_0^1 h[(n - m + \gamma - \delta)T] \times \\ & \times g[(n - m_1 + \gamma)T] K_x[(m - m_1 + \delta)T] d\delta + \\ & + T \int_0^\gamma h[(\gamma - \delta)T] \sum_{m_1=0}^n g[(n - m_1 + \gamma)T] \times \\ & \times K_x[(n - m_1 + \delta)T] d\delta. \quad (11.28) \end{aligned}$$

Рассмотрим выражение первого члена равенства (11.28). Двойную сумму, входящую в этот член, можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{m_1=0}^n &= \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{m_1=m+1}^n + \\ &+ \sum_{m_1=0}^{n-1} \sum_{m=m_1}^{n-1}. \quad (11.29) \end{aligned}$$

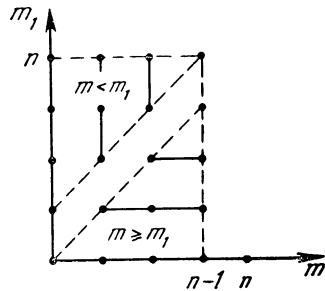


Рис. 3.3.

Справедливость равенства (11.29) следует из рассмотрения области изменения переменных m и m_1 на рис. 3.3. Границы этой области определяются пределами суммирования сумм левой части равенства (11.29). Выполним замену переменных суммирования в правой части равенства (11.29). Во второй двойной сумме, где $m \geq m_1$, переменные суммирования m и m_1 заменим с помощью равенств

$$\nu = m - m_1, \quad \mu = n - m_1 - 1,$$

а в первой двойной сумме правой части (11.29), где $m < m_1$, замену выполним с помощью равенств

$$\nu_1 = -\nu = m_1 - m, \quad \mu_1 = n - m - 1.$$

После преобразований, аналогичных проделанным при выводе формулы (10.34), находим выражение первого члена равенства (11.28)

$$\begin{aligned} T \sum_{\mu=0}^{n-1} \left\{ g[(\mu+1+\gamma)T] \int_0^1 \sum_{\nu=0}^{\mu} h[(\mu-\nu+1+\gamma-\delta)T] \times \right. \\ \times K_x[(\nu+\delta)T] d\delta + \int_0^1 h[(\mu+1+\gamma-\delta)T] \times \\ \left. \times \sum_{\nu=1}^{\mu+1} g[(\mu+1+\gamma-\nu)T] K_x[(-\nu+\delta)T] d\delta \right\}. \quad (11.30) \end{aligned}$$

Найдем z -изображения отдельных членов, входящих в выражение (11.30)

$$\mathcal{L}_\nu \{g[(\mu+1+\gamma)T]\} = z[G^*(z, \gamma) - g(\gamma T)]; \quad (11.31)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\nu \left\{ \sum_{\nu=0}^{\mu} h[(\mu-\nu+1+\gamma-\delta)T] K_x[(\nu+\delta)T] \right\} = \\ = \begin{cases} z[H^*(z, \gamma-\delta) - h(\gamma T - \delta T)] F_x^*(z, \delta) & \text{при } \delta \leq \gamma, \\ H^*(z, 1+\gamma-\delta) F_x^*(z, \delta) & \text{при } \delta \geq \gamma; \end{cases} \quad (11.32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\nu \{h[(\mu+1+\gamma-\delta)T]\} = \\ = \begin{cases} z[H^*(z, \gamma-\delta) - h(\gamma T - \delta T)] & \text{при } \delta \leq \gamma, \\ H^*(z, 1+\gamma-\delta) & \text{при } \delta \geq \gamma; \end{cases} \quad (11.33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\nu \left\{ \sum_{\nu=1}^{\mu+1} g[(\mu+1+\gamma-\nu)T] K_x[(-\nu+\delta)T] \right\} = \\ = G^*(z, \gamma) F_x^*(z, 1-\delta). \quad (11.34) \end{aligned}$$

При определении последнего изображения учтено, что

$$K_x[(-\nu+\delta)T] = K_x[(\nu-1+1-\delta)T],$$

так как $K_x[|\nu T|]$ — четная функция ν (см. рис. 2.5 и вывод формулы (6.15)). Учитывая полученные изображения, воспользуемся далее теоремой об изображении произведения оригиналов (см. п. 1 предыдущего параграфа) для определения изображения правой части равенства (11.28), первый член которого определяется формулой (11.30). Учитывая также теорему z -преобразования об изображении суммы, находим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\nu \{D_{\text{нд}}[(n + \nu) T]\} = \\ = D_{\text{нд}}^*(z, \nu) = \frac{T}{2\pi j(z-1)} \left\{ \oint_{\Gamma_1} w [G^*(w, \nu) - g(\nu T)] \times \right. \\ \times \left[\int_0^\nu z w^{-1} [H^*(z w^{-1}, \nu - \delta) - h(\nu T - \delta T)] F_x^*(z w^{-1}, \delta) d\delta + \right. \\ \left. + \int_\nu^1 H^*(z w^{-1}, 1 + \nu - \delta) F_x^*(z w^{-1}, \delta) d\delta \right] w^{-1} dw + \\ \left. + \oint_{\Gamma_3} \left[\int_0^\nu w [H^*(w, \nu - \delta) - h(\nu T - \delta T)] G^*(z w^{-1}, \nu) \times \right. \right. \\ \times F_x^*(z w^{-1}, 1 - \delta) d\delta + \int_\nu^1 H^*(w, 1 + \nu - \delta) G^*(z w^{-1}, \nu) \times \\ \left. \left. \times F_x^*(z w^{-1}, 1 - \delta) d\delta \right] w^{-1} dw \right\} + \frac{Tz}{2\pi j(z-1)} \times \\ \times \left\{ \int_0^\nu h[(\nu - \delta) T] \oint_{\Gamma_1} G^*(w, \nu) F_x^*(z w^{-1}, \delta) w^{-1} dw d\delta \right\}, \quad (11.35) \end{aligned}$$

где Γ_3 — контур радиуса $e^{a_3 T}$, $a_3 > c_3$ (c_3 — показатель роста функции $h(t)$). В формуле (11.35) первый член в фигурных скобках представляет собой изображение первого члена правой части (11.28), а второй — соответственно изображение второго члена (11.28). Если рассматривать случай $\nu = 0$, то формула (11.35) существенно упрощается, так как члены, в которых верхний

предел интегрирования равен γ , обращаются в нуль:

$$D_{\text{нд}}^*(z) = \frac{T}{2\pi j(z-1)} \left\{ \oint_{\Gamma_1} G^*(w) \int_0^1 H^*(zw^{-1}, 1-\delta) \times \right. \\ \times F_x^*(zw^{-1}, \delta) d\delta dw + \oint_{\Gamma_2} \int_0^1 H^*(w, \delta) G^*(zw^{-1}) \times \\ \left. \times F_x^*(zw^{-1}, \delta) w^{-1} d\delta dw \right\} \quad (11.36)$$

(в последнем интеграле выражения (11.36) сделана замена переменной интегрирования с помощью равенства $\delta_1 = 1 - \delta$ и затем индекс опущен).

Ниже, в § 14, будет показано, что из формулы (11.36) следует выражение для корреляционного момента выходных переменных непрерывной и дискретной систем в установившемся режиме их работы. Кроме того, выражение для корреляционного момента в этом случае будет получено независимо от формулы (11.36) в п. 2 § 12.

Таким образом, формулы (11.35) и (11.36) определяют изображения зависимости от времени корреляционного момента выходных переменных дискретной и непрерывной систем. Эти изображения могут быть найдены из указанных формул путем определения контурных интегралов с помощью вычетов, подобно тому, как это было сделано выше для выражений (10.35) и (11.27).

Приведем расчетную формулу для определения изображения $D_{\text{нд}}^*(z)$ (11.36) (формула для $D_{\text{нд}}^*(z, \gamma)$ (11.35) получается аналогично). Обозначим

$$H(s) = \frac{Q_H(s)}{R_H(s)}, \quad F_x(s) = \frac{L(s)}{M(s)}, \\ H^*(z, \gamma) = \frac{Q_H^*(z, \gamma)}{R_H^*(z)}, \quad F_x^*(z, \gamma) = \frac{L^*(z, \gamma)}{M^*(z)}, \quad (11.37)$$

где

$$H^*(z, \gamma) = \mathcal{Z}_\gamma \{H(s)\}.$$

Положим для простоты (без потери общности), что функция $H^*(z, \gamma)$ имеет лишь простые полюсы, которые обозначим через q_i ($i = 1, 2, \dots, k_H$). Результат осреднения некоторой функции $\varphi(z, \delta)$ по переменной δ на интервале $[0, 1]$ обозначим символом $\overline{\varphi(z, \delta)}$, т. е.

$$\overline{\varphi(z, \delta)} = \int_0^1 \varphi(z, \delta) d\delta.$$

С учетом (11.26) и введенных обозначений из формулы (11.36) находим

$$\begin{aligned} D_{\text{нд}}^*(z) = & \frac{T}{z-1} \left\{ \sum_{i=1}^{k_d} \frac{Q_d^*(p_i) \overline{Q_H^*(z p_i^{-1}, 1-\delta) L^*(z p_i^{-1}, \delta)}}{\dot{R}_d^*(p_i) R_H^*(z p_i^{-1}) M^*(z p_i^{-1})} + \right. \\ & + \sum_{i=1}^{k_H} \frac{Q_d^*(z q_i^{-1}) \overline{Q_H^*(q_i, \delta) L^*(z q_i^{-1}, \delta)}}{\dot{R}_H^*(q_i) R_d^*(z q_i^{-1}) M^*(z q_i^{-1})} q_i^{-1} + \\ & \left. + G^*(\infty) \overline{H^*(0, \delta) F_x^*(\infty, \delta)} \right\}. \quad (11.38) \end{aligned}$$

Рассмотрим, наконец, зависимость от времени дисперсии выходной переменной непрерывной системы. Здесь могут быть два варианта решения. Первый — определить z -изображение $D_H^*(z, \gamma)$ дисперсии непрерывной системы $D_H(t)$ и далее перейти к оригиналам, второй — найти изображение по Лапласу $D_H(s)$ дисперсии и после определения оригинала положить $t = (n + \gamma)T$. Второй вариант более прост, ему мы и будем следовать. Возможность его использования обусловлена тем, что для дискретного процесса, полученного путем выборки из соответствующего непрерывного, моменты равны моментам исходного непрерывного процесса. Это нетрудно видеть, если сравнить эти моменты, полученные как средние по множеству реализаций [31].

В работе [47] показано, что зависимость от времени дисперсии выходной переменной непрерывной системы

$$D(t) = \int_0^t \int_0^t h(t-\tau) h(t-\tau_1) K_x(\tau-\tau_1) d\tau d\tau_1$$

может быть преобразована к виду

$$D(t) = 2 \int_0^t h(\tau) \int_0^\tau h(\tau - \tau_1) K_x(\tau_1) d\tau_1 d\tau.$$

Эта формула по своей структуре подобна выражению (10.34). Для определения изображения функции $D(t)$ воспользуемся теоремой преобразования Лапласа об изображении произведения оригиналов. Учитывая также теорему об изображении интеграла, из последнего уравнения находим

$$\mathcal{L}\{D_H(t)\} = D_H(s) = \frac{1}{\pi j s} \int_{a_2 - j\infty}^{a_2 + j\infty} H(p) H(s - p) F_x(s - p) dp. \quad (11.39)$$

Чтобы вычислить интеграл (11.39) с помощью теории вычетов, дополним линию интегрирования слева дугой окружности бесконечного радиуса, на которой значение подынтегральной функции бесконечно мало. Нетрудно показать, что получившийся контур охватывает лишь полюсы функции $H(p)$ (ср. с выводом (10.16)). Воспользовавшись первыми двумя обозначениями (11.37), из выражения (11.39) находим

$$D_H(s) = \frac{2}{s} \sum_{i=1}^{k_H} \frac{Q_H(\alpha_i) Q_H(s - \alpha_i) L(s - \alpha_i)}{R_H(\alpha_i) R_H(s - \alpha_i) M(s - \alpha_i)}, \quad (11.40)$$

где α_i ($i = 1, 2, \dots, k_H$) — полюсы функции $H(p)$, кратность которых равна единице.

Мы нашли изображения составляющих дисперсии ошибки (11.23). Теперь, пользуясь обратными преобразованиями, нетрудно найти саму дисперсию ошибки

$$D_\varepsilon[(n + \gamma)T] = \mathcal{L}_\gamma^{-1}\{D_d^*(z, \gamma)\} - 2\mathcal{L}_\gamma^{-1}\{D_{нд}^*(z, \gamma)\} + \mathcal{L}^{-1}\{D_H(s)\} \Big|_{t=(n+\gamma)T}, \quad (11.41)$$

где \mathcal{L}_γ^{-1} и \mathcal{L}^{-1} — операторы соответственно обратного z -преобразования с запаздыванием и обратного преобразования Лапласа, а изображения, входящие в правую часть равенства (11.41), были определены выше.

Заметим, что если

$$H(s) = \lim_{T \rightarrow 0} G^*(z, \gamma) \quad (11.42)$$

(что часть имеет место), то дисперсию $D_H(t)$ можно найти из выражения для дисперсии $D_d[(n + \gamma)T]$ при $T \rightarrow 0$. При выполнении условия (11.42)

$$\lim_{\substack{q \rightarrow 0 \\ T \rightarrow 0 \\ T\gamma \rightarrow 0 \\ Tn \rightarrow t}} D_d[(n + \gamma)T] = \lim_{\substack{q \rightarrow 0 \\ T \rightarrow 0 \\ T\gamma \rightarrow 0 \\ Tn \rightarrow t}} D_{нд}[(n + \gamma)T] = D_H(t),$$

поэтому

$$\lim_{\substack{q \rightarrow 0 \\ T \rightarrow 0}} D_\varepsilon[(n + \gamma)T] = 0.$$

Таким образом, выражение (11.41) и полученные выше формулы для определения изображений составляющих дисперсии $D_d^*(z, \gamma)$, $D_{нд}^*(z, \gamma)$ и $D_H(s)$ позволяют найти дисперсию погрешности цифровой автоматической системы в переходном режиме, вызванную использованием цифровой управляющей машины в данной системе.

3. Определение статистических характеристик погрешности цифровой автоматической системы в случае, когда математическое ожидание входного воздействия отлично от нуля. Если математическое ожидание входного воздействия отлично от нуля, то статистической характеристикой ошибки $\varepsilon(t)$, вместо корреляционной функции $K_\varepsilon(t, t_1)$ (11.4), будет являться начальный момент второго порядка случайной функции $\varepsilon(t)$:

$$\Pi_\varepsilon(t, t_1) = M\{\varepsilon(t) \varepsilon(t_1)\} = \Pi_d(t, t_1) - \Pi_{нд}(t, t_1) - \Pi_{дн}(t, t_1) + \Pi_H(t, t_1), \quad (11.43)$$

где члены правой части равенства (11.43) определяются теми же выражениями, что и в (11.4). В соответствии с формулами (7.6) и (7.12)

$$\begin{aligned} \Pi_d(t, t_1) &= m_d(t) m_d(t_1) + K_d(t, t_1), \\ \Pi_{нд}(t, t_1) &= m_n(t) m_d(t_1) + K_{нд}(t, t_1), \\ \Pi_{дн}(t, t_1) &= m_d(t) m_n(t_1) + K_{дн}(t, t_1), \\ \Pi_H(t, t_1) &= m_n(t) m_n(t_1) + K_H(t, t_1), \end{aligned}$$

где

$$m_d(t) = M\{y_d(t)\}, \quad m_n(t) = M\{y_n(t)\}.$$

Подставим последние выражения в формулу (11.43); учитывая равенство (11.4), находим

$$\Pi_e(t, t_1) = m_e(t, t_1) + K_e(t, t_1), \quad (11.44)$$

где

$$m_e(t, t_1) = m_e(t) m_e(t_1) = [m_d(t) - m_n(t)][m_d(t_1) - m_n(t_1)]. \quad (11.45)$$

Выражение для корреляционной функции ошибки $K_e(t, t_1)$ было найдено выше в п. 1, поэтому для определения начального момента $\Pi_e(t, t_1)$ достаточно найти выражение для математического ожидания ошибки $m_e(t)$. Так как рассматриваемое входное воздействие стационарно, то его математическое ожидание постоянно и равно некоторой величине m_x . Изображение математического ожидания выходной переменной дискретной системы на основании (9.1)

$$M_d^*(z, \gamma) = \frac{m_x}{z-1} G^*(z, \gamma), \quad (11.46)$$

а само математическое ожидание $m_d(t)$ при $t = (n + \gamma)T$ определяется выражением (9.27)

$$m_d[(n + \gamma)T] = m_x \sum_{i=0}^{k_d} \frac{A_i(\gamma)(1 - p_i^n)}{1 - p_i}. \quad (11.47)$$

С помощью уравнения (11.1) нетрудно найти изображение математического ожидания выходной переменной непрерывной системы

$$M_n(s) = \frac{m_x}{s} H(s), \quad (11.48)$$

откуда, с учетом изложенного в конце предыдущего пункта, находим

$$m_n[(n + \gamma)T] = m_x \sum_{i=1}^{k_n} \frac{A_{n_i} (1 - e^{-\alpha_i T n} e^{\alpha_i T \gamma})}{-\alpha_i}, \quad (11.49)$$

где A_{n_i} — числители простых дробей, на которые раскладывается функция $H(s)$, а α_i — ее полюсы.

Следовательно,

$$m_e[(n + \gamma)T] = m_d[(n + \gamma)T] - m_n[(n + \gamma)T], \quad (11.50)$$

где члены правой части определяются формулами (11.47) и (11.49). Заметим, что если выполняется условие (11.42), то на основании (11.46)

$$\lim_{T \rightarrow 0} T M_d^*(z, \gamma) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{T m_x}{z - 1} \lim_{T \rightarrow 0} G^*(z, \gamma) = \frac{m_x}{s} H(s),$$

поэтому

$$\lim_{T \rightarrow 0} m_e[(n + \gamma)T] = 0.$$

При отличном от нуля математическом ожидании входной переменной вместо дисперсии $D_e(t)$ ошибки $\varepsilon(t)$ нужно пользоваться математическим ожиданием квадрата случайной функции $\varepsilon(t)$:

$$\Pi_e(t) = M\{\varepsilon^2(t)\} = \Pi_d(t) - 2\Pi_{nd}(t) + \Pi_n(t), \quad (11.51)$$

где члены правой части равенства (11.51) определяются теми же выражениями, что и в (11.23). В соответствии с формулами (7.7) и (7.13)

$$\left. \begin{aligned} \Pi_d(t) &= m_d^2(t) + K_d(t), \\ \Pi_{nd}(t) &= m_n(t) m_d(t) + K_{nd}(t), \\ \Pi_n(t) &= m_n^2(t) + K_n(t). \end{aligned} \right\} \quad (11.52)$$

Подставив последние выражения в равенство (11.51) и учитывая (11.23), находим

$$\Pi_e(t) = m_e^2(t) + D_e(t).$$

Выражение для дисперсии ошибки $D_e(t)$ при $t = (n + \gamma)T$ было получено выше, в п. 2. Математическое же ожидание ошибки определяется формулой (11.50). Полученные выше формулы позволяют найти статистические характеристики погрешности цифровой автоматической системы в переходном режиме для случая, когда входное воздействие имеет не равное нулю математическое ожидание.

4. Примеры определения статистических характеристик погрешности цифровой автоматической системы в переходном режиме. Пример 1. Положим, что дискретная система состоит из объекта с передаточной

функцией

$$W_1(s) = \frac{K}{s+a}$$

и восстанавливающего элемента нулевого порядка. Следовательно, передаточная функция системы

$$G^*(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{K(1 - e^{-sT})}{s(s+a)} \right\} = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{K}{s(s+a)} \right\} = \frac{K(1 - e^{-aT})}{a(z - e^{-aT})}.$$

Передаточная функция соответствующей непрерывной системы

$$H(s) = \lim_{T \rightarrow 0} G^*(z) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{K(1 - e^{-aT})}{a(z - e^{-aT})} = \frac{K}{s+a}.$$

Схема формирования погрешности $\varepsilon[nT]$ для рассматриваемого примера показана на рис. 3.4. Положим, что

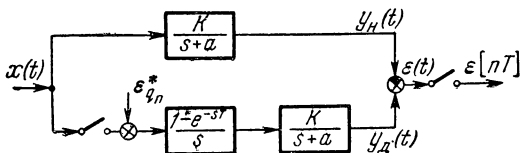


Рис. 3.4.

корреляционная функция входного воздействия $K_x(\tau) = e^{-b|\tau|}$, а его математическое ожидание равно m_x . Найдем дисперсию и математическое ожидание ошибки $\varepsilon[nT]$ в переходном режиме. В обозначениях (11.26) и (11.37) имеем

$$G^*(z) = \frac{Q_d^*(z)}{R_d^*(z)} = \frac{K(1-d)}{a(z-d)}, \quad d = e^{-aT};$$

$$F_x^*(z, \gamma) = \frac{L^*(z, \gamma)}{M^*(z)} = \frac{zc^\gamma}{z-c}, \quad c = e^{-bT}, \quad K_x(0) = 1;$$

$$H(s) = \frac{Q_H(s)}{R_H(s)} = \frac{K}{s+a}, \quad F_x(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{1}{s+b};$$

$$H(z, \gamma) = \frac{Q_H^*(z, \gamma)}{R_H^*(z)} = \frac{Kzd^\gamma}{z-d}; \quad \dot{R}_H(s) = \dot{R}_H^*(z) = 1,$$

$$\dot{R}_d^*(z) = a, \quad G^*(0) = \frac{K(d-1)}{ad}, \quad G^*(\infty) = g(0) = 0.$$

В рассматриваемом примере $\kappa_m = 0$, так как $D^*(z) = 1$, но $\kappa_n \neq 0$, т. е. присутствует помеха, обусловленная ошибкой квантования по уровню входного воздействия $x(t)$. Найдем вначале изображение $D_d^*(z)$, воспользовавшись для этого формулой (11.27). Так как $k_d = 1$, $p_1 = d$, $\kappa_m = 0$ и $G^*(\infty) = 0$, то

$$\begin{aligned} D_d^*(z) &= \frac{z}{z-1} \left\{ \frac{d^{-1}(1-d)(1-d)K^2}{aa(zd^{-1}-d)} \left[\frac{2zd^{-1}}{zd^{-1}-c} - 1 + \kappa_n \right] \right\} = \\ &= \frac{K^2(1-d)^2}{a^2} z \left[\frac{2z}{(z-1)(z-d^2)(z-dc)} + \frac{\kappa_n - 1}{(z-1)(z-d^2)} \right]. \end{aligned} \quad (11.53)$$

Разложим члены, стоящие в квадратных скобках последнего равенства, на простые дроби. В результате, после простых преобразований и перехода к оригиналам, находим

$$\begin{aligned} D_d[nT] &= \frac{K^2(1-d)}{a^2} \left[\frac{1+dc - \kappa_n(dc-1)}{(1+d)(1-dc)} + \right. \\ &+ \left. \frac{2c(1-d)}{(1-dc)(d-c)} e^{-(a+b)nT} - \frac{d+c+\kappa_n(d-c)}{(1+d)(d-c)} e^{-2anT} \right]. \end{aligned} \quad (11.54)$$

Для определения изображения $D_{нд}^*(z)$ используем формулу (11.38). Так как $k_d = k_n = 1$, $p_1 = q_1 = d$ и $G^*(\infty) = 0$, то получаем

$$\begin{aligned} D_{нд}^*(z) &= \frac{T}{z-1} \left\{ \frac{K^2(1-d) \overline{zd^{-1}d^{1-\delta}zd^{-1}c^\delta}}{a(zd^{-1}-d)(zd^{-1}-c)} + \right. \\ &+ \left. \frac{K^2(1-d) \overline{dd^\delta zd^{-1}c^\delta d^{-1}}}{1 \cdot a(zd^{-1}-d)(zd^{-1}-c)} \right\} = \\ &= \frac{K^2(1-d)dT}{a} \cdot \frac{z}{z-1} \left\{ \frac{z \overline{(d^{-1}c)^\delta}}{(z-d^2)(z-dc)} + \frac{\overline{(cd)^\delta}}{(z-d^2)(z-dc)} \right\}. \end{aligned} \quad (11.55)$$

Так как

$$\begin{aligned} \overline{(d^{-1}c)^\delta} &= \int_0^1 e^{T(a-b)\delta} d\delta = \frac{c-d}{Td(a-b)}, \\ \overline{(cd)^\delta} &= \int_0^1 e^{-T(a+b)\delta} d\delta = \frac{1-dc}{T(a+b)}, \end{aligned}$$

то

$$D_{нд}^*(z) = \frac{K^2(1-d)}{a(a^2-b^2)} z \frac{(a+b)(c-d)z + (a-b)d(1-dc)}{(z-1)(z-d^2)(z-dc)}. \quad (11.56)$$

Разложим последний сомножитель выражения (11.56) на простые дроби. После перехода к оригиналам находим

$$D_{нд}[nT] = \frac{K^2}{a(a^2-b^2)} \left[\frac{(c-d)(a+b) + d(1-dc)(a-b)}{(1+d)(1-dc)} + \frac{(1-d)[c(c-d)(a+b) + (1-dc)(a-b)]}{(1-dc)(d-c)} e^{-(a+b)nT} - \frac{d(c-d)(a+b) + (1-dc)(a-b)}{(1+d)(d-c)} e^{-2anT} \right]. \quad (11.57)$$

И, наконец, изображение $D_n(s)$ найдем с помощью формулы (11.40). Так как $k_n = 1$ и $\alpha_1 = -a$, то получаем

$$D_n(s) = \frac{2}{s} \cdot \frac{1 \cdot K \cdot K}{1(s+a+a)(s+a+b)} = \frac{2K^2}{s(s+2a)(s+a+b)}. \quad (11.58)$$

После разложения на простые дроби и перехода к оригиналам находим (при $t = nT$)

$$D_n[nT] = \frac{K^2}{a(a+b)} - \frac{2K^2}{a^2-b^2} e^{-(a+b)nT} + \frac{K^2}{a(a-b)} e^{-2anT}. \quad (11.59)$$

Выражения (11.54), (11.57) и (11.59) определяют составляющие дисперсии ошибки. Само выражение для $D_e[nT]$ получается из соотношения (11.23) после подстановки указанных формул. Можно выполнить следующую проверку полученных выражений. Очевидно, что при $n = 0$ должно удовлетворяться равенство

$$D_e[0] = 0. \quad (11.60)$$

Действительно, из полученных выражений следует

$$D_d[0] = D_{нд}[0] = D_n[0] = 0,$$

откуда имеем (11.60). Кроме того, нетрудно убедиться, что при $\varkappa_{\Pi} = 0$ (т. е. $q_{\Pi} \rightarrow 0$)

$$\lim_{\substack{T \rightarrow 0 \\ nT \rightarrow t}} D_{\Delta} [nT] = \lim_{\substack{T \rightarrow 0 \\ nT \rightarrow t}} D_{\text{нд}} [nT] = D_{\text{н}}(t),$$

как и должно быть. К этому же пределу стремится выражение для дисперсии в первом примере предыдущего параграфа, так как рассмотренная там дискретная система при $T \rightarrow 0$ переходит в непрерывную систему с передаточной функцией $H(s)$. Из указанных предельных соотношений следует

$$\lim_{T \rightarrow 0} D_{\varepsilon} [nT] = 0.$$

Найдем теперь математическое ожидание ошибки (11.50). Математическое ожидание выходной переменной дискретной системы определим с помощью формулы (11.47). Найдем для этого коэффициенты A_i (см. (9.7)). Так как

$$\frac{G^*(z)}{z} = \frac{(1-d)K}{a} \cdot \frac{1}{z(z-d)} = \frac{K(d-1)}{ad} \left[\frac{1}{z} - \frac{1}{z-d} \right],$$

то

$$A_0 = \frac{K(d-1)}{ad}, \quad A_1 = -A_0; \quad p_0 = 0, \quad p_1 = d.$$

Поэтому из формулы (11.47) находим

$$m_{\Delta} [nT] = \frac{Km_x(d-1)}{ad} \left[1 - \delta_0 [nT] - \frac{1-d^n}{1-d} \right], \quad (11.61)$$

так как $p_0^n = \delta_0 [nT]$ (см. п. 1 § 10). Из формулы (11.61) видно, что при $n = 0$ $m_{\Delta} [0] = 0$. Для $n > 0$ из формулы (11.61) получаем

$$m_{\Delta} [nT] = \frac{Km_x}{a} (1 - d^{n-1}) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (11.62)$$

Математическое ожидание выходной переменной непрерывной системы определим с помощью формулы (11.49). Так как $k_{\text{н}} = 1$, $A_{\text{н}} = 1$ и $\alpha_1 = -a$,

$$m_{\text{н}} [nT] = \frac{Km_x}{a} (1 - d^n), \quad (11.63)$$

следовательно,

$$m_e[nT] = m_d[nT] - m_n[nT] = \\ = \frac{Km_x(d-1)}{a} d^{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Из последней формулы видно, что

$$\lim_{T \rightarrow 0} m_e[nT] = \lim_{n \rightarrow \infty} m_e[nT] = 0.$$

Пример 2. Найдем дисперсию погрешности системы, для которой выше были определены корреляционная функция (§ 9, п. 3) и дисперсия (§ 10, п. 3, пример 2) выходной переменной. Передаточная функция идеальной системы, осуществляющей операцию интегрирования,

$$H(s) = \frac{1}{s}. \quad (11.64)$$

Передаточная функция цифровой машины, реализующей операцию интегрирования способом прямоугольников, с учетом работы машины в реальном времени

$$D^*(z) = \frac{Tz}{z-1} z^{-1} = \frac{T}{z-1}. \quad (11.65)$$

Дисперсию погрешности найдем с помощью формулы (11.23), определив для этого каждый из членов ее правой части. Предварительно установим соответствующие им изображения. Изображение $D_d^*(z)$ найдем с помощью формулы (11.27). Выражения, входящие в эту формулу, определяются соотношениями (11.26). Так как в рассматриваемой системе приведенная непрерывная часть состоит лишь из одного восстанавливающего элемента нулевого порядка, то

$$W^*(z) = 1 \quad \text{и} \quad G^*(z) = D^*(z),$$

поэтому из (11.65) имеем

$$Q_d^*(z) = T \quad \text{и} \quad R_d^*(z) = z - 1. \quad (11.66)$$

Записав передаточную функцию (11.65) через степени z^{-1} (2.24):

$$D^*(z) = \frac{Tz^{-1}}{1 - z^{-1}},$$

в соответствии с (2.27) получаем

$$A_D^*(z) = Tz^{-1} \quad \text{и} \quad B_D^*(z) = 1 - z^{-1}.$$

Следовательно, на основании (11.26)

$$P^*(z) = \frac{1}{B_D^*(z)} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1},$$

поэтому

$$Q_p^*(z) = z \quad \text{и} \quad R_p^*(z) = z - 1.$$

Схема формирования погрешности показана на рис. 3.5. В соответствии с (11.26) и (7.48) (см. также

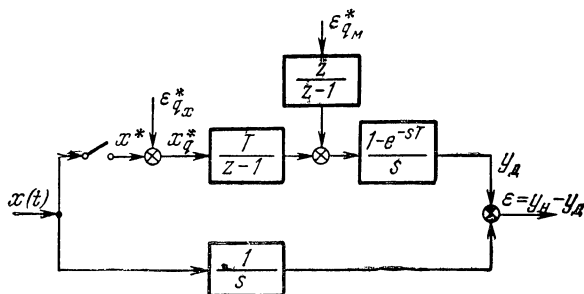


Рис. 3.5.

§ 9, п. 3) для изображения входного воздействия имеем

$$F_x^*(z) = \frac{L^*(z)}{M^*(z)} = \frac{D_x z (z - e^{-\alpha T} \cos \beta T)}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}}. \quad (11.67)$$

Кроме того, для использования формулы (11.27) нам необходимы величины

$$G^*(\infty) = P^*(0) = 0, \quad K_x(0) = D_x, \quad \dot{R}_d^*(z) = \dot{R}_p^*(z) = 1,$$

$$k_d = k_p = 1, \quad p_{i=1} = p_{j=1} = 1.$$

На основании приведенных выше выражений из (11.27) получаем

$$\begin{aligned} D_d^*(z) = & \\ = \frac{z}{z-1} \left\{ \frac{1TT}{1(z-1)} \left[\frac{2D_x z (z - e^{-\alpha T} \cos \beta T)}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}} - D_x + \kappa_{\text{п}} \right] + \right. & \\ \left. + \kappa_{\text{м}} \frac{1 \cdot 1z}{1(z-1)} \right\} = \frac{2D_x T^2 z^2 (z - e^{-\alpha T} \cos \beta T)}{(z-1)^2 (z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T})} + & \\ + \frac{T^2 (\kappa_{\text{п}} - D_x) z}{(z-1)^2} + \frac{\kappa_{\text{м}} z^2}{(z-1)^2}. & \quad (11.68) \end{aligned}$$

При определении зависимости дисперсии ошибки от времени ограничимся отысканием лишь той ее части, которая представляет собой линейно нарастающую функцию времени. Поэтому в изображении составляющей ошибки (11.68) этой части отвечают второе и третье слагаемые, а также та простая дробь (получающаяся при разложении первого слагаемого), знаменатель которой равен $(z-1)^2$. Обозначим сумму этих изображений через $\vec{D}_d^*(z)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \vec{D}_d^*(z) = & \frac{2D_x T^2 (1 - e^{-\alpha T} \cos \beta T)}{1 - 2e^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} + \\ & + \frac{T^2 (\kappa_{\text{п}} - D_x) z}{(z-1)^2} + \frac{\kappa_{\text{м}} z^2}{(z-1)^2} = \\ = \left[\frac{TD_x \operatorname{sh} \alpha T}{\operatorname{ch} \alpha T - \cos \beta T} + T\kappa_{\text{п}} + \frac{\kappa_{\text{м}}}{T} z \right] \frac{Tz}{(z-1)^2}. & \quad (11.69) \end{aligned}$$

Этому изображению отвечает оригинал

$$\vec{D}_d[nT] = \left[\frac{TD_x \operatorname{sh} \alpha T}{\operatorname{ch} \alpha T - \cos \beta T} + T\kappa_{\text{п}} + \frac{\kappa_{\text{м}}}{T} \right] nT \quad (11.70)$$

(ср. с примером 2 § 10). При определении оригинала (11.70) для третьего его члена принято $(n+1)T \approx nT$, что справедливо при больших n .

Найдем теперь изображение $D_{\text{нд}}^*(z)$ корреляционного момента $D_{\text{нд}}[nT]$, воспользовавшись для этого формулой (11.38). В соответствии с двумя последними обозначениями (11.37) для $H^*(z, \gamma)$ и $F_x^*(z, \gamma)$ и формулой

(7.48) имеем

$$Q_n^*(z, \gamma) = z, \quad R_n^*(z) = z - 1, \quad (11.71)$$

$$L^*(z, \gamma) = D_x z e^{-\alpha T \gamma} [z \cos \gamma \beta T - e^{-\alpha T} \cos((1 - \gamma)\beta T)], \quad (11.72)$$

а $M^*(z)$ определяется приведенным выше выражением (11.67). Кроме того,

$$\dot{R}_n^*(z) = 1, \quad H^*(0) = 0, \quad k_d = k_n = 1, \quad p_1 = q_1 = 1.$$

Используя соответствующие выражения, приведенные выше, из формулы (11.38) находим

$$\begin{aligned} D_{нд}^*(z) &= \frac{T}{z-1} \left\{ \frac{TzD_x z e^{-\alpha T \delta} [z \cos \delta \beta T - e^{-\alpha T} \cos((1-\delta)\beta T)]}{1(z-1)(z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T})} + \right. \\ &+ \left. \frac{T \cdot 1 \cdot D_x z e^{-\alpha T \delta} [z \cos \delta \beta T - e^{-\alpha T} \cos((1-\delta)\beta T)]}{1(z-1)(z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T})} \right\} = \\ &= \frac{T^2 D_x z [z^2 A + z(A - e^{-\alpha T} B) - e^{-\alpha T} B]}{(z-1)^2 (z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T})}, \quad (11.73) \end{aligned}$$

где

$$A = \overline{e^{-\alpha T \delta} \cos \delta \beta T}, \quad B = \overline{e^{-\alpha T \delta} \cos [(1-\delta)\beta T]}. \quad (11.74)$$

Выделим составляющую $D_{нд}^*(z)$ (11.73), соответствующую линейно нарастающему члену оригинала $D_{нд}[nT]$, подобно тому, как это было сделано выше. Обозначим эту составляющую через $\dot{D}_{нд}^*(z)$. Находим

$$\dot{D}_{нд}^*(z) = \frac{2TD_x(A - e^{-\alpha T} B)}{1 - 2e^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}} \cdot \frac{Tz}{(z-1)^2}. \quad (11.75)$$

Найдем теперь постоянные A и B (11.74):

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 e^{-\alpha T \delta} \cos \beta \delta T d\delta = \\ &= \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2) T} [\alpha(1 - e^{-\alpha T} \cos \beta T) + \beta e^{-\alpha T} \sin \beta T], \quad (11.76) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \int_0^1 e^{-\alpha T \delta} \cos [(1-\delta)\beta T] d\delta = \\ &= \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2) T} [(\alpha \cos \beta T + \beta \sin \beta T)(1 - e^{-\alpha T} \cos \beta T) + \\ &+ e^{-\alpha T} \sin \beta T (\beta \cos \beta T - \alpha \sin \beta T)]. \quad (11.77) \end{aligned}$$

Отсюда

$$A - e^{-\alpha T} B = \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2) T} (1 - 2e^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}). \quad (11.78)$$

Подставив выражение (11.78) в (11.75), получаем

$$\vec{D}_{\text{нд}}^*(z) = \frac{2D_x \alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \frac{Tz}{(z-1)^2}, \quad (11.79)$$

следовательно,

$$\vec{D}_{\text{нд}}[nT] = \frac{2D_x \alpha}{\alpha^2 + \beta^2} nT. \quad (11.80)$$

Найдем, наконец, изображение $D(s)$, отвечающее составляющей ошибки $D_{\text{н}}[nT]$. Воспользуемся для этого формулой (11.40). В соответствии с двумя первыми обозначениями (11.37) для $H(s)$ и $F_x(s)$ и формулой (7.48)

$$Q_{\text{н}}(s) = 1, \quad R_{\text{н}}(s) = s, \quad (11.81)$$

$$L(s) = D_x(s + \alpha), \quad M(s) = (s + \alpha)^2 + \beta^2. \quad (11.82)$$

Так как $\dot{R}_{\text{н}}(s) = 1$, $k_{\text{н}} = 1$ и $\alpha_i = 0$, то из формулы (11.40) получаем

$$D_{\text{н}}(s) = \frac{2}{s} \cdot \frac{1 \cdot 1 \cdot D_x(s + \alpha)}{1 \cdot s \cdot [(s + \alpha)^2 + \beta^2]} = \frac{2D_x(s + \alpha)}{s^2 [(s + \alpha)^2 + \beta^2]}. \quad (11.83)$$

Так же, как и выше, выделим из $D_{\text{н}}(s)$ составляющую, отвечающую линейно нарастающей части оригинала $D_{\text{н}}(t)$. Находим

$$\vec{D}_{\text{н}}(s) = \frac{2D_x \alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \frac{1}{s^2}. \quad (11.84)$$

При $t = nT$ этому изображению отвечает оригинал

$$\vec{D}_{\text{н}}[nT] = \frac{2D_x \alpha}{\alpha^2 + \beta^2} nT, \quad (11.85)$$

который совпадает с (11.80). Это объясняется, очевидно, тем обстоятельством, что функция $H^*(z, \gamma)$ в рассматриваемом случае не зависит от γ , поэтому в (11.73) осредняется фактически лишь функция $F_x^*(z, \gamma)$. Заметим, что при $T \rightarrow 0$, $nT \rightarrow t$ и $\kappa_{\text{п}} = \kappa_{\text{м}} = 0$ выражение (11.70) также переходит в (11.85).

На основании формул (11.70), (11.80) и (11.85) и выражения (11.23) для дисперсии ошибки находим, что

линейно нарастающая составляющая дисперсии $\vec{D}_\epsilon[nT]$ определяется формулой

$$\vec{D}_\epsilon[nT] = \left[\frac{TD_x \operatorname{sh} \alpha T}{\operatorname{ch} \alpha T - \cos \beta T} - \frac{2D_x \alpha}{\alpha^2 + \beta^2} + T\kappa_n + \frac{\kappa_m}{T} \right] nT. \quad (11.86)$$

Определим величины κ_n и κ_m , входящие в формулу (11.86). В соответствии с выражением (2.21)

$$\kappa_n = \frac{q_x^2}{12}, \quad (11.87)$$

где q_x — шаг квантования информации в преобразователе. Из формул (2.24), (2.30) и выражения (11.65) для $D^*(z)$, записанного через степени z^{-1} , имеем $M = N = 1$. Следовательно,

$$\kappa_m = \frac{(M + N)}{12} q_m^2 = \frac{q_m^2}{6}, \quad (11.88)$$

где q_m — шаг квантования информации в машине. Подставив величины (11.87) и (11.88) в (11.86), окончательно получаем

$$\vec{D}_\epsilon[nT] = \left[\frac{TD_x \operatorname{sh} \alpha T}{\operatorname{ch} \alpha T - \cos \beta T} - \frac{2D_x \alpha}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{q_x^2 T}{12} + \frac{q_m^2}{6T} \right] nT. \quad (11.89)$$

Таким образом, выражение (11.89) определяет дисперсию погрешности цифровой системы, обусловленную использованием ЦВМ. Интересно отметить, что в данной системе применение для интегрирования способа трапеций не уменьшает дисперсию линейно нарастающей составляющей погрешности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК В ДИСКРЕТНЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ В УСТАНОВИВШЕМСЯ РЕЖИМЕ ОПЕРАТОРНЫМ И ЧАСТОТНЫМ МЕТОДАМИ

В практических исследованиях весьма часто возникает необходимость определения статистических характеристик в дискретных системах, подверженных стационарным случайным воздействиям, в установившемся режиме. Наиболее распространенный способ определения корреляционной функции и дисперсии выходной переменной дискретной системы в этом случае основан на применении преобразования Фурье и использовании частотно-спектральных характеристик [31, 52, 62]. При этом статистические характеристики выходной переменной определяются не из их выражений в переходном режиме, как это может быть сделано при детерминированных воздействиях, а сразу рассматривается установившийся режим. Это обстоятельство делает методы исследования автоматических систем при случайных воздействиях несколько обособленными.

Целесообразно рассмотреть способ получения статистических характеристик выходной переменной дискретной системы в установившемся режиме, основанный на использовании выражений этих характеристик для переходного режима. Кроме определенного теоретического интереса, связанного с разработкой такого способа, он позволяет получить зависимости и формулы, с помощью которых корреляционная функция и дисперсия выходной переменной дискретной системы находятся во многих случаях значительно проще, чем с использованием спектральных характеристик.

Для непрерывных систем такой подход развит в работе [47], некоторые положения которого были также распространены и на дискретные системы [14], где для этой цели используются двумерное и одномерное z -преобразования. Рассмотрению этих вопросов посвящены два первых параграфа настоящей главы.

Важное практическое значение имеет разработка способов определения и оценки погрешности цифровых автоматических систем в установившемся режиме при случайных воздействиях. Оказывается, что при этом также можно исходить из выражений, определяющих статистические характеристики погрешности в переходном режиме [16]. В результате можно получить формулы, позволяющие найти математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию погрешности цифровой системы в установившемся режиме. Для анализа этой погрешности целесообразно использовать также частотно-спектральные представления, что позволяет получить достаточно простую оценку величины дисперсии погрешности [12]. Вопросы анализа погрешности цифровой системы в установившемся режиме при случайных воздействиях рассмотрены в § 14 этой главы.

§ 12. Определение корреляционной функции выходной переменной дискретной системы в установившемся режиме

1. Вывод формулы для определения корреляционной функции выходной переменной дискретной системы в установившемся режиме путем использования выражения для указанной функции в переходном режиме. В настоящее время для определения корреляционной функции установившейся выходной переменной дискретной системы используются частотные методы [31, 62]. Корреляционная функция определяется формулой

$$K_y[\nu T, \gamma T] = \frac{T}{\pi} \int_0^{\pi/T} |G^*(e^{j\omega T}, \gamma)|^2 S_x^*(e^{j\omega T}) \cos \omega \nu T d\omega \quad (12.1)$$

или эквивалентной формулой, получающейся из (12.1) путем замены переменной ω с помощью соотношения $z = e^{j\omega T}$:

$$K_y[\nu T, \gamma T] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} |G^*(z, \gamma)|^2 S_x^*(z) z^{\nu-1} dz, \quad (12.2)$$

где $G^*(z, \gamma)$ — частотная характеристика дискретной системы, $S_x^*(z)$ — спектральная плотность дискретной

входной переменной, представляющая собой преобразование Фурье от корреляционной функции этой переменной:

$$S_x^*(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} K_x(\nu T) z^{-\nu} = \\ = K_x(0) + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} K_x(\nu T) \cos \nu T \omega. \quad (12.3)$$

Отметим, что в (12.2) используется, как и ранее, обозначение z , однако здесь $s = j\omega T$, т. е. $\text{Re } s = \sigma = 0$.

Получим формулу для определения корреляционной функции выходной переменной дискретной системы в установившемся режиме, не прибегая к частотным методам, а используя лишь методы теории z -преобразования и формулу (9.19), найденную выше для корреляционной функции выходной переменной в переходном режиме. Рассмотрим указанную формулу. Если дискретная система устойчива, то полюсы p_i ее передаточной функции $G^*(z, \gamma)$ (9.7) находятся внутри единичного круга. Так как полюсы изображения корреляционной функции входного воздействия $F^*(z)$ также лежат внутри единичного круга, то полюсы p_j функции $G^*(z, \gamma) F_x^*(z)$ (9.8) расположены там же. Положим, что время, прошедшее после приложения к системе входного воздействия, велико, т. е. велико значение $N = \min(n, n_1)$. Тогда в формуле (9.19) можно опустить члены, где в показателе степени находится N , так как

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (p_i p_j)^N = \lim_{N \rightarrow \infty} (p_i p_r)^N = 0;$$

именно эти члены характеризуют нестационарность выходного процесса (переходной режим работы системы) при стационарном входном воздействии. При $N \rightarrow \infty$ переходный процесс затухает и на выходе системы устанавливается также стационарный случайный процесс. Так как в соответствии с формулой (9.19) фактически

$$K_y[(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma)T] = K_y[\nu T, NT, \gamma T],$$

то при $N \rightarrow \infty$ из указанной формулы находим

$$\begin{aligned}
 K_y[\nu T, \gamma T] = & \\
 = & \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k+l} \frac{A_i(\gamma) B_j(\gamma)}{1 - \rho_i \rho_j} \rho_i^{|\nu|} + \sum_{j=0}^{k+l} \sum_{i=0}^k \frac{B_j(\gamma) A_i(\gamma)}{1 - \rho_j \rho_i} \rho_j^{|\nu|} - \\
 & - \frac{K_x(0)}{2} \sum_{i=0}^k \sum_{r=0}^k \frac{A_i(\gamma) A_r(\gamma)}{1 - \rho_i \rho_r} \rho_i^{|\nu|} - \\
 & - \frac{K_x(0)}{2} \sum_{r=0}^k \sum_{i=0}^k \frac{A_r(\gamma) A_i(\gamma)}{1 - \rho_r \rho_i} \rho_r^{|\nu|}. \quad (12.4)
 \end{aligned}$$

С учетом выражений (9.7), (9.8) и (10.17) запишем

$$G^*(z, \gamma) z^{-1} = \frac{Q^*(z, \gamma)}{R^*(z) z} = \sum_{i=0}^k \frac{A_i(\gamma)}{z - \rho_i}, \quad (12.5)$$

$$G^*(z, \gamma) F_x^*(z) z^{-1} = \frac{Q^*(z, \gamma) L^*(z)}{R^*(z) M^*(z) z} = \sum_{j=0}^{k+l} \frac{B_j(\gamma)}{z - \rho_j}, \quad (12.6)$$

а также обозначим

$$F_x^*(z) z^{-1} = \frac{L^*(z)}{M^*(z) z} = \sum_{q=0}^l \frac{C_q}{z - \rho_q}. \quad (12.7)$$

В этих выражениях

$$A_0(\gamma) = G^*(0, \gamma), \quad A_i(\gamma) = \frac{Q^*(\rho_i, \gamma)}{R^*(\rho_i)} \rho_i^{-1} \quad (1 \leq i \leq k), \quad (12.8)$$

$$\begin{aligned}
 B_0(\gamma) = G^*(0, \gamma) F_x^*(0), \quad B_j(\gamma) = \frac{Q^*(\rho_j, \gamma) L^*(\rho_j)}{[R^*(\rho_j) M^*(\rho_j)]'} \rho_j^{-1} \quad (12.9) \\
 (1 \leq j \leq k+l),
 \end{aligned}$$

$$C_0(\gamma) = F_x^*(0), \quad C_q = \frac{L^*(\rho_q)}{M^*(\rho_q)} \rho_q^{-1} \quad (1 \leq q \leq l). \quad (12.10)$$

Последние формулы записаны с учетом того, что при $j=i=q=0$ $\rho_0=0$; при $1 \leq i \leq k$ $R^*(\rho_i)=0$; при $1 \leq j \leq k+l$ $R^*(\rho_j) M^*(\rho_j)=0$; при $1 \leq q \leq l$ $M^*(\rho_q)=0$. Для некоторой величины λ из соотношений (12.5) — (12.7)

следует

$$G^*(\lambda^{-1}, \gamma) = \sum_{i=0}^k \frac{A_i(\gamma)}{1 - \lambda p_i}, \quad (12.11)$$

$$G^*(\lambda^{-1}, \gamma) F_x^*(\lambda^{-1}) = \sum_{j=0}^{k+l} \frac{B_j(\gamma)}{1 - \lambda p_j}, \quad (12.12)$$

$$F_x^*(\lambda^{-1}) = \sum_{q=0}^l \frac{C_q}{1 - \lambda p_q}. \quad (12.13)$$

Используя формулы (12.11) и (12.12), из равенства (12.4) находим

$$\begin{aligned} K_y[vT, \gamma T] &= \sum_{i=0}^k A_i(\gamma) G^*(p_i^{-1}, \gamma) F_x^*(p_i^{-1}) p_i^{v|} + \\ &+ \sum_{j=0}^{k+l} B_j(\gamma) G^*(p_j^{-1}, \gamma) p_j^{v|} - \frac{K_x(0)}{2} \sum_{i=0}^k A_i(\gamma) G^*(p_i^{-1}, \gamma) p_i^{v|} - \\ &- \frac{K_x(0)}{2} \sum_{r=0}^k A_r(\gamma) G^*(p_r^{-1}, \gamma) p_r^{v|}. \end{aligned} \quad (12.14)$$

Заменим в равенстве (12.14) индексы суммирования j и r на i , выделим члены при $i = 0$, а во второй сумме выполним суммирование отдельно по полюсам функций $G^*(z, \gamma)$ и $F_x^*(z)$. В результате получаем

$$\begin{aligned} K_y[vT, \gamma T] &= A_0(\gamma) G^*(p_0^{-1}, \gamma) F_x^*(p_0^{-1}) p_0^{v|} + \\ &+ \sum_{i=1}^k A_i(\gamma) G^*(p_i^{-1}, \gamma) F_x^*(p_i^{-1}) p_i^{v|} + B_0(\gamma) G^*(p_0^{-1}, \gamma) p_0^{v|} + \\ &+ \sum_{i=1}^k B_i(\gamma) G^*(p_i^{-1}, \gamma) p_i^{v|} + \sum_{i=k+1}^{k+l} B_i(\gamma) G^*(p_i^{-1}, \gamma) p_i^{v|} - \\ &- K_x(0) A_0(\gamma) G^*(p_0^{-1}, \gamma) p_0^{v|} - \\ &- K_x(0) \sum_{i=1}^k A_i(\gamma) G^*(p_i^{-1}, \gamma) p_i^{v|}. \end{aligned} \quad (12.15)$$

При $\nu \neq 0$ первый, третий и предпоследний члены правой части равенства (12.15) равны нулю, так как $p_0 = 0$. При $\nu = 0$ (что соответствует выражению для дисперсии) разность первого и предпоследнего членов равна нулю, так как они равны между собой. Действительно, при $p_0 = 0$ $F_x^*(p_0^{-1}) = F_x^*(\infty) = K_x(0)$, а выражение $p_0^{|\nu|}$ при $p_0 = \nu = 0$ может быть принято равным единице по аналогии с пределом функции $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1$;

другими словами,

$$p_0^{|\nu|} = \delta_0[\nu T] = \begin{cases} 1 & \text{при } \nu = 0, \\ 0 & \text{при } \nu \neq 0. \end{cases}$$

Таким образом, в выражении (12.15) первый и предпоследний члены правой части можно опустить. Так как при $1 \leq i \leq k$ полином $R^*(p_i) = 0$, то из выражения (12.9) находим

$$B_i(\gamma) = \frac{Q^*(p_i, \gamma) L^*(p_i)}{R^*(p_i) M^*(p_i)} p_i^{-1} = A_i(\gamma) F_x^*(p_i). \quad (12.16)$$

При $k+1 \leq i \leq k+l$ полином $M^*(p_i) = 0$, поэтому

$$B_i(\gamma) = \frac{Q^*(p_i, \gamma) L^*(p_i)}{R^*(p_i) M^*(p_i)} p_i^{-1} = C_i G^*(p_i, \gamma). \quad (12.17)$$

С учетом первого соотношения (12.9)

$$\begin{aligned} B_0(\gamma) G^*(p_0^{-1}, \gamma) p_0^{|\nu|} &= \\ &= G^*(0, \gamma) F_x^*(0) G^*(\infty, \gamma) \delta_0[\nu T]. \end{aligned} \quad (12.18)$$

Подставив последние три формулы в правую часть равенства (12.15), находим

$$\begin{aligned} K_y[\nu T, \gamma T] &= \\ &= \sum_{i=1}^k A_i(\gamma) G^*(p_i^{-1}, \gamma) [F_x^*(p_i) + F_x^*(p_i^{-1}) - K_x(0)] p_i^{|\nu|} + \\ &\quad + \sum_{i=k+1}^{k+l} C_i G^*(p_i^{-1}, \gamma) G^*(p_i, \gamma) p_i^{|\nu|} + \\ &\quad + G^*(0, \gamma) G^*(\infty, \gamma) F_x^*(0) \delta_0[\nu T]. \end{aligned} \quad (12.19)$$

Используя соотношения (12.5), (12.7), (12.8) и (12.10), из равенства (12.19) получаем

$$\begin{aligned}
 K_y[vT, \gamma T] = & \\
 = & \sum_{i=1}^k \frac{Q^*(p_i, \gamma) Q^*(p_i^{-1}, \gamma)}{\dot{R}^*(p_i) R^*(p_i^{-1})} \left[\frac{L^*(p_i)}{M^*(p_i)} + \frac{L^*(p_i^{-1})}{M^*(p_i^{-1})} - K_x(0) \right] p_i^{|v|-1} + \\
 & + \sum_{i=k+1}^{k+l} \frac{L^*(p_i) Q^*(p_i, \gamma) Q^*(p_i^{-1}, \gamma)}{\dot{M}^*(p_i) R^*(p_i) R^*(p_i^{-1})} p_i^{|v|-1} + \\
 & + G^*(0, \gamma) G^*(\infty, \gamma) F_x^*(0) \delta_0[vT]. \quad (12.20)
 \end{aligned}$$

Таким образом, располагая изображением корреляционной функции входного воздействия и передаточной функцией дискретной системы, нетрудно определить корреляционную функцию выходной величины, используя для этого формулу (12.20). Заметим, что формула (12.20) определяет функцию дискретного аргумента v . Кроме того, эта функция зависит от параметра γ ; ее нельзя рассматривать как функцию непрерывного аргумента $(v + \gamma)T$. По отношению к параметру γ $K_y[vT, \gamma T]$ является периодической функцией с периодом, равным T .

Если входное воздействие представляет собой дискретный белый шум, то в соответствии с (7.64) при $c_n^2 = 1$

$$K_x[vT] = \frac{1}{T} \delta_0[vT] \quad \text{и} \quad F_x^*(z) = \frac{1}{T}. \quad (12.21)$$

Так как изображение корреляционной функции дискретного белого шума не имеет полюсов, то из формулы (12.20) получаем

$$\begin{aligned}
 K_y[vT, \gamma T] = & \frac{1}{T} \sum_{i=1}^k \frac{Q^*(p_i, \gamma) Q^*(p_i^{-1}, \gamma)}{\dot{R}^*(p_i) R^*(p_i^{-1})} p_i^{|v|-1} + \\
 & + \frac{1}{T} G^*(0, \gamma) G^*(\infty, \gamma) \delta_0[vT]. \quad (12.22)
 \end{aligned}$$

Из формулы (12.1) для входного воздействия, представляющего собой дискретный белый шум (т. е. при

$S_x^*(e^{j\omega T}) = 1/T$), и последнего соотношения получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/T} |G^*(e^{j\omega T}, \gamma)|^2 \cos \omega \nu T d\omega = \\ = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^k \frac{Q^*(p_i, \gamma)}{\dot{R}^*(p_i)} G^*(p_i^{-1}, \gamma) p_i^{|\nu| - 1} + \\ + \frac{1}{T} G^*(0, \gamma) G^*(\infty, \gamma) \delta_0[\nu T]. \end{aligned} \quad (12.23)$$

Это равенство может быть также использовано в практических расчетах. В заключение этого раздела сравним между собой выражения (12.2) и (12.20). Имея в виду, что [31]

$$S_x^*(z) = F_x^*(z) + F_x^*(z^{-1}) - K_x(0), \quad (12.24)$$

легко усмотреть определенное сходство в структуре указанных формул. Действительно, если использовать для $G^*(z, \gamma)$ и $F_x^*(z)$ представление в виде дробно-рациональных функций от z и вычислить в (12.2) контурный интеграл с помощью формулы обращения одномерного двустороннего z -преобразования, то получим выражение (12.20). Еще раз отметим, что при получении (12.20) отправными выражениями являлись z -изображения. Для (12.2) и (12.24) отправными являются частотная характеристика и спектральная плотность. Различие скрадывается за счет использования одного и того же обозначения z (см. выше).

