

ДЛЯ УЧАЩИХСЯ ТЕХНИКУМОВ

М.Ю. ЗАЙЧИК

**СБОРНИК ЗАДАЧ  
И УПРАЖНЕНИЙ  
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ  
ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ**

М. Ю. ЗАЙЧИК

# СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

*6-е издание, переработанное  
и дополненное*

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для электротехнических специальностей средних специальных учебных заведений



МОСКВА ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ 1988

ББК 31.21  
3-17  
УДК 621.3.01(076.1)

Рецензент инж. Л. И. Фуфаева

**Зайчик М. Ю.**

3-17 Сборник задач и упражнений по теоретической электротехнике: Учеб. пособие для техникумов. — 6-е изд., перераб. и доп. — М.: Энергоатомиздат, 1988. — 496 с.: ил.

ISBN 5-283-00492-9

Каждая глава сборника содержит типовые задачи с решениями, в которых разъясняются применяемые законы и формулы. В конце каждой главы приведены задачи для самостоятельного решения. Предыдущее издание выпущено в 1978 г. Сборник переработан в соответствии с программой по теоретической электротехнике для электротехнических специальностей техникумов.

Для учащихся техникумов электротехнических специальностей.

3 2302010000-034 Свод. пл. сред. спец. учеб. заведений 123-88 ББК 31.21  
051(01)-88

ISBN 5-283-00492-9

© Энергоатомиздат, 1988

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый сборник имеет целью помочь учащимся техникумов в овладении теорией и методами решения задач по предмету «Теоретические основы электротехники». Весь учебный материал (в соответствии с программой предмета) разъясняется при помощи типовых подробно решенных задач и дополнительных вопросов с ответами, составленных к каждой типовой задаче. Дополнительные вопросы — ответы расширяют понимание теории, углубляют физическую картину явлений, дают иные приемы решения задачи, показывают возможное применение на практике отдельных теоретических положений. В конце каждой главы приводятся задачи для самостоятельного решения.

Наличие в сборнике дополнительных вопросов — ответов позволяет преподавателю лучше приспособить задачи по всем разделам программы к конкретной специализации учащихся.

В сборник включено много задач и дополнительных вопросов, имеющих практическое значение и взятых частично из электромеханики, но главным образом из электроники, радиотехники и автоматики. Кроме того, введены задачи и вопросы — ответы, связанные с поисками неисправностей, надежностью устройств, их регулировкой и другими видами практической деятельности.

В шестом издании сборник дополнен шестью новыми главами (электрическая цепь, ее элементы и основные законы, электрические цепи с взаимной индуктивностью, несимметричные трехфазные цепи, круговые диаграммы



напряжения и тока, магнитные цепи при постоянных магнитодвижущих силах, длинные линии). Кроме того, переработаны и расширены разделы по анализу схемы замещения цепи, расчету сложных цепей, экспериментальному анализу цепей (расчету по показаниям приборов), фильтрации гармоник в цепях несинусоидального тока, расчету трехфазных цепей, переходным процессам и четырехполюсникам. Значительное внимание уделено практической направленности учебного материала, связи теории и практики.

Введение нового материала привело к увеличению объема книги. Однако объем материала, изучаемого по каждой специализации в отдельности, в основном сохранился прежним и возможно даже уменьшился, так как из сборника исключены некоторые менее важные вопросы.

Письма и отзывы автор просит направлять по адресу: 113114, Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10, Энергоатомиздат.

*Автор*

## Глава первая

# ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЦЕПЬ, ЕЕ ЭЛЕМЕНТЫ И ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ

### 1.1. ВИДЫ ЦЕПЕЙ. ВЗАИМОСВЯЗЬ ТОКОВ И НАПРЯЖЕНИЙ

#### Условие задачи

Для трех заданных схем электрических цепей (рис. 1.1—1.3) показать распределение тока и напряжения, записать уравнения по законам Кирхгофа и баланса мощностей, обосновать виды цепей по методам их анализа.

#### Решение задачи

1. Элементы электрической цепи. Все рассматриваемые цепи содержат два вида устройств: во-первых, источники энергии — аккумуляторы, генераторы (активные элементы) и, во-вторых, потребители энергии — сопротивления (пассивные элементы). Кроме того, в двух цепях (рис. 1.1 и 1.2) включены вспомогательные устройства — ключи  $K$ , из которых один (рис. 1.1) работает на включение, а другой (рис. 1.2) — на размыкание. При анализе цепей будем считать оба ключа замкнутыми.

Источники энергии изображены различно — в соответствии с принятыми обозначениями аккумулятора (рис. 1.1) и генератора постоянного тока (рис. 1.2). Кроме указанных конкретных реальных источников приведено изображение произвольного источника ЭДС (рис. 1.3), используемое в схемах замещения (см. доп. вопрос 5 к этой задаче).

2. Участки электрической цепи. Показанные на рис. 1.1 и 1.2 цепи содержат два принципиально различных участка: внутренний — источник энергии

и внешний — вся остальная цепь, т. е. потребители или приемники энергии. Такое деление на участки («внутренний» и «внешний») применимо только к цепям с одним источником энергии.

Однако используется и другое (более широкое) представление об участке цепи (без добавления «внутренний»

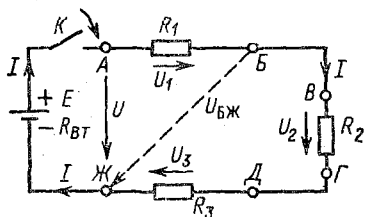


Рис. 1.1. Неразветвленная цепь с одним источником и несколькими потребителями

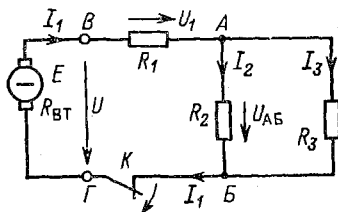


Рис. 1.2. Разветвленная цепь с двумя узлами и тремя ветвями

или «внешний»), которым обозначают любую часть цепи. Так, сопротивления  $R_2$  и  $R_3$  (рис. 1.1) совместно образуют участок  $ВЖ$ , сопротивления  $R_1, R_2, R_3$  (рис. 1.2) — участок  $ВАБ$  и т. д.

3. Распределение тока. Первый закон Кирхгофа. Ток во всякой электрической цепи и в любом ее участке характеризуется значением и направлением.

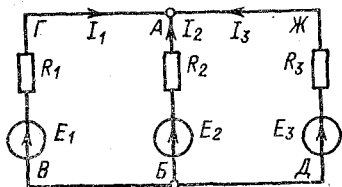


Рис. 1.3. Сложная цепь с тремя ветвями

В цепи рис. 1.1 существует один путь для тока: от вывода «+» источника по направлению движения часовой стрелки. На этом пути ток не изменяется, поэтому он обозначен одинаково  $I$  на всех участках цепи. Такая цепь называется неразветвленной — ток «не разветвляется» (не делится на части).

В цепи рис. 1.2 создаваемый ЭДС  $E$  ток  $I_1$  (в неразветвленной части цепи  $БГВА$ ) разделяется в узловой точке  $А$  на две части ( $I_2$  и  $I_3$ ), так как имеются два пути для тока — через сопротивления  $R_2$  и  $R_3$ . Известно (первый закон Кирхгофа):

В цепи рис. 1.2 создаваемый ЭДС  $E$  ток  $I_1$  (в неразветвленной части цепи  $БГВА$ ) разделяется в узловой точке  $А$  на две части ( $I_2$  и  $I_3$ ), так как имеются два пути для тока — через сопротивления  $R_2$  и  $R_3$ . Известно (первый закон Кирхгофа):

$$I_1 = I_2 + I_3. \quad (1.1)$$

Такая цепь называется разветвленной. Она характеризуется числом узлов (точек разделения тока) и числом ветвей (участков с одним значением тока). Данная цепь (рис. 1.2) имеет два узла (точки  $A$  и  $B$ ) и три ветви с токами  $I_1, I_2, I_3$ . На практике встречаются цепи и с большим числом узлов и ветвей.

Третья заданная цепь (рис. 1.3) также является разветвленной, но в отличие от предыдущей (рис. 1.2) содержит несколько источников энергии, включенных в разные ветви. В такой цепи не представляется возможным заранее (до расчета) установить направления токов. Действительно, ЭДС  $E_1$  задает токам направление по часовой стрелке, а ЭДС  $E_2$  и  $E_3$  — обратное.

Разветвленные цепи с несколькими источниками питания, включенными в разные ветви, часто называют сложными. В таких цепях направления токов ветвей вначале (до расчета значений токов) выбирают произвольно, что и сделано на рис. 1.3. Затем (после анализа цепи) направления токов уточняются.

Заметим, что в сложной цепи задают только направления токов, так как число токов (различных по значению) известно. Оно равно числу ветвей. Например, в рассматриваемой цепи — три ветви и соответственно три тока:  $I_1, I_2, I_3$ . Эти токи выбраны одинаково направленными (к узлу  $A$ ), поэтому по первому закону Кирхгофа имеем

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0. \quad (1.2)$$

Очевидно, что все токи не могут притекать к узлу. Хотя бы один из них должен отходить от узла. Поэтому направления токов, выбранные на рис. 1.3 произвольно, будут скорректированы после расчета цепи.

4. Виды цепей и методы их анализа. Расчет неразветвленной цепи (первый вид) можно выполнить, используя закон Ома. Так, в нашем случае (рис. 1.1) при заданной ЭДС и сопротивлениях цепи определяем вначале ток:

$$I = E / (R_1 + R_2 + R_3 + R_{вт}), \quad (1.3)$$

а затем падения напряжений на сопротивлениях:

$$U_1 = R_1 I; \quad U_2 = R_2 I; \quad U_3 = R_3 I.$$

Второй вид цепи (разветвленная с одним источником энергии) сводится при расчете к первому (к неразветвленной цепи) путем упрощения схемы, выполняемого заменой сопротивлений, соединенных последовательно и парал-

лельно, эквивалентными. Например, цепь рис. 1.2 после замены в ней параллельно соединенных  $R_2$  и  $R_3$  одним эквивалентным сопротивлением

$$R_{2,3} = R_2 R_3 / (R_2 + R_3) \quad (1.4)$$

окажется неразветвленной, что позволяет для тока  $I_1$  записать уравнение по закону Ома, аналогичное (1.3), а именно:

$$I_1 = E / (R_1 + R_{2,3} + R_{вт}). \quad (1.5)$$

Сложные цепи (третий вид) отличаются тем, что их схемы нельзя упростить и свести к одноконтурным путем замены последовательно и параллельно соединенных сопротивлений эквивалентными. В этом легко убедиться на примере цепи (рис. 1.3), в которой вовсе отсутствуют названные соединения сопротивлений.

Такие цепи обычно анализируют без преобразования схемы. Методы их анализа рассмотрены в гл. 4. Один из них — метод уравнений Кирхгофа — кратко пояснен в этом параграфе (п. 5).

*Итак, метод расчета цепи зависит от вида ее электрической схемы, с анализа которой и следует начинать решение задачи. В самом общем виде можно выделить три типа цепей (с точки зрения метода их анализа): неразветвленную, разветвленную с одним источником и разветвленную с несколькими источниками, включенными в разные ветви. Названные виды цепей рассматриваются в гл. 2—4.*

5. Второй закон Кирхгофа. Распределение напряжения. Прежде всего вспомним правило знаков при составлении уравнений по второму закону Кирхгофа. Электродвижущая сила записывается со знаком плюс, если выбранное направление обхода контура совпадает с ее направлением. Падение напряжения на сопротивлении записывается со знаком плюс, если направление тока в рассматриваемом сопротивлении совпадает с направлением обхода контура.

В соответствии с этими правилами для контура ЖАВВГДЖ (рис. 1.1) при его обходе по направлению движения часовой стрелки имеем

$$E = (R_{вт} + R_1 + R_2 + R_3) I = U_0 + U_1 + U_2 + U_3, \quad (1.6)$$

где  $U_0 = R_{вт} I$  — падение напряжения на внутреннем сопротивлении источника энергии.

Уравнение (1.6), составленное на основании второго закона Кирхгофа, совпадает с полученным выше уравнением (1.3), записанным по закону Ома, и характеризует *распределение напряжений в цепи (рис. 1.1)*.

Чтобы применить второй закон Кирхгофа к сложной цепи (рис. 1.3), нужно прежде всего выделить отдельные замкнутые контуры, например *ВГАВВ* и *БАЖДБ*, и затем выбрать направление обхода этих контуров, например по часовой стрелке.

При этом для первого из выбранных контуров алгебраическая сумма ЭДС  $\Sigma E = E_1 - E_2$ , так как ЭДС  $E_1$  действует по направлению обхода контура, а ЭДС  $E_2$  — встречно ему.

Для этого же контура алгебраическая сумма напряжений (падения напряжений на сопротивлениях)  $\Sigma U = R_1 I_1 - R_2 I_2$ , так как ток  $I_1$  совпадает с направлением обхода, а ток  $I_2$  имеет противоположное направление.

По второму закону Кирхгофа алгебраические суммы ЭДС  $\Sigma E$  и напряжений  $\Sigma U$  равны, поэтому имеем

$$E_1 - E_2 = R_1 I_1 - R_2 I_2. \quad (1.7)$$

Для второго выбранного контура уравнение по второму закону Кирхгофа имеет вид

$$E_2 - E_3 = R_2 I_2 - R_3 I_3, \quad (1.8)$$

т. е. аналогично (1.7).

Рассматривая (1.2), (1.7) и (1.8) как систему уравнений, можно определить три неизвестные величины, например токи  $I_1, I_2, I_3$  (при заданных ЭДС и сопротивлениях). Такой метод расчета сложных цепей рассмотрен в гл. 4.

**6. Баланс мощностей.** Из закона сохранения энергии следует, что *мощность, развиваемая источником, равна сумме мощностей потребителей, т. е. имеет место баланс мощностей*. Составим его для двух цепей (рис. 1.1 и 1.3).

В первой из них действует один источник энергии, развивающий мощность  $P_{\text{и}} = EI$ . Часть этой мощности  $P_{\text{вт}} = R_{\text{вт}} I^2$  теряется внутри источника, а оставшаяся  $P = P_{\text{и}} - P_{\text{вт}}$  поступает во внешнюю цепь и распределяется в сопротивлениях  $R_1, R_2, R_3$  соответственно.

При этом имеем условие баланса мощностей

$$P_{\text{и}} = P_{\text{вт}} + P_1 + P_2 + P_3. \quad (1.9)$$

В другой (сложной) цепи — три источника энергии. Их

общая мощность

$$\Sigma P_{\text{и}} = P_{\text{и1}} + P_{\text{и2}} + P_{\text{и3}} = E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3 \quad (1.10)$$

распределяется только в сопротивлениях  $R_1, R_2, R_3$  (внутренние сопротивления источников по условию задачи не учитываются). Поэтому

$$\Sigma P_{\text{и}} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 \quad (1.11)$$

выражает условие баланса мощностей в данной цепи.

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Как повлияет на метод анализа цепи включение в одну (любую) ветвь нескольких ЭДС? Если, например, в ветвь БГВА (рис. 1.2) последовательно к уже действующей ЭДС  $E$  включить еще две ЭДС ( $E_1$  и  $E_2$ ) таким образом, что первая из них ( $E_1$ ) будет направлена согласно току  $I_1$ , а вторая ( $E_2$ ) — встречно ему, то при анализе цепи все три ЭДС заменяют одной эквивалентной  $E_3 = E + E_1 - E_2$  и далее цепь рассчитывают как цепь с одним источником энергии, имеющим ЭДС  $E_3$ .

Аналогичная замена возможна и в цепи рис. 1.3, если несколько ЭДС включены, например, в ветвь БВГА или другую, а также в цепи рис. 1.1.

Таким образом, замена нескольких ЭДС ветви одной эквивалентной позволяет сохранить вид цепи и метод ее расчета.

2. Можно ли составить уравнение по второму закону Кирхгофа для внешнего контура цепи (рис. 1.3)? Второй закон Кирхгофа применим к любому замкнутому контуру цепи и в том числе к рассматриваемому АЖДБВА (рис. 1.3). В этом контуре две ЭДС:  $E_1$  и  $E_3$ . Приняв направление обхода контура по часовой стрелке, получим для него алгебраическую сумму ЭДС  $\Sigma E = E_1 - E_3$ , так как  $E_1$  действует согласно с выбранным направлением обхода, а  $E_3$  — встречно ему. Алгебраическая сумма падений напряжений на сопротивлениях контура  $\Sigma U = R_1 I_1 - R_3 I_3$ , где учтено, что ток  $I_1$  направлен по обходу контура, а  $I_3$  — навстречу ему.

Так как по второму закону Кирхгофа  $\Sigma E = \Sigma U$ , имеем

$$R_1 I_1 - R_3 I_3 = E_1 - E_3. \quad (1.12)$$

3. Зависит ли вид уравнения второго закона Кирхгофа от направления обхода контура? Если для рассмотренного контура (вопрос 2) при-

нять противоположное направление обхода (против движения часовой стрелки), то изменятся (на противоположные) знаки всех слагаемых уравнений (1.12), т. е. окажется

$$-R_1 I_1 + R_3 I_3 = -E_1 + E_3. \quad (1.13)$$

Очевидно, что (1.12) и (1.13) тождественно равны.

4. Каким уравнением можно воспользоваться для проверки правильности расчета цепи? Наиболее полной (исчерпывающей) проверкой правильности расчета электрической цепи является выполнение условия баланса мощностей. Поэтому полезно составлять баланс мощностей даже в тех случаях, когда по условию задачи его можно и не составлять.

5. Какой реальной цепи может соответствовать схема (рис. 1.2)? Для сравнения и расчета электрических цепей составляют схемы замещения, т. е. такие электрические схемы, на которых все реальные потребности заменены их эквивалентными сопротивлениями. К числу таких относятся все схемы, рассмотренные в данной задаче (рис. 1.1—1.3). Каждой из этих схем может соответствовать не одна, а ряд реальных цепей.

В качестве примера приведем одну из реальных цепей (рис. 1.4), имеющую схему замещения рис. 1.2. Действительно, если принять в цепи рис. 1.4 сопротивления двухпроводной линии длиной  $l$  и потребителей энергии  $\Pi 1$  и  $\Pi 2$  соответственно равными  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$  (сопротивления схемы рис. 1.2), то легко убедиться в соответствии цепи и схемы.

В каком случае такая замена будет эквивалентной?

*Сопротивление считают эквивалентным, если оно потребляет столько же энергии, сколько и заменяемое им устройство (конечно, в равное время). Поскольку энергия в единицу времени (1 с) численно равна мощности, эквивалентное сопротивление потребляет такую же мощность, как и заменяемый потребитель.*

Заметим, что реальную цепь по схеме (рис. 1.2) можно получить, используя в качестве потребителей энергии резисторы  $R_1 - R_3$ , что используется в радиоэлектронике.

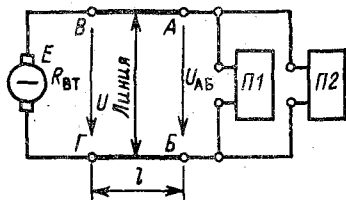


Рис. 1.4. К дополнительному вопросу 5



В дальнейшем рассматриваются только сопротивления резисторов или других потребителей, так как анализируются в основном схемы замещения цепи.

6. В каких случаях учитывается сопротивление соединительных проводов? В большинстве практических случаев сопротивления соединительных проводов настолько малы по сравнению с сопротивлениями потребителей энергии, что ими можно пренебречь. Так, в электрических цепях с короткими соединительными проводами (монтажные провода в приборах и аппаратах) сопротивления последних часто составляют сотые, тысячные и даже десятитысячные доли сопротивлений потребителей; для практических расчетов ими можно пренебречь.

Иначе обстоит дело в цепях с длинными проводами (электрические сети, осветительная проводка и т. п.). Сопротивления таких проводов могут составлять заметную долю сопротивлений потребителей. В этом случае сопротивления проводов нужно учитывать.

Высказанные соображения используются при составлении электрической схемы цепи (схемы замещения). Если электрическая схема задана, то учитываются только указанные (обозначенные) на ней сопротивления.

## **1.2. ИСТОЧНИК ЭДС ПРИ ПЕРЕМЕННОЙ НАГРУЗКЕ. РЕЖИМЫ ИСТОЧНИКА И ПРИЕМНИКА ЭНЕРГИИ**

### **Условие задачи**

Генератор постоянного тока с ЭДС  $E=230$  В и внутренним сопротивлением  $R_{вт}=0,2$  Ом питает производственный объект, на котором установлены электрические двигатели и электрические печи. Число работающих потребителей энергии различно в разные часы и смены. В таких условиях ток в цепи генератора изменяется в широких пределах.

Составить схему замещения цепи, определить предельные режимы генератора, построить зависимости тока, мощностей источника и приемника и КПД генератора от отношения сопротивления нагрузки к внутреннему сопротивлению ( $R/R_{вт}$ ).

### **Решение задачи**

1. Источник ЭДС. В этой задаче, как и во всех предыдущих, используется источник энергии, характеризующийся ЭДС и внутренним сопротивлением. Такой

источник энергии называется источником ЭДС. Его электрическая схема (рис. 1.5, показана пунктиром) является схемой замещения заданного генератора и может быть присоединена вместо него к точкам  $A$  и  $B$  (рис. 1.5).

Как было показано (§ 1.1), ЭДС источника обеспечивает ток в цепи и энергию в потребителях, а внутреннее сопротивление характеризует потери энергии в самом источнике. Чтобы обеспечить малые потери энергии в источнике, его внутреннее сопротивление выбирают много меньшим, чем сопротивление внешнего участка цепи. Этому условию удовлетворяет большинство источников энергии, используемых на практике (аккумуляторы, генераторы и др.).

В практических условиях часто представляется возможным пренебречь сравнительно малым внутренним сопротивлением источника. Такие источники (без внутреннего сопротивления) являются идеальными источниками ЭДС. В практических условиях их иногда называют источниками заданного напряжения.

Итак, источник ЭДС практически можно считать источником заданного напряжения.

2. Составление электрической схемы. В предыдущем параграфе (доп. вопрос 5) было показано, что электрические схемы являются схемами замещения реальных цепей. При этом сопротивления цепи могут быть рассмотрены как эквиваленты каких-то потребителей.

Однако в этой задаче (в отличие от предыдущей) изменяются режим работы потребителей и ток в цепи источника энергии. Как составить схему замещения в таком случае?

Реальный объект можно заменить на схеме переменным сопротивлением  $R$  (рис. 1.5), обеспечивающим изменение тока  $I$  в цепи в тех же пределах, что и в реальных условиях.

При заданных ЭДС  $E$  и внутреннем сопротивлении генератора  $R_{вт}$  напряжение на выводах  $A$  и  $B$  (рис. 1.5)  $U = E - R_{вт}I$  зависит только от тока. Поэтому достаточно установить переменным сопротивлением  $R$  (рис. 1.5) зна-

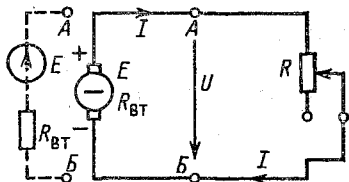


Рис. 1.5. Цепь с переменным сопротивлением, значение которого зависит от положения ползунка реостата

чение тока, соответствующее реальным условиям, чтобы получить значения напряжения  $U$  и мощности  $P=UI$ , одинаковые для эквивалентной схемы и производственного объекта.

Полученная схема рис. 1.5, так же как и приведенная на рис. 1.1, — неразветвленная с одним источником энергии. Метод расчета такой цепи рассматривался в § 1.1, им и воспользуемся.

3. Режимы цепи при переменной нагрузке. В цепи с изменяющимся в широких пределах сопротивлением внешнего участка можно установить два предельных режима: холостой ход, когда  $R_x \rightarrow \infty$  (цепь разомкнута), ток  $I_x=0$  и напряжение  $U_x=E$ ; короткое замыкание при  $R_k=0$ , возникающее в большинстве случаев при авариях, например при случайном замыкании выводов  $A$  и  $B$ .

В режиме короткого замыкания ток в цепи  $I_k=E/R_{вт}$  и мощность, развиваемая источником  $P_{и,к}=EI_k$ , достигают максимальных значений.

Так, при заданных параметрах цепи  $I_k=230/0,2=1150$  А,  $P_{и,к}=230 \cdot 1150=26,45$  кВт. Напряжение на выводах цепи  $U_k=R_k I_k=0$ , и мощность потребителя  $P_k=U_k I_k=0$ . Поэтому вся мощность источника  $P_{и,к}$  рассеивается на его внутреннем сопротивлении и в соединительных проводах, имеющих, хотя и малое, сопротивление. В результате могут перегреться провода или выйти из строя генератор.

Оба режима, очевидно, являются крайними случаями нагрузки источника. Для практических целей интересно также исследовать промежуточные режимы цепи, зависящие от соотношения сопротивлений  $R/R_{вт}$ . Рассмотрим эти режимы для отношения  $R/R_{вт}$ , изменяющегося в пределах от 0 до 10, что соответствует в наших условиях (при  $R_{вт}=0,2$  Ом) изменению  $R$  от 0 до 2 Ом.

4. Определение зависимости  $I=f(R/R_{вт})$ . В рассматриваемой цепи ток

$$I = \frac{E}{R + R_{вт}} = \frac{E}{R_{вт}} \frac{1}{(R/R_{вт} + 1)} = \\ = \frac{230}{0,2} \frac{1}{R/R_{вт} + 1} = 1,15 \frac{10^3}{1 + R/R_{вт}}.$$

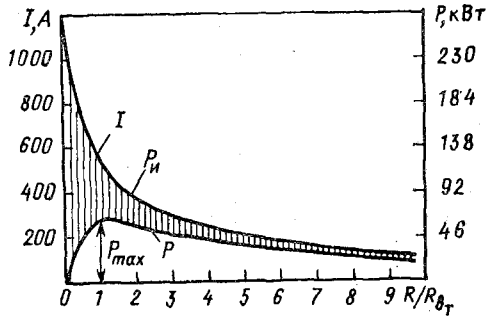
По этому уравнению на рис. 1.6 построен график тока по точкам, вычисленным для нескольких значений отношения  $R/R_{вт}$  или  $R$  (табл. 1.1).

Таблица 1.1

$R/R_{BT}$	0	0,5	1	2	3	5	10
$R, \text{ Ом}$	0	0,1	0,2	0,4	0,6	1,0	2,0
$I, \text{ А}$	1150	766	575	383	287,5	191,5	104,5

5. Определение зависимости  $P_{и} = f(R/R_{BT})$ . Поскольку мощность, развиваемая источником, пропорциональна току  $P_{и} = EI = 230 I$ , то кривая тока, построен-

Рис. 1.6. Графики изменения тока и мощности в зависимости от отношения сопротивления внешней цепи  $R$  к внутреннему сопротивлению источника  $R_{BT}$



ная в другом масштабе по оси ординат, изображает график мощности (правая ордината рис. 1.6).

6. Определение зависимости  $P = f(R/R_{BT})$ . По значениям тока  $I$  и сопротивления  $R$  (табл. 1.1) вычисляем мощность потребителя  $P = RI^2$  (табл. 1.2) и строим кривую  $P = f(R/R_{BT})$ .

Оказывается, что режим наибольшей мощности во внешней цепи  $P_{max}$  (рис. 1.6) получается при  $R = R_{BT}$  (теоретически это положение доказано в доп. вопросе 3 к этой задаче).

Таблица 1.2

$R/R_{BT}$	0	0,5	1	2	3	5	10
$P, \text{ кВт}$	0	58,7	66,12	58,7	49,5	36,7	21,9

## 7. Определение КПД:

$$\eta = \frac{P}{P_{\text{и}}} = \frac{I^2 R}{I^2 (R + R_{\text{вт}})} = \frac{R}{R + R_{\text{вт}}} = \frac{1}{1 + R_{\text{вт}}/R}.$$

Вычислим КПД для характерных режимов:

при  $R=0$

$$\eta = 0/(0 + R_{\text{вт}}) = 0;$$

при  $R=R_{\text{вт}}$

$$\eta = R_{\text{вт}}/(R_{\text{вт}} + R_{\text{вт}}) = 0,5, \text{ или } 50\%;$$

при  $R \rightarrow \infty$

$$\eta = \frac{1}{1 + R_{\text{вт}}/\infty} = 1, \text{ или } 100\%.$$

Из полученных результатов следует два вывода.

Во-первых, с увеличением отношения  $R/R_{\text{вт}}$  возрастает КПД, который достигает максимального значения (100 %) теоретически в режиме холостого хода. При этом, однако, никакой полезной работы не производится, так как и мощность потребителя, и мощность источника равны нулю.

Во-вторых, при  $R=R_{\text{вт}}$  КПД составляет только 50%; хотя источник и отдает во внешнюю цепь наибольшую мощность, такая же мощность теряется во внутреннем сопротивлении.

### Дополнительные вопросы к задаче

1. В каких случаях выбирают режим максимальной мощности и в каких — режим максимального КПД? Для цепей малой мощности (например, многих устройств электроники, измерений), где некоторая потеря энергии незначительна, часто выбирают  $R = (1 \div 3)R_{\text{вт}}$ , обеспечивая режим, близкий к максимальной мощности в сопротивлении потребителя  $R$ . При этом КПД равен 50—75 %.

Для цепей средней и большой мощности (например, устройств электроэнергетики и электромеханики, а также усилителей тока и мощности в электронике) нельзя допустить низкий КПД и большую потерю энергии. В таких цепях выбирают  $R = (5 \div 20)R_{\text{вт}}$  и более, обеспечивая высокий КПД (более 90 %), хотя при этом отдаваемая потребителю мощность в несколько раз меньше максимально возможной.

2. Что означают отрезки между кривыми  $P_{\text{и}}$  и  $P$  на рис. 1.6? Эти отрезки, или разности ординат

кривых  $P$  и  $P_{вт}$ , выражают мощность потерь во внутреннем сопротивлении источника. С увеличением отношения  $R/R_{вт}$  длина отрезков и соответственно мощность потерь уменьшаются, что еще раз подтверждает рост КПД с увеличением сопротивления  $R$ .

3. Как аналитически найти условие получения наибольшей мощности во внешней цепи? В нашем случае значение  $P_{max}$  (рис. 1.6) можно определить, если составить уравнение зависимости  $P(R)$  и приравнять нулю первую производную этой зависимости  $dP/dR=0$ :

$$P = RI^2 = R \left( \frac{E}{R + R_{вт}} \right)^2 = E^2 \frac{R}{(R + R_{вт})^2};$$

$$\frac{dP}{dR} = E^2 \frac{(R + R_{вт})^2 - R \cdot 2(R + R_{вт})}{(R + R_{вт})^4} = E^2 \frac{R_{вт} - R}{(R + R_{вт})^3} = 0,$$

откуда  $R_{вт} - R = 0$ , или  $R = R_{вт}$ .

### 1.3. ИСТОЧНИК ТОКА ПРИ ПЕРЕМЕННОЙ НАГРУЗКЕ. РЕЖИМЫ ИСТОЧНИКА

#### Условие задачи

Источник тока  $J = 12$  мА с собственной (внутренней) проводимостью  $1/R_{вт} = G_{вт} = 10^{-3}$  См (рис. 1.7) присоединен к переменному сопротивлению  $R$ , значение которого изменяется от нуля до бесконечности (обрывается цепь). Определить напряжение источника тока, развиваемую им мощность и мощность внешней цепи для трех режимов нагрузки: холостого хода ( $R = R_x \rightarrow \infty$ ), короткого замыкания ( $R = R_k = 0$ ) и номинального ( $R = R_n = 200$  Ом), а также составить схему эквивалентного источника ЭДС и найти ее параметры.

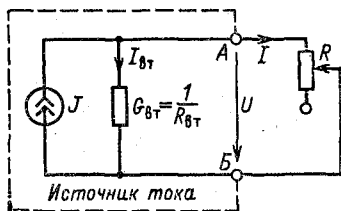


Рис. 1.7. Незвращенная цепь с источником тока

#### Решение задачи

1. Источник тока. В некоторых областях техники (электронике, радиотехнике, приборостроении) применяются источники энергии с большими внутренними сопро-

тивлениями  $R_{вт}$ . Цепи с этими источниками нередко работают в режиме, при котором сопротивление нагрузки источника  $R_n \ll R_{вт}$ .

При таком условии и заданной ЭДС  $E$  ток источника  $I = E / (R_{вт} + R_n) \approx E / R_{вт} = \text{const}$  практически не зависит от сопротивления внешнего участка  $R_n$ . Это требование ( $I = \text{const}$ ) абсолютно реализуется для любых нагрузок  $R_n$  при условии, что  $R_{вт} \rightarrow \infty$ , т. е. в идеальном случае. Такие источники энергии в теории цепей называют источниками тока.

Очевидно, что для идеального источника тока, т. е. такого, который развивает строго неизменный ток при любых нагрузках, невозможен режим холостого хода, так как при этом и сопротивление нагрузки  $R_n \rightarrow \infty$ .

Таким образом, *идеализированный источник энергии, у которого бесконечно внутреннее сопротивление, обеспечивает одинаковый ток в любой нагрузке и является идеальным источником тока.*

Идеальный источник тока обозначается на схемах кружочком с двойной стрелкой внутри (рис. 1.7), показывающей направление тока. Введением двойной стрелки подчеркивается, что внутреннее сопротивление равно бесконечности (разрыв).

Всякий реальный источник имеет внутренние потери энергии, характеризующиеся его внутренним сопротивлением. В источнике напряжения, как известно (§ 1.2), внутреннее сопротивление включается последовательно с его ЭДС. Аналогичное включение для источника тока означало бы последовательное соединение бесконечного сопротивления идеального источника и конечного внутреннего сопротивления потерь, что не имеет смысла. Поэтому в *реальную схему источника тока вводят параллельную его выводам ветвь (рис. 1.7) внутреннего сопротивления  $R_{вт}$  или внутренней проводимости  $G_{вт} = 1/R_{вт}$ .*

Внутренняя проводимость  $G_{вт}$  (рис. 1.7) учитывает все причины изменения внешнего тока  $I$  при нагрузке источника тока. Напряжение на источнике тока определяется как произведение тока источника и общего сопротивления внешнего участка цепи.

Итак, *источник электрической энергии, характеризующийся током  $I$  и внутренней проводимостью  $G_{вт}$ , называется источником тока.*

2. Режимы цепи при переменной нагрузке. При холостом ходе сопротивление внешнего участка  $R =$

$=R_x \rightarrow \infty$ , а ее ток  $I = I_x = 0$  (обрыв ветви с сопротивлением  $R$ ). В этих условиях ток во внутренней проводимости источника

$$I_{\text{вт}} = J - I_x = 12 - 0 = 12 \text{ мА};$$

напряжение на его выводах  $A$  и  $B$  (рис. 1.7)

$$U = U_x = R_{\text{вт}} I_{\text{вт}} = (1/G_{\text{вт}}) I_{\text{вт}} = 10^3 \cdot 12 \cdot 10^{-3} = 12 \text{ В};$$

мощность, развиваемая источником,

$$P_{\text{н,х}} = J U_x = 12 \cdot 10^{-3} \cdot 12 = 0,144 \text{ Вт} = 144 \text{ мВт}$$

и в нагрузке

$$P_{\text{н,х}} = U_x I_x = U_x \cdot 0 = 0.$$

При другом предельном режиме (коротком замыкании) сопротивление внешнего участка цепи  $R = R_k = 0$ , ее ток  $I_k = J = 12$  мА, так как во внутренней проводимости ток отсутствует ( $I_{\text{вт}} = 0$ ). При этом напряжение источника  $U_k = R_k I_k = 0 \cdot I_k = 0$ ; его мощность  $P_{\text{н,к}} = J U_k = J \cdot 0 = 0$ .

Очевидно, что и мощность в нагрузке равна нулю. Таким образом, источник тока в отличие от источника ЭДС развивает в режиме холостого хода максимальную мощность, а в режиме короткого замыкания — минимальную (равную нулю).

При заданной (по условию задачи) номинальной нагрузке, определяемой сопротивлением  $R = R_n = 200$  Ом или проводимостью  $G_n = 1/R_n = 5 \cdot 10^{-3}$  См, общая проводимость участка  $AB$

$$G_{AB} = G_{\text{вт}} + G_n = 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-3} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ См.}$$

По закону Ома напряжение источника

$$U = U_n = J/G_{AB} = 12 \cdot 10^{-3} / (6 \cdot 10^{-3}) = 2 \text{ В.}$$

Ток во внешнем участке цепи.

$$I_n = U_n/R_n = 2/200 = 0,01 \text{ А} = 10 \text{ мА.}$$

Мощность источника в номинальном (рабочем) режиме

$$P_{\text{н,н}} = J U_n = 12 \cdot 2 = 24 \text{ мВт}$$

значительно меньше, чем в режиме холостого хода.

Мощность в нагрузке

$$P_n = U_n I_n = 2 \cdot 0,01 = 0,02 \text{ Вт.}$$

3. Эквивалентная схема с источником ЭДС. Доказано, что источник тока с параметрами  $J$



и  $G_{\text{вт}}$  и источник ЭДС с параметрами  $E$  и  $R_{\text{вт}}$  эквивалентны при условиях

$$E = J/G_{\text{вт}} \text{ и } R_{\text{вт}} = 1/G_{\text{вт}}. \quad (1.14)$$

Используя эти формулы, получаем при наших данных параметры эквивалентного источника ЭДС:

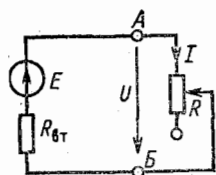


Рис. 1.8. Схема эквивалентного источника ЭДС для цепи рис. 1.7

$$E = J/G_{\text{вт}} = 12 \cdot 10^{-3} / 10^{-3} = 12 \text{ В};$$

$$R_{\text{вт}} = 1/G_{\text{вт}} = 1/10^{-3} = 1000 \text{ Ом} = 1 \text{ кОм}.$$

В результате цепь рис. 1.7 может быть представлена эквивалентной схемой рис. 1.8.

В целях проверки вычислений определим ток  $I$  и напряжение  $U$  в эквивалентной схеме рис. 1.8 для номинального режима ( $R = R_{\text{н}} = 200 \text{ Ом}$ ):

$$I = I_{\text{н}} = E / (R_{\text{вт}} + R_{\text{н}}) = 12 / (1000 + 200) = 0,01 \text{ А} = 10 \text{ мА};$$

$$U = U_{\text{н}} = R_{\text{н}} I_{\text{н}} = 200 \cdot 0,01 = 2 \text{ В}.$$

Получен тот же результат.

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Соблюдается ли баланс мощностей в рассмотренной цепи рис. 1.7? Баланс мощностей следует из закона сохранения энергии и должен обязательно выполняться. Для данной цепи при номинальном режиме ее работы было найдено: мощность источника  $P_{\text{и,ном}} = 24 \text{ мВт}$  и мощность в нагрузке  $P_{\text{н}} = 20 \text{ мВт}$ . Их разность  $P_{\text{и,ном}} - P_{\text{н}} = 24 - 20 = 4 \text{ мВт}$  должна составлять мощность потерь внутренней проводимости источника  $\Delta P$ , которую вычислим:

$$\Delta P = U_{\text{н}} I_{\text{вт}} = U_{\text{н}} (J - I_{\text{н}}) = 2 (12 - 10) = 4 \text{ мВт}.$$

Баланс мощности соблюдается.

2. Какие характеристики одинаковы у эквивалентных источников тока и ЭДС? Эквивалентные источники тока и ЭДС, как было показано при решении этой задачи, обеспечивают одинаковые напряжения и токи во внешней цепи. Следовательно, они отдают одинаковые мощности нагрузке.

Однако рассматриваемые источники не эквивалентны по развиваемой ими мощности. Действительно, как было

найден в задаче, источник тока (рис. 1.7) в номинальном режиме работы развивает мощность  $P_{и,ном} = 24$  мВт. В этом же режиме эквивалентный источник ЭДС (рис. 1.8) развивает мощность

$$P_{ном,э} = EI_{ном} = 12 \cdot 0,01 = 0,12 \text{ Вт} = 120 \text{ мВт},$$

что значительно отличается от  $P_{и,ном}$ .

3. Каковы характерные режимы источников ЭДС и тока? Источник ЭДС, у которого обычно внутреннее сопротивление намного меньше сопротивления нагрузки, работает в режиме, близком к холостому ходу. Источник тока, для которого характерна весьма малая внутренняя проводимость (по сравнению с проводимостью нагрузки), работает в режиме, близком к короткому замыканию.

4. Возможны ли эквивалентные преобразования идеальных источников тока и ЭДС? Если внутренняя проводимость источника тока  $G_{вт} = 0$ , то ЭДС эквивалентного источника напряжения  $E = I/G_{вт} = I/0 \rightarrow \infty$ , что невозможно осуществить. В таком случае при расчетах электрических цепей можно любое сопротивление, включенное параллельно источнику тока, считать его внутренним сопротивлением:  $R_{вт} = 1/G_{вт}$ . Затем выполняем преобразование одного источника в другой.

Аналогично идеальный источник ЭДС ( $R_{вт} = 0$ ,  $U = E$ ) нельзя непосредственно заменить источником тока, так как от последнего потребуется ток  $I = E/R_{вт} = E/0 \rightarrow \infty$ .

В этом случае принимают любое сопротивление, включенное последовательно с ЭДС, в качестве внутреннего сопротивления источника.

5. Возможна ли замена источника ЭДС предыдущей задачи (§ 1.2) эквивалентным источником тока? В § 1.2 использован генератор постоянного тока с малым внутренним сопротивлением ( $R_{вт} = 0,2$  Ом), для которого, как было показано при решении задачи (п. 1), характерна схема источника ЭДС. Однако его представление схемой эквивалентного источника тока безусловно возможно (по приведенным в задаче формулам); при этом окажется

$$J_э = EG_{вт} = E/R_{вт} = 230/0,2 = 1150 \text{ А};$$

$$G_{вт} = 1/R_{вт} = 1/0,2 = 5 \text{ См}.$$

Полученные параметры осуществимы, но не характерны для используемых на практике схем источников тока.

## 1.4. ВЫБОР ЭЛЕМЕНТОВ ЦЕПИ И ЕЕ ВЫПОЛНЕНИЕ (СБОРКА)

### Условие задачи

Цепь рис. 1.9, питаемая от источника напряжением  $U_1 = 20$  В, имеет переменное сопротивление  $R_1$ , регулируемое от 0 до 500 Ом. При  $R_1 = 0$  токи ветвей  $I_2 = 10$  мА,  $I_3 = 40$  мА. Для контроля напряжений и токов включены

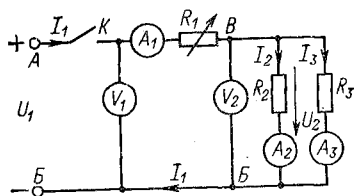
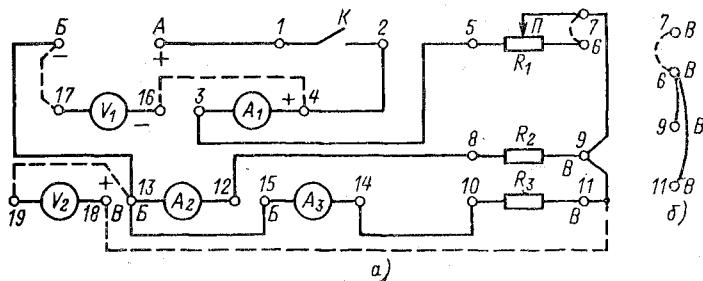


Рис. 1.9. К условию задачи § 1.4

Рис. 1.10. Схема соединений элементов и устройств (а) и образование одного узла (б) по принципиальной схеме рис. 1.9



вольтметры и амперметры (их собственным потреблением энергии можно пренебречь).

Требуется: а) выбрать резисторы по значению сопротивления (при допустимой погрешности  $\pm 10\%$ ), а также по допустимой мощности рассеивания; б) выбрать реостат — переменное сопротивление  $R_1$ ; в) составить схему соединений (монтажную схему), используя заданное (рис. 1.10) расположение элементов и приборов (соединительные провода, показанные на рис. 1.10, не учитывать).

### Решение задачи

1. Выбор резисторов. Любой резистор характеризуется двумя основными параметрами — сопротивлением и допустимой мощностью рассеивания. Важным качественным показателем является также точность значения

сопротивления резистора, задаваемая предельным допустимым отклонением (в процентах) от номинального значения. Для указанной (в условии задачи) допустимой погрешности значения сопротивления  $\pm 10\%$  промышленность изготавливает резисторы с номинальными значениями сопротивлений, Ом: 1,0; 1,2; 1,8; 2,2; 2,7; 3,3; 3,9; 4,7; 5,6; 6,8; 8,2 и т. д. с увеличением в 10, 100, 1000 и т. д. раз.

Для определения номинальных значений сопротивлений  $R_2$  и  $R_3$  (рис. 1.9) воспользуемся законом Ома. Действительно, в заданном режиме ( $R_1=0$ ) падение напряжения на участке  $AB$  цепи отсутствует (сопротивление амперметра и соединительных проводов принято считать равным нулю) и соответственно напряжение на резисторах  $U_2=U_1=20$  В. Токи в резисторах  $I_2$  и  $I_3$  для рассматриваемого режима также известны (заданы по условию задачи).

Соответственно при наших данных имеем

$$R_2 = U_2/I_2 = 20/10^{-2} = 2 \cdot 10^3 \text{ Ом} = 2 \text{ кОм};$$

$$R_3 = U_2/I_3 = 20/40 \cdot 10^{-3} = 500 \text{ Ом} = 0,5 \text{ кОм}.$$

Так как промышленность не изготавливает резисторы (по приведенному выше ряду) на 2 кОм и 0,5 кОм, то полученные значения  $R_2$  и  $R_3$  реализуются несколькими резисторами («составное» сопротивление) (см. доп. вопрос 1 к этой задаче).

Имея значения сопротивлений, находим мощности рассеивания:

$$P_2 = R_2 I_2^2 = 2 \cdot 10^3 \cdot (10^{-2})^2 = 0,2 \text{ Вт};$$

$$P_3 = R_3 I_3^2 = 500 (4 \cdot 10^{-2})^2 = 0,8 \text{ Вт}.$$

Однако резисторы изготавливаются не на любые значения мощности, а только на определенные: 0,25, 0,5; 1,0 Вт и др. Как же в таком случае поступить?

Чтобы избежать превышения температуры резистора, следует выбрать ближайшее большее значение номинальной мощности по сравнению с расчетной. Соответственно принимаем: для  $R_2$ —0,25 Вт, а для  $R_3$ —1 Вт (см. также доп. вопрос 1 к этой задаче).

2. Выбор реостата. Значение его сопротивления задано 0—500 Ом. Остается рассчитать мощность рассеивания и, очевидно, ее наибольшее значение (чтобы обеспечить безопасную работу реостата). Для этого заменим параллельно соединенные сопротивления  $R_2$  и  $R_3$  эквивалент-

ным  $R_{2,3} = R_2 R_3 / (R_2 + R_3) = 2 \cdot 10^3 \cdot 500 / (2000 + 500) = 400$  Ом и преобразуем исходную схему (рис. 1.9) в эквивалентную (рис. 1.11), в которой измерительные приборы исключены, так как не влияют на искомую мощность.

В полученной схеме (рис. 1.11) наибольшая мощность рассеивания в реостате достигается при сопротивлении  $R_1 = R_{2,3}$  (см. § 1.3) и составляет половину мощности всей цепи, состоящей из двух равных сопротивлений ( $R_1$  и  $R_{2,3}$ ).

Так как мощность всей цепи  $P = U_1^2 / (R_1 + R_{2,3})$ , то максимальная мощность в реостате

$$P_{1max} = \frac{1}{2} \frac{U_1^2}{2R_{2,3}} = \frac{20^2}{4 \cdot 400} = 0,25 \text{ Вт.}$$

Полученная наибольшая мощность имеет место только при одном значении  $R_1 = 400$  Ом, а при всех других его значениях  $P_1 < P_{1max} = 0,25$  Вт и запас тепловой надежности возрастает.

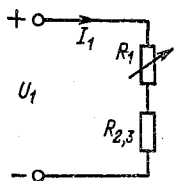


Рис. 1.11. Эквивалентная схема цепи по рис. 1.9

3. Сборка электрической цепи и. Сборка (монтаж) электрической цепи выполняется либо по принципиальной схеме (при экспериментальной работе, в учебных лабораториях и др.), либо по монтажной схеме (в производственных условиях).

При сборке цепи по принципиальной схеме (что обычно вызывает затруднения у обучающихся) приходится мысленно представлять «геометрию» цепи (образование узлов, ветвей) и токопрохождение в ней. Убедимся в этом на примере сборки цепи рис. 1.9, имея расположение ее элементов и приборов (рис. 1.10).

Вначале выполним соединения, обеспечивающие основное прохождение тока, т.е. соберем цепь токов  $I_1, I_2, I_3$  (рис. 1.9), а затем подключим вспомогательные параллельные ветви (вольтметры  $V_1$  и  $V_2$ ).

Неразветвленный участок цепи  $AB$  (рис. 1.9) реализуется просто: присоединением трех проводов  $A-1, 2-4, 3-5$  (рис. 1.10), образующих путь для тока  $I_1$  от вывода «+» источника через ключ  $K$  и реостат  $R_1$ .

Для получения переменного сопротивления реостат можно включить двумя способами: либо без провода  $6-7$  (показан пунктиром), либо с ним. При первом варианте включения иногда наблюдаются обрывы цепи во время перемещения ползунка  $P$  реостата (вследствие плохого прилегания

ползунка к диску), при втором варианте этот недостаток исключается. Поэтому чаще применяют включение с дополнительным проводом 6-7.

Разветвленный участок цепи *ВВ* (рис. 1.9) можно выполнить (смонтировать) несколькими способами, зависящими от варианта соединения выводов 6, 7, 9, 11 (рис. 1.10), объединяемых между собой для получения узловой точки *В* (рис. 1.9). Один вариант их соединения приведен на рис. 1.10, *а*, а другой — на рис. 1.10, *б*. Можно предложить и третий вариант.

Все они одинаково удовлетворяют принципиальной схеме, так как сопротивления соединительных проводов не учитываются (принимаются равными нулю), что, кстати, дает право рассматриваемые выводы обозначить одной и той же буквой *В* на схеме (рис. 1.10), соответствующей данному узлу на принципиальной схеме (рис. 1.9).

Однако по затратам труда и меди (длине проводов) варианты соединений не равноценны и на практике выбирают наиболее экономичный.

Соединения 8-12 и 10-14 (рис. 1.10) очевидны по принципиальной схеме (рис. 1.9). Чтобы закончить сборку основной токовой цепи, образуем узловую точку *Б* (рис. 1.9), которую аналогично узловой точке *В* можно также смонтировать по-разному. На рис. 1.10 показан один из вариантов ее выполнения, который может вызвать сомнения: почему, например, длинный провод *Б-13* (от вывода «—» источника питания) не заменен более коротким *Б-19* или еще лучше *17-19*? Указанная замена действительно экономит провода, но лишает возможности отключить вольтметры  $V_1$  и  $V_2$ , присоединяемые (проводами, показанными на рис. 1.10 пунктиром) после сборки основной цепи.

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Как поступить при отсутствии одного резистора на требуемые номинальные значения сопротивления и мощности? В этом случае выбирают несколько резисторов (обычно два) и соединяют их последовательно или параллельно.

Так, рассмотренное в задаче сопротивление  $R_2=2$  кОм можно получить соединением двух резисторов по 1 кОм последовательно, а сопротивление  $R_3=0,5$  кОм — соединением тех же двух резисторов по 1 кОм параллельно. Учитывая, что при последовательном соединении по резисторам проходит один и тот же ток  $I$ , а при параллельном соедине-

нии они имеют одно и то же напряжение  $U$ , имеем из формул мощности  $P=I^2R$  для первого случая и  $P=U^2/R$  для второго случая уменьшение мощности рассеивания в 2 раза для каждого резистора. Это означает, что можно выбрать резисторы по 0,5 Вт вместо найденной мощности в задаче 1 Вт.

2. Какие соображения следует учитывать при выборе запаса мощности резистора? С увеличением номинальной мощности резистора возрастают его размеры и масса, что увеличивает габариты и утяжеляет устройство, в котором он используется. Поэтому большой запас по мощности рассеивания нежелателен. Выбор его зависит от условий охлаждения и длительности непрерывной работы резистора.

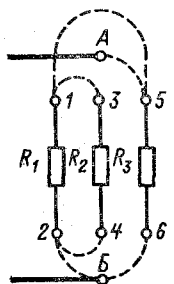


Рис. 1.12. К дополнительному вопросу 3

3. Как присоединить к точкам А и В (рис. 1.12) три резистора  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ , чтобы они образовали параллельное соединение? Возможны различные варианты объединения выводов резисторов в узловых точках А и В. Два из них показаны на рис. 1.12, где узел А образован одним вариантом соединений (объединены точки 1-3, 1-5, А-5), а узел В — другим (объединены точки 2-4, 2-В, 6-В). Это сделано для упрощения иллю-

страции, но, конечно, оба узла (А и В) могут быть образованы одинаково.

Еще раз убеждаемся в том, что *одна и та же принципиальная схема реализуется различными схемами соединений, т. е. монтажная схема многовариантна.*

4. Как следует располагать на принципиальной схеме сопротивления и соединительные провода? Составляя схему, прежде всего надо следить за правильным выполнением всех электрических соединений. При этом сопротивления и соединительные провода надо стремиться расположить так, чтобы получилась по возможности простая и наглядная схема. Однако приходится считаться и с графическими возможностями. В результате электрические схемы иногда имеют непривычные начертания.

Варианты начертания последовательного соединения. На рис. 1.13 показаны четыре последовательно соединенных сопротивления в самом простом изо-

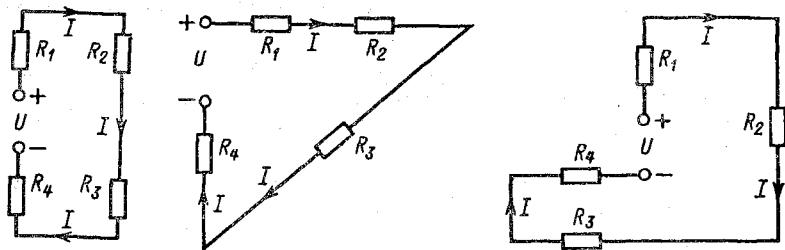


Рис. 1.13. Четыре последовательно соединенных сопротивления в различных схемных изображениях

бражении и в других начертаниях. Во всех трех случаях по сопротивлениям  $R_1—R_4$  проходит один и тот же ток  $I$  и с точки зрения режима цепи схемы одинаковы. Можно, конечно, составить еще очень много начертаний этой же цепи.

Варианты начертания параллельного соединения. На рис. 1.14 показаны три различных начертания

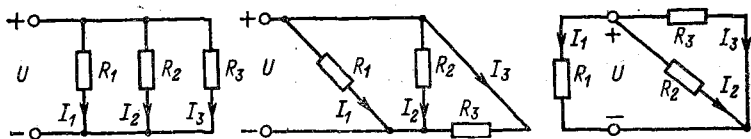


Рис.1.14. Три параллельно соединенных сопротивления в различных схемных изображениях

ния одной и той же электрической цепи. Сопротивления  $R_1, R_2, R_3$  во всех случаях соединены параллельно, так как подключены к одной и той же паре выводов под напряжением  $U$ . Во всех случаях токи ветвей  $I_1=U/R_1, I_2=U/R_2, I_3=U/R_3$ .

### 1.5. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. К какому виду (неразветвленная, разветвленная с одним источником питания, сложная) относится цепь (рис. 1.15): а) при разомкнутом ключе  $K$ ; б) при замкнутом ключе; в) при  $E_2=0$  и замкнутом ключе?

2. Определить число токов и их взаимосвязь в цепи (рис. 1.15) для двух положений ключа  $K$ : а) разомкнутом; б) замкнутом.



3. Приняв положительное направление обхода контуров в цепи рис. 1.15 по часовой стрелке, записать уравнения второго закона Кирхгофа: а) для контура  $ABB'A$  при разомкнутом ключе  $K$ ; б) для контуров  $ABB'A$  и  $AB'A$  при замкнутом ключе  $K$ .

4. Для цепи рис. 1.16 записать уравнения:

а) первого закона Кирхгофа для узлов  $A$  и  $B$ ; б) второго закона Кирхгофа для контуров  $ABB'A$ ,  $ABB'DA$  и  $AB'A$  (принять направление обхода контуров по часовой стрелке).

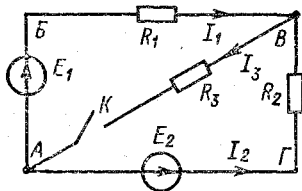


Рис. 1.15. К задаче 1

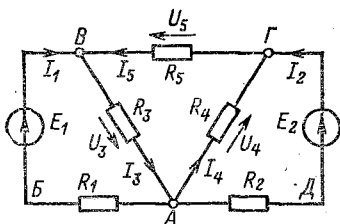


Рис. 1.16. К задаче 4

5. Записать уравнение баланса мощностей (в общем виде) для цепи рис. 1.15 при замкнутом ключе  $K$ .

6. В лаборатории электротехники на общем щите, от которого подводится электроэнергия ко всем рабочим столам, установлены амперметр, измеряющий общий ток всей цепи, и вольтметр, измеряющий напряжение на выводах цепи. По мере включения питания на рабочих столах амперметр показывал 1,5; 4; 6; 7,5; 10; 12 А. Показания вольтметра изменялись незначительно, и можно принять  $U=120$  В.

Вычислить эквивалентное сопротивление  $R$  всех потребителей лаборатории для указанных значений тока, составить схему замещения цепи, построить графики зависимостей тока и мощности всех потребителей от эквивалентного сопротивления внешней цепи. Полученные графики сравнить с показанными на рис. 1.6 и объяснить, в каких режимах (по соотношению  $R$  и  $R_{вт}$ ) находится рассматриваемая цепь.

7. Генератор с ЭДС  $E=220$  В по двухпроводной линии питает электрической энергией рабочий поселок. В течение суток ток в линии изменяется в пределах 20—200 А. Сопротивление проводов линии равно 0,1 Ом. Составить схему замещения цепи и вычислить эквивалентное сопротивление потребителя для значений тока 20, 50, 100, 150 и 200 А. Внутренним сопротивлением генератора пренебречь.

8. Для предыдущей задачи вычислить напряжение  $U$  и мощность  $P$  потребителя при указанных значениях тока; построить графики зависимостей этих величин от тока.

9. В условиях задачи 7 построить графики зависимости тока  $I$  и мощности потребителя  $P$  от отношения сопротивления потребителя  $R$

к сопротивлению линии  $R_{л}$ , т. е.

$$I = f(R/R_{л}) \text{ и } P = f(R/R_{л}).$$

10. Источник с ЭДС  $E=40$  В и внутренним сопротивлением  $R_{вт} = 400$  Ом (рис. 1.17) заменить эквивалентным источником тока, определить его параметры, а также токи во внутренней проводимости и сопротивлениях  $R_1$  и  $R_2$  ( $I_1$  и  $I_2$ ).

11. К идеальному источнику тока ( $J=20$  мА) присоединены параллельно два одинаковых сопротивления по 1000 Ом каждое. Определить токи в сопротивлениях, мощность и напряжение источника.

12. В условиях предыдущей задачи заменить источник тока эквивалентным источником ЭДС, приняв одно из сопротивлений нагрузки внутренним, и определить параметры источника, а также напряжение на его выводах и ток в одном из сопротивлений нагрузки. Сравнить результаты с полученными в предыдущей задаче.

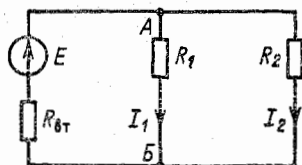


Рис. 1.17. К задаче 10

13. Выбрать резисторы (желательно однотипные) для сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$  (рис. 1.17), если между точками  $A$  и  $B$  цепи напряжение  $U_{AB} = 12$  В, а токи ветвей  $I_1=0,06$  А и  $I_2=0,03$  А.

14. Составить схему соединений для сборки (выполнения) цепи рис. 1.15, предусмотреть включение амперметров и вольтметра для из-

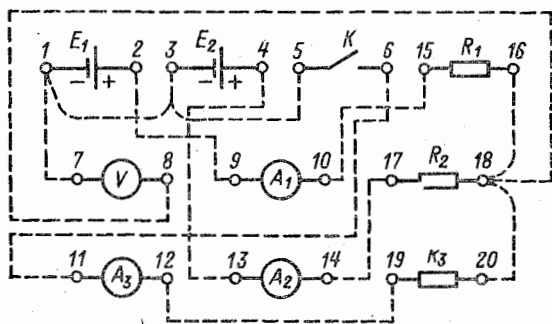


Рис. 1.18. К задаче 14

мерения токов  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  и узлового напряжения. Элементы цепи и нумерация их выводов приведены на рис. 1.18, где показаны аккумуляторы, обеспечивающие ЭДС  $E_1$  и  $E_2$ .

15. По заданным принципиальной схеме (рис. 1.16) и элементам

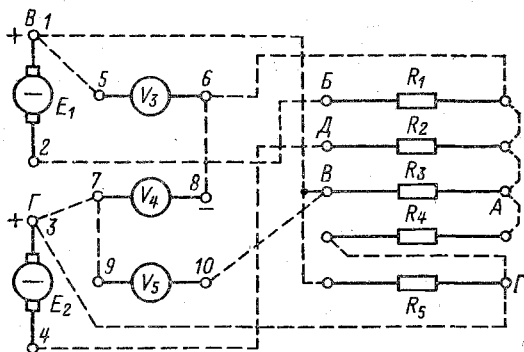


Рис. 1.19. К задаче 15

цепи рис. 1.19 составить схему соединений, предусмотрев включение вольтметров для измерения напряжений  $U_3$ ,  $U_4$ ,  $U_5$ .

## 1.6. ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ.1

1. а) Неразветвленная; б) сложная; в) разветвленная с одним источником питания.

2. а) Один ток  $I = I_1 = -I_2$ ; б) три тока;  $I_1 + I_2 - I_3 = 0$ .

3. а)  $E_1 - E_2 = R_1 I_1 + R_2 I_1$ , так как  $I_2 = -I_1$ ;

б)  $E_1 = R_1 I_1 + R_3 I_3$  и  $-E_2 = -R_3 I_3 - R_2 I_2$ .

4. а)  $-I_1 - I_2 + I_3 - I_4 = 0$ ;  $I_1 - I_3 + I_5 = 0$ ;

б)  $E_1 = R_1 I_1 - R_5 I_5 - R_4 I_4$ ;

$E_1 - E_2 = R_1 I_1 - R_5 I_5 - R_2 I_2$ ;

$0 = -R_3 I_3 - R_5 I_5 - R_4 I_4 = R_3 I_3 + R_5 I_5 + R_4 I_4$ .

5.  $E_1 I_1 + E_2 I_2 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2$ .

6.

$R$ , Ом	80	30	20	16	12	10
$P$ , Вт	180	480	720	900	1200	1440

Режимы  $R > R_{вт}$ , так как при практически постоянном напряжении источника питания надо считать  $R_{вт} \approx 0$ .

7.

$I, \text{ A}$	20	50	100	150	200
$R, \text{ Ом}$	10,9	4,3	2,1	1,37	1,0

8.

$I, \text{ A}$	20	50	100	150	200
$U, \text{ В}$	218	215	210	205	200
$P, \text{ кВт}$	4,36	10,75	21,0	30,75	40,0

9. Использовать два предыдущих ответа.

10. Параметры источника тока  $0,1 \text{ A}$  и  $2,5 \cdot 10^{-3} \text{ См}$ , токи  $0,05 \text{ A}$ ;  $0,025 \text{ A}$ ;  $0,025 \text{ A}$ .11.  $10 \text{ mA}$  (два тока);  $10 \text{ В}$ ;  $0,2 \text{ Вт}$ .12.  $20 \text{ В}$ ;  $1000 \text{ Ом}$ ;  $10 \text{ В}$ ;  $10 \text{ mA}$ .13. В  $R_1$  мощность рассеивания  $0,72 \text{ Вт}$ , а в  $R_2$  —  $0,36 \text{ Вт}$ ; выбираем  $R_1=200 \text{ Ом}$  — два резистора по  $400 \text{ Ом}$  ( $0,5 \text{ Вт}$ ) в параллель и  $R_2=400 \text{ Ом}$  ( $0,5 \text{ Вт}$ ).

14. Рисунок 1.18, соединения (один из вариантов) показаны пунктиром.

15. Рисунок 1.19, показан один из вариантов соединений (пунктиром).

## Глава вторая

### НЕРАЗВЕТВЛЕННАЯ ЦЕПЬ ПОСТОЯННОГО ТОКА

#### 2.1. ЦЕПЬ С ОДНИМ ИСТОЧНИКОМ ЭНЕРГИИ

##### Условие задачи

Электрическая цепь рис. 1.1, рассмотренная в предыдущей главе, имеет ток  $I=2,5 \text{ A}$ , сопротивления резисторов  $R_1=2,4 \text{ Ом}$ ;  $R_2=4,8 \text{ Ом}$ ;  $R_3=7,2 \text{ Ом}$  и внутреннее сопротивление аккумулятора  $R_{\text{вт}}=0,6 \text{ Ом}$ .

Заменить сопротивления резисторов эквивалентным, вычислить ЭДС аккумуляторной батареи и напряжение на ее выводах, а также мощность источника энергии, его КПД и мощности всех потребителей.

## Решение задачи

1. Эквивалентное сопротивление резисторов. Так как сопротивления  $R_1, R_2, R_3$  (рис. 1.1) соединены последовательно, то их эквивалентное сопротивление относительно выводов  $A$  и  $Ж$  источника питания

$$R_{АЖ} = R_1 + R_2 + R_3 \quad (2.1)$$

и при наших данных

$$R_{АЖ} = 2,4 + 4,8 + 7,2 = 14,4 \text{ Ом.}$$

Этим сопротивлением  $R_{АЖ}$  можно заменить сопротивления  $R_1, R_2, R_3$  (рис. 1.1) и получить эквивалентную (упрощенную) схему цепи (рис. 2.1) с таким же значением тока  $I = 2,5 \text{ А}$ .

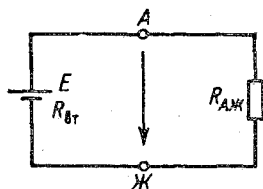


Рис. 2.1. Упрощенная схема цепи по рис. 1.1.

Равенство токов в обеих схемах дает право пользоваться эквивалентными заменами сопротивлений.

2. Вычисление ЭДС источника энергии и напряжения на его выводах. Для данной цепи (рис. 1.1)

была рассмотрена (§ 1.1) формула (1.6), которая с учетом (2.1) запишется

$$E = (R_{АЖ} + R_{вт}) I, \quad (2.2)$$

или  $E = (14,4 + 0,6) \cdot 2,5 = 37,5 \text{ В}$ .

Напряжение на выводах источника энергии можно определить из той же формулы (2.2), из которой следует

$$R_{АЖ} I = E - R_{вт} I.$$

Рассмотрим каждую часть полученного равенства. Его левая часть  $R_{АЖ} I = U = 14,4 \cdot 2,5 = 36 \text{ В}$  равна напряжению на сопротивлении  $R_{АЖ}$  (рис. 2.1) и одновременно напряжению на выводах  $A$  и  $Ж$  источника энергии. Это же напряжение определяется правой частью равенства, т.е. разностью ЭДС  $E$  и падения напряжения  $R_{вт} I = U_0$ :

$$E - R_{вт} I = 37,5 - 0,6 \cdot 2,5 = 36 \text{ В} = U.$$

Итак, напряжение на выводах источника энергии можно выразить либо разностью ЭДС и внутреннего падения напряжения, либо произведением тока в цепи на общее сопротивление внешнего участка.

3. Вычисление напряжений на выводах отдельных сопротивлений внешнего участка. Напряжения или падения напряжения на выводах сопротивлений  $R_1, R_2, R_3$  определяются по закону Ома:

$$U_1 = R_1 I = 2,4 \cdot 2,5 = 6,0 \text{ В};$$

$$U_2 = R_2 I = 4,8 \cdot 2,5 = 12,0 \text{ В};$$

$$U_3 = R_3 I = 7,2 \cdot 2,5 = 18,0 \text{ В}.$$

Их сумма  $U_1 + U_2 + U_3 = 6 + 12 + 18 = 36 \text{ В}$ , т.е.

$$U_1 + U_2 + U_3 = U. \quad (2.3)$$

4. Вычисление мощности и КПД. Составление баланса мощностей. Источник энергии развивает мощность

$$P_{\text{и}} = EI = 37,5 \cdot 2,5 = 93,75 \text{ Вт};$$

часть этой мощности

$$P_0 = U_0 I = 1,5 \cdot 2,5 = 3,75 \text{ Вт}$$

затрачивается внутри источника; следовательно, последний отдает во внешнюю цепь мощность

$$P = P_{\text{и}} - P_0 = 93,75 - 3,75 = 90 \text{ Вт}.$$

Эта же мощность определяется выражением

$$P = UI = 36 \cdot 2,5 = 90 \text{ Вт}.$$

Зная мощности  $P$  и  $P_{\text{и}}$ , определяем КПД источника энергии:

$$\eta = P/P_{\text{и}} = 90/93,75 = 0,96, \text{ или } 96\%.$$

Отдаваемая источником мощность  $P$  распределяется в сопротивлениях  $R_1, R_2$  и  $R_3$ :  $P_1 = U_1 I = 6 \cdot 2,5 = 15,0 \text{ Вт}$ , или эта же мощность  $P_1 = I^2 R_1 = 6,25 \cdot 2,4 = 15,0 \text{ Вт}$ ; аналогично  $P_2 = I^2 R_2 = 6,25 \cdot 4,8 = 30 \text{ Вт}$  и  $P_3 = I^2 R_3 = 6,25 \cdot 7,2 = 45 \text{ Вт}$ .

Убедимся в выполнении баланса мощностей, рассмотренного (§ 1.1) по формуле (1.9):

$$P_{\text{и}} = 93,75 \text{ Вт} = 3,75 + 15 + 30 + 45 \text{ Вт}.$$

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Как вычислить напряжение между точками Б и Ж цепи? Это напряжение (на рис. 1.1 показано пунктирной стрелкой) определим несколькими способами

ми. Используя закон Ома, имеем

$$U_{БЖ} = (R_2 + R_3) I = (4,8 + 7,2) \cdot 2,5 = 30 \text{ В.}$$

Это же напряжение  $U_{БЖ} = U_2 + U_3 = 12 + 18 = 30 \text{ В.}$

На практике часто применяется и другой путь решения, основанный на использовании уравнения (2.3). Применим его к нашим условиям  $U = U_1 + U_2 + U_3 = U_1 + U_{БЖ}$ , откуда  $U_{БЖ} = U - U_1 = 36 - 6 = 30 \text{ В.}$

2. Что покажут вольтметры (рис. 2.2, а) при обрыве в цепи сопротивления  $R_2$ ?

При обрыве в сопротивлении  $R_2$  или, например, его отсоединении от вывода В (рис. 2.2, а) цепь окажется разомк-

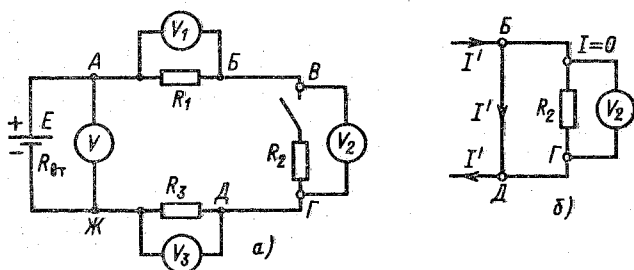


Рис. 2.2. Измерение напряжений при обрыве сопротивления и его коротком замыкании

нутой. Сопротивления вольтметров примем весьма большими по сравнению с сопротивлениями  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$ , что на практике обычно обеспечивается; при этом можно пренебречь током через вольтметр  $V_2$  (рис. 2.2, а) и во всех участках цепи тока не будет. При этом вольтметры  $V_1$  и  $V_3$  покажут нуль.

Вольтметр  $V$  показывает напряжение на выводах источника  $U$ , которое при отсутствии тока в цепи ( $I=0$ ) окажется равным  $U = E - R_{вт} I = E - R_{вт} \cdot 0 = E$ , т. е. этот вольтметр измерит ЭДС источника.

Вольтметр  $V_2$  показывает напряжение  $U_2 = U - U_1 - U_3 = U - 0 - 0 = U$ , т. е. этот вольтметр также показывает напряжение на выводах источника, равное в данном случае ЭДС  $E$ .

В этом же можно убедиться иначе. При полученных условиях  $U_1=0$  и  $U_3=0$ . Соответственно разности потенциалов  $V_A - V_B = U_1 = 0$  и  $V_\Gamma - V_\Delta = U_3 = 0$ , откуда следует, что  $V_B = V_A$  и  $V_\Gamma = V_\Delta$ , а разность потенциалов  $V_A - V_\Delta$

(напряжение  $U$ ) равна разности потенциалов  $V_B - V_G$  (напряжение  $U_2$ ), т. е.  $U = U_2$ .

3. Как изменятся показания приборов при замыкании выводов  $B$  и  $D$  (рис. 2.2, б)? Короткое замыкание участка цепи между точками  $B$  и  $D$  может возникнуть либо при непосредственном замыкании (касании металлических частей) выводов  $B$  и  $D$ , либо при соединении этих выводов проводником (рис. 2.2, б), сопротивление которого очень мало (близко к нулю):  $R_{BD} = 0$ .

В результате замыкания ток в цепи

$$I' = \frac{E}{R_{вт} + R_{AJ}} = \frac{E}{R_{вт} + R_1 + R_{BD} + R_3} = \\ = \frac{37,5}{0,6 + 2,4 + 7,2} = 3,68 \text{ А} > I = 2,5 \text{ А}.$$

Между выводами  $B$  и  $D$  этот ток целиком пройдет по проводнику, не оказывающему сопротивления току. Тока в сопротивлении  $R_2$  не будет, т. е. падение напряжения на сопротивлении  $R_2$  будет равно нулю и вольтметр  $V_2$  покажет нуль, поэтому показания вольтметров  $V_1$  и  $V_3$  возрастут. Напряжение на выводах источника  $U = E - R_{вт}I'$  уменьшится, так как ток увеличился.

4. Где практически применяются последовательные соединения? Любая электрическая цепь с одним источником энергии представляет собой последовательное соединение источника и внешнего участка цепи. В этом смысле последовательные соединения очень распространены.

Однако потребители энергии, образующие внешний участок цепи, редко соединяются последовательно. Серьезным недостатком такого соединения является нарушение работы всех потребителей при повреждении одного из них (как было показано для случая обрыва сопротивления  $R_2$ ). Поэтому последовательное соединение потребителей применяется главным образом в тех случаях, когда напряжение источника энергии превышает номинальное (рабочее) напряжение потребителей, например при соединении ламп в вагонах трамвая.

5. Какова надежность работы цепи (рис. 1.1), если сопротивления  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  — резисторы, выполненные как проволочные эмалированные и рассчитанные на мощность 50 Вт, а их номинальные значения имеют допуск  $\pm 10\%$ ? Если все сопротивления окажутся с наименьши-



ми возможными значениями (допуск  $-10\%$ ), то с точки зрения надежности установится наиболее неблагоприятный режим в цепи.

Действительно, при этом эквивалентное сопротивление цепи  $R=0,9(R_1+R_2+R_3)=12,96$  Ом имеет наименьшее значение из всех возможных, ток

$$I = E/(R_{вт} + R) = 37,5/(0,6 + 12,96) = 2,76 \text{ А}$$

и мощность в самом большом по значению сопротивлении  $R_3$

$$P_3 = I^2 R_3 = (2,76)^2 \cdot 7,2 = 55 \text{ Вт} > 50 \text{ Вт}.$$

Оказывается, в сопротивлении  $R_3$  превышен предел допустимой мощности, и оно может перегореть.

Как сделать надежность работы всех резисторов одинаковой? Поскольку ток в рассматриваемой цепи имеет одно и то же значение для всех участков, а мощность пропорциональна квадрату тока и сопротивлению, одинаковая надежность обеспечивается, если допустимые мощности пропорциональны значениям сопротивлений.

## 2.2. ЦЕПЬ С НЕСКОЛЬКИМИ ЭДС. ИСТОЧНИКИ ЭНЕРГИИ В РЕЖИМАХ «ГЕНЕРАТОРА» И «ПОТРЕБИТЕЛЯ»

### Условие задачи

Аккумуляторная батарея с внутренним сопротивлением  $R_{вт2}=0,05$  Ом в разряженном (начальном) состоянии имеет ЭДС  $E_{2нач}=18$  В. Она заряжается при токе  $I=8$  А от генератора постоянного тока с внутренним сопротивлением  $R_{вт1}=0,75$  Ом и ЭДС  $E_1=122$  В в цепи (рис. 2.3), где постоянное сопротивление  $R_1=8$  Ом, а  $R_2$  — регулируемое сопротивление; ЭДС аккумуляторной батареи в конце заряда  $E_{2кон}=26$  В.

Определить режимы источников энергии и необходимое сопротивление  $R_2$  в начале и в конце зарядки аккумуляторной батареи.

### Решение задачи

1. Характеристика цепи. Данная цепь (рис. 2.3), так же как и предыдущая (рис. 1.1), является неразветвленной или одноконтурной. Но в отличие от предыдущей она содержит два источника энергии и работает при неизменном токе  $I$ , что обеспечивается регулировкой пе-

ременного сопротивления  $R_2$  (рис. 2.3). К такому режиму обычно стремятся при зарядке аккумуляторных батарей. В общем случае цепи с несколькими источниками энергии могут работать при различных токах.

2. Применение метода наложения к вычислению тока. По методу наложения ток в цепи мо-

Рис. 2.3. Схема зарядки аккумуляторной батареи

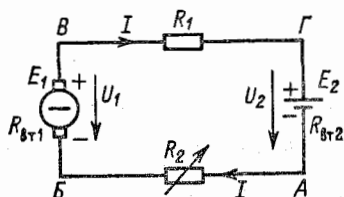
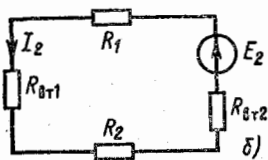
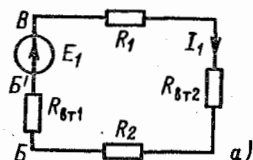


Рис. 2.4. Схема цепи по рис. 2.3 после исключения  $E_2$  (а) или  $E_1$  (б)



жно определить как алгебраическую сумму токов, созданных каждым источником в отдельности.

Как это сделать?

Оставим вначале в схеме только одну ЭДС, например  $E_1$  (рис. 2.4, а), и найдем создаваемый ею ток

$$I_1 = E_1 / \Sigma R,$$

где  $\Sigma R$  — сумма сопротивлений цепи, т.е. в нашем случае  $\Sigma R = R_{вт1} + R_1 + R_2 + R_{вт2}$ . Затем оставим в схеме только вторую ЭДС  $E_2$  (рис. 2.4, б) и определим ток:

$$I_2 = E_2 / \Sigma R.$$

Токи  $I_1$  и  $I_2$  (рис. 2.4, а, б) иногда называются частичными токами, так как они составляют части тока, создаваемого одновременным действием двух ЭДС (рис. 2.3). Поскольку частичные токи  $I_1$  и  $I_2$  направлены навстречу друг другу, ток в заданной цепи

$$I = I_1 - I_2 = (E_1 - E_2) / \Sigma R.$$

Итак, в неразветвленной цепи с несколькими источниками ток равен отношению алгебраической суммы ЭДС к общему сопротивлению цепи.

3. Режимы источников. Если ЭДС источника имеет одинаковое направление с током (в нашем случае ЭДС  $E_1$ ), то такой источник называют согласно включенным или работающим «в режиме генератора». Напряжение на выводах такого источника (рис. 2.3, между точками В и Б)  $U_1 = E_1 - R_{вт1}I$ , или в наших условиях  $U_1 = 122 - 0,75 \cdot 8 = 116$  В.

Если ЭДС источника направлена противоположно току (в нашем случае ЭДС  $E_2$ ), то такой источник называется встречно включенным. Этот источник уменьшает ток в цепи (ток  $I$  меньше частичного тока  $I_1$ ) и находится «в режиме приемника энергии». Напряжение на выводах такого источника (рис. 2.3, между точками Г и А)  $U_2 = E_2 + R_{вт2}I$ .

Для заданной аккумуляторной батареи в начале зарядки напряжение  $U_{2нач} = 18 + 0,05 \cdot 8 = 18,4$  В, а в конце зарядки напряжение  $U_{2кон} = 26 + 0,05 \cdot 8 = 26,4$  В.

*Итак, у источника в режиме генератора напряжение на выводах меньше ЭДС, а в режиме приемника больше ЭДС на внутреннее падение напряжения  $R_{вт}I$ .*

4. Вычисление пределов изменения сопротивления  $R_2$ . Как было показано выше, ток в цепи  $I = (E_1 - E_2) / \Sigma R$ , откуда  $\Sigma R = (E_1 - E_2) / I$ . В начале зарядки необходимо сопротивление

$$(\Sigma R)_{нач} = \frac{E_1 - E_{2нач}}{I} = \frac{122 - 18}{8} = 13 \text{ Ом,}$$

или

$$R_{2нач} = (\Sigma R)_{нач} - (R_{вт1} + R_{вт2} + R_1) = 13 - 8,8 = 4,2 \text{ Ом.}$$

Аналогично в конце зарядки

$$(\Sigma R)_{кон} = \frac{E_1 - E_{2кон}}{I} = \frac{122 - 26}{8} = 12 \text{ Ом,}$$

или

$$R_{2кон} = (\Sigma R)_{кон} - (R_{вт1} + R_{вт2} + R_1) = 12 - 8,8 = 3,2 \text{ Ом.}$$

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Как учитывается режим источника энергии при составлении баланса мощностей? Отдает энергию в цепь источник, работающий в режиме генератора. Источник, работающий в режиме потребителя (в нашем случае аккумуляторная батарея), причисляется к другим потребителям. Действительно, для рассматриваемой цепи (рис. 2.3) мощность, отдаваемая генератором, на-

пример в начале зарядки,  $P_1 = U_1 I = 116 \cdot 8 = 928$  Вт равна мощности всех потребителей в этом же режиме:

$$\begin{aligned} P_{R_1} + P_{R_2} + P_2 &= R_1 I^2 + R_{2\text{нач}} I^2 + U_2 I = \\ &= 8 \cdot 64 + 4,2 \cdot 64 + 18,4 \cdot 8 = 928 \text{ Вт.} \end{aligned}$$

2. Как изменятся (увеличатся или уменьшатся) напряжения генератора и аккумулятора в режиме холостого хода? Такой режим может возникнуть, например, при отключении генератора или аккумулятора от цепи рис. 2.3. В этом случае тока в источниках не будет и их напряжения окажутся равными своим ЭДС, т.е.  $U_1 = E_1$ , а  $U_2 = E_2$ . Поскольку первый источник работает в режиме генератора ( $E_2 > U_1$ ), а второй — в режиме приемника ( $E_2 < U_2$ ), напряжение генератора возрастет, а аккумулятора уменьшится.

3. Каким эквивалентным потребителем можно заменить аккумуляторную батарею? Так как аккумуляторная батарея работает в режиме приемника, то ее можно заменить эквивалентным сопротивлением батареи

$$R'_2 = P_2 / I^2 = U_2 I / I^2 = U_2 / I$$

или в начале зарядки

$$R'_{2\text{нач}} = U_{2\text{нач}} / I = 18 / 8 = 2,3 \text{ Ом.}$$

Важно подчеркнуть, что  $R'_2$  — не внутреннее сопротивление аккумулятора (электролита), а эквивалентное сопротивление, заменяющее аккумулятор как потребитель энергии. Очевидно, что  $R'_{2\text{нач}}$  является эквивалентным сопротивлением для определенного режима работы аккумуляторной батареи, а именно для начала зарядки.

4. Как определить ток в неразветвленной цепи с несколькими источниками энергии (рис. 2.5)? Для этого надо сначала определить сумму ЭДС  $E_1 + E_5$ , действующих в одном направлении (по направлению движения часовой стрелки) и создающих частичные токи  $I_1$  и  $I_5$  одного направления. Затем определить сумму ЭДС  $E_2 + E_3 + E_4$ , действующих в обратном направлении и создающих частичные токи  $I_2$ ,  $I_3$  и  $I_4$ .

Если окажется  $E_1 + E_5 > E_2 + E_3 + E_4$ , то направление тока  $I$  в цепи будет совпадать с направлением суммарной ЭДС  $E_1 + E_5$  (такой случай выбран на рис. 2.5). При обратном соотношении ЭДС ток имеет обратное направление.

Поскольку каждый частичный ток ( $I_1—I_5$ ) равен отношению соответствующей ЭДС ( $E_1—E_5$ ) к общему сопротивлению цепи, ток в цепи рис. 2.5

$$I = \frac{(E_1 + E_5) - (E_2 + E_3 + E_4)}{\Sigma R},$$

где

$$\Sigma R = R_{вт1} + R_1 + R_{вт2} + R_{вт3} + R_2 + R_{вт4} + R_3 + R_{вт5} + R_4.$$

5. Могут ли несколько источников энергии, включенных в одну цепь, работать в режиме генератора и

несколько — в режиме приемника? В цепи рис. 2.5 при условии  $E_1 + E_5 > E_2 + E_3 + E_4$  два источника ( $E_1$  и  $E_5$ ) работают в режиме генератора, а остальные три источника — в режиме приемника.

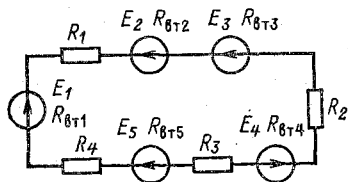


Рис. 2.5. Неразветвленная цепь с несколькими источниками ЭДС

6. Почему для зарядки аккумуляторов желательно вы-

брать источник с внутренним сопротивлением, во много раз большим эквивалентного сопротивления аккумулятора? Если внутреннее сопротивление генератора во много раз больше сопротивления присоединенной к нему внешней цепи (в данном случае эквивалентного сопротивления заряжающегося аккумулятора), то генератор работает в режиме источника тока (§ 1.3). Такой режим обеспечивает постоянство тока в цепи (не нужно его регулировать) в процессе зарядки аккумулятора.

Для зарядки аккумуляторов часто применяют выпрямители (преобразуют переменный ток в постоянный), у которых сравнительно большое внутреннее сопротивление. Эти устройства удобны еще и тем, что питаются от сети переменного тока, которая имеется практически повсеместно.

### 2.3. ПОТЕНЦИАЛЫ ТОЧЕК ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ДИАГРАММА

#### Условие задачи

Вычислить потенциалы всех точек цепи рис. 2.3 и построить потенциальную диаграмму при числовых данных, полученных в § 2.2 для режима конца зарядки.

## Решение задачи

1. Потенциал точки электрической цепи. Потенциал относится к числу таких величин, которые зависят от выбора точки отсчета, т. е. от точки с нулевым значением. К таким величинам относится, например, температура (как известно, имеется несколько температурных шкал с разными нулевыми точками).

Поэтому в ряде случаев удобно считать, что в цепи существует точка с потенциалом, равным нулю, например точка  $A$  (рис. 2.3). Такую точку обозначают, как показано на рис. 2.7, и иногда присоединяют к заземляющему установочному проводу или к корпусу прибора.

В этом случае между точками  $\Gamma$  и  $A$  (рис. 2.3) разность потенциалов или напряжение  $U_{\Gamma A} = V_{\Gamma} - V_A = V_{\Gamma}$ , так как мы приняли для точки  $A$  ее потенциал  $V_A = 0$ .

Таким образом, потенциал какой-либо точки  $\Gamma$  цепи равен напряжению ( $U_{\Gamma A}$ ) между этой точкой  $\Gamma$  и точкой  $A$ , для которой потенциал принят равным нулю.

2. Определение знаков потенциалов. Рассмотрим два вида участков цепи: во-первых, участок, содержащий только сопротивление (например, участок  $AB$ , рис. 2.3). Знаки потенциалов на границах такого участка (точек  $A$  и  $B$ ) определяются по направлению тока. Известно, что ток в сопротивлении направлен от точки большего потенциала к точке меньшего потенциала. Соответственно для указанного участка  $V_A > V_B$ . Но  $V_A - V_B = U_{AB} = R_2 I$ , откуда  $V_B = V_A - U_{AB}$ , или при  $V_A = 0$  имеем  $V_B = -U_{AB} = -R_2 I$ ; во-вторых, участок, содержащий только ЭДС (например, на рис. 2.4,  $a$  участок  $B'B$ ). В этом случае знаки потенциалов определяются по направлению ЭДС источника. Потенциал вывода «+» источников всегда (при любом токе) больше потенциала вывода «-», т. е. для указанного участка цепи  $V_B > V_{B'}$ . Но  $V_B - V_{B'} = E_1$ , откуда  $V_B = V_{B'} + E_1$ .

3. Вычисление потенциалов. Для точки  $A$  (рис. 2.3) принят потенциал  $V_A = 0$ . При этом условии, как было показано, потенциал точки  $B$  определяется выражением  $V_B = -R_2 I$ , или при наших данных, полученных в § 2.2 (режим конца зарядки аккумулятора), имеем

$$V_B = -R_{2\text{кон}} I = -3,2 \cdot 8 = -25,6 \text{ В.}$$

Для определения потенциала другой точки цепи, например  $B$ , воспользуемся уже вычисленным потенциалом  $V_B =$

$= -25,6$  В и известным напряжением на выводах участка  $BB$ , т. е. напряжением  $U_1$  (рис. 2.3). Это напряжение было вычислено в предыдущей задаче:  $U_1 = 116$  В.

Так как точка  $B$  находится на выводе «+» генератора, то ее потенциал  $V_B > V_B$ . Поэтому имеем

$$V_B = V_B + U_1 = -25,6 + 116 = 90,4 \text{ В.}$$

Зная потенциал  $V_B = 90,4$  В, вычисляем теперь потенциал  $V_\Gamma$  следующей точки  $\Gamma$ . Так как ток в сопротивлении  $R_1$  направлен от точки  $B$  к точке  $\Gamma$ , то их потенциалы связаны неравенством  $V_\Gamma < V_B$ , поэтому  $V_\Gamma = V_B - R_1 I = 90,4 - 8 \cdot 8 = 26,4$  В.

В целях проверки расчетов найдем потенциал точки  $A$ , используя известный потенциал  $V_\Gamma = 26,4$  В и вычисленное (в § 1.2) напряжение между точками  $\Gamma$  и  $A$ , т. е. напряжение  $U_{2\text{кон}} = 26,4$  В. При этом, учитывая, что  $V_A < V_\Gamma$ , получаем

$$V_A = V_\Gamma - U_{2\text{кон}} = 26,4 - 26,4 = 0.$$

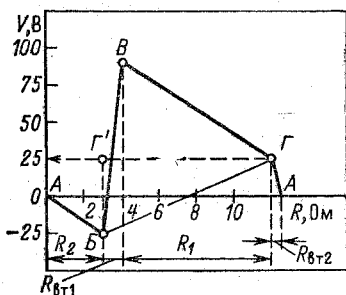


Рис. 2.6. Потенциальная диаграмма цепи по рис. 2.3

4. Построение потенциальной диаграммы. По вычисленным значениям потенциалов различных точек цепи построим потенциальную диаграмму (рис. 2.6).

По оси  $X$  (или  $R$ ) откладываем сопротивления всех участков ( $R_2, R_{B\Gamma 1}, R_1, R_{B\Gamma 2}$ ). Они расположены одно за другим в той же последовательности, как и в рассмотренной цепи рис. 2.3.

Так как ось  $R$  представляет собой как бы линейную развертку сопротивлений замкнутого контура, то в начале и в конце этой оси оказывается одна и та же точка  $A$ .

По оси  $Y$  (или  $V$ ) отложены потенциалы точек с учетом их знака: положительные потенциалы вверх, а отрицательные вниз от оси  $R$ .

Рассмотрим построение диаграммы для нескольких участков цепи. Так, например, для участка  $AB$  были получены потенциалы крайних точек  $V_A = 0$  и  $V_B = -25,6$  В. Это озна-

чает, что на участке  $AB$  (рис. 2.3) потенциал убывает от 0 до  $-25,6$  В; это изображено линией  $AB$  на рис. 2.6.

На участке  $BB$  (рис. 2.3), где включен источник энергии с малым внутренним сопротивлением  $R_{вт1} = 0,75$  Ом, линия потенциала  $BB$  (рис. 2.6) располагается к оси  $R$  под углом, близким к  $90^\circ$ .

Аналогично построены два других участка потенциальной диаграммы  $BГ$  и  $ГА$ . Заметим, что линии  $AB$  и  $BГ$  параллельны, так как по сопротивлениям  $R_2$  и  $R_1$  проходит один и тот же ток.

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Как вычислить напряжение между точками  $B$  и  $Г$  цепи рис. 2.3? Это напряжение  $U_{БГ}$  легко вычислить по известным потенциалам точек  $B$  и  $Г$ :

$$V_{БГ} = V_B - V_Г = -25,6 - 26,4 = -52 \text{ В.}$$

Его же можно найти графически, используя потенциальную диаграмму рис. 2.6, где отрезок  $ГБ$  определяет напряжение  $U_{ГБ}$ .

2. Как повлияет на вид потенциальной диаграммы выбор другой точки с нулевым потенциалом? Разности потенциалов (напряжения) на участках цепи не изменятся, так как они определяются только ЭДС, сопротивлениями и токами (не зависят от выбора точки нулевого потенциала).

Действительно, если принять  $V_Г = 0$  (рис. 2.3), что равносильно перемещению оси  $R$  в точку  $Г$  (рис. 2.6, пунктирная прямая  $ГГ'$ ), то потенциалы всех точек уменьшатся на  $V_Г = 26,4$  В, а разности потенциалов останутся прежними. *Итак, выбор другой точки нулевого потенциала приводит к перемещению оси  $R$ .*

3. Как вычислить потенциалы точек незамкнутого участка цепи  $АГ$  рис. 2.7? В незамкнутом участке цепи тока нет ( $I = 0$ ). Принимая  $V_A = 0$ , для участка  $AB$  получаем  $V_B = V_A + E_1 = E_1$ . Между точками  $B$  и  $B$  напряжение

$$U_{БВ} = V_B - V_B = RI = R \cdot 0 = 0,$$

откуда  $V_B = V_B = E_1$ .

Потенциал точки  $Г$ , находящейся на выводе «—» источ-

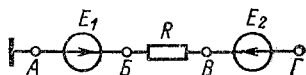


Рис. 2.7. Незамкнутый участок цепи



ника, меньше потенциала точки В, поэтому

$$V_{\Gamma} = V_B - E_2 = E_1 - E_2.$$

Таким образом, изменение потенциала в незамкнутом участке цепи происходит только в местах, где включены источники.

4. Можно ли выбрать потенциал, равный нулю (заземлить), одновременно у нескольких точек цепи? Допущение о равенстве потенциалов нескольких точек цепи предполагает отсутствие напряжения между ними. Если такого условия нет, то его можно создать, например, замыканием накоротко этих точек (их объединение проводником, сопротивлением которого можно пренебречь). Однако такое действие означает изменение схемы и режима цепи, что нарушает условия ее работы.

Таким образом, в общем случае потенциал только одной точки можно выбрать любым, в частности равным нулю (заземлить).

#### 2.4. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

16. Источник с ЭДС  $E=60$  В и внутренним сопротивлением  $R_{вт} = 0,2$  Ом включен последовательно с четырьмя сопротивлениями:  $R_1 = 1$  Ом,  $R_2 = R_3 = 4$  Ом и  $R_4 = 0,8$  Ом. Составить электрическую схему и определить ток в цепи, падения напряжения на всех сопротивлениях, напряжение на выводах источника, а также мощности, развиваемую и отдаваемую источником, и мощности всех потребителей.

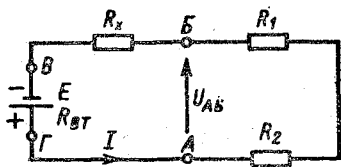


Рис. 2.8. К задаче 17

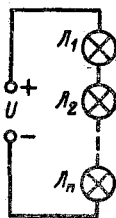


Рис. 2.9. К задаче 18

17. В электрической цепи рис. 2.8 определить  $R_x$ , если  $E=12$  В,  $R_1=1,6$  Ом,  $R_2=1,8$  Ом, а ток в цепи  $I=3$  А. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

18. Одна из  $n$  электрических лампочек (рис. 2.9) перегорела, и все

лампы погасли. Лампы имеют баллоны из матового стекла, сквозь которые нити ламп не видны. Как обнаружить перегоревшую лампу при помощи вольтметра?

19. Как отыскать перегоревшую лампочку при тех же условиях, что и в предыдущей задаче, но при отсутствии электроизмерительных приборов?

20. Выбрать допустимые мощности для трех последовательно соединенных сопротивлений 10, 15 и 20 Ом, обеспечив 1,5-кратный запас надежности, если напряжение на выходах первого сопротивления 2,5 В.

21. Определить напряжение  $U_{AB}$  на выводах сопротивления  $R_x$  (рис. 2.8) и сопротивление  $R_x$ , если  $E=50,4$  В;  $U_{AB}=24$  В и  $R_{вт}=2$  Ом, а ток в цепи  $I=1,2$  А.

22. В электрической цепи (рис. 2.10)  $U=120$  В,  $U_{AB}=75$  В,  $R_1=9$  Ом и  $R_2=R_3$ . Определить падения напряжения  $U_1$ ,  $U_2$  и  $U_3$ , а также сопротивление  $R_2$ .

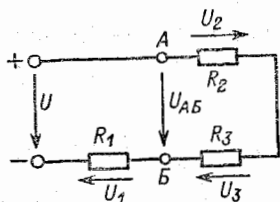


Рис. 2.10. К задаче 22

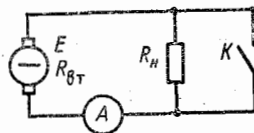


Рис. 2.11. К задаче 23

23. Амперметр показывает 5 А при разомкнутом ключе  $K$  (рис. 2.11) и 50 А при замкнутом (ток короткого замыкания). Определить отношение внутреннего сопротивления источника к сопротивлению нагрузки  $R_n$ .

24. В электрической цепи рис. 2.12 при замкнутом ключе вольтметр показывает 18 В, а при разомкнутом 56 В. Определить внутреннее сопротивление источника, если  $R_1=54$  Ом,  $R_2=18$  Ом,  $R_3=36$  Ом,

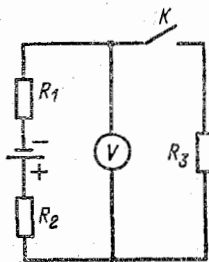


Рис. 2.12. К задаче 24

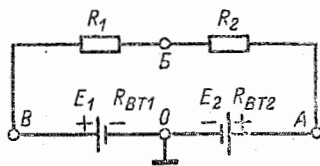


Рис. 2.13. К задаче 27

25. Аккумуляторная батарея из 60 элементов емкостью 360 А·ч заряжается в течение 8 ч от генератора постоянного тока напряжением 220 В. Определить ток зарядки и пределы изменения сопротивления реостата, обеспечивающего неизменный ток зарядки, если ЭДС каждого элемента в начале зарядки равна 1,8 В, а в конце 2,7 В. Внутренним сопротивлением аккумуляторов пренебречь.

26. К выпрямителю с внутренним сопротивлением 4 Ом напряжением на выходах  $U=60$  В (при токе 5 А) присоединена через реостат аккумуляторная батарея. Ток в начале и в конце зарядки равен соответственно 5 и 2 А, а сопротивление реостата 4,8 и 9,0 Ом. Вычислить напряжение на выводах аккумуляторной батареи и составить баланс мощностей для режимов начала и конца зарядки.

27. В электрической цепи рис. 2.13 определить ток и напряжения на участках, а также мощности источников и потребителей; составить баланс мощностей. Дано:  $E_1=48$  В;  $E_2=24$  В;  $R_1=10$  Ом;  $R_2=28$  Ом;  $R_{вт1}=R_{вт2}=1$  Ом. Определить режим работы источников.

28. В условиях предыдущей задачи определить ЭДС и внутреннее сопротивление одного (эквивалентного) источника питания, который обеспечит такой же ток в цепи.

29. Построить потенциальную диаграмму для цепи, рассмотренной в задаче 12.

30. Как изменятся (увеличатся или уменьшатся) показания вольтметров (рис. 2.14) при размыкании ключа  $K$ , если  $E_1=24$  В,  $E_2=60$  В,  $E_3=12$  В.

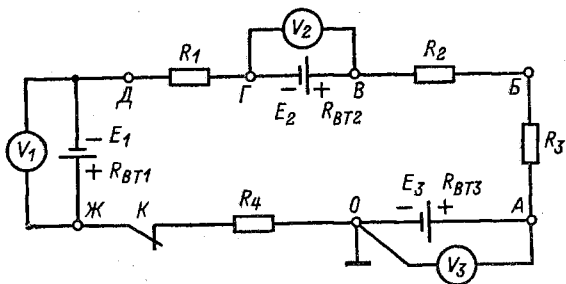


Рис. 2.14. К задачам 30 и 31

31. В схеме рис. 2.14 вычислить потенциалы всех обозначенных точек и построить потенциальные диаграммы для всех случаев обхода контура (по направлению движения часовой стрелки и в обратном направлении), если  $E_1=E_2=12$  В;  $E_3=30$  В;  $R_1=R_2=9$  Ом;  $R_{вт1}=2$  Ом;  $R_{вт2}=R_{вт3}=0$ ;  $R_3=R_4=20$  Ом; ключ  $K$  замкнут (как показано на схеме).

32. Вычислить потенциалы всех обозначенных на схеме точек и построить потенциальную диаграмму для цепи, рассмотренной в предыдущей задаче, при разомкнутом ключе  $K$ .

## 2.5. ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ. 2

16. 6А; 1,2 В; 6 В; 24 В; 24 В; 4,8 В; 58,8 В; 360 Вт; 352,8 Вт; 36 Вт; 144 Вт; 144 Вт; 28,8 Вт.

17. 0,6 Ом.

18. На выводах перегоревшей лампы вольтметр покажет напряжение  $U$ , а на остальных — нуль.

19. Замыкать проводником поочередно каждую лампочку, пока не зажгутся все остальные.

20. 0,94 Вт (1 Вт); 1,4 Вт (1,5 Вт); 1,87 Вт (2,0 Вт).

21. 24 В; 20 Ом.

22. 45 В; 37,5 В; 37,5 В; 7,5 Ом.

23.  $R_{вт} : R_n = 1 : 9$ .

24. 4 Ом.

25. 45 А; от 2,45 до 1,29 Ом.

26. 36 В; 54 В;  $400 = 180 + 220$  (Вт);  $160 = 108 + 52$  (Вт).

27. 0,6 А; 24,6 В; 16,8 В; 47,4 В; 14,76 Вт; 10,08 Вт; 3,6 В; 28,8 Вт;  $E_1$  — источник,  $E_2$  — потребитель.

28. 24 В; 2 Ом.

29.  $V_A = 24,6$  В;  $V_B = 47,4$  В;  $V_C = 41,4$  В.

30.  $U_2$  увеличится,  $U_1$  и  $U_3$  уменьшатся.

31.  $V_A = 30$  В;  $V_B = 20$  В;  $V_C = 15,5$  В;  $V_D = 3,5$  В;  $V_E = -1,0$  В;  $V_{Ж} = 10$  В.

32.  $V_A = V_B = V_C = 30$  В;  $V_D = V_E = 28$  В;  $V_{Ж} = 30$  В.

## Глава третья

### РАЗВЕТВЛЕННАЯ ЦЕПЬ ПОСТОЯННОГО ТОКА С ОДНИМ ИСТОЧНИКОМ ЭНЕРГИИ

#### 3.1. ЦЕПЬ С ДВУМЯ УЗЛАМИ. РАСЧЕТ ЦЕПИ

##### Условие задачи

В цепи рис. 1.2, рассмотренной в § 1.1, сопротивления  $R_1 = 18$  Ом,  $R_2 = 100$  Ом,  $R_3 = 150$  Ом, источник с ЭДС  $E = 120$  В и внутренним сопротивлением  $R_{вт} = 2$  Ом.

Вычислить токи во всех участках цепи, напряжения на выводах потребителей и источника, а также мощности источника и всех потребителей (ключ  $K$  считать замкнутым).

## Решение задачи

1. Упрощение схемы цепи. Вычисление общего тока. К чему мы должны стремиться, упрощая схему? Наша задача — получить простую неразветвленную цепь, расчет которой уже известен.

Для этого заменим сопротивления  $R_2$  и  $R_3$  их общим сопротивлением:

$$R_{2,3} = R_2 R_3 / (R_2 + R_3) = 100 \cdot 150 / (100 + 150) = 60 \text{ Ом.}$$

После такой замены получается простая неразветвленная цепь рис. 3.1, для которой ток

$$I_1 = E / (R_{вт} + R_1 + R_{2,3}) = 120 / (2 + 18 + 60) = 1,5 \text{ А.}$$

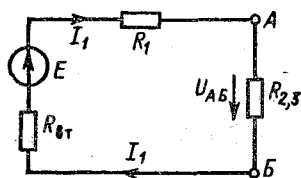


Рис. 3.1. Упрощенная схема цепи

Имея общий ток цепи  $I_1$ , находим токи ветвей  $I_2$  и  $I_3$ , что можно выполнить двумя способами. Покажем их (пп. 2 и 3).

2. Вычисление токов ветвей по распределению общего тока между ветвями. С одной стороны, по первому закону Кирхгофа

$$I_2 + I_3 = I_1 \quad (3.1)$$

или

$$I_2 + I_3 = 1,5 \text{ А.} \quad (3.2)$$

С другой стороны, в параллельных ветвях токи обратно пропорциональны сопротивлениям ветвей, или

$$I_2 / I_3 = R_3 / R_2 = 150 / 100 = 1,5 \quad (3.3)$$

(так как  $U_{AB} = R_2 I_2 = R_3 I_3$ ), откуда

$$I_2 = 1,5 I_3. \quad (3.4)$$

Заменив в (3.2) ток  $I_2$  его значением из (3.4), получим

$$1,5 I_3 + I_3 = 1,5, \text{ или } I_3 = 1,5 / 2,5 = 0,6 \text{ А.}$$

При этом ток другой ветви из (3.2)

$$I_2 = 1,5 - I_3 = 1,5 - 0,6 = 0,9 \text{ А.}$$

3. Вычисление токов ветвей по узловому напряжению  $U_{AB}$  (рис. 1.2). Это напряжение опреде-

лим по упрощенной схеме цепи рис. 3.1, где

$$U_{AB} = R_{2,3} I_1 = 60 \cdot 1,5 = 90 \text{ В.}$$

Рассматривая исходную схему рис. 1.2, убеждаемся, что найденное напряжение  $U_{AB}$  действует на обоих сопротивлениях  $R_2$  и  $R_3$  и потому токи в этих сопротивлениях

$$I_2 = U_{AB} / R_2 = \frac{90}{100} = 0,9 \text{ А;}$$

$$I_3 = U_{AB} / R_3 = \frac{90}{150} = 0,6 \text{ А.}$$

4. Вычисление напряжений. В цепи рис. 1.2 на сопротивлениях  $R_1$  и  $R_{вт}$  имеем

$$U_1 = R_1 I_1 = 18 \cdot 1,5 = 27 \text{ В.}$$

$$U_0 = R_{вт} I_1 = 2 \cdot 1,5 = 3 \text{ В}$$

и напряжение на выводах ВГ источника

$$U = E - U_0 = 120 - 3 = 117 \text{ В.}$$

Как проверить, правильно ли сделаны вычисления напряжений? Для этого воспользуемся вторым законом Кирхгофа, согласно которому (§ 1.1) в замкнутом контуре электрической цепи алгебраическая сумма ЭДС ( $\Sigma E$ ) равна алгебраической сумме падений напряжений на всех сопротивлениях ( $\Sigma RI = \Sigma U$ ).

В нашем случае сумма ЭДС равна  $E = 120$  В, поскольку в цепи действует только один источник. Сумма падений напряжений  $U_0 + U_1 + U_{AB} = 3 + 27 + 90 = 120$  В. Итак, действительно,  $\Sigma E = \Sigma U$ .

5. Вычисление мощности. Мощность, развиваемая источником,  $P_{и} = EI_1 = 120 \cdot 1,5 = 180$  Вт. Потеря мощности во внутреннем сопротивлении  $P_0 = R_{вт} (I_1)^2 = 2(1,5)^2 = 4,5$  Вт. Следовательно, источник отдает во внешнюю цепь мощность

$$P = P_{и} - P_0 = 180 - 4,5 = 175,5 \text{ Вт.}$$

Можно иначе вычислить эту мощность:

$$P = UI_1 = 117 \cdot 1,5 = 175,5 \text{ Вт.}$$

С другой стороны,

$$P = R_1 I_1^2 + R_{2,3} I_1^2 = (R_1 + R_{2,3}) I_1^2 = (18 + 60) \cdot 1,5^2 = 175,5 \text{ Вт.}$$

Как проверить, правильно ли сделан расчет цепи?

Для этого следует составить баланс мощностей. Мощ-

ность, отдаваемая источником,  $P_{и} - P_0 = 175,5$  Вт, и мощность потребителей  $P = 175,5$  Вт, т. е. баланс сходится.

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Как получить формулу распределения общего тока между параллельно соединенными ветвями? Найдем из уравнения (3.3) ток  $I_3 = I_2(R_2/R_3)$  и подставим его значение в уравнение (3.1):

$$I_2 + I_2 R_2/R_3 = I_1,$$

откуда

$$I_2(R_3 + R_2/R_3) = I_1,$$

или

$$I_2 = I_1 R_3 / (R_2 + R_3). \quad (3.5)$$

Таким образом, ток одной из двух параллельно соединенных ветвей  $I_2$  равен их общему току  $I_1$ , деленному на сумму сопротивлений ветвей и умноженному на сопротивление другой ветви.

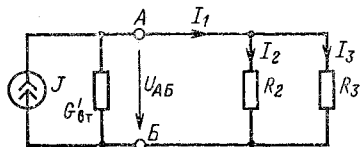
2. Как вычислить токи цепи рис. 1.2, используя преобразование источника ЭДС в источник тока? При таком методе расчета цепи целесообразно в качестве внутреннего сопротивления источника ЭДС принять полное сопротивление той ветви, в которой эта ЭДС включена. В нашем случае (см. рис. 1.2) таким сопротивлением является  $R'_{вт} = R_{вт} + R_1$ .

Принимая схему источника тока (см. рис. 1.7), определим его ток  $J$  и проводимость  $G'_{вт}$  (эквивалентные заданному источнику ЭДС) по формулам (1.14):

$$G'_{вт} = 1/R'_{вт} = 1/(R_{вт} + R_1) = 1/20 = 0,05 \text{ См},$$

$$J = EG'_{вт} = 120 \cdot 0,05 = 6 \text{ А}.$$

Полученная эквивалентная цепь (рис. 3.2) содержит три параллельно включенных сопротивления с общей проводимостью



$$\begin{aligned} G_{об} &= G'_{вт} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \\ &= \frac{5}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{150} = \\ &= \frac{10}{150} = \frac{1}{15} \text{ См}, \end{aligned}$$

Рис. 3.2. Разветвленная цепь с источником тока

или общим сопротивлением

$$R_{06} = 1/G_{06} = 15 \text{ Ом},$$

по которому проходит ток источника тока  $J=6 \text{ А}$ , образуя напряжение  $U_{AB} = JR_{06} = 6 \cdot 15 = 90 \text{ В}$ . Такое же значение напряжения было получено выше при решении задачи. Токи в сопротивлениях  $R_2$  и  $R_3$  (рис. 3.2), очевидно, также будут теми же:

$$I_2 = U_{AB}/R_2 = 90/100 = 0,9 \text{ А};$$

$$I_1 = U_{AB}/R_1 = 90/150 = 0,6 \text{ А}.$$

3. Как определить напряжение при помощи второго закона Кирхгофа? Прежде всего вспомним правило знаков при составлении уравнений по второму закону Кирхгофа (§ 1.1).

В соответствии с этими правилами для контура  $ВАБГВ$  (см. рис. 1.2) при его обходе по направлению движения часовой стрелки имеем

$$E = (R_{вт} + R_1 + R_{2,3}) I_1 = U_0 + U_1 + U_{AB}.$$

Обходя этот же контур в обратном направлении (против направления движения часовой стрелки), получаем

$$-E = -U_0 - U_1 - U_{AB}.$$

Оба уравнения тождественны. Из полученного уравнения

$$U_{AB} = E - U_0 - U_1 = 120 - 3 - 27 = 90 \text{ В}.$$

Получился уже известный результат.

