Л.Н. ВОЛГИН

ОПТИМАЛЬНОЕ ДИСКРЕТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Л.Н. ВОЛГИН

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ТЕХНИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ

Л. Н. ВОЛГИН

ОПТИМАЛЬНОЕ ДИСКРЕТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Под редакцией П. Д. КРУТЬКО

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1986

ББК 32.81
В67
УДК 62.50 . 512

В о л г и н Л. Н. **Оптимальное дискретное управление динамическими системами**/Под ред. П. Д. Крутько.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.— 240 с.

Излагаются методы оптимального управления процессами в динамических системах при помощи цифровых вычислительных машин. Основу развитой теории составляет метод полиномиальных уравнений. Рассмотрены динамические и статистические задачи управления, идентификации и аппроксимации.

Для специалистов в области теории управления и кибернетики.

Табл. 2. Ил. 22. Библиогр. 139 назв.

Р е ц е н з е н т
член-корреспондент АН СССР *Я. З. Цыпкин*

В $\frac{1502000000-119}{053(02)-86}$ 146-86

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга посвящена синтезу систем автоматического управления при помощи ЭВМ. В ней рассмотрены практически все варианты постановок одномерных задач, которые встречаются в теории оптимального управления:

— управление переходными процессами;

— обработка сигналов и управление при наличии случайных возмущений;

— аппроксимация и идентификация сигналов и систем.

В основу расчетов положен аппарат полиномиальных уравнений. Изложение теории полиномиальных уравнений ведется на уровне, предполагающем знание читателем основ высшей математики (линейная алгебра, дифференциальное исчисление, теория функций комплексного переменного, вариационное исчисление) и математической статистики. Вместе с тем изложение сделано максимально доступным для возможно более широкого круга читателей. В конце книги содержится относительно полная библиография по рассматриваемой проблеме.

Методы решения задач оптимального дискретного управления, описанные в книге (частично эти методы были изложены автором ранее в [17]), основаны на выполнении только арифметических операций и поэтому легко программируются. В случае громоздкости расчетов для их выполнения целесообразно использовать ЭВМ. Таким образом, полиномиальные уравнения могут служить основой алгоритмического обеспечения процессов автоматизированного проектирования автоматических систем.

Естественно, книга не является справочником готовых решений для каждой возникающей проблемы, но она содержит основные методы для решения этих проблем.

Автор считает своим прямым долгом выразить признательность своему учителю члену-корреспонденту АН СССР Я. З. Цыпкину за постоянное внимание к работе и поддержку и профессору П. Д. Крутько за ценные замечания, способствовавшие улучшению книги.

ВВЕДЕНИЕ

Излагаемые в книге методы являются развитием операционного исчисления, в котором операторы имеют вид полиномов и их отношений — рациональных функций. Полиномы и рациональные функции от элементарного оператора (например, оператора дифференцирования p, оператора запаздывания z и т. п.) — это простейший и наиболее распространенный класс операторов. Полиномиальные модели обладают преимуществом перед матричными моделями в том, что содержат меньшее число подлежащих определению параметров.

Сейчас, когда программы стандартизируются и унифицируются, остро стоит вопрос о наилучших методах счета. Полиномиальные уравнения позволяют рассчитывать на ЭВМ системы высокого уровня сложности.

1. Математический анализ и управляемые процессы

Триста лет тому назад в трудах великих мыслителей эпохи Возрождения — Исаака Ньютона (1643—1727) в Англии и Готфрида Вильгельма Лейбница (1646—1716) в Германии — создан математический анализ. Основным понятием математического анализа является понятие *переменной величины*. Изменение величины x во времени t описывает процесс $x = x(t)$. Математический анализ состоит из двух исчислений — *дифференциального*, основой структуры которого является операция дифференцирования

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

и *интегрального*, основой структуры которого является операция интегрирования:

$$\int_0^t x(t)\,dt = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta t_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} x(t_i)\,\Delta t_i.$$

Эти две операции являются взаимно обратными.

В трудах Ньютона определено понятие *дифференциального уравнения*, т. е. уравнения, связывающего изменение самого процесса x с изменениями его производных — скорости $\dot{x}$, ускорения $\ddot{x}$ и т. д.:

$$F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots)=0.$$

Несколько позже сложилось и понятие интегрального уравнения:

$$F\left(x, \int f[x(t)]\,dt, \ldots\right)=0.$$

Первое практическое приложение дифференциальных уравнений дал И. Ньютон в своих «Математических принципах натуральной философии» (1687): с помощью этих уравнений он описал движение небесных тел. Дифференциальное исчисление как основная часть математического анализа является в настоящее время универсальным средством описания и анализа явлений и процессов окружающего нас мира, а также технических систем.

Особенность ньютоновых дифференциальных уравнений состоит в том, что они описывают *неуправляемые* системы, находящиеся в естественном свободном движении. Однако с возрастающим вмешательством человека в природные процессы появилась необходимость описывать *управляемые* динамические системы. Оказалось, что они тоже могут быть описаны дифференциальными уравнениями, если ввести в них внешнее воздействие — процесс *управления* $u(t)$ и его производные. Дифференциальное уравнение управляемой динамической системы имеет вид

$$F(y, \dot{y}, \ddot{y}, \ldots; u, \dot{u}, \ddot{u}, \ldots)=0, \tag{1}$$

где $y=y(t)$ — управляемый процесс, а $u=u(t)$ — управляющее воздействие. В общем случае развитие управляемого процесса y зависит не только от самого сигнала управления u, но и от его производных по времени.

2. Операционное исчисление

Сразу с появлением математического анализа — анализа переменных величин — предпринимались попытки его алгебраизации, с тем чтобы избавиться от требующих выполнения предельных переходов операций дифференцирования и интегрирования и заменить их символическими операциями, подчиняющимися правилам алгебры. Строгие исследования показали, что для определенного класса процессов и явлений такая замена возможна. Так возникло *символическое*, или *операционное* исчисление *). В его создание и обоснование внесли вклад многие выдающиеся математики прошлого — Г. В. Лейбниц (1646—1716), Л. Эйлер (1707—1783), Ж. Л. Лагранж (1736—1813), П. С. Лаплас (1749—1827), Ж. Б. Фурье (1768—1830), О. Л. Коши (1789—1857), Дж. Буль (1815—1864), Б. Риман (1826—1866) и др.

Сущность операционного исчисления состоит в замене операции дифференцирования алгебраическим оператором $d/dt \doteqdot p$ таким, что дифференцирование функции $x(t)$ сводится к умножению ее «изображения» $\mathrm{x}(p)$ на этот оператор: $\dot{x} \doteqdot p\mathrm{x}(p)$. Операция интегрирования заменяется обратным в алгебраическом смысле оператором, таким, что интегрирование функции $x(t)$ сводится к делению ее изображения $\mathrm{x}(p)$ на оператор p:

$$\int x(t)\,dt \doteqdot \frac{\mathrm{x}(p)}{p}.$$

Для широкого класса процессов $x(t)$ изображения найдены. Их вычисление производится на основе интегрального преобразования Лапласа:

$$\mathrm{x}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} x(t)\,dt.$$

Впервые операционное исчисление широко применил к практическим задачам английский инженер О. Хевисайд (1850—1925).

Операционное исчисление хорошо решает *задачу анализа* динамических систем, т. е. исследования поведения системы под влиянием определенного комплекса внешних воздействий: задано внешнее воздействие $u(t)$, найти поведение системы $y(t)$, возникающее под влиянием этого воздействия. Но в связи с потребностями автоматизации управления возникла более общая *задача синтеза*, которая в простейшем случае заключается в следующем: найти управление $u(t)$, которое придает поведению системы $y(t)$ желаемый характер $x(t)$.

---

*) См., в частности, Маслов В. П. Операторные методы.— М.: Наука, 1973.— 544 с.

Операционное исчисление, казалось бы, решает эту задачу тривиально. Вот это решение. Пусть объект управления описывается операторным соотношением

$$\mathbf{y}(p)=\mathbf{g}(p)\mathbf{u}(p). \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{y}(p)$ — изображение управляемой величины, $\mathbf{u}(p)$ — изображение управляющего воздействия, $\mathbf{g}(p)$ — передаточная функция объекта. Будем искать управление в виде

$$\mathbf{u}(p)=\mathbf{w}(p)\mathbf{x}(p), \tag{3}$$

где $\mathbf{x}(p)$ — изображение желаемого хода процесса, $\mathbf{w}(p)$ — искомая передаточная функция управляющего устройства. Подставляя (3) в (2), получим $\mathbf{y}(p)=\mathbf{h}(p)\mathbf{x}(p)$, $\mathbf{h}(p)=\mathbf{g}(p)\mathbf{w}(p)$. Если мы хотим придать движению системы $y(t)$ желаемый характер $x(t)$, мы должны обеспечить равенство $\mathbf{y}(p)=\mathbf{x}(p)$, или $\mathbf{h}(p)=1$. Это значит, что передаточная функция управляющего устройства $\mathbf{w}(p)$ должна быть обратной передаточной функции управляемого объекта $\mathbf{g}(p)$:

$$\mathbf{w}(p)=\frac{1}{\mathbf{g}(p)}. \tag{4}$$

Вот тут-то и возникают трудности, которые не разрешает классическое операционное исчисление.

Дело в том, что передаточные функции реальных объектов являются правильными функциями, для индекса *) которых справедливо условие $\operatorname{ind}\mathbf{g}(p)<0$. Это значит, что движение этих объектов носит более или менее плавный («аналитический») характер: в нем отсутствуют мгновенные скачки и бесконечные выбросы. Реализация управляющего устройства вида (4) требует неправильной функции $\mathbf{w}(p)$, у которой $\operatorname{ind}\mathbf{w}(p)>0$. В неправильной функции имеется целая часть $[\mathbf{w}]$ — полином от p. Это значит, что управляющее устройство должно обладать дифференцирующими (предсказывающими) свойствами. В технике такие управляющие устройства точно не реализуются.

В связи с трудностями решения задачи синтеза непосредственно желаемого поведения $x(t)$ возникает следующая более общая постановка задачи синтеза: задано желаемое состояние системы $x(t)$, найти управление $u(t)$,

---

*) Понятие «индекса рациональной функции» поясняется в гл. 1.

обеспечивающее оптимальный переход в это состояние в смысле некоторого критерия оптимальности.

Задачи анализа процессов, описываемых дифференциальными уравнениями, успешно решаются средствами математического анализа, т. е. дифференциальным и интегральным исчислениями. Однако замечено, что тех математических средств, которые эффективно используются для решения задач *анализа* некоторого класса явлений, как правило, не хватает для эффективного решения задач *синтеза*. Задачи синтеза сложнее задач анализа, и поэтому попытки решения задач синтеза в рамках тех же математических средств, которые применяются для задач анализа, как правило, неэффективны.

3. Теория автоматического управления

Становление теории автоматического управления началось с появления первых машин, предназначенных для облегчения физического труда человека. Без решения вопроса о методах управления этими машинами эффект от уменьшения расхода физической энергии за счет их применения был бы в значительной мере нейтрализован необходимостью увеличения расхода умственной энергии, требующейся для управления ими.

Основной функцией управления машинами является сохранение устойчивости их движения, поддержание заданного режима их работы. Эта функция была автоматизирована с изобретением автоматических регуляторов. Первая паровая машина, построенная И. И. Ползуновым в 1765 г., имела поплавковый регулятор, который поддерживал заданный уровень воды в котле. Паровая машина Дж. Уатта (1784 г.) была снабжена центробежным регулятором угловой скорости вращения вала.

Действие этих регуляторов основано на следующем принципе: появление вредного эффекта (отклонение регулируемой величины от заданного значения) обнаруживается, измеряется и приводит в действие органы, устраняющие этот эффект. Этот принцип, названный впоследствии *принципом отклонения*, или *принципом обратной связи*, получил широкое распространение в технике.

В 1829 г. французский инженер и механик Жан Понселе (1788—1867) выдвинул другой принцип построения автоматических регуляторов — *принцип предварения*, или *принцип компенсации* [127]. Понселе предложил устройство, которое, по его замыслу, должно было бы обеспечить равномерность хода машины, несмотря на возмущающее действие нагрузки. Идея Понселе состояла в следующем: необходимо, чтобы возмущение подавалось на регулятор мгновенно, а на машину — с запаздыванием. Тогда регулятор успеет подать на машину воздействие, компенсирующее возмущение, вызванное случайным изменением нагрузки. Однако реализовать запаздывание силового воздействия технически затруднительно, и предложение Понселе осталось до сих пор только умозрительной конструкцией. Но принцип компенсации, который лежал в основе этого предложения, со временем получил признание и распространение в технике.

Начиная со второй половины XIX века происходит бурное развитие машиностроения и регуляторостроения. В конце XIX века выкристаллизовываются контуры будущей науки о регулировании машин и производственных процессов — теории автоматического регулирования. Основоположником этой науки по праву считается выдающийся русский ученый И. А. Вышнеградский (1831—1895). В опубликованной им в 1876 г. статье «Об общей теории регуляторов» [56] были заложены методики расчета линеаризованных систем автоматического регулирования. Работа Вышнеградского на многие годы стала теоретической основой регуляторостроения и сохранила свое значение поныне.

Массовое производство электронной техники поставило вопрос о пересмотре тех принципов, которые используются в автоматическом управлении. Речь идет об изменении господствующего положения, которое занимает в технике автоматического управления принцип обратной связи. Дело в том, что принцип обратной связи, несмотря на все свои достоинства, внутренне глубоко противоречив. Действуя по принципу обратной связи, *прежде чем ликвидировать вредный эффект, мы вынуждены его допустить*. Действительно, средства, ликвидирующие вредный эффект, приходят в действие лишь после того, как этот эффект обнаружен, а следовательно, допущен.

Принцип компенсации не обладает указанным недостатком. Он требует предвидеть причины, порождающие вредный эффект, и своевременно приводить в действие средства, ликвидирующие их последствия. Техническая реализация принципа компенсации оказалась возможной не на том пути, который намечал Понселе, а на том, который был указан Норбертом Винером (1894—1964) [12]. Идея Винера состояла в том, чтобы осуществить не *запаздывание* силового воздействия, а *предсказание* сигнала о нем. Регулятор, действующий на основе упрежденного значения сигнала, успеет привести в действие средства, компенсирующие последствия возмущения. Винер правильно указал, что предсказание сигналов может быть только статистическим. Это разрешило те недоразумения и ошибки, в которые впадали сторонники теории «полной компенсации» объектов и возмущений.

Значительная ясность в этот вопрос была внесена Н. Н. Лузиным [54], создавшим основы теории инвариантности решений дифференциальных уравнений. Н. Н. Лузин указал на возможность компенсации объектов в отдельных случаях и на причины, почему в остальных случаях такая компенсация невозможна, а именно: наличие разрывностей возмущения, возможность непредвиденных изменений в системе, а также невозможность установления абсолютно тождественного соответствия между параметрами регулятора и параметрами объекта. Это, казалось бы, малое несоответствие параметров в системах компенсации может приводить к качественному изменению свойств системы, появлению неустойчивости, автоколебаний, уменьшению помехоустойчивости. Явление качественного изменения свойств системы при малых изменениях ее параметров впервые было отмечено А. А. Андроновым [3]. Системы, в которых такое явление невозможно, были названы им *грубыми*. Таким образом, в системах компенсации возможно нарушение грубости.

Учитывая этот недостаток, свойственный системам компенсации, Норберт Винер высказал мысль, что наиболее разумные технические решения задач автоматического управления могут быть найдены на путях комбинирования метода обратной связи и метода компенсации. Вот что он пишет по этому поводу в своей книге «Кибернетика» [12]: «Системы управления с обратной связью и компенсационные системы... до некоторой степени конкурируют между собой. Какой из этих двух методов лучше, зависит... от того, насколько постоянна характеристика применяемого исполнительного органа. Естественно предположить, что могут быть случаи, когда выгодно сочетать эти два метода. При том же уровне обратной связи поведение системы определенно улучшится. Если, например, исполнительный орган действует с запаздыванием, то компенсатор должен быть упреждающим, или предсказывающим устройством, рассчитанным на статистический ансамбль входных сигналов... Информативная обратная связь и приведенные выше примеры обратной связи с компенсаторами представляют собой лишь частные случаи, теория которых еще недостаточно разработана. Вся эта область очень быстро развивается, и в ближайшем будущем на нее надо обратить гораздо больше внимания».

Созданная Винером теория статистического предсказания сигналов явилась крупным шагом на пути создания новых принципов управления техническими системами. В своей работе Винер опирался на замечательные исследования А. Я. Хинчина (1894—1959) [77] и А. Н. Колмогорова [44—45] по теории стационарных случайных процессов. Идеи Винера сыграли огромную роль в разработке практических методов расчета предсказывающих и сглаживающих фильтров, которые являются важными составными частями многих автоматических систем.

4. Неустойчивые процессы

Современная теория управления обращает большое внимание на управление неустойчивыми процессами. Если *устойчивым* называется процесс, для которого $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$, то *неустойчивым* — процесс, для которого $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \infty$*). Неустойчивые процессы чрезвычайно распространены в природе и технике.

Из всего класса неустойчивых процессов в этой книге мы будем рассматривать только неустойчивые процессы, связанные с линейными моделями. При учете нелинейных членов нарастающая экспонента, которой описывается линеаризованный процесс, переходит в логистическую кривую с характерным насыщением (рис. 1).

Неустойчивые процессы не поддаются оптимальному управлению на основе существующих математических методов: получающиеся при этом системы управления оказываются негрубыми в смысле Андронова [3]. На воз-

*) Процесс, для которого $\lim\limits_{t\to\infty} |x(t)| = C$, где $0 < C < \infty$, находится на границе устойчивости и называется *нейтральным*.

можность появления негрубости в управляемых *инвариантных* системах впервые обратил внимание Б. Н. Петров [64]. Примерно в это же время явление нарушения грубости в управляемых *оптимальных* системах исследовано в [14]. Здесь впервые было установлено, что при вариациях параметров управляемого объекта относительно параметров управляющего устройства происходит именно нарушение *грубости* системы.

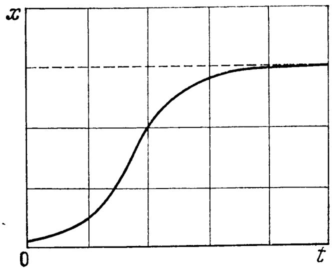

Рис. 1. Логистическая кривая

Нарушение грубости в автоматических системах управления происходит при попытке прямой компенсации отрицательных динамических свойств управляемого объекта при помощи управляющего устройства с такими же отрицательными свойствами и заключается в появлении неустойчивости при малых отклонениях параметров управляемого объекта от расчетных. Именно такое нарушение допускается при прямом и, казалось бы, тривиальном расчете передаточной функции управляющего устройства $\mathbf{w}$ по желаемой передаточной функции замкнутой системы (системы с обратной связью) $\mathbf{h}$ и передаточной функции управляемого объекта $\mathbf{g}$ согласно формулам

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{gw}}{1+\mathbf{gw}}, \quad \mathbf{w} = \frac{1}{\mathbf{g}} \cdot \frac{\mathbf{h}}{1-\mathbf{h}}.$$

Хотя последнее уравнение составлено по всем канонам классического операционного исчисления, оно не имеет содержательного смысла. Эта простая методика пересчета верна лишь для объектов с достаточно хорошими динамическими свойствами (в смысле расположения нулей и полюсов передаточной функции объекта). К тому же следует иметь в виду, что объект, имеющий хорошие динамические свойства в режиме непрерывного управления, может приобрести плохие свойства в дискретном режиме (это касается только нулей передаточной функции).

Расчет систем управления с учетом условий грубости является тем более необходимым, что параметры реальных объектов не остаются постоянными, а подвергаются непредвиденным случайным изменениям. Система, рассчитанная с учетом условий грубости, приближенно сохраняет свою оптимальность при таких изменениях, в отличие от негрубой системы, получающейся в результате прямой компенсации отрицательных динамических свойств управляемого объекта. Учет условий грубости является обязательным в системах с цифровыми управляющими машинами ввиду свойственной им ограниченной точности представления чисел.

Наличием отрицательных динамических свойств у управляемого объекта обусловлено существование определенного *предела точности* управления им, а также ограниченность набора форм его возможных движений. В частности, объекты с отрицательными динамическими свойствами имеют определенное время установления переходных процессов не в силу тех или иных ограничений энергетического характера, а в силу невозможности добиться точного соответствия между истинными параметрами объекта и расчетными. Пренебрежение этим обстоятельством приводит к нарушению грубости системы. Таким образом, наличие определенного времени установления переходных процессов диктуется непосредственно условиями сохранения грубости.

5. Метод полиномиальных уравнений

Совокупность приемов по решению задач оптимизации с помощью полиномиальных уравнений будем называть далее *методом полиномиальных уравнений* или кратко *методом π-уравнений*. Полиномиальные уравнения далее будут служить в качестве специального математического аппарата теории управления объектами с отрицательными динамическими свойствами, в том числе неустойчивыми объектами.

Истоки теории полиномиальных уравнений можно проследить в трудах великих математиков Древней Греции — Евклида и Диофанта. Евклиду принадлежит знаменитый алгоритм нахождения наибольшего общего делителя (a, b) двух целых чисел a и b, а Диофанту — теория неопределенных уравнений в кольце *) целых чисел (диофантов анализ), в том числе теория одного уравнения с двумя неизвестными — целыми числами x и y:

$$ax + by = c.$$

*) Строгое определение кольца см. в Приложении 1.

Метод полиномиальных уравнений был создан путем переноса основных идей диофантова анализа в кольцо полиномов. Полиномы вида

$$\mathbf{a}(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — действительные числа, подобно целым числам образуют кольцо, т. е. их можно складывать, вычитать и умножать друг на друга, получая новые полиномы. Простейшее π-уравнение имеет вид

$$\mathbf{a}(z)\boldsymbol{\theta}(z)+\mathbf{b}(z)\boldsymbol{\pi}(z)=1, \tag{5}$$

где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — заданные, а $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\pi}$ — неизвестные полиномы. При любых взаимно простых*) полиномах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ это уравнение имеет решение, т. е. существует пара полиномов $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\pi}$, обращающая это уравнение в тождество. Простейший способ нахождения этого решения — приравнять коэффициенты при одинаковых степенях z и решить полученную систему линейных алгебраических уравнений.

Полиномиальное уравнение (5) эквивалентно *сравнению* **)

$$\mathbf{a}(z)\boldsymbol{\theta}(z)\equiv 1, \quad \operatorname{mod}\mathbf{b}(z).$$

Полином $\boldsymbol{\theta}(z)$, удовлетворяющий этому сравнению, является обратным полиному $\mathbf{a}(z)$ в *поле* полиномов, сравнимых по модулю $\mathbf{b}(z)$.

В данной книге показано (и это составляет ее основное содержание), что элементы, обратные заданным в некотором специальном поле, образуют подлинную основу для нахождения оптимальных управляющих устройств в отличие от простых обратных изображений классического операционного исчисления. В этом суть метода π-уравнений, который представляет собой операционное исчисление, предназначенное именно для синтеза динамических систем.

Теория π-уравнений есть математический аппарат синтеза систем управления процессами, математическим аппаратом анализа которых является дифференциальное исчисление. Если управляемые объекты описываются

*) *Взаимно простыми* называются полиномы, не имеющие общих делителей в виде полиномов степени первой и выше. Допускаются общие делители в виде действительных чисел, формально являющихся полиномами нулевой степени.

**) О теории сравнений можно прочитать в учебниках по теории чисел, например [13, 34].

дифференциальными уравнениями, то управляющие устройства описываются полиномиальными уравнениями *). Полиномиальные уравнения являются неопределенными уравнениями, которые имеют множество решений. Среди всех решений π-уравнений существуют так называемые *минимальные* решения. Они представляют большой интерес для теории оптимального управления, позволяя получать минимальные по длительности переходные процессы, минимальные ошибки, минимальные по объему программы и т. д. Важным достоинством метода π-уравнений является возможность расчета систем, обладающих свойством удовлетворять совокупности различных требований. Эта возможность обусловлена присущим π-уравнениям свойством объединяться в одно π-уравнение, такое, что свойства, присущие решению каждого π-уравнения, сохраняются в решении объединенного π-уравнения.

Применение метода π-уравнений требует выполнения двух обязательных условий: 1) линейность объектов управления; 2) рациональность изображений происходящих в них процессов. Эти условия выполняются, если для описания управляемых процессов используется *аппроксимация* [7]. Целью аппроксимации является построение упрощенной модели ситуации. Известный американский математик и кибернетик Р. Беллман пишет: «В конце концов аппроксимации могут быть сделаны дважды: при построении модели и при решении связанных с ней уравнений. Вовсе не ясно, какая из этих аппроксимаций является более оправданной» [9]. Практика создания систем управления сложными техническими объектами доказала целесообразность применения аппроксимаций на стадии построения модели ситуации управления. Если не делать аппроксимаций на ранних стадиях моделирования, то в сложных ситуациях даже составление уравнений, не говоря уже об их решении, становится практически невозможным.

Известно, что многие реальные системы и процессы описываются сложными нелинейными уравнениями. Од-

---

*) В теории автоматического регулирования и управления обходились без π-уравнений, потому что решали вырожденные задачи: если управляемый объект устойчив, то π-уравнение

$$\mathbf{p}^{-}\theta + \mathbf{q}^{-}\pi = \mathbf{c}$$

при $\mathbf{q}^{-} = 1$ не накладывает ограничений на полином θ, который может выбираться произвольным.

нако для исследования исходные уравнения подвергаются *линеаризации*, существо которой заключается в следующем. Пусть управляемый объект описывается дифференциальным уравнением вида

$$F(y, \dot{y}, \ddot{y}, \ldots; u, \dot{u}, \ddot{u}, \ldots) = 0, \tag{6}$$

где F — аналитическая функция*). Выберем рабочую точку (начало отсчета): $y_0, \dot{y}_0, \ddot{y}_0, \ldots; u_0, \dot{u}_0, u_0, \ldots$ Введем отклонения от этой точки **):

$$\delta y^{(i)} = y^{(i)} - y_0^{(i)}, \quad \delta u^{(i)} = u^{(i)} - u_0^{(i)}, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Дифференцируя уравнение (6), запишем

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(i)}}\right)_0 \delta y^{(i)} + \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\partial F}{\partial u^{(i)}}\right)_0 \delta u^{(i)} = 0,$$

где значения всех частных производных берутся в рабочей точке. Введем обобщенные параметры управляемого объекта:

$$a_i = -\left(\frac{\partial F}{\partial u^{(i)}}\right)_0, \quad b_i = \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(i)}}\right)_0.$$

Это постоянные конечные действительные числа. С помощью этих параметров уравнение объекта можно записать в виде

$$\sum_{i=0}^{\infty} b_i \delta y^{(i)} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \delta u^{(i)}. \tag{7}$$

Пока это — точное уравнение. Линеаризация уравнения (7) состоит в замене бесконечно малых вариаций $\delta y^{(i)}$ и $\delta u^{(i)}$ конечными изменениями $y^{(i)}$ и $u^{(i)}$, отсчитываемыми от рабочей точки. Линеаризованное уравнение объекта имеет вид

$$\sum_{i=0}^{\infty} b_i \left[y^{(i)} - y_0^{(i)}\right] = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \left[u^{(i)} - u_0^{(i)}\right].$$

---

*) Строго говоря, для наших целей достаточно и более слабого требования — дифференцируемости функции F по всем аргументам.

**) Символом $y^{(i)}$ обозначена i-я производная функции $y(t)$.

Накладывая ограничение на выбор рабочей точки

$$\sum_{i=0}^{\infty} b_i y_0^{(i)} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i u_0^{(i)},$$

получаем следующее линеаризованное уравнение объекта:

$$\sum_{i=0}^{\infty} b_i y^{(i)} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i u^{(i)}.$$

Отбрасывая малые параметры при высших производных, получаем линейное дифференциальное уравнение конечного порядка

$$\sum_{i=0}^{n} b_i y^{(i)} = \sum_{i=0}^{m} a_i u^{(i)}. \tag{8}$$

Уравнение (8) сохраняет основное свойство динамической системы — ее *инерционность*. Целью управления динамическими системами является, как правило, именно преодоление их инерции. Как показывает практический опыт управления динамическими системами, во многих случаях эта цель успешно достигается. Однако многие важные задачи остаются нерешенными, особенно применительно к неустойчивым процессам: когда речь идет об оптимальном управлении, здесь возникают математические трудности, которые частично могут быть преодолены с помощью метода π-уравнений.

Многие реальные процессы $x(t)$ имеют не рациональные изображения $\mathbf{x}(p)$, однако в большинстве имеющих практическое значение случаев эти изображения являются аналитическими функциями. В математике существуют хорошо разработанные приемы аппроксимации аналитических функций рациональными функциями [73]. Одним из этих приемов является аппроксимация Падэ [91].

Если модель ситуации управления составлена в рамках, требуемых методом π-уравнений, а именно обеспечена: 1) линеаризация исходных нелинейных дифференциальных уравнений управляемого объекта и 2) рационализация исходных нерациональных изображений происходящих процессов (если эти процессы случайны, то должна быть обеспечена рационализация их ковариационных изображений*)), то метод решает поставленную задачу управления точно. Никаких аппроксимаций, как

*) Понятие «ковариационное изображение» поясняется на с. 124. Оно близко по смыслу к понятию «спектральная плотность».

правило, больше не требуется, ибо сложность расчетов с повышением размерности задачи увеличивается весьма умеренно.

Теория полиномиальных уравнений является одной из возможных конкретизаций одного из разделов абстрактной алгебры, а именно — *теории колец*. Необходимо отметить, что теория колец пока еще не играет той роли в теории управления, которую она заслуживает. Современная теория управления базируется, в основном, на концепции *поля*, т. е. множества, замкнутого относительно четырех арифметических действий — сложения, вычитания, умножения и деления *). Следует ожидать, что в связи с развитием цифровой вычислительной техники ведущая роль в теории управления, как и во всей прикладной математике, перейдет к теории колец.

Кольцо как множество замкнуто относительно трех операций — сложения, вычитания и умножения. Что же касается деления, то вообще говоря, его нет. В так называемых евклидовых кольцах **) есть последовательное деление с остатком, выполняемое с помощью алгоритма Евклида. Полиномиальные уравнения, в сущности, и представляют собой это четвертое действие в кольце полиномов над произвольным полем (в частности, над полем действительных чисел), подобно тому как диофантовы уравнения представляют эту операцию в кольце целых чисел.

Метод полиномиальных уравнений как математический аппарат с успехом приложим к решению многих из тех задач, которые в настоящее время решаются аппаратом матричной теории Р. Калмана [41]. Однако в вычислительном отношении теория Калмана чрезвычайно трудоемка и неудобна: даже для расчета линейной системы она требует решения *нелинейного* матричного уравнения Риккати

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A} - \mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} = \mathbf{C}.$$

Методы же π-исчисления линейны, применимы к любым объектам, в том числе неустойчивым и неминимально-фазовым (имеющим нули в правой полуплоскости), и всегда дают работоспособные системы управления.

---

*) Строгое определение понятия поля см. в Приложении 1.

**) Строгое определение евклидова кольца см. в Приложении 1.

ГЛАВА 1

ЭЛЕМЕНТЫ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АЛГЕБРЫ

1. Кольцо полиномов

Рассмотрим полугруппу *) физически реализуемых операторов $1, z, z^2, z^3, \ldots, z^i, \ldots$ образованную из степеней одного оператора z, который мы будем трактовать как оператор запаздывания на один временной такт длительности T. Этот оператор связан с оператором дифференцирования p соотношением Лагранжа

$$z = e^{-pT},$$

где $e = 2{,}7183\ldots$ — основание натуральных логарифмов.

Пусть $\mathbb{R}$ — поле действительных чисел, $a \in \mathbb{R}$. *Полиномом* от z над $\mathbb{R}$ называется конечная сумма вида

$$\mathbf{a}(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i,$$

причем $a_n \neq 0$. Целое число n называется *степенью*, или *индексом*, полинома $\mathbf{a}$, и обозначается

$$n = \deg \mathbf{a} = \operatorname{ind} \mathbf{a} = |\mathbf{a}|.$$

Числа $a_i \in \mathbb{R}$ называются *коэффициентами* полинома $\mathbf{a}$. Вообще числа можно рассматривать как полиномы нулевой степени **). Поэтому понятие полинома является обобщением понятия числа.

---

*) *Полугруппой* называется множество элементов, которые можно только перемножать между собой. Правило умножения: $z^i \cdot z^k = z^{i+k}$. В группе элементы можно и делить друг на друга, т. е. пользоваться и обратными элементами $z^{-1}, z^{-2}, \ldots, z^{-l}, \ldots$ Речь идет именно о полугруппе, потому что обратные элементы являются физически нереализуемыми.

Полем называется множество элементов, замкнутое относительно четырех арифметических операций — сложения, вычитания, умножения и деления.

Строгое определение понятий группы, полугруппы, кольца и поля см. в Приложении 1.

**) Кроме числа 0, которое формально должно рассматриваться как «полином степени (—1)».

Основная теорема алгебры утверждает, что полиномы представимы в виде произведения

$$\mathbf{a}(z) = a_n (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \ldots (z - \alpha_n) = a_n \prod_{i=1}^{n} (z - \alpha_i),$$

где α_i — вообще говоря, комплексные, попарно сопряженные числа

$$\alpha_i = \operatorname{Re}\alpha_i + j \operatorname{Im}\alpha_i, \quad \alpha_i^* = \operatorname{Re}\alpha_i - j \operatorname{Im}\alpha_i,$$

называемые *корнями*, или *нулями*, полинома $\mathbf{a}(z)$ *). Выражение «полином $\mathbf{a}$ имеет нуль в точке α_i» означает $\mathbf{a}(\alpha_i) = 0$. Поэтому оператор z, по степеням которого составлен полином, можно рассматривать как обыкновенное комплексное число $z = x + jy$, $j = \sqrt{-1}$, а сам полином $\mathbf{a}(z)$ — как аналитическую функцию комплексного переменного z, определенную на всей плоскости комплексного переменного $z \in Z$.

Общее число нулей полинома на плоскости Z равно его степени. Число нулей полинома в точке $z = 0$ называется *дефектом* полинома и обозначается $d = \operatorname{def}\mathbf{a}$. Выражение «полином $\mathbf{a}$ имеет дефект d» означает, что d первых коэффициентов полинома равны 0: $a_0 = a_1 = \ldots$ $\ldots = a_{d-1} = 0$. Полиномы, имеющие нулевой дефект, называются *приведенными*. Полиномы, отличающиеся только величиной дефекта, называются *сдвинутыми*.

Каждый полином представим в виде

$$\mathbf{a}(z) = z^d \cdot \mathbf{a}_1(z),$$

где $\mathbf{a}_1(z)$ — соответствующий приведенный полином. Степень приведенного полинома $\mathbf{a}_1$ называется *рангом* полинома $\mathbf{a}$ и обозначается $r = \operatorname{rank}\mathbf{a}$.

Индекс полинома равен сумме его дефекта и ранга: $n = d + r$.

Нулевой коэффициент полинома a_0 обозначается **)

$$a_0 = \operatorname{ct}\mathbf{a}.$$

Он равен нулю в том и только в том случае, если $\operatorname{def}\mathbf{a} > 0$, и отличен от нуля в том и только в том случае, если $\operatorname{def}\mathbf{a} = 0$.

---

*) Численные методы определения корней полинома описаны в [67].

**) От «constant term» — постоянный член.

Полиномы образуют кольцо $\mathbb{R}[z]$, т. е. их можно складывать, вычитать и умножать один на другой, получая при этом новые полиномы.

Суммой двух полиномов $\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$ называется полином с коэффициентами $c_i=a_i+b_i$.

Степень суммы полиномов не может быть выше максимальной из степеней слагаемых:

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|\leqslant \max\{|\mathbf{a}|, |\mathbf{b}|\},$$

а *дефект суммы полиномов* не может быть меньше минимального из дефектов слагаемых:

$$\operatorname{def}(\mathbf{a}+\mathbf{b})\geqslant \min\{\operatorname{def}\mathbf{a}, \operatorname{def}\mathbf{b}\}.$$

Постоянный член суммы двух полиномов равен сумме постоянных членов слагаемых:

$$\operatorname{ct}(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\operatorname{ct}\mathbf{a}+\operatorname{ct}\mathbf{b}.$$

Произведением полиномов $\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ называется полином с коэффициентами *):

$$c_i=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{i-k}.$$

Степень произведения полиномов равна сумме степеней сомножителей:

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|.$$

Дефект произведения полиномов равен сумме дефектов сомножителей:

$$\operatorname{def}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=\operatorname{def}\mathbf{a}+\operatorname{def}\mathbf{b}.$$

Постоянный член произведения полиномов равен произведению постоянных членов сомножителей:

$$\operatorname{ct}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=\operatorname{ct}\mathbf{a}\cdot\operatorname{ct}\mathbf{b}.$$

2. Алгоритм Евклида

Рассмотрим вопросы делимости полиномов **). Для любых двух полиномов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (в случае $\mathbf{b}\neq 0$) можно найти такие полиномы $\mathbf{q}$ и $\mathbf{r}$, для которых выполняется равен-

*) Коэффициенты b с отрицательными индексами b_{-1}, b_{-2}, … …, b_{-n} следует полагать равными 0.

**) Ван-дер-Варден Б. Л. Современная алгебра: Пер. с нем./Под ред. А. Г. Куроша. Ч. I, II.— М.; Л.: Гостехиздат, 1947.

ство (деление производится, начиная со старших членов)

$$\mathbf{a} = \mathbf{bq} + \mathbf{r}, \tag{1.1}$$

причем либо $|\mathbf{r}| < |\mathbf{b}|$, либо $\mathbf{r} = 0$. Отсюда следует, что степень полинома $\mathbf{q}$ равна

$$|\mathbf{q}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|. \tag{1.2}$$

В случае $|\mathbf{a}| < |\mathbf{b}|$ степень полинома $\mathbf{q}$ получается отрицательной: это значит, что $\mathbf{q} = 0$.

Полином $\mathbf{q}$ называется *частным* от деления $\mathbf{a}$ на $\mathbf{b}$, или *целой частью* отношения $\mathbf{a}$ к $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{q} = \left[\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right].$$

Полином $\mathbf{r}$ называется *остатком* от деления $\mathbf{a}$ на $\mathbf{b}$.

Рациональная функция

$$\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{b}} = \left\{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right\}$$

называется *дробной частью* отношения $\mathbf{a}$ к $\mathbf{b}$. Условия (1.1) и (1.2) определяют частное и остаток единственным образом. Как правило, степень полинома $\mathbf{r}$ получается на единицу меньше степени $\mathbf{b}$: $|\mathbf{r}| = |\mathbf{b}| - 1$.

Пусть

$$\mathbf{a} = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i, \quad \mathbf{b} = \sum_{i=0}^{m} b_i z^i,$$

$$\mathbf{q} = \sum_{i=0}^{n-m} q_i z^i, \quad \mathbf{r} = \sum_{i=0}^{m-1} r_i z^i.$$

Тогда равенство (1.1) эквивалентно следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
a_n &= b_m q_{n-m},\\
a_{n-1} &= b_{m-1} q_{n-m} + b_m q_{n-m-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_m &= b_{2m-n} q_{n-m} + b_{2m-n+1} q_{n-m-1} + \ldots + b_m q_0,\\
a_{m-1} &= b_{2m-n-1} q_{n-m} + \ldots + b_{m-1} q_0 + r_{m-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_1 &= b_0 q_1 + b_1 q_0 + r_1,\\
a_0 &= b_0 q_0 + r_0.
\end{aligned}$$

Следует полагать $b_i = 0$ при $i < 0$. Эта система является *полностью сепарабельной*, т. е. каждое уравнение решается независимо от последующих *). Из первого уравнения определяется q_{n-m}, из второго — q_{n-m-1}, из $(m-1)$-го — q_0, из m-го — r_{m-1}, из $(n+1)$-го — r_0. Это полностью соответствует алгоритму деления полиномов, начиная со старших членов.

Если остаток от деления $\mathbf{a}$ на $\mathbf{b}$ равен нулю, то полином $\mathbf{b}$ называется *делителем* полинома $\mathbf{a}$. Полиномы нулевой степени, т. е. просто числа, являются делителями любого полинома. Поэтому когда речь идет о делителях полинома $\mathbf{a}$, то имеются в виду полиномы степени выше нулевой.

Полином $\mathbf{c}$, являющийся одновременно делителем полиномов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, называется их *общим делителем*. Наибольший по степени из общих делителей полиномов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется их *наибольшим общим делителем* и обозначается $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Полиномы, не имеющие общих делителей степени выше нулевой, называются *взаимно простыми*. Наибольший общий делитель двух взаимно простых полиномов есть число.

Нахождение наибольшего общего делителя двух полиномов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ производится последовательным делением полиномов с помощью алгоритма Евклида по следующей схеме:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \mathbf{b}\mathbf{q}_0 + \mathbf{r}_1, && 0 \leqslant |\mathbf{r}_1| < |\mathbf{b}|,\\
\mathbf{b} &= \mathbf{r}_1\mathbf{q}_1 + \mathbf{r}_2, && 0 \leqslant |\mathbf{r}_2| < |\mathbf{r}_1|,\\
\mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_2\mathbf{q}_2 + \mathbf{r}_3, && 0 \leqslant |\mathbf{r}_3| < |\mathbf{r}_2|,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\mathbf{r}_{k-2} &= \mathbf{r}_{k-1}\mathbf{q}_{k-1} + \mathbf{r}_k, && 0 \leqslant |\mathbf{r}_k| < |\mathbf{r}_{k-1}|,\\
\mathbf{r}_{k-1} &= \mathbf{r}_k\mathbf{q}_k, \quad \mathbf{r}_{k+1} = 0.
\end{aligned}$$

Наибольший общий делитель полиномов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равен $\mathbf{r}_k$, т. е. последнему отличному от нуля остатку в цепи последовательного деления. Если полиномы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ взаимно простые, то последним отличным от нуля остатком является полином нулевой степени, или просто число $\mathbf{r}_k = \rho$.

*) Полностью сепарабельная алгебраическая система $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ имеет треугольную матрицу:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Процессу последовательного деления полиномов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ соответствует разложение рациональной функции $\mathbf{h}=\mathbf{a}/\mathbf{b}$ в *цепную дробь*:

$$\mathbf{h}=\mathbf{q}_0+\cfrac{1}{\mathbf{q}_1+\cfrac{1}{\mathbf{q}_2+\ldots+\cfrac{1}{\mathbf{q}_{k-1}+\cfrac{1}{\mathbf{q}_k}}}}.$$

Полиномы $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_k$, получающиеся в процессе последовательного деления остатков, называются *неполными частными*. Составленные из них функции вида

$$\mathbf{h}_0=\mathbf{q}_0, \quad \mathbf{h}_1=\mathbf{q}_0+\frac{1}{\mathbf{q}_1}, \quad \mathbf{h}_2=\mathbf{q}_0+\cfrac{1}{\mathbf{q}_1+\cfrac{1}{\mathbf{q}_2}}, \ldots$$

называются *подходящими дробями*. Последняя подходящая дробь равна исходной функции $\mathbf{h}_k=\mathbf{h}=\mathbf{a}/\mathbf{b}$. Обозначая через $\mathbf{a}_i$ и $\mathbf{b}_i$ числитель и знаменатель i-й подходящей дроби $\mathbf{h}_i=\mathbf{a}_i/\mathbf{b}_i$, можно вывести рекуррентные соотношения

$$\mathbf{a}_i=\mathbf{a}_{i-1}\mathbf{q}_i+\mathbf{a}_{i-2}, \quad \mathbf{b}_i=\mathbf{b}_{i-1}\mathbf{q}_i+\mathbf{b}_{i-2}, \tag{1.3}$$

справедливые при начальных условиях $\mathbf{a}_{-2}=0$, $\mathbf{a}_{-1}=1$, $\mathbf{b}_{-2}=1$, $\mathbf{b}_{-1}=0$.

Выпишем несколько первых числителей и знаменателей подходящих дробей:

$$\mathbf{a}_0=\mathbf{q}_0, \quad \mathbf{b}_0=1,$$
$$\mathbf{a}_1=1+\mathbf{q}_0\mathbf{q}_1, \quad \mathbf{b}_1=\mathbf{q}_1,$$
$$\mathbf{a}_2=\mathbf{q}_0+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_0\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2, \quad \mathbf{b}_2=1+\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2,$$
$$\mathbf{a}_3=1+\mathbf{q}_0\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_0\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_0\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3,$$
$$\mathbf{b}_3=\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3,$$
$$\mathbf{a}_4=\mathbf{q}_0+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_4+\mathbf{q}_0\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_0\mathbf{q}_1\mathbf{q}_4+\mathbf{q}_0\mathbf{q}_3\mathbf{q}_4+$$
$$+\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3\mathbf{q}_4+\mathbf{q}_0\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3\mathbf{q}_4,$$
$$\mathbf{b}_4=1+\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_1\mathbf{q}_4+\mathbf{q}_3\mathbf{q}_4+\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_2\mathbf{q}_4, \ldots$$

Разность двух соседних подходящих дробей

$$\mathbf{h}_i-\mathbf{h}_{i-1}=\frac{\mathbf{a}_i\mathbf{b}_{i-1}-\mathbf{a}_{i-1}\mathbf{b}_i}{\mathbf{b}_i\mathbf{b}_{i-1}}.$$

Обозначим через $\mathbf{e}_i$ числитель этой разности:

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{a}_i\mathbf{b}_{i-1} - \mathbf{a}_{i-1}\mathbf{b}_i. \tag{1.4}$$

Подставляя сюда рекуррентные соотношения (1.3) и учитывая начальные условия, получим

$$\mathbf{e}_i = (-1)^{i+1}, \quad i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k.$$

Для кольца целых чисел эта формула была впервые получена Л. Эйлером.

3. Полиномиальные уравнения

Полиномиальными уравнениями (*π-уравнениями*) называются функциональные уравнения, в которых неизвестными функциями являются полиномы. Полиномиальным уравнением относительно неизвестных полиномов $\boldsymbol{\pi}_1,\ \boldsymbol{\pi}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{\pi}_\mu$ при заданных полиномах $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_\lambda$ называется функциональное уравнение

$$F(\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_\lambda,\ \boldsymbol{\pi}_1,\ \boldsymbol{\pi}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{\pi}_\mu) = 0,$$

где F — заданная аналитическая функция своих аргументов. В частности, уравнение

$$\mathbf{a}_1\boldsymbol{\pi}_1 + \mathbf{a}_2\boldsymbol{\pi}_2 + \ldots + \mathbf{a}_\mu\boldsymbol{\pi}_\mu = \mathbf{c}, \tag{1.5}$$

где $\mathbf{a}_1,\ \ldots,\ \mathbf{a}_\mu$ и $\mathbf{c}$ — заданные полиномы, есть *линейное* π-уравнение. Решением π-уравнения называется набор полиномов $\boldsymbol{\pi}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{\pi}_\mu$, ему удовлетворяющий. Если $\mu = 1$, то уравнение (1.5), как правило, не имеет решений, так как отношение двух полиномов $\mathbf{c}$ и $\mathbf{a}_1$ не является полиномом, если, конечно, $\mathbf{a}_1$ не является делителем $\mathbf{c}$. При $\mu = 2$ уравнение (1.5), которое мы запишем в виде

$$\mathbf{a}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{b}\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}, \tag{1.6}$$

где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — известные, а $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\pi}$ — неизвестные полиномы, причем полиномы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — взаимно простые, имеет бесконечное множество решений.

Пусть $\{\boldsymbol{\theta}^*,\ \boldsymbol{\pi}^*\}$ — некоторое частное решение π-уравнения (1.6). Покажем, что все решения этого уравнения выражаются через одно его частное решение следующим образом:

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^* + \mathbf{b}\boldsymbol{\xi}, \quad \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}^* - \mathbf{a}\boldsymbol{\xi}, \tag{1.7}$$

где $\boldsymbol{\xi}$ — произвольный полином. Прежде всего покажем, что (1.7) является решением π-уравнения (1.6).

Подставляя (1.7) в (1.6), получим

$$\mathbf{a}\theta^* + \mathbf{b}\pi^* = \mathbf{c}, \tag{1.8}$$

т. е. если $\{\theta^*, \pi^*\}$ — решение, то (1.7) — тоже решение. Предположим теперь, что $\{\theta^{**}, \pi^{**}\}$ есть решение (1.6)

$$\mathbf{a}\theta^{**} + \mathbf{b}\pi^{**} = \mathbf{c}, \tag{1.9}$$

не удовлетворяющее (1.7). Вычитая (1.8) из (1.9), получим

$$\mathbf{a}(\theta^{**} - \theta^*) + \mathbf{b}(\pi^{**} - \pi^*) = 0,$$

или

$$\frac{\theta^{**} - \theta^*}{\mathbf{b}} = -\frac{\pi^{**} - \pi^*}{\mathbf{a}}.$$

Обозначим эти отношения через ζ и предположим, что ζ не является полиномом, а является рациональной функцией вида $\zeta = \xi/\eta$. Выразим θ^{**} и π^{**} через θ^*, π^* и ζ:

$$\theta^{**} = \theta^* + \mathbf{b}\zeta, \quad \pi^{**} = \pi^* - \mathbf{a}\zeta.$$

Поскольку θ^{**} и π^{**} — полиномы, то $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ должны делиться на полином η. Таким образом, η должно быть общим делителем полиномов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Но поскольку мы условились, что $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — взаимно простые полиномы, то $\eta = 1$, и, следовательно, θ^{**} и π^{**} выражаются через θ^* и π^* по формулам (1.7).

Легко видеть, что частным решением *однородного* π-уравнения

$$\mathbf{a}\theta + \mathbf{b}\pi = 0$$

является нулевое решение $\theta^* = 0$, $\pi^* = 0$. Подставляя эти значения в (1.7), убеждаемся, что $\theta = \mathbf{b}\xi$, $\pi = -\mathbf{a}\xi$ есть общее решение однородного π-уравнения. Таким образом, мы доказали, что подобно тому, как это имеет место для линейных дифференциальных уравнений, общее решение линейного полиномиального уравнения (1.6) равно некоторому его частному решению плюс общее решение соответствующего однородного π-уравнения.

В том случае, если полиномы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не взаимно просты

$$\mathbf{v} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad |\mathbf{v}| > 0,$$

π-уравнение (1.6), как правило, не имеет решений Введя дополнительные множители $\mathbf{a}_0$ и $\mathbf{b}_0$, такие что $\mathbf{a} = \mathbf{v}\mathbf{a}_0$, $\mathbf{b} = \mathbf{v}\mathbf{b}_0$, мы можем записать его в виде

$$\mathbf{v}(\mathbf{a}_0\theta + \mathbf{b}_0\pi) = \mathbf{c}.$$

Легко видеть, что это уравнение неразрешимо в полиномах, если $\mathbf{c}$ не делится на $\mathbf{v}$. Если же $\mathbf{c}$ делится на $\mathbf{v}$, то уравнение разрешимо. Этот случай мы будем называть *исключительным.*

Частное решение π-уравнения (1.6) можно построить с помощью алгоритма Евклида. Для этого разложим рациональную функцию $\mathbf{h}=\mathbf{a}/\mathbf{b}$ в цепную дробь. Поскольку полиномы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ взаимно просты, то их наибольшим общим делителем является число $\rho=(\mathbf{a},\ \mathbf{b})$. Из способа построения полиномов $\mathbf{a}_i$ и $\mathbf{b}_i$ следует, что $(\mathbf{a}_i,\ \mathbf{b}_i)=1$, $i=0,\ 1,\ \ldots,\ k$. Поскольку $\mathbf{h}=\mathbf{a}/\mathbf{b}=\mathbf{h}_k=\mathbf{a}_k/\mathbf{b}_k$, то

$$\mathbf{a}=\rho\mathbf{a}_k,\quad \mathbf{b}=\rho\mathbf{b}_k. \tag{1.10}$$

При $i=k$ уравнение (1.4) принимает вид

$$\mathbf{a}_k\mathbf{b}_{k-1}-\mathbf{b}_k\mathbf{a}_{k-1}=(-1)^{k+1}.$$

Подставляя сюда (1.10), получим

$$\frac{1}{\rho}\,\mathbf{a}\mathbf{b}_{k-1}-\frac{1}{\rho}\,\mathbf{b}\mathbf{a}_{k-1}=(-1)^{k+1}.$$

Умножая обе части этого равенства на $(-1)^{k-1}\mathbf{c}$, получим

$$\mathbf{a}\left[\frac{1}{\rho}(-1)^{k-1}\,\mathbf{b}_{k-1}\mathbf{c}\right]+\mathbf{b}\left[\frac{1}{\rho}(-1)^{k}\mathbf{a}_{k-1}\mathbf{c}\right]=\mathbf{c}.$$

Сравнивая это уравнение с (1.6), убеждаемся, что мы получили частное решение:

$$\theta^*=\frac{1}{\rho}(-1)^{k-1}\,\mathbf{b}_{k-1}\mathbf{c},\quad \pi^*=\frac{1}{\rho}(-1)^{k}\,\mathbf{a}_{k-1}\mathbf{c}. \tag{1.11}$$

Эти формулы являются основными для решения π-уравнений с помощью алгоритма Евклида.

Среди всех полиномов θ, входящих в общее решение (1.7), существует один так называемый *минимальный полином* θ_0, степень которого минимальна среди всех θ, удовлетворяющих π-уравнению (1.6). Этот полином может быть найден как остаток от деления θ^* на $\mathbf{b}$, и его степень, согласно (1.1), равна $|\theta_0|<|\mathbf{b}|$. Практически всегда, за исключением так называемых «исключительных случаев», мы получим $|\theta_0|=|\mathbf{b}|-1$. Поскольку по крайней мере два слагаемых в π-уравнении (1.6) должны иметь одинаковую степень, то степень соответствующего θ_0 полинома π^0 должна быть равна либо $|\pi^0|=|\mathbf{a}|-1$, либо $|\pi^0|=|\mathbf{c}|-|\mathbf{b}|$. Точно так же минимальный полином π_0, получающийся как остаток от деления

π^* на $\mathbf{a}$, имеет степень $|\pi_0| = |\mathbf{a}| - 1$, а соответствующий ему полином θ^0 — одну из следующих степеней:

$$|\theta^0| = |\mathbf{b}| - 1, \quad |\theta^0| = |\mathbf{c}| - |\mathbf{a}|. \tag{1.12}$$

Таким образом, в общем случае π-уравнение (1.6) имеет два *минимальных* решения $\{\theta_0, \pi^0\}$ и $\{\theta^0, \pi_0\}$.

Обозначив остаток и частное от деления θ^* на $\mathbf{b}$ через θ_0 и θ_1, имеем $\theta^* = \theta_0 + \mathbf{b}\theta_1$. Подставляя это выражение в π-уравнение (1.6), получаем формулу для соответствующего полинома π^0: $\pi^0 = \pi^* + \mathbf{a}\theta_1$. Аналогично, обозначив остаток и частное от деления π^* на $\mathbf{a}$ через π_0 и π_1: $\pi^* = \pi_0 + \mathbf{a}\pi_1$, получаем формулу для соответствующего полинома θ^0: $\theta^0 = \theta^* + \mathbf{b}\pi_1$.

В том случае, когда π-уравнение является *правильным*, т. е.

$$|\mathbf{c}| < |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|, \tag{1.13}$$

оба минимальных решения совпадают, поскольку $\theta_0 = \theta^0$ и $\pi_0 = \pi^0$. Докажем это положение. Применяя правило степени суммы двух полиномов к уравнению (1.6), получаем

$$|\mathbf{a}\theta^0| \leqslant \max\{|\mathbf{c}|, |\mathbf{b}\pi_0|\}.$$

Учитывая (1.12) и (1.13), имеем $|\theta^0| < |\mathbf{b}|$. Ввиду единственности остатка от деления θ^* на $\mathbf{b}$, заключаем, что $\theta^0 = \theta_0$. Аналогично доказывается второе равенство $\pi^0 = \pi_0$. Таким образом, правильное π-уравнение (1.6) имеет единственное минимальное решение с $|\theta| = |\mathbf{b}| - 1$, $|\pi| = |\mathbf{a}| - 1$.

Выбирая степени неизвестных полиномов согласно этим условиям и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, можно развернуть π-уравнение (1.6) в линейную алгебраическую систему вида

$$\begin{bmatrix}
a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
a_1 & a_0 & 0 & & \vdots & b_1 & b_0 & 0 & & \vdots \\
a_2 & a_1 & a_0 & \ddots & \vdots & b_2 & b_1 & b_0 & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\
a_n & & & & a_0 & b_m & & & & b_0 \\
0 & a_n & & & \vdots & 0 & b_m & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\
0 & \dots & \dots & \dots & a_n & 0 & \dots & \dots & \dots & b_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\theta_0 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{m-1} \\ \pi_0 \\ \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_{n-1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_s \\ 0 \\ \vdots \\ 0
\end{bmatrix}.$$

Определитель этой системы есть *результат* полиномов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, и он отличен от нуля, если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ взаимно просты *).

Можно предложить еще один метод разыскания минимального решения π-уравнения (1.6) относительно $\boldsymbol{\pi}$ (или соответственно относительно $\boldsymbol{\theta}$) — метод корней. Найдем корни полинома $\mathbf{a}(z)$ и представим этот полином в виде произведения

$$\mathbf{a}(z) = a_n \prod_{i=1}^{n} (z - \alpha_i).$$

Будем считать, что все корни различны. Подставим это выражение в (1.6):

$$a_n \prod_{i=1}^{n} (z - \alpha_i)\, \boldsymbol{\theta}(z) + \mathbf{b}(z)\, \boldsymbol{\pi}(z) = \mathbf{c}(z).$$

Минимальный полином $\boldsymbol{\pi}(z)$ имеет вид

$$\boldsymbol{\pi}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \pi_k z^k.$$

Подставляя вместо z поочередно значения $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, получим систему уравнений

$$\boldsymbol{\pi}(\alpha_i) = \frac{\mathbf{c}(\alpha_i)}{\mathbf{b}(\alpha_i)}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Это линейная алгебраическая система относительно коэффициентов полинома $\boldsymbol{\pi}(z)$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_i^k \pi_k = \frac{\mathbf{c}(\alpha_i)}{\mathbf{b}(\alpha_i)}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Ввиду различности корней $\det\{\alpha_i^k\} \neq 0$, и она имеет единственное решение. В случае кратных корней метод легко модифицируется (нужно продифференцировать π-уравнение (1.6)). Этот метод удобно применять, когда степень полинома $\mathbf{a}$ (в противоположность $|\mathbf{b}|$) невелика.

Нас будет интересовать зависимость решения π-уравнения (1.6) от числового параметра k. Рассмотрим три случая.

---

*) Когда полиномы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ имеют близкие корни, мы имеем так называемую *плохо обусловленную* систему. В этом случае решение π-уравнения следует вести с достаточно большой точностью (избегать больших ошибок округления).

1) Числовой множитель k входит в правую часть π-уравнения $\mathbf{c}$:

$$\mathbf{a}\theta' + \mathbf{b}\pi' = k\mathbf{c}.$$

Легко видеть, что решение этого уравнения отличается от решения уравнения (1.6) также множителем k: $\theta' = k\theta$, $\pi' = k\pi$.

2) Числовой множитель k входит в один из полиномов левой части $\mathbf{a}$ или $\mathbf{b}$:

$$k\mathbf{a}\theta' + \mathbf{b}\pi' = \mathbf{c}.$$

Легко видеть, что $\theta' = \frac{1}{k}\theta$, $\pi' = \pi$.

3) Числовой множитель входит в один из полиномов левой части $\mathbf{a}$ или $\mathbf{b}$ и в правую часть $\mathbf{c}$:

$$k\mathbf{a}\theta' + \mathbf{b}\pi' = k\mathbf{c}.$$

Этот случай сводится к предыдущему делением на k:

$$\mathbf{a}\theta' + \frac{1}{k}\mathbf{b}\pi' = \mathbf{c}.$$

Отсюда $\theta' = \theta$, $\pi' = k\pi$.

Исследование параметрических зависимостей решений π-уравнений необходимо в ряде случаев для доказательства инвариантности решений ряда задач управления от различных способов факторизации входящих в них полиномов.

Уравнение (1.6) называется *вырожденным*, если степень по крайней мере одного из полиномов $\mathbf{a}$ или $\mathbf{b}$ равна нулю, т. е. один из этих полиномов является просто числом. Пусть $\mathbf{b} = b_0$. Деля на это число, получим

$$\mathbf{a}\theta + \pi = \mathbf{c}. \tag{1.14}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\theta = \xi, \quad \pi = \mathbf{c} - \mathbf{a}\xi,$$

где ξ — произвольный полином. Если уравнение (1.14) является правильным, т. е. $|\mathbf{c}| < |\mathbf{a}|$, то минимальное решение получается из общего при $\xi = 0$. Оно равно*)

$$\theta_0 = 0, \quad \pi_0 = \mathbf{c}. \tag{1.15}$$

*) Без ограничения общности положим: из $|\theta| = -1$ следует $\theta = 0$. Тогда правило $|\theta| = |\mathbf{b}| - 1$ распространяется и на вырожденные уравнения.

Если уравнение (1.14) является неправильным, т. е. $|\mathbf{c}| \geqslant |\mathbf{a}|$, то оно имеет два различных минимальных решения, причем минимальное решение относительно $\boldsymbol{\theta}$ совпадает с (1.15), а минимальное решение относительно $\boldsymbol{\pi}$ есть частное и остаток от деления $\mathbf{c}$ на $\mathbf{a}$.

Случай $\mathbf{a} = a_0$ и $\mathbf{b} = b_0$ соответствует полностью вырожденному уравнению $a_0\boldsymbol{\theta} + b_0\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}$. При любом $\mathbf{c} \neq 0$ это уравнение является неправильным и имеет два минимальных решения:

$$\boldsymbol{\theta}_0 = 0, \quad \boldsymbol{\pi}^0 = \frac{1}{b_0}\mathbf{c}; \qquad \boldsymbol{\theta}^0 = \frac{1}{a_0}\mathbf{c}, \quad \boldsymbol{\pi}_0 = 0.$$

В случае $\mathbf{c} = 0$ получается одно минимальное решение — это тривиальное решение $\boldsymbol{\theta}_0 = 0$, $\boldsymbol{\pi}_0 = 0$.

На вырожденные π-уравнения можно целиком перенести все правила, справедливые для невырожденных уравнений, если условиться считать равным нулю полином, степень которого формально получается равной (-1).

Пример 1. Найдем минимальное решение правильного π-уравнения

$$(1 + 5z - 3z^2 - 11z^3)\boldsymbol{\theta} + (2 - z + 8z^2)\boldsymbol{\pi} = 1.$$

Согласно изложенному, выбираем $|\boldsymbol{\theta}| = 1$, $|\boldsymbol{\pi}| = 2$. Сначала решим это π-уравнение развертыванием его в систему линейных алгебраических уравнений. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получаем

$$\begin{aligned}
\theta_0 + 2\pi_0 &= 1,\\
5\theta_0 + \theta_1 - \pi_0 + 2\pi_1 &= 0,\\
-3\theta_0 + 5\theta_1 + 8\pi_0 - \pi_1 + 2\pi_2 &= 0,\\
-11\theta_0 - 3\theta_1 + 8\pi_1 - \pi_2 &= 0,\\
-11\theta_1 + 8\pi_2 &= 0.
\end{aligned}$$

Решая эту систему обычными алгебраическими методами, получаем

$$\theta_0 = 0{,}156; \quad \theta_1 = -0{,}37; \quad \pi_0 = 0{,}42; \quad \pi_1 = 0{,}01; \quad \pi_2 = -0{,}51.$$

Получим решение этого π-уравнения с помощью алгоритма Евклида. Имеем

$$\mathbf{a} = 1 + 5z - 3z^2 - 11z^3, \quad \mathbf{b} = 2 - z + 8z^2, \quad \mathbf{c} = 1,$$

Делим $\mathbf{a}$ на $\mathbf{b}$:

$$\begin{array}{r|l} -11z^3-3z^2+5z+1 & 8z^2-z+2 \\ \underline{-11z^3+1{,}38z^2-2{,}75z} & \overline{-1{,}38z-0{,}55}. \\ -4{,}38z^2+7{,}75z+1 & \\ \underline{-4{,}38z^2+0{,}55z-1{,}1} & \\ 7{,}2z+2{,}1 & \end{array}$$

Имеем $\mathbf{q}_0 = -0{,}55 - 1{,}38z$, $\mathbf{r}_1 = 2{,}1 + 7{,}2z$. Разделив $\mathbf{b}$ на $\mathbf{r}_1$, получим $\mathbf{q}_1 = -0{,}46 + 1{,}1z$, $\mathbf{r}_2 = 2{,}97$, $k = 2$. По формулам (1.3) составляем

$$\mathbf{a}_0 = -0{,}55 - 1{,}38z, \quad \mathbf{a}_1 = 1{,}25 + 0{,}03z - 1{,}52z^2,$$
$$\mathbf{b}_0 = 1, \quad \mathbf{b}_1 = -0{,}46 + 1{,}1z.$$

Подставляя эти значения в (1.11), получаем

$$\theta^* = 0{,}156 - 0{,}37z, \quad \pi^* = 0{,}42 + 0{,}01z - 0{,}51z^2.$$

Сравнивая степени этих полиномов с заданными, убеждаемся, что мы получили минимальное решение.

Пример 2. Найдем минимальное решение правильного π-уравнения:

$$(1+z)^4\theta + (1-z)^2\pi = 1 + 2z.$$

Имеем

$$\mathbf{a} = (1+z)^4, \quad \mathbf{b} = (1-z)^2, \quad \mathbf{c} = 1 + 2z.$$

Будем решать это уравнение с помощью алгоритма Евклида. Деля $\mathbf{a}$ на $\mathbf{b}$, получим

$$\mathbf{q}_0 = 17 + 6z + z^2, \quad \mathbf{r}_1 = -16 + 32z.$$

Для $\mathbf{b}$ на $\mathbf{r}_1$, получим

$$\mathbf{q}_1 = -\frac{3}{64} + \frac{1}{32}z, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{1}{4}, \quad k = 2.$$

По формулам (1.3) составляем

$$\mathbf{a}_0 = 17 + 6z + z^2, \quad \mathbf{a}_1 = \frac{13}{64} + \frac{1}{4}z + \frac{9}{64}z^2 + \frac{1}{32}z^3,$$
$$\mathbf{b}_0 = 1, \quad \mathbf{b}_1 = -\frac{3}{64} + \frac{1}{32}z.$$

По формулам (1.11) получаем

$$\theta^* = \frac{3}{16} + \frac{1}{4}z - \frac{1}{4}z^2, \quad \pi^* = \frac{13}{16} + \frac{21}{8}z + \frac{41}{16}z^2 + \frac{5}{4}z^3 + \frac{1}{4}z^4.$$

Находим θ_0 как остаток от деления θ^* на $\mathbf{b}$ и π_0 — как остаток от деления π^* на $\mathbf{a}$:

$$\theta_0 = \frac{7}{16} - \frac{1}{4}z, \quad \pi_0 = \frac{9}{16} + \frac{13}{8}z + \frac{17}{16}z^2 + \frac{1}{4}z^3.$$

Ввиду правильности нашего π-уравнения, мы получили единственное минимальное решение.

4. Системы полиномиальных уравнений

Рассмотрим систему из двух π-уравнений вида

$$\mathbf{a}_1\theta + \mathbf{b}_1\pi_1 = \mathbf{c}_1, \quad \mathbf{a}_2\theta + \mathbf{b}_2\pi_2 = \mathbf{c}_2 \tag{1.16}$$

относительно трех неизвестных полиномов θ, π_1 и π_2. Будем считать взаимно простыми следующие пары полиномов: $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1\}$, $\{\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2\}$, $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$. Чтобы получить решения этой системы, можно воспользоваться следующим приемом. Решая каждое уравнение самостоятельно, получим

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_1^0 + \mathbf{b}_1\xi, \quad \pi_1 = \pi_1^0 - \mathbf{a}_1\xi, \\ \theta &= \theta_2^0 - \mathbf{b}_2\eta, \quad \pi_2 = \pi_2^0 + \mathbf{a}_2\eta, \end{aligned} \tag{1.17}$$

где ξ и η — произвольные полиномы. Приравнивая полиномы θ из обоих уравнений, получим следующее π-уравнение относительно полиномов ξ и η:

$$\mathbf{b}_1\xi + \mathbf{b}_2\eta = \theta_2^0 - \theta_1^0. \tag{1.18}$$

Так как полиномы $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ взаимно просты, то общее решение этого уравнения существует и имеет вид

$$\xi = \xi_0 + \mathbf{b}_2\zeta, \quad \eta = \eta_0 - \mathbf{b}_1\zeta,$$

где ζ — произвольный полином. Подставляя его в (1.17), получим

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_1^0 + \mathbf{b}_1\xi_0 + \mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\zeta, \\ \pi_1 &= \pi_1^0 - \mathbf{a}_1\xi_0 - \mathbf{a}_1\mathbf{b}_2\zeta, \\ \pi_2 &= \pi_2^0 + \mathbf{a}_2\eta_0 - \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1\zeta. \end{aligned}$$

Для того чтобы получить минимальное решение системы (1.16), достаточно найти минимальные решения уравнений (1.16) в отдельности и уравнения (1.18) и подставить их в (1.17).

Существует метод *объединения* π-уравнений, который состоит в следующем. Умножим первое из уравнений (1.16) на $\mathbf{b}_2$, второе — на $\mathbf{b}_1$ и сложим полученные уравнения:

$$(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1)\theta + \mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\pi = \mathbf{c}_1\mathbf{b}_2 + \mathbf{c}_2\mathbf{b}_1. \tag{1.19}$$

Через π обозначена сумма $\pi = \pi_1 + \pi_2$. Решая объединенное уравнение (1.19), получаем полином θ и, подставляя его в исходные уравнения (1.16), получаем полиномы π_1 и π_2.

Покажем, что решение объединенного уравнения равносильно решению исходной системы. Из способа построения объединенного уравнения следует, что решение, удовлетворяющее каждому из исходных уравнений, удовлетворяет и объединенному уравнению. Покажем, что справедливо и обратное: каждое решение объединенного уравнения является решением исходной системы. Для этого представим уравнение (1.19) в виде

$$(\mathbf{a}_1\theta - \mathbf{c}_1)\mathbf{b}_2 = -(\mathbf{a}_2\theta - \mathbf{c}_2)\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\pi.$$

Ввиду того, что правая часть этого равенства делится на $\mathbf{b}_1$, на него должна делиться и левая часть. Но $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ взаимно просты. Значит, $\mathbf{a}_1\theta - \mathbf{c}_1$ делится на $\mathbf{b}_1$, т. е. $\mathbf{a}_1\theta - \mathbf{c}_1 = -\mathbf{b}_1\pi_1$. Отсюда следует, что решение объединенного уравнения удовлетворяет первому из исходных уравнений (1.16). Аналогично доказывается, что оно удовлетворяет и второму *).

Метод объединения легко обобщается на системы с произвольным числом π-уравнений вида

$$\mathbf{a}_1\theta + \mathbf{b}_1\pi_1 = \mathbf{c}_1, \quad \mathbf{a}_2\theta + \mathbf{b}_2\pi_2 = \mathbf{c}_2, \ \ldots, \ \mathbf{a}_n\theta + \mathbf{b}_n\pi_n = \mathbf{c}_n.$$

Предоставляем проделать такое обобщение читателю.

Приведем еще один метод решения системы π-уравнений (1.16) (метод *исключения* θ). Умножим первое из уравнений (1.16) на $\mathbf{a}_2$, второе — на $\mathbf{a}_1$ и вычтем второе уравнение из первого. Получим π-уравнение относительно π_1 и π_2:

$$\mathbf{a}_2\mathbf{b}_1\pi_1 - \mathbf{a}_1\mathbf{b}_2\pi_2 = \mathbf{a}_2\mathbf{c}_1 - \mathbf{a}_1\mathbf{c}_2. \tag{1.20}$$

Это уравнение имеет решение, если полиномы $\mathbf{b}_1\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2$ взаимно просты: $(\mathbf{b}_1\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1\mathbf{b}_2) = 1$. Поскольку $(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) = 1$, $(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) = 1$, то необходимо потребовать $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = 1$, $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = 1$. После того как π_1 и π_2 найдены, подстановка их в исходные уравнения (1.16) дает θ. При этом уравнения (1.16) становятся эквивалентными: каждое из них даст одно и то же θ.

Систему π-уравнений (1.16) можно решать также развертыванием ее в линейную алгебраическую систему

*) Если объединенное π-уравнение имеет слишком высокий порядок, то предпочтительнее решать систему π-уравнений методом, изложенным в начале этого раздела.

при выборе степеней неизвестных полиномов, согласно формулам

$$|\theta| = |\mathbf{b}_1| + |\mathbf{b}_2| - 1, \qquad |\pi_1| = |\mathbf{a}_1| + |\mathbf{b}_2| - 1,$$
$$|\pi_2| = |\mathbf{a}_2| + |\mathbf{b}_1| - 1.$$

Число неизвестных и уравнений в этой алгебраической системе $N = |\mathbf{a}_1| + |\mathbf{a}_2| + 2|\mathbf{b}_1| + 2|\mathbf{b}_2|$.

Пример 1. Решим систему из двух π-уравнений:

$$(1+2z)\theta + (3+4z)\pi_1 = 1+7z,$$
$$z^2\theta + (1+z)\pi_2 = 2.$$

Воспользуемся методом объединения. Имеем

$$\mathbf{a}_1 = 1+2z, \quad \mathbf{b}_1 = 3+4z, \quad \mathbf{c}_1 = 1+7z,$$
$$\mathbf{a}_2 = z^2, \quad \mathbf{b}_2 = 1+z, \quad \mathbf{c}_2 = 2.$$

Составляем полином $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 = 3+7z+4z^2.$$

Вычисляем полиномы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 = 1+3z+5z^2+4z^3,$$
$$\mathbf{c} = \mathbf{c}_1\mathbf{b}_2 + \mathbf{c}_2\mathbf{b}_1 = 7+16z+7z^2.$$

Таким образом, объединенное π-уравнение имеет вид

$$(1+3z+5z^2+4z^3)\theta + (3+7z+4z^2)\pi = 7+16z+7z^2.$$

Решаем его с помощью алгоритма Евклида. Разделив $\mathbf{a}$ на $\mathbf{b}$, получим $\mathbf{q}_0 = -0{,}5 + z$, $\mathbf{r}_1 = 2{,}5 + 3{,}5z$. Далее, разделив $\mathbf{b}$ на $\mathbf{r}_1$, будем иметь $\mathbf{q}_1 = 1{,}18 + 1{,}14z$, $\mathbf{r}_2 = 0{,}05$; $k = 2$. По формулам (1.3) находим $\mathbf{b}_1 = \mathbf{q}_1 = 1{,}18 + 1{,}14z$. По формуле (1.11) вычисляем

$$\theta^* = -168 - 545z - 536z^2 - 161z^3.$$

Найдем минимальный полином как остаток от деления θ^* на $\mathbf{b}$: $\theta_0 = 22 + 20z$. Подставляя это выражение в исходные уравнения, получаем $\pi_1 = -6{,}8 - 10z$, $\pi^2 = 2 - 2z - 20z^2$. Таким образом, мы получили минимальное решение заданной системы π-уравнений.