2. Соотношение между изображениями корреляционных функций входной и выходной переменных дискретной системы и ее передаточной функцией. Полученное выше выражение (12.19) позволяет найти искомое соотношение. Определим для этого изображение $F_y^*(z, \gamma)$ корреляционной функции $K_y[\nu T, \gamma T]$ выходной переменной. Применив к левой и правой частям равенства (12.19) z -преобразование (при $\nu \geq 0$), получаем

$$\begin{aligned} F_y^*(z, \gamma) = \\ = \sum_{i=0}^k A_i(\gamma) G^*(p_i^{-1}, \gamma) [F_x^*(p_i) + F_x^*(p_i^{-1}) - K_x(0)] \frac{z}{z - p_i} + \\ + \sum_{i=k+1}^{k+l} C_i G^*(p_i^{-1}, \gamma) G^*(p_i, \gamma) \frac{z}{z - p_i} \end{aligned} \quad (12.25)$$

(изображение последнего члена (12.19) включено в первую сумму (12.25) и отвечает значению $i=0$ и $p_0=0$). Найдем выражение для изображения

$$F_y^*(z, \gamma) + F_y^*(z^{-1}, \gamma) - K_y[\gamma T],$$

воспользовавшись для этого формулами (12.25) и (12.19). После простых преобразований получаем

$$\begin{aligned} F_y^*(z, \gamma) + F_y^*(z^{-1}, \gamma) - K_y[\gamma T] = \\ = \sum_{i=0}^k A_i(\gamma) G^*(p_i^{-1}, \gamma) [F_x^*(p_i) + F_x^*(p_i^{-1}) - K_x(0)] \times \\ \times \left(\frac{z}{z-p_i} + \frac{p_i}{z^{-1}-p_i} \right) + \sum_{i=k+1}^{k+l} C_i G^*(p_i^{-1}, \gamma) G^*(p_i, \gamma) \times \\ \times \left(\frac{z}{z-p_i} + \frac{p_i}{z^{-1}-p_i} \right). \quad (12.26) \end{aligned}$$

Найдем теперь изображение

$$G^*(z, \gamma) G^*(z^{-1}, \gamma) [F_x^*(z) + F_x^*(z^{-1}) - K_x(0)], \quad (12.27)$$

использовав для этого обозначения (12.5) и (12.7) в следующем виде:

$$G^*(z, \gamma) = \sum_{i=0}^k A_i(\gamma) \frac{z}{z-p_i}, \quad G^*(z^{-1}, \gamma) = \sum_{j=0}^k A_j(\gamma) \frac{z^{-1}}{z^{-1}-p_j}, \quad (12.28)$$

$$F_x^*(z) = \sum_{m=k+1}^{k+l} C_m \frac{z}{z-p_m}, \quad F_x^*(z^{-1}) = \sum_{r=k+1}^{k+l} C_r \frac{z^{-1}}{z^{-1}-p_r}. \quad (12.29)$$

Определим сумму членов произведения (12.27):

$$\begin{aligned} G^*(z, \gamma) G^*(z^{-1}, \gamma) F_x^*(z) + G^*(z, \gamma) G^*(z^{-1}, \gamma) F_x^*(z^{-1}) - \\ - G^*(z, \gamma) G^*(z^{-1}, \gamma) K_x(0) = \\ = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k \sum_{m=k+1}^{k+l} A_i(\gamma) A_j(\gamma) C_m \frac{z}{(z-p_i)(z^{-1}-p_j)(z-p_m)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k \sum_{r=k+1}^{k+l} A_i(\gamma) A_j(\gamma) C_r \frac{z^{-1}}{(z-p_i)(z^{-1}-p_j)(z^{-1}-p_r)} - \\
 & - K_x(0) \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k A_i(\gamma) A_j(\gamma) \frac{1}{(z-p_i)(z^{-1}-p_j)}. \quad (12.30)
 \end{aligned}$$

Путем разложения на простые дроби получаем, что

$$\begin{aligned}
 \frac{z}{(z-p_i)(z^{-1}-p_j)(z-p_m)} &= \frac{1}{1-p_i p_j} \cdot \frac{p_i}{p_i-p_m} \cdot \frac{z}{z-p_i} + \\
 & + \frac{1}{1-p_j p_i} \cdot \frac{1}{1-p_j p_m} \cdot \frac{p_j}{z^{-1}-p_j} + \\
 & + \frac{1}{1-p_m p_j} \cdot \frac{p_m}{p_m-p_i} \cdot \frac{z}{z-p_m}; \quad (12.31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{z^{-1}}{(z-p_i)(z^{-1}-p_j)(z^{-1}-p_r)} &= \frac{1}{1-p_j p_i} \cdot \frac{1}{1-p_r p_i} \cdot \frac{z}{z-p_i} + \\
 & + \frac{1}{1-p_j p_i} \cdot \frac{p_j}{p_j-p_r} \cdot \frac{p_j}{z^{-1}-p_j} + \\
 & + \frac{1}{1-p_r p_i} \cdot \frac{p_r}{p_r-p_j} \cdot \frac{p_r}{z^{-1}-p_r}; \quad (12.32)
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{(z-p_i)(z^{-1}-p_j)} = \frac{1}{1-p_j p_i} \cdot \frac{z}{z-p_i} + \frac{1}{1-p_j p_i} \cdot \frac{p_j}{z^{-1}-p_j}. \quad (12.33)$$

В соответствии с (12.11) и (12.13) также имеем

$$G^*(\lambda^{-1}, \gamma) = \sum_{i, j=0}^k \frac{A_{i, j}(\gamma)}{1-\lambda p_{i, j}}; \quad F_x^*(\lambda^{-1}) = \sum_{m, r=k+1}^{k+l} \frac{C_{m, r}}{1-\lambda p_{m, r}}. \quad (12.34)$$

Подставим выражения (12.31) — (12.33) в правую часть равенства (12.30). Учтем при этом соотношения (12.34). Переходя к единому индексу суммирования i , для

членов левой части равенства (12.30) получаем

$$\begin{aligned} G^*(z, \gamma) G^*(z^{-1}, \gamma) F_x^*(z) = \\ = \sum_{i=0}^k A_i(\gamma) G^*(p_i^{-1}, \gamma) \left[F_x^*(p_i) \frac{z}{z-p_i} + F_x^*(p_i^{-1}) \frac{p_i}{z^{-1}-p_i} \right] + \\ + \sum_{i=k+1}^{k+l} C_i G^*(p_i^{-1}, \gamma) G^*(p_i, \gamma) \frac{z}{z-p_i}; \quad (12.35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G^*(z, \gamma) G^*(z^{-1}, \gamma) F_x^*(z^{-1}) = \\ = \sum_{i=0}^k A_i(\gamma) G^*(p_i^{-1}, \gamma) \left[F_x^*(p_i) \frac{p_i}{z^{-1}-p_i} + F_x^*(p_i^{-1}) \frac{z}{z-p_i} \right] + \\ + \sum_{i=k+1}^{k+l} C_i G^*(p_i^{-1}, \gamma) G^*(p_i, \gamma) \frac{p_i}{z^{-1}-p_i}; \quad (12.36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - G^*(z, \gamma) G^*(z^{-1}, \gamma) K_x(0) = \\ = -K_x(0) \sum_{i=0}^k A_i(\gamma) G^*(p_i^{-1}, \gamma) \left(\frac{z}{z-p_i} + \frac{p_i}{z^{-1}-p_i} \right). \quad (12.37) \end{aligned}$$

Сложив последние три выражения, т. е. найдя выражение для левой части равенства (12.30), установим, что полученная сумма равна правой части равенства (12.26). Следовательно,

$$\begin{aligned} F_y^*(z, \gamma) + F_y^*(z^{-1}, \gamma) - K_y[\gamma T] = \\ = G^*(z, \gamma) G^*(z^{-1}, \gamma) [F_x^*(z) + F_x^*(z^{-1}) - K_x(0)], \quad (12.38) \end{aligned}$$

что и является искомым соотношением. Из выражения (12.38) при $z = e^{j\omega T}$ следует известная формула, связывающая спектральные плотности случайных процессов на входе и выходе дискретной системы с ее частотной характеристикой [31, 62]:

$$S_y^*(e^{j\omega T}, \gamma) = |G^*(e^{j\omega T}, \gamma)|^2 S_x^*(e^{j\omega T}). \quad (12.39)$$

Формула (12.38) обобщает формулу (12.39) на плоскость комплексной переменной $z = e^{sT}$, где $s = \sigma + j\omega T$. Если левую и правую части равенства (12.38) умножить на T и в полученных произведениях $T \rightarrow 0$, то получаем

соотношение, связывающее изображения по Лапласу корреляционных функций случайных процессов на входе и выходе соответствующей непрерывной системы с ее передаточной функцией [47]:

$$F_y(s) + F_y(-s) = G(s)G(-s)[F_x(s) + F_x(-s)]. \quad (12.40)$$

При $s = j\omega$ соотношение (12.40) также переходит в формулу, связывающую между собой спектральные плотности непрерывных процессов на входе и выходе непрерывной системы:

$$S_y(\omega) = |G(j\omega)|^2 S_x(\omega). \quad (12.41)$$

Заметим, что выражение (12.38) было получено ранее в § 8 с помощью соотношения между двумерными изображениями дискретной функции двух переменных и ее предельными одномерными изображениями — (8.19). Если в выражении (8.19) положить $\gamma_1 = \gamma$, то находим формулу (12.38).

3. Примеры определения корреляционной функции выходной переменной дискретной системы.

Пример 1. Найдем корреляционную функцию выходной переменной дискретной системы, рассмотренной в примере 1 § 10. Имеем

$$G^*(z) = \frac{KTz}{z-d}, \quad F_x^*(z) = \frac{z}{z-c}.$$

Следовательно,

$$Q^*(z) = KTz, \quad R^*(z) = z-d, \quad \dot{R}^*(z) = 1, \quad L^*(z) = z, \\ M^*(z) = z-c, \quad \dot{M}^*(z) = 1, \quad d = e^{-aT}, \quad c = e^{-bT}, \quad K_x(0) = 1.$$

Для определения корреляционной функции воспользуемся формулой (12.20). Так как $k=1$ и $p_1=d$, $l=1$ и $p_2=c$, получаем

$$K_y[vT] = K^2 \frac{Td \cdot Td^{-1}}{1 \cdot (d^{-1} - d)} \left[\frac{d}{d-c} + \frac{d^{-1}}{d^{-1}-c} - 1 \right] d^{|\nu|-1} + \\ + K^2 \frac{c \cdot Tc \cdot Tc^{-1}}{1 \cdot (c-d)(c^{-1}-d)} c^{|\nu|-1} = \\ = \frac{K^2 T^2 (1-c^2)}{(1-d^2)(d-c)(1-dc)} d^{|\nu|+1} - \frac{K^2 T^2}{(d-c)(1-dc)} c^{|\nu|+1}. \quad (12.42)$$

Пример 2. Для той же системы, что и в рассмотренном выше примере и с тем же воздействием, но с восстанавливающим элементом нулевого порядка, найдем корреляционную функцию выходной переменной:

$$\begin{aligned} G^*(z, \gamma) &= \mathcal{L}_\gamma \left\{ \frac{1 - e^{-sT}}{s} \cdot \frac{K}{s + a} \right\} = \\ &= \frac{z - 1}{z} \mathcal{L}_\gamma \left\{ \frac{K}{s(s + a)} \right\} = K \frac{z(1 - d^\gamma) + d^\gamma - d}{a(z - d)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$Q^*(z, \gamma) = K[z(1 - d^\gamma) + d^\gamma - d], \quad R^*(z) = a(z - d), \quad \dot{R}^*(z) = a,$$

$$L^*(z) = z, \quad M^*(z) = z - c, \quad \dot{M}^*(z) = 1, \quad K_x(0) = 1,$$

$$G^*(0, \gamma) = \frac{K(1 - d^{\gamma-1})}{a}, \quad G^*(\infty, \gamma) = \frac{K(1 - d^\gamma)}{a}, \quad F_x^*(0) = 0.$$

Так же, как и в примере 1, $k = 1$, $p_1 = d$, $l = 1$, $p_2 = c$, из формулы (12.20) находим

$$\begin{aligned} K_y[\nu T, \gamma T] &= K^2 \frac{[d(1 - d^\gamma) + d^\gamma - d][d^{-1}(1 - d^\gamma) + d^\gamma - d]}{a \cdot a(d^{-1} - d)} \times \\ &\quad \times \left[\frac{d}{d - c} + \frac{d^{-1}}{d^{-1} - c} - 1 \right] d^{|\nu|-1} + \\ &+ K^2 \frac{[c(1 - d^\gamma) + d^\gamma - d][c^{-1}(1 - d^\gamma) + d^\gamma - d]}{1 \cdot a^2(c - d)(c^{-1} - d)} c^{|\nu|-1} = \\ &= K^2 \frac{d^\gamma(d^\gamma - d + d^{-1} - d^{\gamma-1})(1 - c^2)}{a^2(1 + d)(d - c)(1 - dc)} d^{|\nu|+1} - \\ &- K^2 \frac{(1 - d^\gamma)^2 + (d^\gamma - d)^2 + (1 - d^\gamma)(d^\gamma - d)(c + c^{-1})}{a^2(d - c)(1 - dc)} c^{|\nu|+1}. \end{aligned} \tag{12.43}$$

Из этого выражения нетрудно видеть, что $K_y[\nu T, \gamma T]$ является периодической функцией параметра γ . Если в

формуле (12.43) положить $\gamma = 0$, то получаем

$$K_y[\nu T] = \frac{K^2(1-d)(1-c^2)}{a^2(1+d)(d-c)(1-dc)} d^{|\nu|+1} - \frac{K^2(1-d)^2}{a^2(d-c)(1-dc)} c^{|\nu|+1}. \quad (12.44)$$

Проверим полученные выше выражения для корреляционных функций путем $T \rightarrow 0$, т. е. переходом к соответствующей непрерывной системе. Так как при этом $\gamma T \rightarrow 0$, $\nu T \rightarrow \tau$, находим, что выражения (12.42), (12.43) и (12.44) в пределе переходят в формулу

$$K_y(\tau) = K^2 \frac{be^{-a|\tau|} - ae^{-b|\tau|}}{a(b^2 - a^2)}. \quad (12.45)$$

Это же выражение получается для корреляционной функции переменной на выходе непрерывной системы с передаточной функцией $K/s + a$, подверженной случайному воздействию с корреляционной функцией $K_x(\tau) = e^{-b|\tau|}$.

§ 13. Определение дисперсии выходной переменной дискретной системы в установившемся режиме

1. Вывод формул для определения дисперсии выходной переменной дискретной системы в установившемся режиме путем использования зависимостей дисперсии от времени в переходном режиме. Для определения дисперсии установившейся выходной переменной дискретной системы используются обычно частотные методы [31, 62]. Соответствующие формулы получаются из выражений для корреляционной функции (12.1) и (12.2) (см. предыдущий параграф), если в них положить $\nu = 0$:

$$D_y[\gamma T] = \frac{T}{\pi} \int_0^{\pi/T} |G^*(e^{j\omega T}, \gamma)|^2 |S_x^*(e^{j\omega T})|^2 d\omega, \quad (13.1)$$

$$D_y[\gamma T] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} |G^*(z, \gamma)|^2 |S_x^*(z)|^2 z^{-1} dz, \quad (13.2)$$

где $z = e^{j\omega T}$. Для определения дисперсии по указанным формулам могут быть использованы специальные таблицы, составленные для дискретных систем [62], или же

обычные таблицы для непрерывных систем, если предварительно в выражениях, входящих в формулы (13.1) и (13.2), перейти от z -преобразования к ω -преобразованию [31, 35]. Однако, так же как и для корреляционной функции, можно получить формулы, определяющие дисперсию установившейся выходной переменной дискретной системы, не прибегая к частотным методам, оставаясь в рамках операторного подхода. Эти формулы дают возможность во многих случаях найти дисперсию более просто, чем с помощью частотно-спектральных представлений.

Для вывода указанных формул воспользуемся полученными выше выражениями, определяющими зависимость от времени дисперсии выходной переменной дискретной системы в переходном режиме, путем использования предельного перехода

$$D_y[\gamma T] = \lim_{n \rightarrow \infty} D_y[nT, \gamma T]. \quad (13.3)$$

Полагая, что дискретная система устойчива, из выражения (10.2) находим

$$D_y[\gamma T] = 2 \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k+1} \frac{A_i(\gamma) B_j(\gamma)}{1 - p_i p_j} - K_x(0) \sum_{i=0}^k \sum_{r=0}^k \frac{A_i(\gamma) A_r(\gamma)}{1 - p_i p_r}, \quad (13.4)$$

так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (p_i p_j)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (p_i p_r)^n = 0.$$

Другое выражение для определения дисперсии следует из формулы (10.9):

$$D_y[\gamma T] = 2 \sum_{m=0}^{\infty} g[(m + \gamma)T] h[(m + \gamma)T] - K_x(0) \sum_{m=0}^{\infty} g^2[(m + \gamma)T]. \quad (13.5)$$

В отдельных случаях удобно пользоваться этими формулами, если предварительно были найдены постоянные $A_i(\gamma)$, $B_j(\gamma)$. Формулы для определения дисперсии могут быть также получены из выражений для корреля-

ционной функции выходной переменной, если в них положить $\nu = 0$. Так, из формулы (12.20) предыдущего параграфа получаем

$$\begin{aligned}
 D_y [\gamma T] = & \\
 = & \sum_{i=1}^k \frac{Q^*(p_i, \gamma) Q^*(p_i^{-1}, \gamma)}{\dot{R}^*(p_i) R^*(p_i^{-1})} \left[\frac{L^*(p_i)}{M^*(p_i)} + \frac{L^*(p_i^{-1})}{M^*(p_i^{-1})} - K_x(0) \right] p_i^{-1} + \\
 & + \sum_{i=k+1}^{k+l} \frac{L^*(p_i) Q^*(p_i, \gamma) Q^*(p_i^{-1}, \gamma)}{M^*(p_i) R^*(p_i) R^*(p_i^{-1})} p_i^{-1} + \\
 & + G^*(0, \gamma) G^*(\infty, \gamma) F_x^*(0). \quad (13.6)
 \end{aligned}$$

Если входным воздействием системы является дискретный белый шум, то, как следует из формулы (12.22),

$$\begin{aligned}
 D_y [\gamma T] = & \\
 = & \frac{1}{T} \sum_{i=1}^k \frac{Q^*(p_i, \gamma) Q^*(p_i^{-1}, \gamma)}{\dot{R}^*(p_i) R^*(p_i^{-1})} p_i^{-1} + \frac{1}{T} G^*(0, \gamma) G^*(\infty, \gamma). \quad (13.7)
 \end{aligned}$$

Из выражений (13.1) и (13.7) получаем, что

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/T} |G^*(e^{j\omega T}, \gamma)|^2 d\omega = & \\
 = & \frac{1}{T} \sum_{i=1}^k \frac{Q^*(p_i, \gamma) Q^*(p_i^{-1}, \gamma)}{\dot{R}^*(p_i) R^*(p_i^{-1})} p_i^{-1} + \frac{1}{T} G^*(0, \gamma) G^*(\infty, \gamma). \quad (13.8)
 \end{aligned}$$

Из приведенных выше выражений для определения дисперсии выходной переменной дискретной системы видно, что величина дисперсии зависит от параметра запаздывания γ . Это свидетельствует о том, что процесс на выходе дискретной системы даже при $n \rightarrow \infty$ не является в полном смысле стационарным. В этом проявляется известное свойство нестационарности импульсных систем [41]. Физически оно заключается в том, что реакция импульсной системы зависит от момента приложения воздействия внутри интервала дискретности. В рассматриваемом случае дисперсия зависит от того, в какой момент осуществляется замыкание фиктивного импульсного элемента на выходе непрерывной части

дискретной системы [31]. Если считать, что γ фиксировано, в частности равно нулю, то процесс на выходе системы можно считать стационарным. Если рассматривать дисперсию как функцию параметра γ , то она является периодической функцией этого параметра.

2. Вывод формул для определения дисперсии выходной переменной дискретной системы в установившемся режиме путем использования изображения зависимости дисперсии от времени. Наиболее удобный способ получения выражения для дисперсии в установившемся режиме — применение теоремы z -преобразования о конечном значении к изображению дисперсии $D_y^*(z, \gamma)$:

$$D_y[\gamma T] = \lim_{n \rightarrow \infty} D_y[(n + \gamma) T] = \lim_{z \rightarrow 1} [(z - 1) D_y^*(z, \gamma)]. \quad (13.9)$$

Для использования предельного перехода (13.9) необходимо, конечно, чтобы все полюсы изображения $(z - 1) D_y^*(z, \gamma)$ были расположены внутри окружности единичного радиуса. Это условие для устойчивых систем и реальных случайных воздействий выполняется. Изображение $D_y^*(z, \gamma)$ было получено выше, в § 10. Найдя предел выражения (10.14) с помощью формулы (13.9) и заменив обозначение переменной ω на z , получаем

$$D_y[\gamma T] = \frac{1}{\pi j} \oint_{\Gamma} G^*(z, \gamma) G^*(z^{-1}, \gamma) F_x^*(z^{-1}) z^{-1} dz - \\ - \frac{K_x(0)}{2\pi j} \oint_{\Gamma} G^*(z, \gamma) G^*(z^{-1}, \gamma) z^{-1} dz, \quad (13.10)$$

где Γ — окружность единичного радиуса. Положим, что величины p_i при $1 \leq i \leq k$ определяют положения полюсов функции $G^*(z, \gamma)$, причем полюс p_i имеет кратность m_i . Из выражения (13.10) следует, что внутри контура Γ лежат лишь полюсы указанной функции, а также полюс, принадлежащий нулевой точке. Полюсы же функций $G^*(z^{-1}, \gamma)$ и $F_x^*(z^{-1})$ лежат вне контура Γ (так как полюсы $F_x^*(z)$, так же как и $G^*(z, \gamma)$, лежат внутри контура Γ). В результате, воспользовавшись формулой для определения вычетов относительно

кратных полюсов, из выражения (13.10) находим

$$\begin{aligned}
 D_y[\gamma T] = & 2 \sum_{i=1}^k \frac{1}{(m_i - 1)!} \times \\
 & \times \frac{d^{m_i-1}}{dz^{m_i-1}} [z^{-1} G^*(z, \gamma) G^*(z^{-1}, \gamma) F_x^*(z^{-1}) (z - p_i)^{m_i}]_{z=p_i} - \\
 & - K_x(0) \sum_{i=1}^k \frac{1}{(m_i - 1)!} \times \\
 & \times \frac{d^{m_i-1}}{dz^{m_i-1}} [z^{-1} G^*(z, \gamma) G^*(z^{-1}, \gamma) (z - p_i)^{m_i}]_{z=p_i} + \\
 & + K_x(0) G^*(0, \gamma) G^*(\infty, \gamma) \quad (13.11)
 \end{aligned}$$

(при определении вычета при $z = 0$ учтено, что $F_x^*(\infty) = K_x(0)$). Формулу (13.11) можно было так же получить из выражения (10.16) с помощью предельного перехода (13.9) и замены обозначения переменной w на z . Если кратность полюсов функций $G^*(z, \gamma)$ равна единице, то с учетом обозначений (10.17) из формулы (13.11) находим

$$\begin{aligned}
 D_y[\gamma T] = & \sum_{i=1}^k \frac{p_i^{-1} Q^*(p_i, \gamma) Q^*(p_i^{-1}, \gamma)}{\dot{R}^*(p_i) R^*(p_i^{-1})} \left[\frac{2L^*(p_i^{-1})}{M^*(p_i^{-1})} - K_x(0) \right] + \\
 & + K_x(0) G^*(0, \gamma) G^*(\infty, \gamma). \quad (13.12)
 \end{aligned}$$

Выражение (13.12) может быть также получено из (10.19) и (10.35) путем предельного перехода (13.9). Формула (13.12) наиболее удобна для определения дисперсии, так как отличается наибольшей простотой. Поясним это положение. В § 10 изображение $D^*(z, \gamma)$ (10.14) было получено путем применения к равенству (10.13) соотношения (10.11). Если бы вместо (10.11) использовали соотношения (10.12), то получили бы выражение, отличающееся от (10.14) лишь тем, что в первой подынтегральной функции вместо множителя $F_x^*(z w^{-1})$ был бы $F_x^*(w)$. В результате применения предельного перехода (13.9) к полученному таким образом выражению для $D_y^*(z, \gamma)$ вместо формулы (13.10)

находим

$$D_y [\gamma T] = \frac{1}{\pi j} \oint_{\Gamma} G^*(z, \gamma) G^*(z^{-1}, \gamma) F_x^*(z) z^{-1} dz - \\ - \frac{K_x(0)}{2\pi j} \oint_{\Gamma} G^*(z, \gamma) G^*(z^{-1}, \gamma) z^{-1} dz. \quad (13.13)$$

Как следует из формулы (13.13), внутри контура Γ в отличие от (13.10) лежат также полюсы функции $F_x^*(z)$. Обозначим полюсы $F_x^*(z)$ через p_i при $k+1 \leq i \leq k+l$. Для случая, когда кратность полюсов функций $G^*(z, \gamma)$ и $F_x^*(z)$ равна единице, из (13.13) аналогично (13.12) находим

$$D_y [\gamma T] = \sum_{i=1}^k \frac{Q^*(p_i, \gamma) Q^*(p_i^{-1}, \gamma)}{R^*(p_i) R^*(p_i^{-1})} \left[\frac{2L^*(p_i)}{M^*(p_i)} - K_x(0) \right] p_i^{-1} + \\ + 2 \sum_{i=k+1}^{k+l} \frac{L^*(p_i) Q^*(p_i, \gamma) Q^*(p_i^{-1}, \gamma)}{M^*(p_i) R^*(p_i) R^*(p_i^{-1})} p_i^{-1} + \\ + 2G^*(0, \gamma) G^*(\infty, \gamma) F_x^*(0) - G^*(0, \gamma) G^*(\infty, \gamma) K_x(0). \quad (13.14)$$

Сравнивая формулы (13.12) и (13.14), убеждаемся, что последняя существенно сложнее, так как требует учета полюсов как передаточной функции $G^*(z, \gamma)$, так и изображения $F_x^*(z)$. Если взять полусумму выражений (13.12) и (13.14), то находим формулу (13.6), полученную из выражения корреляционной функции при $v=0$. Очевидно, что формула (13.6) отвечает случаю определения дисперсии из полусуммы равенств (13.10) и (13.13), т. е.

$$D_y [\gamma T] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} G^*(z, \gamma) G^*(z^{-1}, \gamma) \times \\ \times [F_x^*(z) + F_x^*(z^{-1}) - K_x(0)] z^{-1} dz. \quad (13.15)$$

Нетрудно видеть, что выражение (13.6) следует из (13.15) после определения вычетов. Таким образом, соотношению (13.15) соответствует наиболее сложная формула (13.6) для определения дисперсии. Сравним выражения (13.2) и (13.15), учитывая при этом равенство (12.24). Из этого рассмотрения ясно, что при

$z = e^{j\omega T}$ формула (13.15) переходит в употребляемое обычно выражение (13.2), которому (с точностью до обозначения z) отвечает наиболее сложная формула для определения дисперсии (13.6). Подчеркнем еще раз, что всюду выше нами использовалась переменная $z = e^{sT}$, где $\operatorname{Re} s = \sigma \neq 0$. Формула (13.15) обобщает, таким образом, выражение (13.2) на плоскость комплексной переменной $z = e^{sT}$. В литературе [31, 52] выражение (13.15) используется широко, однако при этом принимается $z = e^{j\omega T}$.

Из полученных выше выражений для определения дисперсии выходной переменной дискретной системы будем пользоваться далее наиболее простыми формулами (13.11) и (13.12). Практическое использование этих формул показывает, что во многих случаях (по крайней мере, когда нахождение полюсов передаточной функции системы не вызывает больших затруднений) определение дисперсии существенно проще, чем при использовании перехода к ω -преобразованию. Некоторые примеры определения дисперсии будут приведены ниже.

Если математическое ожидание входной величины отлично от нуля, то может представлять интерес математическое ожидание выходной переменной в установленном режиме. Используя выражения (9.1) и (9.26) для изображений математического ожидания выходного воздействия и применив к ним предельный переход (13.9), находим

$$m_y[\gamma T] = m_x \sum_{i=0}^k \frac{A_i(\gamma)}{1 - p_i}, \quad (13.16)$$

$$m_y[\gamma T] = m_x G^*(1, \gamma). \quad (13.17)$$

Выше дисперсия выходной переменной дискретной системы определялась для некоторого фиксированного параметра запаздывания γ . Для эргодического процесса эта дисперсия совпадает с дисперсией дискретной случайной последовательности. Иногда может представлять интерес дисперсия огибающей дискретной последовательности, т. е. непосредственно дисперсия непрерывной величины — выходной переменной непрерывной части дискретной системы. Обозначим последнюю через \bar{D}_y .

Как известно [62],

$$\bar{D}_y = \int_0^1 D_y[\gamma T] d\gamma. \quad (13.18)$$

При малых значениях величины шага дискретности T величина \bar{D}_y достаточно просто связана с $D_y[\gamma T]$. Действительно, при выполнении условия эргодичности функции $y[(n + \gamma)T]$

$$D_y[\gamma T] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N y^2[(n + \gamma)T], \quad (13.19)$$

откуда

$$\bar{D}_y = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \int_0^1 y^2[(n + \gamma)T] d\gamma. \quad (13.20)$$

При малых T

$$\int_0^1 y^2[(n + \gamma)T] d\gamma \approx y^2[(n + \gamma)T],$$

следовательно,

$$\bar{D}_y \approx D_y[\gamma T], \quad (13.21)$$

в том числе и при $\gamma = 0$. Аналогично для математического ожидания

$$\bar{m}_y = \int_0^1 m_y[\gamma T] d\gamma \approx m_y[\gamma T]. \quad (13.22)$$

3. Примеры определения дисперсии выходной переменной дискретной системы в установившемся режиме.

Пример 1. Рассмотрим тот же пример, что и в §§ 10 и 12, т. е. определим дисперсию на выходе дискретной системы при

$$G^*(z) = \frac{Q^*(z)}{R^*(z)} = \frac{KTz}{z-d}, \quad F_x^*(z) = \frac{L^*(z)}{M^*(z)} = \frac{z}{z-c},$$

$$\dot{R}^*(z) = \dot{M}^*(z) = 1, \quad K_x(0) = 1, \quad G^*(0) = 0.$$

Для определения дисперсии воспользуемся формулой (13.12). Так как $k = 1$, $p_1 = d$, то

$$D_y = K^2 \frac{d^{-1} \cdot Td \cdot Td^{-1}}{1 \cdot (d^{-1} - d)} \left[\frac{2d^{-1}}{d^{-1} - c} - 1 \right] = \frac{K^2 T^2 (1 + dc)}{(1 - d^2)(1 - dc)}. \quad (13.23)$$

Тот же результат следует из выражения (10.36) для зависимости дисперсии от времени при $n \rightarrow \infty$ и выражения (12.42) для корреляционной функции при $\nu = 0$.

Пример 2. Определим дисперсию на выходе дискретной системы предыдущего примера, дополненной восстанавливающим элементом нулевого порядка. Характеристики этой системы были определены выше, в примере 2 § 12. Воспользуемся приведенными там выражениями для $G^*(z, \gamma)$ и $F_x^*(z)$. Из формулы (13.12) при $k = 1$ и $p_1 = d$ находим

$$\begin{aligned} D_y[\gamma T] &= K^2 \frac{d^{-1} [d(1 - d^\gamma) + d^\gamma - d] [d^{-1}(1 - d^\gamma) + d^\gamma - d]}{a \cdot a(d^{-1} - d)} \times \\ &\times \left(\frac{2d^{-1}}{d^{-1} - c} - 1 \right) + K^2 \frac{(1 - d^{\gamma-1})(1 - d^\gamma)}{a^2} = \\ &= K^2 \frac{d^\gamma (d^\gamma - d + d^{-1} - d^{\gamma-1})(1 + dc)}{a^2(1 + d)(1 - dc)} + \\ &+ K^2 \frac{(1 - d^{\gamma-1})(1 - d^\gamma)}{a^2}. \quad (13.24) \end{aligned}$$

При $\gamma = 0$ из формулы (13.24) получаем

$$D_y = \frac{K^2(1 - d)(1 + dc)}{a^2(1 + d)(1 - dc)}. \quad (13.25)$$

Из выражения (13.24) нетрудно видеть, что $D_y[\gamma T]$ является периодической функцией γ . Проверим полученные формулы (13.23), (13.24) и (13.25) путем $T \rightarrow 0$, т. е. найдем дисперсию на выходе соответствующей непрерывной системы. Для всех трех указанных формул находим одно выражение дисперсии выходной переменной непрерывной системы в установившемся режиме

$$\lim_{T \rightarrow 0} D_y = \lim_{T \rightarrow 0} D_y[\gamma T] = \frac{K}{a(a + b)}. \quad (13.26)$$

Если в выражении (12.45) для корреляционной функции непрерывной системы положить $\tau = 0$, то получаем формулу (13.26).

Пример 3. На вход дискретной системы, состоящей из объекта с передаточной функцией

$$W_1(s) = \frac{K}{(s+a)^2}$$

и не имеющей восстанавливающего элемента, подается дискретный белый шум с единичной интенсивностью. Определить дисперсию выходной переменной в установившемся режиме. Имеем

$$K_x[vT] = \frac{1}{T} \delta_0[vT], \quad F_x^*(z) = \frac{1}{T}, \quad K_x(0) = \frac{1}{T};$$

$$\begin{aligned} W(s) = W_0(s) W_1(s) &= \frac{KT}{(s+a)^2}, \quad G^*(z) = Z \left\{ \frac{KT}{(s+a)^2} \right\} = \\ &= \frac{KT^2zd}{(z-d)^2}, \quad \text{где } d = e^{-aT}, \quad G^*(0) = 0. \end{aligned}$$

В связи с тем, что передаточная функция рассматриваемой системы имеет кратные корни, воспользуемся для определения дисперсии формулой (13.11). Так как $k = 1$, $p_1 = d$ и $m_1 = 2$, получаем

$$\begin{aligned} D_y &= 2K^2 \frac{d}{dz} \left[z^{-1} \cdot \frac{T^2zd}{(z-d)^2} \cdot \frac{T^2z^{-1}d}{(z^{-1}-d)^2} \cdot \frac{1}{T} (z-d)^2 \right]_{z=d} - \\ &\quad - \frac{K^2}{T} \frac{d}{dz} \left[z^{-1} \cdot \frac{T^2zd}{(z-d)^2} \cdot \frac{T^2z^{-1}d}{(z^{-1}-d)^2} \cdot (z-d)^2 \right]_{z=d} = \\ &= 2K^2T^3d^2 \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{(1-dz)^2} \right]_{z=d} - K^2T^3d^2 \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{(1-dz)^2} \right]_{z=d} = \\ &= K^2T^3d^2 \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{(1-dz)^2} \right]_{z=d} = K^2T^3 \frac{d^{-1} + d}{(d^{-1} - d)^3} = \\ &= \frac{K^2T^3}{4} \cdot \frac{\text{cth } aT}{\text{sh}^2 aT}. \quad (13.27) \end{aligned}$$

При $T \rightarrow 0$ из (13.27) находим

$$\lim_{T \rightarrow 0} D_y = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{K^2T^3}{4} \cdot \frac{\text{cth } aT}{\text{sh}^2 aT} = \frac{K^2}{4a^3}, \quad (13.28)$$

как и должно быть для соответствующей непрерывной системы.

§ 14. Определение статистических характеристик погрешности цифровой автоматической системы в установившемся режиме

Следуя принятому подходу, определим статистические характеристики погрешности, обусловленной дискретностью процесса управления, в установившемся режиме работы системы. Будем, как и в § 11, рассматривать выходные переменные дискретной и соответствующей ей непрерывной систем. Последние, как следует из выражений (11.1) и (11.2), в установившемся режиме определяются следующими соотношениями при $t \rightarrow \infty$:

$$y_n(t) = \int_0^{\infty} h(t - \tau) x(\tau) d\tau, \quad (14.1)$$

$$y_d(t) = \sum_{m=0}^{\infty} g(t - mT) \{x[mT] + \varepsilon_{q_n}[mT]\} + \\ + \sum_{m=0}^{\infty} p(t - mT) \varepsilon_{q_m}[mT]; \quad (14.2)$$

обозначения использованных здесь переменных приведены в § 11 (в выражении (14.2) принята запись для импульсного элемента, фиксирующего правое значение входных величин; для установившегося режима различие в способе описания работы импульсного элемента значения не имеет).

Ошибка, обусловленная использованием для управления цифровой машины,

$$\varepsilon(t) = y_d(t) - y_n(t). \quad (14.3)$$

Определим статистические характеристики ошибки $\varepsilon(t)$.

1. Определение корреляционной функции погрешности цифровой автоматической системы. Так как входное воздействие $x(t)$ представляет собой стационарный случайный процесс, то ошибка $\varepsilon(t)$ в установившемся режиме также будет стационарной случайной функцией, корреляционная функция которой зависит от разности t и t_1 . Рассматривая в дальнейшем дискретные величины $t = nT$, $t_1 = n_1T$, $t - t_1 = (n - n_1)T = \nu T$, из равенства (11.4) получаем

$$K_\varepsilon[\nu T] = K_d[\nu T] - K_{нд}[\nu T] - K_{дн}[\nu T] + K_n[\nu T]. \quad (14.4)$$

Выражения для составляющих правой части равенства (14.4) получаются из соответствующих формул § 11, если в них положить $n \rightarrow \infty$ и $n_1 \rightarrow \infty$. Найдем изображение корреляционной функции ошибки для установившегося режима, воспользовавшись изображением корреляционной функции (11.22) для переходного режима и соотношением между двумерными изображениями дискретной функции двух переменных и ее предельными одномерными изображениями (5.41) при $\gamma = \gamma_1 = 0$:

$$\begin{aligned} \Phi_{\varepsilon}^*(z, z^{-1}) &= \lim_{zz_1 \rightarrow 1} [(zz_1 - 1) \Phi_{\varepsilon}^*(z, z_1)] = \\ &= G^*(z) G^*(z^{-1}) [F_x^*(z) + F_x^*(z^{-1}) - K_x(0)] + \\ &\quad + G^*(z) G^*(z^{-1}) \kappa_n + P^*(z) P^*(z^{-1}) \kappa_m - \\ &\quad - G^*(z^{-1}) T \int_0^1 H^*(z, 1-\gamma) [F_x^*(z, \gamma) z^{-1} + F_x^*(z^{-1}, 1-\gamma)] d\gamma - \\ &\quad - G^*(z) T \int_0^1 H^*(z^{-1}, 1-\gamma) [F_x^*(z^{-1}, \gamma) z + F_x^*(z, 1-\gamma)] d\gamma + \\ &\quad + T^2 \int_0^1 \int_0^1 H^*(z, 1-\gamma) H^*(z^{-1}, 1-\gamma) d\gamma d\gamma [F_x^*(z) + \\ &\quad + F_x^*(z^{-1}) - K_x(0)] \quad (14.5) \end{aligned}$$

(в последнем выражении по отношению к формуле (11.22) сделана некоторая перегруппировка членов). Рассмотрим, каким образом могут быть определены оригиналы, отвечающие отдельным членам правой части выражения (14.5). Первому члену (14.5) соответствует корреляционная функция выходной переменной дискретной системы, которая может быть найдена по формуле (12.20). Второму и третьему членам (14.5) отвечают корреляционные функции выходных переменных дискретных систем, входами которых является дискретный белый шум соответственно с плотностями κ_n и κ_m . Второму члену (14.5) соответствует выражение корреляционной функции (12.22) (с точностью до множителя κ_n), для третьего — структура выражения аналогична. Четвертому и пятому членам изображения (14.5) отвечают взаимные корреляционные функции выходных пе-

ременных дискретной и непрерывной систем. Формулы для определения этих функций нетрудно получить в каждом конкретном случае с помощью обратного z -преобразования. И, наконец, последнему члену изображения (14.5) отвечает выражение корреляционной функции выходной переменной непрерывной системы, также аналогичное по структуре формуле (12.20). Отметим, что корреляционную функцию непрерывной системы можно найти как функцию переменной τ , пользуясь формулами работы [47], а затем положить $\tau = \nu T$. Руководствуясь сказанным, нетрудно найти корреляционную функцию погрешности в каждом конкретном случае.

2. Определение дисперсии погрешности цифровой автоматической системы операторным методом. Для определения дисперсии в установившемся режиме воспользуемся, так же как в предыдущем параграфе, теоремой z -преобразования о конечном значении, применив ее к изображению $D_\varepsilon(z, \gamma)$, составляющие которого были найдены в § 11. Из выражения (11.23) для установившегося режима (при $n \rightarrow \infty$) находим

$$D_\varepsilon[\gamma T] = D_d[\gamma T] - 2D_{нд}[\gamma T] + D_n[\gamma T], \quad (14.6)$$

где

$$D_\varepsilon[\gamma T] = \lim_{n \rightarrow \infty} D_\varepsilon[(n + \gamma) T],$$

а члены правой части (14.6) определяются аналогичными предельными соотношениями, что и $D_\varepsilon[\gamma T]$. Найдем формулы для составляющих дисперсии ошибки. Для $D_d[\gamma T]$ имеем

$$D_d[\gamma T] = \lim_{n \rightarrow \infty} D_d[(n + \gamma) T] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) D_d^*(z, \gamma). \quad (14.7)$$

Выражение для $D_d^*(z, \gamma)$ было получено выше, в § 11. Применив предельный переход (14.7) к выражению (11.25), а также заменив обозначение ω на z , находим

$$\begin{aligned} D_d[\gamma T] = & \frac{1}{\pi j} \oint_{\Gamma} G^*(z, \gamma) G^*(z^{-1}, \gamma) F_x^*(z^{-1}) z^{-1} dz - \\ & - \frac{[K_x(0) - \kappa_n]}{2\pi j} \oint_{\Gamma} G^*(z, \gamma) G^*(z^{-1}, \gamma) z^{-1} dz + \\ & + \frac{\kappa_m}{2\pi j} \oint_{\Gamma} P^*(z, \gamma) P^*(z^{-1}, \gamma) z^{-1} dz. \quad (14.8) \end{aligned}$$

Предельный переход (14.7) и выражение (14.8), естественно, справедливы, если полюсы функций $G^*(z, \gamma)$ и $P^*(z, \gamma)$ расположены внутри круга, ограниченного окружностью единичного радиуса Γ . С помощью теоремы о вычетах нетрудно найти дисперсию $D_d[\gamma T]$, воспользовавшись для этого формулой (14.8).

Приведем формулу для определения дисперсии $D_d[\gamma T]$, когда функции $G^*(z, \gamma)$ и $P^*(z, \gamma)$ имеют лишь простые полюсы. Эта формула следует непосредственно из выражения (11.27), если к нему применить предельное соотношение (14.7). В результате получаем

$$D_d[\gamma T] = \\ = \sum_{i=1}^{k_d} \frac{p_i^{-1} Q_d^*(p_i, \gamma) Q_d^*(p_i^{-1}, \gamma)}{\dot{R}_d^*(p_i) R_d^*(p_i^{-1})} \left[\frac{2L^*(p_i^{-1})}{M^*(p_i^{-1})} - K_x(0) + \kappa_n \right] + \\ + \kappa_m \sum_{j=1}^{k_p} \frac{p_j^{-1} Q_p^*(p_j, \gamma) Q_p^*(p_j^{-1}, \gamma)}{\dot{R}_p^*(p_j) R_p^*(p_j^{-1})} + [K_x(0) + \kappa_n] \times \\ \times G^*(0, \gamma) G^*(\infty, \gamma) + \kappa_m P^*(0, \gamma) P^*(\infty, \gamma), \quad (14.9)$$

где обозначения, входящие в (14.9), определены в (11.26); p_i ($i=1, 2, \dots, k_d$) и p_j ($j=1, 2, \dots, k_p$) — соответственно полюсы функций $G^*(z, \gamma)$ и $P^*(z, \gamma)$.

Аналогично может быть найдена составляющая дисперсии ошибки $D_{нд}[\gamma T]$ (корреляционный момент) $D_{нд}[\gamma T] = \lim_{n \rightarrow \infty} D_{нд}[(n+\gamma)T] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) D_{нд}^*(z, \gamma)$. (14.10)

Изображения $D_{нд}^*(z, \gamma)$ и $D_{нд}^*(z)$ были также найдены выше, в § 11. Применив предельный переход (14.10) к изображениям (11.35) и (11.36), находим соответственно выражение для определения $D_{нд}[\gamma T]$ и $D_{нд}$. Запишем выражение для $D_{нд}$, которое менее громоздко, по сравнению с выражением при $\gamma \neq 0$:

$$D_{нд} = \frac{T}{2\pi j} \left[\oint_{\Gamma} G^*(z) \int_0^1 H^*(z^{-1}, 1-\delta) F_x^*(z^{-1}, \delta) d\delta dz + \right. \\ \left. + \oint_{\Gamma} \int_0^1 H^*(z, \delta) G^*(z^{-1}) F_x^*(z^{-1}, \delta) z^{-1} d\delta dz \right], \quad (14.11)$$

где после применения предельного соотношения (14.10) к (11.36) сделана замена обозначения переменной ω на z . При выполнении предельного перехода (14.10) и использовании формулы (14.11) предполагалось, что полюсы функции $H^*(z, \gamma)$ лежат внутри круга, ограниченного, как и выше, окружностью Γ . Приведем расчетную формулу для определения $D_{\text{нд}}$ в случае, когда кратность полюсов функций $G^*(z, \gamma)$ и $H^*(z, \gamma)$ равна единице. Эта формула следует непосредственно из выражения (11.38) после применения к нему предельного перехода (14.10):

$$D_{\text{нд}} = T \left[\sum_{i=1}^{k_{\text{д}}} \frac{Q_{\text{д}}^*(p_i) \overline{Q_{\text{н}}^*(p_i^{-1}, 1 - \delta)} L^*(p_i^{-1}, \delta)}{\dot{R}_{\text{д}}^*(p_i) R_{\text{н}}^*(p_i^{-1}) M^*(p_i^{-1})} + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{k_{\text{н}}} \frac{Q_{\text{д}}^*(q_i^{-1}) \overline{Q_{\text{н}}^*(q_i, \delta)} L^*(q_i^{-1}, \delta)}{\dot{R}_{\text{н}}^*(q_i) R_{\text{д}}^*(q_i^{-1}) M^*(q_i^{-1})} q_i^{-1} + \right. \\ \left. + G^*(\infty) \overline{H^*(0, \delta)} F^*(\infty, \delta) \right], \quad (14.12)$$

где обозначения, входящие в (14.12), определены в (11.26) и (11.37); p_i ($i = 1, 2, \dots, k_{\text{д}}$) и q_i ($i = 1, 2, \dots, k_{\text{н}}$) — соответственно полюсы функций $G^*(z, \gamma)$ и $H^*(z, \gamma)$.

Найдем, наконец, выражение для дисперсии выходной переменной непрерывной системы в установившемся режиме. Для этого воспользуемся тем же приемом, что и выше, т. е. найдем $D_{\text{н}}$ с помощью предельного перехода

$$D_{\text{н}} = \lim_{t \rightarrow \infty} D_{\text{н}}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s D_{\text{н}}(s), \quad (14.13)$$

полагая при этом, что полюсы функции $D_{\text{н}}(s)$ лежат в левой полуплоскости комплексной переменной s . Изображение $D_{\text{н}}(s)$ было определено выше, в § 11. Применяя предельный переход (14.13) к выражению (11.39), находим

$$D_{\text{н}} = \frac{1}{\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} H(s) H(-s) F_x(-s) ds, \quad (14.14)$$

где после применения предельного соотношения (14.13) к (11.39) сделана замена обозначения переменной p на

s , а также принято $a_2 = 0$, так как предполагается, что полюсы $D_H(s)$ лежат слева от мнимой оси. Расчетная формула для определения дисперсии D_H (в предположении, что кратность полюсов функции $H(s)$ равна единице) может быть найдена из выражения (11.40) путем применения к нему предельного соотношения (14.13)

$$D_H = 2 \sum_{i=1}^{k_H} \frac{Q_H(\alpha_i) Q_H(-\alpha_i) L(-\alpha_i)}{\dot{R}_H(\alpha_i) R_H(-\alpha_i) M(-\alpha_i)}, \quad (14.15)$$

где обозначения, использованные в формуле (14.15), определены выше в (11.37); α_i ($i = 1, 2, \dots, k_H$) — полюсы функции $H(s)$. Таким образом, мы нашли все составляющие дисперсии ошибки, входящие в правую часть равенства (14.6). Дисперсия ошибки $D_\varepsilon[\gamma T]$ является функцией интервала дискретности T (даже, если $\gamma = 0$) и интервала квантования q . Для нее справедливо условие

$$\lim_{\substack{T \rightarrow 0 \\ q \rightarrow 0}} D_\varepsilon[\gamma T] = 0, \quad (14.16)$$

которое может быть использовано для контроля правильности выкладок.

Если математическое ожидание входного воздействия отлично от нуля, то статистической характеристикой ошибки $\varepsilon(t)$ является ее начальный момент второго порядка. Для установившегося режима, когда $\varepsilon(t)$ можно рассматривать как стационарную случайную функцию, из выражений (11.44) и (11.45) находим

$$\Pi_\varepsilon[\nu T] = m_\varepsilon[nT] m_\varepsilon[n_1 T] + K_\varepsilon[\nu T]. \quad (14.17)$$

Вопрос определения корреляционной функции $K_\varepsilon[\nu T]$ был рассмотрен выше, в п. 1. Математическое ожидание ошибки в установившемся режиме

$$\begin{aligned} m_\varepsilon &= \lim_{n \rightarrow \infty} m_\varepsilon[nT] = \lim_{n_1 \rightarrow \infty} m_\varepsilon[n_1 T] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{m_d[nT] - m_H[nT]\} = \lim_{n \rightarrow \infty} m_d[nT] - \lim_{n \rightarrow \infty} m_H[nT]. \end{aligned} \quad (14.18)$$

В соответствии с выражением (13.17) при $\gamma = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_d[nT] = m_x G^*(1); \quad (14.19)$$

аналогично из (11.48) находим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n[nT] = \lim_{s \rightarrow 0} sM_n(s) = m_x H(0). \quad (14.20)$$

Следовательно,

$$m_e = m_x [G^*(1) - H(0)]. \quad (14.21)$$

Таким образом,

$$\Pi_e[vT] = m_e^2 + K_e[vT], \quad (14.22)$$

где m_e определяется из (14.21). При $v = 0$ из формулы (14.22) получаем выражение для математического ожидания квадрата ошибки в установившемся режиме

$$\Pi_e = m_e^2 + D_e. \quad (14.23)$$

Аналогично соотношению (14.16)

$$\lim_{T \rightarrow 0} m_e = 0. \quad (14.24)$$

Иногда дисперсию ошибки (как непрерывной случайной функции) удобно нормировать по отношению к дисперсии непрерывной (желаемой) системы, т. е. рассматривать отношение

$$e^2 = \frac{\bar{D}_e}{D_H} = \frac{\int_0^1 D_e[vT] dv}{D_H}, \quad (14.25)$$

которое с учетом приближенного равенства (13.21) может быть записано в виде

$$e^2 \approx \frac{D_e|_{v=0}}{D_H}. \quad (14.26)$$

В заключение этого пункта проанализируем выражение (14.11) для корреляционного момента выходов дискретной и непрерывной систем, которое выглядит несколько необычно. Напомним, что оно получено в результате использования формулы (11.36) для указанного момента в переходном режиме. Покажем, что выражение (14.11) может быть представлено в более обычной форме [24, 63]. Заменим во втором интеграле выражения (14.11) переменную интегрирования δ с помощью равенства $\delta = 1 - \delta_1$, а затем индекс «1» опустим.

В результате находим, что второй член (14.11) равен

$$\oint_{\Gamma} \int_0^1 H^*(z, 1 - \delta) G^*(z^{-1}) F_x^*(z^{-1}, 1 - \delta) z^{-1} d\delta dz. \quad (14.27)$$

Теперь в выражении (14.27) заменим переменную интегрирования z с помощью равенства $z = z_1^{-1}$, а затем индекс «1» опустим. Получаем из (14.27)

$$\oint_{\Gamma} G^*(z) \int_0^1 H^*(z^{-1}, 1 - \delta) F_x^*(z, 1 - \delta) z^{-1} d\delta dz. \quad (14.28)$$

Заменяв второй член в (14.11) с помощью (14.28), находим

$$D_{\text{нд}} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} G^*(z) \left[T \int_0^1 H^*(z^{-1}, 1 - \delta) F_x^*(z^{-1}, \delta) d\delta + \right. \\ \left. + z^{-1} T \int_0^1 H^*(z^{-1}, 1 - \delta) F_x^*(z, 1 - \delta) d\delta \right] dz. \quad (14.29)$$

Запишем для z -изображений функций, входящих в правую часть равенства (14.29), их выражения через соответствующие изображения по Лапласу. Известно, что для некоторых функций $A^*(z, \gamma)$ и $A(s)$ справедливо равенство

$$\mathcal{L}_{\gamma}\{A(s)\} = A^*(z, \gamma) = \\ = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A(s + jn\omega_0) e^{(sT + 2\pi jn)\gamma}, \quad (14.30)$$

где $\omega_0 = 2\pi/T$. С учетом выражения (14.30) находим

$$H^*(z^{-1}, 1 - \delta) = \\ = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(-s + jn\omega_0) e^{(-sT + 2\pi jn)(1-\delta)}, \quad (14.31)$$

$$F_x^*(z^{-1}, \delta) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_x(-s + jk\omega_0) e^{(-sT + 2\pi jk)\delta}, \quad (14.32)$$

$$F_x^*(z, 1 - \delta) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} F_x(s + jr\omega_0) e^{(sT + 2\pi jr)(1-\delta)}. \quad (14.33)$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}
 T \int_0^1 H^*(z^{-1}, 1 - \delta) F_x^*(z^{-1}, \delta) d\delta = \\
 = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(-s + jn\omega_0) F_x(-s + jk\omega_0) \times \\
 \times e^{-sT + j2\pi n} \int_0^1 e^{2\pi j(k-n)\delta} d\delta. \quad (14.34)
 \end{aligned}$$

Так как

$$\int_0^1 e^{2\pi j(k-n)\delta} d\delta = \begin{cases} 1 & \text{при } n = k, \\ 0 & \text{при } n \neq k, \end{cases}$$

и при целых n

$$e^{-sT + j2\pi n} = e^{-sT},$$

то из (14.34) находим

$$\begin{aligned}
 T \int_0^1 H^*(z^{-1}, 1 - \delta) F_x^*(z^{-1}, \delta) d\delta = \\
 = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(-s + jn\omega_0) F_x(-s + jn\omega_0) e^{-sT} = \\
 = \mathcal{L}\{H(-s) F_x(-s)\} z^{-1}. \quad (14.35)
 \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
 T \int_0^1 H^*(z^{-1}, 1 - \delta) F_x^*(z, 1 - \delta) d\delta = \\
 = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} H(-s + jn\omega_0) F_x(s + jr\omega_0) \times \\
 \times e^{j2\pi(n+r)} \int_0^1 e^{-2\pi j(n+r)\delta} d\delta. \quad (14.36)
 \end{aligned}$$

Так как

$$\int_0^1 e^{-2\pi j(n+r)\delta} d\delta = \begin{cases} 1 & \text{при } n = -r, \\ 0 & \text{при } n \neq -r, \end{cases}$$

то из (14.36) определяем

$$\begin{aligned} T \int_0^1 H^*(z^{-1}, 1 - \delta) F_x^*(z, 1 - \delta) d\delta = \\ = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(-s + jn\omega_0) F_x(s + jn\omega_0) = \\ = \mathcal{L}\{H(-s) F_x(s)\}. \end{aligned} \quad (14.37)$$

Подставив выражения (14.35) и (14.37) в формулу (14.29), находим

$$D_{\text{нд}} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} G^*(z) Z\{H(-s) \Phi_x(s)\} z^{-1} dz, \quad (14.38)$$

где

$$\Phi_x(s) = F_x(s) + F_x(-s).$$

Выражение (14.38) может быть также использовано для определения корреляционного момента $D_{\text{нд}}$. В соответствии с обозначениями (11.37) формула (14.38) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} D_{\text{нд}} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} G^*(z) \mathcal{L}\left\{ \frac{Q_{\text{н}}(-s)}{R_{\text{н}}(-s)} \cdot \frac{L(s)}{M(s)} \right\} z^{-1} dz + \\ + \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} G^*(z) \mathcal{L}\left\{ \frac{Q_{\text{н}}(-s)}{R_{\text{н}}(-s)} \cdot \frac{L(-s)}{M(-s)} \right\} z^{-1} dz. \end{aligned} \quad (14.39)$$

Формулой (14.39) можно воспользоваться следующим образом. Вначале нужно произведение функций, стоящих в фигурных скобках, разложить на простые дроби и определить соответствующие им z -изображения. После этого нетрудно найти $D_{\text{нд}}$, определив вычеты относительно полюсов, лежащих внутри круга, ограниченного окружностью единичного радиуса Γ . Таким образом, формулу (14.39) можно использовать для определения корреляционного момента $D_{\text{нд}}$ наряду с выражениями (14.11) и (14.12). Если необходимо определить корреляционный момент $D_{\text{нд}}[\gamma T]$ (т. е. при $\gamma \neq 0$), то удобно пользоваться формулой (14.38), которая в этом

случае принимает вид

$$D_{\text{нд}}[\gamma T] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} G^*(z, \gamma) \mathcal{L}_{\gamma} \{H(-s) \Phi_x(s)\} z^{-1} dz. \quad (14.40)$$

Выполним дальнейшие преобразования выражения (14.38). Для этого представим результат z -преобразования произведения функций, стоящих в фигурных скобках, в явном виде. С учетом равенства (14.30) находим

$$D_{\text{нд}} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} G^*(z) \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(-s + jn\omega_0) \Phi_x(s + jn\omega_0) z^{-1} dz. \quad (14.41)$$

Положим $s = j\omega$, т. е. сделаем замену переменной интегрирования z с помощью равенства $z = e^{j\omega T}$. Так как $dz = jTe^{j\omega T} d\omega$, а единичная окружность Γ при указанной замене превращается в отрезок мнимой оси, заключенный в интервале $\left[-\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2}\right]$, то из выражения (14.41) находим

$$D_{\text{нд}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-j\frac{\omega_0}{2}}^{j\frac{\omega_0}{2}} G^*(e^{j\omega T}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(-j\omega + jn\omega_0) \Phi_x(j\omega + jn\omega_0) d\omega.$$

Изменим в последнем выражении порядок операций интегрирования и суммирования

$$D_{\text{нд}} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{j\omega_0}{2}}^{\frac{j\omega_0}{2}} G^*(e^{j\omega T}) H(-j\omega + jn\omega_0) \Phi_x(j\omega + jn\omega_0) d\omega. \quad (14.42)$$

В полученном выражении заменим переменную интегрирования ω с помощью равенства

$$\omega_1 = \omega + n\omega_0.$$

После выполнения преобразований и замены пределов интегрирования находим

$$D_{\text{нд}} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-j(n-1/2)\omega_0}^{j(n+1/2)\omega_0} G^*(e^{j\omega_1 T}) H(-j\omega_1) \Phi_x(j\omega_1) d\omega_1. \quad (14.43)$$

При записи выражения (14.43) учтена периодичность функции $G^*(e^{j\omega_1 T})$ вдоль мнимой оси, т. е.

$$G^*(e^{j\omega_1 T - jn\omega_0 T}) = G^*(e^{j\omega_1 T}),$$

а также четность функции $\Phi_x(j\omega)$.

В полученном выражении сумма интегралов может быть представлена как один интеграл, в котором интегрирование осуществляется вдоль всей мнимой оси, т. е. от $-j\infty$ до $j\infty$. Опустив в (14.43) индекс у переменной интегрирования, а также используя обозначение

$$\Phi_x(j\omega) = F_x(j\omega) + F_x(-j\omega) = S_x(\omega),$$

где $S_x(\omega)$ — спектральная плотность входного воздействия, окончательно получаем

$$D_{\text{нд}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G^*(e^{j\omega T}) H(-j\omega) S_x(\omega) d\omega. \quad (14.44)$$

Таким образом, с помощью формулы (14.44) корреляционный момент выражается через частотные характеристики дискретной и непрерывной систем и спектральную плотность входного воздействия. Ниже это выражение будет получено, исходя из частотно-спектральных представлений.