*Итак, при помощи второго закона Кирхгофа легко определить напряжение на любом участке замкнутого контура электрической цепи, если известны напряжения на других участках.*

4. Может ли источник находиться во внутренней ветви схемы? Рассмотренная в задаче цепь может иметь схемное изображение, показанное на рис. 3.3 и отличающееся от исходной схемы (см. рис. 1.2) только тем, что неразветвленный участок с источником располагается в середине схемы. По существу это различные схемные начертания для одной и той же цепи, поэтому приведенный расчет пригоден для обеих схем.

Иногда вызывает затруднения расчет цепи рис. 3.3, так как не сразу замечают, что сопротивления  $R_2$  и  $R_3$  присоединены к одним и тем же узловым точкам  $A$  и  $B$ , т. е. включены параллельно, и могут быть заменены одним сопротивлением  $R_{2,3}$ , после чего схема принимает вид, показанный на рис. 3.1.



5. Как определить токи в цепи, питаемой одновременно источником ЭДС и источником тока? Покажем такой случай на примере цепи рис. 3.4, и воспользуемся для ее расчета методом наложения (§ 2.2).

Вначале найдем токи всех ветвей, создаваемые только источником тока  $J$ . При этом другой источник с ЭДС  $E$  не действует ( $E=0$ ) и сопротивление его ветви в нашем случае (рис. 3.4) равно нулю.

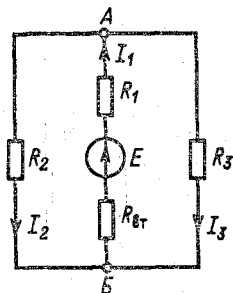


Рис. 3.3. Схема цепи с источником во внутренней ветви

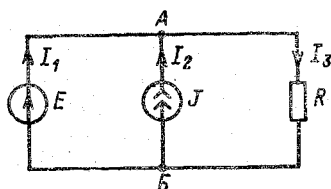


Рис. 3.4. Параллельное включение источников ЭДС и тока

В результате сопротивление  $R$  оказывается замкнутым накоротко и ток в нем (как показано в доп. вопросе 7 к этой задаче) отсутствует.

Таким образом, для рассматриваемого режима во всех ветвях частичные токи определяются как

$$I'_2 = J; \quad I'_3 = 0; \quad I'_1 = -I'_2 = -J.$$

Теперь найдем токи, создаваемые только источником ЭДС  $E$ . При этом во второй ветви исключается действие источника тока  $J$ , но сохраняется его внутреннее сопротивление, равное бесконечности, т. е. вторая ветвь оказывается разомкнутой. В этом режиме имеем частичные токи

$$I''_2 = 0; \quad I''_3 = I''_1 = E/R.$$

В результате наложения частичных токов двух режимов получим для цепи рис. 3.4 токи

$$\begin{aligned} I_2 &= I'_2 + I''_2 = I'_2 = J; \\ I_3 &= I'_3 + I''_3 = I''_3 = E/R; \\ I_1 &= I'_1 + I''_1 = -J + E/R. \end{aligned}$$

6. Как можно стабилизировать напряжение между узлами или ток ветви? Чтобы стабилизировать напряжение или ток участка цепи, необходимо обеспечить постоянство их при любых изменениях параметров участка цепи. Такой результат получен в предыдущем дополнительном вопросе при расчете цепи (рис. 3.4), для которой напряжение  $U_{AB} = RI_3 = E$ , а ток  $I_2 = I$ . Оказывается, напряжение  $U_{AB}$  и ток  $I_2$  не зависят от параметров цепи.

Таким образом, если между двумя узловыми точками включить идеальный источник ЭДС, то обеспечивается стабилизация напряжения между узлами, а при включении в какую-либо ветвь идеального источника тока стабилизируется ток ветви.

7. Как повлияет на токи и напряжения в цепи (см. рис. 1.2) короткое замыкание выводов сопротивления  $R_3$ ?

На рис. 3.5 осуществлено указанное короткое замыкание при помощи дополнительного провода, соединяющего выводы сопротивления. На практике такой режим может возникнуть при ошибке в монтаже, повреждении сопротивления и в других случаях.

В рассматриваемом режиме между точками А и Б (рис. 3.5) сопротивление одной ветви (соединительного провода) можно принять равным нулю. При этом общая проводимость между точками А и Б

$$G_{AB} = 1/R_{AB} = 1/R_2 + 1/R_3 + 1/0 = \infty,$$

или общее сопротивление участка  $R_{AB} = 0$ .

Соответственно общее сопротивление всей цепи  $R_{об} = R_1 + R_{вт} + R_{AB} = R_1 + R_{вт}$  уменьшится, общий ток цепи  $I_1$  возрастет, напряжение на выводах источника  $U = E - R_{вт}I_1$  уменьшится.

Токи ветвей  $I_2$  и  $I_3$  будут равны нулю, так как в параллельно соединенных сопротивлениях общий ток распределяется обратно пропорционально сопротивлениям ветвей, т. е. практически весь ток  $I_1$  пройдет через ветвь, сопротивление которой принято равным нулю (через соединительный провод, как показано на рис. 3.5).

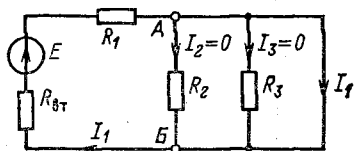


Рис. 3.5. Короткое замыкание сопротивления  $R_3$

## 3.2. ЦЕПЬ С НЕСКОЛЬКИМИ УЗЛАМИ. СОСТАВЛЕНИЕ СХЕМЫ И РАСЧЕТ ЦЕПИ КАК ДЕЛИТЕЛЯ НАПРЯЖЕНИЯ

### Условие задачи

Для питания цепей электронного устройства необходимо иметь напряжения  $U_1=6$  В,  $U_2=9$  В,  $U_3=12$  В при токах нагрузки соответственно  $I_1=6$  мА,  $I_2=3$  мА и  $I_3=12$  мА. Создавать несколько источников энергии (к тому же весьма малой мощности) нецелесообразно (громоздко и дорого). Выгоднее установить один источник на 12 В и к нему делитель напряжения на два значения (6 и 9 В).

Требуется составить схему и вычислить параметры делителя напряжения. Напряжение источника энергии  $U=U_3=12$  В принять одинаковым для режимов нагрузки и холостого хода.

### Решение задачи

1. Составление электрической схемы. Если к выводам источника энергии с напряжением  $U$  присоединить последовательно несколько сопротивлений, то на каждом из них получим напряжение, составляющее часть величины  $U$ . Такая цепь может быть делителем напряжения. Для наших условий делитель показан на рис. 3.6. Он имеет

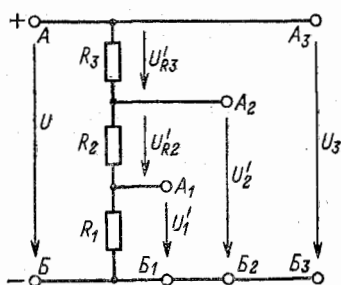


Рис. 3.6. Делитель на два напряжения ( $U_1$  и  $U_2$ ) с отключенными от выходных выводов потребителями

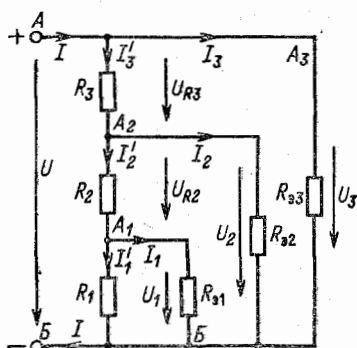


Рис. 3.7. Делитель напряжения по рис. 3.6 с присоединенными потребителями

входные выводы  $A$  и  $B$ , к которым подводится напряжение источника (делимое напряжение)  $U=12$  В и три пары выходных выводов ( $A_1-B_1$ ,  $A_2-B_2$  и  $A_3-B_3$ ), с которых сни-

маются напряжения ( $U'_1$ ,  $U'_2$  и  $U_3$ ) для питания заданных потребителей.

Схема (рис. 3.6) соответствует режиму холостого хода делителя напряжения, так как от выходных выводов отключены приемники энергии. При подключении их, т. е. эквивалентных сопротивлений  $R_{э1}$ ,  $R_{э2}$  и  $R_{э3}$ , как показано на рис. 3.7, уменьшаются общие сопротивления и напряжения между выходными выводами  $A_1—B_1$  и  $A_2—B_2$ , поэтому напряжения  $U'_1$  и  $U'_2$  (рис. 3.6) больше заданных напряжений  $U_1$  и  $U_2$ . Для расчета сопротивлений делителя напряжения нужно воспользоваться схемой, соответствующей нормальным условиям работы (рис. 3.7).

2. Токораспределение в цепи рис. 3.7. Ток источника  $I$  от вывода «+» (точка  $A$ ) разделяется на токи  $I_3$  и  $I'_3$ . Последний разделяется на токи  $I_2$  и  $I'_2$  в узловой точке  $A_2$ . Ток  $I'_2$  в сопротивлении  $R_2$  делится на токи  $I_1$  и  $I'_1$ . Наконец, токи  $I'_1$ ,  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  суммируются в узловой точке  $B$  и образуют общий ток  $I$ .

3. Вычисление эквивалентных сопротивлений  $R_{э1}$ ,  $R_{э2}$  и  $R_{э3}$  (рис. 3.7). Каждое из указанных сопротивлений заменяет цепь питания электронного устройства, присоединенную к соответствующим выводам делителя напряжения. Для этих цепей известны напряжения и токи, поэтому легко определяются сопротивления:

$$R_{э1} = U_1/I_1 = 6/(6 \cdot 10^{-3}) = 1000 \text{ Ом} = 1 \text{ кОм};$$

$$R_{э2} = U_2/I_2 = 9/(3 \cdot 10^{-3}) = 3000 \text{ Ом} = 3 \text{ кОм};$$

$$R_{э3} = U_3/I_3 = 12/(12 \cdot 10^{-3}) = 1000 \text{ Ом} = 1 \text{ кОм}.$$

4. Выбор одного из сопротивлений делителя. В схеме рис. 3.6  $U'_1 : U'_{R2} : U'_{R3} = R_1 : R_2 : R_3$ , и поэтому даже при заданных значениях напряжений в режиме холостого хода можно найти только отношение сопротивлений  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  и нельзя определить их значения. Рассматриваемая зависимость напряжений и сопротивлений позволяет составить два уравнения:  $U'_1 : U'_{R2} = R_1 : R_2$  и  $U'_{R2} : U'_{R3} = R_2 : R_3$ , где три неизвестных ( $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ), и задача по определению сопротивлений оказывается многозначной. Как же поступить? Нужно из каких-то других условий выбрать (определить) одно сопротивление делителя напряжений. Такая необходимость всегда возникает при расчете делителей. Обычно выбирают  $R_1 \ll R_{э1}$  (рис. 3.7), обеспечивая этим условием малое изменение напряжения  $U_1$  при возможных

изменениях эквивалентного сопротивления  $R_{э1}$  (значение которого зависит от режима потребителя).

Поскольку на практике часто пользуются соотношением  $R_1 = (0,1 \div 0,15) R_{э1}$ , примем  $R_1 = 150$  Ом. Сопротивления  $R_2$  и  $R_3$  определятся теперь однозначно.

5. Вычисление токов и сопротивлений. Прежде всего вычислим напряжения на сопротивлениях  $R_2$  и  $R_3$  (рис. 3.7):

$$U_{R_2} = U_2 - U_1 = 9 - 6 = 3 \text{ В};$$

$$U_{R_3} = U_3 - U_2 = 12 - 9 = 3 \text{ В}.$$

Затем определим все токи:

$$I'_1 = U_1 / R_1 = 6 / 150 = 0,04 \text{ А} = 40 \text{ мА};$$

$$I'_2 = I'_1 + I_1 = 40 + 6 = 46 \text{ мА};$$

$$I'_3 = I'_2 + I_2 = 46 + 3 = 49 \text{ мА};$$

$$I = I'_3 + I_3 = 49 + 12 = 61 \text{ мА}.$$

Найдем сопротивления  $R_2$  и  $R_3$ :

$$R_2 = U_{R_2} / I'_2 = 3 / (46 \cdot 10^{-3}) = 65,2 \approx 65 \text{ Ом};$$

$$R_3 = U_{R_3} / I'_3 = 3 / (49 \cdot 10^{-3}) = 61,2 \approx 61 \text{ Ом}.$$

6. Проверка вычислений. Так как при решении задачи был применен первый закон Кирхгофа, то проверку целесообразно сделать по второму закону Кирхгофа для нескольких контуров.

В контуре из сопротивлений  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_{э2}$  нет источников, т. е. сумма ЭДС равна нулю. При обходе контура по направлению движения часовой стрелки падение напряжения  $I_2 R_{э2}$  положительно (ток  $I_2$  направлен по обходу контура), а остальные падения напряжений отрицательны. Поэтому

$$\begin{aligned} R_{э2} I_2 - R_1 I'_1 - R_2 I'_2 &= 3 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-3} - \\ &- 150 \cdot 0,04 - 65,2 \cdot 46 \cdot 10^{-3} = 0. \end{aligned}$$

Для контура из сопротивлений  $R_{э2}$ ,  $R_3$ ,  $R_{э3}$

$$\begin{aligned} -R_{э2} I_2 - R_3 I'_3 + R_{э3} I_3 &= -3 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-3} - \\ &- 61,2 \cdot 49 \cdot 10^{-3} + 10^3 \cdot 12 \cdot 10^{-3} = 0. \end{aligned}$$

**Дополнительные вопросы к задаче**

1. Как определить общее сопротивление цепи (рис. 3.7)? Возможны два способа вычислений:

во-первых,

$$R_{06} = U/I = 12/(61 \cdot 10^{-3}) = 195 \text{ Ом};$$

во-вторых, рассматривая отдельные участки цепи рис. 3.7, находим для параллельно соединенных сопротивлений  $R_1$  и  $R_{э1}$  общее сопротивление:

$$R_{061} = \frac{R_1 R_{э1}}{R_1 + R_{э1}} = \frac{150 \cdot 1000}{1150} = 130,4 \text{ Ом}.$$

Полученное сопротивление  $R_{061}$  и сопротивление  $R_2$  соединены последовательно, а оба вместе — параллельно с сопротивлением  $R_{э2}$ , поэтому общее сопротивление между выводами  $A_2$  и  $B$  (рис. 3.7)

$$R_{062} = \frac{(R_{061} + R_2) R_{э2}}{R_{061} + R_2 + R_{э2}} = \frac{(130,4 + 65) 3000}{130,4 + 65 + 3000} = 184 \text{ Ом}.$$

Сопротивления  $R_{062}$ ,  $R_3$  и  $R_{э3}$  образуют последовательно-параллельное соединение, аналогичное только что рассмотренному, поэтому общее сопротивление между выводами  $A$  и  $B$  или всей цепи

$$R_{06} = \frac{(R_{062} + R_3) R_{э3}}{R_{062} + R_3 + R_{э3}} = \frac{(184 + 61) 1000}{184 + 61 + 1000} = 195 \text{ Ом}.$$

2. Как влияет условие  $R_1 \ll R_{э1}$  в цепи рис. 3.7 на экономичность (по расходу энергии) делителя напряжения? При условии  $R_1 \ll R_{э1}$  имеем соотношение для токов  $I_1' \gg I_1$ . Это неравенство позволяет записать и другое:  $U_1 I_1' \gg U_1 I_1$ , т. е. мощность, теряемая в сопротивлении  $R_1$ , значительно больше мощности в цепи потребителя, присоединенного параллельно сопротивлению  $R_1$ ; то же относится и к расходу энергии (за равное время). Поэтому в рассматриваемом делителе теряется заметная часть энергии источника, и его можно применить только для питания потребителей малой мощности.

При проектировании делителей напряжения не следует без необходимости стремиться к значительному уменьшению сопротивления делителя по сравнению с сопротивлениями цепей нагрузки.

3. Можно ли применить выпрямитель с большим внутренним сопротивлением для питания цепи по рис. 3.7? В этом случае на значения напряжений  $U_1$ ,  $U_2$  и  $U_3$  (рис. 3.7) влияет отключение любого из потребителей ( $R_{э1}$ ,  $R_{э2}$  и  $R_{э3}$ ). Действительно, при отключении, например, сопротивления  $R_{э3}$  уменьшится об-

щий ток, а значит, и падение напряжения на внутреннем сопротивлении источника. Напряжение на выводах  $A-B$  (рис. 3.7) возрастет, а значит, увеличатся напряжения  $U_1$  и  $U_2$  по сравнению с заданными значениями. Очевидно, что нужно выбрать источник с малым внутренним сопротивлением.

*Итак, возможна зависимость между напряжениями на потребителях, если источник энергии имеет внутреннее сопротивление.*

4. Сколько переменных сопротивлений нужно иметь и как следует ими пользоваться, чтобы отрегулировать цепь рис. 3.7 на требуемые значения напряжений? При изготовлении делителей напряжения с одной и той же схемой (например, в производственных условиях) возникает задача их регулировки на требуемые напряжения. Можно было бы поставить три переменных сопротивления  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$  (рис. 3.7). Но регулировка этими сопротивлениями была бы крайне затруднительна, так как изменение одного (любого) сопротивления влияет на напряжения всех участков цепи; поэтому ни одно сопротивление нельзя сразу и окончательно подобрать.

Облегчить регулировку можно, например, так: подвести напряжение 9 В от отдельного источника к выводам  $A_2B$  (рис. 3.7) и изменением сопротивления  $R_2$  обеспечить требуемое значение  $U_1=6$  В, затем подвести напряжение 12 В к выводам  $AB$  и изменением сопротивления  $R_3$  добиться требуемого значения  $U_2=9$  В. Таким образом, для регулировки потребуются два источника напряжения 9 В и 12 В, а у делителя — два переменных сопротивления, значения которых можно подбирать независимо друг от друга.

### 3.3. ЦЕПЬ С НЕСКОЛЬКИМИ УЗЛАМИ. РАСЧЕТ ЦЕПИ С УЧЕТОМ ПОТЕРИ НАПРЯЖЕНИЯ В ПРОВОДАХ

#### Условие задачи

Три трамвайных вагона (рис. 3.8) питаются электроэнергией от подстанции через контактный провод и рельсы (обратный провод). Медный контактный провод имеет сечение  $82 \text{ мм}^2$ , сопротивление рельсов  $0,025 \text{ Ом/км}$ .

Вычислить напряжение на выводах  $\Pi_1-\Pi_2$  подстанции, которое поддерживается постоянным, а также напряжение питания каждого трамвая и потерю напряжения на всех участках линии для двух режимов работы транспорта:

а) трамвай № 1 и 2 стоят на остановках (отключены от сети), а трамвай № 3 находится в движении и его ток  $I_3 = 70$  А. Напряжение у трамвая № 1 (между точками 1а и 1б, рис. 3.8) равно 573 В;

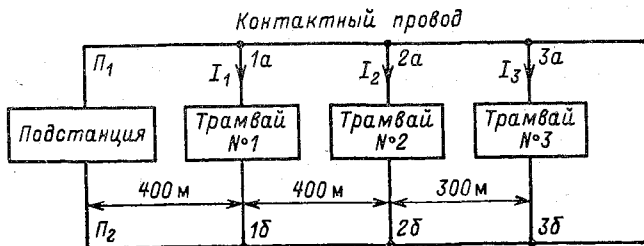


Рис. 3.8. Схема питания трех трамваев на участке пути

б) трамвай № 1 и 2 трогаются с остановок (их токи  $I_1 = I_2 = 200$  А), а ток трамвая № 3 по-прежнему равен 70 А.

Для второго режима вычислить наибольшую плотность тока в линии.

### Решение задачи

1. Составление электрической схемы. Составление схем замещения, на которых все реальные потребители заменены их эквивалентными сопротивлениями, уже рассматривалось (§ 1.1). Для данной цепи (рис. 3.8) составим схему замещения (рис. 3.9), заменив контактный провод, рельсы и трамваи эквивалентными сопротивлениями соответственно  $R_n$ ,  $R_p$ ,  $R_t$ .

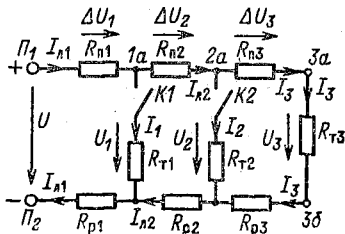


Рис. 3.9. Эквивалентная электрическая схема по рис. 3.8

Почему в этой задаче в отличие от предыдущих учитывается сопротивление проводов? Контактный провод и рельсы имеют большую протяженность, а их сопротивления хотя и значительно меньше эквивалентного сопротивления трамвая, но все же обуславливают различие напряжений  $U$ ,  $U_1$ ,  $U_2$  и  $U_3$  (рис. 3.9), т. е. потерю напряжения в линии. Определение этой потери и составляет цель решаемой задачи.

2. Вычисление сопротивлений участков



провода и рельсов. Сопротивление контактного провода  $R = \rho l / S$ , где удельное сопротивление меди  $\rho = 1,75 \times 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$  (см. прилож. 2), сечение провода  $S = 82 \times 10^{-6} \text{ м}^2$  (по условию) и  $l$  — длина провода. Следовательно, сопротивление 1 км контактного провода

$$R_{\text{пр}} = \rho l / S = 1,75 \cdot 10^{-8} \cdot 1000 / (82 \cdot 10^{-6}) = 0,215 \text{ Ом}.$$

Зная длины участков контактного провода (рис. 3.8), вычислим все сопротивления  $R_{\text{п}}$  (рис. 3.9):

$$R_{\text{п1}} = R_{\text{п2}} = R_{\text{пр}} \cdot 0,4 = 0,215 \cdot 0,4 = 0,086 \text{ Ом};$$

$$R_{\text{п3}} = R_{\text{пр}} \cdot 0,3 = 0,215 \cdot 0,3 = 0,0645 \text{ Ом}.$$

Для стальных рельсов дано (по условию задачи) сопротивление на 1 км  $R_{\text{р}} = 0,025 \text{ Ом/км}$ ; поэтому сопротивления участков рельсов (рис. 3.9) равны

$$R_{\text{р1}} = R_{\text{р2}} = R_{\text{р}} \cdot 0,4 = 0,025 \cdot 0,4 = 0,01 \text{ Ом};$$

$$R_{\text{р3}} = R_{\text{р}} \cdot 0,3 = 0,025 \cdot 0,3 = 0,0075 \text{ Ом}.$$

3. Вычисление напряжений в цепи рис. 3.9 для первого режима работы. При этом режиме из цепи рис. 3.9 исключаются сопротивления  $R_{\text{т1}}$  и  $R_{\text{т2}}$  (ключи  $K1$  и  $K2$  разомкнуты), так как трамваи № 1 и 2 не подключены к контактной сети. Таким образом, получается неразветвленная цепь, у которой ток во всех участках равен току трамвая № 3, т. е.  $I_3 = 70 \text{ А}$ . Ток  $I_3$  создает на сопротивлениях  $R_{\text{п1}}$  и  $R_{\text{р1}}$  (рис. 3.9) суммарное падение напряжения

$$\Delta U_1 = I_3 (R_{\text{п1}} + R_{\text{р1}}) = 70 (0,086 + 0,01) = 6,7 \text{ В}.$$

С другой стороны, суммарное падение напряжения в проводе и рельсах первого участка  $\Delta U_1 = U - U_1$  составляет потерю напряжения на первом участке линии, и поэтому на зажимах  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  (рис. 3.9) напряжение

$$U = U_1 + \Delta U_1 = 573 + 6,7 = 579,7 \approx 580 \text{ В}.$$

Поскольку сопротивления провода и рельсов первого и второго участков линии одинаковы ( $R_{\text{п1}} = R_{\text{п2}}$  и  $R_{\text{р1}} = R_{\text{р2}}$ ), потеря напряжения на втором участке  $\Delta U_2 = \Delta U_1 = 6,7 \text{ В}$  и, как следует из рис. 3.9, напряжение

$$U_2 = U_1 - \Delta U_2 = 573 - 6,7 = 566,3 \approx 566 \text{ В}.$$

Потеря напряжения на третьем участке

$$\Delta U_3 = I_3 (R_{\text{п3}} + R_{\text{р3}}) = 70 (0,0645 + 0,0075) \approx 5 \text{ В},$$

напряжение

$$U_3 = U_2 - \Delta U_3 = 566,3 - 5 = 561,3 \approx 561 \text{ В.}$$

Общая потеря напряжения в линии

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3 = 6,7 + 6,7 + 5 = 18,4 \text{ В;}$$

$$\Delta U = U - U_3 = 579,7 - 561,3 = 18,4 \text{ В.}$$

4. Вычисление напряжений для второго режима работы. Поскольку в этом режиме к сети подключены все потребители (питаются энергией все трамваи), расчет проводим с учетом сопротивлений  $R_{T1}$  и  $R_{T2}$  (рис. 3.9, ключи  $K1$  и  $K2$  замкнуты).

Как повлияет новый режим работы потребителей на потерю напряжения в проводах? Сопротивления участков линии (контактного провода и рельсов) остаются неизменными, а токи первых двух участков  $I_{Л1}$  и  $I_{Л2}$  (рис. 3.9) возрастают, поэтому на этих участках увеличится и потеря напряжения.

Определим токи  $I_{Л1}$  и  $I_{Л2}$  в новом режиме работы. По первому закону Кирхгофа

$$I_{Л2} = I_2 + I_3; \quad I_{Л1} = I_1 + I_{Л2} = I_1 + I_2 + I_3.$$

Оказывается, ток первого участка линии  $I_{Л1}$  увеличился на сумму токов  $I_1 + I_2$  двух новых потребителей ( $R_{T1}$  и  $R_{T2}$ ), ток второго участка  $I_{Л2}$  — на ток одного потребителя ( $R_{T2}$ ), ток третьего участка  $I_3$  остался прежним [в действительности ток  $I_3 = U_3/R_{T3}$  может уменьшиться вследствие возросшей потери напряжения в линии и уменьшения напряжения  $U_3$ , но это уменьшение обычно невелико (см. подробнее в доп. вопросе 2)].

Очевидно, что

$$\Delta U'_1 = (I_1 + I_2)(R_{п1} + R_{р1}) = (200 + 200) 0,096 = 38,4 \text{ В;}$$

$$\Delta U'_2 = I_2(R_{п2} + R_{р2}) = 200 \cdot 0,096 = 19,2 \text{ В.}$$

На  $\Delta U'_1$  и  $\Delta U'_2$  возросла потеря напряжения в линии при изменении режима работы потребителей, а полная (фактическая) потеря напряжения в новом режиме для каждого участка составляет

$$\Delta U''_1 = \Delta U_1 + \Delta U'_1 = 6,7 + 38,4 = 45,1 \text{ В} \approx 45 \text{ В;}$$

$$\Delta U''_2 = \Delta U_2 + \Delta U'_2 = 6,7 + 19,2 = 25,9 \text{ В} \approx 26 \text{ В;}$$

$$\Delta U''_3 = \Delta U_3 = 5 \text{ В.}$$

Соответственно напряжения на потребителях равны

$$U_1 = U - \Delta U_1'' = 580 - 45 = 535 \text{ В};$$

$$U_2 = U_1 - \Delta U_2'' = 535 - 26 = 509 \text{ В};$$

$$U_3 = U_2 - \Delta U_3'' = 509 - 5 = 504 \text{ В}.$$

5. Вычисление плотности тока в контактном проводе. Провода проверяют на допустимую плотность тока, чтобы не допустить превышения температуры. В нашем случае плотность тока максимальна в первом участке линии:

$$J_{\max} = \frac{I_{\text{лп}}}{S} = \frac{I_1 + I_2 + I_3}{S} = \frac{470}{82} \approx 5,7 \text{ А/мм}^2.$$

Для одиночного медного провода сечением  $82 \text{ мм}^2$  в закрытом помещении допускается плотность тока приблизительно  $3,5 \text{ А/мм}^2$  (см. прилож. 3). Для провода на открытом воздухе эта норма увеличивается приблизительно на 35 % и составляет около  $4,7 \text{ А/мм}^2$ . Такая плотность допустима при длительной эксплуатации. Повышенная плотность тока в первом участке ( $5,7 \text{ А/мм}^2$ ) не вызывает опасений, так как рассматриваемый режим (трогание с места трамваев) весьма кратковременный и провод не успеет нагреться, а в режиме движения трамвая ток в несколько раз меньше, чем при трогании ( $70 \text{ А}$  вместо  $200 \text{ А}$ ).

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Как изменяется потеря напряжения при увеличении мощности потребителя? В рассматриваемой задаче в варианте «б» потребители № 1 и 2 (большей мощности) создают на соответствующих участках линии большую потерю напряжения по сравнению с потребителем № 3 (меньшей мощности). Это объясняется тем, что с увеличением мощности потребителя уменьшается его эквивалентное сопротивление и возрастает ток в цепи.

2. Как повлияет на потерю напряжения изменение длины линии? В цепи рис. 3.9 при разомкнутых ключах  $K1$  и  $K2$  ток  $I_3 = U / (R_{\text{л}} + R_{\text{тз}})$ , где  $R_{\text{л}}$  — полное сопротивление всей линии (контактного провода и рельсов), а  $R_{\text{тз}}$  — эквивалентное сопротивление потребителя. Для первого режима работы  $R_{\text{тз}} = U_3 / I_3 = 561 / 70 = 8 \text{ Ом}$ , а  $R_{\text{л}} = 0,264 \text{ Ом}$ , т. е.  $R_{\text{тз}} \gg R_{\text{л}}$ ; поэтому ток  $I_3 \approx U / R_{\text{тз}}$ .

Таким образом, изменение длины линии и соответствен-

но ее сопротивления  $R_{\text{л}}$  практически не влияет на ток, но потеря напряжения  $\Delta U = IR_{\text{л}}$  изменяется почти пропорционально  $R_{\text{л}}$  или длине линии. С увеличением длины линии напряжение на потребителе может стать меньше номинального, что ухудшит условия его работы. Чтобы потеря напряжения не превысила допустимого значения, нужно для линий большей протяженности выбирать и большее сечение провода. Иногда применяют и другие меры, о которых будет сказано дальше (см. доп. вопрос 5).

3. Как изменится потеря напряжения в проводе при увеличении его диаметра в 2 раза? Сечение провода  $S = \pi d^2/4$  увеличится в 4 раза (пропорционально  $d^2$ ); сопротивление провода и потеря напряжения в нем уменьшатся в 4 раза, если считать ток в линии постоянным, что практически допустимо (см. предыдущий вопрос).

4. Как будет изменяться потеря напряжения в линии при колебаниях значения питающего напряжения  $U$ ? Напряжение  $U$  практически может измениться в небольших пределах. Если считать сопротивления потребителей ( $R_{\text{T1}}, R_{\text{T2}}, R_{\text{T3}}$ ) неизменными, то токи на участках линии и потеря напряжения будут изменяться пропорционально изменению напряжения  $U$ .

5. Для каких целей в сетях городского транспорта применяют второй питающий

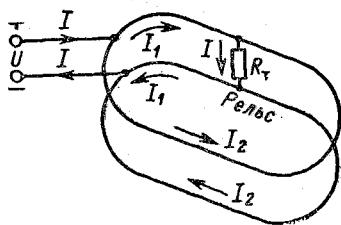
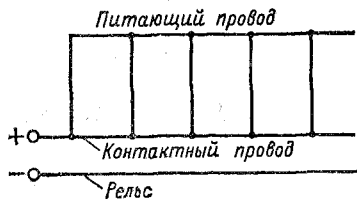


Рис. 3.10. Параллельное включение двух проводов для уменьшения потери напряжения

Рис. 3.11. Схема двустороннего питания потребителя

провод и кольцевое питание сети? На линиях большой протяженности с большим числом потребителей (например, трамваев) возможна значительная потеря напряжения, особенно на начальных участках линии (около питающей подстанции), где ток наибольший. Для уменьше-

ния потери напряжения иногда прокладывают питающий провод (рис. 3.10), отдельные участки которого присоединены параллельно участкам контактного провода, что равносильно увеличению сечения провода.

Другой мерой уменьшения потери напряжения является кольцевое питание сети (рис. 3.11), при котором источник энергии присоединяется одновременно к двум концам сети. Ток  $I$  потребителя делится на части  $I_1$  и  $I_2$ , проходящие по различным участкам сети (рис. 3.11). Уменьшение тока в проводах сети приводит к уменьшению потери напряжения.

### 3.4. РАСЧЕТ ЦЕПИ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

#### Условие задачи

Для цепи рис. 3.12 дано:  $E=3,6$  В;  $R_{вт}=0,12$  Ом;  $R_1=8$  Ом;  $R_2=10$  Ом;  $R_3=2$  Ом;  $R_4=4$  Ом;  $R_5=5$  Ом.

Вычислить все токи.

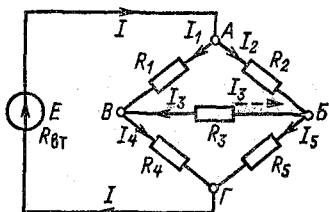


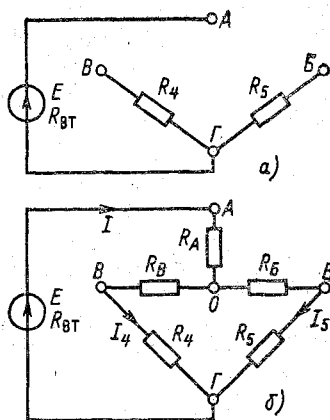
Рис. 3.12. Схема, упрощение которой возможно преобразованием соединения сопротивлений треугольником в соединение звездой

#### Решение задачи

1. Особенности рассматриваемой цепи. В предыдущих задачах можно было заранее (до расчета) определить направления токов во всех участках цепи. Можно ли сразу указать направления токов во всех участках цепи по рис. 3.12?

Чтобы ответить на этот вопрос, покажем на схеме направление общего тока  $I$ , который разветвляется в узловой точке  $A$  на два:  $I_1$  и  $I_2$ . Далее следовало бы показать направление тока между узлами  $B$  и  $B$ , но он может иметь два направления (показаны на рисунке сплошной и пунктирной стрелками). Действительно направление тока  $I_3$  зависит от параметров схемы и определяется только после расчета цепи.

Рис. 3.13: Схема по рис. 3.12, в которой отсоединен треугольник сопротивлений  $R_1, R_2, R_3$  (а); схема цепи по рис. 3.12, в которой треугольник сопротивлений заменен звездой (б)



Итак, в рассматриваемой цепи не только значения токов, но и их направления (в отдельных ветвях) определяются расчетом.

Кроме того, до сих пор расчет цепей с одним источником энергии основывался на упрощении схемы с последовательно и параллельно соединенными сопротивлениями. Возможен ли такой путь решения данной задачи?

Оказывается, нет. Рассматриваемая цепь не имеет параллельно и последовательно соединенных сопротивлений. Действительно, с одной стороны, нет сопротивлений, подключенных к одной и той же паре узлов (условие параллельного соединения), с другой — нет сопротивлений, обтекаемых одним и тем же током (условие последовательного соединения).

Итак, рассматриваемая цепь не может быть разбита на последовательно и параллельно соединенные участки (ветви). Такие электрические цепи иногда называют сложными, поэтому и рассматриваемую цепь (рис. 3.12) можно отнести к числу сложных.

2. Вычисление общего сопротивления. Определить общее сопротивление цепи теми же методами, что и в предыдущих задачах, в данном случае нельзя. Поэтому возникает вопрос: нельзя ли преобразовать схему так, чтобы применение прежних методов стало возможным?

Оказывается, можно, если соединение сопротивлений треугольником преобразовать в соединение звездой или, наоборот, звезду в треугольник. Выполним преобразование для треугольника сопротивлений  $R_1, R_2$  и  $R_3$ .

Прежде всего перечертим схему без заменяемого треугольника сопротивлений, но с обозначенными  $A, B, B$  (рис. 3.13, а). Затем к этим вершинам присоединим звезду сопротивлений  $R_A, R_B$  и  $R_В$  (рис. 3.13, б). Учитывая, что каждое сопротивление звезды равно произведению двух при-

мыкающих сопротивлений треугольника, разделенному на сумму трех его сопротивлений, находим

$$R_A = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{8 \cdot 10}{8 + 10 + 2} = \frac{80}{20} = 4 \text{ Ом};$$

$$R_B = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{10 \cdot 2}{8 + 10 + 2} = \frac{20}{20} = 1 \text{ Ом};$$

$$R_C = \frac{R_3 R_1}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{2 \cdot 8}{8 + 10 + 2} = \frac{16}{20} = 0,8 \text{ Ом}.$$

Дальше расчет эквивалентной схемы рис. 3.13, б ведется уже известными методами. Действительно, сопротивление  $R_B$  соединено последовательно с  $R_4$ , а сопротивление  $R_C$  — последовательно с  $R_5$ ; поэтому для ветви  $OBГ$  общее сопротивление  $R_{B,4} = R_B + R_4 = 0,8 + 4 = 4,8 \text{ Ом}$ , а для ветви  $OBГ$  —  $R_{B,5} = R_C + R_5 = 1 + 5 = 6 \text{ Ом}$ . Сопротивления  $R_{B,4}$  и  $R_{B,5}$  соединены параллельно, и их общее сопротивление

$$R_{OF} = 4,8 \cdot 6 / (4,8 + 6) = 28,8 / 10,8 = 2,67 \text{ Ом}.$$

Общее сопротивление всей цепи  $R_{об} = R_A + R_{OF} = 4 + 2,67 = 6,67 \text{ Ом}$ .

3. Вычисление токов. Определение токов в цепях, подобных полученной (рис. 3.13, б), уже выполнялось в предыдущих задачах и приводится здесь без подробных пояснений.

Ток источника

$$I = E / (R_{об} + R_{вт}) = 3,6 / (6,67 + 0,12) = 0,53 \text{ А}.$$

Ток ветви  $OBГ$

$$I_4 = I \frac{R_{B,5}}{R_{B,5} + R_{B,4}} = 0,53 \frac{6}{6 + 4,8} = 0,295 \text{ А}.$$

Ток ветви  $OBГ$

$$I_5 = I - I_4 = 0,53 - 0,295 = 0,235 \text{ А}.$$

Поскольку участки  $BГ$  и  $ГБ$  схем рис. 3.12 и 3.13, б не преобразовывались, вычисленные значения токов  $I_4$  и  $I_5$  действительны для обеих схем. Переходим к исходной схеме рис. 3.12; запишем уравнение по второму закону Кирхгофа для контура  $BБГ$  (ток  $I_3$  будем считать направленным, как показано сплошной стрелкой):

$$-I_3 R_3 + I_5 R_5 - I_4 R_4 = 0.$$

Подставляя числовые значения, получаем

$$-I_3 \cdot 2 + 0,235 \cdot 5 - 0,295 \cdot 4 = 0,$$

или

$$2I_3 \approx 0,118 - 0,118 = 0, \text{ т. е. } I_3 = 0;$$

$$I_1 = I_4 - I_3 = I_4; \quad I_2 = I_3 + I_5 = I_5.$$

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Случайно ли ток  $I_3$  оказался равным нулю? Рассматриваемая цепь (рис. 3.12) называется мостовой. В мостовой цепи ток  $I_3$  в ветви  $BB$ , называемой диагональю моста, равен нулю, если произведения сопротивлений противоположных плеч одинаковы. Действительно, в нашем случае  $R_1R_5 = 8 \cdot 5 = 40$  и  $R_2R_4 = 10 \cdot 4 = 40$ , поэтому и оказалось  $I_3 = 0$ .

Мостовые схемы широко применяются в устройствах автоматики, в технике электрических измерений и в частности для измерения сопротивлений.

2. Сколько в рассмотренной цепи (рис. 3.12) соединений звездой и сколько треугольником? В этой цепи два соединения звездой ( $R_1, R_3, R_4$  и  $R_2, R_3, R_5$ ) и два соединения треугольником ( $R_1, R_2, R_3$  и  $R_3, R_4, R_5$ ).

3. Как учесть направление тока в диагонали моста? В начале решения было указано, что ток  $I_3$  может иметь два направления, причем действительное направление заранее неизвестно. Поэтому сначала направление выбираем произвольно. Если направление тока выбрано неправильно, то в результате расчета получится отрицательное значение тока.

### 3.5. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

33. В цепи рис. 3.14  $E = 100$  В;  $R_1 = 2,1$  Ом;  $R_2 = 7,78$  Ом;  $R_3 = 0,3$  Ом;  $R_4 = 0,2$  Ом. Вычислить токи, напряжения и мощности для всех участков цепи, а также мощности источника. Составить баланс мощностей.

34. Определить токи в сопротивлениях  $R_3 = 20$  Ом и  $R_4 = 10$  Ом (рис. 3.14), если ток источника питания  $I = 0,6$  А.

35. В цепи рис. 3.14 преобразовать источник ЭДС в эквивалентный источник тока, приняв последовательно соединенные сопротивления  $R_1$  и  $R_2$  в качестве внутреннего сопротивления источника ЭДС  $E = 10$  В. Вычислить ток источника тока, его собственную проводимость и токи в сопротивлениях  $R_3$  и  $R_4$ , если  $R_1 = R_2 = 4$  Ом;  $R_3 = 6$  Ом;  $R_4 = 12$  Ом.

36. К двум узлам электрической цепи присоединены три ветви. В средней ветви последовательно соединены источник энергии с ЭДС  $E = 60$  и внутренним сопротивлением  $R_{вт} = 0,1$  Ом и два сопротивления  $R_1 = 0,4$  Ом и  $R_6 = 0,5$  Ом. Одна крайняя ветвь имеет три последовательно



соединенных сопротивлений:  $R_3=2$  Ом;  $R_4=10$  Ом;  $R_5=8$  Ом. Другая крайняя ветвь состоит из одного сопротивления  $R_2=5$  Ом. Составить схему. Определить все токи, а также напряжения на выводах источника и между узловыми точками.

37. Для регулирования напряжения  $U_1$  между сеткой и катодом трехэлектродной лампы применяется схема рис. 3.15, у которой  $R_2=100$  кОм;  $R_c=1$  МОм;  $R_1=0 \div 100$  кОм (изменяется в этих пределах).

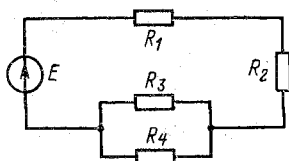


Рис. 3.14. К задаче 33

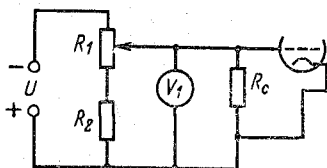


Рис. 3.15. К задаче 37

Напряжение на выводах источника равно  $U$ . Определить предельные значения напряжения  $U_1$  в долях  $U$  для двух значений сопротивления вольтметра  $R_V$ : а) весьма большого (не учитывается); б)  $R_V=1$  МОм.

38. При измерении сопротивлений методом амперметра — вольтметра применяются две схемы (рис. 3.16, а и б). В каждой из схем неизвест-

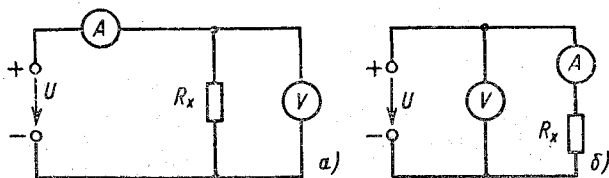


Рис. 3.16. К задаче 38

ное сопротивление  $R_x$  определяется как отношение показаний вольтметра и амперметра. В обеих схемах используются амперметр и вольтметр, сопротивления которых соответственно  $R_A=0,2$  Ом и  $R_V=500$  Ом.

Определить погрешность измерения сопротивлений: 1) 10 Ом; 2) 100 Ом для каждой из схем. Какую из них следует выбрать для измерения малых  $R_x$  и какую для больших  $R_x$ ?

39. В цепи рис. 3.17 определить токи в ветвях и напряжения на сопротивлениях, если  $J=150$  мА;  $R_1=0,5$  кОм;  $R_2=1,5$  кОм;  $R_3=12$  кОм;  $R_4=6$  кОм.

40. Электрическая цепь состоит из трех ветвей. В средней ветви включены источник питания с ЭДС  $E=120$  В и внутренним сопротивлением  $R_{вт}=0,3$  Ом и последовательно с ним сопротивление  $R_3=7,6$  Ом.

В одной из крайних ветвей включены последовательно сопротивления  $R_1=6,6$  Ом и  $R_2=0,4$  Ом, в другой крайней ветви — два параллельно соединенных сопротивления  $R_5=3$  Ом и  $R_6=15$  Ом и последовательно с ними сопротивление  $R_4=0,5$  Ом. Составить схему и вычислить все токи, а также мощности: развиваемую источником, отдаваемую во внешнюю цепь и теряемую на внутреннем сопротивлении. Составить баланс этих мощностей. Выполнить проверку расчетов по законам Кирхгофа.

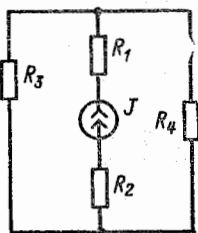


Рис. 3.17. К задаче 39

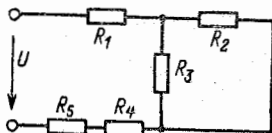


Рис. 3.18. К задаче 41

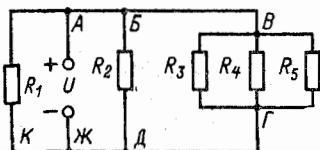


Рис. 3.19. К задаче 42

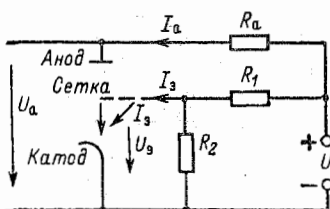


Рис. 3.20. К задаче 43

41. Определить общее сопротивление цепи рис. 3.18, если  $R_1=2,5$  Ом;  $R_2=R_5=60$  Ом;  $R_3=20$  Ом;  $R_4=13,5$  Ом.

42. Для цепи рис. 3.19 дано  $U=120$  В;  $R_1=R_2=R_3=R_4=R_5=120$  Ом. Определить число узловых точек, общее сопротивление цепи, все токи, а также напряжения между узлами. Сделать проверку результатов вычислений по второму закону Кирхгофа для контуров АБВГДЖА, АЖКА и АБДЖКА.

43. У пентода (электронная лампа) анодный ток  $I_a=2$  мА и ток экранной сетки  $I_s=1$  мА направлены к катоду (рис. 3.20), присоединенному к выводу «—» источника с напряжением  $U=240$  В. Напряжение между анодом и катодом  $U_a=140$  В, между экранной сеткой и катодом  $U_s=120$  В, сопротивление  $R_2=24$  кОм. Вычислить сопротивления  $R_1$  и  $R_a$  и выбрать их номинальную мощность (в пределах до 1 Вт сопротивления изготавливаются на мощности 0,25; 0,5 и 1 Вт). Какими окажутся напряжения  $U_a$  и  $U_s$  (рис. 3.20), если электронную лампу вынуть из панели (отсоединить от схемы)?

44. Часть радиосхемы рис. 3.21 имеет следующие параметры:  $U = 300$  В;  $R_1 = 5$  кОм (номинальная мощность 0,25 Вт);  $I_a = 6$  мА. Через конденсатор  $C$  постоянный ток не проходит. При работе при влажном климате повредилась изоляция конденсатора  $C$  и он пробился (замкнулись пластины). Каковы последствия повреждения?

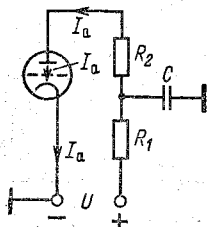


Рис. 3.21. К задаче 44

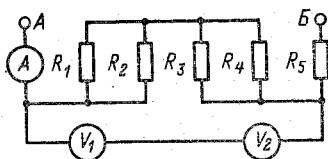


Рис. 3.22. К задаче 45

45. При монтаже цепи рис. 3.22 в результате нагрева паяльником произошел обрыв в сопротивлении  $R_1$ . Как при этом изменятся (увеличатся или уменьшатся) показания всех приборов, изображенных на схеме, если напряжение между выводами  $A$  и  $B$  осталось прежним?

46. В цепи рис. 3.22 при нарушении нормальной работы показание амперметра увеличилось, вольтметр  $V_1$  показывает нуль, вольтметр  $V_2$  — напряжение, равное напряжению между выводами  $A$  и  $B$ . Какова возможная неисправность?

47. Какие значения покажут приборы в цепи рис. 3.23, если точки  $K$  и  $N$  соединить проводником, сопротивление которого можно принять равным нулю?

48. Как будут изменяться показания приборов в цепи рис. 3.23 по мере перемещения ползунка реостата  $R_1$  от точки  $M$  вниз?

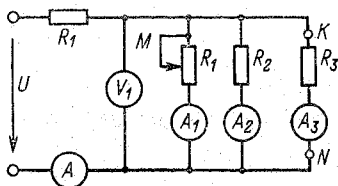


Рис. 3.23. К задаче 47

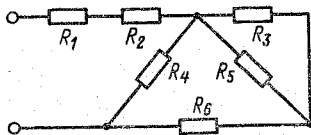


Рис. 3.24. К задаче 49

49. Составить выражение для общего сопротивления цепи рис. 3.24 и вычислить его, если  $R_1 = R_2 = R_3 = R_5 = 5,5$  Ом;  $R_4 = 12$  Ом;  $R_6 = 3,25$  Ом.

50. Определить общее сопротивление цепи рис. 3.25, если  $R_1 = R_4 = 60$  Ом;  $R_2 = R_5 = 40$  Ом;  $R_3 = 10$  Ом;  $R_6 = 80$  Ом.

51. В цепи, схема которой приведена на рис. 3.26, амперметр пока-

зывает ток 0,5 мА. Определить напряжение на выводах источника, если  $R_1=600 \text{ Ом}$ ;  $R_2=6 \text{ кОм}$ ;  $R_3=2 \text{ кОм}$ ;  $R_4=1 \text{ кОм}$ ;  $R_5=4 \text{ кОм}$ .

52. К выводам источника энергии с внутренним сопротивлением  $R_{вт}=0,8 \text{ Ом}$  присоединены две ветви. В одной из них — неизвестное сопротивление  $R_x$ , по которому проходит ток  $I=0,5 \text{ А}$ . В другой ветви —

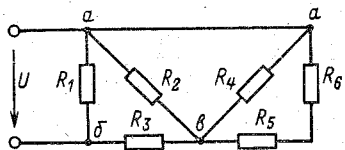


Рис. 3.25. К задаче 50

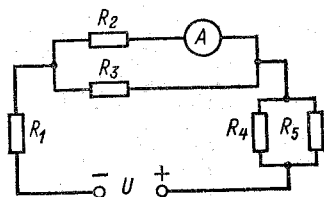


Рис. 3.26. К задаче 51

три сопротивления:  $R_2=24 \text{ Ом}$ ;  $R_3=10 \text{ Ом}$  и  $R_4=15 \text{ Ом}$ , причем  $R_3$  и  $R_4$  включены параллельно, а  $R_2$  — последовательно к ним. Определить сопротивление  $R_x$  и ЭДС источника, если падение напряжения на сопротивлении  $R_3$  равно 12 В.

53. Амперметры  $A_1$  и  $A_2$  (рис. 3.27) соответственно показывают токи 1,6 и 2,4 мА. Определить сопротивление  $R_x$  и ЭДС источника энергии, если  $R_1=R_2=5 \text{ кОм}$ ;  $R_3=1,5 \text{ кОм}$ ;  $R_4=2 \text{ кОм}$ . Внутренним сопротивлением источника и сопротивлениями амперметров пренебречь.

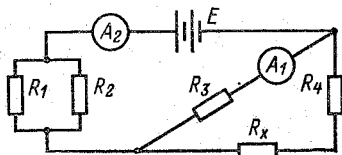


Рис. 3.27. К задаче 53

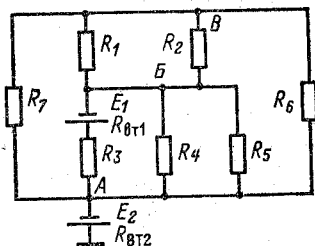


Рис. 3.28. К задаче 54

54. Для цепи рис. 3.28 дано:  $E_1=E_2=4,8 \text{ В}$ ;  $R_1=R_2=960 \text{ Ом}$ ;  $R_3=260 \text{ Ом}$ ;  $R_4=R_5=720 \text{ Ом}$ ;  $R_6=600 \text{ Ом}$ ;  $R_7=400 \text{ Ом}$ ; внутреннее сопротивление  $R_{вт1}=R_{вт2}=0$ . Вычислить все токи и потенциалы точек А, В и В.

55. От двухпроводной линии из алюминиевых проводов диаметром 4 мм и длиной 1 км питается двигатель напряжением  $U_2=450 \text{ В}$ . Напряжение в начале линии  $U_1=500 \text{ В}$ . Составить схему цепи и определить потерю напряжения, ток и плотность тока в линии, а также мощность потребителя и стоимость энергии, теряемой в линии за месяц, при сред-

несуточной работе в течение 10 ч и тарифе на электроэнергию 4 коп. за 1 кВт·ч.

56. На сколько вольт можно уменьшить напряжение генератора из предыдущей задачи, подключенного в начале линии, если заменить алюминиевые провода медными и сохранить неизменным режим двигателя?

57. Определить сопротивление алюминиевых проводов линии, питающей потребитель мощностью 4,5 кВт и напряжением  $U_2=450$  В, если напряжение  $U_2$  изменяется на 1 % при колебаниях температуры на  $\pm 30$  °С. Принять сопротивление проводов много меньшим сопротивления потребителя.

### 3.6. ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ. 3

33. 10 А; 4 А; 6 А; 21 В; 77,8 В; 1,2 В; 210 Вт; 778 Вт; 12 Вт; 1000 Вт ( $210+778+12=1000$  Вт).

34. 0,2 А; 0,4 А.

35. 1,25 А; 0,125 См; 0,54 А; 0,27 А.

36. 12 А; 9,6 А; 2,4 А; 58,8 В; 48 В.

37. От  $U$  до  $0,48U$ ; от  $U$  до  $0,45U$ .

38. 1) 2 и 2 %; 2) 16,5 и 0,2 %.

39. 50 мА; 100 мА; 150 мА; 75 В; 225 В; 600 В.

40. 3,6 А; 12 А; 8,4 А; 7 А; 1,4 А; 1440 Вт; 43 Вт; 1397 Вт.

41. 91 Ом.

42. Две; 24 Ом; общий ток 5 А; токи в сопротивлениях по 1 А; 120 В.

43. 20 кОм (1,0 Вт); 50 кОм (0,25 Вт); 240 В; 131 В.

44. Мощность в сопротивлении  $R_1$  составит 18 Вт при допустимой 0,25 Вт, и оно сгорит.

45. Амперметр и вольтметр  $V_2$  покажут меньше, а вольтметр  $V_1$  — больше.

46. Короткое замыкание сопротивления  $R_1$  или  $R_2$ .

47. Вольтметр и амперметры  $A_1, A_2, A_3$  покажут нуль, общий амперметр — ток  $I=U/R_1$ .

48. Показания амперметров  $A$  и  $A_1$  возрастают, остальных приборов уменьшаются.

49.

$$R_{\text{общ}} = R_1 + R_2 + \frac{[R_3 R_5 / (R_3 + R_5) + R_6] R_4}{R_3 R_5 / (R_3 + R_5) + R_6 + R_4} = 15 \text{ Ом.}$$

50. 20 Ом.

51. 5,8 В.

52. 120 Ом; 62 В.

53. 1 кОм; 8,4 В.

54. 9,6 мА; 3,2 мА; 3,2 мА; 1,6 мА; 1,6 мА; 1,28 мА; 1,92 мА;  $V_A = -4,8$  В;  $V_B = -7,1$  В;  $V_C = 5,68$  В.

55. 50 В; 10,8 А; 0,86 А/мм<sup>2</sup>; 4,9 кВт; 6 р. 50 к.

56. 20 В.

57. 1,8 Ом.

## Глава четвертая

# РАЗВЕТВЛЕННАЯ ЦЕПЬ ПОСТОЯННОГО ТОКА С НЕСКОЛЬКИМИ ИСТОЧНИКАМИ ЭНЕРГИИ, ВКЛЮЧЕННЫМИ В РАЗНЫЕ ВЕТВИ

### 4.1. МЕТОД НАЛОЖЕНИЯ ТОКА

#### Условие задачи

Для цепи рис. 4.1 определить токи во всех участках и напряжения между узловыми точками А, Б и В при следующих данных:  $R_1=R_3=2$  Ом;  $R_2=1,6$  Ом;  $E_1=3,6$  В;  $E_2=4,8$  В;  $R_{вт1}=R_{вт2}=0,5$  Ом.

#### Решение задачи

1. Применение метода наложения к цепи рис. 4. 1. Разветвленные цепи с несколькими источниками

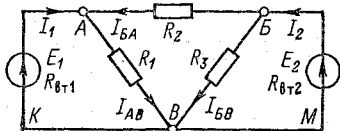


Рис. 4.1. Сложная цепь с двумя источниками энергии

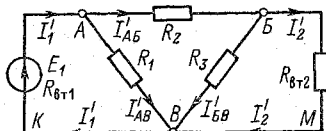


Рис. 4.2. Исключение одной ЭДС из сложной цепи

ми энергии, включенными в разные ветви, к числу которых относится и цепь рис. 4.1, являются сложными цепями. Для расчета таких сложных электрических цепей существует ряд методов, один из которых (метод наложения) рассматривается в этом параграфе, а другие методы — в следующих параграфах.

По методу наложения ток в любом участке цепи рассматривается как алгебраическая сумма частичных токов, созданных каждой ЭДС в отдельности. В нашем случае следует: во-первых, определить частичные токи от ЭДС  $E_1$  при отсутствии ЭДС  $E_2$ , т. е. рассчитать простую цепь

по рис. 4.2; во-вторых, найти частичные токи от ЭДС  $E_2$  при отсутствии ЭДС  $E_1$ , т. е. рассчитать простую цепь по рис. 4.3; в-третьих, алгебраически сложить частичные токи двух последних схем.

Итак, метод наложения позволяет заменить расчет одной сложной цепи с несколькими источниками энергии (рис. 4.1) расчетом нескольких (в данном случае двух) цепей с одним источником энергии в каждой.

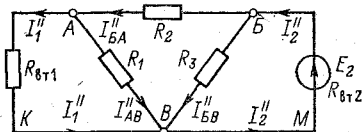


Рис. 4.3. Исключение второй ЭДС из сложной цепи

2. Обозначение частичных токов. Все частичные токи от ЭДС  $E_1$  (рис. 4.2) обозначим буквой  $I$  с одним штрихом, а все частичные токи от ЭДС  $E_2$

(рис. 4.3) — с двумя штрихами.

3. Вычисление частичных токов. Для цепи с ЭДС  $E_1$  (рис. 4.2) рассчитаем сначала общее сопротивление. Сопротивление участка  $BB'$

$$R'_{BB'} = R_3 R_{вт2} / (R_3 + R_{вт2}) = 2 \cdot 0,5 / (2 + 0,5) = 0,4 \text{ Ом.}$$

Оно соединено последовательно с сопротивлением  $R_2$ , поэтому

$$R_{ABB'} = R_2 + R'_{BB'} = 1,6 + 0,4 = 2 \text{ Ом.}$$

Два одинаковых сопротивления  $R_{ABB'}$  и  $R_1$  соединены параллельно, поэтому общее сопротивление всей внешней цепи

$$R'_{AB} = R_1 / 2 = 2 / 2 = 1 \text{ Ом.}$$

Ток источника

$$I_1' = E_1 / (R_{вт1} + R'_{AB}) = 3,6 / 1,5 = 2,4 \text{ А}$$

разветвляется в узловой точке  $A$  на два одинаковых тока:

$$I'_{AB} = I'_{AB} = I_1' / 2 = 1,2 \text{ А.}$$

Ток  $I'_{AB}$  разветвляется в узловой точке  $B$  на токи

$$I_2' = I'_{AB} R_3 / (R_{вт2} + R_3) = 1,2 \cdot 2 / 2,5 = 0,96 \text{ А;}$$

$$I'_{BB'} = I'_{AB} - I_2' = 1,2 - 0,96 = 0,24 \text{ А.}$$

Для цепи с ЭДС  $E_2$  (рис. 4.3)

$$R''_{AB} = R_1 R_{вт1} / (R_1 + R_{вт1}) = 2 \cdot 0,5 / (2 + 0,5) = 0,4 \text{ Ом};$$

$$R''_{BAВ} = R_2 + R''_{AB} = 1,6 + 0,4 = 2,0 \text{ Ом};$$

$$R''_{BB} = R''_{BAВ} / 2 = 2 / 2 = 1 \text{ Ом},$$

так как  $R_3 = R''_{BAВ}$ .

В ветви источника с ЭДС  $E_2$  ток

$$I''_2 = E_2 / (R''_{BB} + R_{вт2}) = 4,8 / 1,5 = 3,2 \text{ А}.$$

Поскольку  $R''_{BAВ} = R_3 = 2,0 \text{ Ом}$ , ток

$$I''_{BA} = I''_{BB} = I''_2 / 2 = 3,2 / 2 = 1,6 \text{ А}.$$

Токи в параллельных ветвях участка  $AB$

$$I''_1 = I''_{BA} R_1 / (R_{вт1} + R_1) = 1,6 \cdot 2 / 2,5 = 1,28 \text{ А};$$

$$I''_{AB} = I''_{BA} - I''_1 = 1,6 - 1,28 = 0,32 \text{ А}.$$

**4. Вычисление токов в исходной цепи (рис. 4.1).** Выполним алгебраическое сложение частичных токов.

На участке  $BKA$  частичный ток  $I'_1$  (рис. 4.2) направлен от узла  $B$  к узлу  $A$ , а частичный ток  $I''_1$  (рис. 4.3) — от узла  $A$  к узлу  $B$ , т. е. навстречу первому. Поэтому суммарный ток

$$I_1 = I'_1 - I''_1 = 2,4 - 1,28 = 1,12 \text{ А}.$$

Направление тока  $I_1$  (рис. 4.1) совпадает с направлением большего частичного тока, т. е. тока  $I'_1$ .

Аналогичным образом определяем  $I_{BA}$  и  $I_2$ :

$$I_{BA} = I''_{BA} - I'_{AB} = 1,6 - 1,2 = 0,4 \text{ А};$$

$$I_2 = I''_2 - I'_2 = 3,2 - 0,96 = 2,24 \text{ А}.$$

Направления токов  $I_{BA}$  и  $I_2$  (рис. 4.1) совпадают с направлениями токов  $I''_{BA}$  и  $I''_2$  соответственно.

В ветви  $AB$  оба частичных тока ( $I''_{AB}$  и  $I'_{AB}$ ) совпадают по направлению, поэтому

$$I_{AB} = I''_{AB} + I'_{AB} = 1,2 + 0,32 = 1,52 \text{ А}.$$

Аналогично

$$I_{BB} = I''_{BB} + I'_{BB} = 0,24 + 1,6 = 1,84 \text{ А}.$$



5. Вычисление напряжений. Напряжения между узловыми точками

$$U_{BA} = I_{BA} R_2 = 0,4 \cdot 1,6 = 0,64 \text{ В};$$

$$U_{AB} = I_{AB} R_1 = 1,52 \cdot 2 = 3,04 \text{ В};$$

$$U_{BB} = I_{BB} R_3 = 1,84 \cdot 2 = 3,68 \text{ В}.$$

6. Проверка результатов вычислений. Для проверки расчетов составим уравнения по законам Кирхгофа.

Для узла А  $I_{AB} = I_1 + I_{BA}$ ; действительно  $1,52 = 1,12 + 0,4$ .

Для узла В  $I_2 = I_{BA} + I_{BB}$ ; действительно  $2,24 = 0,4 + 1,84$ .

Для контура АБВ  $U_{AB} - U_{BB} + U_{BA} = 0$ ; действительно  $+3,04 - 3,68 + 0,64 = 0$  (обход против направления движения стрелки часов).

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Как применяется метод наложения для расчета цепей, содержащих более двух источников? Если сложная цепь содержит, например, три источника с ЭДС  $E_1$ ,  $E_2$  и  $E_3$ , включенные в разные ветви, то следует составить три схемы для расчета частичных токов: одна схема будет содержать только ЭДС  $E_1$ , другая — только ЭДС  $E_2$ , а третья — только ЭДС  $E_3$ . Рассчитав в трех схемах частичные токи и алгебраически сложив их, получим токи заданной цепи.

2. В каких случаях для расчета сложной цепи целесообразно применять метод наложения? Наиболее трудоемкой частью в расчетах по методу наложения является вычисление частичных токов. Поэтому его применяют при небольшом числе источников — при двух, иногда трех. Этот метод удобен также в тех случаях, когда не нужен полный расчет цепи, а требуется найти, например, только токи в участках с источниками.

3. В каких случаях расчет токов методом наложения может привести к большим погрешностям в результатах? Если результирующий ток ветви выражается разностью двух близких значений, то незначительная относительная погрешность в определении слагаемых (частичных токов) может привести к весьма большой относительной погрешности результата

(действительного тока ветви). В таких случаях метод наложения применять нецелесообразно.

## 4.2. МЕТОД УРАВНЕНИЙ КИРХГОФА

### Условие задачи

Для цепи рис. 4.4 дано:  $E_1=60$  В;  $E_2=48$  В;  $E_3=6$  В;  $R_1=200$  Ом;  $R_2=100$  Ом;  $R_3=10$  Ом. Требуется определить токи во всех ветвях. Принять  $R_{вт1}=R_{вт2}=R_{вт3}=0$ .

### Решение задачи

1. Сущность метода. Этот метод основан на применении первого и второго законов Кирхгофа, не требует никаких преобразований схемы и пригоден для расчета любой цепи — в этом его преимущество.

Сколько же нужно составить уравнений для расчета цепи? Очевидно, столько, сколько неизвестных величин, в нашем случае — токов. Поэтому начнем решение задачи с определения числа неизвестных токов.

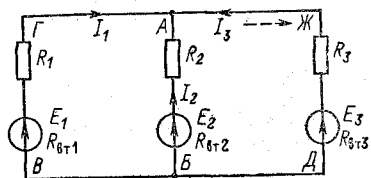


Рис. 4.4. Сложная цепь с тремя ветвями

2. Определение числа неизвестных токов и выбор их направлений. Как известно, в каждом неразветвленном участке цепи (ветви) ток имеет одно и то же значение от начала до конца участка. В рассматриваемой цепи (рис. 4.4) к узловым точкам А и В присоединены три ветви:  $БВГА$  с током  $I_1$ ,  $БА$  с током  $I_2$ ,  $БДЖА$  с током  $I_3$ .

Итак, число различных токов равно числу ветвей электрической цепи.

Как определить направления этих токов?

Нам уже известно, что в сложной цепи до ее расчета узнать направления всех токов нельзя. Поэтому вначале направления токов выбирают произвольно (положительные направления токов) и при выбранных направлениях составляют уравнения. Затем решают эти уравнения и определяют истинные направления токов по их алгебраическим знакам, а именно: токи, действительные направления которых обратны выбранным, выражаются отрицательными числами.

Так, в нашем случае можно заранее сказать, что не все выбранные направления токов (рис. 4.4, сплошные стрелки) совпадают с действительными, так как не могут все токи притекать к узлу А. Очевидно, что одни или два тока выразятся отрицательными числами.

*Итак, токи в уравнениях Кирхгофа являются алгебраическими величинами, знаки которых зависят от направлений токов.*

3. Составление уравнений по законам Кирхгофа. В нашей задаче три неизвестных тока ( $I_1, I_2, I_3$ ), для определения которых составим три уравнения.

Начнем с уравнений по первому закону Кирхгофа как более простых. Для цепи с  $q$  узлами можно составить  $q-1$  независимых уравнений; для одного (любого) узла цепи уравнение не следует составлять, так как оно было бы следствием предыдущих.

В цепи рис. 4.4 два узла. Поэтому составим одно уравнение по первому закону Кирхгофа, например, для узла А:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0. \quad (4.1)$$

Два недостающих уравнения составим по второму закону Кирхгофа, выбрав для этого, например, контуры БАЖДБ и ВГЖДВ (чтобы уравнения были независимы, в каждый следующий контур должна входить одна новая ветвь, не входившая в предыдущие).

Принимая обход каждого контура по направлению движения часовой стрелки и учитывая правила знаков (см. § 1.1, п. 5), получим

$$R_2 I_2 - R_3 I_3 = E_2 - E_3; \quad (4.2)$$

$$R_1 I_1 - R_3 I_3 = E_1 - E_3. \quad (4.3)$$

4. Вычисление токов. Подставив в (4.2) и (4.3) значения сопротивлений и ЭДС, получим

$$100I_2 - 10I_3 = 42; \quad (4.4)$$

$$200I_1 - 10I_3 = 54. \quad (4.5)$$

*Итак, вычисление токов сводится к решению системы трех уравнений (4.1), (4.4) и (4.5) с тремя неизвестными. Для этого, например, определим ток  $I_2$  из (4.1) и подставим его значение в (4.4):*

$$- 100(I_1 + I_3) - 10I_3 = 42;$$

приведя подобные члены, получим

$$-100I_1 - 110I_3 = 42. \quad (4.6)$$

Получилось два уравнения (4.5) и (4.6) с двумя неизвестными  $I_1$  и  $I_3$ .

Умножив уравнение (4.6) на 2 и сложив его с уравнением (4.5), получим

$$-10I_3 - 220I_3 = 138,$$

откуда  $I_3 = -138/230 = -0,6$  А.

Подставив значение тока  $I_3$  в (4.6), получим

$$-100I_1 - 110(-0,6) = 42,$$

откуда

$$I_1 = (42 - 66)/(-100) = 0,24 \text{ А.}$$

Ток  $I_2$  определим из (4.1):

$$I_2 = -I_1 - I_3 = -0,24 + 0,6 = 0,36 \text{ А.}$$

Токи  $I_1$  и  $I_2$  имеют положительные значения, а  $I_3$  — отрицательное, следовательно, направления первых двух токов были выбраны правильно, а тока  $I_3$  — неправильно. Действительное направление тока  $I_3$  указано пунктирной стрелкой на рис. 4.4. При этом сумма притекающих к узлу А токов  $I_1 + I_2 = 0,24 + 0,36 = 0,6$  А равна оттекающему току  $I_3 = 0,6$  А.

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Сколько электрических контуров имеют цепи, показанные на рис. 4.4 и 4.1? Электрическая цепь рис. 4.4 имеет три контура: ГАБВГ, ГЖДВГ и АЖДБА. Для составления двух уравнений по второму закону Кирхгофа необходимо и достаточно выбрать два контура. Проще всего выбрать контуры, образующие отдельные ячейки, в нашем случае ГАБВГ и АЖДБА. Число ячеек всегда равно числу независимых уравнений, которые надо составить по второму закону Кирхгофа.

Для расчета цепи рис. 4.1 при помощи законов Кирхгофа надо составить пять независимых уравнений (цепь состоит из пяти ветвей). Цепь имеет три узла А, Б, В, значит, по первому закону Кирхгофа можно составить два независимых уравнения. Недостающие три уравнения нужно составить по второму закону Кирхгофа.

В цепи рис. 4.1 можно наметить шесть контуров (АВКА, АБВКА, АБМКА, АББА, АБМВА и БМВБ), но независи-

мые уравнения получаются только для трех контуров, например для трех ячеек: *АВКА*, *АБВА* и *БМВБ*, в каждую из которых входит новая ветвь.

*Итак, разветвленная электрическая цепь имеет больше контуров, чем необходимо и возможно использовать для составления уравнений.*

2. Как вести расчет, если заданы значения токов, но неизвестны другие параметры цепи. Очевидно, что из трех независимых уравнений (4.1) — (4.3), составленных для цепи рис. 4.4, можно определить любые три неизвестные величины. Например, при заданных токах и сопротивлениях можно определить ЭДС  $E_1$ ,  $E_2$  и  $E_3$ , а по известным токам и ЭДС — три сопротивления.

Итак, порядок расчета цепи по методу уравнений Кирхгофа не зависит от того, какие величины заданы и какие неизвестны. Число неизвестных величин не должно быть больше числа независимых уравнений, которые можно составить по первому и второму законам Кирхгофа.

3. Следует ли принимать одинаковое направление обхода для всех контуров? При составлении уравнений (4.2) и (4.3) было выбрано одно и то же направление обхода этих контуров (по направлению движения часовой стрелки). Приняв для одного из них, например *АЖДБА* (рис. 4.4), противоположное направление обхода, получим

$$R_3 I_3 - R_2 I_2 = E_3 - E_2. \quad (4.7)$$

Сравнивая (4.2) и (4.7), легко убедиться, что они тождественны, так как различаются только противоположными знаками всех членов уравнения.

*Итак, для каждого контура направление обхода может быть выбрано произвольно.*

4. Целесообразно ли предыдущую задачу (рис. 4.1) решать методом уравнений Кирхгофа? Электрическая цепь рис. 4.1 имеет пять неизвестных токов, и для их вычисления потребовалось бы пять уравнений (два по первому и три по второму закону Кирхгофа).

Решение системы из пяти уравнений не проще, чем вычисление токов в двух простых цепях по методу наложения.

### 4.3. МЕТОД КОНТУРНЫХ ТОКОВ

Решить задачу, рассмотренную в § 4.1 (рис. 4.1 и 4.5), методом контурных токов.

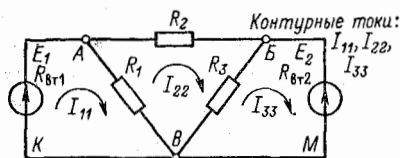


Рис. 4.5. Контурные токи в цепи, состоящей из трех ячеек

#### Решение задачи

1. Определение числа контурных токов. При расчете цепи методом контурных токов применяется только второй закон Кирхгофа, поэтому число уравнений, которые надо решать совместно, меньше. Достигается это разделением схемы на ячейки и введением контурных токов, проходящих по ячейкам.

В заданной цепи (рис. 4.5) можно выделить три ячейки-контур с тремя токами:  $I_{11}$  — в контуре  $ВКАВ$ ,  $I_{22}$  — в контуре  $ВАБВ$ ,  $I_{33}$  — в контуре  $ВБМВ$ . Положительные направления контурных токов можно выбирать одинаковыми (рис. 4.5) по направлению движения часовой стрелки, а действительные направления токов определятся после расчета цепи.

Приняв для токов ветвей направления по рис. 4.1, выразим эти токи через контурные  $I_{11}$ ,  $I_{22}$ ,  $I_{33}$  (рис. 4.5):

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= I_{11}; & I_{БА} &= -I_{22}; & I_2 &= -I_{33}; \\ I_{АВ} &= I_{11} - I_{22}; & I_{БВ} &= I_{22} - I_{33}. \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

Итак, в рассматриваемой цепи через три контурных тока выражаются токи всех пяти ветвей.

2. Определение собственных и общих сопротивлений контуров. Сумма всех сопротивлений контура называется его собственным сопротивлением. Для контура  $ВКАВ$  (рис. 4.5) собственное сопротивление

$$R_{11} = R_{вт1} + R_1 = 0,5 + 2 = 2,5 \text{ Ом},$$

а для контуров, по которым замыкаются токи  $I_{22}$  и  $I_{33}$

(рис. 4.5), соответственно

$$R_{22} = R_1 + R_2 + R_3 = 2 + 1,6 + 2 = 5,6 \text{ Ом};$$

$$R_{33} = R_3 + R_{\text{вт}2} = 2 + 0,5 = 2,5 \text{ Ом}.$$

Сопротивление общей ветви двух контуров называется общим сопротивлением. В нашем случае ветвь  $AB$  входит в первый и второй контуры, поэтому ее сопротивление  $R_1$  является общим. Его можно рассматривать как сопротивление связи первого контура со вторым ( $R_{12}$ ) или второго с первым ( $R_{21}$ ), т. е.

$$R_{12} = R_{21} = R_1.$$

Аналогично общее сопротивление второго и третьего контуров

$$R_{23} = R_{32} = R_3.$$

При наших данных

$$R_{12} = R_{21} = R_{23} = R_{32} = 2 \text{ Ом}.$$

3. Составление контурных уравнений и вычисление токов. Составим контурное уравнение (уравнение по второму закону Кирхгофа) для контура  $BKAB$ :

$$R_{\text{вт}1} I_1 + R_1 I_{AB} = E_1.$$

Заменив ток  $I_{AB}$  разностью  $I_{11} - I_{22}$  и объединив члены уравнения с током  $I_{11}$ , получим

$$(R_{\text{вт}1} + R_1) I_{11} - R_1 I_{22} = E_1. \quad (4.9)$$

В этом уравнении алгебраическая сумма падений напряжения выражается произведением тока рассматриваемого контура  $I_{11}$  на его собственное сопротивление  $R_{11}$ , взятое со знаком плюс, и произведением тока другого контура  $I_{22}$  на общее сопротивление контуров  $R_{12}$ , взятое со знаком минус, т. е.  $R_{11}I_{11} - R_{12}I_{22} = E_1$ .

Положительный знак для падения напряжения, создаваемого собственным током контура ( $R_{11}I_{11}$ ), и отрицательные знаки для падений напряжений, создаваемых на общих сопротивлениях токами других контуров ( $-R_{12}I_{22}$ ), получаются всегда при одинаковом направлении контурных токов (рис. 4.5—по часовой стрелке) и обходе ячейки-контура по направлению ее контурного тока.

Придерживаясь тех же правил, составим аналогичные уравнения для контура  $BAВВ$ :

$$R_{22} I_{22} - R_{21} I_{11} - R_{23} I_{33} = 0 \quad (4.10)$$

и для контура ВВМВ:

$$R_{33} I_{33} - R_{32} I_{22} = -E_2. \quad (4.11)$$

В последнем уравнении ЭДС  $E_2$  записана со знаком минус, так как направление обхода последней ячейки противоположно направлению действия ЭДС.

Подставив в (4.9)—(4.11) вычисленные выше значения собственных и общих сопротивлений контуров, получим систему трех уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 2,5I_{11} - 2I_{22} &= 3,6; \\ -2I_{11} + 5,6I_{22} - 2I_{33} &= 0; \\ -2I_{22} + 2,5I_{33} &= -4,8. \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

Из последнего выразим ток  $I_{33}$ :

$$I_{33} = (2I_{22} - 4,8)/2,5 = 0,8I_{22} - 1,92 \quad (4.13)$$

и, подставив его значение во второе уравнение системы (4.12), получим

$$-2I_{11} + 4I_{22} + 3,84 = 0.$$

Последнее уравнение совместно с первым уравнением системы (4.12) составляет систему двух уравнений:

$$\begin{aligned} -2I_{11} + 4I_{22} &= -3,84; \\ 2,5I_{11} - 2I_{22} &= 3,6. \end{aligned}$$

Умножив все члены второго уравнения на два и сложив почленно с первым, получим

$$3I_{11} = 7,2 - 3,84,$$

или

$$I_{11} = 1,12 \text{ А.}$$

Из первого уравнения системы (4.12) определим ток во втором контуре:

$$I_{22} = (2,5I_{11} - 3,6)/2 = (2,5 \cdot 1,12 - 3,6)/2 = -0,4 \text{ А.}$$

Полученное значение тока  $I_{22}$  подставим в (4.13), и определим контурный ток в третьем контуре:

$$I_{33} = -0,8 \cdot 0,4 - 1,92 = -2,24 \text{ А.}$$

Как было показано (4.8), через найденные значения контурных токов  $I_{11}$ ,  $I_{22}$ ,  $I_{33}$  выражаются токи всех ветвей схемы (рис. 4.1):

$$I_1 = I_{11} = 1,12 \text{ А; } I_{BA} = -I_{22} = 0,4 \text{ А;}$$



$$I_2 = -I_{33} = 2,24 \text{ A}; \quad I_{AB} = I_{11} - I_{22} = 1,12 + 0,4 = 1,52 \text{ A};$$

$$I_{BB} = I_{22} - I_{33} = -0,4 + 2,24 = 1,84 \text{ A}.$$

Полученные результаты совпадают с ранее найденными (§ 4.1).

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Можно ли выбрать различные направления для контурных токов  $I_{11}$ ,  $I_{22}$ ,  $I_{33}$  (рис. 4.5)? Конечно можно, но усложнится правило знаков при составлении контурных уравнений. При одинаковом направлении всех контурных токов, как было принято в задаче, все падения напряжения на общем сопротивлении двух контуров от тока соседнего контура записывались с отрицательным знаком. Единообразие знаков будет нарушено при различных направлениях контурных токов  $I_{11}$ ,  $I_{22}$ ,  $I_{33}$ .

2. Сколько уравнений требуется для расчета цепи методом контурных токов?

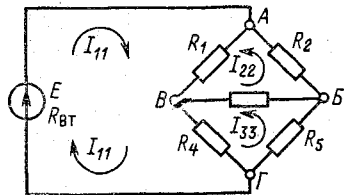


Рис. 4.6. Контурные токи в мостовой цепи

При рассмотрении метода уравнений Кирхгофа было показано, что число необходимых уравнений равно числу ветвей  $m$ . При расчете цепи методом контурных токов отпадает необходимость составлять уравнения по первому закону Кирхгофа, поэтому число уравнений сокращается на  $n-1$ , где  $n$  — число узлов. Таким обра-

зом, для расчета цепи методом контурных токов необходимо составить и решить  $m-n+1$  уравнений.

3. В каких случаях целесообразно применять метод контурных токов? Преимущества этого метода по сравнению с предыдущим (§ 4.2) возрастают для цепей с большим числом узлов.

Так, для расчета токов в мостовой схеме (рис. 4.6), имеющей шесть ветвей и три ячейки, потребовалось бы шесть уравнений по первому и второму законам Кирхгофа и только три уравнения по методу контурных токов:

$$I_{11}(R_{вт} + R_1 + R_4) + I_{22}R_1 + I_{33}R_4 = E;$$

$$I_{22}(R_1 + R_2 + R_3) + I_{11}R_1 - I_{33}R_3 = 0;$$

$$I_{33}(R_3 + R_4 + R_5) + I_{11}R_4 - I_{22}R_3 = 0.$$

Очевидно, что расчет мостовой схемы методом контурных токов (решение составленной системы уравнений) можно выполнить быстрее, чем методом преобразования, рассмотренным для этой задачи в § 3.4.

#### 4.4. МЕТОД УЗЛОВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

##### Условие задачи

Решить задачу, рассмотренную в § 4.1 и 4.3 (рис. 4.1 и 4.5), методом узловых потенциалов.

##### Решение задачи

1. Взаимосвязь токов ветвей и потенциалов узлов. По сопротивлению  $R_2$  (рис. 4.1), присоединенному к узловым точкам  $A$  и  $B$  с потенциалами  $V_A$  и  $V_B$ , проходит ток

$$I_{BA} = (V_B - V_A)/R_2 = (V_B - V_A) G_2, \quad (4.14)$$

где  $G_2 = 1/R_2$  — проводимость ветви  $BA$ .

Приняв для ветвей  $AB$  и  $BB$ , не содержащих ЭДС (рис. 4.1), проводимости  $G_1 = 1/R_1$  и  $G_3 = 1/R_3$  и потенциалы узлов  $V_A$ ,  $V_B$ ,  $V_B$ , запишем по аналогии с (4.14) токи этих ветвей:

$$I_{AB} = (V_A - V_B) G_1; \quad (4.15)$$

$$I_{BB} = (V_B - V_B) G_3. \quad (4.16)$$

Для двух оставшихся ветвей цепи (рис. 4.1), содержащих ЭДС, напряжения между узлами ветвей, или разность потенциалов узлов, определяются выражениями

$$V_A - V_B = E_1 - R_{вт1} I_1$$

и

$$V_B - V_B = E_2 - R_{вт2} I_2,$$

из которых имеем

$$I_1 = [E_1 - (V_A - V_B)] G_{вт1}; \quad (4.17)$$

$$I_2 = [E_2 - (V_B - V_B)] G_{вт2}, \quad (4.18)$$

где  $G_{вт1} = 1/R_{вт1}$  и  $G_{вт2} = 1/R_{вт2}$ .

Уравнения (4.14) — (4.18) показывают, что все токи цепи рис. 4.1 выражаются через три узловых потенциала, а если учесть, что можно принять равным нулю потенциал

одной точки цепи (§ 2.3), например  $V_B=0$ , то в нашем случае пять токов ( $I_{BA}$ ,  $I_{AB}$ ,  $I_{BB}$ ,  $I_1$ ,  $I_2$ ) определяются значениями двух потенциалов  $V_A$  и  $V_B$  (при заданных параметрах и ЭДС цепи). Таким образом, на основе узловых потенциалов можно получить удобный метод расчета цепи, в чем ниже убедимся.

2. Определение собственных и общих проводимостей узлов. Сумма всех проводимостей ветвей, примыкающих к узлу цепи, называется его собственной проводимостью. Для узла  $A$  (рис. 4.1) собственная проводимость

$$G_{AA} = G_1 + G_2 + G_{вт1} = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_{вт1}, \quad (4.19)$$

или при наших данных

$$G_{AA} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1,6} + \frac{1}{0,5} = 3,125 \text{ См.}$$

Аналогично для узла  $B$  собственная проводимость

$$G_{BB} = G_2 + G_3 + G_{вт2},$$

и, учитывая одинаковые заданные значения сопротивлений или проводимостей ветвей, имеем  $G_{BB} = G_{AA} = 3,125$  См.

Кроме собственной проводимости узла выделяют в цепи и другой вид проводимости — между двумя узлами, которую называют их общей проводимостью. Так, по рис. 4.1 узел  $A$  связан с узлом  $B$  общей проводимостью

$$G_{AB} = 1/R_2 = G_2, \quad (4.20)$$

а с узлом  $B$  — проводимостями двух ветвей (с сопротивлениями  $R_1$  и  $R_{вт1}$ ). Поэтому общая проводимость узлов  $A$  и  $B$

$$G_{AB} = G_1 + G_{вт1} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{вт1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{0,5} = 2,5 \text{ См.}$$

3. Составление узловых уравнений и вычисление потенциалов. Узловые уравнения составляются на основании первого закона Кирхгофа. Для узла  $A$  (рис. 4.1) имеем

$$I_1 - I_{AB} + I_{BA} = 0. \quad (4.21)$$

В этом уравнении заменим токи в соответствии с (4.14), (4.15), (4.17), в которых примем потенциал  $V_B=0$ , и после объединения слагаемых с потенциалами  $V_A$  и  $V_B$  получим

$$V_A (G_{вт1} + G_2 + G_1) - V_B G_2 = G_{вт1} E_1, \quad (4.22)$$

где коэффициенты у потенциалов  $V_A$  и  $V_B$  уже знакомы по формулам (4.19) и (4.20). С их учетом перепишем (4.22):

$$G_{AA} V_A - G_{AB} V_B = G_{вт1} E_1, \quad (4.23)$$

и аналогично для узла  $B$  имеем

$$G_{BB} V_B - G_{BA} V_A = G_{вт2} E_2. \quad (4.24)$$

Полученные уравнения выражают общую структуру уравнений узловых потенциалов (см. также доп. вопросы 1, 2 к этой задаче). Оказывается, для вычисления потенциалов узлов цепи (рис. 4.1) достаточно решить систему двух уравнений с двумя неизвестными. Выполним это. При наших данных (4.23) и (4.24) запишутся так:

$$\begin{aligned} 3,125V_A - 0,625V_B &= 7,2; \\ -0,625V_A + 3,125V_B &= 9,6. \end{aligned}$$

Из первого уравнения выразим потенциал

$$V_B = (-7,2 + 3,125V_A)/0,625$$

и подставим его во второе уравнение:

$$-0,625V_A + 3,125 \frac{-7,2 + 3,125V_A}{0,625} = 9,6,$$

или

$$V_A \left[ -0,625 + \frac{(3,125)^2}{0,625} \right] = 9,6 + 7,2 \frac{3,125}{0,625},$$

окончательно

$$V_A = 45,6/15 = 3,04 \text{ В.}$$

Найденное значение потенциала  $V_A$  подставим в полученное выше выражение для потенциала точки  $B$ :

$$V_B = \frac{-7,2 + 3,125 \cdot 3,04}{0,625} = \frac{2,3}{0,625} = 3,68 \text{ В.}$$

Соответственно между узлами  $B$  и  $A$  действует напряжение

$$U_{BA} = V_B - V_A = 3,68 - 3,04 = 0,64 \text{ В,}$$

полученное в § 4.1 при расчете цепи методом наложения.

4. Вычисление токов. По (4.14)–(4.18) с учетом  $V_B=0$  получим

$$I_{BA} = U_{BA} / R_2 = 0,64/1,6 = 0,4 \text{ А;}$$

$$I_{AB} = V_A G_1 = 3,04 \cdot 0,5 = 1,52 \text{ A};$$

$$I_{BB} = V_B G_3 = 3,68 \cdot 0,5 = 1,84 \text{ A};$$

$$I_1 = (E_1 - V_A) G_{вт1} = (3,6 - 3,04) \cdot 2 = 1,12 \text{ A};$$

$$I_2 = (E_2 - V_B) G_{вт2} = (4,8 - 3,68) \cdot 2 = 2,24 \text{ A}.$$

Вычисленные значения токов совпадают с найденными ранее (§ 4.1, 4.3).

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Как выбираются знаки проводимостей и ЭДС при составлении уравнений узловых потенциалов? Из (4.23) и (4.24) убеждаемся, что собственные проводимости узлов ( $G_{AA}$ ,  $G_{BB}$ ) записываются со знаком плюс, а общие проводимости ( $G_{AB}$ ,  $G_{BA}$ ) — со знаком минус.

В правой части обоих уравнений произведения ЭДС на проводимости положительны, так как обе ЭДС  $E_1$  и  $E_2$

(рис. 4.1) направлены к узлу, для которого составляется уравнение. Иначе обстоит дело с ЭДС, направленными от узла, — они записываются со знаком минус. Так, ЭДС  $E_2$  в цепи рис. 4.7 при составлении уравнения для узла  $B$  запишется со знаком минус. Указанные правила знаков являются общими.

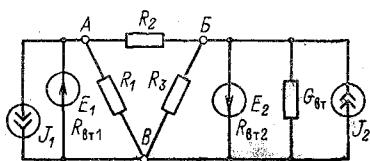


Рис. 4.7. Цепь с тремя узлами, содержащая источники ЭДС и тока

2. Как учитывается ветвь с источником тока при составлении узловых уравнений? Правые части уравнений (4.23) и (4.24) выражают токи ветвей с источниками ЭДС ( $EG$ ). Поэтому ток источника тока, присоединенного к рассматриваемому узлу, добавляется как слагаемое в правую часть узлового уравнения. Так, для цепи рис. 4.7 правые части уравнений для узлов  $A$  и  $B$  запишутся как  $E_1 G_{вт1} - J_1$  и  $-E_2 G_{вт2} + J_2$ , где учтено, что  $E_1$  и  $J_2$  направлены к соответствующим узлам и взяты со знаком плюс, а  $J_1$  и  $E_2$  направлены от узлов и потому имеют знак минус (см. доп. вопрос 1 к этой задаче).

3. Как записать узловые уравнения для цепи рис. 4.4? В этой цепи два узла. Для одного из них,

например узла  $B$ , примем потенциал  $V_B = 0$ . При этом остается одно узловое уравнение (для узла  $A$ ), которое с учетом общей структуры и правил знаков (доп. вопросы 1 и 2) запишем как (в виде)

$$G_{AA} V_A = G_1 E_1 + G_2 E_2 + G_3 E_3,$$

или

$$V_A = \frac{G_1 E_1 + G_2 E_2 + G_3 E_3}{G_{AA}} = \frac{G_1 E_1 + G_2 E_2 + G_3 E_3}{G_1 + G_2 + G_3} = \frac{\sum_{k=1}^n E_k G_k}{\sum_{k=1}^n G_k}, \quad (4.25)$$

где  $n$  — число ветвей между узлами  $A$  и  $B$ .

Так как между узлами  $A$  и  $B$  напряжение

$$U_{AB} = V_A - V_B = V_A - 0 = V_A,$$

то (4.25) выражает узловое напряжение цепи с двумя узлами.

4. В каких случаях для расчета сложной цепи целесообразно применять метод узловых потенциалов? Расчет токов сложной цепи с несколькими контурами и узлами чаще всего выполняется одним из двух методов: контурных токов или узловых потенциалов, так как они позволяют решить задачу с меньшими затратами времени, чем другие методы.

Предпочтение отдают тому методу, который обеспечивает решение задачи с меньшим числом уравнений. Так как число уравнений в методе контурных токов равно числу независимых контуров, а в методе узловых потенциалов — числу независимых узлов (на единицу меньше общего числа узлов), то предпочтительно принять метод узловых потенциалов при расчете цепей с числом узлов равным числу независимых контуров или меньшего.

#### 4.5. МЕТОД ДВУХ УЗЛОВ

##### Условие задачи

Два параллельно включенных генератора (рис. 4.8) с ЭДС  $E_1 = E_2 = 230$  В и внутренними сопротивлениями  $R_{вт1} = 0,5$  Ом и  $R_{вт2} = 0,4$  Ом питают потребитель, эквивалентное сопротивление которого  $R_3 = 10$  Ом.

Определить все токи, мощности генераторов, мощности потерь на внутренних сопротивлениях, а также мощность потребителя  $P_{R_3}$ .

### Решение задачи

1. Применение метода двух узлов. В отличие от четырех предыдущих методов, применимых к любой цепи, этот метод пригоден для расчета цепей, имеющих только два узла (при любом числе ветвей). Цепи с двумя узлами часто встречаются на практике, и метод двух узлов значительно упрощает их расчет.

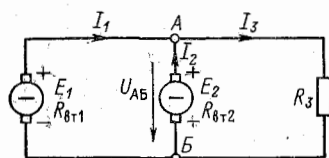


Рис. 4.8. Параллельная работа двух генераторов

Для расчета применяется формула (4.25), определяющая напряжение между узловыми точками:

$$U_{AB} = V_0 = \frac{\sum_{k=1}^n E_k G_k}{\sum_{k=1}^n G_k}$$

Так как в рассматриваемой цепи (рис. 4.8) число ветвей  $n=3$ , то

$$V_0 = U_{AB} = (E_1 G_1 + E_2 G_2) / (G_1 + G_2 + G_3). \quad (4.26)$$

Здесь в числителе отсутствует слагаемое  $E_3 G_3$ , так как ЭДС в третьей ветви нет. Если бы, например, ЭДС  $E_2$  действовала в обратном направлении, то перед слагаемым  $E_2 G_2$  нужно было бы поставить знак минус.

2. Вычисление узлового напряжения. Определяем проводимости ветвей:

$$G_1 = 1/R_{вт1} = 1/05 = 2,0 \text{ См};$$

$$G_2 = 1/R_{вт2} = 1/0,4 = 2,5 \text{ См};$$

$$G_3 = 1/R_3 = 1/10 = 0,1 \text{ См}.$$

Узловое напряжение

$$U_{AB} = \frac{E_1 G_1 + E_2 G_2}{G_1 + G_2 + G_3} = \frac{230 \cdot 2,0 + 230 \cdot 2,5}{2,0 + 2,5 + 0,1} = 225,0 \text{ В}.$$

3. Выбор положительных направлений токов. Рассматриваемая цепь (рис. 4.8) имеет три ветви с токами  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$ , направления которых до расчета цепи неизвестны (сложная цепь); поэтому нужно выбрать про-

извольно их положительные направления (стрелки на рис. 4.8).

4. Вычисление токов. Принятые на рис. 4.8 направления токов совпадают с направлениями действия ЭДС. В таком случае узловое напряжение, или напряжение на концах ветви с ЭДС, равно разности ЭДС источника и падения напряжения на сопротивлении ветви, т. е.

$$U_{AB} = E_1 - I_1 R_{вт1} = E_2 - I_2 R_{вт2},$$

откуда

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{AB}}{R_{вт1}} = (E_1 - U_{AB}) G_1 = (230 - 225) \cdot 2 = 10 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{E_2 - U_{AB}}{R_{вт2}} = (E_2 - U_{AB}) G_2 = (230 - 225) \cdot 2,5 = 12,5 \text{ А}.$$

По закону Ома ток

$$I_3 = U_{AB} / R_3 = U_{AB} G_3 = 225 \cdot 0,1 = 22,5 \text{ А}.$$

5. Вычисление мощностей. Мощности, развиваемые источниками,

$$P_1 = E_1 I_1 = 230 \cdot 10 = 2,30 \text{ кВт};$$

$$P_2 = E_2 I_2 = 230 \cdot 12,5 = 2,875 \text{ кВт}.$$

Мощности потерь на внутренних сопротивлениях

$$P_{01} = R_{вт1} I_1^2 = 0,5 \cdot 10^2 = 50 \text{ Вт} = 0,05 \text{ кВт};$$

$$P_{02} = R_{вт2} I_2^2 = 0,4 (12,5)^2 = 62,5 \text{ Вт} = 0,0625 \text{ кВт}.$$

Мощность потребителя

$$P_{R_3} = I_3^2 R_3 = (22,5)^2 \cdot 10 = 5,0625 \text{ кВт}.$$

Составим баланс мощностей:

$$P_{01} + P_{02} + P_{R_3} = 0,050 + 0,0625 + 5,0625 = 5,175 \text{ кВт};$$

$$P_1 + P_2 = 2,30 + 2,875 = 5,175 \text{ кВт}.$$

Итак,

$$P_{01} + P_{02} + P_{R_3} = P_1 + P_2,$$

чего и следовало ожидать, если расчет выполнен правильно.

**Дополнительные вопросы к задаче**

1. С какой точностью следует вычислять узловое напряжение? В большинстве практических



задач, как и в рассматриваемой, узловое напряжение мало отличается от ЭДС. Поэтому в нашем случае при ошибке всего лишь на 1% в определении  $U_{AB}$ , т. е. если считать  $U'_{AB} = 227,25$  В вместо 225 В, получаем вместо значения тока  $I_1 = 10$  А значение  $I'_1 = (E_1 - U'_{AB}) G_1 = (230 - 227,25) 2,0 = 5,5$  А, или с ошибкой на 45%.

Этот пример показывает, что узловое напряжение следует вычислять с точностью на два порядка большей, чем требуется для токов. Поэтому метод двух узлов не следует применять для цепей, у которых узловое напряжение мало отличается от значений ЭДС.

2. Какие параметры источников влияют на распределение токов в ветвях? Для параллельной работы генераторов наиболее интересен вопрос о распределении нагрузки (тока) между ними.

Так, при  $E_1 = E_2$  получим отношение токов

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{(E_1 - U_{AB}) G_1}{(E_2 - U_{AB}) G_2} = \frac{G_1}{G_2} = \frac{R_{вт2}}{R_{вт1}},$$

т. е. при равных ЭДС параллельно включенных генераторов их токи обратно пропорциональны внутренним сопротивлениям.

3. В каких случаях один из параллельно включенных источников работает в режиме потребителя? Присоединяя параллельно к какому-либо генератору аккумуляторную батарею как запасной источник питания (на случай выхода из строя генератора), получаем так называемое «буферное» включение аккумулятора. Применяется оно для питания таких потребителей, которые по технологическим условиям не допускают даже кратковременного отключения источника. Допустим, что в нашей задаче первый источник — это генератор, а второй — буферная аккумуляторная батарея. Очевидно, что в нормальных условиях потребитель должен питаться только от генератора, а батарея должна работать вхолостую либо в режиме зарядки, что обеспечивается определенным превышением ЭДС генератора над ЭДС аккумулятора.

Например, если  $E_1 = 245$  В и  $E_2 = 230$  В, то узловое напряжение

$$U_{AB} = \frac{E_1 G_1 + E_2 G_2}{G_1 + G_2 + G_3} = \frac{245 \cdot 2,0 + 230 \cdot 2,5}{4,6} = 232 \text{ В};$$

ток аккумулятора

$$I_2 = (E_2 - U_{AB}) G_2 = (230 - 232) \cdot 2,5 = -5 \text{ А},$$

т.е. в этом случае ток  $I_2$  направлен навстречу ЭДС  $E_2$  и аккумулятор работает в режиме потребителя (зарядка).

При отключении генератора аккумулятор как единственный в цепи источник питания перейдет в режим генератора и будет питать потребитель.

#### 4.6. МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНОГО ГЕНЕРАТОРА

##### Условие задачи

В цепи рис. 4.1 определить ток  $I_{BA}$  в ветви  $BA$  методом эквивалентного генератора при данных, указанных в § 4.1.

##### Решение задачи

1. Составление эквивалентной схемы. Рассматриваемую цепь можно разделить относительно узло-

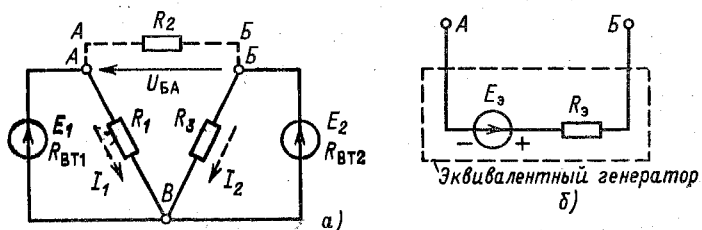


Рис. 4.9. Разделение цепи на внутреннюю и внешнюю части (а); замена внутренней части цепи эквивалентным генератором (б)

вых точек  $A$  и  $B$  (рис. 4.9, а) на две части: ветвь  $BA$ , в которой нужно определить ток (назовем ее внешней частью схемы), и всю остальную цепь (назовем ее внутренней частью). Обе части схемы рис. 4.9, а соединены пунктирными линиями ( $AA$  и  $BB$ ).

По теореме об эквивалентном генераторе всю внутреннюю часть можно заменить одним источником питания с ЭДС  $E_3$  и сопротивлением  $R_3$  (рис. 4.9, б) и таким образом получить простую неразветвленную цепь (рис. 4.10), для которой нетрудно определить ток:

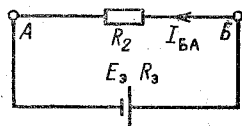


Рис. 4.10. Преобразованная цепь с эквивалентным генератором

$$I_{BA} = E_3 / (R_3 + R_2).$$

В таком случае главное содержание расчета цепи этим методом состоит в определении эквивалентных параметров ( $E_3$  и  $R_3$ ) внутренней части цепи.

2. Вычисление параметров эквивалентного генератора. Электродвижущая сила эквивалентного генератора  $E_3$  равна напряжению на выводах внутренней цепи  $U_{БА}$  (рис. 4.9, а) при отключенной внешней части цепи. Учитывая, что  $U_{БА}$  имеет положительное направление от узла  $B$  к узлу  $A$ , т.е.  $U_{БА} = V_B - V_A$ , можно записать, что  $E_3 = U_{БА} = V_B - V_A$ .

Падения напряжения на участках  $BB$  и  $AB$  цепи

$$U_{BB} = V_B - V_B = I_2 R_3 = E_2 R_3 / (R_{вт2} + R_3) = \\ = 4,8 \cdot 2 / (0,5 + 2) = 3,84 \text{ В};$$

$$U_{AB} = V_A - V_B = I_1 R_1 = E_1 R_1 / (R_{вт1} + R_1) = \\ = 3,6 \cdot 2 / (0,5 + 2) = 2,88 \text{ В},$$

где  $I_1$  и  $I_2$  — токи в цепи (рис. 4.9, а) при отключенной ветви  $BA$ . Следовательно,

$$E_3 = V_B - V_A = U_{BB} - U_{AB} = 3,84 - 2,88 = 0,96 \text{ В}.$$

Внутреннее сопротивление эквивалентного генератора  $R_3$  равно общему сопротивлению внутренней части цепи  $R_{об}$  относительно точек  $A$  и  $B$  (рис. 4.9, а) при отключенной внешней части цепи, т.е.

$$R_3 = R_{об} = R_{вт1} R_1 / (R_{вт1} + R_1) + R_{вт2} R_3 / (R_{вт2} + R_3) = \\ = 0,5 \cdot 2 / 2,5 + 0,5 \cdot 2 / 2,5 = 0,8 \text{ Ом}.$$

3. Вычисление тока. Ток  $I_{БА} = E_3 / (R_3 + R_2) = \\ = 0,96 / (0,8 + 1,6) = 0,4 \text{ А}.$

Этот же результат был получен в § 4.1.

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Как вычислить ток в ветви с источником? Метод расчета остается прежним. Покажем это на примере определения тока в ветви источника с ЭДС  $E_2$  (рис. 4.1).

Отключив эту ветвь (рис. 4.11, а), определяем напряжение:

$$U_{BB} = E_3 = V_B - V_B = R_3 I_3.$$

Для этого сначала находим ток:

$$I_1 = E_1 / (R_{вт1} + R_{AB}),$$

где

$$R_{AB} = R_1 (R_2 + R_3) / (R_1 + R_2 + R_3),$$

а затем

$$I_3 = I_1 R_1 / (R_1 + R_2 + R_3).$$

Еще раз отметим, что токи  $I_1$  и  $I_3$  вычисляются при отключенной внешней части цепи (ветви с ЭДС  $E_2$ ). Общее сопротивление относительно точек  $B$  и  $B'$  найдем как параллельное соединение сопротивления  $R_3$  и сопротивлений  $R_2$  и  $R_{AB}$ , включенных относительно точек  $B$  и  $B'$  последовательно. В свою очередь сопротивление  $R'_{AB}$  определя-

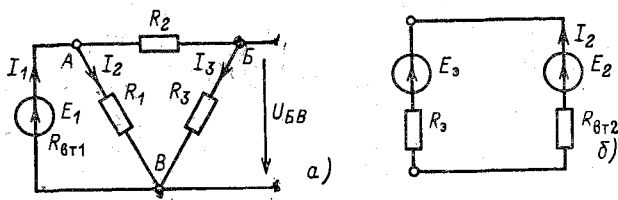


Рис. 4.11. К дополнительному вопросу 1

ем как эквивалентное параллельному соединению сопротивлений  $R_{вт1}$  и  $R_1$  в узловых точках  $A$  и  $B$ . Итак,

$$R'_{AB} = R_{вт1} R_1 / (R_{вт1} + R_1); \quad R_{об} = \frac{R_3 (R_2 + R'_{AB})}{R_3 + R_2 + R'_{AB}}.$$

Теперь составляем эквивалентную схему (рис. 4.11, б), для которой

$$I_2 = (E_2 - E_3) / (R_{вт2} + R_3).$$

2. Почему метод эквивалентного генератора называют еще методом холостого хода и короткого замыкания? Если измерить вольтметром напряжение между узловыми точками  $B$  и  $A$  (рис. 4.9, а) при отключенном сопротивлении  $R_2$ , т.е. в режиме холостого хода эквивалентного генератора, то получим ЭДС  $E_3 = U_{БА}$ . Если же между точками  $B$  и  $A$  включить амперметр, сопротивление которого мало, т.е. создать режим короткого замыкания эквивалентного генератора, то измеряемый им ток  $I_k = E_3 / R_3$  (рис. 4.10 при  $R_2 = 0$ ), откуда сопротивление

$$R_3 = E_3 / I_k = U_{БА} / I_k.$$

Таким образом, выполняя измерение в режимах холостого хода и короткого замыкания, можно эксперимен-

тельно определить параметры эквивалентного генератора.

3. Почему теорему об эквивалентном источнике ЭДС еще называют теоремой об активном двухполюснике? При решении задачи заданная сложная цепь (рис. 4.9) разделялась на внутреннюю и внешнюю части. Внутренняя часть представляет собой активную цепь с двумя выводами (рис. 4.9, выводы А и Б), т. е. является активным двухполюсником.

Параметры эквивалентного источника ЭДС ( $E_0$  и  $R_0$ ) определяются схемой и параметрами указанного активного двухполюсника. Поэтому часто и вполне правомерно теорему об эквивалентном генераторе называют теоремой об активном двухполюснике.

#### 4.7. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

58. Определить токи во всех ветвях цепи рис. 4.12, если  $E_1 = E_2 = 120$  В;  $R_{вт1} = 0,5$  Ом;  $R_{вт2} = 0,4$  Ом;  $R_1 = 10$  Ом;  $R_2 = 14,5$  Ом;  $R_3 =$

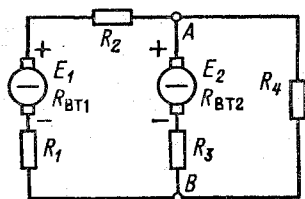


Рис. 4.12. К задаче 58

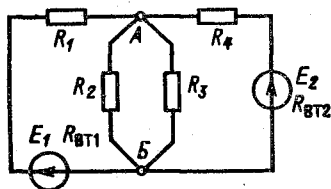


Рис. 4.13. К задаче 59

$= 12,4$  Ом;  $R_4 = 83,3$  Ом. Задачу решить двумя методами: наложения и двух узлов.

59. В цепи рис. 4.13 определить токи во всех ветвях методом наложения, если  $E_1 = 45$  В;  $E_2 = 60$  В;  $R_1 = 60$  Ом;  $R_2 = 100$  Ом;  $R_3 = 150$  Ом;  $R_4 = 20$  Ом. Внутренними сопротивлениями источников пренебречь.

60. Рассчитать методом двух узлов напряжение между точками А и Б и токи во всех участках цепи рис. 4.13 при следующих данных:  $E_1 = E_2 = 105$  В;  $R_1 = R_4 = 9,5$  Ом;  $R_2 = R_3 = 20$  Ом;  $R_{вт1} = R_{вт2} = 0,5$  Ом.

61. Методом уравнений Кирхгофа определить токи во всех ветвях цепи рис. 4.14 при следующих данных:  $E_1 = E_2 = 110$  В;  $R_1 = 0,98$  Ом;  $R_2 = R_4 = 0,5$  Ом;  $R_3 = 4,35$  Ом;  $R_{вт1} = 0,15$  Ом;  $R_{вт2} = 0,13$  Ом.

62. Аккумуляторная батарея с ЭДС  $E_1$  и внутренним сопротивлением  $R_{вт1} = 0,01$  Ом и последовательно включенное сопротивление  $R_1$  присоединены параллельно к генератору с ЭДС  $E_2$  и внутренним сопротивлением  $R_{вт2} = 0,15$  Ом. Вся установка обеспечивает бесперебойное пита-

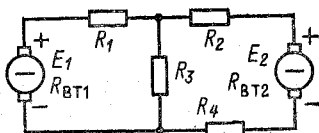


Рис. 4.14. К задаче 61

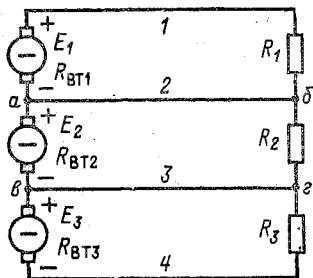


Рис. 4.15. К задаче 63

ние потребителя напряжением 120 В и мощностью 0,96 кВт. Требуется определить: а) сопротивление  $R_1$  и ЭДС  $E_2$ , если токи источников энергии одинаковы и ЭДС  $E_1=126$  В (заряженный аккумулятор); б) токи источников энергии и ЭДС  $E_2$ , если  $E_1=121$  В,  $R_1=1,49$  Ом, а остальные данные прежние.

63. На рис. 4.15 и 4.16 показаны два варианта соединения трех генераторов с их потребителями по четырехпроводной схеме. Определить

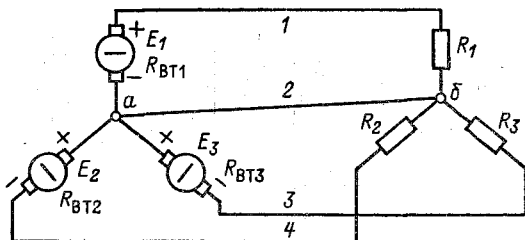


Рис. 4.16. К задаче 63

токи в соединительных проводах 1—4 каждой схемы. Дано:  $E_1=E_2=E_3=230$  В;  $R_{BT1}=R_{BT2}=R_{BT3}=0,5$  Ом;  $R_1=4,1$  Ом;  $R_2=R_3=1,8$  Ом.

64. Решить предыдущую задачу при условии, что сопротивления потребителей одинаковы:  $R_1=R_2=R_3=4,1$  Ом.

65. Для цепи, показанной на рис. 4.17, определить число различных токов; установить, сколько нужно составить уравнений по первому и второму законам Кирхгофа для их вычисления. Выяснить, сколько всего электрических контуров имеет схема.

66. Для предыдущей задачи установить число необходимых уравнений для ее расчета методом контурных токов.

67. Определить токи во всех участках цепи рис. 4.17 и мощность, развиваемую каждым генератором, если  $E_1=40$  В;  $E_2=30$  В;  $R_{BT1}=R_{BT2}=0,4$  Ом;  $R_1=30$  Ом;  $R_2=R_3=10$  Ом;  $R_4=R_5=3,6$  Ом.

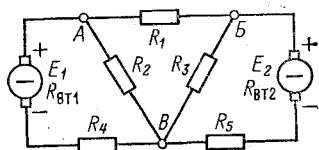


Рис. 4.17. К задаче 65

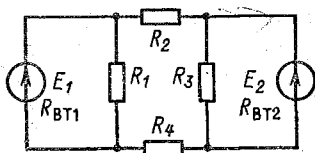


Рис. 4.18. К задаче 69

68. Для предыдущей задачи определить ток в ветви АБ методом эквивалентного источника напряжения.