Пример 2. Решим систему π-уравнений

$$(1+z)\theta + (2-z)\pi_1 = 3+2z,$$
$$(4-z)\theta + (5+z)\pi_2 = 2.$$

Воспользуемся методом исключения θ. Умножая первое уравнение на $4-z$, второе на $1+z$ и вычитая второе уравнение из первого, получим

$$(2-z)(4-z)\pi_1 - (5+z)(1+z)\pi_2 = (3+2z)(4-z) - 2(1+z),$$

или

$$(8-6z+z^2)\pi_1 - (5+6z+z^2)\pi_2 = 10+3z-2z^2.$$

Задаваясь $|\pi_1| = 1$, $|\pi_2| = 1$, развертываем это уравнение в систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} 8\pi_0^{(1)} - 5\pi_0^{(2)} &= 10, \\ -6\pi_0^{(1)} + 8\pi_1^{(1)} - 6\pi_0^{(2)} - 5\pi_1^{(2)} &= 3, \\ \pi_0^{(1)} - 6\pi_1^{(1)} - \pi_0^{(2)} - 6\pi_1^{(2)} &= -2, \\ \pi_1^{(1)} - \pi_1^{(2)} &= 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему, получим

$$\pi_1 = \frac{40}{63} + \frac{19}{63} z, \quad \pi_2 = -\frac{62}{63} + \frac{19}{63} z.$$

Подставляя π_1 в первое уравнение, получим

$$(1+z)\,\theta + (2-z)\left(\frac{40}{63} + \frac{19}{63} z\right) = 3 + 2z,$$

откуда после деления полиномов имеем

$$\theta^{(1)} = \frac{109}{63} + \frac{19}{63} z.$$

Подставляя π_2 во второе уравнение, получим

$$(4-z)\,\theta + (5+z)\left(-\frac{62}{63} + \frac{19}{63} z\right) = 2,$$

откуда после деления полиномов имеем

$$\theta^{(2)} = \frac{109}{63} + \frac{19}{63} z.$$

Таким образом, подстановка π_1 и π_2 в исходные уравнения дает эквивалентные уравнения относительно θ; поэтому можно ограничиться решением лишь одного из них.

5. Исключительные и избыточные системы

В случае когда $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ не взаимно просты:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2), \qquad |\mathbf{v}| > 0, \tag{1.21}$$

система π-уравнений (1.16), как правило, является противоречивой и не имеет решений. Действительно, применяя метод исключения θ, мы получим π-уравнение (1.20), которое в случае (1.21) неразрешимо, а следовательно, неразрешима и исходная система (1.16). Однако существуют исключительные случаи. Систему вида (1.16) при условии (1.21) будем называть *исключительной*, если полином $\mathbf{a}_1\mathbf{c}_2 - \mathbf{a}_2\mathbf{c}_1$ делится на $\mathbf{v} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$. Исключительная система является непротиворечивой и имеет решение. Введя дополнительные множители $\mathbf{b}_1^0$ и $\mathbf{b}_2^0$, такие что $\mathbf{b}_1 = \mathbf{v}\mathbf{b}_1^0$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{v}\mathbf{b}_2^0$, и пользуясь методом исключения θ, ее можно привести к виду

$$\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2^0\pi_2 - \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1^0\pi_1 = \mathbf{c}^0,$$

где $\mathbf{c}^0$ — частное от деления $\mathbf{a}_1\mathbf{c}_2 - \mathbf{a}_2\mathbf{c}_1$ на $\mathbf{v}$. Ясно, что это π-уравнение, а вместе с ним и исходная система (1.16) имеют решение.

Полиномиальные уравнения (1.16) будем называть *эквивалентными* относительно θ, если каждое из этих уравнений, решаемых порознь, дает одно и то же решение относительно θ: $\theta^{(1)} = \theta^{(2)}$.

Теорема 1. Уравнения (1.16) эквивалентны относительно θ, если

а) $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}$,

б) $\mathbf{a}_1\mathbf{c}_2 - \mathbf{a}_2\mathbf{c}_1$ делится на $\mathbf{b}$.

Доказательство. Рассматриваемая система имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1\theta + \mathbf{b}\pi_1 &= \mathbf{c}_1, \\ \mathbf{a}_2\theta + \mathbf{b}\pi_2 &= \mathbf{c}_2. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Система исключительна, т. е. $\mathbf{a}_1\mathbf{c}_2 - \mathbf{a}_2\mathbf{c}_1$ делится на $\mathbf{b}$. Докажем, что каждое из этих уравнений, решаемое порознь, дает одно и то же θ. Будем решать эти уравнения методом корней. Представим полином $\mathbf{b}(z)$ в виде произведения

$$\mathbf{b}(z) = b_n \prod_{i=1}^{n} (z - \beta_i).$$

Для искомого полинома

$$\theta(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \theta_k z^k$$

получим две алгебраические системы

$$\sum_{k=0}^{n-1} \beta_i^k \theta_k^{(1)} = \frac{\mathbf{c}_1(\beta_i)}{\mathbf{a}_1(\beta_i)}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \beta_i^k \theta_k^{(2)} = \frac{\mathbf{c}_2(\beta_i)}{\mathbf{a}_2(\beta_i)}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Рассмотрим их разность

$$\sum_{k=0}^{n-1} \beta_i^k \left(\theta_k^{(2)} - \theta_k^{(1)}\right) = \frac{\mathbf{a}_1(\beta_i)\,\mathbf{c}_2(\beta_i) - \mathbf{a}_2(\beta_i)\,\mathbf{c}_1(\beta_i)}{\mathbf{a}_1(\beta_i)\,\mathbf{a}_2(\beta_i)},$$

Условие:

$$\mathbf{a}_1(z)\mathbf{c}_2(z)-\mathbf{a}_2(z)\mathbf{c}_1(z) \text{ делится на } \mathbf{b}(z)$$

означает, что

$$\mathbf{a}_1(\beta_i)\mathbf{c}_2(\beta_i)-\mathbf{a}_2(\beta_i)\mathbf{c}_1(\beta_i)=0$$

для всех $i=1, \ldots, n$. Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \beta_i^k \left(\theta_k^{(2)}-\theta_k^{(1)}\right)=0, \qquad i=1, \ldots, n.$$

Считая, что все β_i различны и $\det\{\beta_i^k\} \neq 0$, получае $\theta_k^{(1)}=\theta_k^{(2)}$ для $k=0, 1, \ldots, n-1$. Таким образом, мы доказали, что решения каждого из этих уравнений относительно θ тождественны. Легко убедиться, что это справедливо и в случае кратных корней. При этом условия накладываются и на производные полинома $\theta(z)$. Но общее число этих условий равно числу неизвестных коэффициентов полинома $\theta(z)$; поэтому эти коэффициенты определяются однозначно.

Если уравнения (1.22) эквивалентны относительно θ, то система π-уравнений (1.22) *избыточна*: это значит, что одно из уравнений (1.22) можно просто отбросить (если нас интересует только θ).

Теорема 2. Исключительная система π-уравнений

$$\begin{aligned} &(1) \quad \mathbf{a}_1\theta+\mathbf{v}\mathbf{b}\pi_1=\mathbf{c}_1, \\ &(2) \quad \mathbf{a}_2\theta+\mathbf{v}\pi_2=\mathbf{c}_2 \end{aligned} \tag{1.23}$$

(при условии: $\mathbf{a}_1\mathbf{c}_2-\mathbf{a}_2\mathbf{c}_1$ делится на $\mathbf{v}$) является избыточной; поэтому уравнение (2) можно отбросить.

Доказательство. Представим полиномы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{b}$ в виде

$$\mathbf{v}=v_n \prod_{i=1}^{n}(z-\nu_i), \quad \mathbf{b}=b_m \prod_{i=1}^{m}(z-\beta_i).$$

Тогда на $n+m$ коэффициентов полинома θ

$$\theta=\sum_{k=0}^{n+m-1} \theta_k z^k$$

уравнение (1) накладывает $n+m$ условий

$$\theta(\nu_i)=\frac{\mathbf{c}_1(\nu_i)}{\mathbf{a}_1(\nu_i)}, \qquad i=1, \ldots, n, \tag{1.24}$$

$$\theta(\beta_i)=\frac{\mathbf{c}_1(\beta_i)}{\mathbf{a}_1(\beta_i)}, \qquad i=1, \ldots, m, \tag{1.25}$$

а уравнение (2) — n условий

$$\theta(\nu_i) = \frac{\mathbf{c}_2(\nu_i)}{\mathbf{a}_2(\nu_i)}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.26}$$

Поскольку $\mathbf{a}_1\mathbf{c}_2 - \mathbf{a}_2\mathbf{c}_1$ делится на $\mathbf{v}$, то

$$\mathbf{a}_1(\nu_i)\mathbf{c}_2(\nu_i) - \mathbf{a}_2(\nu_i)\mathbf{c}_1(\nu_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Это значит, что

$$\frac{\mathbf{c}_1(\nu_i)}{\mathbf{a}_1(\nu_i)} = \frac{\mathbf{c}_2(\nu_i)}{\mathbf{a}_2(\nu_i)}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, уравнение (2) накладывает те же самые условия (1.26) на θ, что и условия (1.24), накладываемые уравнением (1). Поэтому, вычисляя полином θ, уравнение (2) можно просто отбросить. Если же нас интересует полином π_2, то найдя θ из уравнения (1), можно подставить его в уравнение (2) и получить π_2.

Теорема 3. Исключительная система π-уравнений (1.16), удовлетворяющая условиям

а) $\mathbf{v} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$, $\mathbf{b}_1 = \mathbf{v}\mathbf{b}_1^0$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{v}\mathbf{b}_2^0$,

б) $|\mathbf{b}_1^0| > 0$, $|\mathbf{b}_2^0| > 0$,

в) $\mathbf{a}_1\mathbf{c}_2 - \mathbf{a}_2\mathbf{c}_1$ делится на $\mathbf{v}$,

не является избыточной.

Доказательство. Рассматриваемая система

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1\theta + \mathbf{v}\mathbf{b}_1^0\pi_1 &= \mathbf{c}_1, \\ \mathbf{a}_2\theta + \mathbf{v}\mathbf{b}_2^0\pi_2 &= \mathbf{c}_2 \end{aligned} \tag{1.27}$$

имеет решение с числом коэффициентов полинома θ, равным $1 + |\theta| = |\mathbf{v}| + |\mathbf{b}_1^0| + |\mathbf{b}_2^0|$. Условие делимости $\mathbf{a}_1\mathbf{c}_2 - \mathbf{a}_2\mathbf{c}_1$ на $\mathbf{v}$ накладывает только $|\mathbf{v}|$ условий на эти коэффициенты. Поэтому условий для равенства всех коэффициентов $\theta^{(1)}$ и $\theta^{(2)}$ недостаточно. Добавочные условия, накладываемые на θ первым и вторым уравнениями (1.27), различны. Отсюда следует, что рассматриваемая система π-уравнений не является избыточной.

6. Рациональные функции

Рациональной функцией $\mathbf{h}$ называется отношение двух полиномов $\mathbf{h} = \mathbf{a}/\mathbf{b}$. Корни полинома $\mathbf{a}$ называются *нулями* рациональной функции $\mathbf{h}$, а корни полинома $\mathbf{b}$ — ее *полюсами*. Полюса рациональной функции образуют ее *спектр*. *Индексом* рациональной функции называется разность между числом ее нулей и полюсов. Так как число корней полинома равно его степени, то индекс рациональной функции $\operatorname{ind}\mathbf{h} = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$. Так как полином является частным видом рациональной функции, то для него понятия индекса и степени совпадают.

Если степень полинома может быть только положительной, то индекс рациональной функции может быть как положительным, так и отрицательным. Рациональная функция с $\operatorname{ind}\mathbf{h} < 0$ называется *правильной*, а с $\operatorname{ind}\mathbf{h} \geqslant 0$ — *неправильной*.

Дефектом рациональной функции называется разность дефектов полиномов — ее числителя и знаменателя. Каждая рациональная функция может быть представлена в виде $\mathbf{h} = z^d(\mathbf{a}_1/\mathbf{b}_1)$, где d — дефект, а $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{b}_1$ — приведенные полиномы. Функция $\mathbf{h}_1 = \mathbf{a}_1/\mathbf{b}_1$ называется *приведенной частью* рациональной функции $\mathbf{h}$.

Рангом рациональной функции называется индекс ее приведенной части. Таким образом, имеет место соотношение

$$\operatorname{ind}\mathbf{h} = \operatorname{def}\mathbf{h} + \operatorname{rank}\mathbf{h}.$$

Суммой рациональных функций называется рациональная функция вида

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 = \frac{\mathbf{a}_1}{\mathbf{b}_1} + \frac{\mathbf{a}_2}{\mathbf{b}_2} = \frac{\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2}.$$

Произведением рациональных функций называется рациональная функция вида

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_1\mathbf{h}_2 = \frac{\mathbf{a}_1}{\mathbf{b}_1}\cdot\frac{\mathbf{a}_2}{\mathbf{b}_2} = \frac{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2}{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2}.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что при таком определении суммы и произведения свойства функционалов ind и def, присущие им в алгебре полиномов, сохраняются и в алгебре рациональных функций:

$$\operatorname{ind}(\mathbf{h}_1 \pm \mathbf{h}_2) \leqslant \max\{\operatorname{ind}\mathbf{h}_1,\ \operatorname{ind}\mathbf{h}_2\},$$
$$\operatorname{def}(\mathbf{h}_1 \pm \mathbf{h}_2) \geqslant \min\{\operatorname{def}\mathbf{h}_1,\ \operatorname{def}\mathbf{h}_2\},$$
$$\operatorname{ind}(\mathbf{h}_1\mathbf{h}_2) = \operatorname{ind}\mathbf{h}_1 + \operatorname{ind}\mathbf{h}_2,$$
$$\operatorname{def}(\mathbf{h}_1\mathbf{h}_2) = \operatorname{def}\mathbf{h}_1 + \operatorname{def}\mathbf{h}_2.$$

Отсюда следует, что сумма, разность и произведение правильных функций $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$: $\operatorname{ind}\mathbf{h}_1 < 0$, $\operatorname{ind}\mathbf{h}_2 < 0$

являются правильными функциями: $\operatorname{ind}(\mathbf{h}_1 \pm \mathbf{h}_2) < 0$, $\operatorname{ind}(\mathbf{h}_1\mathbf{h}_2) < 0$, т. е. правильные функции образуют *кольцо*.

Отсюда следует также, что неправильную функцию $\mathbf{h} = \mathbf{c}/\mathbf{ab}$, $|\mathbf{c}| \geqslant |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ нельзя разложить на сумму двух правильных функций:

$$\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{ab}} = \frac{\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{b}} + \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{a}},$$

таких, что $|\boldsymbol{\theta}| < |\mathbf{b}|$, $|\boldsymbol{\pi}| < |\mathbf{a}|$, ибо сумма двух правильных функций всегда является правильной функцией. Это значит, что неправильное π-уравнение $\mathbf{a}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{b}\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}$ не имеет решений с $|\boldsymbol{\theta}| < |\mathbf{b}|$, $|\boldsymbol{\pi}| < |\mathbf{a}|$ одновременно.

Сумма правильной и неправильной функций является неправильной функцией. Действительно пусть

$$\frac{\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{b}} + \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{b}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{ab}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{ab}},$$

где $\boldsymbol{\theta}/\mathbf{b}$ — неправильная функция: $|\boldsymbol{\theta}| \geqslant |\mathbf{b}|$, а $\boldsymbol{\pi}/\mathbf{a}$ — правильная функция: $|\boldsymbol{\pi}| < |\mathbf{a}|$. Из этих неравенств следует: $|\mathbf{a}\boldsymbol{\theta}| \geqslant |\mathbf{ab}|$, $|\mathbf{b}\boldsymbol{\pi}| < |\mathbf{ab}|$. Это значит, что $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{b}\boldsymbol{\pi}| = |\mathbf{a}\boldsymbol{\theta}| \geqslant |\mathbf{ab}|$.

Если полиномы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{b}_1$ не взаимно простые, то при умножении рациональных функций может происходить сокращение их наибольших общих делителей, или *частичная компенсация*.

Рациональные функции можно делить одна на другую, получая при этом снова рациональные функции. Следовательно, рациональные функции образуют *поле*. Поле рациональных функций над полем действительных чисел обозначается $\mathbb{R}(z)$. Отношением рациональных функций $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$ называется рациональная функция

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{h}_1}{\mathbf{h}_2} = \frac{\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2}{\mathbf{a}_2\mathbf{b}_1}.$$

Индекс отношения рациональных функций равен разности их индексов, а дефект — разности дефектов. Функция вида $\mathbf{h}^{-1} = \mathbf{b}/\mathbf{a}$ называется *обратной* по отношению к $\mathbf{h}$. При умножении взаимно обратных функций происходит их *полная компенсация*: $\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}^{-1} = 1$. Легко видеть, что

$$\operatorname{ind}(\mathbf{h}^{-1}) + \operatorname{ind}\mathbf{h} = 0, \quad \operatorname{def}(\mathbf{h}^{-1}) + \operatorname{def}\mathbf{h} = 0.$$

Функции, связанные соотношением $\mathbf{h} + \mathbf{g} = 1$, называются *взаимно дополнительными*. Нетрудно убедиться, что взаимно дополнительные функции обладают следующими свойствами:

а) если $\operatorname{ind} \mathbf{h} \geqslant 0$, то $\operatorname{ind} \mathbf{g} = \operatorname{ind} \mathbf{h}$;

б) если $\operatorname{ind} \mathbf{h} < 0$, то $\operatorname{ind} \mathbf{g} = 0$;

в) если $\operatorname{def} \mathbf{h} \geqslant 0$, то $\operatorname{def} \mathbf{g} = 0$;

г) если $\operatorname{def} \mathbf{h} < 0$, то $\operatorname{def} \mathbf{g} = \operatorname{def} \mathbf{h}$.

Рациональную функцию с неотрицательным дефектом $\mathbf{h} = \mathbf{a}/\mathbf{b}$, $\operatorname{def} \mathbf{h} \geqslant 0$, можно разложить в степенной ряд по положительным степеням переменной z *), трактуемой как оператор запаздывания:

$$\mathbf{h}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i z^i.$$

Если такое соотношение имеет место, то говорят, что *процесс* $\{h_i\}$ имеет *изображение* в виде рациональной функции $\mathbf{h}(z)$.

Полином

$$\mathbf{h}_n(z) = \sum_{i=0}^{n} h_i z^i$$

называется *усеченным изображением* процесса $\{h_i\}$. Нетрудно доказать, что усеченное изображение $\mathbf{h}_n$ равно минимальному полиному $\boldsymbol{\pi}$ следующего π-уравнения:

$$z^{n+1}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{b}\boldsymbol{\pi} = \mathbf{a}. \tag{1.28}$$

Действительно, производя разложение рациональной функции

$$z^{-n-1}\mathbf{h} = \frac{\mathbf{a}}{z^{n+1}\mathbf{b}}$$

на сумму двух функций

$$\frac{\mathbf{a}}{z^{n+1}\mathbf{b}} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{z^{n+1}} + \frac{\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{b}}, \tag{1.29}$$

получаем π-уравнение (1.28). Минимальный полином $\boldsymbol{\pi}$ этого уравнения имеет степень n. С другой стороны, умножая степенной ряд

$$\mathbf{h}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i z^i$$

*) Разложение функции $\mathbf{h}$ в ряд по положительным степеням z удобно получать алгоритмом деления полинома $\mathbf{a}$ на полином $\mathbf{b}$, начиная с младших членов.

на z^{-n-1}, получаем

$$z^{-n-1}\mathbf{h}(z) = z^{-n-1}\mathbf{h}_n(z) + \sum_{i=0}^{\infty} h_{n+i+1} z^i. \qquad (1.30)$$

Сравнивая формулы (1.29) и (1.30), заключаем, что

$$\mathbf{h}_n(z) = \pi(z), \quad \sum_{i=0}^{\infty} h_{n+i+1} z^i = \frac{\theta(z)}{\mathbf{b}(z)}.$$

Теорема доказана. Как следствие, получаем

$$h_{n+1} = \frac{\theta(0)}{\mathbf{b}(0)}.$$

7. Инверсия

Инверсией рациональной функции $\mathbf{h} = \mathbf{a}/\mathbf{b}$ называется замена ее аргумента z обратным ему аргументом z^{-1}. Результатом инверсии является инвертированная функция $\hat{\mathbf{h}}$ *), для которой справедливо $\hat{\mathbf{h}}(z) = \mathbf{h}(z^{-1})$.

В результате инверсии функции, имеющей представление

$$\mathbf{h} = z^d \frac{\mathbf{a}_1}{\mathbf{b}_1}, \qquad (1.31)$$

где $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{b}_1$ — приведенные полиномы, получается рациональная функция с представлением

$$\hat{\mathbf{h}} = z^{-d-|\mathbf{a}_1|+|\mathbf{b}_1|} \frac{\tilde{\mathbf{a}}_1}{\tilde{\mathbf{b}}_1}. \qquad (1.32)$$

Знаком $\tilde{\mathbf{a}}$ обозначен *обратный полином* (полином с обратным порядком следования коэффициентов):

$$\tilde{\mathbf{a}}(z) = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} z^i.$$

Сравнивая выражения (1.31) и (1.32), убедимся в справедливости следующих соотношений:

$$\operatorname{ind} \mathbf{h} + \operatorname{def} \hat{\mathbf{h}} = 0, \quad \operatorname{ind} \hat{\mathbf{h}} + \operatorname{def} \mathbf{h} = 0.$$

---

*) Операцию инверсии будем обозначать крышечкой над инвертируемой функцией.

Учитывая, что инверсия удовлетворяет условию $\hat{\hat{\mathbf{h}}} = \mathbf{h}$, эти соотношения можно получить одно из другого. Легко убедиться, что оператор инверсии коммутирует с операторами суммы, произведения, взятия обратной и дополнительной функции.

В результате инверсии полинома, имеющего представление

$$\mathbf{a} = z^d \mathbf{a}_1, \quad r = |\mathbf{a}_1|,$$

где $\mathbf{a}_1$ — приведенный полином, получается рациональная функция вида

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\tilde{\mathbf{a}}_1}{z^{d+r}} = \frac{\tilde{\mathbf{a}}_1}{z^n}.$$

Нетрудно проверить, что $\operatorname{def} \tilde{\mathbf{a}}_1 = 0$, $\operatorname{ind} \tilde{\mathbf{a}}_1 = \operatorname{rank} \mathbf{a}$. Производя инверсию полинома $\mathbf{a}$, имеющего степень n, можно написать $\hat{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{a}}/z^n$. Отсюда следует, что $\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{a}}_1$ и, следовательно,

$$\operatorname{def} \tilde{\mathbf{a}} = 0, \quad \operatorname{ind} \tilde{\mathbf{a}} = \operatorname{rank} \mathbf{a}. \tag{1.33}$$

Легко убедиться в справедливости следующих формул:

$$\mathbf{a} = z^{|\mathbf{a}| - |\tilde{\mathbf{a}}|} \cdot \tilde{\tilde{\mathbf{a}}}, \tag{1.34}$$

$$\widehat{\left(\frac{\mathbf{a}}{\tilde{\mathbf{a}}}\right)} = \frac{\tilde{\mathbf{a}}}{z^{|\mathbf{a}| - |\tilde{\mathbf{a}}|} \cdot \tilde{\tilde{\mathbf{a}}}} = \frac{\tilde{\mathbf{a}}}{\mathbf{a}}. \tag{1.35}$$

8. Факторизация и сепарация

Обозначим через Γ контур $|z| = 1$, через Z^- — область, лежащую внутри этого контура: $Z^- = \{z < 1\}$, а через Z^+ — область, лежащую вне его: $Z^+ = \{|z| > 1\}$. *Факторизацией* полинома $\mathbf{a}$ называется разбиение его на произведение $\mathbf{a} = \mathbf{a}^+\mathbf{a}^-$ двух полиномов $\mathbf{a}^+$ и $\mathbf{a}^-$, один из которых $\mathbf{a}^+$ не имеет корней в области Z^-, а другой $\mathbf{a}^-$ — в области Z^+. Что касается корней полинома $\mathbf{a}$, расположенных на самом контуре Γ, которые мы будем называть *особыми*, то вопрос об их отнесении в $\mathbf{a}^+$ или в $\mathbf{a}^-$ требует в каждом конкретном случае специального исследования. Полиномы, имеющие особые корни, также называются *особыми*.

Факторизация существует для всех полиномов и является единственной для всех неособых полиномов с точностью до числового множителя, который можно относить как в $\mathbf{a}^+$, так и в $\mathbf{a}^-$. Факторизация полинома, коэффициенты которого являются действительными числами, также дает полиномы с действительными коэффициентами. В самом деле, все комплексные корни полинома $\mathbf{a}$ являются попарно сопряженными и, следовательно, попадают одновременно либо в область Z^+, либо в область Z^-. Множитель z^d, следуя общему правилу, необходимо относить в $\mathbf{a}^-$.

Легко видеть, что

$$\operatorname{ind}\mathbf{a} = \operatorname{ind}\mathbf{a}^+ + \operatorname{ind}\mathbf{a}^-,$$
$$\operatorname{def}\mathbf{a} = \operatorname{def}\mathbf{a}^-, \quad \operatorname{def}\mathbf{a}^+ = 0.$$

В дальнейшем нам понадобятся полиномы вида *)

$$\mathbf{a}^* = \mathbf{a}^+\tilde{\mathbf{a}}^- \tag{1.36}$$

и инверсные к ним функции

$$\hat{\mathbf{a}}^* = \hat{\mathbf{a}}^+\hat{\tilde{\mathbf{a}}}^- = z^{-|\mathbf{a}^+|-|\tilde{\mathbf{a}}^-|}\tilde{\mathbf{a}}^+\tilde{\tilde{\mathbf{a}}}^-.$$

Пользуясь правилом (1.34), получим

$$\hat{\mathbf{a}}^* = z^{-|\mathbf{a}|}\mathbf{a}^-\tilde{\mathbf{a}}^+. \tag{1.37}$$

Составим функцию

$$\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}^+\mathbf{a}^-\hat{\mathbf{a}}^+\hat{\mathbf{a}}^- = z^{-|\mathbf{a}|}\mathbf{a}^+\mathbf{a}^-\tilde{\mathbf{a}}^+\tilde{\mathbf{a}}^-.$$

Учитывая формулы (1.36) и (1.37), получаем

$$\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}^*\hat{\mathbf{a}}^*. \tag{1.38}$$

Факторизация рациональной функции $\mathbf{h} = \mathbf{a}/\mathbf{b}$ производится путем факторизации ее числителя и знаменателя: $\mathbf{a} = \mathbf{a}^+\mathbf{a}^-$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}^+\mathbf{b}_-$. В результате получаются рациональные функции вида $\mathbf{h}^+ = \mathbf{a}^+/\mathbf{b}^+$, $\mathbf{h}^- = \mathbf{a}^-/\mathbf{b}^-$, произведение которых равно исходной функции $\mathbf{h} = \mathbf{h}^+\mathbf{h}^-$. Функции $\mathbf{h}^+$ и $\mathbf{h}^-$ называются соответственно *положительной* и *отрицательной* частями рациональной функции $\mathbf{h}$. Легко видеть, что $\operatorname{ind}\mathbf{h} = \operatorname{ind}\mathbf{h}^+ + \operatorname{ind}\mathbf{h}^-$, $\operatorname{def}\mathbf{h} = \operatorname{def}\mathbf{h}^-$, $\operatorname{def}\mathbf{h}^+ = 0$.

---

*) Символ $\tilde{\mathbf{a}}^-$ означает $\widetilde{(\mathbf{a}^-)}$, а не $(\tilde{\mathbf{a}})^-$. Нетрудно убедиться в справедливости соотношений $\tilde{\mathbf{a}}^- = (\tilde{\mathbf{a}})^+$, $\tilde{\mathbf{a}}^+ = (\tilde{\mathbf{a}})^-$.

Сепарацией рациональной функции называется разложение ее на сумму двух функций $\mathbf{h} = \mathbf{h}_+ + \mathbf{h}_-$, одна из которых $\mathbf{h}_+$ не имеет полюсов в области Z^-, а другая $\mathbf{h}_-$ — в области Z^+. Для того чтобы произвести сепарацию рациональной функции, достаточно произвести факторизацию ее знаменателя $\mathbf{b} = \mathbf{b}^+\mathbf{b}^-$, а затем решить π-уравнение

$$\mathbf{b}^-\theta + \mathbf{b}^+\pi = \mathbf{a}. \tag{1.39}$$

В результате получим

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\theta}{\mathbf{b}^+} + \frac{\pi}{\mathbf{b}^-}.$$

Легко видеть, что $\mathbf{h}_+ = \theta/\mathbf{b}^+$, $\mathbf{h}_- = \pi/\mathbf{b}^-$. Функции $\mathbf{h}_+$ и $\mathbf{h}_-$ называются соответственно *правой* и *левой* частями рациональной функции $\mathbf{h}$.

Поскольку π-уравнение (1.39) имеет множество решений, сепарация не является однозначной операцией. Сепарация, для которой выполняется условие $\operatorname{ind}\mathbf{h}_- < 0$ правильности левой части, называется *правильной*. Правильная сепарация любой рациональной функции существует и является единственной. Она соответствует получению минимального относительно π решения π-уравнения (1.39). Если исходная функция $\mathbf{h}$ является правильной, то правильная сепарация обеспечивает также правильность правой части: $\operatorname{ind}\mathbf{h}_+ < 0$. Кроме того, для функции $\mathbf{h}_+$ всегда выполняется условие $\operatorname{def}\mathbf{h}_+ \geqslant 0$.

Рассмотрим вопрос о разложении рациональной функции $\mathbf{h}$ в степенной ряд Лорана в окрестности контура Г. Заметим, что разложение рациональной функции в ряд Тейлора по положительным степеням z существует только для функций с неотрицательным дефектом, а разложение в ряд Тейлора по отрицательным степеням z — только для функций с отрицательным индексом.

Правая часть функции $\mathbf{h}$ может быть представлена рядом Тейлора по положительным степеням z, сходящимся на контуре Г:

$$\mathbf{h}_+ = \sum_{i=0}^{\infty} h_i z^i.$$

В случае правильной сепарации левая часть $\mathbf{h}$ может быть представлена рядом Тейлора по отрицательным степеням z, также сходящимся на контуре Г:

$$\mathbf{h}_- = \sum_{i=-1}^{-\infty} h_i z^i.$$

Суммированием обоих рядов Тейлора получаем разложение функции $\mathbf{h}$ в ряд Лорана в окрестности контура Г:

$$\mathbf{h} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h_i z^i.$$

В пространстве степенных рядов Лорана, представляющих рациональные функции в кольце, содержащем контур Г, введем *функционал наблюдения*, ставящий в соответствие каждому степенному ряду его постоянный член $h_0 = \mathrm{ct}\,\mathbf{h}$. Функционал наблюдения может быть выражен через саму функцию $\mathbf{h}(z)$ с помощью контурного интеграла [50]:

$$h_0 = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \mathbf{h}(z) \frac{dz}{z}.$$

В применении к правой части функции $\mathbf{h}$ функционал наблюдения выражается как значение этой функции в точке $z = 0$: $\mathrm{ct}\,\mathbf{h}_+ = \mathbf{h}_+(0)$. В применении к левой части функции $\mathbf{h}$ функционал наблюдения выражается как значение этой функции в точке $z = \infty$: $\mathrm{ct}\,\mathbf{h}_- = \mathbf{h}_-(\infty)$. Для правой части с положительным дефектом этот функционал равен нулю: если $\mathrm{def}\,\mathbf{h}_+ > 0$, то $\mathrm{ct}\,\mathbf{h}_+ = 0$. Для левой части с отрицательным индексом имеет место то же самое: если $\mathrm{ind}\,\mathbf{h}_- < 0$, то $\mathrm{ct}\,\mathbf{h}_- = 0$. Так как $\mathrm{ct}\,\mathbf{h} = \mathrm{ct}\,\mathbf{h}_- + \mathrm{ct}\,\mathbf{h}_+$, то из условий $\mathrm{ind}\,\mathbf{h}_- < 0$, $\mathrm{def}\,\mathbf{h}_+ > 0$ следует, что $\mathrm{ct}\,\mathbf{h} = 0$.

Поскольку в случае правильной сепарации условие $\mathrm{ind}\,\mathbf{h}_- < 0$ всегда выполняется, то вычисление $\mathrm{ct}\,\mathbf{h}$ может производиться по формуле $\mathrm{ct}\,\mathbf{h} = \mathbf{h}_+(0)$. Чтобы воспользоваться этой формулой, надо решить π-уравнение (1.39). Таким образом, решение π-уравнения заменяет собою вычисление контурного интеграла.

Пример 1. Требуется произвести факторизацию полинома $\mathbf{a}(z) = 3z + 2z^2 + z^3$. Имеем $\mathbf{a}(z) = z(3 + 2z + z^2)$. Найдем корни уравнения $z^2 + 2z + 3 = 0$. Имеем $z_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{2}$. Эти корни имеют модуль $|z_{1,2}| = \sqrt{3} > 1$ и расположены в области Z^+. Следовательно, $\mathbf{a}^+ = 3 + 2z + z^2$, $\mathbf{a}^- = z$.

Пример 2. Требуется произвести факторизацию полинома

$$\mathbf{a}(z) = 1{,}26 + 5{,}23z - 6{,}9z^2 - 6{,}4z^3 + 3{,}1z^4 + 2z^5.$$

Вычисляя тем или иным способом корни полинома, получим

$$z_1 = 1{,}4; \quad z_2 = -2; \quad z_3 = -1{,}5; \quad z_4 = -0{,}2; \quad z_5 = 0{,}75.$$

Первые три корня расположены в области Z^+, остальные два — в области Z^-. Поэтому

$$\mathbf{a}^+ = (z - 1{,}4)(z + 1{,}5)(z + 2) = -4{,}2 - 1{,}9z + 2{,}1z^2 + z^3,$$
$$\mathbf{a}^- = 2(z - 0{,}75)(z + 0{,}2) = -0{,}3 - 1{,}1z + 2z^2.$$

Факторизация произведена с точностью до произвольного числового множителя.

Пример 3. Требуется произвести правильную сепарацию функции

$$\mathbf{h} = \frac{4z(1 + 2z + 3z^2)}{(1 - 0{,}6z)(z + 0{,}75)}.$$

Имеем

$$\mathbf{a} = 4z(1 + 2z + 3z^2); \quad \mathbf{b}^+ = 1 - 0{,}6z; \quad \mathbf{b}^- = z + 0{,}75.$$

Составляем π-уравнение (1.39):

$$(z + 0{,}75)\theta + (1 - 0{,}6z)\pi = 4z(1 + 2z + 3z^2).$$

Его минимальное решение относительно π содержит полиномы следующих степеней: $|\theta| = 2$, $|\pi| = 0$. Разворачивая его в алгебраическую систему, получим

$$\begin{aligned}
&0{,}75\theta_0 + \pi_0 = 0,\\
&\theta_0 + 0{,}75\theta_1 - 0{,}6\pi_0 = 4,\\
&\theta_1 + 0{,}75\theta_2 = 8,\\
&\theta_2 = 12.
\end{aligned}$$

Ее решение $\theta = 3{,}28 - z + 12z^2$; $\pi = -2{,}45$. Таким образом, правая и левая части функции $\mathbf{h}$ равны

$$\mathbf{h}_+ = \frac{3{,}28 - z + 12z^2}{1 - 0{,}6z}, \quad \mathbf{h}_- = -\frac{2{,}45}{z + 0{,}75}.$$

9. Симметричные полиномы и рациональные функции

В приложениях важную роль играют симметричные полиномы и рациональные функции. *Симметричным* называется полином, равный своему обратному: $\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{a}}$. Из (1.33) вытекает, что $\operatorname{def}\mathbf{a} = 0$ и, следовательно, симметричными могут быть только приведенные полиномы.

Покажем, что любой симметричный полином четной степени может быть представлен в виде $\mathbf{a} = \mathbf{k}\tilde{\mathbf{k}}$, где $\mathbf{k}$ — полином с нулевым дефектом $\operatorname{def}\mathbf{k} = 0$. Используя представление исходного полинома в виде произведения

$$\mathbf{a} = a_n \prod_{i=1}^{n} (z - \alpha_i),$$

получим соответствующее представление для обратного полинома:

$$\tilde{\mathbf{a}} = a_0 \prod_{i=1}^{n} (z - \alpha_i^{-1}).$$

Поскольку полином $\mathbf{a}$ является симметричным, то каждому его нулю α_i соответствует другой нуль α_j, обратный первому: $\alpha_j = \alpha_i^{-1}$. Таким образом, множество нулей симметричного полинома четной степени разбивается на пары взаимно обратных элементов. Выделяя по одному элементу из каждой пары, можно сформировать полином $\mathbf{k}$. Оставшиеся элементы образуют полином $\tilde{\mathbf{k}}$. Из условий $\operatorname{def} \mathbf{a} = 0$, $\operatorname{def} \tilde{\mathbf{k}} = 0$ следует, что $\operatorname{def} \mathbf{k} = 0$, т. е. полином $\mathbf{k}$ является приведенным. Что касается полиномов нечетной степени, то симметричными они могут быть только в том случае, если содержат множитель $(1 + z)$ и его нечетные степени.

Если полином $\mathbf{a}$ имеет действительные коэффициенты и является неособым, то полином $\mathbf{k}$ также имеет действительные коэффициенты. Если полином $\mathbf{a}$ является особым, то полином $\mathbf{k}$ в общем случае не является действительным *).

Симметричной рациональной функцией называется рациональная функция, равная своей инверсной: $\mathbf{h} = \hat{\mathbf{h}}$. Для нее справедливо соотношение $\operatorname{ind} \mathbf{h} + \operatorname{def} \mathbf{h} = 0$.

Покажем, что любая симметричная рациональная функция может быть представлена в виде $\mathbf{h} = \mathbf{f}\hat{\mathbf{f}}$, где $\mathbf{f}$ — рациональная функция с нулевым дефектом $\operatorname{def} \mathbf{f} = 0$. Представим $\mathbf{h}$ в виде $\mathbf{h} = z^d(\mathbf{a}/\mathbf{b})$, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — приведенные полиномы. Инвертируя эту функцию, получаем $\hat{\mathbf{h}} = z^{-d-|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|}(\tilde{\mathbf{a}}/\tilde{\mathbf{b}})$. Из симметричности функции $\mathbf{h}$ вытекает $d = {}^1/_2(|\mathbf{b}| - |\mathbf{a}|)$, $\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{a}}$, $\mathbf{b} = \tilde{\mathbf{b}}$.

---

*) Например, полином $\mathbf{a} = 1 + 2\rho z + z^2$, при $|\rho| < 1$ имеющий комплексные нули на контуре Г:

$$\alpha_1 = -\rho + j\sqrt{1-\rho^2}, \quad \alpha_2 = -\rho - j\sqrt{1-\rho^2}, \quad \alpha_1 = \alpha_2^{-1},$$

не может быть представлен в виде $\mathbf{a} = \mathbf{k}\tilde{\mathbf{k}}$, где $\mathbf{k}$ — действительный полином.

Поскольку $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — симметричные полиномы, производим их разложение: $\mathbf{a} = \mathbf{k}\tilde{\mathbf{k}}$, $\mathbf{b} = \mathbf{l}\tilde{\mathbf{l}}$. Выбирая

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{l}}, \quad \mathbf{g} = z^d \frac{\tilde{\mathbf{k}}}{\tilde{\mathbf{l}}},$$

получаем функцию $\mathbf{f}$ с нулевым дефектом.

Имеем $\mathbf{h} = \mathbf{fg}$. Покажем, что функция $\mathbf{g}$ является инверсной к $\mathbf{f}$. Инвертируя $\mathbf{g}$, получаем

$$\hat{\mathbf{g}} = z^{-d+|\mathbf{l}|-|\mathbf{k}|} \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{l}}.$$

Но так как $|\mathbf{k}| = {}^1/_2|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{l}| = {}^1/_2|\mathbf{b}|$, то $\operatorname{def}\hat{\mathbf{g}} = 0$. Следовательно, $\hat{\mathbf{g}} = \mathbf{f}$ и $\mathbf{g} = \hat{\mathbf{f}}$.

Используя разложение симметричной функции $\mathbf{h}$ в ряд Лорана, получаем условия на ее коэффициенты: $h_i = h_{-i}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Левая и правая части симметричной функции связаны между собой соотношением

$$\mathbf{h}_+ = \hat{\mathbf{h}}_- + h_0. \qquad (1.40)$$

Так как $\mathbf{h}_- = \boldsymbol{\pi}/\mathbf{b}^-$, $|\boldsymbol{\pi}| < |\mathbf{b}^-|$, то $\hat{\mathbf{h}}_- = z^d\tilde{\boldsymbol{\pi}}/\tilde{\mathbf{b}}^-$, $d > 0$. Учитывая (1.40), получаем

$$\mathbf{h}_+ = \frac{h_0\tilde{\mathbf{b}}^- + z^d\tilde{\boldsymbol{\pi}}}{\tilde{\mathbf{b}}^-}.$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{b}^+ = \tilde{\mathbf{b}}^-. \qquad (1.41)$$

Положительная и отрицательная части симметричной функции связаны между собой соотношениями

$$\hat{\mathbf{h}}^+ = \mathbf{h}^-, \quad \hat{\mathbf{h}}^- = \mathbf{h}^+. \qquad (1.42)$$

Это следует из того, что при инверсии функции $\mathbf{h}^+$ все ее нули и полюса переходят из области Z^+ в область Z^- и наоборот, при инверсии $\mathbf{h}^-$ все ее нули и полюса переходят из области Z^- в область Z^+. Поэтому любая симметричная функция может быть представлена в виде $\mathbf{h} = \mathbf{h}^+\hat{\mathbf{h}}^+$, где $\mathbf{h}^+$ — положительная функция. Поскольку $\operatorname{def}\mathbf{h}^+ = 0$, то $\operatorname{ind}\mathbf{h}^- = 0$. Отсюда следует, что $\hat{\mathbf{h}}^- = \tilde{\mathbf{a}}^-/\tilde{\mathbf{b}}^-$. Учитывая (1.41) и (1.42), получаем $\mathbf{a}^+ = \tilde{\mathbf{a}}^-$. Легко видеть также, что

$$\operatorname{ind}\mathbf{h}^+ = \operatorname{ind}\mathbf{h}, \quad \operatorname{def}\mathbf{h}^- = -\operatorname{ind}\mathbf{h}. \tag{1.43}$$

Рассмотрим два случая: (А) $\operatorname{ind}\mathbf{h} < 0$ и (Б) $\operatorname{ind}\mathbf{h} \geqslant 0$.

В случае А имеем $\operatorname{ind}\mathbf{h} = -d$, $d = \operatorname{def}\mathbf{h} > 0$. На основании (1.43) заключаем, что $\operatorname{ind}\mathbf{h}^+ = -d$, $\widehat{\mathbf{h}}^+ = z^d\widetilde{\mathbf{a}}^+/\widetilde{\mathbf{b}}^+$. Учитывая (1.42), получим $\mathbf{b}^- = \widetilde{\mathbf{b}}^+$, $\mathbf{a}^- = z^d\widetilde{\mathbf{a}}^+$. Отсюда следует, что

$$\operatorname{def}\mathbf{b}^- = 0, \quad |\mathbf{b}^-| = |\mathbf{b}^+|, \quad |\mathbf{a}^-| = |\mathbf{a}^+| + d.$$

В случае Б имеем $\operatorname{ind}\mathbf{h} = n \geqslant 0$, $\operatorname{def}\mathbf{h} = -n$. На основании (1.43) заключаем, что $\operatorname{ind}\mathbf{h}^+ = n$, $\widehat{\mathbf{h}}^+ = \widetilde{\mathbf{a}}^+/z^n\widetilde{\mathbf{b}}^+$. Учитывая (1.42), получим $\mathbf{b}^- = z^n\widetilde{\mathbf{b}}^+$, $\mathbf{a}^- = \widetilde{\mathbf{a}}^+$. Отсюда следует, что

$$\operatorname{def}\mathbf{a}^- = 0, \quad |\mathbf{a}^-| = |\mathbf{a}^+|, \quad |\mathbf{b}^-| = |\mathbf{b}^+| + n.$$

ГЛАВА 2

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

1. Непрерывные и дискретные изображения процессов

Непрерывным изображением *) процесса, заданного функцией $x(t)$ на временном интервале $0 \leqslant t < \infty$, называется функция $\mathbf{x}(p)$, связанная с $x(t)$ преобразованием Лапласа

$$\mathbf{x}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} x(t)\, dt.$$

Мы ограничимся рассмотрением процессов, непрерывные изображения которых являются рациональными функциями от p: $\mathbf{x}(p) = \mathbf{a}(p)/\mathbf{b}(p)$, где $\mathbf{a}(p)$ и $\mathbf{b}(p)$ — полиномы от p вида

$$\mathbf{a}(p) = \sum_{i=0}^{m} a_i p^i, \quad \mathbf{b}(p) = \sum_{i=0}^{n} b_i p^i.$$

В системах управления, содержащих ЭВМ, используется не вся информация о процессе $x(t)$, а лишь выборка из нее, представленная последовательностью x_0, x_1, x_2, ... значений функции $x(t)$, где $x_k = x(kT)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ в дискретные равноотстоящие моменты времени $t_k = kT$ (T — *такт* выборки).

Дискретным изображением процесса называется производящая функция этой последовательности $\mathbf{x}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^k$. В технической литературе принят термин «z-преобразование». Мы ограничимся рассмотрением процессов, дискретные изображения которых являются рациональными функциями от z: $\mathbf{x}(z) = \mathbf{a}(z)/\mathbf{b}(z)$, где

*) В операционном исчислении широко применяется термин «изображение». С помощью преобразования Лапласа от «оригинала» — функции действительного переменного t переходят к «изображению» — функции комплексного переменного p.

$\mathbf{a}(z)$ и $\mathbf{b}(z)$ — полиномы от z вида

$$\mathbf{a}(z)=\sum_{k=0}^{m} a_k z^k, \quad \mathbf{b}(z)=\sum_{k=0}^{n} b_k z^k.$$

Безусловно, параметры этих полиномов уже другие, чем в непрерывном изображении.

По физическому смыслу комплексная переменная p в преобразовании Лапласа есть оператор дифференцирования, а комплексная переменная z в z-преобразовании — оператор запаздывания на один такт. Если между этими операторами установить связь $z=e^{-pT}$, то функция

$$\mathbf{x}^*(p)=\sum_{k=0}^{\infty} x_k e^{-kpT},$$

в которую переходит дискретное изображение, является преобразованием Лапласа для процесса

$$x^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty} x_k \delta(t-kT),$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, обладающая свойствами «импульса»:

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty, & t=0,\\ 0, & t\neq 0,\end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt=1.$$

Процесс $x^*(t)$ будем называть *импульсным* процессом, соответствующим непрерывному процессу $x(t)$. Использование импульсных процессов является удобным средством анализа систем, состоящих как из непрерывных, так и из дискретных частей.

Если непрерывное изображение процесса является рациональной функцией оператора p, то дискретное изображение является рациональной функцией оператора z (при любом такте выборки T)*). Это положение легко

*) Рациональные изображения от z имеет даже более широкий класс процессов, а именно процессы, происходящие в системах, описываемых линейными дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом, непрерывные изображения которых равны

$$\mathbf{x}(p)=\frac{\mathbf{a}(p)}{\mathbf{b}(p)}e^{-p\tau},$$

где время запаздывания τ кратно такту T: $\tau=nT$.

доказывается разложением непрерывного изображения на элементарные дроби вида *) $\mathbf{x}_i(p) = c_i/(p + a_i)$, переходом от них к соответствующим оригиналам вида $x_i(t) = c_i e^{-a_i t}$, вычислением дискретных изображений, соответствующим этим оригиналам:

$$\mathbf{x}_i(z) = \frac{c_i}{1 - \alpha_i z}, \qquad \alpha_i = e^{-a_i T},$$

и их суммированием.

Пример 1. Найдем непрерывное и дискретное изображения процесса

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

представляющего собой единичный скачок. Вычисляя преобразование Лапласа, имеем

$$\mathbf{u}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} dt = \frac{1}{p}.$$

Вычисляя z-преобразование, имеем

$$\mathbf{u}(z) = \sum_{k=0}^\infty z^k = \frac{1}{1-z}.$$

Пример 2. Найдем непрерывное и дискретное изображение процесса

$$x(t) = t \cdot u(t) = \begin{cases} t, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Для вычисления преобразования Лапласа воспользуемся методом интегрирования по частям:

$$\mathbf{x}(p) = \int_0^\infty t e^{-pt} dt = -\frac{t}{p} e^{-pt} \Bigg|_0^\infty + \frac{1}{p} \int_0^\infty e^{-pt} dt = \frac{1}{p^2}.$$

При такте $T = 1$ нам надо вычислить производящую функцию последовательности чисел натурального ряда (вместе с нулем) 0, 1, 2, 3, ... Производящая функция

$$\mathbf{x}(z) = z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + \ldots = \sum_{k=0}^\infty k z^k.$$

*) Непрерывные изображения реальных непрерывных процессов являются правильными рациональными функциями и потому разлагаются на элементарные дроби.

Для нахождения суммы этого ряда воспользуемся правилом дифференцирования степенных рядов [69, т. I, с. 363—365]. Продифференцируем ряд

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty} z^k.$$

Имеем

$$\frac{1}{(1-z)^2}=\sum_{k=0}^{\infty} kz^{k-1}.$$

Умножая обе части этого равенства на z, получаем

$$\frac{z}{(1-z)^2}=\sum_{k=0}^{\infty} kz^k.$$

Таким образом, изображение последовательности натуральных чисел имеет вид

$$\mathrm{x}(z)=\frac{z}{(1-z)^2},$$

а дискретное изображение процесса $x(t)=t\cdot u(t)$ при произвольном T имеет вид

$$\mathrm{x}(z)=\sum_{k=0}^{\infty} kT\cdot z^k=\frac{Tz}{(1-z)^2}.$$

Пример 3. Найдем непрерывное и дискретное изображения процесса

$$x(t)=\sin at\cdot u(t)=\begin{cases}\sin at, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

Воспользуемся формулой Эйлера

$$\sin t=\frac{1}{2j}\left(e^{jt}-e^{-jt}\right).$$

Непрерывное изображение

$$\mathrm{x}(p)=\int_0^{\infty} e^{-pt}\sin at\cdot dt=\frac{1}{2j}\int_0^{\infty} e^{-(p-ja)t}dt-\frac{1}{2j}\int_0^{\infty} e^{-(p+ja)t}dt=$$

$$=\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{p-ja}-\frac{1}{p+ja}\right)=\frac{a}{p^2+a^2}.$$

Дискретное изображение

$$\mathbf{x}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\sin akT\cdot z^k=\frac{1}{2j}\left(\sum_{k=0}^{\infty}e^{jakT}\cdot z^k-\sum_{k=0}^{\infty}e^{-jakT}\cdot z^k\right)=$$

$$=\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{1-e^{jaT}z}-\frac{1}{1-e^{-jaT}z}\right)=$$

$$=\frac{1}{2j}\,\frac{\left(e^{jaT}-e^{-jaT}\right)z}{1-\left(e^{jaT}+e^{-jaT}\right)z+z^2}=\frac{(\sin aT)\,z}{1-2\,(\cos aT)\,z+z^2}\,.$$

Таким образом, и непрерывное, и дискретное изображения являются рациональными функциями.

2. Передаточные функции непрерывных систем

Уравнение непрерывной линейной динамической системы с постоянными параметрами можно записать в виде

$$\sum_{i=0}^{n}b_iy^{(i)}=\sum_{i=0}^{m}a_ix^{(i)},$$

где $x(t)$ — процесс на входе, а $y(t)$ — процесс на выходе системы. Применяя к этому уравнению преобразование Лапласа и считая начальные условия нулевыми, получим $\mathbf{y}(p)=\mathbf{h}(p)\mathbf{x}(p)$, где $\mathbf{x}(p)$ и $\mathbf{y}(p)$ — непрерывные изображения процессов, происходящих соответственно на входе и выходе системы, а $\mathbf{h}(p)$ — рациональная функция $\mathbf{h}(p)=\mathbf{a}(p)/\mathbf{b}(p)$, называется *непрерывной передаточной функцией* динамической системы. Полиномы $\mathbf{a}(p)$ и $\mathbf{b}(p)$ имеют вид

$$\mathbf{a}(p)=\sum_{i=0}^{m}a_ip^i,\quad \mathbf{b}(p)=\sum_{i=0}^{n}b_ip^i.$$

Вводя оригинал, соответствующий изображению $\mathbf{h}(p)$,

$$\mathbf{h}(p)=\int_0^{\infty}e^{-pt}h(t)\,dt,$$

соотношение между входом и выходом системы можно выразить *сверткой*

$$y(t)=\int_0^{\infty}h(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau. \qquad (2.1)$$

Функция $h(t)$ есть реакция системы на дельта-функцию $\delta(t)$, изображение которой равно единице.

Найдем реакцию системы на импульсную функцию

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \delta(t - kT).$$

Подставляя это выражение в (2.1), получим

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h(t - kT)\, x_k.$$

Выборка из процесса на выходе системы, взятая в те же моменты времени, что и входная выборка, удовлетворяет уравнению

$$y_i = \sum_{k=0}^{\infty} h_{i-k} x_k, \quad h_i = h(iT), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots \quad (2.2)$$

Умножая обе части уравнения (2.2) на z^i и суммируя по всем i от 0 до ∞, получим $\mathbf{y}(z) = \mathbf{h}(z)\mathbf{x}(z)$. Функция $\mathbf{h}(z)$ называется *дискретной передаточной функцией* непрерывной системы. Рациональная функция $\mathbf{h}(z) = \mathbf{p}(z)/\mathbf{q}(z)$, где $\mathbf{p}(z)$ и $\mathbf{q}(z)$ — полиномы от z:

$$\mathbf{p}(z) = \sum_{k=0}^{m} p_k z^k, \quad \mathbf{q}(z) = \sum_{k=0}^{n} q_k z^k,$$

соответствует z-преобразованию конечно-разностного уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} q_k y_{i-k} = \sum_{k=0}^{m} p_k x_{i-k},$$

аппроксимирующего исходное дифференциальное уравнение. Переход от непрерывной передаточной функции системы к ее дискретной передаточной функции по правилам z-преобразования является наиболее строгим способом составления конечно-разностных схем для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Дискретная передаточная функция непрерывной системы $\mathbf{h}(z)$, как и ее непрерывная передаточная функция $\mathbf{h}(p)$, являются правильными функциями от операторов z и p соответственно. Правильность $\mathbf{h}(p)$ следует из того факта, что переходные процессы реальных «физических» систем описываются обыкновенными функциями времени (в отличие от обобщенных функций типа дельта-функции и ее производных). Правильность $\mathbf{h}(z)$ следует из способа построения $\mathbf{h}(z)$ из $\mathbf{h}(p)$ через элементарные функции.

3. Программы дискретных управляющих устройств

Дискретные автоматические системы состоят из управляемых объектов, являющихся динамическими системами непрерывного действия, и управляющих устройств дискретного действия (в том числе ЭВМ). Дискретные управляющие устройства, выполняющие линейные преобразования числовых последовательностей, естественно описываются дискретными передаточными функциями в форме рациональных функций.

Программой дискретного управляющего устройства называется следующее правило преобразования числовой последовательности $\{x_i\}$ в последовательность $\{y_i\}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \beta_k y_{i-k} = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k x_{i-k}, \tag{2.3}$$

или

$$\beta_0 y_0 = \alpha_0 x_0,$$

$$\beta_1 y_0 + \beta_0 y_1 = \alpha_1 x_0 + \alpha_0 x_1,$$

$$\beta_2 y_0 + \beta_1 y_1 + \beta_0 y_2 = \alpha_2 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_0 x_2, \ \ldots$$

Умножая обе части равенства (2.3) на z^i и суммируя по всем i от 0 до ∞, получим

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{\infty} \beta_k y_{i-k} z^i = \sum_{k=0}^{m} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_k x_{i-k} z^i.$$

Делая замену индексов $i - k \to i$, имеем

$$\sum_{k=0}^{n} \beta_k z^k \sum_{i=-k}^{\infty} y_i z^i = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k z^k \sum_{i=-k}^{\infty} x_i z^i.$$

Считая x_i и y_i для отрицательных значений индекса равными нулю, получим $\beta(z)\mathbf{y}(z) = \alpha(z)\mathbf{x}(z)$, где $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ — полиномы вида

$$\alpha(z) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k z^k, \quad \beta(z) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k z^k,$$

а $\mathbf{x}(z)$ и $\mathbf{y}(z)$ — изображения последовательностей $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$:

$$\mathbf{x}(z)=\sum_{i=0}^{\infty} x_i z^i, \quad \mathbf{y}(z)=\sum_{i=0}^{\infty} y_i z^i.$$

Рациональная функция $\mathbf{w}(z)=\alpha(z)/\beta(z)$ называется *передаточной функцией дискретного управляющего устройства*, или его *программой*. Степени полиномов α и β определяют объем памяти этого устройства. Использование конечного числа прошлых значений входа и конечного числа прошлых значений выхода фактически означает использование бесконечного числа прошлых значений входа

$$y_i=\sum_{k=0}^{\infty} w_k x_{i-k}.$$

На рис. 2 показано, как можно реализовать дискретное

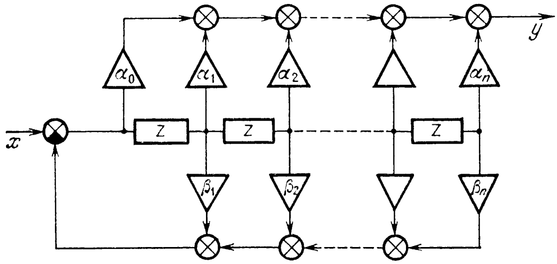

Рис. 2. Реализация дискретного управляющего устройства на элементах задержки: z — элементы задержки, α_k, β_k — усилители

управляющее устройство на элементах задержки z, усилителях α_0, α_1, ..., α_n, β_1, ..., β_n и сумматорах.

В отличие от дискретной передаточной функции систем непрерывного типа функция $\mathbf{w}$ может быть и неправильной функцией $\operatorname{ind}\mathbf{w} \gtrless 0$. Это обстоятельство расширяет возможности дискретных управляющих устройств по сравнению с управляющими устройствами непрерывного типа, и оно широко используется для улучшения качества динамических систем.

Единственное ограничение, накладываемое на функцию $\mathbf{w}$, состоит в следующем:

$$\operatorname{def}\mathbf{w} \geqslant 0. \tag{2.4}$$

Это значит, что функция $\mathbf{w}$ не должна иметь полюсов в точке $z = 0$. Физически это означает, что программа **w** должна производить обработку только настоящего и прошлых значений входной последовательности (но не будущих!). Условие (2.4) называется *условием физической реализуемости.*

Сопряжение непрерывных и дискретных частей автоматической системы производится при помощи аналого-цифровых и цифро-аналоговых преобразователей. Аналого-цифровой преобразователь превращает непрерывный процесс $x(t)$ в числовую последовательность $\{x_i\}$. Цифро-аналоговый преобразователь производит интерполяцию числовой последовательности, превращая ее в кусочно-аналитическую функцию. Эта функция подается на вход управляемого объекта.

Как показано в Приложении 2, управляемые объекты вместе с интерполяторами естественно описываются дискретными передаточными функциями в форме рациональных функций. Таким образом, метод дискретных передаточных функций является универсальным методом описания линейных дискретных автоматических систем (с постоянными или мало меняющимися параметрами).

4. Типы систем управления

Исследование линейных дискретных автоматических систем будет проводиться в терминах дискретных передаточных функций.

Рассмотрим автоматическую систему с передаточной функцией **h**, состоящую из управляемого объекта с передаточной функцией **g** *) и управляющего устройства с передаточной функцией (программой) **w**. Способ соединения управляемого объекта с управляющим устройством определяет *структуру* системы управления. Каждой структуре соответствует определенный тип зависимости **h** от **g** и **w**, выражаемый функцией $\mathbf{h} = \mathbf{h}(\mathbf{g}, \mathbf{w})$.

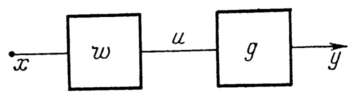

Рис. 3. Система прямого управления

Простейшим типом автоматической системы является система *прямого* управления, или *разомкнутая* система

---

*) Говоря о передаточной функции объекта, мы всегда имеем в виду передаточную функцию объекта вместе с интерполятором, расчет которой описан в Приложении 2.

(рис. 3). Ее уравнения в терминах дискретных передаточных функций имеют вид $\mathbf{y} = \mathbf{gu}$, $\mathbf{u} = \mathbf{wx}$, где $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — изображения процессов на входе и на выходе системы, а $\mathbf{u}$ — изображение управляющего воздействия. Подставляя одно из этих уравнений в другое, получаем передаточную функцию системы прямого управления $\mathbf{h} = \mathbf{gw}$.

Следующий тип автоматической системы — *система параллельного действия* (рис. 4). Ее уравнения $\mathbf{y}_1 = \mathbf{wx}$, $\mathbf{y}_2 = \mathbf{gx}$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$. Исключая переменные $\mathbf{y}_1$ и $\mathbf{y}_2$, получаем передаточную функцию этой системы $\mathbf{h} = \mathbf{w} + \mathbf{g}$.

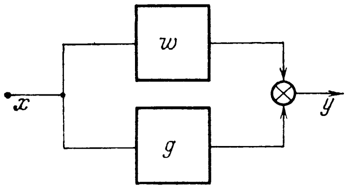

Рис. 4. Система параллельного действия

Следующий чрезвычайно важный тип автоматической системы — *система с обратной связью*, или *замкнутая система* (рис. 5). В этой системе информация о действительном состоянии управляемого объекта подается на вход управляющего устройства через сигнал ошибки, или рассогласования $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$. Уравнения управляемого объекта и управляющего устройства имеют вид $\mathbf{y} = \mathbf{gu}$, $\mathbf{u} = \mathbf{we}$, где $\mathbf{u}$ — изображе-

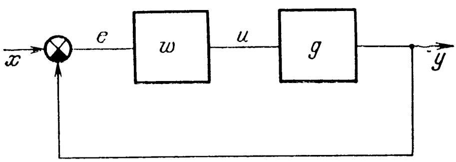

Рис. 5. Система с обратной связью

ние управляющего воздействия, а $\mathbf{e}$ — изображение ошибки системы. Исключая переменные $\mathbf{e}$ и $\mathbf{u}$, получаем передаточную функцию этой системы:

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{gw}}{1 + \mathbf{gw}}.$$

Система прямого управления (разомкнутая система) и система с обратной связью (замкнутая система) являются основными типами автоматических систем. Система, сочетающая в себе оба эти принципа управления, называется *комбинированной* системой (рис. 6). Она содержит два управляющих устройства и описывается уравнениями

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{w}_1\mathbf{x}, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{w}_2\mathbf{e}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{g}\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{y}.$$

Исключая промежуточные переменные, получаем передаточную функцию этой системы:

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{g}(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2)}{1 + \mathbf{g}\mathbf{w}_2}.$$

Еще одна применяемая в автоматическом управлении система — замкнутая система, содержащая два управля-

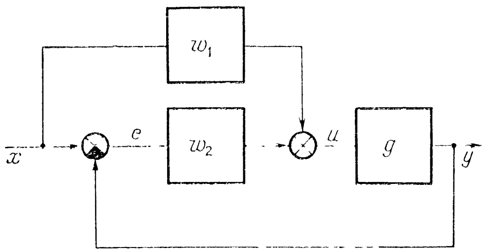

Рис. 6. Комбинированная система

ющих устройства: одно — в цепи прямой связи $\mathbf{w}_1$, другое — в цепи обратной связи $\mathbf{w}_2$ (рис. 7). Ее уравнения $\mathbf{v} = \mathbf{x} - \mathbf{w}_2\mathbf{y}$, $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1\mathbf{v}$, $\mathbf{y} = \mathbf{g}\mathbf{u}$. Исключая промежуточные

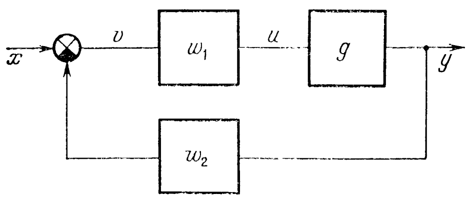

Рис. 7. Замкнутая система с двумя управляющими устройствами

переменные $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, получаем передаточную функцию этой системы:

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{g}\mathbf{w}_1}{1 + \mathbf{g}\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2}.$$

Поскольку передаточные функции перечисленных систем $\mathbf{h}$ являются рациональными функциями от $\mathbf{g}$, $\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{w}_2$, то при рациональности последних функция $\mathbf{h}$ остается рациональной функцией.

5. Работоспособные системы

Будем изучать возможности варьирования свойств систем выбором различных программ управляющих устройств $\mathbf{w}$ для заданного объекта управления, имеющего передаточную функцию $\mathbf{g}$.

Система $\mathbf{h}$ называется *абсолютно управляемой*, если надлежащим выбором функции $\mathbf{w}$ ее передаточная функция $\mathbf{h}$ может быть сведена к единице: $\mathbf{h} \equiv 1$. Это значит, что выход абсолютно управляемой системы может быть сделан тождественно равным входу: $\mathbf{x} \equiv \mathbf{y}$. Напомним, что равенство дискретных изображений означает равенство процессов $x(t)$ и $y(t)$ только в дискретные моменты времени — моменты выборки.

Система $\mathbf{h}$ называется *абсолютно инвариантной*, если путем выбора функции $\mathbf{w}$ ее передаточная функция $\mathbf{h}$ может быть сведена к нулю: $\mathbf{h} \equiv 0$. Это значит, что выход такой системы абсолютно не зависит от входа.

Системы с передаточными функциями $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$ называются *взаимно дополнительными*, если сумма их передаточных функций тождественно равна единице $\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 \equiv 1$. Ясно, что если одна из взаимно дополнительных систем является абсолютно управляемой, то другая является абсолютно инвариантной.

Рассмотрим вопрос о возможностях синтеза абсолютно управляемых и абсолютно инвариантных систем. Под «синтезом» системы мы будем понимать выбор программы управляющего устройства $\mathbf{w}$ для заданной передаточной функции управляемого объекта $\mathbf{g}$, обеспечивающий получение желаемой функции $\mathbf{h}$.

Принципиальная возможность получения абсолютно управляемых и абсолютно инвариантных систем в классе передаточных функций, являющихся рациональными функциями, имеется. Так, система прямого управления становится абсолютно управляемой, если программа управляющего устройства $\mathbf{w}$ является функцией, обратной передаточной функции управляемого объекта $\mathbf{g}$, т. е. $\mathbf{w} = 1/\mathbf{g}$, а система параллельного действия становится абсолютно инвариантной, если программа управляющего устройства $\mathbf{w}$ отличается от передаточной функции управляемого объекта $\mathbf{g}$ лишь знаком $\mathbf{w} = -\mathbf{g}$.

Однако такое формальное решение задачи синтеза не имеет содержательного значения. Оно принимает содержательное значение только при учете следующих ограничивающих условий:

а) управляющее устройство должно быть физически реализуемым;

б) синтезированная система должна быть работоспособной [22].

Условие физической реализуемости управляющего устройства, запрещающее использование будущих значений входного сигнала, имеет вид $\operatorname{def} \mathbf{w} \geqslant 0$. Оно означает, что оператор предсказания $\Lambda = z^{-\lambda}$, $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$, дающий на выходе системы будущие значения входа $y_i = x_{i+\lambda}$, является физически нереализуемым.

При реализации функции $\mathbf{w}$, обратной $\mathbf{g}$, необходимо выполнить условие $\operatorname{def} \mathbf{w} = -\operatorname{def} \mathbf{g}$. Поскольку условие физической реализуемости накладывается на $\mathbf{g}$ в той же степени, как и на $\mathbf{w}$, то физическая реализация обратной функции возможна при единственном условии $\operatorname{def} \mathbf{g} = 0$. Таким образом, необходимым условием возможности построения абсолютно управляемой системы прямого управления является отсутствие запаздывания в управляемом объекте.

Необходимым этапом в процессе синтеза автоматических систем является исследование их работоспособности. Условие работоспособности системы гласит: *при малых вариациях внешних условий вариации выхода системы должны быть малыми.* Изменение внешних условий действует на систему двояким образом: во-первых, оно изменяет саму систему, имеющую передаточную функцию $\mathbf{h}$, во-вторых, оно изменяет входное воздействие, имеющее изображение $\mathbf{x}$.

Для того чтобы проанализировать каждое из этих влияний, произведем варьирование формулы *) $\mathbf{y} = \mathbf{hx}$. Имеем

$$\begin{gathered} \delta\mathbf{y} = \mathbf{h} \cdot \delta\mathbf{x} + \delta\mathbf{h} \cdot \mathbf{x}, \\ \delta^2\mathbf{y} = \mathbf{h} \cdot \delta^2\mathbf{x} + 2\delta\mathbf{h} \cdot \delta\mathbf{x} + \delta^2\mathbf{h} \cdot \mathbf{x}, \ \ldots \end{gathered} \tag{2.5}$$

*) Под *вариацией* функции $\mathbf{x}$, заданной степенным рядом $\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{\infty} x_i z^i$, понимается степенной ряд $\delta\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{\infty} \delta x_i z^i$.

Условия, при которых вариации выхода системы остаются малыми, имеют вид $(\delta \mathbf{y})_- = 0$, $(\delta^2 \mathbf{y})_- = 0$, ... Производя сепарацию правых частей выражений (2.5), получаем *аналитические условия работоспособности автоматической системы*: $\mathbf{h}_- = 0$, $(\delta \mathbf{h})_- = 0$, $(\delta^2 \mathbf{h})_- = 0$, ... Первое из этих условий $\mathbf{h}_- = 0$ есть обычное условие *устойчивости* системы, обеспечивающее непрерывную зависимость между входом и выходом; последующие условия $(\delta \mathbf{h})_- = 0$, $(\delta^2 \mathbf{h})_- = 0$, ... являются условиями *грубости*, обеспечивающими непрерывную зависимость выхода системы от изменений ее параметров. Требование грубости, наряду с требованием устойчивости, предъявляется ко всем автоматическим системам. Поведение систем, не отвечающих требованиям грубости, непредсказуемо и не поддается никакому расчету.

Возможность нарушения грубости становится наиболее реальной при синтезе оптимальных систем управления, в частности, при стремлении получить абсолютно управляемую или абсолютно инвариантную систему.

Функции $\mathbf{h}$, удовлетворяющие условиям работоспособности, будем называть *допустимыми* функциями системы. Когда функцию $\mathbf{h}$, являющуюся передаточной функцией системы управления, выбирают не из класса допустимых функций для данного управляемого объекта при данном способе управления, результирующая система получается либо неустойчивой, либо негрубой.

Между поведением неустойчивых и негрубых систем существует некоторое качественное различие. Неустойчивая система неработоспособна при любых значениях параметров управляющего устройства и «уходит на бесконечность» по регулярному закону. Что касается негрубой системы, то для нее существует одна единственная настройка параметров управляющего устройства, при которой она способна работать, но эту настройку никогда нельзя выдержать абсолютно точно. При случайных колебаниях параметров управляемого объекта относительно заданной настройки система будет «уходить на бесконечность» по случайному закону.

Учитывая, что вариации функции $\mathbf{h}$ возникают из-за случайных вариаций параметров управляемого объекта, условия работоспособности можно переписать в виде

$$\mathbf{h}_- = 0, \quad \left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{g}} \cdot \delta \mathbf{g}\right)_- = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial \mathbf{g}^2} \cdot \delta^2 \mathbf{g}\right)_- = 0, \ldots$$

Функция $\mathbf{h}$ и ее производные по $\mathbf{g}$ зависят от $\mathbf{g}$ и $\mathbf{w}$. Вид этих функций определяется выбранным способом управления. Данные условия работоспособности позволяют для каждого способа управления найти свой класс допустимых функций. Если этот класс найден, то функция $\mathbf{w}$ выбирается в зависимости от $\mathbf{g}$: $\mathbf{w}=\mathbf{w}(\mathbf{g})$ так, чтобы обеспечить попадание $\mathbf{h}$ в этот класс. Подставляя функцию $\mathbf{w}(\mathbf{g})$ в аналитические условия работоспособности, мы можем осуществить проверку синтезированной системы на работоспособность.

6. Допустимые функции систем управления

Прежде чем приступить к отысканию классов допустимых функций для различных типов систем управления, рассмотрим неуправляемый объект с передаточной функцией $\mathbf{g}=\mathbf{p}/\mathbf{q}$, где $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ — полиномы от z. Заметим, что передаточные функции реальных объектов являются правильными функциями*) $\operatorname{ind}\mathbf{g}<0$.

Произведем факторизацию передаточной функции объекта $\mathbf{g}=\mathbf{g}^+\mathbf{g}^-$. Функции $\mathbf{g}^+$ и $\mathbf{g}^-$, равные соответственно

$$\mathbf{g}^+=\frac{\mathbf{p}^+}{\mathbf{q}^+},\quad \mathbf{g}^-=\frac{\mathbf{p}^-}{\mathbf{q}^-},$$

называются соответственно *положительной* и *отрицательной* частями передаточной функции объекта.

Положительный объект, имеющий передаточную функцию $\mathbf{g}^+$, характеризуется следующими динамическими свойствами: а) устойчивость, б) мгновенная реакция, в) относительная гладкость переходного процесса.

Мгновенность реакции положительного объекта означает, что отклик объекта на внешнее воздействие начинается одновременно с этим воздействием: $y_0=g_0^+x_0\neq 0$, ибо $g_0^+=\operatorname{ct}\mathbf{g}^+\neq 0$.

Относительная гладкость переходного процесса положительного объекта объясняется тем, что полиномы $\mathbf{p}^+$ и $\mathbf{q}^+$ составлены из множителей вида $(1+\alpha z)$, где $|\alpha|<1$.

Отрицательный объект, имеющий передаточную функцию $\mathbf{g}^-$, проявляет отрицательные динамические свойст-

*) Точнее — правильными являются их приведенные части, потому что объект может включать в себя чистое запаздывание произвольной длительности $\mathbf{g}=z^n(\mathbf{p}_1/\mathbf{q}_1)$.

ва: а) неустойчивость, б) запаздывание реакции, в) резкие выбросы в переходном процессе.

Запаздывание реакции отрицательного объекта проявляется в том, что при $d = \operatorname{def} \mathbf{g}^- > 0$ его отклик начинается только с момента $t_d = dT$: $y_d = g_d^- x_0 \neq 0$.

Резкие выбросы в переходном процессе обусловлены тем, что полином $\mathbf{p}^-$ содержит множители вида $(1 + \alpha z)$, где $|\alpha| > 1$.

Следует заметить, что деление объектов на положительные и отрицательные имеет смысл только в теории оптимального управления, когда речь заходит о полном изменении свойств объекта.

Выделим также класс *устойчивых* объектов, для которых $\mathbf{q}^- = 1$. Варьируя передаточную функцию объекта, получаем

$$\delta \mathbf{g} = \frac{\delta \mathbf{p}}{\mathbf{q}} - \frac{\mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{q}}{\mathbf{q}^2},$$

$$\delta^2 \mathbf{g} = \frac{\delta^2 \mathbf{p}}{\mathbf{q}} - \frac{2\delta \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{q}}{\mathbf{q}^2} + \frac{2\mathbf{p} \cdot \delta^2 \mathbf{q}}{\mathbf{q}^3}, \ldots$$

Мы видим, что простые полюсы $\mathbf{g}$, расположенные на контуре Γ, являются кратными полюсами вариаций $\mathbf{g}$. Объект, имеющий простые полюсы на контуре Γ, находится на границе устойчивости и является негрубым.

Найдем класс допустимых функций для системы прямого управления, имеющей передаточную функцию

$$\mathbf{h} = \mathbf{g}\mathbf{w}. \tag{2.6}$$

Варьируя ее, получаем

$$\delta \mathbf{h} = \mathbf{w} \cdot \delta \mathbf{g}, \quad \delta^2 \mathbf{h} = \mathbf{w} \delta^2 \mathbf{g}, \ \ldots \tag{2.7}$$

Условия работоспособности имеют вид

$$\left(\mathbf{w} \cdot \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}\right)_- = 0, \quad \left(\mathbf{w} \cdot \frac{\mathbf{q}\delta \mathbf{p} - \mathbf{p}\delta \mathbf{q}}{\mathbf{q}^2}\right)_- = 0, \ \ldots$$

Покажем, что система прямого управления работоспособна в том и только в том случае, если объект устойчив. Действительно, если $\mathbf{w}$ не содержит в числителе $\mathbf{q}^-$, то нарушается условие устойчивости. Если $\mathbf{w}$ содержит в числителе $\mathbf{q}^-$, то условие устойчивости выполняется, но нарушается первое условие грубости. Если $\mathbf{w}$ содержит множителем $(\mathbf{q}^-)^n$, то при соблюдении n первых условий работоспособности нарушается $(n + 1)$-е. Таким образом, система прямого управления неустойчивым объектом не может быть одновременно устойчивой и грубой.