3. Определение дисперсии погрешности цифровой автоматической системы частотным методом. Так же, как и выше, будем исходить из основного соотношения (14.6) для дисперсии дискретной последовательности ошибки, в котором перейдем к дисперсии ее огибающей. Находим

$$\bar{D}_e = \bar{D}_d - 2\bar{D}_{\text{нд}} + \bar{D}_n, \quad (14.45)$$

где

$$\bar{D}_d = \int_0^1 D_d[\gamma T] d\gamma, \quad \bar{D}_{\text{нд}} = \int_0^1 D_{\text{нд}}[\gamma T] d\gamma,$$

$$\bar{D}_n = \int_0^1 D_n[\gamma T] d\gamma.$$

Определим составляющие \bar{D}_e , используя для этого частотно-спектральные представления. Так как \bar{D}_n пред-

ставляет собой дисперсию выходной переменной непрерывной системы с передаточной функцией $H(s)$, на вход которой подается воздействие, определяемое спектральной плотностью $S_x(\omega)$, то

$$\bar{D}_H = D_H = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |H(j\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega. \quad (14.46)$$

Найдем теперь составляющую дисперсии ошибки \bar{D}_d , полагая пока, что ошибки от квантования по уровню ε_{q_H} и ε_{q_M} равны нулю, т. е. $q = 0$. Воспользуемся для этого формулой (13.1). Так как

$$S_x^*(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_x(\omega + n\omega_0), \quad \frac{\pi}{T} = \frac{\omega_0}{2}$$

и подынтегральная функция в (13.1) четная, то

$$D_d[\gamma T] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\omega_0}{2}}^{\frac{\omega_0}{2}} |G^*(j\omega, \gamma)|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_x(\omega + n\omega_0) d\omega.$$

Сделаем замену переменной ω с помощью равенства

$$\omega_1 = \omega + n\omega_0$$

и выполнив преобразования, аналогичные проделанным выше при выводе формулы (14.44), находим

$$D_d[\gamma T] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |G^*(e^{j\omega T}, \gamma)|^2 S_x(\omega) d\omega \quad (14.47)$$

(в (14.47) учтено, что подынтегральная функция четная). Отсюда

$$\bar{D}_d = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \overline{|G^*(e^{j\omega T}, \gamma)|^2} S_x(\omega) d\omega, \quad (14.48)$$

где

$$\overline{|G^*(e^{j\omega T}, \gamma)|^2} = \int_0^1 |G^*(e^{j\omega T}, \gamma)|^2 d\gamma. \quad (14.49)$$

Учтем погрешности от квантований по уровню ε_{q_n} и ε_{q_m} , которые представляют собой дискретный белый шум с плотностями соответственно κ_n и κ_m . Перейдя к спектральным плотностям соответствующих непрерывных величин (см. п. 1 § 2 и п. 3 § 7) и полагая при этом для простоты, что интервал корреляции $\Delta\tau = T$, имеем

$$S_{\varepsilon_n}(\omega) = \kappa_n T, \quad S_{\varepsilon_m}(\omega) = \kappa_m T.$$

Тогда подобно (14.47) находим составляющую дисперсии ошибки, которую обозначим $D_q[\gamma T]$:

$$D_q[\gamma T] = \frac{\kappa_n T}{\pi} \int_0^{\infty} |G^*(e^{j\omega T}, \gamma)|^2 d\omega + \frac{\kappa_m T}{\pi} \int_0^{\infty} |P^*(e^{j\omega T}, \gamma)|^2 d\omega.$$

Осреднив полученное выражение по γ и добавив его к (14.48), находим

$$\begin{aligned} \bar{D}_d &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \overline{|G^*(e^{j\omega T}, \gamma)|^2} S_x(\omega) d\omega + \\ &+ \frac{\kappa_n T}{\pi} \int_0^{\infty} \overline{|G^*(e^{j\omega T}, \gamma)|^2} d\omega + \frac{\kappa_m T}{\pi} \int_0^{\infty} \overline{|P^*(e^{j\omega T}, \gamma)|^2} d\omega. \end{aligned} \quad (14.50)$$

Найдем теперь корреляционный момент $D_{nd}[\gamma T]$, а затем \bar{D}_{nd} . В соответствии с его определением

$$\begin{aligned} D_{nd}[\gamma T] &= \lim_{n \rightarrow \infty} D_{nd}[(n + \gamma)T] = \\ &= M\{[y_n(t) - m_n(t)][y_d(t) - m_d(t)]\}, \end{aligned} \quad (14.51)$$

где

$$y_n(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) x[(n + \gamma)T - \tau] d\tau, \quad (14.52)$$

$$y_d(t) = \sum_{m=0}^{\infty} g[(m + \gamma)T] x[(n - m)T]. \quad (14.53)$$

Выражения (14.52) и (14.53) для $y_n(t)$ и $y_d(t)$ записаны несколько в другом виде, чем в (14.1) и (14.2), более удобном для дальнейших выкладок. Кроме того, опущены величины ε_{q_n} и ε_{q_m} , которые не коррелированы

с входным воздействием. Так как в соответствии с (14.52) и (14.53)

$$m_n(t) = m_x \int_0^{\infty} h(\tau) d\tau, \quad m_d(t) = m_x \sum_{m=0}^{\infty} g[(m + \gamma)T], \quad (14.54)$$

то после подстановки выражений (14.52) — (14.54) в (14.51) находим

$$\begin{aligned} D_{нд}[\gamma T] &= \\ &= \int_0^{\infty} h(\tau) \sum_{m=0}^{\infty} g[(m + \gamma)T] K_x[\tau - (m + \gamma)T] d\tau, \quad (14.55) \end{aligned}$$

где $K_x[\tau - (m + \gamma)T]$ — корреляционная функция входного воздействия $x(t)$, равная

$$\begin{aligned} K_x[\tau - (m + \gamma)T] &= \\ &= M\{[x[(n - m)T] - m_x][x[(n + \gamma)T - \tau] - m_x]\}. \quad (14.56) \end{aligned}$$

Выразим корреляционную функцию (14.56) через спектральную плотность $S_x(\omega)$ воздействия $x(t)$:

$$K_x[\tau - (m + \gamma)T] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega[\tau - (m + \gamma)T]} d\omega. \quad (14.57)$$

Подставив выражение (14.57) в (14.55), получаем

$$\begin{aligned} D_{нд}[\gamma T] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} g[(m + \gamma)T] e^{-j\omega(m + \gamma)T} \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ \int_0^{\infty} h(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau \right\} S_x(\omega) d\omega. \quad (14.58) \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} g[(m + \gamma)T] e^{-j\omega(m + \gamma)T} &= G^*(e^{j\omega T}, \gamma) e^{-j\omega T \gamma}, \\ \int_0^{\infty} h(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau &= H(-j\omega), \end{aligned}$$

то из выражения (14.58) находим

$$D_{\text{нд}}[\gamma T] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G^*(e^{j\omega T}, \gamma) e^{-j\omega T \gamma} H(-j\omega) S_x(\omega) d\omega, \quad (14.59)$$

что при $\gamma = 0$ совпадает с формулой (14.44), полученной выше другим способом. Далее введем следующее обозначение:

$$G^*(e^{j\omega T}, \gamma) e^{-j\omega T \gamma} = G^*(j\omega, \gamma). \quad (14.60)$$

Учитывая, что

$$G^*(s, \gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} g[(n + \gamma)T] e^{-s(n + \gamma)T}, \quad (14.61)$$

$$G^*(e^{sT}, \gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} g[(n + \gamma)T] e^{-sTn}, \quad (14.62)$$

где первое соотношение представляет собой преобразование по Лапласу дельта-модулированной непрерывной функции $g(t)$, второе — z -преобразование этой же функции, нетрудно видеть, что равенство (14.60) связывает между собой результаты этих преобразований при $s = j\omega$. Из равенства (14.60), кроме того, следует, что

$$|G^*(e^{j\omega T}, \gamma)|^2 = G^*(e^{j\omega T}, \gamma) G^*(e^{-j\omega T}, \gamma) = |G^*(j\omega, \gamma)|^2. \quad (14.63)$$

Ввиду того, что мнимая составляющая произведения $G^*(j\omega, \gamma) H(-j\omega)$ есть нечетная функция ω , а действительная — четная, то окончательно, с учетом введенного обозначения, получаем

$$D_{\text{нд}}[\gamma T] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Re} [G^*(j\omega, \gamma) H(-j\omega)] S_x(\omega) d\omega. \quad (14.64)$$

Отсюда

$$\bar{D}_{\text{нд}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Re} [\overline{G^*(j\omega, \gamma)} H(-j\omega)] S_x(\omega) d\omega, \quad (14.65)$$

где

$$\overline{G^*(j\omega, \gamma)} = \int_0^1 G^*(j\omega, \gamma) d\gamma. \quad (14.66)$$

Подставив формулы (14.46), (14.50) и (14.65) в равенство (14.45), находим

$$\begin{aligned} \bar{D}_\varepsilon = & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \{ |G^*(j\omega, \gamma)|^2 - 2 \operatorname{Re} [\overline{G^*(j\omega, \gamma)} H(-j\omega)] + \\ & + |H(j\omega)|^2 \} S_x(\omega) d\omega + \frac{\kappa_n T}{\pi} \int_0^\infty |G^*(j\omega, \gamma)|^2 d\omega + \\ & + \frac{\kappa_m T}{\pi} \int_0^\infty |P^*(j\omega, \gamma)|^2 d\omega. \quad (14.67) \end{aligned}$$

Выражение (14.67) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \bar{D}_\varepsilon = & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |H(j\omega)|^2 \varepsilon^2(\omega) S_x(\omega) d\omega + \\ & + \frac{\kappa_n T}{\pi} \int_0^\infty |G^*(j\omega, \gamma)|^2 d\omega + \frac{\kappa_m T}{\pi} \int_0^\infty |P^*(j\omega, \gamma)|^2 d\omega, \quad (14.68) \end{aligned}$$

где

$$\varepsilon^2(\omega) = \frac{|G^*(j\omega, \gamma)|^2}{|H(j\omega)|^2} - 2 \operatorname{Re} \left[\frac{\overline{G^*(j\omega, \gamma)}}{H(j\omega)} \right] + 1. \quad (14.69)$$

Если считать, что квантование по уровню отсутствует, т. е. $q = 0$, то $\kappa_n = \kappa_m = 0$ и дисперсия ошибки \bar{D}_ε будет определяться первым членом выражения (14.68). В случае, когда

$$\lim_{T \rightarrow 0} G^*(j\omega, \gamma) = H(j\omega),$$

из выражения (14.69) следует, что

$$\lim_{T \rightarrow 0} \varepsilon^2(\omega) = 0,$$

поэтому \bar{D}_ε при $T \rightarrow 0$ также стремится к нулю, как это и должно быть. Функция $\varepsilon(\omega)$ характеризует близость процесса управления в дискретной системе к процессу управления в соответствующей непрерывной системе. Далее, в следующей главе будет раскрыт смысл функции $\varepsilon(\omega)$ более подробно и даны ее выражения для случаев разомкнутых и замкнутых систем,

Величина относительной дисперсии ошибки в предположении, что $q=0$, как это следует из формул (14.46) и (14.68), равна

$$e^2 = \frac{\overline{D}_e}{D_H} = \frac{\int_0^{\infty} |H(j\omega)|^2 e^2(\omega) S_x(\omega) d\omega}{\int_0^{\infty} |H(j\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega}. \quad (14.70)$$

В ряде практических случаев можно считать, что спектральная плотность входного воздействия $S_x(\omega)$ ограничена некоторой частотой ω_c , а непрерывная система имеет амплитудно-частотную характеристику фильтра низких частот, т. е. также ограничена некоторой частотой ω_H , т. е.

$$\left. \begin{array}{l} S_x(\omega) \approx 0 \quad \text{при } |\omega| \geq \omega_c, \\ |H(j\omega)| \approx 0 \quad \text{при } |\omega| \geq \omega_H, \end{array} \right\} \quad (14.71)$$

причем для частот ω_c , ω_H и частоты квантования ω_0 выполняются условия

$$\omega_0 > 2\omega_c, \quad \omega_H \leq \omega_0 - \omega_c$$

(подробно о смысле этих условий сказано выше в § 3). Тогда, как показано дальше в § 17, существует оценка величины относительной дисперсии ошибки

$$e < \varepsilon(\omega_c), \quad (14.72)$$

где $\varepsilon(\omega)$ определяется формулой (14.69).

В заключение этого раздела укажем, как определяется частотным методом дисперсия ошибки $D_e[\gamma T]$, т. е. дисперсия дискретной последовательности ошибки. Как это ясно из изложенного выше, $D_e[\gamma T]$ может быть определена по формуле (14.67), где следует убрать знак осреднения по γ , т. е. черту сверху. Кроме того, приведем формулы, с помощью которых может быть выполнено осреднение по γ в выражениях (14.49) и (14.66). В соответствии с (14.30) и (14.60)

$$G^*(\pm j\omega, \gamma) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(\pm j\omega + jn\omega_0) e^{j2\pi n\gamma}, \quad (14.73)$$

поэтому

$$\begin{aligned} |G^*(j\omega, \gamma)|^2 &= G^*(j\omega, \gamma) G^*(-j\omega, \gamma) = \\ &= \frac{1}{T^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G^*(j\omega + jn\omega_0) G^*(-j\omega + jk\omega_0) e^{j2\pi(n+k)\gamma}. \end{aligned} \quad (14.74)$$

Осреднив по γ (см. вывод (14.35)), находим

$$\overline{|G^*(j\omega, \gamma)|^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\bar{G}(j\omega + jn\omega_0)|^2, \quad (14.75)$$

где

$$\bar{G}(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{T}.$$

Аналогично получаем

$$|\overline{G^*(j\omega, \gamma)}| = \bar{G}(j\omega). \quad (14.76)$$

Следовательно,

$$\epsilon^2(\omega) = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\bar{G}(j\omega + jn\omega_0)|^2}{|H(j\omega)|^2} - 2 \operatorname{Re} \left[\frac{\bar{G}(j\omega)}{H(j\omega)} \right] + 1. \quad (14.77)$$

Вычисление суммы (14.75) можно упростить следующим образом, воспользовавшись аппаратом z -преобразования [70]. Рассмотрим z -изображение, соответствующее произведению $\bar{G}(s)\bar{G}(-s)$. Имеем

$$\mathcal{Z}\{\bar{G}(s)\bar{G}(-s)\} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{G}(s+jn\omega_0)\bar{G}(-s+jn\omega_0). \quad (14.78)$$

Положив в (14.78) $s = j\omega$ (следовательно, $z = e^{j\omega T}$), находим

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\bar{G}(j\omega + jn\omega_0)|^2 &= \\ = T \mathcal{Z}\{\bar{G}(s)\bar{G}(-s)\}|_{z=e^{j\omega T}} &= \mathcal{Z}\{G(s)\bar{G}(-s)\}|_{z=e^{j\omega T}}. \end{aligned} \quad (14.79)$$

Подставив (14.79) в (14.77), получаем для $\epsilon^2(\omega)$ еще такое выражение:

$$\epsilon^2(\omega) = \frac{\mathcal{Z}\{G(s)\bar{G}(-s)\}|_{z=e^{j\omega T}}}{|H(j\omega)|^2} - 2 \operatorname{Re} \left[\frac{\bar{G}(j\omega)}{H(j\omega)} \right] + 1, \quad (14.80)$$

которое достаточно удобно в практических приложениях, особенно при использовании неравенства (14.72) для оценки относительной дисперсии ошибки. Ниже, в § 18, будет показано, что функция $\varepsilon^2(\omega)$ представляет собой относительную среднеквадратическую погрешность цифровой автоматической системы при гармоническом входном воздействии, имеющем частоту ω .

4. Пример определения дисперсии погрешности цифровой автоматической системы в установившемся режиме. Найдем дисперсию погрешности для системы, рассмотренной в примере 1 § 11. Имеем

$$G^*(z) = \frac{Q_d^*(z)}{R_d^*(z)} = \frac{K(1-d)}{a(z-d)}, \quad d = e^{-aT};$$

$$F_x^*(z, \gamma) = \frac{L^*(z, \gamma)}{M^*(z)} = \frac{zc^\gamma}{z-c}, \quad c = e^{-bT}, \quad K_x(0) = 1;$$

$$H^*(s) = \frac{Q_H(s)}{R_H(s)} = \frac{K}{s+a}, \quad F_x(s) = \frac{1}{s+b};$$

$$H^*(z, \gamma) = \frac{Q_H^*(z, \gamma)}{R_H^*(z)} = K \frac{zd^\gamma}{z-d}, \quad \kappa_M = 0.$$

1. Определим дисперсию погрешности с помощью формул, полученных в п. 2, т. е. операторным методом. Дисперсию D_d найдем с помощью формулы (14.9). Так как

$$k_d = 1, \quad p_1 = d, \quad G^*(\infty) = 0, \quad \dot{R}_d(z) = a, \quad \kappa_M = 0,$$

то

$$\begin{aligned} D_d &= K^2 \frac{d^{-1}(1-d)(1-d)}{a \cdot a(d^{-1}-d)} \left[\frac{2d^{-1}}{d^{-1}-c} - 1 + \kappa_n \right] = \\ &= K^2 \frac{(1-d)[1+dc - \kappa_n(dc-1)]}{a^2(1+d)(1-dc)}. \end{aligned} \quad (14.81)$$

Корреляционный момент D_{nd} определим с помощью формулы (14.12). Так как

$$k_d = k_n = 1, \quad p_1 = q_1 = d, \quad G^*(\infty) = 0, \quad \dot{R}_n^*(z) = 1,$$

то

$$\begin{aligned}
 D_{\text{нд}} &= K^2 T \frac{(1-d) \cdot \overline{d^{-1} d^{1-\delta} d^{-1} c^\delta}}{a \cdot (d^{-1} - d) (d^{-1} - c)} + \\
 &\quad + K^2 T \frac{(1-d) \cdot \overline{d d^\delta \cdot d^{-1} c^\delta} \cdot d^{-1}}{1 \cdot a (d^{-1} - d) (d^{-1} - c)} = \\
 &= K^2 \frac{(1-d) d T}{a} \left[\frac{\overline{(d^{-1} c)^\delta}}{(1-d)^2 (1-dc)} + \frac{\overline{(cd)^\delta}}{(1-d^2) (1-dc)} \right].
 \end{aligned}$$

Так как

$$\overline{(d^{-1} c)^\delta} = \frac{c-d}{Td(a-b)}, \quad \overline{(cd)^\delta} = \frac{1-dc}{Td(a+b)},$$

то

$$D_{\text{нд}} = K^2 \frac{(c-d)(a+b) + d(1-dc)(a-b)}{a(a^2-b^2)(1+d)(1-dc)}. \quad (14.82)$$

Определим корреляционный момент $D_{\text{нд}}$ также с помощью формулы (14.38). Находим

$$H(-s) \Phi_x(s) = \frac{K}{-s+a} \left(\frac{1}{s+b} + \frac{1}{-s+b} \right) = \frac{2Kb}{(a-s)(b^2-s^2)}.$$

Разложив полученное выражение на простые дроби, установим

$$\begin{aligned}
 \frac{2Kb}{(a-s)(b^2-s^2)} &= \frac{2Kb}{a^2-b^2} \cdot \frac{1}{s-a} + \\
 &\quad + \frac{K}{a+b} \cdot \frac{1}{s+b} + \frac{K}{b-a} \cdot \frac{1}{s-b}.
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{H(-s) \Phi_x(s)\} &= \\
 &= \frac{2Kb}{a^2-b^2} \cdot \frac{z}{z-d^{-1}} + \frac{K}{a+b} \cdot \frac{z}{z-c} + \frac{K}{b-a} \cdot \frac{z}{z-c^{-1}},
 \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
 G^*(z) \mathcal{L}\{H(-s) \Phi_x(s)\} z^{-1} &= \\
 &= K^2 \frac{1-d}{a} \left[\frac{2b}{a^2-b^2} \cdot \frac{1}{z-d} \cdot \frac{1}{z-d^{-1}} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{a+b} \cdot \frac{1}{z-d} \cdot \frac{1}{z-c} + \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{z-d} \cdot \frac{1}{z-c^{-1}} \right]. \quad (14.83)
 \end{aligned}$$

Найдем теперь $D_{\text{нд}}$ с помощью формулы (14.38), путем определения вычетов функции (14.83) относительно

полюсов, расположенных внутри единичного круга Γ , т. е. в точках $z = d$ и $z = c$. Получаем

$$D_{\text{нд}} = K^2 \frac{1-d}{a} \left[\frac{2b}{a^2-b^2} \cdot \frac{1}{d-d^{-1}} + \frac{1}{a+b} \left(\frac{1}{c-d} + \frac{1}{d-c} \right) + \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{d-c^{-1}} \right] = K^2 \frac{cd^2(b-a) - 2bd + c(a+b)}{a(a^2-b^2)(1+d)(1-dc)}. \quad (14.84)$$

Нетрудно убедиться, что выражения (14.82) и (14.84) совпадают. Найдем теперь дисперсию $D_{\text{н}}$, воспользовавшись для этого формулой (14.15). Так как $k_{\text{н}} = 1$, $\alpha_1 = -a$ и $R_{\text{н}}(s) = 1$, то получаем

$$D_{\text{н}} = 2 \frac{1 \cdot K \cdot K}{1 \cdot (a+\bar{a})(a+b)} = \frac{K^2 1}{a(a+b)}. \quad (14.85)$$

Из выражений (14.81), (14.82), (14.85) и равенства (14.6) при $\gamma = 0$ находим

$$D_{\varepsilon} = K^2 \frac{(1-d)[1+dc - \kappa_{\text{н}}(dc-1)]}{a^2(1+d)(1-dc)} - 2K^2 \frac{(c-d)(a+b) + d(1-dc)(a-b)}{a(a^2-b^2)(1+d)(1-dc)} + \frac{K^2}{a(a+b)}. \quad (14.86)$$

То же выражение следует из формул для зависимости дисперсии ошибки $D_{\varepsilon}[nT]$ от времени, найденной выше в примере 1 § 11, если положить $n \rightarrow \infty$, или применить к изображениям составляющих $D_{\varepsilon}(z)$ предельный переход (14.7). Можно показать, что выражение (14.86) удовлетворяет условию (14.16). Примерный вид зависимости D_{ε} от T показан на рис. 4.1.

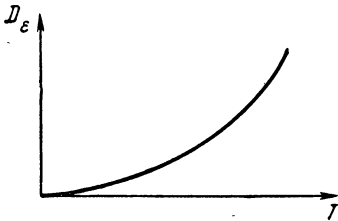


Рис. 4.1.

2. Определим для рассматриваемой системы функцию $\varepsilon^2(\omega)$, воспользовавшись для этого формулой (14.80). Так как (см. пример 1 § 11)

$$G(s) = \frac{K(1 - e^{-sT})}{s(s+a)},$$

то

$$G(s)\bar{G}(-s) = K^2 \frac{e^{sT} + e^{-sT} - 2}{Ts^2(a^2 - s^2)}.$$

Отсюда

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{e^{sT} + e^{-sT} - 2}{Ts^2(a^2 - s^2)} \right\} = \frac{z + z^{-1} - 2}{T} \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{s^2(a^2 - s^2)} \right\}. \quad (14.87)$$

Так как

$$\frac{1}{s^2(a^2 - s^2)} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 - a^2} \right),$$

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} = \frac{Tz}{(z-1)^2} = \frac{T}{(z-1)(1-z^{-1})} = \frac{T}{z + z^{-1} - 2},$$

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{1}{s^2 - a^2} \right\} = \frac{z \operatorname{sh} aT}{a(z^2 - 2z \operatorname{ch} aT + 1)} = -\frac{\operatorname{sh} aT}{a[2 \operatorname{ch} aT - (z + z^{-1})]},$$

то получаем

$$\mathcal{L} \{G(s) \bar{G}(-s)\} = \frac{K^2}{a^2} \left[1 + \frac{\operatorname{sh} aT}{aT} \cdot \frac{z + z^{-1} - 2}{2 \operatorname{ch} aT - (z + z^{-1})} \right].$$

Учитывая, что

$$(z + z^{-1} - 2) \Big|_{z=e^{j\omega T}} = -4 \sin^2 \frac{\omega T}{2}, \quad (z + z^{-1}) \Big|_{z=e^{j\omega T}} = 2 \cos \omega T,$$

находим

$$\mathcal{L} \{G(s) \bar{G}(-s)\} \Big|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{K^2}{a^2} \left[1 - \frac{2 \sin^2 \frac{\omega T}{2} \operatorname{sh} aT}{Ta (\operatorname{ch} aT - \cos \omega T)} \right]. \quad (14.88)$$

Так как

$$H(s) = \frac{K}{s+a}, \quad \text{то} \quad |H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\omega^2 + a^2}}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[\frac{\bar{G}(j\omega)}{H(j\omega)} \right] &= \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{1 - e^{-j\omega T}}{Tj\omega(j\omega + a)} (j\omega + a) \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega T} \right] = \frac{\sin \omega T}{\omega T}. \end{aligned}$$

Следовательно — (14.80),

$$\varepsilon^2(\omega) = \frac{\omega^2 + a^2}{a^2} \left[1 - \frac{2 \sin^2 \frac{\omega T}{2} \operatorname{sh} aT}{Ta (\operatorname{ch} aT - \cos \omega T)} \right] - \frac{2 \sin \omega T}{\omega T} + 1. \quad (14.89)$$

Полагая, что выполняются приближенно условия (14.71), можно найти оценку величины относительной

дисперсии ошибки e (14.72), подставив в выражение (14.89) вместо ω величину частоты среза ω_c , принятую для спектральной плотности. Заметим, что с помощью формул (14.85) и (14.86) и соотношения (14.25) величину относительной дисперсии ошибки можно найти точно, и, тем самым, определить погрешность, вызванную приближенностью условий (14.71).

В заключение убедимся, что

$$\lim_{T \rightarrow 0} \varepsilon^2(\omega) = 0. \quad (14.90)$$

Предел второго члена (14.89), как нетрудно видеть, при $T \rightarrow 0$ равен минус двум. Предел второго члена в квадратных скобках при $T \rightarrow 0$ определим так:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{\omega T}{2} \operatorname{sh} aT}{Ta (\operatorname{ch} aT - \cos \omega T)} &= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} aT}{aT} \cdot \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \omega T}{\operatorname{ch} aT - \cos \omega T} = \\ &= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1 - 1 + \frac{\omega^2 T^2}{2} - \dots}{1 + \frac{a^2 T^2}{2} + \dots - 1 + \frac{\omega^2 T^2}{2} - \dots} = \frac{\omega^2}{a^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Следовательно, предел первого члена (14.89) при $T \rightarrow 0$ равен единице. Условие (14.90), таким образом, выполняется.

АНАЛИЗ ПОГРЕШНОСТЕЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ЦИФРОВЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ, ПРИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Анализ переходных процессов и качества цифровых автоматических систем при типовых детерминированных воздействиях является обязательным этапом их проектирования. При этом непременно возникает задача определения или оценки погрешности, обусловленной дискретностью процесса управления, в том плане, как об этом говорилось в § 3. Для определения погрешности цифровой системы как функции времени можно использовать обычные методы исследования переходных процессов в дискретных системах. Удобной характеристикой погрешности является ее суммарное или интегральное квадратическое значение в переходном и установившемся режимах работы. Математические зависимости и расчетные формулы для этой цели могут быть получены с помощью методов теории z -преобразования аналогично тому, как это было сделано в главах III и IV для дисперсии погрешности [16]. Эти вопросы изложены в первых двух параграфах настоящей главы.

С помощью частотных методов можно получить удобную для практических приложений оценку относительной интегральной квадратической погрешности [10, 11]. Эта оценка, как показано в § 17, дает возможность исследовать влияние на точность системы численного метода, принятого для реализации заданного закона управления, способа восстановления дискретных данных и величины шага дискретности. Выражение для оценки относительной интегральной квадратической погрешности найдено в предположении, что входное воздействие имеет ограниченный спектр, а объект играет роль фильтра нижних частот.

Для случая гармонического входного воздействия в § 18 получены формулы, позволяющие определить относительную средне-квадратическую ошибку без каких-либо ограничений на частотные свойства объекта [12].

По своему смыслу эти формулы аналогичны математическим зависимостям, полученным в предыдущей главе для определения относительной дисперсии погрешности системы при случайных воздействиях. В этом же параграфе найдена оценка максимального значения самой относительной гармонической ошибки.

§ 15 Определение погрешности цифровой автоматической системы при регулярных воздействиях как функции времени

Рассмотрим возможность использования существующих методов анализа переходных процессов в дискретных системах для определения погрешности цифровой автоматической системы, обусловленной дискретностью процесса управления. Некоторые специальные способы и приемы, разработанные с этой целью, будут изложены в следующих параграфах настоящей главы.

Современная теория дискретных систем располагает целым рядом методов анализа переходных процессов. Обычно рассматривается выходная переменная системы или разность выходной и входной переменных — ошибка регулирования. Погрешность, обусловленная дискретностью процесса управления, определяется разностью выходных переменных дискретной и соответствующей ей непрерывной систем. Для замкнутых систем эта разность эквивалентна разности ошибок регулирования дискретной и непрерывной систем (3.17), однако можно непосредственно использовать ошибки регулирования (см. ниже (15.11)). При анализе переходных процессов в дискретных системах, вызванных регулярными входными воздействиями, ограничиваются обычно лишь учетом эффекта квантования информации по времени. Ошибки, вызванные квантованием по уровню, удобнее в этом случае учитывать отдельно, например, способом, изложенным в работе [59].

Задача заключается, таким образом, в определении разности выходных переменных дискретной и непрерывной систем

$$e(t) = y_n(t) - y_d(t), \quad (15.1)$$

где

$$y_n(t) = \int_0^t h(t - \tau) x(\tau) d\tau, \quad (15.2)$$

$$y_n(t) = \sum_{m=0}^n g(t - mT) x[mT - 0] \quad (nT \leq t \leq (n+1)T), \quad (15.3)$$

а $x(t)$ — некоторая детерминированная функция времени. Положив в уравнениях (15.2) и (15.3) $t = (n + \gamma)T$, а также представив в (15.2) интеграл в виде суммы интегралов с пределами от mT до $(m + 1)T$ ($m = 0, 1, \dots, n - 1$) и сделав замену переменной интегрирования с помощью равенства $\tau = (m + \delta)T$, находим

$$y_n[(n + \gamma)T] = T \sum_{m=0}^{n-1} \int_0^1 h[(n - m + \gamma - \delta)T] x[(m + \delta)T] d\delta + T \int_0^\gamma h[(\gamma - \delta)T] x[(n + \delta)T] d\delta, \quad (15.4)$$

$$y_n[(n + \gamma)T] = \sum_{m=0}^n g[(n - m + \gamma)T] x[mT - 0]. \quad (15.5)$$

Эти соотношения удобны при отыскании изображений выходных переменных непрерывной и дискретной систем.

Для определения ошибки $\varepsilon(t)$ как функции времени могут быть использованы различные методы. Ограничимся ниже рассмотрением методов, основанных на использовании z -преобразования.

1. Определение погрешности в дискретные моменты времени. Таким способом определения погрешности $\varepsilon(t)$ часто можно ограничиться, если интервал дискретности T мал, непрерывная часть системы является достаточно хорошим низкочастотным фильтром, а мнимые части полюсов передаточной функции непрерывной части (если такие полюсы есть) значительно меньше, чем частота прерывания. В этом случае можно надеяться, что отсутствуют скрытые колебания внутри периодов дискретизации [52].

Возьмем z -преобразование от левой и правой частей равенства (15.1), учтя при этом уравнения (15.4) и (15.5) при $\gamma = 0$. Находим

$$E^*(z) = Y_n^*(z) - Y_d^*(z), \quad (15.6)$$

где

$$E^*(z) = \mathcal{L}\{\varepsilon[nT]\}, \quad Y_d^*(z) = z^{-1}G^*(z)X(z, 1),$$

$$Y_n^*(z) = \mathcal{L}\{H(s)X(s)\} = z^{-1}T \int_0^1 H^*(z, 1-\delta)X^*(z, \delta) d\delta.$$

Выражение для $Y_n^*(z)$ получается следующим образом:

$$\begin{aligned} Y_n^*(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} T \sum_{m=0}^{n-1} \int_0^1 h[(n-m-\delta)T]x[(m+\delta)T] d\delta z^{-n} = \\ &= T \int_0^1 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m+1}^{\infty} h[(n-m-\delta)T]x[(m+\delta)T]z^{-n} d\delta. \end{aligned}$$

Заменив переменную n с помощью равенства

$$n - m = n_1 + 1,$$

определяем

$$\begin{aligned} Y_n^*(z) &= z^{-1}T \int_0^1 \sum_{m=0}^{\infty} x[(m+\delta)T]z^{-m} \times \\ &\times \sum_{n_1=0}^{\infty} h[(n_1+1-\delta)T]z^{-n_1} d\delta = z^{-1}T \int_0^1 X^*(z, \delta)H^*(z, 1-\delta) d\delta. \end{aligned}$$

Часто z -изображение $Y_n^*(z)$ проще всего находить с помощью изображения по Лапласу $Y_n(s)$:

$$Y_n^*(z) = \mathcal{L}\{Y_n(s)\} = \mathcal{L}\{H(s)X(s)\}.$$

Заметим также, что если $g(0)=0$, то выражение для $Y_d^*(z)$ можно записать в виде

$$Y_d^*(z) = G^*(z)X^*(z).$$

То же самое относится к изображению $Y_d^*(z, \gamma)$, используемому ниже. Таким образом, с помощью выражения (15.6) можно найти изображение ошибки $\varepsilon[nT]$. Далее необходимо по изображению $E^*(z)$ определить

оригинал-ошибку $\varepsilon[nT]$. Для этого могут быть использованы хорошо разработанные методы отыскания оригинала по заданному изображению. Так, например, можно найти значения функции $\varepsilon[nT]$ в последовательные моменты времени $nT = 0, T, 2T, \dots$ путем разложения изображения $E^*(z)$ в ряд Лорана по степеням z^{-1} , т. е. делением числителя изображения $E^*(z)$ на его знаменатель. При этом вычисления могут быть автоматизированы, так как значения $\varepsilon[nT]$ вычисляются с помощью рекуррентной формулы [31]. Однако при таком способе расчета его необходимо повторять, чтобы выявить влияние на ошибку $\varepsilon[nT]$ численного метода, принятого для реализации желаемого закона управления, величины шага дискретности T и т. д. При использовании для вычислений этим способом цифровой машины указанные трудности становятся непринципиальными. Однако если необходимо получить аналитическую зависимость ошибки от того или иного параметра, то необходимо пользоваться формулой обращения z -преобразования

$$\varepsilon[nT] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} E^*(z) z^{n-1} dz, \quad (15.7)$$

где Γ_1 — контур, внутри которого расположены все полюсы изображения $E^*(z)$. При вычислениях с помощью формулы (15.7) удобно применять теорию вычетов, предварительно разложив изображение $E^*(z)$ на простые дроби. Эта работа может быть облегчена использованием таблиц z -преобразования.

Часто исследователя интересует значение максимума функции $\varepsilon[nT]$ и время его наступления при ступенчатом входном воздействии. Для решения этой задачи можно воспользоваться приближенным методом [52], применимым в случае, когда изображение передаточной функции непрерывной части системы имеет пару комплексных полюсов, которые по отношению к остальным расположены достаточно далеко от начала координат. Отметим, что для облегчения использования формулы (15.7) целесообразно предварительно упростить математическое описание системы, ограничиваясь при этом лишь определяющими динамическими факторами. Так как такое упрощение относится, естественно, в равной

мере как к дискретной, так и к соответствующей ей непрерывной системе, то, тем самым, эффект этого упрощения в меньшей мере скажется на разности выходов этих систем $\varepsilon(t)$, чем на каждой выходной величине в отдельности.

Часто удобно определять ошибку $\varepsilon[nT]$ следующим образом. Из (15.1) имеем

$$Y_n(s) = H(s) X(s),$$

поэтому

$$\varepsilon[nT] = \mathcal{L}^{-1}\{Y_n(s)\}|_{t=nT} - \mathcal{L}^{-1}\{Y_d^*(z)\}; \quad (15.8)$$

в соответствии с (15.8) определяются в отдельности выходная переменная непрерывной системы (с помощью обратного преобразования Лапласа при $t = nT$) и выходная переменная дискретной системы (с помощью обратного z -преобразования).

2. Определение погрешности в промежутках между дискретными моментами времени. Иногда может возникнуть необходимость в определении погрешности и между моментами прерывания, т. е. отыскание $\varepsilon(t)$. Это необходимо, если можно ожидать возникновения высокочастотных колебаний между моментами замыкания (так называемые скрытые пульсации). Причины этого явления в настоящее время подробно исследованы [52, 62]. Наиболее удобным методом определения погрешности в этом случае является использование z -преобразования с запаздыванием.

Возьмем z -преобразование с запаздыванием от левой и правой частей равенства (15.1) и учтем при этом выражения (15.4) и (15.5). Получаем

$$E^*(z, \gamma) = Y_n^*(z, \gamma) - Y_d^*(z, \gamma), \quad (15.9)$$

где

$$E^*(z, \gamma) = \mathcal{L}_\gamma\{\varepsilon[(n + \gamma)T]\}, \quad Y_d^*(z, \gamma) = z^{-1}G^*(z, \gamma)X^*(z, 1),$$

$$Y_n^*(z, \gamma) = \mathcal{L}_\gamma\{H(s)X(s)\} =$$

$$= z^{-1}T \int_{\gamma}^1 H^*(z, 1 + \gamma - \delta) X^*(z, \delta) d\delta + \\ + T \int_0^{\gamma} H^*(z, \gamma - \delta) X^*(z, \delta) d\delta.$$

При определении $Y_n^*(z, \gamma)$ учтено, что

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} h[(n_1 + 1 + \gamma - \delta)T] z^{-n_1} = \begin{cases} z[H^*(z, \gamma - \delta) - h(\gamma T - \delta T)] & \text{при } \delta \leq \gamma, \\ H^*(z, 1 + \gamma - \delta) & \text{при } \delta \geq \gamma. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что при $\gamma = 0$ $Y_n^*(z, 0) = Y_n^*(z)$. Заметим, что практически целесообразно z -изображение $Y_n^*(z, \gamma)$ находить с помощью изображения по Лапласу

$$Y_n^*(z, \gamma) = \mathcal{L}_{\gamma}\{Y_n^*(s)\} = \mathcal{L}_{\gamma}\{H(s)X(s)\}.$$

Так же как и $\varepsilon[nT]$, можно найти $\varepsilon[(n + \gamma)T]$ в фиксированные моменты времени γT , $(1 + \gamma)T$, $(2 + \gamma)T$, ... путем разложения изображения $E^*(z, \gamma)$ в ряд по степеням z^{-1} . Возможно применение также обратного z -преобразования с запаздыванием

$$\varepsilon[(n + \gamma)T] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} E^*(z, \gamma) z^{n-1} dz,$$

где Γ_1 — контур, внутри которого расположены все полюсы изображения $E^*(z, \gamma)$. Так как определение изображения $Y_n^*(z, \gamma)$ иногда может быть достаточно сложным, то, подобно (15.8), можно погрешность $\varepsilon(t)$ в момент времени $t = (n + \gamma)T$ находить путем вычисления

$$\varepsilon[(n + \gamma)T] = \mathcal{L}^{-1}\{Y_n(s)\} \Big|_{t=(n+\gamma)T} - \mathcal{L}_{\gamma}^{-1}\{Y_n^*(z, \gamma)\}. \quad (15.10)$$

Для определения $\varepsilon(t)$ внутри интервала дискретности может быть использован метод отыскания реакции непрерывной части дискретной системы на последовательность импульсов [52].

Выше были приведены формулы для определения погрешности, обусловленной дискретностью процесса управления, как разности выходных переменных дискретной и соответствующей непрерывной систем. Если вместо передаточных функций по входному воздействию использовать передаточные функции ошибки для этих систем, то можно сразу найти погрешность, обусловленную дискретностью, для ошибки регулирования замкнутой системы (3.17)

$$\varepsilon[(n + \gamma)T] = \mathcal{L}^{-1}\{E_n(s)\} \Big|_{t=(n+\gamma)T} - \mathcal{L}_{\gamma}^{-1}\{E_n^*(z, \gamma)\}, \quad (15.11)$$

где $E_d^*(z, \gamma)$ и $E_n(s)$ — изображения ошибок регулирования дискретной и соответствующей ей непрерывной систем. На этом ограничим рассмотрение возможных методов для прямого определения погрешности $\varepsilon(t)$ как функции времени, так как основной целью книги является получение способов определения функционала от $\varepsilon(t)$. Этому будут посвящены последующие параграфы настоящей главы. В заключение приведем пример определения погрешности $\varepsilon(t)$.

3. Пример. Рассмотрим замкнутую дискретную систему, содержащую в прямой цепи непрерывной объект с передаточной функцией $W_1(s) = K/s^2$ и восстанавливающий элемент нулевого порядка. Положим, что в соответствии с требованиями, предъявляемыми к данной системе, принята передаточная функция корректирующего устройства

$$D(s) = 1 + \tau s,$$

для реализации которой на ЦВМ используется метод численного дифференцирования, «обратный методу трапеций»

$$D^*(z) = 1 + \tau \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \frac{(T + 2\tau)z + T - 2\tau}{T(z + 1)}.$$

Следовательно, передаточная функция разомкнутой непрерывной системы

$$D(s)W_1(s) = \frac{K(1 + \tau s)}{s^2},$$

а соответствующая передаточная функция дискретной системы

$$\begin{aligned} D^*(z)W^*(z) &= \frac{(T + 2\tau)z + T - 2\tau}{T(z + 1)} \cdot \mathcal{Z} \left\{ \frac{1 - e^{-sT}}{s} \cdot \frac{K}{s^2} \right\} = \\ &= \frac{(T + 2\tau)z + T - 2\tau}{T(z + 1)} \cdot \frac{KT^2(z + 1)}{2(z - 1)^2} = KT \frac{(T + 2\tau)z + T - 2\tau}{2(z - 1)^2}. \end{aligned}$$

Положим, что входное воздействие $x(t) = t$, и определим ошибки регулирования непрерывной и дискретной систем, чтобы на их основе оценить эффект дискретности управления. Изображение ошибки непрерывной системы

$$E_n(s) = \frac{s^2}{s^2 + K\tau s + K} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2 + K\tau s + K}.$$

Полагая, что $\left(\frac{K\tau}{2}\right)^2 < K$, находим оригинал

$$\varepsilon_n(t) = \frac{1}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t,$$

где

$$\alpha = \frac{K\tau}{2}, \quad \beta = \sqrt{K - \left(\frac{K\tau}{2}\right)^2}.$$

Изображение ошибки регулирования дискретной системы при том же воздействии

$$E_d^*(z) = \frac{zT}{z^2 + \left[\frac{K}{2}T(T+2\tau) - 2\right]z + \frac{K}{2}T(T-2\tau) + 1}.$$

Полагая, что $\left[\frac{K}{2}\left(\frac{T}{2} + \tau\right)\right]^2 < K$, находим оригинал

$$\varepsilon_d[nT] = \frac{T}{\theta} (\sqrt{\delta^2 + \theta^2})^n \sin\left(n \operatorname{arctg} \frac{\theta}{-\delta}\right),$$

где

$$\delta = \frac{K}{2}T\left(\frac{T}{2} + \tau\right) - 1, \quad \theta = T \sqrt{K - \left[\frac{K}{2}\left(\frac{T}{2} + \tau\right)\right]^2}.$$

Нетрудно убедиться, что при $T \rightarrow 0$ и $nT \rightarrow t$

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{T}{\theta} = \frac{1}{\beta}, \quad \lim_{T \rightarrow 0} (\sqrt{\delta^2 + \theta^2})^n = e^{-\alpha t},$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} \sin\left(n \operatorname{arctg} \frac{\theta}{-\delta}\right) = \sin \beta t.$$

Следовательно, при $T \rightarrow 0$ и $nT \rightarrow t$ $\varepsilon_d[nT] \rightarrow \varepsilon_n(t)$. С помощью полученных формул может быть выполнено сравнение ошибок $\varepsilon_d[nT]$ и $\varepsilon_n(t)$. В данном случае это легко сделать путем определения максимальных значений этих ошибок, приравняв нулю соответствующие производные. Так, ошибка $\varepsilon_n(t)$ имеет максимум при

$$t_n = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}.$$

С точностью до ближайшего целого n для $\varepsilon_d[nT]$ находим максимум при

$$\frac{t_n}{T} = n_d = E \left[\frac{1}{\operatorname{arctg} \frac{\theta}{-\delta}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{arctg} \frac{\theta}{-\delta}}{-\ln \sqrt{\delta^2 + \theta^2}} + 0,5 \right],$$

где $E(a)$ — целая часть числа a . Подставив t_n и n_d в соответствующие формулы для ошибок, находим их максимальные значения $\epsilon_n^m = \epsilon_n(t_n)$ и $\epsilon_d^m = \epsilon_d[n_d T]$. Ниже, в таблице, приведены значения величин $t_d = n_d T$ и ϵ_d^m , рассчитанных для значений $K = 100 \text{ сек}^{-2}$, $\tau = 0,173 \text{ сек}$ при $T = 0,01 \div 0,04 \text{ сек}$; при $T=0$ имеем $t_d = t_n$ и $\epsilon_d^m = \epsilon_n^m$.

T	0	0,01	0,02	0,03	0,04
t_d	0,105	0,11	0,10	0,09	0,08
ϵ_d^m	0,0404	0,0419	0,0437	0,0461	0,0491

Сравнивая величины ϵ_d^m , полученные при различных численных методах реализации $D(s)$ и способах восстановления, с эталонным значением ϵ_n^m , можно оценить влияние этих факторов на точность работы цифровой автоматической системы.

§ 16. Определение величины суммарной (интегральной) квадратической погрешности цифровой автоматической системы операторным методом

1. **Определение квадратической погрешности в переходном режиме.** Удобной оценкой погрешности, обусловленной дискретностью процесса управления, является величина ее квадрата. Рассмотрим вначале ошибку $\epsilon(t)$ как дискретную последовательность при $t = (n + \gamma)T$. Из (15.1) получаем

$$\epsilon^2[(n + \gamma)T] = y_d^2[(n + \gamma)T] - 2y_n[(n + \gamma)T]y_d[(n + \gamma)T] + y_n^2[(n + \gamma)T]. \quad (16.1)$$

Составляющие правой части (16.1) $y_d[(n + \gamma)T]$ и $y_n[(n + \gamma)T]$ были найдены в предыдущем параграфе. Выражение (16.1) определяет величину квадрата погрешности в каждый данный момент $t = (n + \gamma)T$. Часто удобно использовать для оценки погрешности ее

суммарное квадратическое значение

$$\begin{aligned}
 J_{\varepsilon}[(n + \gamma)T] &= \sum_{m=0}^n \varepsilon^2[(m + \gamma)T] = \\
 &= \sum_{m=0}^n y_{\alpha}^2[(m + \gamma)T] - 2 \sum_{m=0}^n y_{\alpha}[(m + \gamma)T] y_{\beta}[(m + \gamma)T] + \\
 &\quad + \sum_{m=0}^n y_{\beta}^2[(m + \gamma)T]. \quad (16.2)
 \end{aligned}$$

Величина $J_{\varepsilon}[(n + \gamma)T]$ характеризует зависимость квадрата погрешности от времени. Наиболее эффективным способом определения суммарной квадратической погрешности является применение для этого теории z -преобразования. Обозначим через $I_{\varepsilon}(z, \gamma)$ изображение

$$I_{\varepsilon}(z, \gamma) = \mathcal{L}_{\gamma} \left\{ \sum_{m=0}^n \varepsilon^2[(m + \gamma)T] \right\}. \quad (16.3)$$

Учитывая теорему z -преобразования об изображении суммы, находим

$$I_{\varepsilon}(z, \gamma) = \frac{z}{z-1} \mathcal{L}_{\gamma} \{ \varepsilon^2[(n + \gamma)T] \}. \quad (16.4)$$

Применив к правой части соотношения (16.4) теорему z -преобразования об изображении произведения оригиналов (см. (10.11)), получаем

$$I_{\varepsilon}(z, \gamma) = \frac{z}{2\pi j(z-1)} \oint_{\Gamma_1} E^*(w, \gamma) E^*(zw^{-1}, \gamma) w^{-1} dw, \quad (16.5)$$

где

$$E^*(z, \gamma) = \mathcal{L}_{\gamma} \{ \varepsilon[(n + \gamma)T] \},$$

Γ_1 — контур радиуса $e^{a_1 T}$, $a_1 > c_1$, c_1 — показатель роста функции ошибки $\varepsilon(t)$. Изображение $E^*(z, \gamma)$, как следует из предыдущего параграфа, определяется выражением

$$E^*(z, \gamma) = \mathcal{L}_{\gamma} \{ H(s) X(s) \} - z^{-1} G^*(z, \gamma) X^*(z, 1). \quad (16.6)$$

Обозначим

$$E^*(z, \gamma) = \frac{A^*(z, \gamma)}{B^*(z)}. \quad (16.7)$$

Положим для простоты (без потери общности), что функция (16.7) имеет полюсы единичной кратности p_i ($i = 1, 2, \dots, k$). Внутри контура Γ_1 расположены лишь полюсы функции $E^*(\omega, \gamma)$, а полюсы функции $E^*(z\omega^{-1}, \gamma)$ лежат вне этого контура (см. п. 1 § 10). Тогда, определив вычеты относительно полюсов функции $E^*(\omega, \gamma)$, из выражения (16.5) получаем

$$I_e(z, \gamma) = \frac{z}{z-1} \sum_{i=1}^k \frac{A^*(p_i, \gamma) A^*(zp_i^{-1}, \gamma)}{\dot{B}^*(p_i) B^*(zp_i^{-1})} p_i^{-1} + \frac{z}{z-1} \lim_{\omega \rightarrow 0} [E^*(\omega, \gamma) E^*(z\omega^{-1}, \gamma)], \quad (16.8)$$

где

$$\dot{B}^*(p_i) = [B^*(z)]'_{z=p_i}.$$

При $\gamma = 0$ выражение для определения изображения $I_e(z)$ упрощается:

$$E^*(z) = \mathcal{L}\{H(s)X(s)\} - z^{-1}G^*(z)X(z, 1), \quad (16.9)$$

$$I_e(z) = \frac{z}{2\pi j(z-1)} \oint_{\Gamma_1} E^*(\omega) E^*(z\omega^{-1}) \omega^{-1} d\omega. \quad (16.10)$$

Аналогично (16.8) из формулы (16.10) получаем

$$I_e(z) = \frac{z}{z-1} \left\{ \sum_{i=1}^k \frac{A^*(p_i) A^*(zp_i^{-1})}{\dot{B}^*(p_i) B^*(zp_i^{-1})} p_i^{-1} + \lim_{\omega \rightarrow 0} [E^*(\omega) E^*(z\omega^{-1})] \right\}. \quad (16.11)$$

Значение суммарной квадратической ошибки находится путем перехода от изображений $I_e(z, \gamma)$ или $I_e(z)$ к соответствующим оригиналам. Иногда вместо суммарной квадратической оценки может представлять интерес интегральная квадратическая оценка

$$\bar{J}_e[nT] = \int_0^{nT} e^2(t) dt. \quad (16.12)$$

В соответствии с теоремой z -преобразования об изображении интеграла функции $\bar{J}_e[nT]$ отвечает следующее

изображение:

$$\bar{I}_\varepsilon(z) = \mathcal{L}\{\bar{J}_\varepsilon[nT]\} = \frac{T}{z-1} \int_0^1 \mathcal{L}_\gamma\{\varepsilon^2[(n+\gamma)T]\} d\gamma.$$

На основании формулы (16.5) изображение

$$\mathcal{L}_\gamma\{\varepsilon^2[(n+\gamma)T]\}$$

определяется правой частью этого выражения, умноженной на $(z-1)z^{-1}$. Отсюда

$$\mathcal{L}_\gamma\{\varepsilon^2[(n+\gamma)T]\} = \frac{z-1}{z} I_\varepsilon(z, \gamma).$$

Следовательно,

$$\bar{I}_\varepsilon(z) = z^{-1}T \int_0^1 I_\varepsilon(z, \gamma) d\gamma. \quad (16.13)$$

Располагая изображением $\bar{I}_\varepsilon(z)$, оригинал $\bar{J}_\varepsilon[nT]$ можно определить с помощью формулы обращения

$$\bar{J}_\varepsilon[nT] = \frac{T}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} \int_0^1 I_\varepsilon(z, \gamma) z^{n-2} d\gamma dz, \quad (16.14)$$

где Γ_1 — контур, содержащий все полюсы функции $I_\varepsilon(z)$, определяемой формулой (16.13). Непосредственно определение интегральной квадратической ошибки с помощью соотношений (16.14) достаточно сложно. Так как обычно шаг дискретности мал, то величину интеграла $\bar{J}_\varepsilon[nT]$ можно получить с достаточной для практики точностью при помощи следующего приближенного выражения:

$$\bar{J}_\varepsilon[nT] = \sum_{m=0}^{n-1} \int_{mT}^{(m+1)T} \varepsilon^2(t) dt \approx \sum_{m=0}^{n-1} \varepsilon^2[mT]T = TJ_\varepsilon[(n-1)T], \quad (16.15)$$

которое отвечает замене интеграла суммой прямоугольников. Точность определения интегральной квадратической ошибки можно повысить, если использовать метод полигональной аппроксимации суммы $\bar{J}_\varepsilon[nT]$ (способ трапеций). В этом случае для изображения интеграла

$J_e[nT]$ вместо (16.13) можно написать следующую приближенную формулу:

$$\mathcal{L}\{\bar{J}_e[nT]\} \approx \frac{T}{2} \cdot \frac{z+1}{z} I_e(z), \quad (16.16)$$

где изображение $I_e(z)$ было определено выше. Оригинулу, отвечающему этому изображению, соответствует более точное определение $\bar{J}_e[nT]$, чем с помощью формулы (16.15), для которой

$$\mathcal{L}\{\bar{J}_e[nT]\} \approx Tz^{-1}I_e(z).$$

2. Определение квадратической погрешности в установившемся режиме. Для определения суммарной квадратической погрешности в установившемся режиме воспользуемся полученными выше изображениями $I_e(z, \gamma)$ и $I_e(z)$ и теоремой z -преобразования о конечном значении оригинала. Если абсцисса сходимости ошибки отрицательна (полюсы изображения $E^*(z, \gamma)$ лежат внутри круга единичного радиуса, ограниченного окружностью Γ), то

$$J_e[\gamma T] = \lim_{n \rightarrow \infty} J_e[(n + \gamma)T] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)I_e(z, \gamma). \quad (16.17)$$

Применив предельный переход (16.17) к изображению (16.5), находим

$$J_e[\gamma T] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} E^*(z, \gamma) E^*(z^{-1}, \gamma) z^{-1} dz \quad (16.18)$$

(в выражении (16.18) обозначение переменной интегрирования w заменено на z). Формула (16.18) является известным выражением, связывающим сумму квадратов дискретной последовательности с ее z -преобразованием. Положим, так же как и выше, что изображение $E^*(z, \gamma)$ имеет полюсы с кратностью, равной единице. Тогда, применив предельный переход (16.17) к формуле (16.8), получаем

$$J_e[\gamma T] = \sum_{i=1}^k \frac{A^*(p_i, \gamma) A^*(p_i^{-1}, \gamma)}{B^*(p_i) B^*(p_i^{-1})} p_i^{-1} + \lim_{z \rightarrow 0} [E^*(z, \gamma) E^*(z^{-1}, \gamma)] \quad (16.19)$$

(в формуле (16.19) обозначение w заменено на z). Предельное значение суммарной квадратической ошибки при $\gamma = 0$ определяется аналогично:

$$J_\varepsilon = \lim_{n \rightarrow \infty} J_\varepsilon [nT] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) I_\varepsilon(z). \quad (16.20)$$

Из выражений (16.10) и (16.20) находим

$$J_\varepsilon = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} E^*(z) E^*(z^{-1}) z^{-1} dz. \quad (16.21)$$

Из (16.11) следует

$$J_\varepsilon = \sum_{i=1}^k \frac{A^*(p_i) A^*(p_i^{-1})}{B^*(p_i) B^*(p_i^{-1})} p_i^{-1} + \lim_{z \rightarrow 0} [E^*(z) E^*(z^{-1})]. \quad (16.22)$$

Если изображения $I^*(z, \gamma)$ или $I^*(z)$ были найдены, например, для определения суммарной квадратической ошибки в переходном режиме, то нет необходимости пользоваться формулами (16.19) и (16.22). Величины $J_\varepsilon[\gamma T]$ и J_ε могут быть получены в этом случае из соответствующих изображений с помощью предельных зависимостей (16.17) и (16.20). Значение интегральной квадратической ошибки при $n \rightarrow \infty$ в соответствии с (16.12) определяется соотношением

$$\bar{J}_\varepsilon = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{J}_\varepsilon [nT] = \int_0^\infty \varepsilon^2(t) dt. \quad (16.23)$$

Величину \bar{J}_ε можно найти, используя изображение $\bar{I}_\varepsilon(z)$ (16.13) функции $\bar{J}_\varepsilon[nT]$, также с помощью теоремы о конечном значении. Имеем

$$\begin{aligned} \bar{J}_\varepsilon &= \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \bar{I}_\varepsilon(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \left[T z^{-1} \int_0^1 I_\varepsilon(z, \gamma) d\gamma \right] = \\ &= T \int_0^1 \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) I_\varepsilon(z, \gamma) d\gamma. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом выражения (16.17) получаем

$$\bar{J}_\varepsilon = T \int_0^1 J_\varepsilon[\gamma T] d\gamma. \quad (16.24)$$

Иногда может представлять интерес относительная интегральная квадратическая погрешность

$$e^2 = \frac{\int_0^{\infty} e^2(t) dt}{\int_0^{\infty} y_{\text{н}}^2(t) dt} = \frac{\bar{J}_e}{\bar{y}_{\text{н}}}. \quad (16.25)$$

Формула для оценки ошибки (16.25) будет получена в следующем параграфе. Определение значения интегральной квадратической ошибки с помощью формулы (16.24) достаточно сложно. При малом шаге дискретности часто можно ограничиться приближенным соотношением

$$\bar{J}_e \approx T J_e, \quad (16.26)$$

отвечающим выражению (16.15) при $n \rightarrow \infty$. Погрешность, обусловленная эффектом квантования информации и конечной длиной разрядной сетки цифровой машины, определяется дисперсией, формула для вычисления которой приведена в § 14 (см. выражения последнего и предпоследнего членов формулы (14.68)). Полная ошибка может быть определена как сумма интегральной квадратической ошибки (16.23) и указанной дисперсии. Если в качестве $E^*(z, \gamma)$ (16.7) использовать изображение погрешности для ошибок регулирования (15.11), то все приведенные выше формулы могут быть применены для определения характеристик квадратической погрешности, обусловленной дискретностью процесса управления, замкнутой системы.

3. Пример. Определим суммарную квадратическую погрешность для системы, рассмотренной в примере предыдущего параграфа. Воспользуемся для этого формулой (16.22), определяющей указанную погрешность в установившемся режиме. Предварительно заметим, что паре комплексных взаимно сопряженных полюсов p_i и q_i в формуле (16.22) под знаком суммы отвечает член

$$\frac{2 \operatorname{Re} [A^*(p_i) A^*(p_i^{-1}) \dot{B}^*(q_i) B^*(q_i^{-1}) p_i^{-1}]}{|\dot{B}^*(p_i) B^*(p_i^{-1})|}. \quad (16.27)$$

Из предыдущего примера следует, что изображение $\varepsilon_n(t)$

$$E_n^*(z) = \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{\beta} e^{-\alpha T n} \sin \beta T n \right\} = \frac{\frac{1}{\beta} e^{-\alpha T} \sin \beta T z}{z^2 - 2e^{-\alpha T} \cos \beta T z + e^{-2\alpha T}}. \quad (16.28)$$

Для удобства дальнейших выкладок введем величины

$$\lambda = -\frac{\ln \sqrt{\delta^2 + \theta^2}}{T}, \quad \varphi = \frac{\operatorname{arctg} \frac{\theta}{\delta}}{T}, \quad \mu = \frac{\theta}{T}. \quad (16.29)$$

Следовательно, для изображения $\varepsilon_d[nT]$ находим

$$E_d^*(z) = \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{\mu} e^{-\lambda T n} \sin \varphi T n \right\} = \frac{\frac{1}{\mu} e^{-\lambda T} \sin \varphi T z}{z^2 - 2e^{-\lambda T} \cos \varphi T z + e^{-2\lambda T}}. \quad (16.30)$$

Изображение погрешности $\varepsilon[nT] = \varepsilon_n[nT] - \varepsilon_d[nT]$

$$E^*(z) = E_n^*(z) - E_d^*(z). \quad (16.31)$$

Нетрудно видеть, что предельный член в формуле (11.22) для рассматриваемого примера равен нулю. Найдем числитель $A^*(z)$ и знаменатель $B^*(z)$ дробно-рациональной функции $E^*(z)$. Из (16.28), (16.30) и (16.31) находим

$$A^*(z) = a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z, \quad (16.32)$$

где

$$\begin{aligned} a_3 &= \beta^{-1} e^{-\alpha T} \sin \beta T - \mu^{-1} e^{-\lambda T} \sin \varphi T, \\ a_2 &= 2e^{-(\alpha+\lambda)T} (\mu^{-1} \sin \varphi T \cos \beta T - \beta^{-1} \sin \beta T \cos \varphi T), \\ a_1 &= e^{-(\alpha+\lambda)T} (\beta^{-1} e^{-\lambda T} \sin \beta T - \mu^{-1} e^{-\alpha T} \sin \varphi T). \end{aligned}$$

Аналогично получаем

$$B^*(z) = b_4 z^4 + b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0, \quad (16.33)$$

где

$$\begin{aligned} b_4 &= 1, \quad b_3 = -2(e^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-\lambda T} \cos \varphi T), \\ b_2 &= e^{-2\alpha T} + 4e^{-(\alpha+\lambda)T} \cos \beta T \cos \varphi T + e^{-2\lambda T}, \\ b_1 &= -2e^{-(\alpha+\lambda)T} (e^{-\alpha T} \cos \varphi T + e^{-\lambda T} \cos \beta T), \\ b_0 &= e^{-2(\alpha+\lambda)T}. \end{aligned}$$

Отсюда производная

$$\dot{B}^*(z) = d_3 z^3 + d_2 z^2 + d_1 z + d_0, \quad (16.34)$$

где

$$d_3 = 4b_4, \quad d_2 = 3b_3, \quad d_1 = 2b_2, \quad d_0 = b_1.$$

Полюсами $E^*(z)$, т. е. нулями $B^*(z)$ (см. (16.28) и (16.30)), являются

$$p_1 = e^{-\alpha T} e^{j\beta T}; \quad q_1 = e^{-\alpha T} e^{-j\beta T}; \quad (16.35)$$

$$p_2 = e^{-\lambda T} e^{j\varphi T}; \quad q_2 = e^{-\lambda T} e^{-j\varphi T}. \quad (16.36)$$

Следовательно, величина суммарной квадратической погрешности данной системы определяется суммой двух выражений (16.27) при $i = 1, 2$, т. е. для пар полюсов (16.35) и (16.36). Найдем первый член этой суммы при $i = 1$. Для этого определим выражения, входящие в (16.27), при значениях p_1 и q_1 (16.35)

$$A^*(p_1) = \sum_{k=1}^3 a_k e^{-\alpha k T} \cos \beta k T + \\ + j \sum_{k=1}^3 a_k e^{-\alpha k T} \sin \beta k T = A_1 + jA_2; \quad (16.37)$$

$$A^*(p_1^{-1}) = \sum_{k=1}^3 a_k e^{\alpha k T} \cos \beta k T - \\ - j \sum_{k=1}^3 a_k e^{\alpha k T} \sin \beta k T = A_3 - jA_4; \quad (16.38)$$

$$\dot{B}^*(p_1) = \sum_{k=0}^3 d_k e^{-\alpha k T} \cos \beta k T + \\ + j \sum_{k=0}^3 d_k e^{-\alpha k T} \sin \beta k T = D_1 + jD_2; \quad (16.39)$$

$$B^*(p_1^{-1}) = \sum_{k=0}^4 b_k e^{\alpha k T} \cos \beta k T - \\ - j \sum_{k=0}^4 b_k e^{\alpha k T} \sin \beta k T = B_1 - jB_2; \quad (16.40)$$

$$\dot{B}^*(q_1) = D_1 - jD_2, \quad B^*(q_1^{-1}) = B_1 + jB_2. \quad (16.41)$$

Обозначим

$$C_1 = A_1 A_3 + A_2 A_4; \quad C_2 = A_2 A_3 - A_1 A_4;$$

$$C_3 = B_1 D_1 + B_2 D_2; \quad C_4 = B_1 D_2 - B_2 D_1.$$

С учетом этих обозначений находим выражение (16.27) при $i = 1$, т. е. для пары полюсов p_1, q_1

$$\frac{2e^{\alpha T} [(C_1 C_3 + C_2 C_4) \cos \beta T + (C_2 C_3 - C_1 C_4) \sin \beta T]}{\sqrt{C_3^2 + C_4^2}}. \quad (16.42)$$

Выражение (16.27) при $i = 2$, т. е. для пары полюсов p_2, q_2 (16.36) следует из формул (16.37) — (16.42), если обозначения α и β , присутствующие в указанных формулах, заменить соответственно на λ и φ .