69. Определить токи во всех ветвях цепи рис. 4.18, если  $E_1=16,4$  В;  $E_2=24,5$  В;  $R_1=3$  Ом;  $R_2=0,8$  Ом;  $R_3=3$  Ом;  $R_{вт2}=2$  Ом;  $R_{вт1}=2$  Ом;  $R_4=5$  Ом.

#### 4.8. ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ. 4

58. 0,44 А; 0,86 А; 1,3 А.

59. 0; 0,75 А; 0,30 А; 0,45 А.

60. 70 В; все токи по 3,5 А.

61. 22,4 А; 11,2 А; 11,2 А.

62. а) 1,49 Ом; 120,6 В; б) 0,67 А; 7,33 А; 121,1 В.

63. Для схемы рис. 4.15: 50 А; 50 А; 0; 100 А; для схемы рис. 4.16: 50 А; 150 А; 100 А; 100 А.

64. Для схемы рис. 4.15: 50 А; 0; 0; 50 А; для схемы рис. 4.16: все токи по 50 А.

65. Пять токов: два по первому закону и три по второму закону, шесть контуров.

66. Три уравнения.

67. 3 А; 2,8 А; 0,2 А; 2,2 А; 2,0 А; 120 Вт; 60 Вт.

68. 0,2 А.

69. 2,92 А; 3,52 А; 0,6 А; 4,68 А; 0,6 А; 5,28 А.

### Глава пятая

## ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

### 5.1. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА

#### Условие задачи

Металлический шарик радиусом  $R_{ш}=2$  см  $=0,02$  м заряжен положительным зарядом  $Q=2 \cdot 10^{-8}$  Кл (кулон) и помещен в сосуд больших размеров.

Вначале в сосуде был создан вакуум (откачан воздух), а затем его заполнили минеральным маслом с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_r = 2,15$ .

Требуется вычислить напряженность поля  $E$  и потенциал  $V$  до и после заполнения сосуда маслом в точках  $A$ ,  $B$  и  $B$ , удаленных от центра шарика (точки  $M$ ) на расстояния  $R$ , равные  $R_A = 20 \text{ см} = 0,2 \text{ м}$ ;  $R_B = 40 \text{ см} = 0,4 \text{ м}$  и  $R_B = 60 \text{ см} = 0,6 \text{ м}$ , а также силу  $F$ , с которой поле действует на пробный точечный заряд  $q = 2 \cdot 10^{-10} \text{ Кл}$ , помещаемый поочередно в указанных точках.

### Решение задачи

**1. Вычисление** напряженности поля. В рассматриваемом случае линейные размеры заряженного шарика весьма малы по сравнению с расстоянием от него до точек  $A$ ,  $B$ ,  $B$  (действительно, ближайшая точка  $A$  расположена на расстоянии  $R_A = 20 \text{ см} = 10 R_{\text{ш}}$ ). Поэтому шарик при расчете поля можно считать точечным зарядом и определить напряженность поля в заданных точках по формуле

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{4\pi R^2}, \quad (5.1)$$

где в системе единиц СИ  $\epsilon_0 = 10^{-9}/36\pi \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$  называется электрической постоянной и характеризует электрические свойства вакуума.

По формуле (5.1) напряженность поля в точке  $A$

$$E_A = \frac{1}{8,85 \cdot 10^{-12}} \frac{2 \cdot 10^{-8}}{4\pi (0,2)^2} = 4500 \text{ В/м} = 4,5 \text{ кВ/м},$$

так как  $1000 \text{ В} = 1 \text{ кВ}$ .

Для точки  $B$  значения всех величин в формуле (5.1) остаются такими же, как и для точки  $A$ , кроме расстояния  $R_B = 2R_A$ , поэтому

$$E_B = E_A/4 = 4,5/4 = 1,125 \text{ кВ/м}.$$

Соответственно для точки  $B$

$$E_B = E_A/9 = 4,5/9 = 0,5 \text{ кВ/м}.$$

График зависимости напряженности поля от расстояния построен на рис. 5.1.



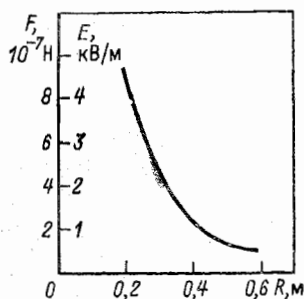


Рис. 5.1. График зависимости напряженности поля и силы, действующей на пробный заряд, от расстояния

2. Определение силы поля, действующей на пробный заряд. Электрическое поле положительно заряда  $Q$  стремится вытолкнуть положительный точечный заряд  $q$ , помещенный в точке  $A$  (рис. 5.2, а), с силой  $F_1 = E_A q = 4500 \cdot 2 \cdot 10^{-10} = 9 \cdot 10^{-7} \text{ Н}$ .

Помещая заряд  $q$  в точки  $B$  и  $B$  (рис. 5.2, а), найдем действующие на него силы поля:

$$F_2 = E_B q = 1125 \cdot 2 \cdot 10^{-10} = 2,25 \cdot 10^{-7} \text{ Н};$$

$$F_3 = E_B q = 500 \cdot 2 \cdot 10^{-10} = 10^{-7} \text{ Н}.$$

Так как сила, действующая на заряд  $q$  в различных точках поля ( $A$ ,  $B$  и  $B$ ), пропорциональна напряженности поля в этих точках ( $E_A$ ,  $E_B$ ,  $E_B$ ), то график зависимости  $E(R)$  (рис. 5.1) в другом масштабе выражает зависимость силы от расстояния  $F(R)$ .

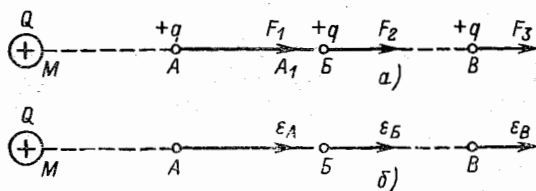


Рис. 5.2. Векторы сил, действующих на заряд в различных точках поля (а); векторы напряженности в этих точках (б)

3. Картина поля точечного заряда. Напряженность поля — вектор, направление которого совпадает с направлением вектора силы, действующей на положительный точечный заряд в данной точке поля. Поэтому векторы сил  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F_3$  (рис. 5.2, а) и напряженности поля  $E_A$ ,  $E_B$  и  $E_B$  (рис. 5.2, б) совпадают по направлению.

Построенные векторы напряженности поля располагаются на одной прямой  $МАВВ$ , которая, таким образом, является одной из линий вектора напряженности или силовых линий поля.

Учитывая сферическую симметрию поля заряженного шарика, можно построить и другие линии напряженности поля по направлениям радиусов шарика. Все линии напряженности начинаются на положительном заряде.

4. Определение напряженности поля в диэлектрике. По сравнению с вакуумом в диэлектрике напряженность поля уменьшается (см. доп. вопрос 2 к этой задаче), что учитывается при помощи электрической характеристики диэлектрика  $\epsilon_r$ , называемой относительной диэлектрической проницаемостью, которая может быть определена опытным путем. Так, для минерального масла по условию задачи  $\epsilon_r = 2,15$  и напряженность поля в диэлектрике

$$E'_A = \frac{E_A}{\epsilon_r} = \frac{4,5}{2,15} = 2,1 \text{ кВ/м}$$

и аналогично  $E'_B = 0,535 \text{ кВ/м}$ ;  $E'_B = 0,233 \text{ кВ/м}$ .

Напряженность поля в любой точке диэлектрика

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r \cdot 4\pi R^2} = \frac{Q}{\epsilon_a \cdot 4\pi R^2}, \quad (5.2)$$

где  $\epsilon_a = \epsilon_0 \epsilon_r$  называется абсолютной диэлектрической проницаемостью среды (материала, диэлектрика).

Полученные результаты позволяют сделать два важных вывода:

1) *относительная диэлектрическая проницаемость (величина отвлеченная) характеризует относительное уменьшение напряженности поля зарядов в данной среде по сравнению с вакуумом; для вакуума  $\epsilon_r = 1$ , для любого диэлектрика  $\epsilon_r > 1$ ;*

2) *абсолютная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_a = \epsilon_0 \epsilon_r$  зависит как от электрических свойств диэлектрика, так и от принимаемой в расчетах системы единиц.*

5. Определение потенциалов и напряжений. Построение линий равного потенциала. Как было показано (§ 2.3), для одной какой-либо точки потенциал можно принять равным нулю.

Для упрощения расчетов будем считать сосуд и поле заряда безграничными и примем равным нулю потенциал бесконечно удаленной точки. При таком условии для любой точки поля заряда  $Q$  потенциал

$$V = Q/\epsilon. \epsilon_0 \cdot 4\pi R. \quad (5.3)$$

Формула (5.3) отличается от ранее рассмотренной (5.2)

для напряженности поля только степенью  $R$ , поэтому

$$V = ER. \quad (5.4)$$

Применив последнее выражение, вычислим потенциалы точек  $A$ ,  $B$  и  $B$  в вакууме:

$$V_A = E_A R_A = 4500 \cdot 0,2 = 900 \text{ В};$$

$$V_B = E_B R_B = 1125 \cdot 0,4 = 450 \text{ В};$$

$$V_B = E_B R_B = 500 \cdot 0,6 = 300 \text{ В}.$$

Для выяснения картины распределения потенциала полезно найти точки, потенциалы которых отличаются на одинаковое значение. Поэтому найдем несколько точек с потенциалами, отличающимися, например, на 300 В.

Мы уже знаем, что потенциалы точек  $B$  и  $A$  соответственно равны  $V_B = 300$  В,  $V_A = 900$  В. Дополнительно найдем точки  $\Gamma$  и  $D$ , для которых  $V_\Gamma = 600$  В и  $V_D = 1200$  В.

По формуле (5.3)  $V_\Gamma = 600$  В в вакууме соответствует расстояние

$$R_\Gamma = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot 4\pi V_\Gamma} = \frac{6\pi \cdot 2 \cdot 10^{-8}}{10^{-9} \cdot 4\pi \cdot 600} = 0,3 \text{ м} = 30 \text{ см}.$$

Потенциалу  $V_D = 2V_\Gamma$  соответствует расстояние

$$R_D = R_\Gamma / 2 = 0,15 \text{ м} = 15 \text{ см}.$$

Учитывая сферическую симметрию поля заряженного шарика и точечного заряда  $Q$ , можно построить шаровые равнопотенциальные поверхности с радиусами  $R_B$ ,  $R_\Gamma$ ,  $R_A$  и  $R_D$ , следы которых на плоскости образуют картину равнопотенциальных линий (рис. 5.3). Потенциалы этих линий различаются на заданные 300 В.

Напряжение между двумя любыми точками поля определяют как разность потенциалов. Так, между любыми точками равнопотенциальной линии  $V_B = 300$  В ( $B, B', B'' \dots$ ) и равнопотенциальной линии  $V_\Gamma = 600$  В ( $\Gamma, \Gamma' \dots$ ) напряжение имеет одно и то же значение  $U_{\Gamma B} = V_\Gamma - V_B = 600 - 300 = 300$  В. Между любыми точками одной и той же равнопотенциальной линии (например,  $B''$  и  $B$  или  $\Gamma'$  и  $\Gamma$ ) напряжение равно нулю.

Напряжение между точкой  $D$  (рис. 5.3) и бесконечно удаленной точкой  $U_{D\infty} = V_D - V_\infty = 1200 - 0 = 1200$  В. Если же принять для равнопотенциальной линии, проходящей через точку  $\Gamma$ , потенциал  $V_\Gamma = 0$ , то получим  $V_A = 300$  В,  $V_D = 600$  В,  $V_B = -300$  В и  $V_\infty = -600$  В, а напряжения ме-

жду любыми точками поля остаются прежними. Поэтому, вычисляя напряжения, можно выбрать равным нулю потенциал любой точки поля; практически обычно выбирают потенциал равным нулю для точки, находящейся на поверхности земли.

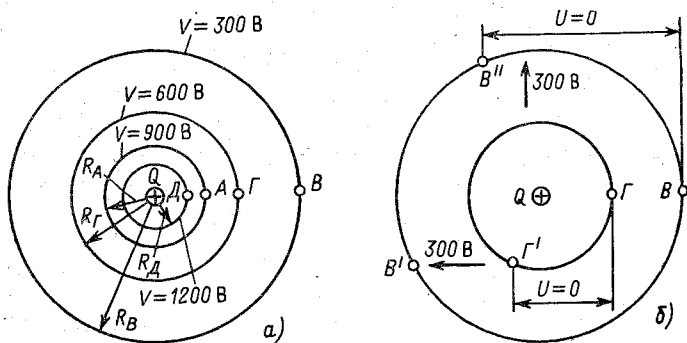


Рис. 5.3. Равнопотенциальные линии (а) и напряжения между точками электрического поля точечного заряда (б)

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Как повлияет изменение знака заряда  $Q$  на значения  $E$  и  $V$ ? Абсолютные значения напряженности поля, зависящие от абсолютного значения заряда  $Q$ , останутся прежними; направления векторов напряженности, в частности  $E_A$ ,  $E_B$  и  $E_{B'}$  (рис. 5.2, б), изменятся на противоположные, так как в этом случае пробный положительный заряд, помещенный в точки  $A$ ,  $B$  и  $B'$ , будет притягиваться к заряду  $-Q$ . Потенциалы всех точек станут отрицательными, если по-прежнему выбрать равным нулю потенциал бесконечно удаленной точки.

2. Почему напряженность поля в диэлектрике меньше, чем в вакууме? Под действием сил электрического поля заряда  $Q$  в молекулах диэлектрика (масла) смещаются элементарные отрицательно и положительно заряженные частицы. При этом отрицательно заряженные частицы молекул диэлектрика приблизятся к положительному заряду  $Q$ .

В результате каждую молекулу диэлектрика можно рассматривать как систему двух разноименных зарядов, расположенных на линии напряженности на некотором расстоянии друг от друга (рис. 5.4). Такую систему двух смещен-

ных зарядов называют *диполем*, а электрическую «деформацию» молекул — *поляризацией*.

Рассматривая картину расположения диполей диэлектрика (рис. 5.5), можно установить, что у границы шарика с зарядом  $+Q$  в тонком слое диэлектрика, ограниченном поверхностью  $S_1$ , диполи создают отрицательный связан-

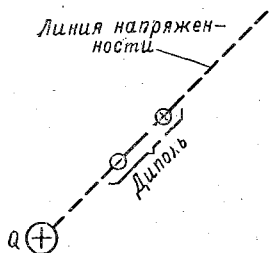


Рис. 5.4. Расположение диполя в электрическом поле

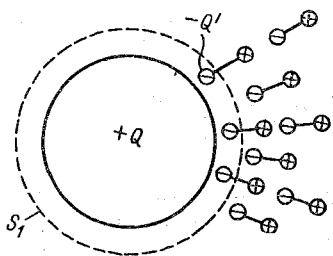


Рис. 5.5. Образование связанного заряда в диэлектрике

ный заряд  $-Q'$ . Это название неслучайно: элементарные частицы диэлектрика не могут свободно перемещаться, будучи связанными в диполях. За пределами слоя  $S_1$  (рис. 5.5) заряды диполей компенсируются рядом расположенными зарядами другого знака, и их электрическое действие можно не учитывать.

Таким образом, в любой точке диэлектрика, окружающего шарик с зарядом  $Q$  (рис. 5.5), электрическое поле создается зарядом  $+Q$  и связанным зарядом  $-Q'$ .

Учитывая, что заряды  $+Q$  и  $-Q'$  противоположны по знаку, получаем напряженность поля в диэлектрике  $E = (Q - Q') / \epsilon_0 4\pi R^2$ , которая меньше напряженности поля в вакууме, где отсутствуют заряды  $-Q'$ .

3. Влияет ли диэлектрик конечных размеров на электрическое поле металлического шарика или точечного заряда  $Q$  за пределами диэлектрика? В диэлектрике конечных размеров содержится равное количество связанных отрицательных и положительных зарядов, образующих диполи. Если граница диэлектрика совпадает с поверхностью равного потенциала металлического шарика (рис. 5.6), то диэлектрик не влияет на электрическое поле за пределами диэлектрика. Если заряд  $Q$  находится не в центре или диэлектрик имеет другую форму, то нарушается симметрия расположения диполей. Граница диэлектрика уже не сов-

падает с поверхностью равного потенциала. В этом случае несмотря на равное число отрицательных и положительных связанных зарядов электрическое поле за пределами диэлектрика изменится.

4. Чему равен поток вектора напряженности через замкнутую поверхность  $S$  (рис. 5.7)? В рассматриваемую шаровую поверхность  $S$  входит поток вектора напряженности  $N$ , изображенный пятью линиями напряженности. Так как линии напряженности непре-

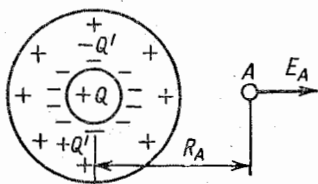


Рис. 5.6. Связанный заряд в диэлектрике конечных размеров

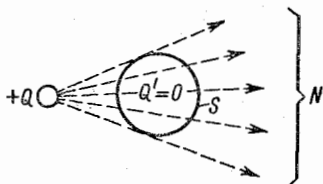


Рис. 5.7. Поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность

рывны внутри поверхности  $S$  (суммарный связанный заряд  $Q'$  равен нулю), то такой же по величине поток выходит из поверхности  $S$ . Поэтому суммарный поток, пересекающий поверхность  $S$ , равен нулю.

Через любую другую замкнутую поверхность (не только шаровую) поток вектора напряженности также равен нулю, если внутри поверхности нет избытка положительных или отрицательных зарядов (это непосредственно следует из теоремы Остроградского — Гаусса).

5. Чему равна напряженность поля в точке  $M$ , где находится точечный заряд  $+Q$  ( $R=0$ )? Если исходить из формулы  $E=Q/\epsilon_a 4\pi R^2$ , то окажется, что  $E=\infty$  при  $R=0$ , что имеет только чисто теоретический смысл.

У рассматриваемого металлического шара заряды размещаются на поверхности, как бы мал ни был его радиус. Поэтому любая замкнутая поверхность  $S$  внутри металлического шара (рис. 5.8) не охватывает зарядов, и поток вектора напряженности  $N=0$  (см. предыдущий вопрос). Ввиду симметрии шаровой поверхности  $S$  поток может быть равен нулю только при  $E=0$ .

В общем случае всегда *внутри заряженного металлического тела напряженность поля равна нулю.*

6. Как вычислить напряженность поля на поверхности металлического заряженного шара? Для заряженного шара вследствие его симметрии и равномерного распределения заряда на поверхности можно воспользоваться формулой напряженности поля точечного заряда.

Для шара радиусом  $R_{ш}$  и заряда  $Q$  напряженность поля на его поверхности  $E = Q / 4\pi\epsilon_r\epsilon_0 R_{ш}^2$ , где  $\epsilon_r$  — диэлектрическая проницаемость окружающей шар среды.

Заменив радиус шара расстоянием от его центра до точки поля вне шара, по этой формуле можно найти напряженность поля в любой точке вне шара.

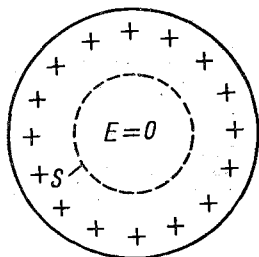


Рис. 5.8. Поле внутри металлического шарика

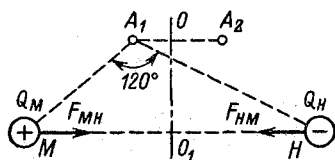


Рис. 5.9. К условию задачи § 5.2

## 5.2. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ НЕСКОЛЬКИХ ТОЧЕЧНЫХ ЗАРЯДОВ

### Условие задачи

Два точечных заряда  $+Q_M = 2 \cdot 10^{-9}$  Кл и  $-Q_N = -2 \cdot 10^{-9}$  Кл (рис. 5.9) помещены в минеральное масло ( $\epsilon_r = 2,2$ ).

Вычислить напряженности поля и потенциалы в симметрично расположенных относительно оси  $OO_1$  точках  $A_1$  и  $A_2$ , а также силу взаимодействия зарядов  $+Q_M$  и  $-Q_N$ , если  $MA_1 = 10$  см = 0,1 м;  $NA_1 = 15$  см;  $\angle MA_1N = 120^\circ$  и линия  $OO_1$  является перпендикуляром, восставленным из середины отрезка  $MN$ .

### Решение задачи

1. Применение метода наложения к вычислению напряженности поля в точках  $A_1$  и  $A_2$ . По методу наложения напряженность поля в какой-

либо точке определяется как геометрическая (векторная) сумма напряженностей, создаваемых каждым зарядом в отдельности. Это означает, что в нашем случае, например, для точки  $A_1$  нужно вначале найти напряженность поля, создаваемую только зарядом  $+Q_M$  (при отсутствии  $-Q_H$ ), а затем, наоборот, только зарядом  $-Q_H$  (при отсутствии  $+Q_M$ ).

Действуя таким образом, получаем:

напряженность поля заряда  $+Q_M$  в точке  $A_1$

$$E_{1M} = \frac{Q_M}{4\pi (MA_1)^2 \varepsilon_r \varepsilon_0} = \frac{2 \cdot 10^{-9} \cdot 36\pi}{4\pi (0,1)^2 \cdot 2,2 \cdot 10^{-9}} = 820 \text{ В/м}$$

изображается вектором  $E_{1M}$  (рис. 5.10, а), направленным от точки  $M$ , так как  $Q_M$  — положительный заряд;

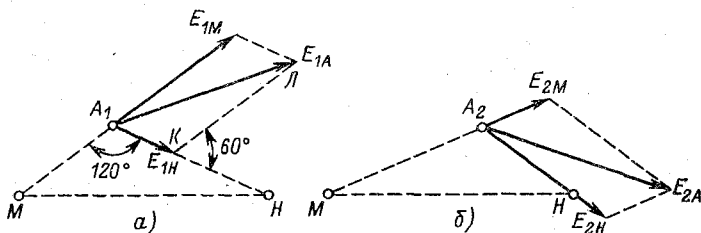


Рис. 5.10. Построение результирующего вектора напряженности поля двух зарядов в точках  $A_1$  и  $A_2$

напряженность поля заряда  $-Q_H$  в точке  $A_1$

$$\begin{aligned} E_{1H} &= \frac{Q_H}{4\pi (HA_1)^2 \varepsilon_r \varepsilon_0} = E_{1M} \left( \frac{MA_1}{HA_1} \right)^2 = \\ &= 820 (0,1/0,15)^2 = 365 \text{ В/м} \end{aligned}$$

изображается вектором  $E_{1H}$  (рис. 5.10, а), направленным к точке  $H$ , так как  $Q_H$  — отрицательный заряд.

Для двух зарядов  $+Q_M$  и  $-Q_H$  напряженность поля в точке  $A_1$  определяется результирующим вектором  $E_{1A}$ , построенным как диагональ параллелограмма со сторонами  $E_{1M}$  и  $E_{1H}$ .

Применяя теорему косинусов к треугольнику  $A_1KL$  (рис. 5.10, а), получаем

$$\begin{aligned} E_{1A} &= \sqrt{E_{1M}^2 + E_{1H}^2 + 2E_{1M}E_{1H} \cos 60^\circ} = \\ &= \sqrt{820^2 + 365^2 + 2 \cdot 820 \cdot 365 \cdot 0,5} = 1050 \text{ В/м.} \end{aligned}$$



Поскольку вычисления по теореме косинусов сравнительно громоздки, иногда проще воспользоваться графическим методом.

Действительно, учитывая, что векторы  $E_{1M}$  и  $E_{1H}$  (рис. 5.10) построены в масштабе  $M_E = 40 \text{ В}/(\text{м} \cdot \text{мм})$ , имеем

$$E_{1A} = (A_1 L) M_E \approx 26 \cdot 40 \approx 1050 \text{ В/м.}$$

Рассмотренным методом можно вычислить напряженность поля в любой точке, в том числе и в точке  $A_2$  (рис. 5.9). Но в данном случае нет необходимости повторять все вычисления. Учитывая симметрию расположения точек  $A_1$  и  $A_2$  и равенство зарядов по абсолютным значениям, сразу записываем, что

$$E_{2H} = E_{1M} = 820 \text{ В/м и } E_{2M} = E_{1H} = 365 \text{ В/м}$$

(рис. 5.10, б). Поэтому напряженности поля в точках  $A_1$  и  $A_2$  численно равны ( $E_{1A} = E_{2A}$ ), но имеют различные направления.

*Чтобы судить о напряженности поля в какой-либо точке, нужно знать не только ее значение, но и направление вектора.*

2. Применение метода наложения к вычислению потенциалов. Потенциал любой точки электрического поля нескольких зарядов равен алгебраической сумме потенциалов, созданных в данной точке каждым зарядом в отдельности.

Как понимать алгебраическую сумму потенциалов?

При алгебраическом суммировании потенциалов, создаваемых разноименными зарядами, надо учитывать алгебраические знаки потенциалов. Так, в нашем случае в точке  $A_1$  заряд  $+Q_M$  создает потенциал  $V_{1M} = E_{1M}(MA_1) = 820 \times 0,1 = 82 \text{ В}$ , а заряд  $-Q_H$  — потенциал  $V_{1H} = -E_{1H}(HA_1) = -365 \cdot 0,15 = -54,7 \text{ В}$ .

Для совместного поля двух зарядов получим потенциал

$$V_{A1} = V_{1M} + V_{1H} = 82 - 54,7 = 27,3 \text{ В.}$$

Учитывая симметрию точек  $A_1$  и  $A_2$ , находим, что в точке  $A_2$  заряд  $+Q_M$  создает потенциал  $V_{2M} = -V_{1H} = 54,7 \text{ В}$ , а заряд  $-Q_H$  — потенциал  $V_{2H} = -V_{1M} = -82 \text{ В}$ .

При совместном действии двух зарядов получим в точке  $A_2$  потенциал

$$V_{A2} = V_{2M} + V_{2H} = 54,7 - 82 = -27,3 \text{ В.}$$

3. Вычисление силы взаимодействия за-

рядов. Прежде всего по теореме косинусов определим из треугольника  $MA_1H$  (рис. 5.9) расстояние между зарядами:

$$\begin{aligned} MH &= \sqrt{(MA_1)^2 + (HA_1)^2 + 2(MA_1)(HA_1) \cos 60^\circ} = \\ &= \sqrt{0,1^2 + 0,15^2 + 2 \cdot 0,1 \cdot 0,15 \cdot 0,5} = 0,218 \text{ м} = 21,8 \text{ см}. \end{aligned}$$

Затем вычислим по закону Кулона силу взаимодействия зарядов:

$$F = \frac{Q_M Q_H}{4\pi\epsilon_r \epsilon_0 (MH)^2} = \frac{2 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-9} \cdot 36\pi}{4\pi \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^{-9} (0,218)^2} = 3,48 \cdot 10^{-7} \text{ Н}.$$

Сила, действующая на заряд  $+Q_M$  (рис. 5.9), обозначена  $F_{MH}$ , что означает: сила действует на заряд  $+Q_M$ , но вызвана зарядом  $-Q_H$ . Соответственно сила, действующая на заряд  $-Q_H$ , обозначена  $F_{HM}$ . Очевидно, что  $F_{MH} = F_{HM} = F$ .

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Какую работу нужно совершить, чтобы удалить заряд за пределы поля? Для удаления заряда  $+Q_M$  за пределы поля придется преодолеть силу электрического поля (взаимного притяжения зарядов).

Требуемое перемещение можно рассматривать как удаление одного заряда ( $+Q_M$ ) из электрического поля, создаваемого другим зарядом ( $-Q_H$ ). При этом силами поля совершается работа  $A = V_M Q_M$ , где  $V_M = -Q_H / 4\pi\epsilon_r \epsilon_0 (MH)$  — потенциал в точке  $M$ , созданный зарядом  $-Q_H$ .

При наших данных  $V_M = -37,7 \text{ В}$  и  $A = -7,55 \cdot 10^{-8} \text{ джоулей (Дж)}$ . Знак минус у обозначения работы  $A$  означает, что при удалении заряда  $+Q_M$  надо совершить работу против сил поля заряда  $-Q_H$  (1 Дж — работа силы в 1 Н на пути в 1 м).

2. Можно ли применить метод наложения при любом числе точечных зарядов? Метод наложения не ограничивает числа зарядов. Так, если поместить третий заряд  $-Q_K = -2 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$  в точку  $K$  (рис. 5.11) на продолжении прямой  $A_1M$ , то для определения напряженности  $E'_{1A}$  нужно сложить три вектора: уже найденные векторы  $E_{1M}$  и  $E_{1H}$ , а также вектор напряженности  $E_{1K}$  поля заряда  $-Q_K$ . На рис. 5.11 принято  $A_1M = MK$ , поэтому  $E_{1K} = E_{1M}/4$ .

Порядок сложения векторов не имеет значения, но удобнее вначале сложить векторы  $E_{1K}$  и  $E_{1M}$ , направленные по одной прямой, и к их сумме — вектору  $E_{MK}$  — добавить вектор  $E_{1H}$ . Учитывая, что все векторы напряженности построены в масштабе  $M_E = 80 \text{ В}/(\text{м} \cdot \text{мм})$ , можно определить графически напряженность поля  $E'_{1A} = 80 \cdot 10,5 = 840 \text{ В}/\text{м}$ , где  $10,5$  — длина вектора  $E'_{1A}$ .

Так как потенциал поля точечного заряда изменяется обратно пропорционально расстоянию, то при  $A_1K = 2MK$  получаем  $V_{1K} = -V_{1M}/2 = -82/2 = -41 \text{ В}$ .

Созданный тремя зарядами в точке  $A_1$  потенциал  $V_{1A} = V_{1M} + V_{1H} + V_{1K} = V_{1A} + V_{1K} = 27,3 - 41 = -13,7 \text{ В}$ .

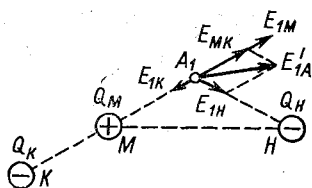


Рис. 5.11. Напряженность поля трех точечных зарядов

3. Как построить линии напряженности поля зарядов (рис. 5.9)?

Участок линии напряженности  $A_1A_2$  (рис. 5.12) строим так, чтобы векторы  $E_{1A}$  и  $E_{2A}$ , перенесенные сюда с рис. 5.10 в уменьшенном масштабе, совпадали в точках  $A_1$  и  $A_2$  с направлением касательных к рассматриваемой кривой. Показанный на рис. 5.12 вектор  $E_A$  не был найден, но легко убедиться в правильности его направления, учитывая, что точка  $A$  равноудалена от одинаковых по значению зарядов  $Q_M$  и  $Q_H$ .

Выяснить дальнейший ход линии напряженности III (рис. 5.12) нетрудно. Так как вблизи зарядов  $+Q_M$

(рис. 5.12) нетрудно. Так как вблизи зарядов  $+Q_M$

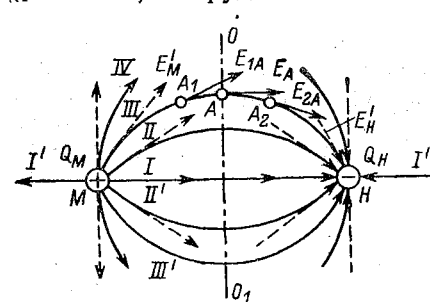


Рис. 5.12. Линии напряженности электрического поля двух разноименных точечных зарядов

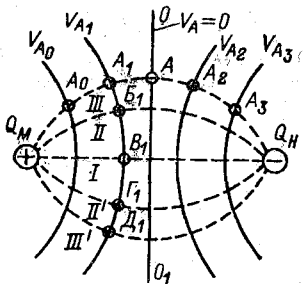


Рис. 5.13. Равнопотенциальные линии поля двух разноименных точечных зарядов

и  $-Q_H$  можно учитывать только поле собственного заряда, пренебрегая влиянием другого, то касательная к линии  $III$  в точке  $M$  совпадает с направлением вектора  $E'_M$ , т. е. с линией напряженности поля одиночного точечного заряда  $+Q_M$ . По той же причине касательная к линии  $III$  в точке  $H$  совпадает с направлением вектора  $E'_H$ , т. е. с линией напряженности заряда  $-Q_H$ .

На рис. 5.12 показан примерный ход еще двух линий  $II$  и  $IV$  (начальный участок). Линии  $II'$  и  $III'$  построены симметрично линиям  $II$  и  $III$  относительно оси  $MN$ .

Интересно рассмотреть линии напряженности  $I$  и  $I'$ , совпадающие с прямой  $MN$ . Во всех точках линии  $I$  векторы напряженности поля от зарядов  $+Q_M$  и  $-Q_H$  совпадают по направлению, а в точках линии  $I'$  имеют встречное направление.

4. Как построить линии равного потенциала поля зарядов  $+Q_M$  и  $-Q_H$  (рис. 5.9)? В любой точке поля линия равного потенциала перпендикулярна линии напряженности. Поэтому линии с найденным выше потенциалом  $V_{A1} = 27,3$  В (рис. 5.13) должна пересечь под прямым углом линии напряженности  $III$ ,  $II$ ,  $I$ ,  $II'$  и  $III'$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $B_1$ ,  $\Gamma_1$  и  $D_1$ . Аналогично построена равнопотенциальная линия  $V_{A2} = -27,3$  В. Последняя симметрична линии с потенциалом  $V_{A1}$  относительно оси  $OO_1$ , все точки которой имеют потенциал, равный нулю.

Рассмотренным методом на рис. 5.13 построены еще две равнопотенциальные линии ( $V_{A0}$  и  $V_{A3}$ ).

### 5.3. ОДНОРОДНОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

#### Условие задачи

К двум плоским тонким металлическим параллельным пластинам  $A$  и  $B$  (электродам) при замкнутом ключе  $K$  подвели напряжение  $U_{AB} = 600$  В от источника энергии (рис. 5.14). Расстояние между пластинами  $d = 2$  мм  $= 0,002$  м, площадь каждой из них  $S = 4,25 \cdot 4,25$  см<sup>2</sup>  $= 4,25 \cdot 4,25 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>. Вычислить напряженность поля заряженных пластин, заряд каждой из них и построить график изменения потенциала в воздухе ( $\epsilon_2 = 1$ ) между пластинами.

#### Решение задачи

1. Электрическое поле двух плоских параллельных пластин. При замкнутом ключе  $K$

(рис. 5.14) на пластине  $A$ , присоединенной к положительному выводу источника, накапливается заряд  $+Q_A$ , а на пластине  $B$ , присоединенной к отрицательному выводу источника, — заряд  $-Q_B$ , причем  $Q_A = Q_B = Q$ .

Когда процесс зарядки закончится, перемещения зарядов вдоль поверхности пластин не происходит.

Это говорит о том, что все точки каждой из пластин ( $A$  или  $B$ ) имеют соответственно одинаковый потенциал, т. е. каждая из пластин — поверхность равного потенциала. При разных потенциалах точек проводящей металли-

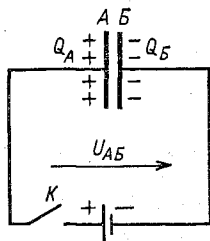


Рис. 5.14. Схема заряда двух пластин

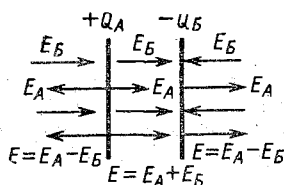


Рис. 5.15. Напряженность поля двух плоских разноименно заряженных пластин

ческой пластины заряды перемещались бы от точек с большим потенциалом к точкам с меньшим потенциалом. Поэтому на рис. 5.15 линии векторов напряженности поля  $E_A$  и  $E_B$  зарядов  $Q_A$  и  $Q_B$  направлены перпендикулярно равнопотенциальным поверхностям — к пластине  $A$  и пластине  $B$ . Так как пластины  $B$  и  $A$  различаются только знаками зарядов, то численно напряженность поля  $E_B$  заряда  $Q_B$  у поверхности пластины  $B$  равна напряженности поля  $E_A$  заряда  $Q_A$  у поверхности пластины  $A$ , но вектор  $E_B$  направлен противоположно вектору  $E_A$ .

Такие же напряженности поля  $E_A$  и  $E_B$  получаются вблизи них (на расстояниях, малых по сравнению с линейными размерами пластины). Если учесть, что длина каждой пластины равна 4,25 см, то, например, на расстоянии 0,2 см и менее справа и слева от пластин  $A$  и  $B$  электрическое поле каждого заряда ( $Q_A$  и  $Q_B$ ) можно считать однородным. Это значит, что одинаковы по значению и направлению вектор напряженности  $E_A$  в каждой точке и вектор  $E_B$  в каждой точке (влияние краев пластины еще практически не сказывается).

Из рис. 5.15 ясно, что:

во-первых, во внешнем пространстве (слева от пластины  $A$  и справа от пластины  $B$ ) векторы  $E_A$  и  $E_B$  направлены навстречу друг другу, поэтому в любой точке напряженность поля  $E = E_A - E_B = 0$ , т. е. электрическое поле отсутствует (искажением поля у краев пластин пренебрегаем);

во-вторых, между пластинами  $A$  и  $B$  векторы  $E_A$  и  $E_B$  совпадают по направлению и напряженность поля

$$E = E_A + E_B = 2E_A = 2E_B. \quad (5.5)$$

2. Вычисление напряженности поля и зарядов пластин. Напряженность однородного поля между пластинами и подведенное к ним напряжение  $U_{AB}$  связаны простой зависимостью  $U_{AB} = Ed$ , где  $d$  — расстояние между пластинами.

В нашем случае

$$E = \frac{U_{AB}}{d} = \frac{600}{0,002} = 3 \cdot 10^5 \text{ В/м} = 300 \text{ кВ/м.}$$

Считая заряд равномерно распределенным по поверхности (пренебрегая искажениями поля у краев пластин), находим, что он пропорционален напряженности поля и площади пластины (это следует из теоремы Остроградского — Гаусса):

$$Q = ES\varepsilon_0 = 3 \cdot 10^5 \cdot 4,25 \cdot 4,25 \cdot 10^{-4} \cdot 1 \frac{10^{-9}}{36\pi} = 4,8 \cdot 10^{-9} \text{ Кл.}$$

3. Изменение потенциала в пространстве между пластинами.

Для двух точек поля с потенциалами  $V_1$  и  $V_2$  и соответственно с напряженностями  $E_1$  и  $E_2$  изменение потенциала  $\Delta V = V_1 - V_2 = E_1 R_1 - E_2 R_2$ . Обозначая  $R_1 - R_2 = \Delta R$  и принимая это расстояние весьма малым, можно считать напряженность поля неизменной в пределах интервала  $\Delta R$ , т. е.  $E_1 = E_2 = E$ . В таком случае  $\Delta V = E \Delta R$ .

В данной задаче напряженность поля между пластинами имеет одно и то же значение во всех точках поля (рис. 5.16), т. е. в пределах от  $R=0$  до  $R=d$ . Поэтому выражение  $\Delta V = E \Delta R$  справедливо при любом расстоянии между двумя точками линии напряженности (конечно, только между пластинами).

Учитывая, что точка нулевого потенциала может быть выбрана произвольно, примем потенциал одной из точек пластины  $B$ , а значит, и всей металлической пластины  $V_B = 0$ . Тогда  $\Delta V_{AB} = V_A - V_B = V_A = E R_{AB} = Ed = 600$  В и  $U_{AB} = V_A - V_B = 600$  В, чего и следовало ожидать. Гра-

фик зависимости  $V(R)$  изображается прямой 1 (рис. 5.17). Если выбрать  $V_A=0$ , то  $\Delta V_{AB}=V_A-V_B=-V_B=Ed=$   
 $=600$  В и  $V_B=-600$  В (прямая 2 на рис. 5.17). Точно так же  $V_B=V_A-U_{AB}=-600$  В.

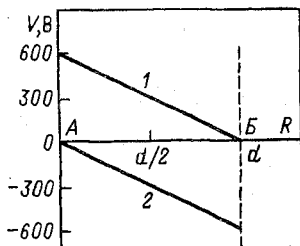
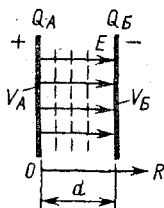


Рис. 5.16. Линии напряженности и равнопотенциальные поверхности однородного поля двух плоских пластин

Рис. 5.17. Изменение потенциала в пространстве между пластинами

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Исчезнет ли электрическое поле между пластинами при размыкании ключа  $K$  (рис. 5.14)? Если считать среду, окружающую пластины (в нашем случае — воздух), абсолютным изолятором, то заряды на пластинах и напряженность поля между ними сохранят прежние значения. В этих условиях источник энергии необходим только для первоначальной зарядки пластин  $A$  и  $B$ .

В действительности всякая среда обладает некоторой проводимостью. Поэтому заряды  $Q_A$  и  $Q_B$  будут пусть медленно, но постепенно нейтрализовать друг друга, а электрическое поле будет уменьшаться.

2. Каков запас прочности диэлектрика? Воздух «пробивается» (теряет свойства изолятора, становясь проводником) при напряженности поля  $E_{пр} = 3000$  В/мм, а в рассматриваемой задаче  $E = 300$  В/мм.

Таким образом, запас прочности

$$k = E_{пр}/E = 3000/300 = 10.$$

3. Как повлияет на характеристики электрического поля уменьшение в 2 раза расстояния между пластинами? Отвечая на этот вопрос, нужно различать два возможных случая.

Если расстояние уменьшается при подключенном ис-

точнике (ключ  $K$  замкнут), то напряжение  $U_{AB}$  между пластинами остается неизменным. В таком случае напряженность поля  $E = U_{AB}/d$  и заряд  $Q = ES\epsilon_r\epsilon_0$  изменяются пропорционально расстоянию  $d$  и при заданных условиях возрастут в 2 раза.

Если расстояние уменьшается при отключенном источнике (ключ  $K$  разомкнут), то остаются неизменными заряды пластин. В этом случае напряженность поля  $E = Q/S\epsilon_r\epsilon_0$  не изменяется, а напряжение между пластинами  $U_{AB} = Ed$  уменьшается пропорционально  $d$ , т. е. в нашем случае уменьшится в 2 раза.

Уменьшение напряжения при отключенном источнике становится понятным, если учесть, что сближение разноразноименно заряженных пластин  $A$  и  $B$  возможно под действием сил электрического поля. Энергия поля при сближении пластин убывает, преобразуясь в энергию другого вида. Например, она может перейти в механическую энергию того устройства, которое сдерживает сближение пластин, а от источника энергия не поступает, так как он отключен. Разность потенциалов пластин, или напряжение, пропорциональна энергии и уменьшается вместе с уменьшением энергии поля.

4. Как повлияет на напряженность поля заполнение пространства между пластинами диэлектриком с  $\epsilon_r = 6$ ? Отвечая на этот вопрос, нужно опять рассмотреть два возможных случая.

При замкнутом ключе  $K$  (рис. 5.14) напряженность поля между пластинами  $E = U_{AB}/d$  остается постоянной, так как неизменны  $U_{AB}$  и  $d$ , а заряд пластин  $Q = ES\epsilon_r\epsilon_0$  возрастет в  $\epsilon_r = 6$  раз (дополнительный заряд поступит от источника).

При разомкнутом ключе  $K$  остается постоянным заряд на пластинах, а значит, напряженность поля  $E = Q/S\epsilon_r\epsilon_0$  уменьшится в 6 раз.

5. Как повлияет проводящая пластина, помещенная между электродами (рис. 5.18), на характеристики поля?

Результирующая напряженность поля внутри проводника должна равняться нулю:

$$E_p = E_k - E = 0,$$

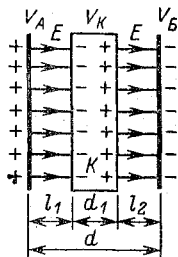


Рис. 5.18. Проводник в однородном поле



где  $E$  — напряженность поля зарядов  $Q_A$  и  $Q_B$  на электродах;  $E_K$  — напряженность поля зарядов, индуктированных на проводнике.

Поэтому внутри проводника (рис. 5.18) происходит разрыв линий напряженности.

Для участка  $l_1$  (рис. 5.18) разность потенциалов равна  $V_A - V_K = El_1$ , а для участка  $l_2$  разность потенциалов  $V_K - V_B = El_2$ .

Складывая левые и правые части уравнений, получаем

$$V_A - V_B = E(l_1 + l_2)$$

или

$$V_A - V_B = E(d - d_1).$$

Итак, введение в пространство между электродами проводящей пластины  $K$  равносильно сближению электродов на  $d_1$ , поэтому полностью применимы выводы, полученные в доп. вопросе 3 к этой задаче.

6. Каким образом защищают приборы от воздействия электрического поля? Если работу какого-либо прибора может нарушить внешнее электрическое поле, то его помещают в металлическую коробку (экран). Внутри экрана напряженность поля равна нулю.

Экраны часто выполняют не сплошными, а в виде сетки. Например, защищая помещение от проникновения электрического поля атмосферы, возникающего, например, при грозовых разрядах, в стены закладывают металлическую сетку.

#### 5.4. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

70. На расстоянии 20 мм от точечного заряда, находящегося в вакууме, напряженность поля равна 300 кВ/м. Определить заряд.

71. Точечный заряд  $Q$  создает в воздухе на расстоянии  $R$  напряженность поля  $E$ . Определить, какой заряд создает эту же напряженность поля на том же расстоянии в дистиллированной воде ( $\epsilon_r = 80$ ).

72. На расстоянии  $R = 0,5$  м от точечного заряда потенциал равен 6 кВ. Определить напряженность поля и потенциал в точках, расположенных на расстояниях  $2R$ ,  $3R$  и  $4R$  от заряда. Построить график изменения напряженности поля и потенциала.

73. Для предыдущей задачи построить в масштабе картину поля, изображая ее линиями напряженности и линиями равного потенциала. Построение выполнить, предполагая, что заряд находится в воздухе ( $\epsilon_r = 1$ ).

74. Пробный точечный заряд  $q=5 \cdot 10^{-7}$  Кл внесен в точку  $A$  электрического поля другого точечного заряда  $Q=-10^{-5}$  Кл, находящегося в масле. Определить значение и направление напряженности поля  $E$  заряда  $Q$  в точке  $A$  и силы  $F$ , действующей на пробный заряд, если расстояние от заряда до точки  $A$  составляет 40 см.

75. Изменятся ли  $E$  и  $F$  в условиях предыдущей задачи, если изменить знак пробного заряда?

76. Принимая для точечного заряда  $Q=2 \cdot 10^{-9}$  Кл потенциал бесконечно удаленной точки равным нулю, вычислить радиусы всех равнопотенциальных поверхностей от 45 В до 0 через каждые 9 В и построить эти поверхности.

77. Принимая в условиях предыдущей задачи равным нулю потенциал точки, отстоящей на 2 м от заряда, вычислить новые значения потенциалов построенных равнопотенциальных поверхностей.

78. В электрическом поле точечного заряда между точками  $A$  и  $B$ , удаленными от заряда соответственно на расстояние 30 и 60 см, напряжение  $U_{AB}=75$  В. Определить заряд, если он находится в воздухе.

79. Определить, в каком отношении делит точка  $B$  (рис. 5.19) отрезок  $AB$

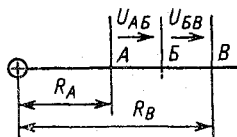


Рис. 5.19. К задаче 79

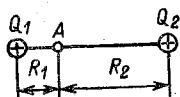


Рис. 5.20. К задаче 84

зок  $AB$  линии напряженности точечного заряда, если напряжения участков  $U_{AB}=U_{BB}$ , а точки  $A$  и  $B$  удалены от заряда на расстояния  $R_A$  и  $R_B$ .

80. Металлический шар радиусом  $R_{ш}=42,5$  см находится в воздухе и имеет заряд  $Q=10$  мкКл  $=10 \cdot 10^{-6}$  Кл. Вычислить напряженность поля и потенциал на расстояниях (от центра шара)  $R=0$ ;  $R=R_{ш}$ ;  $R=2R_{ш}$ ;  $R=4R_{ш}$ . По полученным данным построить зависимости  $E(R)$  и  $V(R)$ .

81. Два точечных положительных заряда  $Q_1$  и  $Q_2$  находятся в воздухе на расстоянии 10 мм друг от друга. Сила их взаимодействия  $F=0,72 \cdot 10^{-3}$  Н. Определить заряды и построить векторы силы, действующей на каждый из них, если  $Q_2=2Q_1$ .

82. В условиях предыдущей задачи определить значение и направление напряженности поля каждого заряда (в отдельности) в точке расположения другого заряда.

83. Вычислить напряженность поля и потенциал в точке, расположенной в центре между точечными зарядами  $Q_1=0,5 \cdot 10^{-6}$  Кл и  $Q_2=10^{-6}$  Кл, если расстояние между зарядами равно 40 см и они находятся в минеральном масле ( $\epsilon_r=2,2$ ).

84. Напряженность поля двух точечных зарядов  $Q_1$  и  $Q_2$  в точке  $A$  (рис. 5.20) равна нулю. Определить отношение  $Q_2/Q_1$ , если  $R_2/R_1=3$ .

85. Три точечных заряда  $Q_1=Q_3=-10^{-7}$  Кл и  $Q_2=5 \cdot 10^{-8}$  Кл находятся в вакууме и расположены на одной прямой. Заряд  $Q_2$  размещен посередине, на равных расстояниях 0,1 м от зарядов  $Q_1$  и  $Q_3$ . Определить силу, действующую на каждый заряд.

86. В условиях предыдущей задачи определить графически напряженность поля на расстоянии 0,1 м от заряда  $Q_2$  в точке, находящейся на перпендикуляре к линии, соединяющей заряды, если перпендикуляр восстановлен в точке расположения заряда  $Q_2$ .

87. Два металлических шара радиусом 15 и 10 см находятся в воздухе на расстоянии друг от друга, значительно большем радиусов, и имеют одинаковые положительные заряды. Вычислить заряд шара, если напряжение между шарами составляет 5,1 кВ. Принять, что на поверхности каждого шара электрическое поле создается собственным зарядом.

88. Напряжение между плоскими металлическими пластинами 240 В; расстояние между ними 3 мм, площадь каждой пластины 12 см<sup>2</sup>. Вычислить заряд каждой пластины, если пластины находятся в вакууме.

89. Какое напряжение нужно подвести к плоским металлическим пластинам, чтобы заряд каждой из них составлял  $15,3 \cdot 10^{-9}$  Кл? Пространство между пластинами заполнено слюдой ( $\epsilon_r=6$ ), толщина которой 2 мм. Площадь каждой пластины 18 см<sup>2</sup>.

90. Парафинированная бумага, имеющая электрическую прочность  $E_{пр}=15 \cdot 10^3$  В/мм, заполняет пространство между металлическими плос-

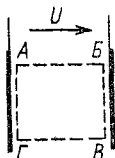


Рис. 5.21. К задаче 91

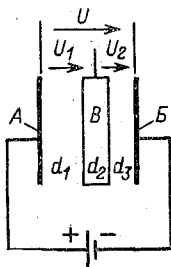


Рис. 5.22. К задаче 92

кими пластинами. Расстояние между пластинами 0,15 мм. Вычислить максимально допустимое напряжение, которое можно подвести к пластинам при запасе прочности 2,25.

91. К плоским металлическим пластинам приложено напряжение  $U=1000$  В (рис. 5.21). Между пластинами перемещается по прямоугольному контуру  $ABCD$  заряд  $q=2 \cdot 10^{-9}$  Кл. Вычислить силу, действующую на заряд, и работу по его перемещению на каждом из четырех пря-

молинейных отрезков контура, а также суммарную работу по всему контуру, если расстояние между пластинами 2 мм.

92. В пространство между плоскими проводящими пластинами ввели металлический лист  $B$  (рис. 5.22). Вычислить напряженность поля, потенциалы  $A$  и  $B$  (приняв потенциал пластины  $B$  равным нулю), а также напряжения  $U_1$  и  $U_2$ , если  $d_1=2$  мм,  $d_2=d_3=1$  мм и напряжение между пластинами  $A$  и  $B$  равно 240 В.

93. После зарядки пластин (рис. 5.14) отключили источник энергии и изменили расстояния между пластинами от 0,5 до 1 мм. Вычислить напряжение между пластинами до и после изменения расстояния, если напряженность поля конденсатора 320 В/мм.

### 5.5. ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ. 5

70.  $1,33 \cdot 10^{-8}$  Кл.

71. 80Q.

72.

$R$ , м	0,5	1,0	1,5	2,0
$E$ , кВ/м	12,0	3,0	1,33	0,75
$V$ , кВ	6,0	3,0	2,0	1,5

73. Поток вектора напряженности 37,68 кВ/м.

74.  $E=256$  кВ/м;  $F=0,128$  Н;  $E$  и  $F$  направлены к заряду  $Q$ .

75. Изменится только направление силы.

76. 0,4 м; 0,5 м; 0,67 м; 1,0 м; 2,0 м.

77. Все потенциалы уменьшатся на 9 В.

78.  $5 \cdot 10^{-9}$  Кл.

79.  $AB : BB = R_A : R_B$ .

80.

$R$ , м	0	0,425	0,85	1,70
$E$ , кВ/м	0	500	125	31,25
$V$ , кВ	212,5	212,5	106,25	53,125

81.  $Q_1=2 \cdot 10^{-9}$  Кл.

82. 360 В/мм; 180 В/мм.  
 83.  $0,5 \cdot 10^5$  В/м;  $30 \cdot 10^4$  В.  
 84.  $Q_2 : Q_1 = 9$ .  
 85.  $22,5 \cdot 10^{-4}$  Н; 0;  $22,5 \cdot 10^{-4}$  Н.  
 86. 18 кВ/м.  
 87.  $1,7 \cdot 10^{-7}$  Кл.  
 88.  $85 \cdot 10^{-11}$  Кл.  
 89. 320 В.  
 90. 1000 В.

91. В любом месте сила  $F = 10^{-3}$  Н. Работа равна нулю на участках  $AG$  и  $BV$ ,  $+2 \cdot 10^{-6}$  Дж на участке  $AB$  и  $-2 \cdot 10^{-6}$  Дж на участке  $BG$ .  
 Суммарная работа равна нулю.

92.  $E = 80 \cdot 10^3$  В/м;  $V_A = 160$  В;  $V_B = -80$  В;  $U_1 = 160$  В;  $U_2 = 80$  В.  
 93. 160 В; 320 В.

## Глава шестая

### ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЕМКОСТЬ

#### 6.1. РАСЧЕТ ОБЩЕЙ ЕМКОСТИ СОЕДИНЕНИЯ КОНДЕНСАТОРОВ

##### Условие задачи

Конденсатор переменной емкости  $C_{\Pi} = 10 \div 500$  пФ (пикофарад) включен в цепь (рис. 6.1), где  $C_1 = 675$  пФ и  $C_2 = 40$  пФ (1 пФ =  $10^{-12}$  Ф). Вычислить пределы изменения общей емкости соединения.

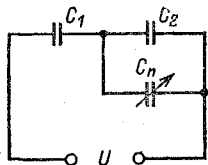


Рис. 6.1. Последовательно-параллельное соединение конденсаторов

##### Решение задачи

В рассматриваемом соединении конденсаторов (рис. 6.1) изменяется только емкость  $C_{\Pi}$  от минимального значения  $C_{\Pi min} = 10$  пФ до максимального  $C_{\Pi max} = 500$  пФ.

Соответственно общая емкость параллельного соединения конденсаторов  $C_2$  и  $C_{\Pi}$  изменяется от

$$C'_{min} = C_2 + C_{\Pi min} = 40 + 10 = 50 \text{ пФ}$$

до

$$C'_{max} = C_2 + C_{\Pi max} = 40 + 500 = 540 \text{ пФ.}$$

Заменив параллельное соединение емкостей  $C_{\Pi}$  и  $C_2$

одной емкостью  $C'$ , соединенной последовательно с емкостью  $C_1$ , определим общую емкость всего соединения  $C$ , которая изменяется в пределах от

$$C_{min} = \frac{C_1 C'_{min}}{C_1 + C'_{min}} = \frac{675 \cdot 50}{675 + 50} = 46,5 \text{ пФ}$$

до

$$C_{max} = \frac{C_1 C'_{max}}{C_1 + C'_{max}} = \frac{675 \cdot 540}{675 + 540} = 300 \text{ пФ.}$$

### Дополнительные вопросы к задаче

1. В каких случаях можно пренебречь влиянием параллельно или последовательно присоединенной емкости? При параллельном соединении конденсатора большой емкости с конденсатором малой емкости последний незначительно влияет на общую емкость соединения. Для последовательного соединения конденсаторов практически можно не учитывать влияние относительно большой емкости на сравнительно малую емкость. Так, в нашем случае для ориентировочного подсчета можно пренебречь влиянием  $C_2$  на  $C_{max}$  и  $C_1$  на  $C_{min}$ .

Следует заметить, что общая емкость параллельного соединения конденсаторов определяется так же, как и общее сопротивление последовательного соединения, и наоборот, общая емкость последовательного соединения конденсаторов — как общее сопротивление параллельного соединения.

2. В каких случаях в электротехнической аппаратуре применяют параллельное соединение конденсаторов? Во-первых, для получения больших емкостей (сотни и тысячи микрофард). В таких случаях приходится составлять батарею из многих параллельно соединенных конденсаторов (здесь подразумеваются случаи, когда нельзя применять электрические конденсаторы, имеющие большую емкость). Во-вторых, для получения требуемого значения емкости с высокой точностью путем регулировки («подгонки»). Например, желая получить емкость  $C=1000$  пФ и имея конденсаторы с погрешностью 5%, необходимо соединить параллельно конденсатор постоянной емкости  $C_1=900$  пФ и конденсатор переменной емкости  $C_2=50 \div 150$  пФ. Если

емкость  $C$  устанавливается только однажды, то конденсатор  $C_2$  можно подобрать из конденсаторов постоянной емкости.

3. Где практически применяется схема соединения конденсаторов по рис. 6.1? Такое соединение конденсаторов применяется, например, в радиотехнической и электроизмерительной аппаратуре, где часто требуется регулировать емкость в заданных пределах, которым не удовлетворяют имеющиеся (готовые) конденсаторы переменной емкости. При этом возникает задача, обратная рассмотренной.

4. Как определить емкости  $C_1$  и  $C_2$  (рис. 6.1), если заданы емкости  $C_{\Pi}$  и  $C$ ? Из двух уравнений общей емкости

$$C_{min} = \frac{C_1 (C_2 + C_{\Pi min})}{C_1 + C_2 + C_{\Pi min}}$$

и

$$C_{max} = \frac{C_1 (C_2 + C_{\Pi max})}{C_1 + C_2 + C_{\Pi max}}$$

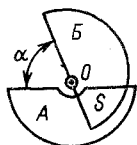


Рис. 6.2. Конденсатор переменной емкости

можно определить неизвестные  $C_1$  и  $C_2$  при заданных остальных емкостях.

5. Какую конструкцию имеет конденсатор переменной емкости? Конденсатор может иметь две параллельные пластины: неподвижную  $A$  и поворачиваемую  $B$  (рис. 6.2) или группу неподвижных пластин, между которыми перемещаются подвижные. Емкость возрастает с увеличением площади  $S$ , перекрываемой пластинами, которая пропорциональна углу поворота  $\alpha$ . Форма пластин определяет характер зависимости емкости от угла поворота. Часто встречается так называемый прямоемкостный конденсатор, емкость которого пропорциональна углу  $\alpha$ .

## 6.2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ И ЗАРЯДОВ В ЦЕПИ КОНДЕНСАТОРОВ

### Условие задачи

Однопроводная линия электротранспорта с напряжением  $U_1 = 500$  В относительно земли (последняя служит обратным проводом) имеет емкость 2 пФ/м. Емкость от-

носителем земли рядом проходящего провода линии связи равна 1 пФ/м. Емкость между проводами линий составляет 0,01 пФ/м. Вычислить напряжение между линией связи и землей, образуемое в результате емкостной связи проводов двух линий. Сопротивление изоляции проводов линий принять бесконечно большим.

### Решение задачи

1. Составление электрической схемы. На рис. 6.3, а показаны провод линии электропередачи 1, провод линии связи 2, их емкости относительно земли  $C_1$  и  $C_3$  и емкость между проводами  $C_2$ . На рис. 6.3, б дана схема замещения цепи, где  $U_3$  — искомое напряжение.

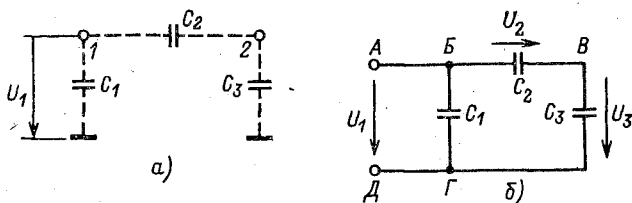


Рис. 6.3. Емкости проводов линии (а) и их эквивалентная схема (б)

2. Вычисление напряжения  $U_3$ . Для конденсаторов  $C_2$  и  $C_3$  общая емкость

$$C_{2,3} = C_2 C_3 / (C_2 + C_3)$$

и заряд  $Q_{2,3} = U_1 C_{2,3}$ .

Поскольку при последовательном соединении конденсаторов их заряды одинаковы,  $Q_2 = Q_3$ . Заряд общей емкости  $C_{2,3}$ , эквивалентной последовательно соединенным емкостям  $C_2$  и  $C_3$ , такой же, т. е.

$$Q_2 = Q_3 = Q_{2,3} = U_1 C_{2,3} = U_1 C_2 C_3 / (C_2 + C_3),$$

откуда

$$Q_3 / C_3 = U_1 C_2 / (C_2 + C_3).$$

Но  $Q_3 / C_3 = U_3$ , поэтому

$$U_3 = U_1 \frac{C_2}{C_2 + C_3} = 500 \frac{0,01}{0,01 + 1} = 4,95 \text{ В} \approx 5 \text{ В}.$$

Итак, вследствие емкостной связи проводов двух линий образуется напряжение 5 В на линии связи.



## Дополнительные вопросы к задаче

1. Что покажет кулонметр (прибор, измеряющий количество заряда), если его включить в участок  $AB$  эквивалентной схемы (рис. 6.3, б)? Допустим, что сначала источник с напряжением  $U_1$  не был подключен и емкости  $C_1, C_2, C_3$  не были заряжены. В таком случае после включения источника с напряжением  $U_1$  через кулонметр пройдет общий заряд двух ветвей  $BГ$  и  $БВГ$ .

Но для ветви  $BГ$  заряд

$$Q_1 = U_1 C_1 = 500 \cdot 2 \cdot 10^{-12} = 10^{-9} \text{ Кл};$$

для ветви  $БВГ$  заряд

$$Q_{2,3} = Q_3 = U_3 C_3 = 5 \cdot 1 \cdot 10^{-12} = 0,5 \cdot 10^{-11} \text{ Кл}.$$

Общий заряд двух ветвей

$$Q = Q_1 + Q_{2,3} = 10^{-9} + 0,5 \cdot 10^{-11} = 100,5 \cdot 10^{-11} \text{ Кл}.$$

Общий заряд  $Q$  можно измерить кулонметром только в эквивалентной схеме. У линии нет участка  $AB$ .

2. Можно ли емкости  $C_2$  и  $C_3$  (рис. 6.3) рассматривать как делитель напряжений? Из рис. 6.3, б очевидно, что

$$U_1 = U_2 + U_3,$$

откуда

$$U_2 = U_1 - U_3 = 500 - 4,95 \approx 495 \text{ В},$$

или

$$U_2/U_3 = 495/4,95 = 100.$$

Такое же соотношение между емкостями:

$$C_3/C_2 = 1/0,01 = 100.$$

Таким образом,

$$U_2:U_3 = C_3:C_2.$$

Итак, общее напряжение  $U_1$  на последовательно включенных конденсаторах ( $C_2$  и  $C_3$ ) распределяется обратно пропорционально значениям емкостей. Иначе говоря, емкости  $C_2$  и  $C_3$  образуют делитель напряжения.

Здесь уместно вспомнить, что в делителе из двух последовательно включенных сопротивлений напряжение распределяется прямо пропорционально значениям сопротивлений.

3. Как влияет сопротивление изоляции

конденсаторов на работу емкостного делителя напряжения? При расчете емкостного делителя напряжения (в предыдущем вопросе) сопротивление изоляции всех конденсаторов было принято бесконечно большим. В реальных условиях сопротивление изоляции конденсатора имеет конечное значение, с которым иногда приходится считаться.

Так, в цепи из двух одинаковых емкостей  $C_1 = C_2$  (рис. 6.4) напряжение  $U_1 = U_2$ , если считать конденсаторы идеальными. Если же принять, что изоляция конденсатора  $C_1$  заведомо хуже, чем конденсатора  $C_2$ , т. е. сопротивления изоляции конденсаторов  $R_1 \ll \ll R_2$ , то окажется  $U_1 \ll U_2$ . Но равенство  $U_1 + U_2 = U$  по-прежнему справедливо, и увеличение напряжения  $U_2$  может привести к пробое конденсатора  $C_2$ . Поэтому не следует соединять последовательно конденсаторы с резко различающимися сопротивлениями изоляции. Емкостный делитель напряжения в цепях постоянного тока применять нельзя.

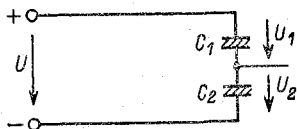


Рис. 6.4. К дополнительному вопросу 3

4. Как изменится запас прочности одного из конденсаторов (рис. 6.4) при пробое другого? Если произойдет пробой одного из последовательно включенных конденсаторов, например  $C_2$  (рис. 6.4), то другой конденсатор  $C_1$  окажется под полным напряжением  $U$  и его запас прочности уменьшится в  $U/U_1$  раз, что может привести к пробое конденсатора  $C_1$ . Поэтому для последовательного соединения не следует брать конденсаторы на предельно допустимые напряжения.

### 6.3. ПЛОСКИЙ КОНДЕНСАТОР

#### Условие задачи

Определить расстояние  $d$  между пластинами и их площадь  $S$  для плоского конденсатора с изоляцией из парафинированной бумаги ( $\epsilon_r = 4,3$ ;  $E_{пр} = 15 \cdot 10^6$  В/м), если емкость конденсатора  $C = 3800$  пФ  $= 3,8 \cdot 10^{-9}$  Ф; рабочее напряжение  $U = 600$  В и запас прочности  $k = 2,5$ .

#### Решение задачи

1. Определение расстояния между пластинами. Учитывая, что для однородного электрического

поля (см. § 5.3)  $U=Ed$ , имеем

$$d = \frac{U_{\text{пр}}}{E_{\text{пр}}} = \frac{U_{\text{к}}}{E_{\text{пр}}} = \frac{600 \cdot 2,5}{15 \cdot 10^6} = 10^{-4} \text{ м} = 0,1 \text{ мм.}$$

Итак, расстояние  $d$  между пластинами плоского конденсатора определяется рабочим напряжением, запасом прочности конденсатора и свойствами применяемого диэлектрика.

2. Вычисление площади пластины. Из формулы для емкости плоского конденсатора

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 S/d \quad (6.1)$$

определяем площадь одной пластины:

$$S = \frac{Cd}{\epsilon_r \epsilon_0} = \frac{3,8 \cdot 10^{-9} \cdot 10^{-4} \cdot 36\pi}{4,3 \cdot 10^{-9}} = 0,01 \text{ м}^2.$$

### Дополнительные вопросы к задаче

1. При каких запасах прочности обычно работают конденсаторы? В практических условиях конденсаторы в большинстве случаев работают при запасах прочности  $k=2 \div 3$  и в редких случаях — при  $k=1,5 \div 2$  или  $k=3 \div 10$ . Не следует стремиться к увеличению (без необходимости) запаса прочности, так как это приводит к удорожанию конденсатора и увеличению его размеров.

2. Как изменятся размеры  $d$  и  $S$  конденсатора из данной задачи, если в качестве диэлектрика взять слюду ( $\epsilon_r=6,45$ ,  $E_{\text{пр}}=75 \times 10^6 \text{ В/м}$ )? Сохраняя заданные по условию задачи значения емкости, рабочего напряжения и запаса прочности, для нового конденсатора можно уменьшить расстояние между пластинами в  $m$  раз, где

$$m = \frac{E_{\text{пр, слюды}}}{E_{\text{пр, бумаги}}} \frac{75 \cdot 10^6}{15 \cdot 10^6} = 5.$$

Для сохранения прежней емкости нужно площадь пластины  $S=Cd/\epsilon_r \epsilon_0$  уменьшить в такое же число раз, в какое уменьшилось отношение  $d/\epsilon_r$ , т. е. в 7,5 раза.

3. Как изменятся емкость конденсатора и запас прочности, если бумага будет неплотно прилегать к пластинам, образуя зазор  $d_{\text{в}}=0,025 \text{ мм}=0,025 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ? В этом случае образуется конденсатор с двухслойным диэлектриком. Емкость

слоя бумаги

$$C_6 = \varepsilon_{r6} \varepsilon_0 \frac{S}{d_6} = 4,3 \frac{10^{-9}}{36\pi} \frac{0,01}{0,075 \cdot 10^{-3}} \approx 5 \cdot 10^{-9} \text{ Ф};$$

емкость воздушного слоя

$$C_B = \varepsilon_0 \frac{S}{d_B} = \frac{10^{-9}}{36\pi} \frac{0,01}{0,025 \cdot 10^{-3}} \approx 3,5 \cdot 10^{-9} \text{ Ф}.$$

Конденсатор с двухслойным диэлектриком можно рассматривать как последовательное соединение двух конденсаторов, его общая емкость

$$C = \frac{C_6 C_B}{C_6 + C_B} = \frac{5 \cdot 10^{-9} \cdot 3,5 \cdot 10^{-9}}{(5 + 3,5) \cdot 10^{-9}} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ Ф}.$$

Учитывая, что напряжения на слое бумаги  $U_6$  и слое воздуха  $U_B$  обратно пропорциональны емкостям  $C_6$  и  $C_B$ , имеем

$$U_B = U_6 \frac{C_6}{C_B} = U_6 \frac{5,0}{3,5} = 1,43 U_6.$$

С другой стороны, для последовательного соединения

$$U_6 + U_B = U = 600 \text{ В}.$$

Решив совместно оба уравнения, получим  $U_6 = 247 \text{ В}$ ,  
 $U_B = 353 \text{ В}$ .

Поскольку электрическое поле каждого слоя однородно, напряженности составляют

$$E_6 = \frac{U_6}{d_6} = \frac{247}{0,075 \cdot 10^{-3}} = 3,3 \cdot 10^6 \text{ В/м};$$

$$E_B = \frac{U_B}{d_B} = \frac{353}{0,025 \cdot 10^{-3}} = 14,5 \cdot 10^6 \text{ В/м}.$$

Оказывается, что напряженность поля в воздушном зазоре намного превышает напряженность поля в бумаге. Поэтому запас прочности  $k$  определяет слой воздуха, для которого  $E_{пр} = 30 \cdot 10^6 \text{ В/м}$ . При заданных условиях  $k = 30 \cdot 10^6 / 14,5 \cdot 10^6 = 2$ , т. е. уменьшился.

Итак, при изготовлении конденсаторов необходимо обеспечить плотное прилегание диэлектрика к пластинам, так как воздушные зазоры могут резко снизить запас прочности конденсатора.

## 6.4. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ КОНДЕНСАТОР

### Условие задачи

Одножильный кабель с резиновой изоляцией марки СРГ (рис. 6.5) имеет радиус медной жилы  $R_1 = 2,25 \text{ мм} = 2,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ . Определить радиус свинцовой обмотки  $R_2$ , надетой на резиновую изоляцию, а также емкость кабеля на 1 м его длины, если при запасе прочности  $k=3$  можно приложить между жилой и свинцовой оболочкой напряжение  $U = 10 \text{ кВ} = 10^4 \text{ В}$ . Принять для резиновой изоляции  $\epsilon_r = 4$  и  $E_{пр} = 18 \times 10^6 \text{ В/м}$ .

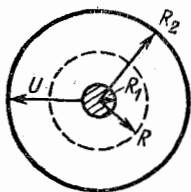


Рис. 6.5. Схема устройства кабеля

### Решение задачи

1. Вычисление радиуса свинцовой оболочки. Кабель нужно представить как цилиндрический конденсатор (рис. 6.5), для которого напряженность поля в некоторой точке на расстоянии  $R$  от оси

$$E_R = \frac{U}{R \ln(R_2/R_1)}. \quad (6.2)$$

Из формулы (6.2) следует, что напряженность  $E_R$  имеет наибольшее значение на поверхности жилы ( $R = R_1$ ), т. е.

$$E_{max} = \frac{U}{R_1 \ln(R_2/R_1)}.$$

Подставив в полученное выражение вместо  $E_{max}$  значение  $E_{пр} = 18 \cdot 10^6 \text{ В/м}$  и вместо напряжения  $U$  — напряжение пробоя  $U_{пр} = Uk = 10^4 \cdot 3 = 30\,000 \text{ В}$ , получим

$$18 \cdot 10^6 = \frac{30\,000}{R_1 \ln R_2/R_1},$$

откуда

$$\ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{30\,000}{18 \cdot 10^6 \cdot 2,25 \cdot 10^{-3}} = 0,74 \text{ или } \frac{R_2}{R_1} = 2,1$$

и

$$R_2 = 2,1 R_1 = 2,1 \cdot 2,25 = 4,72 \text{ мм}.$$

2. Вычисление емкости кабеля. Для кабеля или цилиндрического конденсатора емкость

$$C = \frac{2\pi l \epsilon_r \epsilon_0}{\ln(R_2/R_1)}. \quad (6.3)$$

Учитывая, что  $\ln(R_2/R_1) = 0,74$ , получаем емкость на 1 м длины:

$$C_0 = \frac{2\pi \cdot 1,4 \cdot 10^{-9}}{36\pi \cdot 0,74} = 3 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/м} = 3000 \text{ пФ/м.}$$

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Какой запас прочности имеет резиновая оболочка на границе со свинцовой? Приняв в формуле для напряженности  $R = R_2$ , получим

$$E_{R_2} = \frac{U}{R_2 \ln(R_2/R_1)} = \frac{10\,000}{4,72 \cdot 10^{-3} \cdot 0,74} = 2,9 \cdot 10^6 \text{ В/м.}$$

Запас прочности

$$k = E_{\text{пр}}/E_{R_2} = 18/2,9 = 6,2.$$

2. Как изменится емкость кабеля и запас прочности диэлектрика, если применить бумажную изоляцию ( $\epsilon_r = 2,5$ ;  $E_{\text{пр}} = 14 \cdot 10^6 \text{ В/м}$ )? Замена резиновой изоляции бумажной изменит емкость конденсатора, которая обратно пропорциональна диэлектрической проницаемости:

$$C'_0 = C_0 \frac{\epsilon_{\text{бумаги}}}{\epsilon_{\text{резины}}} = 3000 \frac{2,5}{4,0} = 1870 \text{ пФ/м.}$$

Напряженность поля на поверхности медной жилы

$$E_{R_1} = E_{\text{max}} = \frac{U}{R_1 \ln(R_2/R_1)} = \frac{10\,000}{2,25 \cdot 10^{-3} \cdot 0,74} = 6 \cdot 10^6 \text{ В/м.}$$

Таким образом, запас прочности для бумажной изоляции

$$k = \frac{E_{\text{пр}}}{E_{\text{max}}} = \frac{14 \cdot 10^6}{6 \cdot 10^6} \approx 2,34.$$

3. Как изменится емкость кабеля, если изоляцию сделать двухслойной — вначале слой резины толщиной 1,15 мм и затем бумаги (вплоть до свинцовой оболочки)? Внешний радиус резинового слоя

$$R' = R_1 + 1,15 = 2,25 + 1,15 = 3,4 \text{ мм}$$

и

$$\ln(R'/R_1) = \ln(3,4/2,25) = \ln 1,51 = 0,412.$$

Поскольку толщина слоя резины уменьшилась, емкость слоя возрастет и именно во столько раз, во сколько  $\ln R_2/R_1$

$/R_1$  больше  $\ln R'/R_1$ , т. е.

$$C_p = C_0 \frac{\ln(R_2/R_1)}{\ln(R'/R_1)} = 3000 \frac{0,74}{0,412} = 5400 \text{ пФ/м.}$$

Аналогично для слоя бумаги

$$\ln \frac{R_2}{R'} = \ln \frac{4,72}{3,4} = \ln 1,39 = 0,329$$

и емкость этого слоя

$$C_6 = C_0 \frac{\ln(R_2/R_1)}{\ln(R_2/R')} = 1870 \frac{0,74}{0,329} = 4200 \text{ пФ/м.}$$

Учитывая, что емкости двух слоев изоляции соединены последовательно, найдем общую емкость кабеля:

$$C = \frac{C_p C_6}{C_p + C_6} = \frac{5400 \cdot 4200}{5400 + 4200} = 2370 \text{ пФ/м.}$$

## 6.5. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

94. К конденсатору емкостью 0,1 мкФ присоединен последовательно другой конденсатор. Общая емкость соединения 0,06 мкФ. Вычислить емкость второго конденсатора.

95. Конденсаторы с емкостями  $C_1 = 900 \text{ пФ} \pm 10\%$  и  $C_2 = 200 \text{ пФ} \pm 5\%$  соединены параллельно. Вычислить максимальное и минимальное значения общей емкости соединения, учитывая возможные погрешности емкостей.

96. Входные выводы В и З прибора (рис. 6.6) присоединены соответственно к конденсатору емкостью  $C_1 = 800 \text{ пФ}$  и металлическому кор-

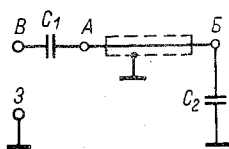


Рис. 6.6. К задаче 96

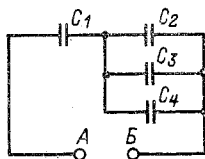


Рис. 6.7. К задаче 97

пусу прибора. Конденсаторы  $C_1$  и  $C_2$  прибора соединены между собой проводником АВ, помещенным в экран (металлический чулок), который тоже присоединен к корпусу. Вычислить входную емкость прибора (относительно выводов В и З), если емкость участка АВ относительно экрана равна 150 пФ, а  $C_2 = 50 \text{ пФ}$ .

97. Вычислить общую емкость соединения конденсаторов (рис. 6.7), если  $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 1 \text{ мкФ}$ .

98. Определить пределы изменения общей емкости соединения (рис. 6.8), если  $C_1=600$  пФ,  $C_3=26,4$  пФ, а переменная емкость  $C_2$  регулируется в пределах 30—600 пФ.

99. У конденсатора  $C_2$  (рис. 6.9) емкость изменяется в пределах 15—315 пФ. При каких емкостях  $C_1$  и  $C_3$  общая емкость соединения будет изменяться в пределах 43,7—175 пФ?

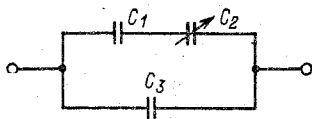


Рис. 6.8. К задаче 98

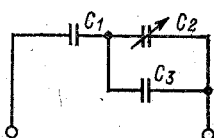


Рис. 6.9. К задаче 99

100. К выводам  $A$  и  $B$  соединения конденсаторов (рис. 6.7) подведено напряжение 20 В. Вычислить заряды конденсаторов и их напряжения, если  $C_1=2$  мкФ,  $C_2=0,5$  мкФ,  $C_3=1$  мкФ и  $C_4=1,5$  мкФ.

101. Определить заряд, который покажет кулонметр в общей цепи, взятой из предыдущей задачи, после присоединения источника к выводам  $A$  и  $B$ .

102. После замыкания ключа  $K$  (рис. 6.10) источник отдал в цепь заряд  $4,4 \cdot 10^{-5}$  Кл и конденсатор  $C_3$  зарядился до напряжения 1,2 кВ. Найти потенциалы точек  $B$  и  $B$ , приняв потенциал точки  $A$  равным нулю, а также найти емкости  $C_3$  и  $C_2$ , если  $C_1=10^4$  пФ и  $2C_2=3C_3$ .

103. В цепи при условиях предыдущей задачи определить распределение потенциалов, если отношение сопротивлений изоляции конденсатора  $C_2$  и  $C_3$  равно 1 : 9.

104. Конденсатор переменной емкости  $C=100 \div 500$  пФ зарядили при максимальной емкости от источника с напряжением 20 В. Затем конденсатор отключили от источника и поворотом подвижных пластин установили минимальную емкость. Вычислить напряжение на отключенном конденсаторе и энергию электрического поля при максимальной и минимальной емкостях.

105. Два конденсатора  $C_1$  и  $C_2$ , рассчитанных на одинаковые рабочие напряжения  $U$ , соединены последовательно. Определить рабочее напряжение в процентах  $U$ , которое можно подвести к их соединению, если  $C_1=2C_2$ .

106. Емкость плоского конденсатора 1450 пФ, рабочее напряжение 600 В и площадь каждой пластины 4 см<sup>2</sup>. Вычислить расстояние между

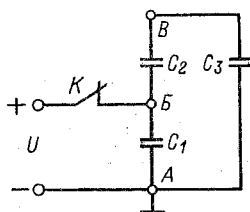


Рис. 6.10. К задаче 102



пластинами и запас прочности конденсатора, если в качестве диэлектрика применяется слюда ( $\epsilon_r=6$ ;  $E_{пр}=88 \cdot 10^6$  В/м),

107. Как изменятся емкость конденсатора из предыдущей задачи и его рабочее напряжение (при том же запасе прочности), если заменить слюду парафинированной бумагой ( $\epsilon_r=4$ ;  $E_{пр}=20 \cdot 10^6$  В/м)?

108. Два плоских конденсатора с изоляцией из парафинированной бумаги ( $\epsilon_r=4,7$ ) и с одинаковой площадью пластин  $S=60$  см<sup>2</sup> соединены последовательно. Найти общую емкость соединения, если расстояния между пластинами  $d_1=0,1$  мм и  $d_2=0,15$  мм.

109. Составить выражение для общей емкости двух последовательно соединенных плоских конденсаторов, имеющих площади пластин  $S_1$  и  $S_2$ , расстояния между пластинами  $d_1$  и  $d_2$  и одинаковый диэлектрик.

110. Два плоских конденсатора с одинаковой площадью пластин имеют соответственно проницаемости диэлектриков  $\epsilon_{r1}$  и  $\epsilon_{r2}$  и расстояния между пластинами  $d_1$  и  $d_2$ . Определить отношение емкостей конденсаторов, если  $\epsilon_{r1}/\epsilon_{r2}=2$  и  $d_1/d_2=0,25$ .

111. Вычислить емкость двух коаксиальных цилиндров длиной 100 см, разделенных слоем воздуха, если внешний диаметр внутреннего цилиндра 40 мм и внутренний диаметр внешнего цилиндра 60 мм.

112. Медную жилу кабеля диаметром 16 мм нужно изолировать на напряжение 25 кВ. Найти толщину бумажной изоляции ( $\epsilon_r=4$ ;  $E_{пр}=18$  кВ/мм), которую нужно нанести на жилу.

113. Цилиндрический конденсатор с внутренним радиусом  $r_1=6$  мм и внешним радиусом  $r_2=9$  мм имеет два слоя диэлектрика с проницаемостями  $\epsilon_{r1}=4$  и  $\epsilon_{r2}=5$ . Радиус границы двух слоев  $r=7$  мм. Вычислить максимальную напряженность поля в каждом слое изоляции, если к конденсатору приложено напряжение  $U=18,5$  кВ.

114. Жила и оболочка оцинкованного одножильного кабеля разделены резиновой изоляцией. К кабелю подведено напряжение  $U=10$  кВ, сечение жилы 16 мм<sup>2</sup>. При какой толщине резиновой изоляции напряженность электрического поля в ней не превышает  $6 \cdot 10^6$  В/м?

## 6.6. ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ. 6

94. 0,15 мкФ.

95. 1200 пФ; 1000 пФ.

96. 160 пФ.

97. 0,75 мкФ.

98. 55—326 пФ.

99.  $C_1=350$  пФ;  $C_3=35$  пФ.

100.  $Q_1=24 \cdot 10^{-6}$  Кл;  $Q_2=4$  мкКл;  $Q_3=8$  мкКл;  $Q_4=12$  мкКл;  $U_1=12$  В;  $U_2=U_3=U_4=8$  В.

101.  $24 \cdot 10^{-6}$  Кл.

102.  $V_B=2$  кВ;  $V_B=1,2$  кВ;  $C_2=3 \cdot 10^4$  пФ;  $C_3=2 \cdot 10^4$  пФ.

103.  $V_B = 2$  кВ;  $V_B = 1,8$  кВ.

104. 100 В;  $10^{-7}$  Дж;  $5 \cdot 10^{-7}$  Дж.

105. 150 %.

106. 0,015 мм; 2,2.

107. Емкость уменьшится в 1,5 раза, а рабочее напряжение — в 4,4 раза.

108. 1000 пФ.

109.  $C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{S_1 S_2}{S_1 d_2 + d_1 S_2}$ .

110.  $C_1/C_2 = 8$ .

111. 139 пФ.

112. 1,52 мм.

113.  $8,9 \cdot 10^6$  В/м и  $6 \cdot 10^6$  В/м.

114. Около 2,5 мм.

## Глава седьмая

# ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПРОВОДОВ С ТОКАМИ

## 7.1. ПРОВОДНИК С ТОКОМ В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

### Условие задачи

Между полюсами постоянного магнита (рис. 7.1) помещена прямоугольная рамка *abвга*, которая может свободно вращаться вокруг оси *OO<sub>1</sub>*. Ток в цепи рамки  $I = 5$  А. Определить значение и направление сил, действующих на стороны рамки в ее начальном положении, показанном на рисунке, и в конечном положении (после поворота рамки). Вычислить работу, совершаемую при перемещении рамки из начального в конечное положение и при повороте рамки на  $360^\circ$ , если магнитная индукция между полюсами  $B = 0,2$  Тл (тесла). Длина сторон рамки  $ab = вг = 30$  мм = 0,03 м и  $аг = бв = 20$  мм = 0,02 м.

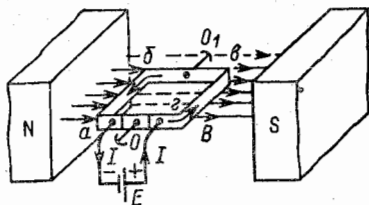


Рис. 7.1. Рамка с током в однородном магнитном поле

## Решение задачи

1. Силовое действие магнитного поля. Силовое действие магнитного поля характеризуют магнитной индукцией. Значение магнитной индукции  $B$  можно определить, например, по значению силы  $F$ , действующей на проводник длиной  $l$  с током  $I$ . Если проводник с током расположить перпендикулярно магнитным линиям, то

$$B = F/Il. \quad (7.1)$$

Магнитная индукция — векторная величина; формула (7.1) выражает только численное значение этого вектора. Вектор  $B$  направлен по касательной к магнитной линии, проходящей через данную точку поля. В нашем случае (рис. 7.1) векторы магнитной индукции направлены вдоль магнитных линий. (Для магнитного поля прямолинейного проводника с током направления векторов магнитной индукции показаны на рис. 7.6.)

Почему в условии задачи задано только одно значение магнитной индукции?

Характерной особенностью рассматриваемого в задаче магнитного поля является его однородность. Это значит, что во всех точках между полюсами  $N$  и  $S$  магнита (рис. 7.1) магнитная индукция имеет одно и то же значение и ее векторы параллельны (здесь не учитывается искажение поля у краев полюсов магнита).

По известным величинам  $B$ ,  $l$  и  $I$ , входящим в формулу (7.1), можно вычислить силу  $F$ , называемую электромагнитной силой и действующую на провод, который расположен перпендикулярно магнитным линиям ( $ab$  или  $bc$  на рис. 7.1).

Для провода с током, расположенного под углом к магнитным линиям, электромагнитная сила

$$F = BIl \sin \alpha, \quad (7.2)$$

где  $\alpha$  — угол между направлениями вектора  $B$  и тока  $I$  в проводнике.

Направление вектора силы определяется по «правилу левой руки»: если расположить ладонь левой руки так, чтобы вектор магнитной индукции входил в нее, а четыре вытянутых пальца совпадали с направлением тока в проводе, то отогнутый большой палец укажет направление силы, действующей на провод.

В соответствии с этим правилом на рис. 7.2, *a* построено

ны векторы сил  $F_{AB}$  и  $F_{BG}$ , действующие соответственно на провода  $ab$  и  $bg$  прямоугольной рамки  $abvga$  (рис. 7.1).

2. Вычисление сил, действующих на рамку. Рамка состоит из четырех проводов ( $ab$ ,  $bv$ ,  $vg$  и  $ga$  на рис. 7.1). В начальном положении рамки на стороны  $ag$

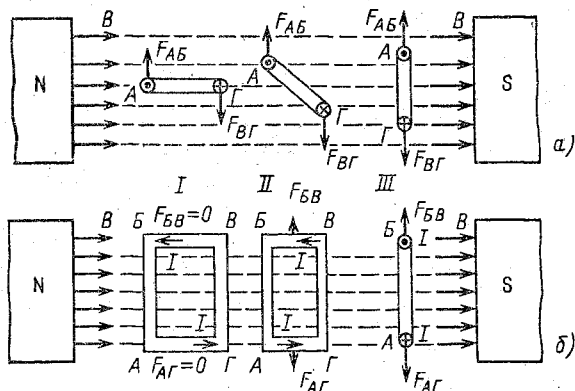


Рис. 7.2. Три положения рамки (I, II, III) при ее вращении силами магнитного поля:

$a$  — вид спереди;  $b$  — вид сверху

и  $bv$ , расположенные вдоль магнитных линий (рис. 7.2), силы не действуют, так как  $F_{AG} = F_{BV} = IBl_{ag} \sin 0^\circ = 0$  (рис. 7.2, б). На две другие стороны рамки (рис. 7.2, а) действуют силы

$$F_{AB} = F_{BG} = IBl_{ag} \sin 90^\circ = 5 \cdot 0,2 \cdot 0,03 \cdot 1 = 0,03 \text{ Н.}$$

Силы  $F_{AB}$  и  $F_{BG}$  (рис. 7.2, а) повернут рамку из положения I в положение III (на  $90^\circ$ ).

Как повлияет поворот рамки на значения действующих сил?

При заданных условиях в формуле для силы (7.2) только одна величина — угол  $\alpha$  — зависит от положения проводов рамки. Так, для сторон  $ag$  и  $bv$  угол  $\alpha$  возрастает при повороте рамки и в положении III (рис. 7.2, б)  $\alpha = 90^\circ$ . При этом силы, действующие на стороны  $ag$  и  $bv$ , достигают максимального значения:

$$F_{AG\max} = F_{BV\max} = IBl_{ag} \sin 90^\circ = 5 \cdot 0,2 \cdot 0,02 \cdot 1 = 0,02 \text{ Н}$$

Силы  $F_{AG}$  и  $F_{BV}$ , направления которых (в соответствии с правилом левой руки) совпадают с осью  $OO_1$  (рис. 7.1

и 7.2, б), только растягивают рамку и не создают вращающего момента.

Стороны  $ab$  и  $bc$  при всех положениях рамки располагаются перпендикулярно магнитным линиям ( $\alpha = 90^\circ$ ), поэтому значения и направления сил  $F_{AB}$  и  $F_{BG}$  не изменяются. В положении III (рис. 7.2, а) эти силы только растягивают рамку.

3. Вычисление работы сил магнитного поля. Силы магнитного поля, вращая рамку, совершают работу  $A = I\Delta\Phi$ , где  $I$  — ток в рамке,  $\Delta\Phi$  — изменение магнитного потока  $\Phi$  постоянного магнита, пронизывающего рамку, при ее повороте из положения I в положение III (рис. 7.2). Для однородного магнитного поля магнитный поток через площадку, перпендикулярную магнитным линиям, равен произведению магнитной индукции  $B$  и площади  $S$ , т. е. магнитный поток постоянного магнита  $\Phi = BS$ .

В нашем случае (рис. 7.1) плоскость рамки вначале параллельна магнитным линиям и пронизывающий ее магнитный поток равен нулю. В вертикальном положении (рис. 7.2, а, положение III) рамку пронизывает максимальный магнитный поток, равный произведению магнитной индукции на площадь рамки, т. е.

$$\Phi = BS = B(ag) (bc) = 0,2 \cdot 0,02 \cdot 0,03 = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ Вб (вебер)}$$

$$(1 \text{ Вб} = 1 \text{ В} \cdot \text{с}).$$

Так как в нашем случае изменение магнитного потока  $\Delta\Phi = \Phi$ , то

$$A = I\Delta\Phi = 5 \cdot 1,2 \cdot 10^{-4} = 6 \cdot 10^{-4} \text{ Дж.}$$

4. Вычисление работы, совершаемой при повороте рамки на  $360^\circ$ . Если начать вращение рамки из положения I (рис. 7.3, а) по направлению движения

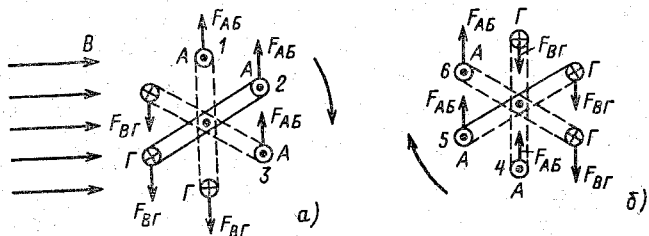


Рис. 7.3. Поворот рамки на угол  $360^\circ$  по часовой стрелке:

а — из положения I на угол  $180^\circ$  против сил поля; б — из положения 4 на  $180^\circ$  силами поля

часовой стрелки, то в пределах первой половины оборота придется преодолевать электромагнитные силы  $F_{AB}$  и  $F_{BG}$ , создающие встречный вращающий момент. Поэтому первый полуоборот может быть выполнен, например, силами внешнего двигателя, который будет преодолевать электромагнитные силы.

Второй полуоборот рамки, начинающийся от положения 4 (рис. 7.3, б), совершается силами магнитного поля  $F_{AB}$  и  $F_{BG}$ , работа которых  $A = I\Delta\Phi$  пропорциональна увеличению магнитного поля  $\Delta\Phi$ . Но в начале полуоборота и в его конце (положения 4 и 7, рис. 7.4) рамку пронизывает один

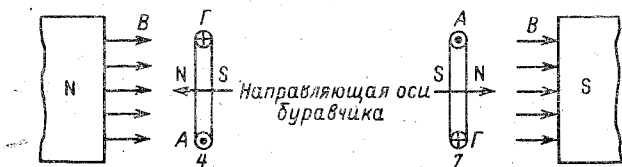


Рис. 7.4. Направление магнитных линий внешнего поля и поля рамки для двух ее положений

и тот же магнитный поток  $\Phi$  постоянного магнита, поэтому уместно спросить: *откуда берется приращение потока?*

Ответить на этот вопрос можно, если учесть знак магнитного потока, пронизывающего рамку.

Для определения знака магнитного потока пользуются «правилом буравчика»: если направление тока в рамке совпадает с вращательным движением рукоятки буравчика, а направление пронизывающего рамку потока совпадает с поступательным движением буравчика, то магнитный поток считается положительным. Такой случай получается для рассматриваемой рамки в положении 7 (рис. 7.4). Если магнитный поток, пронизывающий рамку, или ток в рамке имеет обратное направление, то магнитный поток считается отрицательным, как, например, в положении 4 (рис. 7.4).

Следует иметь в виду, что так определяется знак только внешнего по отношению к рамке магнитного потока, создаваемого независимо от тока в рамке, т. е. в нашем случае потока  $\Phi$  постоянного магнита. Собственный магнитный поток, создаваемый током рамки, всегда направлен в соответствии с правилом буравчика. Этот магнитный поток не создает никакого вращающего момента рамки.

Таким образом, приращение потока  $\Delta\Phi = \Phi - (-\Phi) = 2\Phi = 2 \cdot 1,2 \cdot 10^{-4} = 2,4 \cdot 10^{-4}$  Вб, работа сил поля  $A =$

$\equiv I\Delta\Phi = 5 \cdot 2,4 \cdot 10^{-4}$  Дж. Такую же работу должен совершить внешний двигатель за первый полуоборот рамки.

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Что произойдет с силами, действующими на стороны рамки (рис. 7.1), если изменить направление тока? Направления сил  $F_{AB}$  и  $F_{BC}$  изменятся на обратные, и рамка повернется на угол  $90^\circ$  в обратную сторону. Направление сил  $F_{CD}$  и  $F_{DA}$  останется прежним, так как изменится не только направление тока, но и расположение проводников  $cd$  и  $da$  относительно магнитных линий из-за вращения рамки в обратном направлении.

2. Почему электромагнитные силы стремятся растянуть рамку? Силы магнитного поля, действующие на рамку с током, совершают работу  $A = I\Delta\Phi$ , если увеличивается на  $\Delta\Phi$  положительный поток  $\Phi$ , пронизывающий рамку. Поэтому в рассматриваемой задаче электромагнитные силы поворачивают рамку перпендикулярно магнитным линиям и стремятся растянуть ее, чтобы положительный магнитный поток через рамку увеличился.

*Итак, контур с током стремится занять в магнитном поле такое положение и так изменить свою форму, чтобы пронизывающий поток имел максимальное значение.*

3. Может ли рамка с током находиться в таком положении, при котором силы поля будут ее сжимать, а не растягивать? Если в положении III (рис. 7.2) изменить направление тока в рамке, то электромагнитные силы, действующие на все стороны рамки, будут направлены внутрь, стремясь ее сжать. Это, на первый взгляд, противоречит положению теории. Но поток, пронизывающий рамку по правилу буравчика, отрицательный, и силы поля стремятся его уменьшить. Поэтому такое положение рамки неустойчиво, малейшее отклонение от неустойчивого равновесия приведет к повороту рамки на  $180^\circ$ . В новом положении поток положительный и силы поля растягивают рамку.

4. Может ли рамка с током служить указателем магнитного поля Земли? Как было показано (рис. 7.4), рамка с током стремится расположиться в магнитном поле таким образом, чтобы положительное направление ее оси (в соответствии с правилом буравчика) совпадало с направлением магнитных линий. Иначе говоря,

рамка поворачивается своим южным полюсом в сторону северного полюса магнита (положение 7 на рис. 7.4). Поэтому и в магнитном поле Земли рамка повернется так, что ее южный полюс будет обращен к северному магнитному полюсу Земли (который находится в Антарктике).

Так как индукция магнитного поля Земли мала ( $B \approx 0,5 \cdot 10^{-4}$  Тл), то рамка должна быть высокочувствительной, т. е. с большим током (или с большим числом витков), и достаточно легкой.

5. Имеют ли магнитные линии «начала» и «концы»? Магнитные линии всегда замкнуты. Так, в зазоре постоянного магнита (рис. 7.1) они проходят от северного полюса к южному и дальше замыкаются по телу магнита от южного полюса к северному. Это свойство магнитных линий принципиально отличает их от линий напряженности электрического поля неподвижных зарядов, которые не замкнуты (гл. 5).

6. Где на практике применяются рамки с током в магнитном поле? Для измерения токов и напряжений в цепях постоянного тока широко используются магнитоэлектрическими амперметрами и вольтметрами, принцип действия которых основан на взаимодействии рамки с током (измеряемым) и магнитного поля постоянного магнита. Прикрепляя к оси рамки пружинку, противодействующую ее вращению, можно получить угол поворота рамки, пропорциональный измеряемому току.

Этот же принцип положен в основу устройства электрических двигателей. Их применение рассматривается в гл. 9.

## 7.2. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПРЯМОГО ПРОВОДА С ТОКОМ

### Условие задачи

По прямолинейному проводу диаметром  $a=1$  см проходит ток  $I=235$  А.

Вычислить магнитную индукцию в точке  $M$ , создаваемую отрезком провода  $AB$  длиной  $l=1$  м (рис. 7.5). Точка  $M$  удалена на одинаковые расстояния от концов отрезка, а от его середины — на расстояние  $R_M=50$  см  $=0,5$  м. Построить график изменения напряженности поля и магнитной индукции внутри и вне провода.



## Решение задачи

1. Магнитная индукция и напряженность поля прямого провода с током. В отличие от рассмотренного в предыдущей задаче однородного поля постоянного магнита магнитное поле проводника с током

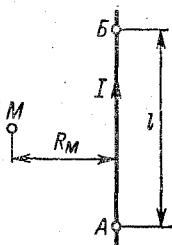


Рис. 7.5. Прямолинейный провод с током

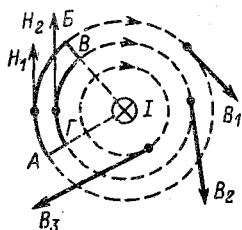


Рис. 7.6. Магнитные линии, векторы магнитной индукции и напряженности поля прямолинейного провода с током

неоднородно, так как значения и направления векторов магнитной индукции неодинаковы в различных точках поля (рис. 7.6).

Для длинного прямолинейного провода, находящегося в вакууме, магнитная индукция какой-либо точки поля вне провода прямо пропорциональна току в проводе и обратно пропорциональна расстоянию точки от оси провода:

$$B = \mu_0 I / 2\pi R, \quad (7.3)$$

где  $\mu_0$  — магнитная постоянная. Она характеризует магнитное поле в вакууме и зависит от размерностей величин, входящих в формулу (7.3). В системе единиц СИ

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Ом} \cdot \text{с/м} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}.$$

Направление магнитных линий прямолинейного провода (рис. 7.6), по касательным к которым и направлены векторы  $B$ , определяется по правилу буравчика.

Для магнитного поля в какой-либо среде (не в вакууме) следует учитывать усиление или ослабление поля рассматриваемой средой. В этом случае формула (7.3) принимает вид

$$B = \mu_a \frac{I}{2\pi R} = \mu_r \mu_0 \frac{I}{2\pi R}. \quad (7.4)$$

В формуле (7.4) абсолютная магнитная проницаемость  $\mu_a$  учитывает влияние среды на магнитную индукцию,

а магнитная проницаемость  $\mu_r = \mu_a / \mu_0$  показывает, во сколько раз абсолютная магнитная проницаемость данной среды больше или меньше магнитной постоянной. Величины  $\mu_0$ ,  $\mu_a$  и  $\mu_r$  аналогичны величинам  $\epsilon_0$ ,  $\epsilon_a$  и  $\epsilon_r$ , рассмотренным в гл. 1.

При практических расчетах для всех *неферромагнитных* сред можно принимать  $\mu_a = \mu_0$  и пользоваться формулой (7.3). Расчет полей в *ферромагнитной* среде рассмотрен в гл. 20.

При расчетах магнитных полей пользуются еще напряженностью магнитного поля  $H = B / \mu_a$ . Для прямолинейного провода напряженность поля вне провода

$$H = I / 2\pi R. \quad (7.5)$$

Формулы (7.3) и (7.5) строго верны для бесконечно длинного прямолинейного провода. У проводников конечной длины можно пользоваться указанными формулами при вычислении  $B$  и  $H$  только вблизи провода, т.е. на расстояниях  $R$ , малых по сравнению с его длиной  $l$ . Для многих практических задач важно знать именно поле вблизи провода, где оно наиболее интенсивно.

Можно ли пользоваться формулой (7.3) для определения магнитной индукции в точке  $M$ , создаваемой отрезком  $AB$  провода (рис. 7.5)?

Поскольку расстояние  $R_M = 0,5$  м соизмеримо с длиной  $l = 1$  м, то применить формулу (7.3) нельзя, а следует пользоваться законом Био — Савара, в котором учитываются длина и форма проводника с током. Для прямолинейного проводника произвольной длины  $l$  (рис. 7.7) по зако-

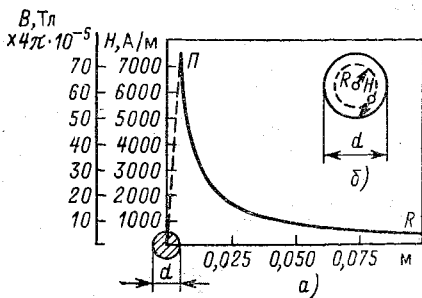
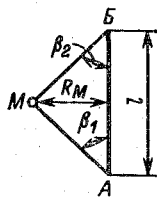


Рис. 7.7. К расчету по формуле (7.6)

Рис. 7.8. График изменения напряженности поля и магнитной индукции внутри и вне провода

ну Био — Савара магнитная индукция в точке  $M$

$$B_M = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_M} (\cos \beta_1 + \cos \beta_2), \quad (7.6)$$

где  $\beta_1$  и  $\beta_2$  — углы, показанные на рис. 7.7.

Легко заметить, что при  $R_M \ll l$  можно принять  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  и  $\cos \beta_1 = \cos \beta_2 = 1$ ; при этом формулы (7.6) и (7.3) окажутся тождественными.

2. Вычисление магнитной индукции и напряженности в точке  $M$  (рис. 7.5). Прежде всего вычислим  $\cos \beta_1$  и  $\cos \beta_2$ , входящие в формулу (7.6). В нашем случае  $R_M = l/2$  (рис. 7.7), поэтому  $\cos \beta_1 = \cos \beta_2 = \cos 45^\circ = 0,707$ . По формуле (7.6)

$$B_M = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{235}{4\pi \cdot 0,5} 2 \cdot 0,707 = 6,65 \cdot 10^{-5} \text{ Тл.}$$

Напряженность магнитного поля в точке  $M$

$$H_M = \frac{B_M}{\mu_0} = \frac{6,65 \cdot 10^{-5}}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 53 \text{ А/м.}$$

3. Построение графика изменения напряженности поля внутри и вне провода. Интересно рассмотреть изменение напряженности поля вблизи отрезка провода или поля длинного прямолинейного провода. Вне провода по формуле (7.5)

$$H = \frac{I}{2\pi R} = \frac{235}{6,28} \frac{1}{R} = 37,5 \frac{1}{R}.$$

Строим график  $H(R)$  (рис. 7.8, а), определяя  $H$  для нескольких значений  $R$ :

$R, \text{ м}$	0,005	0,01	0,025	0,05	0,075	0,10
$H, \text{ А/м}$	7500	3750	1500	750	500	375

Ордината точки  $\Pi$  на графике рис. 7.8, а определяет напряженность поля  $H_\Pi$  на поверхности провода (при  $R = 0,005 \text{ м}$ ). Соединяя начало координат с точкой  $\Pi$ , получаем прямую  $O\Pi$  (пунктир на рис. 7.8, а), выражающую зависимость  $H(R)$  внутри провода, где напряженность поля изменяется прямо пропорционально расстоянию точки от оси провода.

Действительно, проведя окружность радиусом  $R$  внутри провода (рис. 7.8, б), по закону полного тока получим

$$H \cdot 2\pi R = I_s, \quad (7.7)$$

где  $I_s$  — часть тока  $I$ , проходящего по сечению провода внутри окружности радиусом  $R$ . Уравнение (7.7) выражает равенство магнитного напряжения по замкнутому контуру радиуса  $R$  току, охваченному этим контуром (в данном случае току  $I_s$ ).

Введем понятие о плотности тока:

$$J = I/S = I/\pi d^2/4,$$

где  $S$  — площадь поперечного сечения провода. Тогда можно записать, что  $I_s = J\pi R^2$  и внутри провода  $H \cdot 2\pi R = J\pi R^2$ , или

$$H = J\pi R^2/2\pi R = (J/2) R,$$

т.е. увеличивается пропорционально расстоянию точки от оси провода.

Полученный график (рис. 7.8, а) выражает и зависимость  $B(R)$ , так как  $B = \mu_0 H$ .

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Как определить направление вектора магнитной индукции, создаваемой токами участков изогнутого провода (рис. 7.9)? Для определения магнитной индукции в точке  $M$  (рис. 7.9), ле-

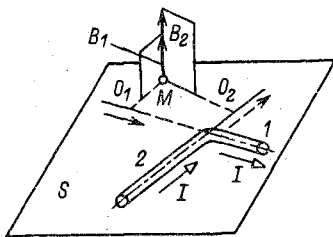


Рис. 7.9. Векторы магнитной индукции от участков криволинейного провода

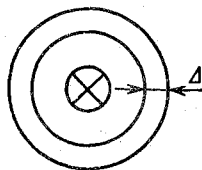


Рис. 7.10. Одиночный провод, окруженный стальным кольцом

жащей в одной плоскости  $S$  с двумя прямолинейными участками 1 и 2 провода с током  $I$ , вначале опускаем из точки  $M$  перпендикуляры  $MO_1$  и  $MO_2$  на оси участков провода. Затем, рассматривая  $MO_1$  и  $MO_2$  как радиусы

магнитных линий, проходящих через точку  $M$ , определяем по правилу буравчика направления векторов индукции  $B_1$  и  $B_2$ , создаваемых токами соответствующих участков провода. Векторы  $B_1$  и  $B_2$  совпадают по направлению только в том случае, если точка  $M$  лежит в одной плоскости с участками провода.

2. Какие изменения произойдут в магнитном поле, если на прямолинейный провод надеть стальное кольцо толщиной  $\Delta$  (рис. 7.10)? Вне кольца магнитное поле не изменится. В кольце напряженность магнитного поля останется прежней ( $H = I/2\pi R$ ), а магнитная индукция и магнитный поток резко возрастут, так как абсолютная магнитная проницаемость стали  $\mu_a \gg \mu_0$ . Зная сорт стали, можно найти для него значение магнитной проницаемости при данной напряженности поля и вычислить магнитную индукцию в стальном кольце.

Таким свойством значительного усиления магнитного поля обладают только ферромагнитные материалы (железо, кобальт, никель и их сплавы). Если кольцо выполнить из неферромагнитного материала, то индукция магнитного поля не изменится.

Здесь предполагалось, что кольцо расположено симметрично относительно оси провода и его поверхность не перерезает магнитных линий. Если ось кольца сместить, то картина поля и значение напряженности поля изменятся.

3. Как определить магнитное напряжение для контура  $AB\Gamma A$  (рис. 7.6)? Прежде всего заметим, что векторы индукции и параллельные им векторы напряженности поля  $H$  в точках, лежащих на отрезках  $B\Gamma$  и  $AG$ , перпендикулярны этим отрезкам, так как отрезки  $B\Gamma$  и  $AG$  располагаются по радиусам, а векторы напряженности поля — по касательным к окружностям. В таком случае проекции векторов  $H$  на отрезки  $AG$  и  $B\Gamma$  равны нулю. Магнитное напряжение на каждом из этих отрезков, определяемое произведением проекции вектора напряженности на направление отрезка и длины отрезка, также равно нулю.

На участках  $AB$  и  $B\Gamma$ , совпадающих с магнитными линиями, векторы напряженности поля направлены по касательным во всех точках, т. е. проекции векторов равны самим векторам и имеют постоянное значение  $H_1$  на участке  $AB$  и  $H_2$  на участке  $B\Gamma$ .

Поэтому магнитные напряжения равны

$$U_{M1} = H_1(AB); \quad U_{M2} = H_2(GB).$$

Поскольку напряженности поля  $H_1$  и  $H_2$  обратно пропорциональны расстояниям от оси провода, а длины дуг окружности  $AB$  и  $GB$  прямо пропорциональны этим расстояниям, то  $U_{M1} = U_{M2}$ .

При составлении алгебраической суммы магнитных напряжений по контуру  $ABBGA$  следует  $U_{M1}$  взять со знаком плюс, а  $U_{M2}$  — со знаком минус, так как направление вектора  $H_1$  в любой точке участка  $AB$  совпадает с направлением обхода, а направление вектора  $H_2$  на участке  $GB$  противоположно направлению обхода. Таким образом, магнитное напряжение по замкнутому контуру  $ABBGA$  равно нулю.

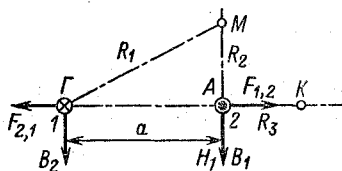
Такого результата и следовало ожидать. Поверхность, ограниченная контуром  $ABBGA$ , не пронизывается токами, т.е. полный ток этого контура равен нулю и в соответствии с законом полного тока и магнитное напряжение по контуру равно нулю.

### 7.3. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ НЕСКОЛЬКИХ ПРОВОДОВ С ТОКАМИ

#### Условие задачи

По двухпроводной воздушной линии с расстоянием между проводами  $a = 100 \text{ мм} = 0,1 \text{ м}$  проходит ток  $I_1 = I_2 = I = 235 \text{ А}$  (рис. 7.11). Вычислить напряженность магнит-

Рис. 7.11. Векторы магнитной индукции и электромагнитных сил двухпроводной линии с током



ного поля в точках  $M$  и  $K$  ( $AM = R_2 = AK = R_3 = 5 \text{ см} = 0,05 \text{ м}$ ), а также силу взаимодействия проводов при коротком замыкании в сети, если ток при этом возрастет в 10 раз. Построить график изменения напряженности поля вдоль прямой  $GA$ , соединяющей оси проводов.

#### Решение задачи

1. Вычисление напряженности поля. При расчете электрического поля нескольких зарядов (см.

§ 1.2) и цепей постоянного тока с несколькими источниками (см. § 2.4) применялся метод наложения. Применим этот метод для вычисления напряженности поля в точке  $M$ .