Найдем условия, при которых абсолютно управляемая система прямого управления является работоспособной. Подставляя формулу $\mathbf{w} = 1/\mathbf{g}$ в (2.6) и (2.7), получим

$$\mathbf{h} = 1, \quad \delta\mathbf{h} = \frac{\delta\mathbf{g}}{\mathbf{g}}, \quad \delta^2\mathbf{h} = \frac{\delta^2\mathbf{g}}{\mathbf{g}}, \ldots,$$

или

$$\delta\mathbf{h} = \frac{\delta\mathbf{p}}{\mathbf{p}} - \frac{\delta\mathbf{q}}{\mathbf{q}},$$

$$\delta^2\mathbf{h} = \frac{\delta^2\mathbf{p}}{\mathbf{p}} - \frac{2\delta\mathbf{p}\cdot\delta\mathbf{q}}{\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}} + \frac{2\delta^2\mathbf{q}}{\mathbf{q}^2}, \ldots$$

Условия грубости требуют $\mathbf{p}^- = 1$, $\mathbf{q}^- = 1$. Таким образом, абсолютно управляемая система прямого управления работоспособна лишь в том случае, если объект положителен.

Покажем, что в случае устойчивого объекта класс допустимых функций системы прямого управления определяется выражением $\mathbf{h} = \mathbf{p}^-\mathbf{f}_+$, где $\mathbf{f}_+$ — произвольная правая (устойчивая) функция. Программа управляющего устройства, обеспечивающего получение этой функции, равна $\mathbf{w} = \mathbf{f}_+/\mathbf{g}^+$. Это устройство является физически реализуемым: $\operatorname{def}\mathbf{w} \geqslant 0$. Подставляя программу $\mathbf{w}$ этого управляющего устройства в формулы (2.6) и (2.7), убеждаемся в том, что условия работоспособности выполняются:

$$\delta\mathbf{h} = \mathbf{f}_+\left(\delta\mathbf{p}^- + \frac{\mathbf{p}^-\delta\mathbf{g}^+}{\mathbf{g}^+}\right),$$

$$\delta^2\mathbf{h} = \mathbf{f}_+\left(\delta^2\mathbf{p}^- + \frac{2\delta\mathbf{p}^-\cdot\delta\mathbf{g}^+}{\mathbf{g}^+} + \frac{\mathbf{p}^-\delta^2\mathbf{g}^+}{\mathbf{g}^+}\right), \ldots$$

Исключение из состава $\mathbf{h}$ хотя бы одного из сомножителей полинома $\mathbf{p}^-$ нарушает условия работоспособности. Таким образом, приведенный класс функций включает все допустимые функции системы прямого управления.

Если управляемый объект неустойчив, то необходимым элементом системы управления является обратная связь. Покажем, что система управления с обратной связью, имеющая передаточную функцию

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{g}\mathbf{w}}{1 + \mathbf{g}\mathbf{w}},$$

работоспособна для любых управляемых объектов — как устойчивых, так и неустойчивых. Класс допустимых функций $\mathbf{h}$ системы с обратной связью имеет вид

$$\mathbf{h} = \mathbf{p}^{-}\theta \cdot \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}^{+}},$$

где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}^{+}$ — произвольные полиномы, а θ — полином, удовлетворяющий π-уравнению

$$\mathbf{a}\mathbf{p}^{-}\theta + \mathbf{q}^{-}\pi = \mathbf{b}^{+}. \qquad (2.8)$$

Программа соответствующего управляющего устройства $\mathbf{w} = \mathbf{a}\mathbf{q}^{+}\theta/\mathbf{p}^{+}\pi$.

Проверим выполнение условий работоспособности. Варьируя передаточную функцию системы, получаем

$$\delta\mathbf{h} = \frac{\mathbf{w}\delta\mathbf{g}}{(1+\mathbf{w}\mathbf{g})^2}, \quad \delta^2\mathbf{h} = -\frac{2\mathbf{w}^2\delta^2\mathbf{g}}{(1+\mathbf{w}\mathbf{g})^3}, \ \ldots$$

Подставляя сюда значение $\mathbf{w}$ и учитывая π-уравнение (2.8), имеем

$$\delta\mathbf{h} = \frac{\mathbf{a}\mathbf{q}^{+}(\mathbf{q}^{-})^2\pi}{\mathbf{p}^{+}(\mathbf{b}^{+})^2}\delta\mathbf{g}, \quad \delta^2\mathbf{h} = -\frac{2\mathbf{a}^2(\mathbf{q}^{+})^2(\mathbf{q}^{-})^3\theta^2\pi}{(\mathbf{p}^{+})^2(\mathbf{b}^{+})^3}\delta^2\mathbf{g}, \ \ldots$$

Раскрывая вариации $\mathbf{g}$, получим

$$\delta\mathbf{h} = \frac{\mathbf{a}\theta\pi}{(\mathbf{b}^{+})^2}\,\frac{\mathbf{q}\delta\mathbf{p} - \mathbf{p}\,\delta\mathbf{q}}{\mathbf{p}^{+}\mathbf{q}^{+}},$$

$$\delta^2\mathbf{h} = -\frac{2\mathbf{a}^2\theta^2\pi}{(\mathbf{b}^{+})^3}\,\frac{\mathbf{q}^2\delta^2\mathbf{p} - 2\mathbf{q}\delta\mathbf{p}\delta\mathbf{q} + 2\mathbf{p}\delta^2\mathbf{q}}{(\mathbf{p}^{+})^2\,\mathbf{q}^{+}}, \ \ldots$$

Мы видим, что полученная система является работоспособной. Можно показать, что более широкого класса допустимых функций, чем приведенный, не существует.

В случае устойчивого управляемого объекта π-уравнение (2.8) не накладывает ограничений на полином θ, и класс допустимых функций у системы с обратной связью становится тем же, что и у системы прямого управления. Если управляемый объект положителен, то допустимой становится произвольная функция. Это означает, что выбор управляющего устройства по распространенной формуле

$$\mathbf{w} = \frac{1}{\mathbf{g}}\,\frac{\mathbf{h}}{1-\mathbf{h}}$$

допустим только в том случае, если управляемый объект положителен.

В любом другом случае выбор программы управляющего устройства должен производиться по формулам π-исчисления, если мы желаем получить работоспособную систему.

Покажем, что класс допустимых функций комбинированной системы шире, чем у простой системы с обратной связью, и определяется выражением

$$\mathrm{h} = \mathrm{p}^{-}\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}^{+}} \tag{2.9}$$

для любых управляемых объектов — как устойчивых, так и неустойчивых. Варьируя передаточную функцию комбинированной системы

$$\mathrm{h} = \frac{(\mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2)\,\mathrm{g}}{1 + \mathrm{w}_2\mathrm{g}},$$

получим

$$\delta\mathrm{h} = \frac{\mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2}{(1 + \mathrm{w}_2\mathrm{g})^2}\,\delta\mathrm{g}, \quad \delta^2\mathrm{h} = -\frac{2\mathrm{w}_2(\mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2)}{(1 + \mathrm{w}_2\mathrm{g})^3}\,\delta^2\mathrm{g}, \ldots \tag{2.10}$$

Легко убедиться, что при выборе программ управляющих устройств по формулам

$$\mathrm{w}_1 = \frac{\mathrm{q}^{+}(\mathrm{a} - \theta)}{\mathrm{p}^{+}\pi}, \quad \mathrm{w}_2 = \frac{\mathrm{q}^{+}\theta}{\mathrm{p}^{+}\pi}, \tag{2.11}$$

где θ и π — полиномы, удовлетворяющие π-уравнению

$$\mathrm{p}^{-}\theta + \mathrm{q}^{-}\pi = \mathrm{b}^{+}, \tag{2.12}$$

передаточная функция комбинированной системы принимает вид (2.9).

Проверим выполнение условий работоспособности. Подставляя (2.11) в (2.10) и учитывая (2.12), получаем

$$\delta\mathrm{h} = \frac{\mathrm{a}\pi}{(\mathrm{b}^{+})^2}\cdot\frac{\mathrm{q}\delta\mathrm{p} - \mathrm{p}\delta\mathrm{q}}{\mathrm{p}^{+}\mathrm{q}^{+}},$$

$$\delta^2\mathrm{h} = -\frac{2\mathrm{a}\theta\pi}{(\mathrm{b}^{+})^3}\cdot\frac{\mathrm{q}^2\delta^2\mathrm{p} - 2\mathrm{q}\delta\mathrm{p}\delta\mathrm{q} + 2\mathrm{p}\delta^2\mathrm{q}}{(\mathrm{p}^{+})^2\,\mathrm{q}^{+}}, \ldots$$

Полученная система является работоспособной. Таким образом, класс допустимых функций комбинированной системы при управлении произвольным объектом соответствует классу допустимых функций системы прямого управления устойчивым объектом.

Покажем, что класс допустимых функций замкнутой системы с двумя управляющими устройствами, изображенной на рис. 7, так же, как и для комбинированной системы, определяется выражением $\mathbf{h} = \mathbf{p}^-(\mathbf{a}/\mathbf{b}^+)$. Будем искать $\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{w}_2$ в виде

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{q}^+\theta_1}{\mathbf{p}^+\pi_1}, \quad \mathbf{w}_2 = \frac{\theta_2}{\pi_2}.$$

Подставляя эти выражения в передаточную функцию системы

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{g}\mathbf{w}_1}{1 + \mathbf{g}\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2},$$

получим

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{p}^-\theta_1\pi_2}{\mathbf{p}^-\theta_1\theta_2 + \mathbf{q}^-\pi_1\pi_2}.$$

Полиномы θ_1 и π_2 определяются из условий

$$\theta_1\pi_2 = \mathbf{a}, \tag{2.13}$$

$$(\mathbf{p}^-\theta_1,\ \mathbf{q}^-\pi_2) = 1, \tag{2.14}$$

которые имеют неединственное решение. Полиномы θ_2 и π_1 определяются из π-уравнения

$$(\mathbf{p}^-\theta_1)\theta_2 + (\mathbf{q}^-\pi_2)\pi_1 = \mathbf{b}^+, \tag{2.15}$$

которое при выполнении условия (2.14) также имеет множество решений.

Проверим выполнение условий работоспособности. Варьируя передаточную функцию системы, получим

$$\delta\mathbf{h} = \frac{\mathbf{w}_1\delta\mathbf{g}}{(1 + \mathbf{g}\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2)^2}, \quad \delta^2\mathbf{h} = -\frac{2\mathbf{w}_1^2\delta^2\mathbf{g}}{(1 + \mathbf{g}\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2)^3}, \ \ldots$$

Подставляя значения $\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{w}_2$ и учитывая π-уравнение (2.15), получаем

$$\delta\mathbf{h} = \frac{\pi_1\theta_1^3}{(\mathbf{b}^+)^2}\,\frac{\mathbf{q}\delta\mathbf{p} - \mathbf{p}\delta\mathbf{q}}{\mathbf{p}^+\mathbf{q}^+},$$

$$\delta^2\mathbf{h} = -\frac{2\pi_1\theta_1^5}{(\mathbf{b}^+)^3}\,\frac{\mathbf{q}^2\delta^2\mathbf{p} - 2\mathbf{q}\delta\mathbf{p}\delta\mathbf{q} + 2\mathbf{p}\delta^2\mathbf{q}}{(\mathbf{p}^+)^2\,\mathbf{q}^+}, \ \ldots$$

Полученная система является работоспособной.

Таким образом, класс допустимых функций замкнутой системы с двумя управляющими устройствами при управлении произвольным объектом шире, чем класс допустимых функций обычной замкнутой системы, и соответствует классу допустимых функций системы прямого управления устойчивым объектом. Преимущество этой системы особенно заметно при управлении негрубыми объектами, имеющими полюса на контуре Г, когда обычная замкнутая система оказывается неработоспособной.

Приведенные аргументы показывают, что для большинства реальных объектов абсолютно управляемые и абсолютно инвариантные системы относятся к числу неработоспособных. Можно показать, что для объектов с отрицательными динамическими свойствами вообще не существует способов управления, обеспечивающих абсолютную управляемость или абсолютную инвариантность.

Легко видеть, что если система допускает реализацию функции $\mathbf{h} = 1$ или $\mathbf{h} = 0$, то она допускает реализацию произвольной функции, т. е. она идеальна. Резюмируя изложенное, можно сказать, что идеальных систем управления реальными объектами не существует.

7. Практическая управляемость и инвариантность

Ввиду того, что управляемость и инвариантность являются желательными свойствами системы управления, а условия абсолютной управляемости и инвариантности являются слишком сильными условиями, чтобы приводить к работоспособным и физически реализуемым системам, целесообразно ввести ослабленные условия управляемости и инвариантности, которые не вступали бы в противоречие с другими необходимыми условиями. Такими условиями являются условия практической управляемости и инвариантности.

Будем называть систему *практически управляемой,* если ее можно перевести в желаемое состояние за конечное время и с помощью конечных управляющих усилий *). *Практически инвариантной* будем называть си-

*) Такая формулировка понятия управляемости была впервые введена Р. Калманом [41], хотя само явление управляемости специалистами в области дискретных систем управления было описано давно. См., например, Я. З. Цыпкин [78].

стему, которую можно перевести в нулевое состояние за конечное время и с помощью конечных управляющих усилий. Ясно, что если система $\mathbf{y} = \mathbf{hx}$ является практически управляемой, то дополнительная к ней система $\mathbf{e} = (1 - \mathbf{h})\mathbf{x}$ является практически инвариантной. Легко видеть, что изображение выхода дополнительной системы $\mathbf{e}$ есть рассогласование между входом и выходом исходной системы: $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$. Поскольку процессы конечной длительности имеют изображения в виде полиномов от z, то система является практически управляемой, если изображение выхода дополнительной к ней системы может быть сведено к полиному от z.

Найдем условия, при которых рассогласование может быть сведено к нулю за конечное время и с помощью конечных управляющих усилий. Пусть выход управляемого объекта $\mathbf{y}$ связан с управляющим воздействием $\mathbf{u}$ следующим образом: $\mathbf{y} = \mathbf{gu}$, где $\mathbf{g}$ — передаточная функция управляемого объекта. Учитывая, что $\mathbf{g} = \mathbf{p}/\mathbf{q}$, где $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ — полиномы от z, связь между рассогласованием $\mathbf{e}$, управлением $\mathbf{u}$ и желаемым состоянием объекта $\mathbf{x}$ можно представить в виде

$$\mathbf{pu} + \mathbf{qe} = \mathbf{qx}. \tag{2.16}$$

Для того чтобы управляющие усилия и рассогласование были отличны от нуля только на конечном интервале времени, изображения этих процессов должны быть полиномами от z. Если $\mathbf{u}$ и $\mathbf{e}$ не являются полиномами, а являются бесконечными степенными рядами, то это означает, что для достижения желаемого состояния требуются либо бесконечно большие усилия, либо бесконечное время.

Таким образом, при выполнении требования практической управляемости левая часть уравнения (2.16) должна быть полиномом, а следовательно, полиномом должна быть и правая часть. Отсюда следует, что допустимые с точки зрения практической управляемости состояния объекта имеют изображения $\mathbf{x} = \mathbf{a}/\mathbf{q}$, где $\mathbf{a}$ — произвольный полином. Если желаемое состояние объекта является допустимым и удовлетворяет этому условию, то полиномы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{e}$ в практически управляемой системе связаны между собой π-уравнением $\mathbf{pu} + \mathbf{qe} = \mathbf{a}$. Как известно из теории π-уравнений, полученное уравнение имеет решение относительно полиномов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{e}$, если полиномы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$

взаимно просты *). Минимальное решение этого π-уравнения относительно $\mathbf{e}$ дает кратчайший по времени переходный процесс длительности

$$t_{\min} = (1 + |\mathbf{e}|)T = |\mathbf{p}|T.$$

Рассмотрим вопрос о возможностях получения практически управляемых и практически инвариантных систем с помощью обычных способов управления. Заметим, что отказавшись от условия конечности по времени управляющего воздействия, мы можем расширить класс допустимых состояний объекта до $\mathbf{x} = \mathbf{a}/\mathbf{b}$, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — произвольные полиномы. Найдем условия практической управляемости в системе прямого управления. Считая управляемый объект устойчивым $\mathbf{g} = \mathbf{p}/\mathbf{q}^+$, будем искать управляющее устройство с программой $\mathbf{w} = \mathbf{q}^+\theta$, где θ — пока не определенный полином. Составим изображение сигнала рассогласования:

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{y} = (1 - \mathbf{h})\,\mathbf{x} = (1 - \mathbf{p}\theta)\,\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}.$$

Условие конечности времени перехода в желаемое состояние можно записать в виде $\mathbf{e} = \mathbf{a}\pi$, где π — пока не определенный полином. Сравнивая между собой эти два выражения для $\mathbf{e}$, заключаем, что полиномы θ и π должны удовлетворять π-уравнению $\mathbf{p}\theta + \mathbf{b}\pi = 1$. Управляющее воздействие при этом имеет изображение $\mathbf{u} = \mathbf{a}\mathbf{q}^+\theta/\mathbf{b}$, что соответствует процессу бесконечной длительности. Только в том случае, когда полином $\mathbf{b}$ является делителем полинома $\mathbf{q}^+$, процесс управления получается конечным.

Достоинством полученного управляющего устройства является его независимость от $\mathbf{a}$. Это значит, что оно сохраняет свою оптимальность для целого класса входных воздействий. Полученная система имеет передаточную функцию $\mathbf{h} = \mathbf{p}\theta$, входящую в класс допустимых функций системы прямого управления с точки зрения условий работоспособности.

---

*) Условие взаимной простоты полиномов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ эквивалентно условиям управляемости Р. Калмана [41]. Р. Калман пользуется векторно-матричным подходом, при котором передаточная функция управляемого объекта записывается в виде $\mathbf{g} = (\mathbf{c}, (\mathbf{I} - \mathbf{A}z)^{-1}\mathbf{b})$. Условия управляемости Калмана требуют линейной независимости векторов $\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}, \ldots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}$.

Еще одно эквивалентное определение: «система $\mathbf{g}$ есть минимальная реализация своей передаточной функции».

Минимальное решение полученного π-уравнения относительно $\boldsymbol{\pi}$ дает переходный процесс минимальной длительности, равной

$$t_{\min} = (1 + |\mathbf{a}| + |\boldsymbol{\pi}|)T = (|\mathbf{a}| + |\mathbf{p}|)T.$$

Если желательно сократить время переходного процесса, программу управляющего устройства можно взять равной $\mathbf{w} = \mathbf{q}^{+}\boldsymbol{\theta}/\mathbf{p}^{+}$, где $\boldsymbol{\theta}$ — полином, удовлетворяющий π-уравнению $\mathbf{p}^{-}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{b}\boldsymbol{\pi} = 1$. Минимальное решение этого π-уравнения относительно $\boldsymbol{\pi}$ дает еще более короткий переходный процесс длительности

$$t_{\min} = (1 + |\mathbf{a}| + |\boldsymbol{\pi}|)T = (|\mathbf{a}| + |\mathbf{p}^{-}|)T.$$

Однако в этом случае нельзя гарантировать совпадения действительного и желаемого состояний системы по окончании переходного процесса в моменты времени, не совпадающие с моментами выборки [65].

В системе с обратной связью достижение практической управляемости возможно для любых объектов — как устойчивых, так и неустойчивых. Выбирая программу управляющего устройства в виде $\mathbf{w} = \boldsymbol{\theta}/\mathbf{b}\boldsymbol{\pi}$, где $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\pi}$ — полиномы, удовлетворяющие π-уравнению

$$\mathbf{p}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{b}\mathbf{q}\boldsymbol{\pi} = 1, \tag{2.17}$$

мы получаем изображение сигнала рассогласования в виде полинома:

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{y} = (1 - \mathbf{h})\,\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}}{1 + \mathbf{g}\mathbf{w}} = \frac{\mathbf{a}\mathbf{q}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{p}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{b}\mathbf{q}\boldsymbol{\pi}} = \mathbf{a}\mathbf{q}\boldsymbol{\pi}.$$

Длительность переходного процесса, соответствующая минимальному относительно $\boldsymbol{\pi}$ решению π-уравнения (2.17), равна

$$t_{\min} = (|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}| + |\mathbf{a}|)T.$$

Для сокращения времени переходного процесса программу управляющего устройства можно взять равной $\mathbf{w} = \mathbf{q}^{+}\boldsymbol{\theta}/\mathbf{p}^{+}\mathbf{b}\boldsymbol{\pi}$, где $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\pi}$ — полиномы, подчиненные π-уравнению $\mathbf{p}^{-}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{b}\mathbf{q}^{-}\boldsymbol{\pi} = \mathbf{a}^{+}$. При этом получается переходный процесс $\mathbf{e} = \mathbf{a}^{-}\mathbf{q}^{-}\boldsymbol{\pi}$, имеющий длительность

$$t_{\min} = (|\mathbf{p}^{-}| + |\mathbf{q}^{-}| + |\mathbf{a}^{-}|)T.$$

Время переходного процесса, характеризуемое числом «плохих» нулей и полюсов передаточной функции объекта, есть предельно достижимое время, которое можно осуществить без нарушения условий работоспособности. Попытки дальнейшего сокращения этого времени неминуемо приводят к потере работоспособности.

Докажем инвариантность программы $\mathbf{w}$ относительно различных факторизаций полиномов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, выполняемых с точностью до числовых множителей k и l:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}^+\mathbf{p}^- = (\mathbf{p}^+)'(\mathbf{p}^-)', \quad (\mathbf{p}^+)' = k\mathbf{p}^+; \quad (\mathbf{p}^-)' = \frac{1}{k}\mathbf{p}^-,$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}^+\mathbf{q}^- = (\mathbf{q}^+)'(\mathbf{q}^-)', \quad (\mathbf{q}^+)' = l\mathbf{q}^+; \quad (\mathbf{q}^-)' = \frac{1}{l}\mathbf{q}^-.$$

Имеем

$$\mathbf{w}' = \frac{(\mathbf{q}^+)'\,\theta'}{(\mathbf{p}^+)'\,\mathbf{b}\pi'},$$

где θ' и π' — полиномы, удовлетворяющие π-уравнению

$$\frac{1}{k}\mathbf{p}^-\theta' + \frac{1}{l}\mathbf{b}\mathbf{q}^-\pi' = \mathbf{a}^+.$$

Согласно изложенному в разделе 3 гл. 1, $\theta' = k\theta$, $\pi' = l\pi$. Следовательно,

$$\mathbf{w}' = \frac{lk\mathbf{q}^+\theta}{kl\mathbf{p}^+\mathbf{b}\pi} = \frac{\mathbf{q}^+\theta}{\mathbf{p}^+\mathbf{b}\pi} = \mathbf{w}.$$

Инвариантность программы $\mathbf{w}$ относительно различных факторизаций полинома $\mathbf{a}$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^+\mathbf{a}^- = (\mathbf{a}^+)'(\mathbf{a}^-)'; \quad (\mathbf{a}^+)' = k\mathbf{a}^+; \quad (\mathbf{a}^-)' = \frac{1}{k}\mathbf{a}^-$$

также имеет место, потому что полиномы θ' и π', удовлетворяющие уравнению

$$\mathbf{p}^-\theta' + \mathbf{b}\mathbf{q}^-\pi' = k\mathbf{a}^+,$$

имеют вид $\theta' = k\theta$, $\pi' = k\pi$, а в $\mathbf{w}$ входит только отношение этих полиномов.

Докажем инвариантность ошибки системы $\mathbf{e}$ относительно различных факторизаций полиномов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{q}$:

$$(\mathbf{a}^+)' = k\mathbf{a}^+, \quad (\mathbf{a}^-)' = \frac{1}{k}\mathbf{a}^-,$$

$$(\mathbf{q}^+)' = l\mathbf{q}^+, \quad (\mathbf{q}^-)' = \frac{1}{l}\mathbf{q}^-.$$

Имеем

$$\mathbf{p}^-\theta' + \frac{1}{l}\mathbf{b}\mathbf{q}^-\pi' = k\mathbf{a}^+,$$

откуда $\theta' = k\theta$, $\pi' = kl\pi$. Следовательно,

$$\mathbf{e}' = (\mathbf{a}^-)'(\mathbf{q}^-)'(\pi)' = \mathbf{a}^-\mathbf{q}^-\pi = \mathbf{e}.$$

Любая реальная система управления обычно работает в условиях помех. Поэтому при проектировании системы управления требуется решить двойную задачу: а) обеспечить управляемость системы по отношению к полезному сигналу $\mathbf{x}_1$, выражающему истинное желаемое состояние системы; б) обеспечить инвариантность системы по отношению к помехе $\mathbf{x}_2$, выражающей ложное желаемое состояние системы. Пусть истинный сигнал и помеха действуют на систему совместно: $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$. Спрашивается, существуют ли работоспособные системы управления, в которых выполняются совместные условия управляемости по $\mathbf{x}_1$ и инвариантности по $\mathbf{x}_2$? Покажем, что при выполнении некоторых условий такие системы могут быть спроектированы.

Рассмотрим, например, систему с обратной связью. Пусть сигнал $\mathbf{x}_1$ и помеха $\mathbf{x}_2$ имеют рациональные изображения $\mathbf{x}_1 = \mathbf{a}_1/\mathbf{b}_1$, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{a}_2/\mathbf{b}_2$. Составим изображение сигнала рассогласования:

$$\mathbf{e} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{y} = (1 - \mathbf{h})\mathbf{x}_1 + \mathbf{h}\mathbf{x}_2.$$

Для того чтобы это изображение было полиномом, необходимо, чтобы функция $\mathbf{h}$ содержала сомножителем полином $\mathbf{b}_2$, а функция $(1 - \mathbf{h})$ содержала сомножителем полином $\mathbf{b}_1$. Будем искать функции $\mathbf{h}$ и $(1 - \mathbf{h})$ в виде

$$\mathbf{h} = \mathbf{b}_2\theta_1, \quad 1 - \mathbf{h} = \mathbf{b}_1\pi_1, \tag{2.18}$$

где θ_1 и π_1 — пока не определенные полиномы. Складывая эти функции, получаем следующее π-уравнение относительно этих полиномов: $\mathbf{b}_2\theta_1 + \mathbf{b}_1\pi_1 = 1$. Это уравнение разрешимо только в том случае, если полиномы $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ взаимно простые. Выберем из класса допустимых функций системы с обратной связью

$$\mathbf{h} = \mathbf{p}^-\theta\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}^+} \tag{2.19}$$

только полиномы $\mathbf{h}$, положив $\mathbf{b}^+ = 1$. Пересечение классов (2.18) и (2.19) дает $\theta_1 = \mathbf{p}^-\theta$, $\mathbf{a} = \mathbf{b}_2$. При этом π-уравнение относительно θ_1 и π_1 переходит в $\mathbf{p}^-\mathbf{b}_2\theta + \mathbf{b}_1\pi_1 = 1$.

Условия работоспособности накладывают еще одно ограничение на θ: $\mathbf{p}^-\mathbf{b}_2\theta + \mathbf{q}^-\pi_2 = 1$. Объединяя оба эти

π-уравнения в одно при условиях $\boldsymbol{\pi}_1 = \mathbf{q}^-\boldsymbol{\pi}$, $\boldsymbol{\pi}_2 = \mathbf{b}_1\boldsymbol{\pi}$, получаем

$$\mathbf{p}^-\mathbf{b}_2\theta + \mathbf{q}^-\mathbf{b}_1\boldsymbol{\pi} = 1.$$

Программа соответствующего управляющего устройства имеет вид

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{b}_2\mathbf{q}^+\theta}{\mathbf{b}_1\mathbf{p}^+\boldsymbol{\pi}},$$

а сигнал рассогласования

$$\mathbf{e} = \mathbf{a}_1\mathbf{q}^-\boldsymbol{\pi} - \mathbf{a}_2\mathbf{p}^-\theta.$$

В том случае, когда полиномы $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ не взаимно просты, совместное выполнение условий управляемости и инвариантности становится возможным лишь в комбинированной системе, в которой производится непосредственное измерение одного из воздействий.

8. Принцип Петрова двух каналов

Рассмотрим управляемый объект с двумя управляющими воздействиями $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ (рис. 8):

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}_1\mathbf{u}_1 + \mathbf{g}_2\mathbf{u}_2.$$

Передаточные функции по отношению к этим двум воздействиям $\mathbf{g}_1 = \mathbf{p}_1/\mathbf{q}$, $\mathbf{g}_2 = \mathbf{p}_2/\mathbf{q}$, где $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ и $\mathbf{q}$ — полиномы от z. Таким объектом является, например, самолет, который можно перевести в новый угол тангажа $\mathbf{y}$ посредством руля высоты $\mathbf{u}_1$ и заслонки газа $\mathbf{u}_2$, или отрасль экономики, которую можно перевести на новый уровень производства $\mathbf{y}$ посредством добавочных капиталовложений в производственные фонды $\mathbf{u}_1$ и дополнительного найма рабочей силы $\mathbf{u}_2$.

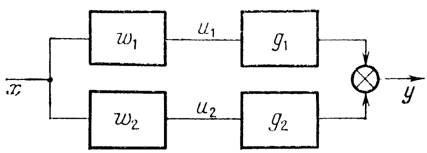

Рис. 8. Управление по принципу двух каналов

Пусть $\mathbf{u}_1 = \mathbf{w}_1\mathbf{x}$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{w}_2\mathbf{x}$, где $\mathbf{x}$ — задающее воздействие. Сигнал ошибки

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} - (\mathbf{g}_1\mathbf{w}_1 + \mathbf{g}_2\mathbf{w}_2)\mathbf{x} = \left(1 - \frac{\mathbf{p}_1}{\mathbf{q}}\mathbf{w}_1 - \frac{\mathbf{p}_2}{\mathbf{q}}\mathbf{w}_2\right)\mathbf{x}.$$

Будем искать передаточные функции $\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{w}_2$ в виде полиномов $\mathbf{w}_1 = \boldsymbol{\theta}$, $\mathbf{w}_2 = \boldsymbol{\pi}$. Подчинив их π-уравнению

$$\mathbf{p}_1\boldsymbol{\theta} + \mathbf{p}_2\boldsymbol{\pi} = \mathbf{q}, \qquad (2.20)$$

мы получим абсолютную инвариантность, т. е. равенство нулю изображения ошибки $\mathbf{e} = 0$ при любых сигналах $\mathbf{x}$.

Полиномиальное уравнение с двумя неизвестными полиномами (2.20) в принципе разрешимо, т. е. обеспечивает абсолютную инвариантность. Это предвосхитил академик Б. Н. Петров, выдвинув условием достижения абсолютной инвариантности наличие двух каналов управления [64].

Однако π-уравнение (2.20) разрешимо только в том случае, если полиномы $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ взаимно просты. Это значит, что каналы 1 и 2 должны быть независимы. Это требование практически выполнить трудно прежде всего из-за наличия чистого запаздывания. Поскольку обычно $\operatorname{def}\mathbf{g}_1 > 0$, $\operatorname{def}\mathbf{g}_2 > 0$, то $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = z^d$, $d > 0$ и уравнение (2.20), как правило, неразрешимо. Для того чтобы оно было разрешимо, по крайней мере один канал должен быть мгновенного действия, а другой может содержать чистое запаздывание.

Ликвидировать взаимную непростоту полиномов $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ из-за их сдвинутости можно, лишь введя оператор упреждения $\boldsymbol{\Lambda} = z^{-d}$. Однако этот оператор является лишь приближенно реализуемым в статистическом смысле.

ГЛАВА 3

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

1. Получение кратчайших переходных процессов

Пусть желаемый процесс движения системы имеет изображение в виде правильной рациональной функции $\mathbf{x} = \mathbf{a}/\mathbf{b}$, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — заданные полиномы от z, причем $|\mathbf{a}| < |\mathbf{b}|$. (Не путать с разд. 6 гл. 2, где полиномы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ обозначают произвольную часть передаточной функции системы.) Будем искать управление $\mathbf{u}$ объектом, имеющим передаточную функцию $\mathbf{g} = \mathbf{p}/\mathbf{q}$, где $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ — заданные полиномы от z. Обозначим через $\mathbf{v} = (\mathbf{b}, \mathbf{q})$ наибольший общий делитель полиномов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{q}$. Введем полиномы $\mathbf{b}_0$ и $\mathbf{q}_0$, такие, что $\mathbf{b} = \mathbf{b}_0\mathbf{v}$, $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0\mathbf{v}$, $(\mathbf{b}_0, \mathbf{q}_0) = 1$. Полином $\mathbf{q}_0$ будем считать положительным, т. е. $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_0^+$; $\mathbf{q}_0^- = 1$. Таким образом, мы включаем в рассмотрение и неустойчивые управляемые объекты, но в этом случае им должны соответствовать неустойчивые желаемые процессы.

Процесс на выходе системы имеет изображение $\mathbf{y} = \mathbf{g}\mathbf{u}$. Изображение переходного процесса имеет вид

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{g}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} - \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}\,\mathbf{u}. \tag{3.1}$$

Желая получить конечный переходный процесс, будем искать управление в виде $\mathbf{u} = (\mathbf{q}_0/\mathbf{b}_0)\theta$, где θ — пока не определенный полином. Подставляя это выражение в (3.1), получим $\mathbf{e} = (\mathbf{a} - \mathbf{p}\theta)/\mathbf{b}$. Составим π-уравнение:

$$\mathbf{p}\theta + \mathbf{b}\pi = \mathbf{a}. \tag{3.2}$$

При этом изображение переходного процесса является полиномом $\mathbf{e} = \pi$, а значит, ему соответствует процесс конечной длительности.

Так как π-уравнение (3.2) является правильным, оно имеет единственное минимальное решение. Это решение дает кратчайший переходный процесс длительности

$$t_{\min} = (1 + |\mathbf{e}|)T = |\mathbf{p}|T.$$

Соответствующее управление является, вообще говоря, процессом бесконечной длительности. Только в случае $\mathbf{b}_0 = 1$, что соответствует делимости полинома $\mathbf{q}$ на $\mathbf{b}$, получается процесс управления конечной длительности.

Сокращение длительности переходного процесса $t_{\min}$ может быть достигнуто путем уменьшения длительности такта работы управляющего устройства T. Но при $T \to 0$ необходимые управляющие воздействия неограниченно возрастают: $|u_i| \to \infty$. В реальных системах управления фактические управляющие воздействия ограничены по модулю:

$$|u_i| \leqslant r. \tag{3.3}$$

Принимая во внимание эти ограничения, будем искать такое решение π-уравнения (3.2), чтобы они выполнялись. Общее решение π-уравнения (3.2) имеет вид $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^0 + \mathbf{b}\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}^0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\xi}$, где $\{\boldsymbol{\theta}^0, \boldsymbol{\pi}^0\}$ — минимальное решение, а $\boldsymbol{\xi}$ — произвольный полином. Соответствующее управление, обеспечивающее получение конечного переходного процесса, имеет вид $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{q}_0}{\mathbf{b}_0}\boldsymbol{\theta}^0 + \mathbf{q}\boldsymbol{\xi}$.

Для того чтобы управляющие воздействия u_i были ограниченными, прежде всего необходимо обеспечить устойчивость процесса $\mathbf{u}$. Это достигается при условии $\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}_0^+$, $\mathbf{b}_0^- = 1$. Обозначив $\mathbf{u}^0 = \mathbf{q}_0\boldsymbol{\theta}^0/\mathbf{b}_0$, имеем $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \mathbf{q}\boldsymbol{\xi}$. Так как $\operatorname{def}\mathbf{q} = 0$, то выбором полинома $\boldsymbol{\xi}$ можно подвергнуть изменению все значения управляющего воздействия u_i.

При заданном $|\boldsymbol{\xi}| = m$ ограничения (3.3) дают систему линейных неравенств относительно коэффициентов $\boldsymbol{\xi}$:

$$\left| u_i^0 + \sum_{k=0}^{m} q_{i-k}\xi_k \right| \leqslant r, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.4}$$

Распишем эту систему подробно:

$$|u_0^0 + q_0\xi_0| \leqslant r, \ |u_1^0 + q_1\xi_0 + q_0\xi_1| \leqslant r, \ \ldots,$$
$$|u_n^0 + q_n\xi_0 + \ldots + q_0\xi_n| \leqslant r, \ \ldots, \ |u_{n+m}^0 + q_n\xi_m| \leqslant r,$$
$$|u_{n+m+1}^0| \leqslant r, \ \ldots$$

Ввиду того, что $u_i^0 \to 0$ при $i \to \infty$, выбором достаточно большого m можно обеспечить выполнение неравенств

$$|u_{n+m+1}^0| \leqslant r, \ |u_{n+m+2}^0| \leqslant r, \ \ldots$$

Таким образом, бесконечная система неравенств (3.4) превращается в конечную.

Величина $|\xi| = m$ однозначно определяет длительность переходного процесса $\mathbf{e} = \boldsymbol{\pi}^0 - \mathbf{p}\xi$. При заданном m система неравенств (3.4) может оказаться противоречивой. Это значит, что ограниченного управления $\mathbf{u}$, обеспечивающего получение переходного процесса заданной длительности

$$t_{\min} = (1 + |\mathbf{e}|)\,T = (n + m)\,T,$$

может не существовать. Для того чтобы получить кратчайший переходный процесс при ограниченном управлении, будем постепенно увеличивать m от 0 до ∞, пока не будет получена непротиворечивая система неравенств или пока не убедимся, что система противоречива при любом m.

В общем случае ограничения могут быть наложены не только на значения управляющего воздействия $\mathbf{u}$, но и на значения ошибки $\mathbf{e}$: $|u_i| \leqslant r_1$, $|e_i| \leqslant r_2$, или

$$\left| u_i^0 + \sum_{k=0}^{m} q_{i-k}\xi_k \right| \leqslant r_1, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\left| \pi_i^0 - \sum_{k=0}^{m} p_{i-k}\xi_k \right| \leqslant r_2, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Эта система неравенств должна решаться совместно. Потребовав

$$J = \sum_{i=0}^{\infty} c_i\,|u_i| \to \min,$$

мы сведем задачу к линейному программированию [134].

При сильных ограничениях (r мало или T мало) целесообразно воспользоваться теоремой об n интервалах А. А. Фельдбаума [76]. Эта теорема утверждает, что оптимальное управление $\mathbf{u}$ состоит из n интервалов, на которых используются максимальные усилия чередующегося знака (рис. 9).

Аппроксимируя числа t_i, выражающие моменты переключения знака управляющего воздействия, целыми числами $t_i = k_iT$, $i = 1, 2, \ldots, n$, изображение управляющего воздействия будем искать в виде

$$\mathbf{u} = r\left[1 + z + z^2 + \ldots + z^{k_1-1} - z^{k_1} - z^{k_1+1} - \ldots - z^{k_2-1} + \right.$$
$$\left. + z^{k_2} + z^{k_2+1} + \ldots + (-1)^{n-1} z^{k_n-1}\right] =$$
$$= \frac{r}{1-z}\left[\left(1 - z^{k_1}\right) - z^{k_1}\left(1 - z^{k_2-k_1}\right) + \ldots\right.$$
$$\left. \ldots + (-1)^{n-1} z^{k_{n-1}}\left(1 - z^{k_n-k_{n-1}}\right)\right] =$$
$$= \frac{r}{1-z}\left[1 + 2\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i z^{k_i} + (-1)^n z^{k_n}\right].$$

Обозначим через $\boldsymbol{\theta}$ полином

$$\boldsymbol{\theta} = 1 + 2\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i z^{k_i} + (-1)^n z^{k_n}.$$

Тогда $\mathbf{u} = r\boldsymbol{\theta}/(1-z)$. Подставим это выражение в (3.1):

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} - \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}\,\frac{r\boldsymbol{\theta}}{1-z}.$$

Обозначив через $\mathbf{c}$ наименьшее общее кратное полиномов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{q}$, получим

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}\mathbf{q}_0(1-z) - r\mathbf{p}\mathbf{b}_0\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{c}(1-z)} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{c}(1-z)},$$
$$\mathbf{d} = \mathbf{a}\mathbf{q}_0(1-z) - r\mathbf{p}\mathbf{b}_0\boldsymbol{\theta}.$$

Для того чтобы $\mathbf{e}$ было полиномом, необходимо, чтобы

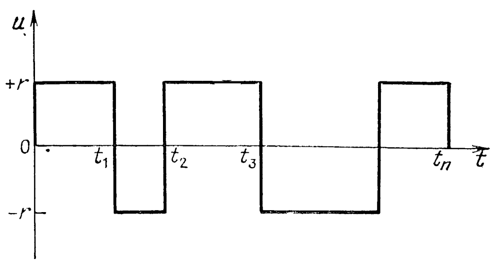

Рис. 9. Оптимальное уравнение

числитель этой рациональной функции делился на знаменатель. Это значит, что корни знаменателя должны быть и корнями числителя. В качестве n мы должны взять степень полинома $\mathbf{c}$: $n = |\mathbf{c}|$.

Пусть $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ — простые корни $\mathbf{c}$. Тогда помимо условия $\mathbf{d}(1)=0$, выполняющегося тождественно, на полином $\mathbf{d}$ накладываются еще n условий: $\mathbf{d}(\varkappa_i)=0$, $i=1, 2, \ldots, n$. В случае μ-кратного корня $\varkappa_i$, условия накладываются и на производные полинома $\mathbf{d}$: $\mathbf{d}^{(j)}(\varkappa_i)=0$, $j=0, 1, \ldots, \mu-1$.

Полученные условия представляют собой систему нелинейных алгебраических уравнений относительно чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Решая эту систему и округляя полученные значения $k_1, k_2, \ldots, k_n$ до ближайших к ним целых чисел

$$k_i^0=\begin{cases}[k_i], & \{k_i\}<1/2,\\ [k_i]+1, & \{k_i\}\geqslant 1/2,\end{cases}$$

получим приближенно оптимальное управление, которое будет тем точнее, чем больше числа $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

Если ограничение r или такт времени T недостаточно малы, то погрешность, вызванную округлением $k_1, k_2, \ldots$ $\ldots, k_n$ можно скомпенсировать введением набора проме-

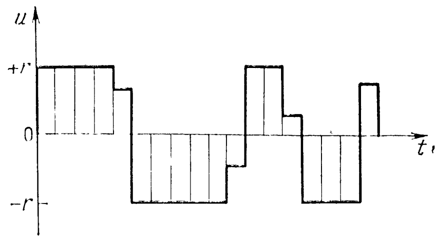

Рис. 10. Приближенно оптимальное управление

жуточных значений управляющего воздействия в моменты переключения (рис. 10).

При этом управляющее воздействие приобретает структуру

$$\mathbf{u}=\frac{r\theta^0}{1-z}+\eta,$$

где θ^0 и η — полиномы вида

$$\theta^0=1+(1+z)\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i z^{k_i^0}+(-1)^n z^{k_n^0},$$

$$\eta=\sum_{i=1}^{n} u_{k_i^0} z^{k_i^0}.$$

Подставляя это выражение в (3.1), получим

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}\mathbf{q}_0(1-z) - r\mathbf{p}\mathbf{b}_0\theta^0 - (1-z)\,\mathbf{p}\mathbf{b}_0\eta}{\mathbf{c}\,(1-z)}.$$

Обозначим через $\mathbf{d}$ числитель этой рациональной функции:

$$\mathbf{d} = \mathbf{a}\mathbf{q}_0(1-z) - r\mathbf{p}\mathbf{b}_0\theta^0 - (1-z)\,\mathbf{p}\mathbf{b}_0\eta.$$

Для того чтобы $\mathbf{e}$ было полиномом, необходимо, чтобы $\mathbf{d}$ делилось на $(1-z)\mathbf{c}$. Условия, аналогичные приведенным выше, накладываемые на полином $\mathbf{d}$ и в случае необходимости на его производные, дают систему линейных алгебраических уравнений относительно чисел $u_{k_1}^0$, $u_{k_2}^0, \ldots, u_{k_n}^0$. Можно показать, что в результате решения этой системы всегда получаются числа, не превышающие по модулю числа r.

Рассмотрим вопрос о компенсации ненулевых начальных условий в управляемом объекте. Сигнал, соответствующий ненулевым начальным условиям в объекте с передаточной функцией $\mathbf{g} = \mathbf{p}/\mathbf{q}$, где $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ — полиномы от z, имеет изображение $\mathbf{x}_0 = \mathbf{r}/\mathbf{q}$, где $\mathbf{r}$ и $\mathbf{q}$ — полиномы от z.

Можно рассмотреть вопрос о совместном воздействии на систему сигнала о желаемом состоянии объекта, имеющего изображение $\mathbf{x} = \mathbf{a}/\mathbf{b}$, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — полиномы от z, причем $(\mathbf{b}, \mathbf{q}) = 1$, и сигнала от ненулевых начальных условий в объекте. Результирующий сигнал будет равен

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} - \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{a}_1}{\mathbf{b}\mathbf{q}},$$

где $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}\mathbf{q} - \mathbf{b}\mathbf{r}$. Рассогласование между желаемым и действительным состоянием объекта имеет вид

$$\mathbf{e} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{g}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{a}_1}{\mathbf{b}\mathbf{q}} - \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}\mathbf{u}.$$

Будем искать управление в виде $\mathbf{u} = \theta/\mathbf{b}$, где θ — пока не определенный полином. Имеем $\mathbf{e} = (\mathbf{a}_1 - \mathbf{p}\theta)/\mathbf{b}\mathbf{q}$. Составим π-уравнение $\mathbf{p}\theta + \mathbf{b}\mathbf{q}\pi = \mathbf{a}_1$. При его выполнении процесс установления является конечным: $\mathbf{e} = \pi$. Однако приведенное π-уравнение можно решить только в том случае, если полином $\mathbf{a}_1$ известен, а для этого должен быть известен полином $\mathbf{r}$. Если начальные условия в объекте неизвестны, то их прямая компенсация в такой системе невозможна.

Перейдем к изучению возможностей получения кратчайших переходных процессов в системе с обратной связью. Здесь мы можем отбросить условие $\mathbf{q}_0^- = 1$, что позволяет нам придать любому неустойчивому объекту устойчивый характер движения. Будем искать управляющую программу в виде

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{q}_0^+ \boldsymbol{\theta}}{\mathbf{b}_0 \boldsymbol{\pi}}, \tag{3.5}$$

где $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\pi}$ — полиномы, удовлетворяющие π-уравнению

$$\mathbf{p}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{b}\mathbf{q}_0^- \boldsymbol{\pi} = \mathbf{a}. \tag{3.6}$$

Подставляя (3.5) и (3.6) в формулу, дающую изображение сигнала рассогласования в системе с обратной связью $\mathbf{e} = \mathbf{x}/(1 + \mathbf{g}\mathbf{w})$, получим изображение кратчайшего переходного процесса $\mathbf{e} = \mathbf{q}_0^- \boldsymbol{\pi}$. Ему соответствует минимальное относительно $\boldsymbol{\pi}$ решение π-уравнения (3.6). Длительность кратчайшего переходного процесса

$$t_{\min} = (1 + |\mathbf{e}|)\, T = (|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}_0^-|)\, T.$$

Управление, соответствующее программе $\mathbf{w}$, имеет изображение

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}\mathbf{e} = \frac{\mathbf{q}_0}{\mathbf{b}_0} \boldsymbol{\theta}.$$

В том случае, когда на управляющие воздействия наложены ограничения (3.3), им можно удовлетворить, выбрав неминимальное решение π-уравнения (3.6):

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^0 + \mathbf{b}\mathbf{q}_0^- \boldsymbol{\xi}, \quad \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}^0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\xi}.$$

При этом изображение управляющего воздействия приобретает вид

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{q}_0}{\mathbf{b}_0} \boldsymbol{\theta}^0 + \mathbf{q}\mathbf{q}_0^- \boldsymbol{\xi}.$$

Обозначим

$$\mathbf{u}^0 = \frac{\mathbf{q}_0}{\mathbf{b}_0} \boldsymbol{\theta}^0, \quad \mathbf{q}^0 = \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}_0^-.$$

В этих обозначениях $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \mathbf{q}^0 \boldsymbol{\xi}$. При заданной $|\boldsymbol{\xi}| = m$ ограничения (3.3) дают систему линейных неравенств относительно коэффициентов полинома $\boldsymbol{\xi}$

$$\left| u_i^0 + \sum_{k=0}^{m} q_{i-k}^0 \xi_k \right| \leqslant r, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Для того чтобы эта система неравенств была непротиворечивой, необходимо, чтобы процесс $\mathbf{u}^0$ был устойчивым. Это достигается при условии $\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}_0^+$, $\mathbf{b}_0^- = 1$. При выполнении этого условия данная система неравенств становится конечной. Соответствующий переходный процесс имеет изображение $\mathbf{e} = \mathbf{q}_0^- (\boldsymbol{\pi}^0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\xi})$. Его длительность равна

$$t_{\min} = (1 + |\mathbf{e}|)\, T = \left(1 + |\mathbf{p}| + \left|\mathbf{q}_0^-\right| + |\boldsymbol{\xi}|\right) T.$$

Для того чтобы получить кратчайший переходный процесс при ограниченном управлении, необходимо постепенно увеличивать $|\boldsymbol{\xi}|$ от 0 до ∞, пока не будет получена непротиворечивая система неравенств или пока не убедимся, что система противоречива при всех $|\boldsymbol{\xi}|$.

Одним из преимуществ системы управления с обратной связью является то, что в ней с помощью единой управляющей программы можно получить кратчайшие переходные процессы для целого класса входных воздействий. Например, если в изображении входного воздействия полином $\mathbf{a}$ неизвестен, то заменив π-уравнение (3.6) π-уравнением

$$\mathbf{p}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{b}\mathbf{q}_0^- \boldsymbol{\pi} = 1,$$

мы получим конечный переходный процесс $\mathbf{e} = \mathbf{a}\mathbf{q}_0^- \boldsymbol{\pi}$ длительности

$$t_{\min} = \left(|\mathbf{p}| + \left|\mathbf{q}_0^-\right| + |\mathbf{a}|\right) T.$$

Это и будет кратчайший переходный процесс, достижимый в линейной системе при неизвестном $\mathbf{a}$.

Рассмотрим вопрос о компенсации ненулевых начальных условий в системе с обратной связью. Ошибка системы под действием входного сигнала $\mathbf{x}$ и сигнала, обусловленного ненулевыми начальными условиями $\mathbf{x}_0$, равна

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{1 + \mathbf{g}\mathbf{w}},$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{a}/\mathbf{b}$, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{r}/\mathbf{q}$, причем $(\mathbf{b}, \mathbf{q}) = 1$. Выбирая управляющую программу в виде $\mathbf{w} = \boldsymbol{\theta}/\mathbf{b}\boldsymbol{\pi}$, где $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\pi}$ — полиномы, удовлетворяющие π-уравнению

$$\mathbf{p}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{b}\mathbf{q}\boldsymbol{\pi} = 1,$$

получим $\mathbf{e} = \mathbf{a}_1\boldsymbol{\pi}$, где $\mathbf{a}_1 = \mathbf{aq} - \mathbf{br}$. Таким образом, в системе с обратной связью возможно получение конечного времени установления при неизвестных ненулевых начальных условиях.

Если входной процесс является полиномом от времени t с неизвестными коэффициентами

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\mu-1} a_k t^k,$$

то его дискретное изображение является рациональной функцией вида

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{a}}{(1-z)^{\mu}},$$

где $\mathbf{a}$ — полином от z степени $(\mu - 1)$ с неизвестными коэффициентами. Система, предназначенная для отработки таких сигналов, есть система с заданной степенью астатизма, равной μ *).

Пример 1. Найдем управление объектом с передаточной функцией

$$\mathbf{g} = \frac{z(0{,}5 + 1{,}25z + 0{,}25z^2)}{1 + 0{,}3z - 0{,}9z^2 - 0{,}4z^3},$$

обеспечивающее кратчайший переходный процесс при воздействии $\mathbf{x} = 1/(1-z)$.

Имеем $\mathbf{b} = 1 - z$, $\mathbf{q} = (1-z)(1+0{,}5z)(1+0{,}8z)$. Наибольший общий делитель полиномов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{q}$ равен $\mathbf{v} = 1 - z$. Дополнительные множители равны $\mathbf{b}_0 = 1$, $\mathbf{q}_0 = (1+0{,}5z)(1+0{,}8z)$. Согласно изложенному, будем искать управление в виде $\mathbf{u} = (1+0{,}5z)\times$ $\times(1+0{,}8z)\theta$, где θ — полином, удовлетворяющий π-уравнению (3.2):

$$z(0{,}5 + 1{,}25z + 0{,}25z^2)\theta + (1-z)\boldsymbol{\pi} = 1.$$

Минимальное решение этого уравнения содержит полиномы следующих степеней: $|\theta| = 0$, $|\boldsymbol{\pi}| = 2$. Приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях z получим алгебраическую систему

$$\pi_0 = 1, \quad 0{,}5\theta_0 - \pi_0 + \pi_1 = 0,$$

$$1{,}25\theta_0 - \pi_1 + \pi_2 = 0, \quad 0{,}25\theta_0 - \pi_2 = 0.$$

Решая ее, имеем $\theta_0 = 1/2$, $\pi_0 = 1$, $\pi_1 = 3/4$, $\pi_2 = 1/8$. Таким образом, искомые полиномы имеют вид

$$\theta = \frac{1}{2}, \quad \boldsymbol{\pi} = 1 + \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}z^2.$$

*) Система обладает астатизмом μ-го порядка, если она имеет нулевую установившуюся ошибку при обработке скачка μ-й производной входного сигнала.

Оптимальное управление

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2}(1 + 0{,}5z)(1 + 0{,}8z) = 0{,}5 + 0{,}65z + 0{,}2z^2.$$

Переходный процесс имеет изображение

$$\mathbf{e} = 1 + \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}z^2.$$

Пример 2. Рассчитаем по критерию минимального времени установления систему управления неустойчивым объектом

$$\mathbf{g} = \frac{z(1+z)}{(1-z)(1-1{,}2z)}$$

при входном сигнале $\mathbf{x} = 1/(1-z)$ и ограниченном управляющем воздействии $|u_i| \leqslant 1$. Оптимальная система управления включает в себя обратную связь.

Имеем $\mathbf{v} = 1 - z$, $\mathbf{b}_0 = 1$, $\mathbf{q}_0^+ = 1$, $\mathbf{q}_0^- = 1 - 1{,}2z$. Согласно (3.5), управляющая программа $\mathbf{w} = \theta/\pi$, где θ и π — полиномы, удовлетворяющие π-уравнению (3.6):

$$z(1+z)\theta + (1-z)(1-1{,}2z)\pi = 1.$$

В минимальное решение этого уравнения входят полиномы следующих степеней: $|\theta^0| = 1$, $|\pi^0| = 1$.

Развернем это уравнение в систему алгебраических уравнений:

$$\pi_0 = 1, \quad \theta_0 - 2{,}2\pi_0 + \pi_1 = 0,$$
$$\theta_0 + \theta_1 + 1{,}2\pi_0 - 2{,}2\pi_1 = 0, \quad \theta_1 + 1{,}2\pi_1 = 0.$$

Решая эту систему, получим $\theta^0 = 1{,}43 - 0{,}93z$, $\pi^0 = 1 + 0{,}78z$. Соответствующее минимальному решению управление

$$\mathbf{u}^0 = 1{,}43 - 2{,}65z + 1{,}12z^2$$

не удовлетворяет ограничению.

Будем искать управление, соответствующее общему решению

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + (1 - 3{,}4z + 3{,}85z^2 - 1{,}44z^3)\xi,$$

где ξ — произвольный полином. Выбирая полином ξ минимально возможной степени $|\xi| = 0$, составим систему неравенств

$$-1 \leqslant 1{,}43 + \xi_0 \leqslant 1, \qquad -1 \leqslant 2{,}65 + 3{,}4\xi_0 \leqslant 1,$$
$$-1 \leqslant 1{,}12 + 3{,}85\xi_0 \leqslant 1, \qquad -1 \leqslant 1{,}44\xi_0 \leqslant 1.$$

Решая эту систему, получим $-0{,}55 \leqslant \xi_0 \leqslant -0{,}49$. Выбирая, например, $\xi_0 = -0{,}49$, получим ограниченное управление

$$\mathbf{u} = 0{,}94 - z - 0{,}77z^2 + 0{,}73z^3,$$

обеспечивающее получение кратчайшего переходного процесса. Соответствующие полиномы θ и π имеют вид

$$\theta = 0{,}94 + 0{,}15z - 0{,}59z^2, \quad \pi = 1 + 1{,}27z + 0{,}49z^2.$$

Им соответствует программа управления

$$\mathbf{w}=\frac{0{,}94+0{,}15z-0{,}59z^2}{1+1{,}27z+0{,}49z^2}.$$

Она осуществляет следующее линейное преобразование сигнала ошибки $\mathbf{e}$ в управляющее воздействие $\mathbf{u}$:

$$u_i+1{,}27u_{i-1}+0{,}49u_{i-2}=0{,}94e_i+0{,}15e_{i-1}-0{,}59e_{i-2}.$$

Пример 3. Рассмотрим задачу об управлении объектом, имеющим непрерывную передаточную функцию $g(p)=1/p^2$. С учетом фиксации импульсов дискретная передаточная функция имеет вид

$$g(z)=\frac{T^2}{2}\,\frac{z(1+z)}{(1-z)^2}.$$

Ненулевые значения выходной координаты объекта и ее производной $y(0)=a$, $\dot{y}(0)=b$ пересчитываются в сигнал с дискретным изображением

$$\mathbf{x}(z)=\frac{a}{1-z}+\frac{bTz}{(1-z)^2}=\frac{a+(bT-a)z}{(1-z)^2}.$$

Имеем

$$\mathbf{p}=\frac{T^2}{2}z(1+z),\quad \mathbf{q}=(1-z)^2,$$

$$\mathbf{a}=a+(bT-a)z,\quad \mathbf{b}=(1-z)^2,\quad \mathbf{c}=(1-z)^2,$$

$$\mathbf{b}_0=1,\quad \mathbf{q}_0=1.$$

Пусть на управляющее воздействие наложено жесткое ограничение $|u_i|\leqslant r$. Это означит, что величина r мала по сравнению с параметрами a и b. Поскольку $|\mathbf{c}|=2$, будем искать управляющее воздействие в виде

$$\mathbf{u}=r\,\frac{1-2z^{k_1}+z^{k_2}}{1-z}.$$

Таким образом, $\boldsymbol{\theta}=1-2z^{k_1}+z^{k_2}$.

Составляем полином $\mathbf{d}$:

$$\mathbf{d}=(1-z)\,[a+(bT-a)z]-\frac{rT^2}{2}z(1+z)\left(1-2z^{k_1}+z^{k_2}\right).$$

Полином $\mathbf{q}$ имеет двукратный корень при $z=1$. Полином $\mathbf{d}$ должен иметь соответствующий трехкратный корень, т. е. $\mathbf{d}(1)=0$, $\mathbf{d}'(1)=0$, $\mathbf{d}''(1)=0$. Дифференцируя $\mathbf{d}(z)$ и учитывая эти условия, получаем систему уравнений относительно чисел k_1 и k_2

$$2k_1-k_2=\frac{b}{rT},\quad k_2^2-2k_1^2=\frac{2a}{rT^2}.$$

Решая эти уравнения, имеем

$$k_1 = \frac{b}{rT} \pm \sqrt{\frac{b^2+2ar}{2r^2T^2}}, \quad k_2 = 2k_1 - \frac{b}{rT}.$$

Решение является целочисленным в том и только в том случае, если

$$\alpha = \frac{2a}{rT^2}, \quad \beta = \frac{b}{rT}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{b^2+2ar}{2r^2T^2}}$$

— целые, причем если β и γ могут быть произвольными целыми, то α должно удовлетворять условию $\alpha = 2\gamma^2 - \beta^2$.

Ограничимся случаем $b = 0$. Тогда $k_1 = \frac{1}{T}\sqrt{\frac{a}{r}}$, $k_2 = 2k_1$. Знак r должен совпадать со знаком a. При этом числа k_1 и k_2 являются действительными. Число $\gamma = \frac{1}{T}\sqrt{\frac{a}{r}}$ должно быть целым. При большом a/r и малом T аппроксимация γ целым числом производится достаточно точно. Например, при $a = 500$, $r = 40$ и $T = 0{,}1$ получаем $\gamma \approx 35$.

В том случае, когда число γ не может быть точно аппроксимировано целым, например при $a = 5$, $r = 40$, $T = 0{,}1$, $\gamma \cong 3{,}5$, можно произвести коррекцию программы $\mathbf{u}(z)$ введением «переходных» импульсов. Управляющее воздействие имеет при этом следующую структуру:

$$\mathbf{u} = r\,\frac{1 - z^{k_1^0}(1+z) + z^{k_2^0}}{1-z} + u_{k_1^0} z^{k_1^0} + u_{k_2^0} z^{k_2^0}.$$

Определим $u_{k_1^0}$ и $u_{k_2^0}$ для $a = 5$, $r = 40$, $T = 0{,}1$, $k_1^0 = 3$, $k_2^0 = 7$. Имеем $\theta^0 = 1 - z^3(1+z) + z^7$. Составляем полином $\mathbf{d}$:

$$\mathbf{d} = 5(1-z)^2 - 0{,}2z(1+z)(1 - z^3 - z^4 + z^7) - \\ - 0{,}005z(1-z)^2(u_3z^3 + u_7z^7).$$

Условия $\mathbf{d}'(1) = 0$, $\mathbf{d}''(1) = 0$ дают систему уравнений

$$u_3 + u_7 = 0, \quad 3u_3 + 7u_7 = -20,$$

откуда $u_3 = 5$, $u_7 = -5$. Таким образом, управляющее воздействие

$$\mathbf{u} = 40 \cdot \frac{1 - z^3 - z^4 + z^7}{1-z} + 5z^3 - 5z^7 = \\ = 40 + 40z + 40z^2 + 5z^3 - 40z^4 - 40z^5 - 40z^6 - 5z^7.$$

Пример 4. Рассмотрим несколько более сложный пример. Пусть объект имеет непрерывную передаточную функцию

$$\mathbf{g}(p) = \frac{1}{p^2(p^2+10p+33)}.$$

При $T = 0{,}1$ с дискретная передаточная функция этого объекта с учетом фиксации импульсов имеет вид

$$g(z) = \frac{0{,}01\,z(1-25z+28z^2-2z^3)}{(1-z)^2(1-1{,}17z+0{,}37z^2)}$$

Рассчитаем программу управления, обеспечивающую отработку скачка $\mathbf{x} = a/(1-z)$ за минимальное время. Имеем

$$\begin{aligned}
&\mathbf{p} = 0{,}01z(1-25z+28z^2-2z^3),\\
&\mathbf{q} = (1-z)^2(1-1{,}17z+0{,}37z^2),\\
&\mathbf{a} = a, \quad \mathbf{b} = 1-z,\\
&\mathbf{c} = (1-z)^2(1-1{,}17z+0{,}37z^2),\\
&\mathbf{b}_0 = 1, \quad \mathbf{q}_0 = (1-z)(1-1{,}17z+0{,}37z^2).
\end{aligned}$$

Пусть на управляющее воздействие наложено жесткое ограничение $|u_i| \leqslant r$, $r \ll a$. Поскольку $|\mathbf{c}| = 4$, структуру оптимального управляющего воздействия примем в виде $\mathbf{u} = r\theta/(1-z)$, где

$$\theta = 1 - 2z^{k_1} + 2z^{k_2} - 2z^{k_3} + z^{k_4}.$$

Составляем полином $\mathbf{d}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{d} = a(1-z)^2(1-1{,}17z+0{,}37z^2) - {}\\
- 0{,}01rz(1-25z+28z^2-2z^3)\left(1-2z^{k_1}+2z^{k_2}-2z^{k_3}+z^{k_4}\right).
\end{aligned}$$

Корни полинома $\mathbf{c}$

$$\alpha_{1,2} = 1, \quad \alpha_{3,4} = 1{,}59 \pm j\,0{,}43 = 1{,}65e^{\pm j0{,}27}.$$

На полином $\mathbf{d}$ накладываются следующие условия:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{d}(1) = 0, \quad \mathbf{d}'(1) = 0, \quad \mathbf{d}''(1) = 0,\\
&\mathbf{d}(1{,}65e^{j0{,}27}) = 0, \quad \mathbf{d}(1{,}65e^{-j0{,}27}) = 0.
\end{aligned}$$

Учитывая их, получаем систему уравнений относительно чисел k_1, k_2, k_3 и k_4:

$$2k_1 - 2k_2 + 2k_3 - k_4 = 0,$$

$$2k_1^2 - 2k_2^2 + 2k_3^2 - k_4^2 = -20\frac{a}{r},$$

$$\begin{aligned}
2(1{,}65)^{k_1}\cos 0{,}27k_1 - 2(1{,}65)^{k_2}\cos 0{,}27k_2 + {}\\
+ 2(1{,}65)^{k_3}\cos 0{,}27k_3 - (1{,}65)^{k_4}\cos 0{,}27k_4 = 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2(1{,}65)^{k_1}\sin 0{,}27k_1 - 2(1{,}65)^{k_2}\sin 0{,}27k_2 + {}\\
+ 2(1{,}65)^{k_3}\sin 0{,}27k_3 - (1{,}65)^{k_4}\sin 0{,}27k_4 = 0.
\end{aligned}$$

Решение этой системы уравнений можно получить обычными численными методами, например, методом Ньютона [38]. При большом a/r числа k_1, k_2, k_3 и k_4 с достаточной точностью аппроксимируются целыми.

На этом примере ясно видна целесообразность использования предлагаемого метода при расчете оптимальных управлений для объектов сколь угодно высокого порядка.

2. Минимизация суммарной квадратичной ошибки

Суммарной квадратичной ошибкой называется показатель

$$J = \sum_{i=0}^{\infty} e_i^2,$$

где e_i — текущее значение ошибки системы. Процесс ликвидации ошибки $\{e_i\}$ будем считать устойчивым, т. е. $e_i \to 0$, $i \to \infty$, и таким, что показатель суммарной квадратичной ошибки принимает конечное значение. Выбор этого критерия качества обусловлен его относительной простотой. Оптимизация по этому критерию приводит к линейному закону управления.

Покажем, что в случае конечности показателя J имеет место соотношение

$$\sum_{i=0}^{\infty} e_i^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \mathbf{e}(z)\,\hat{\mathbf{e}}(z)\,\frac{dz}{z}, \tag{3.7}$$

где

$$\mathbf{e}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} e_i z^i \tag{3.8}$$

— дискретное изображение процесса $\{e_i\}$,

$$\hat{\mathbf{e}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k z^{-k} \tag{3.9}$$

— функция, инверсная по отношению к $\mathbf{e}(z)$, а Γ — контур $|z| = 1$. Перемножая сходящиеся на контуре Γ ряды (3.8) и (3.9), получим

$$\mathbf{e}(z)\,\hat{\mathbf{e}}(z) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} e_i e_k z^{i-k}.$$

Деля обе части этого равенства на $2\pi jz$ и интегрируя почленно по контуру Γ, имеем

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} e_i e_k \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} z^{i-k}\frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \mathbf{e}(z)\,\hat{\mathbf{e}}(z)\,\frac{dz}{z}.$$

Интеграл в левой части равенства

$$\frac{1}{2\pi j}\oint\limits_{\Gamma} z^{i-k}\frac{dz}{z}=\delta_{ik}=\begin{cases}1, & i=k,\\ 0, & i\neq k,\end{cases}$$

и, следовательно,

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} e_i e_k \delta_{ik}=\sum_{i=0}^{\infty} e_i^2.$$

Таким образом, соотношение (3.7) доказано.

Используя введенный нами ранее (с. 50) функционал наблюдения ct, критерий суммарной квадратичной ошибки можно записать в виде

$$J=\mathrm{ct}\,\mathbf{e}\widehat{\mathbf{e}}. \tag{3.10}$$

По-прежнему будем обозначать желаемый процесс движения системы через $\mathbf{x}=\mathbf{a}/\mathbf{b}$, $|\mathbf{a}|<|\mathbf{b}|$, передаточную функцию управляемого объекта — через $\mathbf{g}=\mathbf{p}/\mathbf{q}$, наибольший общий делитель полиномов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{q}$ — через $\mathbf{v}=(\mathbf{b},\mathbf{q})$, и дополнительные множители — через $\mathbf{b}_0$ и $\mathbf{q}_0$: $\mathbf{b}=\mathbf{b}_0\mathbf{v}$, $\mathbf{q}=\mathbf{q}_0\mathbf{v}$. По-прежнему будем считать $\mathbf{q}_0=\mathbf{q}_0^{+}$, $\mathbf{q}_0^{-}=1$.

Желая минимизировать суммарную квадратичную ошибку, будем искать управление объектом в виде

$$\mathbf{u}=\frac{\mathbf{q}_0\theta}{\mathbf{b}_0\mathbf{p}^{+}\widetilde{\mathbf{p}}^{-}},$$

где θ — пока не определенный полином. Изображение сигнала ошибки принимает вид

$$\mathbf{e}=\mathbf{x}-\mathbf{g}\mathbf{u}=\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}-\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}\,\frac{\mathbf{q}_0\theta}{\mathbf{b}_0\mathbf{p}^{+}\widetilde{\mathbf{p}}^{-}}=\frac{\mathbf{a}\widetilde{\mathbf{p}}^{-}-\mathbf{p}^{-}\theta}{\mathbf{b}\widetilde{\mathbf{p}}^{-}}.$$

Составим π-уравнение:

$$\mathbf{p}^{-}\theta+\mathbf{b}\pi=\mathbf{a}\widetilde{\mathbf{p}}^{-}. \tag{3.11}$$

При этом изображение ошибки

$$\mathbf{e}=\frac{\pi}{\widetilde{\mathbf{p}}^{-}}. \tag{3.12}$$

Условие оптимальности — условие минимума критерия (3.10) имеет вид

$$\delta J=\mathrm{ct}\,\delta(\mathbf{e}\widehat{\mathbf{e}})=\mathrm{ct}\,\mathbf{e}\delta\widehat{\mathbf{e}}+\mathrm{ct}\,\widehat{\mathbf{e}}\delta\mathbf{e}=0.$$

Поскольку $\mathrm{ct}\,\boldsymbol{\psi} = \mathrm{ct}\,\widehat{\boldsymbol{\psi}}$ для любой функции $\boldsymbol{\psi}$, то это условие сводится к

$$\delta J_1 = \mathrm{ct}\,\mathbf{e}\,\delta\widehat{\mathbf{e}} = 0. \tag{3.13}$$

Из (3.12) имеем $\delta\mathbf{e} = \delta\boldsymbol{\pi}/\widetilde{\mathbf{p}}^-$. Из общего решения π-уравнения (3.11) $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}_0 + \mathbf{p}^-\boldsymbol{\xi}$ находим вариацию $\boldsymbol{\pi}$: $\delta\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p}^-\delta\boldsymbol{\xi}$. Следовательно,

$$\delta\mathbf{e} = \frac{\mathbf{p}^-}{\widetilde{\mathbf{p}}^-}\,\delta\boldsymbol{\xi}.$$

Следуя общему правилу (1.35), будем иметь

$$\delta\widehat{\mathbf{e}} = \frac{\widetilde{\mathbf{p}}^-}{\mathbf{p}^-}\,\delta\widehat{\boldsymbol{\xi}}. \tag{3.14}$$

Подставляя (3.12) и (3.14) в (3.13), получим

$$\delta J_1 = \mathrm{ct}\,\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{p}^-}\,\frac{\delta\widetilde{\boldsymbol{\xi}}}{z^{|\boldsymbol{\xi}|}}. \tag{3.15}$$

Минимальное решение π-уравнения (3.11) дает $|\boldsymbol{\pi}| = |\mathbf{p}^-| - 1$. Кроме того, $|\widetilde{\boldsymbol{\xi}}| \leqslant |\boldsymbol{\xi}|$. Следовательно, функция под знаком ct в выражении (3.15) является левой и правильной. Пользуясь правилом, что если $\mathrm{ind}\,\mathbf{h}_- < 0$, то $\mathrm{ct}\,\mathbf{h}_- = 0$, заключаем, что условие минимума суммарной квадратичной ошибки выполнено.

Таким образом, задача сводится к нахождению минимального относительно $\boldsymbol{\pi}$ решения π-уравнения (3.11). При $|\mathbf{a}| < |\mathbf{b}|$ π-уравнение (3.11) является правильным и имеет единственное минимальное решение. При $|\mathbf{a}| \geqslant |\mathbf{b}|$ минимальное относительно $\boldsymbol{\pi}$ решение π-уравнения (3.11) также единственно и удовлетворяет требованиям оптимальности.

Докажем инвариантность управляющей программы $\mathbf{u}$ относительно различных факторизаций полинома $\mathbf{p}$, выполняемых с точностью до числового множителя k. Пусть мы имеем факторизацию $(\mathbf{p}^+)' = k\mathbf{p}^+$, $(\mathbf{p}^-)' = \frac{1}{k}\mathbf{p}^-$, $(\widetilde{\mathbf{p}}^-)' = \frac{1}{k}\,\widetilde{\mathbf{p}}^-$. Из уравнения

$$\frac{1}{k}\mathbf{p}^-\boldsymbol{\theta}' + \mathbf{b}\boldsymbol{\pi}' = \frac{1}{k}\,\mathbf{a}\widetilde{\mathbf{p}}^-$$

следует $\boldsymbol{\theta}' = \boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\pi}' = \frac{1}{k}\boldsymbol{\pi}$. Подставляя значения $\boldsymbol{\theta}'$, $(\mathbf{p}^+)'$ и $(\widetilde{\mathbf{p}}^-)'$ в управление $\mathbf{u}$, находим

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{q}_0\boldsymbol{\theta}'}{\mathbf{b}_0(\mathbf{p}^+)'(\widetilde{\mathbf{p}}^-)'} = \frac{\mathbf{q}_0\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{b}_0\mathbf{p}^+\widetilde{\mathbf{p}}^-} = \mathbf{u}.$$

Изображение ошибки преобразуется аналогичным образом:

$$\mathbf{e}' = \frac{\pi'}{(\tilde{\mathbf{p}}^-)'} = \frac{\pi}{\tilde{\mathbf{p}}^-} = \mathbf{e}.$$

Таким образом, мы доказали, что управление $\mathbf{u}$ и ошибка $\mathbf{e}$ остаются инвариантными при различных способах факторизации полинома $\mathbf{p}$.

Найдем значение минимума суммарной квадратичной ошибки. Подставляя (3.12) в (3.10), получим

$$J^* = \mathrm{ct}\,\frac{\pi\hat{\pi}}{\tilde{\mathbf{p}}^-\hat{\tilde{\mathbf{p}}}^-}, \tag{3.16}$$

где π — минимальный полином уравнения (3.11). Рассчитаем теперь по критерию суммарной квадратичной ошибки программу управления объектом $\mathbf{g} = \mathbf{p}/\mathbf{q}$, в общем случае неустойчивым, в системе с обратной связью. Будем искать ее в виде $\mathbf{w} = \mathbf{q}_0^+\theta/\mathbf{b}_0\mathbf{p}^+\pi$, где θ и π — пока не определенные полиномы. Подставляя это выражение в формулу $\mathbf{e} = \mathbf{x}/(1 + \mathbf{g}\mathbf{w})$, получим

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}\mathbf{q}_0^-\pi}{\mathbf{p}^-\theta + \mathbf{b}\mathbf{q}_0^-\pi}.$$

Положим

$$\mathbf{p}^-\theta + \mathbf{b}\mathbf{q}_0^-\pi = \mathbf{c}^+, \tag{3.17}$$

где $\mathbf{c}^+$ — пока не определенный положительный полином. При этом

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}\mathbf{q}_0^-\pi}{\mathbf{c}^+}. \tag{3.18}$$

Варьируя общее решение π-уравнения (3.17) $\pi = \pi_0 + \mathbf{p}^-\xi$, получим $\delta\pi = \mathbf{p}^-\delta\xi$. Таким образом,

$$\delta\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}\mathbf{p}^-\mathbf{q}_0^-}{\mathbf{c}^+}\,\delta\xi.$$

Подставляя это выражение наряду с (3.18) в формулу (3.13), будем иметь

$$\delta J_1 = \mathrm{ct}\,\frac{\mathbf{a}\mathbf{q}_0^-\pi}{\mathbf{c}^+}\widehat{\left(\frac{\mathbf{a}\mathbf{p}^-\mathbf{q}_0^-}{\mathbf{c}^+}\right)}\,\delta\hat{\xi}.$$

Положив $\mathbf{c}^+ = \mathbf{a}^+\tilde{\mathbf{a}}^-\tilde{\mathbf{p}}^-\tilde{\mathbf{q}}_0^-$, после сокращений получим

$$\delta J_1 = \mathrm{ct}\,\frac{\pi}{\mathbf{p}^-}\,\delta\hat{\xi}.$$

Это выражение обращается в нуль, если $|\boldsymbol{\pi}| = |\mathbf{p}^-| - 1$. Таким образом, задача свелась к получению минимального относительно $\boldsymbol{\pi}$ решения π-уравнения

$$\mathbf{p}^-\boldsymbol{\theta} + \mathbf{b}\mathbf{q}_0^-\boldsymbol{\pi} = \mathbf{a}^+\tilde{\mathbf{a}}^-\tilde{\mathbf{p}}^-\tilde{\mathbf{q}}_0^-. \tag{3.19}$$

При $|\mathbf{a}| < |\mathbf{b}|$ это π-уравнение является правильным, поскольку $|\tilde{\mathbf{a}}^-| \leqslant |\mathbf{a}^-|$, $|\tilde{\mathbf{p}}^-| \leqslant |\mathbf{p}^-|$, $|\tilde{\mathbf{q}}_0^-| \leqslant |\mathbf{q}_0^-|$, и имеет единственное минимальное решение. При $|\mathbf{a}| \geqslant |\mathbf{b}|$ минимальное решение относительно $\boldsymbol{\pi}$ также обеспечивает выполнение условий оптимальности.