Ниже приведены значения суммарной квадратической погрешности, рассчитанные по полученным формулам для тех же численных значений параметров систем, что и в примере предыдущего параграфа.

T	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
J_{ε}	$0,60 \cdot 10^{-11}$	$0,35 \cdot 10^{-8}$	$0,16 \cdot 10^{-6}$	$0,25 \cdot 10^{-5}$	$0,17 \cdot 10^{-4}$

§ 17. Оценка относительной интегральной квадратической погрешности частотным методом

Частотные методы широко применяются для исследования дискретных автоматических систем [31, 52, 62]. Эти методы могут быть использованы также для анализа погрешности, вызванной дискретностью процесса управления, порождаемой использованием в системе цифровой машины. Первой в этом направлении была работа [20], где показано, как с помощью использования частотных характеристик дискретного фильтра проанализировать погрешность, возникающую при реализации на цифровой машине операций дифференцирования и интегрирования. В [9] тем же методом анализируются погрешности, возникающие при реализации на цифровой машине линейных операторов, включающих операции

дифференцирования и интегрирования. Имеются и другие работы [21, 32], посвященные этому вопросу.

Интересно отметить, что частотными методами стали пользоваться также математики [57]. Классический численный анализ (интерполяция функций, численное дифференцирование и интегрирование и т. д.) построен в основном на использовании полиномиальных методов. При этом оценка ошибок, вызванных приближенностью численных способов, требует вычисления производных высокого порядка. В связи с трудностями их определения в вычислительную математику стали проникать частотные методы, в частности, методы аппроксимации функций с ограниченным спектром [57]. Так, например, сглаживание функции с помощью некоторой линейной комбинации ее значений в равноотстоящих узлах трактуется с позиций частотного подхода как фильтрация.

В указанных выше работах анализ погрешности, обусловленный дискретностью (квантованием по времени), сводится к сравнению между собой раздельно амплитудных и фазовых частотных характеристик дискретного и соответствующего ему непрерывного фильтров. При таком подходе трудно судить, как отличие каждой из указанных характеристик скажется на величине погрешности во временной области, которая, в конечном счете, нас интересует. При этом погрешность зависит не только от свойства самого дискретного фильтра, но и от типа используемого восстанавливающего элемента, а также от динамических свойств непрерывной части системы.

Оценка интегральной квадратической ошибки во временной области, свободная от указанных выше недостатков, была предложена в статье [10].

1. Зависимость, определяющая оценку относительной интегральной квадратической погрешности. Рассмотрим вначале оценку погрешности разомкнутой дискретной системы. Схема формирования этой погрешности показана на рис. 1.17. Изображения по Лапласу выходных переменных непрерывной и соответствующей дискретной систем определяются выражениями

$$Y_n(s) = D(s) W_1(s) X(s), \quad (17.1)$$

$$Y_d(s) = D^*(s) W_0(s) W_1(s) X^*(s), \quad (17.2)$$

где $D(s)$ и $D^*(s)$ — передаточные функции устройств управления непрерывной и дискретной систем, $W_1(s)$ и $W_0(s)$ — передаточные функции объекта управления и восстанавливающего устройства. Заметим, что в этом параграфе и далее рассматриваются выходные переменные непрерывной и дискретной систем как функции непрерывного времени, т. е. $y_n(t)$ и $y_d(t)$. Изображение погрешности $\varepsilon(t)$

$$E(s) = Y_n(s) - Y_d(s). \quad (17.3)$$

Для перехода к частотным характеристикам заменим в приведенных выражениях s на $j\omega$:

$$Y_n(j\omega) = D(j\omega) W_1(j\omega) X(j\omega), \quad (17.4)$$

$$Y_d(j\omega) = D^*(j\omega) W_0(j\omega) W_1(j\omega) X^*(j\omega), \quad (17.5)$$

$$E(j\omega) = Y_n(j\omega) - Y_d(j\omega). \quad (17.6)$$

Величины $X(j\omega)$ и $X^*(j\omega)$ связаны между собой соотношением

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[j(\omega + n\omega_0)]. \quad (17.7)$$

Положим, что входное воздействие $x(t)$ имеет спектр, ограниченный частотой ω_c . Это предположение связано с определенной идеализацией. Реальные сигналы имеют неограниченный спектр, так как они конечны во времени. Выбор частоты среза ω_c и вносимую при этом ошибку можно оценить, например, с помощью методов работы [53]. Использование представления о сигналах с ограниченным спектром часто является весьма полезным и, как известно, широко применяется. Как будет ясно из дальнейшего, в рассматриваемом случае предположение об ограниченности спектра входного сигнала допустимо, так как исследуется разность выходных переменных систем с одним и тем же входом. Поэтому ошибки, связанные с указанным допущением, в определенной мере компенсируются.

Частоту квантования ω_0 примем такой, чтобы выполнялось условие теоремы В. А. Котельникова

$$\omega_0 \geq 2\omega_c. \quad (17.8)$$

Далее положим, что объект управления имеет амплитудно-частотную характеристику $|W_1(j\omega)|$, отличную от нуля лишь в диапазоне частот, ограниченном некоторой частотой ω_H (частотой среза непрерывной части). Следовательно, объект играет роль низкочастотного фильтра. Этим свойством при больших или меньших значениях частоты ω_H обладают все реальные объекты управления. Положим, что частоты ω_0 , ω_c и ω_H связаны следующим неравенством:

$$\omega_H \leq \omega_0 - \omega_c. \quad (17.9)$$

Физически это неравенство означает, что объект управления «срезает» все боковые составляющие спектра дискретного сигнала $X^*(j\omega)$ (17.7), пропуская лишь основную низкочастотную составляющую спектра при $n = 0$ (см. рис. 1.16). Можно исходить из более общего предположения, считая, что объект пропускает определенное (конечное) число боковых составляющих, т. е. спектр (17.7), где пределы суммы конечны. Однако, как показывают исследования, достаточно ограничиться соотношением (17.9). Таким образом, дискретная система может рассматриваться как непрерывная в диапазоне частот, не превышающих величины ω_c , а в выражении (17.5) функцию $X^*(j\omega)$ можно заменить на $\frac{1}{T} X(j\omega)$:

$$Y_d(j\omega) = D^*(j\omega) \bar{W}_0(j\omega) W_1(j\omega) X(j\omega), \quad (17.10)$$

где

$$\bar{W}_0(j\omega) = \frac{1}{T} W_0(j\omega).$$

Разность $E(j\omega)$ (17.6) в этом случае будет определяться выражением

$$E(j\omega) = D(j\omega) W_1(j\omega) X(j\omega) [\lambda(j\omega) \bar{W}_0(j\omega) - 1], \quad (17.11)$$

где

$$\lambda(j\omega) = \frac{D^*(j\omega)}{D(j\omega)}. \quad (17.12)$$

Оценим погрешность $\varepsilon(t)$ во временной области, воспользовавшись для этого выражением (17.11). На основании теоремы Рейли, с учетом ограничения частот

величиной ω_c , находим

$$\begin{aligned} \bar{J}_e &= \int_0^{\infty} [y_H(t) - y_A(t)]^2 dt = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c} |D(j\omega) W_1(j\omega) X(j\omega) [\lambda(j\omega) \bar{W}_0(j\omega) - 1]|^2 d\omega, \quad (17.13) \end{aligned}$$

$$\bar{y}_H = \int_0^{\infty} y_H^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c} |D(j\omega) W_1(j\omega) X(j\omega)|^2 d\omega. \quad (17.14)$$

Отсюда относительная интегральная квадратическая ошибка

$$e^2 = \frac{\bar{J}_e}{\bar{y}_H} = \frac{\int_0^{\omega_c} |D(j\omega) W_1(j\omega) X(j\omega) [\lambda(j\omega) \bar{W}_0(j\omega) - 1]|^2 d\omega}{\int_0^{\omega_c} |D(j\omega) W_1(j\omega) X(j\omega)|^2 d\omega}. \quad (17.15)$$

Так как $\bar{W}_0(j\omega)$ и $\lambda(j\omega)$ не являются рациональными функциями $j\omega$, вычисление погрешности по этой формуле весьма трудоемко. В большинстве случаев это можно сделать лишь путем численного интегрирования. Часто бывает важно не определение самой ошибки, а оценка влияния на ее величину шага дискретности T , численного метода, принятого для реализации оператора $D(s)$, и способа восстановления дискретных данных (последние характеризуются соответственно функциями $\lambda(j\omega)$ и $\bar{W}_0(j\omega)$). Для этого удобно иметь простую формулу, определяющую хотя бы верхнюю границу относительной интегральной квадратической ошибки.

Применим к выражению (17.15) обобщенную теорему о среднем интегрального исчисления

$$\begin{aligned} e^2 &= \frac{\int_0^{\omega_c} |\lambda(j\omega_\xi) \bar{W}_0(j\omega_\xi) - 1|^2 \int_0^{\omega_c} |D(j\omega) W_1(j\omega) X(j\omega)|^2 d\omega}{\int_0^{\omega_c} |D(j\omega) W_1(j\omega) X(j\omega)|^2 d\omega} = \\ &= |\lambda(j\omega_\xi) \bar{W}_0(j\omega_\xi) - 1|^2, \quad (17.16) \end{aligned}$$

где

$$0 < \omega_{\xi} < \omega_c.$$

Введем следующие обозначения:

$$\lambda(j\omega) = \lambda(\omega) e^{j\theta(\omega)}, \quad \bar{W}_0(j\omega) = \bar{W}_0(\omega) e^{j\varphi(\omega)}, \quad (17.17)$$

где

$$\lambda(\omega) = \frac{|D^*(j\omega)|}{|D(j\omega)|}, \quad \theta(\omega) = \arg D^*(j\omega) - \arg D(j\omega),$$

$$\bar{W}_0(\omega) = \frac{|W_0(j\omega)|}{T}, \quad \varphi(\omega) = \arg W_0(j\omega).$$

С учетом введенных обозначений из формулы (17.16) находим

$$\begin{aligned} e^2 &= |\lambda(j\omega_{\xi}) \bar{W}_0(j\omega_{\xi})|^2 + 1 - 2 \operatorname{Re} [\lambda(j\omega_{\xi}) \bar{W}_0(j\omega_{\xi})] = \\ &= \lambda^2(\omega_{\xi}) \bar{W}_0^2(\omega_{\xi}) + 1 - 2\lambda(\omega_{\xi}) \bar{W}_0(\omega_{\xi}) \cos[\theta(\omega_{\xi}) + \varphi(\omega_{\xi})] \quad (17.18) \\ &\quad (0 < \omega_{\xi} < \omega_c). \end{aligned}$$

Отметим здесь следующее обстоятельство. Выражения (17.13) и (17.14) справедливы, если полюсы подынтегральных функций расположены слева от мнимой оси. Однако особенности вывода формулы (17.16) позволяют распространить ее также на случай, когда указанные полюсы расположены на мнимой оси (например, если передаточные функции $D(j\omega)$ и $D^*(j\omega)$ отвечают операции интегрирования). Действительно, если такой случай имеет место, то можно искусственно ввести параметры, смещающие полюсы с мнимой оси влево. В результате выражения (17.13) и (17.14), входящие в (17.16), применимы, а после сокращения определенных интегралов эти параметры войдут в выражение для $\lambda(j\omega)$ в (17.16). Устремив указанные параметры к нулю, получаем выражение для $\lambda(j\omega)$ в том виде, как оно определено в (17.12).

Рассмотрим теперь зависимость погрешности e^2 от частоты. Известно, что частотные характеристики непрерывной и соответствующей ей дискретной систем близки друг к другу лишь в области низких частот. Из выражений (17.16) и (17.18) легко видеть, что ошибка e^2 равна нулю лишь при $\omega_{\xi} = 0$, так как в этом случае

$$\lambda(0) = \bar{W}_0(0) = 1, \quad \theta(0) = \varphi(0) = 0.$$

Предположим, что частота ω_c увеличивается, а частота ω_0 остается постоянной, причем неравенства

$$\omega_0 \geq 2\omega_c, \quad 0 < \omega \leq \omega_c$$

выполняются. Физически ясно, что в этом случае с увеличением частоты ω_c будет возрастать также и величина ошибки e^2 . Математически это характеризуется тем, что с увеличением частоты входного сигнала величина $\lambda(\omega)$ и $\bar{W}_0(\omega)$ все больше отклоняются от единицы, а $\theta(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ от нуля. Рис. 5.1, где векторы $\overline{OB} = \lambda(j\omega) \bar{W}_0(j\omega)$, $\overline{OA} = 1$ и $|\overline{AB}| = e$, наглядно иллюстрирует зависимость ошибки e^2 от величин модуля и аргумента произведения $\lambda(j\omega) \bar{W}_0(j\omega)$.

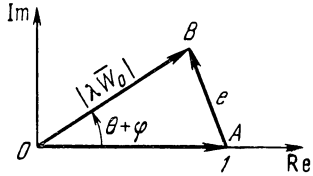


Рис. 5.1.

Исходя из этих соображений, можно утверждать, что относительная интегральная квадратическая ошибка в диапазоне частот

$$0 < \omega < \omega_c$$

является монотонно возрастающей функцией частоты. Таким образом, если в выражении (17.18) заменить ω_c на ω_c , то получаем следующую оценку погрешности e^2 сверху:

$$e^2 < \lambda^2(\omega_c) \bar{W}_0^2(\omega_c) + 1 - 2\lambda(\omega_c) \bar{W}_0(\omega_c) \cos[\theta(\omega_c) + \varphi(\omega_c)], \quad (17.19)$$

или

$$e < \epsilon(\omega_c), \quad (17.20)$$

где

$$\epsilon(\omega_c) = \sqrt{\lambda^2(\omega_c) \bar{W}_0^2(\omega_c) + 1 - 2\lambda(\omega_c) \bar{W}_0(\omega_c) \cos[\theta(\omega_c) + \varphi(\omega_c)]}. \quad (17.21)$$

Неравенство (17.20) было уже использовано нами выше в § 14 (14.72) при оценке величины относительной дисперсии погрешности. Покажем, что выражение для $e^2(\omega)$ (14.77), там полученное, совпадает с выражением для $e^2(\omega_c)$ (17.21). С учетом ограничений на частотные

характеристики, наложенных выше, в сумме для первого члена (14.77) следует оставить лишь один член ряда при $n = 0$, т. е.

$$\varepsilon^2(\omega) = \frac{|\bar{G}(j\omega)|^2}{|H(j\omega)|^2} - 2 \operatorname{Re} \left[\frac{\bar{G}(j\omega)}{H(j\omega)} \right] + 1. \quad (17.22)$$

Для $\bar{G}(j\omega)$ и $H(j\omega)$ (в соответствии с обозначениями настоящего параграфа (17.4) и (17.5)) имеем

$$\begin{aligned} \bar{G}(j\omega) &= \frac{1}{T} G(j\omega) = \frac{1}{T} D^*(j\omega) W_0(j\omega) W_1(j\omega) = \\ &= D^*(j\omega) \bar{W}_0(j\omega) W_1(j\omega); \quad H(j\omega) = D(j\omega) W_1(j\omega). \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в (17.22) с учетом обозначения (17.12) получаем первое выражение (17.18), откуда следует формула для $\varepsilon(\omega_c)$ (17.21). Таким образом, неравенство (14.72), использованное выше для оценки относительной дисперсии погрешности, правильно. Это и следовало ожидать, так как формула (14.70) при конечных пределах интегрирования ω_c по своей сущности близка к выражению (17.15). Отличие их в том, что в первой присутствует спектральная плотность случайного входного сигнала (фурье-изображение его корреляционной функции), а во второй — фурье-изображение самого регулярного сигнала.

В предыдущем параграфе были выведены формулы для определения относительной (интегральной) квадратической ошибки ε^2 (16.25), для которой здесь получена достаточно простая оценка (17.20). Неравенство (17.20) позволяет проанализировать, насколько отличие амплитудных и фазовых частотных характеристик непрерывного и дискретного фильтров (т. е. $D(j\omega)$ и $D^*(j\omega)$), обусловленное принятым численным методом, а также неидеальность восстановления дискретных данных приводят к искажению желаемого непрерывного процесса при данном шаге дискретности T . Ниже неравенство (17.20) будет использовано для оценки точности наиболее распространенных методов численного интегрирования и дифференцирования при различных способах восстановления дискретных данных (п. 2), а также для оценки точности восстановления функции, квантованной по времени, с помощью восстанавливающих устройств различного типа (п. 3).

Найдем оценку для замкнутой системы. В этом случае вместо выражений (17.4) и (17.5) имеем

$$Y_H(j\omega) = \frac{D(j\omega) W_1(j\omega)}{1 + D(j\omega) W_1(j\omega)} X(j\omega), \quad (17.23)$$

$$Y_H(j\omega) = \frac{D^*(j\omega) W_0(j\omega) W_1(j\omega)}{1 + D^*(j\omega) W_0 W_1^*(j\omega)} X^*(j\omega), \quad (17.24)$$

где

$$W_0 W_1^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_0[j(\omega + n\omega_0)] W_1^*[j(\omega + n\omega_0)]. \quad (17.25)$$

Схема формирования погрешности для этого случая показана на рис. 1.18. После выкладок, аналогичных проделанным выше, находим

$$e^2 = \left| \lambda(j\omega_\xi) \bar{W}_0(j\omega_\xi) \frac{1 + D(j\omega_\xi) W_1(j\omega_\xi)}{1 + D^*(j\omega_\xi) W_0 W_1^*(j\omega_\xi)} - 1 \right|^2. \quad (17.26)$$

Обозначим

$$\mu(j\omega_\xi) = \frac{1 + D(j\omega_\xi) W_1(j\omega_\xi)}{1 + D^*(j\omega_\xi) W_0 W_1^*(j\omega_\xi)} = \mu(\omega_\xi) e^{j\nu(\omega_\xi)}. \quad (17.27)$$

Тогда выражение (17.20) можно записать так:

$$e^2 = \lambda^2(\omega_\xi) \bar{W}_0^2(\omega_\xi) \mu^2(\omega_\xi) + \\ + 1 - 2\lambda(\omega_\xi) \bar{W}_0^2(\omega_\xi) \mu(\omega_\xi) \cos[\theta(\omega_\xi) + \varphi(\omega_\xi) + \nu(\omega_\xi)].$$

Далее, заменив ω_ξ на ω_c , получаем оценку относительной интегральной квадратической погрешности для замкнутой системы

$$e^2 < \lambda^2(\omega_c) \bar{W}_0^2(\omega_c) \mu^2(\omega_c) + \\ + 1 - 2\lambda(\omega_c) \bar{W}_0(\omega_c) \mu(\omega_c) \cos[\theta(\omega_c) + \varphi(\omega_c) + \nu(\omega_c)]. \quad (17.28)$$

2. Оценка относительной интегральной квадратической ошибки численных методов интегрирования и дифференцирования. При определении указанной оценки рассмотрим использование двух видов восстанавливающих элементов: идеального восстанавливающего

элемента с частотными характеристиками

$$\bar{W}_0(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } |\omega| \leq \omega_c, \\ 0 & \text{при } |\omega| > \omega_c, \end{cases} \quad \varphi(\omega) = 0, \quad (17.29)$$

и восстанавливающего элемента нулевого порядка с характеристиками

$$\bar{W}_0(\omega) = \left| \frac{2 \sin \frac{\omega T}{2}}{\omega T} \right|, \quad \varphi(\omega) = -\frac{\omega T}{2}. \quad (17.30)$$

В первом случае формула (17.19) принимает вид

$$e^2 < \lambda^2(\omega_c) + 1 - 2\lambda(\omega_c) \cos(\theta(\omega_c)), \quad (17.31)$$

а во втором —

$$e^2 < \lambda^2(\omega_c) \frac{4 \sin^2 \frac{\omega_c T}{2}}{\omega_c^2 T^2} + 1 - 2\lambda(\omega_c) \frac{2 \sin \frac{\omega_c T}{2}}{\omega_c T} \cos \left[\theta(\omega_c) - \frac{\omega_c T}{2} \right]. \quad (17.32)$$

В формуле (17.32) знак модуля опущен, так как по условию $\omega_0 = 2\pi/T \geq 2\omega_c$, следовательно, $T\omega_c/2 \leq \pi/2$ и $\sin \omega_c T/2 \geq 0$. Аналогично будем поступать и дальше. Кроме того, для упрощения записи индекс у ω_c опустим. Определим величины $\lambda(\omega)$ и $\theta(\omega)$ для различных методов численного интегрирования. Характеристика идеального (непрерывного) интегрирующего звена

$$D(j\omega) = \frac{1}{\omega} e^{-j \frac{\pi}{2}}. \quad (17.33)$$

Для численного метода интегрирования способом прямоугольников имеем [62]

$$D^*(j\omega) = \frac{T}{2 \sin \frac{\omega T}{2}} e^{j \left(\frac{\omega T}{2} - \frac{\pi}{2} \right)}, \quad (17.34)$$

следовательно (см. (17.17)),

$$\lambda(\omega) = \frac{T\omega}{2 \sin \frac{\omega T}{2}}, \quad \theta(\omega) = \frac{\omega T}{2}; \quad (17.35)$$

для способа трапеций

$$D^*(j\omega) = \frac{T}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega T}{2} e^{-j \frac{\pi}{2}}, \quad (17.36)$$

$$\lambda(\omega) = \frac{T\omega}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega T}{2}, \quad \theta(\omega) = 0; \quad (17.37)$$

для способа Симпсона 1/3

$$D^*(j\omega) = \frac{T}{3} \frac{2 + \cos \omega T}{\sin \omega T} e^{-j \frac{\pi}{2}}, \quad (17.38)$$

$$\lambda(\omega) = \frac{T\omega}{3} \cdot \frac{2 + \cos \omega T}{\sin \omega T}, \quad \theta(\omega) = 0. \quad (17.39)$$

Найдем теперь величины $\lambda(\omega)$ и $\theta(\omega)$ для методов численного дифференцирования. Характеристика идеального (непрерывного) дифференцирующего звена

$$D(j\omega) = \omega e^{j \frac{\pi}{2}}. \quad (17.40)$$

Для численного метода дифференцирования, обратного способу прямоугольников,

$$D^*(j\omega) = \frac{2 \sin \frac{\omega T}{2}}{T} e^{-j \left(\frac{\omega T}{2} - \frac{\pi}{2} \right)}, \quad (17.41)$$

$$\lambda(\omega) = \frac{2 \sin \frac{\omega T}{2}}{T\omega}, \quad \theta(\omega) = -\frac{\omega T}{2}; \quad (17.42)$$

для метода, обратного способу трапеций,

$$D^*(j\omega) = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}}{T} e^{j \frac{\pi}{2}}, \quad (17.43)$$

$$\lambda(\omega) = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}}{T\omega}, \quad \theta(\omega) = 0. \quad (17.44)$$

Подставив полученные выражения $\lambda(\omega)$ и $\theta(\omega)$ в формулы (17.31) и (17.32), находим оценки относительной интегральной квадратической ошибки для сочетаний различных численных методов интегрирования и дифференцирования и различных типов восстанавливающих устройств. Полученные оценки приведены в предпоследнем столбце таблицы 5.1.

Таблица 5.1

Наименование операции	Способ восстановления дискретных данных	Используемый численный метод	Оценка ошибки	Оценка ошибки (работа ЦВМ в реальном времени)
Интегрирование	Идеальное восстанавливающее устройство	Способ прямоугольников	$e^2 < \frac{\omega^2 T^2}{4 \sin^2 \frac{\omega T}{2}} - \omega T \operatorname{ctg} \frac{\omega T}{2} + 1$	$e^2 < \frac{\omega^2 T^2}{4 \sin^2 \frac{\omega T}{2}} - \omega T \operatorname{ctg} \frac{\omega T}{2} + 1$
		Способ трапеций	$e^2 < \frac{\omega^2 T^2}{4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\omega T}{2} - \omega T \operatorname{ctg} \frac{\omega T}{2} + 1$	$e^2 < \frac{T^2 \omega^2}{4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\omega T}{2} - \omega T \operatorname{ctg} \frac{\omega T}{2} \cos \frac{\omega T}{2} + 1$
		Способ Симпсона $1/3$	$e^2 < \left(\frac{T\omega}{3} \cdot \frac{2 + \cos \omega T}{\sin \omega T} \right)^2 - \frac{2T\omega}{3} \cdot \frac{2 + \cos \omega T}{\sin \omega T} + 1$	$e^2 < \left(\frac{T\omega}{3} \cdot \frac{2 + \cos \omega T}{\sin \omega T} \right)^2 - \frac{2T\omega}{3} (2 + \cos \omega T) \operatorname{ctg} \frac{\omega T}{2} + 1$
Восстанавливающее устройство нулевого порядка		Способ прямоугольников	$e^2 = 0$	$e^2 < 2 \sin^2 \frac{\omega T}{2}$
		Способ трапеций	$e^2 < \sin^2 \frac{\omega T}{2}$	$e^2 < \cos^2 \frac{\omega T}{2} - 2 \cos \frac{\omega T}{2} \cos \frac{3\omega T}{2} + 1$

Дифференцирование																
Идеальное восстанавли- вающее устройство	<table border="1"> <tr> <td style="text-align: center;">Способ Симпсона $1/3$</td> <td style="text-align: center;">$e^2 < \left(\frac{2 + \cos \omega T}{3 \cos \frac{\omega T}{2}} \right)^2 - \frac{2}{3} (2 + \cos \omega T) + 1$</td> <td style="text-align: center;">$e^2 < \left(\frac{2 + \cos \omega T}{3 \cos \frac{\omega T}{2}} \right)^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2 + \cos \omega T}{\cos \frac{\omega T}{2}} \cos \frac{3\omega T}{2} + 1$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">Обратный способ прямо- угольников</td> <td style="text-align: center;">$e^2 < \frac{4 \sin^2 \frac{\omega T}{2}}{\omega^2 T^2} - \frac{4 \sin \frac{\omega T}{2}}{\omega T} \cos \frac{\omega T}{2} + 1$</td> <td style="text-align: center;">$e^2 < \frac{4 \sin^2 \frac{\omega T}{2}}{\omega^2 T^2} - \frac{4 \sin \frac{\omega T}{2}}{\omega T} \cos \frac{3\omega T}{2} + 1$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">Обратный способ трапеций</td> <td style="text-align: center;">$e^2 < \frac{4 \operatorname{tg}^2 \frac{\omega T}{2}}{\omega^2 T^2} - \frac{4 \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}}{\omega T} + 1$</td> <td style="text-align: center;">$e^2 < \frac{4 \operatorname{tg}^2 \frac{\omega T}{2}}{\omega^2 T^2} - \frac{4 \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}}{\omega T} \cos \omega T + 1$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">Обратный способ прямо- угольников</td> <td style="text-align: center;">$e^2 < \frac{16 \sin^4 \frac{\omega T}{2}}{\omega^4 T^4} - \frac{8 \sin^2 \frac{\omega T}{2}}{\omega^2 T^2} \times \cos \omega T + 1$</td> <td style="text-align: center;">$e^2 < \frac{16 \sin^4 \frac{\omega T}{2}}{\omega^4 T^4} - \frac{8 \sin^2 \frac{\omega T}{2}}{\omega^2 T^2} \times \cos 2\omega T + 1$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">Восстанавли- вающее устройство нулевого порядка</td> <td style="text-align: center;">$e^2 < \frac{16 \sin^4 \frac{\omega T}{2}}{\omega^4 T^4} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\omega T}{2}} - \frac{8 \sin^2 \frac{\omega T}{2}}{T^2 \omega^2} + 1$</td> <td style="text-align: center;">$e^2 < \frac{16 \sin^4 \frac{\omega T}{2}}{\omega^4 T^4} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\omega T}{2}} - \frac{8 \sin^2 \frac{\omega T}{2}}{\omega^2 T^2} \cdot \frac{\cos \frac{3\omega T}{2}}{\cos \frac{\omega T}{2}} + 1$</td> </tr> </table>	Способ Симпсона $1/3$	$e^2 < \left(\frac{2 + \cos \omega T}{3 \cos \frac{\omega T}{2}} \right)^2 - \frac{2}{3} (2 + \cos \omega T) + 1$	$e^2 < \left(\frac{2 + \cos \omega T}{3 \cos \frac{\omega T}{2}} \right)^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2 + \cos \omega T}{\cos \frac{\omega T}{2}} \cos \frac{3\omega T}{2} + 1$	Обратный способ прямо- угольников	$e^2 < \frac{4 \sin^2 \frac{\omega T}{2}}{\omega^2 T^2} - \frac{4 \sin \frac{\omega T}{2}}{\omega T} \cos \frac{\omega T}{2} + 1$	$e^2 < \frac{4 \sin^2 \frac{\omega T}{2}}{\omega^2 T^2} - \frac{4 \sin \frac{\omega T}{2}}{\omega T} \cos \frac{3\omega T}{2} + 1$	Обратный способ трапеций	$e^2 < \frac{4 \operatorname{tg}^2 \frac{\omega T}{2}}{\omega^2 T^2} - \frac{4 \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}}{\omega T} + 1$	$e^2 < \frac{4 \operatorname{tg}^2 \frac{\omega T}{2}}{\omega^2 T^2} - \frac{4 \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}}{\omega T} \cos \omega T + 1$	Обратный способ прямо- угольников	$e^2 < \frac{16 \sin^4 \frac{\omega T}{2}}{\omega^4 T^4} - \frac{8 \sin^2 \frac{\omega T}{2}}{\omega^2 T^2} \times \cos \omega T + 1$	$e^2 < \frac{16 \sin^4 \frac{\omega T}{2}}{\omega^4 T^4} - \frac{8 \sin^2 \frac{\omega T}{2}}{\omega^2 T^2} \times \cos 2\omega T + 1$	Восстанавли- вающее устройство нулевого порядка	$e^2 < \frac{16 \sin^4 \frac{\omega T}{2}}{\omega^4 T^4} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\omega T}{2}} - \frac{8 \sin^2 \frac{\omega T}{2}}{T^2 \omega^2} + 1$	$e^2 < \frac{16 \sin^4 \frac{\omega T}{2}}{\omega^4 T^4} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\omega T}{2}} - \frac{8 \sin^2 \frac{\omega T}{2}}{\omega^2 T^2} \cdot \frac{\cos \frac{3\omega T}{2}}{\cos \frac{\omega T}{2}} + 1$
Способ Симпсона $1/3$	$e^2 < \left(\frac{2 + \cos \omega T}{3 \cos \frac{\omega T}{2}} \right)^2 - \frac{2}{3} (2 + \cos \omega T) + 1$	$e^2 < \left(\frac{2 + \cos \omega T}{3 \cos \frac{\omega T}{2}} \right)^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2 + \cos \omega T}{\cos \frac{\omega T}{2}} \cos \frac{3\omega T}{2} + 1$														
Обратный способ прямо- угольников	$e^2 < \frac{4 \sin^2 \frac{\omega T}{2}}{\omega^2 T^2} - \frac{4 \sin \frac{\omega T}{2}}{\omega T} \cos \frac{\omega T}{2} + 1$	$e^2 < \frac{4 \sin^2 \frac{\omega T}{2}}{\omega^2 T^2} - \frac{4 \sin \frac{\omega T}{2}}{\omega T} \cos \frac{3\omega T}{2} + 1$														
Обратный способ трапеций	$e^2 < \frac{4 \operatorname{tg}^2 \frac{\omega T}{2}}{\omega^2 T^2} - \frac{4 \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}}{\omega T} + 1$	$e^2 < \frac{4 \operatorname{tg}^2 \frac{\omega T}{2}}{\omega^2 T^2} - \frac{4 \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}}{\omega T} \cos \omega T + 1$														
Обратный способ прямо- угольников	$e^2 < \frac{16 \sin^4 \frac{\omega T}{2}}{\omega^4 T^4} - \frac{8 \sin^2 \frac{\omega T}{2}}{\omega^2 T^2} \times \cos \omega T + 1$	$e^2 < \frac{16 \sin^4 \frac{\omega T}{2}}{\omega^4 T^4} - \frac{8 \sin^2 \frac{\omega T}{2}}{\omega^2 T^2} \times \cos 2\omega T + 1$														
Восстанавли- вающее устройство нулевого порядка	$e^2 < \frac{16 \sin^4 \frac{\omega T}{2}}{\omega^4 T^4} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\omega T}{2}} - \frac{8 \sin^2 \frac{\omega T}{2}}{T^2 \omega^2} + 1$	$e^2 < \frac{16 \sin^4 \frac{\omega T}{2}}{\omega^4 T^4} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\omega T}{2}} - \frac{8 \sin^2 \frac{\omega T}{2}}{\omega^2 T^2} \cdot \frac{\cos \frac{3\omega T}{2}}{\cos \frac{\omega T}{2}} + 1$														

Найдем оценки ошибки для тех же случаев с учетом работы ЦВМ в реальном времени, когда используется информация лишь о прошлых значениях величин, т. е. вносится запаздывание на один такт. Для этого нужно умножить $D^*(z)$ на z^{-1} или $D^*(j\omega)$ на $e^{-j\omega T}$. Так как $|e^{-j\omega T}| = 1$ и $\arg[e^{-j\omega T}] = -\omega T$, то выражения для $\lambda(\omega)$ остаются без изменения, а в выражения для $\theta(\omega)$ следует добавить ωT со знаком минус. Оценки для рассматриваемого случая приведены в таблице 5.1 в последнем столбце. По данным указанной таблицы были найдены численные значения оценки относительной интегральной квадратической ошибки в функции относительной частоты $\bar{\omega} = \omega T$ для каждого из рассмотренных вариантов. Результаты расчетов графически представлены на рис. 5.2—5.5, где α — величина, определяемая правой частью неравенства, оценивающего ошибку. Относительная частота изменяется в пределах от нуля до π . Приведенные на рисунках графики позволяют сделать некоторые выводы.

1. Как следует из рис. 5.2, в случае идеального восстанавливающего устройства более совершенные методы интегрирования (способы — Симпсона 1/3, трапеций, прямоугольников) обеспечивают и большую точность. Однако при использовании восстанавливающего устройства нулевого порядка положение изменяется на обратное — менее совершенные методы численного интегрирования (прямоугольников, трапеций и Симпсона 1/3) оказываются более точными. Причем для способа прямоугольников ошибка оказывается равной нулю, так как в этом случае погрешности, вызванные приближенностью процессов интегрирования и восстановления, взаимно компенсируются (ср. (17.30) и (17.35)). Последнее обстоятельство можно объяснить еще и следующим образом. Выше предполагалось, что входное воздействие имеет ограниченный спектр и выполняется условие (17.8). Следовательно, рассматриваются функции, раскладываемые в ряд Котельникова:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT] \frac{\sin \omega_c(t + nT)}{\omega_c(t + nT)}, \quad \omega_c = \pi/T.$$

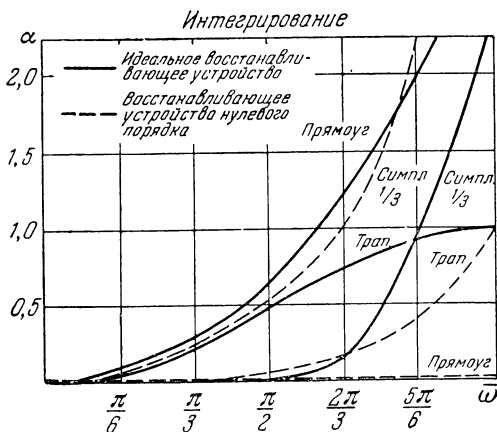


Рис. 5.2.

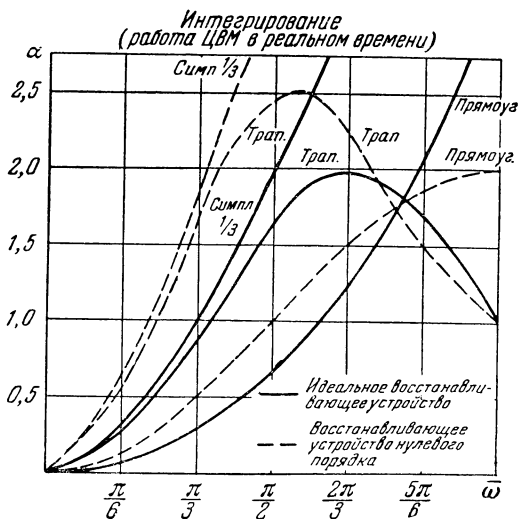


Рис. 5.3.

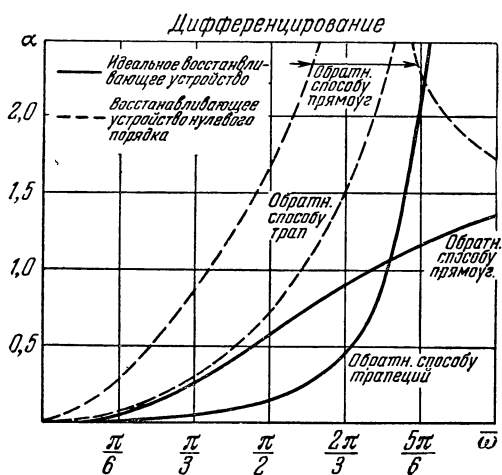


Рис. 5.4.

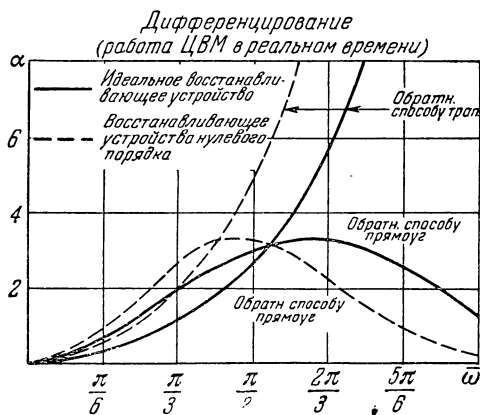


Рис. 5.5

Интеграл от такой функции

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt &= \frac{1}{\omega_c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_c (t + nT)}{t + nT} dt = \\ &= \frac{1}{\omega_c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT] \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT] T. \end{aligned}$$

Таким образом, с помощью метода численного интегрирования способом прямоугольников интеграл от функции с ограниченным спектром в пределах $\pm\infty$ вычисляется точно. Как раз этому случаю и отвечает использование восстанавливающего устройства нулевого порядка.

2. Запаздывание на один такт, вносимое ЦВМ, как следует из рис. 5.3, делает более совершенные методы численного интегрирования менее точными. Наиболее точным оказывается способ прямоугольников.

3. Для численного дифференцирования более точным оказывается метод дифференцирования, обратный интегрированию способом трапеций (рис. 5.4—5.5).

4. Численные методы интегрирования и дифференцирования обеспечивают высокую точность лишь при значениях относительной частоты $\bar{\omega} = \omega T$, во много раз меньшей π , т. е. когда отношение частоты квантования к частоте входного сигнала существенно больше двух.

5. Таким образом, несмотря на предположение об ограничении спектра входных сигналов, оценка относительной интегральной квадратической погрешности численных методов интегрирования и дифференцирования позволяет наглядно проиллюстрировать влияние величины шага T , принятого численного метода и способа восстановления дискретных данных на точность реализации на цифровой машине заданной передаточной функции $D(s)$.

В заключение этого раздела приведем пример определения погрешности для случая реализации на ЦВМ передаточной функции

$$D(s) = \frac{K}{s^2 (s + a)} \quad (17.45)$$

методом Эйлера и идеальном восстанавливающим устройстве, т. е. рассмотрим ошибку лишь численного метода. Переходя от дифференциального уравнения, соответствующего данной передаточной функции, к разностному уравнению и применяя к последнему преобразование Лапласа, получаем

$$D^*(s) = \frac{KT^3 e^{-sT}}{[1 - (1 - aT) e^{-sT}](1 - e^{-sT})^2}. \quad (17.46)$$

Отсюда определяем

$$\lambda(\omega) = \frac{\left(\frac{T\omega}{2}\right)^2}{\sin^2 \frac{\omega T}{2}} \sqrt{\frac{\omega^2 T^2 + a^2 T^2}{4(1 - aT) \sin^2 \frac{\omega T}{2} + a^2 T^2}}, \quad (17.47)$$

$$\theta(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{a} - \operatorname{arctg} \frac{(1 - aT) \sin \omega T}{1 - (1 - aT) \cos \omega T}. \quad (17.48)$$

Найдем по формуле (17.31) оценку погрешности e^2 при $a = 0,6$; $T = 0,2$ и $0,5$ сек; $\omega_c = 2$ и $4^1/\text{сек}$. Результаты вычислений приведены в таблице 5.2.

Таблица 5.2

T , сек	ω_0 , 1/сек	ω_c , 1/сек	ω_0/ω_c	$\lambda(\omega)$	$\theta(\omega)$, град	Оценка e^2
0,2	31,4	2	15,7	1,065	12,25	0,06
		4	7,85	1,14	22,83	0,20
0,5	12,6	2	6,3	1,33	29,67	0,46
		4	3,15	2,07	69,5	3,99

Из таблицы 5.2 видно, что погрешность мала лишь в случае, когда отношение ω_0/ω_c существенно (на порядок) больше двух.

3. Оценка относительной интегральной квадратической ошибки восстановления функции, квантованной по времени [11]. Часто возникает ситуация, когда съем информации осуществляется лишь в дискретные моменты

времени с шагом T , или же некоторая величина $x(t)$ вычисляется, например, с помощью цифровой машины с шагом T на основании измерения других величин, определяющих $x(t)$ как их функцию. Далее, эта величина может использоваться как непрерывная (например, как задающее воздействие для непрерывной автоматической системы), и поэтому должна быть восстановлена. При восстановлении дискретной величины с помощью реальных восстанавливающих устройств всегда имеет место ошибка, так как идеальный восстанавливающий элемент с характеристиками (17.29), необходимый для восстановления дискретной функции по Котельникову (даже при условии ограниченности спектра восстанавливаемой функции), физически не реализуем.

Относительная интегральная квадратическая ошибка восстановления функции с помощью реальных восстанавливающих устройств может быть оценена, если в неравенстве (17.19) положить $\lambda(\omega_c) = 1$ и $\theta(\omega_c) = 0$, т. е. считать, что как непрерывный, так и дискретный фильтры $D(s)$ и $D^*(s)$ имеют передаточные функции, равные единице (см. рис. 1.17). Получаем

$$e^2 < \bar{W}_0^2(\omega) + 1 - 2\bar{W}_0(\omega) \cos(\varphi(\omega)) \quad (17.49)$$

(в этой формуле, так же как и выше, индекс u величины ω_c опущен). Из (17.49) нетрудно видеть, что правая часть неравенства равна нулю лишь для идеального восстанавливающего элемента с характеристиками (17.29). Поэтому погрешность восстановления определяется величинами отклонений как амплитудой, так и фазовой характеристик реального восстанавливающего элемента от соответствующих характеристик идеального элемента (17.29). Оценим относительную интегральную квадратическую ошибку для следующих видов восстанавливающих элементов:

а) восстанавливающий элемент нулевого порядка

$$W_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \quad (17.50)$$

обеспечивает на выходе величину, равную амплитуде входного сигнала в момент съема;

б) восстанавливающий элемент первого порядка

$$W_0(s) = \frac{1}{T} (1 + sT) \left(\frac{1 - e^{-sT}}{s} \right)^2 \quad (17.51)$$

создает на выходе величину, определяемую амплитудой входного сигнала и ее первой разностью;

в) обобщенный восстанавливающий элемент

$$W_0(s) = \frac{1}{T} \left(K + \frac{1 - Ke^{-sT}}{1 - e^{-sT}} sT \right) \left(\frac{1 - e^{-sT}}{s} \right)^2 \quad (17.52)$$

поддерживает амплитуду выходной величины, равной амплитуде на входе, и добавляет к ней величину, пропорциональную первой разности. Коэффициент пропорциональности K может изменяться в пределах $0 \leq K \leq 1$. При $K = 0$ выражение (17.52) совпадает с (17.50), а при $K = 1$ с (17.51).

Найдем с помощью этих передаточных функций выражения для $\bar{W}_0(\omega)$ и $\varphi(\omega)$, входящие в правую часть неравенства (17.49). Для восстанавливающего элемента нулевого порядка эти выражения были приведены выше (17.30). Для восстанавливающего элемента первого порядка и обобщенного восстанавливающего элемента характеристики $\bar{W}_0(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ определяются соответственно формулами

$$\bar{W}_0(\omega) = \frac{4 \sin^2 \frac{\omega T}{2}}{\omega^2 T^2} \sqrt{1 + \omega^2 T^2}, \quad (17.53)$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \omega T - \omega T, \quad (17.54)$$

$\bar{W}_0(\omega) =$

$$= \frac{4 \sin^2 \frac{\omega T}{2}}{\omega^2 T^2} \sqrt{\left[K + (1 - K) \frac{\omega T}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega T}{2} \right]^2 + \left[(1 + K) \frac{\omega T}{2} \right]^2}, \quad (17.55)$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{(1 + K) \frac{\omega T}{2} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}}{K \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} + (1 - K) \frac{\omega T}{2}} - \omega T. \quad (17.56)$$

Легко видеть, что при $K = 0$ выражения (17.55) и (17.56) совпадают соответственно с выражениями, (17.30), а при $K = 1$ с выражениями (17.53) и (17.54).

Имея это в виду, далее будем рассматривать частотные характеристики лишь обобщенного восстанавливающего элемента (17.55) и (17.56) при значениях K в диапазоне от нуля до единицы. На рис. 5.6 показаны амплитудная

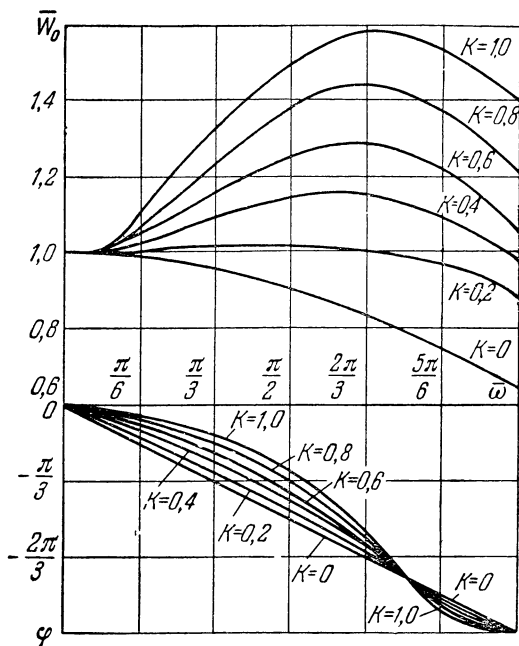


Рис. 5. 6.

и фазовая характеристики обобщенного восстанавливающего элемента $\bar{W}_0(j\bar{\omega})$ и $\varphi(\bar{\omega})$ в функции относительной частоты $\bar{\omega} = \omega T$ для нескольких значений величины K .

На основании выражений (17.55) и (17.56) можно найти оценку относительной интегральной квадратической ошибки, определяемую правой частью неравенства (17.49) (будем обозначать ее величину через α). Результаты вычисления α для нескольких значений K показаны на рис. 5.7. На рис. 5.8 в другом масштабе показана область малых значений α , представляющая наибольший интерес.

Из рассмотрения рис. 5.7—5.8 можно сделать некоторые выводы.

1. Значение относительной интегральной квадратической ошибки мало лишь при относительной частоте $\bar{\omega}$, существенно меньшей π , т. е. когда отношения ω_0/ω_c существенно больше двух.

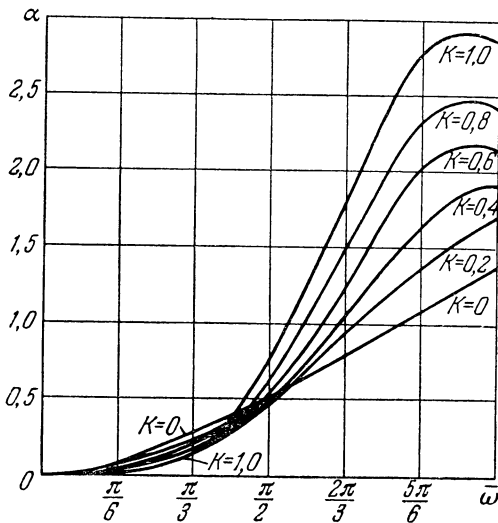


Рис. 5.7.

2. Сравнение изменения величин $\bar{W}_0(\bar{\omega})$ и $\varphi(\bar{\omega})$ (рис. 5.6) с изменением $\alpha(\bar{\omega})$ (рис. 5.7 и 5.8) позволяет утверждать, что ошибка восстановления определяется в большей степени запаздыванием по фазе, вносимым восстанавливающим элементом. Так, например, для $\bar{\omega} = \pi/6$ величина \bar{W}_0 при значениях $K = 0; 0,2$ и $0,4$ мало отличается от единицы, отклоняясь от нее при $K = 0$ в меньшую сторону, а при $K = 0,2$ и $0,4$ в большую, запаздывание же по фазе уменьшается с увеличением K . Значения величины оценки $\alpha(\bar{\omega})$ в этом случае (при $\bar{\omega} = \pi/6$, см. рис. 5.8) с увеличением K также уменьшаются.

3. В области низких относительных частот оценка ошибки с увеличением K уменьшается, в области высо-

ких частот увеличивается. Такой характер изменения ошибки соответствует физической сущности влияния величины K на точность процесса восстановления в зависимости от частоты восстанавливаемого сигнала и периода дискретности.

4. В области малых относительных частот, т. е. в области малых значений ошибки, величина последней

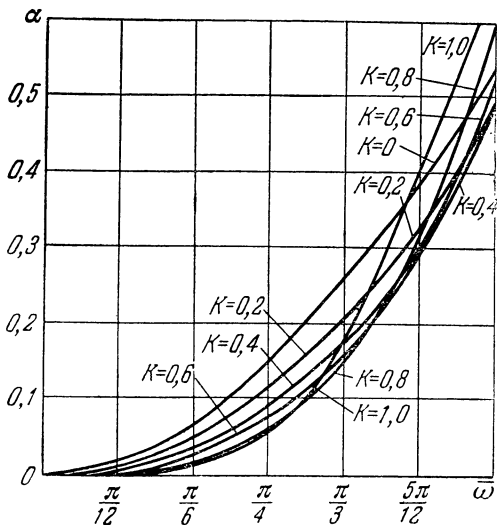


Рис. 5.8.

монотонно уменьшается с увеличением K . Экстремум величины ошибки в зависимости от изменения K в этой области частот отсутствует (ср. с [18]).

5. Несмотря на предположение об ограничении спектра восстанавливаемого сигнала предложенная оценка относительной интегральной квадратической ошибки восстановления позволяет достаточно наглядно оценить точность процесса восстановления в зависимости от используемого восстанавливающего устройства, его параметров и величины шага квантования T , в том числе и в случае применения пассивных фиксирующих цепей, получаемых при приближенной аппроксимации звена идеального запаздывания [18].

§ 18. Определение погрешности дискретной автоматической системы при гармоническом входном воздействии

Исследования автоматических систем при гармонических воздействиях имеют важное практическое значение. Поэтому представляет интерес рассмотреть возможность определения погрешности, обусловленной дискретностью процесса управления, в этом случае. Процессы в дискретных системах при гармонических воздействиях рассмотрены в ряде работ [31, 62, 44, 52, 70]. В последних трех исследуются некоторые задачи определения погрешностей в дискретных системах при гармоническом входе.

Следуя развиваемому в работе подходу, ниже рассмотрена погрешность, обусловленная дискретностью процесса управления, как разность выходных переменных дискретной и соответствующей (желаемой) непрерывной системы при гармоническом входном воздействии [12]. Будет показана связь выражения, определяющего относительную среднеквадратическую ошибку дискретной системы при гармоническом входном сигнале, с оценкой указанной ошибки, полученной в предыдущем параграфе, а также с формулой для относительной дисперсии ошибки при случайном входном воздействии, найденной в § 14.

1. Определение относительной среднеквадратической погрешности при гармоническом входном воздействии. Рассмотрим отдельно случаи разомкнутой и замкнутой дискретных систем. Схема формирования погрешности для разомкнутой системы показана на рис. 1.17. Положим, что входная величина $x(t)$ является гармонической функцией с единичной амплитудой

$$x(t) = \cos \omega t. \quad (18.1)$$

Определим относительную среднеквадратическую погрешность e_{\sim}^2 в этом случае с помощью отношения

$$e_{\sim}^2 = \frac{[y_{\text{н}}(t) - y_{\text{д}}(t)]^2}{y_{\text{н}}^2(t)} = \frac{\varepsilon^2(t)}{y_{\text{н}}^2(t)}. \quad (18.2)$$

Здесь и далее будем обозначать пунктирной чертой

сверху операцию осреднения функции на бесконечном интервале времени, т. е.

$$\overline{f(t)} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} f(t) dt.$$

Таким образом, $\overline{\varepsilon^2(t)}$ есть средняя энергия ошибки $\varepsilon(t)$ при гармоническом воздействии, а $\overline{y_H^2(t)}$ — средняя энергия выходной переменной $y_H(t)$ непрерывной (желаемой) системы. Следовательно, $\overline{e^2}$ характеризует отношение этих средних энергий (мощностей) и может служить характеристикой погрешности, обусловленной дискретностью процесса управления при гармоническом входном воздействии.

Соотношения между изображениями входной и выходной переменных между дискретной и соответствующей ей непрерывной систем определяются равенствами (17.1) и (17.2) (см. предыдущий параграф). Так как гармонической функции (18.1) отвечает изображение

$$X(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad (18.3)$$

то на основании соотношения

$$X^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(s + jn\omega_0) + \frac{1}{2} x(0) \quad (18.4)$$

получаем

$$X^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{s + jn\omega_0}{(s + jn\omega_0)^2 + \omega^2} + \frac{1}{2}. \quad (18.5)$$

Следовательно, изображение выходной переменной дискретной системы в соответствии с формулой (17.2)

$$Y_d(s) = \overline{G}(s) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{s + jn\omega_0}{(s + jn\omega_0)^2 + \omega^2} + \frac{1}{2} \overline{G}(s), \quad (18.6)$$

где

$$\overline{G}(s) = D^*(s) \overline{W}_0(s) W_1(s). \quad (18.7)$$

Для определения оригинала $y_d(t)$, соответствующего изображению (18.6), воспользуемся формулой

обращения преобразования Лапласа

$$y_d(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y_d(s) e^{st} ds. \quad (18.8)$$

Так как нас интересует установившаяся составляющая выходной переменной дискретной системы $y_d(t)$, то она может быть определена как сумма вычетов функции $Y_d(s)e^{st}$ относительно полюсов лишь входного воздействия $X^*(s)$ [8], равных $\pm j(\omega + n\omega_0)$, где n пробегает целые значения в пределах $\pm\infty$. Так как

$$\begin{aligned} \text{Res} \left[\bar{G}(s) e^{st} \frac{s + jn\omega_0}{(s + jn\omega_0) + \omega^2}; s = \pm j(\omega + n\omega_0) \right] = \\ = \frac{1}{2} [\bar{G}(s) e^{st}]_{s=\pm j(\omega + n\omega_0)}, \end{aligned}$$

то находим

$$\begin{aligned} y_d(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{ \bar{G}[j(\omega + n\omega_0)] e^{j(\omega + n\omega_0)t} + \\ + \bar{G}[-j(\omega + n\omega_0)] e^{-j(\omega + n\omega_0)t} \}. \quad (18.9) \end{aligned}$$

Выражение (18.9) можно также получить, исходя из следующих простых физических соображений. Выходная величина импульсного элемента

$$x^*(t) = \delta_T(t) x(t),$$

где $x(t)$ — непрерывная функция на входе, а

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}.$$

Последнее равенство представляет собой разложение в ряд Фурье последовательности дельта-функций [52]. Так как в рассматриваемом случае

$$x(t) = \cos \omega t = \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}),$$

то

$$x^*(t) = \frac{1}{2T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [e^{j(\omega + n\omega_0)t} + e^{-j(\omega + n\omega_0)t}]. \quad (18.10)$$

Каждая сумма членов правой части (18.10) при фиксированном n вызывает на выходе системы с передаточной функцией $G(s)$ реакцию, определяемую суммой членов правой части (18.9) при том же n . Отсюда следует выражение (18.9), как сумма всех реакций при $-\infty \leq n \leq \infty$. Из этих рассуждений видно, что при гармоническом входном воздействии выходная переменная дискретной системы представляет собой сумму гармоник с основной частотой ω и бесконечного числа гармоник с частотами $\omega \pm n\omega_0$.

Аналогичным образом из формулы (17.1) для непрерывной (желаемой) системы находим

$$y_n(t) = \frac{1}{2} [H(j\omega) e^{j\omega t} + H(-j\omega) e^{-j\omega t}], \quad (18.11)$$

где

$$H(j\omega) = D(j\omega) W_1(j\omega). \quad (18.12)$$

Определим

$$\bar{e}^2(t) = \overline{y_n^2(t)} - 2\overline{y_n(t) y_d(t)} + \overline{y_d^2(t)}. \quad (18.13)$$

Возведя выражение (18.9) для $y_d(t)$ в квадрат, получаем

$$\begin{aligned} y_d^2(t) = \frac{1}{4} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{G}[j(\omega + n\omega_0)] \times \right. \\ \times \bar{G}[j(\omega + m\omega_0)] e^{j[2\omega + (n+m)\omega_0]t} + \\ + 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{G}[j(\omega + n\omega_0)] \bar{G}[-j(\omega + m\omega_0)] e^{j(n-m)\omega_0 t} + \\ + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{G}[-j(\omega + n\omega_0)] \times \\ \left. \times \bar{G}[-j(\omega + m\omega_0)] e^{-j[2\omega + (n+m)\omega_0]t} \right\}. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\exp\{j[2\omega + (n+m)\omega_0]t\} = \exp\{-j[2\omega + (n+m)\omega_0]t\} = 0,$$

$$\exp\{j(n-m)\omega_0 t\} = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m, \\ 1 & \text{при } n = m, \end{cases}$$

где n и m — любые целые числа, а также принимая, что

$$2\omega + (n+m)\omega_0 \neq 0,$$

получаем после операции осреднения $y_{\text{д}}^2(t)$

$$\overline{y_{\text{д}}^2(t)} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\overline{G}[j(\omega + n\omega_0)]|^2. \quad (18.14)$$

Из выражения (18.11) для $\overline{y_{\text{н}}(t)}$ непосредственно следует

$$\overline{y_{\text{н}}(t)} = \frac{1}{2} |H(j\omega)|^2. \quad (18.15)$$

Так как

$$\begin{aligned} y_{\text{д}}(t) y_{\text{н}}(t) = \frac{1}{4} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{G}[j(\omega + n\omega_0)] H(j\omega) e^{j[2\omega + n\omega_0]t} + \right. \\ + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{G}[-j(\omega + n\omega_0)] H(j\omega) e^{-jn\omega_0 t} + \\ + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{G}[j(\omega + n\omega_0)] H(-j\omega) e^{jn\omega_0 t} + \\ \left. + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{G}[-j(\omega + n\omega_0)] H(-j\omega) e^{-[2\omega + n\omega_0]t} \right\} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \overline{\exp\{j[2\omega + n\omega_0]t\}} = \overline{\exp\{-j[2\omega + n\omega_0]t\}} = 0, \\ \overline{\exp\{jn\omega_0 t\}} = \overline{\exp\{-jn\omega_0 t\}} = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq 0, \\ 1 & \text{при } n = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

то

$$\overline{y_{\text{д}}(t) y_{\text{н}}(t)} = \frac{1}{4} [\overline{G}(-j\omega) H(j\omega) + \overline{G}(j\omega) H(-j\omega)]. \quad (18.16)$$

Подставив выражения (18.14) — (18.16) в формулу (18.13), находим

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon^2(t)} = \frac{1}{2} |H(j\omega)|^2 - \frac{1}{2} [\overline{G}(-j\omega) H(j\omega) + \overline{G}(j\omega) H(-j\omega)] + \\ + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\overline{G}[j(\omega + n\omega_0)]|^2. \quad (18.17) \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \frac{\bar{G}(-j\omega) H(j\omega) + \bar{G}(j\omega) H(-j\omega)}{|H(j\omega)|^2} &= \\ &= \frac{\bar{G}(-j\omega)}{H(-j\omega)} + \frac{\bar{G}(j\omega)}{H(j\omega)} = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{\bar{G}(j\omega)}{H(j\omega)} \right], \end{aligned}$$

то, подставив выражения (18.17) и (18.15) в (18.2), получаем

$$e_{\sim}^2 = \frac{1}{|H(j\omega)|^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\bar{G}[j(\omega + n\omega_0)]|^2 - 2 \operatorname{Re} \left[\frac{\bar{G}(j\omega)}{H(j\omega)} \right] + 1. \quad (18.18)$$

Сравнивая полученное выражение с формулой (14.77), видим, что они совпадают. Это и следовало ожидать. Действительно, если формулу (14.70), полученную в § 14, применить для случая, когда входное воздействие представляет собой гармоническую функцию, то выражение для спектральной плотности $S_x(\omega)$ вырождается в дельта-функцию (гармоническая функция имеет линейчатый спектр, сконцентрированный при двух значениях $\pm\omega$ частоты этой функции). Поэтому из формулы (14.70) сразу следует равенство

$$e_{\sim}^2 = e^2(\omega),$$

совпадающее с (14.77), а следовательно, и с (18.18). Используя выражения для $\bar{G}(j\omega)$ (18.7) и для $H(j\omega)$ (18.12), а также свойство периодичности функции $D^*[j(\omega + n\omega_0)]$:

$$D^*[j(\omega + n\omega_0)] = D^*(j\omega),$$

из равенства (18.18) находим

$$\begin{aligned} e_{\sim}^2 &= \left| \frac{\lambda(j\omega)}{W_1(j\omega)} \right|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\bar{W}_0[j(\omega + n\omega_0)] W_1[j(\omega + n\omega_0)]|^2 - \\ &\quad - 2 \operatorname{Re} [\lambda(j\omega) \bar{W}_0(j\omega)] + 1. \quad (18.19) \end{aligned}$$

В (18.19) использовано обозначение (17.12) для $\lambda(j\omega)$. Если предположить, что объект управления имеет амплитудно-частотную характеристику $|W_1(j\omega)|$, ограниченную частотой ω_H , и выполняются условия (17.8) и (17.9), то в формуле (18.19) следует под знаком суммы

оставить лишь один член при $n = 0$, т. е.

$$e_{\sim}^2 = |\lambda(j\omega) \bar{W}_0(j\omega)|^2 - 2 \operatorname{Re} [\lambda(j\omega) \bar{W}_0(j\omega)] + 1. \quad (18.20)$$

Правая часть этого выражения совпадает с правой частью формулы (17.18). Таким образом, при выполнении условий (17.8) и (17.9), принятых в предыдущем параграфе, и гармоническом входном воздействии неравенство (17.19) превращается в равенство (18.20). Следовательно, для гармонического воздействия оценки (17.15) и (18.2) совпадают, что и следовало ожидать на основании соображений, аналогичных приведенным выше.