Вначале определим напряженность поля, создаваемую током провода 2:

$$H_{M2} = \frac{I}{2\pi R_2} = \frac{235}{2\pi R_2} = \frac{37,5}{R_2} = \frac{37,5}{0,05} = 750 \text{ А/м.}$$

Вектор  $H_{M2}$  (рис. 7.12, а) направим из точки  $M$  по касательной к окружности — магнитной линии  $A_1A_2$ , радиус

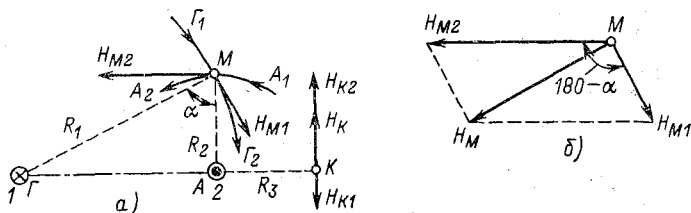


Рис. 7.12. Построение векторов напряженности поля в точках  $M$  и  $K$  от каждого провода с током и результирующих векторов напряженности

которой равен  $R_2$ . Направление вектора  $H_{M2}$  найдем по правилу буравчика.

Затем определим напряженность поля, создаваемую током провода 1:

$$H_{M1} = \frac{37,5}{R_1} = \frac{37,5}{\sqrt{a^2 + R_2^2}} = \frac{37,5}{\sqrt{0,10^2 + 0,05^2}} = 335 \text{ А/м.}$$

Вектор  $H_{M1}$  направим из точки  $M$  по касательной к магнитной линии  $\Gamma_1\Gamma_2$ ; он составляет прямой угол с радиусом  $R_1$ . Значение результирующего (от двух проводов) вектора напряженности магнитного поля  $H_M$  (рис. 7.12, б) можно вычислить либо по теореме косинусов, как было показано в § 1.2, либо графически.

Учитывая масштаб напряженности поля  $M_H = 33 \text{ А/(м} \times \text{мм)}$  и измерив длину вектора  $H_M \approx 20,5 \text{ мм}$ , найдем

$$H_M = 33 \cdot 20,5 \approx 680 \text{ А/м.}$$

Аналогично вычислим напряженность поля в точке  $K$  (рис. 7.12, а).

Ток провода 2 создает напряженность поля

$$H_{K2} = 37,5/R_3 = 37,5/0,05 = 750 \text{ А/м,}$$

а ток провода  $I$  — напряженность поля

$$H_{K1} = 37,5/(a + R_3) = 37,5/0,15 = 250 \text{ А/м.}$$

Векторы  $H_{K2}$  и  $H_{K1}$  направлены в противоположные стороны, поэтому результирующая напряженность поля  $H_K = H_{K2} - H_{K1} = 750 - 250 = 500 \text{ А/м.}$

2. Вычисление силы взаимодействия проводов. Провода с токами одинакового направления притягиваются друг к другу, а с токами противоположного направления отталкиваются друг от друга.

Обозначим через  $B_1$  магнитную индукцию, создаваемую током  $I_1$  в месте расположения провода 2 с током  $I_2$ , по формуле (7.3)

$$B_1 = \mu_0 (I_1/2\pi a).$$

Силу, действующую на участок длиной  $l=1$  м провода с током  $I_2$  (рис. 7.11), определим по формуле (7.2):  $F_{1,2} = = B_1 I_2$ . Аналогично для другого провода получим

$$B_2 = \mu_0 (I_2/2\pi a),$$

и сила  $F_{2,1} = I_1 B_2$ , причем

$$F_{1,2} = F_{2,1} = F = \mu_0 (I_1 I_2/2\pi a).$$

В нашем случае  $I_1 I_2 = I^2$  и провода линий взаимодействуют (отталкиваются друг от друга) с силой

$$F = 4\pi \cdot 10^{-7} (I^2/2\pi a) = 2 \cdot 10^{-7} (2350^2/0,1) = 11,1 \text{ Н/м.}$$

Если между опорами (изоляторами) линии расстояние  $l=50$  м, то на таком участке между проводами возникнет сила  $Fl = 11,1 \cdot 50 = 555 \text{ Н.}$

3. Построение графика изменения напряженности поля вдоль прямой  $GA$  (рис. 7.11). Применим опять метод наложения.

Ток  $I_1$  провода 1 создает в любой точке прямой  $GA$  напряженность поля, вектор которой направлен перпендикулярно линии  $GA$  (например,  $H_1 = B_1/\mu_0$  в точке  $A$ , см. рис. 7.11).

Напряженность поля убывает по мере удаления от точки  $G$  по закону, изображенному пунктирной кривой на рис. 7.13, а, которая перенесена с рис. 7.8 (ток в обеих задачах один и тот же). Ток другого провода создает аналогичную картину распределения векторов напряженности поля (рис. 7.13, б). Для более полного представления о картине поля на рис. 7.13 показано распределение век-



торов напряженности вдоль участков  $\Gamma Д$  и  $АБ$ , лежащих вне рассматриваемой прямой  $\Gamma А$  на ее продолжении.

Как получить кривую изменения напряженности поля от токов двух проводов? Во всех точках прямой  $\Gamma А$  век-

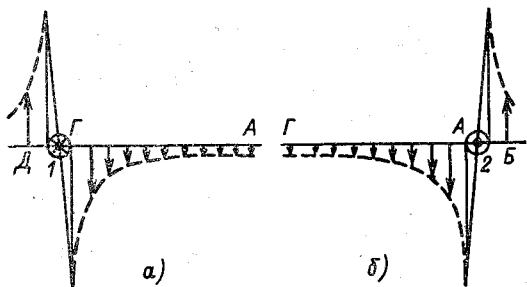


Рис. 7.13. Напряженности поля от каждого провода с током в точках прямой, соединяющей оси проводов

торы  $H$  совпадают по направлению, поэтому требуемая кривая для этого участка (рис. 7.14) получена сложением ординат рассмотренных графиков (рис. 7.13). Эта же

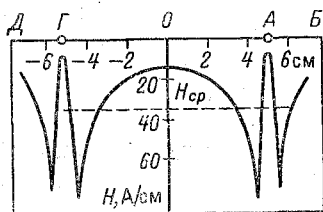


Рис. 7.14. График, полученный сложением ординат кривых на рис. 7.13

кривая результирующей напряженности поля для участков  $АБ$  и  $\Gamma Д$  (рис. 7.14), где векторы  $H$ , создаваемые токами проводов 1 и 2, имеют противоположные направления, получена как разность ординат графиков (рис. 7.13). Заметим, что на рис. 7.14 приведены абсолютные значения напряженности поля, т. е. без учета их направления. Для удобства

пользования полученным графиком начало координат на оси абсцисс выбрано посередине между точками  $\Gamma$  и  $А$ .

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Как определить электромагнитную силу, действующую на параллельный провод с током 100 А, проходящий через точку  $М$  (рис. 7.15)? Эту силу можно определить двумя способами.

Во-первых, на 1 м провода действует сила магнитного

поля двух проводов

$$F_M = B_M I_M = \mu_0 H_M I_M = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 680 \cdot 100 = 85,5 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м.}$$

Направление силы  $F_M$  определяется по правилу левой руки (рис. 7.15, а). Вектор  $H_M$  перенесен на рис. 7.15, а с рис. 7.12, б, вектор  $B_M$  совпадает по направлению с вектором  $H_M$ .

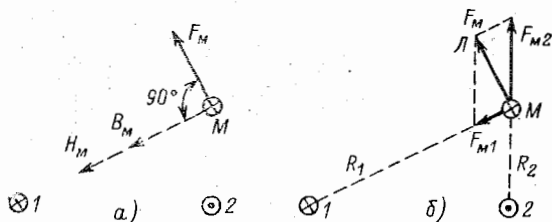


Рис. 7.15. Действия двух проводов с токами на третий провод с током

Во-вторых, можно найти силу взаимодействия внесенного провода с двумя другими, а именно: от провода 2 (рис. 7.15, б) он отталкивается с силой

$$F_{M2} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{I_M I}{R_2} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{100 \cdot 235}{0,05} = 94 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м,}$$

а к проводу 1 он притягивается с силой

$$F_{M1} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{I_M I}{R_1} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{100 \cdot 235}{0,112} = 42 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м.}$$

Результирующая сила  $F_M$  равна геометрической сумме сил  $F_{M2}$  и  $F_{M1}$  (рис. 7.15, б). В принятом масштабе  $M_F = 8 \cdot 10^{-3} \text{ Н/(м} \cdot \text{мм)}$ , при длине вектора  $F_M = 10,7 \text{ мм}$  получаем

$$F_M = 8 \cdot 10^{-3} \cdot 10,7 \approx 85 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м,}$$

что совпадает с полученным выше значением.

2. Как определить магнитный поток, который пересекает плоскую поверхность, ограниченную осями проводов? Магнитный поток между проводами, который пересекает плоскость, проходящую через оси проводов, может быть точно вычислен по площади кривой  $H(r)$  на рис. 7.14. Для приближенного определения магнитного потока можно воспользо-

ваться средним значением напряженности поля  $H_{\text{ср}} \approx 3500 \text{ А/м}$  (взято по графику на рис. 7.14).

На 1 м длины линии

$$\Phi = B_{\text{ср}} S = \mu_0 H_{\text{ср}} S = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3500 \cdot 0,1 \cdot 1 = 4,39 \cdot 10^{-4} \text{ Вб.}$$

3. Как будет стремиться перемещаться жесткая рамка с током  $I_2$ , внесенная в магнитное поле провода с током  $I_1$  (рис. 7.16)?

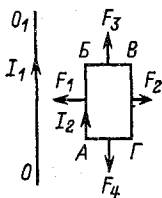


Рис. 7.16. Электромагнитные силы, действующие на стороны рамки с током, внесенной в магнитное поле провода с током

Провод  $AB$  рамки, ток которого направлен одинаково с током  $I_1$ , притягивается к проводу  $OO_1$  с силой  $F_1$ . Провод  $CD$  (более удаленный от провода  $OO_1$ ) отталкивается с силой  $F_2 < F_1$ . Поэтому рамка будет стремиться перемещаться к проводу  $OO_1$ .

Здесь еще раз можно убедиться в том, что контур с током перемещается в магнитном поле в направлении участка поля с большей индукцией.

## 7.4. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ КАТУШКИ С ТОКОМ

### Условие задачи

Для создания напряженности поля  $H_M = 3000 \text{ А/м}$  в точке  $M$  на оси цилиндрической катушки (рис. 7.17) взят готовый каркас с размерами  $l = 160 \text{ мм} = 0,16 \text{ м}$  и  $D = 40 \text{ мм} = 0,04 \text{ м}$ . Вычислить необходимые число витков  $w$  и диаметр провода обмотки, намотанной в один ряд, а также магнитный поток внутри катушки, если она включается в цепь с током  $I = 2,4 \text{ А}$ .

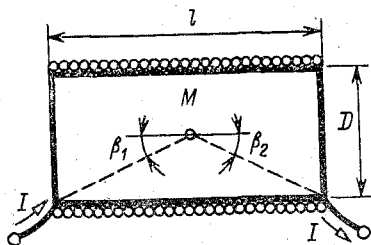


Рис. 7.17. Длинная катушка ( $l \gg D$ )

### Решение задачи

1. Картина поля. Каждый виток рассматриваемой катушки представляет

собой круговой ток  $I$  (рис. 7.18, а), в центре которого по закону Био — Савара напряженность поля  $H_0 = I/D$ , а в произвольной точке  $K$  на оси напряженность поля  $H_K = H_0 \sin^3 \beta$  (угол  $\beta$  показан на рис. 7.18, а).

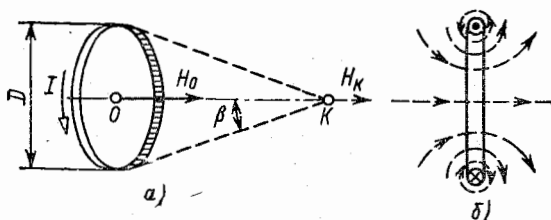


Рис. 7.18. Магнитное поле кругового тока

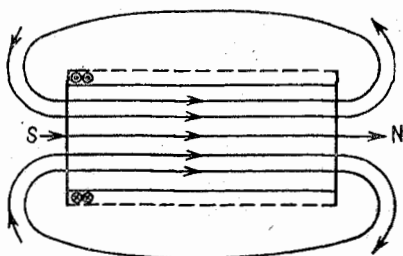


Рис. 7.19. Магнитное поле длинной катушки с током

Векторы  $H_0$  и  $H_K$  определяют направление осевой магнитной линии кругового тока. По мере приближения к проводу магнитные линии все более искривляются (рис. 7.18, б) и непосредственно около провода принимают вид, близкий к окружности.

Рассматривая магнитное поле катушки как суммарное от наложения магнитных полей всех круговых токов, получаем картину магнитного поля катушки (рис. 7.19).

Здесь интересно отметить, что края катушки действуют как магнитные полюсы постоянного магнита; северный ( $N$ ) — там, где магнитные линии выходят из катушки.

Напряженность поля в произвольной точке  $M$  на оси катушки (рис. 7.17)

$$H_M = \frac{Iw}{l} \frac{\cos \beta_1 + \cos \beta_2}{2}. \quad (7.8)$$

Для катушек, у которых  $l \gg D$  (рис. 7.17), углы  $\beta_1$  и  $\beta_2$

окажутся очень малыми и можно считать

$$(\cos \beta_1 + \cos \beta_2)/2 = (1 + 1)/2 = 1.$$

Итак, для длинной катушки (строго говоря, для бесконечно длинной катушки) можно принять

$$H_M = Iw/l. \quad (7.9)$$

2. Определение числа витков катушки. По приближенной формуле (7.9)

$$w' = \frac{H_M l}{I} = \frac{3000 \cdot 0,16}{2,4} = 200 \text{ витков,}$$

а по точной формуле (7.8)

$$w'' = \frac{H_M l}{I} : \frac{\cos \beta_1 + \cos \beta_2}{2} = w' : \frac{\cos \beta_1 + \cos \beta_2}{2},$$

где в соответствии с рис. 7.17

$$\cos \beta_1 = \cos \beta_2 = \frac{l/2}{\sqrt{(D/2)^2 + (l/2)^2}} = \frac{80}{\sqrt{20^2 + 80^2}} = 0,97;$$

$$w'' = w' \frac{2}{2 \cdot 0,97} = \frac{w'}{0,97} = 206 \text{ витков.}$$

Таким образом, в данном случае приближенная формула дает погрешность только 3%. Практически для катушек с отношением  $l/D \geq 4$  можно применять формулу (7.9).

3. Вычисление диаметра провода. На заданной длине каркаса  $l = 160$  мм нужно разместить 200 витков провода в один слой.

Поэтому диаметр провода с изоляцией

$$d = \frac{l}{w} = \frac{0,16}{200} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,8 \text{ мм.}$$

Нельзя ограничиться определением диаметра, нужно проверить расчет по плотности тока в проводе:

$$J = \frac{I}{\pi d^2/4} = \frac{2,4 \cdot 4}{\pi (0,8)^2} = 4,8 \text{ А/мм}^2.$$

Полученное значение плотности тока  $J$  допустимо для однородной намотки (см. приложение в конце книги), иначе пришлось бы выбирать другой каркас.

4. Вычисление магнитного потока внутри катушки. Рассматриваемый магнитный поток пересекает поверхность круга диаметром  $D$ , т.е. площадью  $S = \pi D^2/4 = 12,56 \text{ см}^2$ .

Принимая поле внутри катушки однородным и магнитные линии параллельными ее оси, находим

$$\Phi = BS = \mu_0 H_M S = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3000 \cdot 12,56 \cdot 10^{-4} = 473 \cdot 10^{-8} \text{ Вб.}$$

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Как вычислить напряженность поля в точке  $M'$  (рис. 7.20)? Формула (7.8) применима для любой точки на оси катушки. Поэтому можно вычислить напряженность поля и в точке  $M'$ . В данном случае оказывается  $\beta_2 > 90^\circ$ ;  $\cos \beta_2 < 0$  или

$$\cos \beta_1 + \cos \beta_2 = \cos \beta_1 - \cos \beta_3.$$

2. Как изменится напряженность поля в точке  $M$  (рис. 7.17), если снять виток провода, расположенный в плоскости, проходящей через точку  $M$  и перпендикулярной оси катушки? Для ответа на вопрос предположим, что на катушку наложен один дополнительный виток провода (рис. 7.21) с током  $I_d = 2,4$  А, направленным навстречу току в витках катушки. При этом магнитные поля двух рядом расположенных витков с равными и противоположно направленными токами взаимно компенсируются и наличие двух таких витков можно рассматривать как отсутствие обоих.

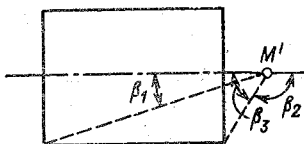


Рис. 7.20. К дополнительному вопросу 1

В таком случае при отсутствии витка напряженность поля  $H'_M$  в точке  $M$  можно найти как разность напряженностей поля  $H_M$  (рис. 7.17) и одного витка  $H_0$  (рис. 7.18,а):

$$H'_M = H_M - H_0 = H_M - I/D = 3000 - 2,4/0,04 = 2940 \text{ А/м.}$$

3. Как взаимодействуют две катушки, оси которых расположены под прямым углом (рис. 7.22)? Будем считать катушку  $I$  неподвижной, а катушку  $II$  подвижной. Учитывая взаимное притяжение разноименных магнитных полюсов, найдем, что катушка  $II$  повернется на  $90^\circ$  против направления движения часовой стрелки.

К этому же выводу можно прийти, рассматривая поворот катушки  $II$  как стремление занять положение, при котором пронизывающий ее положительный магнитный поток катушки  $I$  максимален.

Если одну катушку разместить внутри другой, то они также займут положение, при котором совпадают направления их магнитных линий. На взаимодействии двух кату-

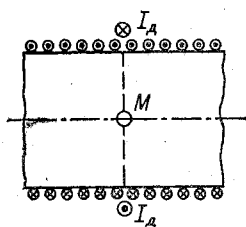


Рис. 7.21. К дополнительному вопросу 2

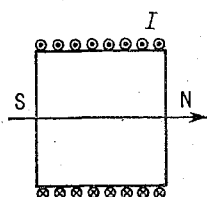
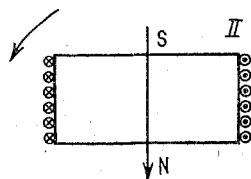


Рис. 7.22. Взаимодействие двух катушек с осями, расположенными под углом  $90^\circ$



шек с токами основан принцип действия электродинамических приборов для измерения токов, напряжений и мощностей.

## 7.5. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

115. На проводник длиной 50 мм с током 20 А в однородном магнитном поле с магнитной индукцией 0,1 Тл действует сила 0,05 Н. Вычислить угол между направлениями проводника и магнитных линий, а также работу, совершаемую силами поля при перемещении проводника на расстояние 100 мм параллельно самому себе.

116. Определить наибольшее и наименьшее возможные значения электромагнитной силы, действующей на проводник длиной 0,6 м с током 10 А при различных положениях проводника в однородном магнитном поле, индукция которого равна 1,5 Тл.

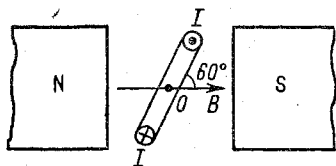


Рис. 7.23. К задаче 117

117. Прямоугольная рамка может вращаться вокруг оси  $O$  (рис. 7.23). До включения тока  $I=5$  А она расположена под углом  $\alpha=60^\circ$  к магнитным линиям (на рис. 7.23 рамка показана в разрезе). Определить положение рамки после включения тока

и вычислить работу электромагнитных сил по ее перемещению, если два провода рамки, перпендикулярные магнитным линиям, имеют длину по 60 мм, а два других провода — по 50 мм, магнитная индукция в зазоре между полюсами 0,25 Тл. Построить для конечного положения рамки векторы сил, действующих на ее стороны.

118. Изменяются ли силы, действующие на стороны рамки, рассмот-

ренной в предыдущей задаче, если ее выполнить из 50 витков провода и пропустить ток 0,1 А?

119. Стороны рамки (рис. 7.24), перпендикулярные магнитным линиям, состоят из двух пар проводов с токами  $I_1$  и  $I_2$ , направления которых показаны на рисунке. Найти условие равновесия рамки, если ее

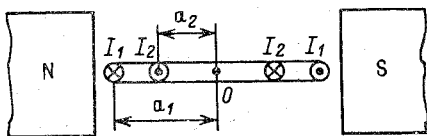


Рис. 7.24. К задаче 119

крайние провода (с током  $I_1$ ) находятся на расстоянии  $a_1$  от оси  $O$ , а внутренние провода (с током  $I_2$ ) — на расстоянии  $a_2$ .

120. Две жестко связанные взаимно перпендикулярные рамки до включения тока занимали положение, показанное на рис. 7.25. Определить положение рамки после включения тока для двух случаев:  $I_1 = I_2$  и  $I_1 = 2I_2$ .

121. На расстоянии  $a = 8$  см от оси длинного прямолинейного провода с током напряженность поля  $H = 8,5$  А/см. Определить ток в проводе и построить графики изменения напряженности поля и магнитной индукции внутри и вне провода (на расстояниях до 10 см от его оси), если диаметр провода 2 см.

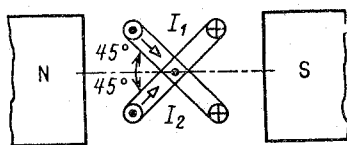


Рис. 7.25. К задаче 120

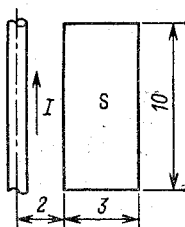


Рис. 7.26. К задаче 122

122. Для предыдущей задачи вычислить магнитный поток, пересекающий поверхность  $S$  прямоугольника, расположение и размеры которого в сантиметрах показаны на рис. 7.26.

123. Круглый виток провода с током  $I$  развернули в прямолинейный отрезок  $AA$  (рис. 7.27, пунктир). Определить, во сколько раз изменится напряженность поля в точке  $O$  при том же токе  $I$ .

124. Определить напряженность поля в точке  $M$ , отстоящей на рас-



стоянии 25 см от оси прямолинейного провода длиной 1 м с током 50 А, если перпендикуляр, опущенный из точки  $M$  на ось провода, делит последнюю на две части длиной 25 и 75 см.

125. Как изменится напряженность поля в точке  $M$  (предыдущая задача), если провод посередине согнуть, образовав два равных взаимно

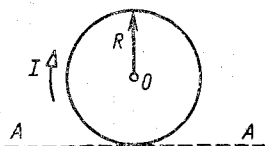


Рис. 7.27. К задаче 123

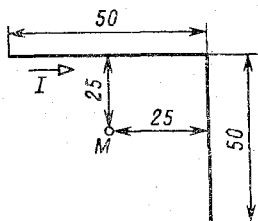


Рис. 7.28. К задаче 125

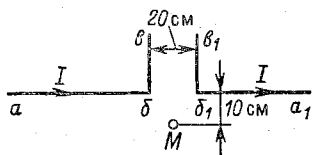


Рис. 7.29. К задаче 126

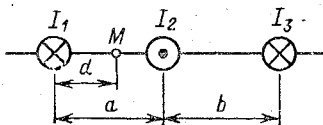


Рис. 7.30 К задаче 129

перпендикулярных участка (рис. 7.28; размеры указаны в сантиметрах),

126. Определить напряженность в точке  $M$  (рис. 7.29), создаваемую участками  $ab$  и  $a_1\delta_1$  двух Г-образных проводов с токами  $I=200$  А в каждом из них. Считать провода бесконечно длинными, а точку  $M$  — равноудаленной от точек  $b$  и  $\delta_1$ .

127. Чему равен ток в линии, два провода которой расположены на расстоянии 15 см друг от друга, если на каждый метр провода действует сила 10 Н/м?

128. Для линии предыдущей задачи определить магнитную индукцию и направления ее векторов в точках, расположенных на осях проводов.

129. Определить силу, действующую на 1 м каждого из проводов линии, и магнитную индукцию в точке  $M$  (рис. 7.30), если  $I_1=I_3=1000$  А;  $I_2=500$  А;  $a=10$  см;  $b=15$  см и  $d=5$  см.

130. Определить магнитную индукцию в точке, удаленной на одинаковое расстояние (5 см) от двух прямолинейных взаимно перпендикулярных проводов (размещенных в одной плоскости) с токами 150 и 250 А. Считать провода бесконечно длинными. Рассмотреть два варианта направления токов.

131. Провода 1, 2 и 3, 4 (рис. 7.31) образуют две двухпроводные

линии с токами соответственно 900 и 450 А. Вычислить магнитную индукцию в точке М.

132. Для линий предыдущей задачи вычислить силу, действующую на 1 м провода 3.

133. Торoidalная катушка с внутренним диаметром 36 мм и внешним диаметром 54 мм имеет напряженность поля в точках ередней ли-

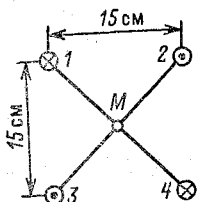


Рис. 7.31. К задаче 131

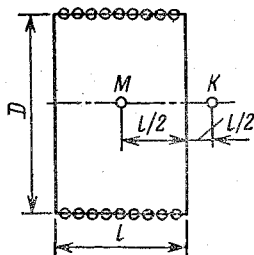


Рис. 7.32. К задаче 136

нии 3,54 А/см. Определить ток в обмотке катушки, число витков которой равно 500.

134. Цилиндрическая катушка длиной 90 и диаметром 20 мм имеет 450 витков провода, по которому проходит ток 0,3 А. Вычислить напряженность поля на оси катушки в двух точках: равноудаленной от краев катушки и лежащей в плоскости, проходящей через край катушки.

135. Вычислить погрешность в определении напряженности поля на оси цилиндрической катушки по формуле  $H = Iw/l$  при  $l = D$ ,  $l = 2D$ ,  $l = 3D$  и  $l = 4D$ , где  $l$  — длина катушки, а  $D$  — ее диаметр.

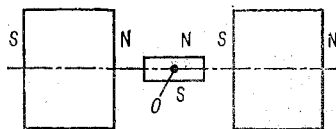


Рис. 7.33. К задаче 138

136. Вычислить напряженность поля в точках М и К на оси цилиндрической катушки (рис. 7.32), если  $l = 30$  мм,  $D = 45$  мм и обмотка катушки содержит 900 витков провода с током 0,1 А.

137. Две одинаковые цилиндрические катушки расположены на расстоянии 30 мм (между их ближайшими краями) так, что их оси образуют одну прямую линию. Вычислить напряженность поля в точке, расположенной в середине зазора между катушками на их общей оси, если каждая из катушек имеет такие же данные, как в предыдущей задаче. Рассмотреть два возможных случая направления магнитных линий катушек.

138. В зазор между катушками предыдущей задачи при совпадаю-

ших направлениях магнитных линий поместили круглую рамку диаметром 2,5 см из 20 витков провода, по которому проходит ток 0,5 А. Вычислить напряженность поля в точке  $O$  на оси рамки (рис. 7.33), когда последняя займет положение устойчивого равновесия. Принять толщину рамки весьма малой по сравнению с ее диаметром.

### 7.6. ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ. 7

115.  $30^\circ$ ;  $5 \cdot 10^{-3}$  Дж.

116. 9 Н; 0.

117. Угол  $\alpha$  возрастет до  $90^\circ$ ;  $5 \cdot 10^{-4}$  Дж.

118. Не изменятся.

119.  $I_1 : I_2 = a_2 : a_1$ .

120. При  $I_1 = I_2$  рамка повернется на угол  $90^\circ$  по направлению движения часовой стрелки, при  $I_1 = 2I_2$  — в ту же сторону на угол  $108,5^\circ$ .

121. 427 А.

$R$ , см	0	1	2	5	10
$H$ , А/м	0	6800	3400	1360	680
$B$ , $10^{-4}$ Тл	0	85,5	42,8	17,1	8,5

122.  $9 \cdot 10^{-6}$  Вб.

123. В  $\pi$  раз.

124. 26,4 А/м.

125. Увеличится до 45 А/м.

126. 93 А/м.

127. 2740 А.

128.  $36,5 \cdot 10^{-4}$  Тл.

129. 0,2 Н/м; 0,33 Н/м; 0,133 Н/м;  $50 \cdot 10^{-4}$  Тл.

130.  $1,6 \cdot 10^{-3}$  Тл;  $4 \cdot 10^{-4}$  Тл.

131.  $1,2 \cdot 10^{-3}$  Тл.

132. 0,382 Н/м.

133. 0,1 А.

134. 1500 А/м, 745 А/м.

135.

$l/D$	1	2	3	4
Погрешность, %	29,3	10,5	5	3

136. 1660 А/м; 510 А/м.

137. При совпадающих направлениях 1020 А/м, при встречных — 0.

138. 1420 А/м.

## Глава восьмая

# ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

## 8.1. ЭЛЕКТРОДВИЖУЩАЯ СИЛА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ В ПРОВОДЕ

### Условие задачи

На рис. 8.1 показан постоянный магнит, состоящий из двух коаксиальных цилиндров (один из возможных вариантов выполнения такого магнита рассмотрен в доп.

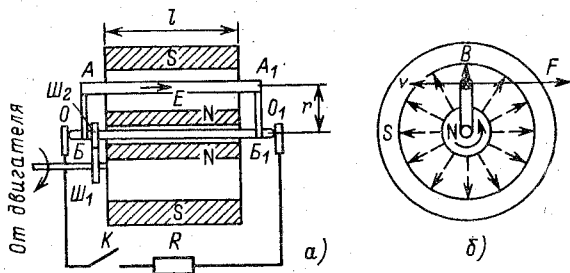


Рис. 8.1. Перемещение проводника в магнитном поле силами внешнего двигателя

вопросе 5 к этой задаче). Между полюсами магнита размещается провод  $AA_1$ , жестко связанный с осью  $OO_1$  при помощи стержней  $AB$  и  $A_1B_1$ . Провод вращается с частотой  $n=3000$  об/мин двигателем, связанным с осью  $OO_1$ , при помощи шестерен  $Ш_1$  и  $Ш_2$ .

Вычислить ЭДС, индуцируемую в проводе  $AA_1$ , ток в сопротивлении  $R$  (при замкнутом ключе  $K$ ) и полезную мощность двигателя, если сопротивление провода и стержней  $R_{\text{п}}=0,01$  Ом, сопротивление  $R=0,09$  Ом, магнитная индукция в месте расположения провода  $B=0,25$  Тл,  $l=40$  см  $=0,4$  м и  $r=25$  см  $=0,25$  м.

## Решение задачи

1. Вычисление ЭДС в проводе. Постоянный магнит, состоящий из двух коаксиальных цилиндров (рис. 8.1, б), создает радиальное магнитное поле, т.е. его магнитные линии направлены по радиусам в пространстве между цилиндрами.

В таком случае вектор магнитной индукции  $B$  и вектор скорости  $v$  (рис. 8.1, б) образуют прямой угол ( $\angle \vec{B}, \vec{v} = \alpha = 90^\circ$ ) при любом положении провода  $AA_1$  и индуктируемая в проводе ЭДС

$$E = Bvl \sin \angle \vec{B}, \vec{v} = Bvl \sin \alpha = Bvl,$$

где  $l$  — длина участка провода, находящегося в магнитном поле;  $v$  — линейная скорость провода.

Зная число оборотов провода в минуту, можно вычислить угловую скорость

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi \cdot 5000}{60} = 314 \text{ л/с},$$

а затем линейную скорость

$$v = \omega r = 314 \cdot 0,25 = 78,5 \text{ м/с}.$$

Таким образом,

$$E = Bvl = 0,25 \cdot 78,5 \cdot 0,4 = 7,85 \text{ В}.$$

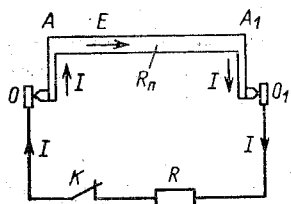


Рис. 8.2. Электрическая цепь генератора и потребителя

Направление индуктируемой в проводе ЭДС  $E$  (рис. 8.1) определяется по правилу правой руки: если расположить ладонь правой руки так, чтобы магнитные линии входили в ладонь, а отогнутый большой палец указывал направление перемещения проводника, то остальные вытянутые пальцы укажут направление ЭДС.

2. Вычисление тока потребителя. Участок оси  $BB_1$  (рис. 8.1, а) выполнен из изоляционного материала, поэтому при замкнутом ключе  $K$  ток пойдет по цепи в направлении, указанном стрелкой (рис. 8.2).

Очевидно, что ток

$$I = \frac{E}{R_n + R} = \frac{7,85}{0,01 + 0,09} = 78,5 \text{ А}.$$

Итак, перемещаемый в магнитном поле проводник может работать как электрическая машина в режиме источника (генератора) электрической энергии.

3. Вычисление полезной мощности двигателя. Для определения мощности двигателя нужно установить, какие силы противодействуют его вращению.

Главная из них — это электромагнитная сила  $F$  (рис. 8.1, б), возникающая в результате взаимодействия тока  $I$  в проводе  $AA_1$  (ключ  $K$  замкнут) с магнитным полем между цилиндрами:

$$F = IBl = 78,5 \cdot 0,25 \cdot 0,4 = 7,85 \text{ Н.}$$

Направление силы определяется по правилу левой руки.

Для преодоления электромагнитной силы двигатель должен иметь механическую мощность

$$P_m = Ev = 7,85 \cdot 78,5 = 616,2 \text{ Вт,}$$

которая является полезной мощностью, так как она полностью преобразуется в электрическую мощность генератора

$$P_r = EI = 7,85 \cdot 78,5 = 616,2 \text{ Вт.}$$

Кроме электромагнитной силы, определяющей полезную мощность двигателя, существуют еще силы трения, определяющие мощность потерь. Поэтому мощность двигателя должна быть несколько больше его полезной мощности.

Итак, механическая энергия двигателя, расходуемая на преодоление электромагнитных сил, полностью преобразуется в электрическую энергию генератора.

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Можно ли в рассматриваемой задаче заменить проводник вращающимся пустотелым цилиндром, ось которого совпадает с осью  $OO_1$ ? Поскольку значение индуктируемой ЭДС не зависит от ширины провода, последнюю можно выбрать произвольно и даже выполнить проводник в виде цилиндра.

Если остальные величины ( $B$ ,  $n$ ,  $r$  и  $l$ ) остаются прежними, то между краями цилиндра получается такое же значение индуктируемой ЭДС, как в проводе  $AA_1$  (рис. 8.1). В обоих случаях индуктируемая ЭДС имеет одно и то же направление при любом положении провода или цилиндра, чем можно воспользоваться для создания так называемой

униполярной (с постоянной полярностью) электрической машины.

2. На какие параметры генератора повлияет замена проводника  $AA_1$  цилиндром? (См. предыдущий вопрос.) Такая замена приведет к уменьшению внутреннего сопротивления генератора ( $R_{\text{п}}$ ) и позволит увеличить его номинальные ток и мощность.

3. Как влияет на механическую мощность двигателя значение сопротивления  $R$ ? При постоянном числе оборотов двигателя остается неизменной индуцированная в проводе ЭДС. Сопротивление  $R$  (рис. 8.2) определяет ток в цепи, от которого зависят электромагнитная сила  $F=IBl$  и механическая мощность  $P_{\text{м}}=Fv$ . При увеличении сопротивления  $R$  ток  $I$  уменьшится и потребуются меньшая мощность двигателя: при  $R \rightarrow \infty$  (ключ  $K$  разомкнут)  $P_{\text{м}}=0$  (холостой ход).

Таким образом, механическая энергия двигателя, который вращает генератор, связана не с возникновением ЭДС в генераторе, а с появлением тока в его цепи.

4. В какой режим перейдет электрическая машина, если вместо потребителя с сопротивлением  $R$  включить источник энергии ЭДС  $E_{\text{н}}$  и внутренним сопротивлением  $R_{\text{вт}}=R_{\text{о}}$  и отсоединить внешний двигатель (рис. 8.3)? Возникающий в цепи ток  $I$ , проходя по проводу  $AA_1$ , взаимодействует с магнитным полем и создает электромагнитную силу  $F$ , направленную в соответствии с правилом левой руки. Под действием этой силы провод  $AA_1$  будет вращаться и может выполнять функции электрической машины, причем направление его вращения остается прежним.

Если число оборотов провода останется таким же, как при его вращении от внешнего двигателя (рис. 8.1), то получим прежнее значение ЭДС индукции в проводе ( $E=7,85$  В), которая направлена навстречу ЭДС источника  $E_{\text{н}}$  (рис. 8.3 и 8.2). Поэтому ток в цепи

$$I = (E_{\text{н}} - E) / (R_{\text{вт}} + R_{\text{п}}).$$

Полученный двигатель может выполнить механическую работу. Если в режиме двигателя механическая мощность должна быть равна электрической мощности в режиме генератора, то нужно обеспечить в проводе  $AA_1$  прежнее значение тока  $I=78,5$  А. При заданном внутреннем сопро-

тивлении источника, например  $R_{вт} = 0,01 \text{ Ом}$  (рис. 8.3), можно вычислить необходимую ЭДС источника:

$$E_{н} = I(R_{вт} + R_{п}) + E = 78,5(0,01 + 0,01) + 7,85 = 9,42 \text{ В.}$$

Итак, заменяя потребитель энергии источником, можно перевести электрическую машину из режима генератора в режим двигателя. Очевидно, возможен и обратный переход — из режима двигателя в режим генератора. Это свойство электрических машин называется обратимостью.

Рис. 8.3. Взаимодействие тока в проводнике с магнитным полем

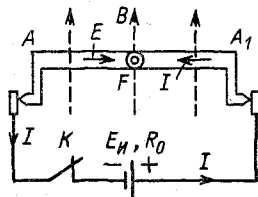
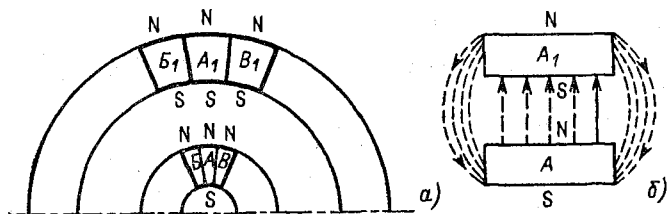


Рис. 8.4. К дополнительному вопросу 5



5. Как изготовить постоянный магнит, рассмотренный в этой задаче? Каждый из цилиндров, показанных на рис. 8.1, можно выполнить, например, из отдельных плоских намагниченных пластин. На рис. 8.4, а изображено по три пластины ( $B_1, A_1, B_1$  и  $B, A, B$ ) для внешнего и внутреннего цилиндров. Путь магнитных линий показан на рис. 8.4, б, где дан вид сбоку на пластины  $A_1$  и  $A$ .

## 8.2. ЭЛЕКТРОДВИЖУЩАЯ СИЛА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ В КОНТУРЕ (КАТУШКЕ)

### Условие задачи

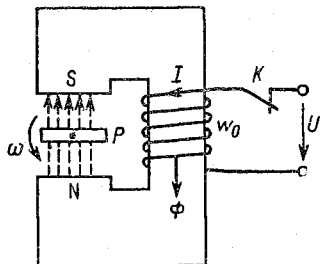
Квадратная рамка  $P$  (рис. 8.5), длина которой  $l = 25 \text{ см} = 0,25 \text{ м}$ , вращается с угловой скоростью  $\omega = 314 \text{ 1/с}$  в однородном магнитном поле с магнитной индукцией  $B = 0,05 \text{ Тл}$ . Определить зависимость индуцируемой



ЭДС от угла поворота рамки и построить график этой зависимости, если число витков рамки  $\omega = 20$ .

### Решение задачи

1. Определить зависимости индуктируемой ЭДС от угла поворота рамки. Рассматриваемая рамка состоит из 20 квадратных контуров, находящихся в одинаковых условиях. Поэтому достаточно определить ЭДС, индуктируемую в одном контуре (рис. 8.5), и затем увеличить ее в  $\omega$  раз. Как же определить ЭДС, индуктируемую в прямоугольном контуре?



Это можно сделать двумя способами.

А. Вычислим ЭДС, индуктируемую в каждом из четырех проводов контура, воспользовавшись тем же методом, что и в предыдущей задаче.

При этом оказывается, что в некотором произвольном положении контура II (рис. 8.6) в проводах 1 и 2 (рис. 8.7), параллельных оси вращения  $OO_1$ , индуктируются ЭДС

$$e_1 = e_2 = Bv_1 l \sin(\angle \vec{B}, \vec{v}_1) = Bv_1 l \sin \alpha = Bv_2 l \sin(180^\circ - \alpha),$$

так как  $v_1 = v_2 = v = \omega l/2$  и  $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$ .

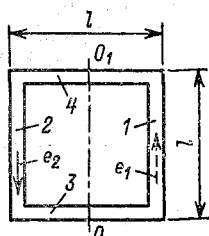
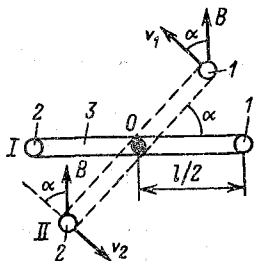


Рис. 8.6. Начальное (I) и промежуточное (II) положения вращающейся рамки

Рис. 8.7. Контур одного витка рамки

Электродвижущие силы  $e_1$  и  $e_2$ , направленные в соответствии с правилом правой руки в контуре против направления движения часовой стрелки (рис. 8.7), оказываются согласно включенными и образуют суммарную ЭДС в контуре

$$e_{\kappa} = e_1 + e_2 = 2B\omega l \sin \alpha = 2B\omega \frac{l}{2} \sin \alpha = Bl^2 \omega \sin \alpha.$$

Провода 3 и 4 при вращении рамки не пересекают магнитных линий, поэтому ЭДС  $e_3 = e_4 = 0$ .

Замечая, что площадь контура  $S_{\kappa} = l^2$ , а  $Bl^2 = BS_{\kappa} = \Phi_m$ , т. е. равна максимальному значению магнитного потока, пронизывающего контур, получаем

$$e_{\kappa} = \Phi_m \omega \sin \alpha$$

или для всей рамки

$$e = \omega e_{\kappa} = \omega \Phi_m \omega \sin \alpha. \quad (8.1)$$

Б. Не разделяя контур на отдельные провода, определяем индуцируемую в контуре ЭДС по формуле

$$e_{\kappa} = -d\Phi/dt,$$

т. е. как производную по времени от магнитного потока, пронизывающего контур, взятую с обратным знаком.

Для определения индуцируемой ЭДС нужно знать зависимость магнитного потока от времени  $\Phi(t)$ , которую в данном случае легко найти. Действительно, в начальном положении I (рис. 8.6) контур пронизывает максимальный магнитный поток  $\Phi_m$ , в произвольном положении II — поток  $\Phi = \Phi_m \cos \alpha$ , где угол  $\alpha = \omega t$  (произведение угловой скорости  $\omega$  и времени  $t$ ), так что

$$\Phi = \Phi_m \cos \omega t.$$

Соответственно ЭДС в контуре

$$e_{\kappa} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi_m \cos \omega t}{dt} = -\Phi_m \omega (-\sin \omega t) = \Phi_m \omega \sin \omega t$$

или для всей рамки

$$e = \omega e_{\kappa} = -\omega \frac{d\Phi}{dt} = \omega \Phi_m \omega \sin \omega t = \omega \Phi_m \omega \sin \alpha. \quad (8.2)$$

Уравнение (8.2) не отличается от полученного выше уравнения (8.1). В нашем случае ЭДС в рамке

$$\begin{aligned} e &= \omega Bl^2 \omega \sin \alpha = 20 \cdot 0,05 \cdot 0,0625 \cdot 314 \sin \alpha = \\ &= 19,6 \sin \alpha = E_m \sin \alpha, \end{aligned} \quad (8.3)$$

где максимальное значение ЭДС  $E_m = 19,6$  В соответствует наибольшему значению  $\sin \alpha = 1$ .

2. Построение графиков зависимостей  $e(\alpha)$  и  $\Phi(\alpha)$ . По формуле (8.3) можно вычислить индуцируемую ЭДС для нескольких значений  $\alpha$  (табл. 8.1) и по ним построить график (рис. 8.8), который изображает синусоидальный закон изменения ЭДС в рамке.

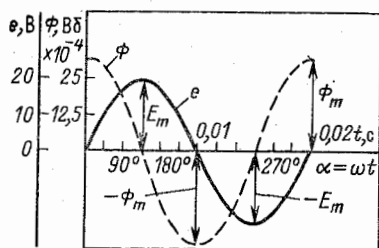


Рис. 8.8. Изменение во времени магнитного потока, пронизывающего рамку, и ЭДС, индуцируемой в рамке

В табл. 8.1 приведены данные положительной полувольты синусоиды ( $\alpha$  изменяется от 0 до  $180^\circ$ ). Отрицательная полувольт ( $\alpha = 180 \div 360^\circ$ ) отличается только знаком ординат соответствующих точек.

В табл. 8.1 приведены данные положительной полувольты синусоиды ( $\alpha$  изменяется от 0 до  $180^\circ$ ). Отрицательная полувольт ( $\alpha = 180 \div 360^\circ$ ) отличается только знаком ординат соответствующих точек.

Таблица 8.1

$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
$\sin \alpha$	0	0,5	0,87	1	0,87	0,5	0
$e, \text{ В}$	0	9,8	17,0	19,6	17,0	9,8	0

По уравнению

$$\Phi = \Phi_m \cos \alpha = 31,2 \cdot 10^{-4} \cos \alpha, \text{ Вб},$$

можно построить по точкам график зависимости  $\Phi(\alpha)$  (рис. 8.8, пунктир).

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Можно ли получить ЭДС индукции в неподвижной рамке? Оставим рамку (рис. 8.5) неподвижной (в показанном положении) и будем питать обмотку электромагнита  $\omega_0$  переменным током (вместо постоянного), обеспечив при этом изменение магнитного потока между полюсами  $N$  и  $S$  в соответствии с графиком  $\Phi$  (рис. 8.8). Тогда в неподвижной рамке будет индуцироваться

ЭДС, определяемая найденной в задаче зависимостью  $e(\alpha)$  [см. уравнение (8.3) и график на рис. 8.5].

Этот метод получения ЭДС индукции широко применяется в трансформаторах, в которых переменный (чаще всего синусоидальный) ток, проходя по одной обмотке, расположенной на магнитопроводе, создает в последнем изменяющийся во времени магнитный поток. Переменный магнитный поток пронизывает другую обмотку и индуцирует в ней ЭДС, вторая обмотка может служить источником питания потребителей.

2. Почему максимальному значению магнитного потока в контуре соответствует минимальное значение индуцируемой ЭДС? *Значение индуцируемой ЭДС определяется не значением магнитного потока, а скоростью его изменения.*

Так, при значениях  $\alpha$ , близких к нулю (рис. 8.8), кривая  $\Phi$  проходит почти параллельно оси абсцисс [функция  $\Phi(t)$  почти не уменьшается с изменением аргумента  $t$ ], поэтому скорость изменения потока  $d\Phi/dt$  мала и соответственно  $e = -\omega d\Phi/dt$  близка к нулю. При  $\alpha=0$   $e=0$ .

Вместе с тем при  $\alpha=90^\circ$  скорость изменения магнитного потока  $\Phi(t)$  максимальна, поэтому и индуцируемая ЭДС максимальна.

3. Может ли рамка  $P$  (рис. 8.5) быть источником энергии (генератором)? Поскольку в рамке, движущейся в магнитном поле, как было показано в задаче, индуцируется ЭДС, ее можно применять в качестве источника энергии (электрическая машина).

В отличие от генератора, рассмотренного в предыдущей задаче (§ 8.1), рамка будет питать потребитель переменным (синусоидальным) током. В остальном высказанные выше соображения о режимах работы электрической машины относятся и к этому случаю.

4. Какой будет кривая измерения ЭДС в неподвижной рамке, если пересекающий ее магнитный поток определяется графиком на рис. 8.9, а? Учитывая, что ЭДС индукции возникает только при изменении магнитного потока, получаем отдельные импульсы ЭДС  $e$  (рис. 8.9, б) в те интервалы вре-

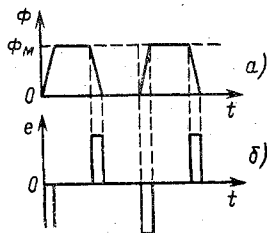


Рис. 8.9. К дополнительному вопросу 4

мени, когда магнитный поток возрастает от нуля до  $\Phi_m$  или убывает от  $\Phi_m$  до нуля.

В другие промежутки времени магнитный поток постоянен и ЭДС индукции равна нулю.

### 8.3. ИНДУКТИВНОСТЬ КАТУШЕК

#### Условие задачи

На сердечнике из электротехнической стали Э41, у которого длина средней магнитной линии  $l_{cp} = 30 \text{ см} = 0,3 \text{ м}$  (рис. 8.10), размещена обмотка, состоящая из двух одинаковых частей, каждая длиной  $80 \text{ мм} = 0,08 \text{ м}$ , с числами витков  $w_1 = w_2 = 540$ .

Обе части обмотки соединены таким образом, что проходящий по ним ток  $I$  создает в сердечнике согласно направленные магнитные потоки. Сечение магнитопровода квадратное со стороной  $2 \text{ см} = 0,02 \text{ м}$ . Вычислить индуктивность катушки с сердечником и при отсутствии стального сердечника, если магнитная индукция в сердечнике  $1,35 \text{ Тл}$ . Средняя линия обмотки образует квадрат со стороной  $3 \text{ см} = 0,03 \text{ м}$ .

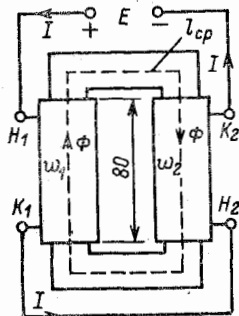


Рис. 8.10. Стальной сердечник с двумя одинаковыми обмотками, соединенными согласно

#### Решение задачи

1. Образование магнитного потока в сердечнике (рис. 8.10). По условию задачи НС двух частей обмотки действуют согласно, создавая общий магнитный поток  $\Phi$ . Поэтому две части обмотки можно рассматривать как одну с числом витков

$$w = w_1 + w_2 = 540 + 540 = 1080.$$

2. Вычисление индуктивности при наличии сердечника. По определению индуктивность  $L = \Psi/I$ , где потокосцепление  $\Psi = \Phi w = BS w$ , а ток (в соответствии с законом полного тока)  $I = H l_{cp}/w$ .

Таким образом,

$$L = \frac{BSw}{H l_{cp}} w = \frac{BSw^2}{H l_{cp}}. \quad (8.4)$$

Зависимость между  $B$  и  $H$ , или величина  $\mu_a$ , определяется для стали по характеристике намагничивания (см. прилож. 4).

При  $B=1,35$  Тл для стали Э41 находим  $H=970$  А/м. Поэтому

$$L = \frac{1,35 \cdot 4 \cdot 10^{-4} (1080)^2}{970 \cdot 0,3} = 2,17 \text{ Гн.}$$

Это — индуктивность катушки в цепи постоянного тока или так называемая статическая индуктивность.

В цепи переменного тока индуктивность катушки со стальным сердечником получится другой.

3. Вычисление индуктивности при отсутствии стального сердечника. Можно ли в этом случае пользоваться формулой (8.4)?

Формула (8.4) получена при условии, что закон полного тока записывается наиболее просто:  $NI_{\text{ср}} = Iw$ , как, например, для кольцевой катушки, а также для цилиндрической, имеющей длину много большую, чем диаметр.

Для ориентировочного расчета будем считать каждую обмотку без сердечника длинной катушкой и воспользуемся формулой (8.4). Величину  $S$  в этой формуле можно определить как площадь квадрата, образованного средней линией обмотки:  $S = 0,03 \cdot 0,03 = 0,0009 \text{ м}^2 = 9 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ .

Индуктивность одной обмотки без сердечника

$$L_1 = \mu_0 (Sw_1^2/l), \quad (8.5)$$

или при заданных размерах

$$L_1 = 4\pi \cdot 10^{-7} (9 \cdot 10^{-4}/0,08) (540)^2 = 4,13 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

Индуктивность двух соединенных обмоток будет больше, чем  $2L_1$ , так как часть магнитного потока первой обмотки пронизывает вторую, и наоборот, т. е. между обмотками есть взаимная индуктивность (см. подробнее гл. 13).

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Какой формы должны быть катушки для получения большой индуктивности? В соответствии с (8.5) и (8.4) для получения большой индуктивности при заданном числе витков  $w$  следует:

а) в катушках без сердечников выбирать малую длину и большой диаметр (большое  $S$ ), т. е. выполнять их плоскими (короткими), когда для таких катушек пользоваться формулой (8.4) уже нельзя;

б) в катушках с стальными сердечниками уменьшать длину магнитопровода и увеличивать площадь его поперечного сечения.

2. Как зависит индуктивность катушки от числа витков и сопротивления магнитопровода? Если учитывать, что магнитное сопротивление  $R_m = l_{cp} / \mu_a S$ , можно (8.4) представить в виде

$$L = \omega^2 / R_m. \quad (8.6)$$

Для практических целей важно запомнить, что индуктивность кольцевой и длинной цилиндрической катушек, а также катушек с ненасыщенным ферромагнитным сердечником пропорциональна квадрату числа витков.

*Итак, для получения больших индуктивностей нужно наматывать катушки с большим числом витков и применять магнитопроводы с малым магнитным сопротивлением.*

3. В каких случаях индуктивность зависит от значения тока в катушке? В (8.4) не входит ток катушки, но она влияет на значение магнитной проницаемости ферромагнитного сердечника.

Следовательно, у катушек с ферромагнитными сердечниками в зависимости от тока может изменяться индуктивность. Поэтому на практике индуктивность катушки с ферромагнитным сердечником измеряют только при номинальном рабочем токе. Индуктивность катушки без ферромагнитного сердечника не зависит от тока.

4. Как выполнить безындуктивную намотку? Катушка с сердечником или без сердечника обладает сопротивлением, свойственным всякому проводу, а также индуктивностью.

Иногда возникает необходимость иметь безындуктивное проволочное сопротивление, т.е. сделать  $L = \Psi / I \approx 0$ . Это возможно при  $\Psi = \Phi \omega \approx 0$ , т.е. при  $\Phi \approx 0$ . Получить в катушке с током магнитный поток, равный нулю, можно, применяя так называемую бифилярную намотку, т.е. намотку в два одинаковых провода, токи которых направлены в противоположные стороны. При этом магнитный поток обмотки весьма мал.

5. Как изменится индуктивность катушки (рис. 8.10), если обе части ее обмотки соединить встречно? В таком случае НС

$$I\omega = I\omega_1 - I\omega_2 = 0$$

и общий магнитный поток  $\Phi$  будет отсутствовать.

Индуктивность катушки, хотя и резко уменьшится, не будет равна нулю, так как возрастут магнитные потоки рассеяния каждой части катушки.

#### 8.4. ИНДУКТИВНОСТЬ ЛИНИИ

##### Условие задачи

Вычислить индуктивность 1 км воздушной линии, выполненной из двух алюминиевых проводов диаметром  $d = 9 \text{ мм} = 0,009 \text{ м}$  с расстоянием между осями  $a = 216 \text{ мм} = 0,216 \text{ м}$ . Линия подвешена на высоте  $h = 4,5 \text{ м}$  над поверхностью земли.

Как изменится индуктивность линии, если один из проводов заменить рельсом, расположенным на земле?

##### Решение задачи

1. Вычисление индуктивности двухпроводной линии. Индуктивность 1 км двухпроводной линии, Гн/км, определяется по формуле

$$L_0 = 10^{-4} \left( 4 \ln \frac{2a}{d} + \mu_r \right), \quad (8.7)$$

где  $\mu_r$  — магнитная проницаемость материала проводов, которая практически не равна единице только у ферромагнитных материалов, в частности у стальных проводов.

Соответственно в нашем случае

$$\begin{aligned} L_0 &= 10^{-4} \left( 4 \ln \frac{2 \cdot 0,216}{0,009} + 1 \right) = 16,5 \cdot 10^{-4} \text{ (Гн/км)} = \\ &= 1,65 \text{ мГн/км.} \end{aligned}$$

Выражение для  $L_0$  еще раз показывает, что индуктивность — величина, зависящая от конструкции контура с током. Действительно, индуктивность линии определяется главным образом ее размерами и, кроме того, материалом проводов.

2. Вычисление индуктивности линии провод — земля. Иногда воздушная линия выполняется из одного провода, другим (обратным) проводом служат рельсы, например в сетях городского и железнодорожного электротранспорта, или земля, например в некоторых линиях связи.

Если один из проводов линии заменить землей, то индуктивность на 1 км  $L_0 \approx 2 \cdot 10^{-4} \ln(4h/d)$ , или в наших усло-



виях

$$L_0 = 2 \cdot 10^{-4} \ln \frac{4 \cdot 4,5}{0,009} = 15,2 \cdot 10^{-4} \text{ (Гн/км)} = 1,5 \text{ мГн/км}.$$

## 8.5. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ. ЭЛЕКТРОДВИЖУЩАЯ СИЛА ВЗАИМНОЙ ИНДУКЦИИ

### Условие задачи

На кольцевом сердечнике из неферромагнитного материала ( $\mu_a = \mu_0$ ) равномерно распределены две обмотки с числами витков  $w_1 = 2000$  и  $w_2 = 4000$ . Средний диаметр кольца  $D = 10 \text{ см} = 0,1 \text{ м}$ , а его поперечное сечение — квадратное со стороной  $2 \text{ см} = 0,02 \text{ м}$ .

Вычислить взаимную индуктивность обмотки  $M$ , их коэффициент связи  $k$  и построить график ЭДС, индуцируемой по второй обмотке, если ток в первой обмотке синусоидальный.

### Решение задачи

1. Особенности равномерно распределенных обмоток. Магнитный поток, создаваемый током любой из обмоток, пронизывает все витки другой обмотки (подразумевается, что диаметры обмоток мало различаются).

Таким свойством обладают не только кольцевые катушки, но практически и цилиндрические, если их обмотки распределены равномерно.

2. Вычисление взаимной индуктивности. По определению взаимная индуктивность

$$M = \Psi_{2,1} / I_1 = \Phi_{2,1} w_2 / I_1, \quad (8.8)$$

где  $\Phi_{2,1}$  — магнитный поток, пронизывающий вторую катушку с числом витков  $w_2$ , но созданный током  $I_1$  в первой катушке.

Ток  $I_1$ , проходящий по первой обмотке, создает в точках средней линии сердечника магнитную индукцию (по закону полного тока)

$$B_{\text{ср}} = \mu_0 H_{\text{ср}} = \mu_0 \left( \frac{I_1 w_1}{l_{\text{ср}}} \right),$$

где  $I_1 w_1$  — намагничивающая сила;  $l_{\text{ср}} = \pi D_{\text{ср}}$  — длина средней магнитной линии.

Магнитный поток в кольце найдем приближенно по среднему значению магнитной индукции:

$$\Phi_1 = B_{\text{ср}} S = \mu_0 \frac{I_1 \omega_1}{l_{\text{ср}}} S = \mu_0 \frac{I_1 \omega_1 S}{\pi D_{\text{ср}}}. \quad (8.9)$$

Эта формула дает тем более точные результаты, чем больше  $D_{\text{ср}}$  по сравнению с поперечными размерами кольца.

Учитывая, что магнитный поток, созданный током  $I_1$  первой обмотки, пронизывает и все витки второй обмотки, т. е.  $\Phi_{2,1} = \Phi_1$ , подставим  $\Phi_1$  из (8.9) в (8.8) и получим

$$M = \mu_0 \frac{\omega_1 \omega_2}{\pi D_{\text{ср}}} S, \quad (8.10)$$

или в нашем случае

$$M = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{2000 \cdot 4000}{\pi \cdot 0,1} 4 \cdot 10^{-4} = 12,8 \cdot 10^{-3} \text{ Гн} = 12,8 \text{ мГн.}$$

3. Вычисление коэффициента связи. Коэффициентом связи называется отношение

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}},$$

где  $M$  — взаимная индуктивность (8.10);  $L_1$  и  $L_2$  — индуктивности обмоток, которые можно вычислить по формуле (8.5):

$$L_1 = \frac{\mu_0 \omega_1^2}{\pi D_{\text{ср}}} S; \quad L_2 = 4L_1,$$

так как  $\omega_2 = 2 \omega_1$ , или в нашем случае  $L_1 = 6,4$  мГн;  $L_2 = 25,6$  мГн.

Соответственно для кольцевой катушки

$$k = 1.$$

4. Вычисление индуктируемой ЭДС. При переменном, например синусоидальном, токе  $i_1$  в первой обмотке (рис. 8.11) во второй обмотке индуктируется ЭДС  $e_2 = -\omega_2 d\Phi_{2,1}/dt = -M di_1/dt$ , где производная тока по времени  $di_1/dt$  определяет скорость изменения тока  $i_1$ .

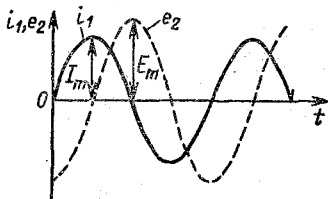


Рис. 8.11. Графики тока и индуктируемой ЭДС

Подобный случай уже встречался в § 8.2, где было показано построение графика ЭДС индукции (см. рис. 8.8) при синусоидальном законе изменения магнитного потока.

Аналогичным образом построен график ЭДС  $e_2$  (рис. 8.11): максимальные значения ЭДС совпадают во времени с нулевыми значениями тока и, наоборот, нулевые значения ЭДС совпадают с максимальными значениями тока.

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Почему в задаче рассматривалась взаимная индуктивность второй обмотки относительно первой? Взаимная индуктивность первой обмотки относительно второй такая же, как и второй относительно первой. В этом легко убедиться, если обратить внимание на то, что взаимная индуктивность (8.10) определяется произведением витков обеих обмоток.

2. Какова будет индуктированная ЭДС в первой обмотке, если током  $i_2=i_1$  (рис. 8.11) питать вторую обмотку? Если током  $i_2=i_1$  питать вторую обмотку вместо первой, то в последней будет индуктироваться ЭДС

$$e_1 = -M \frac{di_2}{dt} = -M \frac{di_1}{dt} = e_2.$$

*Итак, индуктируемая ЭДС в любой из индуктивно связанных обмоток одна и та же, если в обмотках протекают одинаковые токи.*

В этом проявляется принцип взаимности для индуктивно связанных обмоток.

3. В каких случаях коэффициент связи обмоток  $k=1$ ? Значение коэффициента связи приближается к единице в тех случаях, когда обе обмотки пронизываются почти одним и тем же магнитным потоком, например для равномерно распределенных обмоток на кольцевом сердечнике или для любых обмоток, связанных общим сердечником из ферромагнитного материала. В последнем случае предполагается, что потоками рассеяния можно пренебречь и обе обмотки пронизываются одним и тем же потоком  $\Phi$ .

4. Чему будет равна индуктивность обеих обмоток при их согласном и встречном включении? Для согласно включенных обмоток общая индуктивность

$$L = L_1 + L_2 + 2M = 6,4 + 25,6 + 2 \cdot 12,8 = 57,6 \text{ мГн.}$$

При встречном включении общая индуктивность  
 $L = L_1 + L_2 - 2M = 6,4 + 25,6 - 2 \cdot 12,8 = 6,4$  мГн.

### 8.6. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

139. Прямолинейный провод длиной  $l=0,5$  м движется со скоростью  $v=12$  м/с в однородном магнитном поле с индукцией  $B=0,8$  Тл. Угол между направлениями векторов  $v$  и  $B$  составляет  $45^\circ$ , а между направлениями провода и магнитных линий  $90^\circ$ . Вычислить ЭДС, развиваемую в проводе.

140. Концы провода, рассмотренного в предыдущей задаче, присоединили к резистору сопротивлением  $R=1,7$  Ом, причем провод перемещается с прежней скоростью и в прежнем направлении.

Вычислить ток в проводе, а также механическую мощность, которую нужно развить, чтобы преодолеть возникшую электромагнитную силу. Сопротивлением движущегося провода пренебречь.

141. В однородном магнитном поле с магнитной индукцией  $B=1,2$  Тл по двум металлическим рельсам  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  (рис. 8.12) перемещается проводник  $AB$  со скоростью  $v=8$  м/с.

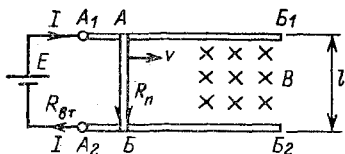


Рис. 8.12. К задаче 141

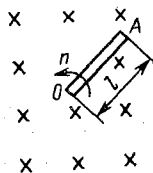


Рис. 8.13. К задаче 143

Вычислить ток в проводнике и развиваемую им механическую мощность, если ЭДС источника питания  $E=6$  В, его внутреннее сопротивление  $R_{вт}=0,01$  Ом, сопротивление проводника  $R_{п}=0,005$  Ом и длина  $l=0,5$  м. Сопротивлением соединительных проводов и рельсов пренебречь.

142. Для предыдущей задачи вычислить ток в недвижущемся проводнике, а также при уменьшении скорости движения проводника в 2 раза. Сравнить результаты вычислений.

143. Прямолинейный провод  $AO$  (рис. 8.13) длиной  $l=10$  см  $=0,1$  м вращается вокруг оси  $O$  в однородном магнитном поле с индукцией  $B=0,4$  Тл. Частота вращения провода  $n=3000$  об/мин.

Вычислить ЭДС в проводе.

Указание. Для бесконечно малого участка провода  $dr$ , расположенного на расстоянии  $r$  от оси  $O$ , принять линейную скорость  $v_r = \omega r = 2\pi(n/60)r$ .

144. Определить напряжение между концами провода при условиях

предыдущей задачи, если ось  $O$  переместить в его середину. Какова в этом случае ЭДС между осью и точкой  $A$ ? Угловая скорость вращения провода остается прежней.

145. Прямоугольная рамка  $P$  (рис. 8.14) вращается с угловой скоростью  $\omega = 628$  1/с в однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,5$  Тл.

Построить график зависимости индуктируемой ЭДС от времени  $e(t)$  и вычислить максимальное значение ЭДС, если площадь рамки  $8 \times 12$  см<sup>2</sup>. Начальное положение рамки указано на рис. 8.14.

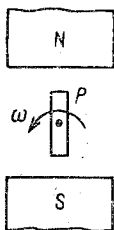


Рис. 8.14. К задаче 145

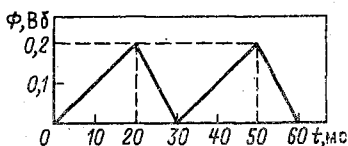


Рис. 8.15. К задаче 149

146. В условиях предыдущей задачи определить диаметр круглой рамки, в которой будет наводиться такая же ЭДС, как и в рассмотренной прямоугольной рамке.

147. Две одинаковые прямоугольные рамки площадью  $S = 100$  см<sup>2</sup> каждая жестко связаны между собой и расположены под прямым углом друг к другу. Рамки вращаются с угловой скоростью  $\omega = 500$  1/с в однородном магнитном поле с индукцией  $B = 1$  Тл.

Построить график изменения во времени ЭДС  $e_1$  и  $e_2$ , индуктируемых в рамках, приняв начальное положение плоскости первой рамки совпадающим с направлением магнитных линий.

148. Как изменится график зависимости ЭДС  $e_2(t)$  из предыдущей задачи, если угол между плоскостями рамок сделать равным  $30^\circ$ , сохранив начальное положение первой рамки?

149. Магнитный поток, пересекающий контур, изменяется в соответствии с графиком на рис. 8.15. Построить график изменения индуктируемой в контуре ЭДС.

150. Из магнитно-мягкого материала с неизвестными магнитными свойствами изготовили кольцевой сердечник, на который намотали две обмотки с числами витков  $w_1 = 220$  и  $w_2 = 160$ . При помощи реостата  $R_1$  (рис. 8.16) в первой обмотке устанавливали различные значения тока, направление которого каждый раз изменялось на обратное переключением рубильника  $P$ . При этом во вторичной обмотке индуктировался заряд, который измерялся баллистическим гальванометром (отклонения светового указателя гальванометра даны в табл. 8.2).

Построить кривую намагничивания  $B = f(H)$  исследуемого материала.

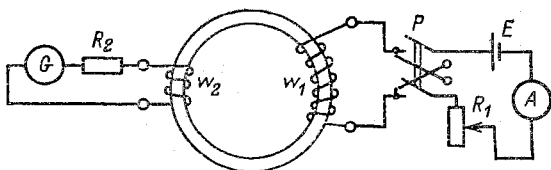


Рис. 8.16. К задаче 150

Таблица 8.2

$I, \text{ A}$	0,06	0,09	0,12	0,15	0,24	0,36
$\alpha, \text{ мм}$	14	32	240	412	480	512

ла, если баллистическая постоянная гальванометра (коэффициент пропорциональности между зарядом  $Q$  и углом отклонения  $\alpha$ )  $c = 8 \times 10^{-8}$  Кл/мм, сопротивление в цепи вторичной обмотки  $R_2 = 1000$  Ом, длина средней магнитной линии сердечника  $l_{\text{ср}} = 30$  см и площадь поперечного сечения сердечника  $S = 1$  см<sup>2</sup>.

Указание. При изменении магнитного потока на величину  $\Delta\Phi$  в цепи гальванометра  $G$  (рис. 8.16) проходит заряд  $Q = \Delta\Phi w_2 / R_2$  под действием индуцируемой ЭДС. Поток считать по среднему значению магнитной индукции  $\Phi = B_{\text{ср}} S$ .

151. Площадь поперечного сечения ферромагнитного сердечника кольцевой катушки  $S = 2 \cdot 2$  см<sup>2</sup> и длина средней магнитной линии  $l_{\text{ср}} = 20$  см. Обмотка катушки содержит 400 витков провода, ее индуктивность  $L = 0,4$  Гн (принять постоянной). В каких пределах можно изменять ток в обмотке, чтобы магнитная индукция в сердечнике не вышла за пределы «колена» кривой намагничивания ( $B = 1 \div 1,3$  Тл)?

152. Как изменится индуктивность катушки из предыдущей задачи, если ее сердечник выполнить из неферромагнитного материала?

153. Цилиндрическая катушка без сердечника имеет длину  $l = 10$  см и диаметр  $D = 2$  см. Определить число витков и диаметр провода (с изоляцией) однородной плотной намотки, обеспечивающей индуктивность  $L = 3,95$  мГн.

154. Составить выражение для длины провода ( $l_{\text{п}}$ ) обмотки цилиндрической катушки, у которой индуктивность  $L$ , магнитная проницаемость сердечника  $\mu_a$  и длина катушки  $l$ . Принять диаметр катушки много меньше ее длины.

155. Определить длину провода обмотки цилиндрической катушки без сердечника, если индуктивность катушки  $L = 1$  мГн, а ее длина  $l = 16$  см много больше диаметра.

156. Определить индуктивность (на 1 м) участка линии, выполнен-

ного из медных проводов диаметром 20 мм, если расстояние между осями провода 20 см.

157. Воздушная линия выполнена из двух алюминиевых проводов, расположенных на расстоянии 45 см друг от друга.

Вычислить индуктивность на 1 км линии, если диаметр каждого провода равен 9 мм.

158. Как изменится значение индуктивности линии из предыдущей задачи, если проницаемость стали равна 500?

159. Как изменится индуктивность двухпроводной линии, рассмотренной в задаче 157, если удвоить расстояние между проводами?

160. Две обмотки с числами витков  $w_1=500$  и  $w_2=1000$  плотно намотаны на кольцо из немагнитного материала. Отношение внешнего и внутреннего диаметров кольца  $D_2 : D_1 = 5 : 3$ ; сечение кольца — квадратное с длиной стороны  $a=5$  см. Найти взаимную индуктивность обмоток.

161. Цилиндрическая катушка без сердечника имеет две равномерно распределенные обмотки с числами витков 60 и 40. Вычислить взаимную индуктивность обмоток, если средний диаметр катушки 3 см, а ее длина 15 см. Коэффициент связи можно считать равным 1.

162. Общая индуктивность двух катушек при согласном включении 30 мГн, а при встречном включении 24 мГн. Вычислить взаимную индуктивность катушек.

163. Определить коэффициент связи катушек из предыдущей задачи, если их индуктивности одинаковы.

164. Две обмотки кольцевой катушки с числами витков  $w_1$  и  $w_2$  связаны общим магнитным потоком. Индуктивность первой обмотки равна 0,2 Гн. Вычислить взаимную индуктивность обмоток, если  $w_2 = 3w_1$ .

165. Вычислить полную индуктивность обмоток из предыдущей задачи при их согласном и встречном включении.

### 8.7. ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ. 8

139. 3,4 В.

140. 2 А; 6,8 Вт.

141. 20 А; 96 Вт.

142. 100 А; 60 А.

143. 0,628 В.

144. 0; 0,157 В.

145.  $E_m = 3$  В.

$t, \text{ мс}$	0	2,5	5,0	7,5	10
$e, \text{ В}$	$E_m$	0	$-E_m$	0	$E_m$

146. 0,111 м.

147.

$t, \text{ мс}$	0	3,15	6,3	9,45	12,6
$e_1, \text{ В}$	5	0	-5	0	5
$e_2, \text{ В}$	0	5	0	-5	0

148. Абсциссы всех точек графика зависимости  $e_2(t)$  надо уменьшить на 2,1 мс.

149. График имеет прямоугольную форму со значениями ЭДС  $-10$  и  $+20$  В.

150.

$H, \text{ А/м}$	40	60	80	100	160
$B, \text{ Тл}$	0,035	0,080	0,60	1,03	1,20

151. 0,4—0,52 А.

152. Уменьшится приблизительно в 1000 раз.

153. 1000 витков; 0,1 мм.

154.  $l_{\text{цр}} = 2 \sqrt{\frac{\pi}{\mu_a} Ll}$ .

155. 40 м.

156.  $1,28 \cdot 10^{-6}$  Гн/м.

157. 1,84 мГн.

158. 51,8 мГн/км.

159. Увеличится на 0,277 мГн/км.

160.  $2,55 \cdot 10^{-2}$  Гн.

161. 14,25 мкГн.

162. 1,5 мГн.

163. 0,11.

164. 0,6 Гн.

165. 3,2 Гн, 0,8 Гн.



## НЕРАЗВЕТВЛЕННАЯ ЦЕПЬ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

### 9.1. ИЗОБРАЖЕНИЕ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ВЕЛИЧИН. ВЕКТОРНАЯ И ВОЛНОВАЯ ДИАГРАММЫ

#### Условие задачи

В двух последовательно соединенных генераторах синусоидального тока частотой  $f=50$  Гц создаются электродвижущие силы, смещенные по фазе на угол  $\psi_{1,2}=60^\circ$ , но с одинаковыми максимальными значениями  $E_{1m}=E_{2m}=160$  В.

Построить волновую и векторную диаграммы ЭДС  $e_1$  и  $e_2$  генераторов и суммарной ЭДС. Вычислить действующие значения ЭДС  $E_1$ ,  $E_2$  и  $E$ .

#### Решение задачи

1. Получение требуемых ЭДС. Как было показано (§ 8.2), в прямоугольной рамке, вращающейся в однородном магнитном поле с угловой скоростью  $\omega$ , индуцируется в каждый момент времени ЭДС  $e=E_m \sin \omega t$ , где  $E_m$  — максимальное значение (амплитуда), а  $e$  — мгновенное значение.

Если одну рамку заменить двумя жестко связанными прямоугольными рамками  $P_1$  и  $P_2$  (рис. 9.1), смещенными в пространстве на угол  $60^\circ$ , то наводимые в рамках ЭДС (соответственно  $e_1$  и  $e_2$ ) будут проходить нулевые, максимальные и все промежуточные значения со сдвигом по фазе на угол  $60^\circ$ .

Принимая, что рамки начинают вращение из положения, указанного на рис. 9.1, получаем мгновенные значения ЭДС в рамках  $e_1=E_{1m} \sin \omega t$  и  $e_2=E_{2m} \sin (\omega t+60^\circ)$ .

Рассматриваемые рамки могут служить генераторами в предлагаемой задаче.

2. Построение волновой диаграммы. На волновой диаграмме (рис. 9.2, б) синусоидальные величины изображаются графиками. Чтобы их построить, нужно выяснить: какими значениями однозначно определяется синусоида?

Из выражения для мгновенной ЭДС ясно, что синусоида определяется амплитудой, начальной фазой и частотой:

$$e_1 = E_{1m} \sin \omega t = 160 \sin 2\pi \cdot 50t \text{ В;}$$

$$e_2 = E_{2m} \sin(\omega t + 60^\circ) = 160 \sin(2\pi \cdot 50t + 60^\circ) \text{ В.}$$

Действительно, зная амплитуду, начальную фазу и частоту, можно записать синусоидально изменяющуюся величину и найти ее значение в любой момент времени. Например, в начальный момент времени ( $t=0$  и  $\omega t=0$ ) имеем

$$e_1 = 160 \sin 0 = 0;$$

$$e_2 = 160 \sin 60^\circ = 139 \text{ В,}$$

т.е. график ЭДС  $e_1$  проходит через начало координат, а график ЭДС  $e_2$  начинается ординатой 139 В (точки  $k_1$  и  $k_2$  на рис. 9.2, б).

Найдем моменты времени  $t$  (или  $\omega t$ ), когда ЭДС первый раз достигают максимальных положительных значений. Из выражений для ЭДС  $e_1$  и  $e_2$  получим

$$e_1 = E_{1m} = 160 \text{ В при } \sin \omega t = 1 \text{ или } \omega t = 90^\circ = \pi/2;$$

$$t = \frac{\pi/2}{\omega} = \frac{\pi}{2 \cdot 2\pi f} = \frac{1}{4 \cdot 50} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ с} = 5 \text{ мс;}$$

$$e_2 = E_{2m} = 160 \text{ В при } \sin(\omega t + 60^\circ) = 1,$$

Рис. 9.1. Получение ЭДС, смещенных по фазе на угол  $60^\circ$

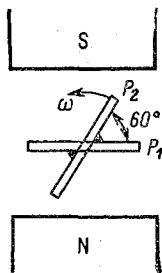
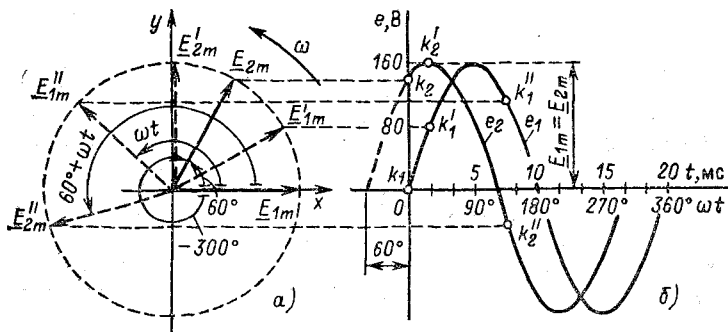


Рис. 9.2. Векторная (а) и волновая (б) диаграммы ЭДС



или

$$\omega t + 60^\circ = 90^\circ; \quad \omega t = 30^\circ = \pi/6;$$

$$t = \frac{\pi}{6\omega} = \frac{5}{3} 10^{-3} \text{ с} = \frac{5}{3} \text{ мс.}$$

Следующие максимальные положительные значения получаются через интервалы времени, равные целому числу периодов  $T=1/f=1/50=20 \cdot 10^{-3} \text{ с}=20 \text{ мс}$ . Например, следующий положительный максимум ЭДС  $e_1$  будет в момент времени  $t=5+20=25 \text{ мс}$  или  $\omega t=\pi/2+2\pi=90^\circ+360^\circ=450^\circ$ .

Отрицательные максимумы ЭДС наступают после положительных через интервал времени, равный половине периода  $T/2=10 \text{ мс}$ . Например, первый отрицательный максимум ЭДС  $e_2$  получится в момент времени  $t=5/3+10 \text{ мс}$  или  $\omega t=\pi/6+\pi=30^\circ+180^\circ=210^\circ$ .

Для ЭДС  $e_2$  найдем еще момент времени, когда она первый раз равна нулю:  $e_2=0$ . Это будет при  $\sin(\omega t+60^\circ)=0$ , т. е.  $\omega t+60^\circ=180^\circ$  или  $\omega t=120^\circ=2\pi/3$ ;  $t \approx 6,7 \text{ мс}$ .

Если предположить  $(\omega t+60^\circ)=0$ , то получим  $\omega t=-60^\circ=-\pi/3$ . Это соответствует отрицательному моменту времени  $t=-10/3 \text{ мс}$ , т. е. моменту времени до выбранного начала вращения рамки.

Вычисляя для каждой синусоиды ряд мгновенных значений, можно построить графики ЭДС  $e_1$  и  $e_2$ , которые показаны на рис. 9.2, б.

3. Построение векторной диаграммы. Векторы\* амплитуд ЭДС  $\underline{E}_{1m}$  и  $\underline{E}_{2m}$  (рис. 9.2, а) строят так, чтобы их проекции на ось  $y$  в начальный момент времени ( $t=0$ ) были равны ординатам графика ЭДС  $e_1, e_2$  в этот же момент времени (рис. 9.2, б). Действительно, для момента  $t=0$  проекция вектора  $\underline{E}_{2m}$  на ось  $y$  равна  $E_{2m} \sin 60^\circ$ , а проекция вектора  $\underline{E}_{1m}$  — нулю.

Однако из векторной диаграммы можно получить не только начальные, но и все последующие мгновенные значения ЭДС  $e_1$  и  $e_2$ .

Повернем векторы  $\underline{E}_{1m}$  и  $\underline{E}_{2m}$  против направления движения часовой стрелки, например на угол  $30^\circ$  (на рис. 9.2, а векторы  $\underline{E}'_{1m}$  и  $\underline{E}'_{2m}$ , показанные пунктиром). В новом

\* Векторы будем обозначать большой буквой с черточкой снизу, например  $\underline{E}_m$  — вектор амплитуды ЭДС. Далее будет показано, что так обозначаются комплексные числа, которые также изображаются векторами.

положении проекция первого из векторов на ось  $y$  или  $E_{1m} \sin 30^\circ = 160 \cdot 0,5 = 80$  В равна ординате точки  $k_1'$  (рис. 9.2, б), а проекция второго вектора  $E_{2m} \sin 90^\circ = E_{2m} = 160$  В — ординате точки  $k_2'$ , т. е. эти проекции как раз соответствуют ординатам ЭДС при  $\omega t = 30^\circ$ . Продолжая поворачивать векторы ЭДС, получаем проекции на ось  $y$ , равные ординатам последующих точек графиков ЭДС  $e_1$  и  $e_2$ .

Будем вращать векторы  $\underline{E}_{1m}$  и  $\underline{E}_{2m}$ , начиная с начального момента времени  $t = 0$ , против направления движения часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega$ . Тогда в любой момент времени  $t$  их положение ( $\underline{E}_{1m}''$  и  $\underline{E}_{2m}''$ ) определится углом  $\omega t$  для вектора  $\underline{E}_{1m}$  и углом  $60^\circ + \omega t$  для вектора  $\underline{E}_{2m}$ . Как следует из рис. 9.2, а, проекции векторов на ось  $y$  в этот момент  $E_{1m} \sin \omega t$  и  $E_{2m} \sin (\omega t + 60^\circ)$  равны соответствующим ординатам графиков ЭДС  $e_1$  и  $e_2$  (точки  $k_1''$  и  $k_2''$  на рис. 9.2, б).

*Итак, вращая с угловой скоростью  $\omega$  против направления движения часовой стрелки векторы  $\underline{E}_{1m}$  и  $\underline{E}_{2m}$ , можно получить в каждый момент времени проекции на ось  $y$ , равные мгновенным значениям ЭДС  $e_1$  и  $e_2$ .*

4. Построение графика и вектора суммарной ЭДС генераторов. Вопрос о режиме работы последовательно соединенных генераторов постоянного тока очень прост. Поэтому прежде всего выясним, можно ли для цепей переменного тока применить ранее изученные законы последовательного соединения. Это возможно, если рассматривать мгновенные значения величин. Действительно, в каждый момент времени суммарная ЭДС равна алгебраической сумме ЭДС отдельных генераторов. Это дает право построить график суммарной ЭДС  $e = E_m \sin (\omega t + \psi)$  (рис. 9.3, б) сложением ординат соответствующих точек графиков ЭДС  $e_1$  и  $e_2$  (перенесены на рис. 9.3, б с рис. 9.2, б). Например, ордината точки  $a$  (рис. 9.3, б) равна сумме ординат точек  $a_1$  и  $a_2$  графиков ЭДС  $e_1$  и  $e_2$  для одного и того же момента времени  $t$  или  $\omega t$ .

Полученному графику ЭДС  $e$  соответствует вектор  $E_m$  (рис. 9.3, а), построенный геометрическим сложением векторов  $\underline{E}_{1m}$  и  $\underline{E}_{2m}$ . Соответствие графика ЭДС  $e$  и вектора  $E_m$  подтверждается, например, совпадением начального (точка  $k$ ) и максимального (точка  $k'$ ) значений ЭДС  $e$  с проекциями на ось  $y$  вращающегося вектора  $E_m$ .

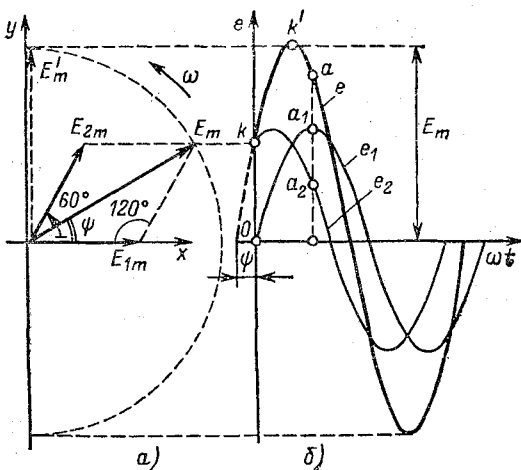


Рис. 9.3. Сложение двух ЭДС

Итак, в отличие от мгновенных значений, которые суммируются алгебраически, векторы максимальных значений складываются геометрически.

5. Вычисление действующих значений ЭДС. Действующие значения синусоидально изменяющихся величин в  $\sqrt{2}$  раз меньше максимальных (амплитуд), поэтому

$$E_1 = E_2 = E_{1m}/\sqrt{2} = E_{2m}/\sqrt{2} = 0,707 \cdot 160 = 113 \text{ В.}$$

Для определения действующего значения суммарной ЭДС прежде всего вычислим ее максимальное значение  $E_m$ . Как это сделать?

В общем случае можно воспользоваться теоремой косинусов для одного из косоугольных треугольников (рис. 9.3, а). В поставленной задаче искомая амплитуда  $E_m$  равна стороне равнобедренного треугольника, лежащей против угла  $120^\circ$ , и поэтому  $E_m = \sqrt{3}E_{1m} = \sqrt{3} \cdot 160 = 277 \text{ В}$ , а  $E = 0,707 E_m = 0,707 \cdot 277 = 196 \text{ В}$ .

Векторные диаграммы принято строить для действующих значений, а не амплитуд, и это условие в дальнейшем будет соблюдаться. Для векторной диаграммы решаемой задачи (рис. 9.3, а) достаточно изменить масштаб всех векторов в  $\sqrt{2}$  раз, чтобы они выражали действующие значения.

## Дополнительные вопросы к задаче

1. Как повлияет на режим цепи изменение начального положения рамок (рис. 9.1)? Допустим, что рамки  $P_1$ — $P_2$  повернули, например, на четверть оборота в положительном направлении (против направления движения часовой стрелки) и приняли их новое положение соответствующим начальному моменту вращения. В таком случае начальные фазы ЭДС рамок увеличатся на  $90^\circ$  и мгновенные значения надо записать в виде

$$\begin{aligned}e_1 &= E_{1m} \sin(\omega t + 90^\circ); \\e_2 &= E_{2m} \sin(\omega t + 150^\circ).\end{aligned}$$

Указанные изменения приведут к повороту векторной диаграммы (рис. 9.3, *a*) на  $90^\circ$  в направлении, обратном направлению движения часовой стрелки, и к смещению начала координат на волновой диаграмме таким образом, чтобы в момент  $t=0$  ЭДС  $e_1$  и  $e_2$  равнялись соответственно  $E_{1m} \sin 90^\circ = E_{1m}$  и  $E_{2m} \sin 150^\circ = 0,5 E_{2m}$ .

Сдвиг по фазе между синусоидальными величинами (в нашем случае  $60^\circ$ ), а также максимальные и действующие значения остаются прежними.

2. Почему вращающиеся векторы фиксируются на диаграмме в их начальном положении? Поскольку диаграммы (рис. 9.2, 9.3) построены для синусоидальных величин одинаковой частоты  $f=50$  Гц, между векторами, вращающимися с одинаковой угловой частотой  $\omega=2\pi f$  (314 рад/с), сохраняются неизменные фазовые сдвиги и диаграмму можно зафиксировать для любого момента времени. Однако, располагая векторы в их начальном положении, можно отметить на векторной диаграмме, если это необходимо, не только действующие или амплитудные значения и сдвиги по фазе, но и начальные фазы.

3. Можно ли одну и ту же начальную фазу выразить и положительным, и отрицательным углом? Положительные углы отсчитываются от оси в направлении, обратном направлению движения часовой стрелки, а отрицательные — по направлению ее движения. Поэтому, например, можно считать угол  $60^\circ$  равным  $-300^\circ$  (рис. 9.2, *a*).

4. Как записать мгновенное значение суммарной ЭДС  $e = E_m \sin(\omega t + \psi)$  (рис. 9.3)? В задаче вычислено максимальное значение ЭДС  $E_m = 277$  В. На-

чальную фазу  $\psi$  вектора  $E_m$  легко определить, если учесть, что он направлен по диагонали ромба, и потому  $\psi = 0,5 \times 60 = 30^\circ$ . В общем случае этот угол можно определить по формуле

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{E_{1m} \sin \psi_1 + E_{2m} \sin \psi_2}{E_{1m} \cos \psi_1 + E_{2m} \cos \psi_2},$$

где  $\psi_1$  и  $\psi_2$  — начальные фазы суммируемых ЭДС  $e_1$  и  $e_2$ . В поставленной задаче  $\psi_1 = 0$ ,  $\psi_2 = 60^\circ$ , поэтому

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{160 \cdot 0 + 160 \cdot 0,866}{160 + 160 \cdot 0,5} = \frac{160 \cdot 0,866}{240} = 0,57.$$

Следовательно,

$$e = 277 \sin(\omega t + 30^\circ) = 277 \sin(314t + \pi/6) \text{ В.}$$

5. Применяют ли последовательное соединение генераторов переменного тока? Суммарная ЭДС  $e$  (рис. 9.3) зависит не только от амплитуды ЭДС  $e_1$  и  $e_2$  отдельных генераторов, но и от фазового сдвига  $\psi_{1,2}$  между ними. При совпадении фаз ( $\psi_{1,2} = 0$ ) амплитуда суммарной ЭДС  $E_m = E_{1m} + E_{2m} = 160 + 160 = 320$  В. При противофазном включении ( $\psi_{1,2} = 180^\circ$ ) получится  $E_m = E_{1m} - E_{2m} = 0$ .

Поэтому последовательное соединение генераторов переменного тока практически не применяют из-за необходимости согласования фаз.

## 9.2. ЦЕПЬ С АКТИВНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ И ИНДУКТИВНОСТЬЮ

### Условие задачи

К сети переменного (синусоидального) тока напряжением  $U = 220$  В и частотой  $f = 50$  Гц присоединена цепь (рис. 9.4) из последовательно соединенных активного сопротивления  $R = 30$  Ом и индуктивности  $L = 127$  мГн =  $0,127$  Гн.

Вычислить ток в цепи  $I$ , напряжения на ее участках  $U_R$  и  $U_L$ , все мощности (активную, реактивную и полную), а также построить векторную диаграмму, треугольники напряжений сопротивлений и мощностей.

### Решение задачи

1. Свойства активного сопротивления и индуктивности. Для условий данной задачи важно отметить два свойства активного сопротивления: во-

первых, сопротивление  $R$  не зависит от частоты изменения тока  $f$  и, во-вторых, напряжение на сопротивлении  $U_R$  совпадает по фазе с током  $I$  (рис. 9.5).

Вследствие этих особенностей закон Ома для сопротивления  $R$  можно записать как для мгновенных значений

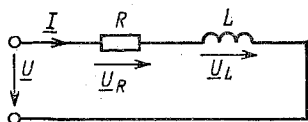


Рис. 9.4. Последовательная цепь с параметрами  $R$  и  $L$

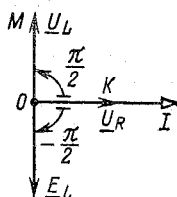


Рис. 9.5. Векторная диаграмма для последовательной цепи с параметрами  $R$  и  $L$

напряжения и тока  $u_R = Ri$ , так и для действующих  $U_R = RI$  или максимальных  $U_{Rm} = RI_m$ .

Иначе обстоит дело со свойствами индуктивности.

Переменный ток образует в индуктивности ЭДС  $e_L$ , которая препятствует («сопротивляется») изменению тока в цепи (закон Ленца), и в этом причина появления индуктивного сопротивления. Для синусоидального тока, как известно, индуктивное сопротивление  $X_L = \omega L = 2\pi fL$ .

Таким образом, индуктивное сопротивление  $X_L$  в отличие от активного сопротивления зависит от частоты  $f$ .

Индуктивность отличается от активного сопротивления также и по разности фаз между током и напряжением. Известно, что ЭДС в индуктивности  $E_L$  отстает по фазе на угол  $\pi/2$  от тока  $I$  (рис. 9.5). Эту ЭДС уравновешивает напряжение на индуктивности  $U_L$ . Поэтому напряжение  $U_L$  равно ЭДС  $E_L$ , но противоположно ей по знаку, т. е. вектор  $\underline{U}_L = -\underline{E}_L$  (рис. 9.5).

Как следствие этих особенностей закон Ома можно записать только для действующих или максимальных значений тока и напряжения индуктивности, т. е.  $U_L = X_L I$  или  $U_{Lm} = X_L I_m$ , и он не применим для их мгновенных значений ( $u_L \neq X_L i$ ).

2. Треугольник напряжений. Напряжение на выводах цепи определяется вектором  $\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L$ . Эту сумму векторов построим по правилам треугольника. В этих целях вектор  $\underline{U}_L$  (рис. 9.5) перенесем параллельно самому себе из точки  $O$  в точку  $K$  (рис. 9.6) и соединим точки



О и М. Стороны треугольника ОКМ изображают напряжения на участках и выводах ( $U_R$ ,  $U_L$  и  $U$ ).

Из треугольника напряжений рис. 9.6

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} = \sqrt{(RI)^2 + (X_L I)^2} = I \sqrt{R^2 + X_L^2},$$

откуда полное сопротивление цепи

$$Z = U/I = \sqrt{R^2 + X_L^2}.$$

Полученная формула выражает закон Ома для цепи из последовательно соединенных активного сопротивления и индуктивности.

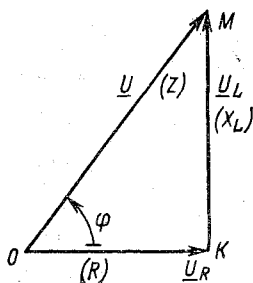


Рис. 9.6. Треугольник напряжений для цепи рис. 9.4

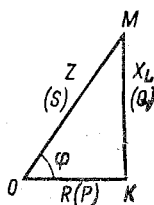


Рис. 9.7. Треугольники сопротивлений и мощностей для цепи рис. 9.4

3. Вычисление сопротивлений. Треугольник сопротивлений. Активное сопротивление  $R = 30$  Ом задано. Индуктивное сопротивление

$$X_L = \omega L = 2\pi fL = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 0,127 = 40 \text{ Ом.}$$

Полное сопротивление

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \text{ Ом.}$$

Найденные сопротивления связаны соотношениями сторон прямоугольного треугольника, который построен на рис. 9.7. При наших данных треугольник сопротивлений ОКМ (рис. 9.7) имеет отношение сторон

$$R:X_L:Z = 30:40:50 = 3:4:5.$$

4. Вычисление тока и напряжений. В рассматриваемой цепи ток

$$I = U/Z = 220/50 = 4,4 \text{ А,}$$

а напряжения на ее участках

$$U_R = RI = 30 \cdot 4,4 = 132 \text{ В};$$

$$U_L = X_L I = 40 \cdot 4,4 = 176 \text{ В}.$$

5. Вычисление разности фаз между током и напряжением. Из треугольника напряжений (рис. 9.6)

$$\operatorname{tg} \varphi = U_L / U_R = X_L I / RI = X_L / R,$$

или

$$\cos \varphi = U_R / U = RI / ZI = R / Z.$$

Найденные выражения можно получить также из треугольника сопротивлений рис. 9.7.

При наших данных  $\cos \varphi = R / Z = 0,6$ , а  $\operatorname{tg} \varphi = X_L / R = 1,33$ , откуда  $\varphi \approx 53^\circ$ .

Таким образом, в неразветвленной цепи с активным сопротивлением  $R$  и индуктивным  $X_L$  напряжение на выводах цепи опережает по фазе ток на угол  $\varphi$ , зависящий от отношения  $X_L / R$ .

6. Вычисление мощностей. Треугольник мощностей. Средняя или активная мощность

$$P = UI \cos \varphi = 220 \cdot 4,4 \cdot 0,6 = 581 \text{ Вт}.$$

Поскольку  $U \cos \varphi = U_R$  (рис. 9.6), то

$$P = U \cos \varphi I = U_R I = IRI = RI^2.$$

Кроме активной мощности  $P$ , связанной с активным сопротивлением  $R$ , на переменном токе еще пользуются величинами реактивной мощности  $Q = UI \sin \varphi = X_L I^2$  и полной мощности  $S = UI = ZI^2$ , в нашем случае  $Q = 220 \cdot 4,4 \times 0,8 = 774 \text{ вар}$  и  $S = 220 \cdot 4,4 = 968 \text{ В} \cdot \text{А}$  (вольт-ампер).

Активная мощность  $P$ , реактивная  $Q$  и полная  $S$  пропорциональны сопротивлениям  $R$ ,  $X_L$  и  $Z$ , что позволяет треугольник сопротивлений (рис. 9.7) рассматривать в другом масштабе как треугольник мощностей (обозначения в скобках).

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Как записать уравнение мгновенных значений для напряжения источника и тока в цепи, если принять начальную фазу

тока равной нулю? Требуемые уравнения в общем виде записываются как

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u);$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

При наших данных

$$U_m = U\sqrt{2} = 220\sqrt{2} \approx 310 \text{ В};$$

$$I_m = I\sqrt{2} = 4,4\sqrt{2} \approx 6,2 \text{ А и}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 314 \text{ рад/с.}$$

Кроме того, задано  $\psi_i = 0$ . При этом разность фаз  $\varphi = \psi_u - \psi_i = \psi_u$  или  $\psi_u = \varphi = 53^\circ$ .

Окончательно имеем

$$u = 310 \sin(314t + 53^\circ) \text{ В};$$

$$i = 6,2 \sin 314t \text{ А.}$$

2. Существует ли взаимосвязь между треугольниками сопротивлений рис. 9.7 и напряжений рис. 9.6? Чтобы ответить на этот вопрос, вспомним, что каждое из напряжений цепи рис. 9.4 пропорционально соответствующему сопротивлению, так как  $U_R = RI$ ,  $U_L = X_L I$  и  $U = ZI$ . Поэтому треугольник  $OKM$  (рис. 9.6) можно использовать как для напряжений, так и для сопротивлений (на рис. 9.6 сопротивления обозначены в скобках). При этом, очевидно, потребуются различные масштабы сторон треугольника для измерения напряжений и сопротивлений. Если выбрать для треугольника  $OKM$  (рис. 9.6) длины сторон 24, 32 и 40 мм, то получим масштаб напряжений  $M_U = 132/24 = 5,5 \text{ В/мм}$  и масштаб сопротивлений  $M_Z = 30/24 = 1,25 \text{ Ом/мм}$ , отличающиеся в  $M_U/M_Z = 5,5/1,25 = 4,4$ , т. е. в 4,4 раз.

3. Имеется ли различие в применении законов Кирхгофа для мгновенных и действующих значений токов и напряжений? Для мгновенных значений синусоидальных токов и напряжений законы Кирхгофа применяются так же, как и при постоянном токе; поэтому в нашем случае  $u = u_r + u_L$ . Но для действующих или максимальных значений напряжений и токов уравнения по законам Кирхгофа следует составлять в векторной форме, применяя геометрическое сложение, т. е. для цепи рис. 9.4  $\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L$  или  $\underline{U}_m = \underline{U}_{Rm} + \underline{U}_{Lm}$ .

4. Существуют ли катушки индуктивности без активных сопротивлений и реостаты, не обладающие индуктивностью? Любой проводящий контур (или катушка), потокосцепление которого  $\Psi$  при токе  $i$ , обладает индуктивностью  $L = \Psi/i$ .

Индуктивность  $L$  многовитковой катушки (витки намотаны в одном направлении) во много раз больше, чем одного провода, свернутого кольцом, особенно если она имеет магнитопровод с большой магнитной проницаемостью. Для такой катушки индуктивное сопротивление получается много больше активного (особенно на повышенной частоте), так что иногда активным сопротивлением можно пренебречь. Тогда катушка характеризуется только индуктивностью.

Реостаты обладают некоторой индуктивностью, зависящей от их устройства. Индуктивность  $L$  очень мала для водяных и непроволочных реостатов, но имеет заметное значение для многовитковых катушечных реостатов.

*Итак, не существует идеальных катушек ( $X_L$ ) и реостатов ( $R$ ). Но к идеальным условиям можно приблизиться, выполнив устройства соответственно с  $X_L \gg R$  и  $R \gg X_L$ .*

5. Как определить активное сопротивление катушки индуктивности? Одним из способов может быть включение катушки в цепь постоянного тока. При этом частота  $f=0$  и  $X_L=2\pi fL=0$ , а полное сопротивление катушки  $Z=R=U/I$ , где  $U$  и  $I$  — напряжение катушки и ее ток. В действительности активное сопротивление вследствие поверхностного эффекта увеличивается с ростом частоты. При частоте 50 Гц увеличение сопротивления заметно только у проводников большого поперечного сечения.

6. Можно ли трансформатор включить в сеть постоянного тока? Трансформатор имеет большое индуктивное сопротивление (на номинальной частоте) и малое активное сопротивление, поэтому его полное сопротивление при переменном токе значительно больше, чем при постоянном токе. (См. предыдущий вопрос.) В таком случае, если трансформатор (либо другое устройство с большим индуктивным и малым активным сопротивлениями) ошибочно включить в сеть постоянного тока вместо переменного, то в цепи пойдет ток, значительно превышающий номинальный, что недопустимо,

### 9.3. ЦЕПЬ, СОСТОЯЩАЯ ИЗ РЕЗИСТОРА И КАТУШКИ ИНДУКТИВНОСТИ

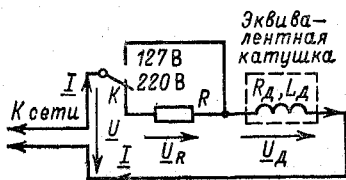
#### Условие задачи

Двигатель электрической бритвы (типа «Харьков») присоединяется к сети переменного тока напряжением 220 В ( $f=50$  Гц) через последовательно включенный («гасящий») резистор  $R$ . Этот же двигатель включается непосредственно (без «гасящего» резистора) в сеть переменного тока напряжением 127 В; при этом активная мощность  $P_d=8$  Вт, а  $\cos \varphi_d=0,85$  ( $\varphi_d=31^\circ 50'$ ).

Составить эквивалентную электрическую схему электробритвы, вычислить параметры схемы, а также ток в цепи и напряжения на ее участках, считая ток двигателя одинаковым для обоих режимов.

#### Решение задачи

1. Эквивалентная электрическая схема. Принцип действия электрического двигателя, как было показано (см. гл. 8), основан



на взаимодействии магнитного поля и проводов с токами. Поэтому он является активно-индуктивным приемником энергии, эквивалентные параметры которого  $R_d$  и  $L_d$  (рис. 9.8). В соответствии с условием задачи предусмотрено переключение напряжения сети ключом  $K$  (рис. 9.8) на 127 В (верхнее

Рис. 9.8. Схема питания двигателя на два напряжения

положение) и 220 В (нижнее положение).

Имеется ли у рассматриваемой цепи сходство с предыдущей (§ 9.2)? Если ключ  $K$  (рис. 9.8) установлен в положение 127 В, то цепь состоит из катушки с активным сопротивлением  $R_d$  и индуктивностью  $L_d$ , т. е. она аналогична предыдущей, ее параметры можно вычислить уже рассмотренными методами.

2. Вычисление эквивалентных параметров двигателя. В режиме питания двигателя от сети 127 В ток в его цепи

$$I = \frac{P_d}{U \cos \varphi_d} = \frac{8}{127 \cdot 0,85} = 0,074 \text{ А} = 74 \text{ мА},$$

эквивалентное активное сопротивление

$$R_d = P_d / I^2 = 8 / (0,074)^2 = 1460 \text{ Ом.}$$

Как следует из треугольника сопротивлений для аналогичной цепи (рис. 9.7),

$$X_d = R_d \operatorname{tg} \varphi_d,$$

или в нашем случае  $X_d = R_d \operatorname{tg} 31^\circ 50' = 1460 \cdot 0,62 = 906 \text{ Ом.}$

Полное эквивалентное сопротивление двигателя

$$Z_d = \sqrt{R_d^2 + X_d^2} = R_d / \cos \varphi_d = 1460 / 0,85 = 1720 \text{ Ом,}$$

или оно же по закону Ома

$$Z_d = U / I = 127 / 0,074 = 1720 \text{ Ом.}$$

3. Вычисление добавочного сопротивления  $R$ . Это сопротивление включается последовательно с рассмотренной катушкой с параметрами  $R$  и  $L_d$  в режиме питания от сети 220 В (ключ  $K$  в положении, показанном на рис. 9.8).

Можно ли эту новую цепь преобразовать так, чтобы она содержала один участок только с активным сопротивлением, а другой — только с индуктивностью (аналогично рис. 9.4)?

Для этого достаточно представить активное сопротивление и индуктивность катушки отдельно (рис. 9.9, а), а затем составить эквивалентную схему (рис. 9.9, б), которая совершенно аналогична цепи рис. 9.4.

Для цепи рис. 9.9, б с параметрами  $R_s$  и  $L_d$  построим треугольник сопротивлений (рис. 9.10), аналогичный треугольнику на рис. 9.7. В треугольнике  $MPH$  (рис. 9.10) нас интересует неизвестная величина  $R_s$ , но для определения ее пока мало данных, известна только одна величина  $X_d$  и нужно найти еще один параметр треугольника.

Учитывая, что ток в двигателе должен быть одинаковым для обоих режимов питания, вычислим новое эквивалентное сопротивление цепи (рис. 9.9):

$$Z_s = U / I = 220 / 0,074 = 2980 \text{ Ом.}$$

Далее из треугольника сопротивлений (рис. 9.10) находим

$$R_s = \sqrt{Z_s^2 - X_d^2} = \sqrt{2980^2 - 906^2} = 2840 \text{ Ом.}$$

Искомое добавочное сопротивление

$$R = R_s - R_d = 2840 - 1460 = 1380 \text{ Ом.}$$

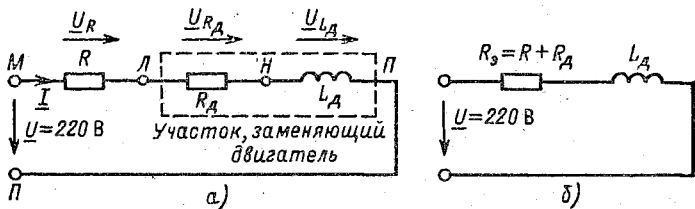


Рис. 9.9. Схемы, эквивалентные показанной на рис. 9.8

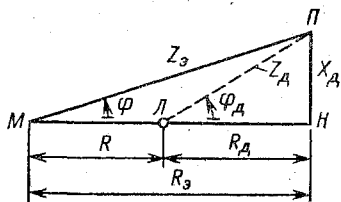


Рис. 9.10. Треугольники сопротивлений цепи рис. 9.8

Разделив отрезок  $MH$  ( $R_з$ ) на две части, пропорциональные  $R$  и  $R_д$ , получим точку  $Л$  (рис. 9.10) и треугольник сопротивлений  $ЛНП$  для участка цепи  $ЛНП$  (рис. 9.9, а), т. е. для катушки индуктивности, эквивалентной двигателю.

4. Вычисление напряжения. При расчете напряжений в цепях переменного тока целесообразно пользоваться векторной диаграммой. Построим ее для исходной цепи (рис. 9.8) при питании от сети 220 В.

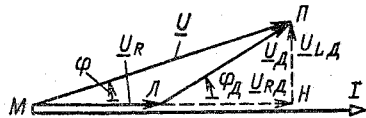


Рис. 9.11. Векторная диаграмма цепи рис. 9.8

Принимая, как и раньше (рис. 9.5), начальную фазу тока равной нулю, построим вектор напряжения  $U_R$  (рис. 9.8), совпадающий по фазе с вектором тока  $I$  (рис. 9.11). Вектор напряжения  $U_д$  (рис. 9.8) опережает по фазе вектор тока на уже известный угол  $\varphi_д = 31^\circ 50'$ .

Напряжение на выводах цепи (вектор  $U$  на рис. 9.11) равно геометрической (векторной) сумме напряжений на участках цепи  $U_R$  и  $U_д$ . Векторы  $U_{Rд}$  и  $U_{Lд}$ , показанные на рис. 9.11 пунктиром (см. доп. вопрос 3 к этой задаче), соответственно выражают напряжения на активном и индуктивном сопротивлениях катушки (рис. 9.9, а).

Вычислим напряжения, показанные на рис. 9.11:

$$U_R = IR = 0,074 \cdot 1380 = 102 \text{ В};$$

$$U_{R_d} = IR_d = 0,074 \cdot 1460 = 108 \text{ В};$$

$$U_{L_d} = IX_d = 0,074 \cdot 906 = 67 \text{ В};$$

$$U_d = IZ_d = 0,074 \cdot 1720 = 127 \text{ В}.$$

Для проверки вычислений можно пользоваться некоторыми соотношениями, которые следуют из векторной диаграммы (рис. 9.11):

$$U = \sqrt{(U_R + U_{R_d})^2 + (U_{L_d})^2} = \sqrt{(102 + 108)^2 + (67)^2} = \\ = 220 \text{ В},$$

а также

$$U_d = \sqrt{U_{R_d}^2 + U_{L_d}^2} = \sqrt{108^2 + 67^2} = 127 \text{ В}.$$

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Почему построение векторной диаграммы последовательной цепи рекомендуется начинать с вектора тока? Во всех участках неразветвленной цепи ток имеет одно и то же значение, что позволяет построить вектор общего тока  $I$  и относительно него ориентировать напряжения на участках в соответствии с их фазовыми сдвигами.

2. Как взаимосвязаны обозначения точек на диаграммах сопротивлений (рис. 9.10) и напряжений (рис. 9.11) и на схеме цепи? На принципиальной схеме рис. 9.9, а и рассматриваемых диаграммах соответствующие точки обозначены одинаково ( $M, L, H, П$ ), что облегчает выявление взаимосвязи любого участка цепи и соответствующего ему сопротивления или напряжения. Так, участку цепи  $MH$  (рис. 9.9, а) соответствует на рис. 9.10 сопротивление  $R_3$  и на рис. 9.11 — напряжение  $U_R + U_{R_d}$ , а участку цепи  $ЛП$  — сопротивление  $Z_d$  и напряжение  $U_d$ .

3. Существуют ли отдельно напряжения  $U_{R_d}$  и  $U_{L_d}$  (рис. 9.11)? Эти напряжения могут существовать каждое в отдельности только в эквивалентной цепи (рис. 9.9, а), где их можно, например, измерить вольтметром на соответствующих участках. Но у исходной цепи (рис. 9.8), как и у двигателя, их можно только вычислить и нельзя измерить, так как активное и индуктивное сопротивления не разделены и на выводах двигателя существует результирующее напряжение  $U_d$ .

4. Можно ли для уменьшения напряжения



на двигателе использовать добавочное реактивное сопротивление вместо активного? Применение активного добавочного сопротивления для уменьшения напряжения на двигателе приводит в наших условиях почти к удвоению расхода энергии, так как  $R = 1380 \text{ Ом}$  близко по значению к  $R_d = 1460 \text{ Ом}$ , а расход энергии связан только с активными сопротивлениями цепи. С этой точки зрения на переменном токе целесообразно применять для ослабления (деления) напряжения реактивные элементы (катушки индуктивности или конденсаторы, которые рассматриваются в § 9.5); эти элементы не потребляют электрической энергии, если не учитывать их активных сопротивлений.