Докажем инвариантность программы управления $\mathbf{w}$ относительно различных факторизаций полиномов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}_0$, отличающихся произвольными множителями k и l. Имеем

$$(\mathbf{p}^+)' = k\mathbf{p}^+,\quad (\mathbf{p}^-)' = \frac{1}{k}\mathbf{p}^-,\quad (\tilde{\mathbf{p}}^-)' = \frac{1}{k}\tilde{\mathbf{p}}^-,$$

$$(\mathbf{q}_0^+) = l\mathbf{q}_0^+,\quad (\mathbf{q}_0^-)' = \frac{1}{l}\mathbf{q}_0^-,\quad (\tilde{\mathbf{q}}_0^-) = \frac{1}{l}\tilde{\mathbf{q}}_0^-.$$

При этом π-уравнение (3.19) принимает вид

$$\frac{1}{k}\mathbf{p}^-\theta' + \frac{1}{l}\mathbf{b}\mathbf{q}_0^-\boldsymbol{\pi}' = \frac{1}{kl}\mathbf{a}^+\tilde{\mathbf{a}}^-\tilde{\mathbf{p}}^-\tilde{\mathbf{q}}_0^-,$$

или

$$l\mathbf{p}^-\boldsymbol{\theta}' + k\mathbf{b}\mathbf{q}_0^-\boldsymbol{\pi}' = \mathbf{a}^+\tilde{\mathbf{a}}^-\tilde{\mathbf{p}}^-\tilde{\mathbf{q}}_0^-.$$

Его решение $\boldsymbol{\theta}' = \frac{1}{l}\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\pi}' = \frac{1}{k}\boldsymbol{\pi}$. Программа управления

$$\mathbf{w}' = \frac{(\mathbf{q}_0^+)'\boldsymbol{\theta}'}{\mathbf{b}_0(\mathbf{p}^+)'\boldsymbol{\pi}'} = \frac{\mathbf{q}_0^+\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{b}_0\mathbf{p}^+\boldsymbol{\pi}} = \mathbf{w}$$

остается инвариантной. Процесс установления

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}^-\mathbf{q}_0^-\boldsymbol{\pi}}{\tilde{\mathbf{a}}^-\tilde{\mathbf{p}}^-\tilde{\mathbf{q}}_0^-}$$

является устойчивым, хотя имеет бесконечную длительность. Подставляя это выражение в (3.10), найдем значение минимума суммарной квадратичной ошибки

$$J^* = \mathrm{ct}\,\frac{\pi\hat{\pi}}{\tilde{\mathbf{p}}^-\hat{\tilde{\mathbf{p}}}^-}.$$

Для того чтобы вычислить значение этого функционала, произведем правильную сепарацию *) функции

$$\frac{\pi\hat{\pi}}{\tilde{\mathbf{p}}^-\hat{\tilde{\mathbf{p}}}^-} = \frac{z^{|\tilde{\mathbf{p}}^-|-|\pi|}\pi\tilde{\pi}}{\tilde{\mathbf{p}}^-\tilde{\tilde{\mathbf{p}}}^-} = \frac{z^{|\mathbf{p}^-|-|\pi|}\pi\tilde{\pi}}{\mathbf{p}^-\tilde{\mathbf{p}}^-} = \frac{z\pi\tilde{\pi}}{\mathbf{p}^-\tilde{\mathbf{p}}^-}.$$

Для этого составим π-уравнение

$$\mathbf{p}^-\theta + \tilde{\mathbf{p}}^-\varphi = z\pi\tilde{\pi}$$

и найдем его минимальное решение относительно φ. Поскольку $\mathrm{ct}(\varphi/\mathbf{p}^-) = 0$, то

$$J^* = \mathrm{ct}\,\frac{\theta}{\tilde{\mathbf{p}}^-} = \frac{\theta(0)}{\tilde{\mathbf{p}}^-(0)}.$$

Вычислим сигнал управления **)

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}^-\mathbf{q}_0^-\theta}{\tilde{\mathbf{a}}^-\mathbf{b}_0\mathbf{p}^*\tilde{\mathbf{q}}_0^-}.$$

Управление является устойчивым, если $\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}_0^+$, $\mathbf{b}_0^- = 1$ и полином $\mathbf{p}$ является неособым. Если полином $\mathbf{p}$ является особым, то целесообразно применить управление по комбинированному критерию (раздел 5 этой главы). Если полином $\mathbf{q}_0^-$ является особым, то полиномы $\mathbf{q}_0^-$ и $\tilde{\mathbf{q}}_0^-$ могут оказаться не взаимно просты: $(\mathbf{q}_0^-, \tilde{\mathbf{q}}_0^-) = \mathbf{q}_1^-$. В этом случае π-уравнение (3.19) имеет решение $\theta = \mathbf{q}_1^-\theta_1$, и сокращение части полинома $\mathbf{q}^-$ все-таки происходит. При этом обычная замкнутая система с одним управляющим устройством является неработоспособной.

В данном случае можно получить работоспособную систему управления, если ввести второе управляющее устройство в цепь обратной связи (рис. 7). Эта система имеет класс допустимых функций $\mathbf{h} = \mathbf{p}^-\mathbf{f}_+$, и ее расчет по критерию минимума суммарной квадратичной ошибки

---

*) См. с. 49.

**) Согласно формуле (1.36) из раздела 8 гл. 1, через $\mathbf{p}^*$ мы обозначаем полином

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{p}^+\tilde{\mathbf{p}}^-.$$

требует решения π-уравнения, не содержащего $\mathbf{q}_0^-$ и $\tilde{\mathbf{q}}_0^-$: $\mathbf{p}^-\theta + \mathbf{b}\pi = \mathbf{a}^*\tilde{\mathbf{p}}^-$. Соответствующая функция $\mathbf{f}_+ = \theta/\mathbf{a}^*\tilde{\mathbf{p}}^-$. Расчет программ $\mathbf{w}_1 = \mathbf{q}^+\theta_1/\mathbf{p}^+\pi_1$, $\mathbf{w}_2 = \theta_2/\pi_2$ сводится к нахождению полиномов θ_1 и π_2, удовлетворяющих условиям

$$\theta_1\pi_2 = \theta, \quad (\mathbf{p}^-\theta_1,\ \mathbf{q}^-\pi_2) = 1,$$

и полиномов θ_2 и π_1, удовлетворяющих π-уравнению

$$(\mathbf{p}^-\theta_1)\theta_2 + (\mathbf{q}^-\pi_2)\pi_1 = \mathbf{a}^*\tilde{\mathbf{p}}^-.$$

Пример 1. Найдем управление объектом

$$\mathbf{g} = \frac{z(1+2z)}{(1-z)(1-0{,}37z)},$$

минимизирующее суммарную квадратичную ошибку при воздействии $\mathbf{x} = z/(1-z)^2$. Имеем $\mathbf{v} = 1-z$, $\mathbf{b}_0 = 1-z$, $\mathbf{q}_0 = 1-0{,}37z$. Составляем управление

$$\mathbf{u} = \frac{(1-0{,}37z)\,\theta}{(1-z)(2+z)},$$

где θ — полином, удовлетворяющий π-уравнению (3.11):

$$z(1+2z)\theta + (1-z)^2\pi = z(2+z).$$

Это уравнение эквивалентно следующей алгебраической системе:

$$\pi_0 = 0, \quad \theta_0 + \theta_1 = 1, \quad \theta_0 + \pi_1 = 2, \quad 2\theta_1 + \pi_1 = 0.$$

Решая ее, получим $\theta = 1{,}33 - 0{,}33z$, $\pi = 0{,}67z$. Таким образом, оптимальное управление

$$\mathbf{u} = \frac{(1-0{,}37z)(1{,}33-0{,}33z)}{(1-z)(2+z)}.$$

Сигнал ошибки равен

$$\mathbf{e} = \frac{0{,}33z}{1+0{,}5z} = 0{,}33z - 0{,}16z^2 + 0{,}08z^3 - 0{,}04z^4 + \ldots$$

Процесс установления является бесконечным, но устойчивым.

Вычислим значение минимума суммарной квадратичной ошибки. Для этого составим π-уравнение

$$z(1+2z)\theta + (2+z)\varphi = 0{,}67\cdot 0{,}67z^2.$$

Сокращая его на z и задаваясь $|\theta| = 0$, $|\varphi| = 0$, получаем алгебраическую систему

$$\theta_0 + 2\varphi_0 = 0, \quad 2\theta_0 + \varphi_0 = 0{,}45.$$

Решая ее, имеем $\theta_0 = 0{,}3$. Таким образом, значение минимума суммарной квадратичной ошибки $J^* = 0{,}15$.

Пример 2. Рассчитаем по критерию суммарной квадратичной ошибки систему управления неустойчивым объектом

$$\mathbf{g}=\frac{z\left(1+2{,}5z+z^2\right)}{1-0{,}3z-1{,}9z^2+1{,}2z^3},$$

включающую в себя обратную связь. Входной сигнал $\mathbf{x} = 1/(1-z)$.

Имеем $\mathbf{v}=1-z$, $\mathbf{b}_0=1$, $\mathbf{q}_0^+=1-0{,}8z$, $\mathbf{q}_0^-=1+1{,}5z$, $\mathbf{p}^-=z(1+2z)$, $\mathbf{p}^+=1+0{,}5z$. Программу управления будем искать в виде $\mathbf{w}=(1-0{,}8z)\boldsymbol{\theta}/(1+0{,}5z)\boldsymbol{\pi}$, где $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\pi}$ — полиномы, образующие минимальное решение правильного π-уравнения (3.19)

$$z(1+2z)\boldsymbol{\theta}+(1-z)(1+1{,}5z)\boldsymbol{\pi}=(2+z)(1{,}5+z).$$

Выбирая степени минимальных полиномов равными $|\boldsymbol{\theta}|=1$, $|\boldsymbol{\pi}|=1$, развернем π-уравнение в алгебраическую систему

$$\pi_0=3,\quad \theta_0+0{,}5\pi_0+\pi_1=3{,}5,$$

$$2\theta_0+\theta_1+0{,}5\pi_1-1{,}5\pi_0=1,\quad 2\theta_1-1{,}5\pi_1=0.$$

Решая ее, получим $\boldsymbol{\theta}=4-1{,}5z$, $\boldsymbol{\pi}=3-2z$. Таким образом, управляющая программа

$$\mathbf{w}=\frac{4-4{,}7z+1{,}2z^2}{3-0{,}5z-z^2}.$$

Она осуществляет линейное преобразование

$$3u_i-0{,}5u_{i-1}-u_{i-2}=4e_i-4{,}7e_{i-1}+1{,}2e_{i-2}.$$

Переходный процесс имеет изображение

$$\mathbf{e}=\frac{3+2{,}5z-3z^2}{3+3{,}5z+z^2}$$

и является устойчивым. Управляющее воздействие

$$\mathbf{u}=\frac{(1-0{,}8z)(1+1{,}5z)(4-1{,}5z)}{(1+0{,}5z)(1{,}5+z)(2+z)}.$$

Вычислим минимальную суммарную квадратичную ошибку. Для этого составим π-уравнение

$$z(1+2z)\boldsymbol{\theta}+(2+z)\boldsymbol{\varphi}=z(3-2z)(-2+3z).$$

Сокращая его на z и задаваясь $|\boldsymbol{\theta}|=1$, $|\boldsymbol{\varphi}|=0$, получим

$$\theta_0+2\varphi_0=-6,\quad 2\theta_0+\theta_1+\varphi_0=13,\quad 2\theta_1=-6.$$

Решение этой алгебраической системы имеет вид $\boldsymbol{\theta}=12{,}67-3z$. Следовательно, суммарная квадратичная ошибка $J^*=6{,}33$.

Пример 3. Рассмотрим задачу управления негрубым объектом, имеющим передаточную функцию $\mathbf{g}=z/(1-z)^2$ при воздействии $\mathbf{x} = 1/(1 - 0{,}5z)$. Имеем

$$\mathbf{v} = 1, \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}_0 = 1 - 0{,}5z, \quad \mathbf{a} = 1,$$
$$\mathbf{p}^+ = 1, \quad \mathbf{p}^- = z, \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}_0 = (1 - z)^2,$$
$$\mathbf{q}_0^+ = 1, \quad \mathbf{q}_0^- = (1 - z)^2, \quad \tilde{\mathbf{q}}_0^- = (1 - z)^2.$$

Обычная замкнутая система неработоспособна из-за нарушения условий грубости: при вариациях передаточной функции объекта в ней происходит накопление ошибок.

Рассчитаем систему с двумя управляющими устройствами, одно из которых находится в цепи прямой связи, а другое — в цепи обратной связи (рис. 7). Решая уравнение

$$z\boldsymbol{\theta} + (1 - 0{,}5z)\boldsymbol{\pi} = 1,$$

получаем $\boldsymbol{\theta} = 0{,}5$. Условия

$$\boldsymbol{\theta}_1\boldsymbol{\pi}_2 = 0{,}5, \qquad (z\boldsymbol{\theta}_1, (1 - z)^2\boldsymbol{\pi}_2) = 1$$

дают $\boldsymbol{\theta}_1 = 0{,}5$, $\boldsymbol{\pi}_2 = 1$. Решая уравнение

$$0{,}5z\,\boldsymbol{\theta}_2 + (1 - z)^2\boldsymbol{\pi}_1 = 1,$$

получим $\boldsymbol{\theta}_2 = 4 - 2z$, $\boldsymbol{\pi}_1 = 1$. Таким образом, управляющие программы $\mathbf{w}_1 = 0{,}5$, $\mathbf{w}_2 = 4 - 2z$. Полученная система является работоспособной.

3. Регуляризация квадратичных функционалов

В том случае, когда желательно уменьшить колебательность переходного процесса, прибегают к оптимизации по критерию

$$J = \int_0^\infty (e^2 + \lambda\dot{e}^2)\,dt$$

(здесь λ — параметр регуляризации [72]) или его дискретному аналогу

$$J = \sum_{i=0}^{\infty} \left[e_i^2 + \lambda(e_i - e_{i-1})^2\right].$$

Операторно этот критерий можно записать в виде

$$J = \mathrm{ct}\,[1 + \lambda(1 - z)(1 - z^{-1})]\mathbf{e}\hat{\mathbf{e}} =$$
$$= \mathrm{ct}\,[-\lambda z^{-1} + (1 + 2\lambda) - \lambda z]\,\widehat{\mathbf{ee}}.$$

Рассмотрим более общую задачу оптимизации по критерию $J = \mathrm{ct}\,\mathbf{s}\hat{\mathbf{s}}\mathbf{e}\hat{\mathbf{e}}$, где $\mathbf{s}$ — произвольный регуляризирующий полином. Рассчитаем оптимальное управление, Желаемый закон движения объекта имеет изображение $\mathbf{x}=\mathbf{a}/\mathbf{b}$, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — полиномы от z. Имеем $\mathbf{v}=(\mathbf{b},\ \mathbf{q})$, $\mathbf{b}=\mathbf{b}_0\mathbf{v}$, $\mathbf{q}=\mathbf{q}_0\mathbf{v}$. Система работоспособна при условии $\mathbf{q}_0=\mathbf{q}_0^+$, $\mathbf{q}_0^-=1$, которое будем считать выполненным. Будем искать управление в виде $\mathbf{u}=\mathbf{q}_0\theta/\mathbf{b}_0\mathbf{s}^*\mathbf{p}^*$, где θ — пока не определенный полином. Изображение процесса установления

$$\mathbf{e}=\mathbf{x}-\mathbf{g}\mathbf{u}=\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}-\frac{\mathbf{p}^-\theta}{\mathbf{b}\mathbf{s}^*\tilde{\mathbf{p}}^-}=\frac{\mathbf{a}\mathbf{s}^*\tilde{\mathbf{p}}^--\mathbf{p}^-\theta}{\mathbf{b}\mathbf{s}^*\tilde{\mathbf{p}}^-}.$$

Составим π-уравнение

$$\mathbf{p}^-\theta+\mathbf{b}\pi=\mathbf{a}\mathbf{s}^*\tilde{\mathbf{p}}^-. \tag{3.20}$$

При этом процесс установления

$$\mathbf{e}=\frac{\pi}{\mathbf{s}^*\tilde{\mathbf{p}}^-}. \tag{3.21}$$

Условие минимума критерия J имеет вид

$$\delta J=\mathrm{ct}\,\hat{\mathbf{s}}\mathbf{s}\mathbf{e}\delta\hat{\mathbf{e}}=0. \tag{3.22}$$

Из общего решения π-уравнения (3.20) $\pi=\pi_0+\mathbf{p}^-\xi$ находим вариацию π: $\delta\pi=\mathbf{p}^-\delta\xi$. Следовательно,

$$\delta\mathbf{e}=\frac{\mathbf{p}^-}{\mathbf{s}^*\tilde{\mathbf{p}}^-}\delta\xi,\quad \delta\hat{\mathbf{e}}=\frac{\tilde{\mathbf{p}}^-}{\hat{\mathbf{s}}^*\mathbf{p}^-}\delta\hat{\xi}. \tag{3.23}$$

Подставляя (3.21) и (3.23) в (3.22), с учетом тождества $\mathbf{s}\hat{\mathbf{s}}=\mathbf{s}^*\hat{\mathbf{s}}^*$ получим

$$\delta J=\mathrm{ct}\frac{\pi}{\mathbf{p}^-}\delta\hat{\xi}.$$

Минимальное относительно π решение π-уравнения (3.20) имеет степень $|\pi|=|\mathbf{p}^-|-1$ и обеспечивает выполнение условия оптимальности (3.22).

В том случае, когда условие $\mathbf{q}_0^-=1$ не выполняется, необходимо применять систему управления с обратной связью, имеющую передаточную функцию

$$\mathbf{h}=\frac{\mathbf{g}\mathbf{w}}{1+\mathbf{g}\mathbf{w}},$$

где $\mathbf{w}$ — программа управляющего устройства. Будем искать ее в виде $\mathbf{w}=\mathbf{q}_0^+\theta/\mathbf{b}_0\mathbf{p}^+\pi$, где θ и π — пока не определенные полиномы. Подставляя это выражение в формулу $\mathbf{e}=\mathbf{x}/(1+\mathbf{gw})$, получим

$$\mathbf{e}=\frac{\mathbf{a}\mathbf{q}_0^-\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{p}^-\boldsymbol{\theta}+\mathbf{b}\mathbf{q}_0^-\boldsymbol{\pi}}.$$

Положим

$$\mathbf{p}^-\boldsymbol{\theta}+\mathbf{b}\mathbf{q}_0^-\boldsymbol{\pi}=\mathbf{c}^+, \tag{3.24}$$

где $\mathbf{c}^+$ — пока не определенный положительный полином. При этом

$$\mathbf{e}=\frac{\mathbf{a}\mathbf{q}_0^-\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{c}^+}. \tag{3.25}$$

Варьируя общее решение уравнения (3.24), получим $\delta\boldsymbol{\pi}=\mathbf{p}^-\delta\boldsymbol{\xi}$, где $\boldsymbol{\xi}$ — произвольный полином. Таким образом,

$$\delta\mathbf{e}=\frac{\mathbf{a}\mathbf{p}^-\mathbf{q}_0^-}{\mathbf{c}^+}\delta\boldsymbol{\xi}. \tag{3.26}$$

Подставляя (3.25) и (3.26) в (3.22), будем иметь

$$\delta J=\operatorname{ct}\,\widehat{\mathrm{ss}}\frac{\mathbf{a}\mathbf{q}_0^-\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{c}^+}\widehat{\left(\frac{\mathbf{a}\mathbf{p}^-\mathbf{q}_0^-}{\mathbf{c}^+}\right)}\delta\hat{\boldsymbol{\xi}}.$$

Положив

$$\mathbf{c}^+=\mathbf{a}^*\mathbf{s}^*\tilde{\mathbf{p}}^-\tilde{\mathbf{q}}_0^-, \tag{3.27}$$

после сокращений получим

$$\delta J=\operatorname{ct}\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{p}^-}\delta\hat{\boldsymbol{\xi}}.$$

Это выражение обращается в нуль, если $|\boldsymbol{\pi}|=|\mathbf{p}^-|-1$. С учетом (3.27) π-уравнение (3.24) принимает вид

$$\mathbf{p}^-\boldsymbol{\theta}+\mathbf{b}\mathbf{q}_0^-\boldsymbol{\pi}=\mathbf{a}^*\mathbf{s}^*\tilde{\mathbf{p}}^-\tilde{\mathbf{q}}_0^-.$$

Минимальное решение этого уравнения относительно $\boldsymbol{\pi}$ дает $|\boldsymbol{\pi}|=|\mathbf{p}^-|-1$ и обеспечивает выполнение условия оптимальности.

Изображение процесса установления

$$\mathbf{e}=\frac{\mathbf{a}^-\mathbf{q}_0^-\boldsymbol{\pi}}{\tilde{\mathbf{a}}^-\tilde{\mathbf{p}}^-\tilde{\mathbf{q}}_0^-\mathbf{s}^*}.$$

Этот процесс является устойчивым. Полином $\mathbf{s}^*$ в знаменателе является регуляризатором, обеспечивающим сглаживание процесса установления. Вычислим сигнал управления

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}^-\mathbf{q}_0\theta}{\tilde{\mathbf{a}}^-\mathbf{b}_0\mathbf{p}^*\tilde{\mathbf{q}}_0^-\mathbf{s}^*}.$$

Управление является устойчивым, если $\mathbf{b}_0^- = 1$. Легко видеть, что процессы $\mathbf{e}$, $\mathbf{u}$ и программа управляющего устройства в системе с обратной связью $\mathbf{w}$ остаются инвариантными при замене полинома $\mathbf{s}^*$ пропорциональным ему $(\mathbf{s}^*)' = k\mathbf{s}^*$.

Пример. Рассчитаем по критерию

$$J = \sum_{i=0}^{\infty} \left(e_i^2 + 4\Delta e_i^2\right)$$

оптимальное управление устойчивым объектом

$$\mathbf{g} = \frac{z(1-1{,}35z)}{(1+0{,}72z)(1-0{,}55z)},$$

который нужно перевести из одного состояния в другое. Желаемый закон движения

$$\mathbf{x} = \frac{1}{1-z}.$$

Имеем

$$\mathbf{p}^+ = 1;\quad \mathbf{p}^- = z(1-1{,}35z);\quad \tilde{\mathbf{p}}^- = z-1{,}35;$$

$$\mathbf{v} = 1;\quad \mathbf{q} = \mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_0^+ = (1+0{,}72z)(1-0{,}55z);$$

$$\mathbf{q}_0^- = 1;\quad \mathbf{a} = 1;\quad \mathbf{b} = \mathbf{b}_0 = 1-z.$$

Составляем функцию

$$\widehat{\mathbf{ss}} = 1 + 4(1-z)(1-z^{-1}) = \\ = -4z^{-1} + 9 - 4z = 6{,}6(1-0{,}61z)(1-0{,}61z^{-1}).$$

Отсюда $\mathbf{s}^* = 1 - 0{,}61z$ (согласно изложенному выше, коэффициент при $\mathbf{s}^*$ можно опустить). Составляем π-уравнение (3.20):

$$z(1-1{,}35z)\theta + (1-z)\pi = (1-0{,}61z)(z-1{,}35).$$

Ищем решение с $|\theta| = 0$, $|\pi| = 1$. Получаем алгебраическую систему

$$\pi_0 = -1{,}35,\quad \theta_0 - \pi_0 + \pi_1 = 1{,}824,$$

$$1{,}35\theta_0 + \pi_1 = 0{,}61.$$

Ее решение $\theta = 0{,}389$; $\pi = -1{,}35 + 0{,}085z$. Оптимальное управление имеет вид

$$\mathbf{u} = \frac{-0{,}286(1+0{,}72z)(1-0{,}55z)}{(1-z)(1-0{,}61z)(1-0{,}74z)}.$$

Процесс установления

$$\mathbf{e} = \frac{1-0{,}063z}{(1-0{,}61z)(1-0{,}74z)} = 1 + 1{,}287z + 1{,}29z^2 + 1{,}16z^3 + \\ + 0{,}99z^4 + 0{,}82z^5 + 0{,}675z^6 + 0{,}54z^7 + 0{,}43z^8 + 0{,}34z^9 + \\ + 0{,}26z^{10} + 0{,}2z^{11} + 0{,}15z^{12} + \ldots$$

Для сравнения рассчитаем систему без регуляризатора по критерию

$$J = \sum_{i=0}^{\infty} e_i^2.$$

Составляем π-уравнение (3.11)

$$z(1-1{,}35z)\theta + (1-z)\pi = z - 1{,}35.$$

Задаваясь $|\theta| = 0$, $|\pi| = 1$, получаем алгебраическую систему

$$\pi_0 = -1{,}35, \quad \theta_0 - \pi_0 + \pi_1 = 1, \quad 1{,}35\theta_0 + \pi_1 = 0.$$

Ее решение $\theta = 1$, $\pi = -1{,}35(1+z)$. Процесс установления имеет вид

$$\mathbf{e} = \frac{1+z}{1-0{,}74z} = 1 + 1{,}74z + 1{,}29z^2 + 0{,}955z^3 + 0{,}7z^4 + \\ + 0{,}52z^5 + 0{,}39z^6 + 0{,}29z^7 + 0{,}22z^8 + 0{,}16z^9 + \\ + 0{,}12z^{10} + 0{,}09z^{11} + 0{,}066z^{12} + \ldots$$

На рис. 11 изображены процессы установления в системе с регуляризатором и без него. Как видно из этого рисунка, введение

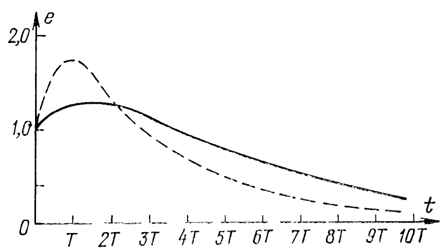

Рис. 11. Переходные процессы в системе:
— — — — без регуляризатора, ——— с регуляризатором.

регуляризатора сглаживает переходный процесс, но одновременно затягивает его.

4. Минимизация суммарной квадратичной ошибки при конечной длительности переходного процесса

Иногда кратчайшие переходные процессы неудовлетворительны тем, что имеют резкие выбросы, а процессы, оптимальные по критерию суммарной квадратичной ошибки, длятся слишком долго. В этих случаях целесообразно пользоваться комбинированным критерием минимума суммарной квадратичной ошибки при конечной (не минимальной) длительности переходного процесса.

Имея управляемый объект с передаточной функцией $\mathbf{g} = \mathbf{p}/\mathbf{q}$ и желаемый закон движения $\mathbf{x} = \mathbf{a}/\mathbf{b}$, где $\mathbf{v} = (\mathbf{b}, \mathbf{q})$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}_0\mathbf{v}$, $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0\mathbf{v}$, $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_0^+$, $\mathbf{q}_0^- = 1$, будем искать управление в виде $\mathbf{u} = \mathbf{q}_0\theta/\mathbf{b}_0$.

Найдем изображение переходного процесса:

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{g}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{a} - \mathbf{p}\theta}{\mathbf{b}}.$$

Составим π-уравнение:

$$\mathbf{p}\theta + \mathbf{b}\pi = \mathbf{a}. \qquad (3.28)$$

При этом переходный процесс является конечным: $\mathbf{e} = \pi$. Задавшись $|\mathbf{e}| = n \geqslant |\mathbf{p}|$, что соответствует неминимальному решению π-уравнения (3.28), мы получим переходный процесс длительности $t = (1 + |\mathbf{e}|)T = (n+1)T$. Неоднозначность выбора неминимального решения π-уравнения (3.28) можно устранить, минимизируя показатель суммарной квадратичной ошибки

$$J = \sum_{i=0}^{n} e_i^2 = \mathrm{ct}\, \mathbf{e}\hat{\mathbf{e}}.$$

Условие минимума этого показателя имеет вид

$$\delta J_1 = \mathrm{ct}\, \mathbf{e}\delta\hat{\mathbf{e}} = 0. \qquad (3.29)$$

Общее решение π-уравнения (3.28): $\theta = \theta_0 + \mathbf{b}\xi$, $\pi = \pi_0 - \mathbf{p}\xi$, где $\{\theta_0, \pi_0\}$ — минимальное решение, а ξ — произвольный полином. Соответствующий переходный процесс $\mathbf{e} = \pi_0 - \mathbf{p}\xi$. Его вариация $\delta\mathbf{e} = \mathbf{p}\delta\xi$. Поскольку $|\mathbf{e}| = |\mathbf{p}| + |\xi| = n$, то $\delta\hat{\mathbf{e}} = \tilde{\mathbf{p}}\delta\tilde{\xi}/z^n$. Подставляя это выражение в (3.29), получим

$$\delta J_1 = \mathrm{ct}\, \frac{\tilde{\mathbf{p}}\pi}{z^n}\, \delta\tilde{\xi}.$$

Для того чтобы это выражение равнялось нулю, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\frac{\tilde{\mathbf{p}}\pi}{z^n} = \frac{\theta_1}{z^n} + z\theta_2, \tag{3.30}$$

где полиномы θ_1 и θ_2 имеют степени $|\theta_1| = |\mathbf{p}| - 1$, $|\theta_2| = |\tilde{\mathbf{p}}| - 1$. Действительно, в этом случае $\mathrm{ct}(\theta_1\delta\tilde{\xi}/z^n) = 0$, поскольку функция под знаком ct является левой и правильной: $\mathrm{ind}(\theta_1\delta\tilde{\xi}/z^n) < 0$ и $\mathrm{ct}\, z\theta_2\delta\tilde{\xi} = 0$, поскольку $\mathrm{def}\, z\theta_2\delta\tilde{\xi} > 0$. Условие (3.30) эквивалентно следующему π-уравнению относительно трех неизвестных полиномов θ_1, θ_2 и π:

$$\theta_1 + z^{n+1}\theta_2 - \tilde{\mathbf{p}}\pi = 0. \tag{3.31}$$

Таким образом, задача сведена к совместному решению системы π-уравнений (3.28) и (3.31). Подставив общее решение уравнения (3.28) в (3.31), получим π-уравнение относительно полиномов ξ, θ_1 и θ_2:

$$\mathbf{p}\tilde{\mathbf{p}}\xi + \theta_1 + z^{n+1}\theta_2 = \tilde{\mathbf{p}}\pi_0.$$

Легко видеть, что это уравнение является сепарабельным, т. е. оно распадается на группы линейных алгебраических уравнений, определяющих полиномы ξ, θ_1 и θ_2 независимо. В частности, полином ξ определяется из системы алгебраических уравнений, полученных приравниванием коэффициентов при степенях $z^{|\mathbf{p}|}, z^{|\mathbf{p}|+1}, \ldots, z^n$. Введя обозначения $\varphi = \mathbf{p}\tilde{\mathbf{p}}$, $\psi = \tilde{\mathbf{p}}\pi_0$, получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов полинома ξ:

$$\begin{bmatrix} \varphi_{|\mathbf{p}|} & \varphi_{|\mathbf{p}|+1} & \cdots & \varphi_n \\ \varphi_{|\mathbf{p}|+1} & \varphi_{|\mathbf{p}|} & \cdots & \varphi_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_n & \varphi_{n-1} & \cdots & \varphi_{|\mathbf{p}|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \xi_{n-|\mathbf{p}|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{|\mathbf{p}|} \\ \psi_{|\mathbf{p}|+1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \psi_n \end{bmatrix}.$$

В том случае, когда управляемый объект содержит неустойчивые элементы, образующие полином $\mathbf{q}_0^-$, необходимо использовать систему управления с обратной связью. Выбирая программу управления $\mathbf{w} = \mathbf{q}_0^+\theta/\mathbf{b}_0\pi$, где θ и π — полиномы, удовлетворяющие π-уравнению

$$\mathbf{p}\theta + \mathbf{b}\mathbf{q}_0^-\pi = \mathbf{a}, \tag{3.32}$$

изображение переходного процесса сводим к виду

$$\mathbf{e} = \mathbf{q}_0^- \boldsymbol{\pi}. \tag{3.33}$$

Варьируя общее решение π-уравнения (3.32) $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}_0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\xi}$, получим $\delta\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p}\delta\boldsymbol{\xi}$. Отсюда

$$\delta\mathbf{e} = \mathbf{p}\mathbf{q}_0^- \delta\boldsymbol{\xi}. \tag{3.34}$$

Зададимся числом $n = |\mathbf{e}| \geqslant |\mathbf{p}| + |\mathbf{q}_0^-|$, определяющим желательную длительность переходного процесса $t = (1 + |\mathbf{e}|)T = (n + 1)T$. Инвертируя (3.34), имеем

$$\delta\hat{\mathbf{e}} = \frac{\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{q}}_0^- \delta\tilde{\boldsymbol{\xi}}}{z^n}. \tag{3.35}$$

Подставив (3.33) и (3.35) в (3.29), получим

$$\delta J_1 = \operatorname{ct} \frac{\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{q}}_0^- \mathbf{q}_0^- \boldsymbol{\pi}}{z^n} \delta\tilde{\boldsymbol{\xi}}.$$

Для того чтобы это выражение равнялось нулю, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\frac{\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{q}}_0^- \mathbf{q}_0^- \boldsymbol{\pi}}{z^n} = \frac{\theta_1}{z^n} + z\theta_2, \tag{3.36}$$

где полиномы θ_1 и θ_2 имеют степени $|\theta_1| = |\mathbf{p}| + |\mathbf{q}_0^-| - 1$, $|\theta_2| = |\tilde{\mathbf{p}}| + |\tilde{\mathbf{q}}_0^-| - 1$. Действительно, в этом случае

$$\operatorname{ind} \frac{\theta_1 \delta\tilde{\boldsymbol{\xi}}}{z^n} = |\theta_1| + |\boldsymbol{\xi}| - n < 0$$

и, следовательно, $\operatorname{ct}(\theta_1\delta\tilde{\boldsymbol{\xi}}/z^n) = 0$. Кроме того, $\operatorname{ct} z\theta_2\delta\tilde{\boldsymbol{\xi}} = 0$, поскольку $\operatorname{def} z\theta_2\delta\tilde{\boldsymbol{\xi}} > 0$. Условие (3.36) соответствует следующему π-уравнению относительно неизвестных полиномов θ_1, θ_2 и $\boldsymbol{\pi}$:

$$\theta_1 + z^{n+1}\theta_2 - \tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{q}}_0^- \mathbf{q}_0^- \boldsymbol{\pi} = 0. \tag{3.37}$$

Таким образом, задача сведена к совместному решению системы π-уравнений (3.32) и (3.37). Подставив общее решение уравнения (3.32) в (3.37), получим π-уравнение относительно полиномов $\boldsymbol{\xi}$, θ_1 и θ_2:

$$\mathbf{p}\mathbf{q}_0^- \tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{q}}_0^- \boldsymbol{\xi} + \theta_1 + z^{n+1}\theta_2 = \tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{q}}_0^- \mathbf{q}_0^- \boldsymbol{\pi}_0.$$

Это уравнение также является сепарабельным. Обозначив $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{p}\mathbf{q}_0^- \tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{q}}_0^-$, $\boldsymbol{\psi} = \tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{q}}_0^- \mathbf{q}_0^- \boldsymbol{\pi}_0$, $m = |\mathbf{p}| + |\mathbf{q}_0^-|$ и приравнивая коэффициенты при z^m, z^{m+1}, ..., z^n, получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{bmatrix} \varphi_m & \varphi_{m+1} & \cdots & \varphi_n \\ \varphi_{m+1} & \varphi_m & \cdots & \varphi_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_n & \varphi_{n-1} & \cdots & \varphi_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \cdots \\ \xi_{n-m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_m \\ \psi_{m+1} \\ \cdots \\ \psi_n \end{bmatrix}.$$

Решая эту систему, определяем полином $\boldsymbol{\xi}$, а по нему полиномы $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\pi}$.

Пример 1. Найдем управление объектом

$$\mathbf{g} = \frac{z(1-1{,}2z)}{(1-z)(1-0{,}2z)}$$

при воздействии $\mathbf{x} = 1/(1-2z)$, минимизирующее суммарную квадратичную ошибку при конечной длительности $t = (1+|\mathbf{e}|)T = 4T$ переходного процесса. Имеем $\mathbf{v} = 1$, $\mathbf{b}_0 = 1-2z$, $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_0^+ = (1-z)(1-0{,}2z)$, $\mathbf{q}_0^- = 1$. Будем искать управление в виде

$$\mathbf{u} = \frac{(1-z)(1-0{,}2z)}{1-2z}\,\boldsymbol{\theta},$$

где $\boldsymbol{\theta}$ — полином, удовлетворяющий π-уравнению (3.28):

$$z(1-1{,}2z)\boldsymbol{\theta} + (1-2z)\boldsymbol{\pi} = 1.$$

Найдем его минимальное решение со степенями $|\boldsymbol{\theta}_0| = 0$, $|\boldsymbol{\pi}_0| = 1$. Развертывая это π-уравнение в алгебраическую систему, получим

$$\pi_0 = 1, \quad \theta_0 - 2\pi_0 + \pi_1 = 0, \quad -1{,}2\theta_0 - 2\pi_1 = 0.$$

Ее решение $\theta_0 = 5$, $\boldsymbol{\pi}_0 = 1-3z$ дает негладкий переходный процесс $\mathbf{e} = 1-3z$ с суммарной квадратичной ошибкой $J = 10$.

Будем искать неминимальное решение со степенью $|\boldsymbol{\pi}| = 3$, обеспечивающее уменьшение суммарной квадратичной ошибки. Составим полиномы $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\psi}$:

$$\boldsymbol{\varphi} = -1{,}2z + 2{,}44z^2 - 1{,}2z^3, \quad \boldsymbol{\psi} = -1{,}2 + 4{,}6z - 3z^2.$$

Поскольку $|\boldsymbol{\xi}| = |\boldsymbol{\pi}| - |\mathbf{p}| = 1$, система уравнений относительно коэффициентов полинома $\boldsymbol{\xi}$ имеет вид

$$2{,}44\xi_0 - 1{,}2\xi_1 = -3, \quad -1{,}2\xi_0 + 2{,}44\xi_1 = 0.$$

Решая ее, находим $\boldsymbol{\xi} = -1{,}62 - 0{,}8z$. Неминимальное решение, соответствующее этому полиному $\boldsymbol{\xi}$, имеет вид

$$\boldsymbol{\theta} = 3{,}38 + 2{,}44z + 1{,}6z^2, \quad \boldsymbol{\pi} = 1 - 1{,}38z - 1{,}14z^2 - 0{,}96z^3.$$

Ему соответствует переходный процесс

$$\mathbf{e} = 1 - 1{,}38z - 1{,}14z^2 - 0{,}96z^3.$$

Этот процесс является значительно более гладким и дает суммарную квадратичную ошибку $J = 5{,}12$. Управление, соответствующее этому переходному процессу

$$\mathbf{u} = \frac{(1-z)(1-0{,}2z)(3{,}38+2{,}44z+1{,}6z^2)}{1-2z}.$$

Поскольку желаемый процесс движения системы является неустойчивым, а объект — устойчивым, то и управление является неустойчивым процессом.

Пример 2. Управляемый объект имеет передаточную функцию

$$\mathbf{g} = \frac{z(1-1{,}6z)}{(1-z)(1-2{,}7z)}$$

и является неустойчивым. Входной сигнал $\mathbf{x} = 1/(1-z)$. Найдем программу управления в системе с обратной связью, обеспечивающую получение конечного переходного процесса. Имеем $\mathbf{v} = 1-z$, $\mathbf{b}_0 = 1$, $\mathbf{q}_0^+ = 1$, $\mathbf{q}_0^- = 1-2{,}7z$. Будем искать $\mathbf{w}$ в виде $\mathbf{w} = \boldsymbol{\theta}/\boldsymbol{\pi}$, где $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\pi}$ — полиномы, удовлетворяющие π-уравнению (3.32):

$$z(1-1{,}6z)\boldsymbol{\theta} + (1-z)(1-2{,}7z)\boldsymbol{\pi} = 1.$$

Выбрав степени неизвестных полиномов $|\boldsymbol{\theta}_0| = 1$, $|\boldsymbol{\pi}_0| = 1$, развертываем π-уравнение в алгебраическую систему:

$$\pi_0 = 1, \quad \theta_0 + \pi_1 = 3{,}7,$$

$$-1{,}6\theta_0 + \theta_1 - 3{,}7\pi_1 = -2{,}7, \quad -1{,}6\theta_1 + 2{,}7\pi_1 = 0.$$

Решая ее, получим $\theta_0 = 11{,}8 - 13{,}7z$, $\pi_0 = 1 - 8{,}1z$. Переходный процесс, соответствующий этому минимальному решению, $\mathbf{e} = 1 - 10{,}8z + 22z^2$ имеет резкие выбросы и дает суммарную квадратичную ошибку $J = 602$. Длительность этого переходного процесса равна $3T$.

Удлиним процесс еще на два такта и за счет образовавшейся свободы будем минимизировать суммарную квадратичную ошибку. Имеем

$$\boldsymbol{\varphi} = 4{,}32z - 22{,}9z^2 + 38{,}3z^3 - 22{,}9z^4 + 4{,}32z^5,$$

$$\boldsymbol{\psi} = 4{,}32 - 51z + 142z^2 - 105z^3 + 22z^4.$$

Далее,

$$|\mathbf{e}| = |\mathbf{q}_0^-| + |\boldsymbol{\pi}| = |\mathbf{q}_0^-| + |\mathbf{p}| + |\boldsymbol{\xi}| = 4,$$

откуда $|\boldsymbol{\xi}| = 1$.

Составляем систему уравнений относительно коэффициентов полинома $\boldsymbol{\xi}$:

$$\begin{pmatrix} 38{,}3 & -22{,}9 \\ -22{,}9 & 38{,}3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -105 \\ 22 \end{pmatrix}.$$

Решая эту систему, получим $\boldsymbol{\xi} = -3{,}4 - 1{,}52z$. Соответствующее неминимальное решение имеет вид

$$\boldsymbol{\theta} = 8{,}4 - 2{,}6z - 3{,}6z^2 - 4{,}1z^3, \quad \boldsymbol{\pi} = 1 - 4{,}7z - 4z^2 - 2{,}44z^3,$$

а переходный процесс равен

$$\mathbf{e} = 1 - 7{,}4z + 8{,}6z^2 + 8{,}3z^3 + 6{,}6z^4.$$

Ему соответствует суммарная квадратичная ошибка $J = 240$. Таким образом, длительность переходного процесса увеличилась в 1,66 раза, а суммарная квадратичная ошибка уменьшилась более чем в 2,5 раза. Окончательно управляющая программа имеет вид

$$\mathbf{w} = \frac{8{,}4 - 2{,}6z - 3{,}6z^2 - 4{,}16z^3}{1 - 4{,}7z - 4z^2 - 2{,}44z^3}.$$

Она осуществляет следующее линейное преобразование числовых последовательностей:

$$u_i - 4{,}7u_{i-1} - 4u_{i-2} - 2{,}44u_{i-3} = 8{,}4e_i - 2{,}6e_i - 3{,}6e_{i-2} - 4{,}1e_{i-3}.$$

5. Оптимизация по комбинированному критерию

В некоторых случаях представляет интерес решение задачи оптимизации системы управления по критерию

$$J = \sum_{i=0}^{\infty} e_i^2 + \lambda \sum_{i=0}^{\infty} u_i^2,$$

где $\{e_i\}$ — ошибка управления, а $\{u_i\}$ — управляющее воздействие. Считая процессы $\mathbf{e}$ и $\mathbf{u}$ устойчивыми, этот функционал можно записать в виде $J = \mathrm{ct}(\mathbf{e}\widehat{\mathbf{e}} + \lambda\mathbf{u}\widehat{\mathbf{u}})$. Входное воздействие является детерминированным и имеет изображение $\mathbf{x} = \mathbf{a}/\mathbf{b}$, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — полиномы от z.

Обозначим $\mathbf{v} = (\mathbf{b}, \mathbf{q})$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}_0\mathbf{v}$, $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0\mathbf{v}$. Условие минимума J имеет вид

$$\delta J = \mathrm{ct}(\mathbf{e}\delta\widehat{\mathbf{e}} + \lambda\mathbf{u}\delta\widehat{\mathbf{u}}) = 0.$$

Учитывая, что

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{y} = (1 - \mathbf{h})\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{g}} = \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{g}}\mathbf{x},$$

где $\mathbf{h}$ — передаточная функция системы с обратной связью

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{g}\mathbf{w}}{1 + \mathbf{g}\mathbf{w}}, \tag{3.38}$$

величину δJ можно записать в виде

$$\delta J = \mathrm{ct}\left[(\mathbf{h} - 1)\mathbf{x}\widehat{\mathbf{x}}\delta\widehat{\mathbf{h}} + \lambda\frac{\mathbf{h}}{\mathbf{g}\widehat{\mathbf{g}}}\mathbf{x}\widehat{\mathbf{x}}\delta\widehat{\mathbf{h}}\right],$$

или

$$\delta J = \mathrm{ct}\left[\mathbf{h}\left(1 + \frac{\lambda}{\mathbf{g}\widehat{\mathbf{g}}}\right) - 1\right]\mathbf{x}\widehat{\mathbf{x}}\delta\widehat{\mathbf{h}}. \tag{3.39}$$

Считая $\mathbf{g}$ правильной рациональной функцией $\mathrm{ind}\,\mathbf{g} =$

$= |\mathbf{p}| - |\mathbf{q}| \leqslant 0$, $\nu = -\operatorname{ind}\mathbf{g} \geqslant 0$, рассмотрим выражение

$$1 + \frac{\lambda}{\mathbf{g}\hat{\mathbf{g}}} = \frac{\mathbf{p}\hat{\mathbf{p}} + \lambda\mathbf{q}\hat{\mathbf{q}}}{\mathbf{p}\hat{\mathbf{p}}} = \frac{z^\nu\mathbf{p}\tilde{\mathbf{p}} + \lambda\mathbf{q}\tilde{\mathbf{q}}}{z^\nu\mathbf{p}\tilde{\mathbf{p}}}.$$

Обозначим через $\mathbf{r}$ полином $\mathbf{r} = z^\nu\mathbf{p}\tilde{\mathbf{p}} + \lambda\mathbf{q}\tilde{\mathbf{q}}$ и произведем его факторизацию: $\mathbf{r} = \mathbf{r}^+\mathbf{r}^-$. Легко видеть, что этот полином является симметричным $\mathbf{r} = \tilde{\mathbf{r}}$, и потому $\mathbf{r}^+ = \tilde{\mathbf{r}}^-$, $\mathbf{r}^- = \tilde{\mathbf{r}}^+$, $|\mathbf{r}^+| = |\mathbf{r}^-| = |\mathbf{q}|$. Для физически реального объекта дефект его передаточной функции $\operatorname{def}\mathbf{g} \geqslant 0$, и следовательно, $\operatorname{def}\mathbf{q} = 0$, $\operatorname{def}\mathbf{r} = 0$.

Покажем, что программа оптимального управляющего устройства имеет вид

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{q}^+\theta}{\mathbf{b}_0^-\pi_1}, \tag{3.40}$$

где θ и π_1 — полиномы, входящие в решение системы π-уравнений

$$\mathbf{p}\theta + \mathbf{b}^-\mathbf{q}_0^-\pi_1 = \mathbf{a}^*\mathbf{r}^+\tilde{\mathbf{q}}_0^-, \tag{3.41}$$

$$\mathbf{r}^-\theta + \mathbf{b}^+\pi_2 = z^\nu\mathbf{a}^*\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{q}}_0^-, \tag{3.42}$$

минимальное относительно π_2. Подставляя (3.40) в (3.38) и учитывая π-уравнение (3.41), получим

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{p}\theta}{\mathbf{a}^*\mathbf{r}^+\tilde{\mathbf{q}}_0^-}. \tag{3.43}$$

Минимальное относительно π_2 решение системы π-уравнений (3.41) — (3.42) содержит полиномы следующих степеней:

$$|\theta^0| = |\mathbf{b}| + |\mathbf{q}_0^-| - 1,$$

$$|\pi_2^0| = |\mathbf{b}^-| + |\mathbf{r}^-| + |\mathbf{q}_0^-| - 1.$$

Общее решение этой системы относительно θ имеет вид $\theta = \theta^0 + \mathbf{b}\mathbf{q}_0^-\xi$, где ξ — произвольный полином. Варьируя θ, получим $\delta\theta = \mathbf{b}\mathbf{q}_0^-\delta\xi$ и, следовательно,

$$\delta\mathbf{h} = \frac{\mathbf{b}\mathbf{p}\mathbf{q}_0^-}{\mathbf{a}^*\mathbf{r}^+\tilde{\mathbf{q}}_0^-}\delta\xi. \tag{3.44}$$

Подставляя (3.43) и (3.44) в (3.39), после сокращений получим

$$\delta J = \operatorname{ct}\frac{\mathbf{r}^-\theta - z^\nu\mathbf{a}^*\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{q}}_0^-}{\mathbf{b}\mathbf{q}_0^-\tilde{\mathbf{r}}^+}\delta\hat{\xi}. \tag{3.45}$$

С учетом π-уравнения (3.42) получаем

$$\delta J = \mathrm{ct}\,\frac{\pi_2}{\mathbf{b}^-\tilde{\mathbf{q}}_0^-\tilde{\mathbf{r}}^+}\,\delta\hat{\xi}.$$

Легко видеть, что функция под знаком ct является левой и правильной, а значит, условие минимума функционала J выполнено.

Вычислим изображения сигналов $\mathbf{e}$ и $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{w}} = \frac{\mathbf{a}^-\mathbf{q}_0^-\pi_1}{\tilde{\mathbf{a}}^-\tilde{\mathbf{q}}_0^-\mathbf{r}^+}, \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{hx}}{\mathbf{g}} = \frac{\mathbf{a}^-\mathbf{q}_0\theta}{\tilde{\mathbf{a}}^-\mathbf{b}_0\tilde{\mathbf{q}}_0^-\mathbf{r}^+}.$$

Мы видим, что сигнал ошибки $\mathbf{e}$ является всегда устойчивым, а сигнал управления $\mathbf{u}$ является устойчивым только при $\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}_0^+$, $\mathbf{b}_0^- = 1$. Это условие ограничивает допустимый класс входных сигналов.

Докажем инвариантность программы управления (3.40) при различных факторизациях полиномов, от которых она зависит. Прежде всего заметим, что уравнение (3.41) можно записать также в виде

$$\mathbf{p}\theta + \mathbf{b}_0^-\mathbf{q}^-\pi_1 = \mathbf{a}^*\mathbf{r}^+\tilde{\mathbf{q}}_0^-.$$

Проверим инвариантность программы $\mathbf{w}$ при различных факторизациях полинома $\mathbf{b}_0$: $(\mathbf{b}_0^-)' = k\mathbf{b}_0^-$. Составляя уравнение

$$\mathbf{p}\theta' + k\mathbf{b}_0^-\mathbf{q}^-\pi_1' = \mathbf{a}^*\mathbf{r}^+\tilde{\mathbf{q}}_0^-,$$

получим $\theta' = \theta$, $\pi_1' = \frac{1}{k}\pi_1$. Следовательно,

$$\mathbf{w}' = \frac{\mathbf{q}^+\theta'}{(\mathbf{b}_0^-)'\,\pi_1'} = \frac{\mathbf{q}^+\theta}{\mathbf{b}_0^-\pi_1} = \mathbf{w},$$

и программа остается инвариантной. Далее, проверим инвариантность программы при различных факторизациях полинома $\mathbf{q}$. Имеем $(\mathbf{q}^+)' = k\mathbf{q}^+, (\mathbf{q}^-)' = \frac{1}{k}\mathbf{q}^-$, $(\tilde{\mathbf{q}}_0^-) = \frac{1}{k}\tilde{\mathbf{q}}_0^-$. Составляем систему уравнений:

$$\mathbf{p}\theta' + \frac{1}{k}\,\mathbf{b}_0^-\mathbf{q}^-\pi_1' = \frac{1}{k}\,\mathbf{a}^*\mathbf{r}^+\tilde{\mathbf{q}}_0^-,$$

$$\mathbf{r}^-\theta' + \mathbf{b}^+\pi_2' = \frac{1}{k}\,z^{\nu}\mathbf{a}^*\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{q}}_0^-.$$

Ее решение $\theta' = \frac{1}{k}\theta$, $\pi_1' = \pi_1$, $\pi_2' = \frac{1}{k}\pi_2$. Следовательно,

$$\mathbf{w}' = \frac{(\mathbf{q}^+)'\,\theta'}{\mathbf{b}_0^-\pi_0'} = \frac{\mathbf{q}^+\theta}{\mathbf{b}_0^-\pi_1} = \mathbf{w}.$$

Посмотрим, что происходит при различных факторизациях полинома $\mathbf{r}$. Имеем $(\mathbf{r}^+)' = k\mathbf{r}^+$, $(\mathbf{r}^-)' = \frac{1}{k}\mathbf{r}^-$. Система π-уравнений принимает вид

$$\mathbf{p}\theta' + \mathbf{b}_0^-\mathbf{q}^-\pi_1' = k\mathbf{a}^*\mathbf{r}^+\widetilde{\mathbf{q}}_0^-,$$
$$\frac{1}{k}\mathbf{r}^-\theta' + \mathbf{b}^+\pi_2' = z^\nu\mathbf{a}^*\widetilde{\mathbf{p}}\widetilde{\mathbf{q}}_0^-.$$

Ее решение $\theta' = k\theta$, $\pi_1' = k\pi_1$, $\pi_2' = \pi_2$. Программа управления $\mathbf{w}$, определяемая отношением полиномов θ/π_1, остается инвариантной.

Итак, мы доказали, что факторизацию всех полиномов, входящих в эту задачу, можно производить с точностью до произвольного числового множителя.

Для частного случая этой задачи: $\mathbf{v} = (\mathbf{b},\ \mathbf{q}) = \mathbf{b} = \mathbf{q}$ $(\mathbf{b}_0 = \mathbf{q}_0 = 1)$, П. В. Надеждин [60] получил более простое решение: $\mathbf{w} = \theta/\pi$, сводящееся к одному π-уравнению

$$\mathbf{p}\theta + \mathbf{q}\pi = \mathbf{a}^*\mathbf{r}^+ \tag{3.46}$$

вместо двух уравнений (3.41), (3.42). Докажем правильность этого решения. Формула (3.45) в этом случае принимает вид

$$\delta J = \mathrm{ct}\left(\frac{\theta}{\mathbf{q}} - \frac{z^\nu\mathbf{a}^*\widetilde{\mathbf{p}}}{\mathbf{q}\mathbf{r}^-}\right)\delta\widehat{\xi}. \tag{3.47}$$

Учитывая формулу $\mathbf{r} = z^\nu\mathbf{p}\widetilde{\mathbf{p}} + \lambda\mathbf{q}\widetilde{\mathbf{q}}$, преобразуем выражение

$$\frac{z^\nu\mathbf{a}^*\widetilde{\mathbf{p}}}{\mathbf{q}\mathbf{r}^-} = \frac{z^\nu\mathbf{a}^*\mathbf{p}\widetilde{\mathbf{p}}}{\mathbf{p}\mathbf{q}\mathbf{r}^-} = \frac{\mathbf{a}^*(\mathbf{r}-\lambda\mathbf{q}\widetilde{\mathbf{q}})}{\mathbf{p}\mathbf{q}\mathbf{r}^-} = \frac{\mathbf{a}^*\mathbf{r}^+}{\mathbf{p}\mathbf{q}} - \frac{\lambda\mathbf{a}^*\widetilde{\mathbf{q}}}{\mathbf{p}\mathbf{r}^-}.$$

Выражение (3.47) примет вид

$$\delta J = \mathrm{ct}\left(\frac{\theta}{\mathbf{q}} - \frac{\mathbf{a}^*\mathbf{r}^+}{\mathbf{p}\mathbf{q}} + \frac{\lambda\mathbf{a}^*\widetilde{\mathbf{q}}}{\mathbf{p}\mathbf{r}^-}\right)\delta\widehat{\xi}.$$

С учетом π-уравнения (3.46) получаем

$$\delta J = \mathrm{ct}\left(\frac{\lambda \mathbf{a}^*\tilde{\mathbf{q}}}{\mathbf{p}\mathbf{r}^-} - \frac{\pi}{\mathbf{p}}\right)\delta\hat{\xi}.$$

Для того чтобы обратить это выражение в нуль, введем дополнительное π-уравнение:

$$\mathbf{r}^-\pi + \mathbf{p}\theta_1 = \lambda\mathbf{a}^*\tilde{\mathbf{q}}. \tag{3.48}$$

При этом

$$\delta J = \mathrm{ct}\,\frac{\theta_1}{\mathbf{r}^-}\,\delta\hat{\xi}.$$

Это выражение обращается в нуль, если взять минимальное решение (3.48) относительно θ_1 степени $|\theta_1| < |\mathbf{r}^-|$. Таким образом, мы получили систему из двух π-уравнений (3.46), (3.48) относительно трех неизвестных полиномов θ, θ_1 и π. Легко видеть, что это исключительная система, и при ее решении методом исключения π мы придем к π-уравнению

$$\mathbf{r}^-\theta - \mathbf{q}\theta_1 = z^\nu\mathbf{a}^*\tilde{\mathbf{p}},$$

которое соответствует уравнению (3.42) при $\pi_2 = -\mathbf{q}^-\theta_1$. В исключительной системе типа (1.22) дополнительное уравнение (3.48) можно, как известно, отбросить, и, таким образом, задача сводится к одному π-уравнению (3.46).

Решение П. В. Надеждина представляет собой «приятное исключение», которое не распространяется на более сложные случаи. Например, в случае $(\mathbf{b}, \mathbf{q}) = 1$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 = \mathbf{b}^+$, $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$ из общего решения (3.40)—(3.42) получаем

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{q}^+\theta}{\pi_1},$$

где

$$\mathbf{p}\theta + \mathbf{q}^-\pi_1 = \mathbf{a}^*\mathbf{r}^+\tilde{\mathbf{q}}^-,$$

$$\mathbf{r}^-\theta + \mathbf{b}\pi_2 = z^\nu\mathbf{a}^*\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{q}}^-.$$

Эти два π-уравнения уже не могут быть сведены к одному π-уравнению типа (3.46). Однако попытаемся это сделать. Применим метод исключения θ. Умножая первое уравнение на $\mathbf{r}^-$, второе на $\mathbf{p}$ и вычитая из первого уравнения второе, получим

$$\mathbf{r}^{-}\mathbf{q}^{-}\pi_1 - \mathbf{b}\mathbf{p}\pi_2 = \mathbf{a}^*\tilde{\mathbf{q}}^{-}(\mathbf{r} - z^{\nu}\mathbf{p}\tilde{\mathbf{p}}) = \lambda\mathbf{a}^*\tilde{\mathbf{q}}^{-}\mathbf{q}\tilde{\mathbf{q}}.$$

Отсюда следует, что $\pi_2 = \mathbf{q}^{-}\pi_0$. Таким образом, мы имеем три уравнения

$$(1)\qquad \mathbf{p}\theta + \mathbf{q}^{-}\pi_1 = \mathbf{a}^*\mathbf{r}^{+}\tilde{\mathbf{q}}^{-},$$

$$(2)\qquad \mathbf{r}^{-}\theta + \mathbf{b}\mathbf{q}^{-}\pi_0 = z^{\nu}\mathbf{a}^*\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{q}}^{-},$$

$$(3)\qquad \mathbf{r}^{-}\pi_1 - \mathbf{b}\mathbf{p}\pi_0 = \lambda\mathbf{a}^*\mathbf{q}^*\tilde{\mathbf{q}}.$$

Легко видеть, что уравнения (1) и (2) образуют исключительную и избыточную систему, поэтому можно искать θ только из уравнения (2). Но поскольку для вычисления управляющей программы $\mathbf{w}$ нам нужен полином π_1, то следует, найдя θ из уравнения (2), подставить его в уравнение (1), чтобы получить π_1. Уравнения (1) и (3) точно так же образуют ислючительную и избыточную систему, поэтому полином π_1 можно искать только из уравнения (3). Найдя π_1 из уравнения (3), можно подставить его в уравнение (1) и получить необходимый для вычисления управляющей программы $\mathbf{w}$ полином θ. Уравнения (2) и (3) вместе также образуют избыточную систему, поэтому можно ограничиться любым из них.

Пример. Рассмотрим задачу об управлении неустойчивым объектом с передаточной функцией

$$\mathbf{g} = \frac{2z}{1 + 1{,}25z}$$

по критерию $J = \mathrm{ct}\,(\widehat{\mathbf{e}\mathbf{e}} + 0{,}8\widehat{\mathbf{u}\mathbf{u}})$ при входном сигнале, имеющем изображение

$$\mathbf{x} = \frac{3{,}8 - 0{,}43\,z}{(1 - 0{,}6\,z)\,(1 + 1{,}25\,z)}.$$

Имеем

$$\mathbf{p}^{+} = 1,\quad \mathbf{p}^{-} = 2z,\quad \mathbf{v} = 1 + 1{,}25z,$$

$$\mathbf{q}_0 = 1,\quad \mathbf{b}_0^{+} = 1 - 0{,}6\,z,\quad \mathbf{b}_0^{-} = 1,$$

$$\mathbf{a}^{+} = 3{,}8 - 0{,}43z,\quad \mathbf{a}^{-} = 1,\quad \lambda = 0{,}8.$$

Составляем полином $\mathbf{r}$

$$\mathbf{r} = 1 + 6{,}05z + z^2$$

и производим его факторизацию: $\mathbf{r}^{+} = 1 + 0{,}17z$, $\mathbf{r}^{-} = 1 + 5{,}87z$. Система π-уравнений (3.41)—(3.42) имеет вид

$$2z\theta + (1 + 1{,}25z)\pi_1 = (3{,}8 - 0{,}43z)\,(1 + 0{,}17z),$$

$$(1 + 5{,}87z)\,\theta + (1 - 0{,}6z)\pi_2 = 2(3{,}8 - 0{,}43z).$$

Будем решать каждое уравнение порознь. Выбирая $|\theta| = 0$ $|\pi_1| = 1$ *), развертываем первое уравнение в алгебраическую систему:

$$\pi_0 = 3{,}8, \quad 2\theta_0 + 1{,}25\pi_0 + \pi_1 = -0{,}26, \quad 1{,}25\pi_1 = -0{,}073.$$

Решая ее, получим $\theta_0 = -2{,}5$, $\pi_1^0 = 3{,}8 - 0{,}06\,z$. Таким образом, общее решение первого π-уравнения имеет вид

$$\theta = -2{,}5 + (1 + 1{,}25z)\xi, \quad \pi_1 = 3{,}8 - 0{,}06z - 2z\xi.$$

Выбирая $|\theta| = 0$, $|\pi_2| = 0$, развертываем второе уравнение в алгебраическую систему:

$$\theta_0 + \pi_0 = 7{,}6, \quad 5{,}87\theta_0 - 0{,}6\pi_0 = -0{,}86.$$

Ее решение $\theta_0 = 0{,}58$, $\pi_2^0 = 7$.

Общее решение второго π-уравнения имеет вид

$$\theta = 0{,}58 - (1 - 0{,}6z)\eta, \qquad \pi_2 = 7 + (1 + 5{,}87z)\eta.$$

Приравнивая θ из обоих π-уравнений, получаем π-уравнение относительно ξ и η:

$$(1 + 1{,}25z)\xi + (1 - 0{,}6z)\eta = 3{,}08.$$

Выбирая $|\xi| = 0$, $|\eta| = 0$, получаем алгебраическую систему

$$\xi_0 + \eta_0 = 3{,}08, \quad 1{,}25\xi_0 - 0{,}6\eta_0 = 0.$$

Ее решение $\xi = 1$, $\eta = 2{,}08$.

Используя полученные значения ξ и η, находим минимальное решение системы двух π-уравнений: $\theta = -1{,}48 + 1{,}24z$, $\pi_1 = 3{,}8 - 2{,}06z$, $\pi_2 = 9{,}1 + 12{,}2z$. По формуле (3.40) находим программу управления

$$\mathbf{w} = \frac{-0{,}39 + 0{,}33\,z}{1 - 0{,}54\,z}.$$

Ей соответствует оптимальный процесс установления, имеющий изображение

$$\mathbf{e} = \frac{3{,}8 - 2{,}06\,z}{1 + 0{,}17\,z}.$$

6. Экстраполяция детерминированных сигналов

Любой детерминированный сигнал, имеющий изображение $\mathbf{x} = \mathbf{a}/\mathbf{b}$, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — полиномы от z, может быть проэкстраполирован по конечному числу замеров $n = |\mathbf{b}|$, если известен полином $\mathbf{b}$. Например, полином $(\mu - 1)$-й

---

*) Первое π-уравнение является неправильным и имеет два минимальных решения, но результат решения системы двух π-уравнений не зависит от того, возьмем ли мы в качестве его частного решения минимальное решение относительно θ или относительно π_1.

степени от t с неизвестными коэффициентами a_0, a_1, ..., $a_{\mu-1}$

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\mu-1} a_j t^j,$$

имеющий дискретное изображение $\mathbf{x} = \mathbf{a}/(1-z)^{\mu}$, где $\mathbf{a}$ — неизвестный полином от z, точно экстраполируется по μ замерам.

Будем искать экстраполирующую формулу в виде $\mathbf{y} = \boldsymbol{\theta}\mathbf{x}$, где $\boldsymbol{\theta}$ — пока не определенный полином. Оператор экстраполяции $\boldsymbol{\Lambda} = z^{-\lambda}$, $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$, является физически нереализуемым. Ошибка экстраполяции имеет изображение

$$\mathbf{e} = (\boldsymbol{\Lambda} - \boldsymbol{\theta})\,\mathbf{x} = \frac{1 - z^{\lambda}\boldsymbol{\theta}}{z^{\lambda}} \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}.$$

Составим π-уравнение:

$$z^{\lambda}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{b}\boldsymbol{\pi} = 1. \qquad (3.49)$$

Тогда изображение ошибки примет вид $\mathbf{e} = \mathbf{a}\boldsymbol{\pi}/z^{\lambda}$. Поскольку процесс $\mathbf{x}$ начинается в момент $i = 0$, то реальный смысл имеет только правая часть этой функции $\mathbf{e}_+$, степень которой $|\mathbf{e}_+| = |\mathbf{a}| + |\boldsymbol{\pi}| - \lambda$. Это значит, что ошибка исчезает за время $t_{\min} = (1 + |\mathbf{e}_+|)\,T$. Минимальное относительно $\boldsymbol{\pi}$ решение π-уравнения (3.49) имеет степень $|\boldsymbol{\pi}| = \lambda - 1$. Следовательно, время установления оптимального экстраполятора $t_{\min} = |\mathbf{a}|\,T$. Спустя $|\mathbf{a}|$ тактов экстраполятор дает точные предсказанные значения сигнала $\mathbf{x}$.

Если изображение процесса $\mathbf{x}$ известно точно, то можно построить безошибочную экстраполяционную формулу $\mathbf{y} = \boldsymbol{\theta}/\mathbf{b}$, такую, что $\mathbf{e}_+ = (z^{-\lambda}\mathbf{x} - \mathbf{y})_+ = 0$. Для этого достаточно искать $\boldsymbol{\theta}$ из π-уравнения $z^{\lambda}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{b}\boldsymbol{\pi} = \mathbf{a}$. Минимальное относительно $\boldsymbol{\pi}$ решение этого уравнения обеспечивает

$$\mathbf{e}_+ = \left(z^{-\lambda}\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} - \frac{\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{b}}\right)_+ = \left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{z^{\lambda}}\right)_+ = 0.$$

Процесс $\mathbf{y}$ можно представить себе как результат прохождения сигнала $\mathbf{x}$ через экстраполятор $\mathbf{w} = \boldsymbol{\theta}/\mathbf{a}$.

Пример. Найдем оптимальный в смысле минимума времени установления экстраполятор на 5 тактов для процесса, имеющего вид полинома от t третьей степени с неизвестными коэффициентами:

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3.$$

Имеем $\lambda = 5$, $\mu = 4$. Составляем π-уравнение (3.49):

$$z^5 \boldsymbol{\theta} + (1 - z)^4 \boldsymbol{\pi} = 1.$$

При $|\boldsymbol{\theta}| = 3$, $|\boldsymbol{\pi}| = 4$ получаем алгебраическую систему

$$\pi_0 = 1, \quad \pi_1 - 4 = 0, \quad \pi_2 - 4\pi_1 + 6 = 0, \quad \pi_3 - 4\pi_2 + 6\pi_1 - 4 = 0,$$
$$\pi_4 - 4\pi_3 + 6\pi_2 - 4\pi_1 + 1 = 0, \quad \theta_0 + \pi_1 - 4\pi_2 + 6\pi_3 - 4\pi_4 = 0,$$
$$\theta_1 + \pi_2 - 4\pi_3 + 6\pi_4 = 0, \quad \theta_2 + \pi_3 - 4\pi_4 = 0, \quad \theta_3 + \pi_4 = 0.$$

Решая ее, получим

$$\boldsymbol{\theta} = 96 - 140z + 120z^2 - 35z^3,$$
$$\boldsymbol{\pi} = 1 + 4z + 10z^2 + 20z^3 + 35z^4.$$

Таким образом, экстраполирующая на 5 тактов формула имеет вид

$$y_i = 96x_i - 140x_{i-1} + 120x_{i-2} - 35x_{i-3}.$$

Эта формула дает безошибочные предсказанные значения сигнала, начиная с 4-го такта.

ГЛАВА 4

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ И ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

1. Стационарные числовые последовательности

Оптимизация систем управления производится на основе той информации, которую дает статистика ансамбля процессов, типичных для условий, в которых работает система. Необходимой стадией синтеза оптимальных систем является получение такого ансамбля и его статистическая обработка.

Ансамбль данных представляется в виде множества выборок Ω: $x_i^{(s)}$, $s=1, \ldots, N$, $i=-\infty, \ldots, +\infty$. Эту информацию подвергают обработке на основе определенной статистической модели. Простейшей с точки зрения статистики и наиболее распространенной в приложениях является модель *стационарного* процесса или, в случае дискретного времени,— стационарной числовой последовательности. Эта модель строится следующим образом. Прежде всего рассчитывается *средний ход* процесса:

$$m_i = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^{N} x_i^{(s)},$$

и вычисляются отклонения от него: $l_i^{(s)} = x_i^{(s)} - m_i$. Затем вводятся *ковариационные коэффициенты*:

$$\varphi_{i,k} = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^{N} l_i^{(s)} l_k^{(s)}. \tag{4.1}$$

Процесс $\mathbf{l} = \mathbf{x} - \mathbf{m}$ называется *стационарным*, если значения ковариационных коэффициентов зависят только от разности индексов: $\varphi_{i,k} = \psi_{i-k}$. Легко видеть, что ковариационные коэффициенты $\{\psi_i\}$ образуют четную двустороннюю числовую последовательность $\psi_i = \psi_{-i}$. Для *эргодических* процессов эти коэффициенты удовлетворяют условию $\psi_i \to 0$, $i \to \infty$.

Функция, к которой сходится двусторонний степенной ряд (ряд Лорана)

$$\psi(z) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \psi_i z^i \tag{4.2}$$

в кольце, окружающем контур Г: $|z| = 1$, называется *ковариационным изображением* стационарного эргодического процесса. Из четности ковариационных коэффициентов следует $\psi(z) = \psi(z^{-1})$. Для вычисления ковариационного изображения достаточно просуммировать правую часть ряда (4.2)

$$\psi_+(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i z^i,$$

а левую часть вычислить по формуле

$$\psi_-(z) = \psi_+(z^{-1}) - \psi_0. \tag{4.3}$$

Ковариационное изображение получается суммированием своих левой и правой частей: $\psi(z) = \psi_-(z) + \psi_+(z)$.

Ковариационные коэффициенты ψ_i выражаются через функцию $\psi(z)$ с помощью контурных интегралов

$$\psi_i = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} z^{-i} \psi(z) \frac{dz}{z},$$

в частности, нулевой коэффициент ψ_0, называемый *дисперсией* стационарного процесса, равен

$$\psi_0 = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \psi(z) \frac{dz}{z}.$$

Используя введенный в гл. 1 функционал наблюдения, последнюю формулу можно записать в виде $\psi_0 = \mathrm{ct}\,\psi(z)$.

Факторизуя функцию ψ, получим $\psi = \psi^+\psi^-$. Из $\psi = \widehat{\psi}$ следует, что с точностью до числового множителя имеют место равенства $\widehat{\psi}^+ = \psi^-$, $\widehat{\psi}^- = \psi^+$.

Ковариационное изображение суммы статистически независимых стационарных процессов равно сумме ковариационных изображений. Докажем это утверждение. Пусть $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — стационарные процессы с нулевыми средними значениями и ковариационными коэффициентами $\psi_x(i) = \overline{x_k x_{i+k}}$, $\psi_y(i) = \overline{y_k y_{i+k}}$, где черта есть знак усреднения по ансамблю, выражаемого формулой (4.1). Ковариационные коэффициенты суммы этих процессов равны

$$\psi_{x+y}(i) = \overline{(x_k + y_k)(x_{i+k} + y_{i+k})} = \\ = \overline{x_k x_{i+k}} + \overline{y_k y_{i+k}} + \overline{x_k y_{i+k}} + \overline{y_k x_{i+k}}. \quad (4.4)$$

Процессы $\{x_i\}$ и $\{y_k\}$ называются статистически независимыми, если для всех i и k $\overline{x_i y_k} = \overline{x_i} \cdot \overline{y_k}$.

Для статистически независимых процессов с нулевыми средними значениями $\overline{x_i y_k} = 0$. Поэтому два последних слагаемых в сумме (4.4) равны нулю и, следовательно, $\psi_{x+y}(i) = \psi_x(i) + \psi_y(i)$. Умножая это равенство на z^i и суммируя по всем i от $-\infty$ до $+\infty$, получаем $\psi_{x+y}(z) = \psi_x(z) + \psi_y(z)$.

Ковариационное изображение выхода устойчивой дискретной системы, имеющей передаточную функцию $\mathbf{h}(z)$, равно ковариационному изображению входа, умноженному на функцию $\mathbf{h}(z)\mathbf{h}(z^{-1})$. Докажем это утверждение. Пусть $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — стационарные эргодические процессы с нулевыми средними значениями на входе и выходе системы. Имеем

$$y_i = \sum_{k=0}^{\infty} h_k x_{i-k}.$$

Производя почленное перемножение последовательностей, получаем

$$y_k y_{i+k} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} h_l h_s x_{k-l} x_{i+k-s}.$$

Усредняя по ансамблю обе части этого равенства, имеем

$$\psi_y(i) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} h_l h_s \psi_x(i + l - s).$$

Умножая обе части этого равенства на z^i и суммируя по всем i от $-\infty$ до $+\infty$, получим формулу, связывающую ковариационные изображения входа и выхода дискретной системы:

$$\psi_y(z) = \mathbf{h}(z)\mathbf{h}(z^{-1})\psi_x(z). \quad (4.5)$$

Для того чтобы процесс на выходе был эргодичным и его ковариационное изображение существовало, достаточно, чтобы процесс на входе был эргодичным, а система была устойчивой.