Формулу (18.19) можно упростить, если воспользоваться равенством (14.79). Применительно к первому члену формулы (18.19) указанное равенство дает

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\bar{W}_0[j(\omega + n\omega_0)] W_1[j(\omega + n\omega_0)]|^2 &= \\ &= T \mathcal{L} \{ \bar{W}_0(s) W_1(s) \bar{W}_0(-s) W_1(-s) \} \Big|_{z=e^{j\omega T}} = \\ &= \mathcal{L} \{ W_0(s) W_1(s) \bar{W}_0(-s) W_1(-s) \} \Big|_{z=e^{j\omega T}}. \end{aligned} \quad (18.21)$$

Подставив выражение (18.21) в формулу (18.19), окончательно получаем

$$\begin{aligned} e_{\sim}^2 &= \left| \frac{\lambda(j\omega)}{W_1(j\omega)} \right|^2 \mathcal{L} \{ W_0(s) W_1(s) \bar{W}_0(-s) W_1(-s) \} \Big|_{z=e^{j\omega T}} - \\ &\quad - 2 \operatorname{Re} [\lambda(j\omega) \bar{W}_0(j\omega)] + 1. \end{aligned} \quad (18.22)$$

Заметим, что разность значений ошибки e_{\sim}^2 , вычисленных по формулам (18.22) и (18.20), определяет погрешность, вызванную пренебрежением высокочастотными составляющими суммы (18.19) с частотами $\omega \pm n\omega_0$, где n изменяется от 1 до ∞ .

Найдем теперь формулу для определения относительной среднеквадратической погрешности замкнутой дискретной системы. В этом случае вместо (18.7) и (18.12) имеем

$$\bar{G}(s) = \frac{D^*(s)}{1 + D^*(s) W_0 W_1^*(s)} \bar{W}_0(s) W_1(s), \quad (18.23)$$

$$H(s) = \frac{D(s)}{1 + D(s) W_1(s)} W_1(s). \quad (18.24)$$

Эти формулы по структуре (с точностью до переобозначений первых сомножителей) совпадают с указанными выше. Отсюда нетрудно получить формулу для определения относительной среднеквадратической погрешности замкнутой системы при гармоническом входном воздействии

$$e_{\sim}^2 = \left| \frac{\lambda(j\omega) \mu(j\omega)}{W_1(j\omega)} \right|^2 \mathcal{L} \{W_0(s) W_1(s) \bar{W}_0(-s) W_1(-s)\} \Big|_{z=e^{j\omega T}} - 2 \operatorname{Re} [\lambda(j\omega) \mu(j\omega) \bar{W}_0(j\omega)] + 1, \quad (18.25)$$

где $\mu(j\omega)$ определяется формулой (17.27).

2. Оценка гармонической ошибки. Иногда бывает необходимо знать не среднее значение квадрата $\varepsilon(t)$, определяемого формулой (18.2), а саму ошибку $\varepsilon(t)$. Найдем оценку относительной гармонической ошибки

$$e_1 = \frac{\left| \max_t |y_d(t)| - \max_t |y_n(t)| \right|}{\max_t |y_n(t)|}. \quad (18.26)$$

Поясним смысл величины e_1 . Если бы обе рассматриваемые системы были непрерывными (но с разными законами управления $D(s)$), то при одном и том же входном гармоническом воздействии выражение (18.26) определяло бы относительную разность амплитуд гармоник выходных величин. Для дискретной системы, как это следует из (18.9) и (18.11), выходная величина кроме основной гармоники содержит дополнительные составляющие, однако по смыслу ошибка e_1 (18.26) близка к указанной выше. Так как выражения (18.9) и (18.11) могут быть представлены в виде

$$y_d(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\bar{G}[j(\omega + n\omega_0)]| \cos \{ \arg \bar{G}[j(\omega + n\omega_0)] + (\omega + n\omega_0)t \},$$

$$y_n(t) = |H(j\omega)| \cos [\arg H(j\omega) + \omega t],$$

то

$$\max_t |y_d(t)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\bar{G}[j(\omega + n\omega_0)]|, \quad (18.27)$$

$$\max_t |y_n(t)| = |H(j\omega)|, \quad (18.28)$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
 e_1 &\leq \frac{1}{|H(j\omega)|} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\bar{G}[j(\omega + n\omega_0)]| - |H(j\omega)| \right| = \\
 &= \frac{1}{|H(j\omega)|} \left| |\bar{G}(j\omega)| - |H(j\omega)| + \sum_{n=1}^{\infty} |\bar{G}[j(\omega \pm n\omega_0)]| \right| \leq \\
 &\leq \left| \left| \frac{\bar{G}(j\omega)}{H(j\omega)} \right| - 1 \right| + \frac{1}{|H(j\omega)|} \sum_{n=1}^{\infty} |\bar{G}[j(\omega \pm n\omega_0)]|. \quad (18.29)
 \end{aligned}$$

Используя выражения (18.7) и (18.12) для $\bar{G}(j\omega)$ и $H(j\omega)$ и свойство периодичности функции $D^*[j(\omega \pm n\omega_0)]$, из неравенства (18.29) получаем

$$\begin{aligned}
 e_1 &\leq \left| |\lambda(j\omega) \bar{W}_0(j\omega)| - 1 \right| + \\
 &+ \left| \frac{\lambda(j\omega)}{W_1(j\omega)} \right| \sum_{n=1}^{\infty} |\bar{W}_0[j(\omega \pm n\omega_0)] W_1[j(\omega \pm n\omega_0)]|. \quad (18.30)
 \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (18.30) дает оценку относительной гармонической ошибки разомкнутой дискретной системы.

Если пренебречь высокочастотными составляющими, то из неравенства (18.30) следует

$$e_1 \leq \left| |\lambda(j\omega) \bar{W}_0(j\omega)| - 1 \right|. \quad (18.31)$$

Для замкнутой системы, проделав аналогичные выкладки, с учетом формул (18.23) и (18.24) получаем

$$\begin{aligned}
 e_1 &\leq \left| |\lambda(j\omega) \mu(j\omega) \bar{W}_0(j\omega)| - 1 \right| + \\
 &+ \left| \frac{\lambda(j\omega) \mu(j\omega)}{W_1(j\omega)} \right| \sum_{n=1}^{\infty} |\bar{W}_0[j(\omega \pm n\omega_0)] W_1[j(\omega \pm n\omega_0)]|, \quad (18.32)
 \end{aligned}$$

где $\mu(j\omega)$ определяется формулой (17.27).

3. Пример определения погрешности цифровой автоматической системы при гармоническом входном воздействии. Пусть объект управления имеет передаточную функцию $W_1(s) = K/(s + a)$, а входное воздействие подвергается операции интегрирования, т. е. $D(s) = 1/s$. Для реализации операции интегрирования на цифровой

машине рассмотрим использование численных методов интегрирования способом прямоугольников и способом трапеций. В качестве восстанавливающего устройства примем запоминающий элемент нулевого порядка.

1. Определение относительной среднекватратической ошибки. Воспользуемся для определения e_{\sim}^2 формулой (18.22). Найдем вначале z -изображение, соответствующее передаточной функции

$$W_0(s) W_1(s) \bar{W}_0(-s) W_1(-s) = K^2 \frac{e^{sT} + e^{-sT} - 2}{Ts^2(a^2 - s^2)}.$$

Это изображение было определено выше в примере § 14. На основании формул (14.87) и (14.88)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ K^2 \frac{e^{sT} + e^{-sT} - 2}{Ts^2(a^2 - s^2)} \right\} \Big|_{z=e^{j\omega T}} = \\ = \frac{K^2}{a^2} \left[1 - \frac{2 \sin^2 \frac{\omega T}{2} \operatorname{sh} aT}{Ta (\operatorname{ch} aT - \cos \omega T)} \right]. \end{aligned} \quad (18.33)$$

Далее,

$$W_0(j\omega) = \left| \frac{2 \sin \frac{\omega T}{2}}{\omega T} \right| e^{-j \frac{\omega T}{2}}, \quad |W_1(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\omega^2 + a^2}}. \quad (18.34)$$

а) Интегрирование способом прямоугольников. В этом случае (см. (17.35))

$$\lambda(j\omega) = \frac{T\omega}{2 \sin \frac{\omega T}{2}} e^{j \frac{\omega T}{2}}. \quad (18.35)$$

Подставив выражения (18.33)–(18.35) в формулу (18.22), получаем

$$e_{\sim}^2 = \frac{\omega^2 + a^2}{a^2} \left[\frac{\omega^2 T^2}{4 \sin^2 \frac{\omega T}{2}} - \frac{T\omega^2 \operatorname{sh} aT}{2a (\operatorname{ch} aT - \cos \omega T)} \right] - 1. \quad (18.36)$$

Если пренебречь высокочастотными составляющими, то из формулы (18.20) следует $e_{\sim}^2 = 0!$

б) Интегрирование способом трапеций. Так как в этом случае (см. (17.37))

$$\lambda(j\omega) = \frac{T\omega}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega T}{2}, \quad (18.37)$$

то из (18.22) находим

$$e_{\sim}^2 = \frac{\omega^2 + a^2}{a^2} \left[\frac{\omega^2 T^2}{4 \operatorname{tg}^2 \frac{\omega T}{2}} - \frac{T \omega^2 \cos^2 \frac{\omega T}{2} \operatorname{sh} aT}{2a (\operatorname{ch} aT - \cos \omega T)} \right] - \cos \omega T. \quad (18.38)$$

Если пренебречь высокочастотными составляющими, то на основании (18.20)

$$e_{\sim}^2 = \sin^2 \frac{\omega T}{2}. \quad (18.39)$$

Нетрудно показать, что для всех полученных выше выражений справедливо

$$\lim_{T \rightarrow 0} e_{\sim}^2 = 0. \quad (18.40)$$

Значения погрешностей e_{\sim}^2 , рассчитанные по полученным выше формулам для различных T и величин $a = 0,5$ и $\omega = \pi$, приведены в таблице 5.3. В последнем ее столбце для способа трапеций приведены значения доли

Таблица 5.3

T, сек	ω_0/ω	Способ прямоугольников		Способ трапеций		
		Расчетная формула погрешности				
		$\sqrt{(18.20)}$	$\sqrt{(18.36)}$	$\sqrt{(18.39)}$	$\sqrt{(18.38)}$	$\sqrt{(18.38) - (18.39)}$
0,1	20	0	0,00382	0,156	0,157	0,00376
0,2	10	0	0,0156	0,309	0,312	0,0179
0,3	6,66	0	0,0372	0,453	0,456	0,0332
0,4	5	0	0,0713	0,587	0,592	0,0577
0,5	4	0	0,123	0,706	0,713	0,0868

погрешности, обусловленные высокочастотными составляющими в спектре входного сигнала.

2. Определение относительной гармонической ошибки.

а) Интегрирование способом прямоугольников. Учитывая выражения (18.34) и (18.35), из формулы (18.30) находим

$$e_1 \leq \frac{\omega T \sqrt{\omega^2 + a^2}}{2 \left| \sin \frac{\omega T}{2} \right|} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \left| \sin \frac{(\omega \pm n\omega_0) T}{2} \right|}{T |\omega \pm n\omega_0| \sqrt{(\omega \pm n\omega_0)^2 + a^2}} < \\ < \frac{\omega \sqrt{\omega^2 + a^2}}{\left| \sin \frac{\omega T}{2} \right|} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\omega \pm n\omega_0)^2}. \quad (18.41)$$

Сумму в правой части (18.41) найдем следующим образом: из (14.79) получаем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega + n\omega_0)^2} = T \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{-s} \right\} \Big|_{z=e^{j\omega T}} = \\ = \left[-\frac{T^2 z}{(z-1)^2} \right]_{z=e^{j\omega T}} = \frac{T^2}{4 \sin^2 \frac{\omega T}{2}},$$

так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\omega \pm n\omega_0)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega + n\omega_0)^2} - \frac{1}{\omega^2},$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\omega \pm n\omega_0)^2} = \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{\omega^2 T^2}{4 \sin^2 \frac{\omega T}{2}} - 1 \right). \quad (18.42)$$

Подставив (18.42) в правую часть (18.41), находим

$$e_1 < \frac{\sqrt{\omega^2 + a^2}}{\omega \left| \sin \frac{\omega T}{2} \right|} \left(\frac{\omega^2 T^2}{4 \sin^2 \frac{\omega T}{2}} - 1 \right). \quad (18.43)$$

Если пренебречь высокочастотными составляющими, то из неравенства (18.31) находим $e_1 = 0!$

б) Интегрирование способом трапеций. На основании выражений (18.34) и (18.37) из формулы (18.30)

получаем

$$e_1 \leq \left| \left| \cos \frac{\omega T}{2} \right| - 1 \right| + \frac{\omega T \sqrt{\omega^2 + a^2}}{2 \left| \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} \right|} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \left| \sin \frac{(\omega \pm n\omega_0) T}{2} \right|}{T |\omega \pm n\omega_0| \sqrt{(\omega \pm n\omega_0)^2 + a^2}} < < \left| \left| \cos \frac{\omega T}{2} \right| - 1 \right| + \frac{\omega \sqrt{\omega^2 + a^2}}{\left| \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} \right|} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\omega \pm n\omega_0)^2}. \quad (18.44)$$

Подставив (18.42) в правую часть неравенства (18.44), определяем

$$e_1 < \left| \left| \cos \frac{\omega T}{2} \right| - 1 \right| + \frac{\sqrt{\omega^2 + a^2}}{\omega \left| \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} \right|} \left(\frac{\omega^2 T^2}{4 \sin^2 \frac{\omega T}{2}} - 1 \right). \quad (18.45)$$

Если пренебречь высокочастотными составляющими, то из (18.31) находим

$$e_1 \leq \left| \left| \cos \frac{\omega T}{2} \right| - 1 \right|. \quad (18.46)$$

Из полученных формул следует, что

$$\lim_{T \rightarrow 0} T e_1 = 0.$$

Значения оценок относительной гармонической ошибки для тех же значений a и ω приведены в таблице 5.4. Последний столбец таблицы дает оценку доли погрешности за счет высокочастотных составляющих.

Результаты численных расчетов, приведенные выше, позволяют сделать следующие выводы:

1. Значения относительной среднеквадратической ошибки и относительной гармонической ошибки малы лишь при отношении ω_0/ω , значительно большем двух, т. е. величины, соответствующей условию теоремы В. А. Котельникова.

2. При использовании восстанавливающего элемента нулевого порядка и гармоническом входном воздействии погрешность численного метода интегрирования способом прямоугольников меньше, чем способом трапеций.

3. Доля среднеквадратической погрешности, вызванная высокочастотными составляющими (боковыми частотами) спектра дискретного сигнала, мала и при отно-

Т а б л и ц а 5.4

T, сек	ω_0/ω	Способ прямо- угольников		Способ трапеций		
		Расчетная формула ошибки				
		(18.31)	(18.43)	(18.45)	(18.46)	(18.45)–(18.46)
0,1	20	0	0,0535	0,0651	0,0123	0,0528
0,2	10	0	0,110	0,154	0,0489	0,105
0,3	6,66	0	0,173	0,263	0,109	0,154
0,4	5	0	0,246	0,390	0,191	0,199
0,5	4	0	0,335	0,530	0,293	0,237

шении ω_0/ω , значительно большем двух, может не приниматься во внимание. Это в отдельных случаях может существенно упростить исследование дискретной системы.

Рассмотренные в настоящей главе примеры позволяют утверждать, что:

1. Для удовлетворительного приближения выходной переменной дискретной системы к выходной переменной желаемой непрерывной системы (т. е. для обеспечения малой величины погрешности, обусловленной дискретностью процесса управления) отношение частоты квантования к частоте входного сигнала должно быть существенно (часто на порядок) больше двух, т. е. величины, отвечающей условию теоремы В. А. Котельникова.

2. При учете неидеальности процесса восстановления дискретных величин и запаздывания, вносимого цифровой вычислительной машиной, оказывается, что в отдельных случаях менее совершенные численные методы являются наиболее точными. Так, например, при использовании восстанавливающего устройства нулевого порядка в рассмотренных случаях более точным оказался метод интегрирования способом прямоугольников.

**АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД СИНТЕЗА
ОПТИМАЛЬНЫХ ДИСКРЕТНЫХ
АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Существующие методы синтеза оптимальных дискретных систем при случайных воздействиях основаны на тех же принципах, что и методы синтеза непрерывных систем. Наибольшее развитие получил метод синтеза с помощью частотно-спектральных представлений [62, 31, 52, 63, 71], который по своей сущности близок к классическому способу решения задачи оптимизации передаточной функции фильтра, предложенному Н. Винером. Метод полиномиальных уравнений, первоначально разработанный для дискретных систем [7], в свою очередь был применен для непрерывных [66].

Алгебраический метод синтеза оптимальных непрерывных систем во временной области [36] распространен и на дискретные системы [30]. В работе [24] предложен алгебраический метод синтеза оптимальных многомерных разомкнутых и замкнутых дискретных систем (метод неопределенных коэффициентов с предварительным определением полюсов). В книге [47] алгебраический метод синтеза непрерывных систем существенно развит для весьма общего случая, путем решения задачи в области изображений. В статье [15] предложен метод оптимизации дискретных систем, аналогичный указанному в работе [47] для систем непрерывных.

Особенность синтеза оптимальных дискретных систем заключается в том, что минимизация дисперсии может осуществляться для ошибки в моменты съема информации, в произвольные моменты внутри интервала дискретности, а также для огибающей ошибки. Саму ошибку можно рассматривать как по отношению к выходной переменной дискретной преобразующей (желаемой) системы, так и по отношению к непрерывной.

Решение задачи синтеза дискретного корректирующего устройства для разомкнутой и замкнутой систем в

совокупности с указанными выше обстоятельствами делает проблему синтеза дискретных и цифровых автоматических систем достаточно многоплановой. Некоторые вопросы, относящиеся к решению этой проблемы, изложены в настоящей главе. Во всех случаях задача синтеза решается алгебраическим методом в области z -изображений на основе процедуры решения, предложенной в статье [15].

В первом параграфе этой главы получены формулы, необходимые для определения статистических характеристик ошибки дискретной системы по отношению к выходной переменной желаемой системы как дискретной, так и непрерывной. В качестве таких характеристик рассматриваются: дисперсия ошибки, начальный момент второго порядка ошибки и дисперсия огибающей ошибки. Для вывода указанных формул используются изображения статистических характеристик и передаточные функции синтезируемой и желаемой систем. Во втором параграфе этой главы излагается способ определения оптимальной передаточной функции разомкнутой дискретной системы из условий обеспечения минимума дисперсии ошибки, ее начального момента второго порядка и дисперсии огибающей ошибки. Задача решается исходя из предположения, что передаточная функция желаемой системы имеет полюсы произвольной кратности. В последнем параграфе рассмотрена задача синтеза оптимальной передаточной функции дискретного корректирующего устройства замкнутой системы, обеспечивающей наилучшее приближение выходной переменной системы к желаемому непрерывному процессу, исходя из минимума дисперсии ошибки и дисперсии ее огибающей. Решение дано для случаев, когда полезный сигнал и помеха приложены к одной или различным точкам замкнутой системы.

§ 19. Определение статистических характеристик ошибки дискретной автоматической системы

В этом параграфе будут получены формулы для определения статистических характеристик ошибки дискретной системы по отношению к выходной переменной желаемой (идеальной) системы. В качестве последней

будут рассмотрены как дискретная, так и непрерывная системы, преобразующие непрерывный полезный сигнал в соответствии с некоторым дискретным или непрерывным желаемым оператором. Для определения характеристик ошибки будем пользоваться не частотными методами, а так же, как и выше, методами z -преобразования и формулами, полученными в предыдущих главах.

1. Определение статистических характеристик ошибки по отношению к выходной переменной желаемой дискретной системы. Положим, что заданы стационарные случайные функции $x(t)$ и $v(t)$, являющиеся соответственно управляющим воздействием (полезным сигналом) и возмущающим воздействием (помехой). В результате процесса выборки на вход дискретной системы с шагом T поступают дискретные последовательности $x[nT]$ и $v[nT]$. Импульсные переходные функции преобразующей (желаемой) и искомой систем обозначим, так же как и выше, через $h[(n + \gamma)T]$ и $g[(n + \gamma)T]$, а их передаточные функции — через $H^*(z, \gamma)$ и $G^*(z, \gamma)$. Ошибка воспроизведения заданного сигнала (см. рис. 1.21)

$$\varepsilon[(n + \gamma)T] = \sum_{m=0}^n g[(n + \gamma - m)T] (x[mT] + v[mT]) - \sum_{m=0}^n h[(n + \gamma - m)T] x[mT]. \quad (19.1)$$

Положим, что математические ожидания управляющего и возмущающего воздействий равны нулю. Статистической характеристикой ошибки в этом случае будет дисперсия $D_\varepsilon[(n + \gamma)T]$. Выразим дисперсию ошибки $D_\varepsilon[\gamma T]$ в установившемся режиме с помощью передаточных функций $H^*(z, \gamma)$, $G^*(z, \gamma)$ и z -изображений статистических характеристик случайных процессов $x[nT]$ и $v[nT]$.

Воспользуемся для этого приемом, изложенным в главе IV, — определим зависимость дисперсии ошибки от времени $D_\varepsilon[(n + \gamma)T]$, найдем ее z -изображение $D_\varepsilon^*(z, \gamma)$ и, пользуясь теоремой z -преобразования о конечном значении, получим $D_\varepsilon[\gamma T]$.

Из выражения (19.1) находим

$$\begin{aligned}
 D_{\varepsilon} [(n + \gamma) T] &= M \{ \varepsilon^2 [(n + \gamma) T] \} = \\
 &= \sum_{m=0}^n \sum_{m_1=0}^n g [(n + \gamma - m) T] g [(n + \gamma - m_1) T] \times \\
 &\times \{ K_x [vT] + K_{xv} [vT] + K_{vx} [vT] + K_v [vT] \} - \\
 &- \sum_{m=0}^n \sum_{m_1=0}^n h [(n + \gamma - m) T] g [(n + \gamma - m_1) T] \times \\
 &\times \{ K_x [vT] + K_{xv} [vT] \} - \sum_{m=0}^n \sum_{m_1=0}^n g [(n + \gamma - m) T] \times \\
 &\times h [(n + \gamma - m_1) T] \{ K_x [vT] + K_{vx} [vT] \} + \\
 &+ \sum_{m=0}^n \sum_{m_1=0}^n h [(n + \gamma - m) T] h [(n + \gamma - m_1) T] K_x [vT], \quad (19.2)
 \end{aligned}$$

где в силу стационарности и стационарной связанности случайных воздействий корреляционные и взаимные корреляционные функции $K_x [vT]$, $K_v [vT]$, $K_{xv} [vT]$ и $K_{vx} [vT]$ зависят от разности $vT = (m - m_1) T$. Для определения $D_{\varepsilon}^*(z, \gamma)$ найдем z -изображение типового члена, входящего в выражение (19.2) и имеющего вид

$$\begin{aligned}
 D [(n + \gamma) T] &= \\
 &= \sum_{m=0}^n \sum_{m_1=0}^n r [(n + \gamma - m) T] q [(n + \gamma - m_1) T] K [vT], \quad (19.3)
 \end{aligned}$$

где

$$K [vT] = \begin{cases} K_1 [vT] & \text{при } v \geq 0, \\ K_2 [vT] & \text{при } v < 0, \end{cases}$$

$$v = m - m_1, \quad K_1(0) = K_2(0) = K(0).$$

Запишем выражение (19.3) в виде (ср. с п. 2 § 10)

$$\begin{aligned}
 D [(n + \gamma) T] &= \\
 &= \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{m_1=m+1}^n r [(n + \gamma - m) T] q [(n + \gamma - m_1) T] \times \\
 &\times K_2 [(m - m_1) T] + \sum_{m_1=0}^n \sum_{m=m_1}^n r [(n + \gamma - m) T] \times \\
 &\times q [(n + \gamma - m_1) T] K_1 [(m - m_1) T] \quad (19.4)
 \end{aligned}$$

и заменим переменные суммирования. В первой сумме, где $m < m_1$ и $\nu < 0$, переменные m_1 и m заменим соответственно через $\nu_1 = -\nu = m_1 - m$ и $\mu_1 = n - m$, а во второй сумме, где $m \geq m_1$ и $\nu \geq 0$, сделаем замену m и m_1 соответственно с помощью соотношений $\nu = m - m_1$ и $\mu = n - m_1$. После преобразований и замены пределов суммирования (подобно тому, как это было сделано в п. 2 § 10) находим

$$D[(n+\gamma)T] = \sum_{\mu=0}^n \left\{ q[(\mu+\gamma)T] \sum_{\nu=0}^{\mu} r[(\mu+\gamma-\nu)T] K_1[\nu T] + \right. \\ \left. + r[(\mu+\gamma)T] \sum_{\nu=0}^{\mu} q[(\mu+\gamma-\nu)T] K_2[-\nu T] - \right. \\ \left. - K(0) q[(\mu+\gamma)T] r[(\mu+\gamma)T] \right\}. \quad (19.5)$$

Заметим, что выражение (19.5) совпадает с (10.34), если в (19.5) принять $q[\dots] = r[\dots] = g[\dots]$ и $K_1[\nu T] = K_2[-\nu T] = K_x[|\nu|T]$. Обозначив

$$\sum_{\nu=0}^{\mu} r[(\mu+\gamma-\nu)T] K_1[\nu T] = p[(\mu+\gamma)T], \quad (19.6)$$

$$\sum_{\nu=0}^{\mu} q[(\mu+\gamma-\nu)T] K_2[-\nu T] = s[(\mu+\gamma)T], \quad (19.7)$$

перепишем выражение (19.5) в виде

$$D[(n+\gamma)T] = \sum_{\mu=0}^n \{ q[(\mu+\gamma)T] p[(\mu+\gamma)T] + \\ + r[(\mu+\gamma)T] s[(\mu+\gamma)T] - K(0) q[(\mu+\gamma)T] r[(\mu+\gamma)T] \} \quad (19.8)$$

Определим теперь z -изображение $D^*(z, \gamma)$ дисперсии $D[(n+\gamma)T]$, воспользовавшись ее выражением из (19.8)

$$\mathcal{Z}_{\gamma} \{ D[(n+\gamma)T] \} = D^*(z, \gamma) = \\ = \frac{z}{z-1} \mathcal{Z}_{\gamma} \{ q[(\mu+\gamma)T] p[(\mu+\gamma)T] + \\ + r[(\mu+\gamma)T] s[(\mu+\gamma)T] - K(0) q[(\mu+\gamma)T] r[(\mu+\gamma)T] \}. \quad (19.9)$$

Из соотношений (19.6) и (19.7) имеем

$$\mathcal{L}_\gamma \{p[(\mu + \gamma)T]\} = R^*(z, \gamma) F_1^*(z), \quad (19.10)$$

$$\mathcal{L}_\gamma \{s[(\mu + \gamma)T]\} = Q^*(z, \gamma) F_2^*(z), \quad (19.11)$$

где $R^*(z, \gamma)$, $Q^*(z, \gamma)$, $F_1^*(z)$ и $F_2^*(z)$ — соответственно изображения функций $r[(n + \gamma)T]$, $q[(n + \gamma)T]$, $K_1[nT]$ и $K_2[-nT]$. Изображение правой части равенства (19.9) найдем с помощью теоремы z -преобразования об изображении произведения оригиналов (см. п. 1 § 10). С учетом выражений (19.10) и (19.11) находим

$$D^*(z, \gamma) = \frac{z}{2\pi j(z-1)} \oint_{\Gamma_1} [Q^*(w, \gamma) R^*(zw^{-1}, \gamma) F_1^*(zw^{-1}) + \\ + R^*(w, \gamma) Q^*(zw^{-1}, \gamma) F_2^*(zw^{-1}) - \\ - K(0) Q^*(w, \gamma) R^*(zw^{-1}, \gamma)] w^{-1} dw, \quad (19.12)$$

где Γ_1 — контур радиуса $e^{a_1 T}$, $a_1 > \max[c_q, c_r]$, c_q, c_r — показатели роста функций $q[(n + \gamma)T]$, $r[(n + \gamma)T]$. Если в формуле (19.8) поменять местами сомножители, стоящие под знаком суммы, то вместо выражения (19.12) получаем

$$D^*(z, \gamma) = \frac{z}{2\pi j(z-1)} \oint_{\Gamma_2} [R^*(w, \gamma) F_1^*(w) Q^*(zw^{-1}, \gamma) + \\ + Q^*(w, \gamma) F_2^*(w) R^*(zw^{-1}, \gamma) - \\ - K(0) R^*(w, \gamma) Q^*(zw^{-1}, \gamma)] w^{-1} dw, \quad (19.13)$$

где Γ_2 — контур радиуса $e^{a_2 T}$, $a_2 > \max[c_p, c_s, c_r]$, c_p, c_s — показатели роста функций $p[(n + \gamma)T]$, $s[(n + \gamma)T]$. Примем в выражениях (19.12) и (19.13) вместо контуров интегрирования Γ_1 и Γ_2 контур Γ с радиусом e^{aT} , где $a = \max[a_1, a_2]$ и сложим эти выражения. В результате получаем

$$D^*(z, \gamma) = \frac{z}{4\pi j(z-1)} \oint_{\Gamma} \{R^*(w, \gamma) Q^*(zw^{-1}, \gamma) \times \\ \times [F_1^*(w) + F_2^*(zw^{-1}) - K(0)] + Q^*(w, \gamma) R^*(zw^{-1}, \gamma) \times \\ \times [F_1^*(zw^{-1}) + F_2^*(w) - K(0)]\} w^{-1} dw. \quad (19.14)$$

Используем последнее выражение для определения изображения дисперсии ошибки $D_e^*(z, \gamma)$, применив его

к равенству (19.2). Для этого нужно заменить соответствующим образом изображения $R^*(...)$ и $Q^*(...)$ на $G^*(...)$ и $H^*(...)$ и учесть следующие свойства корреляционных и взаимных корреляционных функций. Корреляционные функции $K_x[vT]$ и $K_v[vT]$ являются четными функциями, поэтому

$$K_x[-vT] = K_x[vT], \quad K_v[-vT] = K_v[vT].$$

Следовательно, выражения в квадратных скобках, входящие в формулу (19.14) для корреляционных функций, можно записать в виде

$$\Phi_x^*(z, \omega) = F_x^*(\omega) + F_x^*(z\omega^{-1}) - K_x(0), \quad (19.15)$$

$$\Phi_v^*(z, \omega) = F_v^*(\omega) + F_v^*(z\omega^{-1}) - K_v(0). \quad (19.16)$$

Учитывая свойства взаимных корреляционных функций $K_{xv}[vT]$ и $K_{vx}[vT]$ (7.34)

$$K_{xv}[-vT] = K_{vx}[vT], \quad K_{vx}[-vT] = K_{xv}[vT],$$

выражение в первых квадратных скобках формулы (19.14) для $K_{xv}[vT]$ и во вторых для $K_{vx}[vT]$ можно записать в виде

$$\Phi_{xv}^*(z, \omega) = F_{xv}^*(\omega) + F_{vx}^*(z\omega^{-1}) - K_{xv}(0); \quad (19.17)$$

аналогично выражение в первых скобках для $K_{xv}[vT]$ и во вторых для $K_{vx}[vT]$ дают

$$\Phi_{vx}^*(z, \omega) = F_{vx}^*(\omega) + F_{xv}^*(z\omega^{-1}) - K_{vx}(0) \quad (19.18)$$

(выше было принято, что $K_{xv}(0) = K_{vx}(0)$). Учитывая соотношения (19.14) — (19.18), из равенства (19.2) находим

$$\begin{aligned} D_\varepsilon^*(z, \gamma) = & \frac{z}{2\pi j(z-1)} \oint_{\Gamma} \{G^*(\omega, \gamma) G^*(z\omega^{-1}, \gamma) \times \\ & \times [\Phi_x^*(z, \omega) + \Phi_{xv}^*(z, \omega) + \Phi_{vx}^*(z, \omega) + \Phi_v^*(z, \omega)] - \\ & - H^*(\omega, \gamma) G^*(z\omega^{-1}, \gamma) [\Phi_x^*(z, \omega) + \Phi_{xv}^*(z, \omega)] - \\ & - G^*(\omega, \gamma) H^*(z\omega^{-1}, \gamma) [\Phi_x^*(z, \omega) + \Phi_{vx}^*(z, \omega)] + \\ & + H^*(\omega, \gamma) H^*(z\omega^{-1}, \gamma) \Phi_x^*(z, \omega)\} \omega^{-1} d\omega. \quad (19.19) \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что в формуле (19.19) функции подынтегрального выражения, зависящие от переменной ω , имеют полюсы, расположенные внутри контура Γ , а функции, зависящие от переменной $z\omega^{-1}$, вне этого кон-

тура (ср. с п. 1 § 10). Следовательно, если бы мы вычислили контурный интеграл в (19.18), то получили бы функцию переменного z , полюсы которой также были бы расположены внутри контура с тем же радиусом.

Уточним расположение полюсов функций, входящих в (19.19), и определим, тем самым, радиус контура Γ . Изображения $G^*(\omega, \gamma)$ и $H^*(\omega, \gamma)$, отвечающие устойчивым системам, имеют полюсы, расположенные внутри круга единичного радиуса. Изображения корреляционных и взаимных корреляционных функций $F_x^*(\omega)$, $F_v^*(\omega)$, $F_{xv}^*(\omega)$ и $F_{vx}^*(\omega)$ (в силу известных свойств этих функций) имеют полюсы, расположенные также внутри круга единичного радиуса. Таким образом, в качестве контура интегрирования Γ может быть принята окружность единичного радиуса; следовательно, оригиналу, соответствующему изображению $(z-1)D_\varepsilon^*(z, \gamma)$, отвечает отрицательная абсцисса сходимости. Поэтому для определения дисперсии установившейся ошибки можно воспользоваться теоремой о конечном значении

$$D_\varepsilon[\gamma T] = \lim_{n \rightarrow \infty} D_\varepsilon[(n + \gamma)T] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)D_\varepsilon^*(z, \gamma). \quad (19.20)$$

Найдя указанный предел с помощью выражения (19.19) и заменив обозначение переменной ω на z , получаем

$$D_\varepsilon[\gamma T] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \{G^*(z, \gamma)G^*(z^{-1}, \gamma)[\Phi_x^*(z) + \Phi_{xv}^*(z) + \Phi_{vx}^*(z) + \Phi_v^*(z)] - H^*(z, \gamma)G^*(z^{-1}, \gamma)[\Phi_x^*(z) + \Phi_{xv}^*(z)] - G^*(z, \gamma)H^*(z^{-1}, \gamma)[\Phi_x^*(z) + \Phi_{vx}^*(z)] + H^*(z, \gamma)H^*(z^{-1}, \gamma)\Phi_x^*(z)\} z^{-1} dz, \quad (19.21)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Phi_x^*(z) &= F_x^*(z) + F_x^*(z^{-1}) - K_x(0), \\ \Phi_{xv}^*(z) &= F_{xv}^*(z) + F_{vx}^*(z^{-1}) - K_{xv}(0), \\ \Phi_{vx}^*(z) &= F_{vx}^*(z) + F_{xv}^*(z^{-1}) - K_{vx}(0), \\ \Phi_v^*(z) &= F_v^*(z) + F_v^*(z^{-1}) - K_v(0). \end{aligned} \right\} \quad (19.22)$$

Заметим, что с помощью формулы (19.21) дисперсия выражается через передаточные функции и изображения статистических характеристик воздействия. Если положить $z = e^{j\omega T}$, то из формулы (19.21) следует известное выражение дисперсии через частотные характеристики

и спектральные плотности воздействий [31, 62]. Таким образом, формула (19.20) обобщает указанное выражение на плоскость переменной $z = e^{sT}$.

Если бы для определения изображения дисперсии ошибки $D_e^*(z, \gamma)$ вместо формулы (19.14) мы воспользовались лишь формулой (19.12), применив ее к выражению (19.2), то получили бы, что

$$D_e^*(z, \gamma) = \frac{z}{2\pi j(z-1)} \oint_{\Gamma_1} \{G^*(w, \gamma) G^*(zw^{-1}, \gamma) \times \\ \times [2F_x^*(zw^{-1}) + 2F_{xv}^*(zw^{-1}) + 2F_{vx}^*(zw^{-1}) + \\ + 2F_v^*(zw^{-1}) - K_x(0) - K_{xv}(0) - K_{vx}(0) - K_v(0)] - \\ - H^*(w, \gamma) G^*(zw^{-1}, \gamma) [2F_x^*(zw^{-1}) + \\ + 2F_{xv}^*(zw^{-1}) - K_x(0) - K_{xv}(0)] - G^*(w, \gamma) H^*(zw^{-1}, \gamma) \times \\ \times [2F_x^*(zw^{-1}) + 2F_{vx}^*(zw^{-1}) - K_x(0) - K_{vx}(0)] + \\ + H^*(w, \gamma) H^*(zw^{-1}, \gamma) [2F_x^*(zw^{-1}) - K_x(0)]\} w^{-1} dw. \quad (19.23)$$

Формулу (19.23) удобно использовать для нахождения зависимости дисперсии ошибки от времени в переходном режиме (ср. с (10.14)). Изображение $D_e^*(z, \gamma)$ в этом случае определяется формулой, аналогичной (10.19), через полюсы передаточных функций $G^*(z, \gamma)$ и $H^*(z, \gamma)$. Выражение (19.23) может быть преобразовано к виду выражения (19.19). Для этого заменим в (19.23) переменную интегрирования с помощью равенства $zw^{-1} = w_1$, после чего индекс опустим. Сумма полученного таким образом выражения и (19.23) дает (19.19) (это преобразование эквивалентно переходу от (19.12) и (19.13) к (19.14)).

Если к формуле (19.23) применить предельный переход (19.20), то получаем

$$D_e[\gamma T] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \{G^*(z, \gamma) G^*(z^{-1}, \gamma) [2F_x^*(z^{-1}) + 2F_{xv}^*(z^{-1}) + \\ + 2F_{vx}^*(z^{-1}) + 2F_v^*(z^{-1}) - K_x(0) - K_{xv}(0) - K_{vx}(0) - K_v(0)] - \\ - H^*(z, \gamma) G^*(z^{-1}, \gamma) [2F_x^*(z^{-1}) + 2F_{xv}^*(z^{-1}) - K_x(0) - K_{xv}(0)] - \\ - G^*(z, \gamma) H^*(z^{-1}, \gamma) [2F_x^*(z^{-1}) + 2F_{vx}^*(z^{-1}) - K_x(0) - K_{vx}(0)] + \\ + H^*(z, \gamma) H^*(z^{-1}, \gamma) [2F_x^*(z^{-1}) - K_x(0)]\} z^{-1} dz. \quad (19.24)$$

Заменяя в (19.24) z с помощью равенства $z = z_1^{-1}$, опустив индекс и сложив полученное выражение с (10.24), находим (19.21).

Рассмотрим теперь случай, когда воздействия $x(t)$ и $v(t)$ имеют отличные от нуля математические ожидания m_x и m_v . В этом случае статистической характеристикой ошибки (19.1) будет начальный момент второго порядка $\Pi_e[(n + \gamma)T]$, который определяется выражением, аналогичным (19.2), с тем отличием, что в него вместо корреляционных и взаимных корреляционных функций соответственно входят начальные и взаимные начальные моменты второго порядка $\Pi_x[vT]$, $\Pi_v[vT]$, $\Pi_{xv}[vT]$ и $\Pi_{vx}[vT]$. Последние, в соответствии с формулами (7.21) и (7.22), определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} \Pi_x[vT] &= m_x^2 + K_x[vT], & \Pi_v[vT] &= m_v^2 + K_v[vT], \\ \Pi_{xv}[vT] &= m_x m_v + K_{xv}[vT], & \Pi_{vx}[vT] &= m_v m_x + K_{vx}[vT]. \end{aligned} \right\} \quad (19.25)$$

Их изображения

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_x^*(z) &= m_x^2 \frac{z}{z-1} + F_x^*(z), & \bar{F}_v^*(z) &= m_v^2 \frac{z}{z-1} + F_v^*(z), \\ \bar{F}_{xv}^*(z) &= m_x m_v \frac{z}{z-1} + F_{xv}^*(z), & \bar{F}_{vx}^*(z) &= m_v m_x \frac{z}{z-1} + F_{vx}^*(z). \end{aligned} \right\} \quad (19.26)$$

Формула для изображения $\bar{F}_e^*(z, \gamma)$ начального момента второго порядка ошибки $\Pi_e[(n + \gamma)T]$ находится аналогично (19.19) с использованием выражений (19.26)

$$\begin{aligned} \bar{F}_e^*(z, \gamma) &= \frac{z}{2\pi j(z-1)} \oint_{\Gamma_1} \{G^*(w, \gamma) G^*(z\omega^{-1}, \gamma) \times \\ &\times [\bar{\Phi}_x^*(z, w) + \bar{\Phi}_{xv}^*(z, w) + \bar{\Phi}_{vx}^*(z, w) + \bar{\Phi}_v^*(z, w)] - \\ &- H^*(w, \gamma) G^*(z\omega^{-1}, \gamma) [\bar{\Phi}_x^*(z, w) + \bar{\Phi}_{xv}^*(z, w)] - \\ &- G^*(w, \gamma) H^*(z\omega^{-1}, \gamma) [\bar{\Phi}_x^*(z, w) + \bar{\Phi}_{vx}^*(z, w)] + \\ &+ H^*(w, \gamma) H^*(z\omega^{-1}, \gamma) \bar{\Phi}_x^*(z, w)\} \omega^{-1} d\omega, \quad (19.27) \end{aligned}$$

где

$$\bar{\Phi}_x^*(z, \omega) = m_x^2 M^*(z, \omega) + \Phi_x^*(z, \omega), \quad (19.28)$$

$$\bar{\Phi}_{xv}^*(z, \omega) = m_x m_v M^*(z, \omega) + \Phi_{xv}^*(z, \omega), \quad (19.29)$$

$$\bar{\Phi}_{vx}^*(z, \omega) = m_v m_x M^*(z, \omega) + \Phi_{vx}^*(z, \omega), \quad (19.30)$$

$$\bar{\Phi}_v^*(z, \omega) = m_v^2 M^*(z, \omega) + \Phi_v^*(z, \omega), \quad (19.31)$$

$$M^*(z, \omega) = \frac{\omega}{\omega - 1} + \frac{z\omega^{-1}}{z\omega^{-1} - 1} - 1 = \frac{z - 1}{(\omega - 1)(z\omega^{-1} - 1)}. \quad (19.32)$$

В формуле (19.27) контур интегрирования Γ_3 имеет радиус $e^{a_3 T}$, где $a_3 > 0$, т. е. радиус этого контура больше единицы. Указанная особенность связана с тем, что функция $M^*(z, \omega)$, входящая в подынтегральное выражение, имеет полюс, расположенный в точке $\omega = 1$ на плоскости комплексной переменной ω . Подставим в (19.27) выражения (19.28) — (19.32) и учтем формулу (19.19). В результате, после простых преобразований, находим

$$\begin{aligned} \bar{F}_\varepsilon^*(z, \gamma) &= D_\varepsilon^*(z, \gamma) + \\ &+ \frac{z}{2\pi j(z-1)} \oint_{\Gamma_3} M^*(z, \omega) [G^*(\omega, \gamma)(m_x + m_v) - H^*(\omega, \gamma) m_x] \times \\ &\times [G^*(z\omega^{-1}, \gamma)(m_x + m_v) - H^*(z\omega^{-1}, \gamma) m_x] \omega^{-1} d\omega. \end{aligned} \quad (19.33)$$

Изображению $(z - 1)\bar{F}_\varepsilon^*(z, \gamma)$, полученному путем умножения правой части (19.33) на $z - 1$, отвечает оригинал, имеющий показатель роста, больший нуля. Так как теорема о конечном значении применима лишь в случае, когда точка $z = 1$ лежит в области существования изображения $\bar{F}_\varepsilon^*(z, \gamma)$, то необходимо взять нижнее значение показателя роста, равное нулю (что отвечает нулевой абсциссе сходимости указанного выше оригинала). В результате контур Γ_3 превращается в окружность единичного радиуса Γ , на которой расположен полюс функции $M^*(z, \omega)$.

Чтобы преодолеть это затруднение, прибегнем к традиционному приему [47, 63], с помощью которого искусственно переместим полюс функции $M^*(z, \omega)$ внутрь

единичного круга. Для этого умножим первые члены правых частей равенств (19.25) на затухающую экспоненту $e^{-\xi t}$, тогда вместо функции $M^*(z, \omega)$ (19.32) получим

$$M^*(z, \omega, \xi) = \frac{\omega}{\omega - \xi} + \frac{z\omega^{-1}}{z\omega^{-1} - \xi} - 1 = \frac{z - \xi^2}{(\omega - \xi)(z\omega^{-1} - \xi)}, \quad (19.34)$$

где

$$\xi = e^{-\zeta T} \quad (\text{при } \zeta \rightarrow 0 \quad \xi \rightarrow 1).$$

В результате в выражении (19.27), определяющем теперь изображение $\bar{F}_\varepsilon^*(z, \gamma, \xi)$, где

$$\lim_{\xi \rightarrow 1} \bar{F}_\varepsilon^*(z, \gamma, \xi) = \bar{F}_\varepsilon^*(z, \gamma), \quad (19.35)$$

можно принять вместо Γ_3 контур единичного радиуса Γ . В этом выражении полюсы всех подынтегральных функций расположены внутри контура Γ . Применяв теорему о конечном значении, находим

$$\Pi_\varepsilon[\gamma T, \xi] = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_\varepsilon[(n + \gamma)T, \xi] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \bar{F}_\varepsilon^*(z, \gamma, \xi). \quad (19.36)$$

Запишем выражение для $\Pi_\varepsilon[\dot{\gamma}T, \xi]$ в явном виде; оно потребует, так же как и (19.21), для дальнейшего изложения:

$$\begin{aligned} \Pi_\varepsilon[\dot{\gamma}T, \xi] &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \{G^*(z, \gamma) G^*(z^{-1}, \gamma) \times \\ &\times [\Phi_x^*(z) + \Phi_{xv}^*(z) + \Phi_{vx}^*(z) + \Phi_v^*(z) + (m_x + m_v)^2 M^*(z, \xi)] - \\ &- H^*(z, \gamma) G^*(z^{-1}, \gamma) [\Phi_x^*(z) + \Phi_{xv}^*(z) + m_x(m_x + m_v) M^*(z, \xi)] - \\ &- G^*(z, \gamma) H^*(z^{-1}, \gamma) [\Phi_x^*(z) + \Phi_{vx}^*(z) + m_x(m_x + m_v) M^*(z, \xi)] + \\ &+ H^*(z, \gamma) H^*(z^{-1}, \gamma) [\Phi_x^*(z) + m_x^2 M^*(z, \xi)]\} z^{-1} dz, \quad (19.37) \end{aligned}$$

где

$$M^*(z, \xi) = \frac{z}{z - \xi} + \frac{z^{-1}}{z^{-1} - \xi} - 1 = \frac{1 - \xi^2}{(z - \xi)(z^{-1} - \xi)}. \quad (19.38)$$

Проанализируем теперь выражение для математического ожидания ошибки. Для этого вернемся к выражению (19.33). Так как нас в дальнейшем будет интересовать математическое ожидание ошибки в установившемся

режиме, то найдем изображение квадрата зависимости математического ожидания ошибки от времени (которое выражается вторым членом (19.33)) путем определения вычета лишь относительно полюса функции $M^*(z, \omega)$, расположенного в точке $\omega = 1$. Учитывая формулу (19.32), находим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\gamma \{m_\varepsilon^2[(n + \gamma)T]\} = \\ = \frac{z}{z-1} [G^*(1, \gamma)(m_x + m_v) - H^*(1, \gamma)m_x] \times \\ \times [G^*(z, \gamma)(m_x + m_v) - H^*(z, \gamma)m_x]. \end{aligned} \quad (19.39)$$

Отсюда, с помощью теоремы о конечном значении, получаем

$$\begin{aligned} m_\varepsilon^2[\gamma T] = \lim_{n \rightarrow \infty} m_\varepsilon^2[(n + \gamma)T] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \mathcal{L}_\gamma \{m_\varepsilon^2[(n + \gamma)T]\} = \\ = [G^*(1, \gamma)(m_x + m_v) - H^*(1, \gamma)m_x]^2, \end{aligned} \quad (19.40)$$

т. е.

$$m_\varepsilon[\gamma T] = G^*(1, \gamma)(m_x + m_v) - H^*(1, \gamma)m_x \quad (19.41)$$

(заметим, что здесь мы применили теорему о конечном значении после того, как определили изображение (19.39) в явном виде). Если функция $G^*(z, \gamma)$ удовлетворяет условию

$$G^*(1, \gamma) = \frac{m_x}{m_x + m_v} H^*(1, \gamma), \quad (19.42)$$

то $m_\varepsilon[\gamma T] = 0$. Таким образом, формула (19.42) выражает условие несмещенности математического ожидания ошибки (ср. с (14.19) — (14.21)). Сумма выражений (19.23) и (19.39) дает формулу, которая может быть использована для определения зависимости от времени начального момента второго порядка ошибки.

В заключение этого пункта приведем формулу для определения дисперсии огибающей ошибки \bar{D}_ε , где

$$\bar{D}_\varepsilon = \int_0^1 D_\varepsilon[\gamma T] d\gamma. \quad (19.43)$$

В этом случае удобно передаточную функцию $G^*(z, \gamma)$ представить как произведение (2.40)

$$G^*(z, \gamma) = D^*(z)W^*(z, \gamma), \quad (19.44)$$

выделив в явном виде передаточную функцию цифрового фильтра $D^*(z)$ (в случае замкнутой системы это $C^*(z)$ — см. (2.54), (2.56)). В связи с выражением (19.44) отметим здесь следующее обстоятельство. Если передаточная функция $D^*(z)$ реализуется с помощью цифровой машины, то часто возникает необходимость учета запаздывания на один такт, вносимого работой машины в реальном времени (см. п. 2 § 2). Для этого, при решении задачи синтеза, удобно элемент чистого запаздывания отнести к объекту, т. е. умножить передаточную функцию $W^*(z, \gamma)$ на z^{-1} . После того, как передаточная функция будет определена, элемент запаздывания нужно вновь отнести к машине, т. е. умножить $D^*(z)$ на z^{-1} , оставив передаточную функцию объекта в первоначальном виде $W^*(z, \gamma)$ (см. п. 4 § 20, пример 3).

Подставив (19.44) в (19.21) и выполнив операцию усреднения по γ , находим \bar{D}_ε :

$$\begin{aligned} \bar{D}_\varepsilon = & \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \{D^*(z) D^*(z^{-1}) \overline{W^*(z, \gamma) W^*(z^{-1}, \gamma)} \times \\ & \times [\Phi_x^*(z) + \Phi_v^*(z) + \Phi_{xv}^*(z) + \Phi_{vx}^*(z)] - \\ & - D^*(z^{-1}) \overline{H^*(z, \gamma) W^*(z^{-1}, \gamma)} [\Phi_x^*(z) + \Phi_{xv}^*(z)] - \\ & - D^*(z) \overline{W^*(z, \gamma) H^*(z^{-1}, \gamma)} [\Phi_x^*(z) + \Phi_{vx}^*(z)] + \\ & + \overline{H^*(z, \gamma) H^*(z^{-1}, \gamma)} \Phi_x^*(z)\} z^{-1} dz. \quad (19.45) \end{aligned}$$

Аналогично из (19.37) можно получить формулу для начального момента второго порядка огибающей ошибки

$$\bar{\Pi}_\varepsilon(\xi) = \int_0^1 \Pi_\varepsilon[\gamma T, \xi] d\gamma. \quad (19.46)$$

2. Определение статистических характеристик ошибки по отношению к выходной переменной непрерывной желаемой системы. Обозначим передаточную функцию непрерывной системы, преобразующей полезный сигнал $x(t)$ в желаемый сигнал $y(t)$, через $H(s)$. Будем рассматривать сразу установившиеся выходные переменные

непрерывной и дискретной систем

$$y_n [(n + \gamma) T] = \int_0^{\infty} h(\tau) x [(n + \gamma) T - \tau] d\tau, \quad (19.47)$$

$$y_d [(n + \gamma) T] = \sum_{m=0}^{\infty} g [(m + \gamma) T] \{x [(n - m) T] + v [(n - m) T]\}, \quad (19.48)$$

где $t = (n + \gamma) T$. Полагая, что математические ожидания входных воздействий равны нулю, имеем (см. рис. 1.20)

$$\begin{aligned} D_e [\gamma T] &= M \{(y_n [(n + \gamma) T] - y_d [(n + \gamma) T])^2\} = \\ &= M \{y_n^2 [(n + \gamma) T]\} - M \{y_d [(n + \gamma) T] y_n [(n + \gamma) T]\} - \\ &- M \{y_n [(n + \gamma) T] y_d [(n + \gamma) T]\} + M \{y_d^2 [(n + \gamma) T]\}. \end{aligned} \quad (19.49)$$

Найдем составляющие дисперсии ошибки (19.49), используя для этого формулы (19.47) и (19.48):

$$\begin{aligned} M \{y_d^2 [(n + \gamma) T]\} &= \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} g [(m + \gamma) T] g [(m_1 + \gamma) T] \{K_x [(m - m_1) T] + \\ &+ K_{xv} [(m - m_1) T] + K_{vx} [(m - m_1) T] + K_v [(m - m_1) T]\}. \end{aligned} \quad (19.50)$$

Взаимная корреляционная функция некоторых случайных функций $a(t)$ и $b(t)$

$$K_{ab} [(m - m_1) T] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \Phi_{ab}^*(z) z^{m-m_1-1} dz, \quad (19.51)$$

где

$$\Phi_{ab}^*(z) = F_{ab}^*(z) + F_{ba}^*(z^{-1}) - K_{ab}(0).$$

Здесь $F_{ab}^*(z)$, $F_{ba}^*(z)$ — z -изображения корреляционных функций $K_{ba} [\gamma T]$, $K_{ab} [\gamma T]$ при $\gamma \geq 0$, ($K_{ab}(0) = K_{ba}(0)$). Используя формулу (19.51), из выражения (19.50) находим

$$\begin{aligned} M \{y_d^2 [(n + \gamma) T]\} &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} G^*(z, \gamma) G^*(z^{-1}, \gamma) \times \\ &\times [\Phi_x^*(z) + \Phi_{xv}^*(z) + \Phi_{vx}^*(z) + \Phi_v^*(z)] z^{-1} dz. \end{aligned} \quad (19.52)$$

Далее,

$$M\{y_n^2[(n + \gamma)T]\} = \int_0^\infty h(\tau) \int_0^\infty h(\tau_1) K_x(\tau - \tau_1) d\tau d\tau_1. \quad (19.53)$$

Так как

$$K_{ab}(\tau - \tau_1) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \Phi_{ab}(s) e^{(\tau - \tau_1)s} ds, \quad (19.54)$$

где

$$\Phi_{ab}(s) = F_{ab}(s) + F_{ba}(-s),$$

а $F_{ab}(s)$, $F_{ba}(s)$ — изображения по Лапласу корреляционных функций $K_{ab}(\tau)$ и $K_{ba}(\tau)$ при $\tau \geq 0$, то из равенства (19.53) находим

$$M\{y_n^2[(n + \gamma)T]\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} H(s) H(-s) \Phi_{xx}(s) ds. \quad (19.55)$$

Для перехода от переменной s к z в последнем выражении воспользуемся формулами (19.51) и (19.54) при $m = m_1 = \tau = \tau_1 = 0$. В результате получаем

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \Phi_{ab}(s) ds = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \mathcal{L}\{\Phi_{ab}(s)\} z^{-1} dz. \quad (19.56)$$

Аналогичным образом может быть получено выражение, связывающее между собой изображения $H(s)H(-s) \times \times \Phi_{xx}(s)$ и $\mathcal{L}\{H(s)H(-s)\Phi_{xx}(s)\}$. В результате из равенства (19.55) находим

$$M\{y_n^2[(n + \gamma)T]\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \mathcal{L}\{H(s)H(-s)\Phi_{xx}(s)\} z^{-1} dz. \quad (19.57)$$

Учитывая соотношение, аналогичное (19.54), получаем

$$\begin{aligned} M\{y_n[(n + \gamma)T] y_n[(n + \gamma)T]\} &= \sum_{m=0}^{\infty} g[(m + \gamma)T] \int_0^\infty h(\tau) \times \\ &\times \{K_x[\tau - (m + \gamma)T] + K_{vx}[\tau - (m + \gamma)T]\} d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} G^*(e^{sT}, \gamma) H(-s) [\Phi_x(s) + \Phi_{vx}(s)] e^{-sT\gamma} ds. \end{aligned} \quad (19.58)$$

Перейдем в выражении (19.58) от переменной s к переменной z . Для этого представим правую часть выражения (19.58) в виде суммы

$$\frac{1}{2\pi j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-j(n-1/2)\omega_0}^{j(n+1/2)\omega_0} G^*(e^{sT}, \gamma) H(-s) [\Phi_x(s) + \Phi_{vx}(s)] e^{-sT\gamma} ds$$

и перейдем от переменной s к переменной p , связанной с s равенством $s = p + jn\omega_0$. Учитывая периодичность функции $G^*(e^{sT}, \gamma)$ вдоль мнимой оси и возвращаясь к старому обозначению переменной интегрирования s , находим

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{-j\frac{\omega_0}{2}}^{j\frac{\omega_0}{2}} G^*(e^{sT}, \gamma) \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(-s - jn\omega_0) \times \\ \times [\Phi_x(s + jn\omega_0) + \Phi_{vx}(s + jn\omega_0)] e^{-(sT+2\pi jn)\gamma} ds.$$

На основании соотношения (14.30) нетрудно видеть, что последнее выражение может быть представлено в виде

$$\frac{1}{2\pi jT} \int_{-j\frac{\omega_0}{2}}^{j\frac{\omega_0}{2}} G^*(e^{sT}, \gamma) \mathcal{Z}_\gamma \{H(-s) [\Phi_x(s) + \Phi_{vx}(s)]\} ds.$$

Переходя далее к переменной $z = e^{sT}$, окончательно находим

$$\begin{aligned} & \mathcal{M} \{y_n[(n + \gamma)T] y_n[(n + \gamma)T]\} = \\ & = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} G^*(z, \gamma) \mathcal{Z}_\gamma \{H(-s) [\Phi_x(s) + \Phi_{vx}(s)]\} z^{-1} dz. \end{aligned} \quad (19.59)$$

Сравнивая выражение (19.59) с формулой (14.38), полученной другим способом, видим, что при $\Phi_{vx}(s) = 0$ и $\gamma = 0$ они совпадают. Подобно выражению (19.59) получаем

$$\begin{aligned} & \mathcal{M} \{y_n[(n + \gamma)T] y_n[(n + \gamma)T]\} = \\ & = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} G^*(z^{-1}, \gamma) \mathcal{Z}_\gamma \{H(s) [\Phi_x(s) + \Phi_{vx}(s)]\} z^{-1} dz. \end{aligned} \quad (19.60)$$

Будем рассматривать общий случай замкнутой системы, когда передаточная функция $G^*(z, \gamma)$ определяется выражением (19.44), где $D^*(z)$ нужно заменить на $C^*(z)$ (см. (2.54), (2.56)). Подставив (19.52), (19.57), (19.59) и (19.60) в формулу (19.49), находим

$$D_\varepsilon[\gamma T] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} [C^*(z) C^*(z^{-1}) \Delta_d^*(z, \gamma) + \Delta_n^*(z) - C^*(z) \Delta_{дн}^*(z, \gamma) - C^*(z^{-1}) \Delta_{нд}^*(z, \gamma)] z^{-1} dz, \quad (19.61)$$

где

$$C^*(z) = D^*(z) [1 + D^*(z) W^*(z)]^{-1},$$

$$\Delta_d^*(z, \gamma) = W^*(z, \gamma) W^*(z^{-1}, \gamma) \times \\ \times [\Phi_x^*(z) + \Phi_{xv}^*(z) + \Phi_{vx}^*(z) + \Phi_v^*(z)],$$

$$\Delta_n^*(z) = \mathcal{L}\{H(s) H(-s) \Phi_x(s)\},$$

$$\Delta_{дн}^*(z, \gamma) = W^*(z, \gamma) \mathcal{L}_\gamma\{H(-s) [\Phi_x(s) + \Phi_{vx}(s)]\},$$

$$\Delta_{нд}^*(z, \gamma) = W^*(z^{-1}, \gamma) \mathcal{L}_\gamma\{H(s) [\Phi_x(s) + \Phi_{xv}(s)]\}.$$

Из выражения (19.61) следует формула для дисперсии огибающей ошибки

$$\bar{D}_\varepsilon = \int_0^1 D_\varepsilon[\gamma T] d\gamma = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} [C^*(z) C^*(z^{-1}) \overline{\Delta_d^*(z, \gamma)} + \Delta_n^*(z) - C^*(z) \overline{\Delta_{дн}^*(z, \gamma)} - C^*(z^{-1}) \overline{\Delta_{нд}^*(z, \gamma)}] z^{-1} dz, \quad (19.62)$$

где черта сверху означает, как и выше, операцию осреднения по γ .