Однако применение реактивных элементов при частоте 50 Гц затруднено их большими размерами. Действительно, в нашем случае, например, индуктивность  $L = X_L / 2\pi f$  (значением несколько генри) имела бы размеры и особенно массу значительно большие, чем сопротивление  $R$  мощностью около 8 Вт.

Кроме того, электробритва «Харьков» рассчитана на питание от сети как переменного, так и постоянного тока, а для второго случая возможно применение только активного добавочного сопротивления.

#### **9.4. ЦЕПЬ С АКТИВНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ И ЕМКОСТЬЮ**

##### **Условие задачи**

Для контроля уровня жидкости в устройствах автоматики часто применяется емкостный датчик (рис. 9.12, а), состоящий из металлических стержней и трубы, которые отделены от жидкости, заполняющей трубу, слоем изоляции.

Труба, стержень и разделяющая их жидкость (диэлектрик) образуют цилиндрический конденсатор, емкость которого возрастает с увеличением уровня жидкости, так как относительная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_r$  жидкости значительно больше, чем воздуха.

Изменение емкости и соответственно тока  $I$  в цепи рис. 9.12, а фиксируется вольтметром, шкала которого отградуирована в значениях уровня жидкости. Цепь питается от источника переменного тока напряжением  $U = 120 \text{ В}$  и частотой  $f = 400 \text{ Гц}$ .

Определить сопротивление  $R$ , обеспечивающее напряжение  $U_R = 30$  В при максимальном уровне жидкости  $l = 20$  см, если в датчике находится дистиллированная вода ( $\epsilon_r = 80$ ), а его размеры:  $r_1 = 10$  мм;  $r_2 = 20$  мм.

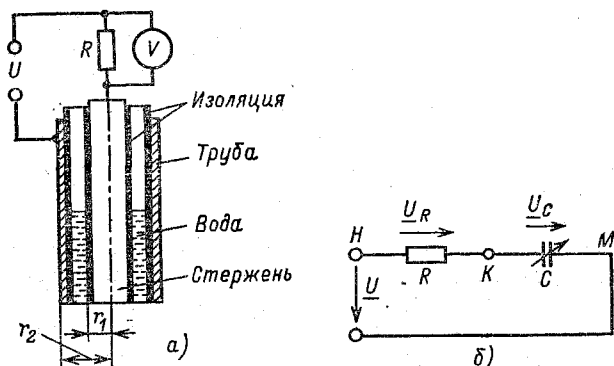


Рис. 9.12. Схема контроля уровня жидкости емкостным датчиком (а) и эквивалентная схема (б)

### Решение задачи

1. Электрическая схема и ее параметры. Учитывая, что датчик конструктивно выполнен как цилиндрический конденсатор переменной емкости, составляем электрическую схему (рис. 9.12, б).

Емкость  $C$  (рис. 9.12) можно определить по формуле емкости цилиндрического конденсатора (см. § 6.4). Но сначала нужно выяснить, следует ли учитывать влияние всех диэлектриков, показанных в конструкции датчика (рис. 9.12, а). Оказывается, нет. Слой изоляции, отделяющий воду от металла, имеет весьма малую толщину (по сравнению с толщиной слоя воды), и с достаточной для практических целей точностью его можно не учитывать. Емкостью части трубы, не заполненной водой, также можно пренебречь, так как диэлектрическая проницаемость воздуха в 80 раз меньше, чем воды.

В таком случае имеем однослойный цилиндрический конденсатор в пределах части трубы, заполненной водой, для которого

$$C = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\epsilon_r \cdot 2\pi l}{\ln(r_2/r_1)} = 8,85 \cdot 10^{-12} \times$$

$$\times \frac{80 \cdot 2\pi l}{\ln(20/10)} = 64,2 \cdot 10^{-12} l,$$

где  $l$  — в сантиметрах;  $C$  — в фарадах.

Из полученного выражения видно, что емкость пропорциональна уровню жидкости. Подставляя в полученное выражение значения, например равные 5, 10, 15 и 20 см, определим соответствующие емкости  $C_5 = 321$  пФ,  $C_{10} = 642$  пФ,  $C_{15} = 963$  пФ,  $C_{20} = 1284$  пФ.

2. Векторная диаграмма. Показанная на рис. 9.12, б электрическая цепь имеет одно общее свойство с предыдущими. Она содержит два вида сопротивлений: активное и реактивное, но не индуктивное, как было до сих пор, а емкостное. Метод решения задач в обоих случаях одинаков, надо только учесть, что напряжение на емкости отстает по фазе на угол  $90^\circ$  от тока, а не опережает ток на такой же угол, как напряжение на индуктивности.

Векторную диаграмму построим, начиная с общей для цепи величины — тока  $I$ . Откладываем в произвольном направлении, например по оси  $x$ , вектор тока  $I$  (рис. 9.13)

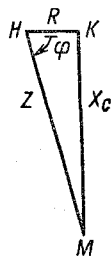
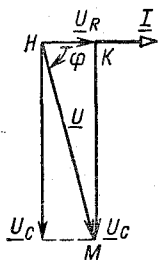


Рис. 9.13. Векторная диаграмма цепи рис. 9.12, б

Рис. 9.14. Треугольник сопротивлений для цепи рис. 9.12, б

и совпадающий с ним по фазе вектор напряжения на активном сопротивлении  $U_R$ . Напряжение на емкости  $U_C$  отстает по фазе на угол  $90^\circ$  от тока. Общее напряжение  $U$  равно векторной сумме напряжений  $U_R$  и  $U_C$ .

Из полученного треугольника напряжения  $HKM$  (рис. 9.13) можно определить любое напряжение по известным двум другим. Так, в нашем случае в режиме максимального уровня жидкости напряжение  $U_R = 30$  В, а потому

$$U_C = \sqrt{U^2 - U_R^2} = \sqrt{(120)^2 - (30)^2} = 116,2 \text{ В.}$$

3. Вычисление сопротивлений. Треугольник сопротивлений. Напряжение на каждом участке цепи равно произведению тока на сопротивление участка. Поэтому треугольник сопротивлений (рис. 9.14) подобен треугольнику напряжений (на рис. 9.13 и 9.14 соответствующие точки треугольников обозначены одинаково). Полученный треугольник (рис. 9.14) отличается от построенного на рис. 9.7 направлением, в котором отложен отрезок, изображающий реактивное, теперь — емкостное сопротивление  $X_C = 1/\omega C$ .

Для режима максимальной емкости датчика  $C_{20}$  имеем

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C_{20}} = \frac{1}{2\pi \cdot 400 \cdot 1284 \cdot 10^{-12}} = 309 \cdot 10^3 \text{ Ом} = 309 \text{ кОм},$$

и ток в цепи

$$I = \frac{U_C}{X_C} = \frac{116,2}{309 \cdot 10^3} = 376 \cdot 10^{-6} \text{ А} = 376 \text{ мкА}.$$

Требуемое для этого режима напряжение  $U_R = 30 \text{ В}$  обеспечивается при сопротивлении

$$R = \frac{U_R}{I} = \frac{30}{376 \cdot 10^{-6}} = 79,8 \cdot 10^3 \text{ Ом} \approx 80 \text{ кОм}.$$

При этом полное сопротивление цепи

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{(80)^2 + (309)^2} \approx 319 \text{ кОм}.$$

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Можно ли рассматриваемую цепь (рис. 9.12) питать от источника постоянного тока? Емкостное сопротивление  $X_C = 1/\omega C = 1/2\pi f C$  возрастает с уменьшением частоты и при  $f=0$  (постоянный ток) становится бесконечно большим. Это неудивительно, так как через идеальный конденсатор, характеризуемый только емкостью, постоянный ток не проходит, что равносильно разрыву цепи.

Поэтому при питании от сети постоянного тока независимо от уровня жидкости вольтметр будет показывать одно и то же значение  $U_R = RI = 0$ .

2. Какую погрешность в измерение внесет нестабильность напряжения  $U$  и сопротивления  $R$ ? Поскольку цепь линейная, то ее параметры ( $R$ ,  $X_C$  и  $Z$ ) не зависят от напряжения  $U$ .

В таком случае измеряемое вольтметром напряжение

$U_R = IR = (U/Z)R = U(R/Z)$  изменяется пропорционально  $U$ .

Изменение  $R$  (производственный допуск) в наших условиях ( $R \ll X_C^2$ ) практически не влияет на значения полного сопротивления  $Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$  и тока  $I = U/Z$ , а при неизменном токе напряжение  $U_R = IR$  изменяется пропорционально  $R$ .

Итак, в рассматриваемой задаче погрешность измерения равна погрешности величин  $U$  или  $R$ .

3. Почему в рассматриваемой задаче выбран источник энергии частоты 400 Гц вместо промышленной 50 Гц? Применение источника с частотой 50 Гц (например, промышленная электросеть), конечно, удобно. Но в наших условиях это привело бы к увеличению  $X_C = 1/2\pi fC$  в 8 раз и к необходимости увеличить в 8 раз и без того большое сопротивление, что потребовало бы включения вольтметра с очень большим внутренним сопротивлением.

Кроме того, рассматриваемые емкостные датчики часто устанавливаются в устройствах, где есть сеть частоты 400 Гц.

## 9.5. ЦЕПЬ, СОДЕРЖАЩАЯ $R$ , $L$ И $C$

### Условие задачи

Электрическая цепь (рис. 9.15), у которой  $R = 4$  Ом,  $L = 6,37$  мГн  $= 6,37 \cdot 10^{-3}$  Гн,  $C = 159$  мкФ  $= 159 \cdot 10^{-6}$  Ф, питается от генератора синусоидального тока с частотой  $f = 200$  Гц и напряжением  $U = 120$  В. Вычислить ток в цепи, сдвиг фаз между током и напряжением на выводах цепи, напряжения и мощности всех участков, а также активную, реактивную и полную мощности всей цепи.

### Решение задачи

1. Вычисление сопротивлений и сдвига фаз. Рассматриваемая цепь наряду с активным сопротивлением содержит и оба вида реактивных сопротивлений: индуктивное

$$X_L = 2\pi fL = 2 \cdot 3,14 \cdot 200 \cdot 6,37 \cdot 10^{-3} = 8 \text{ Ом}$$

и емкостное

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 200 \cdot 159 \cdot 10^{-6}} = 5 \text{ Ом.}$$

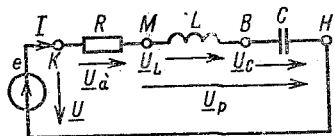


Рис. 9.15. Цепь с тремя последовательными участками, параметры которых  $R, L, C$

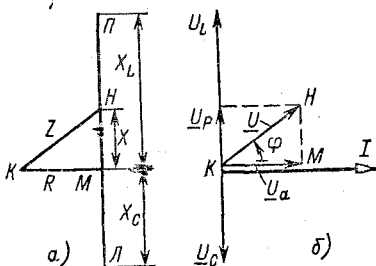


Рис. 9.16. Диаграмма сопротивлений (а) и векторная диаграмма (б) для цепи, показанной на рис. 9.15 при  $X_L > X_C$

Отрезки  $MP$  и  $ML$ , изображающие сопротивления  $X_L$  и  $X_C$ , должны быть направлены противоположно на диаграмме сопротивлений (рис. 9.16, а). Их разность, т.е. реактивное сопротивление цепи  $X = X_L - X_C = 8 - 5 = 3$  Ом, является суммарным сопротивлением индуктивности и емкости, т.е. участка цепи  $MH$  (рис. 9.15), и графически изображается отрезком  $MH$  (рис. 9.16).

Поскольку  $R$  и  $X$  представлены взаимно перпендикулярными отрезками ( $KM$  и  $MH$ ), полное сопротивление цепи

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2} = 5 \text{ Ом.}$$

В неразветвленной цепи с параметрами  $R, L, C$  сдвиг фаз определяется либо по

$$\cos \varphi = R/Z = 4/5 = 0,8,$$

либо по

$$\operatorname{tg} \varphi = X/R = 3/4 = 0,75.$$

В любом случае получим  $\varphi \approx 37^\circ$ . Приведенные формулы убеждают в том, что сдвиг фаз определяется свойствами приемника энергии: его схемой и параметрами.

2. Вычисление тока и напряжений. Ток в цепи  $I = U/Z = 120/5 = 24$  А одинаков на всех участках.

Падения напряжения на участках (рис. 9.16, б):

$U_a = U_R = RI = 4 \cdot 24 = 96$  В и совпадает по фазе с током;

$U_L = X_L I = 8 \cdot 24 = 192$  В и опережает по фазе ток на угол  $90^\circ$ ;

$U_C = X_C I = 5 \cdot 24 = 120$  В и отстает по фазе от тока на угол  $90^\circ$ .

Чтобы получить общее напряжение, нужно сложить три

вектора напряжений ( $U_a$ ,  $U_L$  и  $U_C$ ) на участках цепи. Можно ли их сложить в любой последовательности?

Порядок сложения не повлияет на результат, но удобнее вначале сложить векторы  $U_L$  и  $U_C$ , направленные по одной прямой (рис. 9.16, б), и к полученному вектору  $U_p$  прибавить вектор  $U_a$ . При таком порядке действия облегчается вычислительная работа. Складывая векторы  $U_L$  и  $U_C$ , получаем вектор реактивного напряжения цепи  $U_p$ , который равен разности напряжений  $U_L$  и  $U_C$ , так как эти напряжения сдвинуты по фазе относительно друг друга на угол  $180^\circ$ :  $U_L - U_C = 192 - 120 = 72$  В. С другой стороны,  $U_p = U_L - U_C = X_L I - X_C I = (X_L - X_C) I = X I = 3 \cdot 24 = 72$  В.

Здесь может возникнуть вопрос: существует ли в цепи вычисленная величина  $U_p$ ?

Ее можно измерить вольтметром (рис. 9.15), присоединив его к точкам  $M$  и  $N$  цепи (практически, конечно, только в цепях, у которых можно пренебречь активным сопротивлением катушки по сравнению с индуктивным). При этом интересно отметить, что напряжения на индуктивности и емкости (192 и 120 В), входящие в состав рассматриваемого участка цепи, в нашем случае больше, чем  $U_p$  (72 В). Треугольник напряжений  $KMN$  (рис. 9.16, б) имеет отношение сторон  $U_a : U_p : U = 96 : 72 : 120 = 4 : 3 : 5$ . В таком же отношении находятся стороны треугольника сопротивлений  $KMN$  (рис. 9.16, а). Очевидно, что эти треугольники подобны.

По треугольнику напряжений легко проверить выполненные вычисления:

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2} = \sqrt{96^2 + 72^2} = 120 \text{ В.}$$

3. Вычисление мощностей. Активное сопротивление  $R$  (рис. 9.15) имеет активную мощность

$$P_R = RI^2 = 4 \cdot 24^2 = 2304 \text{ Вт,}$$

а его реактивная мощность равна нулю.

У катушки индуктивности  $L$  и конденсатора  $C$  активные сопротивления равны нулю, поэтому в этих элементах отсутствуют активные мощности. Остается вычислить их реактивные мощности, которые соответственно равны

$$Q_L = X_L I^2 = 8 \cdot 24^2 = 4608 \text{ вар;}$$

$$Q_C = X_C I^2 = 5 \cdot 24^2 = 2880 \text{ вар.}$$

Участок  $MN$  (рис. 9.15), характеризуемый реактивным

сопротивлением  $X = X_L - X_C$ , имеет реактивную мощность  $Q = XI^2 = X_L I^2 - X_C I^2 = Q_L - Q_C = 4608 - 2880 = 1728$  вар.

Таким образом, реактивная мощность цепи равна разности индуктивной и емкостной реактивных мощностей.

Полная мощность цепи

$$S = ZI^2 = 5 \cdot 24^2 = 2880 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

### Дополнительные вопросы к задаче

1. В каком случае реактивное сопротивление цепи и сдвиг фаз между током и напряжением имеют отрицательный знак? Если  $X_L < X_C$ , то реактивное сопротивление цепи  $X = X_L - X_C < 0$ , т.е. имеет отрицательный знак. При этом и сдвиг фаз

$$\varphi = \arctg(X/R) < 0,$$

т.е. также имеет отрицательный знак.

Если цепь содержит только емкостное сопротивление  $X_C$ , то реактивное сопротивление  $X = -X_C$ .

2. Может ли иметь отрицательный знак полное сопротивление цепи? Полное сопротивление  $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$  положительно как при  $X > 0$ , так и при  $X < 0$ . Таким образом,  $Z$  не может иметь отрицательного знака.

3. Можно ли заменить индуктивность  $L$  и емкость  $C$  одной эквивалентной индуктивностью? В рассматриваемой задаче  $X_L > X_C$ , и поэтому реактивное сопротивление цепи  $X = X_L - X_C = 3$  Ом имеет индуктивный характер. Это означает, что найденное значение  $X$  можно получить при замене индуктивности  $L$  и емкости  $C$  одной индуктивностью:

$$L_3 = \frac{X}{\omega} = \frac{3}{2\pi f} = \frac{3}{2 \cdot 3,14 \cdot 200} = 0,0024 \text{ Гн} = 2,4 \text{ мГн}.$$

В эквивалентной схеме, составленной из активного сопротивления  $R = 4$  Ом и найденной эквивалентной индуктивности  $L_3 = 2,4$  мГн, остаются прежними ток  $I$ , напряжения  $U_a$  и  $U_p$  и сдвиг по фазе  $\varphi$ .

4. Справедлива ли схема замещения с одной эквивалентной индуктивностью при изменении частоты источника питания? Заданные по условию задачи параметры цепи  $R$ ,  $L$ ,  $C$  не зависят от частоты тока или напряжения, питающих цепь, т.е. они сохраняют свои значения при разных частотах. Иначе обстоит дело с эквивалентной индуктивностью  $L_3$ ,



рассмотренной в предыдущем вопросе. Эта индуктивность

$$L_3 = \frac{X}{\omega} = \frac{X_L - X_C}{\omega} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{\omega} = L - \frac{1}{\omega^2 C}$$

зависит от частоты  $\omega$ . Поэтому полученным выше значением  $L_3$  можно пользоваться только для заданной частоты напряжения источника питания.

5. Как измерить угол сдвига фаз? Для измерения угла сдвига по фазе  $\varphi$  применяется специальный прибор, называемый фазометром (рис. 9.17). По устройству фазометр аналогичен ваттметру и содержит две обмотки: токовую  $AK$  и напряжения  $BГ$ . Выводы обмоток на корпусе прибора обозначаются  $I$  и  $U$  (рис. 9.17).

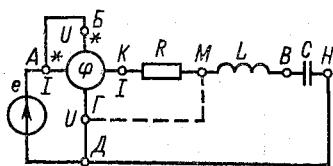


Рис. 9.17. Схема включения фазометра

$AD$  и фазометр показывает сдвиг по фазе между напряжением  $U$  и током  $I$ , равный в нашем случае  $37^\circ$ .

Сдвиг по фазе между напряжением и током часто рассчитывают по показаниям трех приборов: ваттметра, вольтметра и амперметра. Если в цепи рис. 9.17 заменить фазометр ваттметром, то ваттметр измерит активную мощность цепи

$$P = UI \cos \varphi.$$

Зная напряжение  $U$  и ток  $I$ , можно вычислить  $\cos \varphi$  и угол  $\varphi$ .

6. Что покажет фазометр (рис. 9.17), если проводник  $ГД$  заменить проводником  $ГМ$ ? Если вывод  $Г$  отсоединить от точки  $Д$  и присоединить к точке  $М$  (пунктир на рис. 9.17), то фазометр покажет нуль, так как напряжение на активном сопротивлении  $U_a$  и ток в цепи  $I$  совпадают по фазе.

## 9.6. ЦЕПЬ, СОДЕРЖАЩАЯ НЕСКОЛЬКО АКТИВНЫХ И РЕАКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

### Условие задачи

Цепь, показанная на рис. 9.18, содержит два конденсатора с емкостями  $C_1 = 1,6 \text{ мкФ} = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$  и  $C_2 = 0,4 \text{ мкФ} = 0,4 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$ , реостат с активным сопротивлени-

ем  $R_1=500$  Ом и две катушки индуктивности  $L_1=69$  мГн  $=0,069$  Гн и  $L_2=0,11$  Гн. Активное сопротивление первой катушки из-за малости принято равным нулю, а второй катушки  $R_2=100$  Ом. К выводам А и Ж подведено напряжение  $U=100$  В с частотой  $f=400$  Гц.

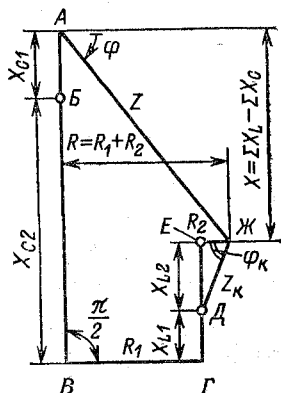
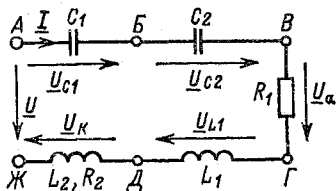


Рис. 9.18. Общий случай неразветвленной цепи переменного тока

Рис. 9.19. Многоугольник сопротивлений для цепи, показанной на рис. 9.18

Требуется определить ток в цепи, падения напряжения на участках, активные и реактивные мощности каждого элемента и составить баланс мощностей.

### Решение задачи

1. Определение сопротивлений цепи. В предыдущих задачах (§ 9.3—9.5) расчет цепи сводился к известным методам определения эквивалентных активных и реактивных сопротивлений. Очевидно, действуя таким образом, можно и рассматриваемую задачу свести к предыдущей, т. е. к цепи, содержащей одно активное, одно емкостное и одно индуктивное сопротивление.

Емкостные сопротивления конденсаторов

$$X_{C1} = \frac{1}{2\pi f C_1} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 400 \cdot 1,6 \cdot 10^{-6}} = 250 \text{ Ом};$$

$$X_{C2} = X_{C1} \frac{C_1}{C_2} = 250 \frac{1,6}{0,4} = 1000 \text{ Ом}.$$

Индуктивность сопротивления катушек

$$X_{L1} = 2\pi f L_1 = 2512 \cdot 0,069 = 175 \text{ Ом};$$

$$X_{L2} = X_{L1} \frac{L_2}{L_1} = 175 \frac{0,11}{0,069} = 275 \text{ Ом.}$$

Общее активное сопротивление

$$R = R_1 + R_2 = 500 + 100 = 600 \text{ Ом.}$$

Общее индуктивное сопротивление

$$X_L = X_{L1} + X_{L2} = 175 + 275 = 450 \text{ Ом.}$$

Общее емкостное сопротивление

$$X_C = X_{C1} + X_{C2} = 250 + 1000 = 1250 \text{ Ом.}$$

Реактивное сопротивление всей цепи

$$X = X_L - X_C = 450 - 1250 = -800 \text{ Ом.}$$

Полные сопротивления: второй катушки

$$Z_k = \sqrt{R_2^2 + X_{L2}^2} = \sqrt{100^2 + 275^2} = 292 \text{ Ом}$$

в всей цепи

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{600^2 + (-800)^2} = 1000 \text{ Ом.}$$

2. Построение многоугольника сопротивлений и т.д. Полученные данные позволяют построить диаграмму (многоугольник) сопротивлений (рис. 9.19).

Для этого в масштабе  $M_z = 28 \text{ Ом/мм}$  отложим из точки  $A$  вниз емкостные сопротивления  $X_{C1}$  и  $X_{C2}$  (отрезки  $AB$  и  $BB'$ ), затем под углом  $+\pi/2$  — сопротивление  $R_1$  (отрезок  $B'G$ ), а из точки  $G$  вверх откладываем  $X_{L1}$  и  $X_{L2}$  (отрезки  $GD$  и  $DE$ ) и, наконец,  $R_2$  (отрезок  $EЖ$ ). Замыкающая сторона  $AЖ$  представляет собой полное сопротивление цепи  $Z$ .

Стороны полученного многоугольника (рис. 9.19) располагаются друг за другом в той же последовательности, в какой расположены соответствующие сопротивления на схеме рис. 9.18.

В правильности построений можно убедиться, например, графическим определением по многоугольнику сопротивления  $Z = M_z \cdot AЖ = 28 \cdot 36 \approx 1000 \text{ Ом}$ ; этот же результат ранее был получен аналитически.

3. Вычисление тока и напряжений. Ток в цепи  $I = U/Z = 100/1000 = 0,1 \text{ А}$ .

Падения напряжения на элементах цепи рис. 9.18 составляют

$$U_{C1} = IX_{C1} = 0,1 \cdot 250 = 25 \text{ В;}$$

$$U_{C2} = IX_{C2} = 0,1 \cdot 1000 = 100 \text{ В};$$

$$U_a = IR_1 = 0,1 \cdot 500 = 50 \text{ В};$$

$$U_{L1} = IX_{L1} = 0,1 \cdot 175 = 17,5 \text{ В};$$

$$U_R = IZ_R = 0,1 \cdot 292 = 29,2 \text{ В}.$$

Векторную диаграмму напряжений можно получить, заменяя в многоугольнике на рис. 9.19 сопротивления соответствующими им напряжениями.

При этом масштаб напряжений

$$M_U = M_z I = 28 \cdot 0,1 = 2,8 \text{ В/мм}.$$

Из многоугольника (рис. 9.19) найдем, например, напряжение на выводах цепи:

$$U = M_U AЖ = 2,8 \cdot 36 = 100 \text{ В},$$

что совпадает с заданным значением.

4. Вычисление мощностей. У катушки с индуктивностью  $L_1$  и обоих конденсаторов активные сопротивления равны нулю, поэтому в этих элементах отсутствуют активные мощности. Остается вычислить их реактивные мощности, которые соответственно равны

$$Q_{L1} = IU_{L1} = 0,1 \cdot 17,5 = 1,75 \text{ вар};$$

$$Q_{C1} = IU_{C1} = 0,1 \cdot 25 = 2,5 \text{ вар};$$

$$Q_{C2} = IU_{C2} = 0,1 \cdot 100 = 10 \text{ вар}.$$

Сопротивление  $R_1$  имеет активную мощность

$$P_1 = IU_a = 0,1 \cdot 50 = 5,0 \text{ Вт},$$

а его реактивная мощность равна нулю.

Вторая катушка имеет активную и реактивную мощности

$$P_2 = I^2 R_2 = (0,1)^2 \cdot 100 = 1 \text{ Вт};$$

$$Q_{L1} = I^2 X_{L2} = (0,1)^2 \cdot 275 = 2,75 \text{ вар}.$$

Активная мощность цепи

$$P = P_1 + P_2 = 5,0 + 1,0 = 6 \text{ Вт},$$

или

$$P = UI \cos \varphi = UI \frac{R}{Z} = 100 \cdot 0,1 \frac{600}{1000} = 6 \text{ Вт}.$$

Итак, активная мощность цепи равна сумме активных мощностей всех ее участков.

Реактивная мощность цепи

$$Q = (Q_{L1} + Q_{L2}) - (Q_{C1} + Q_{C2}) = (1,75 + 2,75) - \\ - (2,5 + 10) = -8 \text{ вар,}$$

или

$$Q = UI \sin \varphi = UI \frac{X}{Z} = 100 \cdot 0,1 \frac{-800}{1000} = -8 \text{ вар.}$$

Реактивная мощность цепи равна разности реактивной мощности индуктивных участков и реактивной мощности емкостных участков.

В качестве диаграммы (многоугольника) мощностей может быть принят многоугольник (рис. 9.19), но в масштабе мощностей

$$M_S = M_z I^2 = 28(0,1)^2 = 0,28 \text{ В} \cdot \text{А/мм.}$$

Масштабы активной и реактивной мощностей численно будут такими же.

Из многоугольника на рис. 9.19 определим графически полную мощность цепи:

$$S = M_S AЖ = 0,28 \cdot 36 \approx 10 \text{ В} \cdot \text{А.}$$

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Можно ли определить эквивалентные величины  $R$ ,  $L$  и  $C$  непосредственно по данным задачи? Выше было вычислено общее активное сопротивление цепи  $R=600$  Ом.

Для последовательного соединения общая индуктивность  $L=L_1+L_2=0,069+0,11=0,179$  Гн, а общая емкость

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{0,4 \cdot 1,6}{0,4 + 1,6} = 0,32 \text{ мкФ.}$$

Полученные эквивалентные значения  $R$ ,  $L$  и  $C$  позволяют составить схему, аналогичную показанной на рис. 9.15, расчет которой был рассмотрен в предыдущей задаче.

2. Каким (индуктивным или емкостным) является общее реактивное сопротивление цепи? В рассматриваемой цепи  $X_L < X_C$ , и потому реактивное сопротивление цепи  $X=X_L-X_C=-800$  Ом емкостное и может быть обеспечено емкостью

$$C_a = \frac{1}{\omega |X|} = \frac{1}{2512 \cdot 800} = 0,47 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} = 0,47 \text{ мкФ.}$$

3. Какие элементы должна содержать эквивалентная схема рассматриваемой цепи? Учитывая, что полное активное сопротивление цепи  $R=600$  Ом и эквивалентная емкость  $C_3=0,47$  мкФ, можно составить для рассматриваемой цепи эквивалентную схему, соединив последовательно  $R$  и  $C_3$ .

### 9.7. РАСЧЕТ НЕРАЗВЕТВЛЕННОЙ ЦЕПИ ПО ПОКАЗАНИЯМ ПРИБОРОВ

#### Условие задачи

В цепи рис. 9.20, питаемой синусоидальным напряжением, амперметр  $A$  и вольтметры  $V_1—V_6$  соответственно показывают ток  $I=0,1$  А и напряжения  $U_1=20$  В;  $U_2=10$  В;  $U_3=10$  В;  $U_4=30$  В;  $U_5=U_6=10$  В.

Определить напряжение  $U$  на выводах цепи, ее активную мощность  $P$  и сдвиг фаз между напряжением цепи и ее током, т. е. величины, измеряемые (рис. 9.20) вольтмет-

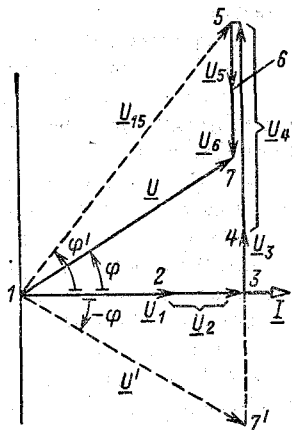
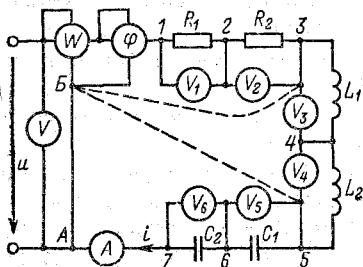


Рис. 9.20. Неразветвленная цепь с измерительными приборами

Рис. 9.21. Векторная диаграмма к цепи рис. 9.20

ром  $V$ , ваттметром  $W$  и фазометром  $\varphi$ . Кроме того, вычислить значения всех сопротивлений, индуктивностей, емкостей и эквивалентные параметры цепи ( $R_3$ ,  $L_3$ ,  $C_3$ ), если угловая частота напряжения питания  $\omega=10^3$  рад/с. Собственным потреблением энергии приборами пренебречь.

## Решение задачи

1. Анализ напряжений цепи по показаниям вольтметров. В большинстве случаев вольтметры измеряют действующие значения напряжений. Иногда используются приборы, показывающие амплитудные значения напряжений, о чем указывается (обозначается) на шкале вольтметра.

В нашем случае (по условию задачи) все вольтметры измеряют действующие значения, взаимосвязь которых хорошо иллюстрируется векторной диаграммой. С ее построения и начнем анализ напряжений.

Примем для тока  $\underline{I}$  (рис. 9.21) начальную фазу  $\psi_i = 0$  и соответственно направим его вектор  $\underline{I}$  по оси  $X$  (рис. 9.21). С этим током совпадают по фазе напряжения  $\underline{U}_1$  и  $\underline{U}_2$ , так как они действуют в цепи (рис. 9.20) на активных сопротивлениях  $R_1$  и  $R_2$ . Напряжения  $\underline{U}_3$ ,  $\underline{U}_4$  на векторной диаграмме (рис. 9.21) опережают по фазе ток на  $90^\circ$ , а напряжения  $\underline{U}_5$  и  $\underline{U}_6$  отстают на этот же угол от тока, так как первые действуют в рассматриваемой цепи на индуктивностях  $L_1$  и  $L_2$ , а вторые — на емкостях  $C_1$  и  $C_2$ .

Полученная векторная диаграмма показывает, что общее напряжение цепи  $\underline{U}$  определяется как геометрическая сумма напряжений (показаний вольтметров) участков цепи. На это положение следует обратить внимание, так как учащиеся часто допускают ошибку, принимая общее напряжение  $\underline{U}$  как арифметическую сумму показаний вольтметров.

*Таким образом, анализ напряжений цепи по показаниям вольтметров удобно выполнять на основе векторной диаграммы.*

2. Определение напряжения на выводах цепи. На векторной диаграмме (рис. 9.21) выделим треугольник напряжений  $1371$ , у которого гипотенуза изображает искомое напряжение  $\underline{U}$ . Чтобы его вычислить, вначале найдем модули векторов  $1-3$ ,  $3-5$ ,  $5-7$ , выражающие напряжения на участках цепи с аналогично обозначенными точками. Сравнивая схему (рис. 9.20) и векторную диаграмму (рис. 9.21), получим: общее напряжение на двух сопротивлениях ( $R_1$  и  $R_2$ ), или на участке цепи  $1-3$ ,

$$U_R = U_{1-3} = U_1 + U_2 = 20 + 10 = 30 \text{ В.}$$

Аналогично для участков с двумя индуктивностями ( $L_1$ ,

$L_2$ ) и емкостями ( $C_1, C_2$ ) напряжения

$$U_L = U_{3-5} = U_3 + U_4 = 10 + 30 = 40 \text{ В};$$

$$U_C = U_{5-7} = U_5 + U_6 = 10 + 10 = 20 \text{ В}.$$

Теперь вернемся к векторной диаграмме (рис. 9.21), где в треугольнике 1371 известны катеты  $U_{1-3} = U_R$  и  $U_{3-7} = U_L - U_C$ , а гипотенуза определяет искомое напряжение

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{30^2 + (40 - 20)^2} = 36 \text{ В}.$$

3. Определение сдвига фаз и активной мощности. Фазометр  $\varphi$ , использование которого рассмотрено в § 9.5 (см. доп. вопрос 5), включен в цепи (рис. 9.20) таким образом, что измеряет сдвиг фаз между напряжением на выводах  $U$  и током цепи  $I$ . Этот сдвиг фаз  $\varphi$  показан на векторной диаграмме (рис. 9.21), где из уже рассмотренного треугольника напряжений 1371 имеем

$$\varphi = \arctg(U_L - U_C) / U_R = \arctg(40 - 20) / 30 = 33^\circ 40'.$$

Ваттметр измеряет активную мощность  $P = UI \cos \varphi$ . Для ее вычисления вновь воспользуемся треугольником 1371 (рис. 9.21), в котором  $U \cos \varphi = U_{1,3} = U_R$ . Следовательно,  $P = U_R I = 30 \cdot 0,1 = 3 \text{ Вт}$ .

4. Вычисление параметров цепи. По всем участкам цепи проходит один и тот же ток  $I = 0,1 \text{ А}$ . Четыре участка имеют одинаковые напряжения:  $U_2 = U_3 = U_5 = U_6 = 10 \text{ В}$ .

Следовательно, сопротивления этих участков также одинаковы:

$$R_2 = X_{L1} = X_{C1} = X_{C2} = U_2 / I = 10 / 0,1 = 100 \text{ Ом},$$

а сопротивления  $R_1 = 200 \text{ Ом}$  и  $X_{L2} = 300 \text{ Ом}$ , так как напряжения на этих сопротивлениях  $U_1$  и  $U_4$  соответственно в 2 и 3 раза больше  $U_2$ . По известным сопротивлениям индуктивностей  $X_L = \omega L$  и емкостей  $X_C = 1 / \omega C$  определяем значения индуктивностей и емкостей:

$$L_1 = X_{L1} / \omega = 100 / 1000 = 0,1 \text{ Гн};$$

$$L_2 = X_{L2} / \omega = 300 / 1000 = 0,3 \text{ Гн};$$

$$C_1 = C_2 = 1 / X_C \omega = 1 / 100 \cdot 10^3 = 10 \text{ мкФ}.$$

Воспользуемся полученными значениями сопротивлений цепи для проверки найденных значений общего напряжения  $U$ , сдвига фаз  $\varphi$  и активной мощности  $P$ . Применяя из-



вестные формулы, имеем

$$U = IZ = I \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_{L1} + X_{L2} - X_{C1} - X_{C2})^2} = \\ = 0,1 \sqrt{300^2 + (400 - 200)^2} = 36 \text{ В};$$

$$P = RI^2 = (R_1 + R_2) I^2 = 300 \cdot 0,1^2 = 3 \text{ Вт};$$

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R} = \arctg \frac{X_{L1} + X_{L2} - X_{C1} - X_{C2}}{R_1 + R_2} = \\ = \arctg \frac{200}{300} = 33^\circ 40'.$$

Результаты совпали.

5. Вычисление эквивалентных параметров цепи. Их можно найти двумя способами: по свойствам последовательного соединения:

$$R_0 = R_1 + R_2 = 200 + 100 = 300 \text{ Ом};$$

$$L_0 = L_1 + L_2 = 0,1 + 0,3 = 0,4 \text{ Гн};$$

$$C_0 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_1}{2} = \frac{C_2}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ мкФ};$$

используя векторную диаграмму (рис. 9.21):

$$R_0 = U_{1-3}/I = U_R/I = 30/0,1 = 300 \text{ Ом};$$

$$X_{L_0} = U_{3-5}/I = 40/0,1 = 400 \text{ Ом или}$$

$$L_0 = X_{L_0}/\omega = 400/10^3 = 0,4 \text{ Гн};$$

$$X_{C_0} = U_{5-7}/I = 20/0,1 = 200 \text{ Ом}$$

или

$$C_0 = 1/\omega X_{C_0} = 1/(10^3 \cdot 200) = 5 \text{ мкФ}.$$

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Как выполнить анализ напряжений с вольтметрами, измеряющими амплитудные значения? Векторная диаграмма (рис. 9.21), построенная для действующих значений напряжений, может быть использована и для амплитудных значений, если масштаб всех векторов изменить в  $\sqrt{2}$  раз. Фазовые сдвиги между векторами сохранятся. Следовательно, замена вольтметров не повлияет на метод расчета общего напряжения цепи.

2. Что покажет вольтметр, присоединенный к точкам 3—7 цепи (рис. 9.20)? Как показывает векторная диаграмма (рис. 9.21), напряжения на участках

3—5 и 5—7 действуют в противофазе (встречно), что является известным свойством индуктивного  $\underline{U}_L$  и емкостного  $\underline{U}_C$  напряжений. Оба напряжения  $\underline{U}_{3-5} = \underline{U}_L$  и  $\underline{U}_{5-7} = \underline{U}_C$  определены при решении задачи. Поэтому общее напряжение для индуктивного и емкостного участков цепи  $\underline{U}_{3-7} = \underline{U}_L - \underline{U}_C = 40 - 20 = 20$  В, что и покажет вольтметр, присоединенный к точкам 3—7.

3. Что покажет вольтметр, присоединенный к точкам 1—5 цепи (рис. 9.20)? Между указанными точками действуют напряжения:  $U_R$  — на активных сопротивлениях  $R_1$ ,  $R_2$  и  $U_L$  — на индуктивностях  $L_1$  и  $L_2$ . Оба эти напряжения представлены на векторной диаграмме (рис. 9.21) векторами 1—3 и 3—5 соответственно. Их геометрическая (векторная) сумма изображается вектором  $\underline{U}_{1-5}$  (на рис. 9.21 показан пунктиром), значение которого

$$U_{1-5} = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \text{ В.}$$

Это значение покажет вольтметр, присоединенный к точкам 1—5 цепи.

4. Какими будут показания ваттметра и фазометра, если провод  $BA$  (рис. 9.20) отсоединить от точки  $A$  и последовательно присоединять к точкам 3 и 5 цепи (показано пунктиром на рис. 9.20)? Прежде всего заметим, что при указанных переключениях изменяются только напряжения на приборах, а их ток (общий ток цепи) остается прежним. Затем следует учесть, что активная мощность развивается только в активных сопротивлениях. Поэтому в обоих положениях (3 и 5) показания ваттметра останутся прежними:  $P = 3$  Вт (в индуктивностях активная мощность равна нулю).

Фазометр (с проводом  $BA$  в точке 3) покажет нуль (напряжение на активных сопротивлениях  $R_1$  и  $R_2$  совпадает по фазе с током), а с проводом  $BA$  в точке 5 он измерит сдвиг по фазе напряжения  $\underline{U}_{1-5}$  относительно тока  $\underline{I}$  (угол  $\varphi'$  на рис. 9.21).

5. Можно ли определить параметры цепи (рис. 9.20), если показания амперметра заменить показаниями ваттметра или фазометра? По известным активной мощности  $P = U_R I = (U_1 + U_2) I$  и напряжениям  $U_1$  и  $U_2$  (показания вольтметров по-прежнему заданы) определяем ток  $I$ , а при известном токе цепи и напряжениях всех участков при реше-

нии задачи были найдены все ее параметры. Следовательно, для однозначного определения цепи достаточно знать ее активную мощность и все напряжения.

Перейдем к другому прибору — фазометру и выясним возможность использования его показаний (вместо ваттметра или амперметра). В задаче было показано, что сдвиг фаз

$$\varphi = \arctg (U_L - U_C) / U_R,$$

т. е. он определяется показаниями вольтметров и новых данных не дает. Как известно, по значениям напряжений нельзя определить параметры цепи.

6. Как составить уравнение по второму закону Кирхгофа, используя показания вольтметров? Его следует записать в векторной форме:

$$\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 + \underline{U}_4 + \underline{U}_5 + \underline{U}_6 = \underline{U}.$$

Подчеркнем, что это справедливо только для синусоидального тока.

7. При каких показаниях вольтметров окажется угол сдвига фаз  $\varphi < 0$ ? Если принять для напряжений на индуктивностях  $U_L$  и емкостях  $U_C$  условие  $U_C > U_L$ , то сдвиг фаз  $\varphi = \arctg (U_L - U_C) / U_R < 0$ . При этом общее напряжение цепи  $\underline{U}'$  определится из треугольника 137' (рис. 9.21), аналогичного треугольнику 137, использованному при решении задачи.

## 9.8. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

166. Записать (в общем виде) мгновенные значения двух токов  $i_1$  и  $i_2$ , если изображающие их векторы располагаются на диаграмме соответственно в положительном направлении оси  $y$  и отрицательном направлении оси  $x$ .

167. Два генератора переменного тока ( $f = 50$  Гц) с одинаковыми номинальными значениями напряжений  $U_1 = U_2 = 220$  В, смещенными по фазе относительно друг друга на  $90^\circ$ , соединены последовательно. Составить выражение мгновенного значения напряжения на выводах двух генераторов, приняв равной нулю начальную фазу напряжения одного из них. Рассмотреть различные случаи.

168. Заданы мгновенные значения трех токов:  $i_1 = 12 \sin(\omega t - 60^\circ)$  А;  $i_2 = 8 \sin(\omega t - 150^\circ)$  А;  $i_3 = 10 \cos(\omega t + 30^\circ)$  А. Построить векторную диаграмму токов, а для токов  $i_2$  и  $i_3$  — также графики мгновенных значений (волновую диаграмму).

169. В условиях предыдущей задачи вычислить максимальное значение тока  $i = i_1 + i_2 + i_3$  и записать его мгновенное значение.

170. По векторной диаграмме (рис. 9.22) записать мгновенные значения напряжений  $u_1, u_2, u_3$ , если действующие значения равны:  $U_1 = 110$  В,  $U_2 = 125$  В и  $U_3 = 150$  В.

171. В условиях предыдущей задачи  $u_1, u_2, u_3$  — напряжения на трех последовательно соединенных участках цепи. Вычислить графически общее напряжение цепи и записать его мгновенное значение.

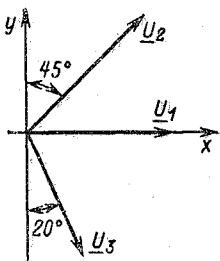


Рис. 9.22. К задаче 170

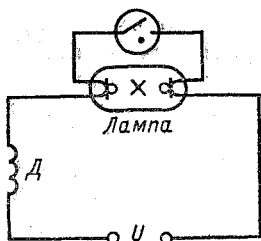


Рис. 9.23. К задаче 179

172. Векторную диаграмму рис. 9.22 сместили на угол  $90^\circ$  в сторону отставания (по направлению движения часовой стрелки). Записать мгновенные значения напряжений и построить новую векторную диаграмму, если  $U_1 = 70$  В,  $U_2 = 100$  В,  $U_3 = 50$  В.

173. Синусоидальные величины сдвинуты по фазе на угол  $\pi$ . Какой промежуток времени отделяет их ближайшие положительные максимальные значения, если частота равна 400 Гц?

174. Почему двигатель электропроигрывателя часто выполняют в виде диска с большим числом выступов (условных полюсов)? Сколько должно быть таких выступов, чтобы двигатель, питаемый от сети переменного тока ( $f = 50$  Гц), вращался с частотой 78 об/мин?

175. Катушка с индуктивностью  $L_R = 1,6$  Гн и активным сопротивлением  $R_R = 400$  Ом питается от источника переменного тока напряжением  $U = 280$  В и частотой  $f = 40$  Гц. Определить ток в цепи, коэффициент мощности, активную, реактивную и полную мощности; построить векторную диаграмму, треугольник сопротивлений и треугольник мощностей.

176. В неразветвленной цепи, содержащей активное сопротивление  $R$  и индуктивное  $X_L$ , мгновенное значение напряжения на первом из них  $u_R = 80 \sin(\omega t - 120^\circ)$  В. Найти мгновенное значение напряжения  $u_L$  и построить векторную диаграмму всех напряжений, включая напряжение на выводах цепи, если  $X_L = 1,5R$ .

177. Мгновенные значения напряжения на выводах цепи и ток в це-

пи известны:  $u=220\sqrt{2}\sin\omega t$  В;  $i=22\sqrt{2}\sin(\omega t-30^\circ)$  А. Определить аналитически и графически активную мощность  $P$ .

178. Для определения активного сопротивления  $R_k$  и индуктивности  $L_k$  катушки ее подключили к сети переменного тока напряжением  $U=220$  В и измерили ток в катушке  $I=3,67$  А и мощность  $P=485$  Вт. Вычислить  $R_k$  и  $L_k$ , если  $f=50$  Гц.

179. Люминесцентная лампа мощностью  $P_{л}=40$  Вт включается в сеть переменного тока ( $U=220$  В,  $f=50$  Гц) через пусковой дроссель  $D$  (рис. 9.23). В рабочем режиме по цепи проходит ток  $I=0,4$  А, коэффициент мощности всей цепи равен 0,6. Вычислить напряжения на лампе и дросселе, активное и индуктивное сопротивления дросселя, а также коэффициент мощности.

180. В цепь обмотки неподвижного асинхронного двигателя включен последовательно реактор (катушка индуктивности) для ограничения пускового тока в начальный момент времени до 670 А. Обмотка двигателя имеет активное сопротивление  $R_{вт}=0,045$  Ом и индуктивное сопротивление  $X_{вт}=0,15$  Ом. Общее напряжение на обмотке и реакторе  $U=220$  В. Вычислить сопротивление реактора, если его активным сопротивлением можно пренебречь.

181. К выводам цепи из последовательно включенных резистора  $R=800$  Ом и конденсатора  $C=0,4$  мкФ подведено синусоидальное напряжение  $U=120$  В с частотой  $f=400$  Гц. Определить ток в цепи,  $\cos\varphi$ , напряжения на активном сопротивлении и емкости, построить векторную диаграмму и треугольник сопротивлений.

182. Для цепи из предыдущей задачи определить активную, реактивную и полную мощности.

183. В цепи с последовательно включенными резистором  $R$  и конденсатором  $C$  напряжение на емкости  $u_c=100\cos(\omega t-90^\circ)$  В. Построить векторную диаграмму напряжений на емкости  $U_C$ , активном сопротивлении  $U_R$  и выводах цепи  $U$ , если  $X_C=R$ . Записать мгновенное значение напряжения  $u$  на выводах цепи.

184. Для передачи напряжения от одной лампы усилителя к другой (например, в радиоприемниках) применяется электрическая цепь (рис. 9.24), называемая «межкаскадной связью». Определить потерю и падение напряжения для крайних значений полосы усиливаемых частот (100 и 5000 Гц) на участке между анодом первой и сеткой второй ламп (соответственно  $U_{вх}$  и  $U_{вых}$ ), если  $C=0,01$  мкФ,  $R_C=318$  кОм,  $U_{вх}=80$  В.

185. В условиях предыдущей задачи при помощи векторной диаграммы объяснить значительную разницу между падением и потерей напряжения.

186. Для изменения тембра звука в радиоприемниках и электропроигрывателях предусматривается регулировка (коррекция) тона по высокой частоте, осуществляемая часто по схеме рис. 9.25, где изменяется

положение ползуна реостата  $R$ . Для рассматриваемой цепи:  
 а) ответить, как изменится (возрастет или уменьшится) напряжение  $U_2$  при увеличении частоты  $f$  синусоидального напряжения  $U_1$  (амплитуда напряжения  $U_1$  постоянна). Почему рассматриваемую схему называют коррекцией тона на высокой частоте?

б) объяснить назначение переменного сопротивления  $R$ ;

в) построить в общем виде графики зависимости  $U_2/U_1$  от частоты для значений  $R = \infty$ ,  $R = R'$  и  $R = R''$ , где  $R'' < R'$ .

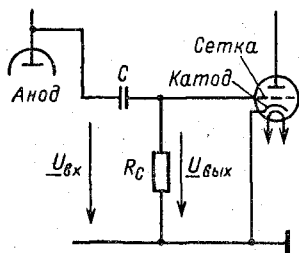


Рис. 9.24. К задаче 184

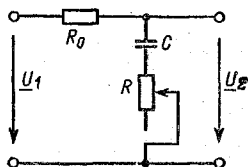


Рис. 9.25. К задаче 186

187. Для контроля исправности сети ( $U=380$  В,  $f=50$  Гц) к ней присоединили через конденсатор  $C$  осветительную лампу, рассчитанную на напряжение 220 В и мощность 150 Вт. При каких значениях емкости и напряжения на конденсаторе обеспечивается номинальный режим горения лампы? Каким активным сопротивлением можно заменить емкость, сохранив прежний режим для лампы?

188. Для уменьшения напряжения на осветительной лампе применяются две схемы; в одной последовательно с лампой включено активное сопротивление, а в другой также включена емкость. В каждой из схем лампы горят одинаково. Оценить обе схемы по влиянию на яркость лампы: а) изменения добавочного сопротивления ( $R$  или  $X_C$ ); б) изменения напряжения электросети.

189. Будет ли гореть лампа, присоединенная через конденсатор к сети постоянного тока?

190. Асинхронный двигатель присоединен к сети переменного тока ( $U=110$  В,  $f=50$  Гц) через последовательно включенный конденсатор  $C=6,5$  мкФ. Ток в цепи двигателя и конденсатора  $I=0,6$  А, коэффициент мощности всей цепи 0,85. Определить эквивалентные параметры двигателя.

191. Два последовательно соединенных генератора с напряжениями  $u_1=220 \sin(\omega t+30^\circ)$  В и  $u_2=220 \sin(\omega t+120^\circ)$  В питают неразветвленную цепь с активным сопротивлением  $R=220$  Ом, индуктивным  $X_L=440$  Ом и емкостным  $X_C=660$  Ом. Определить ток и максимальные значения напряжения на выводах цепи и на отдельных участках. Построить векторную диаграмму.

192. Как изменятся (увеличатся или уменьшатся) показания приборов в схеме (рис. 9.26) при:

- коротком замыкании сопротивления  $R$ ;
- пробое (замыкании) пластин конденсатора  $C_2$ .

Потреблением мощности измерительными приборами пренебречь.

193. Источник ( $U=110$  В,  $f=50$  Гц) питает цепь из последовательно включенных сопротивления  $R=10$  Ом, емкости  $C=150$  мкФ и индуктивности  $L=50$  мГн. Определить ток в цепи, напряжения на элементах, а также активную, реактивную и полную мощности. Построить вектор-

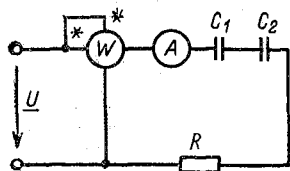


Рис. 9.26. К задаче 192

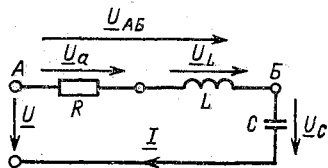


Рис. 9.27. К задаче 194

ную и топографическую диаграммы, а также треугольники сопротивлений и мощностей.

194. В цепи рис. 9.27 ток  $I=200$  А, коэффициент мощности равен 0,85. Определить напряжения  $U$ ,  $U_a$ ,  $U_C$ ,  $U_L$ , если  $R=0,255$  Ом,  $X_C=10$  Ом.

195. В цепи, показанной на рис. 9.27, напряжение  $U_{AB}=80$  В, его начальная фаза  $\psi_{AB}=30^\circ$ . Найти мгновенные значения и построить графики для напряжений  $u_A$ ,  $u_L$  и  $u_C$ , а также вычислить их действующие значения, если  $U_C=40$  В и начальная фаза тока равна нулю.

196. В цепи рис. 9.27  $U=50$  В,  $U_L=40$  В,  $U_A=40$  В,  $R=80$  Ом,  $f=200$  Гц. Определить индуктивность и два значения емкости, обеспечивающие заданный режим цепи.

197. Активная мощность цепи рис. 9.27  $P=120$  Вт, а ее  $\cos \varphi=0,7$ , реактивная мощность емкости  $Q_C=200$  вар. Вычислить сопротивление  $R$  и индуктивность  $L$ , если напряжение на выводах  $U=220$  В, а частота  $f=50$  Гц.

198. Источник с напряжением  $U=180$  В и частотой  $f=500$  Гц питает цепь рис. 9.27, для которой полная мощность  $S$  в 2 раза больше реактивной мощности  $Q$ . Определить активное сопротивление, индуктивность и емкость, если ток в цепи  $I=50$  мА, а напряжение на емкости 120 В.

199. В цепи рис. 9.27 напряжение на выводах, ток и активная мощность соответственно равны 120 В; 2,4 А; 200 Вт. Индуктивное сопротивление  $X_L$  в 2 раза больше емкостного  $X_C$ . Вычислить активное сопротивление, индуктивность и емкость цепи при частоте 50 Гц.

200. Цепь из последовательно включенных двух катушек индуктивности ( $L=80$  мГн;  $R_1=200$  Ом;  $L_2=20$  мГн;  $R_2=10$  Ом), двух конденсаторов ( $C_1=0,4$  мкФ;  $C_2=1,2$  мкФ) и резистора ( $R=70$  Ом) питается от источника переменного тока с напряжением  $U=115$  В и частотой  $f=400$  Гц. Определить ток в цепи, напряжения на катушках и конденсаторах, активную, реактивную и полную мощности цепи. Составить баланс активных и реактивных мощностей. Построить векторную диаграмму.

201. В условиях предыдущей задачи составить схему с эквивалентными параметрами и построить для нее векторную диаграмму и многоугольник сопротивлений.

202. В условиях задачи 200 определить напряжение на участке из двух катушек и конденсатора  $C_1$ , расположив их в цепи рядом; вычислить для этого участка активную, реактивную и полную мощности.

203. Две одинаковые катушки и конденсатор емкостью  $C=100$  мкФ присоединены последовательно к источнику с напряжением  $U$  и частотой 50 Гц. Общая мощность цепи  $P=200$  Вт, ток  $I=4$  А, фазовый сдвиг тока относительно напряжения на выводах составляет  $60^\circ$ . Определить сопротивление  $R_k$ , индуктивность катушки  $L$  и напряжение  $U$ .

204. В цепи из последовательно включенных двух катушек и конденсатора напряжения на катушках  $U_1=U_2=100$  В, а на конденсаторе  $U_3=173$  В. Сдвиг по фазе между напряжениями  $U_1$  и  $U_3$  составляет  $160^\circ$ . Определить полное сопротивление цепи и напряжение на ее выводах, если  $C=2$  мкФ и  $f=50$  Гц.

205. В электронике применяется схема (рис. 9.28), обеспечивающая изменение угла сдвига фазы  $\psi_{1,2}$  между напряжениями  $U_1$  и  $U_2$ , изме-

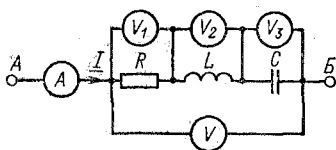
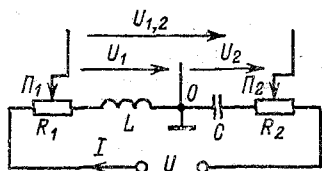


Рис. 9.28. К задаче 205

Рис. 9.29. К задаче 206

ренными относительно общей точки нулевого потенциала  $O$ . В задаче требуется: а) показать при помощи векторной диаграммы изменение угла при перемещении ползунков реостатов  $P_1$  и  $P_2$ ; б) записать условие, обеспечивающее совпадение по фазе напряжения  $U_{1,2}$  и тока  $I$  (при любых положениях ползунков реостатов), и показать этот режим на векторной диаграмме; в) выяснить, почему рассматриваемую схему не применяют при малых углах  $\psi_{1,2}$  (до  $10^\circ$ ).

206. В цепи рис. 9.29 амперметр  $A$  и вольтметры  $V_1-V_3$  показыва-



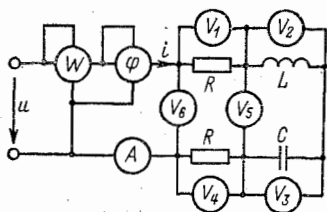


Рис. 9.30. К задаче 208

ют:  $I=0,1$  А;  $U_1=30$  В;  $U_2=120$  В;  $U_3=80$  В. Определить показания вольтметра  $V$  и параметры цепи.

207. В цепи рис. 9.29 известны показания вольтметров:  $V—0,5$  В;  $V_2—0,6$  В;  $V_1—0,4$  В. Определить показания вольтметра  $V_3$ .

208. Вольтметрами  $V_1—V_4$  и амперметром  $A$  в цепи рис. 9.30 измерили напряжения и ток  $U_1=60$  В;  $U_2=60$  В;  $U_3=220$  В;  $U_4=60$  В;  $I=0,2$  А.

Определить показания вольтметров  $V_5$  и  $V_6$ , ваттметра и фазометра, а также параметры цепи, если угловая частота тока  $\omega=100$  рад/с.

### 9.9. ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ. 9

166.  $i=I_{1m}\sin(\omega t+90^\circ)$ ;  $i_2=I_{2m}\sin(\omega t\pm 180^\circ)$ .

167.  $440\sin(314t+45^\circ)$  В.

168. См. рис. 9.31.

169.  $8,25\sin(\omega t-136^\circ)$  А.

170.  $110\sqrt{2}\sin\omega t$  В;  $125\sqrt{2}\sin(\omega t+45^\circ)$  В;  $150\sqrt{2}\sin(\omega t-70^\circ)$  В.

171.  $357\sin(\omega t-14^\circ)$  В.

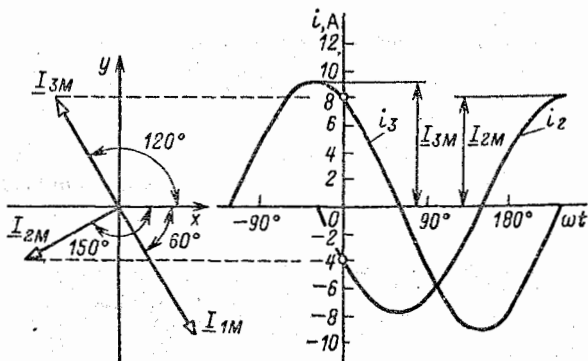


Рис. 9.31. Ответ к задаче 168

172.  $99\sin(\omega t-90^\circ)$  В;  $141\sin(\omega t-45^\circ)$  В;  $70,5\sin(\omega t-160^\circ)$  В.

173. 1,25 мс.

174. 77.

175. 0,5 А; 0,707; 99 Вт, 99 вар; 140 В·А.

176.  $120\sin(\omega t-30^\circ)$  В.

177. 420 Вт.  
 178. 36 Ом; 0,153 Гн.  
 179. 97,8 В; 179 В; 83,4 Ом; 430 Ом; 0,19.  
 180. 0,175 Ом.  
 181. 94 мА; 0,6; 75,2 В; 93,4 В.  
 182. 6,8 Вт; -9,05 вар; 11,3 В·А.  
 183.  $141\sin(\omega t + 45^\circ)$  В.  
 184. При  $f=100$  Гц; 8,4 В; 35,8 В; при  $f=5000$  Гц; падение напряжения 0,8 В; потерей напряжения можно пренебречь.  
 185. См. рис. 9.32.

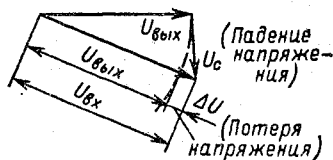


Рис. 9.32. Ответ к задаче 185

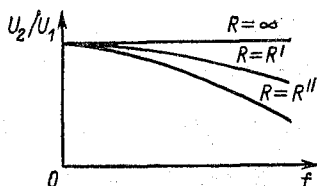


Рис. 9.33. Ответ к задаче 186

186. а) Уменьшится; б) изменяет степень ослабления напряжения высоких частот; в) см. рис. 9.33.

187. 7 мкФ; 310 В; 235 Ом.

188. а) Лучше (меньше влияния) в схеме с емкостью; б) схемы равноценны.

189. Нет.

190. 156 Ом; 1,87 Гн.

191. 0,7 А; 310 В; 220 В; 440 В; 660 В.

192. а) Ваттметра — уменьшится до нуля; амперметра — увеличится; б) показания обоих приборов увеличатся.

193. 9,65 А; 96,5 В; 151,5 В; 205 В; 931 Вт; 516 вар; 1060 В·А.

194. 60 В; 51 В; 2000 В; 2032 В.

195.  $97,5 \sin \omega t$  В;  $56,5 \sin(\omega t + 90^\circ)$  В; 69 В; 40 В.

196. 0,064 Гн; 5,7 мкФ или 40 мкФ.

197. 197,5 Ом; 0,42 Гн или 1,67 Гн.

198. 1730 Ом; 0,445 Гн или 1,08 Гн; 0,132 мкФ.

199. 35 Ом; 0,226 Гн; 89,6 мкФ.

200. 0,1 А; 28,5 В; 5,1 В; 100 В; 33 В; 2,8 Вт; -10,78 вар; 11,2 В·А;

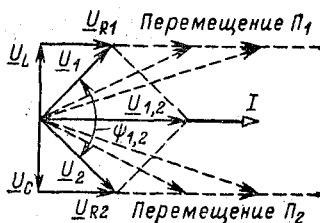


Рис. 9.34. Ответ к задаче 205

$$P_{R1} + P_{R2} + P_R = 2 + 0,1 + 0,7 = 2,8 \text{ Вт} = P; (Q_{L1} + Q_{L2}) - (Q_{C1} + Q_{C2}) = (2,0 + 0,50) - (9,96 + 3,32) = -10,78 \text{ вар} = Q.$$

201. Активное сопротивление 280 Ом, емкость 0,36 мкФ.

202. 77 В; 2,1 Вт; 7,4 вар; 7,7 В·А.

203. 6,25 Ом; 85 или 16 мГн; 100 В.

204. 1,34 кОм; 1,46 В.

205. а) См. рис. 9.34; б)  $X_L = X_C$ ; в) большие изменения  $R_1$  и  $R_2$  мало влияют на угол  $\psi_{1,2}$ .

206. 50 В; 30 Ом; 1,2 Гн; 1,25 мкФ.

207. 0,3 В.

208. 160 В; 200 В; 24 Вт;  $-69^\circ$ ; 300 Ом; 3 Гн; 9,09 мкФ.

## Глава десятая

### РАЗВЕТВЛЕННАЯ ЦЕПЬ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

#### 10.1. ПРИМЕНЕНИЕ ВЕКТОРНОЙ ДИАГРАММЫ ДЛЯ РАСЧЕТА РАЗВЕТВЛЕННОЙ ЦЕПИ

##### Условие задачи

Разветвленная цепь (рис. 10.1) состоит из параллельных ветвей (ветвь с током  $I_3$ , показанная на рисунке пунктиром, не учитывается) с параметрами  $R_1 = 80$  Ом,  $R_2 =$

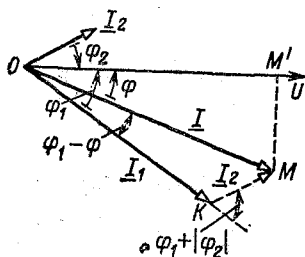
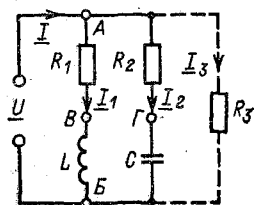


Рис. 10.1. Параллельное соединение нескольких ветвей, содержащих участки с активными и реактивными сопротивлениями

Рис. 10.2. Векторная диаграмма для цепи из двух параллельных ветвей по рис. 10.1

$= 260$  Ом,  $L = 0,19$  Гн и  $C = 21,2$  мкФ  $= 21,2 \cdot 10^{-6}$  Ф. Цепь питается от генератора синусоидального напряжения  $U = 120$  В частотой  $f = 50$  Гц.

Определить токи ветвей  $I_1$  и  $I_2$ , ток  $I$ , а также активную и реактивную мощности цепи.

### Решение задачи

1. Особенности задачи. Прежде всего выясним, значения каких величин этой задачи могут быть вычислены уже известными методами. Очевидно, что каждая из параллельных ветвей  $АВВ$  и  $АГВ$  (рис. 10.1) представляет собой неразветвленную цепь с заданным напряжением на ее выводах (точки  $A$  и  $B$ ). Поэтому

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{U}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2}};$$

$$I_2 = \frac{U}{Z_2} = \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + (1/\omega C)^2}}.$$

Иное положение с общим током  $I$ . Для его вычисления требуются новые методы. Поскольку общий ток  $I$  равен геометрической сумме токов ветвей  $I_1$  и  $I_2$ , возможен геометрический путь решения, основанный на применении векторной диаграммы. Существует и алгебраический путь решения (см. следующую задачу).

2. Векторная диаграмма. Для неразветвленных цепей, как было показано, удобно начинать построение векторной диаграммы с вектора тока, общего для всех участков цепи. Для цепи рис. 10.1 также желательно найти некоторую общую величину. Ею, очевидно, является напряжение на выводах цепи, с которого и начнем построение диаграммы, отложив вектор  $\underline{U}$ , скажем, по оси  $x$  (рис. 10.2).

В ветви с активно-индуктивным сопротивлением ток  $I_1$  отстает по фазе на угол  $\varphi_1$  от напряжения  $U$ , а в ветви с активно-емкостным сопротивлением ток  $I_2$  опережает по фазе напряжение  $U$  на угол  $\varphi_2$ . Общий ток  $\underline{I}$  (рис. 10.2) построен как геометрическая сумма токов  $\underline{I}_1$  и  $\underline{I}_2$ .

3. Вычисление токов. О токах ветвей уже говорилось выше. В нашем случае

$$I_1 = \frac{U}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2}} = \frac{120}{\sqrt{80^2 + (314 \cdot 0,19)^2}} = 1,2 \text{ A};$$

$$I_2 = \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{120}{\sqrt{260^2 + \left(\frac{1}{314 \cdot 21,2 \cdot 10^{-6}}\right)^2}} = 0,4 \text{ A}.$$

Эти токи смещены по фазе относительно напряжения на углы (без учета знака):

$$\varphi_1 = \arccos(R_1/Z_1) = \arccos(80/100) = 37^\circ;$$

$$|\varphi_2| = \arccos(R_2/Z_2) = \arccos(260/300) = 30^\circ.$$

Общий ток  $I$  и его сдвиг по фазе  $\varphi$  находим из треугольника токов  $ОКМ$  (рис. 10.2) по теореме косинусов:

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 - 2I_1 I_2 \cos \angle ОКМ},$$

но

$$\angle ОКМ = 180^\circ - (\varphi_1 + |\varphi_2|),$$

а

$$\cos(180 - \varphi_1 + |\varphi_2|) = -\cos(\varphi_1 + |\varphi_2|),$$

поэтому

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2I_1 I_2 \cos(\varphi_1 + |\varphi_2|)} = \\ &= \sqrt{1,2^2 + 0,4^2 + 2 \cdot 1,2 \cdot 0,4 \cdot 0,39} = 1,4 \text{ А.} \end{aligned}$$

По теореме синусов для треугольника  $ОКМ$

$$\frac{I}{\sin(\varphi_1 + |\varphi_2|)} = \frac{I_2}{\sin(\varphi_1 - \varphi)},$$

откуда

$$\sin(\varphi_1 - \varphi) = \frac{I_2}{I} \sin 67^\circ = \frac{0,4}{1,4} \cdot 0,92 = 0,264,$$

или

$$\varphi = \varphi_1 - 15^\circ 20' = 21^\circ 40'.$$

Полученные значения  $I$  и  $\varphi$  можно определить также графически. Учитывая, что диаграмма рис. 10.2 построена в масштабе  $M_I = 0,38$  А/см, имеем: ток  $I = OM \cdot M_I = 3,68 \cdot 0,38 = 1,4$  А, а

$$\varphi = \arctg(MM'/M'O) = \arctg(13/34) \approx 22^\circ.$$

4. Вычисление мощностей. Активная мощность всей цепи

$$P = UI \cos \varphi = 120 \cdot 1,4 \cos 22^\circ = 157 \text{ Вт}$$

слагается из мощностей ветвей:

$$P_1 = I_1^2 R_1 = (1,2)^2 \cdot 80 = 115 \text{ Вт};$$

$$P_2 = I_2^2 R_2 = (0,4)^2 \cdot 260 = 42 \text{ Вт}$$

(действительно,  $P_1 + P_2 = 115 + 42 = 157 \text{ Вт} = P$ ).

Реактивная мощность всей цепи

$$Q = UI \sin \varphi = 120 \cdot 1,4 \sin 22^\circ = 62 \text{ вар}$$

равна алгебраической сумме реактивных мощностей ветвей:

$$Q_1 = UI_1 \sin \varphi_1 = 120 \cdot 1,2 \cdot 0,6 = 86 \text{ вар};$$

$$Q_2 = UI_2 \sin \varphi_2 = 120 \cdot 0,4(-0,5) = -24 \text{ вар},$$

где учтено, что полное сопротивление первой ветви имеет индуктивный характер ( $\varphi_1 > 0$ ), а второй ветви — емкостный ( $\varphi_2 < 0$ );

$$Q = Q_1 + Q_2 = 86 - 24 = 62 \text{ вар}.$$

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Как вычислить напряжение  $U_{BG}$  между точками  $B$  и  $\Gamma$  (рис. 10.1)? Это можно сделать, например, составив уравнение по второму закону Кирхгофа для контура  $AB\Gamma A$ . При этом следует помнить, что для действующих значений токов и напряжений нужно составлять векторное уравнение.

В нашем случае, принимая обход контура против направления движения часовой стрелки, имеем

$$\underline{U}_{AB} + \underline{U}_{BB} - \underline{U}_{\Gamma B} - \underline{U}_{AG} = 0,$$

или, так как  $\underline{U}_{BB} - \underline{U}_{\Gamma B} = \underline{U}_{BG}$ , между точками  $B$  и  $\Gamma$  напряжение  $\underline{U}_{BG} = \underline{U}_{AG} - \underline{U}_{AB}$ , т. е. искомый вектор определяется как геометрическая разность векторов падений напряжений на сопротивлениях  $R_2$  и  $R_1$ .

Учитывая, что  $U_{AG} = I_2 R_2 = 0,4 \cdot 260 = 104 \text{ В}$  и совпадает по фазе с  $I_2$ , а  $U_{AB} = I_1 R_1 = 1,2 \cdot 80 = 96 \text{ В}$  и совпадает по фазе с  $I_1$ , по диаграмме рис. 10.3, построенной в масштабе  $M_U = 4,0 \text{ В/мм}$ , находим

$$U_{BG} = BG \cdot M_U = 28 \cdot 4 = 112 \text{ В}.$$

Очевидно, что напряжение  $U_{BG}$  можно вычислить также аналитически по известному углу  $\varphi_1 + |\varphi_2|$  и сторонам  $AG$  и  $AB$  треугольника.

2. Как определить общий ток и его фазу, если цепь содержит более двух вет-

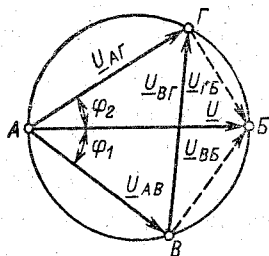


Рис. 10.3. К дополнительному вопросу 1

вей? Рассмотрим цепь рис. 10.1 с учетом третьей ветви, состоящей из сопротивления  $R_3=250$  Ом и показанной на рисунке пунктиром.

Новая ветвь никак не влияет на режим первых двух (при заданном напряжении  $U$ ), и потому токи  $I_1$  и  $I_2$  останутся прежними, ток  $I_3=U/R_3=120/250=0,48$  А и на векторной диаграмме рис. 10.4 совпадает по направлению с век-

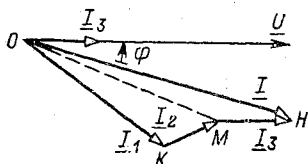


Рис. 10.4. Векторная диаграмма для цепи из трех параллельных ветвей по рис 10.1

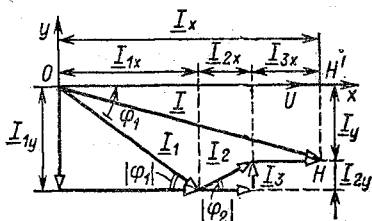


Рис. 10.5. Определение общего тока по проекциям на оси  $x$  и  $y$  векторов токов ветвей

тором напряжения  $U$ . Общий ток  $I$ , равный геометрической сумме токов  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$ , соответствует стороне  $OH$ , замыкающей многоугольник токов  $OKMH$ . Он построен в масштабе  $M_I=0,5$  А/см, поэтому общий ток можно сразу определить из диаграммы  $I=OH \cdot M_I=3,7 \cdot 0,5=1,85$  А.

Общий ток можно вычислить и аналитически. Для этого найдем проекции каждого вектора тока на ось  $x$  и на ось  $y$  (рис. 10.5). Проекция общего тока  $I$  на ось  $x$  (отрезок  $OH'$ ) равна сумме проекций токов ветвей, или

$$I_x = I_{1x} + I_{2x} + I_{3x} = I_1 \cos \varphi_1 + I_2 \cos \varphi_2 + I_3 \cos 0 = \\ = 1,2 \cdot 0,8 + 0,4 \cdot 0,86 + 0,48 \cdot 1 = 1,78 \text{ А.}$$

Проекция общего тока на ось  $y$  (отрезок  $H'H$  на рис. 10.5)

$$I_y = I_{1y} - I_{2y} + I_{3y} = I_1 \sin \varphi_1 - I_2 \sin \varphi_2 + 0 = \\ = 1,2 \cdot 0,6 - 0,4 \cdot 0,5 = 0,52 \text{ А.}$$

Из треугольника  $OH'H$  имеем

$$I = \sqrt{I_x^2 + I_y^2} = \sqrt{1,78^2 + 0,52^2} = 1,85 \text{ А;}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_y}{I_x} = \frac{0,52}{1,78} = 0,292 \text{ или } \varphi = 16^\circ.$$

В рассмотренном случае можно было бы обойтись без метода проекций, если разделить многоугольник токов на треугольники  $OKM$  и  $OMH$  (рис. 10.4) и вычислить последовательно стороны  $OM$  и  $OH$ , но этот путь сложнее.

3. Можно ли в данной задаче проекции векторов токов на ось  $x$  и на ось  $y$  рассматривать как их активные и реактивные составляющие? Иногда ток ветви условно разделяют на две составляющие — активную и реактивную, из которых первая совпадает по фазе с напряжением, а вторая смещена на угол  $90^\circ$ . Так, векторы  $I_{1x}$  и  $I_{1y}$  (рис. 10.5) можно считать соответственно активной и реактивной составляющими, т. е.  $I_{1x} = I_{1a}$ ,  $I_{1y} = I_{1p}$ . Их геометрическая сумма

$$\sqrt{I_{1a}^2 + I_{1p}^2} = I_1$$

Из диаграммы видно, что активные составляющие токов всех ветвей совпадают по направлению с напряжением, а реактивные либо отстают от него на  $90^\circ$  (в ветвях с индуктивным характером полного сопротивления), либо опережают его на  $90^\circ$  (в ветвях с емкостным характером полного сопротивления).

Такое совпадение проекций векторов токов на оси  $x$  и  $y$  с их активными и реактивными составляющими получается только в том случае, когда вектор напряжения  $U$  направлен вдоль положительного направления оси  $x$ .

4. Какую эквивалентную схему можно составить для рассмотренной цепи рис. 10.1? Полное сопротивление всей цепи  $Z = U/I = 120/1,4 = 86$  Ом имеет активную часть  $R_s = Z \cos \varphi = 86 \cos 21^\circ 40' = 80$  Ом и индуктивную  $X_{L_s} = Z \sin \varphi = 86 \sin 21^\circ 40' = 31,5$  Ом.

Поэтому разветвленную цепь рис. 10.1 можно представить эквивалентной схемой с последовательно включенными сопротивлениями  $R_s = 80$  Ом и  $X_{L_s} = 31,5$  Ом.

## 10.2. РАСЧЕТ ЦЕПИ МЕТОДОМ ПРОВОДИМОСТЕЙ

### Условие задачи

Решить предыдущую задачу (§ 10.1) методом проводимостей.

### Решение задачи

1. Активные и реактивные составляющие токов. Треугольники токов. Все токи рассматриваемой цепи рис. 10.1 можно представить состоящими из



активных и реактивных составляющих (см. доп. вопрос 3 к § 10.1). Для этого векторы токов  $\underline{I}_1$  и  $\underline{I}_2$  (рис. 10.2) нужно разложить на составляющие, совпадающие с вектором  $\underline{U}$  и перпендикулярные ему (рис. 10.6).

Ток каждой ветви и общий ток цепи со своими активными и реактивными составляющими образуют треугольники токов. В нашем случае их три:  $ОКН$ ,  $КМЛ$  и  $ОММ'$ .

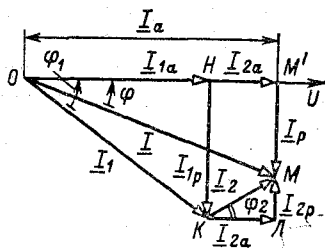


Рис. 10.6. Разложение токов на активные и реактивные составляющие

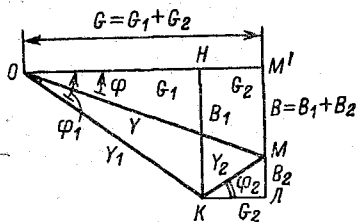


Рис. 10.7. Диаграмма проводимостей, соответствующая диаграмме токов на рис. 10.6

2. Вычисление проводимостей. Треугольники проводимостей. Каждый ток или его составляющие могут быть выражены как произведение общего напряжения  $U$  на соответствующую проводимость:

$$I = UY; \quad I_a = UG; \quad I_p = UB,$$

где  $Y$  — полная проводимость;  $G$  — активная проводимость;  $B$  — реактивная проводимость.

Приведенные зависимости справедливы как для общего тока, так и для токов ветвей. Поэтому все токи пропорциональны соответствующим проводимостям и треугольники токов (рис. 10.6) в другом масштабе (уменьшенном в  $U$  раз) образуют треугольники проводимостей (рис. 10.7).

Вычислим проводимости по данным § 10.1. Активные проводимости ветвей

$$G_1 = R_1/Z_1^2 = 80/100^2 = 8 \cdot 10^{-3} \text{ См};$$

$$G_2 = R_2/Z_2^2 = 260/300^2 = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ См}.$$

Активная проводимость всей цепи равна сумме активных проводимостей ветвей (рис. 10.7), или в нашем случае

$$G = G_1 + G_2 = (8 + 2,9) \cdot 10^{-3} = 10,9 \cdot 10^{-3} \text{ См}.$$

## Реактивные проводимости ветвей

$$B_1 = \frac{X_1}{Z_1^2} = \frac{X_L}{Z_1^2} = \frac{60}{(100)^2} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ См};$$

$$B_2 = \frac{X_2}{Z_2^2} = \frac{-X_C}{Z_2^2} = \frac{-150}{(300)^2} = -1,7 \cdot 10^{-3} \text{ См}.$$

Реактивная проводимость емкостной ветви  $B_2$  выражается отрезком  $ML$  на рис. 10.7, отложенным из точки  $L$  вверх, в то время как отрезок  $NK$ , выражающий реактивную проводимость  $B_1$  индуктивной ветви, отложен от точки  $N$  вниз (реактивные сопротивления при построении треугольника сопротивлений откладывались в обратных направлениях). Реактивная проводимость всей цепи (отрезок  $M'M$ , рис. 10.7)

$$B = B_1 + B_2 = 6 \cdot 10^{-3} - 1,7 \cdot 10^{-3} = 4,3 \cdot 10^{-3} \text{ См}.$$

Полная проводимость всей цепи (отрезок  $OM$ , рис. 10.7)

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2} = \sqrt{(10,9 \cdot 10^{-3})^2 + (4,3 \cdot 10^{-3})^2} = \\ = 11,7 \cdot 10^{-3} \text{ См}.$$

Полное сопротивление цепи

$$Z = 1/Y = 1/(11,7 \cdot 10^{-3}) = 86 \text{ Ом}.$$

3. Вычисление тока и мощностей. Общий ток цепи

$$I = UY = 120 \cdot 11,7 \cdot 10^{-3} = 1,4 \text{ А}.$$

Активная и реактивная мощности

$$P = U^2 G = (120)^2 \cdot 10,9 \cdot 10^{-3} = 157 \text{ Вт};$$

$$Q = U^2 B = (120)^2 \cdot 4,3 \cdot 10^{-3} = 62 \text{ вар}.$$

Как и следовало ожидать, при решении задачи двумя методами результаты совпали.

## Дополнительные вопросы к задаче

1. Существуют ли физически в каждой ветви активный и реактивный токи? Нельзя рассматривать активную и реактивную составляющие как два самостоятельных тока одной ветви. В неразветвленном участке цепи физически существует только один ток, а разделение его на активные и реактивные составляющие является условным приемом, удобным для расчета.

2. Как определяются активная и реактив-

ная проводимости ветви, содержащей только активное сопротивление  $R$ ? Активная проводимость  $G=R/Z^2=R/R^2=1/R$ , реактивная проводимость  $B=X/Z^2=0$ .

3. Можно ли обойтись без графических построений при расчете цепи методом проводимостей? Основное преимущество метода проводимостей состоит в том, что он позволяет вычислить все токи без графических построений (диаграмм проводимостей или токов), которые приводились в задаче только для иллюстрации. Но, с другой стороны, многие задачи, особенно на определение сдвигов по фазе или распределение напряжений,

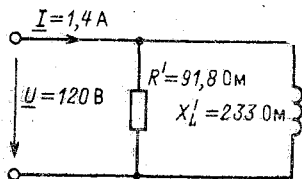


Рис. 10.8. Цепь, эквивалентная показанной на рис. 10.1

проще и наглядней решить при помощи векторной диаграммы, как было показано в § 10.1.

4. Какие эквивалентные схемы можно составить для цепи рис. 10.1? По известным активной  $G$  и реактивной  $B$  проводимостям всей цепи можно составить эквивалентную схему из двух параллельных ветвей (рис. 10.8). Сопротивления ветвей

$$R' = 1/G = 1/(10,9 \cdot 10^{-3}) = 91,8 \text{ Ом};$$

$$X' = 1/B = 1/(4,3 \cdot 10^{-3}) = 233 \text{ Ом} = X'_L.$$

Для цепи можно составить и другую эквивалентную схему из последовательно включенных активного  $R_0$  и индуктивного  $X_0$  сопротивлений (см. доп. вопрос 4, к § 10.1).

Таким образом, применяя метод проводимостей, можно пересчитывать параллельно соединенные сопротивления в последовательно соединенные и наоборот.

### 10.3. УЛУЧШЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА МОЩНОСТИ

#### Условие задачи

К производственному объекту, на котором работают электродвигатели общей мощностью  $P=45,6$  кВт при напряжении  $U=380$  В и частоте  $f=50$  Гц, подводится электроэнергия по двухпроводной линии с активным сопротивлением обоих проводов  $R_{\text{л}}=0,05$  Ом. Для улучшения коэффициента мощности от  $\cos \varphi_1=0,6$  до  $\cos \varphi_2=0,95$  на

объекте смонтирована конденсаторная установка (напряжение  $U$  остается неизменным).

Вычислить для указанных значений  $\cos \varphi$  ток в линии, полную мощность объекта, потери мощности в проводах и емкость конденсаторной установки.

### Решение задачи

1. Эквивалентная электрическая схема. На рассматриваемом в задаче объекте работают электродвигатели, создающие активно-индуктивную нагрузку. Такие потребители на эквивалентной схеме (рис. 10.9) можно представить последовательным соединением активного сопротивления  $R$  и индуктивности  $L$ .

При отключенной конденсаторной установке (емкость  $C$  не присоединена) имеем  $I=I_1$ , и потому  $P=UI \cos \varphi_1 = UI_1 \cos \varphi_1$ , откуда

$$I_1 = P/U \cos \varphi_1;$$

$$Z_1 = \frac{U}{I_1} = \frac{U^2}{P} \cos \varphi_1 = \frac{380^2}{45,6 \cdot 10^3} 0,6 = 1,9 \text{ Ом.}$$

Таким образом,  $Z_1=1,9 \text{ Ом}$  — это эквивалентное сопротивление всех двигателей как потребителей энергии или полное сопротивление ветви  $R, L$  (рис. 10.9).

2. Векторная диаграмма. Как и в ранее рассмотренных цепях, начнем построение диаграммы с векто-

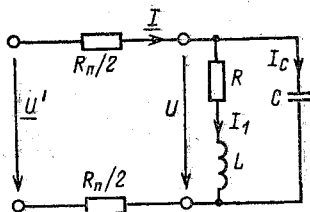


Рис. 10.9. Эквивалентная электрическая схема двигателя с присоединенным к его выводам конденсатора  $C$

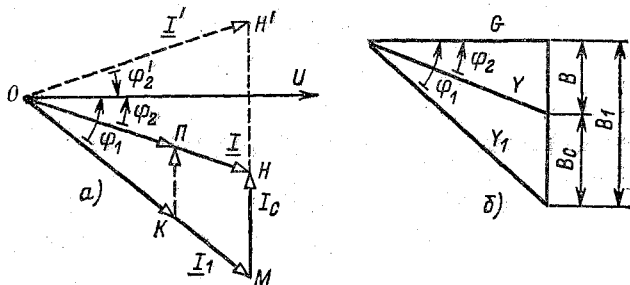


Рис. 10.10. Изменение реактивной составляющей общего тока цепи по рис. 10.10 при присоединении конденсатора

ра  $U$ , расположив его вдоль оси  $x$  (рис. 10.10, а). Ток  $I_1$  отстает по фазе на угол  $\varphi_1$  от напряжения  $U$ , а ток  $I_C$  опережает его на угол  $90^\circ$ . Общий ток  $I$  построен как геометрическая сумма токов  $I_1$  и  $I_C$ .

Очевидно, что присоединение конденсаторов уменьшает общий ток от  $I_1$  до  $I$  вследствие уменьшения реактивной составляющей на  $I_C$  (рис. 10.10, а).

3. Вычисление емкости конденсаторной установки. Из треугольника проводимостей (рис. 10.10, б), построенного по аналогии с треугольником токов (рис. 10.10, а), ясно, что подключение емкости не влияет на активную проводимость:

$$G = Y_1 \cos \varphi_1 = (1/Z_1) \cos \varphi_1 = 0,526 \cdot 0,6 = 0,315 \text{ См},$$

но изменяет реактивную проводимость всей цепи от значения

$$B_1 = Y_1 \sin \varphi_1 = 0,526 \cdot 0,8 = 0,422 \text{ См}$$

до значения

$$B = Y \sin \varphi_2 \text{ или } B = G \operatorname{tg} \varphi_2 = 0,315 \cdot 0,33 = 0,104 \text{ См}.$$

Емкостная проводимость конденсаторов

$$B_C = B_1 - B = 0,422 - 0,104 = 0,318 \text{ См},$$

и емкость

$$C = B_C / \omega = 0,318 / 314 = 0,00101 \text{ Ф} = 1010 \text{ мкФ}.$$

4. Вычисление общего тока. До подключения конденсаторов  $C$  общий ток

$$I = I_1 = UY_1 = 380 \cdot 0,526 = 200 \text{ А}.$$

После подключения конденсаторов общий ток

$$I = UY = 380 \sqrt{G^2 + B^2} = 380 \sqrt{0,315^2 + 0,104^2} = 126 \text{ А}.$$

Таким образом, общий ток уменьшился более чем в 1,5 раза.

5. Вычисление полной мощности цепи. До подключения конденсаторов, т. е. улучшения  $\cos \varphi$ , полная мощность

$$S_1 = UI_1 = 380 \cdot 200 = 76 \text{ кВ} \cdot \text{А},$$

а после подключения конденсаторов она уменьшается до значения

$$S = UI_1 \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} = S_1 \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} = 76 \cdot 0,63 = 47,8 \text{ кВ} \cdot \text{А}.$$

Итак, повышение  $\cos \varphi$  вызывает уменьшение полной мощности цепи.

6. Вычисление мощности потерь в проводах. До улучшения  $\cos \varphi$  мощность потерь в проводах

$$P_{\text{пл}} = I_1^2 R_{\text{п}} = 200^2 \cdot 0,05 = 2000 \text{ Вт} = 2 \text{ кВт}$$

и составляет  $(P_{\text{пл}}/P) \cdot 100 = (2/45,6) \cdot 100 = 4,4 \%$  активной мощности нагрузки (полезной мощности).

После подключения конденсаторов мощность потерь уменьшится пропорционально квадрату отношения токов  $I^2/I_1^2 = 0,63^2 = 0,397$  и составит

$$P_{\text{п}} = 2 \cdot 0,397 = 0,794 \text{ кВт},$$

или  $4,4 \cdot 0,397 = 1,74 \%$  активной мощности нагрузки.

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Какие номинальные параметры должен иметь генератор питания рассмотренного объекта? Поскольку генераторы характеризуются номинальным током  $I_{\text{н}}$ , напряжением  $U_{\text{н}}$  и полной мощностью  $S_{\text{н}} = U_{\text{н}} I_{\text{н}}$ , для питания объекта до повышения его  $\cos \varphi$  (если пренебрегать потерей напряжения в линии) потребовался бы генератор  $U_{\text{н}} = U = 380 \text{ В}$ ,  $I_{\text{н}} = I_1 = 200 \text{ А}$  и  $S_{\text{н}} = S_1 = 76 \text{ кВт} \cdot \text{А}$ .

Если бы такой генератор был создан и установлен, то после повышения  $\cos \varphi$  у него появился бы резерв мощности  $S' = S_{\text{н}} - S = 76 - 47,8 = 28,2 \text{ кВт} \cdot \text{А}$ , который можно было бы использовать для питания другого потребителя. К этому же выводу можно прийти, учитывая, что активная мощность генератора  $P = S_{\text{н}} \cos \varphi$  изменяется пропорционально коэффициенту мощности.

Итак, повышение  $\cos \varphi$  улучшает использование установленной мощности генератора (электростанции).

2. Как повлияет изменение активной мощности объекта на необходимую для улучшения  $\cos \varphi$  емкость? В практических условиях некоторые двигатели иногда не работают, что приводит к уменьшению мощности объекта.

Если допустить, что  $\cos \varphi_1$  и  $\cos \varphi_2$  выбраны прежними, что возможно при заданной средней загрузке оборудования, то токи  $I_1 = P/U \cos \varphi_1$  и  $I_2 = P/U \cos \varphi_2$ , а также их геометрическая разность  $I_{\text{с}}$  (рис. 10.10, а) будут изменяться пропорционально активной мощности  $P$ . Это видно и из по-

добия треугольников  $OMH$  и  $OKP$ , последний из которых построен для меньшего значения  $P$ .

Учитывая равенство  $V_C = \omega C = I_C/U$ , откуда  $C = I_C/\omega U$ , легко установить, что в рассматриваемых условиях необходимая емкость  $C$  пропорциональна  $P$ . Поэтому на практике предусматривают возможность отключения части конденсаторов при уменьшении мощности объекта.

3. Существует ли другое значение емкости, удовлетворяющее условию задачи? Общий ток  $I$  может отставать на заданный угол  $\varphi_2$  от напряжения  $U$  (рис. 10.10,  $a$ ), но может и опережать напряжение на такой же угол (рис. 10.10,  $a$ , показан пунктиром). При этом  $I' = I$  и  $\varphi'_2 = -\varphi_2$ , т. е. коэффициент мощности одинаков. Почему же выбран режим, при котором  $\varphi_2 > 0$ ? Такой режим требует меньшего емкостного тока (отрезка  $MH$  вместо  $MH'$  на рис. 10.10,  $a$ ), что обеспечивается меньшей емкостью  $C$ , и этим упрощается устройство.

#### 10.4. РАСЧЕТ РАЗВЕТВЛЕННОЙ ЦЕПИ ПО ПОКАЗАНИЯМ ПРИБОРОВ

##### Условие задачи

В цепи рис. 10.11 ваттметр  $W$  и амперметры  $A_1$ — $A_5$  соответственно показывают  $P = 9$  Вт;  $I_1 = 0,15$  А;  $I_2 = 0,2$  А;  $I_3 = 0,8$  А;  $I_4 = 0,3$  А;  $I_5 = 0,15$  А.

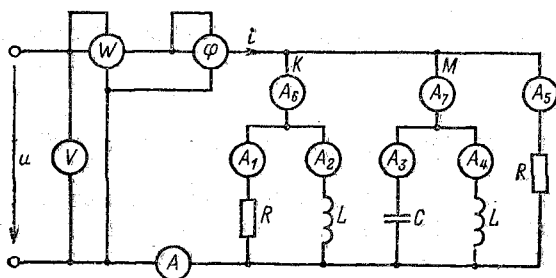


Рис. 10.11. Разветвленная цепь, исследуемая измерительными приборами

Определить токи, измеряемые остальными амперметрами, а также вычислить сдвиг фаз, измеряемый фазометром. Собственным потреблением энергии приборами пренебречь.

## Решение задачи

1. Векторная диаграмма. Анализ показаний амперметров и вольтметров, измеряющих действующие значения, как было показано (§ 9.7), удобно выполнить, используя векторную диаграмму. Ее построение начнем с вектора общего напряжения  $\underline{U}$  (см. § 10.1, решение задачи, п. 2) и примем  $\underline{U} = U \angle 0^\circ$ , т. е. направим его по оси  $x$  (рис. 10.12, а).

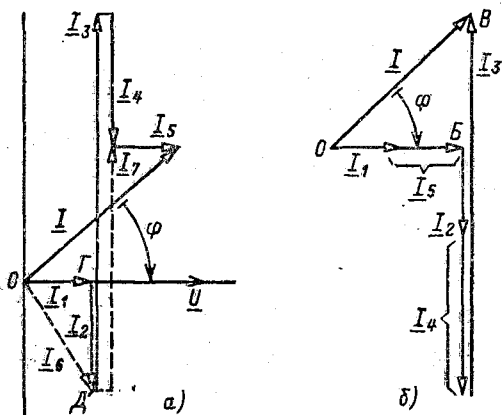


Рис. 10.12. Векторная диаграмма к цепи рис. 10.11

В цепи рис. 10.11 токи  $\underline{I}_1$ ,  $\underline{I}_5$  (в активных сопротивлениях  $R$ ) совпадают по фазе с напряжением, токи  $\underline{I}_2$ ,  $\underline{I}_4$  (в индуктивностях) отстают по фазе на  $90^\circ$ , а ток  $\underline{I}_3$  (в емкости  $C$ ) опережает напряжение на  $90^\circ$ . С учетом этих фазовых соотношений построены векторы токов  $\underline{I}_1$ — $\underline{I}_5$  на векторной диаграмме (рис. 10.12, а). Их векторная сумма по первому закону Кирхгофа

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 + \underline{I}_4 + \underline{I}_5 = \underline{I}$$

определяет общий ток цепи  $\underline{I}$ . Таким образом, *общий ток цепи  $I$  (показание амперметра  $A$ ) определяется как геометрическая сумма токов (показаний амперметров) ветвей.* Подчеркнем это положение, так как учащиеся иногда ошибаются, суммируя арифметически показания амперметров.

2. Определение общего тока цепи и его



сдвига фаз относительно напряжения на выводах. Используем векторную диаграмму (рис. 10.12, а), изменив в ней очередность сложения векторов токов ветвей. Вначале сложим токи в активных сопротивлениях  $\underline{I}_1$  и  $\underline{I}_5$  (рис. 10.12, б), затем — в индуктивностях  $\underline{I}_2$  и  $\underline{I}_4$  и, наконец, в емкости  $\underline{I}_3$ . Выполненная перестановка векторов токов допустима не только математически, но и по свойствам цепи (рис. 10.11), так как она равносильна изменению очередности присоединения ветвей цепи к узловым точкам (перестановке ветвей), что возможно для параллельного соединения.

В полученной векторной диаграмме (рис. 10.12, б) из треугольника  $ОБВ$  находим общий ток цепи:

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{(I_1 + I_5)^2 + (I_3 - I_2 - I_4)^2} = \\ &= \sqrt{(0,15 + 0,15)^2 + (0,8 - 0,2 - 0,3)^2} = \\ &= 0,3\sqrt{2} = 0,423 \text{ А.} \end{aligned}$$

Это значение покажет амперметр  $A$  (рис. 10.11).

Фазометр включен таким образом (рис. 10.11), что он измеряет сдвиг фаз между напряжением  $\underline{U}$  на выводах цепи и общим током  $I$ , т. е. угол  $\varphi$ , показанный на векторной диаграмме (рис. 10.12, б). Этот угол определим из того же треугольника  $ОБВ$ , где

$$|\varphi| = \arctg(I_3 - I_2 - I_4)/(I_1 + I_5) \doteq \arctg 0,3/0,3 = 45^\circ.$$

Фазометр покажет  $\varphi = -45^\circ$ , что следует, во-первых, из векторной диаграммы (угол  $\varphi$  направлен, как положено, от тока к напряжению, и это соответствует отрицательному направлению отсчета углов — по часовой стрелке) и, во-вторых, из свойств цепи, в которой преобладает емкостный ток  $[I_3 > (I_2 + I_4)]$ .

3. Определение токов, измеряемых амперметрами  $A_6$  и  $A_7$ . Амперметр  $A_6$  измеряет ток  $\underline{I}_6$  двух ветвей ( $R$  и  $L$ , рис. 10.11). Он равен геометрической сумме токов  $\underline{I}_1$  и  $\underline{I}_2$  и построен (пунктиром) на векторной диаграмме. Из треугольника  $ОГД$  (рис. 10.12, а) искомый ток

$$I_6 = \sqrt{I_1^2 + I_2^2} = \sqrt{(0,15)^2 + (0,2)^2} = 0,25 \text{ А.}$$

Амперметр  $A_7$  измеряет сумму токов  $\underline{I}_4$  (в индуктивности) и  $\underline{I}_3$  (в емкости), действующих в противофазе, и, как сле-

дует из векторной диаграммы (рис. 10.12, а), ток  $I_7$  (показан пунктиром) по абсолютному значению определяется разностью токов ветвей, т. е.

$$I_7 = I_3 - I_4 = 0,8 - 0,3 = 0,5 \text{ А,}$$

что и покажет амперметр  $A_7$ .

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Какой будет векторная диаграмма, если сложение векторов токов выполнить в такой последовательности:  $I_3 - I_4 - I_5 - I_2 - I_1$ ? При решении задачи было показано, что изменение последовательности сложения векторов облегчает решение задачи, и этим часто пользуются.

Убедимся в этом еще раз. Для заданной последовательности имеем векторную диаграмму рис. 10.13, где угол  $\varphi$  тот же. Из нового варианта диаграммы легко найти, например, суммы токов  $I' = I_3 + I_4 + I_5$ ;  $I'' = I_4 + I_5$ ;  $I''' = I_5 + I_2$ , показанные на рис. 10.13 пунктиром.

2. Какими будут показания ваттметра и фазометра, если их последовательные (токовые) обмотки включить в провод КМ (рис. 10.11), сохранив прежним включение обмоток напряжения? Так как для индуктивной и емкостной ветвей активная мощность равна нулю, то ваттметр измерит мощность одной ветви с активным сопротивлением  $R$  и током  $I_5$ . При прежнем включении он измерял мощность двух ветвей с одинаковыми сопротивлениями  $R$  и равными токами ( $I_1 = I_5$ ). Поэтому при новом включении показания ваттметра уменьшатся в 2 раза и окажется  $P = 4,5 \text{ Вт}$ .

По последовательной обмотке фазометра проходит общий ток трех ветвей  $I' = I_3 + I_4 + I_5$ , показанный (пунктиром) на рис. 10.13. Его сдвиг фаз  $\varphi'$  относительно напряжения  $U$  измерит фазометр. Это угол (по модулю)

$$\begin{aligned} |\varphi'| &= \arctg (I_3 - I_4) / I_5 = \arctg (0,8 - 0,3) / 0,15 = \\ &= \arctg 0,5 / 0,15 = 73^\circ 18'. \end{aligned}$$

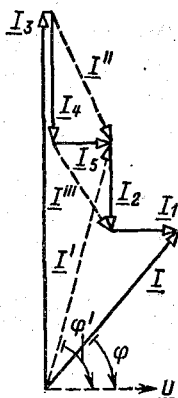


Рис. 10.13. К дополнительному вопросу 1

3. Что покажет вольтметр  $V$  на выводах цепи? Вольтметр показывает напряжение на пяти ветвях цепи (рис. 10.11), которое можно определить по току и сопротивлению одной любой ветви. Легко найти активные сопротивления  $R$  по заданной в задаче активной мощности  $P$  всей цепи. Эта мощность  $P = R(I_1^2 + I_5^2)$ , но  $I_1 = I_5$ , поэтому  $P = R2I_1^2 = R2I_5^2$ , откуда

$$R = P/2I_1^2 = 9/[2(0,15)^2] = 200 \text{ Ом.}$$

Искомое напряжение  $U = RI_1 = 200 \cdot 0,15 = 30 \text{ В.}$

## 10.5. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

209. Цепь из параллельно соединенных активного сопротивления  $R=400 \text{ Ом}$  и индуктивности  $L=1,4 \text{ Гн}$  питается от сети переменного тока напряжением  $220 \text{ В}$  и частотой  $50 \text{ Гц}$ . Определить токи ветвей и общий ток, а также активную, реактивную и полную мощности цепи.

210. Активное сопротивление  $R=440 \text{ Ом}$ , индуктивность  $L=0,35 \text{ Гн}$  и емкость  $C=2,86 \text{ мкФ}$  присоединены параллельно к источнику переменного тока напряжением  $220 \text{ В}$  и частотой  $200 \text{ Гц}$ . Определить токи ветвей и общий ток в цепи двумя способами: графически по векторной диаграмме и методом проводимостей.

211. Катушка индуктивности с параметрами  $R_R=60 \text{ Ом}$ ,  $L_R=33,4 \text{ мГн}$  и параллельно присоединенный резистор с сопротивлением  $R=500 \text{ Ом}$  питаются от источника переменного тока напряжением  $100 \text{ В}$  и частотой  $400 \text{ Гц}$ . Вычислить токи ветвей и ток источника.

212. Источник переменного тока напряжением  $120 \text{ В}$  питает цепь из двух параллельных ветвей: первая имеет активное и емкостное сопротивления  $R=X_C=10 \text{ Ом}$ , вторая — индуктивное сопротивление  $X_L=10 \text{ Ом}$ . Определить все токи цепи при помощи векторной диаграммы. Результаты проверить методом проводимостей, построить треугольники проводимостей для первой ветви и всей цепи.

213. В радиотехнических устройствах активное сопротивление цепи  $R$  выбирается иногда таким образом, чтобы существующая между деталями схемы емкость  $C_M$  (емкость монтажа) уменьшала эквивалентное сопротивление соединения (рис. 10.14) не более чем на  $10 \%$ . При указанных условиях определить  $R$ , если  $C_M=20 \text{ пФ}$ , частота  $f=100 \text{ кГц}$ .

214. Параметры рис. 10.15 известны:  $R_1=542 \text{ Ом}$ ;  $R_2=416 \text{ Ом}$ ;  $C_1=0,51 \text{ мкФ}$ ;  $C_2=0,22 \text{ мкФ}$ ;  $U=10 \text{ В}$ ;  $f=1000 \text{ Гц}$ . Определить общий ток  $I$ , падения напряжения на активных сопротивлениях и емкостях, а также напряжение между точками  $a$  и  $b$ . Построить топографическую диаграмму всех напряжений.

215. Мостовая схема (рис. 10.16), состоящая из дросселя с индуктивностью  $L_1=8 \text{ Гн}$ , вторичной обмотки трансформатора  $T$  и двух со-

противлений  $R_3=R_4=5,1$  кОм, представляет собой простейший магнитный усилитель. К первичной обмотке трансформатора от источника постоянного тока подводится напряжение  $U_{вх}$ . Постоянный ток образует в магнитопроводе трансформатора постоянный магнитный поток (в дополнение к имеющемуся переменному магнитному потоку), что уменьшает индуктивность  $L_2$ . При отключенном источнике  $U_{вх}=0$  ин-

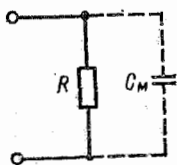


Рис. 10.14. К задаче 213

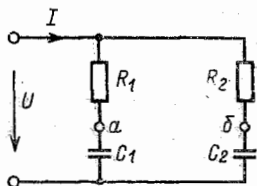


Рис. 10.15. К задаче 214

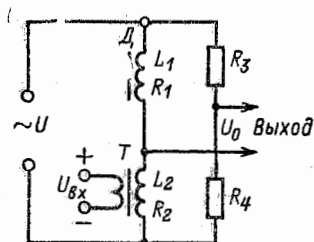


Рис. 10.16. К задаче 215

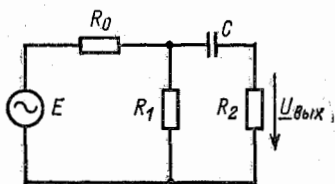


Рис. 10.17. К задаче 216

дуктивность  $L_2=L_1$ ; при  $U_{вх}=0,1$  В индуктивность  $L_2$  уменьшается до 3 Гн. Определить коэффициент  $k=U_0/U_{вх}$ , если диагональ моста присоединена к сети переменного тока ( $U=220$  В,  $f=50$  Гц), а активные сопротивления обмоток дросселя и трансформатора  $R_1=R_2=500$  Ом.

216. Каскад усилителя низкой частоты на сопротивлениях имеет эквивалентную схему для низких частот ( $f=100\div 500$  Гц), показанную на рис. 10.17. Требуется:

- вычислить отношение  $U_{вых}/E$  для крайних частот указанного диапазона, если  $R_0=40$  кОм;  $R_1=120$  кОм;  $R_2=520$  кОм;  $C=0,002$  мкФ;
- выяснить, какой из параметров схемы наиболее значительно влияет на изменение отношения  $U_{вых}/E$  в диапазоне частот;
- указать соотношение сопротивлений, обеспечивающее минимальные изменения отношения  $U_{вых}/E$  при изменении частоты.

217. В усилителях (электропроигрывателей, радиоприемников и др.) для коррекции тона (изменения тембра звука) используется контур  $ab$  (рис. 10.18), полное сопротивление  $Z_k$  которого изменяется в зависимости от частоты  $f$  и положения ползунка реостата  $П$ . При этом изменя-

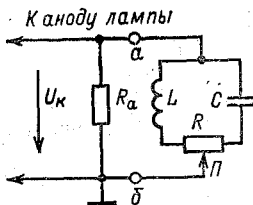


Рис. 10.18. К задаче 217

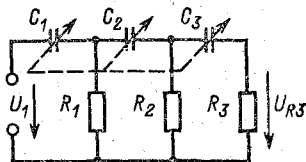


Рис. 10.19. К задаче 222

ются эквивалентное сопротивление параллельно соединенных контура и сопротивления  $R_a$  и напряжение  $U_k$  на этом эквивалентном сопротивлении. Определить значения  $Z_k$  при среднем и двух крайних положениях ползунка  $\Pi$  на частотах 100 и 6000 Гц (крайние частоты для усилителей электропроигрывателей), если  $L=20$  Гн;  $C=2500$  пФ;  $R_a=500$  кОм.

218. Для двигателя мощностью 10 кВт при  $U=220$  В и  $\cos \varphi=0,8$  составить схему замещения в двух вариантах:

а) последовательное соединение активного сопротивления и индуктивности;

б) параллельное их соединение.

219. Для электрической цепи из параллельно соединенных активного сопротивления  $R$  и индуктивного  $X_L$  найти отношение  $R/X_L$ , при котором  $P/Q=3/4$ , где  $P$  и  $Q$  — соответственно активная и реактивная мощности всей цепи.

220. К источнику переменного тока присоединены параллельно активное сопротивление  $R$  и индуктивное  $X_L=2,16$  Ом. Определить сопротивление  $R$ , если общий ток в 2 раза больше тока индуктивной ветви.

221. Активное сопротивление  $R=50$  Ом, емкостное  $X_C=20$  Ом и индуктивное  $X_L$  соединены параллельно и питаются от источника переменного тока. Определить два значения  $X_L$ , при которых сдвиг по фазе между напряжением источника и общим током цепи численно равен  $35^\circ$ .

222. В ламповых генераторах применяется цепь (рис. 10.19), обеспечивающая сдвиг по фазе на  $180^\circ$  между напряжениями  $U_1$  и  $U_{R3}$ . Емкости  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  изменяют, обеспечивая указанное условие на различных частотах. Принимая участки  $C_1-R_1$ ;  $C_2-R_2$ ;  $C_3-R_3$ , не зависящими друг от друга, т. е. полное сопротивление второго участка  $Z_2 \gg R_1$  и полное сопротивление третьего участка  $Z_3 \gg R_2$ , и считая, что каждый из участков создает сдвиг по фазе  $60^\circ$ : а) построить (в масштабе) топографическую диаграмму напряжений; б) определить по топографической диаграмме ослабление напряжения ( $U_1/U_{R3}$ ).

223. Построить качественно векторную диаграмму токов и напряжений для цепи рис. 10.20, расположив вектор  $U_1$  в положительном направлении оси  $x$ .

224. В цепи из параллельно соединенных активного сопротивления  $R$ , индуктивности  $L$  и емкости  $C$  токи соответственно равны 120, 150 и 40 А. Вычислить общий ток, коэффициент мощности для всей цепи, а также активную, реактивную и полную мощности цепи, если напряжение на выводах  $U=220$  В.

225. Вольтметр, амперметр и ваттметр в цепи рис. 10.21 показывают соответственно 60 В, 4,25 А и 180 Вт. Вычислить напряжение на

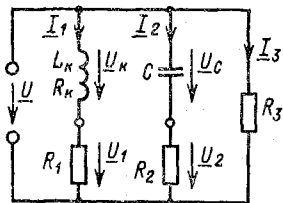


Рис. 10.20. К задаче 223

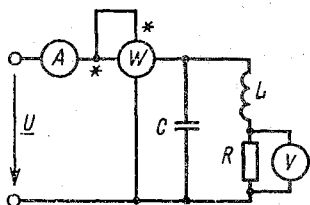


Рис. 10.21. К задаче 225

выводах цепи, ток в емкости, а также активное сопротивление  $R$  и емкость  $C$ , если индуктивное сопротивление  $X_L=22,4$  Ом, частота тока  $f=400$  Гц.

226. К источнику переменного тока с частотой 50 Гц присоединены две ветви: первая содержит активное сопротивление  $R=2$  Ом и индуктивность  $L$ , вторая — только емкость  $C$ . Коэффициент мощности первой ветви 0,707, а всей цепи 0,9. Определить  $L$  и  $C$ .

227. Для повышения  $\cos \varphi$  двигателя до 0,87 к его выводам присоединили конденсатор емкостью  $C=800$  мкФ. Определить коэффициент мощности двигателя без конденсатора, если он работает при напряжении 500 В, частоте 50 Гц и имеет активную мощность 110 кВт.

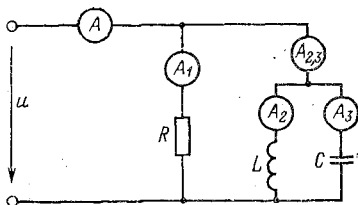


Рис. 10.22. К задаче 229

228. Производственный объект, активная мощность электрического оборудования которого  $P=250$  кВт, питается от местного генератора напряжения 500 В частотой 50 Гц. Определить емкость группы конденсаторов, установленных на объекте для повышения  $\cos \varphi$  от 0,7 до 0,9, и емкость части конденсаторов, которые нужно отключить, если мощность объекта уменьшится в 2 раза.