Пользуясь обозначением $\widehat{\mathbf{h}}(z) = \mathbf{h}(z^{-1})$, формулу (4.5) перепишем в виде $\boldsymbol{\psi}_y = \mathbf{h}\widehat{\mathbf{h}}\boldsymbol{\psi}_x$.

Если входной сигнал является дискретным белым шумом с единичной дисперсией $\psi_x(0) = 1$, $\psi_x(\pm 1) = \psi_x(\pm 2) = \ldots = 0$, имеющим ковариационное изображение $\boldsymbol{\psi}_x = 1$, то процесс на выходе имеет ковариационное изображение $\boldsymbol{\psi}_y = \mathbf{h}\widehat{\mathbf{h}}$. В этом случае система $\mathbf{h}$ называется *формирующим фильтром* стационарного процесса.

Легко видеть, что стационарные процессы, формирующими фильтрами которых являются линейные дискретные системы с постоянными параметрами, имеют ковариационные изображения в форме рациональных функций. Рациональность ковариационных изображений делает π-исчисление эффективным средством решения задач обработки случайных сигналов и оптимального управления при случайных воздействиях.

Пусть формирующий фильтр стационарного процесса имеет передаточную функцию $\mathbf{h} = \mathbf{a}/\mathbf{b}$, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — полиномы от z, причем $\mathbf{b} = \mathbf{b}^+$, $\mathbf{b}^- = 1$. Это значит, что ковариационное изображение стационарного процесса равно $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{a}\widehat{\mathbf{a}}/\mathbf{b}\widehat{\mathbf{b}}$. Приводя эту функцию к стандартному виду с помощью подстановок $\widehat{\mathbf{a}} = z^{-|\mathbf{a}|}\widetilde{\mathbf{a}}$, $\widehat{\mathbf{b}} = z^{-|\mathbf{b}|}\widetilde{\mathbf{b}}$, получим

$$\boldsymbol{\psi} = \frac{z^{|\mathbf{b}|-|\mathbf{a}|}\mathbf{a}\widetilde{\mathbf{a}}}{\mathbf{b}\widetilde{\mathbf{b}}}.$$

Из $\boldsymbol{\psi} = \widehat{\boldsymbol{\psi}}$ и $\operatorname{ind}\widehat{\boldsymbol{\psi}} + \operatorname{def}\boldsymbol{\psi} = 0$ следует $\operatorname{def}\boldsymbol{\psi} = -\operatorname{ind}\boldsymbol{\psi}$. Если $\operatorname{ind}\boldsymbol{\psi} \leqslant 0$, то $\operatorname{def}\boldsymbol{\psi} \geqslant 0$.

Обозначим через $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\mu}$ полиномы $\boldsymbol{\nu} = z^{|\mathbf{b}|-|\mathbf{a}|}\mathbf{a}\widetilde{\mathbf{a}}$, $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{b}\widetilde{\mathbf{b}}$. Тогда ковариационное изображение можно записать в стандартной форме $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\nu}/\boldsymbol{\mu}$. Производя факторизацию этой функции, имеем $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}^+\boldsymbol{\psi}^-$, $\boldsymbol{\psi}^+ = \boldsymbol{\nu}^+/\boldsymbol{\mu}^+$, $\boldsymbol{\psi}^- = \boldsymbol{\nu}^-/\boldsymbol{\mu}^-$, $\boldsymbol{\nu}^+ = \mathbf{a}^*$, $\boldsymbol{\nu}^- = z^{|\mathbf{b}|-|\mathbf{a}|}\widetilde{\mathbf{a}}^*$, $\boldsymbol{\mu}^+ = \mathbf{b}$, $\boldsymbol{\mu}^- = \widetilde{\mathbf{b}}$. Факторизацию всегда можно выполнить таким образом, чтобы $\widehat{\boldsymbol{\psi}}^+ = \boldsymbol{\psi}^-$, $\widehat{\boldsymbol{\psi}}^- = \boldsymbol{\psi}^+$.

Пример. Требуется найти ковариационное изображение стационарного случайного процесса, ковариационные коэффициенты которого равны $\psi_i = c\alpha^{|i|}$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Составляем правую часть ковариационного изображения

$$\boldsymbol{\psi}_+(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i z^i = c \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i z^i = \frac{c}{1 - \alpha z}.$$

По формуле (4.3) вычисляем левую часть:

$$\psi_-(z) = \frac{c}{1-\alpha z^{-1}} - c = \frac{c\alpha z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}}.$$

Суммированием обеих частей получаем

$$\psi(z) = \frac{c}{1-\alpha z} + \frac{c\alpha z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}} = \frac{c(1-\alpha^2)}{(1-\alpha z)(1-\alpha z^{-1})}.$$

Приведем эту функцию к стандартной форме:

$$\psi = \frac{cz(1-\alpha^2)}{(1-\alpha z)(z-\alpha)}.$$

Имеем $\nu = cz(1-\alpha^2)$, $\mu = (1-\alpha z)(z-\alpha)$. Производим факторизацию:

$$\nu^+ = \sqrt{c(1-\alpha^2)},\quad \nu^- = \sqrt{c(1-\alpha^2)}\,z,$$
$$\mu^+ = 1-\alpha z,\qquad \mu^- = z-\alpha.$$

Имеем

$$\hat{\psi}^+ = \frac{\hat{\nu}^+}{\hat{\mu}^+} = \frac{\sqrt{c(1-\alpha^2)}}{1-\alpha z^{-1}} = \frac{z\sqrt{c(1-\alpha^2)}}{z-\alpha} = \frac{\nu^-}{\mu^-} = \psi^-.$$

2. Задача Колмогорова и ее обобщения

Задача об экстраполяции стационарной числовой последовательности с нулевым средним значением является отправным пунктом для чрезвычайно широкого круга задач статистической оптимизации. Впервые эта задача была поставлена и решена академиком А. Н. Колмогоровым в 1941 году [45]. Задача заключается в нахождении такой функции $y_i = h(x_i, x_{i-1}, x_{i-2}, \ldots)$, которая по текущему значению процесса x_i и всем его прошлым значениям $x_{i-1}, x_{i-2}, \ldots$ давала бы наиболее вероятное будущее значение процесса в момент $i+\lambda$. В теории *статистических решений* [58] доказано, что для процессов с гауссовым распределением

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}}\, e^{-\frac{x^2}{2D}}$$

эта функция является линейной:

$$y_i = \sum_{k=0}^{\infty} h_k x_{i-k}, \tag{4.6}$$

а критерий максимума вероятности совпадения реального процесса y_i и желаемого процесса $v_i = x_{i+\lambda}$ сводится к критерию минимума дисперсии сигнала ошибки $e_i = v_i - y_i$, среднее значение которого, ввиду однородности функции (4.6), равно нулю *).

Минимизация критерия

$$J = \overline{e_i^2} = \overline{(x_{i+\lambda} - y_i)^2}$$

по $\{h_k\}$ дает бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно весовых коэффициентов h_k:

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_k \psi_{i-k} = \psi_{i+\lambda}, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.7}$$

Здесь обозначено $\psi_i = \overline{x_k x_{i+k}}$. Бесконечные системы вида (4.7), вообще говоря, решаются только приближенно [42] методами, обоснование которых дается функциональным анализом.

При аппроксимации ковариационного изображения $\boldsymbol{\psi}$ рациональной функцией задача решается точно средствами л-исчисления. Покажем, как это делается. Экстраполятор (4.6) рассматривается как динамическая система с передаточной функцией $\mathbf{h} = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^k$. Желаемым оператором этой системы является физически нереализуемый оператор экстраполяции $\boldsymbol{\Lambda} = z^{-\lambda}$, $\lambda = 1, 2, \ldots$, связывающий изображения желаемого и входного процессов: $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{x}$ **). Изображение сигнала ошибки имеет вид $\mathbf{e} = (\boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{h})\mathbf{x}$. Задача состоит в нахождении физически реализуемого оператора $\mathbf{h}$, аппроксимирующего $\boldsymbol{\Lambda}$ в смысле минимума дисперсии ошибки $\mathbf{e}$.

Пусть формирующий фильтр сигнала $\mathbf{x}$ имеет передаточную функцию $\mathbf{a}/\mathbf{b}$, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — полиномы от z, причем $\mathbf{b} = \mathbf{b}^+$, $\mathbf{b}^- = 1$. Тогда ковариационное изображение этого сигнала равно

$$\boldsymbol{\psi} = \frac{\boldsymbol{\nu}}{\boldsymbol{\mu}} = \frac{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}}{\mathbf{b}\hat{\mathbf{b}}}. \tag{4.8}$$

*) Оптимальный экстраполятор в задаче Колмогорова, оптимальный фильтр в задаче Винера, оптимальные управляющие устройства в статистических задачах управления минимизируют установившуюся дисперсию ошибки и потому считаются включенными в бесконечно прошлый момент времени.

**) Под $\mathbf{x}$ понимается формальная сумма вида

$$\mathbf{x}(z) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_i z^i.$$

Произведем его факторизацию

$$\boldsymbol{\psi}^+ = \frac{\nu^+}{\mu^+} = \frac{\mathbf{a}^*}{\mathbf{b}}, \quad \boldsymbol{\psi}^- = \frac{\nu^-}{\mu^-} = \frac{\widehat{\mathbf{a}^*}}{\widehat{\mathbf{b}}}.$$

Пользуясь правилом (4.5), составим ковариационное изображение сигнала ошибки

$$\boldsymbol{\psi}_e = (\boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{h})\,(\widehat{\boldsymbol{\Lambda}} - \widehat{\mathbf{h}})\,\boldsymbol{\psi}. \tag{4.9}$$

Условие минимума дисперсии ошибки требует равенства нулю следующего функционала

$$\delta J_1 = \mathrm{ct}\,\delta\boldsymbol{\psi}_e = 0.$$

Варьируя формулу (4.9), получим

$$\delta\boldsymbol{\psi}_e = (\mathbf{h} - \boldsymbol{\Lambda})\,\boldsymbol{\psi}\delta\widehat{\mathbf{h}} + (\widehat{\mathbf{h}} - \widehat{\boldsymbol{\Lambda}})\,\widehat{\boldsymbol{\psi}}\delta\mathbf{h}.$$

Поскольку $\mathrm{ct}\,\boldsymbol{\psi} = \mathrm{ct}\,\widehat{\boldsymbol{\psi}}$, то условие минимума дисперсии ошибки требует равенства нулю только функционала

$$\delta J = \mathrm{ct}\,(\boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{h})\,\boldsymbol{\psi}\delta\widehat{\mathbf{h}} = 0. \tag{4.10}$$

Будем искать оптимальный экстраполятор в виде

$$\mathbf{h} = \frac{\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{a}^*}, \tag{4.11}$$

где $\boldsymbol{\theta}$ — полином, входящий в решение π-уравнения

$$z^\lambda\boldsymbol{\theta} + \mathbf{b}\boldsymbol{\pi} = \mathbf{a}^*, \tag{4.12}$$

минимальное относительно $\boldsymbol{\pi}$. Варьируя (4.11), будем иметь $\delta\mathbf{h} = \delta\boldsymbol{\theta}/\mathbf{a}^*$. Общее решение π-уравнения (4.12) имеет вид $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 + \mathbf{b}\boldsymbol{\zeta}$, где $\boldsymbol{\zeta}$ — произвольный полином. Варьируя $\boldsymbol{\theta}$, получаем $\delta\boldsymbol{\theta} = \mathbf{b}\delta\boldsymbol{\zeta}$. Таким образом

$$\delta\mathbf{h} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}^*}\,\delta\boldsymbol{\zeta}.$$

Произведем инверсию этого выражения

$$\delta\widehat{\mathbf{h}} = \frac{\widehat{\mathbf{b}}}{\widehat{\mathbf{a}^*}}\,\delta\widehat{\boldsymbol{\zeta}}. \tag{4.13}$$

Подставим (4.8), (4.11) и (4.13) в формулу (4.10)

$$\delta J = \mathrm{ct}\left(\frac{1}{z^\lambda} - \frac{\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{a}^*}\right)\frac{\mathbf{a}\widehat{\mathbf{a}}}{\mathbf{b}\widehat{\mathbf{b}}}\cdot\frac{\widehat{\mathbf{b}}}{\widehat{\mathbf{a}^*}}\,\delta\widehat{\boldsymbol{\zeta}}.$$

Учитывая соотношение $\mathbf{a}^*\widehat{\mathbf{a}^*} = \mathbf{a}\widehat{\mathbf{a}}$ и π-уравнение (4.12), получим

$$\delta J = \mathrm{ct}\, \frac{\pi}{z^\lambda} \delta \widehat{\zeta}. \tag{4.14}$$

Минимальное относительно π решение π-уравнения (4.12) дает $|\pi| = \lambda - 1$. Функция под знаком ct в выражении (4.14) является левой и правильной. Поэтому $\delta J = 0$, и условие оптимальности выполнено.

Подставляя полученное решение в формулу (4.9), найдем минимум функционала J

$$J^* = \mathrm{ct}\, \pi\widehat{\pi}. \tag{4.15}$$

Для вычисления передаточной функции оптимального экстраполятора (4.11) факторизацию полиномов ν и μ можно производить с точностью до произвольного числового множителя. Действительно, при

$$(\nu^+)' = (\mathbf{a}^*)' = k\mathbf{a}^*, \quad (\mu^+)' = \mathbf{b}' = l\mathbf{b}$$

π-уравнение (4.12) принимает вид

$$z^\lambda \theta' + l\mathbf{b}\pi' = k\mathbf{a}^*.$$

Его решение $\theta' = k\theta$, $\pi' = \frac{k}{l}\pi$. Мы видим, что передаточная функция оптимального экстраполятора остается инвариантной

$$\mathbf{h}' = \frac{\theta'}{(\mathbf{a}^*)'} = \frac{\theta}{\mathbf{a}^*} = \mathbf{h}.$$

Однако значение полинома π существенно зависит от способа факторизации функции ψ. Если мы хотим, чтобы выражение (4.15) действительно выражало минимальную дисперсию ошибки, мы должны производить факторизацию ψ так, чтобы $\widehat{\psi^+} = \psi^-$, а не с точностью до произвольного числового множителя.

Итак, мы получили эффективный метод расчета оптимального экстраполятора, заменяющий решение бесконечной системы линейных алгебраических уравнений конечным алгоритмом решения π-уравнения. Правда, это упрощение куплено ценой аппроксимации ковариационного изображения сигнала рациональной функцией, но практические задачи обычно таковы, что встречающиеся в них процессы либо непосредственно имеют рациональные ковариационные изображения, либо легко аппроксимируются таковыми.

Рассмотрим теперь задачу об экстраполяции сигналов с конечной глубиной корреляции. Будем считать отличными от нуля только следующие ковариационные коэффициенты: ψ_{-n}, ψ_{-n+1}, ..., ψ_{-1}, ψ_0, ψ_1, ..., ψ_n. Это значит, что ковариационное изображение такого процесса имеет вид

$$\boldsymbol{\psi} = \sum_{i=-n}^{n} \psi_i z^i = \frac{\mathbf{v}}{z^n},$$

где $\mathbf{v}$ — симметричный полином степени $2n$:

$$\mathbf{v} = \psi_n + \psi_{n-1} z + \ldots + \psi_0 z^n + \psi_1 z^{n+1} + \ldots + \psi_n z^{2n}.$$

Будем считать, что этот полином является неособым, т. е. не имеет нулей на контуре Γ: $|z| = 1$. Тогда его можно подвергнуть факторизации: $\mathbf{v} = \mathbf{v}^+\mathbf{v}^-$, причем из $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}}$ следует $\mathbf{v}^+ = \tilde{\mathbf{v}}^-$, $\mathbf{v}^- = \tilde{\mathbf{v}}^+$, $|\mathbf{v}^+| = |\mathbf{v}^-| = n$. Будем искать оптимальный экстраполятор в виде $\mathbf{h} = \boldsymbol{\theta}/\mathbf{v}^+$, где полином $\boldsymbol{\theta}$ входит в решение π-уравнения $z^\lambda \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\pi} = \mathbf{v}^+$, минимальное относительно $\boldsymbol{\pi}$. Легко видеть, что решение этого π-уравнения эквивалентно выделению целой части рациональной функции

$$\frac{\mathbf{v}^+}{z^\lambda} = \boldsymbol{\theta} + \frac{\boldsymbol{\pi}}{z^\lambda}.$$

Имеем $\boldsymbol{\theta} = [\mathbf{v}^+/z^\lambda]$. Для того чтобы $\boldsymbol{\theta}$ было отлично от нуля, необходимо $\lambda \leqslant n$. Это значит, что процессы с глубиной корреляции n предсказываются только на n тактов вперед. Доказательство приведенных формул мы опускаем ввиду его тривиальности.

Рассмотрим серию задач, родственных задаче Колмогорова. Во-первых, это задача аппроксимации физически нереализуемого оператора

$$\boldsymbol{\Lambda} = \frac{\mathbf{c}}{z^\lambda \mathbf{d}}, \tag{4.16}$$

где $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ — заданные полиномы от z. Это может быть оператор численного дифференцирования любой кратности, интегрирования и т. д. Аппроксимирующий его в смысле минимума дисперсии ошибки физически реализуемый оператор равен

$$\mathbf{h} = \frac{\theta}{\mathbf{a}^*\mathbf{d}}, \tag{4.17}$$

где θ — полином, входящий в решение π-уравнения

$$z^\lambda\theta + \mathbf{b}\mathbf{d}\pi = \mathbf{a}^*\mathbf{c}, \tag{4.18}$$

минимальное относительно π.

Покажем, что условие минимума дисперсии ошибки выполняется. Имеем $\delta\mathbf{h} = \delta\theta/\mathbf{a}^*\mathbf{d}$, где $\delta\theta = \mathbf{b}\mathbf{d}\delta\zeta$. Таким образом

$$\delta\mathbf{h} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}^*}\delta\zeta. \tag{4.19}$$

Подставляя (4.8), (4.16) и (4.17) в (4.10), получим

$$\delta J = \mathrm{ct}\left(\frac{\theta}{\mathbf{a}^*\mathbf{d}} - \frac{\mathbf{c}}{z^\lambda\mathbf{d}}\right)\frac{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}}{\mathbf{b}\hat{\mathbf{b}}}\cdot\frac{\hat{\mathbf{b}}}{\hat{\mathbf{a}}^*}\cdot\delta\hat{\zeta}.$$

С учетом π-уравнения (4.18) имеем

$$\delta J = \mathrm{ct}\,\frac{\pi}{z^\lambda}\cdot\delta\hat{\zeta} = 0.$$

Рассмотрим задачу о воспроизведении на выходе динамической системы полезного сигнала, действующего на входе системы. Формирующий фильтр этого сигнала $\mathbf{x}$ имеет передаточную функцию $\mathbf{a}/\mathbf{b}$. Критерием оптимальности является минимум дисперсии ошибки воспроизведения сигнала

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{y} = (1 - \mathbf{h})\mathbf{x},$$

выражаемый функционалом

$$J = \mathrm{ct}\,\psi_e.$$

Рассматривается система с обратной связью, содержащая управляемый объект, в общем случае неустойчивый. Ее передаточная функция

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{g}\mathbf{w}}{1 + \mathbf{g}\mathbf{w}}, \tag{4.20}$$

где $\mathbf{g}$ — передаточная функция управляемого объекта, равная

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{p}^+\mathbf{p}^-}{\mathbf{q}^+\mathbf{q}^-}. \tag{4.21}$$

Будем считать, что спектры сигнала $\mathbf{x}$ и объекта $\mathbf{g}$ взаимно просты $(\mathbf{b}, \mathbf{q}) = 1$. Оптимальная управляющая программа равна

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{q}^+\theta}{\mathbf{p}^+\mathbf{b}\pi}, \tag{4.22}$$

где θ и π — полиномы, входящие в решение π-уравнения

$$\mathbf{p}^-\theta + \mathbf{b}\mathbf{q}^-\pi = \mathbf{a}^*\tilde{\mathbf{p}}^-\tilde{\mathbf{q}}^-, \tag{4.23}$$

минимальное относительно π.

Докажем, что эта программа обеспечивает минимум дисперсии ошибки воспроизведения входного сигнала. Условие минимума дисперсии ошибки требует равенства нулю следующего функционала

$$\delta J = \mathrm{ct}(1 - \mathbf{h})\psi\delta\hat{\mathbf{h}} = 0. \tag{4.24}$$

Подставляя (4.20) и (4.21) в (4.22) и учитывая π-уравнение (4.23), получим

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{p}^-\theta}{\mathbf{a}^*\tilde{\mathbf{p}}^-\tilde{\mathbf{q}}^-}. \tag{4.25}$$

Из (4.23) имеем $\delta\theta = \mathbf{b}\mathbf{q}^-\delta\zeta$, и, следовательно,

$$\delta\mathbf{h} = \frac{\mathbf{b}\mathbf{p}^-\mathbf{q}^-}{\mathbf{a}^*\tilde{\mathbf{p}}^-\tilde{\mathbf{q}}^-}\,\delta\zeta, \tag{4.26}$$

Подставляя (4.25) и (4.26) в (4.24), получим

$$\delta J = \mathrm{ct}\left(1 - \frac{\mathbf{p}^-\theta}{\mathbf{a}^*\tilde{\mathbf{p}}^-\tilde{\mathbf{q}}^-}\right)\frac{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}}{\mathbf{b}\hat{\mathbf{b}}}\cdot\frac{\hat{\mathbf{b}}\hat{\tilde{\mathbf{p}}}^-\hat{\tilde{\mathbf{q}}}^-}{\hat{\mathbf{a}}^*\mathbf{p}^-\mathbf{q}^-}\,\delta\hat{\zeta}.$$

С учетом π-уравнения (4.23) имеем

$$\delta J = \mathrm{ct}\,\frac{\mathbf{b}\mathbf{q}^-\pi}{\mathbf{a}^*\tilde{\mathbf{p}}^-\tilde{\mathbf{q}}^-}\,\frac{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}}{\mathbf{b}\hat{\mathbf{b}}}\cdot\frac{\hat{\mathbf{b}}\hat{\tilde{\mathbf{p}}}^-\hat{\tilde{\mathbf{q}}}^-}{\hat{\mathbf{a}}^*\mathbf{p}^-\mathbf{q}^-}\,\delta\hat{\zeta} = \mathrm{ct}\,\frac{\pi}{\mathbf{p}^-}\delta\hat{\zeta}.$$

Поскольку в минимальное решение относительно π входит полином с $|\pi| < |\mathbf{p}^-|$, это выражение равно нулю.

В частном случае этой задачи, когда объект устойчив ($\mathbf{q}^- = 1$), получаем

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{q}\theta}{\mathbf{p}^+\mathbf{b}\pi}, \tag{4.27}$$

где

$$\mathbf{p}^-\theta + \mathbf{b}\pi = \mathbf{a}^*\tilde{\mathbf{p}}^-. \tag{4.28}$$

В том случае, когда спектры сигнала и объекта совпадают $(\mathbf{b}, \mathbf{q}) = \mathbf{b} = \mathbf{q}$, решение имеет вид

$$\mathbf{w} = \frac{\theta}{\mathbf{p}^{+}\pi}, \tag{4.29}$$

где θ и π удовлетворяют π-уравнению (4.28).

Рассмотрим случай частичного перекрывания спектров — наличия общих собственных чисел в спектре входного сигнала и управляемого объекта

$$\mathbf{v} = (\mathbf{b}, \mathbf{q}), \quad \mathbf{b} = \mathbf{v}\mathbf{b}_0,$$
$$\mathbf{q} = \mathbf{v}\mathbf{q}_0, \quad \mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_0^{+}\mathbf{q}_0^{-}. \tag{4.30}$$

В этом случае оптимальная управляющая программа равна

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{q}_0^{+}\theta}{\mathbf{p}^{+}\mathbf{b}_0\pi}, \tag{4.31}$$

где θ и π — полиномы, удовлетворяющие π-уравнению

$$\mathbf{p}^{-}\theta + \mathbf{b}\mathbf{q}_0^{-}\pi = \mathbf{a}^{*}\tilde{\mathbf{p}}^{-}\tilde{\mathbf{q}}_0^{-}. \tag{4.32}$$

Подставляя (4.31) в (4.20) и учитывая π-уравнение (4.32), получим

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{p}^{-}\theta}{\mathbf{a}^{*}\tilde{\mathbf{p}}^{-}\tilde{\mathbf{q}}_0^{-}}. \tag{4.33}$$

Из (4.32) имеем $\delta\theta = \mathbf{b}\mathbf{q}_0^{-}\delta\zeta$, и, следовательно,

$$\delta\mathbf{h} = \frac{\mathbf{b}\mathbf{p}^{-}\mathbf{q}_0^{-}}{\mathbf{a}^{*}\tilde{\mathbf{p}}^{-}\tilde{\mathbf{q}}_0^{-}}\delta\zeta. \tag{4.34}$$

Подставляя (4.33) и (4.34) в (4.24) и учитывая π-уравнение (4.32), получим

$$\delta J = \mathrm{ct}\frac{\mathbf{b}\mathbf{q}_0^{-}\pi}{\mathbf{a}^{*}\tilde{\mathbf{p}}^{-}\tilde{\mathbf{q}}_0^{-}} \cdot \frac{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}}{\mathbf{b}\hat{\mathbf{b}}} \cdot \frac{\hat{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{p}}^{-}\tilde{\mathbf{q}}_0^{-}}{\hat{\mathbf{a}}^{*}\mathbf{p}^{-}\mathbf{q}_0^{-}}\delta\hat{\zeta}.$$

После сокращений имеем

$$\delta J = \mathrm{ct}\frac{\pi}{\mathbf{p}^{-}}\delta\hat{\zeta}.$$

Минимальное решение уравнения (4.32) относительно π обращает этот функционал в нуль. Минимум функционала J равен

$$J^* = \mathrm{ct}\frac{\pi\hat{\pi}}{\tilde{\mathbf{p}}^-\hat{\tilde{\mathbf{p}}}^-}. \tag{4.35}$$

Вычисление минимальной дисперсии ошибки производится методом, полностью аналогичным вычислению минимальной суммарной квадратичной ошибки (гл. 3, раздел 2). На рассмотренную задачу полностью переносятся все те ограничения, касающиеся особых полиномов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, о которых мы упомянули в задаче о минимизации суммарной квадратичной ошибки.

Следующая из серии задач, родственных задаче Колмогорова,— это задача о воспроизведении на выходе динамической системы предсказанного значения входного сигнала. Прежде всего будем считать, что спектры входного сигнала и управляемого объекта не имеют общих точек: $(\mathbf{b}, \mathbf{q}) = 1$. Считая управляемый объект в общем случае неустойчивым, рассчитаем систему управления с обратной связью. Будем искать программу управления в виде

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{q}^+\theta}{\mathbf{p}^+\pi_1}, \tag{4.36}$$

где θ и π_1 — полиномы, входящие в решение системы из двух π-уравнений

$$\mathbf{p}^-\theta + \mathbf{q}^-\pi_1 = \mathbf{a}^*\tilde{\mathbf{p}}^-\tilde{\mathbf{q}}^-, \tag{4.37}$$

$$z^\lambda\mathbf{p}^-\theta + \mathbf{b}\pi_2 = \mathbf{a}^*\tilde{\mathbf{p}}^-\tilde{\mathbf{q}}^- \tag{4.38}$$

относительно трех неизвестных полиномов θ, π_1 и π_2, минимальное относительно π_2.

Подставляя (4.36) в (4.20) и учитывая первое из π-уравнений (4.37), получим

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{p}^-\theta}{\mathbf{a}^*\tilde{\mathbf{p}}^-\tilde{\mathbf{q}}^-}. \tag{4.39}$$

Общее решение системы π-уравнений (4.37) — (4.38) относительно θ равно $\theta = \theta_0 + \mathbf{b}\mathbf{q}^-\zeta$, откуда $\delta\theta = \mathbf{b}\mathbf{q}^-\delta\zeta$. Подставляя это значение в (4.39), находим

$$\delta\mathbf{h} = \frac{\mathbf{b}\mathbf{p}^-\mathbf{q}^-}{\mathbf{a}^*\tilde{\mathbf{p}}^-\tilde{\mathbf{q}}^-}\,\delta\zeta. \tag{4.40}$$

Условие минимума дисперсии ошибки $\mathbf{e} = (\Lambda - \mathbf{h})\mathbf{x}$, где

Λ — физически нереализуемый оператор экстраполяции

$$\Lambda = z^{-\lambda}, \qquad \lambda = 1, 2, 3, \ldots, \tag{4.41}$$

имеет вид

$$\delta J = \mathrm{ct}(\Lambda - \mathbf{h})\psi\delta\hat{\mathbf{h}} = 0.$$

Подставляя сюда (4.39), (4.40) и (4.41), получим

$$\delta J = \mathrm{ct}\left(\frac{1}{z^\lambda} - \frac{\mathbf{p}^-\theta}{\mathbf{a}^*\tilde{\mathbf{p}}^-\tilde{\mathbf{q}}^-}\right)\frac{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}}{\mathbf{b}\hat{\mathbf{b}}}\cdot\frac{\hat{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{p}}^-\tilde{\mathbf{q}}^-}{\hat{\mathbf{a}}^*\mathbf{p}^-\mathbf{q}^-}\,\delta\hat{\zeta}.$$

Учитывая второе π-уравнение (4.38) и производя возможные сокращения, имеем

$$\delta J = \mathrm{ct}\,\frac{\pi_2}{z^\lambda \mathbf{p}^-\mathbf{q}^-}\,\delta\hat{\zeta}. \tag{4.42}$$

Минимальное решение системы π-уравнений (4.37) — (4.38) содержит полиномы следующих степеней

$$|\theta| = |\mathbf{b}| + |\mathbf{q}^-| - 1, \quad |\pi_1| = |\mathbf{b}| + |\mathbf{p}^-| - 1,$$
$$|\pi_2| = |\mathbf{p}^-| + |\mathbf{q}^-| + \lambda - 1.$$

Таким образом, функция под знаком ct в (4.42) является левой и правильной, и поэтому условие минимума дисперсии ошибки выполнено.

Докажем инвариантность программы управления (4.36) при различных факторизациях полиномов **p** и **q**, отличающихся произвольным числовым множителем. Имеем

$$(\mathbf{p}^+)' = k\mathbf{p}^+, \quad (\mathbf{p}^-)' = \frac{1}{k}\cdot\mathbf{p}^-, \quad (\tilde{\mathbf{p}}^-)' = \frac{1}{k}\,\tilde{\mathbf{p}}^-,$$
$$(\mathbf{q}^+)' = l\mathbf{q}^+, \quad (\mathbf{q}^-)' = \frac{1}{l}\mathbf{q}^-, \quad (\tilde{\mathbf{q}}^-)' = \frac{1}{l}\,\tilde{\mathbf{q}}^-.$$

Система π-уравнений (4.37) — (4.38) принимает вид

$$\frac{1}{k}\mathbf{p}^-\theta' + \frac{1}{l}\,\mathbf{q}^-\pi_1' = \frac{1}{kl}\mathbf{a}^*\tilde{\mathbf{p}}^-\tilde{\mathbf{q}}^-,$$
$$\frac{1}{k}\,z^\lambda\mathbf{p}^-\theta' + \mathbf{b}\pi_2' = \frac{1}{kl}\,\mathbf{a}^*\tilde{\mathbf{p}}^-\tilde{\mathbf{q}}^-,$$

или

$$l\mathbf{p}^-\theta' + k\mathbf{q}^-\pi_1' = \mathbf{a}^*\tilde{\mathbf{p}}^-\tilde{\mathbf{q}}^-,$$
$$lz^\lambda\mathbf{p}^-\theta' + kl\mathbf{b}\pi_2' = \mathbf{a}^*\tilde{\mathbf{p}}^-\tilde{\mathbf{q}}^-.$$

Ее решение

$$\theta' = \frac{1}{l}\theta, \quad \pi_1' = \frac{1}{k}\pi_1, \quad \pi_2' = \frac{1}{kl}\pi_2.$$

По формуле (4.36) находим программу управления

$$\mathbf{w}' = \frac{(\mathbf{q}^+)'\,\theta'}{(\mathbf{p}^+)'\,\pi_1'} = \frac{\mathbf{q}^+\theta}{\mathbf{p}^+\pi_1} = \mathbf{w}.$$

Мы видим, что она остается инвариантной. Таким образом, полиномы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ можно факторизовать с точностью до произвольных числовых множителей.

Минимум функционала J равен

$$J^* = \mathrm{ct}\,\frac{\pi_2\hat{\pi}_2}{\tilde{\mathbf{p}}^-\tilde{\mathbf{q}}^-\hat{\tilde{\mathbf{p}}}^-\hat{\tilde{\mathbf{q}}}^-}. \tag{4.43}$$

Легко видеть, что эта формула также остается инвариантной при различных факторизациях полиномов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$. Что касается вопроса об ее инвариантности при различных факторизациях полиномов $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\mu}$, то она остается справедливой только при такой факторизации $\boldsymbol{\psi}$, при которой $\hat{\boldsymbol{\psi}}^+ = \boldsymbol{\psi}^-$, $\hat{\boldsymbol{\psi}}^- = \boldsymbol{\psi}^+$. Для вычисления функционала J^* достаточно привести выражение под знаком ct в (4.43) к виду

$$\frac{\pi_2\hat{\pi}_2}{\tilde{\mathbf{p}}^-\tilde{\mathbf{q}}^-\hat{\tilde{\mathbf{p}}}^-\hat{\tilde{\mathbf{q}}}^-} = \frac{\pi_2\tilde{\pi}_2}{z^{\lambda-1}\mathbf{p}^-\mathbf{q}^-\tilde{\mathbf{p}}^-\tilde{\mathbf{q}}^-}$$

и произвести его правильную сепарацию

$$\frac{\pi_2\tilde{\pi}_2}{z^{\lambda-1}\mathbf{p}^-\mathbf{q}^-\tilde{\mathbf{p}}^-\tilde{\mathbf{q}}^-} = \frac{\theta}{\tilde{\mathbf{p}}^-\tilde{\mathbf{q}}^-} + \frac{\varphi}{z^{\lambda-1}\mathbf{p}^-\mathbf{q}^-}.$$

Для этого достаточно получить минимальное относительно φ решение следующего π-уравнения:

$$z^{\lambda-1}\mathbf{p}^-\mathbf{q}^-\theta + \tilde{\mathbf{p}}^-\tilde{\mathbf{q}}^-\varphi = \pi_2\tilde{\pi}_2. \tag{4.44}$$

После этого значение функционала J^* вычисляется по формуле

$$J^* = \frac{\theta(0)}{\tilde{\mathbf{p}}^-(0)\,\tilde{\mathbf{q}}^-(0)}. \tag{4.45}$$

В случае $(\mathbf{b}, \mathbf{q}) = \mathbf{b} = \mathbf{q}$, $\mathbf{q}^- = 1$ модификация этой программы имеет вид

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{q}\theta}{\mathbf{p}^+\pi_1}, \tag{4.46}$$

где θ и π_1 — полиномы, входящие в решение системы π-уравнений

$$\mathbf{p}^-\theta + \pi_1 = \mathbf{a}^*\widetilde{\mathbf{p}}^-, \tag{4.47}$$

$$z^\lambda \mathbf{p}^-\theta + \mathbf{b}\pi_2 = \mathbf{a}^*\widetilde{\mathbf{p}}^-. \tag{4.48}$$

Рассмотрим случай, когда передаточная функция управляемого объекта и ковариационное изображение входного сигнала имеют общие полюсы

$$\mathbf{v} = (\mathbf{b}, \mathbf{q}), \quad \mathbf{b} = \mathbf{v}\mathbf{b}_0, \quad \mathbf{q} = \mathbf{v}\mathbf{q}_0, \quad \mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_0^+\mathbf{q}_0^-.$$

Будем искать управляющую программу в виде

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{v}\mathbf{q}_0^+\theta}{\mathbf{p}^+\pi_1}, \tag{4.49}$$

где θ и π_1 — полиномы, входящие в решение системы из двух π-уравнений

$$\mathbf{p}^-\theta + \mathbf{q}_0^-\pi_1 = \mathbf{a}^*\widetilde{\mathbf{p}}^-\widetilde{\mathbf{q}}_0^-, \tag{4.50}$$

$$z^\lambda\mathbf{p}^-\theta + \mathbf{b}\pi_2 = \mathbf{a}^*\widetilde{\mathbf{p}}^-\widetilde{\mathbf{q}}_0^- \tag{4.51}$$

относительно трех неизвестных полиномов θ, π_1 и π_2, минимальное относительно π_2. Подставляя (4.49) в (4.20) и учитывая π-уравнение (4.50), получим

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{p}^-\theta}{\mathbf{a}^*\widetilde{\mathbf{p}}^-\widetilde{\mathbf{q}}_0^-}. \tag{4.52}$$

Общее решение системы π-уравнений (4.50)—(4.51) относительно θ имеет вид $\theta = \theta_0 + \mathbf{b}\mathbf{q}_0^-\zeta$. Варьируя его, имеем $\delta\theta = \mathbf{b}\mathbf{q}_0^-\delta\zeta$. Следовательно,

$$\delta\mathbf{h} = \frac{\mathbf{b}\mathbf{p}^-\mathbf{q}_0^-}{\mathbf{a}^*\widetilde{\mathbf{p}}^-\widetilde{\mathbf{q}}_0^-}\,\delta\zeta. \tag{4.53}$$

Условие минимума дисперсии ошибки системы имеет вид

$$\delta J = \operatorname{ct}(\mathbf{\Lambda} - \mathbf{h})\psi\delta\widehat{\mathbf{h}} = 0.$$

Подставляя сюда (4.8), (4.52) и (4.53) и учитывая π-уравнение (4.51), после возможных сокращений получаем

$$\delta J = \operatorname{ct}\frac{\pi_2}{z^\lambda\mathbf{p}^-\mathbf{q}_0^-}\,\delta\widehat{\zeta}. \tag{4.54}$$

Минимальное решение системы π-уравнений (4.50) — (4.51) содержит полиномы следующих степеней:

$$|\theta| = |\mathbf{b}| + |\mathbf{q}_0^-| - 1, \quad |\pi_1| = |\mathbf{b}| + |\mathbf{p}^-| - 1,$$
$$|\pi_2| = |\mathbf{p}^-| + |\mathbf{q}_0^-| + \lambda - 1.$$

Таким образом, функция под знаком ct в (4.54) является левой и правильной, и условие оптимальности выполнено. Пользуясь формулой

$$J = \mathrm{ct}(\Lambda - \mathbf{h})(\widehat{\Lambda} - \widehat{\mathbf{h}})\psi,$$

вычислим минимальное значение функционала J

$$J^* = \mathrm{ct}\frac{\pi_2\widehat{\pi}_2}{\widetilde{\mathbf{p}}^-\widetilde{\mathbf{q}}_0^-\widehat{\widetilde{\mathbf{p}}}^-\widehat{\widetilde{\mathbf{q}}}_0^-}.$$

Вычисление этого функционала также сводится к решению π-уравнения.

Рассмотрим обобщение задачи воспроизведения на выходе динамической системы входного сигнала на случай

$$\Lambda = \frac{\mathbf{c}}{z^\lambda \mathbf{d}}. \tag{4.55}$$

При условии $(\mathbf{b}, \mathbf{q}) = 1$ оптимальная управляющая программа равна

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{q}^+\theta}{\mathbf{p}^+\pi_1}, \tag{4.56}$$

где θ и π_1 — полиномы, входящие в решение системы из двух π-уравнений

$$\mathbf{p}^-\theta + \mathbf{q}^-\pi_1 = \mathbf{d}\mathbf{a}^*\widetilde{\mathbf{p}}^-\widetilde{\mathbf{q}}^-, \tag{4.57}$$

$$z^\lambda\mathbf{p}^-\theta + \mathbf{d}\mathbf{b}\pi_2 = \mathbf{c}\mathbf{a}^*\widetilde{\mathbf{p}}^-\widetilde{\mathbf{q}}^- \tag{4.58}$$

относительно трех неизвестных полиномов θ, π_1 и π_2, минимальное относительно π_2. Доказательство этих формул, а также дальнейшие обобщения этой задачи предоставляем читателю.

Пример 1. Найдем программу экстраполяции на λ тактов стационарного случайного процесса с нулевым средним значением и ковариационными коэффициентами

$$\psi_i = c\alpha^{|i|}, \qquad |\alpha| < 1.$$

Составим ковариационное изображение

$$\psi(z)=\frac{c\left(1-\alpha^{2}\right)z}{(1-\alpha z)(z-\alpha)}.$$

Имеем $\mathbf{a}^*=1$, $\mathbf{b}=1-\alpha z$ (факторизацию $\mathbf{v}$ можно производить с точностью до произвольного множителя). Составляем π-уравнение (4.12)

$$z^{\lambda}\theta+(1-\alpha z)\pi=1.$$

Будем решать его методом корней. Подставляя $z=\alpha^{-1}$, получим $\alpha^{-\lambda}\theta_0=1$, откуда $\theta_0=\alpha^{\lambda}$. По формуле (4.11) получаем программу экстраполятора $h=\alpha^{\lambda}$. Она осуществляет следующее линейное преобразование $y_i=\alpha^{\lambda}x_i$.

Пример 2. Найдем программу экстраполяции на λ тактов процесса с ковариационным изображением

$$\psi(z)=\frac{c}{(1-\alpha z)(1-\beta z)\left(1-\alpha z^{-1}\right)\left(1-\beta z^{-1}\right)},\qquad |\alpha|<1,\quad |\beta|<1.$$

Имеем $\mathbf{a}^*=1$, $\mathbf{b}=(1-\alpha z)(1-\beta z)$. Составляем π-уравнение (4.12)

$$z^{\lambda}\theta+(1-\alpha z)(1-\beta z)\pi=1.$$

Ищем полином θ степени 1: $\theta=\theta_0+\theta_1 z$. Подставляя вместо z поочередно $z=\alpha^{-1}$ и $z=\beta^{-1}$, получим систему уравнений

$$\theta_0+\alpha^{-1}\theta_1=\alpha^{\lambda},\quad \theta_0+\beta^{-1}\theta_1=\beta^{\lambda}.$$

Ее решение

$$\theta_0=\frac{\alpha^{\lambda+1}-\beta^{\lambda+1}}{\alpha-\beta},\quad \theta_1=\frac{\alpha\beta^{\lambda+1}-\beta\alpha^{\lambda+1}}{\alpha-\beta}.$$

По формуле (4.11) программа экстраполяции равна

$$h=\frac{\alpha^{\lambda+1}-\beta^{\lambda+1}}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha\beta^{\lambda+1}-\beta\alpha^{\lambda+1}}{\alpha-\beta}z.$$

Пример 3. Найдем программу экстраполяции на 1 такт для процесса с ковариационным изображением

$$\psi(z)=\frac{c}{\mathbf{b}(z)\widehat{\mathbf{b}}(z)},\qquad \mathbf{b}=\mathbf{b}^{+}.$$

Имеем $\mathbf{a}^*=1$, $\mathbf{b}=\mathbf{b}(z)$. Составляем π-уравнение (4.12)

$$z\theta+\mathbf{b}\pi=1.$$

В минимальное решение входит полином π степени, равной нулю: $\pi=\pi_0$. Подставляя $z=0$, находим $\pi_0=1/\mathbf{b}(0)$. Следовательно,

$$\mathbf{h}=\theta=z^{-1}\left[1-\frac{\mathbf{b}(z)}{\mathbf{b}(0)}\right].$$

Пример 4. Найдем программу экстраполяции на λ тактов процесса с конечной глубиной корреляции, имеющего ковариационное изображение

$$\psi(z) = c(1+\alpha z)(1+\alpha z^{-1}), \qquad |\alpha| < 1.$$

Имеем $\mathbf{a}^* = 1+\alpha z$, $\mathbf{b} = 1$. Составляем π-уравнение (4.12)

$$z^\lambda\theta + \pi = 1+\alpha z.$$

При $\lambda = 1$ получаем $\pi = 1$, $\theta = \alpha$. По формуле (4.11) программа экстраполяции равна

$$\mathbf{h} = \frac{\alpha}{1+\alpha z}.$$

При $\lambda \geqslant 2$ π-уравнение имеет решение $\theta = 0$. Это значит, что предсказание на 2 и более тактов процесса, имеющего глубину корреляции 1, невозможно.

Пример 5. Найдем программу экстраполяции на λ тактов для процесса с ковариационным изображением

$$\psi(z) = \frac{c(1-\alpha z)(1-\alpha z^{-1})}{(1-\beta z)(1-\beta z^{-1})}, \qquad |\alpha| < 1, \quad |\beta| < 1.$$

Имеем $\mathbf{a}^* = 1-\alpha z$, $\mathbf{b} = 1-\beta z$. Составляем π-уравнение (4.12)

$$z^\lambda\theta + (1-\beta z)\pi = 1-\alpha z.$$

Степень его минимального полинома θ равна нулю. Полагая $z = \beta^{-1}$, получаем $\beta^{-\lambda}\theta_0 = 1-\alpha\beta^{-1}$, откуда $\theta_0 = \beta^{\lambda-1}(\beta-\alpha)$.

По формуле (4.11) программа экстраполяции имеет вид

$$\mathbf{h} = \beta^{\lambda-1}\cdot\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha z}.$$

Она осуществляет следующее линейное преобразование процесса

$$y_i - \alpha y_{i-1} = \beta^{\lambda-1}(\beta-\alpha)x_i.$$

Пример 6. Найдем программу экстраполяции на 1 такт для процесса с ковариационным изображением

$$\psi(z) = \frac{\mathbf{a}(z)\widehat{\mathbf{a}}(z)}{\mathbf{b}(z)\widehat{\mathbf{b}}(z)}, \qquad \mathbf{a} = \mathbf{a}^+, \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}^+.$$

Составим π-уравнение (4.12)

$$z\theta + \mathbf{b}\pi = \mathbf{a}.$$

Имеем $|\pi| = 0$. Подставляя значение $z = 0$, получим $\pi_0 = \mathbf{a}(0)/\mathbf{b}(0)$. Представим полиномы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в виде

$$\mathbf{a}(z) = \mathbf{a}(0)\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i z), \qquad |\alpha_i| < 1,$$

$$\mathbf{b}(z) = \mathbf{b}(0)\prod_{i=1}^{m}(1-\beta_i z), \qquad |\beta_i| < 1.$$

Согласно формуле (4.11) решение имеет вид

$$\mathbf{h} = \frac{\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{a}} = z^{-1}\left[1 - \frac{\Pi(1-\beta_i z)}{\Pi(1-\alpha_i z)}\right].$$

Пример 7. Найдем программу экстраполяции на 2 такта случайного стационарного процесса с нулевым средним значением и ковариационным изображением

$$\psi = \frac{4z(1+1{,}25z)(z+1{,}25)}{(1-0{,}6z+0{,}2z^2)(z^2-0{,}6z+0{,}2)}.$$

Имеем

$$\mathbf{a}^* = 2(z+1{,}25), \quad \mathbf{b} = 1-0{,}6z+0{,}2z^2.$$

При такой факторизации условие $\widehat{\psi}^+ = \psi^-$ выполнено. Составляем π-уравнение (4.12):

$$z^2\boldsymbol{\theta} + (1-0{,}6z+0{,}2z^2)\boldsymbol{\pi} = 2(z+1{,}25).$$

Минимальное решение этого правильного π-уравнения содержит полиномы степеней $|\boldsymbol{\theta}| = 1$, $|\boldsymbol{\pi}| = 1$. Развертывая его в алгебраическую систему, получим

$$\pi_0 = 2{,}5, \quad -0{,}6\pi_0 + \pi_1 = 2, \quad \theta_0 + 0{,}2\pi_0 - 0{,}6\pi_1 = 0, \quad \theta_1 + 0{,}2\pi_1 = 0.$$

Откуда $\boldsymbol{\theta} = 1{,}6 - 0{,}7z$, $\boldsymbol{\pi} = 2{,}5 + 3{,}5z$. По формуле (4.11) находим оптимальный экстраполятор:

$$\mathbf{h} = \frac{0{,}64 - 0{,}28z}{1+0{,}8z}.$$

Он осуществляет линейную операцию

$$y_i + 0{,}8y_{i-1} = 0{,}64x_i - 0{,}28x_{i-1}.$$

Вычислим минимальную дисперсию ошибки:

$$J^* = \operatorname{ct} \boldsymbol{\pi}\widehat{\boldsymbol{\pi}} = \pi_0^2 + \pi_1^2 = 18{,}5.$$

Пример 8. Рассмотрим задачу воспроизведения динамической системой стационарного входного сигнала с нулевым средним значением и ковариационным изображением:

$$\psi = \frac{12{,}25z(1+0{,}82z)(z+0{,}82)}{(1-0{,}63z)(1-0{,}37z)(z-0{,}63)(z-0{,}37)}.$$

Динамическая система содержит в себе неустойчивый управляемый объект, имеющий к тому же общий полюс с полюсом ковариационного изображения входного сигнала:

$$\mathbf{g} = \frac{z(1+1{,}2z)}{(1-2{,}7z)(1-0{,}37z)}.$$

Имеем

$$\mathbf{a}^* = 3{,}5(1+0{,}82z), \quad \mathbf{b} = (1-0{,}63z)(1-0{,}37z),$$

$$\mathbf{v} = 1-0{,}37z, \quad \mathbf{b}_0 = 1-0{,}63z, \quad \mathbf{p}^+ = 1,$$

$$\mathbf{p}^- = z(1+1{,}2z), \quad \mathbf{q}_0^+ = 1, \quad \mathbf{q}_0^- = 1-2{,}7z,$$

Программа оптимального корректирующего звена, согласно (4.31), равна

$$\mathbf{w} = \frac{\theta}{(1-0{,}63z)\,\pi},$$

где θ и π — полиномы, удовлетворяющие π-уравнению (4.32):

$$z(1+1{,}2z)\theta + (1-0{,}63z)(1-0{,}37z)(1-2{,}7z)\pi = \\ = 3{,}5(1+0{,}82z)(1{,}2+z)(-2{,}7+z).$$

Заметим, что система линейна, и поэтому оптимальное корректирующее устройство не зависит от уровня входного сигнала. Сокращая обе части π-уравнения на множитель $(-3{,}5\cdot 2{,}7\cdot 1{,}2)$ и сохраняя прежние обозначения для полиномов θ и π, получим следующее π-уравнение:

$$z(1+1{,}2z)\theta + (1-0{,}63z)(1-0{,}37z)(1-2{,}7z)\pi = \\ = (1+0{,}82z)(1+0{,}833z)(1-0{,}37z).$$

Полином θ можно искать в виде $\theta = (1-0{,}37z)\theta'$, где полином θ' удовлетворяет π-уравнению

$$z(1+1{,}2z)\theta' + (1-0{,}63z)(1-2{,}7z)\pi = (1+0{,}82z)(1+0{,}833z).$$

Минимальное решение этого правильного π-уравнения содержит полиномы степеней $|\theta'| = 1$, $|\pi| = 1$. Соответствующая этому уравнению алгебраическая система имеет вид

$$\pi_0 = 1, \quad \theta_0' - 3{,}33\pi_0 + \pi_1 = 1{,}653,$$

$$1{,}2\theta_0' + \theta_1' + 1{,}7\pi_0 - 3{,}33\pi_1 = 0{,}683, \quad 1{,}2\theta_1' + 1{,}7\pi_1 = 0.$$

Решая ее, получим $\theta' = 3{,}8 - 1{,}67z$, $\pi = 1 + 1{,}18z$.

Таким образом, программа оптимального корректирующего звена

$$\mathbf{w} = \frac{(1-0{,}37z)(3{,}8-1{,}67z)}{(1-0{,}63z)(1+1{,}18z)},$$

или

$$\mathbf{w} = \frac{3{,}8-3{,}1z+0{,}62z^2}{1+0{,}55z-0{,}75z^2}.$$

Ей соответствует линейное преобразование

$$u_i + 0{,}55u_{i-1} - 0{,}75u_{i-2} = 3{,}8e_i - 3{,}1e_{i-1} + 0{,}62e_{i-2}.$$

Пример 9. Рассмотрим задачу воспроизведения динамической системой предсказанного значения входного сигнала — стационарного случайного процесса с нулевым средним значением. Ковариационное изображение входного сигнала имеет вид

$$\psi = \frac{4z}{(1-0{,}17z)(z-0{,}17)}.$$

Динамическая система содержит в себе неустойчивый управляемый объект с передаточной функцией $\mathbf{g} = 3z/(1-1{,}25z)$. Имеем

$$\mathbf{a}^* = 2, \quad \mathbf{b} = 1 - 0{,}17z,$$

$$\mathbf{p}^+ = 3, \quad \mathbf{p}^- = z, \quad \mathbf{q}^+ = 1, \quad \mathbf{q}^- = 1 - 1{,}25z.$$

На выходе динамической системы желательно получать предсказанное на 1 такт значение входного сигнала: $\lambda = 1$.

Согласно (4.36), будем искать управляющую программу в виде $\mathbf{w} = \theta/3\pi_1$, где θ и π_1 — полиномы, входящие в решение системы из двух π-уравнений (4.37)—(4.38):

$$z\theta + (1 - 1{,}25z)\pi_1 = 2(-1{,}25 + z),$$

$$z^2\theta + (1 - 0{,}17z)\pi_2 = 2(-1{,}25 + z),$$

минимальное относительно π_2. Найдем общее решение каждого из этих уравнений. Имеем

$$\theta = -1{,}125 + (1 - 1{,}25z)\xi, \quad \pi_1 = -2{,}5 - z\xi,$$

$$\theta = 0{,}268 - (1 - 0{,}17z)\eta, \quad \pi_2 = -2{,}5 + 1{,}57z + z^2\eta.$$

Относительно неизвестных полиномов ξ и η получаем уравнение

$$(1 - 1{,}25z)\xi + (1 - 0{,}17z)\eta = 1{,}393.$$

Задаваясь $|\xi| = |\eta| = 0$, получим алгебраическую систему

$$\xi_0 + \eta_0 = 1{,}393, \quad 1{,}25\xi_0 + 0{,}17\eta_0 = 0.$$

Ее решение $\xi = -0{,}22$, $\eta = 1{,}61$.

Таким образом, минимальное решение системы из двух π-уравнений имеет вид

$$\theta = -1{,}345 + 0{,}275z, \quad \pi_1 = -2{,}5 + 0{,}22z,$$

$$\pi_2 = -2{,}5 + 1{,}57z + 1{,}61z^2.$$

Оптимальная управляющая программа

$$\mathbf{w} = \frac{0{,}18 - 0{,}037z}{1 - 0{,}088z}.$$

Ей соответствует линейное преобразование

$$u_i - 0{,}088u_{i-1} = 0{,}18e_i - 0{,}037e_{i-1}.$$

Минимальная дисперсия ошибки

$$J^* = \mathrm{ct}\,\frac{(-2{,}5 + 1{,}57z + 1{,}61z^2)(-2{,}5 + 1{,}57z^{-1} + 1{,}61z^{-2})}{(-1{,}25 + z)(-1{,}25 + z^{-1})}.$$

Для того чтобы ее вычислить, составим π-уравнение:

$$z(1 - 1{,}25z)\theta + (-1{,}25 + z)\varphi = (-2{,}5 + 1{,}57z + 1{,}61z^2) \times \\ \times (1{,}61 + 1{,}57z - 2{,}5z^2).$$

Будем искать его решение, минимальное относительно φ. Выбирая $|\theta| = 2$, $|\varphi| = 1$, получим алгебраическую систему

$$-1{,}25\varphi_0 = -4{,}04, \quad \theta_0 + \varphi_0 - 1{,}25\varphi_1 = -1{,}4,$$

$$-1{,}25\theta_0 + \theta_1 + \varphi_1 = 11{,}3,$$

$$-1{,}25\theta_1 + \theta_2 = -1{,}4, \quad -1{,}25\theta_2 = -4{,}04.$$

Решая ее, получим $\theta_0 = -8{,}9$. Дисперсия ошибки системы $J^* = 7{,}1$.

3. Задача Винера и ее обобщения

Следующим шагом на пути решения статистических задач оптимизации является задача фильтрации стационарных процессов с нулевым средним значением, поставленная и решенная Норбертом Винером в 1942 г. и опубликованная в секретном военном отчете. Этот отчет был издан открытой монографией [137] только в послевоенное время.

Задача фильтрации ставится следующим образом: из суммы $\mathbf{x} = \mathbf{s} + \boldsymbol{\xi}$ двух сигналов — полезного сигнала $\mathbf{s}$ и помехи («шума») $\boldsymbol{\xi}$ требуется выделить полезный сигнал $\mathbf{s}$ с минимальной дисперсией ошибки. Сигналы $\mathbf{s}$ и $\boldsymbol{\xi}$ считаются стационарными, статистически независимыми, имеющими гауссовы распределения и нулевые средние значения.

Будем считать сигналы $\mathbf{s}$ и $\boldsymbol{\xi}$ образованными прохождением дискретного «белого шума» с единичной дисперсией через формирующие фильтры с передаточными функциями $\mathbf{s} = \mathbf{a}_s/\mathbf{b}_s$, $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{a}_\xi/\mathbf{b}_\xi$. Таким образом, ковариационные изображения этих сигналов $\boldsymbol{\psi}_s = \mathbf{a}_s\widehat{\mathbf{a}}_s/\mathbf{b}_s\widehat{\mathbf{b}}_s$, $\boldsymbol{\psi}_\xi = \mathbf{a}_\xi\widehat{\mathbf{a}}_\xi/\mathbf{b}_\xi\widehat{\mathbf{b}}_\xi$. С помощью подстановок $\widehat{\mathbf{a}} = z^{-|\mathbf{a}|}\widetilde{\mathbf{a}}$ приведем их к форме обычных рациональных функций от z:

$$\boldsymbol{\psi}_s = \frac{\boldsymbol{\nu}_s}{\boldsymbol{\mu}_s}, \quad \boldsymbol{\psi}_\xi = \frac{\boldsymbol{\nu}_\xi}{\boldsymbol{\mu}_\xi}, \tag{4.59}$$

где $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\mu}$ — полиномы от z.

Ковариационное изображение суммы $\mathbf{x}$ статистически независимых сигналов $\mathbf{s}$ и $\boldsymbol{\xi}$ равно сумме их ковариационных изображений $\boldsymbol{\psi}_x = \boldsymbol{\psi}_s + \boldsymbol{\psi}_\xi$. Считая полиномы $\boldsymbol{\mu}_s$ и $\boldsymbol{\mu}_\xi$ взаимно простыми $(\boldsymbol{\mu}_s, \boldsymbol{\mu}_\xi) = 1$, получим $\boldsymbol{\psi}_x = \boldsymbol{\nu}_x/\boldsymbol{\mu}_s\boldsymbol{\mu}_\xi$. Согласно общей теории статистических решений [58], оптимальный фильтр будет по-прежнему линейным.

Решение, полученное Н. Винером для непрерывного времени, сводится к интегральному уравнению. В дискретном случае ему соответствует по-прежнему бесконечная система линейных алгебраических уравнений. Полиномиальное исчисление сводит и эту задачу к конечному алгоритму.

Следуя установившейся методике, составим изображение ошибки фильтрации:

$$\mathbf{e} = \mathbf{hx} - \mathbf{s} = (\mathbf{h} - 1)\mathbf{s} + \mathbf{h}\boldsymbol{\xi}$$

и ее ковариационное изображение:

$$\psi_e = (\mathbf{h}-1)(\widehat{\mathbf{h}}-1)\psi_s + \mathbf{h}\widehat{\mathbf{h}}\psi_\xi.$$

Условие минимума дисперсии ошибки требует равенства нулю следующего функционала:

$$\delta J = \mathrm{ct}\,[(\mathbf{h}-1)\psi_s + \mathbf{h}\psi_\xi]\,\delta\widehat{\mathbf{h}} = 0.$$

Используя ковариационное изображение суммы сигналов, это условие можно записать в виде

$$\delta J = \mathrm{ct}(\mathbf{h}\psi_x - \psi_s)\,\delta\widehat{\mathbf{h}} = 0. \tag{4.60}$$

Покажем, что оптимальный фильтр имеет передаточную функцию

$$\mathbf{h} = \frac{\mu_\xi^+\theta}{\nu_x^+}, \tag{4.61}$$

где θ — полином, входящий в минимальное относительно π решение π-уравнения

$$\nu_x^-\theta + \mu_s^+\pi = \nu_s\mu_\xi^-. \tag{4.62}$$

Из общего решения уравнения (4.62) следует $\delta\theta = \mu_s^+\delta\zeta$, где ζ — произвольный полином. Следовательно, вариация передаточной функции фильтра равна

$$\delta\mathbf{h} = \frac{\mu_x^+}{\nu_x^+}\,\delta\zeta.$$

Инвертируя это выражение с учетом $\widehat{\psi}_x^+ = \psi_x^-$, получаем

$$\delta\widehat{\mathbf{h}} = \frac{\mu_x^-}{\nu_x^-}\,\delta\widehat{\zeta}. \tag{4.63}$$

Подставим (4.61) и (4.63) в (4.60):

$$\delta J = \mathrm{ct}\left(\frac{\nu_x}{\mu_s\mu_\xi}\cdot\frac{\mu_\xi^+\theta}{\nu_x^+} - \frac{\nu_s}{\mu_s}\right)\frac{\mu_s^-\mu_\xi^-}{\nu_x^-}\,\delta\widehat{\zeta}. \tag{4.64}$$

Учитывая π-уравнение (4.62), имеем

$$\delta J = \mathrm{ct}\,\frac{\pi}{\nu_x^-}\,\delta\widehat{\zeta}. \tag{4.65}$$

Минимальное решение π-уравнения (4.62) дает $|\pi| = |\nu_x^-| - 1$. Мы видим, что функция под знаком ct в выражении (4.65) является левой и правильной и, следовательно, условие оптимальности выполнено.

Факторизацию полинома $\nu_x = \nu_x^+ \nu_x^-$ можно проводить с точностью до произвольного числового множителя. Как видно из уравнения (4.62), полином θ также определяется с точностью до обратного ему множителя. Но в формулу для оптимального фильтра (4.61), если ее записать в виде $\mathbf{h} = \mu_\xi^+(\nu_x^-\theta)/\nu_x$, входит только произведение $\nu_x^-\theta$, так что неопределенности факторизации и определения полинома θ из π-уравнения (4.62) взаимно компенсируются.

Полином μ_ξ также можно факторизовать с точностью до произвольного числового множителя. Для сравнения рассмотрим две факторизации, отличающиеся множителем k: $(\mu_\xi^+)' = k\mu_\xi^+$, $(\mu_\xi^-)' = \frac{1}{k}\mu_\xi^-$. При этом π-уравнение (4.62) преобразуется к виду

$$\nu_x^-\theta' + \mu_s^+\pi' = \frac{1}{k}\nu_s\mu_\xi^-.$$

Его решение: $\theta' = \frac{1}{k}\theta$, $\pi' = \frac{1}{k}\pi$. По формуле (4.61) получаем преобразованную передаточную функцию фильтра

$$\mathbf{h}' = \frac{(\mu_\xi^+)'\theta'}{\nu_x^+} = \frac{\mu_\xi^+\theta}{\nu_x^+} = \mathbf{h}.$$

Мы видим, что она не изменилась.

Задача Винера имеет решение и в том случае, когда полиномы μ_s и μ_ξ не взаимно просты: $(\mu_s, \mu_\xi) = \nu$. Имеем $\mu_s = \nu\mu_s^0$, $\mu_\xi = \nu\mu_\xi^0$, $\mu_x = \nu\mu_s^0\mu_\xi^0$. Решение имеет вид $\mathbf{h} = (\mu_\xi^0)^+\theta/\nu_x^+$, где

$$\nu_x^-\theta + \mu_s^+\pi = \nu_s(\mu_\xi^0)^-.$$

Недавно П. В. Надеждин [59] получил новое решение задачи Винера. Согласно [59], это решение имеет по-прежнему вид (4.61), но полином θ входит в решение π-уравнения

$$\mu_\xi^+\theta + \mu_s^+\pi = \nu_x^+, \tag{4.66}$$

минимальное относительно θ. Докажем правильность этого решения. Производя возможные сокращения в формуле (4.64), получим

$$\delta J = \mathrm{ct}\left(\frac{\theta}{\mu_s^+} - \frac{\nu_s\mu_\xi^-}{\mu_s^+\nu_x^-}\right)\delta\hat{\xi}. \tag{4.67}$$

Учитывая формулу $\mathbf{v}_x = \mathbf{v}_s\boldsymbol{\mu}_\xi + \mathbf{v}_\xi\boldsymbol{\mu}_s$, возникающую при сложении ковариационных изображений $\psi_x = \psi_s + \psi_\xi$, сделаем следующие преобразования:

$$\frac{\mathbf{v}_s\boldsymbol{\mu}_\xi^-}{\boldsymbol{\mu}_s^+\mathbf{v}_x^-} = \frac{\mathbf{v}_s\boldsymbol{\mu}_\xi}{\boldsymbol{\mu}_s^+\boldsymbol{\mu}_\xi^+\mathbf{v}_x^-} = \frac{\mathbf{v}_x - \mathbf{v}_\xi\boldsymbol{\mu}_s}{\boldsymbol{\mu}_s^+\boldsymbol{\mu}_\xi^+\mathbf{v}_x^-} = \frac{\mathbf{v}_x^+}{\boldsymbol{\mu}_s^+\boldsymbol{\mu}_\xi^+} - \frac{\mathbf{v}_\xi\boldsymbol{\mu}_s^-}{\boldsymbol{\mu}_\xi^+\mathbf{v}_x^-}.$$

Выражение (4.67) примет вид

$$\delta J = \mathrm{ct}\left(\frac{\theta}{\boldsymbol{\mu}_s^+} - \frac{\mathbf{v}_x^+}{\boldsymbol{\mu}_s^+\boldsymbol{\mu}_\xi^+} + \frac{\mathbf{v}_\xi\boldsymbol{\mu}_s^-}{\boldsymbol{\mu}_\xi^+\mathbf{v}_x^-}\right)\delta\hat{\zeta}.$$

С учетом π-уравнения (4.66) получаем

$$\delta J = \mathrm{ct}\left(\frac{\mathbf{v}_\xi\boldsymbol{\mu}_s^-}{\boldsymbol{\mu}_\xi^+\mathbf{v}_x^-} - \frac{\pi}{\boldsymbol{\mu}_\xi^+}\right)\delta\hat{\zeta}.$$

Для того чтобы обратить это выражение в нуль, введем дополнительное π-уравнение:

$$\mathbf{v}_x^-\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\mu}_\xi^+\boldsymbol{\pi}_1 = \mathbf{v}_\xi\boldsymbol{\mu}_s^-. \tag{4.68}$$

При этом

$$\delta J = \mathrm{ct}\,\frac{\boldsymbol{\pi}_1}{\mathbf{v}_x^-}\cdot\delta\hat{\zeta},$$

и это выражение обращается в нуль, если взять минимальное решение (4.68) относительно $\boldsymbol{\pi}_1$ степени $|\boldsymbol{\pi}_1| < |\mathbf{v}_x^-|$. Таким образом, мы получили систему из двух π-уравнений (4.66), (4.68) относительно трех неизвестных полиномов $\boldsymbol{\pi}$, $\boldsymbol{\pi}_1$ и θ. Легко видеть, что это — избыточная система уравнений, и при ее решении методом исключения $\boldsymbol{\pi}$ мы опять придем к π-уравнению (4.62). Однако, как это следует из теории избыточных систем, дополнительное уравнение (4.68) можно просто отбросить и получать нужное решение только из одного π-уравнения (4.66).

Обобщим задачу Винера на случай, когда на выходе фильтра требуется получать как можно более точно не просто полезный сигнал, а его упрежденное значение на λ тактов

$$\mathbf{v} = \Lambda\mathbf{s}, \quad \Lambda = z^{-\lambda}, \quad \lambda = 1, 2, 3, \ldots$$

Решение этой задачи имеет вид

$$\mathbf{h} = \frac{\boldsymbol{\mu}_\xi^+\theta}{\mathbf{v}_x^+}, \tag{4.69}$$

где θ — минимальный полином π-уравнения

$$z^\lambda \mu_\xi^+ \theta + \mu_s^+ \pi = \nu_x^+. \tag{4.70}$$

Докажем справедливость этого решения. Условие минимума дисперсии ошибки

$$\delta J = \mathrm{ct}\,(\mathrm{h}\psi_x - \Lambda\psi_s)\,\delta\hat{\mathrm{h}} = 0. \tag{4.71}$$

Из (4.70) имеем $\delta\theta = \mu_s^+ \delta\zeta$, а следовательно,

$$\delta\mathrm{h} = \frac{\mu_s^+ \mu_\xi^+}{\nu_x^+} \cdot \delta\zeta,$$

где ζ — произвольный полином. Подставляя эти значения в (4.71), получим

$$\delta J = \mathrm{ct}\left(\frac{\mu_\xi^+ \theta}{\nu_x^+} \cdot \frac{\nu_x}{\mu_s \mu_\xi} - \frac{\nu_s}{z^\lambda \mu_s}\right) \frac{\mu_s^- \mu_\xi^-}{\nu_x^-} \cdot \delta\hat{\zeta} =$$

$$= \mathrm{ct}\left(\frac{\theta}{\mu_s^+} - \frac{\nu_s \mu_\xi^-}{z^\lambda \mu_s^+ \nu_x^-}\right) \delta\hat{\zeta}. \tag{4.72}$$

С учетом π-уравнения (4.70) имеем

$$\frac{\theta}{\mu_s^+} = \frac{\nu_x^+}{z^\lambda \mu_s^+ \mu_\xi^+} - \frac{\pi}{z^\lambda \mu_\xi^+}.$$

Преобразуем выражение

$$\frac{\nu_x^+}{z^\lambda \mu_s^+ \mu_\xi^+} - \frac{\nu_s \mu_\xi^-}{z^\lambda \mu_s^+ \nu_x^-} = \frac{\nu_x - \nu_s \mu_\xi}{z^\lambda \mu_s^+ \mu_\xi^+ \nu_x^-} = \frac{\nu_\xi \mu_s}{z^\lambda \mu_s^+ \mu_\xi^+ \nu_x^-} = \frac{\nu_\xi \mu_s^-}{z^\lambda \mu_\xi^+ \nu_x^-}.$$

Условие (4.72) принимает вид

$$\delta J = \mathrm{ct}\,\frac{1}{z^\lambda}\left(-\frac{\pi}{\mu_\xi^+} + \frac{\nu_\xi \mu_s^-}{\mu_\xi^+ \nu_x^-}\right) \delta\hat{\zeta}.$$

Составим дополнительное π-уравнение

$$\nu_x^- \pi + \mu_\xi^+ \theta_1 = \nu_\xi \mu_s^-. \tag{4.73}$$

При этом

$$\delta J = \mathrm{ct}\,\frac{\theta_1}{z^\lambda \nu_x^-}\,\delta\hat{\zeta},$$

и это выражение равно нулю, если берется минимальное решение относительно θ_1 степени $|\theta_1| < |\nu_x^-| + \lambda$. Легко видеть, что система π-уравнений (4.70), (4.73) является избыточной; поэтому уравнение (4.73) можно просто отбросить.

Поставленная задача имеет и другое решение: формула (4.69) остается той же, но полином θ удовлетворяет π-уравнению

$$z^{\lambda}\mathbf{v}_x^-\theta + \mu_s^+\pi = \mathbf{v}_s\mu_\xi^-.$$

Однако с вычислительной точки зрения это уравнение менее привлекательно, чем уравнение (4.70).

Рассмотрим еще одно обобщение задачи Винера. Требуется спроектировать систему с обратной связью, на выходе которой нужно получать как можно более точное значение полезного сигнала, действующего на входе системы вместе с помехой. Покажем, что программа оптимального управляющего устройства равна

$$\mathbf{w} = \frac{\mu_\xi^+\mathbf{q}^+\theta}{\mu_s^+\mathbf{p}^+\pi}, \tag{4.74}$$

где θ и π — полиномы, входящие в решение π-уравнения

$$\mu_\xi^+\mathbf{p}^-\theta + \mu_s^+\mathbf{q}^-\pi = \mathbf{v}_x^+\tilde{\mathbf{p}}^-\tilde{\mathbf{q}}^-, \tag{4.75}$$

минимальное относительно θ. Будем считать выполненными условия взаимной простоты следующих полиномов:

$$(\mu_s, \mu_\xi) = 1, \quad (\mu_s, \mathbf{q}) = 1, \quad (\mu_\xi, \mathbf{q}) = 1.$$

Подставляя (4.74) в передаточную функцию системы с обратной связью и учитывая π-уравнение (4.75), получим

$$\mathbf{h} = \frac{\mu_\xi^+\mathbf{p}^-\theta}{\mathbf{v}_x^+\tilde{\mathbf{p}}^-\tilde{\mathbf{q}}^-}.$$

Из (4.75) имеем $\delta\theta = \mu_s^+\mathbf{q}^-\delta\zeta$, и, следовательно,

$$\delta\mathbf{h} = \frac{\mu_s^+\mu_\xi^+\mathbf{p}^-\mathbf{q}^-}{\mathbf{v}_x^+\tilde{\mathbf{p}}^-\tilde{\mathbf{q}}^-}\cdot\delta\zeta.$$

Инвертируя эту формулу, получим

$$\delta\hat{\mathbf{h}} = \frac{\mu_s^-\mu_\xi^-\tilde{\mathbf{p}}^-\tilde{\mathbf{q}}^-}{\mathbf{v}_x^-\mathbf{p}^-\mathbf{q}^-}\,\delta\hat{\zeta}.$$

С учетом этих значений выражение (4.71) принимает вид

$$\delta J = \mathrm{ct}\left(\frac{\mu_\xi^+ \mathrm{p}^- \theta}{\nu_x^+ \tilde{\mathrm{p}}^- \tilde{\mathrm{q}}^-}\cdot\frac{\nu_x}{\mu_s\mu_\xi}\cdot\frac{\mu_\xi^- \mu_s^- \tilde{\mathrm{p}}^- \tilde{\mathrm{q}}^-}{\nu_x^- \mathrm{p}^- \mathrm{q}^-} - \right.$$

$$\left. - \frac{\nu_s}{\mu_s}\cdot\frac{\mu_s^- \mu_\xi^- \tilde{\mathrm{p}}^- \tilde{\mathrm{q}}^-}{\nu_x^- \mathrm{p}^- \mathrm{q}^-}\right)\delta\hat{\xi} = \mathrm{ct}\left(\frac{\theta}{\mu_s^+ \mathrm{q}^-} - \frac{\nu_s \mu_\xi^- \tilde{\mathrm{p}}^- \tilde{\mathrm{q}}^-}{\mu_s^+ \nu_x^- \mathrm{p}^- \mathrm{q}^-}\right)\delta\hat{\xi}. \quad (4.76)$$

Согласно (4.75) имеем

$$\frac{\theta}{\mu_s^+ \mathrm{q}^-} = \frac{\nu_x^+ \tilde{\mathrm{p}}^- \tilde{\mathrm{q}}^-}{\mu_s^+ \mu_\xi^+ \mathrm{p}^- \mathrm{q}^-} - \frac{\pi}{\mu_\xi^+ \mathrm{p}^-}.$$

Преобразуем выражение

$$\frac{\nu_x^+ \tilde{\mathrm{p}}^- \tilde{\mathrm{q}}^-}{\mu_s^+ \mu_\xi^+ \mathrm{p}^- \mathrm{q}^-} - \frac{\nu_s \mu_\xi^- \tilde{\mathrm{p}}^- \tilde{\mathrm{q}}^-}{\mu_s^+ \nu_x^- \mathrm{p}^- \mathrm{q}^-} = \frac{\tilde{\mathrm{p}}^- \tilde{\mathrm{q}}^- (\nu_x - \nu_s \mu_\xi)}{\mu_s^+ \mu_\xi^+ \nu_x^- \mathrm{p}^- \mathrm{q}^-} = \frac{\nu_\xi \mu_s^- \tilde{\mathrm{p}}^- \tilde{\mathrm{q}}^-}{\mu_\xi^+ \nu_x^- \mathrm{p}^- \mathrm{q}^-}.$$

Условие (4.76) принимает вид

$$\delta J = \mathrm{ct}\,\frac{1}{\mathrm{p}^-}\left(-\frac{\pi}{\mu_\xi^+} + \frac{\nu_\xi \mu_s^- \tilde{\mathrm{p}}^- \tilde{\mathrm{q}}^-}{\mu_\xi^+ \nu_x^- \mathrm{q}^-}\right)\delta\hat{\xi}.$$

Составим дополнительное π-уравнение

$$\nu_x^- \mathrm{q}^- \pi + \mu_\xi^+ \theta_1 = \nu_\xi \mu_s^- \tilde{\mathrm{p}}^- \tilde{\mathrm{q}}^-. \quad (4.77)$$

Проверим, является ли система π-уравнений (4.75), (4.77) исключительной. Умножая (4.75) на ν_x^-, а (4.77) на μ_s^+, и вычитая (4.77) из (4.75), получим

$$\mu_\xi^+ \mathrm{p}^- \nu_x^- \theta - \mu_s^+ \mu_\xi^+ \theta_1 = \nu_x \tilde{\mathrm{p}}^- \tilde{\mathrm{q}}^- - \nu_\xi \mu_s \tilde{\mathrm{p}}^- \tilde{\mathrm{q}}^- = \nu_s \mu_\xi \tilde{\mathrm{p}}^- \tilde{\mathrm{q}}^-.$$

Сокращая на μ_ξ^+, получим непротиворечивое уравнение

$$\nu_x^- \mathrm{p}^- \theta - \mu_s^+ \theta_1 = \nu_s \mu_\xi^- \tilde{\mathrm{p}}^- \tilde{\mathrm{q}}^-.$$

Таким образом, система (4.75), (4.77) является избыточной, и поэтому уравнение (4.77) можно отбросить.