В заключение рассмотрим случай, когда имеется помеха, не приводимая к точке приложения полезного сигнала (задача М. Пелегрэна [38]), — возмущение $u(t)$ на рис. 6.1. Так как (см. рис. 6.1)

$$Y^*(z, \gamma) = C^*(z) W^*(z, \gamma) [X^*(z) + V^*(z)] + \frac{C^*(z)}{D^*(z)} W^*(z, \gamma) U^*(z)$$

и

$$\frac{C^*(z)}{D^*(z)} = 1 - C^*(z) W^*(z),$$

то

$$Y^*(z, \gamma) = C^*(z) W^*(z, \gamma) [X^*(z) + V^*(z) - W^*(z) U^*(z)] + W^*(z, \gamma) U^*(z) \quad (19.63)$$

(для случайных воздействий запись (19.63) носит, конечно, формальный характер). Учитывая (2.56), получаем соотношение, соответствующее (19.63) во временной области:

$$y_d [(n + \gamma) T] = \sum_{m=0}^{\infty} g [(m + \gamma) T] \{x [(n - m) T] + v [(n - m) T] - \sum_{l=0}^{\infty} w [lT] u [(n - m - l) T]\} + \sum_{m=0}^{\infty} w [(m + \gamma) T] u [(n - m) T]. \quad (19.64)$$

Для упрощения записи последующих выражений (без потери общности) положим, что возмущение $u(t)$ не

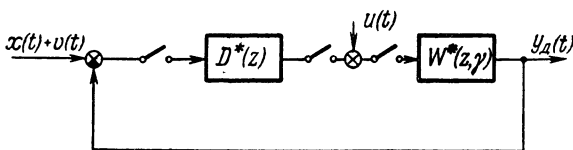


Рис. 6.1.

коррелировано с $x(t)$ и $v(t)$. Тогда с помощью выражения (19.64), аналогично (19.52), находим

$$M \{y_d^2 [(n + \gamma) T]\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \{G^*(z, \gamma) G^*(z^{-1}, \gamma) [\Phi_x^*(z) + \Phi_{xv}^*(z) + \Phi_{vx}^*(z) + \Phi_v^*(z) + W^*(z) W^*(z^{-1}) \Phi_u^*(z)] - 2G^*(z^{-1}, \gamma) W^*(z, \gamma) W^*(z^{-1}) \Phi_u^*(z)\} z^{-1} dz. \quad (19.65)$$

Так как остальные составляющие дисперсии ошибки (19.49) остаются теми же, что и выше, то аналогично (19.61) получаем

$$D_\varepsilon [yT] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} [C^*(z) C^*(z^{-1}) \Delta_d^*(z, \gamma) - 2C^*(z^{-1}) \Delta_u^*(z, \gamma) + \Delta_n^*(z) - C^*(z) \Delta_{dn}^*(z, \gamma) - C^*(z^{-1}) \Delta_{nd}^*(z, \gamma)] z^{-1} dz, \quad (19.66)$$

где

$$\Delta_d^*(z, \gamma) = W^*(z, \gamma) W^*(z^{-1}, \gamma) [\Phi_x^*(z) + \Phi_{xv}^*(z) + \Phi_{vx}^*(z) + \Phi_v^*(z) + W^*(z) W^*(z^{-1}) \Phi_u^*(z)],$$

$$\Delta_u^*(z, \gamma) = W^*(z, \gamma) W^*(z^{-1}, \gamma) W^*(z^{-1}) \Phi_u^*(z),$$

$$\Phi_u^*(z) = F_u^*(z) + F_u^*(z^{-1}) - K_u(0),$$

$$F_u^*(z) = \mathcal{L}\{K_u[\nu T]\} \quad (\nu \geq 0),$$

выражения же для $\Delta_n^*(z)$, $\Delta_{дн}^*(z, \gamma)$ и $\Delta_{нд}^*(z, \gamma)$ те же, что и в (19.61). Дисперсия огибающей ошибки (19.66)

$$\begin{aligned} \bar{D}_\varepsilon = \int_0^1 D_\varepsilon[\gamma T] d\gamma = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} [C^*(z) C^*(z^{-1}) \overline{\Delta_d^*(z, \gamma)} - \\ - 2C^*(z^{-1}) \overline{\Delta_u^*(z, \gamma)} + \\ + \Delta_n^*(z) - C^*(z) \overline{\Delta_{дн}^*(z, \gamma)} - C^*(z^{-1}) \overline{\Delta_{нд}^*(z, \gamma)}] z^{-1} dz. \end{aligned} \quad (19.67)$$

§ 20. Определение оптимальной передаточной функции дискретной динамической системы алгебраическим методом

1. Определение оптимальной передаточной функции, обеспечивающей минимум дисперсии ошибки. Вначале найдем интегральное уравнение, определяющее оптимальную передаточную функцию. Воспользуемся для этого известными методами вариационного исчисления. Подставим в выражение (19.21) вместо $G^*(z, \gamma)$ сумму

$$G^*(z, \gamma) + \kappa G_1^*(z, \gamma),$$

где κ — произвольная переменная, а $G_1^*(z, \gamma)$ — произвольная функция, полюсы которой, однако, так же как и полюсы функции $G^*(z, \gamma)$, лежат внутри круга единичного радиуса. Получаем

$$\begin{aligned} D_\varepsilon[\gamma T, \kappa] = D_\varepsilon[\gamma T] + \\ + \frac{\kappa}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \{[G_1^*(z, \gamma) G^*(z^{-1}, \gamma) + G_1^*(z^{-1}, \gamma) G^*(z, \gamma)] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times [\Phi_x^*(z) + \Phi_{xv}^*(z) + \Phi_{vx}^*(z) + \Phi_v^*(z)] - \\
& - G_1^*(z^{-1}, \gamma) H^*(z, \gamma) [\Phi_x^*(z) + \Phi_{xv}^*(z)] - \\
& - G_1^*(z, \gamma) H^*(z^{-1}, \gamma) [\Phi_x^*(z) + \Phi_{vx}^*(z)] z^{-1} dz + \\
& + \frac{\kappa^2}{2\pi j} \oint_{\Gamma} G_1^*(z, \gamma) G_1^*(z^{-1}, \gamma) \times \\
& \times [\Phi_x^*(z) + \Phi_{xv}^*(z) + \Phi_{vx}^*(z) + \Phi_v^*(z)] z^{-1} dz. \quad (20.1)
\end{aligned}$$

Если зависимость $D_\varepsilon[\gamma T, \kappa]$ будет иметь минимум при $\kappa=0$ и произвольной (с указанным выше ограничением) функции $G_1^*(z, \gamma)$, то передаточная функция $G^*(z, \gamma)$ будет оптимальной. Следовательно, при $\kappa=0$

$$\left. \frac{\partial D_\varepsilon[\gamma T, \kappa]}{\partial \kappa} \right|_{\kappa=0} = 0. \quad (20.2)$$

Из уравнения (20.2) и выражения (20.1) находим

$$\begin{aligned}
& \oint_{\Gamma} G_1^*(z^{-1}, \gamma) \{G^*(z, \gamma) [\Phi_x^*(z) + \Phi_{xv}^*(z) + \Phi_{vx}^*(z) + \Phi_v^*(z)] - \\
& - H^*(z, \gamma) [\Phi_x^*(z) + \Phi_{xv}^*(z)]\} z^{-1} dz + \\
& + \oint_{\Gamma} G_1^*(z, \gamma) \{G^*(z^{-1}, \gamma) [\Phi_x^*(z) + \Phi_{xv}^*(z) + \Phi_{vx}^*(z) + \Phi_v^*(z)] - \\
& - H^*(z^{-1}, \gamma) [\Phi_x^*(z) + \Phi_{vx}^*(z)]\} z^{-1} dz = 0. \quad (20.3)
\end{aligned}$$

Во втором интеграле выражения (20.3) сделаем замену переменной z на z^{-1} . Так как на основании (19.22)

$$\begin{aligned}
\Phi_x^*(z^{-1}) &= \Phi_x^*(z), & \Phi_v^*(z^{-1}) &= \Phi_v^*(z), \\
\Phi_{xv}^*(z^{-1}) &= \Phi_{vx}^*(z), & \Phi_{vx}^*(z^{-1}) &= \Phi_{xv}^*(z),
\end{aligned}$$

то второй интеграл (20.3) совпадает с первым. Введя обозначения

$$\Psi_x^*(z) = \Phi_x^*(z) + \Phi_{xv}^*(z), \quad \Psi_v^*(z) = \Phi_v^*(z) + \Phi_{vx}^*(z), \quad (20.4)$$

из выражения (20.3) получаем интегральное уравнение, определяющее оптимальную передаточную функцию

$$\begin{aligned}
& \oint_{\Gamma} G_1^*(z^{-1}, \gamma) \{G^*(z, \gamma) [\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z)] - \\
& - H^*(z, \gamma) \Psi_x^*(z)\} z^{-1} dz = 0. \quad (20.5)
\end{aligned}$$

Если бы вместо формулы (19.21) для $D_\varepsilon[\gamma T]$ воспользовались формулой (19.24), то получили бы тот же результат, т. е. уравнение (20.5). Выясним структуру оптимальной передаточной функции. Для этого найдем решение уравнения (20.5) обычным способом. Факторизуем произведение

$$\frac{1}{z} [\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z)] = \\ = [\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z)]_- \times \left\{ \frac{1}{z} [\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z)]_+ \right\}. \quad (20.6)$$

Первый сомножитель (20.6) имеет нули и полюсы вне единичного круга, а второй внутри него. Подставив выражение (20.6) в уравнение (20.5), находим

$$\oint_{\Gamma} G_1^*(z^{-1}, \gamma) [\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z)]_- \times \\ \times \left\{ G^*(z, \gamma) z^{-1} [\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z)]_+ - \frac{H^*(z, \gamma) \Psi_x^*(z)}{z [\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z)]_-} \right\} dz = 0. \quad (20.7)$$

Выполним операцию расщепления второго члена в фигурных скобках (20.7), т. е. разобьем его на две части так, что полюсы одной из них лежат внутри единичного круга, а другой вне его

$$\frac{H^*(z, \gamma) \Psi_x^*(z)}{z [\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z)]_-} = \\ = \left[\frac{H^*(z, \gamma) \Psi_x^*(z)}{z [\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z)]_-} \right]^+ + \left[\frac{H^*(z, \gamma) \Psi_x^*(z)}{z [\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z)]_-} \right]^-. \quad (20.8)$$

Так как интеграл от функции, не имеющей полюсов внутри контура интегрирования, равен нулю, то в уравнении (20.7) нужно учитывать первый член правой части выражения (20.8). Имея в виду произвольность функции $G_1^*(z, \gamma)$ и учитывая указанное выше обстоятельство, из уравнения (20.7) получаем формулу для определения оптимальной передаточной функции:

$$G^*(z, \gamma) = \frac{z}{[\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z)]_+} \left[\frac{H^*(z, \gamma) \Psi_x^*(z)}{z [\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z)]_-} \right]^+. \quad (20.9)$$

Формула (20.9) в принципе решает задачу определения оптимальной передаточной функции и при $z = e^{j\omega T}$ из нее следует известное выражение [62, 52] для оптимальной частотной характеристики. Мы, однако, воспользуемся выражением (20.9) лишь для определения структуры оптимальной передаточной функции. Для этого введем следующие обозначения:

$$\Psi_x^*(z) = \frac{A_x(z)}{B_x(z)}, \quad \Psi_v^*(z) = \frac{A_v(z)}{B_v(z)}, \quad H^*(z, \gamma) = \frac{A_H(z, \gamma)}{B_H(z)}. \quad (20.10)$$

Используя эти обозначения, находим, что выражение в (20.9), стоящее вне квадратных скобок,

$$\frac{z}{[\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z)]_+} = \frac{zB_x^+(z)B_v^+(z)}{[A_x(z)B_v(z) + A_v(z)B_x(z)]_+}, \quad (20.11)$$

а выражение, стоящее внутри квадратных скобок,

$$\frac{H^*(z, \gamma) \Psi_x^*(z)}{z[\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z)]_-} = \frac{A_H(z, \gamma) A_x(z)}{zB_H(z)B_x(z)[A_x(z)B_v(z) + A_v(z)B_x(z)]_-}. \quad (20.12)$$

Операция расщепления последнего выражения эквивалентна разложению (20.12) на простые дроби и удержанию членов, определяемых нулями функций $B_H^+(z)$ и $B_x^+(z)$, расположенными внутри единичного круга. Поэтому

$$\left[\frac{H^*(z, \gamma) \Psi_x^*(z)}{z[\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z)]_-} \right]^+ = \frac{E(z, \gamma)}{zB_H^+(z)B_x^+(z)}, \quad (20.13)$$

где $E(z, \gamma)$ — некоторый полином. В результате из выражений (20.9), (20.11) и (20.13) получаем

$$G^*(z, \gamma) = \frac{B_v^+(z)E(z, \gamma)}{B_H^+(z)[A_x(z)B_v(z) + A_v(z)B_x(z)]_+}. \quad (20.14)$$

Следовательно, оптимальная передаточная функция $G^*(z, \gamma)$ представляет собой дробно-рациональную функцию, которая имеет полюсы, совпадающие с полюсами функции $H^*(z, \gamma)$ и нулями функции $\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z)$, расположенными внутри единичного круга,

т. е. с корнями полиномов

$$B_H(z) = 0 \quad \text{и} \quad A_x(z) B_v(z) + A_v(z) B_x(z) = 0, \quad (20.15)$$

по модулю меньшими единицы. Таким образом, структура оптимальной передаточной функции определена.

Далее рассмотрим алгебраический метод отыскания самой оптимальной передаточной функции. Положим, что изображения $F_x^*(z)$, $F_v^*(z)$, $F_{xv}^*(z)$ и $F_{vx}^*(z)$, входящие в формулы (19.22) для $\Phi_x^*(z)$, $\Phi_v^*(z)$, $\Phi_{xv}^*(z)$ и $\Phi_{vx}^*(z)$, имеют лишь простые полюсы, не совпадающие с полюсами функции $H^*(z, \gamma)$. Такое допущение практически не вызывает ограничений, так как корреляционные и взаимные корреляционные функции определяются в результате аппроксимации экспериментальных данных. Поэтому случаи, когда кратность полюсов указанных изображений больше единицы, имеют чисто теоретический интерес, так же как и случаи совпадения этих полюсов с полюсами функции $H^*(z, \gamma)$. Что касается последней, то примем пока, что она также имеет лишь простые полюсы. Дальше это ограничение будет снято. Обозначим

$$\left. \begin{aligned} F_x^*(z) &= b_0 + \sum_j \frac{b_j z}{z - \mu_j}, & F_{xv}^*(z) &= c_0 + \sum_j \frac{c_j z}{z - \mu_j}, \\ F_{xv}^*(z) &= c'_0 + \sum_j \frac{c'_j z}{z - \mu_j}, & F_v^*(z) &= d_0 + \sum_j \frac{d_j z}{z - \mu_j}, \end{aligned} \right\} \quad (20.16)$$

где μ_j — j -й полюс системы функций $F_x^*(z)$, $F_{xv}^*(z)$, $F_{vx}^*(z)$ и $F_v^*(z)$, b_j , c_j , c'_j , d_j — постоянные величины. В формулах (20.16) $j = 1, 2, \dots, n$, т. е. n — суммарное число полюсов μ_j системы функций (20.16). Величины b_0 , c_0 , c'_0 и d_0 дают возможность учесть составляющие входных воздействий типа белый шум.

Желаемую передаточную функцию представим в виде

$$H^*(z, \gamma) = H_0^*(z, \gamma) + \sum_{i=1}^r \frac{a_i(\gamma) z}{z - \alpha_i}, \quad (20.17)$$

где $H_0^*(z, \gamma)$ — целая функция, α_i — i -й полюс $H^*(z, \gamma)$ (причем $\alpha_i < 1$), $a_i(\gamma)$ — постоянная величина. Теперь в соответствии с формулой (20.14) выражение для

оптимальной передаточной функции $G^*(z, \gamma)$ может быть записано в виде суммы

$$G^*(z, \gamma) = G^*(0, \gamma) + \sum_{i=1}^r \frac{A_i(\gamma)z}{z - \alpha_i} + \sum_{k=1}^l \frac{B_k(\gamma)z}{z - \beta_k}, \quad (20.18)$$

где $G^*(0, \gamma)$, $A_i(\gamma)$, $B_k(\gamma)$ и β_k — неизвестные параметры, которые должны быть найдены. Величина l , определяющая число членов с полюсами β_k , пока также неизвестна (заметим, что величины β_k , μ_j и α_i могут быть как действительными числами, так и комплексными). Первая сумма правой части (20.18) определяется полюсами функции $H^*(z, \gamma)$, а вторая нулями функции $\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z)$, расположенными внутри окружности единичного радиуса. Из (20.18) следует, что $G^*(z, \gamma)$ представляет собой изображение дискретной импульсной функции, являющейся суммой затухающих экспонент, экспоненциально затухающих синусов и косинусов, а также включает изображение обобщенной дельта-функции. Последняя обеспечивает возможность присутствия в выходном сигнале входного с коэффициентом усиления $G^*(0, \gamma)$.

Заметим, что зависимость для $G^*(z, \gamma)$ может быть также записана в виде

$$G^*(z, \gamma) = G^*(0, \gamma) + \sum_{i=1}^r \frac{A_i(\gamma)}{z - \alpha_i} + \sum_{k=1}^l \frac{B_k(\gamma)}{z - \beta_k} \quad (20.19)$$

((20.19) следует из (20.18) путем выделения целых частей). Выражению (20.18) отвечает передаточная функция, имеющая полиномы числителя и знаменателя одного порядка, а выражению (20.19) при $G^*(0, \gamma) = 0$ передаточная функция, порядок полинома числителя которой на единицу меньше порядка знаменателя. Как передаточная функция (20.18), так и (20.19) удовлетворяют условию физической реализуемости. Соотношение (20.19) накладывает определенное ограничение на структуру передаточной функции $G^*(z, \gamma)$, которое иногда используют, если система содержит непрерывную часть, а также в случае, когда $\gamma = 0$ [62, 24]. Указанная двойственность в задании $G^*(z, \gamma)$ эквивалента, очевидно,

некоторой неоднозначности выполнения операции расщепления. Последняя осуществляется путем разложения левой части (20.8) на простые дроби и удержания членов с полюсами, лежащими внутри единичного круга. При этом может возникнуть необходимость в выделении целой части (постоянной) дробной рациональной функции, которую можно удержать или отбросить. Соответственно и порядок числителя передаточной функции $G^*(z, \gamma)$, определяемой формулой (20.9), будет другим. Здесь мы будем пользоваться выражением (20.18). В примере 1 продемонстрировано различие, которое получается при использовании указанных формул.

Для определения неизвестных параметров, входящих в выражение (20.18), воспользуемся интегральным уравнением (20.5). Подставим выражения $H^*(z, \gamma)$ (20.17), $G^*(z, \gamma)$ (20.18), $F_x^*(z)$, $F_{xv}^*(z)$, $F_{vx}^*(z)$ и $F_v^*(z)$ (20.16), определяющие $\Psi_x^*(z)$ и $\Psi_v^*(z)$, в левую часть уравнения (20.5) и вычислим контурный интеграл. Подынтегральная функция имеет следующие полюсы, расположенные внутри единичного круга: в точках α_i (полюсы $H^*(z, \gamma)$ и $G^*(z, \gamma)$), в точках β_k (полюсы $G^*(z, \gamma)$) и в точках μ_j (полюсы $F_x^*(z)$, $F_{xv}^*(z)$, $F_{vx}^*(z)$, $F_v^*(z)$). Имеется также полюс в точке $z = 0$. В результате определения вычетов из уравнения (20.5) находим

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^r G_1^*(\alpha_i^{-1}, \gamma) \{A_i(\gamma) [\Psi_x^*(\alpha_i) + \Psi_v^*(\alpha_i)] - a_i(\gamma) \Psi_x^*(\alpha_i)\} + \\ & + \sum_{k=1}^l G_1^*(\beta_k^{-1}, \gamma) \{B_k(\gamma) [\Psi_x^*(\beta_k) + \Psi_v^*(\beta_k)]\} + \\ & + \sum_{j=1}^n G_1^*(\mu_j^{-1}, \gamma) \{G^*(\mu_j, \gamma) (b_j + c_j + c'_j + d_j) - \\ & - H^*(\mu_j, \gamma) (b_j + c_j)\} + \\ & + G_1^*(\infty, \gamma) \{G^*(0, \gamma) [\Psi_x^*(0) + \Psi_v^*(0)] - H^*(0, \gamma) \Psi_x^*(0)\} = 0. \end{aligned} \quad (20.20)$$

В силу определенной произвольности функции $G_1^*(z, \gamma)$ равенство (20.20) справедливо, если выражения в фигурных скобках равны нулю. В результате получаем

следующую систему уравнений:

$$G^*(0, \gamma) = \frac{b_0 + c_0}{b_0 + c_0 + c'_0 + d_0} H^*(0, \gamma), \quad (20.21)$$

$$\Psi_x^*(\beta) + \Psi_v^*(\beta) = 0, \quad (20.22)$$

$$A_i(\gamma) = \frac{a_i(\gamma) \Psi_x^*(\alpha_i)}{\Psi_x^*(\alpha_i) + \Psi_v^*(\alpha_i)}, \quad (20.23)$$

$$G^*(\mu_j, \gamma) = \frac{b_j + c_j}{b_j + c_j + c'_j + d_j} H^*(\mu_j, \gamma), \quad (20.24)$$

отвечающих всем значениям индексов i и j . Формула (20.21) определяет постоянную $G^*(0, \gamma)$, а уравнение (20.22) служит для отыскания полюсов оптимальной передаточной функции, отличных от полюсов $H^*(z, \gamma)$. Как было показано выше, в качестве таковых должны быть взяты корни уравнения (20.22), лежащие внутри единичного круга. Так как уравнение (20.22) является возвратным [31], то нетрудно видеть, что число таких корней равно величине n (всего уравнение (20.22) имеет $2n$ или $2n - 1$ корней). Таким образом, в формуле (20.18) $l = n$. Каждый из параметров $A_i(\gamma)$ определяется системой равенств (20.23) и соответствует данному i .

После того, как будут найдены постоянная $G^*(0, \gamma)$, параметры $A_i(\gamma)$ и указанные выше n корней уравнения (20.22), неизвестные параметры $B_k(\gamma)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) могут быть определены из системы уравнений (20.24), число которых также равно n (по числу полюсов μ_j). Решение системы уравнений (20.24) можно найти в общем виде с помощью определителей, подобно тому, как это сделано в работах [36, 47]. Однако решающиеся в этом случае формулы сложны. Удобнее решать систему (20.24) для каждой конкретной задачи.

Сравнивая решение задачи определения оптимальной передаточной функции, по формуле (20.9) и алгебраическим методом можно провести следующее сопоставление. Решение уравнения (20.22) эквивалентно операции факторизации, а определение $G^*(0, \gamma)$ и $A_i(\gamma)$ по формулам (20.21) и (20.23) и решение системы (20.24) эквивалентно операции расщепления. Однако, как будет видно ниже из примеров, сама процедура решения во

многих случаях существенно проще. Отметим здесь следующее обстоятельство. Если функция $H^*(z, \gamma)$ (20.17) физически реализуема (т. е. $H_0^*(z, \gamma) = H_0^*(0, \gamma)$), то при $v(t) = 0$ (т. е. $\Psi_v^*(z) = 0$, $\Psi_x^*(z) = \Phi_x^*(z)$) из уравнений (20.21) — (20.24) должно следовать

$$G^*(z, \gamma) = H^*(z, \gamma).$$

Проверим это. Из (20.21) и (20.23) находим, что $G^*(0, \gamma) = H_0^*(0, \gamma)$ и $A_i(\gamma) = a_i(\gamma)$. Поэтому с учетом (20.17)

$$G^*(z, \gamma) = H^*(z, \gamma) + \sum_{k=1}^n \frac{B_k(\gamma) z}{z - \beta_k}.$$

Из (20.24) получаем

$$H^*(\mu_j, \gamma) + \sum_{k=1}^n \frac{B_k(\gamma) \mu_j}{\mu_j - \beta_k} = \frac{b_j}{b_j} \cdot H^*(\mu_j, \gamma) \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

откуда

$$\sum_{k=1}^n \frac{B_k(\gamma) \mu_j}{\mu_j - \beta_k} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

т. е. $B_k(\gamma) = 0$ и равенство выполняется.

Рассмотрим теперь случай, когда желаемая передаточная функция $H^*(z, \gamma)$ имеет кратные корни:

$$H^*(z, \gamma) = H_0^*(z, \gamma) + \sum_{i=1}^r \sum_{p=1}^{m_i} \frac{a_{ip}(\gamma) z}{(z - \alpha_i)^p}, \quad (20.25)$$

где α_i есть i -й полюс $H^*(z, \gamma)$, имеющий кратность $m_i \geq 1$. Кратные корни указанного вида могут быть, например, когда среди составляющих функции $H^*(z, \gamma)$ есть z -изображения, соответствующие изображениям по Лапласу вида $(s + \lambda_i)^{-m_i}$. Для оптимальной функции $G^*(z, \gamma)$ в случае кратных корней получаем выражение

$$G^*(z, \gamma) = G^*(0, \gamma) + \sum_{i=1}^r \sum_{p=1}^{m_i} \frac{A_{ip}(\gamma) z}{(z - \alpha_i)^p} + \sum_{k=1}^l \frac{B_k(\gamma) z}{z - \beta_k}. \quad (20.26)$$

Вычислив контурный интеграл (20.5), получаем уравнение, аналогичное (20.20), лишь с тем отличием, что

первый его член будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^r \sum_{p=1}^{m_i} \left\{ \frac{G_1^*(z^{-1}, \gamma)}{(p-1)!} [A_{ip}(\gamma) (\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z)) - a_{ip}(\gamma) \Psi_x^*(z)] \right\}_{z=\alpha_i}^{(p-1)}. \quad (20.27)$$

Преобразуем исходное выражение (20.27). Используя формулу Лейбница для производной $(p-1)$ -го порядка от произведения некоторых функций uv , получаем

$$\sum_{p=1}^{m_i} \frac{(uv)^{(p-1)}}{(p-1)!} = \sum_{p=1}^{m_i} \sum_{q=0}^{p-1} \frac{C_{p-1}^q}{(p-1)!} u^{(q)} v^{(p-1-q)}.$$

Изменив порядок суммирования в последнем выражении и имея в виду, что $1 \leq p \leq m_i$, $0 \leq q \leq p-1$, находим

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{m_i} \frac{(uv)^{(p-1)}}{(p-1)!} &= \\ &= \sum_{q=1}^{m_i} \sum_{p=q}^{m_i} \frac{C_{p-1}^{q-1}}{(p-1)!} u^{(q-1)} v^{(p-q)} = \sum_{q=1}^{m_i} \frac{u^{(q-1)}}{(q-1)!} \sum_{p=q}^{m_i} \frac{v^{(p-q)}}{(p-q)!}. \end{aligned}$$

Преобразовав выражение (20.27) с помощью последнего соотношения, получим

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^{m_i} \frac{G_1^{*(q-1)}(z^{-1}, \gamma)}{(q-1)!} \sum_{p=q}^{m_i} \frac{1}{(p-q)!} \times \\ \times \{A_{ip}(\gamma) [\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z)] - a_{ip}(\gamma) \Psi_x^*(z)\}_{z=\alpha_i}^{(p-q)}. \end{aligned} \quad (20.28)$$

В силу произвольности функции $G_1^*(z^{-1}, \gamma)$ находим систему равенств для определения коэффициентов $A_{ip}(\gamma)$

$$\begin{aligned} \sum_{p=q}^{m_i} \frac{1}{(p-q)!} \{A_{ip}(\gamma) [\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z)] - a_{ip}(\gamma) \Psi_x^*(z)\}_{z=\alpha_i}^{(p-q)} = 0 \\ (1 \leq q \leq m_i), \end{aligned} \quad (20.29)$$

Используя равенства (20.29), коэффициенты $A_{ip}(\gamma)$ можно определить последовательно, начиная с $q = m_i$. Таким образом, в случае, когда функция $H^*(z, \gamma)$ имеет кратные полюсы, определение оптимальной передаточной функции осуществляется с помощью уравнений (20.21), (20.22), (20.29) и (20.24).

Дисперсию установившейся ошибки $D_\varepsilon[\gamma T]$ можно определить по формуле (19.21). Упростим эту формулу с учетом того, что $G^*(z, \gamma)$ является оптимальной функцией. Для этого добавим в подынтегральную функцию выражения (19.21) с противоположными знаками первый член, стоящий в фигурных скобках. Кроме того, используем уравнение (20.3), которое справедливо при произвольных функциях $G_1^*(z, \gamma)$, в том числе и при $G_1^*(z, \gamma) = G^*(z, \gamma)$. С учетом этого равенства и выражений (20.3) и (19.21) находим

$$D_\varepsilon[\gamma T] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \{H^*(z, \gamma) H^*(z^{-1}, \gamma) \Phi_x^*(z) - G^*(z, \gamma) G^*(z^{-1}, \gamma) [\Phi_x^*(z) + \Phi_{xv}^*(z) + \Phi_{vx}^*(z) + \Phi_v^*(z)]\} z^{-1} dz. \quad (20.30)$$

Приведем формулу для определения $D_\varepsilon[\gamma T]$ в случае, когда полезный сигнал и помеха не коррелированы, а функция $H^*(z, \gamma)$ не имеет полюсов, т. е. для задач упреждения и сглаживания. Тогда подынтегральная функция в (20.30) имеет полюсы в точках μ_j и β_h , лежащих внутри единичного круга. Определив вычеты, подобно тому, как это было сделано при выводе уравнения (20.20), находим

$$D_\varepsilon[\gamma T] = \sum_{j=1}^n [H^*(\mu_j, \gamma) H^*(\mu_j^{-1}, \gamma) b_j - G^*(\mu_j, \gamma) G^*(\mu_j^{-1}, \gamma) (b_j + d_j)] + \lim_{z \rightarrow 0} \{H^*(z, \gamma) H^*(z^{-1}, \gamma) \Phi_x^*(z) - G^*(z, \gamma) G^*(z^{-1}, \gamma) [\Phi_x^*(z) + \Phi_v^*(z)]\}. \quad (20.31)$$

При выводе формулы (20.31) учтено, что вычеты в точках β_h равны нулю. С помощью формул, полученных в § 12, можно найти корреляционную функцию

установившейся ошибки $K_e [vT, \gamma T]$. Исходными для этого являются передаточные функции $G^*(z, \gamma)$ и $H^*(z, \gamma)$ и изображения входных воздействий.

Иногда возникает необходимость проанализировать работу оптимальной дискретной системы во время переходного режима, т. е. сразу после ее включения. Для определения зависимости дисперсии ошибки от времени $D_e [(n + \gamma)T]$ можно воспользоваться формулой (19.23), полученной в предыдущем параграфе. Корреляционная функция ошибки оптимальной дискретной системы в переходном режиме

$$K_e [(n + \gamma)T, (n_1 + \gamma)T] = \\ = M \{e [(n + \gamma)T] e [(n_1 + \gamma)T]\} \quad (20.32)$$

определяется выражением, подобным (19.2). Отличие заключается лишь в том, что верхний индекс суммирования, внутренних сумм и аргумент функций, где присутствует m_1 , будет n_1 вместо n . Корреляционную функцию ошибки проще всего найти с помощью двумерного z -преобразования, используя методы главы III. Двумерное изображение корреляционной функции ошибки, необходимое для этого, определяется формулой

$$\Phi_e^*(z, z_1, \gamma) = \\ = \frac{zz_1}{zz_1 - 1} \{G^*(z, \gamma) G^*(z_1, \gamma) [\Phi_x^*(z, z_1) + \Phi_{xv}^*(z, z_1) + \\ + \Phi_{vx}^*(z, z_1) + \Phi_v^*(z, z_1)] - \\ - H^*(z, \gamma) G^*(z_1, \gamma) [\Phi_x^*(z, z_1) + \Phi_{xv}^*(z_1, z)] - \\ - G^*(z, \gamma) H^*(z_1, \gamma) [\Phi_x^*(z, z_1) + \Phi_{vx}^*(z, z_1)] - \\ - H^*(z, \gamma) H^*(z_1, \gamma) \Phi_x^*(z, z_1)\}, \quad (20.33)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Phi_x^*(z, z_1) &= F_x^*(z) + F_x^*(z_1) - K_x(0), \\ \Phi_v^*(z, z_1) &= F_v^*(z) + F_v^*(z_1) - K_v(0), \\ \Phi_{xv}^*(z, z_1) &= F_{xv}^*(z) + F_{vx}^*(z_1) - K_{xv}(0), \\ \Phi_{vx}^*(z, z_1) &= F_{vx}^*(z) + F_{xv}^*(z_1) - K_{vx}(0). \end{aligned} \right\} \quad (20.34)$$

Из формулы (20.33) с помощью предельного соотношения (5.41) можно найти изображение корреляцион-

ной функции ошибки в установившемся режиме:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{zz_1 \rightarrow 1} [(zz_1 - 1) \Phi_\varepsilon^*(z, z_1, \gamma)] = \\
 & = G^*(z, \gamma) G^*(z^{-1}, \gamma) [\Phi_x^*(z) + \Phi_{xv}^*(z) + \Phi_{vx}^*(z) + \Phi_v^*(z)] - \\
 & \quad - H^*(z, \gamma) G^*(z^{-1}, \gamma) [\Phi_x^*(z) + \Phi_{xv}^*(z)] - \\
 & \quad - G^*(z, \gamma) H^*(z^{-1}, \gamma) [\Phi_x^*(z) + \Phi_{vx}^*(z)] + \\
 & \quad + H^*(z, \gamma) H^*(z^{-1}, \gamma) \Phi_x^*(z) = \\
 & = F_\varepsilon^*(z, \gamma) + F_\varepsilon^*(z^{-1}, \gamma) - K_\varepsilon[\gamma T], \quad (20.35)
 \end{aligned}$$

где $F_\varepsilon^*(z, \gamma)$ — z -изображение корреляционной функции установившейся ошибки $K_\varepsilon[\gamma T, \gamma T]$. При выводе соотношения (20.35) учтено, что при $zz_1 \rightarrow 1$, т. е. $z_1 \rightarrow z^{-1}$, выражения (20.34) переходят в формулы (19.22). Заметим, что среднее выражение равенства (20.35) совпадает, как это и должно быть, с подынтегральной функцией в (19.21), заключенной в фигурные скобки. Действительно, два последних выражения равенства (20.35) при $z = e^{j\omega T}$ связывают между собой спектральную плотность установившейся ошибки со спектральными плотностями входных воздействий и частотными характеристиками желаемой и оптимальной систем (ср. с (12.38) и (12.39)).

2. Определение оптимальной передаточной функции, обеспечивающей минимум начального момента второго порядка ошибки. Найдем интегральное уравнение, определяющее передаточную функцию, из условия минимума начального момента второго порядка ошибки $\Pi_\varepsilon[\gamma T]$. В соответствии с принятым в предыдущем параграфе будем рассматривать момент $\Pi_\varepsilon[\gamma T, \xi]$, для которого справедлив предельный переход

$$\lim_{\xi \rightarrow 1} \Pi_\varepsilon[\gamma T, \xi] = \Pi_\varepsilon[\gamma T]. \quad (20.36)$$

Исходным, таким образом, является уравнение (19.37). Прделав для него те же выкладки и преобразования, что и при исследовании дисперсии ошибки для выражения (19.21), находим интегральное уравнение, определяющее оптимальную передаточную функцию дискретной системы при отличных от нуля величинах

математических ожиданий m_x и m_v :

$$\oint_{\Gamma} G_1^*(z^{-1}, \gamma) \{G_m^*(z, \gamma, \xi) [\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z) + (m_x + m_v)^2 M^*(z, \xi)] - H^*(z, \gamma) [\Psi_x^*(z) + m_x(m_x + m_v) M^*(z, \xi)]\} z^{-1} dz = 0. \quad (20.37)$$

В уравнении (20.37) использовано обозначение $G_m^*(z, \gamma, \xi)$, где индекс m указывает на то, что математические ожидания отличны от нуля, а ξ — на зависимость от искусственно введенного выше параметра. Аналогично (20.9) из (20.37) получаем формулу для оптимальной передаточной функции

$$G_m^*(z, \gamma, \xi) = \frac{1}{[\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z) + (m_x + m_v)^2 M^*(z, \xi)]_+} \times \times \left[\frac{H^*(z, \gamma) [\Psi_x^*(z) + m_x(m_x + m_v) M^*(z, \xi)]}{[\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z) + (m_x + m_v)^2 M^*(z, \xi)]_-} \right]^+. \quad (20.38)$$

Если воспользоваться обозначениями (20.10) и выражением (19.38), то можно показать, что оптимальная передаточная функция $G_m^*(z, \gamma, \xi)$ определяется выражением, аналогичным (20.14), а именно

$$G_m^*(z, \gamma, \xi) = \frac{B_v^+(z) E(z, \gamma)}{B_H^+(z) \{ [A_x(z) B_v(z) + A_v(z) B_x(z)] (z - \xi) (z^{-1} - \xi) \rightarrow \rightarrow + B_x(z) B_v(z) (m_x + m_v)^2 (1 - \xi^2) \}_+}, \quad (20.39)$$

где $E(z, \gamma)$ — некоторый полином. Следовательно, при отличных от нуля величинах математических ожиданий оптимальная передаточная функция $G_m^*(z, \gamma, \xi)$ имеет полюсы, совпадающие с полюсами функции $H^*(z, \gamma)$ и нулями $\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z) + (m_x + m_v)^2 M^*(z, \gamma)$, расположенными внутри единичного круга, т. е. с корнями первого полинома (20.15) и корнями полинома

$$[A_x(z) B_v(z) + A_v(z) B_x(z)] (z - \xi) (z^{-1} - \xi) + + B_x(z) B_v(z) (m_x + m_v)^2 (1 - \xi^2) = 0, \quad (20.40)$$

по модулю меньшими единицы. Рассмотрим теперь методику определения оптимальной передаточной функции в случае, когда математические ожидания воздействий $x(t)$ и $v(t)$ отличны от нуля и равны соответственно величинам m_x и m_v . В соответствии с формулой (20.39) выражение для оптимальной передаточной функции $G_m^*(z, \gamma, \xi)$ при фиксированном значении параметра ξ ($\xi < 1$) можно записать в виде

$$G_m^*(z, \gamma, \xi) = \\ = G^*(0, \gamma, \xi) + \sum_{i=1}^r \frac{A_i(\gamma, \xi) z}{z - \alpha_i} + \sum_{k=1}^l \frac{B_k(\gamma, \xi) z}{z - \beta_k(\xi)}, \quad (20.41)$$

где $\beta_k(\xi)$ — корни уравнения (20.40). Подставим выражения $H^*(z, \gamma)$ (20.17), $G_m^*(z, \gamma, \xi)$ (20.41) и $F_x^*(z), F_{xv}^*(z), F_{vx}^*(z), F_v^*(z)$ (20.16) в левую часть уравнения (20.37) и вычислим контурный интеграл, подобно тому, как это было сделано при определении зависимости (20.20). При этом учтем, что в уравнении (20.37) функция $M^*(z, \xi)$ (19.38) имеет полюс в точке ξ (внутри единичной окружности), вычет относительно которого определим отдельно. В результате, аналогично уравнениям (20.21) — (20.24), получим

$$G^*(0, \gamma, \xi) = \frac{b_0 + c_0}{b_0 + c_0 + c'_0 + d_0} H^*(0, \gamma), \quad (20.42)$$

$$\Psi_x^*(\beta(\xi)) + \Psi_v^*(\beta(\xi)) + (m_x + m_v)^2 M^*(\beta, \xi) = 0, \quad (20.43)$$

$$A_i(\gamma, \xi) = \frac{a_i(\gamma) [\Psi_x^*(\alpha_i) + m_x(m_x + m_v) M^*(\alpha_i, \xi)]}{\Psi_x^*(\alpha_i) + \Psi_v^*(\alpha_i) + (m_x + m_v)^2 M^*(\alpha_i, \xi)}, \quad (20.44)$$

$$G_m^*(\mu_j, \gamma, \xi) = \frac{b_j + c_j}{b_j + c_j + c'_j + d_j} H^*(\mu_j, \gamma), \quad (20.45)$$

$$G_m^*(\xi, \gamma, \xi) = \frac{m_x}{m_x + m_v} H^*(\xi, \gamma) \quad (20.46)$$

(при получении (20.42) учтено, что $M^*(0, \xi) = 0$). Рассмотрим, как будут изменяться уравнения (20.42) — (20.46) при $\xi \rightarrow 1$, т. е. при переходе к интересующему нас случаю с отличными от нуля математическими ожиданиями воздействий. Для этого будем сравнивать указанные уравнения с уравнениями (20.21) — (20.24), полученными выше для случая, когда математические

ожидания равны нулю. Уравнение (20.42) при $\xi \rightarrow 1$ не отличается от (20.21). Далее из уравнения (20.43) и формулы (19.38) находим

$$\{\Psi_x^*[\beta(\xi)] + \Psi_v^*[\beta(\xi)]\}[\beta(\xi) - \xi][\beta^{-1}(\xi) - \xi] + (m_x + m_v)^2(1 - \xi^2) = 0. \quad (20.47)$$

Это уравнение при $\xi \rightarrow 1$ переходит в уравнение

$$\Psi_x^*(\beta) + \Psi_v^*(\beta) = 0, \quad (20.48)$$

совпадающее с (20.22). Уравнение (20.47) имеет внутри круга единичного радиуса на один корень больше, чем (20.48). Пусть $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ обозначают корни уравнения (20.48), а $\beta_0(\xi), \beta_1(\xi), \beta_2(\xi), \dots, \beta_n(\xi)$ — корни уравнения (20.47), расположенные в каждой из этих последовательностей в порядке убывания модуля. Из сравнения этих уравнений видно, что при $\xi \rightarrow 1$

$$\beta_0(\xi) \rightarrow 1, \quad \beta_1(\xi) \rightarrow \beta_1, \dots, \beta_n(\xi) \rightarrow \beta_n. \quad (20.49)$$

Действительно, так как $\beta = 1$ по условию не является корнем уравнения (20.48), то при $\xi \rightarrow 1$ уравнению (20.47) удовлетворяет корень $\beta_0(\xi) \rightarrow 1$ и остальные корни уравнения (20.48), по модулю меньшие единице. Таким образом, в выражении (20.41) $l = n + 1$, где n — число корней уравнения (20.48), лежащих внутри круга единичного радиуса.

Из уравнения (20.44) непосредственно следует, что

$$\lim_{\xi \rightarrow 1} A_l(\gamma, \xi) = A_l(\gamma),$$

так как на основании выражения (19.38)

$$\lim_{\xi \rightarrow 1} M^*(\alpha_l, \xi) = 0$$

и уравнения (20.44) совпадают с (20.33). Таким образом, уравнения (20.42) — (20.44) при $\xi \rightarrow 1$ переходят в соответствующие уравнения (20.21) — (20.23), полученные для случая, когда математические ожидания равны нулю.

Для того чтобы проанализировать поведение уравнений (20.45) и (20.46) при $\xi \rightarrow 1$, представим выражение (20.41) в виде

$$G_m^*(z, \gamma, \xi) = \frac{B_0(\gamma, \xi)z}{z - \beta_0(\xi)} + G^*(z, \gamma, \xi), \quad (20.50)$$

где

$$G^*(z, \gamma, \xi) = G^*(0, \gamma, \xi) + \sum_{i=1}^r \frac{A_i(\gamma, \xi) z}{z - \alpha_i} + \sum_{k=1}^n \frac{B_k(\gamma, \xi) z}{z - \beta_k(\xi)}. \quad (20.51)$$

Запишем уравнения (20.45) и (20.46) с учетом формулы (20.50)

$$\frac{B_0(\gamma, \xi) \mu_j}{\mu_j - \beta_0(\xi)} + G^*(\mu_j, \gamma, \xi) = \frac{b_j + c_j}{b_j + c_j + c'_j + d_j} H^*(\mu_j, \gamma), \quad (20.52)$$

$$\frac{B_0(\gamma, \xi) \xi}{\xi - \beta_0(\xi)} + G^*(\xi, \gamma, \xi) = \frac{m_x}{m_x + m_v} H^*(\xi, \gamma). \quad (20.53)$$

Чтобы выяснить предельные значения первых членов левых частей равенств (20.52) и (20.53) при $\xi \rightarrow 1$, рассмотрим выражение (20.50) при $z = 1$:

$$G_m^*(1, \gamma, \xi) = \frac{B_0(\gamma, \xi)}{1 - \beta_0(\xi)} + G^*(1, \gamma, \xi). \quad (20.54)$$

Отсюда получаем

$$\lim_{\xi \rightarrow 1} \left[\frac{B_0(\gamma, \xi)}{1 - \beta_0(\xi)} \right] = \frac{m_x}{m_x + m_v} H^*(1, \gamma) - G^*(1, \gamma, 1) = B, \quad (20.55)$$

где B — конечная величина, так как на основании выражения (20.46)

$$\lim_{\xi \rightarrow 1} G_m^*(\xi, \gamma, \xi) = \frac{m_x}{m_x + m_v} H^*(1, \gamma), \quad (20.56)$$

функции же $H^*(z, \gamma)$ и $G^*(z, \gamma, \xi)$ не имеют полюсов в точке $z = 1$. Из соотношения (20.55) следует, что разность $1 - \beta_0(\xi)$ и $B_0(\gamma, \xi)$ при $\xi \rightarrow 1$ суть бесконечно малые одного и того же порядка, т. е.

$$\lim_{\xi \rightarrow 1} [1 - \beta_0(\xi)] = \lim_{\xi \rightarrow 1} B_0(\gamma, \xi) = 0 \quad (20.57)$$

(отношение указанных величин конечно и равно B). Так как $\mu_j \neq 1$, то из (20.57) следует, что первый член левой части уравнения (20.52) при $\xi \rightarrow 1$ стремится к нулю и уравнение (20.52) (а следовательно и (20.45)) превращается в уравнение (20.24), т. е.

$$\lim_{\xi \rightarrow 1} B_k(\gamma, \xi) = B_k(\gamma) \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

Таким образом, мы выяснили, что при $\xi \rightarrow 1$ уравнения (20.42) — (20.45) переходят соответственно в уравнения (20.21) — (20.24), определяющие оптимальную передаточную функцию $G^*(z, \gamma)$ в случае, когда математические ожидания воздействий равны нулю. Следовательно, для передаточной функции $G^*(z, \gamma, \xi)$ можно записать следующее предельное соотношение:

$$\lim_{\xi \rightarrow 1} G^*(z, \gamma, \xi) = G^*(z, \gamma), \quad (20.58)$$

где $G^*(z, \gamma)$ — оптимальная передаточная функция, определенная в предположении, что математические ожидания воздействий равны нулю.

Рассмотрим, наконец, уравнение (20.53) (т. е. (20.46)). Видим, что при $\xi \rightarrow 1$ оно переходит в предельное соотношение (20.55), т. е. определяет величину B . Теперь остается найти предельную зависимость при $\xi \rightarrow 1$ полной передаточной функции $G_m^*(z, \gamma, \xi)$, определяемой правой частью выражения (20.50), причем предельная зависимость для второго члена этого выражения была уже найдена и определяется формулой (20.58). Для первого же члена имеем

$$\lim_{\xi \rightarrow 1} \left[\frac{B_0(\gamma, \xi)z}{z - \beta_0(\xi)} \right] = \begin{cases} B & \text{при } z = 1, \\ 0 & \text{при } z \neq 1, \end{cases} \quad (20.59)$$

верхнее выражение (20.59) следует из (20.55), а нижнее из (20.57). Таким образом,

$$\lim_{\xi \rightarrow 1} G_m^*(z, \gamma, \xi) = G_m^*(z, \gamma) = BJ(z) + G^*(z, \gamma), \quad (20.60)$$

где

$$J(z) = \delta_0 \left(\frac{\ln z}{T} \right) = \begin{cases} 1 & \text{при } z = 1, \\ 0 & \text{при } z \neq 1. \end{cases} \quad (20.61)$$

Следовательно, искомая передаточная функция, минимизирующая начальный момент второго порядка ошибки $\Pi_\varepsilon[\gamma T]$, определяется формулой (20.60), где $G^*(z, \gamma)$ — оптимальная передаточная функция, полученная из условия минимизации дисперсии ошибки $D_\varepsilon[\gamma T]$, B — постоянный параметр, а $J(z)$ — функция, совпадающая с обобщенной дельта-функцией относительно аргумента $T^{-1} \ln z$. Подставим в (20.60) выражение для B из (20.55), имея в виду, что $G^*(1, \gamma, 1) \equiv G^*(1, \gamma)$

(см. (20.58)). Получаем

$$G_m^*(z, \gamma) = \left[\frac{m_x}{m_x + m_v} H^*(1, \gamma) - G^*(1, \gamma) \right] J(z) + G^*(z, \gamma). \quad (20.62)$$

Положим в этом выражении $z = 1$. С учетом формулы (20.61) имеем

$$G_m^*(1, \gamma) = \frac{m_x}{m_x + m_v} H^*(1, \gamma), \quad (20.63)$$

что совпадает с условием несмещенности математического ожидания ошибки (19.42). Следовательно, для оптимальной дискретной системы

$$m_\varepsilon [\gamma T] = 0, \quad (20.64)$$

$$\Pi_\varepsilon [\gamma T] = D_\varepsilon [\gamma T], \quad (20.65)$$

т. е. точность оптимальной системы как при математических ожиданиях воздействий, равных нулю, так и отличных от нуля — одна и та же. Однако такая возможность существует лишь теоретически, так как передаточная функция, определяемая первым членом формулы (20.50) и предельным соотношением (20.59) (или (20.61), что одно и то же), технически не может быть реализована точно. Ее можно реализовать лишь приближенно при значении параметра ξ , близкого к единице, однако меньшего ее. Физически $J(z)$ можно трактовать как передаточную функцию фильтра, пропускающего лишь частоту $\omega = 0$ (так как аргумент функции $J(z)$ $z = e^{j\omega T} = 1$ при $\omega = 0$), т. е. постоянные составляющие воздействий, отвечающие их математическим ожиданиям. Другими словами, $J(z)$ представляет собой передаточную функцию «щелевого фильтра», пропускающего частоты в нулевом диапазоне при $\omega = 0$.

3. Определение оптимальной передаточной функции, обеспечивающей минимум дисперсии огибающей ошибки. Найдем интегральное уравнение, определяющее оптимальную передаточную функцию дискретного фильтра $D^*(z)$ из условия минимума дисперсии огибающей ошибки \bar{D}_ε . Из формулы (19.45) получаем

$$\oint_{\Gamma} D_1^*(z^{-1}) \{ D^*(z) \overline{W^*(z, \gamma)} \overline{W^*(z^{-1}, \gamma)} [\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z)] + \\ - \overline{H^*(z, \gamma)} \overline{W^*(z^{-1}, \gamma)} \Psi_x^*(z) \} z^{-1} dz = 0, \quad (20.66)$$

где $D_1^*(z)$ — произвольная функция, аналогичная по своему смыслу функции $G_1^*(z, \gamma)$. Из изложенного выше ясно, что решение уравнения (20.66) определяется выражением

$$D^*(z) = \frac{1}{\overline{[W^*(z, \gamma) W^*(z^{-1}, \gamma)]_+ [\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z)]_+}} \times \\ \times \left[\frac{\overline{H^*(z, \gamma) W^*(z^{-1}, \gamma) \Psi_x^*(z)}}{\overline{[W^*(z, \gamma) W^*(z^{-1}, \gamma)]_- [\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z)]_-}} \right]^+ . \quad (20.67)$$

Исходя из структуры уравнения (20.66), формулу (20.67) удобно преобразовать путем умножения ее обеих частей на $\overline{W^*(z, \gamma) W^*(z^{-1}, \gamma)}$:

$$D^*(z) \overline{W^*(z, \gamma) W^*(z^{-1}, \gamma)} = \frac{\overline{[W^*(z, \gamma) W^*(z^{-1}, \gamma)]_-}}{\overline{[\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z)]_+}} \times \\ \times \left[\frac{\overline{H^*(z, \gamma) W^*(z^{-1}, \gamma) \Psi_x^*(z)}}{\overline{[W^*(z, \gamma) W^*(z^{-1}, \gamma)]_- [\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z)]_-}} \right]^+ . \quad (20.68)$$

Обозначим передаточную функцию системы без корректирующего устройства (заданную ее часть) через

$$W^*(z, \gamma) = \frac{A(z, \gamma)}{B(z)} . \quad (20.69)$$

Будем здесь полагать, что полюсы функции (20.69) по модулю меньше единицы, т. е. заданная часть системы является устойчивой. Воспользовавшись обозначениями (20.10) и (20.69), нетрудно показать, что левая часть формулы (20.68) определяется выражением

$$D^*(z) \overline{W^*(z, \gamma) W^*(z^{-1}, \gamma)} = \\ = \frac{\overline{[A(z, \gamma) A(z^{-1}, \gamma)]_-}}{B(z^{-1})} \cdot \frac{B_v^+(z) E(z)}{[A_x(z) B_v(z) + A_v(z) B_x(z)]_+ B_H^+(z)} ,$$

где $E(z)$ — некоторый полином. Введем следующие обозначения:

$$\Lambda^*(z) = \frac{B_v^+(z) E(z)}{[A_x(z) B_v(z) + A_v(z) B_x(z)]_+ B_H^+(z)} , \quad (20.70)$$

$$\overline{[A(z, \gamma) \widehat{A}(z, \gamma)]_-} = \overline{A \widehat{A}^*_-}(z), \quad (20.71)$$

$$\overline{[A(z, \gamma) \widehat{A}(z, \gamma)]_+} = \overline{A \widehat{A}^*_+}(z), \quad (20.72)$$

$$\frac{\overline{A_H(z, \gamma) \widehat{A}(z, \gamma)}}{B_H(z)} = \overline{H \widehat{A}^*}(z), \quad (20.73)$$

где, в свою очередь, использовано обозначение

$$W^*(z^{-1}, \gamma) = \frac{A(z^{-1}, \gamma)}{B(z^{-1})} = \frac{\widehat{A}(z, \gamma)}{\widehat{B}(z)}, \quad (20.74)$$

$$\widehat{A}(z, \gamma) = A(z^{-1}, \gamma) z^k, \quad \widehat{B}(z) = B(z^{-1}) z^k,$$

а k — порядок полинома $B(z)$. Такое преобразование передаточной функции $W^*(z^{-1}, \gamma)$ всегда следует делать, чтобы правильно выполнить операцию факторизации относительно комплексной переменной z . Следовательно, выражения, входящие в уравнение (20.66), можно обозначить так:

$$D^*(z) \overline{W^*(z, \gamma) W^*(z^{-1}, \gamma)} = \frac{\overline{A \widehat{A}^*_-}(z)}{\widehat{B}(z)} \Lambda^*(z), \quad (20.75)$$

$$\overline{H^*(z, \gamma) W^*(z^{-1}, \gamma)} = \frac{\overline{H \widehat{A}^*}(z)}{\widehat{B}(z)}. \quad (20.76)$$

Подставив выражения (20.75) и (20.76) в уравнение (20.66), получаем

$$\oint_{\Gamma} \frac{D_1^*(z^{-1})}{\widehat{B}(z)} \{ \Lambda^*(z) \overline{A \widehat{A}^*_-}(z) [\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z)] - \\ - \overline{H \widehat{A}^*}(z) \Psi_x^*(z) \} z^{-1} dz = 0, \quad (20.77)$$

где полином $\widehat{B}(z)$ имеет нули вне единичного круга. Сравним уравнения (20.66) и (20.77). В уравнение (20.66) входит неизвестная функция $D^*(z)$, которая определяется формулой (20.67) и является решением уравнения (20.66). В уравнение (20.77) входит неизвестная функция $\Lambda^*(z)$, которая путем преобразований получена из решения уравнения (20.66) (т. е. из формулы (20.67)). Следовательно, определив из (20.77) функцию $\Lambda^*(z)$, мы получаем также выражение для оптимальной передаточной функции дискретного фильтра $D^*(z)$.

Действительно, так как

$$\overline{W^*(z, \gamma) W^*(z^{-1}, \gamma)} = \frac{\overline{A\hat{A}_+^*(z) A\hat{A}_-^*(z)}}{B(z) \hat{B}(z)},$$

то из (20.75) следует

$$D^*(z) = \frac{B(z)}{A\hat{A}_+^*(z)} \Lambda^*(z), \quad (20.78)$$

а передаточная функция системы

$$G^*(z, \gamma) = D^*(z) W^*(z, \gamma) = \frac{A(z, \gamma)}{A\hat{A}_+^*(z)} \Lambda^*(z).$$

Неизвестная функция $\Lambda^*(z)$, входящая в уравнение (20.77), в соответствии с формулой (2.70) имеет полюсы, совпадающие, как и выше, с полюсами функции $H^*(z, \gamma)$ и нулями $\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z)$, расположенными внутри единичного круга. Заметим, что можно было сразу ввести обозначения (20.71) — (20.76) и рассматривать решение уравнения (20.77) относительно функции $\Lambda^*(z)$. Определив $\Lambda^*(z)$ из уравнения (20.77) с помощью операций факторизации и расщепления и используя обозначения (20.10), мы получили бы выражение (20.70) и далее (20.78). Хотя такой путь получения решения более краток, но вместе с тем он более формален и менее очевиден с первого взгляда.

Ясно, что аналогичным образом можно получить интегральное уравнение для определения передаточной функции дискретного фильтра, исходя из минимума начального момента второго порядка огибающей ошибки $\bar{P}_e(\xi)$ (19.46). Решение этого уравнения и структура передаточной функции дискретного фильтра определяется выражениями, аналогичными полученным выше для функций $G_m^*(z, \gamma)$ и $D^*(z)$.