229. В цепи рис. 10.22, питаемой синусоидальным напряжением  $u$ , амперметры  $A_1$ — $A_3$  показывают соответственно токи  $I_1=1,2$  А;  $I_2=2$  А;  $I_3=0,4$  А. Определить показания амперметров  $A_{2,3}$  и  $A$ .

230. Амперметры  $A_{2,3}$ ,  $A_2$  и  $A$  (рис. 10.22) показывают соответственно  $I_{2,3}=0,6$  А;  $I_2=0,8$  А;  $I=0,6\sqrt{2}$  А. Определить показания амперметров  $A_1$  и  $A_3$ .

### 10.6. ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ. 10

209. 0,5 А; 0,5 А; 0,707 А; 110 Вт; 110 вар; 155,5 В·А.  
 210. 0,5 А; 0,5 А; 0,79 А; 0,58 А.  
 211. 0,97 А; 0,2 А; 1,1 А.  
 212. 8,5 А; 12,0 А; 8,5 А.  
 213.  $R \leq 36,5$  кОм.  
 214. 26 мА; 8,65 В; 5,0 В; 5,0 В; 8,65 В; 5,0 В.  
 215. 440.  
 216. а) 0,43; 0,69; б) емкость  $C$ ; в)  $X_C \ll R_2$ .  
 217. При  $f=100$  Гц; 214 кОм; 12,7 кОм; 400 кОм. При  $f=6000$  Гц; 222 кОм; 420 кОм; 10,75 кОм.  
 218. Последовательная схема: 31 Ом; 74 мГн. Параллельная схема: 48,5 Ом; 205,5 мГн.  
 219. 4 : 3.  
 220. 1,25 Ом.  
 221. 27,8 Ом; 15,6 Ом.  
 222. а) См. рис. 10.23; б) примерно в 8 раз.

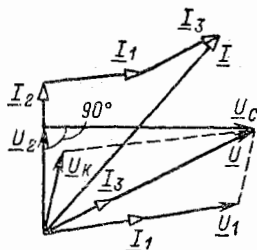
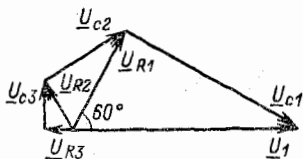


Рис. 10.23. Ответ к задаче 222      Рис. 10.24. Ответ к задаче 223

223. См. рис. 10.24.  
 224. 163 А; 0,74; 26,6 кВт; 24,3 квар; 36 кВ·А.  
 225. 90 В; 6 А; 20 Ом; 26,4.  
 226. 6,4 мГн; 415 мкФ.  
 227. 0,67.  
 228. 1700 мкФ; 850 мкФ.  
 229. 1,6 А; 2 А.  
 230. 0,6 А; 0,2 А.

## РЕЗОНАНС В ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

11.1. РЕЖИМ РЕЗОНАНСА НАПРЯЖЕНИЙ.  
ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

## Условие задачи

В цепи рис. 11.1 катушка индуктивности ( $L=14,1$  мкГн,  $R=5,3$  Ом) и конденсатор ( $C=5000$  пФ) питаются от генератора с синусоидальным напряжением  $U=0,53$  В, частота которого изменяется от 200 до 500 кГц. Потерями энергии в конденсаторе пренебрегаем.

Требуется:

1) вычислить резонансные значения частоты, тока, напряжений на конденсаторе и катушке, а также отношения напряжений на конденсаторе и источнике питания; построить векторную диаграмму;

2) построить графики зависимостей полного сопротивления цепи, ее тока, напряжений на катушке и конденсаторе, а также сдвига фаз между током и общим напряжением при изменении частоты источника в заданных пределах.

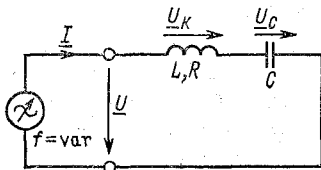


Рис. 11.1. Резонансный контур при переменной частоте

## Решение задачи

1. Особенности задачи. В предыдущих параграфах этой главы рассматриваемые цепи питались от источников с фиксированной частотой, и это не случайно. Многие цепи синусоидального тока работают в таком режиме. Так, от сети переменного тока (частота 50 Гц) питаются электрооборудование промышленных предприятий, бытовые приборы и др. Многие электротехнические устройства работают при других фиксированных частотах.

Вместе с тем широко распространены электротехнические устройства, работающие при изменяющейся частоте (в диапазоне частот). К их числу относится аппаратура радиотехники, связи и др.

Какое новое явление возникает в цепи рис. 11.1, если она используется в диапазоне частот? Сопротивления цепи: индуктивное  $X_L=2\pi fL$ , емкостное  $X_C=1/2\pi fC$  и реактивное



$X = X_L - X_C$  — не остаются постоянными, они изменяются с частотой. Соответственно и фазовый сдвиг между общим напряжением и током  $\varphi = \arctg(X/R)$  изменяется. Он положителен ( $\varphi > 0$ ) при  $X > 0$  или  $X_L > X_C$ , отрицателен ( $\varphi < 0$ ) при  $X < 0$  или  $X_L < X_C$ .

Возможен случай, при котором общий ток и напряжение на выводах цепи совпадают по фазе ( $\varphi = 0$ ). Такой режим называется резонансом.

В неразветвленной цепи с параметрами  $R, L, C$  явление резонанса, возникающее при  $\varphi = 0$ , называется резонансом напряжений. Резонанс напряжений обеспечивается при равенстве сопротивлений  $X_L = X_C$ , так как при этом  $X = X_L - X_C = 0$ .

В этой задаче реактивные сопротивления изменяются (вследствие изменения частоты источника питания) в таких пределах, при которых для цепи рис. 11.1 обеспечиваются как условия резонанса ( $\varphi = 0$ ), так и условия до резонанса ( $\varphi < 0$ ) или после резонанса ( $\varphi > 0$ ).

2. Вычисление резонансной частоты в цепи рис. 11.1. Резонанс возникает на частоте  $f_p$ , для которой

$$2\pi f_p L = 1/2\pi f_p C,$$

откуда

$$f_p = 1/2\pi \sqrt{LC}.$$

При данных задачи ( $L = 14,1 \text{ мкГн} = 14,1 \cdot 10^{-6} \text{ Гн}$  и  $C = 5000 \text{ пФ} = 5 \cdot 10^{-9} \text{ Ф}$ ) резонансная частота

$$f_p = \frac{1}{2\pi \sqrt{14,1 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-9}}} = 6 \cdot 10^5 \text{ Гц} = 600 \text{ кГц}.$$

3. Вычисление тока и напряжений в режиме резонанса. При резонансе реактивное сопротивление  $X = 0$ , а полное сопротивление

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = R = 5,3 \text{ Ом}.$$

Ток в цепи

$$I = U/Z = 0,53/5,3 = 0,1 \text{ А}.$$

Чтобы вычислить напряжение на катушке индуктивности, определим вначале ее индуктивное и полное сопротивления при резонансной частоте:

$$X_{Lp} = 2\pi f_p L = 2 \cdot 3,14 \cdot 6 \cdot 10^5 \cdot 14,1 \cdot 10^{-6} = 53 \text{ Ом};$$

$$Z_{к,р} = \sqrt{R^2 + X_{Lp}^2} = \sqrt{5,3^2 + 53^2} = 53,25 \text{ Ом}.$$

Напряжение на катушке при резонансе

$$U_{к,р} = Z_{к,р} I = 53,25 \cdot 0,1 = 5,325 \text{ В.}$$

Так как в режиме резонанса емкостное сопротивление  $X_{Cp} = X_{Lp} = 53 \text{ Ом}$ , то напряжение на емкости  $U_{Cp} = X_{Cp} I = 53 \cdot 0,1 = 5,3 \text{ В}$ .

Такое же напряжение будет на индуктивности катушки:

$$U_{Lp} = X_{Lp} I = X_{Cp} I = U_{Cp} = 5,3 \text{ В.}$$

На активном сопротивлении цепи (катушки) напряжение (при резонансе)

$$U_{а,р} = RI = U = 5,3 \text{ В.}$$

В наших условиях напряжение на индуктивности или емкости  $U_{Lp} = U_{Cp}$  превышает общее напряжение  $U$  в  $k_U = U_{Cp}/U = 5,3/0,53 = 10$  раз. От каких же величин зависит коэффициент усиления напряжения  $k_U$ ?

Оказывается,

$$k_U = \frac{U_{Cp}}{U} = \frac{X_{Cp} I}{RI} = \frac{X_{Lp} I}{RI} = Q,$$

где  $Q$  — добротность контура, а в наших условиях — добротность катушки индуктивности.

Итак, добротность контура (катушки) определяет усиление напряжения последовательным контуром при резонансе.

4. Векторная диаграмма. По полученным данным построена векторная диаграмма (рис. 11.2), где в целях наглядности вектор  $U = U_{а,р}$  построен не в масштабе, а увеличен в 2 раза. Поэтому, определяя коэффициент  $k_U$  (по рис. 11.2), следует взять отношение длины вектора  $U_{Lp}$  или  $U_{Cp}$  к половине длины вектора  $U$ .

Как видно из диаграммы, при резонансе напряжение на зажимах цепи  $U = U_{а,р} = RI$  совпадает по фазе с током ( $\varphi = 0$ ), а реактивное напряжение  $U_{реакт} = U_{Lp} - U_{Cp} = 0$ .

5. Определение зависимости сопротивлений от частоты. Индуктивное сопротивление  $X_L = 2\pi fL = 6,28 \cdot 14,1 \cdot 10^{-6} f = 8,88 \cdot 10^{-5} f \text{ Ом}$ .

Чтобы упростить вычисление  $X_L$  для нескольких вы-

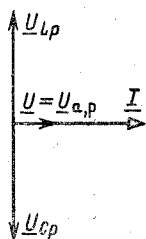


Рис. 11.2. Векторная диаграмма при резонансе напряжений

Таблица 11.1

$f$ , кГц	300	500	600	700	1000	1200
$X_L$ , Ом	26,5	44,2	53	61,8	88,4	106
$X_C$ , Ом	106	63,5	53	45,5	31,75	26,5
$X$ , Ом	-79,5	-19,3	0	16,3	56,55	79,5
$Z$ , Ом	79,5	20	5,3	17	56,8	79,5
$I$ , мА	6,65	26,5	100	31,2	9,45	6,65
$U_L$ , В	0,18	1,17	5,3	1,93	0,84	0,7
$U_C$ , В	0,7	1,68	5,3	1,42	0,3	0,18

бранных частот (табл. 11.1), воспользуемся таким методом. Одно из значений индуктивного сопротивления при  $f=f_p=600$  кГц уже известно:  $X_L(f=600)=X_{Lp}=53$  Ом. Другие значения  $X_L$  определим, исходя из того, что  $X_L$  прямо пропорционально частоте (линейная зависимость). Так, при  $f=300$  кГц должно быть  $X_L$  в 2 раза меньше, чем при  $f=600$  кГц, что и подтверждается данными табл. 11.1. Другие значения  $X_L$  предлагаем проверить самостоятельно.

Емкостное сопротивление

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{6,28 \cdot 5 \cdot 10^{-9}} \frac{1}{f} = 3,18 \cdot 10^7 \frac{1}{f}$$

обратно пропорционально частоте. Это свойство емкостного сопротивления использовано при получении данных табл. 11.1, где известное для  $f=600$  кГц значение  $X_C=X_{Cp}=53$  Ом пересчитано для других частот по закону обратной пропорциональности. Например, при  $f=1200$  кГц  $X_C=26,5$  Ом — в 2 раза меньше своего значения при  $f=600$  кГц.

Реактивное сопротивление всей цепи  $X=X_L-X_C$ , най-

денное (табл. 11.1) вычитанием соответствующих значений  $X_L$  и  $X_C$ , имеет отрицательный знак на частотах, меньших резонансной, и положительный знак на частотах, больших резонансной.

Для вычисления полного сопротивления цепи используются полученные значения  $X$  (табл. 11.1). При этом для частот 300 и 1200 кГц можно принять  $Z=X$ , так как  $R$  весьма мало по сравнению с  $X$ .

По данным табл. 11.1 на рис. 11.3 построена (пунктиром) кривая зависимости  $Z(f)$ , которая подтверждает,

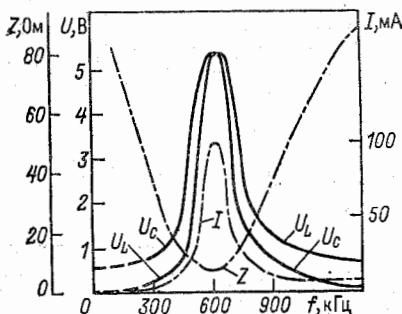


Рис. 11.3. Резонансные кривые последовательного контура

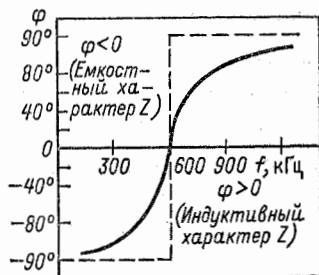


Рис. 11.4. Фазовая характеристика последовательного контура

что в цепи с последовательно соединенными  $R$ ,  $L$  и  $C$  полное сопротивление в режиме резонанса напряжений имеет наименьшее значение.

6. Определение зависимостей тока и напряжений от частоты. Ток в цепи  $I=U/Z=0,53/Z$ , где полное сопротивление цепи имеется (табл. 11.1) для всех выбранных частот. По результатам вычислений тока (табл. 11.1) на рис. 11.3 построена (штрихпунктиром) кривая зависимости  $I(f)$ .

По имеющимся значениям тока  $I$  и индуктивного сопротивления  $X_L$  (табл. 11.1) легко определить величины  $U_L=X_L I$  (табл. 11.1) и по ним построить график зависимости  $U_L(f)$ , показанный на рис. 11.3.

Аналогично определено напряжение на емкости  $U_C=X_C I$  и по полученным данным (табл. 11.1) построена на рис. 11.3 кривая зависимости  $U_C(f)$ .

Из рис. 1.3 видно, что графики зависимости  $U_L(f)$  и  $U_C(f)$  несимметричны относительно резонансной частоты.

ты 600 кГц. Следует иметь в виду, что графики  $U_L$  и  $U_C$  имеют максимальные значения ( $U_{Lmax}$  и  $U_{Cmax}$ ) при частотах, отличающихся от резонансной. Рассматриваемое смещение величин  $U_{Lmax}$  и  $U_{Cmax}$  уменьшается с возрастанием добротности контура, и при больших  $Q$  можно практически им пренебречь.

7. Определение зависимости угла  $\varphi$  от частоты  $f$ . Угол сдвига фаз между напряжением и током для выбранных значений частоты (табл. 11.1) можно определить по  $\text{tg } \varphi = X/R$ . Их значения известны (табл. 11.1), поэтому легко найти отношение  $X/R = X/5,3$  и по ним значения углов  $\varphi$  (табл. 11.2).

Таблица 11.2

$f$ , кГц	300	500	600	700	1000	1200
$X/R$	15	3,64	0	3,07	10,7	15
$\varphi$	$-86^\circ 10'$	$-74^\circ 40'$	0	$72^\circ$	$84^\circ 40'$	$86^\circ 10'$

Кривая зависимости  $\varphi(f)$ , или фазовая характеристика, построена по данным табл. 11.2 на рис. 11.4.

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Как использовать показания приборов (рис. 11.5) для фиксации режима резонанса? Если в цепь рис. 11.1 включить измерительные приборы по рис. 11.5 и изменять частоту  $f$ , индуктивность  $L$  или емкость  $C$ , то можно установить режим резонанса:

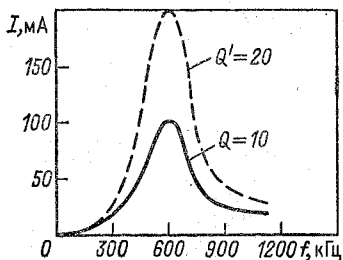
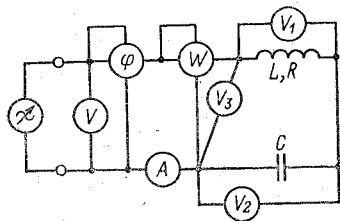


Рис. 11.5. Резонансный контур по рис. 11.1 с измерительными приборами

Рис. 11.6. Резонансная кривая тока при двух значениях добротности контура

- а) по показанию фазометра  $\varphi=0$  (см. рис. 11.4);  
 б) по максимальному показанию амперметра, так как  $I=U/Z$ , а  $Z=R$  имеет наименьшее значение;  
 в) по максимальному показанию ваттметра, так как  $P=RI^2$ , где  $R$  не зависит от частоты, а  $I$  имеет максимальное значение при резонансе.

2. От каких величин зависит крутизна резонансных кривых  $U_L(f)$ ,  $U_C(f)$ ,  $I(f)$ ? В рассматриваемой цепи напряжения на индуктивности и емкости  $U_L=U_C=QU=10U$  больше напряжения на выводах в  $Q$  (добротность) раз, или в нашем случае в 10 раз.

При резонансе любое из реактивных сопротивлений  $X_L=X_C$  равно волновому сопротивлению цепи  $Z_B$ . Если его оставить неизменным, а уменьшить, например, в 2 раза активное сопротивление, то добротность  $Q'=2Q=20$  и соответственно  $U'_L=U'_C=U2Q=0,53 \cdot 20=10,6$  В, т. е. добротность контура и реактивные напряжения возрастут в 2 раза. Ток

$$I' = \frac{U}{R/2} = \frac{0,53}{2,65} = 0,2 \text{ А} = 200 \text{ мА}$$

возрастет в 2 раза.

На рис. 11.6 построена (пунктиром) резонансная кривая тока для рассмотренной добротности контура  $Q'=2Q=20$ .

Таким образом, крутизна резонансных кривых растет с увеличением добротности контура.

Очевидно, что в цепях, где  $R > X_L$  ( $Q < 1$ ), явления резонанса выражены очень слабо.

3. Каковы предельные значения резонансных кривых  $U_L$  и  $U_C$  (рис. 11.3)? Для частоты  $f=0$  напряжение на индуктивности  $U_L=X_L I=2\pi f L I=0 \cdot I=0$  и на емкости  $U_C=U$ , так как при  $I=0$  также  $U_K=0$ .

При другом предельном значении частоты  $f=\infty$  сопротивления  $X_L=\infty$ , а  $X_C=0$ . Поэтому по аналогии с режимом для  $f=0$  имеем в данном случае (при  $f=\infty$ )  $U_C=0$  и  $U_L=U$ . К этим предельным значениям и стремятся кривые  $U_L(f)$  и  $U_C(f)$ , что показано пунктиром на рис. 11.3.

4. Какой будет фазовая характеристика цепи рис. 11.1, если принять  $R=0$ ? Сдвиг фаз можно определить по  $\operatorname{tg} \varphi=X/R$ , откуда при  $R=0$  имеем  $\operatorname{tg} \varphi=\infty$  или  $\varphi=\pm 90^\circ$ . Таким образом, у идеального последовательного контура ( $R=0$ ) возможны два значения

сдвига фаз между током и напряжением: либо  $+90^\circ$ , либо  $-90^\circ$ . Переход от одного значения к другому осуществляется скачком при резонансной частоте (на рис. 11.4 показано пунктиром).

5. Какой вид будут иметь резонансные кривые, если цепь рис. 11.1 питать от источника тока? Если в цепи рис. 11.1 принять неизменным ток ( $I = \text{const}$ ) в заданном диапазоне частот, то напряжение на выводах цепи  $U = ZI = Z \text{const}$  пропорционально  $Z$ , т. е. зависимость  $U(f)$  изобразится графиком, аналогичным  $Z(f)$  (см. рис. 11.3).

Так как  $U_L = X_L I = X_L \text{const}$  и  $U_C = X_C I = X_C \text{const}$ , то графики зависимости  $U_L(f)$  и  $U_C(f)$  аналогичны частотным характеристикам их сопротивлений  $X_L(f)$  и  $X_C(f)$ , поэтому  $U_L(f)$  изобразится прямой, а  $U_C(f)$  — гиперболой.

6. Как измерить индуктивное и активное сопротивления катушки, используя режим резонанса? Включив катушку с неизвестными параметрами  $L_k$  и  $R_k$  последовательно с конденсатором и добившись резонанса изменением частоты напряжения генератора, питающего цепь, измеряем (при помощи вольтметра) напряжения на выводах генератора ( $U$ ) и на конденсаторе ( $U_C$ ). При этом искомые величины:

$$R_k = U/I \text{ и } X_k = X_C = U_C/I.$$

## 11.2. РЕЖИМ РЕЗОНАНСА ТОКОВ. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО КОНТУРА

### Условие задачи

Катушка с индуктивностью  $L_k = 2,5 \text{ мГн} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$ , активным сопротивлением  $R_k = 1000 \text{ Ом}$  (рис. 11.7) и емкость  $C = 120 \text{ пФ} = 120 \cdot 10^{-12} \text{ Ф}$  образует параллельный резонансный контур, включенный через сопротивление  $R = 210 \text{ кОм}$  к источнику питания напряжением  $U = 66 \text{ В}$ .

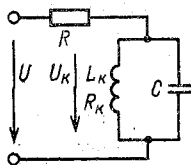


Рис. 11.7. Цепь, содержащая параллельный резонансный контур

Определить частоту напряжения источника, обеспечивающую режим резонанса, и вычислить в этом режиме полное сопротивление контура, напряжение на контуре и все токи.

## Решение задачи

1. Вычисление резонансной частоты. В рассматриваемой цепи, содержащей два параллельно соединенных участка (индуктивного и емкостного характера), при равенстве индуктивной и емкостной проводимостей участков (ветвей) ( $B_L = B_C$ ) возникает режим резонанса токов.

Условие резонанса ( $B_L = B_C$ ) обеспечивается при частоте (резонансной)

$$f_D = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{(L/C) - R_1^2}{(L/C) - R_2^2}}.$$

Приведенное выражение для резонансной частоты  $f_D$  можно рассматривать как состоящее из двух частей ( $f_0$ ,  $A$ ). Первая из них ( $f_0 = 1/2\pi\sqrt{LC}$ ) определяет уже известную резонансную частоту последовательного контура или резонанса напряжений. Вторая часть (коэффициент  $A$ ) учитывает изменение частоты, создаваемое активными сопротивлениями контура  $R_1$  и  $R_2$  (в наших условиях активное сопротивление ветви с индуктивностью  $R_1 = R_K$ , ветви с емкостью  $R_2 = 0$ ).

При наших данных

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} =$$

$$= \frac{1}{6,28\sqrt{2,5 \cdot 10^{-3} \cdot 120 \cdot 10^{-12}}} = 290,4 \cdot 10^3 \text{ Гц} = 290,4 \text{ кГц};$$

$$A = \sqrt{\frac{(L_K/C) - R_1^2}{L_K/C}} = \sqrt{\frac{(2,5 \cdot 10^{-3}/120 \cdot 10^{-12}) - (1000)^2}{2,5 \cdot 10^{-3}/120 \cdot 10^{-12}}} =$$
$$= 0,976;$$

$$f_D = f_0 A = 290,4 \cdot 10^3 \cdot 0,976 = 284 \cdot 10^3 \text{ Гц}$$

и соответственно

$$\omega_D = 2\pi f_D = 6,28 \cdot 284 \cdot 10^3 = 178 \cdot 10^4 \text{ рад/с.}$$

Таким образом, для получения резонанса токов нужно рассматриваемую цепь питать от источника с током частотой 284 кГц.

2. Вычисление проводимостей резонансного контура. В режиме резонанса индуктивная и емкостная проводимости ветвей параллельного контура



равны друг другу:

$$B_L = B_C = \omega C = 178 \cdot 10^4 \cdot 120 \cdot 10^{-12} = 2,14 \cdot 10^{-4} \text{ См.}$$

$$\text{Реактивная проводимость всего контура } B = B_L - B_C = 2,14 \cdot 10^{-4} - 2,14 \cdot 10^{-4} = 0.$$

Активная проводимость индуктивной ветви контура  $G_1$  в нашем случае равна активной проводимости всего контура  $G$ , так как активное сопротивление второй ветви  $R_2 = 0$  и потому

$$G = G_1 = \frac{R_K}{R_K^2 + (\omega L_R)^2} = \frac{1000}{(1000)^2 + (178 \cdot 10^4 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3})^2} = 0,48 \cdot 10^{-4} \text{ См.}$$

Полная проводимость контура

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2} = G = 0,48 \cdot 10^{-4} \text{ См.}$$

Итак, при резонансе токов полная проводимость резонансного контура равна активной проводимости.

3. Вычисление полного сопротивления контура. Полное сопротивление резонансного контура  $Z_K$  определим двумя способами:

во-первых, по найденной полной проводимости:  $Y = 1/Z_K$ , откуда  $Z_K = 1/Y = 1/0,48 \cdot 10^{-4} = 20,8 \cdot 10^3 \text{ Ом} \approx 21 \text{ кОм}$ ;

во-вторых, по приближенной формуле, точность которой возрастает с увеличением добротности контура:

$$Z_K = \frac{R_1 R_2 + \rho^2}{R_1 + R_2},$$

где волновое сопротивление контура

$$\rho = \sqrt{L/C} = \sqrt{2,5 \cdot 10^{-3}/120 \cdot 10^{-12}} = 4,55 \cdot 10^3 \text{ Ом.}$$

Учитывая, что  $R_1 = R_K = 1000 \text{ Ом}$ , а  $R_2 = 0$ , имеем

$$Z_K = \rho^2/(R_1 + R_2) = (4,55 \cdot 10^3)^2/10^3 \approx 21 \cdot 10^3 \text{ Ом} = 21 \text{ кОм.}$$

Полученные двумя способами результаты совпадают.

4. Вычисление напряжения на контуре  $U_K$  (рис. 11.7). Полученное сопротивление контура  $Z_K$  является чисто активным и соединено последовательно с другим активным сопротивлением  $R$  (рис. 11.7), превышающим  $Z_K$  в 10 раз. Поэтому напряжение на контуре

$$U_K = \frac{U}{R + Z_K} \quad Z_K = U \frac{21}{21 + 210} = \frac{U}{11} = \frac{66}{11} = 6 \text{ В.}$$

5. Вычисление токов. В катушке индуктивности активная и реактивная составляющие тока

$$I_{1a} = UG_1 = 6,0 \cdot 0,48 \cdot 10^{-4} = 0,284 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 0,284 \text{ mA};$$

$$I_{1p} = UB_1 = 6,0 \cdot 2,14 \cdot 10^{-4} = 1,26 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 1,26 \text{ mA};$$

общий ток ветви  $I_1 = \sqrt{I_{1a}^2 + I_{1p}^2} = \sqrt{(0,284)^2 + (1,26)^2} = 1,29 \text{ mA}$ .

Во второй ветви  $I_{2a} = UG_2 = U \cdot 0 = 0$ ;  $I_{2p} = UB_2 = UB_1 = I_{1p} = 1,26 \text{ mA}$  и потому  $I_2 = 1,26 \text{ mA}$ .

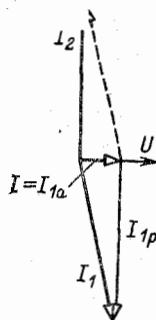
Активная и реактивная составляющие общего тока цепи:

$$I_a = I_{1a} + I_{2a} = 0,284 \text{ mA};$$

$$I_p = I_{1p} - I_{2p} = 1,26 - 1,26 = 0.$$

Общий ток  $I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2} = \sqrt{0,284^2 + 0} = 0,284 \text{ mA}$ .

По полученным данным построена векторная диаграмма рис. 11.8, из которой можно еще раз убедиться, что при резонансе токов общий ток совпадает по фазе с напряжением и равен сумме активных составляющих токов ветвей (в нашем случае  $I = I_{1a}$ , так как  $I_{2a} = 0$ ).



### Дополнительные вопросы к задаче

1. Как получить частотные характеристики проводимостей резонансного контура? Если вычислить проводимости параллельного контура для нескольких значений частоты (табл. 11.3), то можно построить графики зависимостей  $B(f)$ , приведенные на рис. 11.9. Из графиков следует, что при  $f < f_p$  реактивная проводимость цепи  $B$  положительна, а при  $f > f_p$  отрицательна.

2. Какой вид имеет фазовая характеристика резонансного контура? Если вычислить сдвиг фаз  $\varphi$  между напряжением на контуре  $U_k$  и общим током  $I$  для нескольких значений частоты (табл. 11.4), то можно построить график зависимости  $\varphi(f)$ , приведенный на рис. 11.10.

Из графика видно, что сдвиг фаз  $\varphi$  имеет положительное значение при  $f < f_p$  и отрицательное при  $f > f_p$ . Крутизна зависимости  $\varphi(f)$  (фазовой характеристики) получается наибольшей на частотах вблизи резонансной.

Рис. 11.8. Векторная диаграмма для режима резонанса токов в цепи рис. 11.7

Таблица 11.3

$f$ , кГц	200	250	278	300	350
$B_L$ , $10^{-4}$ См	2,89	2,395	2,14	2,03	1,75
$B_C$ , $10^{-4}$ См	1,51	1,885	2,14	2,26	2,64
$B=(B_L-B_C)$ , $10^{-4}$ См	1,38	0,51	0	-0,23	-0,89
$G$ , $10^{-4}$ См	0,922	0,611	0,48	0,428	0,322

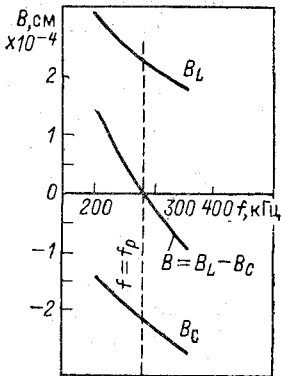


Рис. 11.9. Зависимость проводимостей параллельного контура от частоты

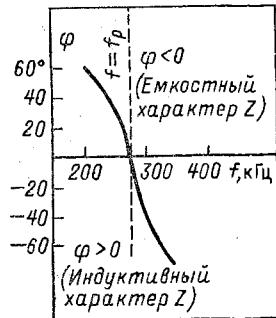


Рис. 11.10. Фазовая характеристика параллельного контура

Таблица 11.4

$f$ , кГц	200	250	278	300	350
$\varphi$	$56^{\circ}20'$	$40^{\circ}$	$0^{\circ}$	$-28^{\circ}15'$	$-70^{\circ}$

Очевидно, что при  $\varphi > 0$  (или  $f < f_p$ ) ток отстает по фазе от напряжения и полное сопротивление резонансного контура  $Z_k$  имеет индуктивный характер, а при  $\varphi < 0$  (или

$f > f_p$ ) ток опережает по фазе напряжение и  $Z_k$  имеет емкостный характер.

В параллельном контуре полное сопротивление цепи изменяется с индуктивного на емкостное при переходе через резонансную частоту.

3. Зачем включено сопротивление  $R$  (см. рис. 11.7) и какой при этом создается режим питания контура? Если для сопротивления  $R$  и  $Z_k$  (полное сопротивление контура при резонансе) обеспечить соотношение  $R \gg Z_k$ , то в цепи рис. 11.7 общий ток

$$I = U / (R + Z_k) \approx U / R = \text{const},$$

так как можно пренебречь  $Z_k$  по сравнению с  $R$ .

При этом условии ( $I = \text{const}$ ) резонансный контур оказывается в режиме питания источником тока. Такой режим питания широко распространен на практике. Например, в электронике параллельные резонансные контуры часто включают последовательно с большим внутренним сопротивлением электронных приборов (электронных ламп, транзисторов и др.).

В данной задаче выбрано  $R = 10 Z_{k,p}$ , что близко к режиму питания источником тока. Удобства этого режима пояснены в следующем дополнительном вопросе.

4. Как получить резонансную кривую напряжения на контуре  $U_k(f)$ ? Имея активную  $G$  и реактивную  $B$  проводимости контура (табл. 11.3), можно для тех же значений частоты вычислить полную проводимость  $Y = \sqrt{G^2 + B^2}$  и полное сопротивление контура  $Z_k = 1/Y$  (табл. 11.5). По этим данным на рис. 11.11 построена частотная характеристика  $Z_k(f)$ .

Принимая для наших условий питание контура в режиме источника тока, что можно допустить с некоторой по-

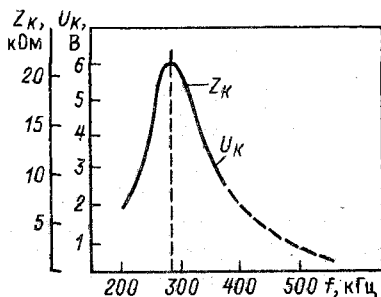


Рис. 11.11. Частотная характеристика полного сопротивления контура и (она же) резонансная кривая напряжения на контуре

$f$ , кГц	200	250	273	300	350
$Z_k$ , кОм	6,0	12,5	21	20	10,5
$U_k$ , В	1,7	3,55	6,0	5,7	3,0

грешностью (см. ответ к предыдущему дополнительному вопросу), получим напряжение на контуре  $U_k = IZ_k = \text{const} Z_k$ . Таким образом, график зависимости  $Z_k(f)$  (рис. 11.11) в другом масштабе выражает резонансную кривую  $U_k(f)$ . Значения  $U_k$ , приведенные в табл. 11.5, а также использованные для масштаба  $U_k$  на рис. 11.11, получены при значении общего тока  $I = 0,284$  мА, найденного для решения задачи.

5. При каких условиях частота резонанса токов совпадает с частотой резонанса напряжений при одинаковых параметрах параллельного и последовательного контуров? Из приведенного выше выражения для частоты резонанса токов  $f_p = f_0 A$ , где  $f_0$  — частота резонанса напряжения, следует, что  $f_p = f_0$  при  $A = 1$ . Это условие обеспечивается, если принять  $R_1 = R_2 = 0$  или  $R_1 = R_2 = R$ .

Полученные результаты позволяют сделать два важных вывода:

во-первых, частота, при которой устанавливается резонанс токов, зависит как от индуктивности и емкости, так и от активных сопротивлений;

во-вторых, если в цепи с двумя параллельными ветвями, содержащими соответственно индуктивность  $L$  и емкость  $C$ , можно пренебречь активными сопротивлениями ветвей, то резонанс токов возникает при  $f_0 = 1/2\pi \sqrt{LC}$  или  $\omega_0 L = 1/\omega_0 C$ , т. е. при тех же условиях, что и резонанс напряжений.

6. При каких соотношениях между параметрами параллельного контура в нем невозможен режим резонанса? В приведенном выше выражении для частоты резонанса токов радикал, обозначенный  $A$ , окажется мнимым числом, если дробь под знаком радикала меньше нуля. Это возможно при двух ус-

ЛОВИЯХ:

$$1) L/C - R_1^2 < 0, \text{ а } L/C - R_2^2 > 0$$

или

$$2) L/C - R_1^2 > 0, \text{ а } L/C - R_2^2 < 0.$$

Таким образом, параллельный контур может иметь такие параметры (определяемые приведенными двумя условиями), при которых невозможен режим резонанса.

7. Что такое собственный резонанс индуктивности? Каждая катушка индуктивности обладает межвитковой («собственной») емкостью. Эквивалентное значение этой емкости  $C_0$  и индуктивность катушки  $L$  образуют параллельный контур с частотой собственного резонанса  $f_0 = 1/2\pi \sqrt{LC_0}$  (если пренебречь активным сопротивлением катушки).

При включении катушки в контур параллельно с конденсатором емкостью  $C$  собственная емкость  $C_0$ , складываясь с  $C$ , уменьшает резонансную частоту:

$$f_k = \frac{1}{2\pi \sqrt{L(C_0 + C)}}.$$

Так как собственная емкость не позволяет получить контур с резонансной частотой, большей  $f_0$ , то в практических условиях стремятся уменьшить емкость  $C_0$ , применяя специальные виды намоток, разделение катушки на секции и другие меры.

На высоких частотах емкость  $C_0$  и емкость монтажа иногда достаточны для получения резонансных контуров, состоящих только из катушек (без дополнительных конденсаторов).

### 11.3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

231. Неразветвленная цепь из последовательно включенных элементов  $R$ ,  $L$  и  $C$  питается от источника с напряжением  $U=110$  В и частотой  $f=200$  Гц. В цепи установился резонанс напряжений. Определить ток в цепи, падения напряжения на индуктивности, емкости и активном сопротивлении, а также емкость, если  $R=50$  Ом,  $L=0,1$  Гн. Построить векторную диаграмму и треугольник сопротивлений.

232. В условиях предыдущей задачи определить, во сколько раз напряжения на индуктивности и емкости превышают напряжение источника в режиме резонанса, если активное сопротивление уменьшено в 10 раз.

233. Для измерения индуктивности катушки  $L_K$  ее вместе с конденсатором и амперметром присоединили к выводам генератора низкой частоты, образовав неразветвленную цепь. Изменяя частоту генератора, настроили цепь в резонанс. Определить индуктивность  $L_K$ , если резонансная частота  $f_0=80$  Гц,  $C=2$  мкФ.

234. Каким должно быть внутреннее сопротивление генератора в условиях предыдущей задачи, чтобы в режиме резонанса он отдавал наибольшую мощность? Добротность контура  $Q=23$ .

235. Цепь из последовательно соединенных катушки ( $L_K$  и  $R_K$ ) и конденсатора  $C$  питается от источника с напряжением  $U=12$  В и частотой  $f=200$  Гц. Определить значение произведения  $LC$ , при котором в цепи установится резонанс и активное сопротивление катушки, если мощность источника не должна превышать 6 Вт.

236. При  $L=2$  Гн и  $C=5$  мкФ в последовательной цепи установился резонанс на частоте  $f_0'$ . Затем частота напряжения генератора уменьшилась на  $\Delta f$  и стала равна  $f_0''$ . Для восстановления резонанса изменили емкость на  $\Delta C=1$  мкФ. Определить  $f_0'$  и  $f_0''$ .

237. Для настройки цепи в резонанс напряжений последовательно с катушкой индуктивности с неизвестными параметрами ( $L_K$  и  $R_K$ )

включали поочередно различные конденсаторы  $C$ . При этом в одном из случаев ток в цепи возрос, а в другом уменьшился по сравнению с током в отсутствие конденсатора. Указать для каждого случая соотношения между реактивными сопротивлениями катушки  $X_L$  и конденсатора  $X_C$ .

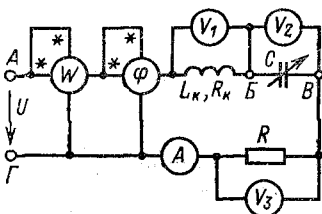


Рис. 11.12. К задаче 238

238. Как по показаниям приборов в цепи рис. 11.12 обнаружить режим резонанса при измерении переменной емкости  $C$ ?

Рассмотреть два случая: а) нельзя пренебречь  $R_K$ ; б) можно пренебречь  $R_K$ .

239. После настройки в резонанс цепи рис. 11.12, для которой можно принять  $R_K=0$ , увеличили в 2 раза частоту генератора, питающего цепь. Как это повлияет на показания приборов, если общее напряжение остается неизменным и при этом: а) добротность контура значительна ( $Q>10$ ); б) добротность контура  $Q=1$ ?

240. Неразветвленная цепь, содержащая индуктивность  $L$  и переменную емкость  $C$ , настраивается в резонанс в диапазоне частот  $f=200 \div 600$  кГц. Определить  $C_{max}$  и  $L$ , если минимальное значение емкости  $C_{min}=50$  пФ.

241. Определить резонансную частоту  $f_p$  для цепи рис. 11.13, если  $R_1=R_2=1,4$  кОм;  $L=2$  Гн;  $C=8$  мкФ. Вычислить при  $f=f_p$  токи, а так-

же активные и реактивные мощности всей цепи и ветвей, составить баланс мощностей и построить векторную диаграмму. Напряжение источника  $U=500$  В.

242. На какой частоте установится режим резонанса тока в условиях предыдущей задачи, если принять  $R_1=R_2=0$ ?

243. Активное, индуктивное и емкостное сопротивления по  $6,3$  Ом каждое присоединены параллельно к источнику переменного тока напряжением  $127$  В. Определить токи ветвей, общий ток и полное сопро-

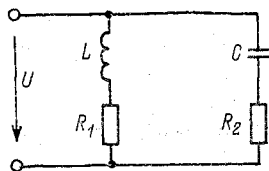


Рис. 11.13. К задаче 241

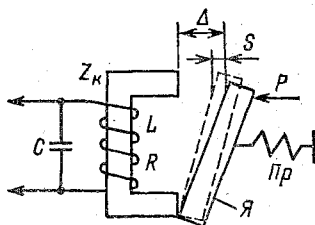


Рис. 11.14. К задаче 244

тивление цепи. Построить векторную диаграмму. Как изменится полное сопротивление  $Z$  цепи, если частоту напряжения источника увеличить в 2 раза?

244. Для контроля весьма малого перемещения  $S=0,3$  мм, вызванного увеличением нажатия  $P$  (рис. 11.14), применен индуктивный датчик, в котором перемещение якоря  $Я$  преобразуется в увеличение индуктивности  $L$  (вследствие уменьшения длины немагнитного зазора  $\Delta$ ).

Построить график изменения резонансной частоты контура  $f_p(S)$ , если  $C=0,2$  мкФ; активное сопротивление обмотки  $R=200$  Ом, максимальное значение зазора  $\Delta_{max}=0,5$  мм, а зависимость  $L(\Delta)$  дана в табл. 11.6. Объяснить применение датчика указанного типа для контроля только малых перемещений  $S$ .

Таблица 11.6

$\Delta$ , мм	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$L$ , Гн	0,4	0,3	0,24	0,20	0,172

245. В условиях предыдущей задачи построить зависимость полного сопротивления контура от перемещения якоря, т. е.  $Z_k(S)$ , если контур присоединен к источнику с частотой напряжения  $f=800$  Гц.

246. В лаборатории, где имелись вольтметры, генераторы синусои-



дальнего напряжения изменяемой (регулируемой) частоты и резисторы различного сопротивления, потребовалось измерить частоту собственного резонанса изготовленной катушки индуктивности. Составить схему измерения и указать метод измерения.

247. В ряде устройств (электронных усилителях и генераторах) параллельно обмотке трансформатора или дросселя, обозначенной на рис. 11.15, *а* как индуктивность  $L$ , присоединяют активное сопротивление  $R$ . Для указанной схемы с генератором изменяющейся частоты  $f$  ЭДС  $E$  и внутренним сопротивлением  $R_{вт}$  на рис. 11.15, *б* приведены зависимо-

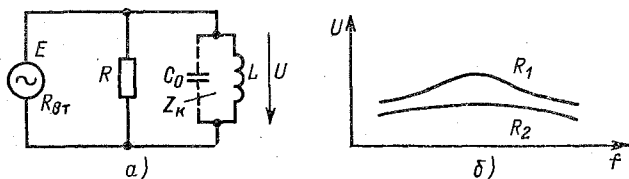


Рис. 11.15. К задаче 247

сти  $U(f)$  для двух значений  $R_1$  и  $R_2$  сопротивления (учитывается собственная емкость обмотки  $C_0$ ). Выяснить: а) соотношение между  $R_1$  и  $Z_k$ ; б) при каких соотношениях  $R_{вт}$ ,  $R$  и  $Z_k$  график зависимости  $U(f)$  наиболее близок к прямой, параллельной оси  $f$ .

248. При каких соотношениях между  $X_L$  и  $X_C$  резонансная частота контура рис. 11.16 остается одинаковой для трех положений (*а*, *б*, *в*) переключателя? Активными сопротивлениями контура пренебречь.

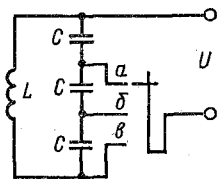


Рис. 11.16. К задаче 248

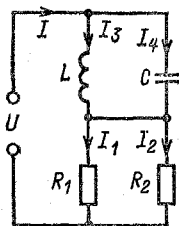


Рис. 11.17. К задаче 249

249. Определить (в общем виде) все токи в цепи рис. 11.17, принимая для контура  $LC$  режим резонанса. Активным сопротивлением катушки и конденсатора пренебречь.

250. В цепи рис. 11.18 первая и вторая ветви настроены (каждая) в режим резонанса напряжений на частотах соответственно  $f_1$  и  $f_2$ , где  $f_1 < f_2$ . Требуется:

а) установить соотношение между частотой резонанса токов для всей цепи и частотами  $f_1$  и  $f_2$ ;

б) построить качественно график зависимости полного сопротивления рассматриваемой цепи  $Z$  от частоты напряжения источника  $f$ , т.е.  $Z(f)$  для двух случаев: 1) ключ  $K$  разомкнут; 2) ключ  $K$  замкнут.

Активными сопротивлениями первой и второй ветвей пренебречь.

251. Для определения собственной емкости  $C$  катушки индуктивности с параметрами  $L_k=127,5$  мГн,  $R_k=6$  кОм ее и конденсатор емкостью  $C=1100$  пФ соединили параллельно и подключили к генератору низкой частоты. При этом оказалось, что контур имеет резонанс на частоте 10 кГц. Вычислить емкость  $C_0$ .

252. Определить частоту собственного резонанса и параметры эквивалентного контура, образованного двумя параллельно соединенными катушками индуктивности, если частота собственно резонанса каждой катушки в отдельности равна  $f_0$ , индуктивности катушек  $L_k$  и собственные емкости  $C_0$ . Активными сопротивлениями катушек пренебречь.

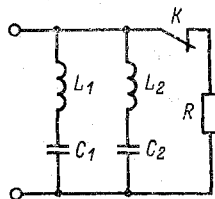


Рис. 11.18. К задаче 250

#### 11.4. ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ. 11

231. 2,2 А; 276 В; 276 В; 1108; 6,35 мкФ.

232. Приблизительно в 25 раз.

233. 2 Гн.

234. 42 Ом.

235.  $6,4 \cdot 10^{-7}$  Гн·Ф; 24 Ом.

236. 50,4 Гц; 46 Гц.

237.  $2X_L > X_C$ ;  $X_C > 2X_L$ .

238. а) По максимальным показаниям амперметра, ваттметра и третьего вольтметра и нулевым показаниям фазометра; б) дополнительно еще по равенству показаний первого и второго вольтметров.

239. а) Увеличатся показания только фазометра, остальных приборов — уменьшатся; б) увеличатся показания первого вольтметра в 1,12 раза и фазометра до  $61^\circ$ , уменьшатся показания амперметра и третьего вольтметра в 1,8 раза и ваттметра в 3,24 раза.

240. 1,41 мГн; 450 пФ.

241. 39,8 Гц; 0,34 А; 0,34 А; 0,64 А; 162 Вт; 162 Вт; 324 Вт; 57,8 вар; 57,8 вар; 0.

242. 39 Гц.

243. Все токи по 20 А; 6,3 Ом. Уменьшится до 3,5 Ом.

244. а)

$S$ , мм	0,0	0,1	0,2	0,3
$f_D$ , Гц	858	798	727	650

б) При больших значениях зазора  $\Delta$  его изменение практически не влияет на индуктивность.

245.

$S$ , мм	0,0	0,1	0,2	0,3
$Z_K$ , кОм	3,66	5,05	4,12	2,78

246. См. рис. 11.19, где  $R \gg Z_K$  и при  $f = f_D$  имеем  $U = U_{max}$ .

247. а)  $R_1 > Z_K$ ; б) либо при  $R_0 = 0$  и любых  $R$  и  $Z_K$ , либо при  $R \ll Z_K$  и  $R_0 \gg Z_K$ .

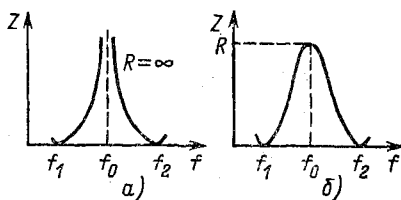
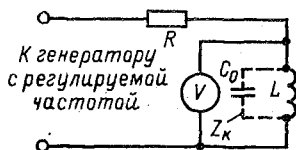


Рис. 11.19. Ответ к задаче 246

Рис. 11.20. Ответ к задаче 250

248.  $X_L = \omega L = 3X_C = 3/\omega C$ .

249.  $I = I_1 = I_2 = 0$ ;  $I_3 = U/2\pi f L$ ;  $I_4 = U2\pi f C$ .

250. а)  $f_1 < f_0 < f_2$  (рис. 11.20, а и б).

251. 170 пФ.

252.  $f_0$ ;  $L_R/2$ ;  $2C_0$ .

## ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ К РАСЧЕТУ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

### 12.1. КОМПЛЕКСНЫЕ ТОКИ, НАПРЯЖЕНИЯ И СОПРОТИВЛЕНИЯ

#### Условие задачи

Для неразветвленной цепи переменного тока, векторная диаграмма которой показана на рис. 12.1, выразить напряжения и ток комплексными числами в трех формах: алгебраической, тригонометрической и показательной, если известно  $U_1=220$  В,  $U_2=127$  В и  $I=2$  А.

#### Решение задачи

1. Проекции векторов на вещественную и мнимую оси координат. Сложение векторов, как было показано (§ 10.1), выполняется просто, если известны их проекции на оси координат. В нашем случае для напряжений  $U_1$  и  $U_2$  (рис. 12.1) имеем

$$U'_1 = U_1 \cos 60^\circ = 220 \cdot 0,5 = 110 \text{ В};$$

$$U''_1 = U_1 \sin 60^\circ = 220 \cdot 0,866 = 190,5 \text{ В};$$

$$U'_2 = 0 \text{ (проекция на ось } x);$$

$$U''_2 = U_2 = 127 \text{ В.}$$

Если оси  $x$  и  $y$  принять соответственно за оси вещественных и мнимых чисел, то напряжения  $U_1$  и  $U_2$  можно записать в комплексной алгебраической форме:

$$\underline{U}_1 = U'_1 + jU''_1 = (110 + j190,5) \text{ В};$$

$$\underline{U}_2 = 0 - jU''_2 = -j127 \text{ В.}$$

Первый из комплексов ( $\underline{U}_1$ ) изображается вектором  $\underline{U}_1$ , а второй ( $\underline{U}_2$ ) — вектором  $\underline{U}_2$ .

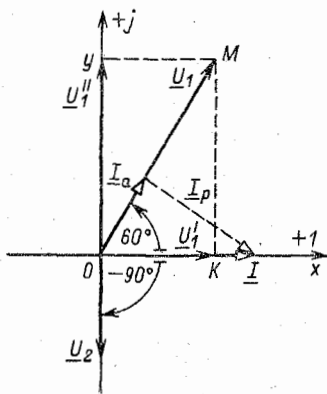


Рис. 12.1. Векторная диаграмма на комплексной плоскости

Для вектора тока, расположенного вдоль оси вещественных чисел, проекция на ось мнимых чисел равна нулю, и потому  $\underline{I} = I + j0 = I = 2 \text{ А}$ .

2. Определение модулей и аргументов. Абсолютное значение вектора, например  $\underline{U}_1$ , называемое модулем комплексной величины  $\underline{U}_1$ , определяется из треугольника  $OKM$  (рис. 12.1):

$$U_1 = \sqrt{(U'_1)^2 + (U''_1)^2}.$$

В нашем случае модули  $U_1$ ,  $U_2$  и  $I$  заданы по условию задачи.

Начальные фазы векторов, называемые аргументами комплексных величин, для  $\underline{U}_1$ ,  $\underline{U}_2$ ,  $\underline{I}$  соответственно равны  $60^\circ$ ,  $-90^\circ$ ,  $0^\circ$  (рис. 12.1).

3. Три комплексные формы записи рассматриваемых векторов. Вопрос о формах записи комплексных чисел и величин сводится к другому вопросу: какими способами можно однозначно определить вектор?

Выше было показано, что это можно сделать по проекциям на вещественную и мнимую оси и получить алгебраическую форму комплексной величины.

Если каждую из проекций вектора  $\underline{U}_1$  выразить через модуль и аргумент

$$U'_1 = U_1 \cos 60^\circ; \quad U''_1 = U_1 \sin 60^\circ,$$

то можно получить тригонометрическую форму комплексной величины

$$\underline{U}_1 = U_1 \cos 60^\circ + jU_1 \sin 60^\circ = U_1 (\cos 60^\circ + j \sin 60^\circ).$$

Известно (теорема Эйлера), что

$$\cos \alpha + j \sin \alpha = e^{j\alpha},$$

и поэтому

$$\underline{U}_1 = U_1 (\cos 60^\circ + j \sin 60^\circ) = U_1 e^{j60^\circ} = 220e^{j60^\circ} \text{ В.}$$

Последнее выражение называют показательной формой записи комплексной величины. В этой форме

$$\underline{U}_2 = U_2 e^{-j90^\circ} = 127e^{-j90^\circ} \text{ В;}$$

$$\underline{I} = Ie^{j0} = 2 \text{ А.}$$

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Зачем нужны различные формы записи комплексных чисел и величин? Показательная

форма выражает абсолютное значение комплексной величины (модуль) и направление ее вектора (аргумент). В этом проявляется наглядность показательной формы. Она удобна при умножениях и делениях комплексных величин и чисел (например, при определении полного сопротивления как отношения напряжения к току).

Однако показательная форма непригодна для аналитического сложения и вычитания комплексных величин и чисел. В этих случаях нужно пользоваться алгебраической формой.

Тригонометрическая форма связывает показательную с алгебраической и показывает переход от одной формы к другой. Переход от алгебраической формы к показательной рассматривался в задаче. Возможен и обратный переход, например

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= 220e^{j60^\circ} = 220 (\cos 60^\circ + j \sin 60^\circ) = \\ &= 220 \cdot 0,5 + j 220 \cdot 0,866 = (110 + j 190,5) \text{ В.}\end{aligned}$$

2. Как определить сопротивления участков неразветвленной цепи, ток  $I$  и напряжения  $U_1$  и  $U_2$  которых показаны на рис. 12.1?

Для участка цепи с напряжением  $U_1$  и током  $I$  комплексное сопротивление

$$\underline{Z}_1 = Z_1 e^{j\varphi_1} = \frac{U_1}{I} = \frac{220e^{j60^\circ}}{2} = 110e^{j60^\circ},$$

где  $Z_1 = 110$  — модуль комплексного сопротивления или полное сопротивление, а  $\varphi = 60^\circ$  — его аргумент. Раскладывая по формуле Эйлера, получаем

$$\underline{Z}_1 = 110 (\cos 60^\circ + j \sin 60^\circ) = 55 + j 95,3 \text{ Ом.}$$

Поскольку активное сопротивление рассматриваемого участка цепи  $R_1 = Z_1 \cos 60^\circ = 110 \cos 60^\circ$ , а реактивное сопротивление (в нашем случае индуктивное)  $X_L = Z_1 \sin 60^\circ = 110 \sin 60^\circ$ , то вещественная часть комплекса  $\underline{Z}_1$  выражает активное сопротивление  $R_1 = 55$  Ом, мнимая часть — индуктивное сопротивление  $X_L = 95,3$  Ом, т. е.  $\underline{Z}_1 = R_1 + jX_L$ .

Для участка цепи с напряжением  $U_2$  комплексное сопротивление

$$\begin{aligned}\underline{Z}_2 &= Z_2 e^{j\varphi_2} = \frac{U_2}{I} = \frac{127e^{-j90^\circ}}{2} = 63,5 (\cos 90^\circ - j \sin 90^\circ) = \\ &= -j 63,5 \text{ Ом,}\end{aligned}$$

где  $Z_2 = 63,5$  Ом и  $\varphi_2 = -90^\circ$ .

Как и следовало ожидать, на втором участке цепи, на котором напряжение отстает по фазе от тока на  $90^\circ$ , нет активного сопротивления, а его реактивное сопротивление имеет емкостный характер, поэтому  $Z_2 = X_C = 63,5 \text{ Ом}$  и  $Z_2 = -jX_C$ .

Итак, вещественная часть комплексного сопротивления выражает активное сопротивление участка, а мнимая часть — реактивное сопротивление участка, которое может быть индуктивным (положительное мнимое число) или емкостным (отрицательное мнимое число).

3. Как определить напряжение на выводах цепи? Считая, что рассматриваемая цепь состоит из двух последовательно включенных участков с напряжениями  $U_1$  и  $U_2$ , имеем напряжение на выводах

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = 110 + j190,5 - j127 = 110 + j63,5 \text{ В,}$$

его модуль

$$U = \sqrt{110^2 + 63,5^2} = 127 \text{ В.}$$

4. Как записать мгновенное значение напряжения по его комплексному значению? Для этого нужно знать максимальное значение напряжения и его начальную фазу, которые легко найти, если дано комплексное значение.

Для комплексного напряжения  $\underline{U}_1 = 220 e^{j60^\circ}$  максимальное значение  $U_{1\text{м}} = \sqrt{2} \cdot 220$  и начальная фаза  $60^\circ$ . Поэтому

$$u_1 = 220 \sqrt{2} \sin(\omega t + 60^\circ) = 311 \sin(\omega t + 60^\circ) \text{ В.}$$

5. Можно ли рассматривать вещественную и мнимую части комплексных тока и напряжения как их активные и реактивные составляющие? В этом вопросе учащиеся часто допускают ошибки.

Например, для первого участка активная составляющая тока равна проекции вектора тока  $\underline{I}$  на вектор напряжения  $\underline{U}_1$ , или в нашем случае (рис. 12.1)

$$I_a = I \cos 60^\circ = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ А,}$$

а реактивная составляющая — проекции на перпендикуляр к вектору напряжения, или

$$I_p = I \sin 60^\circ = 2 \cdot 0,866 = 1,72 \text{ А.}$$

Очевидно, что  $I_a$  и  $I_p$  в общем случае никак не связаны с вещественной и мнимой частями комплексных чисел.

Активная и реактивная составляющие напряжения  $U_1$  в данном частном случае (в нашей задаче) совпадают с вещественными и мнимыми частями комплекса  $\underline{U}_1$ , так как ток в цепи расположен по оси вещественных величин.

## 12.2. РАЗВЕТВЛЕННАЯ ЦЕПЬ, СОДЕРЖАЩАЯ ТОЛЬКО ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ВЕТВИ

### Условие задачи

Методом комплексных чисел вычислить все токи в цепи на рис. 10.1 при значениях параметров, приведенных в § 10.1.

### Решение задачи

1. Вычисление общего сопротивления цепи. Как было показано (§ 12.1, доп. вопрос 2), активное, индуктивное и емкостное сопротивления в комплексной форме записываются как  $R$ ,  $jX_L$  и  $-jX_C$ . По известным  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $X_L$  и  $X_C$  (§ 10.1) запишем комплексные сопротивления ветвей  $АВВ$  и  $АГВ$  (рис. 10.1):

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_L = (80 + j60) = 100e^{j37^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 - jX_C = (260 - j150) = 300e^{-j30^\circ} \text{ Ом}.$$

Комплексное общее сопротивление

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{100e^{j37^\circ} \cdot 300e^{-j30^\circ}}{80 + j60 + 260 - j150} = \\ &= \frac{3000e^{j7^\circ}}{34 - j9} = \frac{3000e^{j7^\circ}}{35,2e^{-j14^\circ 40'}} = 86e^{j21^\circ 40'} \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Получились те же результаты, что и в § 10.1 (доп. вопрос 4).

2. Вычисление токов. Выберем вектор заданного напряжения на выводах цепи направленным по оси положительных вещественных чисел. Тогда комплексное напряжение  $\underline{U} = U = 120 \text{ В}$ .

Комплексный общий ток

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{120}{86e^{j21^\circ 40'}} = 1,4e^{-j21^\circ 40'} \text{ А}.$$

Комплексные токи ветвей

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1} = \frac{120}{100e^{j37^\circ}} = 1,2e^{-j37^\circ} \text{ А};$$



$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_2} = \frac{120}{300 e^{-j30^\circ}} = 0,4 e^{j30^\circ} \text{ А.}$$

3. Вычисление напряжения  $U_{BG}$ . Для контура  $ABGA$  (см. рис. 10.1) по второму закону Кирхгофа

$$\underline{I}_1 R_1 + \underline{U}_{BG} - \underline{I}_2 R_2 = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} \underline{U}_{BG} &= \underline{I}_2 R_2 - \underline{I}_1 R_1 = 0,4 e^{j30^\circ} \cdot 260 - 1,2 e^{-j37^\circ} \cdot 80 = \\ &= 104 (\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ) - 96 (\cos 37^\circ - j \sin 37^\circ) = \\ &= 13,2 + j 109,6 = 112 e^{j83^\circ 10'} \text{ В.} \end{aligned}$$

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Почему вектор общего напряжения был направлен по оси вещественных чисел? Этот вопрос закономерен, если учесть, что направление вектора  $\underline{U}$  может быть выбрано произвольно.

Сделанный выбор обеспечил простое выражение для комплексной величины  $\underline{U}$  (не содержит мнимой части).

2. Каков порядок расчета цепи при заданном токе ветви или напряжении на каком-либо участке? В этом случае принимают вектор тока или напряжения (заданный) направленным по оси вещественных чисел (оси  $x$ ) и выражают этот вектор комплексным числом, которое равно действующему значению заданного тока или напряжения (начальная фаза равна нулю).

3. Какие изменения произойдут в расчете, если принято иное начальное направление вектора напряжения  $\underline{U}$ ? Если, например, принять  $\underline{U} = jU$ , т. е. расположить вектор  $\underline{U}$  в положительном направлении оси  $y$ , то все комплексные токи окажутся умноженными на  $j$ . При этом модули всех комплексов останутся прежними, а аргументы увеличатся на  $90^\circ$ , т. е. векторы повернутся на  $90^\circ$  в положительном направлении. Векторная диаграмма (см. рис. 10.2) вся повернется на  $90^\circ$  против направления движения часовой стрелки. Так как модули векторов и сдвиги по фазе между ними остаются прежними, то это и дает право выбирать произвольно направление одного из векторов.

4. Как решить рассмотренную задачу, применяя проводимости ветвей? Комплексная про-

водимость первой ветви

$$\begin{aligned} \underline{Y}_1 &= \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{R_1 + jX_L} = \frac{R_1 - jX_L}{R_1^2 + X_L^2} = \\ &= \frac{R_1}{R_1^2 + X_L^2} - j \frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2}. \end{aligned}$$

В полученном выражении легко выявить активную (вещественная часть) и реактивную (мнимая часть) проводимости или

$$\underline{Y}_1 = G_1 - jB_1.$$

Аналогичным образом можно получить комплексную проводимость второй ветви:

$$\underline{Y}_2 = G_2 - jB_2.$$

Активные и реактивные проводимости были получены для этой задачи в § 10.2, поэтому находим

$$\underline{Y}_1 = 8 \cdot 10^{-3} - j6 \cdot 10^{-3} \text{ См};$$

$$\underline{Y}_2 = 2,9 \cdot 10^{-3} + j1,7 \cdot 10^{-3} \text{ См}.$$

Комплексные проводимости можно найти и непосредственно по известным комплексным сопротивлениям:

$$\begin{aligned} \underline{Y}_1 &= \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{100e^{j37^\circ}} = 0,01e^{-j37^\circ} = 0,01 \cos(-37^\circ) + \\ &+ j0,01 \sin(-37^\circ) = 8 \cdot 10^{-3} - j6 \cdot 10^{-3} \text{ См}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{Y}_2 &= \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{300e^{-j30^\circ}} = 3,33 \cdot 10^{-3} e^{j30^\circ} = 2,9 \cdot 10^{-3} + \\ &+ j1,7 \cdot 10^{-3} \text{ См}. \end{aligned}$$

Поскольку для параллельного соединения комплексная проводимость всей цепи равна сумме комплексных проводимостей

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = 10,9 \cdot 10^{-3} - j4,3 \cdot 10^{-3} = 11,7 \cdot 10^{-3} e^{-j21^\circ 40'} \text{ См}.$$

Комплексный общий ток цепи

$$\underline{I} = \underline{U} \underline{Y} = 120 \cdot 11,7 \cdot 10^{-3} e^{-j21^\circ 40'} = 1,4 e^{-j21^\circ 40'} \text{ А}.$$

Результаты совпадают с полученными выше.

5. Как проверить результаты, полученные в задаче? Применяя комплексные числа к расчету цепей переменного тока, легко сделать проверку вычис-

лений на основе законов Кирхгофа. Проверим, например, равенство суммы комплексных токов ветвей комплексному общему току (по первому закону):

$$\underline{I}_1 = 1,2e^{-j37^\circ} = 1,2 (\cos 37^\circ - j \sin 37^\circ) = (0,96 - j0,72) \text{ А};$$

$$\underline{I}_2 = 0,4e^{j30^\circ} = 0,4 (\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ) = (0,35 + j0,2) \text{ А};$$

их сумма

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 1,31 - j0,52 = 1,4e^{-j21^\circ 40'} = \underline{I}.$$

### 12.3. РАЗВЕТВЛЕННАЯ ЦЕПЬ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМИ УЧАСТКАМИ

#### Условие задачи

Определить значение и характер (индуктивный или емкостный) реактивного сопротивления  $X$ , которое нужно включить в участок  $AB$  (рис. 12.2), чтобы вся цепь оказалась в режиме резонанса напряжений на частоте 400 Гц. Вычислить в этих условиях напряжение на выводах  $U$ , обеспечивающее ток в емкости  $I_C = 0,1 \text{ А}$ , если  $L_K = 50 \text{ мГн} = 0,05 \text{ Гн}$ ;  $R_K = 25 \text{ Ом}$ ;  $C = 0,8 \text{ мкф} = 0,8 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$ .

#### Решение задачи

1. Условие возникновения резонанса напряжений в цепи рис. 12.2. Требуемый режим ус-

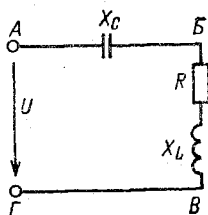
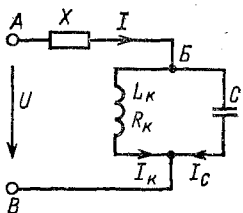


Рис. 12.2. К условию задачи 12.3

Рис. 12.3. Схема, эквивалентная показанной на рис. 12.2

танавливается в цепи из последовательно включенных индуктивного и емкостного сопротивления при  $X_L = X_C$ . Поэтому сделать вывод о требуемом реактивном сопротивлении на участке  $AB$  (рис. 12.2) можно только после определения реактивного сопротивления участка  $BB$ , т. е. параллельного контура.

Комплексное сопротивление катушки

$$\begin{aligned}\underline{Z}_K &= R_K + j\omega L_K = 25 + j2\pi \cdot 400 \cdot 0,05 = \\ &= (25 + j125) = 127,5 e^{j78^\circ 40'} \text{ Ом.}\end{aligned}$$

Реактивное сопротивление емкости

$$X'_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{10^6}{2\pi \cdot 400 \cdot 0,8} = 500 \text{ Ом.}$$

Комплексное сопротивление участка  $BB$

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{BB} &= \frac{\underline{Z}_K (-jX'_C)}{\underline{Z}_K - jX'_C} = \frac{127,5 e^{j78^\circ 40'} \cdot 500 e^{-j90^\circ}}{25 + j125 - j500} = \\ &= \frac{63750 e^{-j11^\circ 20'}}{376 e^{-j86^\circ 30'}} = 170 e^{j75^\circ 10'} = (44,3 + j164) \text{ Ом.}\end{aligned}$$

Таким образом, участок  $BB$  (рис. 12.2) может быть представлен последовательным соединением активного сопротивления 44,3 Ом (вещественная часть  $Z_{BB}$ ) и индуктивного сопротивления 164 Ом (мнимая положительная часть  $Z_{BB}$ ), что и показано на рис. 12.3. Теперь очевидно, что участок  $AB$  должен иметь емкостное реактивное сопротивление  $X_C = 164$  Ом (рис. 12.3).

2. Вычисление напряжения на выводах цепи. Поскольку задан ток в емкости  $C$  (рис. 12.2), удобно принять его направленным по вещественной оси (начальная фаза равна нулю):  $\underline{I}_C = I_C = 0,1$  А. Комплексное напряжение на параллельном контуре (рис. 12.2)

$$\underline{U}_{BB} = \underline{I}_C (-jX'_C) = 0,1 (-j500) = -j50 = 50 e^{-j90^\circ} \text{ В.}$$

Далее определим комплексный ток в катушке индуктивности

$$\underline{I}_K = \frac{\underline{U}_{BB}}{\underline{Z}_K} = \frac{50 e^{-j90^\circ}}{127,5 e^{j78^\circ 40'}} = 0,39 e^{-j168^\circ 40'} = (-0,385 - j0,077) \text{ А}$$

и комплексный общий ток

$$\begin{aligned}\underline{I} &= \underline{I}_C + \underline{I}_K = 0,1 - 0,385 - j0,077 = \\ &= (-0,285 - j0,077) \text{ А.}\end{aligned}$$

Комплексное напряжение на выводах цепи  $\underline{U} = \underline{I} \underline{Z}_{AB}$ , где комплексное сопротивление (рис. 12.3)

$$\underline{Z}_{AB} = R + jX_L - jX_C = 44,3 + j164 - j164 = 44,3 \text{ Ом.}$$

Таким образом,

$$\underline{U} = \underline{I} \underline{Z}_{AB} = (-0,285 - j0,077) \cdot 44,3 = (-12,6 - j3,4) \text{ В}$$

$$U = \sqrt{12,6^2 + 3,4^2} \approx 13 \text{ В.}$$

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Как составить баланс комплексных мощностей? При расчете цепи комплексным методом обычно известны комплексные токи и напряжения, что имеет место и в данной задаче.

При этом для любого участка цепи с напряжением  $\underline{U}$  и током  $\underline{I}$  комплексная мощность  $\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^*$ , где  $\underline{I}^*$  — сопряженный комплексный ток рассматриваемого участка.

Если для величины  $\underline{S}$  вычислить ее вещественную и мнимую части, то оказывается, что первая из них выражает активную мощность  $P$ , а вторая — реактивную мощность  $Q$ , т. е.

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = P + jQ.$$

Воспользуемся этой формулой для составления баланса мощностей цепи рис. 12.2.

Комплексная мощность катушки индуктивности

$$\begin{aligned} \underline{S}_K &= \underline{U}_{BB} \underline{I}_K^* = 50 e^{-j90^\circ} \cdot 0,39 e^{j168^\circ 40'} = 19,5 e^{j78^\circ 40'} = \\ &= 19,5 (\cos 78^\circ 40' + j \sin 78^\circ 40') = 19,5 (0,19 + j0,975) = \\ &= 3,85 + j19,2 \text{ В} \cdot \text{А}, \end{aligned}$$

откуда для катушки индуктивности

$$S_K = 19,5 \text{ В} \cdot \text{А}; \quad P_K = 3,85 \text{ Вт}; \quad Q_K = 19,2 \text{ вар.}$$

Аналогично для емкости  $C$

$$\begin{aligned} \underline{S}_C &= \underline{U}_{BB} \underline{I}_C^* = 50 e^{-j90^\circ} \cdot 0,1 = -j5 \text{ В} \cdot \text{А}, \\ \underline{S}_C &= 5 \text{ В} \cdot \text{А}; \quad P_C = 0 \text{ и } Q_C = -5 \text{ вар.} \end{aligned}$$

Для участка с реактивным сопротивлением  $X$  вначале найдем напряжение

$$\underline{U}_X = jXI = -j164(-0,285 - j0,077) = -12,6 + j47 \text{ Ом},$$

а затем комплексную мощность

$$\underline{S}_X = \underline{U}_X \underline{I}^* = (-12,6 + j47)(-0,285 + j0,077) = -j14,3 \text{ В} \cdot \text{А},$$

откуда

$$S_x = 14,3 \text{ В} \cdot \text{А}; \quad P_x = 0 \text{ и } Q_x = -14,3 \text{ вар.}$$

При полученных данных общая комплексная мощность всех пассивных элементов цепи

$$\underline{S}_п = \underline{S}_к + \underline{S}_C + \underline{S}_x = 3,85 + j19,2 - j5 - j14,3 \approx 3,85 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

Реактивная мощность цепи оказалась равной нулю, так как цепь находится в режиме резонанса.

Комплексная мощность источника питания

$$\underline{S}_и = \underline{U} \underline{I}^* = (-12,6 - j3,4)(-0,285 + j0,077) = 3,85 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

Следовательно, комплексные мощности приемников и источника энергии  $\underline{S}_п = \underline{S}_и$ , т. е. имеет место баланс мощностей.

2. В каких случаях реактивная мощность  $Q > 0$  и в каких  $Q < 0$ ? В предыдущем дополнительном вопросе оказалось, что реактивная мощность индуктивности выражается положительным числом, а емкости — отрицательным. Случайно ли это? Оказывается, нет.

В гл. 9 было показано, что реактивная мощность  $Q = XI^2$ , а реактивное сопротивление  $X = X_L - X_C$ .

Следовательно,

$$Q = (X_L - X_C) I^2 = X_L I^2 - X_C I^2 = Q_L - Q_C,$$

т. е. для индуктивности  $Q' = Q_L > 0$ , а для емкости  $Q'' = -Q_C < 0$ .

3. Можно ли вычислить комплексные мощности, если известны действующие (а не комплексные) токи цепи? Если по условию задачи определяются только действующие значения токов (и, очевидно, известны параметры цепи), то по-прежнему имеется возможность вычислить мощности в комплексной форме, и в ряде случаев это оказывается удобным. Такая возможность реализуется на основе алгебраической формы записи комплексной мощности в виде  $\underline{S} = P + jQ$ .

Покажем этот путь расчета для рассматриваемой цепи (рис. 12.2).

Мощности катушки индуктивности:  
активная

$$P_R = R_R I_k^2 = 25 (0,39)^2 = 3,85 \text{ Вт};$$

реактивная

$$Q_k = X_L I_k^2 = 125 (0,39)^2 = 19,2 \text{ вар,}$$

откуда ее комплексная мощность

$$\underline{S}_k = P_k + jQ_k = 3,85 + j19,2 \text{ В}\cdot\text{А.}$$

Аналогично для емкости  $C$

$$P_c = 0; \quad Q_c = X_c I_c^2 = 500 (0,1)^2 = 5 \text{ вар;}$$

$$\underline{S}_c = P_c - jQ_c = -j5 \text{ В}\cdot\text{А}$$

и для реактивного элемента  $X$

$$P_x = 0; \quad Q_x = X I^2 = 164 (0,295)^2 \approx 14,3 \text{ вар,}$$

где ток  $I$  найден как модуль комплексного тока  $\underline{I}$ , т. е.

$$I = \sqrt{(0,285)^2 + (0,077)^2} = 0,295 \text{ А.}$$

При этом

$$\underline{S}_x = P_x - jQ_x = -j14,3 \text{ В}\cdot\text{А.}$$

Результаты совпали с ранее полученными.

4. Как вычислить комплексную мощность разветвленного участка цепи? Выражение комплексной мощности  $\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^*$  удобно универсальностью применения, а именно: его можно использовать, во-первых, для активных и пассивных элементов цепи (см. доп. вопрос 1) и, во-вторых, для участка с любой комбинацией этих элементов.

В качестве примера вычислим для цепи рис. 12.2 комплексную мощность разветвленного участка  $BB$ .

Так как по эквивалентному сопротивлению участка  $BB$  проходит общий ток цепи

$$\underline{I} = -0,285 - j0,077 \text{ А,}$$

то комплексная мощность этого участка

$$\underline{S}_{BB} = \underline{U}_{BB} \underline{I}^* = 50e^{-j90^\circ} (-0,285 + j0,077) = -j50(-0,285 + j0,077) = 3,85 + j14,2 \text{ В}\cdot\text{А.}$$

Сравним полученный результат с данными из доп. вопроса 1 к этой задаче.

Оказывается,

$$\underline{S}_k + \underline{S}_c = 3,85 + j19,2 - j5 = 3,85 + j14,2 = \underline{S}_{BB},$$

что подтверждает правильность вычислений.

## 12.4. СЛОЖНАЯ ЦЕПЬ

### Условие задачи

Два параллельно включенных генератора (рис. 12.4), ЭДС которых  $E_1 = 118$  В и  $E_2 = 124$  В, совпадают по фазе и питают внешнюю цепь с активно-индуктивным сопротивлением  $Z = 0,5 + j0,3$  Ом. Внутренние сопротивления генераторов чисто индуктивные:

$$\underline{Z}_{01} = \underline{Z}_{02} = \underline{Z}_0 = j0,05 \text{ Ом.}$$

Требуется определить все токи цепи (рис. 12.4) и ток во внешней цепи при значениях ее сопротивления  $\underline{Z}_н$ , равных  $2Z$ ,  $Z$ ,  $Z/2$  и  $Z/4$ .

### Решение задачи

1. Выбор метода расчета. Применение комплексных чисел позволяет пользоваться любым из методов расчета сложной цепи постоянного тока (см. гл. 4).

Учитывая, что заданная цепь имеет два узла, применим метод двух узлов для ответа на первый вопрос задачи. Определение тока в одном из участков сложной цепи для нескольких значений сопротивления участка (второй вопрос задачи), как известно, целесообразно выполнить методом эквивалентного генератора.

2. Вычисление проводимостей ветвей. Комплексные проводимости ветвей

$$\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = 1/\underline{Z}_0 = 1/j0,05 = -j20 \text{ См;}$$

$$\underline{Y}_3 = \frac{1}{Z} = \frac{1}{0,5 + j0,3} = \frac{0,5 - j0,3}{0,34} = (1,47 - j0,88) \text{ См.}$$

3. Вычисление напряжения между узлами и токов ветвей. Комплексное узловое напряжение

$$\begin{aligned} \underline{U}_{AB} &= \frac{E_1 \underline{Y}_1 + E_2 \underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = \frac{118(-j20) + 124(-j20)}{-j20 - j20 + 1,47 - j0,88} = \\ &= \frac{-j4840}{1,47 - j40,88} = (118,25 - j4,25) \text{ В.} \end{aligned}$$

Комплексные токи ветвей:

$$\underline{I}_1 = (\underline{E}_1 - \underline{U}_{AB}) \underline{Y}_1 = (118 - 118,25 + j4,25)(-j20) =$$

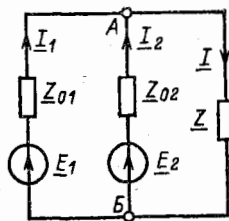


Рис. 12.4. К условию задачи 12.4



$$\begin{aligned}
 &= 84,8 + j5,0 = 85e^{j3^{\circ}20'} \text{ А}; \\
 \underline{I}_2 &= (\underline{E}_2 - \underline{U}_{AB}) \underline{Y}_2 = (124 - 118,25 + j4,25)(-j20) = \\
 &= 84,8 - j115,0 = 142e^{-j53^{\circ}30'} \text{ А}; \\
 \underline{I} &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 84,8 + j5,0 + 84,8 - j115,0 = \\
 &= 169,6 - j110,0 = 202,5e^{-j33^{\circ}} \text{ А}.
 \end{aligned}$$

4. Вычисление тока внешней цепи при различных значениях ее сопротивления. По методу эквивалентного генератора ток

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}_g}{\underline{Z}_g + \underline{Z}}, \quad (12.1)$$

где  $\underline{E}_g$  и  $\underline{Z}_g$  — ЭДС и внутреннее сопротивление эквивалентного генератора;  $\underline{Z} = \underline{Z}_H$  — сопротивление изменяющейся нагрузки. Электродвижущая сила  $\underline{E}_g$  определяется в наших условиях как напряжение между точками  $A$  и  $B$  (рис. 12.4) при отключенной внешней цепи ( $\underline{Z}_H = \infty$ ;  $I = 0$ ).

При отключении участка с сопротивлением  $Z = Z_H$  (рис. 12.4) остается одноконтурная цепь с двумя ЭДС ( $\underline{E}_1$  и  $\underline{E}_2$ ). Принимая для этой цепи ток равным  $\underline{I}'$ , определим напряжение между точками  $A$  и  $B$ , которое равно ЭДС эквивалентного генератора:

$$\underline{U}'_{AB} = \underline{E}_g = \underline{E}_1 - \underline{I}' \underline{Z}_{01} = \underline{E}_1 - \frac{\underline{E}_1 - \underline{E}_2}{\underline{Z}_{01} + \underline{Z}_{02}} \underline{Z}_{01},$$

откуда

$$\underline{E}_g = (\underline{E}_1 + \underline{E}_2)/2,$$

так как

$$\underline{Z}_{01} = \underline{Z}_{02} = \underline{Z}_0.$$

Внутреннее сопротивление эквивалентного генератора  $\underline{Z}_g$  образуется двумя одинаковыми сопротивлениями  $\underline{Z}_{01} = \underline{Z}_{02}$  включенными параллельно относительно точек  $A$  и  $B$  (рис. 12.4), и потому  $\underline{Z}_g = \underline{Z}_0/2$ .

Подставляя найденные значения  $\underline{E}_g$  и  $\underline{Z}_g$  в уравнение (12.1), получаем при любом сопротивлении нагрузки  $\underline{Z}_H$

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}_1 + \underline{E}_2}{\underline{Z}_0 + 2\underline{Z}_H} = \frac{118 + 124}{j0,05 + 2\underline{Z}_H} = \frac{242}{j0,05 + 2\underline{Z}_H}.$$

В частности, при  $\underline{Z}_H = \underline{Z}$

$$\underline{I}_{(Z)} = \frac{242}{j0,05 + 2(0,5 + j0,3)} = \frac{242}{1,93e^{j33^\circ}} = 202,5e^{-j33^\circ} \text{ А.}$$

Полученное значение  $\underline{I}$  совпадает с ранее найденным и может служить проверкой правильности результатов.

Аналогично находим токи при  $\underline{Z}_H$ , равном  $2Z$ ;  $0,5Z$  и  $0,25Z$ , а именно:  $102,5e^{-j31^\circ 50'}$ ,  $397e^{-j35^\circ}$  и  $757e^{-j38^\circ 30'}$  А.

### Дополнительный вопрос к задаче

Как проверить расчеты при помощи баланса мощностей? Комплексная мощность первого генератора

$$\begin{aligned} \underline{S}_1 &= \underline{E}_1 \underline{I}_1^* = 118 \cdot 85,0e^{-j3^\circ 20'} = 10\,020 (\cos 3^\circ 20' - j \sin 3^\circ 20') = \\ &= (10\,000 - j580) \text{ В} \cdot \text{А} = (10,0 - j0,58) \text{ кВ} \cdot \text{А}, \end{aligned}$$

откуда для первого генератора

$$S_1 = 10,02 \text{ кВ} \cdot \text{А}; \quad P_1 = 10,0 \text{ кВт}, \quad Q = -0,58 \text{ квар.}$$

Аналогично для второго генератора

$$\begin{aligned} \underline{S}_2 &= \underline{E}_2 \underline{I}_2^* = 124 \cdot 142e^{j53^\circ 30'} = 17\,600e^{j53^\circ 30'} = \\ &= (10\,500 + j14\,200) \text{ В} \cdot \text{А}, \end{aligned}$$

откуда

$$S_2 = 17,60 \text{ кВ} \cdot \text{А}; \quad P_2 = 10,5 \text{ кВт}; \quad Q_2 = 14,2 \text{ квар.}$$

Активная мощность обоих генераторов

$$P_1 + P_2 = 10,0 + 10,5 = 20,5 \text{ кВт.}$$

## 12.5. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

253. По векторной диаграмме рис. 12.5 составить комплексные ток и напряжение, если их действующие значения соответственно 2 А и 127 В.

254. Ток в цепи выражается комплексом  $-j 30$  мА. Комплексное напряжение на выводах цепи имеет модуль 120 В и аргумент  $-\pi$ . Записать мгновенные значения тока и напряжения; построить векторную диаграмму.

255. Комплексные значения тока и напряжения предыдущей задачи умножить соответственно на  $j$  и  $-j$ . Для полученных новых комплексных величин построить векторную диаграмму.

256. Построить векторы напряжений, для которых  $\underline{U}_1 = (110 + j190) \text{ В}$ ,

$\underline{U}_2 = -220$  В и  $\underline{U}_3 = (110 - j190)$  В. Вычислить сдвиги по фазе между напряжениями.

257. Мгновенные значения токов двух ветвей электрической цепи равны  $i_1 = 12\sin(\omega t - 30^\circ)$  и  $i_2 = 8\sin(\omega t + 30^\circ)$ . Выразить в трех формах (алгебраической, тригонометрической и показательной) комплексный общий ток двух ветвей; построить векторную диаграмму.

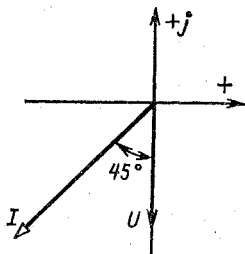


Рис. 12.5. К задаче 253

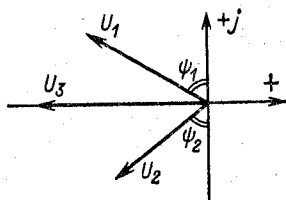


Рис. 12.6. К задаче 258

258. Для неразветвленной цепи из трех последовательно соединенных участков с напряжениями  $U_1 = 100$  В,  $U_2 = 80$  и  $U_3 = 120$  В (векторная диаграмма на рис. 12.6) выразить комплексы  $\underline{U}_1$ ,  $\underline{U}_2$  и  $\underline{U}_3$ , если  $\psi_1 = 60^\circ$ , а  $\psi_2 = 50^\circ$ . Записать мгновенное значение напряжения на выводах  $u$  и построить его вектор  $\underline{U}$  на диаграмме.

259. Каким должно быть напряжение  $\underline{U}_2$  в условиях предыдущей задачи, чтобы  $\underline{U}_3 = \underline{U}_1 + \underline{U}_2$ ?

260. Активная и реактивная составляющие тока в цепи одинаковы и равны по 14,1 А. Напряжение на выводах цепи отстает по фазе от тока и выражается комплексом  $\underline{U} = Ue^{-j45^\circ}$ . Составить выражение для комплексного тока.

261. Напряжение на выводах цепи имеет активную составляющую 63,5 В и реактивную 109,2 В. Начальная фаза тока в цепи  $120^\circ$ . Составить выражение для комплексного напряжения, если последнее опережает по фазе ток.

262. Как нужно изменить начальную фазу тока в условиях предыдущей задачи, чтобы активная и реактивная составляющие напряжения выражали соответственно вещественную и мнимую части комплексного напряжения?

263. Ток в цепи и напряжение на ее выводах выражаются соответственно как  $(-0,684 + j1,88)$  А и  $(60 + j103,4)$  В. Вычислить действующие значения тока и напряжения, активное и реактивное сопротивления цепи. Выразить в комплексной форме сопротивление цепи.

264. Вычислить активное сопротивление и индуктивность катушки

на частоте 50 Гц; если ее комплексное сопротивление  $\underline{Z}_K = 240,8e^{j51^\circ 30'}$  Ом.

265. Комплексное сопротивление цепи  $\underline{Z} = \left( \frac{5}{4 + j3} + j2 \right)$  Ом. Составить эквивалентную схему цепи при частоте 100 кГц.

266. Полное сопротивление цепи составляет  $(5 - j6)$  Ом. Какое сопротивление нужно включить в цепь, чтобы ее активное сопротивление численно равнялось реактивному?

267. В цепи из последовательно включенных сопротивлений  $R = 10$  Ом;  $X_L = 25$  Ом;  $X_C = 15$  Ом известен комплексный ток  $\underline{I} = -12$  А. Вычислить комплексные напряжения на каждом сопротивлении и на выводах цепи; построить векторную диаграмму.

268. Для цепи предыдущей задачи вычислить комплексную мощность.

269. Три сопротивления, каждое из которых равно 100 Ом, соединены последовательно. Напряжения на этих сопротивлениях опережают по фазе ток на  $20^\circ$ ,  $40^\circ$  и  $70^\circ$ . Вычислить полное сопротивление цепи и коэффициент мощности.

270. В цепи из последовательно включенных двух одинаковых катушек и конденсатора известны ток  $I = 8$  А, напряжение на выводах  $U = 110$  В, активная мощность  $P = 530$  Вт. Составить комплексные выражения для сопротивлений катушки и конденсатора, а также для полной мощности, если емкостное сопротивление равно индуктивному сопротивлению каждой катушки.

271. Составить комплексные выражения для сопротивлений отдельных участков и всей цепи по топографической диаграмме (рис. 12.7);

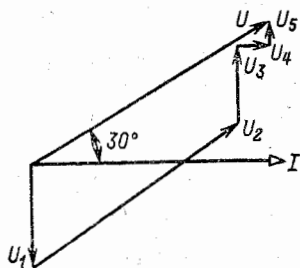


Рис. 12.7. К задаче 271

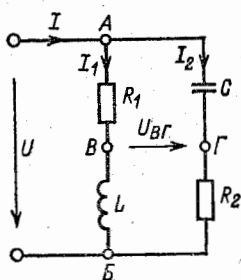


Рис. 12.8. К задаче 279

для которой  $U = 220$  В;  $U_1 = 80$  В;  $U_3 = 62$  В;  $U_4 = 25$  В;  $U_5 = 18$  В;  $I = 1$  А.

272. Определить комплексное значение сопротивления, которое нужно включить последовательно в цепь, рассмотренную в предыдущей задаче, чтобы в цепи установился режим резонанса напряжений.

273. Активное сопротивление  $R=30$  Ом, индуктивное  $X_L=40$  Ом и емкостное  $X_C=25$  Ом соединены параллельно. Вычислить активное и реактивное сопротивления эквивалентной последовательной схемы замещения.

274. Для цепи предыдущей задачи вычислить токи ветвей и общий ток, если напряжение на выводах  $\underline{U}=120e^{j30^\circ}$  В. Построить векторную диаграмму.

275. Активное, индуктивное и емкостное сопротивления по 200 Ом каждое присоединены параллельно к выводам источника напряжением 120 В. Вычислить ток источника.

276. Группа потребителей с активно-индуктивной нагрузкой присоединена к сети переменного тока напряжением 220 В. Общий ток потребителей 66 А, их активная мощность 9 кВт. Для улучшения коэффициента мощности до 0,95 параллельно потребителям присоединена конденсаторная установка. Определить реактивное сопротивление конденсаторной установки и составить комплексные выражения для тока потребителей, тока емкости и общего тока сети, приняв комплексное напряжение сети вещественным положительным числом.

277. Три сопротивления, комплексные выражения которых  $\underline{Z}_1=(100+j60)$  Ом,  $\underline{Z}_2=(40-j60)$  Ом и  $\underline{Z}_3=120$  Ом, соединены параллельно. Напряжение на выводах цепи  $\underline{U}=120$  В. Определить комплексные токи ветвей, общий ток цепи, а также полную мощность. Построить векторы всех токов и напряжения.

278. Какое сопротивление нужно включить в неразветвленную часть цепи из предыдущей задачи, чтобы установился режим резонанса напряжений?

279. В цепи рис. 12.8 известны токи ветвей  $I_1=0,8$  А;  $I_2=0,6$  А. Ток  $I_1$  отстает по фазе от тока  $I_2$  на угол  $50^\circ$ . Вычислить напряжения  $U$  и  $U_{BG}$ , если  $R_1=25$  Ом,  $X_L=15$  Ом.

280. Для цепи рис. 12.8 составить в общем виде комплексное сопротивление при условии, что  $X_L=X_C=X$ .

281. Вычислить все токи в цепи рис. 12.9, а также напряжения на участках  $AB$  и  $BB$ , если  $R_2=X_L=500$  Ом;  $X_C=1000$  Ом;  $R_1=200$  Ом;  $U=120$  В.

282. Вычислить напряжения на участках  $AB$  и  $BB$  (рис. 12.10), а также на выводах цепи  $AB$ , если по сопротивлению  $R_1$  проходит ток 1,4 А. Параметры цепи:  $C=3$  мкФ;  $L=0,2$  Гн;  $R_1=100$  Ом;  $R=20$  Ом;  $f=160$  Гц.

283. В предыдущей задаче принять известным общий ток (1,46 А) вместо тока ветви и вычислить напряжение на выводах цепи.

284. Для цепи рис. 12.11 найти в общем виде, при каком сопротивлении  $R_2$  сдвиг по фазе между напряжением  $U$  и током  $I_3$  на частоте  $\omega$  составит  $90^\circ$ .

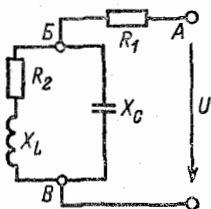


Рис. 12.9. К задаче 281

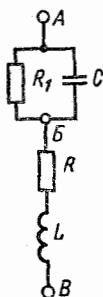


Рис. 12.10. К задаче 282

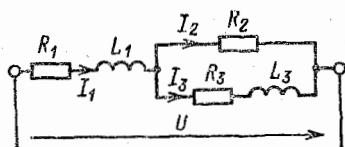


Рис. 12.11. К задаче 284

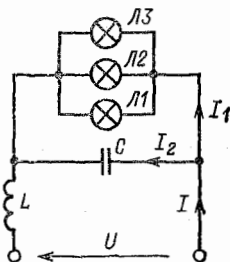


Рис. 12.12. К задаче 285

285. В схеме Бушера (рис. 12.12) можно обеспечить неизменный ток  $I_1$  при различном числе включенных ламп. Вывести необходимое для этого соотношение между  $\omega$ ,  $L$  и  $C$ , применив законы Кирхгофа.

286. Два параллельно включенных генератора с внутренними сопротивлениями  $Z_{01} = Z_{02} = j0,2$  Ом и ЭДС  $E_1 = 120$  В;  $E_2 = 126$  В имеют общую нагрузку. Комплексное сопротивление приемника  $Z = (2 + j)$  Ом. Вычислить комплексные токи приемника и генераторов.

287. Определить комплексные токи в условиях предыдущей задачи, если ЭДС  $E_2 = jE_1$ .

## 12.6. ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ. 12

253.  $2e^{-j135^\circ}$  А;  $127e^{-j90^\circ}$  В.

254.  $30\sqrt{2}\sin(\omega t - 90^\circ)$  мА;  $120\sqrt{2}\sin(\omega t - 180^\circ)$  В.

255. 30 мА; 120 В.

256.  $120^\circ$ .

257.  $12,3e^{-j6^\circ 30'} = 12,3\cos(-6^\circ 30') + j12,3\sin(-6^\circ 30') = 12,2 - j1,4$ .

258.  $(-86,6 + j50)$  В;  $(-61,2 - j51,5)$  В;  $-120$  В;  $376 \times \sin(\omega t - 180^\circ)$  В.

259.  $60e^{-j124^\circ}$  В.  
 260. 20 А.  
 261. -127 В.  
 262. Уменьшить до 0.  
 263. 2 А; 120 В; 38,3 Ом; -46 Ом;  $60e^{-j50^\circ}$  Ом.  
 264. 150 Ом; 0,6 Гн.  
 265. 0,8 Ом; 2,23 мкГн.  
 266. Активное или индуктивное 1 Ом либо индуктивное 11 Ом.  
 267. -120 В;  $-j300$  В;  $j180$  В;  $(-120-j120)$  В.  
 268.  $(1440+j1440)$  В·А.  
 269. 285 Ом; 0,72.  
 270.  $(4,14+j11)$  Ом;  $-j11$  Ом;  $(530+j700)$  В·А.  
 271.  $-j80$  Ом;  $(165+j110)$  Ом;  $j62$  Ом; 25 Ом;  $j18$  Ом;  $(190+j110)$  Ом.  
 272.  $-j110$  Ом.  
 273. 24,8 Ом; -11,5 Ом.  
 274. 4 А;  $3e^{-j60^\circ}$  А;  $4,8ej^{120^\circ}$  А;  $4,4ej^{24^\circ 10'}$  А.  
 275. 0,6 А.  
 276. -5,8 Ом;  $66e^{-j51^\circ 40'}$  А;  $j37,9$  А;  $43e^{-j18^\circ 10'}$  А.  
 277.  $(0,883-j0,53)$  А;  $(0,924+j1,38)$  А; 1 А;  $(2,8+j0,85)$  А;  $(336+j102)$  В·А.  
 278. Индуктивное 11,9 Ом.  
 279. 23 В; 12,8 В.  
 280.  $\frac{R_1 R_2 - X^2}{R_1 + R_2} + j \frac{R_2 X - R_1 X}{R_1 + R_2}$ .  
 281. 0,1 А; 0,14 А; 0,1 А; 20 В; 100 В.  
 282. 140 В; 290 В; 300 В.  
 283. 310 В.  
 284.  $R_2 = \frac{\omega^2 L_1 L_3 - R_1 R_3}{R_1 + R_3}$ .  
 285.  $\omega^2 LC = 1$ .  
 286.  $53e^{-j28^\circ}$  А;  $23,7e^{-j6^\circ}$  А;  $36,2e^{-j49^\circ 15'}$  А.  
 287.  $37ej^{14^\circ 35'}$  А;  $418e^{-j135^\circ}$  А;  $453ej^{42^\circ}$  А.

## Глава тринадцатая

# ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С ВЗАИМНОЙ ИНДУКТИВНОСТЬЮ

### 13.1. ЛИНЕЙНЫЙ ТРАНСФОРМАТОР

Две катушки с параметрами  $R_1=10$  Ом,  $L_1=4$  мГн и  $R_2=15$  Ом,  $L_2=7$  мГн размещены на общем сердечнике из ферромагнитного материала (рис. 13.1, а) и связаны

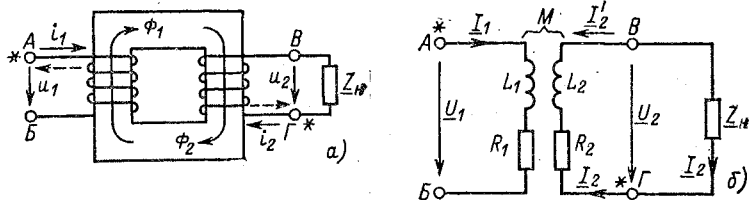


Рис. 13.1. Двухобмоточный трансформатор (а) и его схема замещения (б)

общим магнитным потоком, образующим взаимную индуктивность обеих катушек  $M=2$  мГн. К первой катушке подведено напряжение  $U_1=14$  В частотой  $\omega=10^4$  рад/с, а ко второй присоединено сопротивление нагрузки  $\underline{Z}_H=15-j30$  Ом.

Определить токи катушек и построить векторные диаграммы для трех режимов нагрузки: а) холостого хода (сопротивление  $\underline{Z}_H$  отсоединено); б) короткого замыкания (выводы В и Г замкнуты накоротко, или  $\underline{Z}_H=0$ ); в) при заданной нагрузке  $\underline{Z}_H$ . Намотку второй катушки принять согласованной с направлением магнитного потока  $\Phi_2$ .

### Решение задачи

1. Линейный трансформатор и его схема замещения. Примером индуктивно связанной цепи служит трансформатор, состоящий в простейшем случае (рис. 13.1 а) из двух электрически не соединенных и неподвижных относительно друг друга катушек, называемых обмотками трансформатора и связанных между собой магнитно, т. е. путем взаимной индукции.

В заданном трансформаторе (рис. 13.1 а) нет ферромагнитного сердечника, поэтому он обладает линейными характеристиками. Такой трансформатор условно называют линейным, или упрощенно — воздушным.

Обмотка трансформатора, присоединенная к источнику питания, называется первичной цепью, а другая обмотка — вторичной. Обе цепи и их магнитная связь (взаимная индуктивность  $M$ ) показаны на схеме замещения (рис. 13.1, б), где обозначены (звездочками) два вывода (А и Г), имеющие следующие свойства. Если токи  $i_1$  и  $i_2$  направить (рис. 13.1, а, сплошные стрелки) от одного обозначенного звездочкой вывода к другому, то в каждой обмотке



ее собственный магнитный поток (поток самоиндукции), например  $\Phi_1$ , и чужой магнитный поток (поток взаимодукиции), составляющий часть  $\Phi_2$ , совпадают по направлению (рис. 13.1, *a*). Такие выводы (*A* и *Г*, рис. 13.1, *a*) называются одноименными, а токи ( $i_1$  и  $i_2$ ), направленные одинаково относительно этих выводов, — согласно включенными.

Если направление одного тока ( $i_1$  или  $i_2$ ) изменить на обратное (по пунктирной стрелке на рис. 13.1, *a*), то при этом токи окажутся разнонаправленными относительно одноименных выводов: ток со сплошной стрелкой отходит от вывода со звездочкой, а ток с пунктирной стрелкой подходит к нему. Такие токи являются встречно включенными, в чем можно убедиться по магнитным потокам  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  (рис. 13.1, *a*), из которых один изменяет направление на противоположное (в соответствии с током) и оказывается действующим навстречу другому потоку.

*Таким образом, токи, одинаково направленные относительно одноименных выводов, образуют согласное включение, а разнонаправленные — встречное.*

Ток первой обмотки  $i_1$  образует во второй обмотке ЭДС взаимодукиции  $e_{M2}$ , и аналогично ток второй обмотки  $i_2$ , образует в первой обмотке ЭДС  $e_{M1}$ , определяемые для мгновенных значений

$$\left. \begin{aligned} e_{M2} &= \mp M \, di_1/dt \\ \text{и} \\ e_{M1} &= \mp M \, di_2/dt, \end{aligned} \right\} \quad (13.1)$$

где знаки «—» и «+» относятся соответственно к согласному и встречному включениям токов  $i_1$  и  $i_2$ . С учетом того, что для синусоидального тока, представляемого комплексным током  $\underline{I}$ , производная  $di/dt$  отображается произведением  $j\omega \underline{I}$  формулы (13.1) для комплексных ЭДС и токов запишутся как

$$\left. \begin{aligned} \underline{E}_{M2} &= \mp j\omega M \underline{I}_1 = \mp jX_M \underline{I}_1 \\ \text{и} \\ \underline{E}_{M1} &= \mp j\omega M \underline{I}_2 = \mp jX_M \underline{I}_2, \end{aligned} \right\} \quad (13.2)$$

где  $X_M = \omega M$  — реактивное сопротивление взаимной индуктивности.

2. Сопротивления обмоток трансформатора. При отсутствии взаимной индуктивности первичная

обмотка трансформатора имеет комплексное сопротивление

$$\begin{aligned}\underline{Z}_1 &= R_1 + j\omega L_1 = 10 + j10^4 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 10 + j40 = \\ &= 41,2 \angle 76^\circ \text{ Ом},\end{aligned}$$

а вторичная обмотка

$$\begin{aligned}\underline{Z}_2 &= R_2 + j\omega L_2 = 15 + j10^4 \cdot 7 \cdot 10^{-3} = \\ &= 15 + j70 = 71,5 \angle 78^\circ \text{ Ом}.\end{aligned}$$

Сопротивление взаимной индуктивности двух обмоток

$$X_M = \omega M = 10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 20 \text{ Ом}.$$

3. Режим холостого хода трансформатора. В этом режиме отключено сопротивление  $\underline{Z}_H$  (рис. 13.1, б) и ток вторичной цепи  $\underline{I}_2 = 0$ . В соответствии с формулой (13.2) наводимая в первичной цепи током  $\underline{I}_2$  ЭДС взаимной индукции  $\underline{E}_{M1} = j\omega M \underline{I}_2 = j\omega M \cdot 0 = 0$ . Следовательно, вторичная цепь не оказывает никакого влияния на первичную и для последней имеем уравнение по второму закону Кирхгофа, учитывающее только падения напряжения на активном и индуктивном сопротивлениях:  $R_1 \underline{I}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 = \underline{U}_1$ , или

$$(R_1 + j\omega L_1) \underline{I}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 = \underline{U}_1, \quad (13.3)$$

Определим  $\underline{I}_1 = \underline{U}_1 / \underline{Z}_1$  при найденном выше значении  $\underline{Z}_1 = 41,2 \angle 76^\circ \text{ Ом}$ , приняв  $\underline{U}_1 = U_1 \angle 0^\circ = 14 \angle 0^\circ$ , или  $\underline{I}_1 = 14 \angle 0^\circ / 41,2 \angle 76^\circ = 0,34 \angle -76^\circ \text{ А}$ .

Этот ток образует во вторичной цепи ЭДС взаимной индукции в соответствии с формулой (13.2), которая при наших данных будет

$$\begin{aligned}\underline{E}_{M2} &= -j\omega M \underline{I}_1 = -jX_M \underline{I}_1 = -j20 \cdot 0,34 \angle -76^\circ = \\ &= 6,88 \angle -166^\circ \text{ В}.\end{aligned}$$

На рис. 13.2 построена векторная диаграмма найденных значений  $\underline{U}_1$ ,  $\underline{I}_1$ , и  $\underline{E}_{2m}$ , а также дополнительно вычисленных напряжений на активном сопротивлении первичной цепи  $\underline{R}_1 \underline{I}_1 = 10 \cdot 0,34 \angle -76^\circ = 3,4 \angle -76^\circ \text{ В}$ , совпадающем по фазе с током  $\underline{I}_1$ , и на ее индуктивном сопротивлении  $j\omega L_1 \underline{I}_1 = j40 \cdot 0,34 \angle -76^\circ = 13,6 \angle 14^\circ \text{ В}$ , сдвинутое по фазе на  $90^\circ$  относительно тока  $\underline{I}_1$ .

Полученная векторная диаграмма (рис. 13.2) подтверждает уравнение (13.3), составленное по второму закону Кирхгофа.

4. Режим короткого замыкания трансформатора. Если выводы В и Г (рис. 13.1, б) замкнуть проводником, сопротивлением которого можно пренебречь

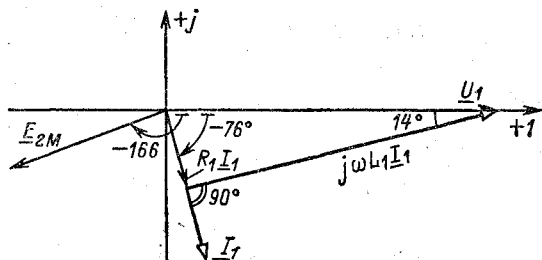


Рис. 13.2. Векторная диаграмма для режима холостого хода трансформатора

(короткое замыкание), то во вторичной цепи пойдет ток  $I_{2к}$ , который образует в первичной цепи ЭДС взаимной индукции  $E_{M1} = -j\omega M I_{2к}$ . Эта ЭДС выбрана по формуле (13.2) со знаком минус, так как токи  $I_1$  и  $I_{2к}$  образуют согласное включение (оба тока направлены от одноименных выводов А и Г).

Наведенная в первичной обмотке ЭДС  $E_{M1}$  уравновешивается составляющей напряжения первичной цепи  $U_{M1} = -E_{M1} = j\omega M I_{2к} = jX_M I_{2к}$ , учитываемой при составлении уравнения по второму закону Кирхгофа. Без этой составляющей  $U_{M1}$  первичная цепь соответствует уравнению (13.3), с ее учетом уравнению:

$$\underline{Z}_1 I_1 + jX_M I_{2к} = \underline{U}_1. \quad (13.4)$$

Во вторичной цепи трансформатора также появляется составляющая напряжения взаимной индуктивности  $U_{M2} = jX_M I_1$ , с учетом которой уравнение по второму закону Кирхгофа для этой цепи запишется аналогично (13.4):

$$\underline{Z}_2 I_{2к} + jX_M I_1 = 0, \quad (13.5)$$

где учтено, что во вторичной цепи нет внешнего источника питания и потому правая часть уравнения равна нулю см. также доп. вопрос 1 к этой задаче). Выразив из урав-

нения (13.5) ток  $\underline{I}_1 = -\underline{Z}_2 \underline{I}_{2к} / jX_M$  и подставив его в (13.4), получим

$$\underline{Z}_1 \frac{-\underline{Z}_2}{jX_M} \underline{I}_{2к} + jX_M \underline{I}_{2к} = \underline{U}_1,$$

или при наших данных

$$41,2 \angle 76^\circ \frac{-71,5 \angle 78^\circ}{j20} \underline{I}_{2к} + j20 \underline{I}_{2к} = 14.$$

В последнем уравнении выполним действия с комплексными числами:

$$147,5 \angle -116^\circ \underline{I}_{2к} + j20 \underline{I}_{2к} = 14;$$

$$147,5 (\cos 116^\circ - j \sin 116^\circ) \underline{I}_{2к} + j20 \underline{I}_{2к} = 14;$$

$$(-64,5 - j133) \underline{I}_{2к} + j20 \underline{I}_{2к} = 14,$$

откуда

$$\underline{I}_{2к} = \frac{14}{-64,5 - j113} = \frac{14}{-130,3 \angle 60^\circ 20'} = 0,1075 \angle 119^\circ 40' \text{ А.}$$

Определим ток первичной цепи, используя полученное выше выражение:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= -\frac{\underline{Z}_2}{jX_M} \underline{I}_{2к} = -\frac{71,5 \angle 78^\circ}{j20} 0,1075 \angle 119^\circ 40' = \\ &= 0,384 \angle -72^\circ 20' \text{ А.} \end{aligned}$$

На рис. 13.3, а построены найденные токи  $\underline{I}_1$  и  $\underline{I}_{2к}$ . Используя их, построим более полную векторную диаграмму с показом напряжений на всех активных и реактивных сопротивлениях обеих цепей трансформатора (рис. 13.3, б).

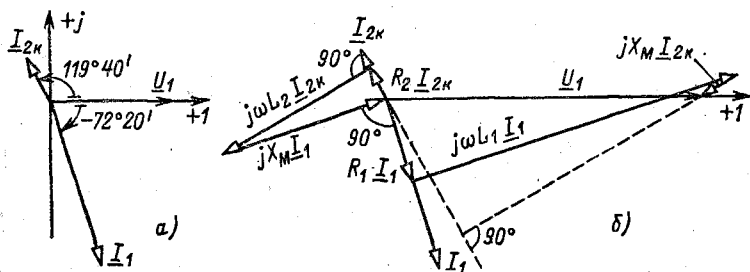


Рис. 13.3. Токи первичной и вторичной цепи (а) и полная векторная диаграмма для режима короткого замыкания трансформатора (б)

На этой диаграмме напряжения на активных сопротивлениях обеих цепей  $R_1 I_1 = 3,84$  В и  $R_2 I_{2к} = 1,613$  В, как известно, совпадают по фазе со своими токами, а напряжения на индуктивностях  $\omega L_1 I_1 = 15,3$  и  $\omega L_2 I_{2к} = 7,525$  В опережают эти токи по фазе на  $90^\circ$ .

Особый интерес представляют напряжения, образуемые на сопротивлении взаимной индуктивности  $X_M = \omega M$  токами обеих цепей  $I_1$  и  $I_{2к}$ ,  $X_M I_1 = U_{M2} = 7,68$  В и  $X_M I_{2к} = U_{M1} = 2,15$  В. Эти напряжения также сдвинуты по фазе на  $90^\circ$  относительно токов первичной ( $I_1$ ) и вторичной ( $I_{2к}$ ) цепей, но являются составляющими напряжений соответственно вторичной ( $U_{M2}$ ) и первичной ( $U_{M1}$ ) цепи.

По векторной диаграмме (рис. 13.3, б) можно записать взаимосвязь напряжений:

$$\left. \begin{aligned} R_1 I_1 + j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_{2к} &= U_1 \\ \text{и} \\ R_2 I_{2к} + j\omega L_2 I_{2к} + j\omega M I_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.6)$$

Уравнения (13.6) выражают второй закон Кирхгофа для обеих цепей трансформатора, что подтверждает справедливость векторной диаграммы (рис. 13.3, б).