Рассмотрим следующее обобщение задачи Винера. Требуется спроектировать динамическую систему, желаемый выход которой представлял бы собой упрежденное значение полезного сигнала, действующего на входе вместе с помехой:

$$\mathrm{v} = \Lambda \mathrm{s}, \quad \Lambda = z^{-\lambda}, \quad \lambda = 1, 2, 3\ldots$$

Покажем, что программа оптимального управляющего устройства равна

$$\mathbf{w} = \frac{\mu_\xi^+ \mathbf{q}^+ \theta}{\mathbf{p}^+ \pi_1}, \tag{4.78}$$

где θ и π_1 — полиномы, входящие в решение системы из двух π-уравнений

$$\mu_\xi^+ \mathbf{p}^- \theta + \mathbf{q}^- \pi_1 = \mathbf{v}_x^+ \tilde{\mathbf{p}}^- \tilde{\mathbf{q}}^-, \tag{4.79}$$

$$z^\lambda \mathbf{v}_x^- \mathbf{p}^- \theta + \mu_s^+ \pi_2 = \mathbf{v}_s \mu_\xi^- \tilde{\mathbf{p}}^- \tilde{\mathbf{q}}^- \tag{4.80}$$

относительно трех неизвестных полиномов θ, π_1 и π_2, минимальное относительно π_2.

Подставляя (4.78) в передаточную функцию системы с обратной связью (4.20) и учитывая π-уравнение (4.79), получим

$$\mathbf{h} = \frac{\mu_\xi^+ \mathbf{p}^- \theta}{\mathbf{v}_x^+ \tilde{\mathbf{p}}^- \tilde{\mathbf{q}}^-}.$$

Составим изображение ошибки

$$\mathbf{e} = \mathbf{v} - \mathbf{y} = \mathbf{h}\mathbf{x} - \Lambda \mathbf{s} = (\mathbf{h} - \Lambda)\mathbf{s} + \mathbf{h}\xi$$

и ее ковариационное изображение

$$\psi_e = (\mathbf{h} - \Lambda)(\hat{\mathbf{h}} - \hat{\Lambda})\psi_s + \mathbf{h}\hat{\mathbf{h}}\psi_\xi.$$

Условие минимума дисперсии ошибки имеет вид

$$\delta J = \mathrm{ct}(\mathbf{h}\psi_x - \Lambda\psi_s)\delta\hat{\mathbf{h}} = 0. \tag{4.81}$$

Покажем, что оно выполняется. Общее решение системы π-уравнений (4.79) — (4.80) относительно θ имеет вид

$$\theta = \theta_0 + \mu_s^+ \mathbf{q}^- \zeta,$$

где θ_0 — минимальное решение, а ζ — произвольный полином. Варьируя его, получим $\delta\theta = \mu_s^+ \mathbf{q}^- \delta\zeta$. Отсюда

$$\delta\mathbf{h} = \frac{\mu_s^+ \mu_\xi^+}{\mathbf{v}_x^+} \cdot \frac{\mathbf{p}^- \mathbf{q}^-}{\tilde{\mathbf{p}}^- \tilde{\mathbf{q}}^-} \delta\zeta.$$

Произведем инверсию этого выражения

$$\delta\hat{\mathbf{h}} = \frac{\mu_s^- \mu_\xi^-}{\mathbf{v}_x^-} \cdot \frac{\tilde{\mathbf{p}}^- \tilde{\mathbf{q}}^-}{\mathbf{p}^- \mathbf{q}^-} \delta\hat{\zeta}.$$

Подставляя в формулу (4.81) значения $\mathbf{h}$, $\delta\widehat{\mathbf{h}}$, ψ_x и ψ_s, получим

$$\delta J = \mathrm{ct}\left(\frac{\nu_x}{\mu_s\mu_\xi}\cdot\frac{\mu_\xi^+\mathbf{p}^-\theta}{\nu_x^+\widetilde{\mathbf{p}}^-\widetilde{\mathbf{q}}^-} - \frac{\nu_s}{z^\lambda\mu_s}\right)\frac{\mu_s^-\mu_\xi^-}{\nu_x^-}\cdot\frac{\widetilde{\mathbf{p}}^-\widetilde{\mathbf{q}}^-}{\mathbf{p}^-\mathbf{q}^-}\delta\widehat{\zeta}.$$

С учетом π-уравнения (4.80) это выражение принимает вид

$$\delta J = \mathrm{ct}\,\frac{\pi_2}{z^\lambda\nu_x^-\mathbf{p}^-\mathbf{q}^-}\,\delta\widehat{\zeta}. \tag{4.82}$$

Минимальное решение системы π-уравнений (4.79) — (4.80) содержит полиномы следующих степеней:

$$|\theta| = |\mu_s^+| + |\mathbf{q}^-| - 1,$$

$$|\pi_1| = |\mu_s^+| + |\mu_\xi^+| + |\mathbf{p}^-| - 1,$$

$$|\pi_2| = |\nu_x^-| + |\mathbf{p}^-| + |\mathbf{q}^-| + \lambda - 1.$$

Мы видим, что функция под знаком ct в выражении (4.82) является левой и правильной, и, следовательно, условие оптимальности выполнено.

Рассмотрим еще одно обобщение задачи Винера. Требуется спроектировать систему с обратной связью, желаемый выход которой выражается заданным оператором от полезного сигнала $\mathbf{v} = \Lambda\mathbf{s}$, где Λ — в общем случае физически нереализуемый линейный оператор вида $\Lambda = z^{-\lambda}\dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$ ($\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ — заданные полиномы от z). Система действует в условиях помех.

Покажем, что программа оптимального управляющего устройства равна

$$\mathbf{w} = \frac{\mu_\xi^+\mathbf{q}^+\theta}{\mathbf{p}^+\pi_1}, \tag{4.83}$$

где θ и π_1 — полиномы, входящие в решение системы из двух π-уравнений относительно трех неизвестных полиномов θ, π_1 и π_2

$$\mu_\xi^+\mathbf{p}^-\theta + \mathbf{q}^-\pi_1 = \nu_x^+\mathbf{d}\mathbf{p}^-\widetilde{\mathbf{q}}^-, \tag{4.84}$$

$$z^\lambda\nu_x^-\mathbf{p}^-\theta + \mu_s^+\mathbf{d}\pi_2 = \nu_s\mu_\xi^-\mathbf{c}\widetilde{\mathbf{p}}^-\widetilde{\mathbf{q}}^-, \tag{4.85}$$

минимальное относительно π_2. Подставляя значение $\mathbf{w}$ (4.83) в передаточную функцию системы управления с обратной связью и учитывая π-уравнение (4.84), получим

$$\mathbf{h} = \frac{\mu_\xi^+ \mathbf{p}^- \theta}{\mathbf{v}_x^+ \mathbf{d}\widetilde{\mathbf{p}}^- \widetilde{\mathbf{q}}^-}. \tag{4.86}$$

Составим изображение ошибки:

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{v} = \mathbf{hx} - \Lambda\mathbf{s} = (\mathbf{h} - \Lambda)\,\mathbf{s} + \mathbf{h}\xi,$$

и ее ковариационное изображение:

$$\psi_e = (\mathbf{h} - \Lambda)(\widehat{\mathbf{h}} - \widehat{\Lambda})\,\psi_s + \mathbf{h}\widehat{\mathbf{h}}\psi_\xi.$$

Условие минимума дисперсии ошибки имеет вид

$$\delta J = \mathrm{ct}\,[(\mathbf{h} - \Lambda)\,\psi_s + \mathbf{h}\psi_\xi]\,\delta\widehat{\mathbf{h}} = 0,$$

или

$$\delta J = \mathrm{ct}\,(\mathbf{h}\psi_x - \Lambda\psi_s)\,\delta\widehat{\mathbf{h}} = 0. \tag{4.87}$$

Покажем, что оно выполняется. Общее решение системы π-уравнений (4.84), (4.85) относительно θ имеет вид $\theta = \theta_0 + \mu_s^+ \mathbf{dq}^- \zeta$, где θ_0 — минимальное решение, а ζ — произвольный полином. Варьируя его, получим $\delta\theta = \mu_s^+ \mathbf{dq}^- \delta\zeta$. Варьируя (4.86), имеем

$$\delta\mathbf{h} = \frac{\mu_s^+ \mu_\xi^+}{\mathbf{v}_x^+} \frac{\mathbf{p}^- \mathbf{q}^-}{\widetilde{\mathbf{p}}^- \widetilde{\mathbf{q}}^-}\,\delta\zeta.$$

Произведем инверсию этого выражения:

$$\delta\widehat{\mathbf{h}} = \frac{\mu_s^- \mu_\xi^-}{\mathbf{v}_x^-} \frac{\widetilde{\mathbf{p}}^- \widetilde{\mathbf{q}}^-}{\mathbf{p}^- \mathbf{q}^-}\,\delta\widehat{\zeta}.$$

Подставляя в формулу (4.87) значения $\mathbf{h}$, $\delta\widehat{\mathbf{h}}$, ψ_x и ψ_s, получим

$$\delta J = \mathrm{ct}\left(\frac{\mathbf{v}_x}{\mu_s \mu_\xi} \cdot \frac{\mu_\xi^+ \mathbf{p}^- \theta}{\mathbf{v}_x^+ \mathbf{d}\widetilde{\mathbf{p}}^- \widetilde{\mathbf{q}}^-} - \frac{\mathbf{c}}{z^\lambda \mathbf{d}} \cdot \frac{\mathbf{v}_s}{\mu_s}\right) \frac{\mu_s^- \mu_\xi^-}{\mathbf{v}_x^-} \frac{\widetilde{\mathbf{p}}^- \widetilde{\mathbf{q}}^-}{\mathbf{p}^- \mathbf{q}^-}\,\delta\widehat{\zeta}.$$

С учетом π-уравнения (4.85) это выражение принимает вид

$$\delta J = \mathrm{ct}\,\frac{\pi_2}{z^\lambda \mathbf{v}_x^- \mathbf{p}^- \mathbf{q}^-}\,\delta\widehat{\zeta}. \tag{4.88}$$

Минимальное решение системы π-уравнений (4.84—4.85) содержит полиномы следующих степеней:

$$|\theta| = |\mu_s^+| + |\mathbf{d}| + |\mathbf{q}^-| - 1,$$

$$|\pi_1| = |\mu_s^+| + |\mu_\xi^+| + |\mathbf{d}| + |\mathbf{p}^-| - 1,$$

$$|\pi_2| = \lambda + |\nu_x^-| + |\mathbf{p}^-| + |\mathbf{q}^-| - 1.$$

Мы видим, что функция под знаком ct в выражении (4.88) является левой и правильной и, следовательно, условие оптимальности выполнено.

Докажем инвариантность программы (4.83) относительно различных способов факторизации полиномов ν_x и μ_ξ: $\nu_x = \nu_x^+\nu_x^-$, $\mu_\xi = \mu_\xi^+\mu_\xi^-$. Рассмотрим другую факторизацию, отличающуюся числовыми множителями k и l: $(\nu_x^+)' = k\nu_x^+$, $(\nu_x^-)' = \frac{1}{k}\nu_x^-$, $(\mu_\xi^+)' = \frac{1}{l}\mu_\xi^+$, $(\mu_\xi^-)' = l\mu_\xi^-$. При этом π-уравнения (4.84) и (4.85) принимают вид

$$\frac{1}{l}\mu_\xi^+\mathbf{p}^-\theta' + \mathbf{q}^-\pi_1' = k\nu_x^+\mathbf{d}\tilde{\mathbf{p}}^-\tilde{\mathbf{q}}^-,$$

$$\frac{1}{k}\nu_x^- z^\lambda\mathbf{p}^-\theta' + \mu_s^+\mathbf{d}\pi_2' = l\mu_\xi^-\nu_s\mathbf{c}\tilde{\mathbf{p}}^-\tilde{\mathbf{q}}^-.$$

Согласно изложенному в разделе 3 гл. 1, $\theta' = kl\theta$, $\pi_1' = k\pi_1$, $\pi_2' = l\pi_2$. Программа (4.83) преобразуется к виду

$$\mathbf{w}' = \frac{(\mu_\xi^+)'\,\mathbf{q}^+\theta'}{\mathbf{p}^+\pi_1'} = \frac{\mu_\xi^+\mathbf{q}^+\theta}{\mathbf{p}^+\pi_1}.$$

Мы видим, что она инвариантна, т. е. $\mathbf{w}' = \mathbf{w}$. Таким образом, нас устраивает факторизация полиномов ν_x и μ_ξ с точностью до произвольных числовых множителей. Что касается факторизации полинома μ_s, то неопределенность числового множителя при μ_s^+ сказывается только на величине полинома π_2 и не влияет на программу (4.83).

Пример 1. Требуется отфильтровать сигнал, имеющий ковариационное изображение

$$\psi_s = \frac{a}{(1-\alpha z)(1-\alpha z^{-1})}$$

от шума, имеющего ковариационное изображение $\psi_\xi = b$. Составим сумму ковариационных изображений

$$\psi_x = \psi_s + \psi_\xi = \frac{a}{(1-\alpha z)(1-\alpha z^{-1})} + b = \frac{c(1-\beta z)(1-\beta z^{-1})}{(1-\alpha z)(1-\alpha z^{-1})},$$

где $a+b(1+\alpha^2)=c(1+\beta^2)$, $\alpha b=\beta c$. Имеем

$$\mathbf{v}_s = az,\quad \boldsymbol{\mu}_s^+ = 1-\alpha z,\quad \mathbf{v}_\xi = b,\quad \boldsymbol{\mu}_\xi = 1,$$

$$\mathbf{v}_x^+ = c(1-\beta z),\quad \mathbf{v}_x^- = z-\beta.$$

Будем искать оптимальный фильтр по формуле (4.61)

$$\mathbf{h} = \frac{\theta}{c(1-\beta z)},$$

где θ удовлетворяет π-уравнению (4.62)

$$(z-\beta)\theta + (1-\alpha z)\pi = az.$$

В минимальное решение этого уравнения относительно π входит полином θ степени, равной нулю. Пользуясь методом корней, положим $z=\alpha^{-1}$. Получим $\theta_0 = a/(1-\alpha\beta)$. Следовательно, программа оптимального фильтра равна

$$\mathbf{h} = \frac{a}{c(1-\alpha\beta)(1-\beta z)}.$$

Применим теперь формулу (4.66). Имеем

$$\theta + (1-\alpha z)\pi = c(1-\beta z).$$

В минимальное решение относительно θ входят полиномы с $|\theta| = 0$, $|\pi| = 0$. Минимальный полином θ можно получить как остаток от деления $c(1-\beta z)$ на $(1-\alpha z)$. Полагая $z=\alpha^{-1}$, получим

$$\theta_0 = \frac{c(\alpha-\beta)}{\alpha}.$$

По формуле (4.61) имеем

$$\mathbf{h} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha(1-\beta z)}.$$

Покажем, что это — то же самое решение. Надо доказать, что

$$\frac{a}{c(1-\alpha\beta)} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha},$$

или

$$\frac{a}{c} = \frac{(\alpha-\beta)(1-\alpha\beta)}{\alpha}.$$

Имеем

$$a + \frac{\beta}{\alpha}c(1+\alpha^2) = c(1+\beta^2),\qquad \frac{a}{c} = 1+\beta^2 - \frac{\beta}{\alpha}(1+\alpha^2).$$

Приравнивая

$$\frac{(\alpha-\beta)(1-\alpha\beta)}{\alpha} = 1+\beta^2-\frac{\beta}{\alpha}(1+\alpha^2),$$

получаем тождество.

Теперь поставим задачу получить на выходе фильтра упрежденное на λ тактов значение этого полезного сигнала. Пользуясь уравнением (4.70), получим

$$z^\lambda\theta + (1-\alpha z)\pi = c(1-\beta z).$$

Имеем $|\theta| = 0$. Полагая $z = \alpha^{-1}$, будем иметь

$$\alpha^{-\lambda}\theta_0 = c(1-\beta\alpha^{-1}),$$

откуда $\theta_0 = c\alpha^{\lambda-1}(\alpha-\beta)$. По формуле (4.69) получаем программу фильтра-экстраполятора

$$\mathbf{h} = \frac{\alpha^{\lambda-1}(\alpha-\beta)}{1-\beta z}.$$

Этот фильтр производит линейное преобразование

$$y_i - \beta y_{i-1} = \alpha^{\lambda-1}(\alpha-\beta)x_i.$$

Рассмотрим числовой пример. Пусть ковариационные коэффициенты полезного сигнала и шума равны

$$\psi_s(i) = (0{,}4)^{|i|},$$

$$\psi_\xi(i) = 0{,}5\delta_{i0} = \begin{cases} 0{,}5, & i = 0, \\ 0, & i \neq 0. \end{cases}$$

Последнее означает, что шум является белым. Составим ковариационные изображения этих процессов. Имеем

$$\psi_s = \frac{0{,}84z}{(1-0{,}4z)(z-0{,}4)},$$

$$\nu_s = 0{,}84z, \quad \mu_s^+ = 1-0{,}4z, \quad \mu_s^- = z-0{,}4.$$

Ковариационное изображение шума равно $\psi_\xi = 0{,}5$. Составим сумму ковариационных изображений:

$$\psi_x = \frac{0{,}84}{(1-0{,}4z)(1-0{,}4z^{-1})} + 0{,}5 = \frac{1{,}39(1-0{,}15z)(1-0{,}15z^{-1})}{(1-0{,}4z)(1-0{,}4z^{-1})}.$$

Имеем

$$\nu_x^+ = 1{,}39(1-0{,}15z), \quad \nu_x^- = z-0{,}15.$$

Составляем π-уравнение (4.66)

$$\theta + (1-0{,}4z)\pi = 1{,}39(1-0{,}15z).$$

Его решение $\theta = 0{,}87$. По формуле (4.61) получаем программу фильтра

$$\mathbf{h} = \frac{0{,}625}{1-0{,}15z}.$$

Она осуществляет следующее линейное преобразование

$$y_i - 0{,}15y_{i-1} = 0{,}625x_i.$$

Пример 2. Требуется рассчитать управляющую программу для системы управления неустойчивым объектом с передаточной функцией

$$\mathbf{g} = \frac{1{,}36z\,(1 + 1{,}25z)}{(1 - 0{,}64z)\,(1 - 1{,}5z)}.$$

На входе системы действует полезный сигнал $\mathbf{s}$, имеющий ковариационные коэффициенты $\psi_s(i) = 1{,}5(-0{,}37)^{|i|}$, и помеха ξ, имеющая ковариационные коэффициенты $\psi_\xi(i) = 1{,}8(0{,}12)^{|i|}$. На выходе системы желательно получить возможно более точное значение второй производной полезного сигнала $v = \ddot{s}$.

Аппроксимируя вторую производную конечной разностью $v_i = \frac{1}{T^2}\left(s_{i+1} - 2s_i + s_{i-1}\right)$, желаемый оператор преобразования можно представить в виде

$$\Lambda = \frac{z^{-1} - 2 + z}{T^2} = \frac{(1 - z)^2}{T^2 z}.$$

Таким образом, $\lambda = 1$, $\mathbf{c} = (1 - z)^2$, $\mathbf{d} = T^2$. По формуле в примере из раздела 1 этой главы

$$\psi = \frac{c\left(1 - \alpha^2\right) z}{(1 - \alpha z)\,(z - \alpha)}$$

составим ковариационные изображения полезного сигнала и помехи:

$$\psi_s = \frac{1{,}28z}{(1 + 0{,}37z)\,(z + 0{,}37)}, \quad \psi_\xi = \frac{1{,}77z}{(1 - 0{,}12z)\,(z - 0{,}12)}.$$

Составим ковариационное изображение суммы полезного сигнала и помехи:

$$\psi_x = \frac{3{,}22z\,(1 + 0{,}15z)\,(z + 0{,}15)}{(1 + 0{,}37z)\,(z + 0{,}37)\,(1 - 0{,}12z)\,(z - 0{,}12)}.$$

Имеем

$$\mathbf{p}^+ = 1{,}36, \quad \mathbf{p}^- = z\,(1 + 1{,}25z), \quad \mathbf{q}^+ = 1 - 0{,}64z, \quad \mathbf{q}^- = 1 - 1{,}5z,$$

$$\mathbf{v}_s = 1{,}28z, \quad \mu_s^+ = 1 + 0{,}37z, \quad \mu_s^- = z + 0{,}37,$$

$$\mathbf{v}_\xi = 1{,}77z, \quad \mu_\xi^+ = 1 - 0{,}12z, \quad \mu_\xi^- = z - 0{,}12,$$

$$\mathbf{v}_x^+ = 3{,}22\,(1 + 0{,}15z), \quad \mathbf{v}_x^- = z\,(z + 0{,}15).$$

Управляющая программа рассчитывается по формуле (4.83)

$$\mathbf{w} = \frac{(1 - 0{,}12z)\,(1 - 0{,}64z)\,\theta}{1{,}36\pi_1},$$

где θ и π_1 удовлетворяют системе π-уравнений (4.84), (4.85):

$$z(1 - 0{,}12z)\,(1 + 1{,}25z)\,\theta + (1 - 1{,}5z)\pi_1 =$$
$$= 3{,}22T^2(1 + 0{,}15z)\,(1{,}25 + z)\,(z - 1{,}5),$$

$$z^3(0{,}15 + z)\,(1 + 1{,}25z)\,\theta + T^2(1 + 0{,}37z)\pi_2 =$$
$$= 1{,}28z(1 - z)^2(z - 0{,}12)\,(1{,}25 + z)\,(z - 1{,}5).$$

Первое уравнение можно сократить на $(-3{,}22T^2)$, поскольку нас интересует только отношение θ/π_1:

$$z(1+1{,}13z-0{,}15z^2)\theta+(1-1{,}5z)\pi_1=$$
$$=1{,}88+0{,}53z-0{,}96z^2-0{,}15z^3.$$

Второе уравнение подстановкой $\frac{1}{T^2}\cdot z\pi_2'=\pi_2$ и сокращением на z преобразуется к виду

$$z^2(0{,}15+1{,}19z+1{,}25z^2)\theta+(1+0{,}37z)\pi_2'=$$
$$=0{,}29-2{,}94z+4{,}54z^2-0{,}14z^3-3{,}03z^4+1{,}28z^5.$$

Будем решать каждое уравнение порознь. Первое уравнение выбором $|\theta|=0$, $|\pi_1|=2$ развертывается в алгебраическую систему

$$\pi_0=1{,}88,\quad \theta_0-1{,}5\pi_0+\pi_1=0{,}53,$$
$$1{,}13\theta_0-1{,}5\pi_1+\pi_2=-0{,}96,\quad -0{,}15\theta_0-1{,}5\pi_2=-0{,}15,$$

решая которую, получим $\theta=1{,}56$, $\pi_1=1{,}88+1{,}77z-0{,}056z^2$. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\theta=1{,}56+(1-1{,}5z)\xi,$$
$$\pi_1=1{,}88+1{,}77z-0{,}056z^2-z(1+1{,}13z-0{,}15z^2)\xi.$$

Второе уравнение является неправильным. Будем искать его минимальное решение относительно π_2'. Выбирая $|\theta|=1$, $|\pi_2'|=3$, получаем алгебраическую систему

$$\pi_0=0{,}29,\quad 0{,}37\pi_0+\pi_1=-2{,}94,\quad 0{,}15\theta_0+0{,}37\pi_1+\pi_2=4{,}54,$$
$$1{,}19\theta_0+0{,}15\theta_1+0{,}37\pi_2+\pi_3=-0{,}14,$$
$$1{,}25\theta_0+1{,}19\theta_1+0{,}37\pi_3=-3{,}03,\quad 1{,}25\theta_1=1{,}28.$$

Решая ее, получим $\theta=-4{,}05+1{,}02z$. Общее решение относительно θ имеет вид

$$\theta=-4{,}05+1{,}02z-(1+0{,}37z)\eta.$$

Приравнивая полученные из обоих уравнений значения θ, получим π-уравнение относительно ξ и η:

$$(1-1{,}5z)\xi+(1+0{,}37z)\eta=-5{,}61+1{,}02z.$$

Его минимальное решение с $|\xi|=0$, $|\eta|=0$ удовлетворяет алгебраической системе

$$\xi_0+\eta_0=-5{,}61,\quad -1{,}5\xi_0+0{,}37\eta_0=1{,}02.$$

Решая ее, получаем $\xi=-1{,}66$. Используя это значение ξ, получаем полиномы θ и π_1:

$$\theta=-0{,}1+2{,}5z,\quad \pi_1=1{,}88+3{,}43z+1{,}82z^2-0{,}25z^3.$$

Подставляя θ и π_1 в $\mathbf{w}$, находим программу управляющего устройства:

$$\mathbf{w} = \frac{-0{,}039 + 1{,}01z - 0{,}72z^2 + 0{,}072z^3}{1 + 1{,}77z + 0{,}93z^2 - 0{,}128z^3}.$$

Ей соответствует конечно-разностное уравнение

$$u_i + 1{,}77u_{i-1} + 0{,}93u_{i-2} - 0{,}128u_{i-3} = \\ = -0{,}039e_i + 1{,}01e_{i-1} - 0{,}72e_{i-2} + 0{,}072e_{i-3}.$$

4. Задача Заде — Рагаззини и ее обобщение

До сих пор мы рассматривали задачи, в которых полезный сигнал является стационарным процессом с нулевым средним значением. Перейдем теперь к задачам, в которых полезный сигнал имеет представление $\mathbf{s} = \mathbf{m} + \mathbf{l}$, где $\mathbf{m}$ — среднее значение полезного сигнала, являющееся полиномом от дискретного времени i (эта составляющая иногда называется «тренд»):

$$m_i = \sum_{j=0}^{\mu-1} \alpha_j i^j,$$

а $\mathbf{l}$ — стационарное отклонение от него. Аппроксимация среднего хода процесса полиномом от i всегда возможна на конечном интервале времени (если исключить «экзотические» случаи). Изображение этого полинома имеет вид

$$\mathbf{m} = \sum_{i=0}^{\infty} m_i z^i = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\mu-1} \alpha_j i^j z^i = \sum_{j=0}^{\mu-1} \alpha_j \sum_{i=0}^{\infty} i^j z^i. \qquad (4.89)$$

Последние суммы легко вычисляются и имеют вид

$$\sum_{i=0}^{\infty} i^j z^i = \frac{\sigma_j(z)}{(1-z)^{j+1}}, \qquad (4.90)$$

где $\sigma_j(z)$ — известные полиномы от z:

$$\sigma_0(z) = 1, \quad \sigma_1(z) = z, \quad \sigma_2(z) = z(1+z), \\ \sigma_3(z) = z(1 + 4z + z^2), \quad \sigma_4(z) = z(1 + 11z + 11z^2 + z^3), \\ \sigma_5(z) = z(1 + 26z + 66z^2 + 26z^3 + z^4), \ \ldots$$

Мы видим, что $|\sigma_j(z)| = j$. Подставляя (4.90) в (4.89), получим

$$\mathbf{m} = \sum_{j=0}^{\mu-1} \frac{\alpha_j \sigma_j(z)}{(1-z)^{j+1}} = \frac{\sum\limits_{j=0}^{\mu-1} \alpha_j \sigma_j(z)(1-z)^{\mu-j-1}}{(1-z)^{\mu}}.$$

Обозначим через $\mathbf{r}(z)$ полином

$$\mathbf{r}(z) = \sum_{j=0}^{\mu-1} \alpha_j \sigma_j(z)(1-z)^{\mu-j-1}.$$

Легко видеть, что $|\mathbf{r}(z)| = \mu - 1$. Таким образом, изображение среднего хода процесса имеет вид

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}}{(1-z)^{\mu}}, \tag{4.91}$$

где $\mathbf{r}$ — полином степени $\mu - 1$. Допуская, что на различных участках времени среднее значение полезного сигнала аппроксимируется различными полиномами по i одной и той же степени $\mu - 1$, будем считать, что полином $\mathbf{r}(z)$ имеет произвольные коэффициенты.

Стационарное отклонение полезного сигнала $\mathbf{l}$ имеет ковариационное изображение в виде рациональной функции $\psi_l = \nu_l/\mu_l$, где ν_l и μ_l — полиномы от z. Сигнал помехи ξ будем считать имеющим нулевое среднее значение и ковариационное изображение $\psi_\xi = \nu_\xi/\mu_\xi$, где ν_ξ и μ_ξ — полиномы от z. Полиномы μ_l и μ_ξ будем считать взаимно простыми: $(\mu_l, \mu_\xi) = 1$.

В 1950 г. американскими учеными Л. А. Заде и Дж. Р. Рагаззини [139] была поставлена задача, дискретный вариант которой выглядит так: найти устройство с конечной памятью n, имеющее передаточную функцию в форме полинома заданной степени $\theta = \sum\limits_{i=0}^{n} \theta_i z^i$, которое по $n+1$ замерам суммарного сигнала $\mathbf{x} = \mathbf{s} + \xi$ давало бы наилучшую несмещенную оценку сигналу $\mathbf{v} = \Lambda\mathbf{s}$, где Λ — физически нереализуемый оператор вида $\Lambda = z^{-\lambda}\mathbf{c}$, а $\mathbf{c}$ — произвольный заданный полином.

Л. А. Заде и Дж. Рагаззини, решая задачу для непрерывного времени, применили при минимизации дисперсии ошибки для учета условий несмещенности метод множителей Лагранжа и получили интегральное уравнение типа уравнения Винера. В дискретном случае решение интегральных уравнений заменяется решением π-уравнений, что значительно проще.

Составим изображение сигнала ошибки:

$$\mathbf{e} = \theta\mathbf{x} - \Lambda\mathbf{s} = (\theta - \Lambda)\mathbf{m} + (\theta - \Lambda)\mathbf{l} + \theta\boldsymbol{\xi}.$$

Мы видим, что ошибка состоит из двух составляющих — динамической ошибки

$$\mathbf{e}_д = (\theta - \Lambda)\mathbf{m}, \tag{4.92}$$

вызванной смещением между средними значениями действительного и желаемого состояний устройства, и случайной ошибки

$$\mathbf{e}_с = (\theta - \Lambda)\mathbf{l} + \theta\boldsymbol{\xi}, \tag{4.93}$$

вызванной случайной составляющей полезного сигнала и помехой.

Состояние системы, при котором динамическая ошибка отсутствует, т. е. средние значения действительного и желаемого сигналов на выходе совпадают, называется *состоянием несмещенности.*

Найдем условия, при которых система переходит в состояние несмещенности за конечное время. Подставляя значения Λ и $\mathbf{m}$ в (4.92), получим

$$\mathbf{e}_д = \frac{(z^\lambda\theta - \mathbf{c})\,\mathbf{r}}{z^\lambda\,(1 - z)^\mu}.$$

Если наложить условие

$$z^\lambda\theta + (1 - z)^\mu\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}, \tag{4.94}$$

то изображение динамической ошибки будет $\mathbf{e}_д = \mathbf{r}\pi/z^\lambda$. Поскольку процесс $\mathbf{m}$ начинается в момент $i = 0$, то реальный смысл имеет только правая часть этой функции $\mathbf{e}_{д+}$, равная целой части $\mathbf{e}_д$: $\mathbf{e}_{д+} = [\mathbf{r}\pi/z^\lambda]$. Это значит, что по окончании интервала времени

$$t = (|\mathbf{e}_{д+}| + 1)T = (|\mathbf{r}| + |\boldsymbol{\pi}| - \lambda + 1)T = nT$$

динамическая ошибка будет равна нулю.

Таким образом, полученное π-уравнение (4.94) обеспечивает переход в состояние несмещенности за конечное время. Минимальное время, за которое можно перейти в состояние несмещенности, соответствующее минимальному решению π-уравнения (4.94),

$$t_{\min} = |\theta|_{\min}T = (\mu - 1)T,$$

т. е. оно равно степени полинома m_i как функции дискретного времени i.

Уравнение типа (4.94) является *полностью сепарабельным*. Это значит, что оно может быть заменено цепочкой линейных алгебраических уравнений, каждое из которых решается независимо от последующих уравнений в этой цепочке. Например, уравнение

$$z^4\theta + (1-z)^3\pi = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3$$

заменяется следующей цепочкой алгебраических уравнений:

$$\pi_0 = 1, \quad \pi_1 - 3\pi_0 = 2, \quad \pi_2 - 3\pi_1 + 3\pi_0 = 3,$$
$$\pi_3 - 3\pi_2 + 3\pi_1 - \pi_0 = 4,$$
$$\theta_0 - 3\pi_3 + 3\pi_2 - \pi_1 = 0, \quad \theta_1 + 3\pi_3 - \pi_2 = 0, \quad \theta_2 - \pi_3 = 0.$$

Легко видеть, что эти уравнения решаются последовательно.

Устройство будем называть *оптимальным*, если при выполнении условия несмещенности оно обеспечивает минимум дисперсии случайной ошибки. Условие минимума дисперсии случайной ошибки имеет вид

$$\delta J = \mathrm{ct}(\psi_f\theta - \psi_l\Lambda)\delta\hat{\theta} = 0, \tag{4.95}$$

где θ подчинено π-уравнению (4.94). Здесь через $\mathbf{f}$ обозначена сумма $\mathbf{f} = \mathbf{l} + \boldsymbol{\xi}$, случайной составляющей полезного сигнала $\mathbf{l}$ и помехи $\boldsymbol{\xi}$, а через ψ_f — сумма их ковариационных изображений

$$\psi_f = \psi_l + \psi_\xi = \frac{\nu_l}{\mu_l} + \frac{\nu_\xi}{\mu_\xi} = \frac{\nu_f}{\mu_f}.$$

Из общего решения π-уравнения (4.94) имеем $\delta\theta = (1-z)^\mu\delta\zeta$, где ζ — произвольный полином. Инвертируя это выражение, получим

$$\delta\hat{\theta} = \frac{(1-z)^\mu}{z^n}\,\delta\tilde{\zeta}.$$

Подставляя значения ψ_f, ψ_l, Λ и $\delta\hat{\theta}$ в (4.95), получим

$$\delta J = \mathrm{ct}\,\frac{z^\lambda\nu_f\theta - c\nu_l\mu_\xi}{z^\lambda\mu_f}\cdot\frac{(1-z)^\mu}{z^n}\,\delta\tilde{\zeta}. \tag{4.96}$$

Составим уравнение

$$\frac{\left(z^{\lambda}\nu_f\theta - c\nu_l\mu_\xi\right)(1-z)^{\mu}}{z^{\lambda+n}\mu_f} = -\frac{\pi_0}{z^{\lambda+n}\mu_f^-} - \frac{z\pi_1}{\mu_f^+}.$$

Оно равносильно следующему π-уравнению относительно трех неизвестных полиномов θ, π_0 и π_1:

$$z^{\lambda}(1-z)^{\mu}\nu_f\theta + \mu_f^+\pi_0 + z^{\lambda+n+1}\mu_f^-\pi_1 = (1-z)^{\mu}c\nu_l\mu_\xi. \tag{4.97}$$

С учетом этого уравнения условие (4.96) принимает вид

$$\delta J = \mathrm{ct}\,\frac{\pi_0\delta\tilde{\zeta}}{z^{\lambda+n}\mu_f^-} + \mathrm{ct}\,\frac{z\pi_1\delta\tilde{\zeta}}{\mu_f^+}. \tag{4.98}$$

Выбирая $|\pi_0| = |\mu_f^-| + \lambda + \mu - 1$, мы обеспечиваем правильность левой функции под знаком ct в первом слагаемом этого выражения. Выбирая $|\pi_1| = |\nu_f| - |\mu_f^-| + \mu - 1$, мы обеспечиваем равенство числа неизвестных числу линейных алгебраических уравнений в системе, к которой сводятся π-уравнения (4.94) и (4.97). Сепарация функции под знаком ct в выражении (4.96) произведена так, чтобы ее левая часть имела отрицательный индекс, а правая часть — положительный дефект. Таким образом обеспечивается равенство нулю функционала (4.98), а следовательно, минимизация дисперсии случайной ошибки при наложении условия несмещенности. Итак, задача сведена к совместному решению системы π-уравнений (4.94) и (4.97).

В том случае, когда случайная составляющая полезного сигнала отсутствует ($l = 0$), а помеха является белым шумом, т. е. имеет постоянное ковариационное изображение $\psi_\xi = D_\xi = \mathrm{const}$, решение задачи Заде — Рагаззини эквивалентно методу наименьших квадратов, описанному в следующей главе. Таким образом, метод наименьших квадратов как метод обработки информации оптимален только при упомянутых ограничениях.

Применение π-уравнений для решения задачи Заде — Рагаззини, по-видимому, самостоятельного значения не имеет, поскольку метод множителей Лагранжа решает эту задачу проще. Смысл приведенного решения состоит в том, что оно является переходным к решению таких задач, которые без привлечения π-исчисления уже не решаются.

Рассмотрим следующее обобщение задачи Заде — Рагаззини. Требуется спроектировать работоспособную систему управления, желаемый выход которой выражается заданным оператором от полезного сигнала: $\mathbf{\Lambda} = z^{-\lambda}(\mathbf{c}/\mathbf{d})$, где $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ — заданные полиномы от z. К числу таких операторов относятся операторы фильтрации, сглаживания, экстраполяции, статистического дифференцирования и интегрирования, в том числе кратного, и т. д. Критерием оптимальности системы будем считать минимум дисперсии случайной ошибки управления при заданном времени перехода в состояние несмещенности. Поскольку объект управления в общем случае предполагается неустойчивым, а система управления неустойчивым объектом работоспособна только при наличии обратной связи, то рассматривается система с обратной связью.

Покажем, что оптимальное управляющее устройство имеет программу $\mathbf{w} = \mathbf{q}^{+}\boldsymbol{\theta}/\mathbf{p}^{+}\boldsymbol{\pi}$, где $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\pi}$ — полиномы, удовлетворяющие следующей системе π-уравнений относительно неизвестных полиномов $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\pi}$, $\boldsymbol{\pi}_0$, $\boldsymbol{\pi}_1$ и $\boldsymbol{\pi}_2$:

$$\mathbf{p}^{-}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{q}^{-}\boldsymbol{\pi} = \mathbf{d}, \tag{4.99}$$

$$z^{\lambda}(1-z)^{\mu}\,\boldsymbol{\nu}_f\widetilde{\mathbf{p}}^{-}\widetilde{\mathbf{q}}^{-}\mathbf{p}^{-}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{d}^{+}\boldsymbol{\mu}_f^{+}\boldsymbol{\pi}_0 + z^{\lambda+n+1}\mathbf{d}^{-}\boldsymbol{\mu}_f^{-}\boldsymbol{\pi}_1 = \\ = (1-z)^{\mu}\,\mathbf{c}\boldsymbol{\nu}_l\boldsymbol{\mu}_{\xi}\widetilde{\mathbf{p}}^{-}\widetilde{\mathbf{q}}^{-}, \tag{4.100}$$

$$z^{\lambda}\mathbf{p}^{-}\boldsymbol{\theta} + (1-z)^{\mu}\mathbf{d}\boldsymbol{\pi}_2 = \mathbf{c}. \tag{4.101}$$

Подставляя значение $\mathbf{w}$ в передаточную функцию системы с обратной связью и учитывая π-уравнение (4.99), получаем $\mathbf{h} = (\mathbf{p}^{-}\boldsymbol{\theta})/\mathbf{d}$. Обозначим

$$n = \operatorname{ind}\mathbf{h} = |\mathbf{p}^{-}| + |\boldsymbol{\theta}| - |\mathbf{d}|.$$

Динамическая ошибка системы $\mathbf{e}_{\text{д}} = (\mathbf{h} - \mathbf{\Lambda})\mathbf{m}$ с учетом π-уравнения (4.101) равна $\mathbf{e}_{\text{д}} = z^{-\lambda}\mathbf{r}\boldsymbol{\pi}_2$. Это значит, что время перехода системы в состояние несмещенности

$$t = (|\mathbf{e}_{\text{д}+}| + 1)T = (\mu + |\boldsymbol{\pi}_2| - \lambda)T = \\ = (|\mathbf{p}^{-}| + |\boldsymbol{\theta}| - |\mathbf{d}|)T = nT.$$

Покажем, что условие минимума дисперсии случайной ошибки

$$\delta J = \operatorname{ct}(\mathbf{h}\boldsymbol{\psi}_f - \mathbf{\Lambda}\boldsymbol{\psi}_l)\,\delta\widehat{\mathbf{h}} = 0 \tag{4.102}$$

также выполняется. Общее решение системы π-уравнений (4.99) и (4.101) имеет вид

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 + (1-z)^{\mu}\mathbf{d}\mathbf{q}^{-}\boldsymbol{\zeta},$$

где ζ — произвольный полином. Варьируя θ, имеем

$$\delta\theta = (1 - z)^{\mu}\mathbf{d}\mathbf{q}^{-}\delta\zeta.$$

Отсюда $\delta\mathbf{h} = (1 - z)^{\mu}\mathbf{p}^{-}\mathbf{q}^{-}\delta\zeta$. Инвертируя это выражение с учетом $\operatorname{def}\delta\widehat{\mathbf{h}} = -\operatorname{ind}\delta\mathbf{h} = -n$, получим

$$\delta\widehat{\mathbf{h}} = \frac{(1 - z)^{\mu}\,\widetilde{\mathbf{p}}^{-}\widetilde{\mathbf{q}}^{-}\delta\widetilde{\zeta}}{z^{n}}.$$

Подставим в (4.102) значения ψ_f, ψ_l, Λ, $\mathbf{h}$ и $\delta\widehat{\mathbf{h}}$:

$$\delta J = \operatorname{ct}\left(\frac{\nu_f}{\mu_f}\cdot\frac{\mathbf{p}^{-}\theta}{\mathbf{d}} - \frac{\mathbf{c}}{z^{\lambda}\mathbf{d}}\cdot\frac{\nu_l}{\mu_l}\right)\frac{(1 - z)^{\mu}\,\widetilde{\mathbf{p}}^{-}\widetilde{\mathbf{q}}^{-}}{z^{n}}\,\delta\widetilde{\zeta}.$$

Составим уравнение:

$$\frac{z^{\lambda}\nu_f\mathbf{p}^{-}\theta - \mathbf{c}\nu_l\mu_{\xi}}{z^{\lambda}\mathbf{d}\mu_f}\cdot\frac{(1 - z)^{\mu}\widetilde{\mathbf{p}}^{-}\widetilde{\mathbf{q}}^{-}}{z^{n}} = -\frac{\pi_0}{z^{\lambda+n}\mathbf{d}^{-}\mu_f^{-}} - \frac{z\pi_1}{\mathbf{d}^{+}\mu_f^{+}}.$$

После приведения к общему знаменателю оно сводится к π-уравнению (4.100). С учетом этого уравнения условие минимума дисперсии случайной ошибки принимает вид

$$\delta J = \operatorname{ct}\frac{\pi_0\delta\widetilde{\zeta}}{z^{\lambda+n}\mathbf{d}^{-}\mu_f^{-}} + \operatorname{ct}\frac{z\pi_1\delta\widetilde{\zeta}}{\mathbf{d}^{+}\mu_f^{+}}.$$

Степень полинома π_0 выбирается из условия

$$\operatorname{ind}\frac{\pi_0\delta\widetilde{\zeta}}{z^{\lambda+n}\mathbf{d}^{-}\mu_f^{-}} = -1,$$

обеспечивающего требование

$$\operatorname{ct}\frac{\pi_0\delta\widetilde{\zeta}}{z^{\lambda+n}\mathbf{d}^{-}\mu_f^{-}} = 0.$$

Учитывая, что $|\zeta| = n - |\mathbf{p}^{-}| - |\mathbf{q}^{-}| - \mu$, получаем

$$|\pi_0| = |\mu_f^{-}| + |\mathbf{p}^{-}| + |\mathbf{q}^{-}| + |\mathbf{d}^{-}| + \lambda + \mu - 1.$$

Степень полинома π_1 выбирается из условия равенства степеней первого и третьего слагаемых в левой части π-уравнения (4.100). Она равна

$$|\pi_1| = |\nu_f| - |\mu_f^{-}| + |\widetilde{\mathbf{p}}^{-}| + |\widetilde{\mathbf{q}}^{-}| + |\mathbf{d}^{+}| + \mu - 1.$$

Нетрудно убедиться, что при таком выборе степеней неизвестных полиномов обеспечивается равенство общего

числа алгебраических неизвестных общему числу алгебраических уравнений в системе, в которую развертываются π-уравнения (4.99) — (4.101). Это число

$$N = 3n + 3|\mathbf{d}| + |\mathbf{v}_f| + |\tilde{\mathbf{p}}^-| + |\tilde{\mathbf{q}}^-| + 2\lambda + \mu + 3.$$

Получаемая линейная алгебраическая система является невырожденной и имеет единственное решение.

Пример. Рассмотрим задачу численного дифференцирования полезного сигнала с ненулевым средним значением и стационарным отклонением от него на фоне стационарного шума с нулевым средним значением. Зададимся следующим дискретным аналогом оператора дифференцирования: $\Lambda = (1 - z^2)/2z$. Тренд полезного сигнала представляется полиномом второй степени от дискретного времени i:

$$m_i = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 i^2.$$

Его изображение $\mathbf{m} = \mathbf{r}/(1 - z)^3$. Случайная составляющая полезного сигнала $\mathbf{l}$ имеет ковариационное изображение

$$\psi_l = \frac{5z}{(1 - 0{,}95\,z)(z - 0{,}95)}.$$

Помеха ξ имеет ковариационное изображение

$$\psi_\xi = \frac{4z}{(1 - 0{,}042\,z)(z - 0{,}042)}.$$

Имеем

$$\lambda = 1, \quad \mathbf{c} = 1 - z^2, \quad \mu = 3,$$

$$\mathbf{v}_l = 5z, \quad \boldsymbol{\mu}_l = (1 - 0{,}95z)(z - 0{,}95),$$

$$\mathbf{v}_\xi = 4z, \quad \boldsymbol{\mu}_\xi = (1 - 0{,}042z)(z - 0{,}042).$$

Составим ковариационное изображение суммы случайных составляющих:

$$\psi_f = \psi_l + \psi_\xi = \frac{z(-4 + 12{,}6\,z - 4z^2)}{(1 - 0{,}95\,z)(z - 0{,}95)(1 - 0{,}042\,z)(z - 0{,}042)}.$$

Имеем

$$\mathbf{v}_f = z(-4 + 12{,}6z - 4z^2),$$

$$\boldsymbol{\mu}_f^+ = (1 - 0{,}95\,z)(1 - 0{,}042\,z), \quad \boldsymbol{\mu}_f^- = (z - 0{,}95)(z - 0{,}042).$$

Составим π-уравнение (4.94):

$$z\theta + (1 - z)^3\boldsymbol{\pi} = 1 - z^2.$$

Его минимальное решение дает $|\theta| = 2$. Минимальное время перехода в состояние несмещенности $t_{\min} = 2T$.

Однако при выборе устройства с памятью $n = 2$ случайная составляющая ошибки не минимизируется совсем. Для того чтобы получить свободу минимизации случайной составляющей ошибки, необходимо выбирать память устройства $n > 2$.

Оптимизация в смысле Заде — Рагаззини означает компромисс между длительностью переходного процесса в состояние несмещенности и величиной дисперсии установившейся случайной ошибки. Эти два критерия качества являются противоречивыми: чем меньше длительность процесса перехода в состояние несмещенности, тем больше дисперсия установившейся случайной ошибки, и, наоборот, чем больше длительность процесса накопления измерений, определяемая глубиной памяти, тем меньше дисперсия установившейся случайной ошибки. Компромиссное решение выбирается из технических требований, предъявляемых к системе в целом, частью которой является данное устройство.

Пусть этот компромисс достигается при $n = 5$. Это значит, что полином θ необходимо искать в виде

$$\theta = \theta_0 + \theta_1 z + \theta_2 z^2 + \theta_3 z^3 + \theta_4 z^4 + \theta_5 z^5.$$

Прежде всего найдем минимальное решение уравнения (4.94). Заметим, что θ можно искать в виде $\theta = (1 - z)\theta'$, где полином θ' удовлетворяет уравнению

$$z\theta' + (1 - z)^2\pi = 1 + z.$$

Задаемся $|\theta'| = 1$, $|\pi| = 0$ и развертываем это уравнение в алгебраическую систему:

$$\pi_0 = 1, \quad \theta_0' - 2\pi_0 = 1, \quad \theta_1' + \pi_0 = 0.$$

Решая ее, получим $\theta' = 3 - z$, $\pi = 1$, а значит, $\theta = (1 - z)(3 - z)$. Общее решение π-уравнения (4.94) имеет вид

$$\theta = (1 - z)(3 - z) + (1 - z)^3\zeta,$$

где ζ — полином степени 2.

Теперь составим π-уравнение (4.97):

$$z^2(1 - z)^3(-4 + 12{,}6z - 4z^2)\theta + (1 - 0{,}95z)(1 - 0{,}042z)\pi_0 + \\ + z^7(z - 0{,}95)(z - 0{,}042)\pi_1 = \\ = 5z(1 - z)^3(1 - z^2)(1 - 0{,}042z)(z - 0{,}042).$$

Прежде всего заметим, что его можно сократить на z, выбрав $\pi_0 = z\pi_0'$ и сохраняя прежнее обозначение за π_0:

$$z(1 - z)^3(-4 + 12{,}6z - 4z^2)\theta + (1 - 0{,}95z)(1 - 0{,}042z)\pi_0 + \\ + z^6(z - 0{,}95)(z - 0{,}042)\pi_1 = \\ = 5(1 - z)^3(1 - z^2)(1 - 0{,}042z)(z - 0{,}042).$$

Подставив общее решение уравнения (4.94) в (4.97), получим уравнение относительно неизвестных полиномов ζ, π_0 и π_1:

$$z(1-z)^6(-4+12{,}6z-4z^2)\zeta+(1-0{,}95z)(1-0{,}042z)\pi_0+$$
$$+z^6(z-0{,}95)(z-0{,}042)\pi_1=5(1-z)^3(1-z^2)(1-0{,}042z)\times$$
$$\times(z-0{,}042)-z(1-z)^4(3-z)(-4+12{,}6z-4z^2).$$

Выбирая степени неизвестных полиномов $|\zeta|=2$, $|\pi_0|=4$, $|\pi_1|=3$, приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях z можно получить систему из 12 алгебраических уравнений с 12 неизвестными. Решение такой системы слишком трудоемко для ручного счета, и его целесообразно возложить на ЭВМ.

5. Задача Андреева и ее обобщение

В 1959 г. Н. И. Андреевым [2] была поставлена задача: имея сигнал того же типа, что и в задаче Заде — Рагаззини, произвести его обработку по критерию

$$J=\overline{e_{\text{д}}^2}+\overline{e_{\text{с}}^2}\to\min,$$

где $e_{\text{д}}$ — установившаяся динамическая ошибка, а $e_{\text{с}}$ — установившаяся случайная ошибка.

Известно, что отказ от условия абсолютной несмещенности может дать выигрыш по суммарной квадратичной ошибке по сравнению с решением Заде — Рагаззини. Правда, этот выигрыш достигается за счет дополнительной информации о полезном сигнале, а именно: считается известной дисперсия старшего коэффициента в полиномиальном разложении среднего значения полезного сигнала:

$$m_i=\sum_{j=0}^{\mu}\alpha_j i^j=\sum_{j=0}^{\mu-1}\alpha_j i^j+\alpha_\mu i^\mu,$$

$$\overline{\alpha}_\mu=0,\quad \overline{\alpha_\mu^2}=D_s.$$

Остальные коэффициенты этого разложения по-прежнему считаются неизвестными.

Покажем, что π-уравнение

$$z^\lambda\theta+(1-z)^{\mu+1}\pi=c+\rho(1-z)^\mu, \qquad (4.103)$$

где ρ — произвольное число, обеспечивает получение ограниченной установившейся динамической ошибки. Изображение среднего значения полезного сигнала имеет вид

$$\mathbf{m}=\frac{\mathbf{r}_\mu}{(1-z)^{\mu+1}},$$

где $\mathbf{r}_\mu$ — полином степени μ. Формулы для желаемого оператора $\mathbf{\Lambda} = z^{-\lambda}\mathbf{c}$ и для динамической ошибки $\mathbf{e}_д = (\theta - \mathbf{\Lambda})\mathbf{m}$ — те же, что и в задаче Заде — Рагаззини. Подставляя значения $\mathbf{\Lambda}$ и $\mathbf{m}$ в $\mathbf{e}_д$, получим

$$\mathbf{e}_д = \frac{z^\lambda\theta - \mathbf{c}}{z^\lambda}\cdot\frac{\mathbf{r}_\mu}{(1-z)^{\mu+1}}.$$

Учитывая π-уравнение (4.103), приводим это выражение к виду

$$\mathbf{e}_д = -z^{-\lambda}\mathbf{r}_\mu\pi + \rho z^{-\lambda}\frac{\mathbf{r}_\mu}{1-z}.$$

Деля $\mathbf{r}_\mu$ на $1 - z$, получаем

$$\frac{\mathbf{r}_\mu}{1-z} = \mathbf{k}_{\mu-1} + \frac{\gamma}{1-z}.$$

По теореме Безу остаток от деления равен $\gamma = \mathbf{r}_\mu(1)$. Имеем

$$\mathbf{e}_д = z^{-\lambda}(\rho\mathbf{k}_{\mu-1} - \mathbf{r}_\mu\pi) + \rho z^{-\lambda}\cdot\frac{\gamma}{1-z}.$$

Первое слагаемое этого выражения представляет собой переходную динамическую ошибку, исчезающую за конечное время. Установившаяся динамическая ошибка, определяемая вторым слагаемым, равна $e_{д,\,уст} = \rho\gamma = \rho\mathbf{r}_\mu(1)$. Учитывая формулу (4.90), напишем

$$\frac{\mathbf{r}_\mu(z)}{(1-z)^{\mu+1}} = \frac{\mathbf{r}_{\mu-1}(z)}{(1-z)^\mu} + \frac{\alpha_\mu\sigma_\mu(z)}{(1-z)^{\mu+1}},$$

или

$$\mathbf{r}_\mu(z) = (1-z)\mathbf{r}_{\mu-1}(z) + \alpha_\mu\sigma_\mu(z).$$

Отсюда $\mathbf{r}_\mu(1) = \alpha_\mu\sigma_\mu(1)$. Дифференцируя формулу

$$\frac{\sigma_{\mu-1}(z)}{(1-z)^\mu} = \sum_{i=0}^{\infty} i^{\mu-1}z^i$$

по z, получаем

$$\frac{\mu\sigma_{\mu-1}(z)}{(1-z)^{\mu+1}} + \frac{\sigma'_{\mu-1}(z)}{(1-z)^\mu} = \sum_{i=0}^{\infty} i^\mu z^{i-1} = \frac{\sigma_\mu(z)}{z(1-z)^{\mu+1}},$$

или

$$\sigma_\mu(z) = z\left[\mu\sigma_{\mu-1}(z) + (1-z)\sigma'_{\mu-1}(z)\right].$$

Отсюда $\sigma_\mu(1)=\mu\sigma_{\mu-1}(1)$. Поскольку $\sigma_0(z)\equiv 1$, то $\sigma_\mu(1)=\mu!$ Таким образом, окончательная формула для установившейся динамической ошибки имеет вид $e_{\text{д, уст}}=\rho\alpha_\mu\mu!$ Условие минимума дисперсии случайной ошибки при заданной динамической ошибке имеет тот же вид, что и в задаче Заде — Рагаззини:

$$z^\lambda(1-z)^{\mu+1}\mathbf{v}_f\theta+\mu_f^+\pi_0+z^{\lambda+n+1}\mu_f^-\pi_1=(1-z)^{\mu+1}c\mathbf{v}_l\mu_\xi, \tag{4.104}$$

где $|\pi_0|=|\mu_f^-|+\lambda+\mu$, $|\pi_1|=|\mathbf{v}_f|-|\mu_f^-|+\mu$.

Таким образом, мы получили систему из двух π-уравнений (4.103), (4.104). Поскольку решение первого уравнения зависит от произвольного параметра ρ, то дисперсия случайной ошибки

$$\overline{e_c^2}=\operatorname{ct}\psi_e=\operatorname{ct}[(\theta-\Lambda)(\hat\theta-\hat\Lambda)\psi_l+\theta\hat\theta\psi_\xi]$$

также зависит от этого параметра. Для того чтобы найти оптимальное значение ρ, необходимо вычислить функцию

$$J(\rho)=D_s(\mu!)^2\rho^2+\overline{e_c^2}(\rho)$$

и приравнять нулю ее производную по ρ. Для того чтобы убедиться, что мы имеем дело с минимумом, а не с максимумом, достаточно проверить знак второй производной в этой точке — он должен быть положительным.

Синтез системы управления неустойчивым в общем случае объектом по критерию Андреева сводится к решению следующей системы π-уравнений:

$$\mathbf{p}^-\theta+\mathbf{q}^-\pi=\mathbf{d},$$

$$z^\lambda(1-z)^{\mu+1}\mathbf{v}_f\tilde{\mathbf{p}}^-\tilde{\mathbf{q}}^-\mathbf{p}^-\theta+\mathbf{d}^+\mu_f^+\pi_0+z^{\lambda+n+1}\mathbf{d}^-\mu_f^-\pi_1=$$
$$=(1-z)^{\mu+1}c\mathbf{v}_l\mu_\xi\tilde{\mathbf{p}}^-\tilde{\mathbf{q}}^-,$$

$$z^\lambda\mathbf{p}^-\theta+(1-z)^{\mu+1}\mathbf{d}\pi_2=\mathbf{c}+\rho(1-z)^\mu.$$

Программа управляющего устройства остается той же, что и в обобщении задачи Заде — Рагаззини, а именно: $\mathbf{w}=\mathbf{q}^+\theta/\mathbf{p}^+\pi$. Решение ищется в зависимости от параметра ρ, а затем находится оптимум J дифференцированием по этому параметру.

Пример. В качестве иллюстрации изложенного метода рассмотрим следующую простейшую задачу. Пусть полезный сигнал $\mathbf{s}$ представляет собой неизвестную константу α с нулевым средним значением и известной дисперсией $\overline{\alpha^2}=D_s$. Изображение этого сигнала равно $\mathbf{m} = \alpha/(1-z)$. Помеху ξ будем считать белым шумом с нулевым средним значением и дисперсией $\overline{\xi^2} = D_\xi$. Требуется найти устройство, дающее наилучшую оценку значения α в смысле минимума критерия Андреева.

Так как $\mu = \lambda = 0$, а $\mathbf{c} = 1$, то уравнение (4.103) принимает вид

$$\theta + (1-z)\pi = 1 + \rho.$$

Установившаяся динамическая ошибка $e_{\text{д уст}} = \rho\alpha$. Поскольку случайная составляющая полезного сигнала $\mathbf{l}$ равна нулю, то уравнение (4.104) принимает вид

$$(1-z)\theta + \pi_0 + z^{n+1}\pi_1 = 0,$$

где $|\pi_0| = 0$, $|\pi_1| = 0$. Подставляя общее решение уравнения (4.103) в уравнение (4.104), получим

$$(1-z)^2\pi + \pi_0 + z^{n+1}\pi_1 = (1+\rho)(1-z).$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\pi = \frac{1+\rho}{1+n}[n + (n-1)z + \ldots + 2z^{n-2} + z^{n-1}].$$

Отсюда

$$\theta = \frac{1+\rho}{1+n}(1 + z + \ldots + z^n).$$

Дисперсия случайной ошибки

$$\overline{e_c^2} = D_\xi \operatorname{ct} \theta\hat{\theta} = D_\xi \sum_{i=0}^{n} \theta_i^2 = D_\xi \frac{(1+\rho)^2}{1+n}.$$

Минимизируя по ρ критерий Андреева

$$J = \rho^2 D_s + \frac{(1+\rho)^2}{1+n} D_\xi,$$

получаем оптимальное значение ρ:

$$\rho^* = -\frac{1}{1+\varepsilon(n+1)},$$

где $\varepsilon = D_s/D_\xi$ — отношение сигнал/шум. Таким образом, оптимальное устройство выделения полезного сигнала имеет передаточную функцию

$$\theta = \frac{1}{1+n+\frac{1}{\varepsilon}}(1 + z + \ldots + z^n).$$

Чем меньше дисперсия полезного сигнала D_s и чем выше уровень шума D_ξ, тем больше отличие этого устройства от устройства, обеспечивающего абсолютную несмещенность (случай $\rho = 0$).

При $\rho = \rho^*$ значение критерия J

$$J^* = \frac{1}{1 + n + \frac{1}{\varepsilon}} D_\xi,$$

а при $\rho = 0$

$$J^0 = \frac{1}{1 + n} D_\xi.$$

Таким образом, $J^* < J^0$ при любом ε. При слабых сигналах и небольшом числе измерений выигрыш от применения этого устройства становится ощутимым.

6. Оптимизация системы при помощи двух управляющих устройств

Чехословацкий ученый З. Вострый [136] рассмотрел систему с двумя управляющими устройствами, одно из которых находится в цепи прямой связи, а другое — в цепи обратной связи (рис. 12). В этой системе помеха

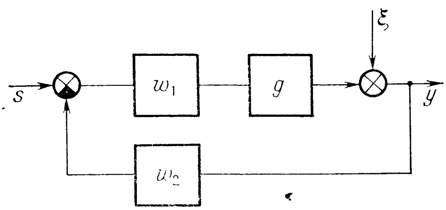

Рис. 12. Система с двумя управляющими устройствами и помехой, действующей на выходе объекта

действует на выходе управляемого объекта. Уравнение системы $\mathbf{y} = \mathbf{h}_1\xi + \mathbf{h}_2\mathbf{s}$, где

$$\mathbf{h}_1 = \frac{1}{1 + \mathbf{g}\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2}, \quad \mathbf{h}_2 = \frac{\mathbf{g}\mathbf{w}_1}{1 + \mathbf{g}\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2}.$$

Ковариационные изображения полезного сигнала и помехи $\psi_s = \nu_s/\mu_s$, $\psi_\xi = \nu_\xi/\mu_\xi$. Будем считать выполненными следующие условия:

$$(\mathbf{q}, \mu_s) = 1, \quad (\mathbf{q}, \mu_\xi) = 1, \quad (\mu_s, \mu_\xi) = 1.$$

Передаточные функции $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$ можно рассчитать независимо: $\mathbf{h}_1$ — из условия минимума дисперсии ошибки, вызванной помехой ξ, $\mathbf{h}_2$ — из условия минимума дисперсии ошибки воспроизведения полезного сигнала $\mathbf{s}$.

Функция $\mathbf{h}_1$ рассчитывается из условия

$$J_1 = \operatorname{ct} \psi_\xi \mathbf{h}_1 \hat{\mathbf{h}}_1 \to \min \quad \text{или} \quad \delta J_1 = \operatorname{ct} \psi_\xi \mathbf{h}_1 \delta \hat{\mathbf{h}}_1 = 0,$$

которое дает следующее решение:

$$\mathbf{h}_1 = \frac{\mu_\xi^+ \mathbf{q}^- \pi_1}{\mathbf{v}_\xi^+ \tilde{\mathbf{p}}^- \tilde{\mathbf{q}}^-},$$

где π_1 — полином, входящий в минимальное решение π-уравнения

$$\mathbf{p}^- \theta_1 + \mu_\xi^+ \mathbf{q}^- \pi_1 = \mathbf{v}_\xi^+ \tilde{\mathbf{p}}^- \tilde{\mathbf{q}}^-. \tag{4.105}$$

Данной $\mathbf{h}_1$ соответствует общая передаточная функция двух управляющих устройств:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 = \frac{\mathbf{q}^+ \theta_1}{\mu_\xi^+ \mathbf{p}^+ \pi_1}. \tag{4.106}$$

Вывод этих формул мы опускаем ввиду его стандартности.

Функция $\mathbf{h}_2$ рассчитывается из условия

$$J_2 = \operatorname{ct} (1 - \mathbf{h}_2)(1 - \hat{\mathbf{h}}_2) \psi_s \to \min,$$

или

$$\delta J_2 = \operatorname{ct} \psi_s (1 - \mathbf{h}_2) \delta \hat{\mathbf{h}}_2 = 0,$$

которое дает решение *)

$$\mathbf{h}_2 = \frac{\mathbf{p}^- \theta_2}{\mathbf{v}_s^+ \tilde{\mathbf{p}}^-},$$

где θ_2 — полином, входящий в минимальное решение π-уравнения

$$\mathbf{p}^- \theta_2 + \mu_s^+ \pi_2 = \mathbf{v}_s^+ \tilde{\mathbf{p}}^-. \tag{4.107}$$

Теперь можно выбрать программы $\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{w}_2$, обеспечивающие получение данных передаточных функций $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$. Из условия $\mathbf{h}_2 = \mathbf{g} \mathbf{w}_1 \mathbf{h}_1$ получаем программу $\mathbf{w}_1$

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\mathbf{g}} \cdot \frac{\mathbf{h}_2}{\mathbf{h}_1} = \frac{\mathbf{v}_\xi^+ \mathbf{q}^* \theta_2}{\mathbf{v}_s^+ \mu_\xi^+ \mathbf{p}^+ \pi_1}, \tag{4.108}$$

*) З. Вострый показал, что класс допустимых передаточных функций для системы с двумя управляющими устройствами по отношению к сигналу $\mathbf{s}$ описывается выражением $\mathbf{h}_2 = \mathbf{p}^- \mathbf{f}_+$, где $\mathbf{f}_+$ — произвольная правая функция.

а из условия $\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}/\mathbf{w}_2$, где $\mathbf{w}$ выбрано по формуле (4.106), получаем программу $\mathbf{w}_2$:

$$\mathbf{w}_2 = \frac{\mathbf{v}_s^+ \theta_1}{\mathbf{v}_\xi^+ \tilde{\mathbf{q}}^- \theta_2}. \tag{4.109}$$

Подставкой значений $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$ в функционалы J_1 и J_2 можно убедиться, что суммарная дисперсия ошибки этой системы

$$J^* = J_1^* + J_2^* = \mathrm{ct}\, \frac{\pi_1 \widehat{\pi}_1 + \pi_2 \widehat{\pi}_2}{\tilde{\mathbf{p}}^- \hat{\tilde{\mathbf{p}}}^-}. \tag{4.110}$$

Для сравнения рассмотрим систему с одним управляющим устройством, в которой помеха действует на

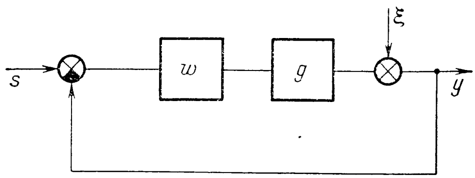

Рис. 13. Система с одним управляющим устройством и помехой, действующей на выходе объекта

выходе управляемого объекта (рис. 13). Ее уравнение $\mathbf{y} = \mathbf{h}_1 \xi + \mathbf{h}_2 \mathbf{s}$, где

$$\mathbf{h}_1 = \frac{1}{1 + \mathbf{g}\mathbf{w}}, \quad \mathbf{h}_2 = \frac{\mathbf{g}\mathbf{w}}{1 + \mathbf{g}\mathbf{w}}.$$

Изображение сигнала ошибки $\mathbf{e} = \mathbf{h}_1 (\mathbf{s} - \xi)$.

Будем минимизировать дисперсию ошибки по обычной методике Винера. Минимизируемый функционал $J = \mathrm{ct}\, \mathbf{h}_1 \widehat{\mathbf{h}}_1 \psi_x$, где $\psi_x = \psi_s + \psi_\xi = \mathbf{v}_x / \mu_x$. Решение этой задачи имеет вид

$$\mathbf{h}_1 = \frac{\mu_x^+ \mathbf{q}^- \pi}{\mathbf{v}_x^+ \tilde{\mathbf{p}}^- \tilde{\mathbf{q}}^-},$$

где π — полином, входящий в минимальное решение π-уравнения

$$\mathbf{p}^- \theta + \mu_x^+ \mathbf{q}^- \pi = \mathbf{v}_x^+ \tilde{\mathbf{p}}^- \tilde{\mathbf{q}}^-. \tag{4.111}$$

Соответствующая управляющая программа

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{q}^{+}\theta}{\mu_x^{+}\mathbf{p}^{+}\pi}, \tag{4.112}$$

а минимальное значение функционала J равно

$$J^* = \mathrm{ct}\,\frac{\pi\widehat{\pi}}{\widetilde{\mathbf{p}}^{-}\widehat{\mathbf{p}}^{-}}. \tag{4.113}$$

С помощью этих формул можно сравнить систему, имеющую два управляющих устройства, с системой, имеющей только одно управляющее устройство, и убедиться в преимуществе первой из них.

В том случае, когда $\mathbf{s}$ представляет собой детерминированный сигнал с изображением $\mathbf{s} = \mathbf{a}/\mathbf{b}$, а ξ — случайную помеху с ковариационным изображением $\psi_\xi = \nu_\xi/\mu_\xi$, можно рассчитать $\mathbf{h}_2$ из условия минимума времени переходного процесса, вызванного сигналом $\mathbf{s}$, а $\mathbf{h}_1$ — по-прежнему из условия минимума дисперсии ошибки, вызванной помехой ξ. Решение задачи о минимальном времени переходного процесса имеет вид

$$\mathbf{h}_2 = \frac{\mathbf{p}^{-}\theta_2}{\mathbf{a}^{+}}, \tag{4.114}$$

где θ_2 входит в минимальное решение π-уравнения

$$\mathbf{p}^{-}\theta_2 + \mathbf{b}\pi_2 = \mathbf{a}^{+}. \tag{4.115}$$

Кратчайший переходный процесс $\mathbf{e} = \mathbf{a}^{-}\pi_2$. Вычислив $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{w}$ по прежним формулам, обеспечивающим минимум дисперсии ошибки, вызванной помехой ξ, с помощью формул

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\mathbf{g}} \cdot \frac{\mathbf{h}_2}{\mathbf{h}_1}, \quad \mathbf{w}_2 = \frac{\mathbf{w}}{\mathbf{w}_1}$$

находим программы двух управляющих устройств, обеспечивающих оптимальное решение этой задачи:

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\nu_\xi^{+}\widetilde{\mathbf{p}}^{-}\mathbf{q}^{*}\theta_2}{\mathbf{a}^{+}\mu_\xi^{+}\mathbf{p}^{+}\pi_1}, \quad \mathbf{w}_2 = \frac{\mathbf{a}^{+}\theta_1}{\nu_\xi^{+}\widetilde{\mathbf{p}}^{-}\widetilde{\mathbf{q}}^{-}\theta_2}. \tag{4.116}$$

Рассмотрим также случай, когда на вход системы с двумя управляющими устройствами действует сумма

$x = s + \xi$ полезного сигнала s и помехи ξ (рис. 14). На выходе управляемого объекта действует шум измерения η. Ковариационные изображения процессов s, ξ и η: $\psi_s = \nu_s/\mu_s$, $\psi_\xi = \nu_\xi/\mu_\xi$, $\psi_\eta = \nu_\eta/\mu_\eta$. Будем считать выполненными следующие условия: $(\mu_s, \mu_\xi) = 1$, $(\mu_s, \mu_\eta) = 1$, $(\mu_\xi, \mu_\eta) = 1$.

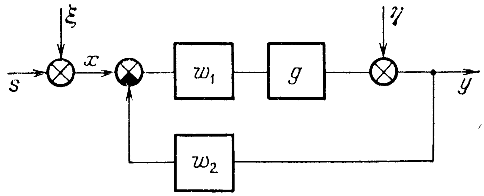

Рис. 14. Система с двумя управляющими устройствами и помехами, действующими на входе и выходе

Ошибка системы складывается из двух составляющих $e = e_1 + e_2$, где $e_1 = h_1\eta$, $e_2 = (h_2 - 1)s + h_2\xi$. Передаточные функции h_1 и h_2 по-прежнему имеют вид

$$h_1 = \frac{1}{1 + gw_1w_2}, \quad h_2 = \frac{gw_1}{1 + gw_1w_2}.$$

Рассчитаем h_1 из условия минимума дисперсии ошибки e_1: $J = \mathrm{ct}\, \psi_\eta h_1 \hat{h}_1 \to \min$. Получим

$$h_1 = \frac{\mu_\eta^+ q^- \pi_1}{\nu_\eta^+ \tilde{p}^- \tilde{q}^-},$$

где полином π_1 входит в минимальное решение π-уравнения

$$p^-\theta_1 + \mu_\eta^+ q^- \pi_1 = \nu_\eta^+ \tilde{p}^- \tilde{q}^-.$$

Соответствующая функция $w = w_1w_2$ имеет вид

$$w = \frac{q^+\theta_1}{\mu_\eta^+ p^+ \pi_1}.$$

Рассчитаем h_2 из условия минимума дисперсии ошибки e_2:

$$J_2 = \mathrm{ct}\, [(h_2 - 1)(\hat{h}_2 - 1)\psi_s + h_2\hat{h}_2\psi_\xi] \to \min.$$

Получим

$$\mathbf{h}_2 = \frac{\mu_\xi^+ \mathbf{p}^- \theta_2}{\nu_x^+ \tilde{\mathbf{p}}^-},$$

где полином θ_2 входит в минимальное решение π-уравнения

$$\mu_\xi^+ \mathbf{p}^- \theta_2 + \mu_s^+ \pi_2 = \nu_x^+ \tilde{\mathbf{p}}^-.$$

Из условия

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\mathbf{g}} \cdot \frac{\mathbf{h}_2}{\mathbf{h}_1}$$

получаем

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\nu_\eta^+ \mu_\xi^+ \mathbf{q}^* \theta_2}{\nu_x^+ \mu_\eta^+ \mathbf{p}^+ \pi_1}.$$

Из условия $\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}/\mathbf{w}_1$ получаем

$$\mathbf{w}_2 = \frac{\nu_x^+ \theta_1}{\nu_\eta^+ \mu_\xi^+ \tilde{\mathbf{q}}^- \theta_2}.$$

В 1980 г. В. Кучера [118] описал систему с двумя управляющими устройствами, одно из которых находится

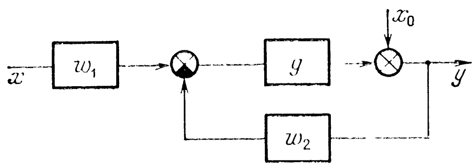

Рис. 15. Система с двумя управляющими устройствами, одно из которых находится вне замкнутого контура

вне замкнутого контура, а другое — в цепи обратной связи (рис. 15).