Рассмотрим методику определения оптимальной передаточной функции дискретного фильтра $D^*(z)$, которая принципиально остается той же, что и выше. Используем изображения корреляционных функций (20.16) и передаточную функцию желаемой системы (20.17). С учетом последней формулы выражение $\overline{H\hat{A}^*}(z)$ (20.73), входящее в (20.77), может быть представлено

в виде

$$\overline{H\widehat{A}^*}(z) = \overline{H_0^*(z, \gamma) \widehat{A}(z, \gamma)} + \sum_{i=1}^r \overline{\widehat{A}(z, \gamma) a_i(\gamma)} \frac{z}{z - \alpha_i}. \quad (20.79)$$

Структуру функции $\Lambda^*(z)$ примем аналогичной выражению (20.18). Таким образом

$$\Lambda^*(z) = \Lambda^*(0) + \sum_{i=1}^r \frac{A_i z}{z - \alpha_i} + \sum_{k=1}^n \frac{B_k z}{z - \beta_k}. \quad (20.80)$$

Вычислим контурный интеграл, входящий в уравнение (20.77), с помощью вычетов. Подобно уравнению (20.20) получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^r \frac{D_1(\alpha_i^{-1})}{\widehat{B}(\alpha_i)} \{A_i \overline{A\widehat{A}^*}(\alpha_i) [\Psi_x^*(\alpha_i) + \Psi_v^*(\alpha_i)] - \\ & \quad - \overline{\widehat{A}(\alpha_i, \gamma) a_i(\gamma) \Psi_x^*(\alpha_i)}\} + \\ & + \sum_{k=1}^n \frac{D_1(\beta_k^{-1})}{\widehat{B}(\beta_k)} \{B_k \overline{A\widehat{A}^*}(\beta_k) [\Psi_x^*(\beta_k) + \Psi_v^*(\beta_k)]\} + \\ & + \sum_{j=1}^n \frac{D_1(\mu_j^{-1})}{\widehat{B}(\mu_j)} \{\Lambda^*(\mu_j) \overline{A\widehat{A}^*}(\mu_j) (b_j + c_j + c'_j + d_j) - \\ & \quad - \overline{H\widehat{A}(\mu_j) (b_j + c_j)}\} + \\ & + \frac{D_1^*(\infty)}{\widehat{B}(\infty)} \{\Lambda^*(0) \overline{A\widehat{A}^*}(0) [\Psi_x^*(0) + \Psi_v^*(0)] - \overline{H\widehat{A}^*}(0) \Psi_x^*(0)\} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\Lambda^*(0) = \frac{\overline{H\widehat{A}^*}(0) \Psi_x^*(0)}{\overline{A\widehat{A}^*}(0) [\Psi_x^*(0) + \Psi_v^*(0)]}, \quad (20.81)$$

$$\Psi_x^*(\beta) + \Psi_v^*(\beta) = 0, \quad (20.82)$$

$$A_i = \frac{\overline{\widehat{A}(\alpha_i, \gamma) a_i(\gamma) \Psi_x^*(\alpha_i)}}{\overline{A\widehat{A}^*}(\alpha_i) [\Psi_x^*(\alpha_i) + \Psi_v^*(\alpha_i)]}, \quad (20.83)$$

$$\Lambda^*(\mu_j) = \frac{b_j + c_j}{b_j + c_j + c'_j + d_j} \cdot \frac{\overline{H\widehat{A}^*}(\mu_j)}{\overline{A\widehat{A}^*}(\mu_j)}. \quad (20.84)$$

Уравнения (20.81)—(20.84) аналогичны, таким образом, уравнениям (20.21) — (20.24). Они полностью определяют неизвестную функцию $\Lambda^*(z)$ (20.80) и в соответствии с (20.78) также оптимальную передаточную функцию дискретного фильтра $D^*(z)$, обеспечивающего минимум дисперсии огибающей ошибки. Сама дисперсия находится подобно выражению (20.30) и определяется формулой

$$\bar{D}_\varepsilon = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \overline{\{H^*(z, \gamma) H^*(z^{-1}, \gamma) \Phi_x^*(z) - \Lambda^*(z) \Lambda^*(z^{-1}) \times} \\ \times [\Phi_x^*(z) + \Phi_{xv}^*(z) + \Phi_{vx}^*(z) + \Phi_v^*(z)]\}} z^{-1} dz, \quad (20.85)$$

которая следует из (19.45). При получении формулы (20.85) учтено, что в соответствии с выражениями (20.75) и (20.78) и свойствами функции $W^*(z, \gamma)$ (20.69)

$$\overline{G^*(z, \gamma) G^*(z^{-1}, \gamma)} = \Lambda^*(z) \Lambda^*(z^{-1}).$$

Для случая, когда полезный сигнал и помеха не коррелированы, а функция $H^*(z, \gamma)$ не имеет полюсов, из (20.85) находим формулу, аналогичную (20.31):

$$\bar{D}_\varepsilon = \sum_{j=1}^n \overline{[H^*(\mu_j, \gamma) H^*(\mu_j^{-1}, \gamma) b_j - \Lambda^*(\mu_j) \Lambda^*(\mu_j^{-1}) (b_j + d_j)]} + \\ + \lim_{z \rightarrow 0} \overline{\{H^*(z, \gamma) H^*(z^{-1}, \gamma) \Phi_x^*(z) -} \\ - \Lambda^*(z) \Lambda^*(z^{-1}) [\Phi_x^*(z) + \Phi_v^*(z)]\}}. \quad (20.86)$$

Отметим, что при выполнении выкладок удобно пользоваться формулой [18, 62]

$$\overline{W^*(z, \gamma) W^*(z^{-1}, \gamma)} = T^{-1} \mathcal{Z} \{W(s) W(-s)\}, \quad (20.87)$$

которая получается аналогично выражению (14.79).

4. Примеры определения оптимальной передаточной функции дискретной системы.

Пример 1. Рассмотрим задачу синтеза оптимальной передаточной функции дискретной системы, осуществляющей фильтрацию и упреждение полезного сигнала на k периодов дискретности T и обеспечивающей минимум дисперсии ошибки. Полезный сигнал $x(t)$ и помеха

$v(t)$ (белый шум) имеют корреляционные функции соответственно

$$K_x[vT] = D_x e^{-\alpha |v| T}, \quad K_v[vT] = D_v \frac{\delta_0[vT]}{T}. \quad (20.88)$$

Полагая, что полезный сигнал и помеха не коррелированы между собой, находим

$$\begin{aligned} F_x^*(z) &= D_x \frac{z}{z - e^{-\alpha T}}; & F_v^*(z) &= \frac{D_v}{T}; \\ \Phi_x^*(z) &= \frac{D_x (e^{-\alpha T} - e^{\alpha T}) z}{(z - e^{-\alpha T})(z - e^{\alpha T})}; & \Phi_v^*(z) &= \frac{D_v}{T}; \\ \Phi_{xv}^*(z) &= \Phi_{vx}^*(z) = 0; & \Psi_x^*(z) &= \Phi_x^*(z); & \Psi_v^*(z) &= \Phi_v^*(z). \end{aligned} \quad (20.89)$$

Если считать, что $\gamma = 0$, то передаточная функция желаемой системы $H^*(z) = z^k$. Будем решать задачу в общей постановке для $\gamma \neq 0$. Найдем передаточную функцию $H^*(z, \gamma)$. Обозначим желаемый выходной сигнал через $x_0[nT]$. Так как $\Phi_{x x_0}^*(z, \gamma) = H^*(z, \gamma) \Phi_x^*(z)$ [52] (здесь $\Phi_{x x_0}^*(z)$ — двустороннее z -изображение взаимной корреляционной функции $K_{x x_0}[vT]$) и $x_0[(n + \gamma)T] = x[(n + k + \gamma)T]$, то $\Phi_{x x_0}^*(z, \gamma) = z^k \Phi_x^*(z, \gamma)$, где $\Phi_x^*(z, \gamma)$ — z -изображение с запаздыванием, соответствующее $\Phi_x^*(z)$. Таким образом, $z^k \Phi_x^*(z, \gamma) = H^*(z, \gamma) \Phi_x^*(z)$; выражение $\bar{\Phi}_x^*(z, \gamma)$ найдем из (7.52). Тогда

$$H^*(z, \gamma) = z^k \frac{\bar{\Phi}_x^*(z, \gamma)}{\Phi_x^*(z)} = z^k \frac{z \operatorname{ch} \alpha T \gamma + \operatorname{sh} \alpha T (1 - \gamma)}{\operatorname{sh} \alpha T}.$$

В соответствии с данными задачи имеем (п. 1)

$$n = 1; \quad \mu_1 = e^{-\alpha T}; \quad b_1 = D_x;$$

$$b_0 = c_0 = c'_0 = c_1 = c'_1 = d_1 = 0; \quad d_0 = \frac{D_v}{T}.$$

Передаточная функция $H^*(z, \gamma)$ полюсов не имеет, т. е. $a_i(\gamma) = 0$. Из формулы (20.21) следует, что $G^*(0, \gamma) = 0$. Составим уравнение (20.22)

$$\begin{aligned} \Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z) &= D_v \frac{z^2 - 2 \left[\frac{D_x T}{D_v} \operatorname{sh} \alpha T + \operatorname{ch} \alpha T \right] z + 1}{T (z - e^{-\alpha T})(z - e^{\alpha T})} = \\ &= D_v \frac{z^2 - 2 \operatorname{ch} \alpha_1 T z + 1}{T (z - e^{-\alpha T})(z - e^{\alpha T})}, \end{aligned}$$

где

$$\operatorname{ch} \alpha_1 T = \frac{D_x T}{D_v} \operatorname{sh} \alpha T + \operatorname{ch} \alpha T. \quad (20.90)$$

Отсюда получаем уравнение (20.22)

$$\beta^2 - 2 \operatorname{ch} \alpha_1 T \beta + 1 = 0, \quad (20.91)$$

корни которого $\beta_{1,2} = e^{\mp \alpha_1 T}$. Задаче отвечает корень $\beta_1 = e^{-\alpha_1 T}$. Система уравнений (20.24) в рассматриваемом случае сводится к одному уравнению ($n=1$). Имея в виду, что $\beta_1 = e^{-\alpha_1 T}$ и $\mu_1 = e^{-\alpha T}$, из (20.24) находим

$$\frac{B_1(\gamma) e^{-\alpha T}}{e^{-\alpha T} - e^{-\alpha_1 T}} = \frac{D_x}{D_x} e^{-\alpha k T} e^{-\alpha \gamma T},$$

откуда

$$B_1(\gamma) = [1 - e^{(\alpha - \alpha_1) T}] e^{-\alpha k T} e^{-\alpha \gamma T}, \quad (20.92)$$

и оптимальная передаточная функция (20.18)

$$G^*(z, \gamma) = [1 - e^{(\alpha - \alpha_1) T}] e^{-\alpha k T} \frac{z e^{-\alpha \gamma T}}{z - e^{-\alpha_1 T}}. \quad (20.93)$$

Таким образом, решение получено. Дисперсию ошибки определим из формулы (20.31). В результате находим

$$D_e[\gamma T] = D_x \left[1 - \frac{1 - e^{(\alpha - \alpha_1) T}}{1 - e^{-(\alpha + \alpha_1) T}} e^{-2\alpha k T} e^{-2\alpha \gamma T} \right]. \quad (20.94)$$

Проверим формулы (20.93) и (20.94) путем перехода к непрерывной системе, приняв, что $T \rightarrow 0$. Обозначив $\lim_{T \rightarrow 0} kT = t_0$ и имея в виду, что $\lim_{T \rightarrow 0} \gamma T = 0$, находим

$$\lim_{T \rightarrow 0} G^*(z, \gamma) = \frac{\alpha_1 - \alpha}{s + \alpha_1} e^{-\alpha t_0},$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} D_e[\gamma T] = D_x \left[1 - \frac{\alpha_1 - \alpha}{\alpha_1 + \alpha} e^{-2\alpha t_0} \right].$$

Из зависимости (20.90) следует, что при $T \rightarrow 0$

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{2D_x}{D_v} \alpha + \alpha^2}.$$

Отсюда получаем выражения

$$\lim_{T \rightarrow 0} G^*(z, \gamma) = G(s) = \frac{2D_x \alpha e^{-\alpha t_0}}{(\sqrt{2D_x \alpha + D_v x^2} + \alpha \sqrt{D_v})(\sqrt{2D_x \alpha + D_v \alpha^2} + s \sqrt{D_v})}, \quad (20.95)$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} D_\varepsilon[\gamma T] = D_x \frac{(1 - e^{-2\alpha t_0}) \sqrt{2D_x \alpha + \alpha^2 D_v} + (1 + e^{-2\alpha t_0}) \alpha \sqrt{D_v}}{\sqrt{2D_x \alpha + D_v \alpha^2} + \alpha \sqrt{D_v}}, \quad (20.96)$$

которые отвечают непрерывному случаю рассматриваемой задачи. Отметим, что при $k = 0$ (решении задачи сглаживания) выражение $G^*(z, \gamma)$ (20.93) совпадает с аналогичным выражением, полученным в работе [60] частотным методом. Это нетрудно видеть, если учесть, что коэффициент в формуле (20.93) при $T = 1$

$$1 - e^{\alpha - \alpha_1} = \frac{A}{C^2} \frac{1 - e^{-2\alpha}}{1 - e^{-(\alpha + \alpha_1)}}, \quad (20.97)$$

где $A \equiv D_x$, $B \equiv D_v$ и $C^2 \equiv B e^{\alpha_1 - \alpha}$ в обозначениях, использованных в [60]. Если бы при решении рассматриваемого примера мы воспользовались уравнением (20.24), полученным путем применения формулы (20.19) вместо (20.18), то передаточная функция (20.93) определилась бы выражением

$$G^*(z, \gamma) = [1 - e^{(\alpha - \alpha_1) T}] e^{-\alpha k T} \frac{e^{-\alpha T} e^{-\alpha \gamma T}}{z - e^{-\alpha_1 T}}. \quad (20.98)$$

С учетом выражения (20.97) формула (20.98) отвечает результату решения той же задачи (при $k = 0$) в работе [62], полученному путем применения операций факторизации и расщепления.

Пример 2. Рассмотрим решение той же задачи в случае, когда математические ожидания входных воздействий $x(t)$ и $v(t)$ отличны от нуля и равны соответственно m_x и m_v . В соответствии с формулой (20.60) оптимальная передаточная функция определяется формулой

$$G_m^*(z, \gamma) = BJ(z) + G^*(z, \gamma), \quad (20.99)$$

где выражение для $G^*(z, \gamma)$ было получено выше (см. (20.93)). Тогда

$$\begin{aligned} B &= \frac{m_x}{m_x + m_v} H^*(1, \gamma) - G^*(1, \gamma) = \\ &= \frac{m_x}{m_x + m_v} \cdot \frac{\text{sh } \alpha T \gamma + \text{sh } \alpha T (1 - \gamma)}{\text{sh } \alpha T} - \frac{1 - e^{(\alpha - \alpha_1) T}}{1 - e^{-\alpha_1 T}} e^{-\alpha(k + \gamma) T}. \end{aligned} \quad (20.100)$$

Пример 3. Положим, что система имеет приведенную непрерывную часть, состоящую из восстанавливающего элемента нулевого порядка и объекта с передаточной функцией

$$W_1(s) = \frac{b}{s + b}.$$

Найдем оптимальную передаточную функцию дискретного фильтра $D^*(z)$ в предположении, что входные воздействия те же, что и в примере 1, а $H^*(z, \gamma) = z^k e^{-\alpha \gamma T}$.

Имеем

$$W^*(z, \gamma) = \mathcal{Z}_\gamma \left\{ \frac{b(1 - e^{-sT})}{s(s + b)} \right\} = \frac{z(1 - e^{-bT\gamma}) + e^{-bT\gamma} - e^{-bT}}{z - e^{-bT}}.$$

В соответствии с (20.87)

$$\overline{W^*(z, \gamma) W^*(z^{-1}, \gamma)} = \frac{b^2}{T} \mathcal{Z} \left\{ \frac{e^{sT} + e^{-sT} - 2}{s^2(b^2 - s^2)} \right\}. \quad (20.101)$$

Правая часть этого выражения была определена выше, в п. 4 § 14. На основании формулы (14.87), где $a \equiv b$, получаем

$$\overline{W^*(z, \gamma) W^*(z^{-1}, \gamma)} = -c^2 \frac{z^2 + 2dz + 1}{z^2 - 2 \text{ch } bTz + 1}, \quad (20.102)$$

где

$$c^2 = \frac{\text{sh } bT - bT}{bT}, \quad d = \frac{bT \text{ch } bT - \text{sh } bT}{\text{sh } bT - bT}. \quad (20.103)$$

Отсюда

$$\overline{W^*(z, \gamma) W^*(z^{-1}, \gamma)} = c \frac{z - z_1}{z - e^{-bT}} \cdot c \frac{z - z_2}{e^{bT} - z}, \quad (20.104)$$

где

$$z_{1,2} = -d \pm \sqrt{d^2 - 1}, \quad |z_1| < 1, \quad |z_2| > 1.$$

Таким образом, на основании (20.71) и (20.72)

$$\overline{AA}_+^*(z) = c(z - z_1), \quad \overline{AA}_-^*(z) = c(z - z_2). \quad (20.105)$$

Так как в соответствии с (20.74)

$$W^*(z^{-1}, \gamma) = \frac{\hat{A}(z, \gamma)}{\hat{B}(z)} = \frac{1 - e^{-bT\gamma} + z(e^{-bT\gamma} - e^{-bT})}{1 - ze^{-bT}}$$

то

$$\begin{aligned} \overline{H\hat{A}^*}(z) &= z^k \overline{[1 - e^{-bT\gamma} + z(e^{-bT\gamma} - e^{-bT})] e^{-\alpha T\gamma}} = \\ &= \frac{(\alpha + b) T (1 - e^{-\alpha T}) - \alpha T [1 - e^{-(\alpha+b) T}]}{\alpha T (\alpha + b) T} z^k + \\ &+ \frac{z \{ [1 - e^{-(\alpha+b) T}] \alpha T - (\alpha + b) T e^{-bT} (1 - e^{-\alpha T}) \}}{\alpha T (\alpha + b) T} z^k. \end{aligned} \quad (20.106)$$

На основании уравнения (20.81) для рассматриваемого случая $\Lambda^*(0) = 0$. Решение уравнения (20.82) было получено выше в примере 1, оно совпадает с решением для (20.91) и его корень, по модулю меньший единицы, $\beta_1 = e^{-\alpha_1 T}$, где α_1 определяется выражением (20.90). Коэффициенты $A_i = 0$; система (20.84) сводится к одному уравнению при $\mu_1 = e^{-\alpha T}$, как и в примере 1. Следовательно,

$$\frac{B_1 e^{-\alpha T}}{e^{-\alpha T} - e^{-\alpha_1 T}} = \frac{\overline{H\hat{A}^*}(e^{-\alpha T})}{\overline{A\hat{A}^-}(e^{-\alpha T})}, \quad (20.107)$$

где числитель и знаменатель правой части (20.107) определяются соответственно соотношениями (20.106) и (20.105) при $z = e^{-\alpha T}$. Выражение (20.107) определяет коэффициент B_1 . Из формул (20.80) и (20.78) получаем

$$D^*(z) = \frac{z - e^{-bT}}{c(z - z_1)} \cdot \frac{[1 - e^{(\alpha - \alpha_1) T}] z}{z - e^{-\alpha_1 T}} \cdot \frac{\overline{H\hat{A}^*}(e^{-\alpha T})}{\overline{A\hat{A}^-}(e^{-\alpha T})} \quad (20.108)$$

(последние два множителя (20.108) представляют собой функцию $\Lambda^*(z)$). Найдем предел выражения (20.108) при $T \rightarrow 0$. Так как

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{z - e^{-bT}}{c(z - z_1)} = \frac{s + b}{b},$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{B_1 z}{z - e^{-\alpha_1 T}} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{[1 - e^{(\alpha - \alpha_1) T}] z}{z - e^{-\alpha_1 T}} \cdot \frac{\overline{H\hat{A}^*}(e^{-\alpha T})}{\overline{A\hat{A}^-}(e^{-\alpha T})} = G(s) \frac{bT}{bT},$$

то

$$\lim_{T \rightarrow 0} D^*(z) = D(s) = \frac{s + b}{b} G(s), \quad (20.109)$$

где $G(s)$ определяется выражением (20.95). Очевидно, что (20.109) отвечает передаточной функции фильтра для непрерывного варианта рассматриваемой задачи.

Если передаточная функция $D^*(z)$ реализуется на цифровой машине, то имеет место элемент чистого запаздывания z^{-1} , который целесообразно отнести к объекту, т. е. умножить $W^*(z, \gamma)$ на z^{-1} . Так как в этом случае формулы (20.69) и (20.74) принимают вид

$$W^*(z, \gamma) = \frac{A(z, \gamma)}{zB(z)} \quad \text{и} \quad W^*(z^{-1}, \gamma) = \frac{\hat{A}(z, \gamma)z}{\hat{B}(z)},$$

то

$$\overline{W^*(z, \gamma) W^*(z^{-1}, \gamma)} = \frac{\overline{A(z, \gamma) \hat{A}(z, \gamma)}}{B(z) \hat{B}(z)} = \frac{\overline{A \hat{A}_+^+(z) \cdot A \hat{A}_-^+(z)}}{B(z) \hat{B}(z)}.$$

Следовательно, формулы (20.101) — (20.105) не изменятся, и для учета запаздывания достаточно умножить на z выражение (20.106), а (20.108) — на z^{-1} .

§ 21. Определение передаточной функции дискретного корректирующего устройства замкнутой автоматической системы, обеспечивающей наилучшее приближение выходной переменной системы к желаемому непрерывному процессу

1. Определение оптимальной передаточной функции дискретного корректирующего устройства, обеспечивающей минимум дисперсии ошибки. Рассматриваемая здесь задача наглядно иллюстрируется структурной схемой на рис. 6.2. Требуется определить передаточную функцию $D^*(z)$ дискретного корректирующего устройства, обеспечивающую минимум дисперсии ошибки $D_\varepsilon[\gamma T]$. Так как дальше мы рассмотрим задачу минимизации дисперсии огибающей ошибки \bar{D}_ε , то здесь целесообразно ограничиться случаем $\gamma = 0$. Интегральное уравнение, определяющее оптимальную передаточную функцию $C^*(z)$, следует из выражения (19.61) аналогично (20.5)

$$\oint_{\Gamma} C^*(z^{-1}) \{C^*(z) W^*(z) W^*(z^{-1}) [\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z)] - \\ - W^*(z^{-1}) Q^*(z)\} z^{-1} dz = 0, \quad (21.1)$$

где $C_1^*(z)$ — произвольная функция, полюсы которой однако, расположены внутри контура Γ ,

$$Q^*(z) = \mathcal{L}\{H(s)[\Phi_x(s) + \Phi_{xv}(s)]\} = \mathcal{L}\{H(s)\Psi_x(s)\}, \quad (21.2)$$

$$\Phi_x(s) = F_x(s) + F_x(-s), \quad \Phi_{xv}(s) = F_{xv}(s) + F_{vx}(-s).$$

Решение уравнения (21.1), полученное с помощью операций факторизации и расщепления:

$$C^*(z) = \frac{1}{[z^{-1}W^*(z)W^*(z^{-1})]_+ [\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z)]_+} \times$$

$$\times \left[\frac{z^{-1}W^*(z^{-1})Q^*(z)}{[z^{-1}W^*(z)W^*(z^{-1})]_- [\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z)]_-} \right]^+,$$

откуда

$$C^*(z)W^*(z)W^*(z^{-1}) =$$

$$= \frac{z[W^*(z)W^*(z^{-1})]_-}{[\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z)]_+} \left[\frac{z^{-1}W^*(z^{-1})Q^*(z)}{[z^{-1}W^*(z)W^*(z^{-1})]_- [\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z)]_-} \right]^+. \quad (21.3)$$

Установим структуру правой части выражения (21.3).

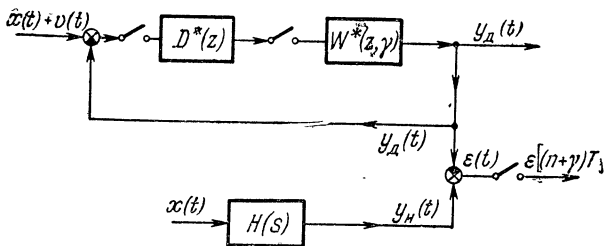


Рис. 6.2.

Для этого воспользуемся обозначением (20.69), кроме того, запишем в соответствии с (20.74)

$$W^*(z^{-1}) = \frac{A(z^{-1})}{B(z^{-1})} = \frac{\hat{A}(z)}{\hat{B}(z)}, \quad \hat{A}(z) = A(z^{-1})z^k, \quad (21.4)$$

$$\hat{B}(z) = B(z^{-1})z^k,$$

где k — порядок полинома $B(z)$. Будем полагать, как и выше, что объект устойчив, т. е.

$$B^-(z) = \hat{B}^+(z) = 1, \quad B^+(z) = B(z), \quad \hat{B}^-(z) = \hat{B}(z),$$

следовательно,

$$\begin{aligned} [W^*(z)]_+ &= \frac{A^+(z)}{B(z)}, \quad [W^*(z)]_- = A^-(z), \\ [W^*(z^{-1})]_+ &= \hat{A}_+(z), \quad [W^*(z^{-1})]_- = \frac{\hat{A}^-(z)}{\hat{B}(z)}. \end{aligned} \quad (21.5)$$

Отметим следующее обстоятельство. Для реальных дискретных систем, имеющих восстанавливающий элемент, $W^*(z)$ является правильной рациональной функцией. Поэтому выражение $\hat{A}(z)$ (21.4) всегда будет содержать множитель z . Это приводит, в частности, к тому, что множитель z^{-1} числителя второго сомножителя (21.3) компенсируется указанным множителем числителя $\hat{A}(z)$ функции $W^*(z^{-1})$. Кроме того, отметим, что $\hat{A}(0) = 0$. Используя формулу (21.2), нетрудно показать, что

$$Q^*(z) = \frac{A_Q(z)}{B_H(z) B_x(z)}, \quad (21.6)$$

где $B_H(z)$ — знаменатель функции $\mathcal{L}\{H(s)\} = H^*(z)$, $B_x(z)$ — знаменатель функции $\mathcal{L}\{\Psi_x(s)\} = \Psi_x^*(z)$, а $A_Q(z)$ — некоторый полином от z . С учетом выражений (21.5), (21.6), а также (20.10) находим структуру выражения (21.3); используя обозначение (20.70), получаем:

$$\begin{aligned} C^*(z) W^*(z) W^*(z^{-1}) &= \\ &= \frac{zA^-(z) \hat{A}^-(z)}{\hat{B}(z)} \cdot \frac{B_v^+(z) E(z)}{[A_x(z) B_v(z) + A_v(z) B_x(z)]_+ B_H^+(z)} = \\ &= \frac{zA^-(z) \hat{A}^-(z)}{\hat{B}(z)} \Lambda^*(z), \end{aligned} \quad (21.7)$$

где $E(z)$ — некоторый полином. Кроме того,

$$W^*(z^{-1}) Q^*(z) = \frac{\hat{A}(z)}{\hat{B}(z)} Q^*(z) = \frac{\hat{A}^+(z) \hat{A}^-(z)}{\hat{B}(z)} Q^*(z).$$

Подставив последние два выражения в (21.1), получаем интегральное уравнение относительно $\Lambda^*(z)$

$$\oint_{\Gamma} C_1^*(z^{-1}) \frac{\hat{A}^-(z)}{\hat{B}(z)} \{ \Lambda^*(z) A^-(z) [\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z)] - z^{-1} \hat{A}^+(z) Q(z) \} dz = 0. \quad (21.8)$$

Полюсы неизвестной функции $\Lambda^*(z)$, как это следует из формулы (21.7), совпадают с полюсами функции $H^*(z) = \mathcal{L}\{H(s)\}$ и нулями функции $\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z)$, расположенными внутри единичного круга. Выражение $G^*(z)$ для передаточной функции замкнутой системы следует из формул (21.5) и (21.7)

$$G^*(z) = C^*(z) W^*(z) = \frac{zA^-(z)}{\hat{A}^+(z)} \Lambda^*(z). \quad (21.9)$$

Из формулы (21.9) видно, что передаточная функция замкнутой системы удовлетворяет условию грубости, так как ее числитель содержит неминимально-фазовую часть передаточной функции $W^*(z)$, т. е. $A^-(z)$ [62]. Передаточная функция $D^*(z)$ оптимального корректирующего устройства в соответствии с выражениями (2.54) и (21.9) определяется формулой

$$\begin{aligned} D^*(z) &= \frac{C^*(z)}{1 - C^*(z) W^*(z)} = \frac{G^*(z)}{1 - G^*(z)} \cdot \frac{1}{W^*(z)} = \\ &= \frac{zA^-(z) \Lambda^*(z)}{\hat{A}^+(z) - zA^-(z) \Lambda^*(z)} \cdot \frac{B(z)}{A(z)}. \end{aligned} \quad (21.10)$$

Функция $C^*(z)$, как это следует из (21.9), определяется выражением

$$C^*(z) = \frac{zA^-(z)}{\hat{A}^+(z)} \cdot \frac{\Lambda^*(z)}{W^*(z)} = \frac{zB(z)}{\hat{A}^+(z) A^+(z)} \Lambda^*(z). \quad (21.11)$$

В связи с формулой (21.10) отметим следующее. Так как порядки полиномов $zA^-(z)$ и $\hat{A}^+(z)$ могут совпадать, то порядки числителя и знаменателя первого сомножителя (21.10) будут определяться в этом случае порядками числителя и знаменателя $\Lambda^*(z)$. Если последние также совпадают, то передаточная функция $D^*(z)$ не будет удовлетворять условиям физической осуществимости, так как второй сомножитель (21.10) ($1/W^*(z)$)

в этом случае имеет порядок числителя, на единицу больший порядка знаменателя. Чтобы условие физической осуществимости $D^*(z)$ удовлетворялось, функция $\Lambda^*(z)$ должна быть правильной алгебраической дробью (это эквивалентно тому, что $G^*(z)$ должна быть также правильной дробной рациональной функцией). С учетом указанного свойства функции $\Lambda^*(z)$ и способа определения ее полюсов, изложенного выше, она может быть представлена в виде

$$\Lambda^*(z) = \sum_{i=1}^r \frac{A_i}{z - \alpha_i} + \sum_{k=1}^n \frac{B_k}{z - \beta_k}. \quad (21.12)$$

Найдем теперь выражение для функции $Q^*(z)$. В соответствии с формулами (21.2) и (21.6) полюсы этой функции совпадают с полюсами функций $\Psi_x^*(z)$ и $H^*(z)$. Поэтому она может быть представлена с помощью соотношения

$$Q^*(z) = Q_0^*(z) + \sum_{i=1}^r \frac{\tilde{a}_i z}{z - \alpha_i} + \sum_j \frac{\tilde{b}_j z}{z - \mu_j} + \\ + \sum_j \frac{\tilde{c}_j z}{z - \mu_j} + \sum_q \frac{\tilde{b}_q z}{z - \mu_q^{-1}} + \sum_q \frac{\tilde{c}_q z}{z - \mu_q^{-1}}, \quad (21.13)$$

которое проще всего получить путем разложения произведения $Q(s) = H(s) \Psi_x(s)$ на простые дроби и последующего определения z -изображений, соответствующих простым дробям (см. пример п. 4 § 14 и пример 3 этого параграфа). В выражении (21.13) $Q_0^*(z)$ — целая функция, которая может быть вызвана наличием целой части функции $H(s)$ и значений b_0 и c_0 функций $F_x(s)$ и $F_{xv}(s)$; α_i — i -й полюс функции $\mathcal{L}\{H(s)\}$, μ_j — j -й полюс системы функций $\mathcal{L}\{F_x(s)\}$, $\mathcal{L}\{F_{xv}(s)\}$, $\mathcal{L}\{F_{vx}(s)\}$ и $\mathcal{L}\{F_v(s)\}$, \tilde{a}_i , \tilde{b}_j и \tilde{c}_j — постоянные. Последние две суммы (21.13) (где $\mu_q = \mu_j$) отвечают членам разложения $Q(s)$ на простые дроби, полюсы которых расположены в правой полуплоскости s . Часто принимают $H(s) = 1$, тогда $Q^*(z) = \Psi_x^*(z)$.

Подставим выражения $\Lambda^*(z)$ (21.12), $Q^*(z)$ (21.13) и (20.16), определяющие $\Psi_x^*(z)$ и $\Psi_v^*(z)$, в уравнение (21.8). Внутри контура Γ расположены полюсы в точках;

α_i — полюсы $Q^*(z)$ и $\Lambda^*(z)$, β_k — полюсы $\Lambda^*(z)$ и μ_j — полюсы $\Psi_x^*(z)$, $\Psi_v^*(z)$ и $Q^*(z)$. Подынтегральная функция полюса в точке $z=0$ не имеет, так как множитель z^{-1} компенсируется множителем z полинома $\hat{A}^+(z)$. Вычислив в (21.8) контурный интеграл с помощью вычетов, получаем уравнение, в которое входят неизвестные параметры функции $\Lambda^*(z)$. В силу произвольности функции $G_1^*(z)$ из этого уравнения находим

$$\Psi_x^*(\beta) + \Psi_v^*(\beta) = 0, \quad (21.14)$$

$$A_i = \frac{\tilde{a}_i \hat{A}^+(\alpha_i)}{A^-(\alpha_i) [\Psi_x^*(\alpha_i) + \Psi_v^*(\alpha_i)]}, \quad (21.15)$$

$$\Lambda^*(\mu_j) = \frac{\tilde{b}_j + \tilde{c}_j}{b_j + c_j + c'_j + d_j} \cdot \frac{\hat{A}^+(\mu_j) \mu_j^{-1}}{A^-(\mu_j)}, \quad (21.16)$$

где (21.15) и (21.16) отвечают всем значениям индексов i и j . Таким образом, уравнения (21.14) — (21.16) определяют неизвестные параметры A_i , β_k и B_k функции $\Lambda^*(z)$ (21.12).

Рассмотрим некоторые частные случаи. Если передаточная функция объекта минимально-фазовая, то $A^-(z) = 1$, $\hat{A}^+(z) = z$. Если $H(s) = 1$, то $Q^*(z) = \Psi_x^*(z)$ и $\tilde{b}_j = b_j$ и $\tilde{c}_j = c_j$. Наконец, если объект имеет минимально-фазовую характеристику и на вход идеальной системы с оператором $H(s)$ поступает дискретный сигнал, то $Q^*(z) = H^*(z) \Psi_x^*(z)$.

В том случае, когда объект условию минимальной фазы не отвечает, но $Q^*(z) = H^*(z) \Psi_x^*(z)$ (сигнал x — дискретный), вместо выражения (21.13) для $Q^*(z)$ нужно написать выражение для $H^*(z)$ (20.17), т. е. оставить лишь два первых члена, причем $Q_0^*(z)$ заменить на $H_0^*(z)$. В результате решения уравнения (21.8) в этом случае вместо (21.15) и (21.16) соответственно получаем

$$A_i = \frac{a_i \hat{A}^+(\alpha_i) \Psi_x^*(\alpha_i)}{A^-(\alpha_i) [\Psi_x^*(\alpha_i) + \Psi_v^*(\alpha_i)]}, \quad (21.17)$$

$$\Lambda^*(\mu_j) = \frac{b_j + c_j}{b_j + c_j + c'_j + d_j} \cdot \frac{\hat{A}^+(\mu_j) H^*(\mu_j) \mu_j^{-1}}{A^-(\mu_j)}, \quad (21.18)$$

Последней формулой удобно также пользоваться, когда объект не является минимально-фазовым и $H(s) = 1$. Если кратность полюсов функции $H(s)$ больше единицы, то оптимальная передаточная функция может быть определена аналогично тому, как это сделано в предыдущем параграфе.

Отметим следующее обстоятельство. Если желаемая дискретная передаточная функция $H^*(z)$ является правильной алгебраической дробью

$$H^*(z) = \sum_{i=1}^r \frac{a_i}{z - \alpha_i},$$

где $\alpha_i < 1$, то при $v(t) = 0$ (т. е. $\Psi_v^*(z) = 0$, $\Psi_x^*(z) = \Phi_x^*(z)$) и условии, что объект имеет минимально фазовую характеристику ($A^-(z) = 1$ и $\bar{A}^+(z) = z$), методика определения $\Lambda^*(z)$ должна привести к результату

$$G^*(z) = H^*(z),$$

как это непосредственно следует из уравнения (21.1). Проверим это. Для указанной функции $H^*(z)$ в правой части (21.17) появляется множитель α_i^{-1} , (см. (21.8)), поэтому $A_i = a_i$. Следовательно,

$$\Lambda^*(z) = H^*(z) + \sum_{k=1}^n \frac{B_k}{z - \beta_k}.$$

Тогда из (21.18) находим

$$H^*(\mu_j) + \sum_{k=1}^n \frac{B_k}{\mu_j - \beta_k} = \frac{b_j}{b_j} \cdot \frac{\mu_j H^*(\mu_j) \mu_j^{-1}}{1} = H^*(\mu_j).$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^n \frac{B_k}{\mu_j - \beta_k} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

т. е. $B_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) и $\Lambda^*(z) = H^*(z) = G^*(z)$ (см. (21.9)). Ограничение, наложенное выше на функцию $\Lambda^*(z)$, приводит, в частности, к тому, что функция $H^*(z) = 1$ не может быть реализована в рассматриваемом случае, так как это приводит к нарушению условия физической осуществимости $D^*(z)$. Ближайшая по смыслу к $H^*(z) = 1$ функция $H^*(z) = z^{-1}$

удовлетворяет этому условию. Подобно тому, как это было сделано выше, нетрудно показать, что $G^*(z) = H^*(z) = z^{-1}$. При этом в соответствии с (21.10)

$$D^*(z) = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{W^*(z)}.$$

При $T \rightarrow 0$

$$\lim_{T \rightarrow 0} H^*(z) = 1, \quad \lim_{T \rightarrow 0} D^*(z) = \infty,$$

т. е. реализация функции $H(s) = 1$ требует бесконечного коэффициента усиления, как это и должно быть.

Дисперсия ошибки D_e может быть найдена по формуле (19.61) при $\gamma = 0$. С учетом оптимальности передаточной функции дискретного фильтра эта формула может быть упрощена подобно тому, как это сделано при выводе выражения (20.30). В результате находим

$$D_e = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \{ \mathcal{L} \{ H(s) H(-s) \Phi_x(s) \} - \Lambda^*(z) \Lambda^*(z^{-1}) [\Phi_x^*(z) + \Phi_{xv}^*(z) + \Phi_{vx}^*(z) + \Phi_v^*(z)] \} z^{-1} dz. \quad (21.19)$$

При выводе формулы (21.19) учтено, что в соответствии с выражениями (21.7) и (21.11)

$$C^*(z) W^*(z) C^*(z^{-1}) W^*(z^{-1}) = G^*(z) G^*(z^{-1}) = \Lambda^*(z) \Lambda^*(z^{-1}).$$

В заключение отметим, что полученные выше формулы полностью применимы также в случае, когда входное воздействие $x(t)$ представляет собой детерминированный сигнал и $v(t) = 0$. В этом случае формулы отвечают задаче определения передаточной функции дискретного фильтра, оптимального в смысле суммарной квадратической оценки ошибки. Для использования формул в указанном случае необходимо положить

$$\Phi_x(s) = X(s) X(-s), \quad \Phi_x^*(z) = X^*(z) X^*(z^{-1}), \quad (21.20)$$

где $X(s)$ и $X^*(z)$ — есть изображение по Лапласу и z — изображение функции $x(t)$. Соответственно в первой формуле (20.16) обозначение $F_x^*(z)$ нужно заметить на $X^*(z)$.

2. Определение оптимальной передаточной функции дискретного корректирующего устройства, обеспечивающей минимум дисперсии огибающей ошибки. Структурная схема системы в рассматриваемом случае та же, что и выше на рис. 6.2. Интегральное уравнение, определяющее оптимальную передаточную функцию, следует из выражения (19.62) аналогично (21.1)

$$\oint_{\Gamma} C_1^*(z^{-1}) \{C^*(z) \overline{W^*(z, \gamma) W^*(z^{-1}, \gamma)} [\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z)] - \overline{W^*(z^{-1}, \gamma) Q^*(z, \gamma)}\} z^{-1} dz = 0, \quad (21.21)$$

где

$$\begin{aligned} Q^*(z, \gamma) &= \mathcal{L}_{\gamma} \{H(s) [\Phi_x(s) + \Phi_{xv}(s)]\} = \\ &= \mathcal{L}_{\gamma} \{H(s) \Psi_x(s)\}. \end{aligned} \quad (21.22)$$

По своей структуре уравнение (21.21) сходно с уравнениями (20.66) и (21.1), так же как и методы их решения. Так как

$$Q^*(z, \gamma) = \frac{A_Q(z, \gamma)}{B_H(z) B_x(z)} \quad (21.23)$$

(см. (21.6)), то решение уравнения (21.21) определяется выражениями, аналогичными (20.67), (20.68) и (20.75), где обозначение $D^*(z)$ нужно заменить на $C^*(z)$. Используя формулы (20.70) — (20.72), а также обозначив

$$\frac{A_Q(z, \gamma) \widehat{A}(z, \gamma)}{B_Q(z)} = \overline{Q \widehat{A}^*}(z), \quad (21.24)$$

выражения, входящие в уравнение (21.21), можно представить в виде

$$C^*(z) \overline{W^*(z, \gamma) W^*(z^{-1}, \gamma)} = \frac{\overline{A \widehat{A}^*}(z)}{\widehat{B}(z)} \Lambda^*(z), \quad (21.25)$$

$$\overline{W^*(z^{-1}, \gamma) Q^*(z, \gamma)} = \frac{\overline{Q \widehat{A}^*}(z)}{\widehat{B}(z)}. \quad (21.26)$$

Подставив (21.25) и (21.26) в (21.21), находим уравнение

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \frac{C_1^*(z^{-1})}{\widehat{B}(z)} \{\Lambda^*(z) \overline{A \widehat{A}^*}(z) [\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z)] - \\ - \overline{Q \widehat{A}^*}(z)\} z^{-1} dz = 0, \end{aligned} \quad (21.27)$$

которое отличается от (20.77) лишь вторым членом в фигурных скобках. Неизвестной является функция $\Lambda^*(z)$, полюсы которой совпадают с полюсами и нулями известных нам функций. Определив функцию $\Lambda^*(z)$, нетрудно из (21.25) найти $C^*(z)$:

$$C^*(z) = \frac{B(z)}{A\widehat{A}_+^*(z)} \Lambda^*(z), \quad (21.28)$$

откуда

$$G^*(z, \gamma) = C^*(z) W^*(z, \gamma) = \frac{A(z, \gamma)}{A\widehat{A}_+^*(z)} \Lambda^*(z).$$

Оптимальная передаточная функция самого корректирующего устройства $D^*(z)$ находится из приведенной выше формулы (21.10). Из формулы для $G^*(z, \gamma)$ при $\gamma = 0$ следует, что функция $G^*(z)$ является правильной алгебраической дробью. Поэтому передаточная функция $D^*(z)$, определенная из (21.10), физически реализуема при использовании для $\Lambda^*(z)$ соотношения (20.80).

Выведем уравнения, с помощью которых могут быть найдены неизвестные параметры функции $\Lambda^*(z)$. Для этого с учетом формул (20.79) и (21.13) запишем выражение для функции $\overline{Q\widehat{A}^*}(z)$ (21.24):

$$\begin{aligned} \overline{Q\widehat{A}^*}(z) &= \overline{Q_0^*(z, \gamma) \widehat{A}(z, \gamma)} + \sum_{i=1}^r \overline{\widehat{A}(z, \gamma) \tilde{a}_i(\gamma)} \frac{z}{z - \alpha_i} + \\ &+ \sum_I \overline{\widehat{A}(z, \gamma) \tilde{b}_I(\gamma)} \frac{z}{z - \mu_I} + \sum_I \overline{\widehat{A}(z, \gamma) \tilde{c}_I(\gamma)} \frac{z}{z - \mu_I} + \\ &+ \sum_q \overline{\widehat{A}(z, \gamma) \tilde{b}_q(\gamma)} \frac{z}{z - \mu_q^{-1}} + \sum_q \overline{\widehat{A}(z, \gamma) \tilde{c}_q(\gamma)} \frac{z}{z - \mu_q^{-1}}. \end{aligned} \quad (21.29)$$

Практически функция $\overline{Q\widehat{A}^*}(z)$ находится путем разложения произведения $H(s)\Psi_x(s)$ на простые дроби и определения z -изображений с запаздыванием (п. 4 § 14).

Подставив в интегральное уравнение (21.27) выражение $\Lambda^*(z)$ (20.80), $\overline{Q\widehat{A}^*}(z)$ (21.29) и (20.16), способом,

использованным выше, находим

$$\Lambda^*(0) = \frac{\overline{Q\hat{A}^*(0)}}{\overline{A\hat{A}_-^*(0)} [\Psi_x^*(0) + \Psi_v^*(0)]}, \quad (21.30)$$

$$\Psi_x^*(\beta) + \Psi_v^*(\beta) = 0, \quad (21.31)$$

$$A_i = \frac{\overline{\hat{A}(\alpha_i, \gamma) \tilde{a}_i(\gamma)}}{\overline{A\hat{A}_-^*(\alpha_i)} [\Psi_x^*(\alpha_i) + \Psi_v^*(\alpha_i)]}, \quad (21.32)$$

$$\Lambda^*(\mu_j) = \frac{\overline{\hat{A}(\mu_j, \gamma) \tilde{b}_j(\gamma)} + \overline{\hat{A}(\mu_j, \gamma) \tilde{c}_j(\gamma)}}{b_j + c_j + c'_j + d_j} \cdot \frac{1}{\overline{A\hat{A}_-^*(\mu_j)}}, \quad (21.33)$$

где (21.32) и (21.33) отвечают всем значениям индексов i и j . Таким образом, уравнения (21.30) — (21.33) определяют неизвестные параметры $\Lambda^*(0)$, A_i , B_k , и β_k функции $\Lambda^*(z)$ (20.80), которая в соответствии с формулами (21.28) и (21.10) позволяет найти оптимальную передаточную функцию дискретного фильтра $D^*(z)$, обеспечивающую минимум дисперсии огибающей ошибки, т. е. наилучшее приближение выходной переменной дискретной системы к желаемому непрерывному процессу. Часто задается $H(s) = 1$, тогда $Q^*(z, \gamma) = \Psi_x^*(z, \gamma)$ и вычисления существенно упрощаются.

Дисперсия огибающей ошибки \bar{D}_e определяется формулой (21.19), приведенной выше, где $\Lambda^*(z)$ найдено из системы (21.30) — (21.33), т. е. из условия минимизации \bar{D}_e . Отметим, что с учетом соотношений (21.20) полученные здесь формулы можно использовать также для определения оптимальной передаточной функции дискретного фильтра при детерминированном воздействии $x(t)$ и $v(t) = 0$. В этом случае будет обеспечиваться минимальная интегральная квадратическая оценка ошибки.

3. Определение оптимальной передаточной функции дискретного корректирующего устройства в случае, когда задающее воздействие и возмущение приложены в различных точках замкнутой дискретной системы. Структурная схема рассматриваемой системы представлена на рис. 6.1, а схема формирования ошибки для нее подобна изображенной на рис. 6.2.

Интегральное уравнение, определяющее оптимальную передаточную функцию $C^*(z)$, выводится аналогично (20.5), путем использования зависимости (19.66). Так как далее будет рассмотрена задача минимизации огибающей дисперсии ошибки, то здесь ограничимся случаем, когда $\gamma = 0$. Находим

$$\oint_{\Gamma} C_1^*(z^{-1}) \{C^*(z) W^*(z) W^*(z^{-1}) [\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z) + W^*(z) W^*(z^{-1}) \Phi_u^*(z)] - W^*(z^{-1}) Q^*(z) - W^*(z^{-1}) W^*(z) W^*(z^{-1}) \Phi_u^*(z)\} z^{-1} dz = 0. \quad (21.34)$$

Обозначим

$$\Psi_u^*(z) = W^*(z) W^*(z^{-1}) \Phi_u^*(z) = \frac{A_u(z)}{B_u(z)} \quad (21.35)$$

и запишем уравнение (21.34) в виде

$$\oint_{\Gamma} C_1^*(z^{-1}) \{C^*(z) W^*(z) W^*(z^{-1}) [\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z) + \Psi_u^*(z)] - W^*(z^{-1}) Q^*(z) - W^*(z^{-1}) \Psi_u^*(z)\} z^{-1} dz = 0. \quad (21.36)$$

Далее будем действовать так же, как и выше. Решение уравнения (21.36), полученное с помощью операций факторизации и расщепления,

$$C^*(z) = \frac{1}{[z^{-1} W^*(z) W^*(z^{-1})]_+ [\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z) + \Psi_u^*(z)]_+} \times \times \left[\frac{z^{-1} W^*(z^{-1}) Q^*(z) + z^{-1} W^*(z^{-1}) \Psi_u^*(z)}{[z^{-1} W^*(z) W^*(z^{-1})]_- [\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z) + \Psi_u^*(z)]_-} \right]^+,$$

откуда

$$C^*(z) W^*(z) W^*(z^{-1}) = \frac{z [W^*(z) W^*(z^{-1})]_-}{[\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z) + \Psi_u^*(z)]_+} \times \times \left[\frac{z^{-1} W^*(z^{-1}) Q^*(z) + z^{-1} W^*(z^{-1}) \Psi_u^*(z)}{[z^{-1} W^*(z) W^*(z^{-1})]_- [\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z) + \Psi_u^*(z)]_-} \right]^+. \quad (21.37)$$

Установим структуру правой части выражения (21.37), воспользовавшись для этого выражениями (20.10), (20.69), (21.5), (21.6) и (21.35). В результате

преобразований находим

$$C^*(z) W^*(z) W^*(z^{-1}) = \frac{zA^-(z) \hat{A}^-(z)}{\hat{B}(z)} \times \\ \times \frac{B_v^+(z) E(z)}{B_H^+(z) [A_x(z) B_v(z) B_u(z) + A_v(z) B_x(z) B_u(z) + \\ + A_u(z) B_x(z) B_v(z)]_+}, \quad (21.38)$$

где $E(z)$ — некоторый полином. Запишем

$$C^*(z) W^*(z) W^*(z^{-1}) = \frac{zA^-(z) \hat{A}^-(z)}{\hat{B}(z)} \Lambda^*(z), \quad (21.39)$$

где через $\Lambda^*(z)$ обозначен второй сомножитель правой части (21.38). Кроме того, обозначим

$$W^*(z^{-1}) \Psi_u^*(z) = \frac{\hat{A}^+(z) \hat{A}^-(z)}{\hat{B}(z)} \Psi_u^*(z). \quad (21.40)$$

Подставив выражения (21.39) и (21.40) в уравнение (21.36), подобно (21.8) находим

$$\oint_{\Gamma} C_1^*(z^{-1}) \frac{\hat{A}^-(z)}{\hat{B}(z)} \{ \Lambda^*(z) A^-(z) [\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z) + \Psi_u^*(z)] - \\ - z^{-1} \hat{A}^+(z) Q^*(z) - z^{-1} \hat{A}^+(z) \Psi_u^*(z) \} dz = 0. \quad (21.41)$$

Уравнение (21.41) определяет неизвестную функцию $\Lambda^*(z)$, полюсы которой совпадают с полюсами функции $H^*(z)$ и нулями $\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z) + \Psi_u^*(z)$, расположенными внутри единичного круга (ср. с уравнением (21.8)). Передаточные функции замкнутой системы $G^*(z)$ и корректирующего устройства $D^*(z)$ выражаются через функцию $\Lambda^*(z)$ с помощью приведенных выше формул (21.9) и (21.10).

Таким образом, отличие от рассмотренного в п. 1 случая заключается лишь в несколько ином определении полюсов функции $\Lambda^*(z)$, связанном с учетом функции $\Psi_u^*(z)$ (21.35). Последняя путем разложения на простые дроби может быть представлена в виде

$$\Psi_u^*(z) = l_0 + \sum_{p=1}^m \frac{l_p z}{z - \lambda_p} + \sum_{q=1}^m \frac{\tilde{l}_q z}{z - \lambda_q^{-1}}, \quad (21.42)$$

где

$$l_0 = [\Psi_u^*(z) z]_{z=0}, \quad l_p = [\Psi_u^*(z) (z - \lambda_p)]_{z=\lambda_p},$$

$$\tilde{l}_q = [\Psi_u^*(z) (z - \lambda_q^{-1})]_{z=\lambda_q^{-1}}.$$

Очевидно, что полюсы функции $\Psi_u^*(z)$ (21.42), по модулю меньшие единицы, определяются полюсами функции $W^*(z)$ (объект предполагается устойчивым) и полюсами функции $\Phi_u^*(z)$, также по модулю меньшими единицы (см. (21.35)). Число указанных полюсов — m . Как было установлено выше (см. п. 1 предыдущего параграфа), функция $\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z)$ имеет n нулей, по модулю меньших единицы. Следовательно, функция $\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z) + \Psi_u^*(z)$ имеет $n + m$ нулей, по модулю меньших единицы. С учетом зависимости (21.38) и выполнения условия физической осуществимости $D^*(z)$ функция $\Lambda^*(z)$ может быть представлена в виде

$$\Lambda^*(z) = \sum_{i=1}^r \frac{A_i}{z - \alpha_i} + \sum_{k=1}^{n+m} \frac{B_k}{z - \beta_k}. \quad (21.43)$$

Подставим в уравнение (21.41) выражения $\Lambda^*(z)$ (21.43), $Q^*(z)$ (21.13), $\Psi_x^*(z)$ и $\Psi_v^*(z)$ (20.16), а также $\Psi_u^*(z)$ (21.42) и вычислим контурный интеграл с помощью вычетов. Подынтегральная функция имеет следующие полюсы, расположенные внутри контура Γ : в точках α_i (полюсы $Q^*(z)$ и $\Lambda^*(z)$), в точках β_k (полюсы $\Lambda^*(z)$), в точках μ_j (полюсы $\Psi_x^*(z)$ и $\Psi_v^*(z)$) и в точках λ_p (полюсы $\Psi_u^*(z)$). В результате аналогично тому, как это делалось выше, находим

$$\Psi_x^*(\beta) + \Psi_v^*(\beta) + \Psi_u^*(\beta) = 0, \quad (21.44)$$

$$A_i = \frac{\hat{A}^+(\alpha_i) \tilde{a}_i}{A^-(\alpha_i) [\Psi_x^*(\alpha_i) + \Psi_v^*(\alpha_i) + \Psi_u^*(\alpha_i)]}, \quad (21.45)$$

$$\Lambda^*(\mu_j) = \frac{\tilde{b}_j + \tilde{c}_j}{b_j + c_j + c'_j + d_j} \cdot \frac{\hat{A}^+(\mu_j) \mu_j^{-1}}{A^-(\mu_j)}, \quad (21.46)$$

$$\Lambda^*(\lambda_p) = \frac{\hat{A}^+(\lambda_p) \lambda_p^{-1}}{A^-(\lambda_p)}, \quad (21.47)$$

где уравнения (21.45), (21.46) и (21.47) отвечают соответственно всем значениям индексов $i = 1, 2, \dots, r$, $j = 1, 2, \dots, n$ и $p = 1, 2, \dots, m$.

Уравнения (21.44) — (21.47) следующим образом определяют неизвестные параметры функции $\Lambda^*(z)$. С помощью формулы (21.45) находятся коэффициенты A_i . В результате решения возвратного уравнения (21.44) находим $n + m$ его корней β_k , по модулю меньших единицы. После того, как будут определены параметры A_i и β_k , неизвестные коэффициенты B_k ($k = 1, 2, \dots, n + m$) могут быть найдены путем решения системы уравнений (21.46) и (21.47), число которых равно $n + m$ (по суммарному числу полюсов μ_j и λ_p).

Так же, как и в п. 1, здесь возможны частные случаи: объект имеет минимально-фазовую характеристику; желаемая система является дискретной, т. е. $Q^*(z) = H^*(z) \Psi_x^*(z)$; оператор желаемой системы $H(s) = 1$, т. е. $Q^*(z) = \Psi_x^*(z)$. Для каждого из этих случаев система уравнений (21.44) — (21.47) несколько видоизменяется аналогично переходу от (21.15) и (21.16) к (21.17) и (21.18).

Рассмотрим теперь методику определения передаточной функции корректирующего фильтра, обеспечивающего минимум дисперсии огибающей ошибки. Соответствующее интегральное уравнение следует из формулы (19.67) для дисперсии огибающей ошибки \overline{D}_e :

$$\oint_{\Gamma} C_1^*(z^{-1}) \{C^*(z) \overline{W^*(z, \gamma) W^*(z^{-1}, \gamma)} [\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z) + \\ + W^*(z) W^*(z^{-1}) \Phi_u^*(z)] - \overline{W^*(z^{-1}, \gamma) Q^*(z, \gamma)} - \\ - \overline{W^*(z, \gamma) W^*(z^{-1}, \gamma) W^*(z^{-1}) \Phi_u^*(z)}\} z^{-1} dz = 0. \quad (21.48)$$

С учетом формул (21.35), (20.71), (20.72) и (20.74)

$$\overline{W^*(z, \gamma) W^*(z^{-1}, \gamma) W^*(z^{-1}) \Phi_u^*(z)} = \\ = \frac{A(z, \gamma) \widehat{A}(z, \gamma)}{B(z) \widehat{B}(z)} \cdot \frac{\widehat{A}(z)}{\widehat{B}(z)} \Phi_u^*(z) = \\ = \frac{A(z, \gamma) \widehat{A}(z, \gamma)}{\widehat{B}(z)} \cdot \frac{A(z) \widehat{A}(z)}{B(z) \widehat{B}(z)} \cdot \frac{\Phi_u^*(z)}{A(z)} = \\ = \overline{A \widehat{A}^*}(z) \Psi_u^*(z) A^{-1}(z) \widehat{B}^{-1}(z).$$

Подставив в уравнение (21.48) выражения (21.25), (21.26), а также, используя последнее равенство, находим

$$\oint_{\Gamma} \frac{C_1^*(z^{-1})}{\bar{B}(z)} \{ \Lambda^*(z) \overline{A\bar{A}}_-(z) [\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z) + \Psi_u^*(z)] - \\ - \overline{Q\bar{A}}^*(z) - \overline{A\bar{A}}^*(z) \Psi_u^*(z) A^{-1}(z) \} z^{-1} dz = 0, \quad (21.49)$$

где $\Lambda^*(z)$ — неизвестная функция, являющаяся решением уравнения (21.49):

$$\Lambda^*(z) = \frac{1}{[\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z) + \Psi_u^*(z)]_+} \times \\ \times \left[\frac{A(z) \overline{Q\bar{A}}^*(z) + \overline{A\bar{A}}^*(z) \Psi_u^*(z)}{A(z) [\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z) + \Psi_u^*(z)]_- \overline{A\bar{A}}_-(z)} \right]^+. \quad (21.50)$$

Структура функции $\Lambda^*(z)$ (21.50) определяется, так же как и выше, путем использования соответствующих обозначений. Она совпадает со структурой второго сомножителя правой части (21.38). Уравнение (21.49) аналогично уравнениям (21.27) и (21.41) и решается подобным же образом. Передаточная функция корректирующего устройства $D^*(z)$ выражается с помощью формул (21.28) и (21.10) через $\Lambda^*(z)$. Вид самой функции $\Lambda^*(z)$ определяется формулой, подобной (20.80),

$$\Lambda^*(z) = \Lambda^*(0) + \sum_{i=1}^r \frac{A_i z}{z - \alpha_i} + \sum_{k=1}^{n+m} \frac{B_k z}{z - \beta_k}. \quad (21.51)$$

Для определения неизвестных параметров функции $\Lambda^*(z)$ воспользуемся зависимостью (21.51) для этой функции, а также выражениями для $\overline{Q\bar{A}}^*(z)$ (21.29), $\Psi_x^*(z)$ и $\Psi_v^*(z)$ (20.16), $\Psi_u^*(z)$ (21.42). Подставим указанные выражения в уравнение (21.49) и вычислим контурный интеграл. Подынтегральная функция имеет полюсы внутри контура Γ в точках α_i (полюсы $\overline{Q\bar{A}}^*(z)$ и $\Lambda^*(z)$), в точках β_k (полюсы $\Lambda^*(z)$), в точках μ_j (полюсы $\Psi_x^*(z)$ и $\Psi_v^*(z)$), а также в точках λ_p (полюсы $\Psi_u^*(z)$). Имеется полюс в точке $z=0$. Сомножитель $A^{-1}(z)$ последнего члена уравнения (21.49) компенсируется соответствующим

сомножителем $A(z)$, входящим в числитель функции $\Psi_u^*(z)$ (21.35), поэтому полюсы этого члена определяются полюсами $\Psi_u^*(z)$. Учитывая сказанное, из уравнения (21.49), подобно (21.30) — (21.33) и (21.44) — (21.47), находим

$$\Lambda^*(0) = \frac{\overline{QA^*}(0) + \overline{AA^*}(0) \Psi_u^*(0) A^{-1}(0)}{A\overline{A^*}_-(0) [\Psi_x^*(0) + \Psi_v^*(0) + \Psi_u^*(0)]}, \quad (21.52)$$

$$\Psi_x^*(\beta) + \Psi_v^*(\beta) + \Psi_u^*(\beta) = 0, \quad (21.53)$$

$$A_i = \frac{\overline{\widehat{A}(\alpha_i, \gamma) \tilde{a}_i(\gamma)}}{A\overline{A^*}_-(\alpha_i) [\Psi_x^*(\alpha_i) + \Psi_v^*(\alpha_i) + \Psi_u^*(\alpha_i)]}, \quad (21.54)$$

$$\Lambda^*(\mu_j) = \frac{\overline{\widehat{A}(\mu_j, \gamma) \tilde{b}_j(\gamma)} + \overline{\widehat{A}(\mu_j, \gamma) \tilde{c}_j(\gamma)}}{b_j + c_j + c'_j + d_j} \cdot \frac{1}{A\overline{A^*}_-(\mu_j)}, \quad (21.55)$$

$$\Lambda^*(\lambda_p) = \frac{\overline{AA^*_+}(\lambda_p)}{A(\lambda_p)}, \quad (21.56)$$

где уравнения (21.54), (21.55) и (21.56) отвечают всем значениям индексов i, j и p . Дисперсия ошибки D_ε для оптимальной системы находится с помощью формулы

$$D_\varepsilon = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \{ \mathcal{Z} \{ H(s) H(-s) \Phi_x(s) \} - \\ - \Lambda^*(z) \Lambda^*(z^{-1}) [\Phi_x^*(z) + \Phi_{xv}^*(z) + \Phi_{vx}^*(z) + \Phi_v^*(z) + \\ + W^*(z) W^*(z^{-1}) \Phi_u^*(z)] \} z^{-1} dz = 0, \quad (21.57)$$

которая выводится аналогично (21.19). Для дисперсии огибающей ошибки \bar{D}_ε используется эта же формула, однако выражение для функции $\Lambda^*(z)$ будет здесь естественно другое.