5. Режим номинальной нагрузки (рис. 13.1, б). Этот режим отличается от предыдущего (короткого замыкания) тем, что во вторичную цепь добавлено сопротивление  $Z_{н}$  (последовательно с сопротивлением обмотки  $Z_2$ ) и ток этой цепи соответствуют номинальному  $I_2$  (вместо тока короткого замыкания  $I_{2к}$ ). Сделав эти замены в использованных для режима короткого замыкания уравнениях по второму закону Кирхгофа (13.4) и (13.5), получим для рассматриваемого случая

$$\left. \begin{aligned} Z_1 I_1 + jX_M I_2 &= U_1 \\ \text{и} \\ (Z_2 + Z_{н}) I_2 + jX_M I_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.7)$$

Эти уравнения при наших данных будут

$$\left. \begin{aligned} 41,2 \angle 76^\circ I_1 + j20 I_2 &= 14 \\ \text{и} \\ (15 + j70 + 15 - j30) I_2 + j20 I_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.8)$$

Из последнего уравнения

$$\underline{I}_1 = \frac{-(30 + j40)}{j20} \underline{I}_2 = \frac{-50 \angle 53^\circ}{20 \angle 90^\circ} \underline{I}_2 = 2,5 \angle 143^\circ \underline{I}_2. \quad (13.9)$$

Заменяя в первом уравнении системы (13.8) ток  $\underline{I}_1$  его выражением (13.9), получим

$$103 \angle 219^\circ \underline{I}_2 + j20 \underline{I}_2 = 14,$$

где

$$\begin{aligned} 103 (\cos 219^\circ + j \sin 219^\circ) \underline{I}_2 + j20 \underline{I}_2 &= (-103 \cos 39^\circ - \\ &- j 103 \sin 39^\circ) \underline{I}_2 + j20 \underline{I}_2 = (-80 - j64,7) \underline{I}_2 + \\ &+ j20 \underline{I}_2 = -(80 + j44,7) \underline{I}_2 = -91,6 \angle 29^\circ \underline{I}_2 = \\ &= 91,6 \angle -151^\circ \underline{I}_2 \end{aligned}$$

и соответственно

$$\underline{I}_2 = 14/91,6 \angle -151^\circ = 0,153 \angle 151^\circ \text{ A},$$

а ток первичной цепи по выражению (13.9)

$$\underline{I}_1 = 2,5 \angle 143^\circ \cdot 0,153 \angle 151^\circ = 0,381 \angle -66^\circ \text{ A}.$$

Векторная диаграмма (рис. 13.4), построенная для рассматриваемого режима нагрузки, в части, касающейся

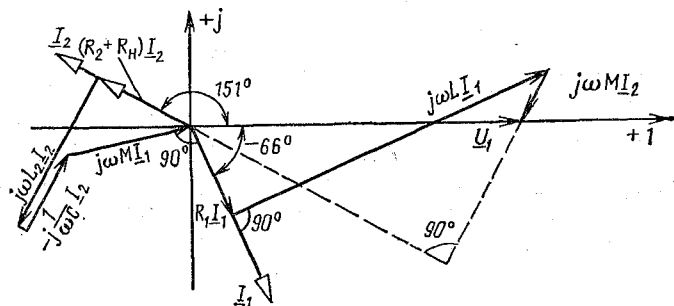


Рис. 13.4. Векторная диаграмма при активно-емкостной нагрузке трансформатора

первичной цепи трансформатора, аналогична рассмотренной ранее (рис. 13.3, б), а для вторичной цепи она дополнительно учитывает падения напряжения на активном сопротивлении нагрузки  $R_N \underline{I}_2$  (совпадает по фазе с  $R_2 \underline{I}_2$ ) и на емкости  $(1/\omega C) \underline{I}_2$  (в противофазе с напряжением на индуктивности).

## Дополнительные вопросы к задаче

1. Какая ЭДС питает вторичную цепь и как она учитывается при составлении уравнений по второму закону Кирхгофа? Во вторичную цепь трансформатора наводится ЭДС, определяемая формулой (13.2)  $\underline{E}_{M2} = \mp jX_M I_1$ , которая и образует ток  $\underline{I}_2$  во вторичной цепи. С этой точки зрения следовало бы второе уравнение системы (13.7) записать как  $(Z_2 + Z_H) I_2 = \underline{E}_{M2}$  или  $(Z_2 + Z_H) I_2 = -jX_M I_1$ , что соответствовало бы принятой записи уравнения по второму закону Кирхгофа: слева — падения напряжения на сопротивлениях, а справа — ЭДС контура. Однако в цепях с взаимной индуктивностью удобней (и принято) заменять эти ЭДС (взаимоиндукции) уравновешивающими их напряжениями, как было сделано при решении задачи  $\underline{U}_{M1} = -\underline{E}_{M1}$  и  $\underline{U}_{M2} = -\underline{E}_{M2}$ , и записывать эти напряжения вместе с другими падениями напряжения (в одной части уравнения). С учетом этого и были составлены уравнения (13.4) — (13.7). Безусловно, перенос слагаемого в другую часть уравнения не влияет на результаты.

2. Как запишутся уравнения по второму закону Кирхгофа, если изменить направление тока  $\underline{I}_2$  на противоположное  $\underline{I}'_2$  (рис. 13.1, б)? Ток  $\underline{I}'_2$  направлен от вывода В без звездочки к выводу Г со звездочкой, а ток  $\underline{I}_1$  по-прежнему направлен от вывода А со звездочкой к другому — Б, т.е. токи катушек  $\underline{I}_1$  и  $\underline{I}'_2$  разно направлены относительно одноименных выводов и потому образуют встречное включение, при котором напряжения взаимной индуктивности записываются со знаком минус:  $\underline{U}_{M1} = -jX_M I'_2$  и  $\underline{U}_{M2} = -jX_M I_1$ . С учетом этого уравнения по второму закону Кирхгофа, например (13.4) и (13.5), для режима короткого замыкания запишутся так:

$$\left. \begin{aligned} Z_1 I_1 - jX_M I'_2 &= \underline{U}_1; \\ Z_2 I'_2 - jX_M I_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.10)$$

Таким образом, составляющие напряжения взаимной индуктивности, уравновешивающие ЭДС взаимоиндукции, записываются со знаком плюс при согласном включении и со знаком минус — при встречном.

3. Можно ли произвольно выбирать положительные направления токов в индуктивно связанных элементах? Расчет токов трансформатора был выполнен при согласном направлении  $\underline{I}_1$  и  $\underline{I}_{2к}$  (рис. 13.1, б). Проверим результаты, например, для режима короткого замыкания, используя уравнения (13.10), составленные для встречного включения токов  $\underline{I}_1$  и  $\underline{I}'_{2к}$ .

Из второго уравнения системы (13.10) при наших данных

$$\underline{I}_1 = \underline{Z}_2 \underline{I}'_{2к} / jX_M = 71,5 \angle 78^\circ \underline{I}'_{2к} / j20 = 3,58 \angle -12^\circ \underline{I}'_{2к},$$

подставив полученное выражение в первое уравнение системы (13.10), определим  $\underline{I}'_{2к} = 0,1075 \angle -60^\circ 20' \text{ А}$ . При этом  $\underline{I}_1 = 3,58 \angle -12^\circ \cdot 0,1075 \angle -60^\circ 20' = 0,384 \angle -72^\circ 20' \text{ А}$ .

Эти токи построены на векторной диаграмме (рис. 13.5), которая отличается от ранее полученной (рис.

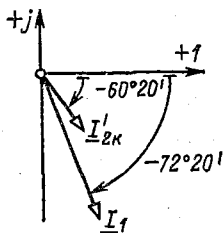


Рис. 13.5. К дополнительному вопросу 3

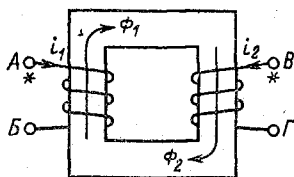


Рис. 13.6. К дополнительному вопросу 4

13.3, а) только противоположным направлением тока вторичной цепи, что и понятно, так как  $\underline{I}'_{2к} = -\underline{I}_{2к}$ .

Таким образом, при анализе цепи с индуктивно связанными элементами можно произвольно выбирать положительные направления токов и соответственно вид их соединения (согласное или встречное).

4. Как повлияет на одноименные выводы изменения направления катушки второй катушки? Если катушку второй катушки (рис. 13.1, а) выполнить, как показано на рис. 13.6, то для получения согласного включения (совпадения направлений магнитных потоков  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ ) необходимо ток  $i_2$  направить от вывода В к выводу Г. При этом одноименными окажутся выводы А и В, обозначенные звездочкой.



5. Как установить вид включения токов (согласное или встречное для катушек, расположенных под углом (рис. 13.7)? При выбранных направлениях токов катушек  $I$  и  $II$  на рис. 13.7,  $a$

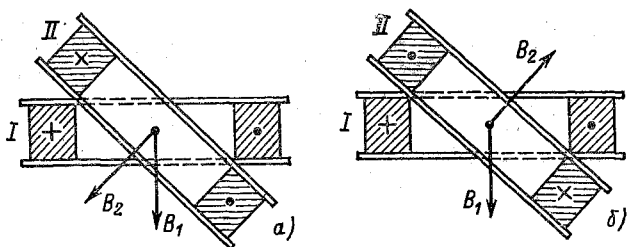


Рис. 13.7. К дополнительному вопросу 5

имеем согласное включение, так как векторы магнитной индукции отдельных катушек направлены друг к другу под углом, меньшим  $90^\circ$ , а на рис. 13.7,  $b$  — встречное включение, так как между векторами  $B_1$  и  $B_2$  угол больше  $90^\circ$ .

### 13.2. НЕРАЗВЕТВЛЕННАЯ ЦЕПЬ, СОДЕРЖАЩАЯ ВЗАИМНУЮ ИНДУКТИВНОСТЬ

Две магнитно связанные катушки, активные и индуктивные сопротивления которых соответственно  $R_1=0,2$  Ом,  $\omega L_1=0,3$  Ом;  $R_2=0,3$  Ом,  $\omega L_2=0,7$  Ом, а сопротивление взаимной индуктивности  $\omega M=0,1$  Ом, присоединялись к источнику питания с напряжением  $U=2,6$  В и частотой  $f=50$  Гц в двух вариантах соединений (рис. 13.8): проводами  $1$  и  $2$  (показаны сплошными линиями) и  $1'$  и  $2'$  (показаны пунктиром).

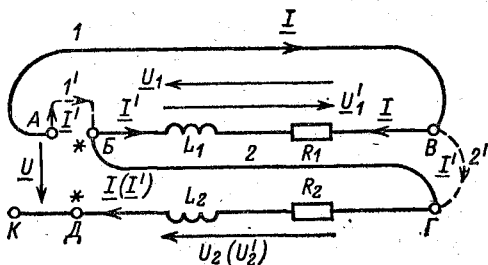


Рис. 13.8. К условию задачи § 13.2

Для каждого варианта соединений определить ток и мощности источника питания, напряжения на катушках и эквивалентные параметры цепи.

### Решение задачи

1. Анализ двух схем включения катушек. Целью анализа является выяснение способа включения катушек: согласное или встречное. Для этого обратим внимание на помеченные звездочками (рис. 13.8) одноименные выводы  $B$  и  $D$ , а также на направление тока относительно этих выводов.

В первом варианте соединения катушек, заданного по условию задачи, ток  $I$  (рис. 13.8) проходит по направлению  $A-B-G-D$ . При этом он направлен в первой катушке от вывода без звездочки (точка  $B$ ) к выводу со звездочкой (точка  $B$ ) и также во второй катушке — к выводу  $D$  со звездочкой. Следовательно, ток направлен одинаково относительно одноименных выводов, что соответствует согласному включению катушек.

Во втором заданном варианте соединения катушек ток  $I'$  (рис. 13.8) проходит по направлению  $A-B-B-G-D-K$  и при этом в первой катушке он направлен от вывода со звездочкой (от точки  $B$  к точке  $B$ ), а во второй катушке — по-прежнему к выводу  $D$  со звездочкой (от точки  $G$  к точке  $D$ ). Следовательно, ток направлен различно относительно одноименных выводов, что соответствует встречному включению катушек.

2. Составление уравнения по второму закону Кирхгофа. При согласном включении катушек по ним проходит один и тот же ток  $I$  (рис. 13.8). Этот ток образует на первой катушке уже известные падения напряжения на активных и индуктивных сопротивлениях  $R_1 I$  и  $j\omega L_1 I$ . Кроме того, магнитный поток катушки  $L_2$  частично пронизывает катушку  $L_1$  и наводит в ней ЭДС  $E_{12} = -j\omega M I$ , которая уравновешивается дополнительным падением напряжения на индуктивности  $L_1$ :

$$\underline{U}_{12} = j\omega M I. \quad (13.11)$$

Учитывая все рассмотренные выше составляющие напряжения первой катушки  $\underline{U}_1$ , запишем

$$\underline{U}_1 = (R_1 + j\omega L_1 + j\omega M) I = \underline{Z}_1 I. \quad (13.12)$$

Так как вторая катушка связана с первой тем же зна-

чением взаимной индуктивности  $M$ , то в ней образуется (за счет магнитной связи) такое же (13.11) дополнительное падение напряжения:

$$\underline{U}_{21} = j\omega M \underline{I}. \quad (13.13)$$

Очевидно, для второй катушки имеем аналогичное (13.12) выражение для напряжения

$$\underline{U}_2 = (R_2 + j\omega L_2 + j\omega M) \underline{I} = \underline{Z}_2 \underline{I}. \quad (13.14)$$

По второму закону Кирхгофа напряжение источника питания  $\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2$ , или с учетом (13.12) и (13.14) получим

$$\underline{U} = [R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)] \underline{I}. \quad (13.15)$$

При встречном включении катушек по цепи рис. 13.8 проходит ток  $\underline{I}'$ . Новый вид соединения повлияет только на знак напряжения взаимной индуктивности в формулах (13.11), (13.13), которые в этом случае запишутся как

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_{21} = -j\omega M \underline{I}'. \quad (13.16)$$

С учетом (13.16) перепишем (13.15) для встречного включения:

$$\underline{U} = [R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)] \underline{I}'. \quad (13.17)$$

3. Вычисление тока цепи и напряжений на катушках. При согласном включении катушек их комплексные сопротивления  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_2$  из (13.12) и (13.14) при наших данных

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 + j\omega M = 0,2 + j0,4 = 0,447 \angle 63^\circ 30' \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2 + j\omega M = 0,3 + j0,8 = 0,855 \angle 69^\circ 20' \text{ Ом}.$$

Сопротивление всей цепи

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = 0,5 + j1,2 = 1,3 \angle 67^\circ 20' \text{ Ом}.$$

Примем напряжение источника питания  $\underline{U} = \underline{U} \angle 0^\circ = 2,6 \text{ В}$  и по закону Ома определим ток источника:

$$\underline{I} = \underline{U} / \underline{Z} = 2,6 / 1,3 \angle 67^\circ 20' = 2 \angle -67^\circ 20' \text{ А}.$$

При встречном включении катушек их комплексные сопротивления

$$\underline{Z}'_1 = R_1 + j\omega L_1 - j\omega M = 0,2 + j0,2 = 0,2 \sqrt{2} \angle 45^\circ \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}'_2 = R_2 + j\omega L_2 - j\omega M = 0,3 + j0,6 = 0,67 \angle 63^\circ 30' \text{ Ом}$$

и сопротивление всей цепи

$$\underline{Z} = \underline{Z}'_1 + \underline{Z}'_2 = 0,5 + j0,8 = 0,943 \angle 58^\circ \text{ Ом,}$$

а ток источника питания

$$\underline{I}' = \underline{U} / \underline{Z}' = 2,6 / 0,943 \angle 58^\circ = 2,76 \angle -58^\circ \text{ А.}$$

По известным току цепи и сопротивлениям катушек находим их напряжения. Для согласного включения

$$\underline{U}'_1 = \underline{Z}'_1 \underline{I}' = 0,447 \angle 63^\circ 30' \cdot 2,76 \angle -67^\circ 20' = 0,894 \angle -3^\circ 50' \text{ В;}$$

$$\underline{U}'_2 = \underline{Z}'_2 \underline{I}' = 0,855 \angle 69^\circ 20' \cdot 2,76 \angle -67^\circ 20' = 1,71 \angle 2^\circ \text{ В.}$$

Для встречного включения

$$\underline{U}'_1 = \underline{Z}'_1 \underline{I}' = 0,2 \sqrt{2} \angle 45^\circ \cdot 2,76 \angle -58^\circ = 7,77 \angle -13^\circ \text{ В;}$$

$$\underline{U}'_2 = \underline{Z}'_2 \underline{I}' = 0,67 \angle 63^\circ 30' \cdot 2,76 \angle -58^\circ = 1,85 \angle 5^\circ 30' \text{ В.}$$

4. Вычисление мощности источника питания. Воспользуемся формулой комплексной мощности  $\underline{S} = \underline{U} \underline{I}'^*$ , где сопряженный комплекс тока  $\underline{I}'^*$  в нашем случае для согласного включения  $\underline{I}'^* = 2 \angle 67^\circ 20'$  А и для встречного включения  $\underline{I}'^* = 2,76 \angle 58^\circ$  А. При этих данных и известном напряжении  $\underline{U} = 2,6 \angle 0^\circ$  В для согласного включения

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U} \underline{I}'^* = 2,6 \cdot 2 \angle 67^\circ 20' = 5,2 \angle 67^\circ 20' = \\ &= 5,2 (\cos 67^\circ 20' + j \sin 67^\circ 20') = 5,2 (0,385 + j0,922) = \\ &= 2 + j4,8 \text{ В}\cdot\text{А.} \end{aligned}$$

Так как комплексная мощность  $\underline{S} = P + jQ$ , то в данном случае активная мощность  $P = 2$  Вт и реактивная мощность  $Q = 4,8$  вар.

Для встречного включения катушек комплексная мощность

$$\begin{aligned} \underline{S}' &= \underline{U} \underline{I}'^* = 2,6 \cdot 2,76 \angle 58^\circ = 7,18 \angle 58^\circ = 7,18 (\cos 58^\circ + \\ &+ j \sin 58^\circ) = 7,18 (0,53 + j0,848) = 3,8 + \\ &+ j6,1 \text{ В}\cdot\text{А} = P' + jQ', \end{aligned}$$

откуда активная мощность  $P' = 3,8$  Вт и реактивная  $Q' = 6,1$  вар.

5. Вычисление эквивалентных параметров цепи (рис. 13.8). Активные сопротивления  $R_1$

и  $R_2$  (рис. 13.8) при обоих вариантах включения катушек соединены последовательно, и их эквивалентное сопротивление  $R_0 = R_1 + R_2 = 0,2 + 0,3 = 0,5$  Ом.

Эквивалентная индуктивность при согласном включении катушек из (13.15)

$$L_0 = L_1 + L_2 + 2M, \quad (13.18)$$

а при встречном включении из (13.17)

$$L'_0 = L_1 + L_2 - 2M. \quad (13.19)$$

Чтобы воспользоваться формулами для эквивалентной индуктивности, нужно знать индуктивности и взаимную индуктивность катушек, что легко определить, разделив заданные в задаче индуктивные сопротивления  $\omega L_1$ ,  $\omega L_2$ ,  $\omega M$  на частоту  $\omega = 2\pi f = 314$  рад/с. При этом получим  $L_1 = 0,954$  мГн;  $L_2 = 2,23$  мГн;  $M = 0,318$  мГн.

При этих данных имеем

$$L_0 = 0,954 + 2,23 + 2 \cdot 0,318 = 3,82 \text{ Гн};$$

$$L'_0 = 0,954 + 2,23 - 2 \cdot 0,318 = 2,548 \text{ Гн}.$$

Таким образом, рассматриваемую цепь (рис. 13.8) можно представить эквивалентной схемой замещения из последовательно включенных  $R_0$  и  $L_0$  (для согласного включения) или  $L'_0$  (для встречного включения).

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Как определить одноименные выводы катушек по двум включениям (согласному и встречному)? При решении задачи оказалось, что эквивалентное сопротивление двух катушек при согласном включении  $Z = 1,3$  Ом, а при встречном включении  $Z' = 0,943$  Ом, т.е.  $Z > Z'$ . Соответственно токи  $I$  и  $I'$  для этих же двух включений соотносятся как  $I' = 2,76 > I = 2$  А. Этим свойством можно воспользоваться для определения одноименных выводов.

Соединяем два любых вывода разных магнитно связанных катушек, присоединяем их к источнику питания и измеряем общий ток двух катушек. Затем меняем местами выводы одной катушки и вновь измеряем общий ток двух катушек. Если в первом случае ток был больше, чем во втором, то в первом эксперименте было встречное включение и соединялись разноименные выводы катушек, а во втором эксперименте — согласное включение с соединением одноименных выводов.

2. Как определить взаимную индуктивность по двум включениям (согласному и встречному)? Из выражений (13.18) и (13.19) имеем  $L_3 - L'_3 = 4M$ , откуда  $M = (L_3 - L'_3)/4$ . Эта формула широко используется на практике для определения взаимной индуктивности по двум экспериментам: согласного и встречного включения (см. предыдущий дополнительный вопрос).

Измеряя эквивалентную индуктивность двух катушек  $L_3$  (для согласного включения) и  $L'_3$  (для встречного включения), определяют по приведенной формуле взаимную индуктивность.

3. Как повлияет на ток цепи усиление магнитной связи, например, сближением катушек? В доп. вопросе 1 к этой задаче было показано, что магнитная связь уменьшает ток цепи при согласном включении катушек и увеличивает его при встречном включении. Указанные свойства тем заметнее, чем больше магнитная связь катушек.

### 13.3. РАЗВЕТВЛЕННАЯ ЦЕПЬ, СОДЕРЖАЩАЯ ВЗАИМНУЮ ИНДУКТИВНОСТЬ

#### Условие задачи

В цепи рис. 13.9 с напряжением на выводах  $U = 220$  В известны активные и реактивные сопротивления участков:  $\omega L_2 = 1/\omega C_2 = R_2 = 100$  Ом;  $\omega L_1 = 80$  Ом;  $R_1 = 60$  Ом. Сопротивление взаимной индуктивности  $X_M = \omega M = 80$  Ом.

Определить все токи и построить векторную и топографическую диаграммы.

#### Решение задачи

1. Напряжения на выводах ветвей цепи рис. 13.9. Ток  $I_1$  (рис. 13.9), проходя по участкам ветви из последовательно включенных  $R_1$  и  $L_1$ , образует падение напряжения в комплексной форме  $R_1 \underline{I}_1$  и  $j\omega L_1 \underline{I}_1$ . Кроме того, магнитный поток катушки  $L_2$ , созданный током  $\underline{I}_2$ , частично пронизывает катушку  $L_1$  другой ветви и наводит в ней ЭДС взаимной индукции  $E_{12} =$

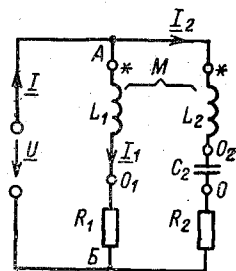


Рис. 13.9. Две параллельные ветви, связанные взаимной индуктивностью

$= I_2 \omega M = I_2 X_M$ , отстающую по фазе на  $90^\circ$  от тока  $I_2$ , т.е. в комплексной форме  $\underline{E}_{12} = -j\omega M \underline{I}_2$ . Эта ЭДС уравновешивается дополнительным падением напряжения на индуктивности  $L_1$ :

$$\underline{U}_{12} = j\omega M \underline{I}_2.$$

Учитывая все рассмотренные выше падения напряжения, запишем напряжение на выводах для первой ветви (рис. 13.9):

$$\underline{U} = R_1 \underline{I}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2. \quad (13.20)$$

Напряжение  $\underline{U}_{12} = j\omega M \underline{I}_2$  в уравнении (13.20) записано со знаком плюс потому, что индуктивно связанные катушки  $L_1$  и  $L_2$  включены «согласно», т.е. их токи ( $\underline{I}_1$  и  $\underline{I}_2$ ) направлены одинаково относительно выводов, обозначенных звездочками (рис. 13.9).

Если бы, например, у катушки  $L_1$  (рис. 13.9) звездочка стояла у точки  $O_1$ , а не у точки  $A$ , то получилось бы встречное включение индуктивно связанных катушек  $L_1$  и  $L_2$ . Тогда слагаемое  $\underline{I}_2 j\omega M$  в уравнении (13.20) нужно было бы записать со знаком минус.

Рассуждая аналогичным образом в отношении другой ветви (рис. 13.9) и замечая, что она содержит еще емкость  $C_2$ , получаем напряжение

$$\underline{U} = R_2 \underline{I}_2 - j \frac{1}{\omega C_2} \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 + j\omega M \underline{I}_1. \quad (13.21)$$

2. Вычисление токов. Обозначив комплексные сопротивления ветвей без учета взаимной индуктивности (рис. 13.9)

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1; \quad \underline{Z}_2 = R_2 + j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right),$$

решим совместно два уравнения (13.20) и (13.21) относительно токов ветвей:

$$\underline{I}_1 = \underline{U} \frac{\underline{Z}_2 - j\omega M}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \omega^2 M^2}; \quad (13.22)$$

$$\underline{I}_2 = \underline{U} \frac{\underline{Z}_1 - j\omega M}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \omega^2 M^2}. \quad (13.23)$$

При наших данных

$$\underline{Z}_2 - j\omega M = 100 - j80 = 128e^{-j38^\circ 30'} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_1 - j\omega M = 60 + j80 - j80 = 60 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \omega^2 M^2 = (60 + j80) \cdot 100 + (80)^2 = 14750 e^{j32^\circ 40'} \text{ Ом}^2.$$

По формулам (13.22) и (13.23)

$$\underline{I}_1 = 220 \frac{128 e^{-j38^\circ 30'}}{14750 e^{j32^\circ 40'}} = 1,91 e^{-j71^\circ 10'} \text{ А};$$

$$\underline{I}_2 = 220 \frac{60}{14750 e^{j32^\circ 40'}} = 0,895 e^{-j32^\circ 40'} \text{ А}.$$

Выразим еще полученные комплексные токи в алгебраической форме.

Так как

$$\sin 71^\circ 10' = 0,95; \quad \sin 32^\circ 40' = 0,483;$$

$$\cos 71^\circ 10' = 0,32; \quad \cos 32^\circ 40' = 0,752,$$

$$\underline{I}_1 = 1,91 (\cos 71^\circ 10' - j \sin 71^\circ 10') = 0,611 - j1,815 \text{ А};$$

$$\underline{I}_2 = 0,895 (\cos 32^\circ 40' - j \sin 32^\circ 40') = 0,752 - j0,483 \text{ А};$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 1,363 - j2,3 = 2,65 e^{-j59^\circ 30'} \text{ А}.$$

3. Построение векторной диаграммы токов и топографической диаграммы напряжений. Вектор общего напряжения  $\underline{U}$  (рис. 13.10, а и б) отложен в положительном направлении оси вещественных

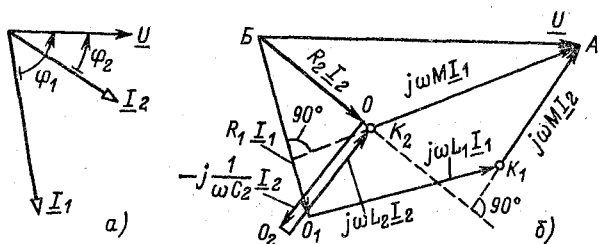


Рис. 13.10. Векторная диаграмма токов (а) и топографическая диаграмма напряжений (б) цепи рис. 13.9

чисел, так как при решении задачи принято  $\underline{U} = U \angle 0^\circ = 220 \text{ В}$ .

Векторы токов  $\underline{I}_1$  и  $\underline{I}_2$  (рис. 13.10, а) отстают по фазе от напряжения  $\underline{U}$  на углы  $\varphi_1 = 71^\circ 10'$  и  $\varphi_2 = 32^\circ 40'$ .

Векторы напряжений участков ветви  $AO_1B$  (рис. 13.9) построены (рис. 13.10, б) в соответствии с уравнением (13.20). При этом падение напряжения на активном сопротивлении  $R_1 \underline{I}_1$ , совпадающее по фазе с током  $\underline{I}_1$ , отста-



ет по фазе от общего напряжения  $\underline{U}$  на угол  $\varphi_1 = 71^\circ 10'$ .

Вектор напряжения участка  $O_1A$  (рис. 13.9) образуется из двух слагаемых: векторов  $O_1K_1$  и  $K_1A$  (рис. 13.10, б), из которых первый опережает на  $90^\circ$  ток  $I_1$ , а второй — ток  $I_2$ . Указанные углы сдвига векторов  $O_1K_1$  и  $K_1A$  можно объяснить как физически (напряжение на индуктивности опережает ток на  $90^\circ$ ), так и математически (множитель  $j$  поворачивает вектор на  $90^\circ$  в положительном направлении), например вектор  $j\omega MI_2$  опережает вектор  $I_2$  на  $90^\circ$ .

Аналогично для другой ветви ( $BOO_2A$  рис. 13.9) по уравнению (13.21) построены на рис. 13.10, б векторы всех падений напряжения, что легко проследить по одинаковым обозначениям точек цепи и векторной диаграммы.

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Как повлияет на ток  $I_2$  отключение ветви с током  $I_1$ ? При отсутствии индуктивной связи между параллельными ветвями их токи независимы, так как задано неизменное напряжение на зажимах ветвей  $U = 220$  В, поэтому при отключении, например, первой ветви ( $I_1 = 0$ ) сохраняется прежним ток  $I_2$ . Другое положение при наличии индуктивной связи ветвей: их токи взаимозависимы. Действительно, при отключении первой ветви ( $I_1 = 0$ ) ток второй ветви возрастает до

$$I_2 = \frac{U}{Z_2} = \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + (X_{L2} - X_C)^2}} = \frac{220}{100} = 2,2 \text{ А.}$$

2. Как вычислить мощность, переносимую магнитной связью из одной ветви в другую? Как было показано при решении задачи магнитная связь катушек приводит к появлению в каждой ветви дополнительных составляющих напряжения (уравновешивающих ЭДС взаимоиндукции), комплексные выражения которых  $j\omega MI_1$  и  $j\omega MI_2$ . Произведение каждого из этих напряжений на сопряженный комплексный ток ветви выражает комплексную мощность, образуемую за счет магнитной связи. Вычислим эти мощности:

$$\begin{aligned} \underline{S}_{12} &= j\omega MI_1 \dot{I}_2^* = 80e^{j90^\circ} \cdot 1,91e^{-j71^\circ 10'} \cdot 0,895e^{j32^\circ 40'} = 1,37e^{j51^\circ 30'} = \\ &= 85 + j107 \text{ В} \cdot \text{А}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{21} &= I_2 j\omega M \dot{I}_1 = 0,895e^{-j32^\circ 40'} \cdot 80e^{j90^\circ} \cdot 1,91e^{j71^\circ 10'} = \\ &= 137e^{j128^\circ 30'} = 137e^{j(180^\circ - 51^\circ 30')} = -85 + j107 \text{ В} \cdot \text{А}. \end{aligned}$$

Таким образом, в одну из индуктивно связанных ветвей вносится активная мощность 85 Вт, а из другой ветви забирается такая же мощность. В результате сумма активных мощностей, вносимых в обе ветви,

$$P_{12} + P_{21} = 85 - 85 = 0.$$

Иначе с реактивными мощностями: они имеют одинаковый (положительный) знак в обоих случаях. Поэтому общая реактивная мощность, вносимая в обе ветви,

$$Q_{12} + Q_{21} = 107 + 107 = 214 \text{ вар}$$

имеет индуктивный характер.

3. Можно ли настроить в режим резонанса напряжений ветвь  $BOO_2A$  (рис. 13.9) изменением емкости  $C_2$ ? В рассматриваемой ветви при отсутствии магнитной связи с другой ветвью имел бы место режим резонанса, так как по условию задачи  $\omega L_2 = 1/\omega C_2$ .

Введение магнитной связи изменило реактивную мощность (см. предыдущий вопрос) и реактивное сопротивление второй ветви, которые имеют индуктивный характер.

Увеличив емкость  $C_2$ , можно установить режим резонанса напряжений, который сохранится только при заданной индуктивной связи ветвей.

#### 13.4. СЛОЖНАЯ ЦЕПЬ, СОДЕРЖАЩАЯ ВЗАИМНУЮ ИНДУКТИВНОСТЬ

##### Условие задачи

В цепи рис. 13.11 активные и реактивные сопротивления участков равны:  $R_1 = 80 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = R_3 = 40 \text{ Ом}$ ;  $\omega L_1 = 60 \text{ Ом}$ ;  $\omega L_2 = \omega L_3 = 80 \text{ Ом}$ ;  $1/\omega C_2 = 40 \text{ Ом}$ , а сопротивление взаимной индуктивности  $\omega M = 40 \text{ Ом}$ . ЭДС источников энергии заданы комплексами:  $E_1 = E_2 = 100 \text{ В}$  и  $E_3 = 200 e^{j120^\circ} \text{ В}$ .

Определить все токи, напряжения на участках и потенциалы точек цепи, построить потенциальную диаграмму; сделать проверку результатов, составив баланс мощностей.

## Решение задачи

1. Выбор метода решения. Для анализа цепи с двумя узловыми точками обычно применяют метод двух узлов. В данном случае, хотя цепь имеет только две узловые точки, применение этого метода крайне затруднительно.

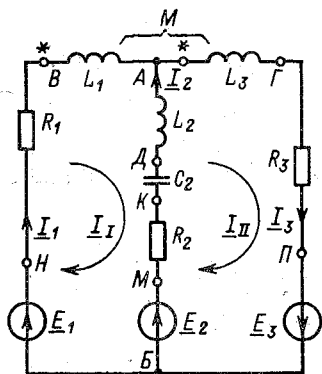


Рис. 13.11. Сложная цепь с взаимной индуктивностью

Действительно, метод двух узлов требует вычисления полных проводимостей ветвей, которые находятся по заданным сопротивлениям участков. Но при наличии взаимной индуктивности появляются еще вносимые индуктивной связью сопротивления, которые по условию задачи не заданы, а их определение довольно сложно. Без определения значений вносимых сопротивлений невозможен расчет по методу двух узлов.

Указанная сложность возникает и при использовании некоторых других известных методов, требующих вычисления общих или эквивалентных сопротивлений ветвей и участков (наложения, эквивалентного генератора). Поэтому при расчете цепей переменного тока с взаимными индуктивностями чаще применяют уравнения Кирхгофа или метод контурных токов; последний обеспечивает более быстрое решение.

2. Применение метода контурных токов. Выберем направление контурных токов  $\underline{I}_I$ ,  $\underline{I}_{II}$  и составим уравнение для контура ВАДКМБНВ (рис. 13.11), обходя его по направлению движения часовой стрелки. Напомним (см. § 4.3), что при одинаковом направлении контурных токов, совпадающем с направлением обхода, в рассматриваемое контурное уравнение войдет со знаком плюс произведение тока  $\underline{I}_I$  на собственное сопротивление первого контура, т.е.

$$\underline{I}_I \left( R_1 + j\omega L_1 + j\omega L_2 - j \frac{1}{\omega C_2} + R_2 \right),$$

и со знаком минус — произведение тока  $\underline{I}_{II}$  соседнего кон-

тура на общее сопротивление двух контуров:

$$- I_{II} \left( j\omega L_2 - j \frac{1}{\omega C_2} + R_2 \right).$$

Кроме того, следует учесть индуктивную связь контуров, при которой в первом контуре существует падение напряжения  $\underline{I}_{II} j\omega M$ , которое следует включить в контурное уравнение со знаком плюс, так как направление обхода контура и контурные токи в катушках  $L_1$  и  $L_3$  направлены одинаково относительно одноименных выводов, обозначенных звездочкой. Если изменить направление обхода или направление контурного тока  $\underline{I}_{II}$  на обратное, то напряжение  $j\omega M \underline{I}_{II}$  следует включить в контурное уравнение со знаком минус.

В результате имеем уравнение для первого контура

$$\begin{aligned} & \underline{I}_I \left( R_1 + j\omega L_1 + R_2 + j\omega L_2 - j \frac{1}{\omega C_2} \right) - \\ & - \underline{I}_{II} \left( R_2 + j\omega L_2 - j \frac{1}{\omega C_2} \right) + \underline{I}_{II} j\omega M = \underline{E}_1 - \underline{E}_2. \end{aligned} \quad (13.24)$$

Аналогично для второго контура

$$\begin{aligned} & - \underline{I}_I \left( R_2 + j\omega L_2 - j \frac{1}{\omega C_2} \right) + \underline{I}_I j\omega M + \\ & + \underline{I}_{II} \left( R_2 + j\omega L_2 - j \frac{1}{\omega C_2} + j\omega L_3 + R_3 \right) = \underline{E}_2 + \underline{E}_3. \end{aligned} \quad (13.25)$$

3. Вычисление токов. Подставив данные в уравнения (13.24) и (13.25), получим

$$\begin{aligned} \underline{I}_I (80 + j60 + 40 + j80 - j40) - \underline{I}_{II} (40 + j80 - j40 - j40) &= 0; \\ - \underline{I}_I (40 + j80 - j40 - j40) + \underline{I}_{II} (40 + j80 - j40 + j80 + 40) &= \\ &= 100 + 200e^{j120^\circ}. \end{aligned}$$

Решая совместно два последних уравнения, найдем

$$\underline{I}_I = 0,3 - j0,05 = 0,34 \angle -9^\circ 45' \text{ А};$$

$$\underline{I}_{II} = 1,035 + j0,6 = 1,19 \angle 30^\circ \text{ А}.$$

Зная контурные токи  $\underline{I}_I$  и  $\underline{I}_{II}$ , определим токи ветвей:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_I = 0,3 - j0,05 = 0,34 \angle -9^\circ 45' \text{ А};$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{II} - \underline{I}_I = 1,035 + j0,6 - 0,3 + j0,05 =$$

$$= 0,735 + j0,65 = 0,965 \angle 41^\circ 30' \text{ A};$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{II} = 1,035 + j0,6 = 1,19 \angle 30^\circ \text{ A}.$$

По имеющимся комплексным значениям токов построена (рис. 13.12, а) векторная диаграмма (на комплексной плоскости).

4. Вычисление комплексных напряжений на всех участках цепи. Для участка *НВ* (рис.

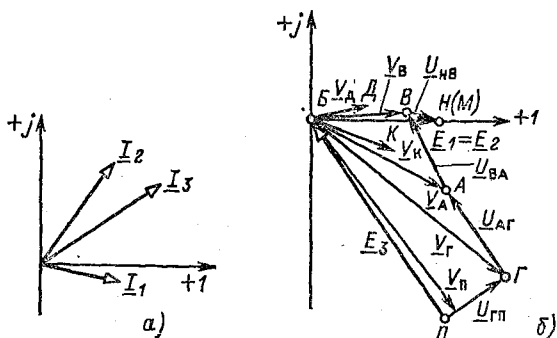


Рис. 13.12. Векторная диаграмма токов (а) и потенциальная диаграмма (б) для цепи рис. 13.11.

13.11) с активным сопротивлением  $R_1$  комплексное напряжение

$$\underline{U}_{NB} = \underline{I}_1 R_1 = 0,34 \angle -9^\circ 45' \cdot 80 = 27,2 \angle -9^\circ 45' = 24 - j4 \text{ В}.$$

Напряжение участка *ВА* (рис. 13.11), включающее падение напряжения на индуктивности  $L_1$  и напряжение, уравновешивающее ЭДС взаимной индукции,

$$\begin{aligned} \underline{U}_{BA} &= \underline{I}_1 j\omega L_1 + \underline{I}_3 j\omega M = (0,30 - j0,05) j60 + \\ &+ (1,035 + j0,6) j40 = -21 + j59,4 = 63 \angle 109^\circ 10' \text{ В}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом для остальных участков цепи (рис. 13.11) имеем

$$\begin{aligned} \underline{U}_{ДА} &= \underline{I}_2 j\omega L_2 = 0,965 \angle 41^\circ 30' j80 = 77,6 \angle 131^\circ 30' = \\ &= -52 + j58,8 \text{ В}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{КД} &= \underline{I}_2 \left( -j \frac{1}{\omega C_2} \right) = 0,965 \angle 41^\circ 30' (-j40) = \\ &= 38,8 \angle -48^\circ 30' = 26 - j29,4 \text{ В}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{МК} &= R_2 I_2 = 40 \cdot 0,965 \angle 41^\circ 30' = 38,8 \angle 41^\circ 30' = \\ &= 29 + j26 \text{ В;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{АГ} &= j\omega L_3 I_3 + j\omega M I_1 = j80(1,035 + j0,6) + j40(0,3 - \\ &- j0,05) = -46 + j94,8 = 105,5 \angle 115^\circ 40' \text{ В;} \end{aligned}$$

$$\underline{U}_{ГП} = R_3 I_3 = 40 \cdot 1,19 \angle 30^\circ = 47,8 \angle 30^\circ = 41,5 + j24 \text{ В.}$$

5. Вычисление комплексных потенциалов точек цепи. Примем для точки  $B$  цепи рис. 13.11 потенциал  $\underline{V}_B = 0$ . Эта точка для первого и второго источников является выводом с меньшим потенциалом. Соответственно точки  $H$  и  $M$  (рис. 13.11) являются выводами с большим потенциалом относительно точки  $B$ .

Замечая также, что  $E_1 = E_2 = 100 \text{ В}$ , имеем комплексные потенциалы

$$\underline{V}_H = \underline{V}_M = 100 \text{ В.}$$

Обходя первую ветвь цепи рис. 13.11 по направлению тока (направление убывания потенциала) и используя вычисленные выше напряжения участков цепи, получаем потенциалы точек  $B$  и  $A$ :

$$\underline{V}_B = \underline{V}_H - \underline{U}_{HB} = 100 - 24 + j4 = 76 + j4 = 76,1e^{j3^\circ} \text{ В}$$

и

$$\begin{aligned} \underline{V}_A &= \underline{V}_B - \underline{U}_{BA} = 76 + j4 + 21 - j59,4 = \\ &= 97 - j55,4 = 111,6e^{-j29^\circ 49'} \text{ В.} \end{aligned}$$

Далее, идя от точки  $A$  против направления тока  $I_2$  (направление возрастания потенциала), определим потенциалы точек второй ветви:

$$\begin{aligned} \underline{V}_Д &= \underline{V}_A + \underline{U}_{ДА} = 97 - j55,4 - 52 + j58,8 = \\ &= 45 + j3,4 = 45,1e^{j4^\circ 20'} \text{ В;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{V}_К &= \underline{V}_Д + \underline{U}_{КД} = 45 + j3,4 + 26 - j29,4 = \\ &= 71 - j26 = 75,6e^{-j20^\circ 10'} \text{ В} \end{aligned}$$

и для проверки расчетов вычислим уже найденный потенциал точки  $M$ :

$$\underline{V}_M = \underline{V}_К + \underline{U}_{МК} = 71 - j26 + 29 + j26 = 100 \text{ В.}$$

Аналогичным образом получим для третьей ветви потен-

циалы точек  $\Gamma$  и  $\Pi$ :

$$\underline{V}_{\Gamma} = \underline{V}_A - \underline{U}_{A\Gamma} = 143 - j150 = 207,2e^{-j46^{\circ}20'} \text{ В};$$

$$\underline{V}_{\Pi} = \underline{V}_{\Gamma} - \underline{U}_{\Gamma\Pi} = 101,5 - j174 = 200e^{-j60^{\circ}} \text{ В}.$$

Имеющиеся комплексные значения потенциалов изображаются на потенциальной диаграмме (рис. 13.12, б) радиусами-векторами, выходящими из начала координат, где помещена точка  $B$ , так как ее потенциал  $V_B=0$ . У конца полученных радиусов-векторов обозначены точки цепи, потенциалы которых они изображают.

Построенные на потенциальной диаграмме напряжения всех участков внешнего контура цепи рис. 13.11 позволяют проследить выполнение второго закона Кирхгофа для этого контура. Действительно, по рис. 13.12, б можно записать

$$\underline{U}_{\Gamma\Pi} + \underline{U}_{A\Gamma} + \underline{U}_{BA} + \underline{U}_{HB} = \underline{E}_1 + \underline{E}_3.$$

6. Баланс мощностей. Комплексные мощности источников энергии

$$\underline{S}_1 = \underline{E}_1 \underline{I}_1^* = 100 (0,3 + j0,05) = 30 + j5 \text{ В} \cdot \text{А};$$

$$\underline{S}_2 = \underline{E}_2 \underline{I}_2^* = 100 (0,735 - j0,65) = 73,5 - j65 \text{ В} \cdot \text{А};$$

$$\begin{aligned} \underline{S}_3 &= \underline{E}_3 \underline{I}_3^* = (-100 + j173,4)(1,035 - j0,6) = \\ &= -103,5 + j60 + j180 + 104 = j240 \text{ В} \cdot \text{А}. \end{aligned}$$

Сумма активных и реактивных мощностей источников

$$\Sigma P_{\text{и}} = 103,5 \text{ Вт}; \quad \Sigma Q_{\text{и}} = 180 \text{ вар}.$$

Активные мощности потребителей:

$$P_1 = (I_1)^2 R_1 = (0,34)^2 80 = 9,5 \text{ Вт};$$

$$P_2 = (I_2)^2 R_2 = (0,965)^2 40 = 37,5 \text{ Вт};$$

$$P_3 = (I_3)^2 R_3 = (1,19)^2 40 = 56,5 \text{ Вт}$$

или  $\Sigma P = 9,5 + 37,5 + 56,5 = 103,5 \text{ Вт} = \Sigma P_{\text{и}}$ , т. е. имеет место баланс активных мощностей.

Реактивные мощности потребителей:

$$Q_1 = (I_1)^2 \omega L_1 = (0,34)^2 60 = 7 \text{ вар};$$

$$Q_2 = (I_2)^2 (\omega L_2 - 1/\omega C_2) = (0,965)^2 40 = 37 \text{ вар};$$

$$Q_3 = (I_3)^2 \omega L_3 = (1,19)^2 80 = 112 \text{ вар}.$$

Кроме того, определим мощности, переносимые магнитной связью катушек  $L_1$  и  $L_3$  (см. § 13.3, доп. вопрос 2):

$$\begin{aligned} I_1 j\omega M \dot{I}_3^* &= 0,34e^{-j9^\circ 45'} \cdot 40e^{j90^\circ} \cdot 1,19e^{-j30^\circ} = \\ &= 16,2e^{j50^\circ 15'} = 10,3 + j12 \text{ В}\cdot\text{А}; \end{aligned}$$

$$I_3 j\omega M \dot{I}_1^* = 16,2e^{j129^\circ 45'} = -10,3 + j12 \text{ В}\cdot\text{А}.$$

Суммарная активная переносимая мощность

$$P_{\text{II}} = 10,3 - 10,3 = 0,$$

и сумма реактивных переносимых мощностей

$$Q_{\text{II}} = 12 + 12 = 24 \text{ вар}.$$

Таким образом, реактивные мощности всех потребителей, включая и переносимые, составляют

$$\begin{aligned} \Sigma Q &= Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_{\text{II}} = 7 + 37 + 112 + 24 = \\ &= 180 \text{ вар} = \Sigma Q_{\text{II}}, \end{aligned}$$

т. е. имеет место баланс реактивных мощностей цепи.

Выполнение баланса активных и реактивных мощностей подтверждает правильность расчетов.

### 13.5. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

288. Две катушки ( $I$  и  $II$ ) размещены на общем магнитопроводе. Направление намотки катушек показано (рис. 13.13). Определить одноименные выводы катушек, используя обозначения их выводов  $1-6$ .

289. В условиях, аналогичных предыдущей задаче, определить по рис. 13.13 одноименные выводы для пар катушек  $I-III$  и  $II-III$ .

290. Для определения одноименных выводов трех магнитно связанных катушек (рис. 13.14) к одной из них (катушке  $I$ ) присоединили постоянную ЭДС  $E$ , а к двум другим — вольтметры постоянного

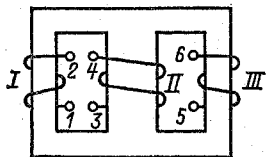


Рис. 13.13. К задаче 286

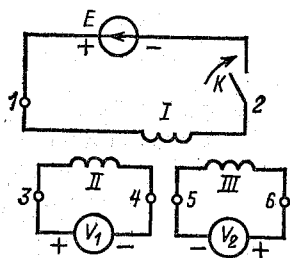


Рис. 13.14. К задаче 290



тока с обозначенной на рис. 13.14 полярностью их выводов. В момент замыкания ключа  $K$  вольтметры дали отклонения. Указать пары одноименных выводов.

291. В цепи рис. 13.15 активные и индуктивные сопротивления  $R_1=2 \text{ Ом}$ ;  $R_2=4 \text{ Ом}$ ;  $\omega L_1=6 \text{ Ом}$ ;  $\omega L_2=4 \text{ Ом}$ ;  $\omega M=1 \text{ Ом}$ , а напряжение

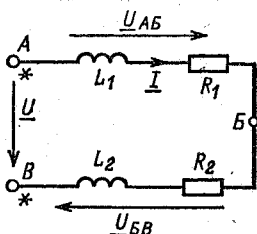


Рис. 13.15. К задаче 291

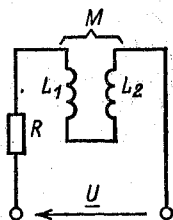


Рис. 13.16. К задаче 292

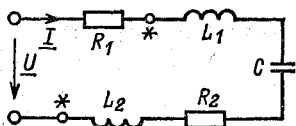


Рис. 13.17. К задаче 293

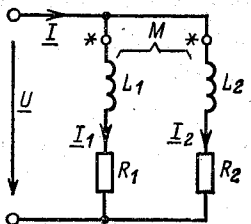


Рис. 13.18. К задаче 294

источника питания  $U=100 \text{ В}$ . Составить уравнение по второму закону Кирхгофа, определить ток  $I$  и напряжения  $U_{AB}$  и  $U_{BB}$ .

292. Вычислить ток в цепи рис. 13.16 при согласном и встречном включении катушек индуктивности, если  $R=30 \text{ Ом}$ ;  $L_1=0,1 \text{ Гн}$ ;  $L_2=0,03 \text{ Гн}$ ;  $M=0,053 \text{ Гн}$ ;  $U=220 \text{ В}$ ;  $f=50 \text{ Гц}$ .

293. В цепи рис. 13.17  $R_1=6 \text{ Ом}$ ;  $R_2=8 \text{ Ом}$ ;  $L_1=L_2=15 \text{ мГн}$ , напряжение источника питания  $U=120 \text{ В}$ , его частота  $f=500 \text{ Гц}$ . Определить значение емкости, обеспечивающее режим резонанса напряжений, а также ток при резонансе.

294. Для цепи рис. 13.18 вычислить все токи, если  $U=220 \text{ В}$ ;  $f=50 \text{ Гц}$ ;  $L_1=0,2 \text{ Гн}$ ;  $L_2=0,4 \text{ Гн}$ ;  $M=0,1 \text{ Гн}$ ;  $R_1=20 \text{ Ом}$ ;  $R_2=30 \text{ Ом}$ .

295. В цепи рис. 13.19  $U=200 \text{ В}$ ;  $X=\omega L=140 \text{ Ом}$ ;  $R=30 \text{ Ом}$ ;  $X_M=\omega M=60 \text{ Ом}$ . Определить все токи.

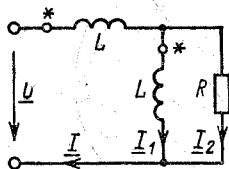


Рис. 13.19. К задаче 295



## Решение задачи

1. Как изменяются напряжения и ток в цепи рис. 14.1? Для аналогичной активно-индуктивной цепи (рис. 9.4; § 9.2) был получен треугольник напряжений (рис. 9.5), повторенный на рис. 14.2 (треугольник  $OHM$ ), для которого

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L, \quad (14.1)$$

или

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2}. \quad (14.2)$$

Зависимость (14.2) при  $U = \text{const}$  выражает уравнение окружности с диаметром  $U$ , половина которой  $OH'NH''M$  построена на рис. 14.2. В справедливости построенной полуокружности можно убедиться и иначе. Известно, что хорды  $OH$  и  $HM$  (рис. 14.2), опирающиеся на диаметр  $OM$ , образуют угол  $90^\circ$ , а из условия (14.1) следует, что  $U_R$  и  $U_L$  являются хордами при диаметре  $U$ .

Так как соотношения (14.1) и (14.2) не зависят от сопротивлений цепи (рис. 14.1), то при изменении сопротивления  $R$  остается неизменной окружность  $OH'NH''M$  (рис. 14.2) и вершина  $H$  треугольника  $OHM$  перемещается по круговой диаграмме (на рис. 14.2 показаны пунктиром два положения треугольника напряжений при  $R = \text{var}$ ).

Рассмотрим изменение тока цепи. Для этого в уравнении (14.1) напряжения  $U_R$  и  $U_L$  выразим через комплексные ток и сопротивления:

$$\underline{U} = R\underline{I} + jX_L\underline{I}. \quad (14.3)$$

Разделив уравнение (14.3) на  $jX_L$ , получим

$$\underline{U}/jX_L = \underline{I} - j\underline{I}R/X_L, \quad (14.4)$$

где  $\underline{U}/jX_L = \underline{I}_K$  — ток в цепи рис. 14.1 при  $R=0$ , что соответствует короткому замыканию сопротивления  $R$ , а  $j\underline{I}R/X_L = \underline{I}'$  — некоторый ток, сдвинутый по фазе на  $90^\circ$  относительно  $\underline{I}$ .

С учетом введенных обозначений уравнение (14.4) примет вид

$$\underline{I}_K = \underline{I} - \underline{I}', \quad (14.5)$$

или

$$I_K = \sqrt{I^2 + (I')^2}. \quad (14.6)$$

С учетом того, что в рассматриваемой цепи ток короткого замыкания

$$I_k = U/X_L = 220/50 = 4,4 \text{ А} = \text{const}$$

зависимости (14.5), (14.6) оказываются аналогичными (14.1), (14.2) и также являются уравнениями окружности.

Таким образом, используя постоянное значение тока короткого замыкания  $I_k$  и разностный ток  $I' = I - I_k$ , получаем круговую диаграмму трех токов ( $I_k, I, I'$ ), показанную на рис. 14.3 для двух значений переменного сопротивления  $R$ .

2. Построение круговой диаграммы напряжений и токов. Выше получены в отдельности диаграммы напряжений (рис. 14.2) и токов (рис. 14.3). Их следует совместить таким образом, чтобы обеспечить функциональную связь искомых напряжений  $\underline{U}_R, \underline{U}_L$  и тока  $I$  с переменным сопротивлением  $R$ .

Начнем с первой диаграммы (рис. 14.2) и, выбрав масштаб напряжений  $M_U \approx 40 \text{ В/см} = 4 \text{ В/мм}$ , определим диаметр окружности  $OM = U/M_U = 220/40 = 5,5 \text{ см} = 55 \text{ мм}$ . Этот диаметр  $OM$  (вектор напряжения  $\underline{U}$ ) расположим горизонтально (рис. 14.4) и на его основе построим полуокружность  $OH_1H_2M$ .

Затем переходим к построению диаграммы токов и снова начнем с ее диаметра — тока короткого замыкания  $I_k$ . Этот ток отстает по фазе от напряжения  $\underline{U}$  (рис. 14.4) на угол  $90^\circ$  (см. доп. вопрос 1 к этой задаче).

Принимая масштаб тока  $M_I = 1,0 \text{ А/см} = 0,1 \text{ А/мм}$ , определяем длину построенного вектора  $I_k$ :

$$OK = I_k/M_I = 4,4/1,0 \approx 4,4 \text{ см} \sim 45 \text{ мм},$$

$OK$  является диаметром окружности  $OT_2T_1K$ .

В заключение построим диаграмму сопротивлений, используя теорему об обратных векторах (см. доп. вопрос 3 к этой задаче). В соответствии с этой теоремой располагаем сопротивления: индуктивное  $X_L$  (отрезок  $OL$ ; рис. 14.4) — по направлению тока  $I_k$ , полное  $Z$  (отрезок  $OP_1$ ) — по направлению тока  $I_1$  и активное  $R$  (прямая  $LP_1$ ) — по пря-

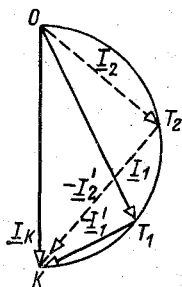


Рис. 14.3. Круговая диаграмма тока цепи  $R, X_L$

мой, перпендикулярной  $OL$ . Эти сопротивления построены на рис. 14.4 в масштабе  $M_R = 10 \text{ Ом/мм}$ .

3. Вычисление напряжений и тока. На оси сопротивлений  $R$  (рис. 14.4, прямая  $ЛП$ ) находим точки  $\Pi_1$

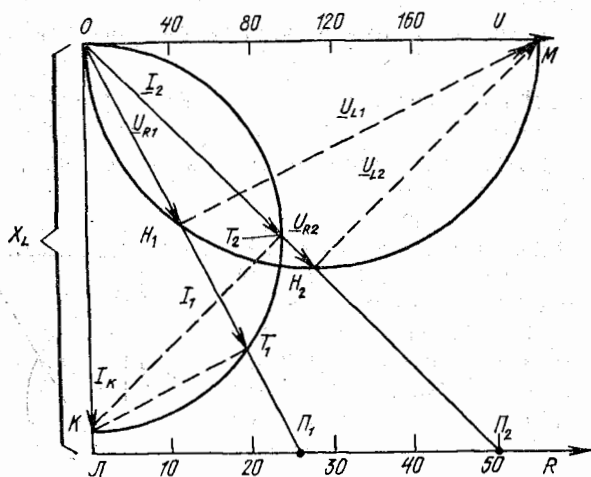


Рис. 14.4. Круговая диаграмма для цепи рис. 14.1

и  $\Pi_2$ , соответствующие заданным по условию задачи значениям  $R_1 = 25 \text{ Ом}$  и  $R_2 = 50 \text{ Ом}$ . Проводим прямые  $OP_1$  и  $OP_2$ , пересекающие полуокружности напряжений и токов. Точки пересечения прямых и окружностей  $H_1, H_2$  и  $T_1, T_2$  (рис. 14.4), как было показано (рис. 14.2 и 14.3), определяют искомые напряжения и ток, они обозначены на рис. 14.4 и при выбранных масштабах составляют:

$$U_{R1} = OH_1 \cdot M_U = 26 \cdot 4 = 104 \text{ В};$$

$$U_{R2} = OH_2 \cdot M_U = 39 \cdot 4 = 156 \text{ В};$$

$$U_{L1} = H_1 M \cdot M_U = 48 \cdot 4 = 192 \text{ В};$$

$$U_{L2} = H_2 M \cdot M_U = 39 \cdot 4 = 156 \text{ В};$$

$$I_1 = OT_1 \cdot M_I = 39,5 \cdot 0,1 = 3,95 \text{ А};$$

$$I_2 = OT_2 \cdot M_I = 32 \cdot 0,1 = 3,2 \text{ А}.$$

## Дополнительные вопросы к задаче

1. На каком основании выбрано направление тока  $\underline{I}_K$  (рис. 14.4)? Ток короткого замыкания  $\underline{I}_K$  соответствует режиму  $R=0$  цепи рис. 14.1, при котором она является идеально индуктивной. В такой цепи ток  $\underline{I}_K$  отстает на  $90^\circ$  по фазе от напряжения на индуктивности  $\underline{U}_L$ , но  $\underline{U}_L = \underline{U}$  при  $R=0$ .

Таким образом, согласование по фазе общего напряжения  $\underline{U}$  и тока короткого замыкания  $\underline{I}_K$  обеспечивает правильное совмещение круговых диаграмм напряжений (рис. 14.2) и токов (рис. 14.3).

2. Как повлияют на круговую диаграмму рис. 14.4 замена в цепи рис. 14.1 индуктивного сопротивления  $X_L$  на емкостное  $X_C$ ? В этом случае (см. также предыдущий дополнительный вопрос) при  $R=0$  цепь рис. 14.1 будет идеально емкостной и ее ток короткого замыкания  $\underline{I}_K$  опережает по фазе  $90^\circ$  напряжение  $\underline{U}$  (рис. 14.5). Используя по-прежнему векторы  $\underline{U}$  и  $\underline{I}_K$  (рис. 14.5) как диаметры диаграмм напряжений (рис. 14.2) и тока (рис. 14.3), получаем полную круговую диаграмму для цепи  $R, X_C$  (рис. 14.5), на которой показаны напряжения  $\underline{U}_R$  и  $\underline{U}_C$  (на активном и емкостном сопротивлениях) и ток цепи  $\underline{I}$  для одного из значений переменного сопротивления  $R$ .

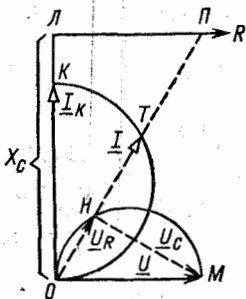


Рис. 14.5. К дополнительному вопросу 2

Оказалось, что диаграмма для цепи  $R, X_C$  (рис. 14.5) является зеркальным отображением диаграммы цепи  $R, X_L$  (рис. 14.4) относительно вектора напряжения  $\underline{U}$ . В этом легко убедиться по одинаково обозначенным точкам на двух рисунках.

3. Как проявляется действие теоремы об обратных векторах в круговой диаграмме (рис. 14.4)? Две группы величин диаграммы (рис. 14.4) обладают свойствами обратной пропорциональности:  $I = U/Z$  или  $Z = U/I$ , т. е. ток и полное сопротивление цепи, а также  $I_K = U/X_L$  или  $X_L = U/I_K$ , т. е. ток короткого замы-

кания и индуктивное сопротивление. Первая пара взаимобратных величин ( $I$  и  $Z$ ) отображена (рис. 14.4) отрезками  $OT_1$  и  $OP_1$  (при  $R=R_1$ ), а вторая пара ( $I_K$  и  $X_L$ ) — отрезками  $OK$  и  $OL$ . Представляя отрезки  $OT_1$  и  $OP_1$  векторами, можно применить к ним теорему об обратных векторах.

Если вектор ( $OP_1$ ,  $OP_2$ , рис. 14.4) с зафиксированным началом (точка  $O$ ) своим концом ( $P_1$ ,  $P_2$ ) скользит по некоторой прямой ( $ЛП$ ), то конец обратного ему вектора ( $OT_1$ ,  $OT_2$ ) будет скользить по окружности ( $OT_2T_1K$ ), диаметром которой является отрезок перпендикуляра ( $OK$ ), опущенного из точки  $O$  (начала всех векторов) на линию  $ЛП$ .

4. Что понимают под круговой диаграммой и каково ее назначение? Под круговой диаграммой тока или напряжения понимают дугу окружности, являющуюся геометрическим местом концов вектора тока (напряжения) при изменении по модулю какого-либо сопротивления цепи и сохранении неизменными остальных сопротивлений, частоты и ЭДС источников энергии.

Круговые диаграммы используются для графического анализа электрической цепи при переменном значении параметра.

5. Какова погрешность вычислений по круговой диаграмме (рис. 14.4)? Оценим погрешность двумя способами: повторным аналитическим расчетом искомых величин и проверкой результатов по второму закону Кирхгофа. Вначале выполним аналитический расчет для одного из заданных по условию задачи значений  $R=R_1=25$  Ом. При этом для цепи (рис. 14.1) имеем

$$I_1 = U/Z_1 = U/\sqrt{R_1^2 + X_L^2} = 220/\sqrt{25^2 + 50^2} = 3,94 \text{ А};$$

$$U_{R1} = R_1 I_1 = 25 \cdot 3,94 = 98,5 \text{ В};$$

$$U_{L1} = X_{L1} I_1 = 50 \cdot 3,94 = 197 \text{ В}.$$

Сравнивая эти значения с полученными в задаче ( $I_1=3,95$  А;  $U_{R1}=104$  В;  $U_{L1}=192$  В), замечаем, что погрешностью определения тока можно пренебречь, а для напряжений она не превышает 5 %, что вполне удовлетворяет практические цели.

Сейчас сделаем проверку по общему напряжению  $U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2}$ , которое по данным графического расчета, выполненного в задаче,

$$\sqrt{U_R^2 + U_L^2} = \sqrt{104^2 + 192^2} = 219 \text{ В при } U = 220 \text{ В}$$

и по данным аналитического расчета

$$\sqrt{U_R^2 + U_L^2} = \sqrt{98,5^2 + 197^2} = 220,02 \text{ В.}$$

Выполненные вычисления показывают, что графические расчеты по круговой диаграмме обеспечивают достаточную для практики точность результатов.

#### 14.2. НЕРАЗВЕТВЛЕННАЯ ЦЕПЬ С ПЕРЕМЕННЫМИ РЕАКТИВНЫМИ СОПРОТИВЛЕНИЯМИ

##### Условие задачи

Неразветвленная цепь с параметрами  $R=500 \text{ Ом}$ ;  $L=1,195 \text{ Гн}$  и  $C=0,133 \text{ мкФ}$  (рис. 11.1) питается от генератора с синусоидальным напряжением  $U=40 \text{ В}$ , частота  $f$  которого изменяется от 300 до 600 Гц.

##### Решение задачи

1. Сопротивления цепи. Треугольники сопротивлений. Индуктивное сопротивление

$$X_L = 2\pi fL = 6,28 \cdot 1,195 = 7,5f \text{ Ом,}$$

емкостное сопротивление

$$X_C = 1/2\pi fC = (10^6/6,28 \cdot 0,133)f = 12 \cdot 10^5/f \text{ Ом}$$

и реактивное сопротивление цепи  $X=X_L-X_C$  вычислены для заданных значений частоты (табл. 14.1). При этих данных

Таблица 14.1

$f$ , Гц	300	450	600
$X_L$ , кОм	2,25	3,38	4,5
$X_C$ , кОм	4,0	2,66	2,0
$X$ , кОм	-1,75	0,72	2,5

и заданном значении сопротивления  $R$  построены (рис. 14.6, а) в масштабе  $M_Z=100 \text{ Ом/мм}$  треугольники сопротивлений, где обозначены реактивные сопротивления  $X$  и полные сопротивления  $Z$  для выбранных частот, например для  $f=300 \text{ Гц}$  имеем  $Z_{300}$  и  $X_{300}$ .



2. Построение круговой диаграммы. Как было показано (§ 14.1 и особенно доп. вопрос 3), построение круговой диаграммы базируется на свойствах так называемых прямых и обратных векторов. Как и прежде (§ 14.1), примем в качестве прямых векторов полные сопротивления цепи  $Z$  (рис. 14.6, а), перенесенные на рис. 14.6, б

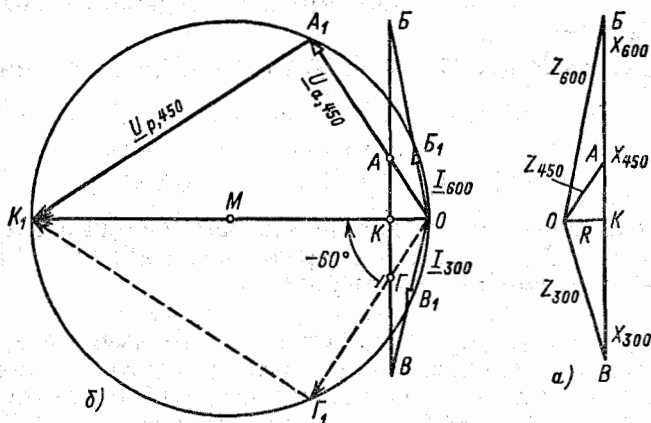


Рис. 14.6. Треугольники сопротивлений (а) и напряжения на элементах цепи  $R, L, C$  (б) для различных значений частоты

с сохранением масштаба  $M_Z = 100 \text{ Ом/мм}$ , но в зеркальном расположении (на обоих рисунках треугольники сопротивлений обозначены одинаковыми буквами). Необходимость зеркального расположения поясняется в доп. вопросе 3 к этой задаче.

Поскольку все прямые векторы имеют общее начало в точке  $O$ , а их концы расположены на одной прямой  $BB$ , не проходящей через точку  $O$ , концы обратных векторов  $I = U/Z$  будут размещаться на окружности (рис. 14.6, б), проходящей через точку  $O$  и с центром в точке  $M$ , лежащей на линии  $OK_1$ , перпендикулярной прямой  $BB$ . Диаметр окружности можно выбрать произвольно. На полученной круговой диаграмме прямым векторам  $OB, OK, OA, OB$ , выражающим полные сопротивления цепи для разных частот, соответствуют обратные векторы  $OB_1, OK_1, OA_1, OB_1$ , выражающие в другом масштабе токи цепи для этих же частот.

Для определения масштаба тока воспользуемся уже из-

вестным методом (§ 14.1) и рассмотрим значение масштаба для режима короткого замыкания переменного параметра  $X$ , т. е. при  $X=0$ . Попутно напомним, что в рассматриваемой цепи (рис. 11.1) условие  $X=X_L-X_C=0$  соответствует режиму резонанса напряжений. В этом режиме (резонансом или короткого замыкания) ток цепи  $I_p=I_k$  изображается на диаграмме отрезком  $OK_1=50$  мм, поэтому масштаб тока

$$M_I = I_p / OK_1 = U/R \cdot OK_1 = 40/500 \cdot 50 = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ А/мм.}$$

Активную составляющую напряжения  $U_a=RI=500 I$  можно определить по вектору тока, но в масштабе

$$M_U = 500M_I = 500 \cdot 1,6 \cdot 10^{-3} = 0,8 \text{ В/мм.}$$

Следовательно, одни и те же векторы (рис. 14.6, векторы  $OA_1$ ,  $OB_1$ ,  $OB_1$ ) выражают в разных масштабах ток  $I$  и напряжение  $U_a$  на активном сопротивлении.

3. Вычисление тока и напряжения. Имея круговую диаграмму (рис. 14.6, б), легко вычислить токи и напряжения для различных значений частоты. Например, при частоте 300 Гц, для которой  $OB_1=13$  мм, имеем ток  $I_{300}=13 \cdot M_I=13 \cdot 1,6 \approx 21$  мА и напряжение  $U_{a, 300}=13 \cdot M_U=13 \cdot 0,8=10,4$  В.

Аналогично по длинам векторов  $OA_1$  и  $OB_1$  находим токи  $I_{450}=44$  мА;  $I_{600}=17$  мА, а также напряжения  $U_{a, 450}=22$  В;  $U_{a, 600}=8,5$  В.

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Можно ли по круговой диаграмме рис. 14.6, б определить проводимости цепи для разных частот? Проводимость  $Y=I/U$  при заданном  $U=40$  В прямо пропорциональна току  $I$ , поэтому отрезки  $OA_1$ ,  $OB_1$ ,  $OB_1$  (рис. 14.6) изображают также проводимости цепи для разных частот, но в масштабе

$$M_Y = M_I / U = 1,6 \cdot 10^{-3} / 40 = 4 \cdot 10^{-5} \text{ См/мм.}$$

2. Можно ли по круговой диаграмме определить реактивную составляющую напряжения? При реактивном сопротивлении  $X=0$  напряжение  $U=U_a=RI_p=RI_k$  и определяется вектором  $OK_1$  (рис. 14.6, б), который, например, для частоты 450 Гц равен сумме векторов  $OA_1$  и  $A_1K_1$ . Поэтому вектор  $A_1K_1$  соответствует  $U_{p, 450}$ , т. е. реактивной составляющей напряжения для частоты 450 Гц.

Аналогичным образом для других частот можно построить векторы  $B_1K_1$ ,  $B_1K_1$  (на рис. 14.6, б не показаны), которые будут изображать реактивные составляющие напряжения для частот 600 и 300 Гц.

3. Почему при построении круговой диаграммы рис. 14.6, б было принято зеркальное расположение треугольников сопротивлений? Это необходимо для выполнения правила отсчета положительных углов в направлении, обратном направлению движения часовой стрелки. Действительно, по рис. 14.6, б вектор напряжения  $U_p, 450$  опережает вектор напряжения  $U_a, 450$  при  $X_L > X_C$  и отстает от вектора  $U_a, 450$  при  $X_C > X_L$ , как и должно быть в цепях соответственно с индуктивным и емкостным характером  $Z$ .

Если выбрать на круговой диаграмме заданное расположение треугольников сопротивлений (рис. 14.6, а), то фазовые соотношения окажутся обратными.

4. Как изменится круговая диаграмма, если оставить в цепи одно реактивное сопротивление? Если в рассматриваемой цепи отсутствует емкость, то  $X = X_L$ ,  $U_p = U_L$  и по круговой диаграмме можно исследовать режим цепи при последовательно включенных сопротивлениях  $R$  и переменном  $X_L$ .

При отсутствии индуктивности  $L$ , очевидно, можно исследовать режим последовательной цепи  $X_C$ ,  $R$  при переменном  $X_C$ .

5. Как определить ток и напряжения цепи для заданного сдвига фаз  $\varphi$  между общим напряжением и током? Если цепь должна обеспечить заданный сдвиг фаз, например  $\varphi = -60^\circ$ , то для этого режима ток определится вектором  $OG$ , построенным на рис. 14.6, б (изображен пунктиром) со сдвигом по фазе на угол  $-60^\circ$  относительно вектора напряжения  $\underline{U}$ . С учетом известных масштабов тока и напряжения имеем

$$I = OG_1 \cdot M_I = 25 \cdot 1,6 = 40 \text{ мА};$$

$$U_a = OG_1 \cdot M_U = 25 \cdot 0,8 = 20 \text{ В};$$

$$U_p = G_1 K_1 \cdot M_U = 43 \cdot 0,8 = 34,4 \text{ В}.$$

Этот режим обеспечивается при реактивном сопротивлении  $X = U_p / I = 860 \text{ Ом}$ , или частоте источника питания  $f = 340 \text{ Гц}$ , в чем предлагаем убедиться самостоятельно.

### 14.3. РАЗВЕТВЛЕННАЯ ЦЕПЬ С ПЕРЕМЕННЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ ВЕТВИ

#### Условие задачи

Для регулирования в широких пределах угла сдвига фазы между двумя напряжениями при постоянстве их амплитуд на практике применяется мостовая схема (рис. 14.7).

Определить пределы изменения переменного сопротив-

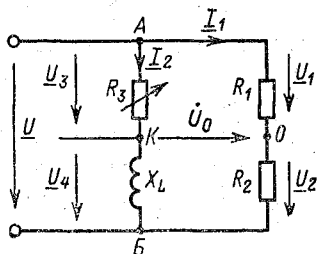


Рис. 14.7. К условию задачи § 14.3

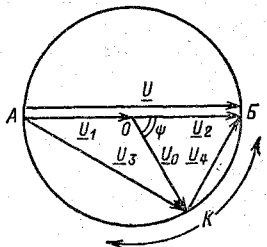


Рис. 14.8. Диаграмма напряжений для цепи, показанной на рис. 14.7

ления  $R_3$ , обеспечивающего регулировку сдвига по фазе между напряжением  $\underline{U}_0 = \underline{U}_{KO}$  и  $\underline{U} = \underline{U}_{AB}$  от  $\psi_1 = 30^\circ$  до  $\psi_2 = 120^\circ$ .

Вычислить напряжение  $\underline{U}_0$  и максимальные значения общего тока и мощности цепи, если  $R_1 = R_2 = X_L = 24$  Ом,  $U = 120$  В,  $f = 50$  Гц.

#### Решение задачи

1. Определение возможного диапазона регулировки сдвига по фазе  $\psi$ . Фазовые соотношения между напряжениями можно наглядно представить на топографической диаграмме, которая для данной цепи с переменным  $R$  и постоянным  $X_L$  (см. § 14.1) представляет собой круговую диаграмму, построенную на рис. 14.8 (по аналогии с рис. 14.2) в масштабе напряжений  $M_U = 4$  В/мм.

При этом диаметр окружности  $AB = U/M_U = 120/4 = 30$  мм.

Поскольку по условию задачи  $R_1 = R_2$ , то и напряжения на этих сопротивлениях  $U_1 = U_2 = U/2$  (рис. 14.7). Поэтому на диаграмме рис. 14.8 отрезок  $AO = OB$ , точка  $O$  (начало





цепи. Наибольшее значение полной мощности  $S = UI = 120 \cdot 6 = 720 \text{ В} \cdot \text{А}$ . Но активная мощность  $P = UI \cos \varphi$  будет максимальна при наибольшем значении произведения  $I \cos \varphi$  или проекции тока  $I$  на вектор напряжения  $U$  (эта проекция определяется отрезком  $O_2D = O_2A + AD = O_2A + O_1O$  и показана на рис. 14.10).

Из диаграммы рис. 14.10 очевидно, что  $P_{max} = UI \cos \varphi_1 = U(O_2D)M_I = 120 \cdot 5 \cdot 1 = 600 \text{ Вт}$ .

Итак, рассмотренная цепь имеет наибольшую активную мощность при токе, меньшем максимального (на рис. 14.10 отрезки  $O_2O < O_2H$ ).

5. Вычисление пределов изменения сопротивления  $R_3$ . Совместив диаграммы, приведенные на рис. 14.8 и 14.10, получим общую круговую диаграмму (рис. 14.11), где масштабы  $M_U = 3,15 \text{ В/мм}$ ,  $M_I = 1,15 \text{ А/см}$ .

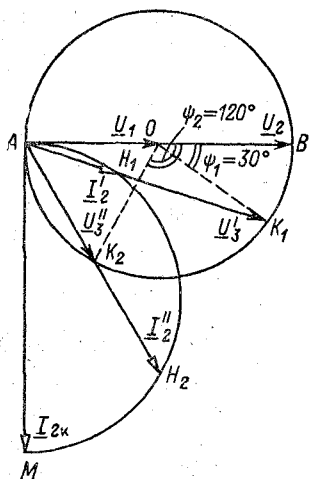


Рис. 14.11. Полная круговая диаграмма для цепи рис. 14.7

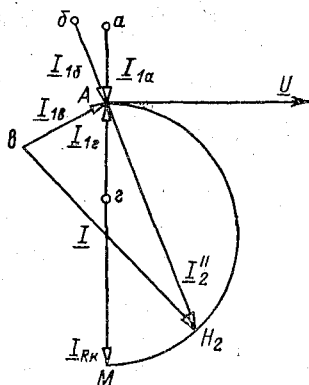


Рис. 14.12. К дополнительному вопросу 2

Из полученной диаграммы (рис. 14.11) легко определить для различных значений угла  $\psi$  значения  $I_2$  и  $U_3$ .

Действительно, при  $\psi_1 = 30^\circ$  имеем

$$U'_3 = (AK_1) \cdot M_U = 36,0 \cdot 3,15 \approx 115 \text{ В};$$

$$I'_2 = (AH_2) \cdot M_I = 1,4 \cdot 1,15 = 1,6 \text{ А},$$

откуда

$$R_3' = 115/1,6 = 72 \text{ Ом.}$$

Аналогичным образом при  $\psi_2 = 120^\circ$

$$U_3'' = (AK_2) \cdot M_U = 18,7 \cdot 3,15 = 59 \text{ В;}$$

$$I_2'' = (AH_2) \cdot M_I = 3,85 \cdot 1,15 = 4,4 \text{ А,}$$

откуда

$$R_3'' = U_3''/I_2'' = 59/4,4 = 13,5 \text{ Ом.}$$

Итак, изменением сопротивления  $R_3$  от 13,5 Ом до 72 Ом можно обеспечить требуемую регулировку сдвига по фазе от  $30^\circ$  до  $120^\circ$ .

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Как определить изменение проводимости цепи? Вектор общего тока на рис. 14.10 в масштабе  $M_Y = M_I/U = 1/120 \text{ См/см}$  дает значения проводимости всей цепи, изменяющейся от минимального значения  $Y_{min} = (O_2A) \cdot M_Y = 2,5 \cdot 1/120 = 0,0208 \text{ См}$  до максимального значения  $Y_{max} = (O_2H) \cdot M_Y = 6(1/120) = 0,05 \text{ См}$ .

Легко проверить полученные результаты, учитывая, что при  $R_3 \rightarrow \infty$  проводимость первой ветви  $Y_1 = Y_{min} = 0,0208 \text{ См}$  может быть вычислена как  $1/(R_1 + R_2) = 1/48 = 0,0208 \text{ См}$ .

2. Как изменится круговая диаграмма общего тока (рис. 14.10), если в ветви АОВ (рис. 14.7) вместо активных сопротивлений включать только: а) индуктивные; б) индуктивно-активные; в) активно-емкостные; г) емкостные? В этих случаях начало вектора тока  $I_1$  переместится соответственно в точки а, б, в, г (рис. 14.12), определяемые сдвигом по фазе тока  $I_1$  относительно напряжения  $U$  для каждого случая. Круговая диаграмма для тока  $I_2$  (рис. 14.10) останется неизменной.

Общий ток опять равен геометрической сумме неизменного вектора  $I_1$  и изменяющегося  $I_2$ . На рис. 14.12 показан общий ток для случая «в» и тока  $I_2 = I_2''$  (при  $R_3'' = 13,5 \text{ Ом}$ ).

## 14.4. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

296. Для цепи из последовательно включенных сопротивления  $R$  и индуктивности  $L$  построить круговую диаграмму при изменении активного сопротивления от нуля до 50 Ом, если индуктивное сопротив-



ление  $X_L=20$  Ом, а напряжение на выводах  $U=120$  В. Построить графики тока, напряжений на активном сопротивлении и индуктивности в зависимости от  $R$ .

297. Для цепи из последовательно включенных  $R=30$  Ом и емкости  $C$ , сопротивление которой  $X_C$  изменяется от 0 до 40 Ом, а напряжение на выводах  $U=120$  В, построить круговую диаграмму и определить ток при значениях  $R=10; 20; 25; 40$  Ом.

298. Параметры цепи (рис. 14.13) известны:  $R_1=40$  Ом;  $X_C=20$  Ом;  $U=20$  В. Построить круговую диаграмму и определить графически

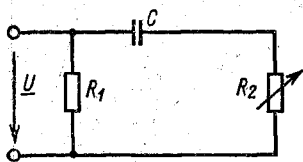


Рис. 14.13. К задаче 298

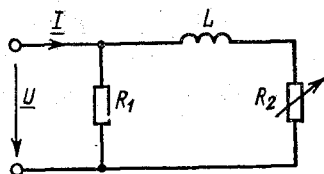


Рис. 14.14. К задаче 299

максимальные значения тока и мощности, на которые должен быть рассчитан источник, если сопротивление  $R_2$  изменяется от 0 до  $\infty$ . Найти значение  $\cos \varphi$  всей цепи в режимах  $I_{max}$  и  $P_{max}$ .

299. Определить пределы изменения сопротивления  $R_2$  (рис. 14.14), обеспечивающие регулировку фазового угла между напряжением  $U$  и током  $I$  от  $15^\circ$  до  $45^\circ$ , если  $R_1=300$  Ом,  $X_L=150$  Ом.

300. Параметры цепи (рис. 14.15) известны:  $U=120$  В;  $X_1=20$  Ом;  $X_2=12$  Ом. Построить круговую диаграмму и определить гра-

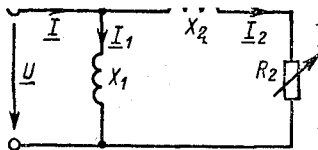


Рис. 14.15. К задаче 300

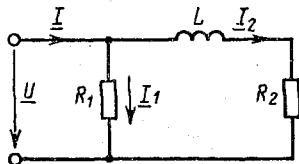


Рис. 14.16. К задаче 301

фически наибольший сдвиг по фазе  $\varphi_{max}$  между токами  $I$  и  $I_1$ , значение сопротивления  $R_2$ , при котором получается этот сдвиг, а также значение тока  $I_2$  в режиме  $\varphi_{max}$ .

301. Источник напряжением  $U=24$  В питает цепь (рис. 14.16), у которой сопротивление  $R_1=R_2=12$  Ом. Построить векторную диаграмму и определить общий ток  $I$  и его сдвиг по фазе относительно напряжения  $U$ , если сдвиг по фазе тока  $I_2$  относительно напряжения  $U$  составляет  $60^\circ$ . Вычислить в этом режиме значение  $X_L$ .

302. Источник с напряжением 80 В питает контур (рис. 14.17) с переменным индуктивным сопротивлением  $X_L$ , изменяющимся в пределах 600—1900 Ом. Построить кривые общего тока  $I$  и его сдвига по фазе  $\varphi$  относительно напряжения  $U$  в зависимости от  $X_L$ , если  $R=400$  Ом, а  $X_C=1000$  Ом.

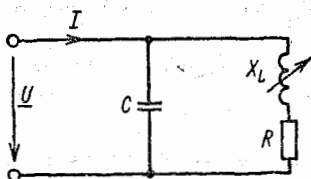


Рис. 14.17. К задаче 302

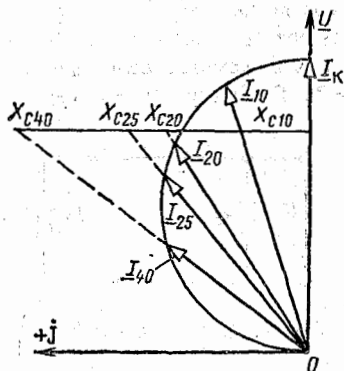


Рис. 14.18. Ответ к задаче 297

Значения  $I$  и  $\varphi$  для нескольких значений  $X_L$  определить графически по круговой диаграмме.

#### 14.5. ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ. 14

296.

$R_1$ , Ом	0	10	20	30	50
$I$ , А	6	5,4	4,25	3,35	2,2
$U_a$ , В	0	54	85	105	110
$U_L$ , В	120	108	85	67	44

297. См. рис. 14,18; 3,8 А; 3,3 А; 3,06 А; 2,4 А.

298. 1,20 А, 20 Вт; 0,707; 0,9.

299. От 60 до 265 Ом.

300. 27°; 19 Ом; 5,3 А.

301. 2,67 А; 19°; 20,8 Ом.

$X_L, \text{ Ом}$	600	800	1000	1200	1900
$I, \text{ мА}$	64	44	31	29	44
$\varphi, \text{ град}$	+11	+2	-20	-43	-77

## Глава пятнадцатая

### СИММЕТРИЧНАЯ ТРЕХФАЗНАЯ ЦЕПЬ

#### 15.1. ТРЕХФАЗНАЯ СИСТЕМА ЭДС. СОЕДИНЕНИЕ ОБМОТОК ТРЕХФАЗНЫХ ГЕНЕРАТОРОВ

##### Условие задачи

Для заданного на рис. 15.1 соединения обмоток симметричного трехфазного генератора с фазной ЭДС 38 В определить

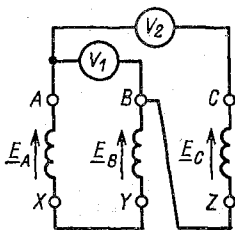


Рис. 15.1. К условию задачи § 15.1

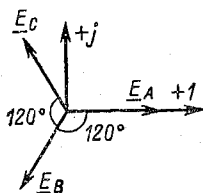


Рис. 15.2. Комплексные фазные ЭДС симметричного трехфазного генератора

делить показания вольтметров  $V_1$  и  $V_2$  и построить векторную диаграмму всех ЭДС, а также измеряемых напряжений.

##### Решение задачи

1. Получение трехфазной системы ЭДС и ее свойства. Совокупность трех синусоидальных ЭДС одной частоты, сдвинутых относительно друг друга по фазе, называют трехфазной системой ЭДС. Если амплитуды всех

ЭДС одинаковы и сдвинуты между собой на один и тот же фазовый угол ( $120^\circ$ ), то трехфазная система ЭДС называется симметричной.

Трехфазную симметричную систему ЭДС получают при помощи трехфазных генераторов, содержащих три обмотки с одинаковым числом витков и размещенных в корпусе генератора таким образом, что в них наводятся одинаковые ЭДС, смещенные на равные углы в  $120^\circ$ . Эти ЭДС, обозначаемые как  $E_A$  (ЭДС фазы А),  $E_B$  (ЭДС фазы В) и  $E_C$  (ЭДС фазы С), изображены в виде трех комплексных ЭДС на векторной диаграмме (рис. 15.2), где модули  $E_A = E_B = E_C$ .

Обмотки генератора обычно соединяются либо звездой (рис. 15.3), либо треугольником (рис. 15.4). В каждом виде соединения соблюдается одно и то же правило направле-

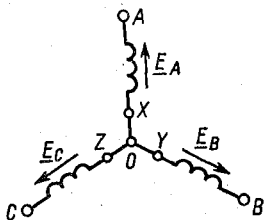


Рис. 15.3. Соединение обмоток генератора звездой

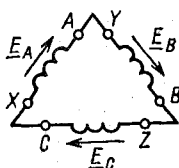


Рис. 15.4. Соединение обмоток генератора треугольником

ния ЭДС: от конца каждой обмотки (точки X, Y, Z) к их началам (точки A, B, C).

Если пренебречь внутренним сопротивлением обмоток генератора, то фазные ЭДС соответственно равны фазным напряжениям  $\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$ .

Как следует из векторной диаграммы рис. 15.5, линейные напряжения  $\underline{U}_{AB} = \underline{U}_A - \underline{U}_B$ ,  $\underline{U}_{BC} = \underline{U}_B - \underline{U}_C$  и  $\underline{U}_{CA} = \underline{U}_C - \underline{U}_A$ , представляющие собой геометрические разности соответствующих фазных напряжений и отличающиеся от них в  $\sqrt{3}$  раз (как стороны равнобедренных треугольников, лежащих против углов  $120^\circ$ ), тоже образуют симметричную систему векторов.

При рассмотрении трехфазных цепей учитывается *важное свойство суммы трехфазной симметричной системы векторов: эта сумма равна нулю*. Например, используя рис. 15.2, имеем

$$\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C = E_A e^{j0^\circ} + E_B e^{-j120^\circ} + E_C e^{j120^\circ}.$$

Учитывая, что  $E_A = E_B = E_C = E_\Phi$  (ЭДС фазы), и используя теорему Эйлера для преобразования поворотного множителя  $e^{\pm j120^\circ} = \cos 120^\circ \pm j \sin 120^\circ$ , имеем  $\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C = 0$ .

Этот же результат можно получить, выполнив геометрическое сложение комплексных ЭДС  $\underline{E}_A, \underline{E}_B, \underline{E}_C$  (рис. 15.2), так как при этом окажется замкнутым равнобедренный треугольник со стороной, равной  $E_\Phi$ .

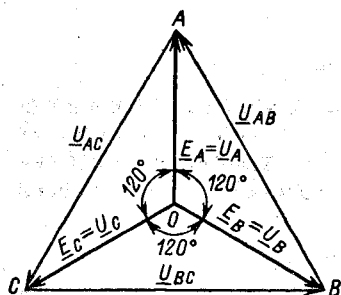


Рис. 15.5. Фазные и линейные напряжения симметричного трехфазного генератора

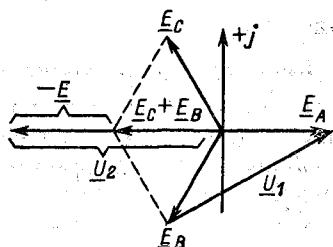


Рис. 15.6. Векторная диаграмма цепи рис. 15.1

2. Вычисление напряжений. Заданная цепь (рис. 15.1) представляет собой схему соединения треугольником, разомкнутым между точками  $A$  и  $C$  (сопротивление вольтметров принимается бесконечно большим).

По второму закону Кирхгофа

$$-\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C = \underline{U}_{CA} = \underline{U}_2,$$

где  $U_2$  — напряжение, измеряемое вольтметром  $V_2$ .

Так как

$$\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C = 0 \text{ или } \underline{E}_B + \underline{E}_C = -\underline{E}_A,$$

то, заменив сумму  $\underline{E}_B + \underline{E}_C = -\underline{E}_A$  в выражении по второму закону Кирхгофа, получим  $U_2 = -2E_A$ , а показания второго вольтметра будут  $U_2 = 2E_\Phi = 2 \cdot 38 = 76$  В. Вольтметр  $V_1$  измеряет линейное напряжение, комплексное значение которого  $\underline{U}_{AB} = \underline{E}_A - \underline{E}_B$ . Это напряжение является линейным, и оно (как было выше доказано) в  $\sqrt{3}$  раз больше фазного, т. е. показание вольтметра будет

$$U_1 = \sqrt{3} E_\Phi = \sqrt{3} \cdot 38 = 66 \text{ В.}$$

3. Построение векторной диаграммы. На рис. 15.6 приведена уже известная симметричная трехфазная система ЭДС  $\underline{E}_A, \underline{E}_B, \underline{E}_C$  (см. рис. 15.2). По правилу параллелограмма построен вектор суммы  $\underline{E}_B + \underline{E}_C$ , к которому прибавлен вектор  $-\underline{E}_A$ . В результате имеем искомое напряжение  $\underline{U}_2 = -\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C$ . Вектор линейного напряжения  $\underline{U}_1$  построен (рис. 15.6) по уже известным правилам (рис. 15.5).

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Как обосновать допустимость соединения обмоток генератора треугольником? Соединение треугольником (рис. 15.4) выполнено с соблюдением очередности начальных и конечных выводов всех обмоток. При этом сумма ЭДС контура

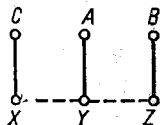
$$\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C = 0,$$

и тока в контуре не будет, т. е. при отсутствии внешней нагрузки генератор находится в режиме холостого хода.

2. Можно ли поменять начало и конец у обмотки генератора при соединении треугольником? Как показывает анализ цепи (рис. 15.1), этого делать нельзя, так как ЭДС в контуре обмоток генератора (при отсутствии внешней нагрузки) оказывается не равной нулю. В нашем случае (рис. 15.1) она оказалась равной двойной фазной ЭДС, что приведет к появлению большого тока холостого хода генератора, его перегрузке и возможности выхода из строя.

3. Почему начала и концы обмоток генератора выводятся на внешнюю плату по рис. 15.7? При этом легко осуществлять соединения звезд-

Рис. 15.7. Схема выводов трехфазного генератора и их коммутация на соединения звездой (пунктир) и треугольником (сплошные линии)



дой (две горизонтальные перемычки, показанные пунктиром) или треугольником (три вертикальные перемычки, показанные сплошными линиями). В справедливости сказанного легко убедиться по рис. 15.3 и 15.4.

## 15.2. ТРЕХПРОВОДНАЯ ЦЕПЬ С ПРИЕМНИКОМ, СОЕДИНЕННЫМ ЗВЕЗДОЙ

### Условие задачи

Трехфазный электродвигатель, схема замещения которого (рис. 15.8) имеет активное сопротивление каждой фазы  $R=0,6$  Ом и индуктивное  $X_L=0,8$  Ом, питается от сети

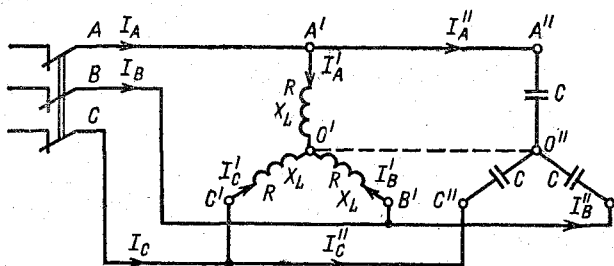


Рис. 15.8. Эквивалентная схема трехфазного электродвигателя с включенными в каждую фазу конденсаторами

с линейным напряжением 380 В. К двигателю присоединена батарея конденсаторов (рис. 15.8), улучшающая коэффициент мощности каждой фазы до 0,92.

Определить токи  $I'_A$ ,  $I'_B$ ,  $I'_C$  в фазах двигателя  $I_A$ ,  $I_B$ ,  $I_C$  в линейных проводах; построить их векторные диаграммы. Вычислить активную и полную мощности цепи.

### Решение задачи

1. Обоснование схемы цепи. Поскольку к обмоткам двигателя с одинаковыми сопротивлениями присоединены конденсаторы с одинаковой емкостью, приемник в целом (двигатель с конденсаторами) симметричен, что позволяет использовать трехпроводную схему питания приемника (без нулевого провода).

2. Вычисление токов в фазах двигателя. Для симметричного приемника, соединенного звездой, напряжения на фазах  $U_\phi = U_n / \sqrt{3} = 380 / \sqrt{3} = 220$  В и токи в обмотках двигателя

$$\begin{aligned}
 I'_A = I'_B = I'_C = I'_\phi &= \frac{U_\phi}{Z} = \frac{220}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \\
 &= \frac{220}{\sqrt{0,6^2 + 0,8^2}} = 220 \text{ А,}
 \end{aligned}$$

они отстают по фазе на углы  $\varphi = \arccos R/Z = \arccos 0,6 = 53^\circ$  относительно соответствующих фазных напряжений (рис. 15.9).

3. Вычисление линейных токов. Активная проводимость фазы равна активной проводимости обмотки двигателя:

$$G_\phi = R/(R^2 + X_L^2) = 0,6/1 = 0,6 \text{ См};$$

реактивная проводимость фазы

$$B_\phi = G_\phi \operatorname{tg} \varphi_\phi = 0,6 \operatorname{tg} 23^\circ = 0,25 \text{ См},$$

так как при заданном  $\cos \varphi_\phi = 0,92$  угол  $\varphi_\phi = 23^\circ$ .

Полная проводимость

$$Y_\phi = \sqrt{G_\phi^2 + B_\phi^2} = \sqrt{0,6^2 + 0,25^2} = 0,65 \text{ См}.$$

Линейные токи

$$I_A = I_B = I_C = I_\phi = U Y_\phi = 220 \cdot 0,65 = 143 \text{ А}$$

отстают от соответствующих фазных напряжений (рис. 15.9) на углы  $\varphi_\phi = 23^\circ$ .

Токи  $I'_A$ ,  $I''_B$  и  $I''_C$ , показанные на векторной диаграмме (рис. 15.9), проходят в ветвях с емкостями, они опережают соответствующие фазные напряжения на углы  $90^\circ$ .

4. Вычисление мощности. Активная мощность всей цепи

$$P = 3P_\phi = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi_\phi = 3 \cdot 220 \cdot 143 \cdot 0,92 = 87,0 \text{ кВт},$$

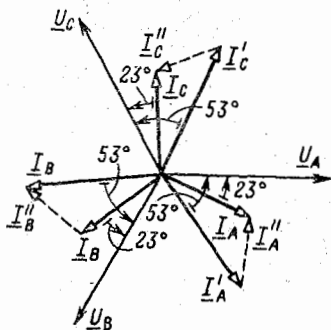


Рис. 15.9. Векторная диаграмма цепи, показанной на рис. 15.8

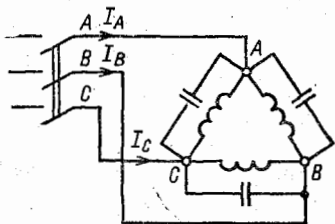


Рис. 15.10. К дополнительному вопросу 2



или

$$P = 3P_{\phi} = 3(I'_{\phi})^2 R = 3(220)^2 \cdot 0,6 = 87,0 \text{ кВт.}$$

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Нужен ли провод между точками  $O'$  и  $O''$  (рис. 15.8)? Потенциалы точек  $O'$  и  $O''$  одинаковы, так как обмотки двигателя и конденсаторы  $C$  образуют две симметричные звезды; поэтому в проводе  $O'O''$  тока нет и провод не нужен.

2. Во сколько раз возрастут линейные токи, если приемник пересоединить со схемы звезды на схему треугольника? В этом случае (рис. 15.10) сопротивления фаз приемника окажутся включенными на линейные напряжения  $U_{л} = 380 \text{ В}$ , т. е. напряжения на фазах возрастут в  $\sqrt{3}$  раз. Соответственно увеличатся и токи во всех фазах:

$$I_{AB} = I_{BC} = I_{CA} = I_{\phi} = 143\sqrt{3} = 248 \text{ А.}$$

Учитывая, что при симметричном приемнике, соединенном треугольником, линейные токи в  $\sqrt{3}$  раз больше фазных, имеем

$$I_A = I_B = I_C = \sqrt{3} \cdot 248 = 3 \cdot 143 = 429 \text{ А.}$$

Итак, при переключении симметричного потребителя со схемы звезды на схему треугольника линейные токи возрастают в 3 раза.

3. В каких случаях применяют на практике трехпроводную систему для приемников, соединенных звездой? Одинаковые напряжения на фазах приемника получаются при отсутствии смещения нейтрали, а для этого приемник должен быть симметричным. К симметричным приемникам относятся трехфазные двигатели, трансформаторы и т. п. Трехфазное электрооборудование на предприятиях обычно включают в трехпроводную сеть.

4. Как изменятся токи или напряжения в цепи при обрыве линейного провода или коротком замыкании фазы? Подобные режимы возникают при неисправностях в приемниках энергии, перегорании предохранителя и других аномалиях в цепи. Обрыв линейного провода или замыкание фазы нарушает симметрию цепи, а анализ несимметричных цепей составляет содержание следующей главы, где указанные режимы (об-

рывы, замыкания) рассматриваются более подробно. Все же, учитывая, что обрывы или замыкания встречаются при эксплуатации симметричных цепей, поясним их последствия на примерах обрыва линейного провода в фазе  $A$ , а также короткого замыкания этой фазы.

Первый случай (обрыв провода) условно показан на рис. 15.11 как разомкнутый ключ. К двум неповрежденным

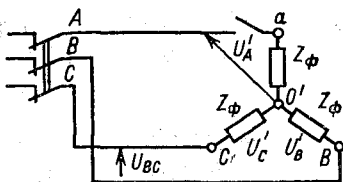


Рис. 15.11. К дополнительному вопросу 4

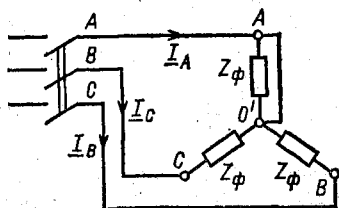


Рис. 15.12. К дополнительному вопросу 4

фазам подводится линейное напряжение  $U_{BC} = 380$  В, которое распределяется на две равные части  $U'_C = U'_B = 380/2 = 190$  В, так как в этих фазах включены одинаковые сопротивления  $Z_\phi$  (рис. 15.11). Токи в фазах  $B$  и  $C$  одинаковы:  $I'_B = I'_C = U'_B Y_\phi = U'_C Y_\phi = 190 \cdot 0,65 = 123,5$  А.

Если произойдет короткое замыкание фазы (рис. 15.12), то точка  $O'$  соединится с точкой  $A$ . В таком случае напряжения  $U'_C$  и  $U'_B$  в фазах  $B$  и  $C$  возрастут в  $\sqrt{3}$  раз. В нашем случае получим  $U'_B = U'_C = 380$  В, и линейные токи увеличатся в  $\sqrt{3}$  раз, т. е.  $I_B = I_C = \sqrt{3} \cdot 143 = 248$  А.

### 15.3. ТРЕХФАЗНАЯ ЦЕПЬ С ПРИЕМНИКОМ, СОЕДИНЕННЫМ ТРЕУГОЛЬНИКОМ

#### Условие задачи

К трехфазной сети присоединили треугольником трехфазные электродвигатели общей мощностью  $P_{дв} = 120$  кВт  $= 120 \cdot 10^3$  Вт при  $\cos \varphi_{дв} = 0,82$  (рис. 15.13). Определить фазные и линейные токи цепи, если линейное напряжение  $U_{л} = 380$  В. Построить векторную диаграмму и записать комплексные токи,

## Решение задачи

1. Вычисление фазных и линейных токов для электродвигателей. Трехфазные электродвигатели являются симметричной нагрузкой, поэтому каждый из фазных токов треугольника

$$I_{AB} = I_{BC} = I_{CA} = \frac{P_{\text{дв}}}{3U_{\text{л}} \cos \varphi_{\text{дв}}} = \frac{120 \cdot 10^3}{3 \cdot 380 \cdot 0,82} = 128,3 \text{ А}$$

и отстает на угол  $\varphi_{\text{дв}} = \arccos 0,82 = 35^\circ$  от соответствующего линейного напряжения, как показано на рис. 15.14. У сим-

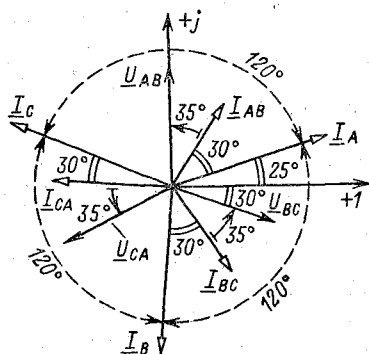
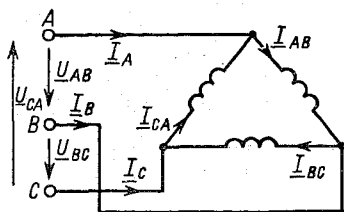


Рис. 15.13. К условию задачи § 15.3

Рис. 15.14. Векторная диаграмма для цепи, показанной на рис. 15.13

метричного приемника, соединенного треугольником, линейные токи равны и в  $\sqrt{3}$  раз больше фазных, поэтому линейные токи электродвигателя

$$I_A = I_B = I_C = \sqrt{3} I_{\phi} = \sqrt{3} \cdot 128,3 = 222 \text{ А}$$

и отстают на угол  $30^\circ$  от соответствующих фазных токов (рис. 15.14).

2. Комплексные фазные и линейные токи. Совместим ось мнимых чисел ( $+j$ ) с комплексным напряжением  $U_{AB}$  (рис. 15.14). При этом ось вещественных чисел ( $+1$ ) расположится горизонтально.

Для выбранных комплексных ординат (рис. 15.14) имеем:

фазные токи

$$\underline{I}_{AB} = I_{AB} \angle 55^\circ = 128,3 \angle 55^\circ \text{ А,}$$

$$\underline{I}_{BC} = I_{BC} \angle (55^\circ - 120^\circ) = 128,3 \angle -65^\circ \text{ А;}$$

$$\underline{I}_{CA} = I_{CA} \angle (55^\circ + 120^\circ) = 128,3 \angle 175^\circ \text{ А;}$$

## линейные токи

$$\underline{I}_A = I_A \angle 25^\circ = 222 \angle 25^\circ \text{ A};$$

$$\underline{I}_B = I_B \angle (25^\circ - 120^\circ) = 222 \angle -95^\circ \text{ A};$$

$$\underline{I}_C = I_C \angle (25^\circ + 120^\circ) = 222 \angle 145^\circ \text{ A}.$$

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Можно ли соединить генератор звездой, если приемник соединен треугольником? В рассматриваемом случае генератор может быть соединен как звездой (рис. 15.15, а), так и треугольником (рис. 15.15, б).

2. Как проверить значения комплексных фазных и линейных токов? Для этого восполь-

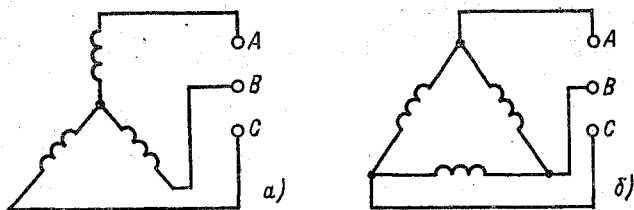


Рис. 15.15. К дополнительному вопросу

зуемся свойством суммы комплексных фазных или линейных токов (они равны нулю). Действительно, для линейных токов имеем

$$\underline{I}_A = 222 \angle 25^\circ = 222 (\cos 25^\circ + j \sin 25^\circ) = 203 + j 94 \text{ A};$$

$$\underline{I}_B = 222 \angle -95^\circ = 222 (\cos 95^\circ - j \sin 95^\circ) = -19 - j 220 \text{ A};$$

$$\underline{I}_C = 222 \angle 145^\circ = 222 (\cos 145^\circ + j \sin 145^\circ) = -184 + j 126 \text{ A}$$

или

$$\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 203 - 19 - 184 + j 94 - j 220 + j 126 = 0.$$

Аналогичным образом можно проверить сумму комплексных фазных токов, что предлагаем выполнить самостоятельно.

3. Как изменятся фазные и линейные токи при случайном обрыве обмотки АВ двигателя? В неповрежденных фазах ВС и СА (рис. 15.13) токи  $I_{BC}$  и  $I_{CA}$  останутся прежними (128,3 А), так как на-

пряжения и сопротивления фаз остаются неизменными. Следовательно, не изменится и линейный ток  $I_C = 222$  А.

В фазе  $AB$ , где произошел обрыв цепи, ток  $I_{AB} = 0$ . Используя первый закон Кирхгофа с учетом  $I_{AB} = 0$ , получим  $I_A = I_{AB} - I_{CA} = -I_{CA}$  и  $I_B = I_{BC} - I_{AB} = I_{BC}$ , т. е. по модулю линейные токи  $I_A = I_B = I_{BC} = I_{CA} = 128,3$  А.

4. Как изменятся фазные токи при обрыве, например вследствие перегорания предохранителя, в линейном проводе узла  $C$ ? Если от вывода  $C$  источника питания (рис. 15.13) отсоединить провод сети, то ток  $I_{AB}$  останется прежним, а ток  $I_C = 0$ ; при этом в двух фазах ( $BC$  и  $CA$ ) будет один общий ток  $I_{BCA} = I_{BC} = I_{CA}$ , для определения которого вычислим прежде всего сопротивление фаз:

$$Z_{BC} = Z_{CA} = U_{л}/I_{BC} = 380/222 = 1,715 \text{ Ом} = Z_{\phi}.$$

По закону Ома ток  $I_{BCA} = U_{л}/2Z_{\phi} = 380/3,43 = 111$  А. Следовательно, в одной фазе ток остается неизменным ( $I = 222$  А), а в двух других фазах уменьшается в 2 раза.

#### 15.4. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

303. Чему равно показание вольтметра (рис. 15.16), подключенного к обмоткам симметричного трехфазного генератора по приведенной схеме, если фазная ЭДС равна 220 В? Построить векторную диа-

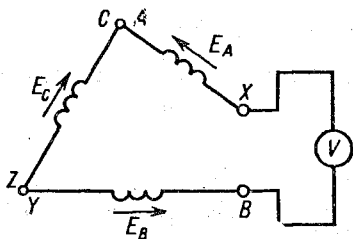


Рис. 15.16. К задаче 303

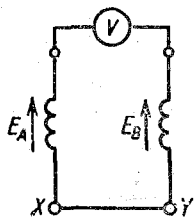


Рис. 15.17. К задаче 304

грамму и показать на ней вектор напряжения, измеряемого вольтметром.

304. Для показанного соединения двух обмоток симметричного трехфазного генератора (рис. 15.17) определить показание вольтметра, если  $E_A = E_B = 127$  В.

305. Трехфазный электродвигатель, соединенный звездой, развн-

вает механическую мощность 6 кВт. Коэффициент полезного действия двигателя 0,8, его  $\cos \varphi = 0,85$ , а линейное напряжение сети 380 В. Составить эквивалентную схему двигателя и вычислить токи в линейных проводах. Построить в масштабе векторную диаграмму.

306. От трехфазной сети с активным сопротивлением проводов 0,2 Ом и индуктивным 0,8 Ом питается электродвигатель, соединенный звездой. Мощность двигателя 12 кВт, его  $\cos \varphi = 0,87$ . Линейное напряжение, подведенное к двигателю, 380 В. Определить падение и потерю напряжения в линии. Построить векторную диаграмму.

307. Три активных сопротивления по 20 Ом каждое присоединены звездой к трехфазной сети с линейным напряжением 380 В. В фазе А произошел обрыв линейного провода. Вычислить все линейные токи до и после обрыва.

308. Три активных сопротивления по 20 Ом каждое присоединены звездой к трехфазной сети с линейным напряжением 220 В. В фазе В произошло короткое замыкание. Вычислить токи в линейных проводах до и после короткого замыкания. Построить векторную диаграмму.

309. Три равных сопротивления по 20 Ом, соединенных звездой, включены в сеть трехфазного тока с фазным напряжением 127 В. Как изменятся линейные токи, если эти же сопротивления соединить треугольником?

310. Три равных активных сопротивления по 5,5 Ом соединены треугольником и включены в сеть трехфазного тока с линейным напряжением 220 В. Вычислить фазные и линейные токи, мощность каждой фазы и всей цепи. Построить векторную диаграмму.

311. В каждой фазе потребителя, соединенного треугольником, ток отстает по фазе от напряжения на угол  $53^\circ$ . Сопротивления фаз одинаковы и равны по 19 Ом. Вычислить фазные и линейные токи, активную мощность каждой фазы и всей цепи, если линейное напряжение 380 В. Построить векторную диаграмму.

312. Три катушки индуктивности, каждая с активным сопротивлением  $R = 1,5$  Ом и индуктивным  $X_L = 2$  Ом, присоединены треугольником к трехфазной сети с линейным напряжением 220 В. Вычислить фазные и линейные токи, а также активную мощность всей цепи. Построить векторную диаграмму.

313. Три одинаковых приемника с сопротивлениями по 30 Ом соединены треугольником и включены в сеть трехфазного тока с линейным напряжением 380 В. При каких сопротивлениях приемников, соединенных звездой, линейные токи останутся прежними?

## 15.5. ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ. 15

303. 440 В; рис. 15.18.

304. 220 В.

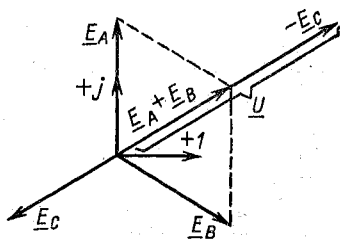


Рис. 15.18. К ответу задачи 303

311. 20 А; 34,6 А; 4,56 кВт; 13,68 кВт.

312. 88 А; 152,2 А; 34,8 кВт.

313. По 10 Ом каждое.

305. По 13,4 А.

306. 17,3 В; 13 В.

307. До обрыва  $I_A = I_B = I_C = 11$  А. После обрыва  $I_B = I_C = 9,5$  А;  $I_A = 0$ .

308. До короткого замыкания  $I_A = I_B = I_C = 6,35$  А. После замыкания  $I_A = I_C = 11$  А;  $I_B = 19$  А.

309. Увеличится от 6,35 до 19,05 А.

310. 40 А; 69,2 А; 8,8 кВт; 26,4 кВт.

## Глава шестнадцатая

# НЕСИММЕТРИЧНАЯ ТРЕХФАЗНАЯ ЦЕПЬ

## 16.1. ЧЕТЫРЕХПРОВОДНАЯ ЦЕПЬ

### Условие задачи

От сети трехфазного тока с линейным напряжением 380 В питаются бытовые приборы рабочего поселка. Все приемники распределены на три группы, соединенные звездой по четырехпроводной схеме.

Определить токи во всех проводах сети и ее общую мощность, если мощность приемников, включенных в фазу *A*, составляет 3,52 кВт, в фазу *B* — 2,64 кВт, в фазу *C* — 3,96 кВт.