Здесь $\mathbf{x}$ — полезный сигнал с изображением

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}, \tag{4.117}$$

который подлежит отслеживанию, а $\mathbf{x}_0$ — сигнал помехи с изображением

$$\mathbf{x}_0 = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{q}}, \tag{4.118}$$

обусловленный ненулевыми начальными условиями в управляемом объекте.

Уравнения системы:

$$u = w_1 x - w_2 y, \quad y = gu + x_0,$$

откуда следует, что сигнал управления u и ошибка слежения $e = x - y$ имеют вид

$$u = \frac{w_1}{1 + gw_2} x - \frac{w_2}{1 + gw_2} x_0, \tag{4.119}$$

$$e = \left(1 - \frac{gw_1}{1 + gw_2}\right) x - \frac{1}{1 + gw_2} x_0. \tag{4.120}$$

Будем искать w_1 и w_2 в виде двух рациональных функций с общим знаменателем:

$$w_1 = \frac{\theta_1}{\pi_2}, \quad w_2 = \frac{\theta_2}{\pi_2}. \tag{4.121}$$

Подставляя выражения (4.117), (4.118) и (4.121) в (4.119) и (4.120), получим

$$u = \frac{q\theta_1}{p\theta_2 + q\pi_2} \cdot \frac{a}{b} - \frac{q\theta_2}{p\theta_2 + q\pi_2} \cdot \frac{r}{q}, \tag{4.122}$$

$$e = \left(1 - \frac{p\theta_1}{p\theta_2 + q\pi_2}\right) \frac{a}{b} - \frac{q\pi_2}{p\theta_2 + q\pi_2} \cdot \frac{r}{q}. \tag{4.123}$$

Если полиномы θ_1, θ_2 и π_2 подчинить π-уравнениям

$$p\theta_1 + b\pi_1 = 1, \quad p\theta_2 + q\pi_2 = 1, \tag{4.124}$$

то выражения (4.122) и (4.123) примут вид

$$u = \frac{q}{b} a\theta_1 - r\theta_2, \tag{4.125}$$

$$e = a\pi_1 - r\pi_2. \tag{4.126}$$

Мы видим, что переходный процесс ликвидации ошибки для любых полиномов π_1 и π_2, удовлетворяющих π-уравнениям (4.124), является конечным, а для минимальных полиномов — кратчайшим. Кратчайшая длительность переходного процесса обеспечивается для любых полиномов a и r, которые не входят в расчетные уравнения (4.124) и могут быть произвольными. Таким образом, оптимальность системы обеспечивается для целого класса входных воздействий и начальных состояний объекта.

В том случае, когда полином $\mathbf{b}$ является делителем полинома $\mathbf{q}$, т. е. $\mathbf{q} = \mathbf{b}\mathbf{q}_0$, обеспечивается и конечность по времени управляющего воздействия $\mathbf{u}$: $\mathbf{u} = \mathbf{q}_0\mathbf{a}\boldsymbol{\theta}_1 - \mathbf{r}\boldsymbol{\theta}_2$. Минимальные решения π-уравнений (4.124) обеспечивают кратчайшие по времени управление и ошибку.

Если $\mathbf{b} = \mathbf{q}$, то π-уравнения (4.124) становятся тождественными. При этом $\boldsymbol{\theta}_1 = \boldsymbol{\theta}_2$, $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2$, и применение двух управляющих устройств для раздельной обработки входного сигнала и сигнала обратной связи становится лишенным смысла: можно обойтись одним управляющим устройством в цепи обработки сигнала ошибки:

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1\mathbf{x} - \mathbf{w}_1\mathbf{y} = \mathbf{w}_1(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{w}_1\mathbf{e}.$$

Пример 1. Рассчитаем систему управления объектом с передаточной функцией

$$\mathbf{g} = \frac{z(1+2z)}{3-z},$$

имеющую конечное время установления переходного процесса, вызванного детерминированным сигналом $\mathbf{s} = 1/(1-z)$, и минимальную дисперсию ошибки, вызванной помехой $\boldsymbol{\xi}$, действующей на выходе управляемого объекта. Ковариационное изображение помехи

$$\psi_\xi = \frac{z}{(4-z)(4z-1)}.$$

Имеем

$$\mathbf{p}^+ = 1,\quad \mathbf{p}^- = z(1+2z),\quad \tilde{\mathbf{p}}^- = 2+z,\quad \mathbf{q}^+ = 3-z,\ \mathbf{q}^- = 1,$$
$$\mathbf{a}^+ = 1,\quad \mathbf{a}^- = 1,\quad \mathbf{b} = 1-z,\quad \mathbf{v}_\xi^+ = 1,\quad \boldsymbol{\mu}_\xi^+ = 4-z.$$

Находим $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{w}$ из условия минимума дисперсии ошибки, вызванной помехой $\boldsymbol{\xi}$. Для этого составляем π-уравнение (4.105):

$$z(1+2z)\boldsymbol{\theta}_1 + (4-z)\boldsymbol{\pi}_1 = 2+z.$$

Задаваясь $|\boldsymbol{\theta}_1| = 0$, $|\boldsymbol{\pi}_1| = 1$, находим его минимальное решение: $\boldsymbol{\theta}_1 = \frac{1}{6}$, $\boldsymbol{\pi}_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}z$. Отсюда

$$\mathbf{h}_1 = \frac{(4-z)(3+2z)}{6(2+z)},\quad \mathbf{w} = \frac{3-z}{(4-z)(3+2z)}.$$

Находим $\mathbf{h}_2$ из условия минимума времени установления. Для этого решаем π-уравнение (4.115):

$$z(1+2z)\boldsymbol{\theta}_2 + (1-z)\boldsymbol{\pi}_2 = 1.$$

Его минимальное решение $\boldsymbol{\theta}_2 = \frac{1}{3}$, $\boldsymbol{\pi}_2 = 1 + \frac{2}{3}z$. По формуле (4.114) находим $\mathbf{h}_2$: $\mathbf{h}_2 = z(1+2z)/3$. По формулам (4.116) находим программы двух управляющих устройств:

$$\mathbf{w}_1 = \frac{2(2+z)(3-z)}{(4-z)(3+2z)}, \quad \mathbf{w}_2 = \frac{1}{2(2+z)}.$$

Пример 2. Рассмотрим неустойчивый объект с передаточной функцией

$$\mathbf{g} = \frac{z(1+2z)}{(1-0{,}64z)(1-1{,}5z)}.$$

Имеем

$$\mathbf{p}^+ = 1, \quad \mathbf{p}^- = z(1+2z), \quad \widetilde{\mathbf{p}}^{-'} = 2+z,$$

$$\mathbf{q}^+ = 1-0{,}64z, \quad \mathbf{q}^- = 1-1{,}5z, \quad \widetilde{\mathbf{q}}^{-'} = -1{,}5+z.$$

Пусть на входе системы действует полезный сигнал с ковариационным изображением

$$\psi_s = \frac{z}{(1+0{,}37z)(z+0{,}37)},$$

а на выходе объекта действует помеха с ковариационным изображением

$$\psi_\xi = \frac{2{,}56z}{(1-0{,}12z)(z-0{,}12)}.$$

Имеем

$$\nu_s^+ = 1, \quad \nu_s^- = z, \quad \mu_s^+ = 1+0{,}37z, \quad \mu_s^- = z+0{,}37,$$

$$\nu_\xi^+ = 1{,}6, \quad \nu_\xi^- = 1{,}6z, \quad \mu_\xi^+ = 1-0{,}12z, \quad \mu_\xi^- = z-0{,}12.$$

Рассчитаем систему с двумя управляющими устройствами. Уравнение (4.105) имеет вид

$$z(1+2z)\theta_1 + (1-0{,}12z)(1-1{,}5z)\pi_1 = 1{,}6(2+z)(-1{,}5+z).$$

Выбирая $|\theta_1| = 1$, $|\pi_1| = 1$, получаем алгебраическую систему

$$\pi_0 = -4{,}8, \quad \theta_0 - 1{,}62\pi_0 + \pi_1 = 0{,}8,$$

$$2\theta_0 + \theta_1 + 0{,}18\pi_0 - 1{,}62\pi_1 = 1{,}6, \quad 2\theta_1 + 0{,}18\pi_1 = 0.$$

Ее решение $\theta_1 = -2{,}55 + 0{,}4z$, $\pi_1 = -4{,}8 - 4{,}45z$. Уравнение (4.107) имеет вид

$$z(1+2z)\theta_2 + (1+0{,}37z)\pi_2 = 2+z.$$

Выбирая $|\theta_2| = 0$, $|\pi_2| = 1$, получаем алгебраическую систему

$$\pi_0 = 2, \quad \theta_0 + 0{,}37\pi_0 + \pi_1 = 1, \quad 2\theta_0 + 0{,}37\pi_1 = 0.$$

Ее решение $\theta_2 = -0{,}06$, $\pi_2 = 2 + 0{,}32z$. По формулам (4.108) и (4.109) находим программы управляющих устройств:

$$\mathbf{w}_1 = \frac{0{,}096(1-0{,}64z)(-1{,}5+z)}{(1-0{,}12z)(4{,}8+4{,}45z)}, \quad \mathbf{w}_2 = \frac{2{,}55-0{,}4z}{0{,}096(-1{,}5+z)}.$$

По формуле (4.110) вычисляем дисперсию ошибки:

$$J^* = \mathrm{ct}\,\frac{22+47z+22z^2}{(2+z)(1+2z)}.$$

Для этого составляем π-уравнение:

$$(1+2z)\theta + (2+z)\pi = 22+47z+22z^2.$$

Задаваясь $|\theta| = 1$, $|\pi| = 0$, развертываем его в алгебраическую систему:

$$\theta_0 + 2\pi_0 = 22, \quad 2\theta_0 + \theta_1 + \pi_0 = 47, \quad 2\theta_1 = 22.$$

Ее решение $\theta = 16{,}7 + 11z$. Следовательно, дисперсия ошибки системы с двумя управляющими устройствами $J^* = 8{,}35$.

Для сравнения рассчитаем систему с одним управляющим устройством. Составляем сумму ковариационных изображений полезного сигнала $\mathbf{s}$ и помехи ξ:

$$\psi_x = \frac{3{,}8z\,(1+0{,}22z)\,(z+0{,}22)}{(1+0{,}37z)\,(1-0{,}12z)\,(z+0{,}37)\,(z-0{,}12)}.$$

Имеем

$$\mathbf{v}_x^+ = 1{,}95\,(1+0{,}22z), \quad \mu_x^+ = (1+0{,}37z)\,(1-0{,}12z).$$

Составляем π-уравнение (4.111):

$$z(1+2z)\theta + (1+0{,}37z)(1-0{,}12z)(1-1{,}5z)\pi = \\ = 1{,}95(1+0{,}22z)(2+z)(-1{,}5+z).$$

Решая его с помощью алгоритма Евклида, получим

$$\theta = -2{,}8 - 0{,}68z + 0{,}168z^2, \quad \pi = -5{,}85 - 4{,}8z.$$

По формуле (4.112) находим управляющую программу:

$$\mathbf{w} = \frac{(1-0{,}64z)\left(2{,}8+0{,}68z-0{,}168z^2\right)}{(1+0{,}37z)\,(1-0{,}12z)\,(5{,}85+4{,}8z)}.$$

По формуле (4.113) вычисляем значение дисперсии ошибки:

$$J^* = \mathrm{ct}\,\frac{28+57z+28z^2}{(2+z)(1+2z)}.$$

Для этого составляем π-уравнение:

$$(1+2z)\theta + (2+z)\pi = 28+57z+28z^2.$$

Задаваясь $|\theta| = 1$, $|\pi| = 0$, получаем алгебраическую систему:

$$\theta_0 + 2\pi_0 = 28, \quad 2\theta_0 + \theta_1 + \pi_0 = 57, \quad 2\theta_1 = 28.$$

Ее решение $\theta = 19{,}4 + 14z$. Следовательно, дисперсия ошибки системы с одним управляющим устройством $J^* = 9{,}7$. Сравнивая это значение со значением дисперсии ошибки системы с двумя управляющими устройствами $J^* = 8{,}35$, мы видим, что система с двумя управляющими устройствами имеет некоторое преимущество.

Пример 3. Рассчитаем по критерию минимального времени установления систему, изображенную на рис. 15, в том случае, когда передаточная функция управляемого объекта $\mathbf{g} = z(1-2z)/(1-z)^2$. Система предназначена для отработки входного сигнала, имеющего вид скачка неизвестной величины a_0: $\mathbf{x} = a_0/(1-z)$.

Ненулевые начальные условия в объекте эквивалентны наличию помехи с изображением

$$\mathbf{x}_0 = \frac{r_0 + r_1 z}{(1-z)^2}.$$

Имеем

$$\mathbf{p} = z(1-2z), \quad \mathbf{q} = (1-z)^2, \quad \mathbf{r} = r_0 + r_1 z,$$
$$\mathbf{a} = a_0, \quad \mathbf{b} = 1 - z.$$

Составляем π-уравнения (4.124):

$$z(1-2z)\theta_1 + (1-z)\pi_1 = 1, \quad z(1-2z)\theta_2 + (1-z)^2\pi_2 = 1.$$

Первое уравнение имеет минимальное решение с $|\theta_1| = 0$, $|\pi_1| = 1$. Разворачиваем его в алгебраическую систему:

$$\pi_0 = 1, \quad \theta_0 + \pi_1 - \pi_0 = 0, \quad -2\theta_0 - \pi_1 = 0.$$

Ее решение $\theta_1 = -1$, $\pi_1 = 1 + 2z$. Второе уравнение имеет мини-

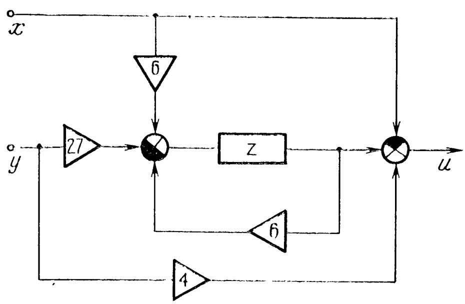

Рис. 16. Дискретное управляющее устройство с двумя входами и одним выходом

мальное решение с $|\theta_2| = 1$, $|\pi_2| = 1$. Разворачиваем его в алгебраическую систему:

$$\pi_0 = 1, \quad \theta_0 - 2\pi_0 + \pi_1 = 0,$$
$$-2\theta_0 + \theta_1 + \pi_0 - 2\pi_1 = 0, \quad -2\theta_1 + \pi_1 = 0.$$

Ее решение $\theta_2 = -4 + 3z$, $\pi_2 = 1 + 6z$.

Таким образом, программы $\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{w}_2$ имеют вид

$$\mathbf{w}_1 = -\frac{1}{1+6z}, \quad \mathbf{w}_2 = \frac{-4+3z}{1+6z}.$$

Управляющее воздействие

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{1+6z}\mathbf{x} + \frac{4-3z}{1+6z}\mathbf{y}.$$

Это соответствует разностному уравнению

$$u_i + 6u_{i-1} = -x_i + 4y_i - 3y_{i-1}.$$

Его удобно свести к системе двух разностных уравнений:

$$u_i = v_{i-1} - x_i + 4y_i, \quad v_i = -6v_{i-1} + 6x_i - 27y_i,$$

и реализовать в виде схемы (рис. 16) на одном элементе задержки.

7. Об одной задаче, встречающейся в теории оперативного управления производством

В последнее время в оперативном управлении производством начали использоваться методы оптимальных дискретных систем управления [11]. Типичная структурная схема модели оперативного управления производством имеет вид, представленный на рис. 17. Это чисто

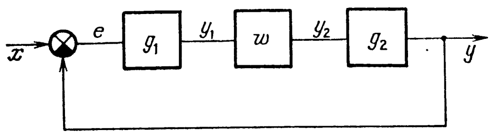

Рис. 17. Модель системы оперативного управления производством

дискретная система (система, состоящая из дискретных элементов), причем элементы $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$ заданы, а элемент $\mathbf{w}$, отражающий функцию оператора управления, должен быть выбран оптимальным образом.

На вход системы поступает сигнал $\mathbf{x}$, представляющий собой стационарный случайный процесс с нулевым средним значением и ковариационным изображением вида $\psi = \nu/\mu$, где ν и μ — полиномы от z. Наиболее важный для практики случай, когда передаточные функции элементов $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$ имеют вид

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\mathbf{p}_1}{\mathbf{q}_1}, \quad \mathbf{g}_2 = z^n \frac{\mathbf{p}_2}{\mathbf{q}_2},$$

где $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{p}_2$ и $\mathbf{q}_2$ — полиномы от z, причем $|\mathbf{p}_1| < |\mathbf{q}_1|$, $|\mathbf{p}_2| < |\mathbf{q}_2|$. Критерием оптимальности системы управления является минимум взвешенной суммы дисперсий процессов $\mathbf{y}_1$ и $\mathbf{y}_2$:

$$J = D(\mathbf{y}_1) + \lambda D(\mathbf{y}_2) \to \min.$$

Если ввести передаточную функцию системы

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2\mathbf{w}}{1+\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2\mathbf{w}}, \tag{4.127}$$

то изображения процессов $\mathbf{y}_1$ и $\mathbf{y}_2$ можно представить в виде

$$\mathbf{y}_1 = (1-\mathbf{h})\,\mathbf{g}_1\mathbf{x}, \quad \mathbf{y}_2 = \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{g}_2}\,\mathbf{x},$$

а их ковариационные изображения — в виде

$$\mathbf{y}_1\widehat{\mathbf{y}}_1 = (1-\mathbf{h})(1-\widehat{\mathbf{h}})\,\mathbf{g}_1\widehat{\mathbf{g}}_1\psi, \quad \mathbf{y}_2\widehat{\mathbf{y}}_2 = \frac{\mathbf{h}\widehat{\mathbf{h}}}{\mathbf{g}_2\widehat{\mathbf{g}}_2}\,\psi.$$

Критерий оптимальности можно записать как

$$J = \operatorname{ct}(\mathbf{y}_1\widehat{\mathbf{y}}_1 + \lambda\mathbf{y}_2\widehat{\mathbf{y}}_2),$$

а условие его минимума — в форме

$$\delta J = \operatorname{ct}(\mathbf{y}_1\delta\widehat{\mathbf{y}}_1 + \lambda\mathbf{y}_2\delta\widehat{\mathbf{y}}_2) = 0,$$

или

$$\delta J = \operatorname{ct}(\mathbf{h}\mathbf{f} - 1)\,\psi\delta\widehat{\mathbf{h}} = 0, \tag{4.128}$$

где

$$\mathbf{f} = \mathbf{g}_1\widehat{\mathbf{g}}_1 + \frac{\lambda}{\mathbf{g}_2\widehat{\mathbf{g}}_2}.$$

Представим $\mathbf{f}$ в виде

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{r}}{z^{|\mathbf{q}_2|-|\mathbf{p}_2|}\mathbf{p}_2\widetilde{\mathbf{p}}_2\mathbf{q}_1\widetilde{\mathbf{q}}_1},$$

где через $\mathbf{r}$ обозначен полином

$$\mathbf{r} = z^{|\mathbf{q}_1|+|\mathbf{q}_2|+|\mathbf{p}_1|-|\mathbf{p}_2|}\mathbf{p}_1\widetilde{\mathbf{p}}_1\mathbf{p}_2\widetilde{\mathbf{p}}_2 + \lambda\mathbf{q}_1\widetilde{\mathbf{q}}_1\mathbf{q}_2\widetilde{\mathbf{q}}_2.$$

Степень $\mathbf{r}$ определяется вторым слагаемым:

$$|\mathbf{r}| = |\mathbf{q}_1| + |\mathbf{q}_2| + |\widetilde{\mathbf{q}}_1| + |\widetilde{\mathbf{q}}_2|.$$

Легко видеть, что полином $\mathbf{r}$ является симметричным $\mathbf{r} = \widetilde{\mathbf{r}}$, и поэтому при его факторизации получаем

$$\mathbf{r}^+ = \widetilde{\mathbf{r}^-}, \quad \mathbf{r}^- = \widetilde{\mathbf{r}^+}, \quad |\mathbf{r}^+| = |\mathbf{r}^-| = |\mathbf{q}_1| + |\mathbf{q}_2|.$$

Полиномы μ, $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_2$ будем считать попарно простыми: $(\mu, \mathbf{q}_1) = 1$, $(\mu, \mathbf{q}_2) = 1$, $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = 1$.

Покажем, что программа оптимального управляющего оператора

$$\mathbf{w} = \frac{(\mathbf{q}_1^+)^2\,\mathbf{q}_2^+\theta}{\mathbf{p}_1^+\pi_1}, \qquad (4.129)$$

где θ и π_1 — полиномы, входящие в решение системы π-уравнений

$$z^n\mathbf{p}_1^-\mathbf{p}_2\mathbf{q}_1^+\theta + \mathbf{q}_1^-\mathbf{q}_2^-\pi_1 = \mathbf{v}^+\tilde{\mathbf{p}}_1^-\tilde{\mathbf{q}}_2^-\mathbf{r}^+, \qquad (4.130)$$

$$z^n\mathbf{p}_1^-\mathbf{r}^-\theta + \mu^+\pi_2 = z^{|\mathbf{q}_2|-|\mathbf{p}_2|}\mathbf{v}^+\tilde{\mathbf{p}}_1^-\tilde{\mathbf{p}}_2\mathbf{q}_1^-\tilde{\mathbf{q}}_1\tilde{\mathbf{q}}_2^-, \qquad (4.131)$$

минимальное относительно π_2. Подставляя (4.129) в (4.127) и учитывая π-уравнение (4.130), получим

$$\mathbf{h} = \frac{z^n\mathbf{p}_1^-\mathbf{p}_2\mathbf{q}_1^+\theta}{\mathbf{v}^+\tilde{\mathbf{p}}_1^-\tilde{\mathbf{q}}_2^-\mathbf{r}^+}. \qquad (4.132)$$

Минимальное относительно π_2 решение системы π-уравнений (4.130), (4.131) содержит полиномы следующих степеней:

$$|\theta^0| = |\mu^+| + |\mathbf{q}_1^-| + |\mathbf{q}_2^-| - 1,$$
$$|\pi_1^0| = n + |\mathbf{p}_1^-| + |\mathbf{p}_2| + |\mathbf{q}_1^+| - 1,$$
$$|\pi_2^0| = n + |\mathbf{p}_1^-| + |\mathbf{q}_1^-| + |\mathbf{q}_2^-| + |\mathbf{r}^-| - 1.$$

Общее решение относительно θ имеет вид

$$\theta = \theta^0 + \mu^+\mathbf{q}_1^-\mathbf{q}_2^-\zeta,$$

где ζ — произвольный полином. Варьируя θ, получим $\delta\theta = \mu^+\mathbf{q}_1^-\mathbf{q}_2^-\delta\zeta$, и, следовательно,

$$\delta\mathbf{h} = \frac{z^n\mu^+\mathbf{p}_1^-\mathbf{p}_2\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2^-}{\mathbf{v}^+\tilde{\mathbf{p}}_1^-\tilde{\mathbf{q}}_2^-\mathbf{r}^+}\,\delta\zeta. \qquad (4.133)$$

После подстановки (4.132) и (4.133) в (4.128), производя возможные сокращения и учитывая π-уравнение (4.131), получим

$$\delta J = \mathrm{ct}\,\frac{\pi_2}{z^n\mathbf{p}_1^-\mathbf{q}_1^-\mathbf{q}_2^-\mathbf{r}^-}\,\delta\hat{\zeta}.$$

Поскольку функция под знаком ct является левой и правильной, то условие оптимальности выполнено: $\delta J = 0$.

Пример. Найдем оптимальный оператор $\mathbf{w}$ для системы оперативного управления производством, в которой $g_1 = 1/(1-z)$, $g_2 = \gamma z^n$. Пусть ковариационное изображение входного сигнала имеет вид

$$\psi = \frac{c(1-\alpha^2)z}{(1-\alpha z)(z-\alpha)}.$$

Имеем

$$\nu^+ = \sqrt{c(1-\alpha^2)}, \quad \mu^+ = 1-\alpha z,$$

$$\mathrm{p}_1 = 1, \quad \mathrm{q}_1^+ = 1-z, \quad \mathrm{q}_1^- = 1, \quad \mathrm{p}_2 = \gamma, \quad \mathrm{q}_2 = 1.$$

Составляем полином $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r} = \gamma^2 z + \lambda(1-z)(z-1) = -\lambda\left[1-\left(2+\frac{\gamma^2}{\lambda}\right)z+z^2\right].$$

Он имеет два действительных корня, один из которых ρ расположен внутри единичного круга на плоскости z, а другой $1/\rho$ — вне его. Имеем

$$\rho = 1+\frac{\gamma^2}{2\lambda}-\sqrt{\frac{\gamma^2}{\lambda}\left(\frac{\gamma^2}{4\lambda}+1\right)}.$$

Нетрудно убедиться, что программа $\mathbf{w}$ инвариантна относительно различных факторизаций полинома $\mathbf{r}$. Поэтому факторизацию $\mathbf{r}$ можно выполнить так:

$$\mathbf{r}^+ = 1-\rho z, \quad \mathbf{r}^- = -\lambda\left(1-\frac{1}{\rho}z\right).$$

Согласно (4.129), оптимальный оператор управления

$$\mathbf{w} = \frac{(1-z)^2\theta}{\pi_1},$$

где θ и π_1 удовлетворяют системе π-уравнений (4.130), (4.131)

$$\gamma z^n(1-z)\theta + \pi_1 = (1-\rho z)\sqrt{c(1-\alpha^2)},$$

$$-\lambda z^n\left(1-\frac{1}{\rho}z\right)\theta + (1-\alpha z)\pi_2 = \gamma(z-1)\sqrt{c(1-\alpha^2)}.$$

Поскольку нас интересует только отношение θ/π_1, оба уравнения можно сократить на числовой множитель $\sqrt{c(1-\alpha^2)}$:

$$\gamma z^n(1-z)\theta + \pi_1 = 1-\rho z,$$

$$-\lambda z^n\left(1-\frac{1}{\rho}z\right)\theta + (1-\alpha z)\pi_2' = \gamma(z-1).$$

Первое π-уравнение является вырожденным и не накладывает ограничений на θ. Поэтому достаточно решить относительно θ только второе уравнение. Поскольку это уравнение является правильным, то в его минимальное решение относительно π_2' входит θ с $|\theta| = 0$. Искомое число $\theta = \theta_0$ можно найти подстановкой $z = \alpha^{-1}$. Получаем

$$\theta_0 = \frac{\rho\gamma\alpha^n (1-\alpha)}{\lambda (1-\rho\alpha)}.$$

Из первого π-уравнения находим соответствующий полином π_1:

$$\pi_1 = 1 - \rho z - \gamma\theta_0 z^n (1-z).$$

Программа оперативного управления производством равна

$$\mathbf{w} = \frac{\theta_0 (1-z)^2}{1 - \rho z - \gamma\theta_0 z^n (1-z)}.$$

Ей соответствует рекуррентная формула

$$y_2(i) - \rho y_2(i-1) - \gamma\theta_0 y_2(i-n) + \gamma\theta_0 y_2(i-n-1) = \\ = \theta_0[y_1(i) - 2y_1(i-1) + y_1(i-2)].$$

ГЛАВА 5

ЗАДАЧИ АППРОКСИМАЦИИ И ИДЕНТИФИКАЦИИ

1. Аппроксимация сигналов по методу наименьших квадратов

Для обработки информации в самонастраивающихся системах автоматического управления, содержащих ЭВМ, широко применяется метод наименьших квадратов, заключающийся в простейшем случае в следующем. Имеется конечное число измерений некоторого процесса $x(t)$ в моменты времени $t_i = iT$: $x_i = x(iT)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Требуется построить полином $m(t)$ заданной степени $(\mu - 1)$

$$m(t) = \sum_{j=0}^{\mu-1} a_j t^j,$$

аппроксимирующий процесс $x(t)$ в смысле минимума суммарной квадратичной ошибки

$$J = \sum_{i=0}^{n} (m_i - x_i)^2. \tag{5.1}$$

Обычно эта задача решается следующим образом. Подставляя в (5.1) $m_i = \sum_{j=0}^{\mu-1} \alpha_j i^j$, $\alpha_j = a_j T^j$, получим

$$J = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{\mu-1} \alpha_j i^j - x_i \right)^2.$$

Условия минимума этого выражения по $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{\mu-1}$

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_j} = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, \mu - 1,$$

дают следующую систему линейных алгебраических уравнений («нормальных» уравнений, по терминологии К. Ф. Гаусса) относительно коэффициентов $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$

$\ldots, \alpha_{\mu-1}$:

$$\sum_{k=0}^{\mu-1} \alpha_k \sum_{i=0}^{n} i^{j+k} = \sum_{i=0}^{n} i^j x_i, \qquad j = 0, 1, \ldots, \mu - 1.$$

Решая эту систему, можно найти все α_j, а по ним значение полинома $m(t)$ для любого момента времени t.

В целях унификации программирования управляющих ЭВМ целесообразно переложить метод наименьших квадратов на операторный язык π-исчисления. Этот подход дает возможность нахождения полного изображения процесса по конечному числу измерений.

Перейдем к изложению этого метода. Для этого составим *усеченное изображение* процесса $e(t) = m(t) - x(t)$ на интервале $[0, nT]$:

$$\mathbf{e}_n = \sum_{i=0}^{n} e_i z^i.$$

Операторное выражение квадратичного критерия (5.1) через усеченное изображение $\mathbf{e}_n$ имеет вид $J = \mathrm{ct}\,\mathbf{e}_n\widehat{\mathbf{e}}_n$, где $\widehat{\mathbf{e}}_n$ — инвертированный полином $\widehat{\mathbf{e}}_n(z) = \mathbf{e}_n(z^{-1}) = z^{-n}\widetilde{\mathbf{e}}_n(z)$.

Условие минимума критерия J по всем усеченным изображениям $\mathbf{m}_n$ требует равенства нулю функционала

$$\delta J = \mathrm{ct}\,\mathbf{e}_n \delta\widehat{\mathbf{e}}_n = \mathrm{ct}(\mathbf{m}_n - \mathbf{x}_n)\,\delta\widehat{\mathbf{m}}_n. \tag{5.2}$$

Полное изображение полинома $m(t)$ на интервале $[0, \infty]$ имеет вид

$$\mathbf{m} = \sum_{i=0}^{\infty} m_i z^i = \frac{\mathbf{r}}{(1-z)^{\mu}}, \tag{5.3}$$

где $\mathbf{r}$ — полином от z степени $\mu - 1$. Связи, накладываемые на усеченное изображение $\mathbf{m}_n$ принадлежностью $m(t)$ к классу полиномов с полным изображением вида (5.3), отражаются следующим π-уравнением (см. уравнение (1.28)):

$$z^{n+1}\theta + (1 - z)^{\mu}\mathbf{m}_n = \mathbf{r}. \tag{5.4}$$

Полиномы θ и $\mathbf{m}_n$ образуют минимальное решение этого уравнения.

Составим приведенное π-уравнение, соответствующее (5.4):

$$z^{n+1}\theta_0 + (1 - z)^{\mu}\pi_0 = 1 \tag{5.5}$$

и найдем его минимальные полиномы θ_0 и π_0. Выражение $\mathbf{m}_n$ через π_0 имеет вид

$$\mathbf{m}_n = \pi_0\mathbf{r} + z^{n+1}\zeta, \tag{5.6}$$

где ζ — полином степени $\mu - 2$, представляющий собой частное от деления $\pi_0\mathbf{r}$ на $(-z^{n+1})$. Варьируя (5.6), имеем

$$\delta\mathbf{m}_n = \pi_0\delta\mathbf{r} + z^{n+1}\delta\zeta.$$

Инвертируем это выражение:

$$\delta\widehat{\mathbf{m}}_n = \frac{\widetilde{\pi}_0\delta\widetilde{\mathbf{r}}}{z^{n+\mu-1}} + \frac{\delta\widetilde{\zeta}}{z^{n+\mu-1}}. \tag{5.7}$$

Подставив (5.7) в (5.2), получим

$$\delta J = \operatorname{ct}(\mathbf{m}_n - \mathbf{x}_n)\frac{\widetilde{\pi}_0\delta\widetilde{\mathbf{r}}}{z^{n+\mu-1}} + \operatorname{ct}(\mathbf{m}_n - \mathbf{x}_n)\frac{\delta\widetilde{\zeta}}{z^{n+\mu-1}}. \tag{5.8}$$

Второе слагаемое в этом выражении равно нулю, так как функция под знаком ct является левой и правильной:

$$|\mathbf{m}_n - \mathbf{x}_n| + |\delta\widetilde{\zeta}| < n + \mu - 1.$$

Учитывая (5.6), первое слагаемое выражения (5.8) запишем в виде

$$\delta J = \operatorname{ct}\left(\pi_0\mathbf{r} + z^{n+1}\zeta - \mathbf{x}_n\right)\frac{\widetilde{\pi}_0\delta\widetilde{\mathbf{r}}}{z^{n+\mu-1}}. \tag{5.9}$$

Чтобы свести к нулю этот функционал, введем два неизвестных полинома π_1 и π_2, таких, что

$$\frac{\widetilde{\pi}_0\left(\pi_0\mathbf{r} + z^{n+1}\zeta - \mathbf{x}_n\right)}{z^{n+\mu-1}} = -\frac{\pi_1}{z^{n+\mu-1}} - z\pi_2. \tag{5.10}$$

Тогда (5.9) с точностью до знака принимает вид

$$\delta J = \operatorname{ct}\frac{\pi_1\delta\widetilde{\mathbf{r}}}{z^{n+\mu-1}} + \operatorname{ct} z\pi_2\delta\widetilde{\mathbf{r}}.$$

Первое слагаемое в этом выражении равно нулю, если функция под знаком ct является правильной, т. е. при $|\pi_1| = n - 1$. Второе слагаемое этого выражения равно нулю для любого полинома π_2. Условие (5.10) представляет собой π-уравнение относительно четырех неизвестных полиномов $\mathbf{r}$, ζ, π_1 и π_2:

$$\pi_0\widetilde{\pi}_0\mathbf{r} + z^{n+1}\widetilde{\pi}_0\zeta + \pi_1 + z^{n+\mu}\pi_2 = \widetilde{\pi}_0\mathbf{x}_n. \tag{5.11}$$

Степень полинома $\boldsymbol{\pi}_2$ выбирается равной $|\boldsymbol{\pi}_2| = n - \mu$. При таком выборе π-уравнение (5.11) имеет единственное решение.

Найдя полином $\mathbf{r}$ из этого уравнения, можно составить полное изображение сглаженного процесса $m(t)$ по формуле (5.3). Значение $m(t)$ для любого момента времени $t_i = iT$ можно вычислить по формуле $m_i = \theta_i(0)$, где $\theta_i(z)$ — минимальный полином π-уравнения

$$z^i\theta_i + (1-z)^\mu\boldsymbol{\pi}_i = \mathbf{r}. \tag{5.12}$$

Пример. В результате измерений процесса $x(t)$ в моменты 0, T, $2T$ и $3T$ получены значения $x_0 = 1{,}23$, $x_1 = 3{,}12$, $x_2 = 2{,}35$, $x_3 = 4{,}17$. Требуется провести прямую $m(t) = a_0 + a_1 t$, аппроксимирующую процесс $x(t)$ по методу наименьших квадратов, и найти ее изображение $\mathbf{m}$.

Имеем $n = 3$, $\mu = 2$. Составим полином

$$\mathbf{x}_3 = 1{,}23 + 3{,}12z + 2{,}35z^2 + 4{,}17z^3.$$

Полиномиальное уравнение (5.5) имеет вид

$$z^4\theta_0 + (1-z)^2\boldsymbol{\pi}_0 = 1.$$

Решая его, получаем

$$\boldsymbol{\pi}_0 = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3.$$

Уравнение (5.11) принимает вид

$$(1 + 2z + 3z^2 + 4z^3)(4 + 3z + 2z^2 + z^3)\mathbf{r} + z^4(4 + 3z + 2z^2 + z^3)\boldsymbol{\zeta} + \\ + \boldsymbol{\pi}_1 + z^5\boldsymbol{\pi}_2 = (4 + 3z + 2z^2 + z^3)(1{,}23 + 3{,}12z + 2{,}35z^2 + 4{,}17z^3).$$

Выбираем степени неизвестных полиномов: $|\mathbf{r}| = 1$, $|\boldsymbol{\zeta}| = 0$, $|\boldsymbol{\pi}_1| = 2$, $|\boldsymbol{\pi}_2| = 1$. Приравнивая коэффициенты при z^3, z^4 и z^7, получаем следующую алгебраическую систему:

$$30r_0 + 20r_1 = 31{,}2, \quad 20r_0 + 30r_1 + 4\zeta_0 = 20{,}33, \quad 4r_1 + \zeta_0 = 0.$$

Решая ее, находим $\mathbf{r} = 1{,}51 - 0{,}7z$. Следовательно, изображение процесса $m(t)$

$$\mathbf{m} = \frac{1{,}51 - 0{,}7z}{(1-z)^2}.$$

Значение процесса $m(t)$ в момент $t_4 = 4T$ равно $m_4 = \theta_4(0)$, где $\theta_4(z)$ — минимальный полином уравнения

$$z^4\theta_4 + (1-z)^2\boldsymbol{\pi}_4 = 1{,}51 - 0{,}7z.$$

Решая его, получаем $\theta_4 = 4{,}75 - 3{,}94z$. Отсюда следует, что $m_4 = 4{,}75$.

2. Тождественность метода наименьших квадратов одной частной задаче Заде — Рагаззини

Прежде всего заметим, что задача минимизации квадратичного функционала

$$J = \mathrm{ct}\,\boldsymbol{\pi}\hat{\boldsymbol{\pi}}, \tag{5.13}$$

где $\boldsymbol{\pi}$ — неизвестный полином заданной степени $|\boldsymbol{\pi}| = n$, удовлетворяющий заданному π-уравнению

$$\mathbf{a}\theta + \mathbf{b}\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}, \tag{5.14}$$

сводится к системе нормальных уравнений Гаусса. Докажем это положение. Для этого построим общее решение π-уравнения (5.14)

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}_0 - \mathbf{a}\boldsymbol{\zeta}, \tag{5.15}$$

где $\boldsymbol{\pi}_0$ — минимальное решение степени $|\boldsymbol{\pi}_0| = |\mathbf{a}| - 1$, а $\boldsymbol{\zeta}$ — произвольный полином степени $|\boldsymbol{\zeta}| \geqslant 0$. Поскольку $|\boldsymbol{\pi}| = |\mathbf{a}| + |\boldsymbol{\zeta}|$, то свобода оптимизации появляется только при $n \geqslant |\mathbf{a}|$.

Варьируя (5.13), условие минимума J можно записать в виде

$$\delta J = \mathrm{ct}\,\boldsymbol{\pi}\delta\hat{\boldsymbol{\pi}} = 0. \tag{5.16}$$

Варьируя (5.15), получим $\delta\boldsymbol{\pi} = \mathbf{a}\delta\boldsymbol{\zeta}$. Произведем инверсию этого выражения: $\delta\hat{\boldsymbol{\pi}} = \tilde{\mathbf{a}}\delta\tilde{\boldsymbol{\zeta}}/z^n$ и подставим его наряду с (5.15) в (5.16):

$$\delta J = \mathrm{ct}\,\frac{\boldsymbol{\pi}\tilde{\mathbf{a}}\delta\tilde{\boldsymbol{\zeta}}}{z^n} = \mathrm{ct}\,\frac{\tilde{\mathbf{a}}\boldsymbol{\pi}_0 - \mathbf{a}\tilde{\mathbf{a}}\boldsymbol{\zeta}}{z^n}\,\delta\tilde{\boldsymbol{\zeta}}.$$

Введем два неопределенных полинома $\boldsymbol{\pi}_1$ и $\boldsymbol{\pi}_2$, таких, что

$$\frac{\tilde{\mathbf{a}}\boldsymbol{\pi}_0 - \mathbf{a}\tilde{\mathbf{a}}\boldsymbol{\zeta}}{z^n} = \frac{\boldsymbol{\pi}_1}{z^n} + z\boldsymbol{\pi}_2, \tag{5.17}$$

причем степень полинома $\boldsymbol{\pi}_1$ выберем такой, чтобы выполнялось условие

$$\mathrm{ind}\,\frac{\boldsymbol{\pi}_1\delta\tilde{\boldsymbol{\zeta}}}{z^n} = -1. \tag{5.18}$$

Это условие выполняется при выборе $|\boldsymbol{\pi}_1| = |\mathbf{a}| - 1$ и обеспечивает $\mathrm{ct}(\boldsymbol{\pi}_1\delta\tilde{\boldsymbol{\zeta}}/z^n) = 0$.

Условие (5.17) эквивалентно следующему π-уравнению относительно трех неизвестных полиномов ζ, π_1 и π_2:

$$\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{a}\zeta + \pi_1 + z^{n+1}\pi_2 = \tilde{\mathbf{a}}\pi_0. \tag{5.19}$$

Из условия равенства степеней первого и третьего слагаемых находим $|\pi_2| = |\tilde{\mathbf{a}}| - 1$.

Уравнение (5.19) является *сепарабельным*: интересующий нас полином ζ может быть найден приравниванием коэффициентов при степенях $z^{|\mathbf{a}|}, z^{|\mathbf{a}|+1}, \ldots, z^n$. Этих уравнений как раз достаточно для определения $n - |\mathbf{a}| + 1$ неизвестных коэффициентов полинома ζ. Обозначив $\varphi = \mathbf{a}\tilde{\mathbf{a}}$, $\psi = \tilde{\mathbf{a}}\pi_0$, получаем систему нормальных уравнений Гаусса:

$$\begin{bmatrix} \varphi_{|\mathbf{a}|} & \varphi_{|\mathbf{a}|+1} & \cdots & \varphi_n \\ \varphi_{|\mathbf{a}|+1} & \varphi_{|\mathbf{a}|} & \cdots & \varphi_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_n & \varphi_{n-1} & \cdots & \varphi_{|\mathbf{a}|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_0 \\ \zeta_1 \\ \cdots \\ \zeta_{n-|\mathbf{a}|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{|\mathbf{a}|} \\ \psi_{|\mathbf{a}|+1} \\ \cdots \\ \psi_n \end{bmatrix} \tag{5.20}$$

Очевидно, что полином φ является симметричным: $\varphi = \tilde{\varphi}$, а следовательно, матрица этой системы Φ также является симметричной, т. е. равна своей транспонированной: $\Phi = \Phi^{\mathrm{T}}$. Очевидно также следующее: с ростом степени полинома π появляется дополнительная возможность оптимизации и, следовательно, минимальное значение критерия J^* как функция целочисленного аргумента n является монотонно убывающим:

$$J^*[n+1] \leqslant J^*[n]. \tag{5.21}$$

Далее, рассмотрим одну частную задачу Заде — Рагаззини о выделении полезного сигнала типа полинома от i

$$m_i = \sum_{j=0}^{\mu-1} \alpha_j i^j$$

из смеси с белым шумом, имеющим ковариационное изображение $\psi_\xi = D$. Имеем $\mathbf{l} = 0$, $\lambda = 0$, $\mathbf{c} = 1$. Уравнение (4.94), обеспечивающее несмещенную обработку сигнала, принимает вид

$$\theta + (1 - z)^\mu \pi = 1. \tag{5.22}$$

Критерий минимизации дисперсии случайной ошибки имеет вид

$$J = D \operatorname{ct} \theta\hat{\theta}. \tag{5.23}$$

Поскольку разыскивается устройство с конечной глубиной памяти $|\theta| = n$, то мы имеем типичную задачу рассмотренного выше класса, сводящуюся к системе нормальных уравнений Гаусса.

Условие минимума критерия (5.23) имеет вид

$$\delta J = \mathrm{ct}\, \theta \delta \widehat{\theta} = 0. \qquad (5.24)$$

Варьируя (5.22), имеем $\delta\theta = (1-z)^{\mu}\delta\pi$. Проинвертируем это выражение:

$$\delta\widehat{\theta} = \frac{(1-z)^{\mu}\,\delta\widetilde{\pi}}{z^{n}},$$

и подставим его в (5.24):

$$\delta J = \mathrm{ct}\, \frac{(1-z)^{\mu}\theta}{z^{n}}\, \delta\widetilde{\pi}.$$

Введем такие два полинома π_1 и π_2, что

$$\frac{(1-z)^{\mu}\,\theta}{z^{n}} = -\frac{\pi_1}{z^{n}} - z\pi_2, \qquad (5.25)$$

причем степень полинома π_1 должна быть $|\pi_1| = \mu - 1$. Условие (5.25) эквивалентно следующему π-уравнению относительно трех неизвестных полиномов θ, π_1 и π_2:

$$(1-z)^{\mu}\theta + \pi_1 + z^{n+1}\pi_2 = 0. \qquad (5.26)$$

Таким образом, задача сведена к совместному решению системы π-уравнений (5.22) и (5.26), которая содержит $2n + \mu + 2$ уравнений и столько же неизвестных, если степень полинома π_2 взять равной $|\pi_2| = \mu - 1$. Однако уравнение (5.26) не является сепарабельным. Сепарабельное уравнение можно получить, если подставить значение θ из уравнения (5.22) в (5.26). Меняя знаки у произвольных полиномов π_1 и π_2, получаем следующее π-уравнение:

$$(1-z)^{2\mu}\pi + \pi_1 + z^{n+1}\pi_2 = (1-z)^{\mu}. \qquad (5.27)$$

Это уравнение уже является сепарабельным. Приравнивая коэффициенты при $z^{\mu}, z^{\mu+1}, \ldots, z^{n}$, получим систему нормальных уравнений относительно коэффициентов полинома π:

$$\begin{bmatrix} (-1)^{\mu} C_{2\mu}^{\mu} & (-1)^{\mu+1} C_{2\mu}^{\mu+1} & \dots & (-1)^{n} C_{2\mu}^{n} \\ (-1)^{\mu+1} C_{2\mu}^{\mu+1} & (-1)^{\mu} C_{2\mu}^{\mu} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{n} C_{2\mu}^{n} & (-1)^{n-1} C_{2\mu}^{n-1} & \dots & (-1)^{\mu} C_{2\mu}^{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \dots \\ \pi_{n-\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{\mu} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.28)$$

Найдя π из этой системы уравнений, получаем оператор оптимальной обработки сигнала $\mathbf{x}$ по формуле

$$\theta = 1 - (1 - z)^{\mu}\pi. \quad (5.29)$$

На выходе устройства будет получаться сигнал $\mathbf{y} = \theta\mathbf{x} = \theta\mathbf{m} + \theta\xi$, среднее значение которого

$$\bar{\mathbf{y}} = \theta\mathbf{m} = \left[1 - (1 - z)^{\mu}\pi\right]\frac{\mathbf{r}}{(1 - z)^{\mu}} = \frac{\mathbf{r}}{(1 - z)^{\mu}} - \mathbf{r}\pi = \mathbf{m} - \mathbf{r}\pi,$$

начиная с n-го такта (после исчезновения динамической ошибки), будет в точности воспроизводить полезный сигнал.

Если при этом от такта к такту перерассчитывать полином π, расширяя систему уравнений (5.28), и вместе с ним перерассчитывать полином θ, то случайная составляющая ошибки будет монотонно уменьшаться, повышая точность воспроизведения полезного сигнала. Это устройство по результатам своего действия полностью аналогично устройству, вычисляющему по методу наименьших квадратов коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{\mu-1}$ полинома

$$m_i = \sum_{j=0}^{\mu-1} \alpha_j i^j$$

по формулам Гаусса

$$\sum_{k=0}^{\mu-1} \alpha_k \sum_{i=0}^{n} i^{j+k} = \sum_{i=0}^{n} i^j x_i, \qquad j = 0, \dots, \mu - 1.$$

Таким образом, доказана оптимальность метода наименьших квадратов при сделанных выше частных предположениях о характере полезного сигнала и шума. Во всех же других случаях этот простейший вариант метода наименьших квадратов перестает быть оптимальным и требует перехода к составлению и решению полиномиальных уравнений, которые можно рассматривать, в частности, как обобщение нормальных уравнений Гаусса.

3. Аппроксимация сложных систем простыми

Вообще говоря, задача аппроксимации одной рациональной функции

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}, \tag{5.30}$$

где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — заданные полиномы от z, другой рациональной функцией

$$\mathbf{f} = \frac{\boldsymbol{\theta}}{\boldsymbol{\pi}}, \tag{5.31}$$

где $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\pi}$ — полиномы заданных степеней $|\boldsymbol{\theta}| = m$, $|\boldsymbol{\pi}| = n$ в смысле минимизации определенного критерия $J = J(\mathbf{f}, \mathbf{h})$ может быть решена классическим методом дифференцирования по параметрам

$$\frac{\partial J}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 0, \ldots, m, \qquad \frac{\partial J}{\partial \pi_i} = 0, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Однако этот метод требует чрезвычайно громоздких вычислений и мало приспособлен для программирования. При решении подобных задач классическими методами основные трудности возлагаются на программиста. Метод полиномиальных уравнений может в какой-то мере облегчить труд программиста, так как часть задачи решается в общем аналитическом виде.

Нетривиальное решение задачи аппроксимации одной функции другой получается в том случае, когда допустимые степени неизвестных полиномов $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\pi}$ удовлетворяют по крайней мере одному из следующих неравенств $|\boldsymbol{\theta}| < |\mathbf{a}|$, $|\boldsymbol{\pi}| < |\mathbf{b}|$. Ограничимся задачей аппроксимации рациональных функций, являющихся изображениями устойчивых процессов и объектов, т. е. будем считать $\mathbf{b} = \mathbf{b}^+$, $\mathbf{b}^- = 1$; $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}^+$, $\boldsymbol{\pi}^- = 1$. Функцию $\mathbf{e} = \mathbf{h} - \mathbf{f}$ назовем *изображением ошибки аппроксимации.* В качестве критерия оптимальности аппроксимации возьмем суммарную квадратичную ошибку

$$J = \mathrm{ct}\, \mathbf{e}\hat{\mathbf{e}}. \tag{5.32}$$

Условие минимума этого критерия имеет вид $\delta J = \mathrm{ct}\, e\delta\hat{e} = 0$, или

$$\delta J = \mathrm{ct}(\mathbf{h} - \mathbf{f})\,\delta\hat{\mathbf{f}} = 0. \tag{5.33}$$

Варьируя (5.31), имеем

$$\delta \mathbf{f} = \frac{\delta\theta}{\pi} - \frac{\theta\delta\pi}{\pi^2}.$$

Произведем инверсию этого выражения:

$$\delta\hat{\mathbf{f}} = z^{\nu}\left(\frac{\delta\tilde{\theta}}{\tilde{\pi}} - \frac{\tilde{\theta}\delta\tilde{\pi}}{\tilde{\pi}^2}\right), \qquad \nu = n - m. \tag{5.34}$$

Подставив (5.30), (5.31) и (5.34) в (5.33), получим

$$\mathrm{ct}\left[z^{\nu}\frac{\mathbf{b}\theta - \mathbf{a}\pi}{\mathbf{b}\pi}\left(\frac{\delta\tilde{\theta}}{\tilde{\pi}} - \frac{\tilde{\theta}\delta\tilde{\pi}}{\tilde{\pi}^2}\right)\right] = 0.$$

Ввиду независимости вариаций $\delta\theta$ и $\delta\pi$, это условие распадается на два:

$$\mathrm{ct}\left[z^{\nu}\frac{\mathbf{b}\theta - \mathbf{a}\pi}{\mathbf{b}\pi\tilde{\pi}}\,\delta\tilde{\theta}\right] = 0, \tag{5.35}$$

$$\mathrm{ct}\left[z^{\nu}\frac{\mathbf{b}\theta\tilde{\theta} - \mathbf{a}\tilde{\theta}\pi}{\mathbf{b}\pi\tilde{\pi}^2}\,\delta\tilde{\pi}\right] = 0. \tag{5.36}$$

Рассмотрим случай $\nu > 0$. Для выполнения условий (5.35)—(5.36) введем четыре дополнительных полинома π_1, π_2, π_3, π_4, таких, что

$$z^{\nu}\frac{\mathbf{b}\theta - \mathbf{a}\pi}{\mathbf{b}\pi\tilde{\pi}} = -\frac{\pi_1}{\tilde{\pi}} - \frac{z\pi_2}{\mathbf{b}\pi}, \tag{5.37}$$

$$z^{\nu}\frac{\mathbf{b}\theta\tilde{\theta} - \mathbf{a}\tilde{\theta}\pi}{\mathbf{b}\pi\tilde{\pi}^2} = -\frac{\pi_3}{\tilde{\pi}^2} - \frac{z\pi_4}{\mathbf{b}\pi}, \tag{5.38}$$

причем степени полиномов π_1 и π_3 выбираются следующими: $|\pi_1| = \nu - 1$, $|\pi_3| = n$. При этом условия (5.35)—(5.36) будут выполнены.

Условия (5.37)—(5.38) сводятся к системе нелинейных π-уравнений относительно неизвестных полиномов θ, π, π_1, π_2, π_3 и π_4:

$$z^{\nu}\mathbf{b}\theta - z^{\nu}\mathbf{a}\pi + \mathbf{b}\pi\pi_1 + z\tilde{\pi}\pi_2 = 0, \tag{5.39}$$

$$z^{\nu}\mathbf{b}\theta\tilde{\theta} - z^{\nu}\mathbf{a}\tilde{\theta}\pi + \mathbf{b}\pi\pi_3 + z\tilde{\pi}^2\pi_4 = 0. \tag{5.40}$$

Из этих уравнений следует, что $\pi_1(0) = 0$, $\pi_3(0) = 0$, поэтому их можно переписать в виде

$$z^{\nu-1}\mathbf{b}\theta - z^{\nu-1}\mathbf{a}\pi + \mathbf{b}\pi\pi_1 + \tilde{\pi}\pi_2 = 0, \tag{5.41}$$

$$z^{\nu-1}\mathbf{b}\theta\tilde{\theta} - z^{\nu-1}\mathbf{a}\tilde{\theta}\pi + \mathbf{b}\pi\pi_3 + \tilde{\pi}^2\pi_4 = 0, \tag{5.42}$$

понизив степени полиномов π_1 и π_3 на единицу: $|\pi_1| = \nu - 2$, $|\pi_3| = n - 1$.

Степени полиномов π_2 и π_4 выбираются из условия совместности получающейся нелинейной алгебраической системы, в которую развертываются эти π-уравнения:

$$|\pi_2| = \max\{|\mathbf{a}| + 1,\ |\mathbf{b}|\} + \nu - 2,$$

$$|\pi_4| = \max\{|\mathbf{a}| + 1,\ |\mathbf{b}|\} - 2.$$

Для того чтобы получить нетривиальное решение этих однородных π-уравнений, полином π следует искать в виде $\pi = 1 + z\pi'$, ибо рациональная функция не меняется от умножения числителя и знаменателя на произвольное число.

Общее число алгебраических уравнений и неизвестных в системе, эквивалентной π-уравнениям (5.41)—(5.42), равно

$$N = 4n + 2\max\{|\mathbf{a}| + 1,\ |\mathbf{b}|\} - m - 2.$$

В случае $|\pi_1| = -1$ полином π_1 следует полагать тождественно равным нулю.

В случае $m \geqslant n$ π-уравнения, как легко убедиться аналогичными рассуждениями, принимают вид

$$\mathbf{b}\theta - \mathbf{a}\pi + z^{\nu+1}\tilde{\pi}_2 = 0, \tag{5.43}$$

$$\mathbf{b}\theta\tilde{\theta} - \mathbf{a}\tilde{\theta}\pi + \mathbf{b}\pi\pi_3 + z^{\nu+1}\tilde{\pi}^2\pi_4 = 0, \tag{5.44}$$

где обозначено $\nu = m - n$. Степени неизвестных полиномов должны выбираться в виде

$$|\pi_2| = \max\{|\mathbf{a}| + n - m,\ |\mathbf{b}|\} - 1, \quad |\pi_3| = m,$$

$$|\pi_4| = \max\{|\mathbf{a}|,\ |\mathbf{b}| + m - n\} - 1.$$

Общее число уравнений и неизвестных при этом равно

$$N = 3m + 2\max\{|\mathbf{a}| + n - m,\ |\mathbf{b}|\} + 2.$$

Для решения нелинейных π-уравнений можно использовать обычные численные методы решения систем нелинейных алгебраических уравнений: метод Ньютона, метод наискорейшего спуска, метод «оврагов» и другие приемы численного анализа [38], [29].

Задача аппроксимации изображений высокого порядка изображениями более низкого порядка часто возникает при исследовании и проектировании автоматических систем. Эта задача возникает, например, в том случае, когда оператор, занимающий некоторый объем памяти ЭВМ, требуется разместить в меньшем числе ячеек, или когда оператор, моделирующий некоторую часть системы, требуется упростить с целью повышения его быстродействия. Применение метода π-уравнений обладает заметным преимуществом перед классическими методами при больших степенях полиномов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\pi}$.

Пример. Рассмотрим задачу аппроксимации полинома

$$\mathbf{a} = 0{,}52 + 0{,}38z + 0{,}24z^2 + 0{,}1z^3 - 0{,}05z^4 - 0{,}19z^5$$

рациональной функцией $\mathbf{h} = \theta_0/(1 + \pi_1 z)$, где θ_0 и π_1 — неизвестные коэффициенты, причем $-1 < \pi_1 < 1$. Имеем случай $m = 0$, $n = 1$, $n > m$. Уравнения (5.41)—(5.42) имеют вид

$$\boldsymbol{\theta} - (0{,}52 + 0{,}38z + 0{,}24z^2 + 0{,}1z^3 - 0{,}05z^4 - 0{,}19z^5)\boldsymbol{\pi} + \tilde{\boldsymbol{\pi}}\boldsymbol{\pi}_2 = 0,$$

$$\boldsymbol{\theta}\tilde{\boldsymbol{\theta}} - (0{,}52 + 0{,}38z + 0{,}24z^2 + 0{,}1z^3 - 0{,}05z^4 - 0{,}19z^5)\tilde{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\pi}_3 + \tilde{\boldsymbol{\pi}}^2\boldsymbol{\pi}_4 = 0.$$

Выбираем степени неизвестных полиномов: $|\boldsymbol{\theta}| = 0$, $|\boldsymbol{\pi}| = 1$, $|\boldsymbol{\pi}_2| = 5$, $|\boldsymbol{\pi}_3| = 0$, $|\boldsymbol{\pi}_4| = 4$. Общее число уравнений и неизвестных равно 14. Вводя однородные обозначения:

$$\pi_1 = x_1,\quad \theta_0 = x_2,\quad \pi_{20} = x_3,\quad \pi_{21} = x_4,\quad \pi_{22} = x_5,$$
$$\pi_{23} = x_6,\quad \pi_{24} = x_7,\quad \pi_{25} = x_8,\quad \pi_{30} = x_9,\quad \pi_{40} = x_{10},$$
$$\pi_{41} = x_{11},\quad \pi_{42} = x_{12},\quad \pi_{43} = x_{13},\quad \pi_{44} = x_{14},$$

получаем нелинейную алгебраическую систему:

$$\begin{aligned}
&x_1x_3 + x_2 = 0{,}52,\\
&0{,}52x_1 - x_1x_4 - x_3 = -0{,}38,\\
&0{,}38x_1 - x_1x_5 - x_4 = -0{,}24,\\
&0{,}24x_1 - x_1x_6 - x_5 = -0{,}1,\\
&0{,}1x_1 - x_1x_7 - x_6 = 0{,}05,\\
&0{,}05x_1 + x_1x_8 + x_7 = -0{,}19,\\
&0{,}19x_1 + x_8 = 0,\\
&x_1^2x_{10} + x_9 - x_1x_3 = 0,\\
&x_1^2x_{11} + x_1x_9 + 2x_1x_{10} - x_1x_4 - x_3 = 0,\\
&x_1^2x_{12} + 2x_1x_{11} + x_{10} - x_1x_5 - x_4 = 0,\\
&x_1^2x_{13} + 2x_1x_{12} + x_{11} - x_1x_6 - x_5 = 0,
\end{aligned}$$

$$x_1^2 x_{14} + 2x_1 x_{13} + x_{12} - x_1 x_7 - x_6 = 0,$$
$$2x_1 x_{14} + x_{13} - x_1 x_8 - x_7 = 0,$$
$$x_{14} - x_8 = 0,$$

Решение подобных систем осуществляется на ЭВМ с помощью стандартных программ.

4. Аппроксимация Падэ

Две функции

$$\mathbf{h}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i z^i, \quad \mathbf{f}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i z^i$$

аппроксимируют друг друга в смысле Падэ, если равны их усеченные изображения $\mathbf{h}_n(z) = \mathbf{f}_n(z)$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получаем $h_i = f_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Будем искать аппроксимацию функции $\mathbf{h}(z)$ рациональной функцией

$$\mathbf{f}(z) = \frac{\theta(z)}{\pi(z)} = \frac{\theta_0 + \theta_1 z + \ldots + \theta_n z^n}{1 + \pi_1 z + \ldots + \pi_m z^m}$$

в смысле Падэ, считая известным усеченное изображение функции $\mathbf{h}(z)$:

$$\mathbf{h}_{m+n}(z) = \sum_{i=0}^{n+m} h_i z^i.$$

Условие Падэ

$$\frac{\theta}{\pi} - \mathbf{h}_{m+n} = z^{m+n+1}\mathbf{e}_1$$

можно записать иначе — в виде уравнения:

$$\theta - \mathbf{h}_{m+n}\pi = z^{m+n+1}\mathbf{e}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получаем алгебраическую систему:

$$\theta_0 - h_0 = 0,$$
$$\theta_1 - h_0\pi_1 - h_1 = 0,$$
$$\theta_2 - h_0\pi_2 - h_1\pi_1 - h_2 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\theta_n - h_0\pi_n - \ldots - h_{n-1}\pi_1 - h_n = 0,$$

$$-h_0\pi_{n+1}-\ldots-h_n\pi_1-h_{n+1}=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-h_0\pi_m-\ldots-h_{m-1}\pi_1-h_m=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-h_n\pi_m-\ldots-h_{n+m-1}\pi_1-h_{n+m}=0.$$

В этой системе $n+m+1$ уравнений и столько же неизвестных, и она имеет единственное решение.

Аппроксимацию Падэ можно использовать для восстановления ковариационного изображения процесса по его конечной выборке $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Для этого по формулам

$$\psi_i=\frac{1}{n-i+1}\sum_{k=0}^{n-i}x_kx_{i+k}$$

вычисляются m ковариационных коэффициентов, а затем усеченное ковариационное изображение

$$(\psi_m)_+=\sum_{i=0}^{m}\psi_iz^i$$

аппроксимируется рациональной функцией в смысле Падэ. Полное ковариационное изображение процесса $\mathbf{x}$ восстанавливается по формуле

$$\psi(z)=\psi_+(z)+\hat{\psi}_+(z)-\psi_0.$$

Пример. Имеется случайная последовательность $\mathbf{x}$: 9, 1, —8, —1, 8, 6, —9, 0, —5, —4, 6, —3, 13, 5, —10, 7, 9, —2, 4, 4, —9, —6, 11. Вычислим ковариационные коэффициенты ψ_0, ψ_1, ψ_2, ψ_3 и составим усеченное ковариационное изображение:

$$(\psi_3)_+=60-5{,}25z-23{,}3z^2+21{,}5z^3.$$

Будем искать аппроксимационную формулу в виде

$$\frac{\theta}{\pi}=\frac{\theta_0+\theta_1z}{1+\pi_1z+\pi_2z^2},$$

Имеем $n=1$, $m=2$. Применяя аппроксимацию Падэ, составим уравнение:

$$\boldsymbol{\theta}-(\psi_3)_+\boldsymbol{\pi}=z^4\mathbf{e}.$$

Развертываем его в алгебраическую систему:

$$\theta_0-60=0,$$
$$\theta_1-60\pi_1+5{,}25=0,$$

$$-60\pi_2 + 5{,}25\pi_1 + 23{,}3 = 0,$$
$$5{,}25\pi_2 + 23{,}3\pi_1 - 21{,}5 = 0.$$

Решая ее, получим

$$\theta = 60 + 44z, \quad \pi = 1 + 0{,}82z + 0{,}46z^2.$$

Таким образом, мы получили аппроксимационную формулу для правой части ковариационного изображения процесса **x**:

$$\psi_+ = \frac{60 + 44z}{1 + 0{,}82z + 0{,}46z^2}.$$

Составим полное ковариационное изображение:

$$\psi = \frac{60 + 44z}{1 + 0{,}82z + 0{,}46z^2} + \frac{60 + 44z^{-1}}{1 + 0{,}82z^{-1} + 0{,}46z^{-2}} - 60 =$$
$$= \frac{90{,}5z\,(1 + 1{,}9z + z^2)}{(1 + 0{,}82z + 0{,}46z^2)(1 + 1{,}78z + 2{,}174z^2)}.$$

5. Идентификация объектов с конечной памятью

Задача идентификации объекта состоит в нахождении его передаточной функции по конечному числу замеров входа и выхода. Устойчивые динамические объекты с передаточными функциями вида

$$\mathbf{g} = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k$$

могут приближенно рассматриваться как объекты с конечной памятью, равной $n + 1$:

$$\mathbf{g} \cong \sum_{k=0}^{n} g_k z^k,$$

так как $|g_k| < \varepsilon$, $k > n$, где ε — малое положительное число.

Обозначим вход объекта через **u**, а выход — через **y**. Будем считать, что вычислительное устройство располагает $m + n + 1$ измерениями величины u_i, имеющими усеченное изображение

$$\mathbf{u} = \sum_{i=0}^{m+n} u_i z^i$$

и $m + 1$ измерениями величины y_i, имеющими усеченное изображение

$$\mathbf{y} = \sum_{i=n}^{m+n} y_i z^i.$$

Обозначим $\mathbf{y} = z^n \mathbf{y}_0$, где

$$\mathbf{y}_0 = \sum_{i=0}^{m} y_{n+i} z^i.$$

Составим изображение

$$\mathbf{v} = \mathbf{gu} = \sum_{i=0}^{m+2n} v_i z^i. \tag{5.45}$$

Это изображение соответствует выходной величине объекта с передаточной функцией $\mathbf{g}$, подверженного воздействию конечной последовательности $\mathbf{u}$. Представим $\mathbf{v}$ в виде

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\pi}_1 + z^n \boldsymbol{\pi}_0 + z^{m+n+1} \boldsymbol{\pi}_2, \tag{5.46}$$

где $\boldsymbol{\pi}_0$, $\boldsymbol{\pi}_1$ и $\boldsymbol{\pi}_2$ — полиномы степеней $|\boldsymbol{\pi}_0| = m$, $|\boldsymbol{\pi}_1| = |\boldsymbol{\pi}_2| = n - 1$. Тогда полином $\boldsymbol{\pi} = z^n \boldsymbol{\pi}_0$ представляет собой изображение последовательности $\mathbf{v}$ на интервале

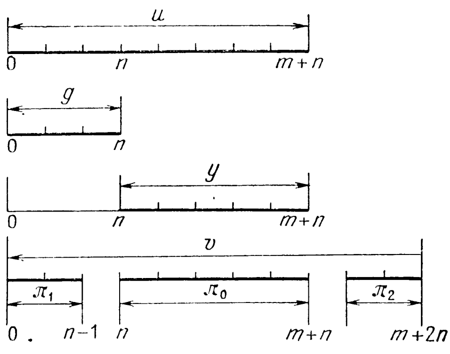

Рис. 18. Схема процессов идентификации

$n \leqslant i \leqslant n + m$. Схема процессов идентификации представлена на рис. 18.

В соответствии с методикой наименьших квадратов будем искать такую функцию $\mathbf{g}$, чтобы величина $\boldsymbol{\pi}$ наименьшим образом отличалась от измеренной величины $\mathbf{y}$: $\mathbf{e} = \boldsymbol{\pi} - \mathbf{y}$. Критерий суммарной квадратичной ошибки

$J = \mathrm{ct}\,\mathbf{e}\widehat{\mathbf{e}} \to \min$. Условие его минимума имеет вид

$$\delta J = \mathrm{ct}\,\mathbf{e}\delta\widehat{\mathbf{e}} = \mathrm{ct}(\boldsymbol{\pi} - \mathbf{y})\,\delta\widehat{\boldsymbol{\pi}} = 0. \tag{5.47}$$

Учитывая, что

$$\delta\boldsymbol{\pi} = z^n\delta\boldsymbol{\pi}_0 = \delta\mathbf{v} = \delta\mathbf{g}\cdot\mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\pi} - \mathbf{y} = z^n(\boldsymbol{\pi}_0 - \mathbf{y}_0),$$

$$\delta\widehat{\boldsymbol{\pi}} = \delta\widehat{\mathbf{v}} = \frac{\widetilde{\mathbf{u}}\delta\widetilde{\mathbf{g}}}{z^{m+2n}},$$

преобразуем (5.47) к виду

$$\delta J = \mathrm{ct}\,(\boldsymbol{\pi}_0 - \mathbf{y}_0)\frac{\widetilde{\mathbf{u}}\delta\widetilde{\mathbf{g}}}{z^{m+n}} = 0. \tag{5.48}$$

Введем полиномы $\boldsymbol{\pi}_3$ и $\boldsymbol{\pi}_4$, такие, что

$$\frac{(\boldsymbol{\pi}_0 - \mathbf{y}_0)\,\widetilde{\mathbf{u}}}{z^{m+n}} = \frac{\boldsymbol{\pi}_3}{z^{m+n}} + z\boldsymbol{\pi}_4. \tag{5.49}$$

При выборе $|\boldsymbol{\pi}_3| = m - 1$ условие (5.48) выполняется. Условие (5.49) с учетом (5.45) и (5.46) сводится к π-уравнению

$$\mathbf{u}\widetilde{\mathbf{u}}\mathbf{g} =$$

$$= \widetilde{\mathbf{u}}\boldsymbol{\pi}_1 + z^{m+n+1}\widetilde{\mathbf{u}}\boldsymbol{\pi}_2 + z^n\boldsymbol{\pi}_3 + z^{2n+m+1}\boldsymbol{\pi}_4 + z^n\widetilde{\mathbf{u}}\mathbf{y}_0 \tag{5.50}$$

относительно пяти неизвестных полиномов $\mathbf{g}$, $\boldsymbol{\pi}_1$, $\boldsymbol{\pi}_2$, $\boldsymbol{\pi}_3$ и $\boldsymbol{\pi}_4$. Сравнение числа алгебраических уравнений и неизвестных в (5.50) дает $|\boldsymbol{\pi}_4| = m - 1$.

Если заранее известно, что объект имеет дефект d, т. е. $\mathbf{g} = z^d\mathbf{g}_0$, то уравнение (5.50) заменяется следующим:

$$\mathbf{u}\widetilde{\mathbf{u}}\mathbf{g}_0 = \widetilde{\mathbf{u}}\boldsymbol{\pi}_1 + z^{m+n-d+1}\widetilde{\mathbf{u}}\boldsymbol{\pi}_2 + z^{n-d}\boldsymbol{\pi}_3 +$$

$$+ z^{2n-2d+m+1}\boldsymbol{\pi}_4 + z^{n-d}\widetilde{\mathbf{u}}\mathbf{y}_0, \tag{5.51}$$

где степени неизвестных полиномов $|\mathbf{g}_0| = n - d$, $|\boldsymbol{\pi}_1| = n - d - 1$, $|\boldsymbol{\pi}_2| = n - d - 1$, $|\boldsymbol{\pi}_3| = m - 1$, $|\boldsymbol{\pi}_4| = m - 1$, а в полиноме $\mathbf{u}$ отбрасывается d слагаемых при старших степенях z.

Решение π-уравнения (5.50) или (5.51) облегчается тем, что из эквивалентной системы алгебраических уравнений выделяется полная подсистема, содержащая только коэффициенты полиномов $\mathbf{g}$, $\boldsymbol{\pi}_1$ и $\boldsymbol{\pi}_2$. Общее количество неизвестных в этой системе $N = 3(n - d) - 1$.

Изложенный метод легко обобщается на случай минимизации взвешенной квадратичной ошибки, а также на другие близкие случаи.

Пример 1. Рассмотрим простейший случай идентификации безынерционного линейного объекта, коэффициент усиления которого g_0 неизвестен. Полагая $n = 0$, уравнение (5.50) можно записать в виде

$$\tilde{\mathbf{u}}\mathbf{u}g_0 = \boldsymbol{\pi}_3 + z^{m+1}\boldsymbol{\pi}_4 + \tilde{\mathbf{u}}\mathbf{y}.$$

Приравнивая коэффициенты при z^m, получаем

$$g_0 = \frac{\sum_{i=0}^{m} u_i y_i}{\sum_{i=0}^{m} u_i^2}.$$

Пример 2. Рассмотрим задачу об идентификации объекта с передаточной функцией $\mathbf{g} = g_1 z + g_2 z^2$, коэффициенты которой g_1 и g_2 неизвестны. Имеем $n = 2$, $d = 1$. Пусть результаты эксперимента представлены следующей таблицей:

i	0	1	2	3	4	5
u_i	1	2	0	−1	1	
y_i			2,85	1	−1	0,5

Составляем их изображения:

$$\mathbf{u} = 1 + 2z - z^3 + z^4, \qquad \mathbf{y} = 2{,}85z^2 + z^3 - z^4 + 0{,}5z^5.$$

Имеем $m = 3$. Составляем π-уравнение (5.51):

$$(1 - z + 2z^3 + z^4)(1 + 2z - z^3 + z^4)\mathbf{g}_0 =$$
$$= (1 - z + 2z^3 + z^4)\boldsymbol{\pi}_1 + z^5(1 - z + 2z^3 + z^4)\boldsymbol{\pi}_2 + z\boldsymbol{\pi}_3 + z^6\boldsymbol{\pi}_4 +$$
$$+ z(1 - z + 2z^3 + z^4)(2{,}85 + z - z^2 + 0{,}5z^3),$$

где $|\mathbf{g}_0| = 1$, $|\boldsymbol{\pi}_1| = 0$, $|\boldsymbol{\pi}_2| = 0$, $|\boldsymbol{\pi}_3| = 2$, $|\boldsymbol{\pi}_4| = 2$. Приравнивая коэффициенты при z^0, z^4, z^5, z^9, получаем алгебраическую систему:

$$g_1 = \pi_{10}, \quad 7g_1 + g_2 = \pi_{10} + 7{,}2, \quad g_1 + 7g_2 = \pi_{20} + 4{,}35, \quad g_2 = \pi_{20}.$$

Решая ее, получим $g_1 = 1{,}11$, $g_2 = 0{,}54$. Таким образом, искомая передаточная функция объекта имеет вид $\mathbf{g} = 1{,}11z + 0{,}54z^2$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Некоторые понятия абстрактной алгебры

В абстрактной алгебре существуют строгие определения группы, полугруппы, кольца и поля — понятий, которыми мы пользуемся при изложении π-исчисления и о которых полезно иметь представление.

Группой G называется множество элементов $a, b, c, \ldots \in G$, для которых задано некоторое действие (будем обозначать его ab), такое что $ab \in G$. При этом выполняются следующие условия:

1) $(ab)c = a(bc)$ («ассоциативность»);

2) в G существует такой элемент e («единица»), что $ea = ae = a$ для любого $a \in G$;

3) для любого $a \in G$ существует в G такой элемент a^{-1}, что $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Если для любых $a, b \in G$ выполняется условие $ab = ba$, то группа называется коммутативной. Примером группы является множество целых чисел, в котором определено действие — сложение.

Полугруппой называется множество элементов $a, b, c, \ldots$, для которых из условий, выполняющихся в группе, справедливо только первое: $(ab)c = a(bc)$. «Единица» e и обратные элементы a^{-1}, $b^{-1}, \ldots$ в полугруппе не определены. Примером полугруппы является множество натуральных чисел 1, 2, 3, ... относительно операции сложения.