4. Определение оптимальной передаточной функции дискретного корректирующего устройства при отличных от нуля математических ожиданиях входных воздействий. Используем результаты пп. 2 и 1 предыдущего и этого параграфов для решения задачи синтеза оптимальной передаточной функции дискретного корректирующего устройства замкнутой системы, обеспечивающей наилучшее приближение выходной переменной к желаемому непрерывному процессу, для случая, когда воздействия

$x(t)$ и $v(t)$ (рис. 6.2) имеют соответственно математические ожидания m_x и m_v .

Аналогично (20.37) и (21.1) уравнение, определяющее оптимальную передаточную функцию $C_m^*(z, \xi)$ в этом случае, имеет вид

$$\oint_{\Gamma} C_1^*(z^{-1}) \{C_m^*(z) W^*(z) W^*(z^{-1}) [\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z) + (m_x + m_v)^2 M^*(z, \xi)] - W^*(z^{-1}) Q_m^*(z)\} z^{-1} dz = 0. \quad (21.58)$$

Выражение для $Q_m^*(z)$ следует из (21.2) с учетом математических ожиданий m_x и m_v :

$$\begin{aligned} Q_m^*(z) &= \mathcal{L} \left\{ H(s) \left[\Phi_x(s) + \Phi_{xv}(s) + \frac{m_x^2}{s + \xi} + \frac{m_x^2}{-s + \xi} + \frac{m_x m_v}{s + \xi} + \frac{m_x m_v}{-s + \xi} \right] \right\} = \\ &= \mathcal{L} \left\{ H(s) \left[\Psi_x(s) + \frac{m_x(m_x + m_v)}{s + \xi} - \frac{m_x(m_x + m_v)}{s - \xi} \right] \right\}, \end{aligned}$$

где ξ — величина, близкая к нулю ($\xi > 0$). Из последнего выражения находим

$$\begin{aligned} Q_m^*(z) &= Q^*(z) + m_x(m_x + m_v) \times \\ &\times \left[\frac{H(-\xi)z}{z - \xi} - \frac{H(\xi)z}{z - \xi^{-1}} + \sum_{i=1}^r \frac{2a_i \xi}{\xi^2 - s_i^2} \cdot \frac{z}{z - a_i} \right], \quad (21.59) \end{aligned}$$

где

$$a_i = [H(s)(s + s_i)]_{s=-s_i}, \quad \xi = e^{-\zeta T}, \quad \alpha_i = e^{-s_i T},$$

а выражение для $Q^*(z)$ имеет такую же структуру, что и (21.13).

Подобно уравнению (21.8) из (21.58) получаем *)

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} C_1^*(z^{-1}) \frac{\hat{A}^-(z)}{\hat{B}(z)} \left\{ \Lambda_m^*(z, \xi) A^-(z) [\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z) + (m_x + m_v)^2 M^*(z, \xi)] - z^{-1} \hat{A}^+(z) \times \right. \\ \left. \times \left[Q^*(z) + m_x(m_x + m_v) \left(\frac{H(-\xi)z}{z - \xi} - \frac{H(\xi)z}{z - \xi^{-1}} \right) \right] \right\} dz = 0, \end{aligned}$$

) В выражении для $Q^(z)$ (21.13), используемом в этом уравнении, вместо \tilde{a}_i вводится величина $\tilde{\tilde{a}}_i$, объединяющая подобные члены в суммах по i в (21.13) и (21.59).

где аналогично (20.41), (21.12) и (20.50) — (20.51)

$$\Lambda_m^*(z, \xi) = \sum_{i=1}^r \frac{A_i(\xi)}{z - \alpha_i} + \frac{B_0(\xi)}{z - \beta_0(\xi)} + \sum_{k=1}^n \frac{B_k(\xi)}{z - \beta_k(\xi)}. \quad (21.60)$$

В результате определения вычетов из последнего уравнения, подобно (20.43) — (20.46), находим

$$\Psi_x^*(\beta(\xi)) + \Psi_v^*(\beta(\xi)) + (m_x + m_v)^2 M^*(\beta, \xi) = 0, \quad (21.61)$$

$$A_i(\xi) =$$

$$= \frac{\tilde{a}_i \hat{A}^+(\alpha_i)}{A^-(\alpha_i) [\Psi_x^*(\alpha_i) + \Psi_v^*(\alpha_i) + (m_x + m_v)^2 M^*(\alpha_i, \xi)]}, \quad (21.62)$$

$$\Lambda_m^*(\mu_j, \xi) = \frac{\tilde{b}_j + \tilde{c}_j}{b_j + c_j + c'_j + d_j} \cdot \frac{\hat{A}^+(\mu_j) \mu_j^{-1}}{A^-(\mu_j)}, \quad (21.63)$$

$$\Lambda_m^*(\xi, \xi) = \frac{m_x}{m_x + m_v} \cdot \frac{\xi^{-1} \hat{A}^+(\xi)}{A^-(\xi)} H(-\xi). \quad (21.64)$$

Аналогично тому, как это было сделано в п. 2 предыдущего параграфа, можно показать, что при $\xi \rightarrow 0$ и $\xi \rightarrow 1$ уравнения (21.61) — (21.63) переходят соответственно в (21.14) — (21.16), а

$$\Lambda_m^*(z) = \lim_{\xi \rightarrow 1} \left[\frac{B_0(\xi)}{z - \beta_0(\xi)} \right] + \Lambda^*(z) = BJ(z) + \Lambda^*(z), \quad (21.65)$$

где функция $J(z)$ определяется выражением (20.61), а величина постоянной B следует из формулы (21.64):

$$B = \frac{m_x}{m_x + m_v} \cdot \frac{\hat{A}^+(1)}{A^-(1)} H(0) - \Lambda^*(1); \quad (21.66)$$

передаточная функция $\Lambda^*(z)$ находится в соответствии с методикой, изложенной в п. 1, из условия минимизации дисперсии ошибки (т. е. в предположении, что $m_x = m_v = 0$). Так как функция $J(z)$ технически не может быть реализована точно, то приближенно

$$\Lambda_m^*(z) \approx \frac{B_0(\xi)}{z - \beta(\xi)} + \Lambda^*(z) \quad (21.67)$$

при значении параметра ξ , близком к единице, т. е. при значении $B_0(\xi)$, близком к нулю, и величине $\beta_0(\xi)$, близкой к единице (см. п. 2 предыдущего параграфа). Пока-

жем, что функция $\Lambda_m^*(z)$, определенная по формуле (21.65), обеспечивает условие несмещенности математического ожидания ошибки, что, в свою очередь, эквивалентно выполнению условия астатизма первого порядка. В соответствии с формулами (21.10) и (21.65) передаточная функция прямой цепи разомкнутой дискретной системы

$$D^*(z) W^*(z) = \frac{zA^-(z) [BJ(z) + \Lambda^*(z)]}{\hat{A}^+(z) - zA^-(z) [BJ(z) + \Lambda^*(z)]}.$$

Передаточная функция ошибки дискретной системы

$$G_e^*(z) = \frac{1}{1 + D^*(z) W^*(z)}.$$

При единичном ступенчатом входном воздействии для ошибки системы имеем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} e[nT] &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \frac{1}{1 + D^*(z) W^*(z)} \cdot \frac{z}{z-1} \right] = \\ &= \frac{1}{1 + D^*(1) W^*(1)}. \end{aligned}$$

В соответствии с формулой (21.66) и соотношением (20.61) для $J(z)$, а также выражением $D^*(z) W^*(z)$ при $z = 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + D^*(1) W^*(1)} &= \frac{\hat{A}^+(1) - A^-(1) [B + \Lambda^*(1)]}{\hat{A}^+(1)} = \\ &= \frac{m_x [1 - H(0)] + m_v}{m_x + m_v}. \end{aligned}$$

При $H(0) = 1$ и $m_v = 0$ из последних выражений следует, что для системы с передаточной функцией $\Lambda_m^*(z)$ (21.65) ошибки при единичном ступенчатом воздействии в установившемся режиме равна нулю. Аналогичным образом учитывается отличие от нуля математических ожиданий входных воздействий при минимизации огибающей ошибки.

5. Задача синтеза передаточной функции цифровой вычислительной машины, обеспечивающей наилучшее приближение выходной переменной системы к желаемому непрерывному процессу. Если пренебречь погрешностями квантования информации по уровню в преобразователях и самой машине, то указанная задача не

имеет каких-либо особенностей и решается рассмотренными выше методами. В случае, когда возникает необходимость эти погрешности учесть, структурная схема системы, отвечающая этой задаче, может быть представлена в виде, показанном на рис. 6.3. Здесь $x(t)$ — полезный сигнал, $v(t)$ и $u(t)$ — внешние возмущения,

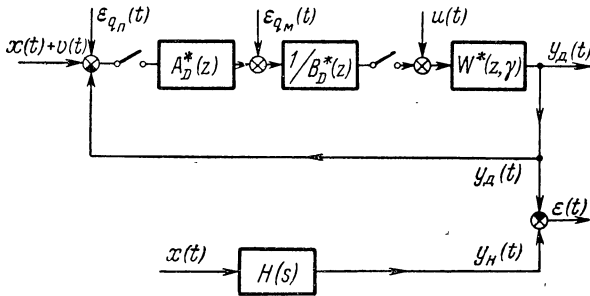


Рис. 6.3.

$\epsilon_{q_n}(t)$ — помеха от квантования информации по уровню в преобразователях, $\epsilon_{q_m}(t)$ — помеха, вызванная конечной длиной разрядной сетки. Подробно природа этих помех, имеющих статистический характер, и способы их математического описания были рассмотрены выше, в § 2. Ошибки $\epsilon_{q_n}(t)$ и $\epsilon_{q_m}(t)$ представляют собой дискретный белый шум с известными плотностями, определяемыми параметрами квантования информации; эти помехи можно трактовать как внутренние шумы, присутствующие самой системе.

Учет помехи $\epsilon_{q_n}(t)$ не представляет каких-либо трудностей, так как при решении задачи синтеза ее можно учитывать наравне с возмущением $v(t)$. Сложнее дело обстоит с помехой $\epsilon_{q_m}(t)$, для которой возникают принципиальные трудности. Это обусловлено тем обстоятельством, что она приложена не к входу корректирующего устройства с передаточной функцией $D^*(z)$, где

$$D^*(z) = \frac{A_D^*(z)}{B_D^*(z)},$$

и не к его выходу, т. е. не ко входу объекта с передаточной функцией $W^*(z, \gamma)$. Помеха $\varepsilon_{q_m}(t)$ приложена к некоторой внутренней точке корректирующего устройства так, что слева от этой точки расположено звено с передаточной функцией $A_D^*(z)$, представляющей собой числитель передаточной функции корректирующего устройства $D^*(z)$, а справа — звено с передаточной функцией $1/B_D^*(z)$, представляющей ее знаменатель. Так как при решении задачи синтеза передаточная функция $D^*(z)$ неизвестна (она должна быть определена), то неизвестны, естественно, как ее числитель, так и знаменатель. Поэтому, к сожалению, не удастся выполнить такие структурные преобразования системы на рис. 6.3, с помощью которых можно было бы перенести точку приложения шума $\varepsilon_{q_m}(t)$ к входу системы или к входу объекта, не используя при этом в отдельности передаточные функции $A_D^*(z)$ или $B_D^*(z)$. Если бы такое структурное преобразование существовало, то задача сводилась бы соответственно к задаче Колмогорова — Винера или к задаче Пеллегрэна.

Когда учет помехи $\varepsilon_{q_m}(t)$ необходим (число разрядов машины невелико), то приближенно задача может быть решена в два этапа следующим образом. Вначале можно пренебречь $\varepsilon_{q_m}(t)$ и определить оптимальную передаточную функцию с учетом воздействий $x(t)$, $v(t)$, $\varepsilon_{q_n}(t)$ и $u(t)$. После того, как передаточная функция $D^*(z)$ будет найдена, помеху $\varepsilon_{q_m}(t)$ можно привести к входу объекта. Для этого нужно воспользоваться знаменателем, определенной таким образом передаточной функции, т. е. $B_D^*(z)$. Далее задача должна быть решена вновь в соответствии со структурной схемой на рис. 6.4, где звено с передаточной функцией $D_1^*(z)$ является корректирующим устройством, а помеха $\varepsilon_{q_m}(t)$ приложена к выходу корректирующего устройства и воздействует через звено с передаточной функцией $1/B_D^*(z)$. Передаточная функция корректирующего устройства $D_1^*(z)$ определяется (синтезируется) уже с учетом всех воздействий $x(t)$, $v(t)$, $u(t)$, $\varepsilon_{q_n}(t)$ и $\varepsilon_{q_m}(t)$. Как на первом, так и на втором этапах для решения задачи могут быть использованы методы, изложенные выше.

Отметим одно важное обстоятельство, связанное с решением задачи синтеза передаточной функции дискретного корректирующего устройства, на которое указывалось в § 3. Любой метод синтеза, в том числе и алгебраический, связан с необходимостью определения полюсов β_n оптимальной передаточной функции, т. е. с решением уравнения типа (21.14) (или (21.44)). Если это уравнение может быть решено в общем виде, то параметры q и T (как алгебраические величины) будут

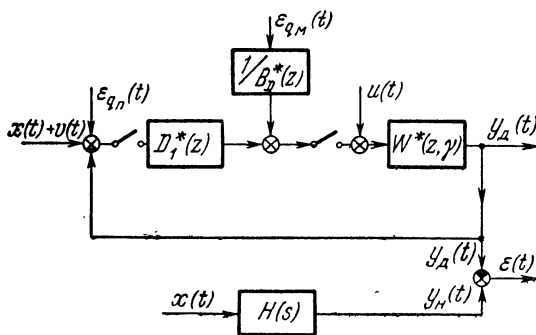


Рис. 6.4.

входить в выражение для передаточной функции дискретного корректирующего устройства $D^*(z)$ и в формулу, определяющую дисперсию ошибки. Задавая величины параметров q и T , можно выбрать их значения, при которых дисперсия ошибки приобретает желаемую величину, в том числе оценить отличие последней от ее значения при $q = T = 0$.

Ясно, что указанные выше алгебраические уравнения не всегда могут быть решены в общем виде. Приближенное же определение корней требует задания численных значений параметров q и T . В таком случае еще до решения задачи синтеза мы сталкиваемся с необходимостью фиксировать наиболее важные параметры цифровой системы, в том числе шаг дискретности T , который наиболее существенно влияет на величину дисперсии ошибки. Различным численным значениям параметров q и T соответствуют различные оптимальные передаточ-

ные функции $D^*(z)$, которым, в свою очередь, отвечают различные значения дисперсии ошибки.

Чтобы оценить влияние параметров q и T на точность системы в этом случае, необходимо решать задачу синтеза в следующей последовательности. Вначале нужно найти оптимальную передаточную функцию непрерывного корректирующего устройства $D(s)$ (при $q = T = 0$), обеспечивающую наилучшее приближение выходной переменной такой непрерывной системы к желаемому непрерывному процессу, т. е. решить задачу синтеза

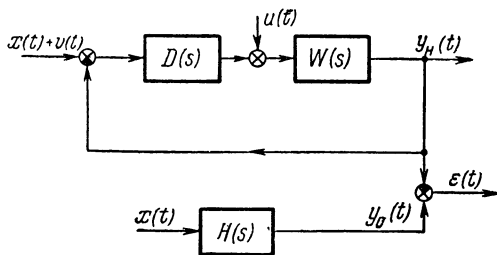


Рис. 6.5.

соответствующей непрерывной системы (рис. 6.5). Определенная таким образом передаточная функция $D(s)$ обеспечивает наименьшую возможную дисперсию ошибки физически реализуемой непрерывной системы или, что одно и то же, дискретной системы с параметрами $q = T = 0$. Далее замкнутую непрерывную систему с оптимальной передаточной функцией корректирующего устройства $D(s)$ следует принять за желаемую непрерывную систему, полагая, что к ней приложены те же воздействия $x(t)$, $v(t)$ и $u(t)$, что и при решении задачи синтеза для $D(s)$ (см. рис. 6.5). Соответствующая структурная схема показана на рис. 6.6. Задав теперь значения q и T отличными от нуля, можно решить задачу синтеза оптимальной передаточной функции дискретного корректирующего устройства $D^*(z)$ так, как об этом говорилось выше. Дисперсия ошибки дискретной системы на рис. 6.6 по отношению к выходной переменной непрерывной системы обусловлена целиком дискретностью процесса управления, так как к этим системам приложены одни и те же воздействия $x(t)$, $v(t)$ и

$u(t)$, а передаточная функция $D(s)$ отвечает условию физической осуществимости. Дисперсия ошибки дискретной системы по отношению к выходной переменной желаемой системы $H(s)$ будет естественно больше, чем

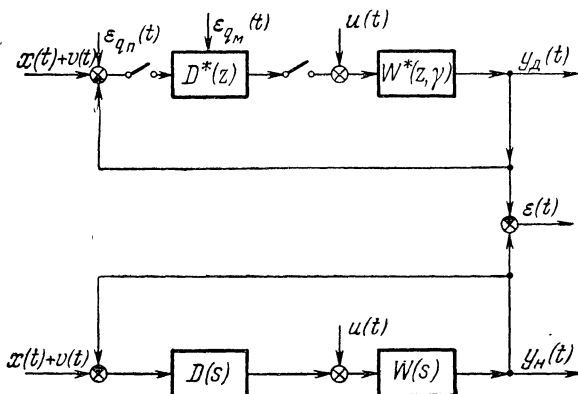


Рис. 6.6.

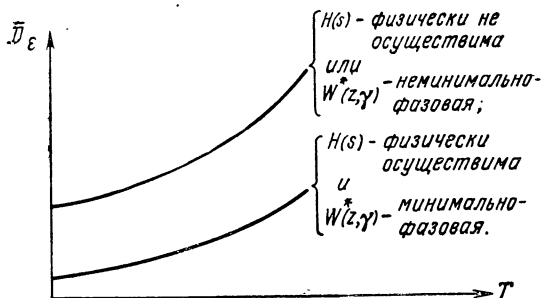


Рис. 6.7.

дисперсия ошибки соответствующей непрерывной системы с передаточной функцией корректирующего устройства $D(s)$, по отношению к этой же переменной. Отличие величин указанных дисперсий обусловлено отличием от нуля параметров q и T . Исходя из допустимого отличия величин указанных дисперсий, можно определить значения параметров q и T . На рис. 6.7 показан

примерный вид зависимости дисперсии ошибки от величины шага дискретности T при различных свойствах передаточных функций $H(s)$ и $W^*(z, \gamma)$.

6. Примеры определения оптимальной передаточной функции корректирующего устройства.

Пример 1. Решим с помощью метода, изложенного в п. 1 этого параграфа, задачу из статьи [71], где используется спектрально-частотный подход. В принятых обозначениях имеем

$$W_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}, \quad W_1(s) = \frac{1}{s(s+1)}, \quad H(s) = 1,$$

$$S_x(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2}, \quad S_v(\omega) = 0,02^*), \quad S_{xv}(\omega) = S_{vx}(\omega) = 0.$$

Величина $T = 0,2$ сек. Найдем оптимальную передаточную функцию $D^*(z)$ из условия минимума дисперсии ошибки D_e . Для решения задачи потребуется передаточная функция непрерывной части

$$W^*(z) = \mathcal{L} \left\{ \frac{1 - e^{-sT}}{s^2(s+1)} \right\} = \frac{0,019(z + 0,895)}{(z-1)(z-0,819)} = \frac{A(z)}{B(z)},$$

а также

$$W^*(z^{-1}) = \frac{0,019(z^{-1} + 0,895)}{(z^{-1} - 1)(z^{-1} - 0,819)} = \frac{0,019z(1 + 0,895z)}{(1-z)(1-0,819z)} = \frac{\hat{A}(z)}{\hat{B}(z)}.$$

Спектральным плотностям $S_x(\omega)$ и $S_v(\omega)$ соответствуют

$$F_x(s) = \frac{1}{2(1+s)}; \quad F_x^*(z) = \frac{z}{2(z-0,819)};$$

$$\Psi_x^*(z) = \Phi_x^*(z) = -\frac{0,2013z}{(z-0,819)(z-1,221)};$$

$$F_v^*(z) = \frac{0,02}{0,2} = 0,1; \quad \Psi_v^*(z) = \Phi_v^*(z) = 0,1;$$

$$\Psi_x^*(z) + \Psi_v^*(z) = \frac{0,1(z-0,261)(z-3,791)}{(z-0,819)(z-1,221)}. \quad (21.68)$$

В рассматриваемом примере объект имеет минимально-фазовую характеристику, т. е. $\hat{A}^+(z) = z$, $A^-(z) = 1$. Для функций $F_x^*(z)$ и $F_v^*(z)$ находим (см. (20.16)) $n = 1$;

) Величина $S_v(\omega)$ изменена здесь так, чтобы далее получить значение $\Phi_v^(z) = 0,1$, используемое в [71] (см. (7.64)).

$\mu_1 = 0,819$; $b_1 = 0,5$; $b_0 = c_0 = c'_0 = c_1 = c'_1 = d_1 = 0$; $d_0 = 0$, Передаточная функция $H(s)$ полюсов не имеет, т. е. $A_i = 0$. В соответствии с выражением (21.68) решение уравнения (21.14) дает один корень, модуль которого меньше единицы $\beta_1 = 0,261$. Так как (см. (21.12))

$$\Lambda^*(z) = \frac{B_1}{z - 0,261},$$

то из уравнения (21.18), при $j = 1$ и $\mu_1 = 0,819$ находим

$$\frac{B_1}{0,819 - 0,261} = \frac{0,819 \cdot 1 \cdot 0,819^{-1}}{1}, \quad B_1 = 0,558.$$

Следовательно, на основании формул (21.12), (21.11) и (21.10) получаем

$$\Lambda^*(z) = \frac{0,558}{z - 0,261}, \quad C^*(z) = \frac{29,25(z-1)(z-0,819)}{(z-0,261)(z+0,895)},$$

$$D^*(z) = \frac{29,25(z-1)(z-0,819)}{(z+0,895)(z-0,815)}.$$

Пример 2. Применим методику п. 1 этого параграфа для случая оптимизации передаточной функции корректирующего устройства при детерминированном воздействии. Воспользуемся данными для примера из работы [62], стр. 745, где задача решается методом полиномиальных уравнений. Так как там рассматривается безразмерное время, то примем $T = 1$. В принятых обозначениях имеем

$$W_0(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s}, \quad W_1(s) = \frac{10}{s(s+1)^2}, \quad H(s) = 1.$$

Надем оптимальную передаточную функцию $D^*(z)$ из условия минимума суммарной квадратической оценки ошибки при детерминированном воздействии $x(t) = 1(t)$. Находим

$$W^*(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{10(1 - e^{-s})}{s^2(s+1)^2} \right\} = \frac{1,04(z+2,32)(z+0,158)}{(z-1)(z-0,368)^2} = \frac{A(z)}{B(z)},$$

$$W^*(z^{-1}) = \frac{1,04(z^{-1}+2,32)(z^{-1}+0,158)}{(z^{-1}-1)(z^{-1}-0,368)^2} =$$

$$= \frac{1,04z(1+2,32z)(1+0,158z)}{(1-z)(1-0,368z)^2} = \frac{\hat{A}(z)}{\hat{B}(z)}.$$

Следовательно,

$$A^-(z) = z + 2,32, \quad \hat{A}^+(z) = z(1 + 2,32z). \quad (21.69)$$

Для входного воздействия $x(t)$ находим (21.20)

$$X^*(z) = \frac{z}{z-1}, \quad \Psi_x^*(z) = \Phi_x^*(z) = -\frac{z}{(z-1)^2}, \quad (21.70)$$

поэтому для функции $X^*(z)$ в обозначениях (20.16) $n = 1$; $\mu_1 = 1$; $b_1 = 1$; $b_0 = c_0 = c'_0 = c_1 = c'_1 = d_1 = 0$. Так же, как и выше, $A_i = 0$. Так как $\Psi_v^*(z) = 0$, то в соответствии с выражением (21.70) решение уравнения (21.14) дает один корень $\beta_1 = 0$. Так как

$$\Lambda^*(z) = \frac{B_1}{z-0} = \frac{B_1}{z},$$

то из уравнения (21.18) с учетом выражений (21.69) при $j = 1$ и $\mu_1 = 1$ находим

$$\frac{B_1}{1} = \frac{1}{1} \cdot \frac{3,32 \cdot 1 \cdot 1}{3,32}, \quad B_1 = 1.$$

Следовательно, на основании формул (21.12), (21.9) и (21.10) получаем

$$\Lambda^*(z) = \frac{1}{z}, \quad G^*(z) = \frac{z + 2,32}{z(1 + 2,32z)},$$

$$D^*(z) = \frac{(z - 0,368)^2}{2,41(z+1)(z+0,158)}.$$

Заметим, что при выводе уравнения (21.18) предполагалось, что функция $F_x^*(z)$ не имеет особенностей на окружности единичного радиуса. В этом же примере $\mu_1 = 1$. В общем случае указанное ограничение учитывается путем замены полюсов, расположенных на окружности единичного радиуса, полюсами в точках ξ и ξ^{-1} , где $\xi < 1$. Затем в конечных формулах осуществляется предельный переход $\xi \rightarrow 1$. Выше такими конечными формулами, полученными после определения вычетов, были (21.16) и (21.18). Принимая $\mu_1 = 1$, мы фактически использовали уравнение (21.18), полученное в результате указанного предельного перехода.

Пример 3. Проиллюстрируем теперь применение формул и зависимостей, полученных п. 2. Положим, что заданная часть системы включает восстанавливающий

элемент нулевого порядка и объект с передаточной функцией

$$W_1(s) = \frac{b}{s + b}. \quad (21.71)$$

Полезный сигнал и помеха (белый шум) являются непрерывными случайными функциями, корреляционные функции которых соответственно равны

$$K_x(\tau) = D_x e^{-a|\tau|}, \quad K_v(\tau) = D_v \delta(\tau). \quad (21.72)$$

Будем полагать, что эти воздействия не коррелированы между собой. Найдем передаточную функцию корректирующего устройства $D^*(z)$, обеспечивающую минимум дисперсии огибающей ошибки \bar{D}_e , при условии, что $H(s) = 1$. Определим выражения, необходимые для того, чтобы воспользоваться уравнениями (21.30) — (21.33). При этом учтем некоторые формулы, полученные в примере 3 предыдущего параграфа, где $W_1(s)$ — то же, что и здесь. Имеем

$$W^*(z, \gamma) = \frac{A(z, \gamma)}{B(z)} = \frac{z(1 - e^{-bT\gamma}) + e^{-bT\gamma} - e^{-bT}}{z - e^{-bT}}, \quad (21.73)$$

$$W^*(z^{-1}, \gamma) = \frac{\hat{A}(z, \gamma)}{\hat{B}(z)} = \frac{1 - e^{-bT\gamma} + z(e^{-bT\gamma} - e^{-bT})}{1 - ze^{-bT}}. \quad (21.74)$$

В соответствии с (20.104) и (20.105)

$$\frac{A\hat{A}_+^*(z)}{B(z)} \cdot \frac{A\hat{A}_-^*(z)}{\hat{B}(z)} = \frac{c(z - z_1)}{z - e^{-bT}} \cdot \frac{c(z - z_2)}{e^{bT} - z}. \quad (21.75)$$

Так как $H(s) = 1$, то на основании (21.22)

$$Q^*(z, \gamma) = \mathcal{L}_\gamma\{\Phi_x(s)\} = \mathcal{L}_\gamma\{F_x(s) + F_x(-s)\} = \Psi_x^*(z, \gamma).$$

Из (21.72) находим

$$F_x(s) = D_x \frac{1}{s + a}, \quad F_x(-s) = D_x \frac{1}{-s + a} = -D_x \frac{1}{s - a}.$$

Следовательно,

$$\Psi_x^*(z, \gamma) = \mathcal{L}_\gamma\left\{\frac{D_x}{s + a} - \frac{D_x}{s - a}\right\} = D_x \left(\frac{e^{-aT\gamma} z}{z - e^{-aT}} - \frac{e^{aT\gamma} z}{z - e^{aT}}\right). \quad (21.76)$$

Так как при $H(s) = 1$

$$\overline{Q\hat{A}^*}(z) = \overline{Q^*(z, \gamma) \hat{A}(z, \gamma)} = \overline{\Psi_x^*(z, \gamma) \hat{A}(z, \gamma)},$$

то в соответствии с (21.74) и (21.76) находим

$$\begin{aligned} \overline{Q\hat{A}^*}(z) &= D_x \left(\frac{e^{-aT\gamma} z}{z - e^{-aT}} - \frac{e^{aT\gamma} z}{z - e^{aT}} \right) [1 - e^{-bT\gamma} + z(e^{-bT\gamma} - e^{-bT})] = \\ &= D_x [(1 - ze^{-bT}) \overline{e^{-aT\gamma}} - (1 - z) \overline{e^{-(a+b)T\gamma}}] \frac{z}{z - e^{-aT}} - \\ &- D_x [(1 - ze^{-bT}) \overline{e^{aT\gamma}} - (1 - z) \overline{e^{(a-b)T\gamma}}] \frac{z}{z - e^{aT}}. \quad (21.77) \end{aligned}$$

Выполнив осреднение по γ

$$\begin{aligned} \overline{e^{-aT\gamma}} &= \int_0^1 e^{-aT\gamma} d\gamma = \frac{1 - e^{-aT}}{aT}; \\ \overline{e^{aT\gamma}} &= \int_0^1 e^{aT\gamma} d\gamma = -\frac{1 - e^{aT}}{aT}; \\ \overline{e^{-(a+b)T\gamma}} &= \int_0^1 e^{-(a+b)T\gamma} d\gamma = \frac{1 - e^{-(a+b)T}}{(a+b)T}; \\ \overline{e^{(a-b)T\gamma}} &= \int_0^1 e^{(a-b)T\gamma} d\gamma = \frac{1 - e^{-(b-a)T}}{(b-a)T}, \end{aligned}$$

из формулы (21.77) получаем

$$\begin{aligned} \overline{Q\hat{A}^*}(z) &= \\ &= D_x \left[\frac{1 - e^{-aT}}{aT} (1 - ze^{-bT}) - \frac{1 - e^{-(a+b)T}}{(a+b)T} (1 - z) \right] \frac{z}{z - e^{-aT}} + \\ &+ D_x \left[\frac{1 - e^{aT}}{aT} (1 - ze^{-bT}) + \frac{1 - e^{-(b-a)T}}{(b-a)T} (1 - z) \right] \frac{z}{z - e^{aT}}. \quad (21.78) \end{aligned}$$

Сравнивая формулу (21.78) с общим выражением (21.29), видим, что члены правой части (21.78) соответствуют в рассматриваемом случае третьему

и пятому членам правой части (21.29). Выражения для изображений $F_x^*(z)$ и $F_v^*(z)$ корреляционных функций (21.72) здесь те же, что и в примере 1 предыдущего параграфа (20.89).

Таким образом, все вспомогательные выражения получены. Теперь можно определить параметры функции $\Lambda^*(z)$ с помощью уравнений (21.30)—(21.33). Так как в соответствии с (21.78) $Q\hat{A}^*(0) = 0$, то из (21.30) следует, что $\Lambda^*(0) = 0$. Решение уравнения (21.31) здесь то же, что и уравнения (20.91) в указанном выше примере, т. е. $\beta_1 = e^{-\alpha_1 T}$, где α_1 определяется формулой (20.90). Так как $H(s) = 1$, то $A_i = 0$. Следовательно (20.80),

$$\Lambda^*(z) = \frac{B_1 z}{z - e^{-\alpha_1 T}}. \quad (21.79)$$

Рассмотрим теперь уравнение (21.33), определив входящие туда величины. В соответствии с формулами (20.89) для изображений $F_x^*(z)$ и $F_v^*(z)$ имеем $n = j = 1$; $\mu_1 = e^{-\alpha T}$; $b_1 = D_x$; $b_0 = c_0 = c'_0 = c_1 = c'_1 = d_1 = 0$; $d_0 = D_v/T$. Второй член числителя первого сомножителя правой части (21.33) равен нулю, а первый определяется произведением D_x на выражение в квадратных скобках первого члена (21.78). Знаменатель второго сомножителя (21.33) соответствует числителю второго сомножителя (21.75). Учитывая сказанное, из (21.33) для $\mu_1 = e^{-\alpha T}$ находим

$$\begin{aligned} \frac{B_1 e^{-\alpha T}}{e^{-\alpha T} - e^{-\alpha_1 T}} &= \\ &= \frac{D_x \left\{ \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} [1 - e^{-(\alpha+b)T}] - \frac{1 - e^{-(\alpha+b)T}}{(\alpha+b)T} (1 - e^{-\alpha T}) \right\}}{D_x} \times \\ &\times \frac{1}{c(e^{-\alpha T} - z_2)} = \frac{b(1 - e^{-\alpha T}) [1 - e^{-(\alpha+b)T}]}{\alpha(\alpha+b)Tc(e^{-\alpha T} - z_2)}, \quad (21.80) \end{aligned}$$

откуда определяем B_1 . Следовательно,

$$\Lambda^*(z) = \frac{b(1 - e^{-\alpha T}) [1 - e^{-(\alpha+b)T}] [1 - e^{-(\alpha-\alpha_1)T}]}{\alpha(\alpha+b)T \cdot c(e^{-\alpha T} - z_2)} \cdot \frac{z}{z - e^{-\alpha_1 T}}. \quad (21.81)$$

Отсюда в соответствии с формулой (21.28) и выражением (21.75) находим

$$C^*(z) = \frac{b(1 - e^{-\alpha T}) [1 - e^{-(\alpha+b)T}] [1 - e^{(\alpha-\alpha_1)T}]}{\alpha(\alpha+b)T \cdot c(e^{-\alpha T} - z_2)} \cdot \frac{(z - e^{-bT})z}{c(z - z_1)(z - e^{-\alpha_1 T})}. \quad (21.82)$$

С помощью этого выражения из формулы (21.10) нетрудно найти оптимальную передаточную функцию $D^*(z)$ дискретного корректирующего устройства. Ввиду громоздкости этого выражения оно не приводится.

Проверим полученный результат. Для этого найдем выражение для $C^*(z)$ при $T \rightarrow 0$ из формулы (21.82), предварительно умножив ее на отношение T/T . Так как

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{z - e^{-bT}}{c(z - z_1)} = \frac{s + b}{b}, \quad \lim_{T \rightarrow 0} \frac{Tz}{z - e^{-\alpha_1 T}} = \frac{1}{s + \alpha_1},$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{b(1 - e^{-\alpha T}) [1 - e^{-(\alpha+b)T}] [1 - e^{(\alpha-\alpha_1)T}]}{\alpha(\alpha+b)T^2 c(e^{-\alpha T} - z_2)} = \alpha_1 - \alpha,$$

то

$$\lim_{T \rightarrow 0} C^*(z) = \frac{\alpha_1 - \alpha}{s + \alpha_1} \cdot \frac{s + b}{b}. \quad (21.83)$$

Воспользовавшись далее предельными зависимостями, полученными выше при решении примера 1 предыдущего параграфа, находим

$$\lim_{T \rightarrow 0} C^*(z) = C(s) = G(s) \frac{s + b}{b}, \quad (21.84)$$

где $G(s)$ определяется формулой (20.95) при $t_0 = 0$. Учитывая (21.71), из (21.84) получаем

$$C(s) = \frac{G(s)}{W_1(s)} \quad \text{или} \quad G(s) = C(s) W_1(s), \quad (21.85)$$

что отвечает решению задачи для непрерывного случая, так как формулы (21.85) определяют передаточную функцию $G(s)$, где

$$C(s) = \frac{D(s)}{1 + D(s) W_1(s)},$$

через передаточную функцию замкнутой системы $C(s)W_1(s)$, которая приравнивается синтезированной функции $G(s)$. Это справедливо, так как объект с передаточной функцией $W_1(s)$ имеет минимально-фазовую характеристику.

Пример 4. Рассмотрим пример синтеза дискретного корректирующего устройства для случая, когда возмущение приложено к входу объекта, воспользовавшись для этого формулами п. 3. Примем, что объект описывается передаточной функцией (21.71), использованной в примере 3. Полезный сигнал $x(t)$, приложенный к входу системы, и помеха $u(t)$ (белый шум), приложенная к входу объекта, не коррелированы между собой и описываются корреляционными функциями

$$K_x(\tau) = e^{-a|\tau|}, \quad K_u(\tau) = \frac{2}{b} \delta(\tau). \quad (21.86)$$

Найдем передаточную функцию $D^*(z)$, обеспечивающую минимум дисперсии ошибки D_e , в предположении, что $H(s) = 1$. Определим исходные выражения. В соответствии с (21.71), (21.73) и (21.74)

$$W^*(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{1 - e^{-bT}}{z - e^{-bT}}, \quad (21.87)$$

$$W^*(z^{-1}) = \frac{\hat{A}(z)}{\hat{B}(z)} = \frac{z(1 - e^{-bT})}{1 - ze^{-bT}}. \quad (21.88)$$

Из (21.86) находим

$$F_x^*(z) = \frac{z}{z - e^{-aT}}, \quad F_u^*(z) = \frac{2}{bT}. \quad (21.89)$$

Последнее выражение записано с учетом формулы (7.64). Следовательно,

$$\Phi_x^*(z) = \frac{(e^{-aT} - e^{aT})z}{(z - e^{-aT})(z - e^{aT})}, \quad \Phi_u^*(z) = \frac{2}{bT}. \quad (21.90)$$

Так как $v(t) = 0$, то $\Psi_x^*(z) = \Phi_x^*(z)$, а на основании (21.35)

$$\Psi_u^*(z) = \frac{4(1 - \operatorname{ch} bT)z}{(z - e^{-bT})(z - e^{bT})bT}, \quad (21.91)$$

поэтому

$$\begin{aligned} \Psi_x^*(z) + \Psi_u^*(z) &= \frac{-2 \operatorname{sh} \alpha T z}{z^2 - 2z \operatorname{ch} \alpha T + 1} + \frac{4(1 - \operatorname{ch} bT)z}{bT(z^2 - 2 \operatorname{ch} bTz + 1)} = \\ &= \frac{2}{2bT(1 - \operatorname{ch} bT) - \operatorname{sh} \alpha T \cdot b^2 T^2} \times \\ &\times \frac{z(z^2 - 2zd + 1)}{(z^2 - 2z \operatorname{ch} \alpha T + 1)(z^2 - 2z \operatorname{ch} bT + 1)}, \quad (21.92) \end{aligned}$$

где

$$d = \frac{2(1 - \operatorname{ch} bT) \operatorname{ch} \alpha T - \operatorname{sh} \alpha T \operatorname{ch} bT \cdot bT}{2(1 - \operatorname{ch} bT) - \operatorname{sh} \alpha T \cdot bT}. \quad (21.93)$$

Из выражений (21.42) и (21.91) следует, что $l_0 = 0$, $m = 1$, $\lambda_1 = e^{-bT}$, а l_1 и \tilde{l}_1 определяются формулами

$$l_1 = \frac{4(1 - \operatorname{ch} bT) e^{-bT}}{bT(e^{-bT} - e^{bT})}, \quad \tilde{l}_1 = \frac{4(1 - \operatorname{ch} bT) e^{bT}}{bT(e^{bT} - e^{-bT})}. \quad (21.94)$$

Объект имеет минимально-фазовую характеристику, поэтому (21.87), (21.88)

$$A^-(z) = 1, \quad \hat{A}^+(z) = z. \quad (21.95)$$

Все вспомогательные выражения получены. Найдем теперь параметры функции $\Lambda^*(z)$ с помощью уравнений (21.44)–(21.47). Из (21.44) и (21.92) получаем уравнение

$$\beta(\beta^2 - 2d\beta + 1) = 0, \quad (21.96)$$

корни которого

$$\beta_1 = 0, \quad \beta_{2,3} = d \pm \sqrt{d^2 - 1}.$$

Условию решения задачи удовлетворяют корни $\beta_1 = 0$ и $\beta_2 = d - \sqrt{d^2 - 1}$. Так как $H(s) = 1$, то $A_i = 0$, следовательно, на основании формулы (21.43)

$$\Lambda^*(z) = \frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z - \beta_2}. \quad (21.97)$$

Рассмотрим далее уравнение (21.46). Так как $H(s) = 1$, то в соответствии с (21.2) $Q^*(z) = \Psi_x^*(z)$. Поэтому для изображения $F_x^*(z)$ (21.89) имеем $n = 1$; $\mu_1 = e^{-\alpha T}$; $b_0 = 0$; $b_1 = \tilde{b}_1 = 1$. С другой стороны, $F_v^*(z) = F_{xv}^*(z) = F_{vx}^*(z) = 0$, поэтому $\tilde{c}_1 = c_1 = c'_1 = d_1 = 0$. Таким образом, из

уравнения (21.46) при $\mu_1 = e^{-aT}$ находим

$$\frac{B_1}{e^{-aT}} + \frac{B_2}{e^{-aT} - \beta_2} = \frac{1}{1} \cdot \frac{e^{-aT} e^{aT}}{1}. \quad (21.98)$$

Из уравнения (21.47) при $\lambda_1 = e^{-bT}$ получаем

$$\frac{B_1}{e^{-bT}} + \frac{B_2}{e^{-bT} - \beta_2} = \frac{e^{-bT} \cdot e^{bT}}{1}. \quad (21.99)$$

Из системы уравнений (21.98) и (21.99) находим неизвестные параметры B_1 и B_2 :

$$B_1 = \frac{e^{-(a+b)T}}{\beta_2}, \quad B_2 = \frac{(e^{-aT} - \beta_2)(\beta_2 - e^{-bT})}{\beta_2}. \quad (21.100)$$

Из формулы (21.9) получаем передаточную функцию замкнутой системы

$$G^*(z) = \frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z - \beta_2}, \quad (21.101)$$

где коэффициенты B_1 и B_2 определяются выражениями (21.100). Проверим полученные формулы путем предельного перехода $T \rightarrow 0$. Для соответствующего непрерывного случая, как это следует из [50] (стр. 279), должно быть справедливо соотношение

$$\lim_{T \rightarrow 0} G^*(z) = 1. \quad (21.102)$$

Определим из (21.101)

$$\lim_{T \rightarrow 0} G^*(z) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{B_1}{z} + \lim_{T \rightarrow 0} \frac{B_2}{z - \beta_2}.$$

В соответствии с формулой (21.93)

$$\lim_{T \rightarrow 0} d = 1.$$

С точностью до малых величин T соответствующего порядка

$$d - 1 \approx \frac{ab}{2} T^2$$

и

$$\beta_2 = d - \sqrt{(d-1)(d+1)} \approx 1 - T\sqrt{ab},$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} \frac{B_1}{z} &= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{e^{-(\alpha+b)T}}{\beta_2} \cdot \frac{1}{e^{sT}} = 1, \\ \lim_{T \rightarrow 0} \frac{B_2}{z - \beta_2} &= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{(e^{-\alpha T} - \beta_2)(\beta_2 - e^{-bT})}{\beta_2} \cdot \frac{1}{z - \beta_2} = \\ &= \lim_{T \rightarrow 0} T \frac{(-\alpha + \sqrt{\alpha b})(-b + \sqrt{\alpha b})}{-(s + \sqrt{\alpha b})} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, соотношение (21.102) выполняется. Для непрерывной системы это соотношение приводит к бесконечному коэффициенту усиления корректирующего устройства.

УКАЗАТЕЛЬ ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ¹⁾

1. Обозначения сигналов, параметров и элементов систем

$x(t)$ — входная переменная (16)

$y_d(t)$ — выходная переменная дискретной системы (46)

q_p, q_m — интервалы квантования по уровню в преобразователях и ЦВМ (10)

T — шаг квантования по времени (10)

$\varepsilon_{q_p}^*, \varepsilon_{q_m}^*$ — ошибки, обусловленные квантованием по уровню в преобразователях и ЦВМ (28, 34)

$x_q^*(t)$ — входная переменная, квантованная по времени и уровню (27)

$D^*(z)$ — передаточная функция дискретного корректирующего устройства (30)

$W_0(s), W_1(s)$ — передаточные функции восстанавливающего устройства и объекта управления (35)

$W^*(z, \gamma)$ — изображение непрерывной части дискретной системы $\mathcal{L}_\gamma \{W_0(s) W_1(s)\}$ (36)

$G^*(z, \gamma)$ — передаточная функция дискретной системы: для разомкнутой системы равная $D^*(z) W^*(z, \gamma)$ (38), а для замкнутой $C^*(z) W^*(z, \gamma)$, где

$$C^*(z) = D^*(z) [1 + D^*(z) W^*(z)]^{-1} \quad (42)$$

$y_n(t)$ — выходная переменная непрерывной желаемой системы (45)

$H(s)$ — передаточная функция непрерывной желаемой системы (60, 190)

$H^*(z, \gamma)$ — передаточная функция дискретной желаемой системы (60)

$D(s)$ — передаточная функция непрерывного желаемого корректирующего устройства (43)

$G(s)$ — передаточная функция непрерывной системы, соответствующей данной дискретной системе (51)

¹⁾ В скобках указаны номера страниц.

$\lambda(j\omega)$ — отношение частотных характеристик $D^*(j\omega)$ и $D(j\omega)$ (274)

$\varepsilon(t)$ — ошибка, обусловленная дискретностью процесса управления, равная разности $y_H(t) - y_d(t)$ (49).

Для основных передаточных функций используются следующие обозначения (34, 186, 190, 346, 347):

$$D^*(z) = \frac{A_D^*(z)}{B_D^*(z)}, \quad G^*(z, \gamma) = \frac{Q_d^*(z, \gamma)}{R_d^*(z)},$$

$$H(s) = \frac{Q_H(s)}{R_H(s)}, \quad H^*(z, \gamma) = \frac{Q_H^*(z, \gamma)}{R_H^*(z)},$$

$$W^*(z, \gamma) = \frac{A(z, \gamma)}{B(z)}, \quad W^*(z^{-1}, \gamma) = \frac{\hat{A}(z, \gamma)}{\hat{B}(z)}.$$

2. Изображения функций одной и двух переменных

$F(s)$ — изображение по Лапласу функции $f(t)$ (112)

$F^*(s, \gamma)$ — изображение по Лапласу дельта-модулированной функции $\dot{f}(t)$ (31, 244)

$F^*(z, \gamma)$ — z -изображение функции $f(t)$ (103)

$F(s, s_1)$ — двумерное изображение по Лапласу функции $f(t, t_1)$ (66)

$F^*(s, \gamma; s_1, \gamma_1)$ — двумерное изображение по Лапласу дельта-модулированной функции $f(t, t_1)$ (67)

$F^*(z, \gamma; z_1, \gamma_1)$ — двумерное z -изображение функции $f(t, t_1)$ (63)

$\Phi^*(z, z_1, \delta)$ — двумерное z -изображение функции $f(t, t_1) = \dot{f}(t-t_1)$ (102)

$F^*(z, \gamma)$ — изображение, осредненное по γ и равное $\int_0^1 F^*(z, \gamma) d\gamma$ (191)

3. Статистические характеристики случайных процессов и их изображения

$m_x(t)$ — математическое ожидание (121)

$K_x(t, t_1)$ — корреляционная функция (121)

$\Pi_x(t, t_1)$ — начальный момент второго порядка (121)

$D_x(t)$ — дисперсия (121)

$K_{xv}(t, t_1)$ — взаимная корреляционная функция (122)

$\Pi_{xv}(t, t_1)$ — взаимный начальный момент второго порядка (122)

$D_{xv}(t)$ — взаимная дисперсия (122)

$\Phi_x^*(z, z_1, \delta)$ — двумерное z -изображение функции $K_x(t, t_1)$ (125)

$D_x^*(z, \gamma)$ — одномерное z -изображение функции $D_x(t)$, (163)

$\Phi_x^*(z, z_1, \delta)$ — двумерное z -изображение функции $\Pi_x(t, t_1)$ (126)

$F_x^*(z, \delta)$ — одностороннее z -изображение функции $K_x(\tau)$ при $\tau = t - t_1 \geq 0$ (125)

$\Phi_x^*(z, \delta)$ — двустороннее z -изображение функции $K_x(\tau)$ (129)

$\Psi_x^*(z)$ — сумма двусторонних z -изображений функций $K_x(\tau)$ и $K_{xv}(\tau)$ (328)

$\Psi_v^*(z)$ — сумма двусторонних z -изображений функций $K_v(\tau)$ и $K_{vx}(\tau)$ (328)

$F_x(s)$ — одностороннее изображение по Лапласу функции $K_x(\tau)$ при $\tau \geq 0$ (130)

$\Phi_x(s)$ — двустороннее изображение по Лапласу функции $K_x(\tau)$ (130)

$\bar{\Psi}_x(s)$ — сумма двусторонних изображений по Лапласу функций $K_x(\tau)$ и $K_{xv}(\tau)$ (357).

Для основных изображений используются следующие обозначения (190, 330, 357, 358):

$$F_x^*(z, \gamma) = \frac{L^*(z, \gamma)}{M^*(z)}, \quad F_x(s) = \frac{L(s)}{M(s)},$$

$$\Psi_x^*(z) = \frac{A_x(z)}{B_x(z)}, \quad \Psi_v^*(z) = \frac{A_v(z)}{B_v(z)}.$$

$$Q^*(z) = \mathcal{L}\{H(s) \Psi_x(s)\} \frac{A_Q(z)}{B_H(z) B_x(z)}.$$

4. Характеристики погрешности цифровой системы

$K_e[nT, n_1T]$ — корреляционная функция погрешности в переходном режиме (176)

$D_e[nT]$ — дисперсия погрешности в переходном режиме (184)

$K_e[vT]$ — корреляционная функция погрешности в установившемся режиме (229)

$D_\varepsilon[\gamma T]$ — дисперсия погрешности в установившемся режиме (231)

\bar{D}_ε — дисперсия огибающей погрешности в установившемся режиме (240)

e^2 — относительная дисперсия погрешности (235), относительная интегральная квадратическая погрешность (268, 275)

$\varepsilon^2(\omega)$ — характеристика близости дискретной и соответствующей непрерывной систем (245, 278)

J_ε — суммарная квадратическая погрешность (263, 266)

\bar{J}_ε — интегральная квадратическая погрешность (264, 267)

e_{\sim}^2 — относительная среднеквадратическая погрешность при гармоническом воздействии (294)

e_1 — оценка гармонической погрешности (301)

$v(t)$ — помеха на входе системы (310)

$u(t)$ — помеха на входе объекта (325)

ЛИТЕРАТУРА

1. Бесекерский В. А., Динамический синтез систем автоматического регулирования, Изд-во «Наука», 1970.
2. Быков Ю. М. и др., Статистическая точность преобразования информации в комбинированной системе. В сб. «Вычислительная техника в управлении», Изд-во «Наука», 1966.
3. Ван дер Поль Б., Бреммер Х., Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа, ИЛ, 1952.
4. Ван-Трис Г., Синтез оптимальных нелинейных систем управления, Изд-во «Мир», 1964.
5. Верешкин А. Е. и др., Вероятностный анализ ошибок квантования в линейном цифровом фильтре при учете различных структур его реализации. Автоматика и телемеханика, № 8, 1968.
6. Виленкин С. Я., Статистические методы исследования стационарных процессов и систем автоматического регулирования, Изд-во «Сов. радио», 1967.
7. Волгин Л. Н., Элементы теории управляющих машин, Изд-во «Сов. радио», 1962.
8. Гарднер М. Ф., Бэрнс Дж. Л., Переходные процессы в линейных системах, Гостехиздат, 1949.
9. Гетманов А. Г., Динамические особенности реализации некоторых линейных операций на цифровой вычислительной машине. В сб. «Автоматическое управление и вычислительная техника», вып. 3, Машгиз, 1960.
10. Гусев В. Г., Об оценке относительной среднеквадратической ошибки реализации линейных операторов на цифровой вычислительной машине. Автоматика и телемеханика, № 6, 1966.
11. Гусев В. Г., Об оценке точности восстановления функции, квантованной по времени. Автоматика и телемеханика, № 9, 1967.
12. Гусев В. Г., Анализ погрешностей, возникающих в автоматической системе при реализации закона управления на цифровой вычислительной машине и гармоническом или случайном входных воздействиях. Автоматика и телемеханика, № 9, 1968.
13. Гусев В. Г., Двумерное z -преобразование и возможности его использования в статистической динамике дискретных автоматических систем, I. Автоматика и телемеханика, № 9, 1969.
14. Гусев В. Г., Двумерное z -преобразование и возможности его использования в статистической динамике дискретных систем, II. Автоматика и телемеханика, № 12, 1969.
15. Гусев В. Г., Определение оптимальной передаточной функции дискретной автоматической системы алгебраическим методом. Автоматика и телемеханика, № 5, 1970.
16. Гусев В. Г., Определение квадратической характеристики погрешности, обусловленной дискретностью процесса управления

в цифровой автоматической системе. Автоматика и телемеханика, № 11, 1970.

17. Джур и Э., Современные достижения в области импульсных и цифровых систем регулирования. В сб. «Теория дискретных, оптимальных и самонастраивающихся систем». Труды I-го конгресса ИФАК, Изд-во АН СССР, 1961.

18. Джур и Э., Импульсные системы автоматического регулирования, Физматгиз, 1963.

19. Диткин В. А., Прудников А. Г., Операционное исчисление по двум переменным и его приложения, Физматгиз, 1958.

20. Зальцер Дж. М., Частотный анализ цифровых вычислительных машин, работающих в реальном времени. В сб. «Частотные методы в автоматике», ИЛ, 1957.

21. Зайцева В. Н., Исследование допустимой дискретности решения систем дифференциальных уравнений на цифровой части аналого-цифрового комплекса. В сб. «Вычислительная техника в управлении», Изд-во «Наука», 1966.

22. Звонов С. Г., О применении двумерного z -преобразования при определении корреляционной функции выходного сигнала линейной импульсной системы. В сб. «Автоматическое управление», Изд-во «Зинатне», Рига, 1967.

23. Зенков В. В., Сравнение дискретных и непрерывных фильтров. Автоматика и телемеханика, № 8, 1968.

24. Катковник В. Я., Полуэктов Р. А., Многомерные дискретные системы управления, Изд-во «Наука», 1966.

25. Килин Ф. М., Дискретные методы исследования нестационарных и нелинейных систем управления больших масштабов. В сб. «Многосвязные и инвариантные системы. Нелинейные и дискретные системы», Изд-во «Наука», 1968.

26. Косякин А. А., Статистический анализ цифровых автоматических систем. В сб. «Многосвязные и инвариантные системы. Нелинейные и дискретные системы», Изд-во «Наука», 1968.

27. Корн Г. А., Моделирование случайных процессов на аналоговых и аналого-цифровых машинах, Изд-во «Мир», 1968.

28. Коршунов Ю. М., Бобиков А. И., Цифровые сглаживающие и преобразующие системы, Изд-во «Энергия», 1969.

29. Круг Е. К., Дилигенский С. Н., Принципы построения одноканальных цифровых регуляторов, Изд-во «Сов. радио», 1969.

30. Крутько П. Д., Статистическая динамика импульсных систем, Изд-во «Сов. радио», 1963.

31. Кузин Л. Т., Расчет и проектирование дискретных систем управления, Машгиз, 1962.

32. Кузьмин Э. А. и др., Некоторые вопросы анализа и синтеза автоматических систем с применением цифровых вычислительных устройств. В сб. «Вычислительная техника в управлении», Изд-во «Наука», 1966.

33. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, Физматгиз, 1958.

34. Линвилл В. К., Зальцер Дж. М., Анализ систем автоматического регулирования, содержащих цифровые вычислительные машины. В сб. «Частотные методы в автоматике», ИЛ, 1957.

35. Лившиц Н. А., Пугачев В. Н., Вероятностный анализ систем автоматического управления, т. 2, Изд-во «Сов. радио», 1963.
36. Ленинг Дж. Х., Бэттин Р. Г., Случайные процессы в задачах автоматического управления, ИЛ, 1958.
37. Математический анализ. СМБ. Функции, пределы, ряды, цепные дроби. Под ред. Люстерника Л. А. и Ямпольского А. Р., Физматгиз, 1961.
38. Пелегрэн М., Статистический расчет следящих систем, ИЛ, 1957.
39. Перов В. П., Статистический синтез импульсных систем, Изд-во «Сов. радио», 1959.
40. Поспелов Г. С., Импульсные системы автоматического регулирования. В сб. «Автоматическое управление и вычислительная техника», вып. 3, Машгиз, 1960.
41. Потапов М. Д., О нестационарных свойствах импульсных систем. В сб. «Автоматическое управление и вычислительная техника», вып. 3, Машгиз, 1960.
42. Пугачев В. С., Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, Физматгиз, 1962.
43. Пятницкий Г. И., Воздействие случайных процессов на системы прерывистого регулирования. Автоматика и телемеханика, № 5, 1960.
44. Ротач В. Я., Импульсные системы автоматического регулирования, Изд-во «Энергия», 1964.
45. Свешников А. А., Прикладные методы теории случайных функций, Судпромгиз, 1961.
46. Симкин М. М., Распространение метода Гольдфарба на нелинейные импульсные и цифровые системы. В сб. «Метод Гольдфарба в теории регулирования», Изд-во «Энергия», 1962.
47. Складчиков А. Н., Операторные методы в статистической динамике автоматических систем, Изд-во «Наука», 1965.
48. Солодов А. В., Теория информации и ее применение к задачам автоматического управления и контроля, Изд-во «Наука», 1967.
49. Техническая кибернетика. Проблемы управления и информации. Вопросы Советской науки. Под ред. В. А. Трапезникова и А. А. Харкевича, АН СССР, Изд-во «Наука», 1966.
50. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования. Под ред. В. В. Солодовникова. Кн. 2, Изд-во «Машиностроение», 1967.
51. Толстов Г. П., Ряды Фурье, Физматгиз, 1960.
52. Ту Ю. Т., Цифровые и импульсные системы управления, Машгиз, 1964.
53. Турбович И. Т., Метод близких систем и его применение для создания инженерных методов расчета линейных и нелинейных радиотехнических систем, Изд-во АН СССР, 1961.
54. Федоров С. М., Литвинов А. П., Автоматические системы с цифровыми управляющими машинами, Изд-во «Энергия», 1965.
55. Федоров С. М., Об учете квантования по уровню при синтезе цифровых автоматических систем. Изв. АН СССР, ОТН, Техническая кибернетика, № 1, 1963.

56. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 3, Изд-во «Наука», 1966.

57. Хэмминг Р. В., Численные методы, Изд-во «Наука», 1968.

58. Цыпкин Я. З., О системах автоматического регулирования, содержащих цифровые вычислительные машины. Автоматика и телемеханика, № 8, 1956.

59. Цыпкин Я. З., Оценка влияния квантования по уровню на процессы в цифровых автоматических системах. Автоматика и телемеханика, № 3, 1960.

60. Цыпкин Я. З., Теория импульсных систем, Физматгиз, 1958.

61. Цыпкин Я. З., Элементы теории цифровых автоматических систем. В сб. «Теория дискретных, оптимальных и самонастраивающихся систем». Труды 1-го конгресса ИФАК, Изд-во АН СССР, 1961.

62. Цыпкин Я. З., Теория линейных импульсных систем, Физматгиз, 1963.

63. Чанг Ш. С. Л., Синтез оптимальных систем автоматического управления, Изд-во «Машиностроение», 1964.

64. Челпанов И. Б., Оптимальная обработка сигналов в навигационных системах, Физматгиз, 1967.

65. Чернецкий В. И., Анализ точности нелинейных систем управления, Изд-во «Машиностроение», 1968.

66. Чхартишвили Л. П., К вопросу синтеза систем автоматического управления при произвольной структуре. Автоматика и телемеханика, № 12, 1965.

67. Alper P., A Consideration of the Discrete Volterra Series. IEEE Transaction on Automatic Control, V. 10, № 3, 1965.

68. Kramer R., Effects of Quantization on Feedback Systems with Stochastic Inputs. IRE Transactions on Automatic Control, V. 6, № 3, 1961.

69. Sage A. P., Smith S. L., Real-Time Digital Simulation for Systems Control. Proceedings of the IEEE, V. 54, № 12, 1966.

70. Sklansky J., Ragazzini J. K., Analysis of Errors in Sampled-Data Feedback Systems. Transaction AIEE, v. 74, pt. 2, 1955.

71. Tou J. T., Statistical Design of Digital Control Systems. IRE Transactions on Automatic Control, V. 5, № 4, 1960.

72. Widrow B., Statistical Analysis of Amplitude Quantized Sampled-Data Systems. Transaction AIEE Application and Industry, January, 1961.

Виктор Георгиевич Гусев

Методы исследования точности
цифровых автоматических систем

(серия: «Теоретические основы
технической кибернетики»)

М., 1973 г., 400 стр. с илл.

Редактор *Д. С. Фурманов*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно*

Корректоры *Э. В. Автонева, М. Л. Медведская*

Сдано в набор 11/X 1972 г. Подписано к печати 16/IV 1973 г.
Бумага 84×108¹/₃₂, тип. № 1. Физ. печ. л. 12,5. Условн.
печ. л. 21. Уч.-изд. л. 20,57. Тираж 6000 экз. Т-05736. Цена
книги 1 р. 54 к. Заказ № 353

Издательство «Наука»

Главная редакция

физико-математической литературы

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой
«Союзполиграфпрома» при Государственном комитете
Совета Министров СССР по делам издательств, полиграф-
фии и книжной торговли
г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29