Кольцом называется множество элементов K, для которых определены две операции — сложение и умножение, сопоставляющие любым двум элементам $a, b \in K$, взятым в определенном порядке, один элемент $a + b \in K$ — их сумму и один элемент $ab \in K$ — их произведение, причем предполагаются выполненными следующие условия:

1) коммутативность сложения $a + b = b + a$;

2) ассоциативность сложения $a + (b + c) = (a + b) + c$;

3) обратимость сложения (возможность вычитания): уравнение $a + x = b$ допускает решение $x = b - a$;

4) дистрибутивность: $a(b + c) = ab + ac$, $(b + c)a = ba + ca$.

Если $ab = ba$, то кольцо называется коммутативным. Если $a(bc) = (ab)c$, то кольцо называется ассоциативным.

В кольце существует элемент 0 («нуль») с обычными свойствами:

1) для любого элемента a существует противоположный, т. е. такой элемент $-a$, что $a + (-a) = 0$;

2) произведение любого элемента на 0 всегда равно 0.

Полем называется множество элементов, над которыми можно производить два действия — сложение и умножение, подчиняющиеся обычным законам арифметики:

1) сложение и умножение коммутативны и ассоциативны, т. е.

$$a+b=b+a, \quad ab=ba, \quad a+(b+c)=(a+b)+c, \quad a(bc)=(ab)c;$$

2) существует элемент 0 («нуль»), для которого всегда $a+0=a$; для каждого элемента a существует противоположный элемент $-a$, и их сумма равна 0; отсюда следует, что в поле выполнима операция вычитания $a-b$;

3) существует элемент e («единица»), для которого всегда $ae=a$; для каждого отличного от 0 элемента a существует обратный a^{-1}; их произведение равно e; отсюда следует возможность деления на всякое не равное 0 число a;

4) связь между операциями сложения и умножения дается дистрибутивным законом: $a(b+c)=ab+ac$.

Полем является множество всех действительных чисел, множество всех рациональных чисел, множество всех рациональных функций с действительными коэффициентами.

Кольцо, к элементам которого применим алгоритм Евклида, называется *евклидовым* кольцом. Точнее, евклидово кольцо — это кольцо, в котором любому элементу $a\neq 0$ соответствует неотрицательное целое число $|a|$ («степень» элемента a) и для любых a и $b\neq 0$ существуют такие q и r, что $a=bq+r$ и либо $|r|<|b|$, либо $r=0$.

Кольцо целых чисел является евклидовым кольцом, кольцо полиномов над полем действительных чисел также является евклидовым кольцом, но кольцо полиномов над кольцом целых чисел уже евклидовым не является. Кольцо полиномов над любым полем, в том числе над конечным полем, евклидово.

2. Дискретные передаточные функции объектов с интерполяторами

В системах автоматического управления, содержащих ЭВМ, между ЭВМ и управляемым ею объектом становится цифро-аналоговый преобразователь, или интерполятор (рис. 19). Интерполятор

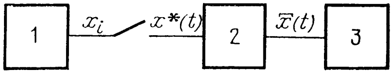

Рис. 19. Схема включения интерполятора: *1* — ЭВМ, *2* — интерполятор, *3* — объект

осуществляет превращение числовой последовательности, поступающей с выхода ЭВМ, в кусочно-аналитическую функцию.

Существует много различных способов интерполяции числовых последовательностей. В технике находят применение только самые простые из них. Простейшим и наиболее распространенным способом интерполяции является *фиксация* (рис. 20). В процессе фиксации числовая последовательность $\{x_i\}$ превращается в ступенчатую функцию $\overline{x}(t)$, которая может быть записана в виде

$$\overline{x}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \{u[t - iT] - u[t - (i+1)T]\}, \tag{1}$$

где $u(t)$ — единичный скачок

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Применяя преобразования Лапласа

$$\mathrm{x}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} x(t)\, dt$$

к ступенчатой функции (1), получаем

$$\overline{\mathrm{x}}(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p} \sum_{i=0}^{\infty} x_i e^{-ipT}.$$

Функция

$$\mathrm{x}^*(p) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i e^{-ipT}$$

есть преобразование Лапласа импульсной функции

$$x^*(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \delta(t - iT),$$

где $\delta(t)$ — есть единичный импульс Дирака

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0. \end{cases}$$

Функция

$$\mathrm{v}(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p}$$

является передаточной функцией фиксатора. Она является комбинацией рациональной функции от p с рациональной функцией от $z = e^{-pT}$. Это обстоятельство характерно для всех интерполяторов.

Преобразование Лапласа для процесса на выходе управляемого объекта имеет вид

$$\mathrm{y}(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p} \mathrm{g}(p)\, \mathrm{x}^*(p), \tag{2}$$

где $\mathrm{g}(p)$ — непрерывная передаточная функция объекта. Выразим соотношение между

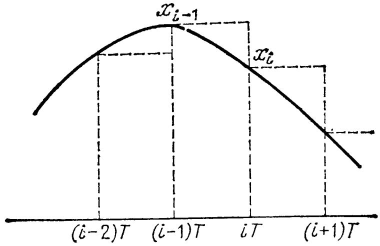

Рис. 20. Метод фиксации уровней

входом и выходом объекта через дискретные изображения. Переход от непрерывной передаточной функции к дискретной будем обозначать

$$\mathrm{g}(z) = \mathrm{З}[\mathrm{g}(p)].$$

Поскольку

$$\mathrm{З}[\mathrm{g}_1(p)\mathrm{g}_2(p)] \neq \mathrm{g}_1(z)\mathrm{g}_2(z),$$

то дискретную передаточную функцию интерполятора и непрерывного объекта нельзя разбить на произведение передаточных функций.

Переходя к дискретным изображениям от формулы (2), запишем

$$\mathrm{y}(z) = (1 - z)\,\mathrm{З}\left[\frac{\mathrm{g}(p)}{p}\right]\mathrm{x}(z).$$

Таким образом, дискретная передаточная функция управляемого объекта с учетом фиксации уровней равна

$$\bar{\mathrm{g}}(z) = (1 - z)\,\mathrm{З}\left[\frac{\mathrm{g}(p)}{p}\right].$$

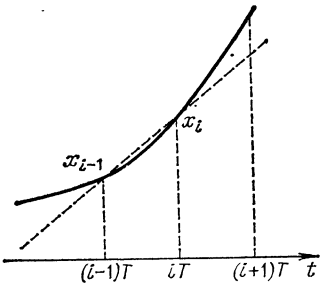

Рис. 21. Линейная интерполяция

Следующий по порядку сложности метод интерполяции числовых последовательностей — *линейная интерполяция* (рис. 21). Интерполирование сигнала на участке $iT \leqslant t < (i+1)T$ производят, пользуясь *обратной* разностью $\nabla x_i = x_i - x_{i-1}$, поскольку *прямая* разность $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ в момент $t = iT$ неизвестна. Соответствующая интерполяционная формула имеет вид

$$\hat{x}(t) = \sum_{i=0}^{\infty}\left[x_i + \frac{x_i - x_{i-1}}{T}(t - iT)\right][u(t - iT) - u(t - iT - T)].$$

Применяя к ней преобразование Лапласа, получаем

$$\hat{\mathrm{x}}(p) = \left(1 - e^{-pT}\right)^2 \frac{1 + Tp}{Tp^2}\,\mathrm{x}^*(p).$$

Таким образом, дискретная передаточная функция объекта с интерполятором линейного типа равна

$$\hat{\mathrm{g}}(z) = (1 - z)^2\,\mathrm{З}\left[\frac{1 + Tp}{Tp^2}\,\mathrm{g}(p)\right].$$

Следующий способ интерполяции числовых последовательностей — *интерполяция параболами.* На участке $iT \leqslant t < (i+1)T$ проводят квадратичную параболу

$$\breve{x}(t - iT) = x_i + \alpha_1 \frac{t - iT}{T} + \alpha_2 \frac{(t - iT)^2}{2T^2},$$

проходящую через точки x_i, x_{i-1} и x_{i-2} (рис. 22). Это накладывает следующие условия на коэффициенты α_1 и α_2:

$$x_{i-1} = x_i - \alpha_1 + 0{,}5\alpha_2, \quad x_{i-2} = x_i - 2\alpha_1 + 2\alpha_2.$$

Решая эту систему относительно α_1 и α_2, получим

$$\alpha_1 = 1{,}5x_i - 2x_{i-1} + 0{,}5x_{i-2},$$
$$\alpha_2 = x_i - 2x_{i-1} + x_{i-2}.$$

Соответствующая интерполяционная формула имеет вид

$$\breve{x}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \left[x_i + \alpha_1 \frac{t - iT}{T} + \alpha_2 \frac{(t - iT)^2}{2T^2} \right] \times$$
$$\times [u(t - iT) - u(t - iT - T)].$$

Применяя к ней преобразование Лапласа, получим

$$\breve{\mathrm{x}}(p) = \left(1 - e^{-pT}\right)^3 \frac{1 + 1{,}5Tp + T^2p^2}{T^2p^3} \mathrm{x}^*(p).$$

Таким образом, дискретная передаточная функция объекта с интерполятором параболического типа имеет вид

$$\breve{g}(z) = (1 - z)^3 \times$$
$$\times \mathcal{Z}\left[\frac{1 + 1{,}5Tp + T^2p^2}{T^2p^3} g(p) \right].$$

Более сложные способы интерполяции практического применения не имеют.

Пользуясь при расчетах дискретными передаточными функциями объектов, мы всегда имеем в виду объект вместе с интерполятором.

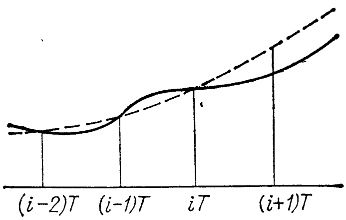

Рис. 22. Интерполяция параболами

Пример. Найдем дискретную передаточную функцию объекта $g(p) = 1/(p + a)$ вместе с фиксатором уровня. Имеем

$$\frac{g(p)}{p} = \frac{1}{p(p + a)} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + a}\right),$$

$$\mathcal{Z}\left[\frac{g(p)}{p}\right] = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{1 - z} - \frac{1}{1 - \alpha z}\right) = \frac{(1 - \alpha) z}{a(1 - z)(1 - \alpha z)},$$

где $\alpha = e^{-aT}$. Таким образом,

$$\bar{g}(z) = (1 - z)\, \mathcal{Z}\left[\frac{g(p)}{p}\right] = \frac{(1 - \alpha) z}{a(1 - \alpha z)}.$$

3. Обыкновенные и модифицированные дискретные изображения

Рассмотрим процесс $x(t)$ на интервале $0 \leqslant t < \infty$. Выделим на оси времени дискретные моменты $t_i = iT$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ Обозначим $x_i = x(iT)$. *Обыкновенным дискретным изображением* (синонимы: производящая функция, z-преобразование) процесса $\{x_i\}$ называется функция, к которой сходится степенной ряд

$$\mathbf{x}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i z^i.$$

Будем рассматривать значения процесса не только в дискретные моменты времени iT, но и в промежутках между ними: $t = iT + \varepsilon T$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$. Обозначим $x_i(\varepsilon) = x(iT + \varepsilon T)$.

Модифицированным дискретным изображением («модифицированным z-преобразованием») называется функция, к которой сходится степенной ряд

$$\mathbf{x}(z, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(\varepsilon) z^i.$$

Приведем несколько примеров расчета модифицированных дискретных изображений.

Пример 1. Рассмотрим линейно нарастающий процесс $x = at$. Имеем $x_i(\varepsilon) = aiT + a\varepsilon T$. Составляем модифицированное дискретное изображение:

$$\mathbf{x}(z, \varepsilon) = aT\sum_{i=0}^{\infty}(i + \varepsilon) z^i = aT\left[\frac{z}{(1-z)^2} + \frac{\varepsilon}{1-z}\right] = aT\,\frac{\varepsilon + (1-\varepsilon)z}{(1-z)^2}.$$

Пример 2. Рассмотрим экспоненциально нарастающий процесс $x(t) = e^{at}$. Имеем

$$x_i(\varepsilon) = e^{aiT + a\varepsilon T} = \alpha^{i+\varepsilon}, \qquad \alpha = e^{aT}.$$

Составляем содифицированное дискретное изображение:

$$\mathbf{x}(z, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^{i+\varepsilon} z^i = \frac{\alpha^{\varepsilon}}{1 - \alpha z}.$$

Пример 3. Рассмотрим гармоническое колебание $x(t) = \sin at$. Имеем $x_i(\varepsilon) = \sin aT(i + \varepsilon)$. Воспользуемся формулой

$$\sin a = \frac{1}{2j}\left(e^{ja} - e^{-ja}\right).$$

Составляем модифицированное дискретное изображение:

$$\mathbf{x}(z, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2j}\left[e^{jaT(i+\varepsilon)} - e^{-jaT(i+\varepsilon)}\right] z^i =$$

$$= \frac{1}{2j}\left[\frac{e^{jaT\varepsilon}}{1 - e^{jaT}z} - \frac{e^{-jaT\varepsilon}}{1 - e^{-jaT}z}\right] = \frac{\sin \varepsilon aT + \sin(1-\varepsilon)aT}{1 - 2z\cos aT + z^2}$$

Пример 4. Рассмотрим равномерно ускоряющийся процесс $x(t) = at^2$. Имеем

$$x_i(\varepsilon) = aT^2(i+\varepsilon)^2 = aT^2(i^2+2\varepsilon i+\varepsilon^2).$$

Составляем модифицированное дискретное изображение:

$$\mathbf{x}(z, \varepsilon) = aT^2\left[\frac{z(1+z)}{(1-z)^3}+\frac{2\varepsilon z}{(1-z)^2}+\frac{\varepsilon^2}{1-z}\right] = \\ = \frac{aT^2\left[\varepsilon^2+\left(1+2\varepsilon-2\varepsilon^2\right)z+\left(1-2\varepsilon+\varepsilon^2\right)z^2\right]}{(1-z)^3}.$$

Известно [71, с. 223], что общее решение любого линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами может быть представлено в виде

$$x(t) = \sum_{k=0}^{p}\sum_{j_k=0}^{\mu_k-1} c_{k,j_k} t^{j_k} e^{a_k t},$$

где a_k — вообще говоря, комплексные числа, а $n = \sum_{k=0}^{p}\mu_k$ — порядок дифференциального уравнения. Модифицированные дискретные изображения этого класса процессов имеют вид

$$\mathbf{x}(z, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{p}\frac{\mathbf{a}_k(z, \varepsilon)}{\left(1-\alpha_k z\right)^{\mu_k}},$$

где $\mathbf{a}_k(z, \varepsilon)$ — полиномы по z с коэффициентами, зависящими от ε. Таким образом, процессы, являющиеся решениями линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, имеют модифицированные дискретные изображения в виде рациональных функций от z:

$$\mathbf{x}(z, \varepsilon) = \frac{\mathbf{a}(z, \varepsilon)}{\mathbf{b}(z)},$$

где $\mathbf{a}(z, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} a_i(\varepsilon) z^i$ — полином от z с коэффициентами, зависящими от ε.

Нас будут интересовать выражения вида

$$\overline{\mathbf{x}(z, \varepsilon)} = \int_0^1 \mathbf{x}(z, \varepsilon)\, d\varepsilon.$$

Докажем формулу

$$\overline{\mathbf{x}(z, \varepsilon)} = (1-z)\,\mathcal{Z}\left[\frac{\mathbf{x}(p)}{p}\right]. \qquad (3)$$

Обозначим

$$f(t)=\int_0^t x(t)\,dt.$$

Имеем

$$f_i(\varepsilon)=\sum_{k=0}^{i}\int_0^1 x_k(\varepsilon)\,d\varepsilon+\int_0^{\varepsilon} x_i(\varepsilon)\,d\varepsilon,$$

$$\mathbf{f}(z,\varepsilon)=\frac{1}{1-z}\int_0^1 \mathrm{x}(z,\varepsilon)\,d\varepsilon+\int_0^{\varepsilon}\mathrm{x}(z,\varepsilon)\,d\varepsilon.$$

Положив $\varepsilon=0$, получим

$$\mathbf{f}(z)=\frac{1}{1-z}\overline{\mathrm{x}(z,\varepsilon)}.$$

Далее,

$$\mathbf{f}(p)=\frac{\mathrm{x}(p)}{p},\quad \mathbf{f}(z)=\mathfrak{Z}\left[\frac{\mathrm{x}(p)}{p}\right]=\frac{1}{1-z}\overline{\mathrm{x}(z,\varepsilon)},$$

откуда следует формула (3).

Теперь нам предстоит доказать формулу

$$\overline{\mathrm{x}(z,\varepsilon)\,\widehat{\mathrm{x}}(z,\varepsilon)}=\mathfrak{Z}\left[\mathrm{x}(p)\,\mathrm{x}(-p)\right]. \tag{4}$$

Будем исходить из разложения в ряд Фурье периодической «решетчатой» функции

$$\delta_T(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\delta(t-iT)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{j\frac{2\pi nt}{T}}.$$

Заменив i на $i+\varepsilon$, получим

$$\sum_{i=0}^{\infty}\delta(t-iT-\varepsilon T)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{j\frac{2\pi n}{T}(t+\varepsilon T)}=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{j2\pi n\varepsilon}e^{j\frac{2\pi nt}{T}}.$$

Умножая обе части этой формулы на $x(t)e^{-pt}$ и интегрируя по t от 0 до ∞, получим

$$\sum_{i=0}^{\infty}\int_0^{\infty}x(t)\,e^{-pt}\delta(t-iT-\varepsilon T)\,dt=$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{j2\pi n\varepsilon}\int_0^{\infty}x(t)\,e^{-\left(p-j\frac{2\pi n}{T}\right)t}dt,$$

или

$$\sum_{i=0}^{\infty} x(iT+\varepsilon T)\, e^{-ipT} e^{-\varepsilon pT} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi n\varepsilon} \mathrm{x}\left(p - j\,\frac{2\pi n}{T}\right).$$

Обозначим через

$$\mathrm{x}^*(p,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} x(iT+\varepsilon T)\, e^{-ipT} \tag{5}$$

модифицированное дискретное преобразование Лапласа функции $x(t)$. Мы получили следующую формулу его связи с обычным преобразованием Лапласа $\mathrm{x}(p)$:

$$\mathrm{x}^*(p,\varepsilon) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\varepsilon T\left(p+j\frac{2\pi n}{T}\right)} \mathrm{x}\left(p - j\,\frac{2\pi n}{T}\right). \tag{6}$$

Обозначим, следуя Я. З. Цыпкину [79],

$$\mathrm{x}^*(p,\varepsilon) = \mathfrak{D}\{\mathrm{x}(p)\}.$$

Модифицированное дискретное преобразование Лапласа $\mathrm{x}^*(p, \varepsilon)$ при подстановке $z = e^{-pT}$ в формулу (5) переходит в модифицированное дискретное изображение (модифицированное z-преобразование) процесса $x(t)$:

$$\mathrm{x}(z,\varepsilon) = \mathrm{x}^*(p,\varepsilon)\Big|_{z=e^{-pT}}.$$

При $\varepsilon = 0$ мы получаем формулу связи между операторами $\mathfrak{Z}$ и $\mathfrak{D}$:

$$\mathrm{x}(z) = \mathfrak{Z}\{\mathrm{x}(p)\} = \mathrm{x}^*(p,0)\Big|_{z=e^{-pT}} = \mathfrak{D}\{\mathrm{x}(p)\}\Big|_{\substack{\varepsilon=0\\ z=e^{-pT}}}.$$

Оператор прямого перехода от $\mathrm{x}(p)$ к $\mathrm{x}(z, \varepsilon)$ обозначим через D: $\mathrm{x}(z, \varepsilon) = D\{\mathrm{x}(p)\}$. Между операторами D и $\mathfrak{D}$ легко установить связь:

$$D\{\mathrm{x}(p)\} = \mathfrak{D}\{\mathrm{x}(p)\}\Big|_{z=e^{-pT}}.$$

Обозначим через $\mathfrak{D}^{-1}$ и D^{-1} обратные операторы:

$$\mathrm{x}(p) = \mathfrak{D}^{-1}\{\mathrm{x}^*(p,\varepsilon)\}, \qquad \mathrm{x}(p) = D^{-1}\{\mathrm{x}(z,\varepsilon)\}.$$

Эти операторы легко выражаются аналитически:

$$\mathrm{x}(p) = \int_0^{\infty} x(t)\, e^{-pt} dt = \int_0^1 \sum_{i=0}^{\infty} x(iT+\varepsilon T)\, e^{-pT(i+\varepsilon)} d\varepsilon =$$

$$= \int_0^1 e^{-\varepsilon pT} \mathrm{x}^*(p,\varepsilon)\, d\varepsilon = \int_0^1 z^{\varepsilon} \mathrm{x}(z,\varepsilon)\, d\varepsilon\,\Big|_{z=e^{-pT}}. \tag{7}$$

Иначе —

$$D^{-1}\{\mathrm{x}(z,\varepsilon)\} = \overline{z^{\varepsilon}\mathrm{x}(z,\varepsilon)}\Big|_{z=e^{-pT}},$$

$$\mathfrak{D}^{-1}\{\mathrm{x}^*(p,\varepsilon)\} = \overline{e^{-\varepsilon pT}\mathrm{x}^*(p,\varepsilon)}.$$

Докажем прежде всего вспомогательную лемму:

$$D\left\{e^{-\lambda pT}\mathbf{x}(p)\right\} = \begin{cases} z\mathbf{x}(z, 1+\varepsilon-\lambda), & 0 \leqslant \varepsilon < \lambda \leqslant 1, \\ \mathbf{x}(z, \varepsilon-\lambda), & 0 \leqslant \lambda \leqslant \varepsilon \leqslant 1. \end{cases} \qquad (8)$$

Пользуясь формулой (6), получим

$$\mathfrak{D}\left\{e^{-\lambda pT}\mathbf{x}(p)\right\} = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\varepsilon T\left(p+j\frac{2\pi n}{T}\right)} e^{-\lambda T\left(p+j\frac{2\pi n}{T}\right)}\mathbf{x}\left(p-j\frac{2\pi n}{T}\right).$$

При $\varepsilon \geqslant \lambda$ получаем

$$\mathfrak{D}\{e^{-\lambda pT}\mathbf{x}(p)\} = \mathbf{x}^*(p, \varepsilon-\lambda).$$

При $\varepsilon < \lambda$ получаем

$$\mathfrak{D}\left\{e^{-\lambda pT}\mathbf{x}(p)\right\} = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-pT} e^{(1+\varepsilon-\lambda)T\left(p+j\frac{2\pi n}{T}\right)}\times$$

$$\times\mathbf{x}\left(p-j\frac{2\pi n}{T}\right) = e^{-pT}\mathbf{x}^*(p, 1+\varepsilon-\lambda).$$

В частности, при $\varepsilon = 0$ имеем

$$\mathfrak{D}\{e^{-\lambda pT}\mathbf{x}(p)\} = e^{-pT}\mathbf{x}^*(p, 1-\lambda),$$

$$\mathfrak{Z}\{e^{-\lambda pT}\mathbf{x}(p)\} = z\mathbf{x}(z, 1-\lambda).$$

Теперь мы можем приступить к доказательству теоремы, выражаемой формулой (4). Согласно (7), имеем

$$\mathbf{x}(p) = \int_0^1 z^\lambda x(z, \lambda)\, d\lambda\,\Big|_{z=e^{-pT}}.$$

Производим инверсию $p \to -p$, $z \to z^{-1}$:

$$\mathbf{x}(-p) = \int_0^1 z^{-\lambda}\hat{\mathbf{x}}(z, \lambda)\, d\lambda\,\Big|_{z=e^{-pT}} = z^{-1}\int_0^1 z^{1-\lambda}\hat{\mathbf{x}}(z, \lambda)\, d\lambda\,\Big|_{z=e^{-pT}}.$$

Делаем замену $1-\lambda$ на λ:

$$\mathbf{x}(-p) = z^{-1}\int_0^1 z^{\lambda}\hat{\mathbf{x}}(z, 1-\lambda)\, d\lambda\,\Big|_{z=e^{-pT}}.$$

Подставим эту формулу в

$$D\{\mathbf{x}(p)\,\mathbf{x}(-p)\} = D\left\{\mathbf{x}(p)\, z^{-1}\int_0^1 z^\lambda\hat{\mathbf{x}}(z, 1-\lambda)\, d\lambda\right\}\Bigg|_{z=e^{-pT}} =$$

$$= z^{-1}\int_0^1 D\left\{z^\lambda\mathbf{x}(p)\right\}\hat{\mathbf{x}}(z, 1-\lambda)\, d\lambda\,\Big|_{z=e^{-pT}}.$$

Воспользуемся леммой (8):

$$D\{\mathbf{x}(p)\,\mathbf{x}(-p)\} = z^{-1}\int_0^{\varepsilon} \mathbf{x}(z, \varepsilon-\lambda)\,\widehat{\mathbf{x}}(z, 1-\lambda)\,d\lambda + \\ + \int_{\varepsilon}^{1} \mathbf{x}(z, 1+\varepsilon-\lambda)\,\widehat{\mathbf{x}}(z, 1-\lambda)\,d\lambda.$$

Полагая $\varepsilon = 0$, получим

$$\mathfrak{Z}\{\mathbf{x}(p)\,\mathbf{x}(-p)\} = \int_0^1 \mathbf{x}(z, 1-\lambda)\,\widehat{\mathbf{x}}(z, 1-\lambda)\,d\lambda,$$

или

$$\mathfrak{Z}\{\mathbf{x}(p)\,\mathbf{x}(-p)\} = \int_0^1 \mathbf{x}(z, \varepsilon)\,\widehat{\mathbf{x}}(z, \varepsilon)\,d\varepsilon,$$

что и требовалось доказать. Полученная формула будет использована в Приложении 4.

4. Синтез дискретных систем по критерию минимума интегральной квадратичной ошибки

Пользуясь модифицированными дискретными изображениями, критерий интегральной квадратичной ошибки можно представить в виде

$$J = \int_0^{\infty} e^2(t)\,dt = \int_0^1 \sum_{i=0}^{\infty} e_i^2(\varepsilon)\,d\varepsilon = \int_0^1 \mathrm{ct}\,\mathbf{e}(z, \varepsilon)\,\widehat{\mathbf{e}}(z, \varepsilon)\,d\varepsilon = \\ = \mathrm{ct}\,\overline{\mathbf{e}(z, \varepsilon)\,\widehat{\mathbf{e}}(z, \varepsilon)} = \mathrm{ct}\,\overline{\mathbf{e}_{\varepsilon}\widehat{\mathbf{e}}_{\varepsilon}},$$

где $\mathbf{e}_{\varepsilon}$ — модифицированное дискретное изображение сигнала ошибки системы с обратной связью:

$$\mathbf{e}_{\varepsilon} = (1 - \mathbf{h}_{\varepsilon})\mathbf{x}. \tag{9}$$

Известно дискретное изображение входного сигнала $\mathbf{x} = \mathbf{a}/\mathbf{b}$ и модифицированная дискретная передаточная функция объекта управления $\mathbf{g}_{\varepsilon} = \mathbf{p}_{\varepsilon}/\mathbf{q}$, причем полиномы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{q}$ считаются взаимно простыми: $(\mathbf{b}, \mathbf{q}) = 1$. Рассматривается система управления с обратной связью, имеющая модифицированную передаточную функцию

$$\mathbf{h}_{\varepsilon} = \frac{\mathbf{w}\mathbf{g}_{\varepsilon}}{1 + \mathbf{w}\mathbf{g}}. \tag{10}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Программа оптимального управляющего устройства, минимизирующая интегральную квадратичную ошибку, имеет вид

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{q}^{+}\theta}{\pi_1}, \tag{11}$$

где θ и π_1 — полиномы, входящие в решение системы из двух π-уравнений относительно трех неизвестных полиномов

$$\mathbf{p}\theta + \mathbf{q}^{-}\pi_1 = \mathbf{a}^{*}\mathbf{r}^{+}\tilde{\mathbf{q}}^{-}, \tag{12}$$

$$\mathbf{r}^{-}\theta + \mathbf{b}\pi_2 = \mathbf{a}^{*}\tilde{\tilde{\mathbf{p}}}_{\varepsilon}\tilde{\mathbf{q}}^{-}, \tag{13}$$

минимальное относительно полинома π_2. Через $\mathbf{r}$ обозначен полином

$$\mathbf{r} = \overline{\mathbf{p}_{\varepsilon}\tilde{\mathbf{p}}_{\varepsilon}} = \overline{\mathbf{p}(z, \varepsilon)\,\tilde{\mathbf{p}}(z, \varepsilon)} = \int_0^1 \mathbf{p}(z, \varepsilon)\,\tilde{\mathbf{p}}(z, \varepsilon)\,d\varepsilon,$$

а через $\tilde{\tilde{\mathbf{p}}}_{\varepsilon}$ — полином

$$\tilde{\tilde{\mathbf{p}}}_{\varepsilon} = \overline{\tilde{\mathbf{p}}(z, \varepsilon)} = \int_0^1 \tilde{\mathbf{p}}(z, \varepsilon)\,d\varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие минимума интегральной квадратичной ошибки можно записать в виде

$$\delta J = \mathrm{ct}\,\overline{\mathbf{e}_{\varepsilon}\delta\hat{\mathbf{e}}_{\varepsilon}} = 0,$$

или с учетом (9) в виде

$$\delta J = \mathrm{ct}\,\overline{(1 - \mathbf{h}_{\varepsilon})\,\delta\hat{\mathbf{h}}_{\varepsilon}\mathbf{x}\hat{\mathbf{x}}} = 0. \tag{14}$$

Подставляя $\mathbf{w}$ из (11) в формулу (10) и учитывая π-уравнение (12), получим

$$\mathbf{h}_{\varepsilon} = \frac{\mathbf{p}_{\varepsilon}\theta}{\mathbf{a}^{*}\mathbf{r}^{+}\tilde{\mathbf{q}}^{-}}. \tag{15}$$

Варьируя это выражение, имеем

$$\delta\mathbf{h}_{\varepsilon} = \frac{\mathbf{p}_{\varepsilon}\delta\theta}{\mathbf{a}^{*}\mathbf{r}^{+}\tilde{\mathbf{q}}^{-}}. \tag{16}$$

Общее решение системы π-уравнений (12), (13) относительно θ и его вариация имеют соответственно вид

$$\theta = \theta_0 + \mathbf{b}\mathbf{q}^{-}\zeta, \qquad \delta\theta = \mathbf{b}\mathbf{q}^{-}\delta\zeta.$$

Подставляя выражение для вариации в (16), получим

$$\delta\mathbf{h}_{\varepsilon} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}^{*}}\,\frac{\mathbf{p}_{\varepsilon}\mathbf{q}^{-}}{\mathbf{r}^{+}\tilde{\mathbf{q}}^{-}}\,\delta\zeta.$$

Инвертируя эту функцию, будем иметь

$$\delta\hat{h}_\varepsilon = \frac{\hat{b}}{\hat{a}^*}\frac{\tilde{q}^-}{q^-}\widehat{\left(\frac{p_\varepsilon}{r^+}\right)}\delta\hat{\zeta}.$$

Докажем, что

$$\widehat{\left(\frac{p_\varepsilon}{r^+}\right)} = \frac{\tilde{p}_\varepsilon}{r^-}. \tag{17}$$

Имеем $r^+ = \overline{p_\varepsilon^+ \tilde{p}_\varepsilon^-}$, $r^- = \overline{p_\varepsilon^- \tilde{p}_\varepsilon^+}$. Отсюда

$$\tilde{r}^+ = \overline{\tilde{p}_\varepsilon^+ \tilde{\tilde{p}}_\varepsilon^-} = z^{|\tilde{p}_\varepsilon^-| - |p_\varepsilon^-|}\overline{p_\varepsilon^- \tilde{p}_\varepsilon^+} = z^{|\tilde{p}_\varepsilon^-| - |p_\varepsilon^-|} r^-.$$

Следовательно,

$$r^- = z^{|p_\varepsilon^-| - |\tilde{p}_\varepsilon^-|}\tilde{r}^+.$$

Но $|r^+| = |p_\varepsilon^+| + |\tilde{p}_\varepsilon^-|$. Поэтому

$$r^- = z^{|p_\varepsilon^-| + |p_\varepsilon^+| - |r^+|}\tilde{r}^+ = z^{|p_\varepsilon| - |r^+|}\tilde{r}^+. \tag{18}$$

Инвертируя

$$\widehat{\left(\frac{p_\varepsilon}{r^+}\right)} = \frac{\tilde{p}_\varepsilon}{z^{|p_\varepsilon| - |r^+|}\tilde{r}^+},$$

с учетом формулы (18) получаем (17). Таким образом,

$$\delta\hat{h}_\varepsilon = \frac{\hat{b}}{\hat{a}^*}\frac{\tilde{q}^-}{q^-}\frac{\tilde{p}_\varepsilon}{r^-}\delta\hat{\zeta}. \tag{19}$$

Подставим (15) и (19) в (14):

$$\delta J = \mathrm{ct}\,\overline{\left(\frac{a^* r^+ \tilde{q}^- - p_\varepsilon\theta}{a^* r^+ \tilde{q}^-}\cdot\frac{\hat{b}\tilde{q}^-\tilde{p}_\varepsilon}{\hat{a}^* q^- r^-}\right)}\,\frac{a\hat{a}}{b\hat{b}}\,\delta\hat{\zeta} =$$

$$= \mathrm{ct}\,\frac{a^* r^+ \overline{\tilde{p}}_\varepsilon \tilde{q}^- - \overline{(p_\varepsilon \tilde{p}_\varepsilon)}\,\theta}{r^+ r^- q^- b}\,\delta\hat{\zeta} = \mathrm{ct}\,\frac{a^* \overline{\tilde{p}}_\varepsilon \tilde{q}^- - r^-\theta}{q^- r^- b}\,\delta\hat{\zeta}.$$

С учетом π-уравнения (13) получаем

$$\delta J = \mathrm{ct}\,\frac{\pi_2}{q^- r^-}\,\delta\hat{\zeta}.$$

Минимальное относительно π_2 решение системы π-уравнений (12)—(13) содержит полиномы следующих степеней:

$$|\theta| = |b| + |q^-| - 1,\quad |\pi_1| = |b| + |p| - 1,\quad |\pi_2| = |q^-| + |r^-| - 1.$$

Следовательно, функция под знаком ct является правильной, и поэтому условие оптимальности выполнено.

Приведем алгоритмы вычисления $\mathbf{r}$ и $\tilde{\tilde{\mathbf{p}}}_\varepsilon$, входящих в расчетные формулы. Из (4) следует

$$\overline{\mathbf{g}_\varepsilon \hat{\mathbf{g}}_\varepsilon} = \mathfrak{Z}\,[\mathbf{g}(p)\,\mathbf{g}(-p)],$$

где

$$\mathbf{g}_\varepsilon = \frac{\mathbf{p}_\varepsilon}{\mathbf{q}}, \quad \hat{\mathbf{g}}_\varepsilon = z^{|\mathbf{q}|-|\mathbf{p}_\varepsilon|}\,\frac{\tilde{\mathbf{p}}_\varepsilon}{\tilde{\mathbf{q}}}.$$

Следовательно,

$$z^{|\mathbf{q}|-|\mathbf{p}_\varepsilon|}\,\frac{1}{\mathbf{q}\tilde{\mathbf{q}}}\,\overline{\mathbf{p}_\varepsilon \tilde{\mathbf{p}}_\varepsilon} = \mathfrak{Z}\,[\mathbf{g}(p)\,\mathbf{g}(-p)],$$

откуда получается рабочая формула

$$\mathbf{r} = \overline{\mathbf{p}_\varepsilon \tilde{\mathbf{p}}_\varepsilon} = \frac{\mathbf{q}\tilde{\mathbf{q}}}{z^{|\mathbf{q}|-|\mathbf{p}_\varepsilon|}}\,\mathfrak{Z}\,[\mathbf{g}(p)\,\mathbf{g}(-p)].$$

Аналогично, из (3) следует

$$\overline{\mathbf{g}}_\varepsilon = (1-z)\,\mathfrak{Z}\left[\frac{\mathbf{g}(p)}{p}\right], \quad \overline{\hat{\mathbf{g}}}_\varepsilon = (1-z)\,\mathfrak{Z}\left[\frac{\mathbf{g}(-p)}{p}\right].$$

С учетом формулы (20) получаем

$$\overline{\hat{\mathbf{g}}}_\varepsilon = \frac{z^{|\mathbf{q}|-|\mathbf{p}_\varepsilon|}\,\tilde{\tilde{\mathbf{p}}}_\varepsilon}{\tilde{\mathbf{q}}} = (1-z)\,\mathfrak{Z}\left[\frac{\mathbf{g}(-p)}{p}\right],$$

откуда следует, что

$$\tilde{\tilde{\mathbf{p}}}_\varepsilon = \frac{(1-z)\,\tilde{\mathbf{q}}}{z^{|\mathbf{q}|-|\mathbf{p}_\varepsilon|}}\,\mathfrak{Z}\left[\frac{\mathbf{g}(-p)}{p}\right].$$

Перенос критерия интегральной квадратичной ошибки на все прочие случаи оставляем читателю в качестве упражнений.

ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Непрерывные и дискретные изображения

№	$x(t)$	$\mathbf{x}(p)$	$x(n)$	$\mathbf{x}(z)$	Примечание
1	$u(t)=\begin{cases}1, t\geqslant 0\\ 0, t<0\end{cases}$	$\frac{1}{p}$	$u(n)=\begin{cases}1, n\geqslant 0,\\ 0, n<0\end{cases}$	$\frac{1}{1-z}$	
2	$t\cdot u(t)$	$\frac{1}{p^2}$	$n\cdot u(n)$	$\frac{z}{(1-z)^2}$	
3	$t^2\cdot u(t)$	$\frac{2}{p^3}$	$n^2\cdot u(n)$	$\frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$	
4	$t^3\cdot u(t)$	$\frac{6}{p^4}$	$n^3\cdot u(n)$	$\frac{z(1+4z+z^2)}{(1-z)^4}$	
5	$t^4\cdot u(t)$	$\frac{24}{p^5}$	$n^4\cdot u(n)$	$\frac{z(1+11z+11z^2+z^3)}{(1-z)^5}$	
6	$t^5\cdot u(t)$	$\frac{120}{p^6}$	$n^5\cdot u(n)$	$\frac{z(1+26z+66z^2+26z^3+z^4)}{(1-z)^6}$	
7	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{p+a}$	$\alpha^n\cdot u(n)$	$\frac{1}{1-\alpha z}$	$\alpha=e^{-aT}$

Продолжение таблицы

№	$\mathbf{x}(t)$	$\mathbf{x}(p)$	$\mathbf{x}(n)$	$\mathbf{x}(z)$	Примечание
8	$\left(1 - e^{-at}\right) u(t)$	$\dfrac{a}{p(p+a)}$	$\left(1 - \alpha^n\right) u(n)$	$\dfrac{(1-\alpha) z}{(1-z)(1-\alpha z)}$	
9	$te^{-at}u(t)$	$\dfrac{1}{(p+a)^2}$	$n\alpha^n \cdot u(n)$	$\dfrac{\alpha z}{(1-\alpha z)^2}$	$\alpha = e^{-aT}$
10	$t^2 e^{-at} u(t)$	$\dfrac{2}{(p+a)^3}$	$n^2 \alpha^n \cdot u(n)$	$\dfrac{\alpha z(1+\alpha z)}{(1-\alpha z)^3}$	
11	$t^3 e^{-at} u(t)$	$\dfrac{6}{(p+a)^4}$	$n^3 \alpha^n \cdot u(n)$	$\dfrac{\alpha z\left(1 + 4\alpha z + z^2\right)}{(1-\alpha z)^4}$	
12	$\dfrac{1}{a-b}\left(e^{-bt} - e^{-at}\right)$	$\dfrac{1}{(p+a)(p+b)}$	$\dfrac{1}{a-b}\left(\beta^n - \alpha^n\right)$	$\dfrac{(\beta-\alpha) z}{(a-b)(1-\alpha z)(1-\beta z)}$	$\alpha = e^{-aT}$, $\beta = e^{-bT}$
13	$\dfrac{(a-c)e^{-at}+(c-b)e^{-bt}}{a-b}$	$\dfrac{p+c}{(p+a)(p+b)}$	$\dfrac{(a-c)\alpha^n + (c-b)\beta^n}{a-b}$	$\dfrac{1}{a-b}\left[\dfrac{a-c}{1-\alpha z} + \dfrac{c-b}{1-\beta z}\right]$	
14	$\sin bt \cdot u(t)$	$\dfrac{b}{p^2+b^2}$	$\sin \beta n \cdot u(n)$	$\dfrac{z \sin\beta}{1 - 2z\cos\beta + z^2}$	$\beta = bT$

Продолжение таблицы

№	$x(t)$	$\mathbf{x}(p)$	$x(n)$	$\mathbf{x}(z)$	Примечание
15	$\cos bt \cdot u(t)$	$\frac{p}{p^2+b^2}$	$\cos \beta n \cdot u(n)$	$\frac{1-z\cos\beta}{1-2z\cos\beta+z^2}$	
16	$\sin(bt+\varphi)\, u(t)$	$\frac{b\cos\varphi+p\sin\varphi}{p^2+b^2}$	$\sin(\beta n+\varphi)\, u(n)$	$\frac{\sin\varphi+z\sin(\beta-\varphi)}{1-2z\cos\beta+z^2}$	
17	$(1-\cos bt)\, u(t)$	$\frac{b^2}{p(p^2+b^2)}$	$(1-\cos\beta n)\, u(n)$	$\frac{(1-\cos\beta)\, z(1+z)}{(1-z)(1-2z\cos\beta+z^2)}$	$\beta = bT$
18	$t\sin bt \cdot u(t)$	$\frac{2bp}{(p^2+b^2)^2}$	$n\sin\beta n \cdot u(n)$	$\frac{z(1-z^2)\sin\beta}{(1-2z\cos\beta+z^2)^2}$	
19	$t\cos bt \cdot u(t)$	$\frac{p^2-b^2}{(p^2+b^2)^2}$	$n\cos\beta n \cdot u(n)$	$\frac{z[(1+z^2)\cos\beta-2z]}{(1-2z\cos\beta+z^2)^2}$	
20	$e^{-at}\sin bt \cdot u(t)$	$\frac{b}{(p+a)^2+b^2}$	$\alpha^n \sin\beta n \cdot u(n)$	$\frac{\alpha z\sin\beta}{1-2\alpha z\cos\beta+\alpha^2z^2}$	$\alpha = e^{-aT}$, $\beta = bT$
21	$e^{-at}\cos bt \cdot u(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$	$\alpha^n \cos\beta n \cdot u(n)$	$\frac{1-\alpha z\cos\beta}{1-2\alpha z\cos\beta+\alpha^2z^2}$	

Непрерывные и модифицированные дискретные изображения

№	$x(p)$	$x(z,\varepsilon)$	Примечание
1	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{1-z}$	
2	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{\varepsilon T}{1-z}+\frac{Tz}{(1-z)^2}$	
3	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{T^2}{2}\left[\frac{\varepsilon^2}{1-z}+\frac{(2\varepsilon+1)z}{(1-z)^2}+\frac{2z^2}{(1-z)^3}\right]$	
4	$\frac{1}{p^4}$	$\frac{T^3}{6}\left[\frac{\varepsilon^3}{1-z}+\frac{(3\varepsilon^2+3\varepsilon+1)z}{(1-z)^2}+\frac{(6\varepsilon+6)z^2}{(1-z)^3}+\frac{6z^3}{(1-z)^4}\right]$	
5	$\frac{1}{p+a}$	$\frac{\alpha^\varepsilon}{1-\alpha z}$	$\alpha=e^{-aT}$
6	$\frac{1}{(p+a)^2}$	$T\alpha^\varepsilon\left[\frac{\varepsilon}{1-\alpha z}+\frac{\alpha z}{(1-\alpha z)^2}\right]$	

Продолжение таблицы

№	$\mathbf{x}(p)$	$\mathbf{x}(z, \varepsilon)$	Примечание
7	$\frac{1}{(p+a)^3}$	$\frac{T^2\alpha^\varepsilon}{2}\left[\frac{\varepsilon^2}{1-\alpha z}+\frac{(2\varepsilon+1)\,\alpha z}{(1-\alpha z)^2}+\frac{2\alpha^2 z^2}{(1-\alpha z)^3}\right]$	
8	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{a-b}\left(\frac{\beta^\varepsilon}{1-\beta z}-\frac{\alpha^\varepsilon}{1-\alpha z}\right)$	$\alpha=e^{-aT}$, $\beta=e^{-bT}$
9	$\frac{p+c}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{a-b}\left[\frac{(a-c)\,\alpha^\varepsilon}{1-\alpha z}+\frac{(c-b)\,\beta^\varepsilon}{1-\beta z}\right]$	
10	$\frac{1}{p^2+b^2}$	$\frac{1}{b}\cdot\frac{\sin\varepsilon\beta+z\sin(1-\varepsilon)\beta}{1-2z\cos\beta+z^2}$	$\beta=bT$
11	$\frac{p}{p^2+b^2}$	$\frac{\cos\varepsilon\beta-z\cos(1-\varepsilon)\beta}{1-2z\cos\beta+z^2}$	
12	$\frac{1}{(p+a)^2+b^2}$	$\frac{\alpha^\varepsilon}{b}\cdot\frac{\sin\varepsilon\beta+\alpha z\sin(1-\varepsilon)\beta}{1-2\alpha z\cos\beta+\alpha^2z^2}$	$\alpha=e^{-aT}$, $\beta=bT$
13	$\frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$	$\alpha^\varepsilon\cdot\frac{\cos\varepsilon\beta-\alpha z\cos(1-\varepsilon)\beta}{1-2\alpha z\cos\beta+\alpha^2z^2}$	

СПИСОК ПРИНЯТЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \ldots$ — полиномы

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \ldots, \mathbf{X}, \mathbf{Y}$ — матрицы

$a, b, c, \ldots$ — действительные числа

a_i — коэффициенты полинома $\mathbf{a}$

$\tilde{\mathbf{a}}$ — обратный полином

$\mathbf{a}^+, \mathbf{a}^-$ — положительная и отрицательная части полинома $\mathbf{a}$

$\mathbf{a}^* = \mathbf{a}^+\tilde{\mathbf{a}}^-$

$|\mathbf{a}|$ — степень полинома $\mathbf{a}$

$\mathbf{a}$ — числитель изображения процесса на входе $\mathbf{x}$ (полином)

$\mathbf{a}_i$ — числитель i-й подходящей дроби (полином)

$(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ — наибольший общий делитель полиномов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$

$\mathbf{b}$ — знаменатель изображения процесса на входе $\mathbf{x}$ (полином)

$\mathbf{b}_i$ — знаменатель i-й подходящей дроби (полином)

$\mathbf{b}_0$ — дополнительный множитель (полином)

C_n^m — число сочетаний из n по m

ct — постоянный член

D — дисперсия процесса; оператор перехода от непрерывного изображения $\mathbf{x}(p)$ к модифицированному дискретному изображению $\mathbf{x}(z, \varepsilon)$

d, def — дефект полинома, рациональной функции

$e(t)$ — ошибка

$e_\text{д}(t)$ — динамическая ошибка

$e_\text{с}(t)$ — случайная ошибка

$\mathbf{e}$ — изображение сигнала ошибки (рассогласования)

$\mathbf{e}_i$ — числитель разности двух соседних подходящих дробей

F — функция

$\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$ — рациональные функции

$\mathbf{f}$ — изображение суммы случайной составляющей полезного сигнала $\mathbf{l}$ и помехи $\boldsymbol{\xi}$

$\mathbf{g}$ — передаточная функция управляемого объекта

$\mathbf{g}^+, \mathbf{g}^-$ — положительная и отрицательная части передаточной функции управляемого объекта

$\mathbf{h}$ — передаточная функция системы (рациональная); формирующий фильтр

$\mathbf{h}(z)$ — дискретная передаточная функция

$\mathbf{h}(p)$ — непрерывная передаточная функция

$\hat{\mathbf{h}}$ — инверсная рациональная функция

$\mathbf{h}^+, \mathbf{h}^-$ — положительная и отрицательная части рациональной функции

$\mathbf{h}_+, \mathbf{h}_-$ — правая и левая части рациональной функции

$[\mathbf{h}]$ — целая часть рациональной функции

$\{\mathbf{h}\}$ — дробная часть рациональной функции

h_0 — постоянный член рациональной функции

h_i — коэффициенты разложения рациональной функции в ряд Тейлора

$\mathbf{h}_n$ — усеченное изображение (полином)

$\mathbf{h}_i$ — подходящие дроби

$\mathbf{I}$ — единичная матрица

ind — индекс полинома, рациональной функции

J — критерий оптимальности

$j = \sqrt{-1}$ — мнимая единица

$\mathbf{l}$ — изображение отклонения от среднего хода процесса

m — число нулей рациональной функции

$\mathbf{m}$ — изображение среднего хода процесса

n — число полюсов рациональной функции

p — оператор дифференцирования, комплексная переменная в операционных соотношениях

$\mathbf{p}$ — числитель передаточной функции объекта $\mathbf{g}$ (полином)

$\mathbf{q}$ — знаменатель передаточной функции объекта $\mathbf{g}$ (полином)

$\mathbf{q}$ — частное (полином)

$\mathbf{q}_i$ — неполные частные

$\mathbf{q}_0$ — дополнительный множитель (полином)

r, rank — ранг полинома, рациональной функции

$\mathbf{r}$ — остаток (полином); вспомогательный полином в задаче оптимизация по комбинированному критерию; числитель изображения сигнала, обусловленного ненулевыми начальными условиями (полином)

$\mathbf{r}_\mu$ — числитель изображения произвольного полинома от дискретного времени i степени μ

$\mathbf{s}$ — изображение полезного сигнала; формирующий фильтр полезного сигнала; регуляризующий полином

T — такт работы дискретного управляющего устройства

t — время

t_i — моменты переключения знака управляющего воздействия

$u(t)$ — управление, управляющее воздействие; единичный скачок

$\mathbf{u}$ — изображение управляющего воздействия

$\mathbf{v}(p)$ — передаточная функция фиксатора

$\mathbf{v}$ — наибольший общий делитель полиномов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{q}$ (полином)

$\mathbf{w}$ — изображение (программа) управляющего устройства

$x(t)$ — процесс; процесс на входе

$x^*(t)$ — импульсная функция, соответствующая процессу $x(t)$

$\overline{x}(t)$ — ступенчатая функция

$\hat{x}(t)$ — линейно интерполированная функция

$\overset{\frown}{x}(t)$ — квадратично интерполированная функция

$\mathbf{x}$ — изображение процесса на входе

$\mathbf{x}_0$ — изображение сигнала, соответствующего ненулевым начальным условиям в объекте

$\mathbf{x}^*(p)$ — дискретное преобразование Лапласа функции $x(t)$

$y(t)$ — управляемый процесс; процесс на выходе

$\mathbf{y}$ — изображение процесса на выходе

Z — плоскость комплексного переменного z

Z^+ — область $|z| > 1$

Z^- — область $|z| < 1$

z — оператор запаздывания (комплексное переменное); комплексное число

Γ — контур $|z|=1$
Δ — приращение; прямая разность
δ — вариация
$\delta(t)$ — дельта-функция Дирака
δ_{ik} — индекс Кронекера
ε — малое число; отношение сигнал/шум; локальное нормированное время
$\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\pi}$, $\boldsymbol{\varphi}$ — неизвестные полиномы
$\{\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\pi}\}$ — решение π-уравнения
$\varkappa_i$ — корни полинома $\mathbf{c}$
λ, μ — параметры регуляризации (действительные числа)
λ — число тактов предсказания
$\boldsymbol{\Lambda}$ — оператор предсказания (экстраполяции, упреждения)
μ — степень астатизма
$\boldsymbol{\mu}$ — знаменатель ковариационного изображения $\boldsymbol{\psi}$ (полином)
$\boldsymbol{\nu}$ — числитель ковариационного изображения $\boldsymbol{\psi}$ (полином)
$\boldsymbol{\xi}$ — изображение помехи; формирующий фильтр помехи; произвольный полином
$\boldsymbol{\pi}_0$ — минимальный полином
ρ — наибольший общий делитель двух взаимно простых полиномов (действительное число)
$\boldsymbol{\sigma}_j$ — числители изображений процессов $\{i^j\}$ (полиномы)
τ — сопряженное время
φ_{ik}, ψ_i — ковариационные коэффициенты
$\boldsymbol{\psi}$ — ковариационное изображение
Ω — множество (ансамбль) выборок
$\mathfrak{D}$ — оператор перехода от непрерывного преобразования Лапласа $\mathbf{x}(p)$ к модифицированному дискретному преобразованию Лапласа $\mathbf{x}^*(p, \varepsilon)$
$\mathfrak{Z}$ — оператор перехода от непрерывного преобразования Лапласа $\mathbf{x}(p)$ к дискретному $\mathbf{x}(z)$
$\mathbb{R}$ — поле действительных чисел
$\mathbb{R}[z]$ — кольцо полиномов
$\mathbb{R}(z)$ — поле рациональных функций
∇ — обратная разность

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алиев Ф. А., Ларин В. Б. Синтез оптимальных импульсных регуляторов при идеальном измерении координат объекта.— В кн.: Навигационные гироскопические системы.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1973, с. 5—28.
2. Андреев Н. И. Общее условие экстремума заданной функции среднеквадратической ошибки и квадрата математического ожидания ошибки динамической системы.— Автоматика и телемеханика, 1959, т. 20, № 7, с. 833—838.
3. Андронов А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний.— М.; Л.: ОНТИ, 1937.— 520 с.
4. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний.— 2-е изд.— М.: Физматгиз, 1959.— 915 с.
5. Андронов А. А., Горелик Г. С. Радиофизика и общая динамика машин.— Известия вузов, Радиофизика, 1958, № 1, с. 5—13.
6. Андронов А. А., Понтрягин Л. С. Грубые системы.— Доклады АН СССР, 1937, т. 14, № 5, с. 247—250.
7. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации.— М.; Л.: Гостехиздат, 1947.— 323 с.
8. Барковский В. В., Захаров В. Н., Шаталов А. С. Методы синтеза систем управления (методы, основанные на применении ЦВМ).— М.:Машиностроение, 1969.— 328 с.
9. Беллман Р. Процессы регулирования с адаптацией: Пер. с англ. Ю. П. Леонова. Под ред. А. М. Летова.— М.: Наука, 1964.— 359 с.
10. Бохер М. Введение в высшую алгебру. Пер. с нем./Под ред. А. Г. Куроша.— М.; Л.: ГТТИ, 1933.— 291 с.
11. Ватник П. А. Статистические методы оперативного управления производством.— М.: Статистика, 1978.— 240 с.
12. Винер Н. Кибернетика, или управление и связь в животном и машине: Пер. с англ. И. В. Соловьева/Под ред. Г. Н. Поварова.— 2-е изд.— М.: Сов. радио, 1968.— 326 с.
13. Виноградов И. М. Основы теории чисел.— 8-е изд., испр.— М.: Наука, 1972.— 167 с.
14. Волгин Л. Н. Метод синтеза линейных импульсных систем автоматического регулирования по динамическим критериям.— Автоматика и телемеханика, 1959, т. 20, № 10, с. 1350—1356.
15. Волгин Л. Н. Статистический расчет дискретных автоматических систем.— Известия АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, 1960, № 4, с. 94—101.
16. Волгин Л. Н. Синтез дискретных автоматических систем с ограниченным управляющим воздействием.— Известия АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, 1961, № 2, с. 114—119.

17. Волгин Л. Н. Элементы теории управляющих машин.— М.: Сов. радио, 1962.— 164 с.
18. Волгин Л. Н. Программирование цифровых вычислительных машин для обработки информации по методу наименьших квадратов.— Автоматика и телемеханика, 1963, т. 24, № 9, с. 1284—1288.
19. Волгин Л. Н. Комбинированные системы регулирования с цифровыми вычислительными машинами.— В кн.: Теория инвариантности в системах автоматического управления. Труды 2-го Всесоюзного совещания, состоявшегося в Киеве 29 мая — 1 июня 1962 г.— М.: Наука, 1964, с. 340—347.
20. Волгин Л. Н. Программирование оптимальных процессов управления линейными объектами.— Автоматика и телемеханика, 1964, т. 25, № 11, с. 1538—1544.
21. Волгин Л. Н. К вопросу о создании обучаемых и самообучающихся систем автоматического управления.— Известия АН СССР, Техническая кибернетика, 1964, № 6, с. 81—84.
22. Волгин Л. Н. Синтез оптимальных импульсных систем.— В кн.: Дискретные и самонастраивающиеся системы. Труды 2-го Международного конгресса ИФАК. М.: Наука, 1965, с. 50—59.
23. Волгин Л. Н. Полиномиально-операторный метод синтеза оптимальных дискретных систем по комбинированному критерию.— Автоматика и телемеханика, 1981, № 8, с. 185—189.
24. Волгин Л. Н., Смоляр Л. И. Коррекция следящих систем при помощи дискретных вычислительных устройств.— Автоматика и телемеханика, 1960, т. 21, № 8, с. 1158—1164.
25. Волгин Л. Н., Смоляр Л. И. Алгебраический метод расчета линейных автоматических систем с цифровыми вычислительными устройствами.— Известия вузов, Радиофизика, 1961, т. 4, № 3, с. 581—583.
26. Волгин Л. Н., Фалькович А. И. Синтез дискретных устройств обработки информации с переменной программой.— Автоматика и телемеханика, 1962, т. 23, № 6, с. 732—738.
27. Волков А. А., Еременко И. Ф. Об одной задаче аналитического конструирования цифровых регуляторов.— Приборы и системы автоматики, Харьков, 1970, вып. 14, с. 25—30.
28. Гайдук А. Р. Синтез систем автоматического управления по передаточным функциям.— Автоматика и телемеханика, 1980, т. 41, № 1, с. 11—16.
29. Гельфанд И. М., Цетлин М. Л. Принцип нелокального поиска в системах автоматической оптимизации.— Доклады АН СССР, 1961, т. 137, № 2, с. 295—298.
30. Гренандер У., Сеге Г. Теплицевы формы и их приложения. Пер. с англ. Н. С. Ландкофа.— М.: ИЛ, 1961.— 308 с.
31. Гусев В. Г. Определение оптимальной передаточной функции дискретной автоматической системы алгебраическим методом.— Автоматика и телемеханика, 1970, № 5, с. 77—88.
32. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования: Пер. с 3-го нем. изд. Г. А. Вольперта. С предисл. Я. З. Цыпкина.— М.: Наука, 1971.— 288 с.
33. Джури Е. И., Цыпкин Я. З. Теория дискретных автоматических систем (обзор).— Автоматика и телемеханика, 1970, № 6, с. 57—81.

34. Дэвенпорт Г. Высшая арифметика. Пер. с англ. Б. З. Мороза/Под ред. Ю. В. Линника.— М.: Наука, 1965.— 175 с.
35. Елистратов М. Р. К вопросу о синтезе дискретных систем методом полиномиальных уравнений.— Автоматика и телемеханика, 1963, т. 24, № 11, с. 1474—1486.
36. Елистратов М. Р. Синтез линейного дискретного фильтра при наличии ограничений в заданной части системы.— Автоматика и телемеханика, 1965, т. 26, № 11, с. 1915—1925.
37. Еременко И. Ф. К вопросу аналитического конструирования цифровых регуляторов для неминимальнофазовых объектов регулирования.— Труды семинара: Техническая кибернетика (Харьковское отделение), Киев: ИК АН УССР, 1969, вып. 2, с. 49—57.
38. Загускин В. Л. Справочник по численным методам решения уравнений.— М.: Физматгиз, 1960.— 216 с.
39. Здан В. Цифровые вычислительные устройства для систем автоматической стабилизации.— Вопросы ракетной техники, 1962, № 7, с. 43—55.
40. Ивановский Р. И., Таранов А. Г. Синтез многомерных систем автоматического управления с применением ЭЦВМ.— М.: Наука, 1970.— 172 с.
41. Калман Р. Э. Об общей теории систем управления.— В кн.: Труды 1-го Межд. конгресса ИФАК. М.: Изд-во АН СССР, 1961, т. 2, с. 521—547.
42. Канторович Л. В. Функциональный анализ и прикладная математика.— Успехи мат. наук, 1948, т. 3, вып. 6.
43. Кац А. М. Определение параметров регулятора по заданному характеристическому уравнению системы регулирования.— Автоматика и телемеханика, 1955, № 3, с. 269—272.
44. Колмогоров А. Н. Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве.— Бюллетень МГУ, 1941, т. 2, вып. 6, с. 1—40.
45. Колмогоров А. Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей.— Известия АН СССР, сер. матем., 1941, т. 5, № 1, с. 3—14.
46. Крутько П. Д. Статистическая динамика импульсных систем.— М.: Сов. радио, 1963.— 559 с.
47. Крутько П. Д. Вариационные методы синтеза систем с цифровыми регуляторами.— М.: Сов. радио, 1967.— 439 с.
48. Кузин Л. Т. Расчет и проектирование дискретных систем управления.— М.: Машгиз, 1962.— 683 с.
49. Курош А. Г. Курс высшей алгебры.— 11-е изд., стереотип.— М.: Наука, 1975.— 431 с.
50. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного.— 4-е изд., испр.— М.: Наука, 1973.— 736 с.
51. Ларин В. Б., Сунцев В. Н. О задаче аналитического конструирования регуляторов.— Автоматика и телемеханика, 1968, № 12, с. 142—145.
52. Ларин В. Б., Науменко К. И., Сунцев В. Н. Спектральные методы синтеза линейных систем с обратной связью.— Киев: Наукова думка, 1971.— 137 с.
53. Ларин В. Б., Науменко К. И., Сунцев В. Н. Синтез оптимальных линейных систем с обратной связью.— Киев: Наукова думка, 1973.— 152 с.

54. Лузин Н. Н. К изучению матричной теории дифференциальных уравнений.— Автоматика и телемеханика, 1940, т. 1, № 5, с. 3—66.
55. Макаров И. М., Менский Б. М. Таблица обратных преобразований Лапласа и обратных z-преобразований (дробно-рациональные изображения).— М.: Высш. школа, 1978.— 248 с.
56. Максвелл Д. К., Вышнеградский И. А., Стодола А. Теория автоматического регулирования (линеаризованные задачи).— М.: Изд-во АН СССР, 1949.— 431 с.
57. Манин Ю. И. О диофантовых уравнениях над функциональными полями.— Доклады АН СССР, 1961, т. 139, № 4.
58. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи: Пер. с англ. Б. А. Смиренина/Под ред. Б. Р. Левина.— М.: Сов. радио, 1961, т. 1.— 782 с., 1962, т. 2.— 831 с.
59. Надеждин П. В. Получение фильтров Колмогорова — Винера на основе принципа селективной инвариантности.— В кн.: Теория инвариантности, теория чувствительности и их применения. VI Всесоюзное совещание, М.: ИПУ, 1982, с. 37—38.
60. Надеждин П. В. Задача оптимальной стабилизации и адаптивное управление линейными динамическими объектами.— В кн.: XII Всесоюзная школа-семинар по адаптивным системам, Минск, БГУ им. В. И. Ленина, 1984, с. 72.
61. Оптимизация линейных инвариантных во времени систем управления/Ф. А. Алиев, В. Б. Ларин, К. И. Науменко, В. Н. Сунцев.— Киев: Наукова думка, 1978.— 327 с.
62. Основы проектирования управляющих машин промышленного назначения/Б. Н. Малиновский, И. А. Янович, В. М. Египко, В. И. Карташов, Т. Ф. Слободянюк, С. С. Забара, А. М. Лучук. Под ред. Б. Н. Малиновского.— М.: Машиностроение, 1969.— 344 с.
63. Перов В. П. Статистический синтез импульсных систем.— М.: Сов. радио, 1959.— 454 с.
64. Петров Б. Н. О реализуемости условий инвариантности.— В кн.: Теория инвариантности и ее применение в автоматических устройствах. Труды 1-го Всесоюзного совещания по теории инвариантности, состоявшегося в Киеве 16—20 октября 1958 г. М.: Изд-во АН СССР, 1959, с. 59—80.
65. Потапов М. Д. Синтез дискретных корректирующих устройств на основе критерия конечного времени регулирования.— Автоматика и телемеханика, 1962, т. 23, № 4, с. 433—440.
66. Проблемы теории импульсных систем управления: Обзор (Итоги науки)/Под ред. Я. З. Цыпкина.— М.: Наука, 1966.— 175 с.
67. Рутисхаузер Г. Алгоритм частных и разностей: Пер. с нем. В. М. Курочкина.— М.: ИЛ, 1960.— 93 с.
68. Системы цифрового управления самолетом/Под ред. А. Д. Александрова и С. М. Федорова.— М.: Машиностроение, 1983.— 223с.
69. Смирнов В. И. Курс высшей математики.— 23-е изд., стереотип.— М.: Наука, 1974, т. 1 — 479 с.; т. 2 — 655 с.; т. 3, ч. I — 323 с.; т. 3, ч. 2 — 672 с.; т. 4, ч. I — 336 с.
70. Современные методы проектирования систем автоматического управления/Под ред. Б. Н. Петрова, В. В. Солодовникова, Ю. И. Топчеева.— М.: Машиностроение, 1967.— 704 с.

71. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений.— 8-е изд., стереотип.— М.: Физматгиз, 1959.— 468 с.
72. Тихонов А. Н. О методах регуляризации задач оптимального управления.— Доклады АН СССР, 1965, т. 162, № 4, с. 763—765.
73. Уолш Дж. Л. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области: Пер. с англ. А. А. Гончара и С. Я. Хавинсона.— М.: ИЛ, 1961.— 508 с.
74. Фараджев Р. Г. Линейные последовательности машины.— М.: Сов. радио, 1975.— 248 с.
75. Фараджев Р. Г. Об уравнениях синтеза линейных последовательностных машин.— Автоматика и телемеханика, 1980, № 9, с. 81—90.
76. Фельдбаум А. А. Оптимальные процессы в системах автоматического регулирования.— Автоматика и телемеханика, 1953, т. 14, № 6, с. 712—728.
77. Хинчин А. Я. Теория корреляции стационарных стохастических процессов.— Успехи мат. наук, 1938, вып. 5, с. 42—51.
78. Цыпкин Я. З. Переходные и установившиеся процессы в импульсных цепях.— М.; Л.: Госэнергоиздат, 1951.— 220 с.
79. Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем.— М.: Физматгиз, 1963.— 968 с.
80. Цыпкин Я. З. Основы теории автоматических систем.— М.: Наука, 1977.— 560 с.
81. Чхартишвили Л. П. Синтез систем автоматического управления по критерию минимума среднеквадратичной ошибки при непроизвольной структуре.— Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1964, № 1, с. 143—153.
82. Чхартишвили Л. П. К вопросу синтеза систем автоматического управления при непроизвольной структуре.— Автоматика и телемеханика, 1965, т. 26, № 12, с. 2137—2144.
83. Чхартишвили Л. П. Расчет реализуемой передаточной функции корректирующей цепи по критерию минимума среднеквадратичной ошибки.— Автоматика и телемеханика, 1966, № 7, с. 80—85.
84. Шатуновский С. О. Алгебра как учение о сравнениях по функциональным модулям.— Одесса: Техник, 1917.— 205 с.
85. Щипанов Г. В. Теория и методы проектирования автоматических регуляторов.— Автоматика и телемеханика, 1939, № 1, с. 49—66.
86. Яглом А. М. Введение в теорию стационарных случайных функций.— Успехи мат. наук, 1952, т. 7, вып. 5, с. 3—168.
87. Яглом А. М. Экстраполирование, интерполирование и фильтрация стационарных случайных процессов с рациональной спектральной плотностью.— Труды Моск. мат. об-ва, 1955, т. 4, с. 333—374.
88. Янушевский Р. Т. О грубости решения задач аналитического конструирования регуляторов.— Автоматика и телемеханика, 1966, т. 27, № 3, с. 18—25.
89. Alper P. Higher-dimensional z-transforms and nonlinear discrete systems.— Revue A, 1964, v. 6, N 4, p. 199—212.
90. Anderson B. D. O., Bitmead R. R. Stability of matrix polynomials.— Intern. journal of control, 1977, v. 26, № 2, p. 235—247.

91. Baker G. A. Jr. Essentials of Padé approximants.— New York: Academic press, 1975.— 306 p.
92. Bar-Ness Y., Feinstein J. Design of optimal tracking discrete control system.— Intern. journal of control, 1980, v. 32, № 6, p. 1079—1097.
93. Barnett S. Regular polynomial matrices having relatively prime determinants.— Proc. of Cambridge philosophical society, 1969, v. 65, pt. 3, p. 585—590.
94. Barnett S. Matrices in control theory.— London: Van Nostrand — Reinhold, 1971.— 221 p.
95. Barnett S. Matrices, polynomials and linear time-invariant systems.— Trans. IEEE, 1973, v. AC-18, № 1, p. 1—10.
96. Bengtsson G. Output regulator and internal model — a frequency domain approach.— Automatica, 1977, v. 13, № 4, p. 333—345.
97. Bergen A. R., Ragazzini J. R. Sampled — data processing techniques for feedback control systems.— Trans. AIEE, 1954, v. 73, pt. 2, p. 236—247.
98. Blankinship W. A. A new version of the Euclidean algorithm.— American mathem. monthly, 1963, v. 70, № 7, p. 742—745.
99. Brown W. S. On Euclid's algorithm and the computation of polynomial greatest common divisors.— J. of the Association for computing machinery, 1971, v. 18, № 4, p. 478—504.
100. Castel C., Reboulet C. Algebraic approach to stochastic optimal digital controller design.— Intern. journal of control, 1983, v. 37, № 5, p. 1145—1157.
101. Chang S. S. L. Statistical design theory for strictly digital sampled-data systems.— Trans. AIEE, 1957, v. 76, pt. 1, p. 702—709.
102. Chang S. S. L. Statistical design theory for digital-controlled continuous systems.— Trans. AIEE, 1958, v. 77, pt. 2, p. 191—201.
103. Chen C. T. Introduction to linear system theory.— New York: Hold, Rinehart & Winston, 1970.— 431 p.
104. Desoer C. A., Schulman J. D. Cancellations in multivariable continuous-time and discrete-time feedback systems treated by greatest common divisor extraction.— Trans. IEEE, 1973, v. AC-18, № 4, p. 401—402.
105. Feinstein J., Bar-Ness Y. On the uniqueness of the minimal solution to the matrix polynomial equation $A(\lambda)X(\lambda)+Y(\lambda)B(\lambda)=C(\lambda)$. — J. of Franklin inst., 1980, v. 310, № 2, p. 131—134.
106. Fielder D. C. A note on computations used with Euclid's algorithm.— Trans. IEEE, 1973, v. CT-20, № 4, p. 417—419.
107. Jury E. I. Theory and application of the z-transform method.— New York: Wiley, 1964.— 330 p.
108. Jury E. I., Pai M. A. Convolution z-tranform method applied to certain nonlinear discrete systems.— Trans. IRE, 1962, v. AC-7, № 1, p. 57—64.
109. Kučera V. Algebraic theory of discrete optimal control for single-variable systems.— Kybernetika, 1973, v. 9, № 2, p. 94—107; № 3, p. 206—221; № 4, p. 291—312.
110. Kučera V. Constrained optimal control — the algebraic aproach. Kybernetika, 1974, v. 10, № 4, p. 317—319.

111. Kučera V. Algebraic theory of discrete optimal control for multivariable systems.— Kybernetika, 1974, v. 10, № 4, Supplement, p. 1—12; 1975, v. 11, № 1, Supplement, p. 57—76; № 2, p. 77—100; № 3, p. 101—124, № 4, p. 125—160.
112. Kučera V. Algebraic approach to discrete linear control.— Trans. IEEE, 1975, v. AC-20, № 1, p. 116—120.
113. Kučera V. Algebraic approach to discrete stochastic control.— Kybernetika, 1975, v. 11, № 2, p. 114—147.
114. Kučera V. Algebraic methods in discrete linear estimation.— Kybernetika, 1976, v. 12, № 3, p. 171—191.
115. Kučera V. Algebraická teorie diskrétniho lineárniho řizeni.— Praha: Československá Akad. věd, 1978.— 333 p.
116. Kučera V. Discrete linear control: the polynomial equation approach.— New York: Wiley, 1979.— 206 p.
117. Kučera V. Steady-state minimum-variance discrete control.— Problems of control and information theory, 1979, v. 8, № 2, p. 123—135.
118. Kučera V. A dead-beat servo problem.— Intern. journal of control, 1980, v. 32, № 1, p. 107—113.
119. Kučera V. Polynomial design of deadbeat control laws.— Kybernetica, 1980, v. 16, № 2, p. 198—203.
120. Kučera V. Discrete stochastic regulation and tracking.— Kybernetika, 1980, v. 16, № 3, p. 263—272.
121. Lausch H., Nöbauer W. Algebra of polynomials.— New York: Elsevier, 1973.— 322 p.
122. Molinari B. P. Algebraic solution of matrix linear equations in control theory.— Proc. of IEE, 1969, v. 116, № 10, p. 1748—1754.
123. Mordell L. J. Diophantine equations.— London: Academic press, 1969.— 312 p.
124. Motyka P. R., Cadzow J. A. The discrete quadratic control problem for unstable plants.— Conference record of 2-nd Asilomar conference on circuits and systems, 1968, p. 552—556.
125. Necolný J. Numerical interpolation and approximation of analytic functions.— UTIA ČSAV, Report № 357, Praha, 1971.
126. Peterka V. On stead-state minimum variance control strategy.— Kybernetika, 1972, v. 8, № 3, p. 219—232.
127. Poncelet J. V. Mécanique industrielle.— Bruxelles: Meline, Cans et C°, 1839.— 596 p.
128. Ragazzini J. R., Zadeh L. A. The analysis of sampled-data systems.— Trans. AIEE, 1952, v. 71, pt. 2, p. 225—232.
129. Rogers R. O., Sworder D. D. Applications of number theoretic transforms to compensation in digital control systems.— Paper AIAA, 1977, № 1085, p. 329—336.
130. Rosenbrock H. H. Relatively prime polynomial matrices.— Electronics letters, 1968, v. 4, № 11, p. 227—228.
131. Roth W. E. The equations $AX - YB = C$ and $AX - XB = C$ in matrices.— Proc. of the American mathem. society, 1952, v. 3, № 3, p. 392—396.
132. Shamash Y. Partial fraction expansion via polynomial equations. Trans. IEEE, 1976, v. CAS-23, № 9, p. 562—566.
133. Syntéza regulačnich obvodů s čislicovým počitačem/V. Strejc, B. Bláha, A. Fořtová, A. Halousková, V. Peterka, J. Růžička, A. Tuzar, P. Vidinčev, J. Weiss.— Praha: Československá Akad. věd, 1965.— 461 p.

134. Torng H. C. Optimization of discrete control systems through linear programming.— J. of Franklin inst., 1964, v. 278, № 1, p. 28—44.
135. Vostrý Z. Numerická metoda spektrálni faktorizace polynomů.— Kybernetika, 1972, v. 8, № 4, p. 323—332.
136. Vostrý Z. Discrete twice optimal control systems.— Kybernetika, 1975, v. 11, № 2, p. 148—163.
137. Wiener N. The extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series.— New York: Wiley, 1949.— 163 p.
138. Williams B. J. The advantages of z-tranforms in system compensation.— Control, 1966, v. 10, № 91, p. 34—36.
139. Zadeh L. A., Ragazzini J. R. An extension of Wiener's theory of prediction.— J. of applied physics, 1950, v. 21, № 7, p. 645—655.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Лев Николаевич Волгин

ОПТИМАЛЬНОЕ ДИСКРЕТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Серия «Теоретические основы технической кибернетики», № 86

Редактор *Д. С. Фурманов*
Художественный редактор *Г. М. Коровина*
Технический редактор *Е. В. Морозова*
Корректор *И. Я. Кришталь*

ИБ № 12607

Сдано в набор 12.09.85. Подписано к печати 27.06.86. Т-16331. Формат 84×108/32. Бумага тип. № 2. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Усл. печ. л. 12,6. Усл. кр.-отт. 12,6. Уч.-изд. л. 12,08. Тираж 4800 экз. Заказ № 982. Цена 2 руб.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»
630077 г. Новосибирск, 77, Станиславского, 25

2 руб.