### Решение задачи

1. Составление принципиальной схемы цепи. Поскольку большинство бытовых электроприборов (осветительные лампы, нагревательные плитки и т. п.) представляет собой активную нагрузку ( $\cos \varphi = 1$ ), их можно представить эквивалентными активными сопротивлениями  $R_A$ ,  $R_B$  и  $R_C$  (рис. 16.1), которые по условию задачи включены в четырехпроводную сеть, т. е. соединены с питающим генератором (подстанцией) тремя линейными проводами ( $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ) и нейтральным проводом  $OO'$ .

На рис. 16.1 слева условно показан генератор, у которого три фазные обмотки  $A, B, C$  соединены звездой, т. е. так же, как и сопротивления приемников, что является неизменным условием для четырехпроводной системы. За-

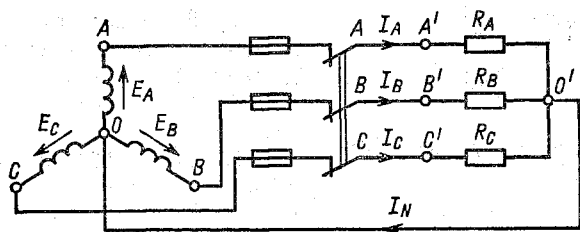


Рис. 16.1. К условию задачи § 16.1

жимы  $A, B$  и  $C$  на рубильнике у питающего генератора (рис. 16.1) можно рассматривать как начала его фазных обмоток, поэтому они обозначены теми же буквами. Концы обмоток соединены вместе и образуют нейтральную точку  $O$ .

При заданных действующих значениях линейных напряжений  $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U_{л} = 380$  В фазные напряжения равны:  $U_A = U_B = U_C = U_{\phi} = 380/\sqrt{3} = 220$  В.

Итак, на выводах трехфазной четырехпроводной цепи (рис. 16.2) существуют две системы симметричных напряжений — фазные и линейные, отличающиеся в  $\sqrt{3}$  раз.

2. Распределение напряжений и токов в фазах приемников. Пренебрегая падениями напря-

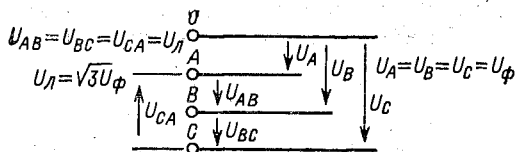


Рис. 16.2. Фазные и линейные напряжения четырехпроводной системы

жения в проводах  $AA', BB', CC'$  и  $OO'$  (рис. 16.1), можно принять в рассматриваемой цепи фазные напряжения приемников равными фазным напряжениям генератора:  $U'_A = U_A, U'_B = U_B$  и  $U'_C = U_C$ . При этом, очевидно, нет необ-



ходимости различать напряжения источника и приемника— это одни и те же напряжения.

Как показано на рис. 16.1, токи  $I_A$ ,  $I_B$ ,  $I_C$  проходят в линейных проводах и сопротивлениях приемников  $R_A$ ,  $R_B$  и  $R_C$ , поэтому они являются одновременно линейными и фазными. Ток в нейтральном проводе  $I_N$  равен геометрической сумме фазных (линейных) токов  $I_A$ ,  $I_B$  и  $I_C$ .

3. Вычисление фазных токов. Учитывая, что для заданных приемников  $\cos \varphi = 1$ , имеем

$$I_A = P_A / U_{\phi} = 3520 / 220 = 16 \text{ А};$$

$$I_B = P_B / U_{\phi} = 2640 / 220 = 12 \text{ А};$$

$$I_C = P_C / U_{\phi} = 3960 / 220 = 18 \text{ А}.$$

Откладывая токи  $I_A$ ,  $I_B$  и  $I_C$ , совпадающие по фазе с напряжениями соответствующих фаз, получаем векторную диаграмму (рис. 16.3) фазных токов и напряжений.

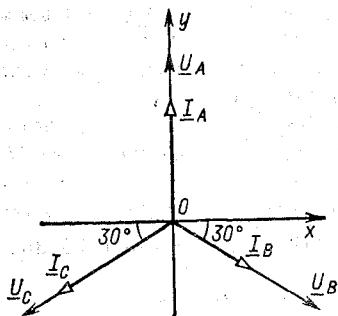


Рис. 16.3. Фазные (они же линейные) токи симметричной трехфазной системы, соединенной звездой

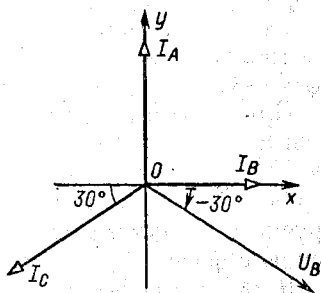


Рис. 16.4. Векторная диаграмма токов четырехпроводной системы с двумя активными и одним активно-емкостным приемником

4. Вычисление тока в нейтральном проводе. Ток в нейтральном проводе определяется по первому закону Кирхгофа, который в цепях переменного тока проще всего применять для комплексных токов.

Запишем комплексные фазные токи на основании векторной диаграммы (рис. 16.3):

$$\underline{I}_A = j I_A = I_A e^{j90^\circ} = j 16 \text{ А};$$

$$\underline{I}_B = I_B e^{-j30^\circ} = 12 (\cos 30^\circ - j \sin 30^\circ) = (10,4 - j6) \text{ А};$$

$$\underline{I}_C = I_C e^{-j150^\circ} = 18 (\cos 150^\circ - j \sin 150^\circ) = (-15,6 - j9) \text{ А.}$$

(При расчете трехфазных цепей часто выбирают и другое расположение вещественной и мнимой осей, а именно: вещественную ось направляют вертикально вверх.

Тогда фазы всех токов и напряжений изменятся на  $-90^\circ$ , т. е.  $\underline{I}_A = \underline{I}_A e^{j90^\circ}$ ;  $\underline{I}_B = \underline{I}_B e^{-j120^\circ}$  и т. д.)

Комплексный ток в нейтральном проводе

$$\begin{aligned} \underline{I}_N &= \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = j16 + 10,4 - j6 - 15,6 - j9 = \\ &= (-5,2 + j1) = 5,29 e^{j169^\circ} \text{ А.} \end{aligned}$$

5. Вычисление общей мощности. Активная мощность всей цепи

$$P = P_A + P_B + P_C = 3,52 + 2,64 + 3,96 = 10,12 \text{ кВт.}$$

**Дополнительные вопросы к задаче**

1. Как изменятся токи, если включить в фазу  $B$  приемник с активно-реактивным сопротивлением? Допустим, что в фазу  $B$  вместо сопротивления  $R_B$  включили активно-емкостный приемник ( $\varphi = -30^\circ$ ) с полным сопротивлением  $Z_B = R_B$ .

При  $Z_B = R_B$  ток  $I_B = U_B / Z_B = U_B / R_B = 12 \text{ А}$ , т. е. остается прежним, но будет опережать по фазе напряжение  $U_B$  на  $30^\circ$  (рис. 16.4), так как  $Z_B$  имеет емкостный характер. В комплексной форме (рис. 16.4)  $\underline{I}_B = I_B e^{j0^\circ} = 12 \text{ А}$ . Токи других приемников ( $I_A$  и  $I_C$ ) останутся прежними по значению и фазе.

В таком случае ток в нейтральном проводе

$$\begin{aligned} \underline{I}_N &= \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = j16 + 12 + (-15,6 - j9) = \\ &= -3,6 + j7 = 7,86 e^{j117^\circ 20'} \text{ А.} \end{aligned}$$

Оказывается, ток в нейтральном проводе увеличивается несмотря на прежние численные значения всех фазных токов.

2. Как определить ток в нейтральном проводе графически? Построив в масштабе векторную диаграмму (рис. 16.5), можно определить ток  $I_N$  как вектор, замыкающий многоугольник фазных токов.

3. Может ли отсутствовать ток в нейтральном проводе? Если во все фазы включить одинаковые приемники, например такие, как в фазе  $B$  (первый дополнительный вопрос), то все фазные токи будут численно равны  $12 \text{ А}$  и опережать на угол  $30^\circ$  соответствующие фазные

напряжения (рис. 16.6, а). При этом  $I_N=0$  (рис. 16.6, б). Такая нагрузка (одинаковые  $Z$  и  $\varphi$  в каждой фазе) называется симметричной (см. § 15.1).

4. Как изменятся напряжения на фазах приемника при случайном обрыве нейтрального провода? Рассматриваемая цепь (рис. 16.1) имеет только два узла ( $O$  и  $O'$ ) и при отсутствии ней-

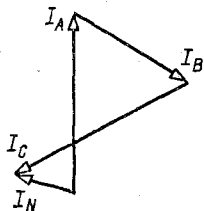


Рис. 16.5. Ток в нулевом проводе, равный геометрической сумме фазных токов

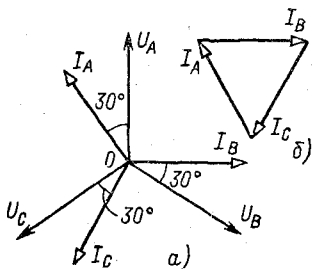


Рис. 16.6. Векторная диаграмма для симметричного приемника, соединенного звездой

трального провода показана в другом начертании на рис. 16.7. Расчет такой цепи целесообразно выполнить методом двух узлов (см. гл. 4), который в цепях переменного тока следует применять для комплексных величин.

Напряжение между узловыми точками  $O'$  и  $O$  (рис. 16.7), т. е. нейтральными точками генератора и приемников, или смещение нейтрали

$$\underline{U}_N = \underline{U}_{O'O} = \frac{\underline{E}_A \underline{Y}_A + \underline{E}_B \underline{Y}_B + \underline{E}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}.$$

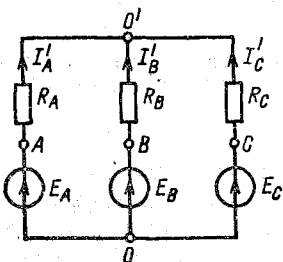


Рис. 16.7. Схема, эквивалентная показанной на рис. 16.1 при отсутствии нейтрального провода

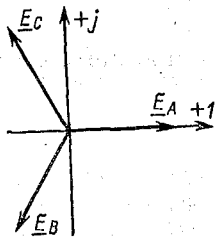


Рис. 16.8. К дополнительному вопросу 4

Выразим комплексные фазные ЭДС, располагая вектор  $\underline{E}_A$  по вещественной оси (рис. 16.8):  $\underline{E}_A = \underline{U}_A = 220 \text{ В}$ ;  $\underline{E}_B = \underline{U}_B = (-110 - j190) \text{ В}$ ;  $\underline{E}_C = \underline{U}_C = (-110 + j190) \text{ В}$ , и вычислим чисто активные проводимости фаз:  $Y_A = 1/R_A = 0,073 \text{ См}$ ;  $Y_B = 1/R_B = 0,055 \text{ См}$ ;  $Y_C = 1/R_C = 0,082 \text{ См}$ .

Комплексное смещение нейтрали

$$\begin{aligned} \underline{U}_N &= \frac{220 \cdot 0,073 + (-110 - j190) 0,055 + (-110 + j190) 0,082}{0,073 + 0,055 + 0,082} = \\ &= \frac{1,03 + j5,17}{0,21} = (4,9 + j24,6) \text{ В}. \end{aligned}$$

Фазные напряжения приемников:

$$\begin{aligned} \underline{U}'_A &= \underline{E}_A - \underline{U}_N = 220 - 4,9 - j24,6 = 216,6e^{-j6^\circ 35'} \text{ В}; \\ \underline{U}'_B &= \underline{E}_B - \underline{U}_N = -110 - j190 - 4,9 - j24,6 = 244e^{-j118^\circ} \text{ В}; \\ \underline{U}'_C &= \underline{E}_C - \underline{U}_N = -110 + j190 - 4,9 - j24,6 = 202e^{j125^\circ} \text{ В}. \end{aligned}$$

Таким образом, на сопротивлении  $R_B$  напряжение возрастает, а на сопротивлениях  $R_C$  и  $R_A$  уменьшается.

Итак, обрыв нейтрального провода при несимметричной нагрузке приводит к смещению нейтрали и изменению фазных напряжений приемников, что недопустимо. Поэтому в нейтральный провод не включают предохранителей.

5. В каких случаях применяется четырехпроводная система. Четырехпроводная система необходима для питания несимметричных нагрузок; при симметричной нагрузке, как было показано, нейтральный провод не нужен.

Четырехпроводная система применяется для питания электрического освещения бытовых приборов и отдельных объектов с несимметричной схемой.

## 16.2. ТРЕХПРОВОДНАЯ ЦЕПЬ С НЕСИММЕТРИЧНЫМ ПРИЕМНИКОМ, СОЕДИНЕННЫМ ТРЕУГОЛЬНИКОМ

### Условие задачи

Между линейными проводами  $A$  и  $B$ ,  $B$  и  $C$  (рис. 16.9) включены два одинаковых приемника, активные мощности которых  $P_{AB} = P_{BC} = 70 \text{ кВт} = 70 \cdot 10^3 \text{ Вт}$  при коэффициенте мощности  $0,92$  (индуктивного характера). У третьего приемника, включенного между проводами  $C$  и  $A$ , коэффициент мощности  $\cos \varphi = 1$  и активная мощность  $P_{CA} = 30,4 \text{ кВт} = 30,4 \cdot 10^3 \text{ Вт}$ .

Определить фазные и линейные токи, а также активную мощность всей цепи, если линейные напряжения равны 380 В.

### Решение задачи

1. Вычисление фазных токов. Учитывая, что в фазах  $A, B$  и  $B, C$  включены одинаковые приемники, имеем

$$I_{AB} = I_{BC} = \frac{P_{AB}}{U_{AB} \cos \varphi_{AB}} = \frac{70 \cdot 10^3}{380 \cdot 0,92} = 200 \text{ А.}$$

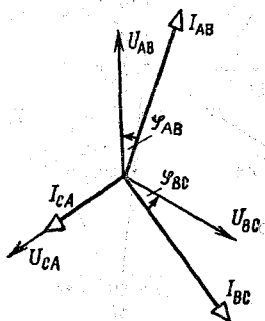
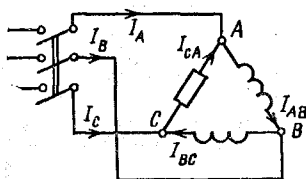


Рис. 16.9. К условию задачи § 16.2

Рис. 16.10. Векторная диаграмма цепи, показанной на рис. 16.9.

Каждый из этих токов отстает по фазе на угол  $\varphi_{AB} = \arccos 0,92 = 23^\circ$  от соответствующего напряжения, как показано на векторной диаграмме рис. 16.10.

Ток третьей фазы

$$I_{CA} = \frac{P_{CA}}{U_{CA} \cos \varphi_{CA}} = \frac{30,4 \cdot 10^3}{380 \cdot 1} = 80 \text{ А,}$$

и вектор тока  $\underline{I}_{CA}$  совпадает по направлению с вектором  $\underline{U}_{CA}$ , так как  $\cos \varphi_{CA} = 1$ .

2. Вычисление линейных токов. Составим для узла  $A$  уравнение по первому закону Кирхгофа:

$$\underline{I}_A + \underline{I}_{CA} = \underline{I}_{AB},$$

откуда вектор линейного тока

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{CA}.$$

Таким образом, линейный ток  $I_A$  равен геометрической разности двух фазных токов при геометрической сумме векторов  $I_{AB}$  и  $-I_{CA}$ , как показано на рис. 16.11, где ток  $-I_{CA}$  численно равен  $I_{CA}$ , но имеет противоположное направление.

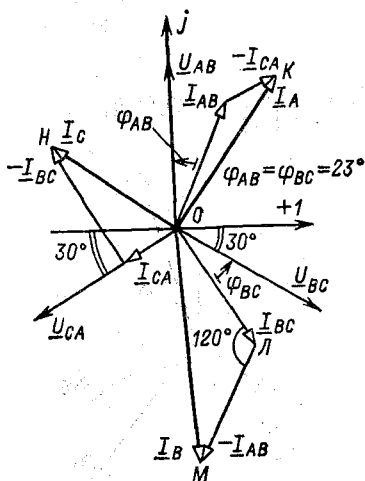


Рис. 16.11. Треугольники токов для каждого узла цепи, показанной на рис. 16.9

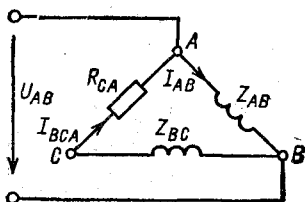


Рис. 16.12. К дополнительному вопросу 2

Аналогичным образом по уравнениям  $I_B = I_{BC} - I_{AB}$  и  $I_C = I_{CA} - I_{BC}$  построены треугольники токов для узлов В и С.

Учитывая масштаб тока  $M_1 = 11$  А/мм, находим из диаграммы рис. 16.11

$$I_A = (OK) M_1 = 24,4 \cdot 11 = 268 \text{ А};$$

$$I_B = (OM) M_1 = 31,4 \cdot 11 = 346 \text{ А};$$

$$I_C = (OH) M_1 = 20,4 \cdot 11 = 224 \text{ А}.$$

Линейные токи могут быть вычислены и аналитически (см. доп. вопрос 5 к этой задаче).

3. Вычисление активной мощности. Активная мощность всей цепи

$$P = P_{AB} + P_{BC} + P_{CA} = 70 + 70 + 30,4 = 170,4 \text{ кВт}.$$

#### Дополнительные вопросы к задаче

1. Во сколько раз линейный ток  $I_B$  больше фазных токов  $I_{BC}$  или  $I_{AB}$ ? Поскольку  $I_{AB} = I_{BC} =$

$= 200$  А и сдвиг по фазе между ними равен  $120^\circ$ , то  $I_B = \sqrt{3} \cdot 200 = 346$  А, так как отрезок  $OM$  (рис. 16.11) является стороной равностороннего треугольника, лежащего против угла  $120^\circ$ . На рис. 16.11 видно, что такое соотношение ( $\sqrt{3}$ ) получается только для одного линейного тока  $I_B$ .

2. Как изменятся фазные токи и напряжения при случайном обрыве линейного провода? Если отсоединить линейный провод, например от узла  $C$  (рис. 16.12), то ток  $I_{AB}$  останется прежним; для определения тока  $I_{BCA}$  вычислим прежде всего сопротивления фаз. Сопротивление фазы  $BC$

$$Z_{BC} = U_{BC}/I_{BC} = 380/200 = 1,9 \text{ Ом};$$

его активная и реактивная составляющие

$$R_{BC} = Z_{BC} \cos \varphi_{BC} = 1,9 \cdot 0,92 = 1,75 \text{ Ом};$$

$$X_{BC} = Z_{BC} \sin \varphi_{BC} = 1,9 \cdot 0,39 = 0,74 \text{ Ом}.$$

Сопротивление фазы  $CA$

$$R_{CA} = U_{CA}/I_{CA} = 380/80 = 4,75 \text{ Ом}.$$

Суммарные активное и реактивное сопротивления

$$R_{BCA} = R_{BC} + R_{CA} = 1,75 + 4,75 = 6,5 \text{ Ом};$$

$$X_{BCA} = X_{BC} = 0,74 \text{ Ом}.$$

Полное сопротивление ветви  $BCA$

$$Z_{BCA} = \sqrt{R_{BCA}^2 + X_{BCA}^2} = \sqrt{6,5^2 + 0,74^2} = 6,51 \text{ Ом}.$$

Общий ток в фазах  $BC$  и  $CA$  (рис. 16.12)

$$I_{BCA} = U_{BCA}/Z_{BCA} = 380/6,51 = 58 \text{ А},$$

а напряжения на фазах равны

$$U'_{CA} = R_{CA} I_{BCA} = 4,75 \cdot 58 = 275 \text{ В};$$

$$U'_{BC} = Z_{BC} I_{BCA} = 1,9 \cdot 58 = 110 \text{ В}.$$

Если же отсоединить линейный провод от узла  $B$ , то напряжения на фазах  $U_{AB}$  и  $U_{BC}$ , а также общий ток  $I_{ABC}$  в этих фазах уменьшатся в 2 раза, так как сопротивления фаз  $AB$  и  $BC$  одинаковы.

### 16.3. ТРЕХФАЗНАЯ ЦЕПЬ С РАЗЛИЧНЫМИ СОЕДИНЕНИЯМИ ПРИЕМНИКОВ

#### Условие задачи

Для питания электрооборудования в производственный цех подведена четырехпроводная трехфазная сеть. К ее линейным проводам присоединили треугольником (рис. 16.13) трехфазные электродвигатели, рассмотренные в § 15.3, а между линейными и нейтральным проводами подключили по четырехпроводной схеме три электропечи: в фазах  $A$  и  $B$  мощностью  $17,6 \text{ кВт} = 17,6 \cdot 10^3 \text{ Вт}$  каждая и в фазе  $C$  мощностью  $13,2 \text{ кВт} = 13,2 \cdot 10^3 \text{ Вт}$ .

Определить все токи, если линейное напряжение  $U_{\text{л}} = 380 \text{ В}$ .

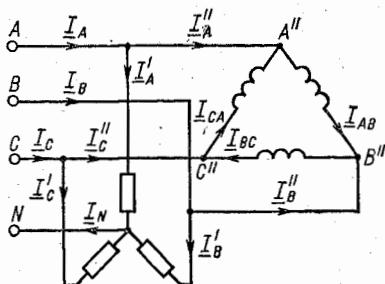


Рис. 16.13. Схема трехфазной цепи с приемниками, включенными по схемам звезда и треугольник

#### Решение задачи

1. Распределение напряжений и токов. Пренебрегая падениями напряжения в проводах, замечаем, что приемники в фазах звезды находятся под фазными напряжениями  $220 \text{ В}$ , а приемники в фазах треугольника — под линейными напряжениями  $380 \text{ В}$ .

По первому закону Кирхгофа

$$\underline{I}_A = \underline{I}'_A + \underline{I}''_A; \quad \underline{I}_B = \underline{I}'_B + \underline{I}''_B; \quad \underline{I}_C = \underline{I}'_C + \underline{I}''_C.$$

Ток в нейтральном проводе  $\underline{I}_N$  равен геометрической сумме фазных токов звезды  $\underline{I}'_A$ ,  $\underline{I}'_B$  и  $\underline{I}'_C$ .

2. Вычисление токов в проводах звезды. Учитывая, что в фазах звезды включены электропечи, для которых  $\cos \varphi = 1$ , имеем

$$\underline{I}'_A = \underline{I}'_B = P_A / U_{\phi} = 17,6 \cdot 10^3 / 220 = 80 \text{ А};$$

$$\underline{I}'_C = P_C / U_{\phi} = 13,2 \cdot 10^3 / 220 = 60 \text{ А}.$$

Эти токи совпадают по фазе соответственно с напряжениями  $U_A$ ,  $U_B$  и  $U_C$  (рис. 16.14), причем начальная фаза напряжения  $U_A$  выбрана равной  $+90^\circ$ , напряжения  $U_B$  — равной  $-30^\circ$  и напряжения  $U_C$  — равной  $-150^\circ$ .



Для вычисления тока в нейтральном проводе  $\underline{I}_N$  выразим фазные токи звезды в комплексной форме (рис. 16.14):

$$\begin{aligned}\underline{I}'_A &= j80 \text{ A}; \\ \underline{I}'_B &= 80 \angle -30^\circ = (69,3 - j40) \text{ A}; \\ \underline{I}'_C &= 60 \angle -150^\circ = (-51,2 - j30) \text{ A}.\end{aligned}$$

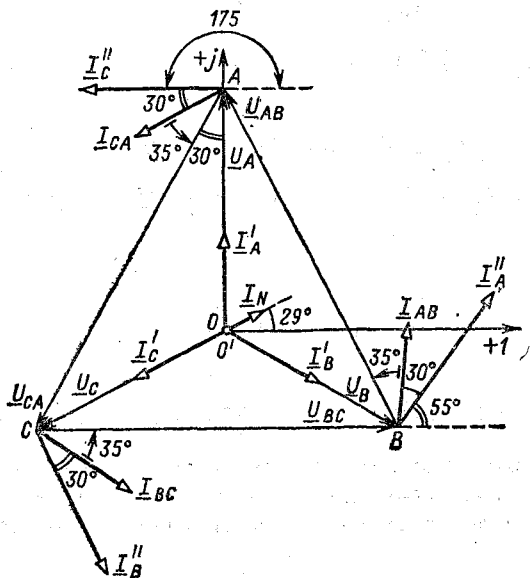


Рис. 16.14. Векторная диаграмма для цепи, показанной на рис. 16.13

Соответственно

$$\underline{I}_N = \underline{I}'_A + \underline{I}'_B + \underline{I}'_C = 18,1 + j10 = 20 \angle 29^\circ \text{ A}.$$

Вектор  $\underline{I}_N$  показан на рис. 16.14.

3. Вычисление линейных токов в общей сети. Учитывая, что для линейных токов треугольника (рис. 16.3) в § 15.3 было найдено  $I''_A = I''_B = I''_C = 222 \text{ A}$ , выразим их комплексные значения, используя начальные фазы, показанные на рис. 16.14:

$$\underline{I}''_A = 222 \angle 55^\circ = (126,5 + j182) \text{ A};$$

$$\underline{I}'_B = 222 \angle -65^\circ = (93,3 - j202) \text{ A};$$

$$\underline{I}''_C = 222 \angle 175^\circ = (-221 + j19,4) \text{ A}.$$

Линейные токи в общей сети

$$\underline{I}_A = \underline{I}'_A + \underline{I}''_A = j80 + 126,5 + j182 = (126,5 + j262) \text{ A},$$

или

$$I_A = \sqrt{(126,5)^2 + (262)^2} = 290 \text{ A};$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}'_B + \underline{I}''_B = 69,3 - j40 + 93,3 - j202 = (162,6 - j242) \text{ A},$$

или

$$I_B = \sqrt{162,6^2 + 242^2} = 290 \text{ A};$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_C &= \underline{I}'_C + \underline{I}''_C = -51,2 - j30 - 221 + j19,4 = \\ &= (-272,2 - j10,6) \text{ A}, \end{aligned}$$

или

$$I_C = \sqrt{272,2^2 + 10,6^2} = 273 \text{ A}.$$

#### 16.4. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

314. На рис. 16.15 показан трехфазный приемник энергии с активными сопротивлениями  $R_a=R_b=R_c=10$  Ом. Линейное напряжение  $U_{\text{л}}=38$  В. Определить показания амперметров при: а) равномерной

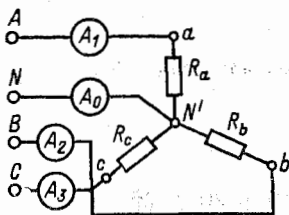


Рис. 16.15. К задаче 314

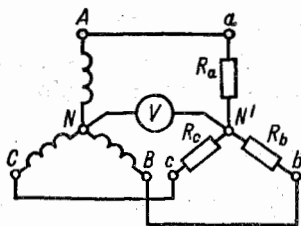


Рис. 16.16. К задаче 315

нагрузке фаз; б) коротком замыкании сопротивления  $R_a$  и обрыве нулевого провода; в) обрыве сопротивления  $R_a$  и наличии нулевого провода.

315. Симметричный трехфазный приемник энергии с активными сопротивлениями  $R_a=R_b=R_c=R$  питается от симметричного трехфаз-

ного генератора (рис. 16.16). Линейное напряжение  $U_L=220$  В.

Определить показания вольтметра в случаях, когда: а) симметричный приемник энергии включен полностью; б) сопротивление фазы приемника  $R_a$  закорочено; в) имеет место обрыв в сопротивлении  $R_a$ .

316. Лампы накаливания общей мощностью 2,4 кВт распределены на три группы и включены в четырехпроводную сеть трехфазного тока.

Определить токи в линейных проводах и построить в масштабе векторную диаграмму, если ток в нейтральном проводе равен нулю, а фазное напряжение 220 В.

317. В четырехпроводной системе с линейным напряжением 380 В отношение токов в фазах потребителей  $I_A : I_B : I_C = 1 : 3 : 4$ . Все потребители активные, и общая мощность составляет 3,2 кВт. Вычислить токи в линейных проводах и в нейтральном проводе.

318. К четырехпроводной сети с фазным напряжением 380 В присоединены звездой три приемника. Мощность приемника в фазе  $A$  составляет  $P_A=2,4$  кВт и  $\cos \varphi_A=0,9$ ; в фазе  $B$  мощность  $P_B=2,0$  кВт и  $\cos \varphi_B=0,87$ ; в фазе  $C$  мощность  $P_C=2,4$  кВт и  $\cos \varphi_C=0,94$ . Определить токи во всех проводах и построить векторную диаграмму, если  $\varphi_A$ ,  $\varphi_C$  и  $\varphi_B$  — положительные углы.

319. Для цепи предыдущей задачи определить ток в нейтральном проводе при обрыве линейного провода фазы  $A$  и фазы  $B$  (поочередно).

320. Три группы осветительных ламп соединены звездой и питаются от четырехпроводной сети трехфазного тока с линейным напряжением 380 В. Сопротивление каждой лампы 170 Ом. Группа фазы  $A$  состоит из 10 параллельно включенных ламп, фазы  $B$  — из 24 ламп и фазы  $C$  — из 34 ламп. Вычислить напряжения на лампах и смещение нейтрали для двух значений сопротивления нейтрального провода:  $R_0=2$  Ом;  $R_0=0,5$  Ом. Реактивным сопротивлением нейтрального провода пренебречь. Для первого режима ( $R_0=2$  Ом) построить топографическую диаграмму напряжений.

321. При каком соотношении трех активных сопротивлений, соединенных звездой без нейтрального провода, фазные напряжения на двух одинаково нагруженных фазах будут сдвинуты по фазе относительно друг друга на угол  $90^\circ$ ?

322. Электрические лампы присоединены треугольником к трехфазной сети с линейным напряжением 220 В.

Общая мощность ламп по фазам составляет 550, 1100 и 2200 Вт. Определить фазные и линейные токи.

323. К трехфазной сети с линейным напряжением 220 В присоединены треугольником приемники, имеющие одинаковые активные мощности 76 кВт, но различные коэффициенты мощности:  $\cos \varphi_{AB}=0,8$ ;  $\cos \varphi_{BC}=0,9$ ;  $\cos \varphi_{CA}=0,85$ . Вычислить фазные и линейные токи и построить векторную диаграмму, полагая углы  $\varphi_{AB}$ ,  $\varphi_{BC}$  и  $\varphi_{CA}$  положительными.

324. В условиях предыдущей задачи составить эквивалентную схему цепи, приняв  $\varphi_{AB} > 0$ ;  $\varphi_{BC} > 0$ ;  $\varphi_{CA} < 0$ .

325. Три одинаковых сопротивления  $Z = 10$  Ом присоединены треугольником к цепи трехфазного тока с линейным напряжением 220 В. Токи в фазах сдвинуты относительно соответствующих напряжений на углы  $\varphi_{AB} = 0$ ,  $\varphi_{BC} = -90^\circ$  и  $\varphi_{CA} = 90^\circ$ . Вычислить фазные и линейные токи, а также активную мощность всей цепи. Построить векторную диаграмму.

326. Три активных сопротивления соединены треугольником и питаются от трехфазной сети с  $U_L = 220$  В. Токи в фазах  $I_{AB} = 100$  А,  $I_{BC} = 150$  А,  $I_{CA} = 200$  А. Вычислить линейные токи и мощность всей цепи.

327. К трехфазной сети с линейным напряжением 220 В присоединены треугольником электрические лампы мощностью: в фазе  $AB$  — 2200 Вт, в фазе  $BC$  — 550 Вт и в фазе  $CA$  — 1000 Вт. В сети произошел обрыв линейного провода  $C$ . Вычислить фазные напряжения и линейные токи, полагая сопротивления ламп неизменными.

## 16.5. ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ. 16

314. а) Три тока по 2,2 А;  $I_0 = 0$ ; б)  $I_1 = 6,6$  А;  $I_2 = I_3 = 3,8$  А; в)  $I_0 = I_2 = I_3 = 2,2$  А;  $I_1 = 0$ .

315. а)  $U = 0$ ; б)  $U = U_\Phi = 127$  В; в)  $U_{N'N} = 63,5$  В.

316. По 3,64 А.

317. 1,82 А; 5,46 А; 7,28 А; 4,8 А.

318. 7,02 А; 6,05 А; 6,72 А; 0,54 А.

319. 6,5 А; 6,85 А.

320. 1) 248,5 В; 218,6 В; 195,7 В; 30 В; 2) 230 В; 219 В; 210 В; 11 В.

321. 1 : 1 : 0,4.

322. 2,5 А; 5 А; 10 А; 11,5 А; 6,6 А; 13,2 А.

323. 432 А; 384 А; 406 А; 730 А; 700 А; 700 А.

324.  $Z_{AB} = (0,41 + j0,31)$  Ом;  $Z_{BC} = (0,52 + j0,25)$  Ом;  $Z_{CA} = (0,46 - j0,28)$  Ом.

325. 22 А; 22 А; 22 А; 42,5 А; 42,5 А; 22 А; 4840 Вт.

326. 302 А; 218 А; 264 А; 99 кВт.

327. 78 В; 142 В; 220 В; 11,6 А; 11,6 А; 0.

## ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

## 17.1. РАСЧЕТ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА ПРИ ЗАДАНЫХ ПАРАМЕТРАХ ЕГО СХЕМЫ

## Условие задачи

У четырехполюсника (рис. 17.1) с входными выводами  $1-1'$  и выходными  $2-2'$  комплексные сопротивления схемы  $\underline{Z}_1 = j2$  Ом,  $\underline{Z}_2 = -j2$  Ом,  $\underline{Z}_0 = 2$  Ом.

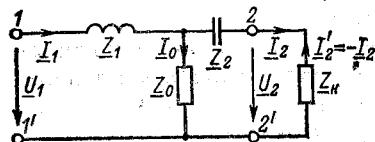


Рис. 17.1. Т-образная схема четырехполюсника

Требуется определить:

1) коэффициенты систем уравнений, выраженные через сопротивления (форма  $Z$ ), проводимости (форма  $Y$ ) и в форме  $A$ ;

2) токи на входе и выходе при напряжении источника

питания  $U_1 = 10$  В и сопротивлении нагрузки  $\underline{Z}_N = 1,06 \angle 45^\circ$  Ом;

3) сопротивление  $\underline{Z}_1$ , при котором четырехполюсник будет симметричным.

## Решение задачи

1. Уравнения пассивного четырехполюсника. Схема четырехполюсника (рис. 17.1) образуется участком цепи между входными выводами  $1-1'$  и выходными  $2-2'$ . Эта схема состоит только из сопротивлений ( $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_0$ ) и не содержит источников энергии. Такой четырехполюсник называется пассивным. При расчетах четырехполюсников используются зависимости между четырьмя величинами: напряжениями и токами на входе и выходе (рис. 17.1)  $\underline{U}_1, \underline{U}_2$  и  $\underline{I}_1, \underline{I}_2$ .

Указанные токи и напряжения могут быть связаны между собой различными формами уравнений. Если, например, нужно определить напряжения  $\underline{U}_1$  и  $\underline{U}_2$  при заданных токах  $\underline{I}_1$  и  $\underline{I}_2$ , то уравнения запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{Z}_{11} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \underline{I}_2; \\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_{21} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \underline{I}_2. \end{aligned} \right\} \quad (17.1)$$

В этих уравнениях (форма  $Z$ ) все коэффициенты ( $\underline{Z}_{11}$ ,  $\underline{Z}_{12}$ ,  $\underline{Z}_{21}$ ,  $\underline{Z}_{22}$ ), очевидно, имеют размерность сопротивлений.

Если требуется решить обратную задачу, т. е. выразить токи  $\underline{I}_1$  и  $\underline{I}_2$  через напряжения  $\underline{U}_1$  и  $\underline{U}_2$ , то используют уравнения в форме проводимостей:

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{Y}_{11} \underline{U}_1 + \underline{Y}_{12} \underline{U}_2; \\ \underline{I}_2 &= \underline{Y}_{21} \underline{U}_1 + \underline{Y}_{22} \underline{U}_2. \end{aligned} \right\} \quad (17.2)$$

В записанных уравнениях все коэффициенты ( $\underline{Y}_{11}$ ,  $\underline{Y}_{12}$ ,  $\underline{Y}_{21}$  и  $\underline{Y}_{22}$ ) имеют размерность проводимостей. Уравнения (17.2) можно назвать формой  $Y$ .

Часто применяют уравнения в форме  $A$ , в которых напряжение и ток на первичных выводах выражают через напряжение и ток на вторичных:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A} \underline{U}_2 + \underline{B} \underline{I}_2; \\ \underline{I}_1 &= \underline{C} \underline{U}_2 + \underline{D} \underline{I}_2. \end{aligned} \right\} \quad (17.3)$$

В уравнениях (17.3) коэффициенты  $\underline{A}$  и  $\underline{D}$  являются безразмерными величинами, коэффициент  $\underline{B}$  имеет размерность сопротивления, а коэффициент  $\underline{C}$  — проводимости.

При решении данной задачи используются три приведенные формы уравнений, однако на практике встречаются и другие формы. Чтобы воспользоваться уравнениями (17.1) — (17.3), нужно знать коэффициенты этих уравнений. В этой задаче рассматривается метод определения коэффициентов уравнений по заданным параметрам схемы четырехполюсника.

2. Использование режимов холостого хода и короткого замыкания. Уравнения пассивного четырехполюсника, как, например, (17.1) — (17.3), справедливы при любых значениях сопротивления нагрузки  $\underline{Z}_H$  (рис. 17.1), в том числе и при предельных ее значениях:  $\underline{Z}_H \rightarrow \infty$ , или  $\underline{I}_2 = 0$  (режим холостого хода) и  $\underline{Z}_H = 0$  или  $\underline{U}_2 = 0$  (режим короткого замыкания). Использование этих режимов составляет сущность метода холостого хода и короткого замыкания, позволяющего сравнительно легко определить коэффициенты всех форм уравнений четырехполюсника.

Так, в режиме холостого хода, при котором  $\underline{I}_2 = \underline{I}_{2x} = 0$ , из уравнений (17.1) следует

$$\underline{Z}_{11} = \underline{U}_{1x} / \underline{I}_{1x} = \underline{Z}_{1x}, \quad (17.4)$$

где  $\underline{Z}_{1x}$  — входное сопротивление холостого хода четырехполюсника относительно выводов 1—1', т. е. при его прямом включении.

Если в схеме рис. 17.1 поменять местами напряжение  $\underline{U}_1$  и сопротивление  $\underline{Z}_H$  (обратное включение четырехполюсника), то в режиме холостого хода окажется  $\underline{I}_1 = \underline{I}_{1x} = 0$  и из второго уравнения системы (17.1) получим

$$\underline{Z}_{22} = \underline{U}_{2x} / \underline{I}_{2x} = \underline{Z}_{2x}, \quad (17.5)$$

где  $\underline{Z}_{2x}$  — входное сопротивление холостого хода четырехполюсника относительно выводов 2—2', т. е. при его обратном включении.

В режиме короткого замыкания, при котором в четырехполюснике (рис. 17.1)  $\underline{U}_2 = \underline{U}_{2к} = 0$ , из уравнений (17.2) коэффициент

$$\underline{Y}_{11} = \underline{I}_{1к} / \underline{U}_{1к} = \underline{Y}_{1к} \quad (17.6)$$

выражается аналогично  $\underline{Z}_{11}$  (17.4) и  $(\underline{Y}_{11})$  равен входной проводимости короткого замыкания  $\underline{Y}_{1к}$  при прямом включении четырехполюсника.

При обратном включении четырехполюсника по аналогии с выражением (17.5) для режима короткого замыкания запишем

$$\underline{Y}_{22} = \underline{I}_2 / \underline{U}_{2к} = \underline{Y}_{2к}, \quad (17.7)$$

т. е. коэффициент  $\underline{Y}_{22}$  равен входной проводимости короткого замыкания четырехполюсника при его обратном включении ( $\underline{Y}_{2к}$ ).

Используя те же режимы (холостого хода и короткого замыкания), можно определить и другие коэффициенты четырехполюсника. Действительно, из (17.1) при  $\underline{I}_2 = 0$

$$\underline{Z}_{21} = \underline{U}_{2x} / \underline{I}_{1x}, \quad (17.8)$$

а из (17.2) при  $\underline{U}_2 = 0$

$$\underline{Y}_{21} = \underline{I}_{2к} / \underline{U}_{1к}. \quad (17.9)$$

Таким образом, коэффициенты уравнений четырехполюсника формы  $Z$  (17.1) удобно определять по режиму холостого хода, формы  $Y$  (17.2) — по режиму короткого замыкания, а формы  $A$  (17.3), как ниже будет показано, — используя оба режима.

3. Вычисление коэффициентов уравнений

форм  $Y$  и  $Z$ . Вначале определим коэффициенты уравнений формы  $Z$ . Используя (17.4) и учитывая, что входное сопротивление холостого хода при прямом включении  $\underline{Z}_{1x} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_0$  (цепь по рис. 17.1 с отключенным сопротивлением  $\underline{Z}_H$ ), имеем при наших данных

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{11} &= \underline{Z}_{1x} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_0 = j2 + 2 = \\ &= 2\sqrt{2} \angle 45^\circ \text{ Ом.}\end{aligned}$$

В этом же режиме (прямого включения и холостого хода, при котором в цепи рис. 17.1  $\underline{I}_{1x} = \underline{I}_0$ ), используя (17.8), находим

$$\underline{Z}_{21} = \underline{U}_{2x} / \underline{I}_{1x} = \underline{Z}_0 \underline{I}_{1x} / \underline{I}_{1x} = \underline{Z}_0 = 2 \text{ Ом.}$$

При обратном включении четырехполюсника его входное сопротивление холостого хода  $\underline{Z}_{2x}$ , рассматриваемое относительно выводов 2—2' (рис. 17.1) при разомкнутых выводах 1—1', определяется как  $\underline{Z}_{2x} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0$ . С учетом этого и формулы (17.5) получим при наших данных

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{22} &= \underline{Z}_{2x} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0 = -j2 + 2 = \\ &= 2\sqrt{2} \angle -45^\circ \text{ Ом.}\end{aligned}$$

Перейдем к определению коэффициентов уравнений формы  $Y$ . При коротком замыкании выводов 2—2' (рис. 17.1) входное (эквивалентное) сопротивление относительно выводов 1—1'

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{1к} &= \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_0 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_2} = 2j + \\ &+ \frac{2(-2j)}{2-2j} = 2j + \sqrt{2} \angle -45^\circ = 2j + \sqrt{2} (\cos 45^\circ - \\ &- j \sin 45^\circ) = 2j + 1 - j = \sqrt{2} \angle 45^\circ \text{ Ом.}\end{aligned}$$

Так как входная проводимость  $\underline{Y}_{1к} = 1/\underline{Z}_{1к}$ , то в соответствии с (17.6) один из искоемых коэффициентов

$$\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{1к} = 1/\underline{Z}_{1к} = 1/\sqrt{2} \angle 45^\circ = 0,707 \angle -45^\circ \text{ Ом.}$$

Чтобы воспользоваться формулой (17.9) для определения коэффициента  $\underline{Y}_{21}$ , рассмотрим некоторые соотношения в четырехполюснике (рис. 17.1) в режиме короткого замыкания (выводы 2—2' замкнуты накоротко).



Ток источника  $\underline{I}_{1к} = \underline{U}_{1к} / \underline{Z}_{1к}$  разветвляется в двух параллельных ветвях с сопротивлениями  $\underline{Z}_0$  и  $\underline{Z}_2$ . В сопротивлении  $\underline{Z}_2$  ток

$$\underline{I}_{2к} = \underline{I}_{1к} \frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_2} = \frac{\underline{U}_{1к}}{\underline{Z}_{1к}} \frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_2},$$

откуда

$$\underline{I}_{2к} / \underline{U}_{1к} = \underline{Z}_0 / \underline{Z}_{1к} (\underline{Z}_0 + \underline{Z}_2),$$

или в соответствии с формулой (17.9)

$$\underline{Y}_{21} = \underline{Z}_0 / \underline{Z}_{1к} (\underline{Z}_0 + \underline{Z}_2).$$

Используя полученные выше значения  $(\underline{Z}_0 + \underline{Z}_2)$  и  $\underline{Z}_{1к}$ , имеем

$$\underline{Y}_{21} = 2 / \sqrt{2} \angle 45^\circ \cdot 2 \sqrt{2} \angle -45^\circ = 2/4 = 0,5 \text{ См.}$$

При обратном включении четырехполюсника (источник питания присоединен к выводам 2—2') и режиме короткого замыкания (рис. 17.1, замкнуты выводы 1—1') входное сопротивление цепи

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{2к} &= \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_0 \underline{Z}_1}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_1} = -j2 + \\ &+ \frac{2 \cdot j2}{2 + j2} = -j2 + \sqrt{2} \angle 45^\circ = -j2 + \sqrt{2} (\cos 45^\circ + \\ &+ j \sin 45^\circ) = -j2 + 1 + j = 1 - j = \sqrt{2} \angle -45^\circ \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Используя формулу (17.7), определяем

$$\underline{Y}_{22} = \underline{Y}_{2к} = 1 / \underline{Z}_{2к} = 1 / \sqrt{2} \angle -45^\circ = 0,707 \angle 45^\circ \text{ См.}$$

4. Вычисление коэффициентов уравнений формы А. Покажем на примере уравнений формы А другой способ определения коэффициентов четырехполюсника, не требующий применения режимов холостого хода и короткого замыкания. Для этого воспользуемся уравнениями формы Z, записанными через ток  $\underline{I}'_2$  (см. доп. вопрос 1):

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{Z}_{11} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \underline{I}'_2; \\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_{21} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \underline{I}'_2. \end{aligned} \right\} \quad (17.10)$$

Из второго уравнения найдем ток:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2 - \underline{Z}_{22} \underline{I}'_2}{\underline{Z}_{21}} = \frac{1}{\underline{Z}_{21}} \underline{U}_2 - \frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}} \underline{I}'_2 \quad (17.11)$$

и подставим его в первое уравнение:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{11} \frac{\underline{U}_2 - \underline{Z}_{22} I_2'}{\underline{Z}_{21}} + \underline{Z}_{12} I_2'$$

или

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}} \underline{U}_2 - \left( \frac{\underline{Z}_{11} \underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}} - \underline{Z}_{12} \right) I_2' \quad (17.12)$$

Сопоставляя уравнения (17.11) и (17.12) с заданными уравнениями формы А (17.3), получаем

$$\left. \begin{aligned} \underline{A} &= \underline{Z}_{11}/\underline{Z}_{21}; & \underline{B} &= \underline{Z}_{11} \underline{Z}_{22}/\underline{Z}_{21} - \underline{Z}_{12}; \\ \underline{C} &= 1/\underline{Z}_{21}; & \underline{D} &= \underline{Z}_{22}/\underline{Z}_{21}. \end{aligned} \right\} \quad (17.13)$$

Используя известное соотношение между коэффициентами  $\underline{AD} - \underline{BC} = 1$ , проверим полученные результаты:

$$\underline{AD} = \frac{\underline{Z}_{11} \underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}^2}; \quad \underline{BC} = \frac{\underline{Z}_{11} \underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}^2} - \frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{21}}$$

Действительно,  $\underline{AD} - \underline{BC} = \underline{Z}_{12}/\underline{Z}_{21} = 1$ .

При наших данных получим

$$\underline{A} = 2\sqrt{2} \angle 45^\circ/2 = \sqrt{2} \angle 45^\circ;$$

$$\underline{B} = 2\sqrt{2} \angle 45^\circ \cdot 2\sqrt{2} \angle -45^\circ/2 - 2 = 2 \text{ Ом};$$

$$\underline{C} = 1/2 = 0.5 \text{ См};$$

$$\underline{D} = 2\sqrt{2} \angle -45^\circ/2 = \sqrt{2} \angle -45^\circ.$$

Таким образом, имея значения коэффициентов одной какой-либо формы уравнений четырехполюсника (в нашем случае формы Z), можно найти коэффициенты любой другой формы уравнений (в нашем случае формы А).

5. Вычисление токов. Воспользуемся уравнениями в форме проводимостей

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_{11} \underline{U}_1 + \underline{Y}_{12} \underline{U}_2;$$

$$\underline{I}_2' = \underline{Y}_{21} \underline{U}_1 + \underline{Y}_{22} \underline{U}_2.$$

Учитывая (рис. 17.1), что напряжение  $\underline{U}_2 = \underline{Z}_H \underline{I}_2 = -\underline{Z}_H \underline{I}_2'$ , находим из второго уравнения выходной ток:

$$\underline{I}_2' = \underline{Y}_{21} \underline{U}_1 - \underline{Y}_{22} \underline{Z}_H \underline{I}_2'$$

или

$$\begin{aligned} I'_2 &= \frac{Y_{21} U_1}{1 + Y_{22} Z_H} = \frac{0,5 \cdot 10}{1 + 0,707 \angle 45^\circ \cdot 1,06 \angle 45^\circ} = \\ &= \frac{5}{1 + 0,75 \angle 90^\circ} = 5 / (1 + j0,75) = 5 / 1,25 \angle 37^\circ = 4 \angle -37^\circ \text{ A.} \end{aligned}$$

Теперь, используя первое уравнение, найдем входной ток:

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11} U_1 - Y_{12} Z_H I'_2 = (\sqrt{2}/2) \angle -45^\circ \cdot 10 - \\ &- 0,5 \cdot 1,06 \angle 45^\circ \cdot 4 \angle -37^\circ = 5\sqrt{2} \angle -45^\circ - 2,12 \angle 8^\circ = \\ &= 5\sqrt{2} (\cos 45^\circ - j \sin 45^\circ) - 2,12 (\cos 8^\circ + j \sin 8^\circ) = \\ &= (5 - j5) - (2,1 + j0,3) = 6,04 \angle -61^\circ \text{ A.} \end{aligned}$$

Для проверки результатов можно воспользоваться другой формой уравнений, например формой  $A$  (17.3) при наших значениях коэффициентов, что предлагаем сделать самостоятельно.

6. Определение сопротивления  $Z_1$  симметричной схемы. Симметричный четырехполюсник характеризуется равенством коэффициентов уравнений:  $Z_{11} = Z_{22}$  (форма  $Z$ ) или  $Y_{11} = Y_{22}$  (форма  $Y$ ), или  $A = D$  (форма  $A$ ).

Равенство указанных коэффициентов обеспечивается при условии  $Z_1 = Z_2$ , в чем легко убедиться анализом полученных выше выражений для  $Z_{11}$  и  $Z_{22}$ ,  $Y_{11}$  и  $Y_{22}$ , а также уравнений (17.13).

В нашем случае следует выбрать  $Z_1 = -j2 \text{ Ом}$ , т. е. в цепи (рис. 17.1) заменить индуктивность на емкость, равную по значению уже имеющейся. Очевидно, что при  $Z_1 = Z_2$  взаимная замена первичных и вторичных выводов схемы рис. 17.1 не изменит напряжений и токов источника питания и нагрузки, в чем и проявляется свойство симметрии четырехполюсника.

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Почему на схеме рис. 17.1 показаны два направления тока  $I_2$  и  $I'_2$ ? В уравнениях (17.1) и (17.2), записанных для тока  $I_2$ , одна пара коэффициентов связана зависимостью  $Z_{12} = -Z_{21}$  и  $Y_{12} = -Y_{21}$ , т. е. они численно равны, но отличаются по знаку, что для практи-

ческих целей неудобно. Это неудобство можно исключить (см. также доп. вопрос 2), введя ток  $\underline{I}'_2 = -\underline{I}_2$  (рис. 17.1).

При этом уравнения (17.1) запишутся в виде (17.10), а (17.2) аналогично:

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}'_1 &= \underline{Y}_{11} \underline{U}_1 + \underline{Y}_{12} \underline{U}_2; \\ \underline{I}'_2 &= \underline{Y}_{21} \underline{U}_1 + \underline{Y}_{22} \underline{U}_2. \end{aligned} \right\} \quad (17.14)$$

2. Почему при решении задачи были найдены только три коэффициента уравнений форм  $Z$  и  $Y$ ? Убедимся, что в уравнениях (17.10) и (17.14)  $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$  и  $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}$  (см. также предыдущий доп. вопрос).

При обратном включении четырехполюсника (рис. 17.1) и режиме холостого хода ( $\underline{I}_1 = \underline{I}_{1x} = 0$ ) падение напряжения  $\underline{Z}_1 \underline{I}_1 = 0$ . Поэтому напряжение  $\underline{U}_{1x} = \underline{Z}_0 \underline{I}'_2$ , или  $\underline{U}_{1x} / \underline{I}'_2 = \underline{Z}_0$ . Вместе с тем из уравнений (17.10) при  $\underline{I}_1 = 0$  следует, что  $\underline{U}_{1x} / \underline{I}'_2 = \underline{Z}_{12}$ . Сравнивая оба отношения, получаем  $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_0$ . При решении задачи было найдено, что  $\underline{Z}_{21} = \underline{Z}_0$ , или  $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$ .

Используя первое уравнение системы (17.14) для режима обратного включения при коротком замыкании ( $\underline{U}_1 = 0$ ) и введя ток  $\underline{I}'_1 = -\underline{I}_1$ , получим  $\underline{Y}_{12} = \underline{I}'_1 / \underline{U}_2$ . Вместе с тем из схемы (рис. 17.1) при замкнутых выводах  $1-1'$  имеем

$$\underline{I}'_1 = \underline{I}'_2 \underline{Z}_0 / (\underline{Z}_0 + \underline{Z}_1),$$

а

$$\underline{I}'_2 = \frac{\underline{U}_2 (\underline{Z}_0 + \underline{Z}_1)}{\underline{Z}_2 \underline{Z}_0 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_1 + \underline{Z}_0 \underline{Z}_1},$$

поэтому

$$\underline{I}'_1 = \frac{\underline{U}_2 (\underline{Z}_0 + \underline{Z}_1)}{\underline{Z}_2 \underline{Z}_0 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_1 + \underline{Z}_0 \underline{Z}_1} \cdot \frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_1}.$$

Из последнего выражения находим

$$\underline{Y}_{12} = \frac{\underline{I}'_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_2 \underline{Z}_0 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_1 + \underline{Z}_0 \underline{Z}_1},$$

или при наших данных  $\underline{Y}_{12} = 0,5 \text{ См} = \underline{Y}_{21}$ .

Таким образом, пассивный четырехполюсник в общем

случае характеризуется тремя независимыми коэффициентами. Для рассмотренных форм уравнений  $|\underline{Z}_{12}| = |\underline{Z}_{21}|$ ,  $|\underline{Y}_{12}| = |\underline{Y}_{21}|$ ,  $A = D$ .

3. В каких случаях применение уравнений четырехполюсника имеет преимущества перед другими методами расчета цепи? Заданную цепь (рис. 17.1) можно рассчитать не только как четырехполюсник, но и как цепь с одним источником питания, используя, например, известный метод преобразования (гл. 3).

Действительно, относительно выводов  $I-I'$  эквивалентное сопротивление

$$\begin{aligned} Z_{\Sigma} &= Z_1 + \frac{Z_0(Z_2 + Z_H)}{Z_0 + Z_2 + Z_H} = 2j + \frac{2(-j2 + 1,06 \angle 45^\circ)}{2 - j2 + 1,06 \angle 45^\circ} = \\ &= 1,65 \angle 61^\circ \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Общий ток цепи  $\underline{I}_1 = \underline{U}_1 / Z_{\Sigma} = 10 \angle 0^\circ / 1,65 \angle 61^\circ = 6,04 \angle -61^\circ \text{ А}$ , а выходной ток четырехполюсника

$$\begin{aligned} \underline{I}_2 &= \underline{I}_1 \frac{Z_0}{Z_0 + Z_2 + Z_H} = 6,04 \angle -61^\circ \frac{2}{2 - j2 + 1,06 \angle 45^\circ} = \\ &= 6,04 \angle -61^\circ \frac{2}{3,03 \angle -24^\circ} = 4 \angle -37^\circ \text{ А.} \end{aligned}$$

Такие же значения токов  $\underline{I}_1$  и  $\underline{I}_2$  были получены в задаче.

При известных значениях токов и сопротивлений легко найти и напряжения на всех участках.

Этот расчет оказывается достаточно простым, так как он выполняется для одного значения нагрузки, т. е. при условии  $\underline{Z}_H = \text{const}$ .

При переменной нагрузке аналогичный расчет пришлось бы выполнять многократно, т. е. столько раз, сколько задано значений  $\underline{Z}_H$ .

Таким образом, по сравнению с другими методами применение уравнений четырехполюсника облегчает расчет цепи, если исследуется режим одной или нескольких ветвей схемы, особенно при переменном сопротивлении ветви.

4. Как определить характеристическое сопротивление симметричной схемы четырехполюсника? Для симметричной схемы четырехполюсника (рис. 17.1) при решении задачи было найдено

$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = -j2$  Ом. При этих данных получаем  $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_0 = -2j + 2 = 2\sqrt{2} \angle -45^\circ = \underline{Z}_{22}$  и соответственно для уравнений формы А находим коэффициент В [уравнение (17.13)]:

$$\underline{B} = \frac{\underline{Z}_{11} \underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}} - \underline{Z}_{12} = \frac{2\sqrt{2} \angle -45^\circ \cdot 2\sqrt{2} \angle -45^\circ}{2} - 2 = -2 - j4.$$

Характеристическое сопротивление

$$\underline{Z}_c = \sqrt{B/C} = \sqrt{(-2 - j4)/0,5} \approx 2,9 \angle 120^\circ = -1,45 + j2,5 \text{ Ом},$$

где учтено, что найденное значение коэффициента  $C = 1/\underline{Z}_0 = 0,5$  См сохраняет свое значение и для симметричной схемы.

5. Чему равно входное сопротивление симметричной схемы четырехполюсника (рис. 17.1), если  $\underline{Z}_н = \underline{Z}_c = 2,9 \angle 120^\circ$  Ом?

При заданном режиме четырехполюсника его входное сопротивление

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{вх} &= \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_0(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_c)}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_c} = \\ &= -j2 + \frac{2(-j2 + 2,9 \angle 120^\circ)}{2 - j2 + 2,9 \angle 120^\circ} = -1,45 + j2,5 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Полученный результат подтверждает известное положение о том, что у симметричного четырехполюсника при  $\underline{Z}_н = \underline{Z}_c$  входное сопротивление равно сопротивлению нагрузки ( $\underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_н = \underline{Z}_c$ ). Такая нагрузка называется согласованной.

При согласованной нагрузке включение симметричного четырехполюсника между источником и нагрузкой не изменит режима источника.

## 17.2. РАСЧЕТ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА ПО ДАННЫМ ОПЫТОВ ХОЛОСТОГО ХОДА И КОРОТКОГО ЗАМЫКАНИЯ

### Условие задачи

Четырехполюсник с неизвестной электрической схемой, изображенной (рис. 17.2) в виде прямоугольника, с вход-

ными выводами 1—1' и выходными 2—2' испытан при прямом включении, показанном на рисунке, и обратном включении, при котором поменяли местами генератор Г и ключ К.

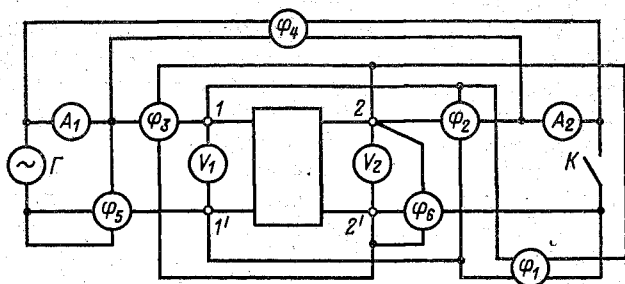


Рис. 17.2. Четырехполюсник с неизвестной схемой с включенными измерительными приборами

Показания приборов для двух включений (прямого и обратного) приведены в табл. 17.1. Фазометры, показан-

Таблица 17.1

Включение	Ре- жим	$U_1$ , В	$U_2$ , В	$I_1$ , А	$I_2$ , А	$\varphi_1^\circ$	$\varphi_2^\circ$	$\varphi_3^\circ$	$\varphi_4^\circ$	$\varphi_5^\circ$	$\varphi_6^\circ$
Прямое	ХХ	100	50	7,5	0	30°	—	60°	—	-30°	—
	КЗ	50	0	5,0	2,5	—	-60°	—	-30°	-30°	—
Обратное	ХХ	25	50	0	3,75	—	-60°	—	—	—	-90°
	КЗ	0	25	5,0	2,5	—	—	60°	—	—	-90°

ные на рис. 17.2, измеряют сдвиги фаз:  $\varphi_1 = \angle \underline{U}_1, \underline{U}_2$ ;  $\varphi_2 = \angle \underline{U}_1, \underline{I}_2$ ;  $\varphi_3 = \angle \underline{I}_1, \underline{U}_2$ ;  $\varphi_4 = \angle \underline{I}_1, \underline{I}_2$ ;  $\varphi_5 = \angle \underline{U}_1, \underline{I}_1$ ;  $\varphi_6 = \angle \underline{U}_2, \underline{I}_2$ .

Определить коэффициенты уравнений четырехполюсника в форме сопротивлений и проводимостей, а также в форме А.

## Решение задачи

1. Экспериментальное определение коэффициентов четырехполюсника. В предыдущей задаче было показано, что коэффициенты четырехполюсника зависят от внутренней схемы и ее параметров. Однако часто схема четырехполюсника неизвестна или очень сложна. В таких случаях требуемые коэффициенты определяют экспериментально и для этого достаточно испытать четырехполюсник в двух простых режимах: холостого хода и короткого замыкания.

В данной задаче испытания выполнены как для прямого включения четырехполюсника [рис. 17.2 — источник питания (генератор) подведен к выводам 1—1'], так и для обратного включения (рис. 17.2 — источник перенесен на выводы 2—2').

Для каждого случая включения четырехполюсник испытан в двух режимах: холостого хода (ключ  $K$  разомкнут) и короткого замыкания (ключ  $K$  замкнут). Нагрузкой четырехполюсника (со стороны выводов, противоположных источнику питания) являются либо вольтметр, сопротивление которого принято бесконечно большим (режим холостого хода), либо амперметр и токовые обмотки фазометров, сопротивлением которых пренебрегают (режим короткого замыкания).

2. Определение коэффициентов уравнений формы  $A$ . Для этой формы имеем уравнения (17.3), которые при холостом ходе четырехполюсника ( $I_2 = I_{2x} = 0$ ) принимает вид

$$\underline{U}_{1x} = \underline{A}\underline{U}_{2x} + \underline{B}I_{2x} = \underline{A}\underline{U}_{2x};$$

$$\underline{I}_{1x} = \underline{C}\underline{U}_{2x} + \underline{D}I_{2x} = \underline{C}\underline{U}_{2x},$$

откуда  $\underline{A} = \underline{U}_{1x}/\underline{U}_{2x}$ ;  $\underline{C} = \underline{I}_{1x}/\underline{U}_{2x}$  или для данного четырехполюсника

$$\underline{A} = \frac{U_{1x}}{U_{2x}} \angle \underline{U}_1, \underline{U}_2 = \frac{100}{50} \angle \varphi_1 = 2 \angle 30^\circ;$$

$$\underline{C} = \frac{I_{1x}}{U_{2x}} = \frac{7,5}{50} \angle \underline{I}_1, \underline{U}_2 = 0,15 \angle \varphi_3 = 0,15 \angle 60^\circ \text{ См.}$$

Те же уравнения (17.3) в режиме короткого замыкания ( $U_2 = U_{2k} = 0$ ) запишутся в виде

$$\underline{U}_{1k} = \underline{A}\underline{U}_{2k} + \underline{B}I_{2k} = \underline{B}I_{2k};$$

$$\underline{I}_{1k} = \underline{C}\underline{U}_{2k} + \underline{D}I_{2k} = \underline{D}I_{2k},$$



откуда  $\underline{B} = \underline{U}_{1к} / \underline{I}_{2к}$ ;  $\underline{D} = \underline{I}_{1к} / \underline{I}_{2к}$ , или для данного четырехполюсника

$$\underline{B} = \frac{\underline{U}_{1к}}{\underline{I}_{2к}} \angle \underline{U}_1, \underline{I}_2 = \frac{50}{2,5} \angle \varphi_2 = 20 \angle -60^\circ \text{ Ом.}$$

3. Определение коэффициентов в форме сопротивлений. Требуемые коэффициенты можно определить по методу, использованному в п. 2 для нахождения коэффициентов формы  $A$  и данным табл. 17.1. Для этого следовало бы воспользоваться уравнениями (17.1) для прямого и обратного включений четырехполюсника применительно к режиму холостого хода, т. е. принять для прямого включения  $\underline{I}_2 = \underline{I}_{2х} = 0$ , а для обратного  $\underline{I}_1 = \underline{I}_{1х} = 0$ .

Однако проще воспользоваться результатами предыдущей задачи (§ 17.1), где было показано, что коэффициенты  $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{вх1}$ , а  $\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_{вх2}$  т. е.  $\underline{Z}_{11}$  и  $\underline{Z}_{22}$  — входные сопротивления соответственно прямого и обратного включения четырехполюсника в режиме холостого хода. При наших данных

$$\underline{Z}_{11} = \frac{\underline{U}_{1х}}{\underline{I}_{1х}} = \frac{100}{7,5} \angle \varphi_5 = 13,32 \angle -30^\circ \text{ Ом;}$$

$$\underline{Z}_{22} = \frac{\underline{U}_{2х}}{\underline{I}_{2х}} = \frac{50}{3,75} \angle \varphi_6 = 13,32 \angle -90^\circ \text{ Ом.}$$

Коэффициенты  $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$  находим, используя уравнение  $\underline{U}_2 = \underline{Z}_{21} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \underline{I}'_2$ , из которого в режиме холостого хода ( $\underline{I}'_2 = 0$ ) следует

$$\underline{Z}_{21} = \underline{U}_{2х} / \underline{I}_{1х} = \frac{50}{7,5} \angle -\varphi_3 = 6,66 \angle -60^\circ \text{ Ом,}$$

где учтено, что  $\angle \underline{U}_2, \underline{I}_1 = -\angle \underline{I}_1, \underline{U}_2 = -\varphi_3 = -60^\circ$ .

4. Определение коэффициентов в форме проводимостей. Воспользуемся (§ 17.1) выражениями

$$\underline{Y}_{11} = \frac{\underline{I}_{1к}}{\underline{U}_{1к}} = \frac{\underline{I}_{1к}}{\underline{U}_{1к}} \angle -\varphi_5 = \frac{5}{50} \angle 30^\circ = 0,1 \angle 30^\circ \text{ См;}$$

$$\underline{Y}_{21} = \frac{\underline{I}_{2к}}{\underline{U}_{1к}} = \frac{\underline{I}_{2к}}{\underline{U}_{1к}} \angle -\varphi_2 = \frac{2,5}{50} \angle 60^\circ = 0,05 \angle 60^\circ \text{ См;}$$

$$\underline{Y}_{22} = \frac{\underline{I}'_{2к}}{\underline{U}_{2к}} = \frac{\underline{I}'_{2к}}{\underline{U}_{2к}} \angle -\varphi_6 = \frac{2,5}{25} \angle 90^\circ = 0,1 \angle 90^\circ \text{ См.}$$

## Дополнительные вопросы к задаче

1. Как проверить результаты вычислений по взаимосвязи коэффициентов различных форм уравнений? Покажем эту возможность, используя взаимосвязь коэффициентов уравнений форм  $A$  и  $Z$ , а также  $A$  и  $Y$ . Как было показано (§ 17.1),  $\underline{A} = \underline{Z}_{11}/\underline{Z}_{21}$ ;  $\underline{C} = 1/\underline{Z}_{21}$ ;  $\underline{D} = \underline{Z}_{22}/\underline{Z}_{21}$ , или при наших данных

$$\underline{A} = 13,32 \angle -30^\circ / 6,66 \angle -60^\circ = 2 \angle 30^\circ;$$

$$\underline{C} = 1/6,66 \angle -60^\circ = 0,15 \angle 60^\circ \text{ См};$$

$$\underline{D} = 13,32 \angle -90^\circ / 6,66 \angle -60^\circ = 2 \angle -30^\circ.$$

Сравнивая уравнения (17.2) и (17.3) для режима короткого замыкания четырехполюсника при прямом его включении ( $\underline{U}_2 = 0$ ) и обратном включении ( $\underline{U}_1 = 0$ ), легко получить соотношения для коэффициентов:  $\underline{Y}_{11} = \underline{D}/\underline{B}$ ;  $\underline{Y}_{21} = 1/\underline{B}$ ;  $\underline{Y}_{22} = \underline{A}/\underline{B}$ , или при наших данных

$$\underline{Y}_{11} = 2 \angle -30^\circ / 20 \angle -60^\circ = 0,1 \angle 30^\circ \text{ См};$$

$$\underline{Y}_{21} = 1/20 \angle -60^\circ = 0,05 \angle 60^\circ \text{ См};$$

$$\underline{Y}_{22} = 2 \angle 30^\circ / 20 \angle -60^\circ = 0,1 \angle 90^\circ \text{ См}.$$

Результаты совпали с полученными ранее.

2. Возможно ли определить коэффициенты четырехполюсника по опытным данным только прямого включения? При решении задачи коэффициенты уравнений формы  $A$  были найдены по данным испытаний четырехполюсника только в условиях прямого включения. При этом были использованы результаты двух опытов: холостого хода и короткого замыкания. Так же можно поступить и для определения коэффициентов других форм уравнений.

Так, уравнения (17.1) формы  $Z$  при  $\underline{I}_2 = \underline{I}_{2x} = 0$  (холостой ход) позволяют определить коэффициенты  $\underline{Z}_{11} = \underline{U}_{1x}/\underline{I}_{1x}$  и  $\underline{Z}_{21} = \underline{U}_{2x}/\underline{I}_{1x}$ .

Вместе с тем второе из рассматриваемых уравнений (17.1) при  $\underline{U}_2 = \underline{U}_{2k} = 0$  (короткое замыкание) принимает вид

$$0 = \underline{Z}_{21} \underline{I}_{1k} + \underline{Z}_{22} \underline{I}_{2k},$$

откуда можно определить  $\underline{Z}_{22}$ , так как  $\underline{Z}_{21}$  уже найдено,

а  $I_{1к}$  и  $I_{2к}$  известны из опыта короткого замыкания при прямом включении четырехполюсника.

Приведенный метод сложнее рассмотренного в задаче.

Таким образом, для определения коэффициентов пассивного четырехполюсника достаточно испытать его только при одном включении (прямом или обратном). Однако некоторые формы коэффициентов легче найти при испытаниях в прямом и обратном включениях.

### 17.3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

328. Для Г-образной схемы четырехполюсника (рис. 17.3) записать выражения (в общем виде) уравнений форм  $A$ ,  $Z$ ,  $Y$ .

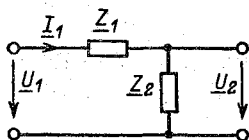


Рис. 17.3 К задаче 328

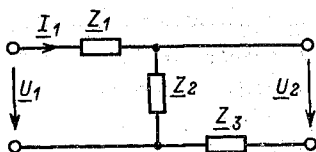


Рис. 17.4. К задаче 329

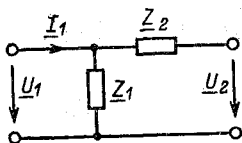


Рис. 17.5. К задаче 331

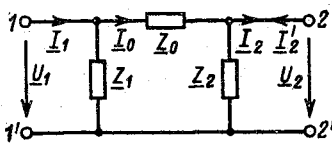


Рис. 17.6. К задаче 333

329. Составить выражения (в общем виде) для коэффициентов формы  $A$  четырехполюсника (рис. 17.4) и сделать проверку решения.

330. Сравнить выражения для коэффициентов  $A$  двух Г-образных четырехполюсников, рассмотренных в задачах 328 и 329.

331. Для четырехполюсника рис. 17.5 составить выражения коэффициентов в формах  $Z$  и  $Y$ .

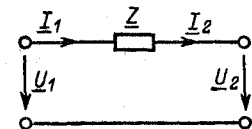


Рис. 17.7. К задаче 335

332. Для четырехполюсника из предыдущей задачи найти соотношение между сопротивлениями, обеспечивающее симметрию схемы.

333. Для П-образной схемы четырехполюсника рис. 17.6 вычислить коэффициенты и составить уравнения в форме  $A$ , если  $Z_0 = (80 - j10)$  Ом;  $Z_1 = Z_2 = (11,2 + j11,6)$  Ом.

334. Определить характеристическое сопротивление четырехполюсника из предыдущей задачи.

335. Для четырехполюсника рис. 17.7 записать выражения для коэффициентов в формах  $A$  и  $Y$ , а также определить характеристическое сопротивление  $Z_c$ .

#### 17.4. ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ. 17

$$328. A = (Z_1 + Z_2)/Z_2; B = Z_1; C = 1/Z_2; D = 1; Z_{11} = Z_1 + Z_2; Z_{22} = Z_2; |Z_{12}| = |Z_{21}| = \bar{Z}_2; \bar{Y}_{11} = 1/\bar{Z}_1; \bar{Y}_{22} = (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2)/Z_1 \bar{Z}_2; |Y_{12}| = |\bar{Y}_{21}| = 1/\bar{Z}_1.$$

$$329. A = 1; B = Z_2; C = 1/\bar{Z}_1; D = (Z_1 + Z_2)/\bar{Z}_1; A\bar{D} - BC = 1.$$

330. Коэффициенты  $B$  и  $C$  одинаковы при  $\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2$ , а коэффициенты  $A$  и  $D$  обмениваются значениями.

$$331. Z_{11} = Z_1 + Z_2; Z_{22} = Z_2 + Z_3; |Z_{21}| = |Z_{12}| = Z_2; Y_{11} = (Z_2 + Z_3)/(Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1); \bar{Y}_{22} = (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2)/(Z_1 \bar{Z}_2 + Z_2 \bar{Z}_3 + Z_3 \bar{Z}_1); |\bar{Y}_{21}| = |Y_{12}| = \bar{Z}_2/(Z_1 \bar{Z}_2 + Z_2 \bar{Z}_3 + Z_3 \bar{Z}_1).$$

$$332. \bar{Z}_1 = \bar{Z}_3.$$

$$333. \bar{U}_1 = 4 \sqrt{2} \angle -45^\circ \bar{U}_2 + 86 \angle -7^\circ \bar{I}_2; \bar{I}_1 = -0,1j \bar{U}_2 + 4 \sqrt{2} \angle -45^\circ \bar{I}_2.$$

$$334. 29,3 \angle 41^\circ 30'.$$

$$335. A = 1; B = Z; C = 0; D = 1; Y_{11} = Y_{22} = 1/Z; |Y_{12}| = |Y_{21}| = 1/Z; Z_c \rightarrow \infty.$$

### Глава восемнадцатая

## ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ ТОКАХ И НАПРЯЖЕНИЯХ

### 18.1. ГАРМОНИЧЕСКИЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КРИВЫХ

#### Условие задачи

Источник энергии имеет напряжение несинусоидальной формы (в вольтах)  $u = 20 \sin \omega t + 6,7 \sin 3\omega t + 4 \sin 5\omega t + 2,9 \sin 7\omega t + 2,2 \sin 9\omega t$ .

Построить график напряжения источника.

## Решение задачи

1. Получение заданного несинусоидального напряжения. По условию задачи напряжение состоит из пяти синусоидальных составляющих (слагаемых). Каждой синусоидальной составляющей, называемой гармоникой, присваивается номер, соответствующий кратности ее частоты по отношению к первой составляющей. Так, в нашем случае  $u = u_1 + u_3 + u_5 + u_7 + u_9$ , т. е. напряжение состоит из пяти гармоник.

Такое несинусоидальное напряжение можно, например, получить от пяти последовательно включенных генераторов синусоидального напряжения (рис. 18.1). Однако та-

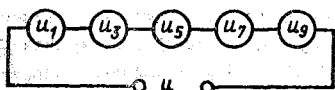


Рис. 18.1. Генераторы синусоидального напряжения, образующие несинусоидальное напряжение на выводах соединения

кой способ получения несинусоидального напряжения сложен и в практических условиях поступают иначе (см. доп. вопрос 5 к этой задаче).

2. Построение графика несинусоидального напряжения. Для построения графика напряжения следует сначала построить синусоидальные составляющие ( $u_1 = 20 \sin \omega t$ ;  $u_3 = 6,7 \sin 3\omega t$ ;  $u_5 = 4 \sin 5\omega t$  и т. д.), а затем сложить ординаты соответствующих точек их графиков.

На рис. 18.2 для большей наглядности графическое сложение выполнено в два этапа. Вначале построены первые три гармоники ( $u_1, u_3, u_5$ , рис. 18.2, а) и их суммарный

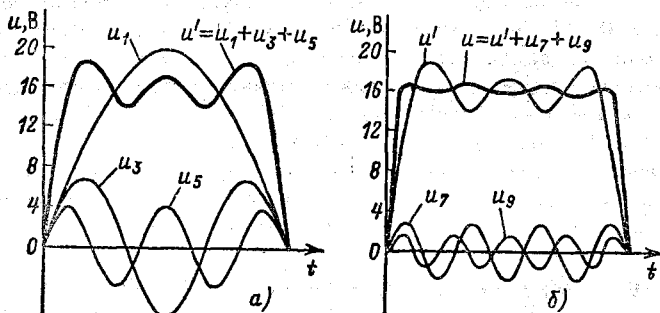


Рис. 18.2. графическое суммирование гармоник несинусоидального напряжения

график  $u'$ . Затем (рис. 18.2, б) к ординатам графика  $u'$  (перенесенного с рис. 18.2, а) добавлены соответствующие ординаты графиков  $u_7$  и  $u_9$ . На рис. 18.2 построена только одна положительная полуволна несинусоидального напряжения. Отрицательная полуволна имеет такую же форму.

Полученная кривая  $u$  (рис. 18.2, б) по форме близка к прямоугольнику, и это не случайно, так как кривая прямоугольной формы раскладывается в ряд

$$y = \frac{4A}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \dots \right),$$

где  $A$  — высота полуволны прямоугольной кривой.

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Можно ли форму кривой  $u$  (рис. 18.2, б) еще больше приблизить к прямоугольной? Кривая прямоугольной формы раскладывается в бесконечный ряд нечетных гармоник, приведенный выше. Увеличивая число учитываемых гармоник, можно точнее воспроизвести прямоугольную форму кривой. В этом легко убедиться, сравнив кривые  $u'$  (сумма трех гармоник, рис. 18.2, а) и  $u$  (сумма пяти гармоник, рис. 18.2, б).

2. Как изменится график напряжения  $u$  (рис. 18.2), если добавится постоянная составляющая? Если к заданному по условию задачи несинусоидальному напряжению добавить постоянную составляющую, например  $U_0 = 10$  В, т. е. записать это как  $u = 10 + 20 \sin \omega t + 6,7 \sin 3\omega t + \dots$ , то ординаты всех точек графика  $u$  (рис. 18.2, б) увеличатся на 10 В. Кривая сместится вверх на 10 В и уже не будет симметричной относительно оси  $t$ .

Добавление постоянной составляющей равносильно включению в схему, показанную на рис. 18.1, последовательно источника постоянного тока с напряжением  $U_0 = 10$  В.

3. Как практически выделить отдельные составляющие несинусоидального напряжения? Для этого применяются электрические фильтры. Если на вход фильтра подать несинусоидальное напряжение, то на его выходе можно получить только часть гармонических составляющих либо даже отдельную гармонику или постоянную составляющую.

Для анализа гармонического состава (спектра) несинусоидального напряжения применяются приборы, называе-

мые анализаторами гармоник, которые содержат фильтр с очень узкой полосой пропускания. Это означает, что в пределах узкой полосы частот  $\Delta f$  (рис. 18.3) напряжение на выходе фильтра  $U_{\text{вых}}$  почти равно напряжению на входе фильтра  $U_{\text{вх}}$  или, как говорят, фильтр пропускает полосу частот от  $f_1$  до  $f_2$ . За пределами полосы  $\Delta f$ , как видно из графика на рис. 18.3,  $U_{\text{вых}} \ll U_{\text{вх}}$ .

В анализаторах гармоник используется фильтр, у которого полоса пропускания  $\Delta f$  и граничные частоты  $f_1$  и  $f_2$

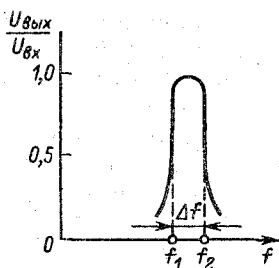


Рис. 18.3. Частотная характеристика фильтра

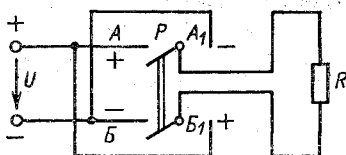


Рис. 18.4. К дополнительному вопросу 5

перемещаются вдоль оси  $f$ . При этом на выходе поочередно выделяются отдельные гармоники напряжения.

4. Где на практике встречаются несинусоидальные напряжения—сигналы? Несинусоидальные сигналы с различной формой кривой (прямоугольной, пилообразной, треугольной и др.) широко используются в радиосвязи, телевидении, электронике, автоматике и других отраслях электротехники. В этих случаях применяют специальные генераторы или электрические цепи, формирующие требуемые несинусоидальные сигналы. Однако в ряде случаев несинусоидальные токи и напряжения появляются и в результате искажения синусоидальных токов или напряжений генераторов и приемников энергии.

5. Как получить напряжение прямоугольной формы? Если в цепи рис. 18.4 переключать рубильник с  $A, B$  на  $A_1, B_1$  и обратно, то на сопротивлении  $R$  получится напряжение прямоугольной формы (при этом предполагается, что временем переброса рубильника можно пренебречь по сравнению с продолжительностью замкнутого состояния). Рубильник  $P$  можно заменить реле

или электронным коммутатором. В электронике широко применяются специальные генераторы напряжений или токов прямоугольной формы (например, мультивибраторы).

## 18.2. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЦЕПЬ С НЕСИНУСОИДАЛЬНЫМ ИСТОЧНИКОМ ЭНЕРГИИ

### Условие задачи

Электрическая цепь из последовательно включенных активного сопротивления  $R=20$  Ом, индуктивности  $L=0,1$  Гн и емкости  $C=11,25$  мкФ  $=11,25 \cdot 10^{-6}$  Ф питается от источника с напряжением (в вольтах)  $u=310 \sin(\omega_1 t - 15^\circ) + 77,5 \sin 3\omega_1 t + 40 \sin(5\omega_1 t + 18^\circ 45')$ .

Найти мгновенное значение тока в цепи, вычислить действующие значения тока и напряжения, а также активную мощность цепи, если частота первой гармоники  $f_1=50$  Гц.

### Решение задачи

1. Применение метода наложения. Заданный источник энергии создает на выводах цепи напряжение, содержащее три синусоидальные составляющие: первую, третью и пятую гармоники. Применяя к заданной линейной цепи метод наложения, можно рассматривать для любого момента времени ток в цепи как результат наложения частичных токов, созданных каждой гармоникой напряжения в отдельности.

Таким образом, в рассматриваемой задаче нужно вычислить полное сопротивление цепи для частот  $f_1$ ,  $f_3=3f_1$  и  $f_5=5f_1$  и найти токи, создаваемые синусоидальными напряжениями (гармониками) этих частот.

2. Вычисление сопротивления цепи. Индуктивное сопротивление пропорционально частоте, и потому для первой, третьей и пятой гармоник имеем

$$X_{L1} = 2\pi f_1 L = 314 \cdot 0,1 = 31,4 \text{ Ом}; \quad X_{L3} = 3X_{L1} = 94,2 \text{ Ом};$$

$$X_{L5} = 5X_{L1} = 157 \text{ Ом}.$$

Емкостные сопротивления для тех же гармоник

$$X_{C1} = \frac{1}{2\pi f_1 C} = \frac{10^6}{314 \cdot 11,25} = 282,6 \text{ Ом};$$

$$X_{C3} = X_{C1}/3 = 94,2 \text{ Ом};$$

$$X_{C5} = X_{C1}/5 = 56,5 \text{ Ом}.$$



Полные сопротивления цепи для рассматриваемых гармоник

$$Z_1 = \sqrt{R^2 + (X_{L1} - X_{C1})^2} = \sqrt{20^2 + (31,4 - 282,6)^2} = 252 \text{ Ом};$$

$$Z_3 = \sqrt{R^2 + (X_{L3} - X_{C3})^2} = \sqrt{20^2 + (94,2 - 94,2)^2} = 20 \text{ Ом};$$

$$Z_5 = \sqrt{R^2 + (X_{L5} - X_{C5})^2} = \sqrt{20^2 + (157 - 56,5)^2} = 102,5 \text{ Ом}.$$

3. Определение гармоник тока. Для первой гармоники максимальное значение тока

$$I_{1m} = U_{1m}/Z_1 = 310/252 = 1,23 \text{ А}.$$

Фазовый сдвиг между напряжением и током первой гармоники определяется по уравнению

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = (X_{L1} - X_{C1})/R = -251,2/20 = -12,56,$$

откуда

$$\varphi_1 = -85^\circ 20'.$$

Поскольку на частоте первой гармоники в цепи преобладает емкостное сопротивление ( $X_{C1} > X_{L1}$ ), ток опережает напряжение на угол, равный  $85^\circ 20'$ , и поэтому

$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega_1 t - 15^\circ - \varphi_1) = 1,23 \sin(\omega_1 t + 70^\circ 20') \text{ А}.$$

Для третьей гармоники максимальное значение тока

$$I_{3m} = U_{3m}/Z_3 = 77,5/20 = 3,88 \text{ А}.$$

Сдвиг по фазе между напряжением и током третьей гармоники  $\varphi_3 = 0$ , так как на этой частоте в цепи устанавливается резонанс напряжений ( $X_{L3} = X_{C3}$ ). Соответственно

$$i_3 = I_{3m} \sin 3\omega_1 t = 3,88 \sin 3\omega_1 t \text{ А}.$$

Для пятой гармоники имеем

$$I_{5m} = U_{5m}/Z_5 = 40/102,5 = 0,39 \text{ А};$$

$$\operatorname{tg} \varphi_5 = (X_{L5} - X_{C5})/R = 100,5/20 = 5,02$$

и

$$\varphi_5 = 78^\circ 45'.$$

На этот угол ( $\varphi_5$ ) ток пятой гармоники отстает от напряжения, так как в цепи преобладает индуктивное со-

противление ( $X_{L5} > X_{C5}$ ). Соответственно

$$i_5 = I_{5M} \sin(5\omega_1 t + 18^\circ 45' - \varphi_5) = 0,39 \sin(5\omega_1 t - 60^\circ) \text{ А.}$$

Мгновенное значение тока найдем наложением гармоник тока в (амперах):

$$i = i_1 + i_3 + i_5 = 1,23 \sin(\omega_1 t + 70^\circ 20') + \\ + 3,88 \sin 3\omega_1 t + 0,39 \sin(5\omega_1 t - 60^\circ).$$

4. Вычисление действующих значений тока и напряжения. Действующее значение тока в цепи

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{I_{1M}^2 + I_{3M}^2 + I_{5M}^2} = 0,707 \sqrt{1,23^2 + 3,88^2 + 0,39^2} = \\ = 2,9 \text{ А.}$$

Действующее значение напряжения источника энергии

$$U = 0,707 \sqrt{U_{1M}^2 + U_{3M}^2 + U_{5M}^2} = \\ = 0,707 \sqrt{310^2 + 77,5^2 + 40^2} = 228 \text{ В.}$$

5. Вычисление активной мощности. Активная мощность цепи складывается из активных мощностей отдельных гармоник, или в нашем случае

$$P = P_1 + P_3 + P_5 = \frac{U_{1M} I_{1M}}{2} \cos \varphi_1 + \frac{U_{3M} I_{3M}}{2} \cos \varphi_3 + \\ + \frac{U_{5M} I_{5M}}{2} \cos \varphi_5 = \frac{310 \cdot 1,23}{2} \cos(-85^\circ 20') + \\ + \frac{77,5 \cdot 3,88}{2} \cos 0^\circ + \frac{40 \cdot 0,39}{2} \cos 78^\circ 45' = 16 + 150 + \\ + 1,5 = 167,5 \text{ Вт.}$$

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Как выполняется расчет разветвленной цепи с несинусоидальным напряжением источника энергии? Вид электрической линейной цепи не влияет на метод расчета, основанный на замене несинусоидального напряжения (или тока) его синусоидальными составляющими. При исследовании каждой гармоники в отдельности важно правильно применить методы расчета цепей синусоидального тока, приведенные в предыдущих главах. Так, если в рассмотренной задаче активное сопротивление, индуктивность и емкость соединить параллельно, то для вычисления каждой гармоники

тока можно пользоваться методом проводимостей. Например, для первой гармоники полная проводимость цепи при параллельном соединении

$$Y_1 = \sqrt{G^2 + B_1^2} = \sqrt{G^2 + (B_{L1} - B_{C1})^2},$$

или в нашем случае

$$G = 1/20 = 0,05 \text{ См};$$

$$B_{L1} = 1/X_{L1} = 1/31,4 = 0,0318 \text{ См};$$

$$B_{C1} = 1/X_{C1} = 1/282,6 = 0,0034 \text{ См}$$

и

$$Y_1 = 0,0575 \text{ См.}$$

Максимальное значение первой гармоники общего тока

$$I_{1M} = U_{1M} Y_1 = 310 \cdot 0,0575 = 17,8 \text{ А},$$

и сдвиг по фазе относительно первой гармоники напряжения

$$\varphi_1 = \arctg \frac{B_1}{G} = \arctg \frac{B_{L1} - B_{C1}}{G} = \arctg \frac{0,0284}{0,05} = 29^\circ 35'.$$

Мгновенное значение первой гармоники общего тока

$$i_1 = 17,8 \sin(\omega_1 t - 15^\circ - \varphi_1) = 17,8 \sin(\omega_1 t - 44^\circ 35') \text{ А.}$$

Для ветви с активным сопротивлением максимальное значение тока

$$I_{1mR} = U_{1m} G = 310 \cdot 0,05 = 15,5 \text{ А}$$

и мгновенное значение

$$i_{1R} = 15,5 \sin(\omega_1 t - 15^\circ) \text{ А.}$$

Для ветви с индуктивным сопротивлением

$$I_{1mL} = U_{1m} B_{L1} = 310 \cdot 0,0318 = 9,85 \text{ А};$$

$$i_{1L} = 9,85 \sin(\omega_1 t - 15^\circ - 90^\circ) = 9,85 \sin(\omega_1 t - 105^\circ) \text{ А.}$$

Для ветви с емкостным сопротивлением

$$I_{1mC} = U_{1m} B_{C1} = 310 \cdot 0,0034 = 1,05 \text{ А};$$

$$i_{1C} = 1,05 \sin(\omega_1 t + 75^\circ) \text{ А.}$$

Аналогично можно определить и остальные гармоники всех токов.

2. Имеют ли ток и напряжение одинако-

вую форму кривой? Чтобы ответить на этот вопрос, нужно прежде всего сравнить амплитуды гармоник напряжения и тока между собой. Так, в нашем случае третья гармоника напряжения в 4 раза меньше первой гармоники напряжения, а третья гармоника тока в 3 раза больше первой гармоники тока. Поскольку соотношение амплитуд гармоник напряжения совершенно не соответствует соотношению амплитуд гармоник тока, то и формы кривых тока и напряжения различны.

Различие форм кривых тока и напряжения объясняется изменением реактивных сопротивлений цепи для разных частот (их зависимостью от частоты). В цепях, содержащих только активные сопротивления, несинусоидальные кривые тока и напряжения имеют одинаковую форму.

3. Чему равен коэффициент мощности в рассматриваемой задаче? В цепях с несинусоидальными токами пользуются понятием коэффициента мощности  $\cos \varphi = P/UI$  или в нашем случае  $\cos \varphi = 167,5/228 \cdot 2,9 = 0,25$ .

Вычисленное значение  $\cos \varphi$  в отличие от  $\cos \varphi$  цепей синусоидального тока не определяет никаких сдвигов по фазе между напряжением и током цепи и потому является условным коэффициентом мощности.

4. Как измерить действующее значение несинусоидальных величин? Электроизмерительные приборы некоторых систем (например, электронные вольтметры) имеют на шкале указание « $0,707 U_M$ ». Это означает, что только при измерении синусоидальных напряжений отсчет по шкале выражает действующее значение измеренной величины.

Для измерений несинусоидальных напряжений и токов непригодны и приборы электромагнитной системы, так как магнитные свойства стальных пластин (якоря) зависят от частоты. Наименьшей зависимостью показаний от формы тока обладают приборы термоэлектрической системы. В ряде случаев можно применять и приборы электродинамической системы.

### 18.3. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЦЕПЬ С РЕЗОНАНСНЫМИ КОНТУРАМИ. ФИЛЬТРАЦИЯ ГАРМОНИК

#### Условие задачи

Несинусоидальное напряжение  $u(t) = 40 + 100 \sqrt{2} \sin \omega t + 80 \sqrt{2} \sin 3\omega t$  питает цепь (рис. 18.5), сопротивления ко-

торой  $\omega L_1 = 1/\omega C_1 = 60 \text{ Ом}$ ;  $3\omega L_2 = 1/3\omega C_2 = 150 \text{ Ом}$ ;  $R = 400 \text{ Ом}$  (сопротивление  $R$  и емкость  $C$ , показанные пунктиром, не учитывать).

Определить показания всех приборов при условии, что они измеряют действующие значения и их собственным потреблением энергии можно пренебречь.

### Решение задачи

1. Особенности цепи несинусоидального тока с резонансными контурами. Как было показано (гл. 11), у последовательного контура на частоте резонанса полное сопротивление

равно его активному сопротивлению, которым во многих практических случаях можно пренебречь по сравнению с сопротивлением остальной цепи. Так и в рассматриваемой схеме (рис. 18.5) у резонансных контуров  $L_1-C_1$  и  $L_2-C_2$  активные сопротивления приняты равными нулю. При этом их полные сопротивления  $Z_R = 0$ , т. е. они ведут себя на частоте резонанса как участки «короткого замыкания».

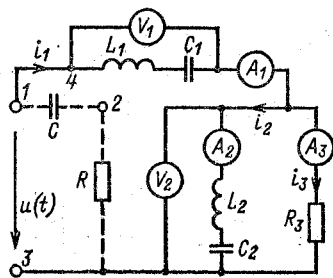


Рис. 18.5. Цепь с двумя последовательными резонансными контурами

К таким участкам (с сопротивлением  $Z_R = 0$ ) в цепи рис. 18.5 относятся  $L_1-C_1$  на частоте  $\omega$  (первая гармоника) и  $L_2-C_2$  на частоте  $3\omega$  (третья гармоника).

Другое предельное значение сопротивления контура  $Z_R \rightarrow \infty$  имеют на частоте резонанса параллельные контуры без потерь (см. гл. 11). Применение таких контуров в цепях несинусоидального тока показано в дополнительных вопросах к этой задаче. Метод анализа цепи рис. 18.5 базируется, как и прежде (§ 18.2), на методе наложения, которым и воспользуемся.

2. Определение постоянных составляющих напряжений и токов. Приложенное к цепи рис. 18.5 напряжение  $u(t)$  содержит постоянную составляющую  $U^{(0)} = 40 \text{ В}$ , для которой емкость  $C_1$  имеет сопротивление  $X_{C1} = 1/\omega C_1 = 1/0 \cdot C_1 = \infty$ . При этом будут отсутствовать (равны нулю) постоянные составляющие общего тока и токов ветвей:

$$I_1^{(0)} = I_2^{(0)} = I_3^{(0)} = 0.$$

Рассматривая в цепи рис. 18.5 по второму закону Кирхгофа контур, включающий  $L_1$ ,  $C_1$ ,  $R_3$  и источник питания при  $u(t) = U^{(0)} = 40$  В, получим напряжение на емкости (постоянную составляющую)  $U_{C_1}^{(0)} = U^{(0)} = 40$  В, так как падения напряжения на индуктивности  $L$  и сопротивлении  $R$  равны нулю при токе, равном нулю.

Это напряжение  $U_{C_1}^{(0)} = 40$  В и является постоянной составляющей показаний вольтметра  $V_1$ . Других постоянных составляющих токов и напряжений нет, что и отражено в табл. 18.1 (первая строка).

Таблица 18.1

Вид составляющей	Составляющие напряжения токи и показания приборов				
	$U_1$ , В	$U_2$ , В	$I_1$ , А	$I_2$ , А	$I_3$ , А
Постоянная $U^{(0)}$ ; $I^{(0)}$	40	0	0	0	0
Первая гармоника $U^{(1)}$ ; $I^{(1)}$	0	100	$0,25\sqrt{2}$	0,25	0,25
Третья гармоника $U^{(3)}$ ; $I^{(3)}$	80	0	0,5	0,5	0
Показания приборов	89	100	0,61	0,56	0,25

3. Определение напряжений и токов на частоте первой гармоники ( $\omega$ ). По условию задачи напряжение  $u(t)$  имеет амплитуду первой гармоники  $U_m^{(1)} = 100\sqrt{2}$  В, или действующее значение  $U^{(1)} = 100\sqrt{2}/\sqrt{2} = 100$  В. На этой частоте ( $\omega$ ) сопротивления  $\omega L_1 = 1/\omega C$  (по условию задачи), поэтому участок цепи  $L_1 - C_1$  (рис. 18.5) имеет сопротивление  $X_1 = \omega L_1 - 1/\omega C_1 = 0$ . Следовательно, напряжение  $U_1$ , измеряемое вольтметром  $V_1$ , не имеет составляющей первой гармоники ( $U_1^{(1)} = 0$ ), а напряжение  $U_2$ , измеряемое вольтметром  $V_2$ , равно напряжению источника питания, т. е.  $U_2^{(1)} = U^{(1)} = 100$  В.

По известному напряжению первой гармоники  $U_2^{(1)}$ , действующему на двух параллельных ветвях ( $L_2$ ,  $C_2$  и  $R_3$ ), находим токи этих ветвей:

$$I_2^{(1)} = U_2^{(1)} / |(\omega L_2 - 1/\omega C_2)|;$$

$$I_3^{(1)} = U_2^{(1)} / R_3,$$

или при наших значениях сопротивлений  $\omega L_2 = 150/3 =$

$= 50 \text{ Ом}$ ,  $1/\omega C_2 = 150 \cdot 3 = 450 \text{ Ом}$ , откуда  $|\omega L_2 - 1/\omega C_2| = |50 - 450| = 400 \text{ Ом}$ , а также  $R_3 = 400 \text{ Ом}$ , имеем равные токи:

$$I_2^{(1)} = I_3^{(1)} = 100/400 = 0,25 \text{ А.}$$

Так как токи  $I_2^{(1)}$  и  $I_3^{(1)}$  действуют в ветвях с чисто реактивным и активным сопротивлениями, то они сдвинуты по фазе на  $90^\circ$  и их общий ток

$$I_1^{(1)} = \sqrt{(I_2^{(1)})^2 + (I_3^{(1)})^2} = 0,25 \sqrt{2} = 0,35 \text{ А.}$$

Вычисленные напряжения и токи частоты первой гармоники заносим в табл. 18.1 (вторая строка).

4. Определение напряжений и токов на частоте третьей гармоники ( $3\omega$ ). На этой частоте ветвь  $L_2, C_2$  (рис. 18.5) имеет сопротивление  $X_2^{(3)} = 3\omega L_2 - 1/3\omega C_2 = 150 - 150 = 0$  и соответственно напряжение  $U_2^{(3)} = X_2^{(3)} I_2^{(3)} = 0$ , т. е. вольтметр  $V_2$  не имеет составляющей от третьей гармоники.

В таком случае напряжение третьей гармоники источника питания  $U^{(3)} = U_m^{(3)}/\sqrt{2} = 80 \sqrt{2}/\sqrt{2} = 80 \text{ В}$  приложено целиком к контуру  $L_1 - C_1$ , напряжение которого на этой частоте  $U_1^{(3)} = U^{(3)} = 80 \text{ В}$ .

Сопротивление контура  $L_1 - C_1$  на частоте  $3\omega$

$$X_1^{(3)} = 3\omega L_1 - 1/3\omega C_1 = 3 \cdot 60 - 60/3 = 160 \text{ Ом.}$$

Ток в контуре

$$I_1^{(3)} = U_1^{(3)}/X_1^{(3)} = 80/160 = 0,5 \text{ А.}$$

Результаты вычислений по третьей гармонике заносим в табл. 18.1 (третья строка).

5. Определение показаний приборов. Имен (табл. 18.1) постоянную составляющую и действующие значения гармоник измеряемых напряжений и токов, определяем показания приборов (действующие значения несинусоидальных напряжений, токов), как было показано в § 18.2 (п. 4). В нашем случае

$$U_1 = \sqrt{(U_1^{(0)})^2 + (U_1^{(1)})^2 + (U_1^{(3)})^2} = \\ = \sqrt{40^2 + 0 + 80^2} = 89 \text{ В;}$$

$$U_2 = \sqrt{(U_2^{(0)})^2 + (U_2^{(1)})^2 + (U_2^{(3)})^2} = \sqrt{100^2} = 100 \text{ В;}$$

$$I_1 = \sqrt{(I_1^{(0)})^2 + (I_1^{(1)})^2 + (I_1^{(3)})^2} = \\ = \sqrt{(0,25\sqrt{2})^2 + (0,5)^2} = 0,61 \text{ А};$$

$$I_2 = \sqrt{(I_2^{(0)})^2 + (I_2^{(1)})^2 + (I_2^{(3)})^2} = \sqrt{(0,25)^2 + (0,5)^2} = 0,56 \text{ А};$$

$$I_3 = \sqrt{(I_3^{(0)})^2 + (I_3^{(1)})^2 + (I_3^{(3)})^2} = \sqrt{(0,25)^2} = 0,25 \text{ А}.$$

По этим данным записаны показания приборов (табл. 18.1).

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Как выделить переменные составляющие заданного напряжения  $u(t)$ ? На практике (в электронике, радиотехнике и др.) часто возникает необходимость отделить переменные составляющие несинусоидального напряжения (тока) от постоянной составляющей, или, как говорят, «не пропустить постоянную составляющую» к приемнику энергии.

Если бы потребовалось к цепи рис. 18.5 подвести только первую и третью гармоники заданного напряжения  $u(t)$ , исключив постоянную составляющую  $U^{(0)} = 40 \text{ В}$ , то это можно было бы обеспечить, присоединив провод 1—4 (рис. 18.5) к точке 2 вместо точки 1. При этом в участке цепи  $C-R$  (показанной пунктиром и называемой «разделительной») на емкости  $C$  выделится постоянная составляющая  $U^{(0)}$ , так как емкость представляет собой бесконечно большое сопротивление для постоянного тока.

Если принять  $R \gg 1/\omega C$ , то можно пренебречь переменным падением напряжения на емкости и обеспечить на сопротивлении  $R$  практически полное напряжение первой и третьей гармоник  $u(t)$ .

2. Как разделить (отфильтровать) каждую составляющую напряжения  $u(t)$ , заданного в условии задачи? Это можно сделать несколькими способами. Во-первых, использовать схему рис. 18.5 с разделительной цепью  $C-R$ , которая обеспечивает (см. предыдущий доп. вопрос) выделение на емкости  $C$  постоянной составляющей напряжения  $U^{(0)}$  (ее можно измерить, например, вольтметром, присоединенным к этой емкости). Резонансные контуры  $L_1-C_1$  и  $L_2-C_2$  отфильтруют соответственно третью  $U_1^{(3)}$  и первую  $U_2^{(1)}$  гармоники напряжения, в чем легко убедиться из табл. 18.1, в которой при питании через разделительную цепь  $U_1^{(0)} = 0$ .



Во-вторых, можно воспользоваться схемой рис. 18.6, содержащей три участка: емкость  $C$  и два параллельных резонансных контура ( $L_1-C_1$  и  $L_2-C_2$ ) высокой добротности, настроенных на частоты гармоник  $\omega$  и  $3\omega$ . Каждый из этих участков имеет теоретически бесконечно большое сопротивление для одной из составляющих напряжения  $u(t)$  (постоянной, первой и третьей гармоник) и выделяет ее,

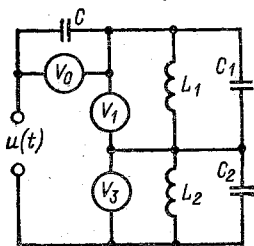


Рис. 18.6. К дополнительному вопросу 2

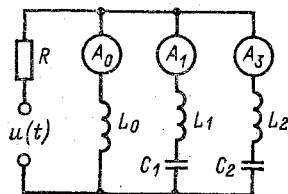


Рис. 18.7. К дополнительному вопросу 3

что означает: на каждом участке действует напряжение одной составляющей.

3. Как разделить (отфильтровать) гармоники тока? Для этого воспользуемся схемой рис. 18.7, содержащей три ветви: индуктивность  $L_0$  и два последовательных резонансных контура высокой добротности, настроенных на частоты  $\omega$  и  $3\omega$ . Каждая ветвь имеет сопротивление, теоретически равное нулю, для одной из составляющих: постоянной, первой, третьей гармоник. Ток каждой составляющей ( $I^{(0)}$ ,  $I^{(1)}$ ,  $I^{(3)}$ ) замыкается по ветви с наименьшим («нулевым») сопротивлением и измеряется амперметром.

#### 18.4. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

336. Построить графически кривую несинусоидального напряжения

$$u = 16 \left( \sin \omega t - \frac{1}{9} \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\omega t - \frac{1}{49} \sin 7\omega t \right).$$

337. Построить графически кривую несинусоидального тока

$$i = 13,4 \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \frac{1}{7} \sin 7\omega t \right).$$

338. Найти мгновенное значение тока в конденсаторе, емкостное со-

противление которого для первой гармоники 30 Ом. Напряжение на конденсаторе (в вольтах)

$$u = 100\sqrt{2}\sin\omega t + 60\sqrt{2}\sin 3\omega t.$$

339. Ток в индуктивности (в амперах)

$$i = 21\sqrt{2}\sin(\omega t - 90^\circ) + 3,3\sqrt{2}\sin(3\omega t - 90^\circ).$$

Найти мгновенное значение напряжения на индуктивности, если  $L=31,8$  мГн, частота первой гармоники  $f=50$  Гц.

340. К катушке, параметры которой  $R=10$  Ом и  $L=30$  мГн, подведено несинусоидальное напряжение (в вольтах)

$$u = 120\sqrt{2}\sin(314t + 45^\circ) + 60\sqrt{2}\sin 942t.$$

Найти мгновенное значение тока в катушке и построить его график.

341. Цепь из последовательно включенных сопротивления  $R=10$  Ом и конденсатора  $C=11,8$  мкФ включена под напряжение (в вольтах)

$$u = 50 + 100\sin\omega t + 30\sin(3\omega t - \pi/2) + 50\sin(5\omega t + \pi/4).$$

Найти мгновенное значение тока и активную мощность. Частота первой гармоники 50 Гц.

342. К последовательной цепи с параметрами  $R=20$  Ом,  $C=11,8$  мкФ,  $L=95,5$  мГн подведено напряжение (в вольтах)

$$u = 200\sin(\omega t - 45^\circ) + 50\sin(3\omega t - 90^\circ) + 50\sin 5\omega t.$$

Определить мгновенное значение напряжения на активном сопротивлении, вычислить действующие значения тока и напряжения на вы-

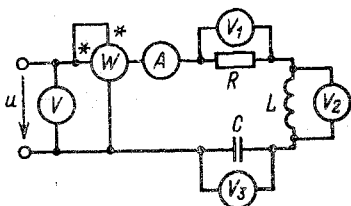


Рис. 18.8. К задаче 343

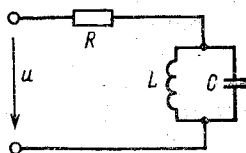


Рис. 18.9. К задаче 345

водах, активную мощность и коэффициент мощности, если  $\omega=314$  рад/с.

343. На выводах цепи рис. 18.8 напряжение (в вольтах)  $u = 200\sqrt{2}\sin\omega t + 70\sqrt{2}\sin 3\omega t$ , где  $\omega=314$  рад/с.

Определить показания приборов, показанных на схеме, если параметры цепи:  $R=10$  Ом;  $L=31,8$  мГн,  $C=106$  мкФ.

344. Резистор  $R=100$  Ом и конденсатор  $C=11,8$  мкФ присоединены

параллельно к источнику с напряжением (в вольтах)

$$u = 100 + 100 \sin 314t + 50 \sin 942t.$$

Найти мгновенное значение общего тока и вычислить его действующее значение.

345. На выводах цепи рис. 18.9 действует напряжение (в вольтах)  $u = 5 + 5 \sin \omega t + 3 \sin 3\omega t$ . Для первой гармоники  $X_L = 50$  Ом;  $X_C = 450$  Ом. Активное сопротивление  $R = 10$  Ом. Определить мгновенное значение общего тока.

346. Линейное напряжение генератора при соединении обмоток в звезду равно 376 В, а при соединении обмоток в треугольник суммарная ЭДС в контуре равна 97,5 В. Вычислить действующее значение фазной ЭДС, если она содержит первую и третью гармоники.

347. В цепи рис. 18.10 определить показания амперметров и вольтметров (измеряют действующие значения), если  $e = 100 + 50 \sqrt{2} \sin \omega t$  В, и  $1/\omega L = \omega C = 0,1$  См.

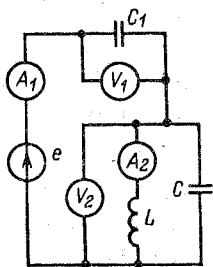


Рис. 18.10. К задаче 347

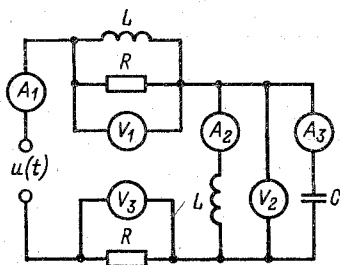


Рис. 18.11. К задаче 348

348. Определить показания измерительных приборов в цепи рис. 18.11, если  $u(t) = 20 + 20 \sin 5\omega t$  и  $R = 10$  Ом;  $\omega L = 2$  Ом;  $1/\omega C = 50$  Ом.

## 18.5. ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ. 18

336. Кривая по форме близка к треугольнику, ее максимальное значение приблизительно равно 18 В.

337. Кривая по форме близка к прямоугольнику, ее максимальное значение приблизительно равно 10 А.

338.  $3,3 \sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) + 6 \sqrt{2} \sin(3\omega t + 90^\circ)$  А.

339.  $210 \sqrt{2} \sin \omega t + 99 \sqrt{2} \sin 3\omega t$  В.

340.  $12,4 \sin(314t + 2^\circ) + 2,8 \sin(942t - 71^\circ)$  А.

341.  $0,37 \sin(\omega t + 88^\circ) + 0,33 \sin(3\omega t - 6^\circ 30') + 0,91 \sin(5\omega t + 124^\circ 30')$  А;  
5,2 В.

342.  $16,7\sin(\omega t+40^\circ)+50\sin(3\omega t-90^\circ)+4,6\sin(5\omega t-84^\circ30')$  В;  
 1,86 А; 149 В; 81 Вт; 0,294.  
 343. 9,5 А;  $U=212$  В;  $U_1=95$  В;  $U_2=130$  В;  $U_3=276,8$  В; 907 Вт.  
 344.  $1+1,06\sin(\omega t+20^\circ)+0,742\sin(3\omega t+48^\circ)$  А; 1,15 А.  
 345.  $0,5+0,088\sin(\omega t-80^\circ)$  А.  
 346. 220 В.  
 347. 0; 5 А; 100 В; 50 В.  
 348. 2 А; 2,43 А; 1,41 А; 0; 14,1 В; 20 В.

## Глава девятнадцатая

### НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

#### 19.1. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

##### Условия задачи

Два терморезистора (полупроводниковые элементы с большим температурным коэффициентом сопротивления), имеющие вольт-амперные характеристики  $T1$  и  $T2$  (рис. 19.1), соединены последовательно (рис. 19.2). Определить

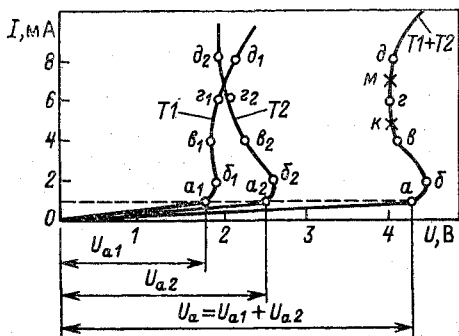


Рис. 19.1. Вольт-амперные характеристики терморезисторов

зависимость сопротивления терморезистора  $T1$  от тока, пределы изменения напряжений на каждом терморезисторе и на выводах  $AB$  (рис. 19.2) при возможном изменении тока цепи от 1 до 8 мА.

## Решение задачи

1. Определение зависимости сопротивления от тока. В задачах предыдущих глав предполагалось, что сопротивление каждого потребителя постоянно (не зависит от проходящего по нему тока). Такие сопротивления называются линейными. Вольт-амперная характеристика

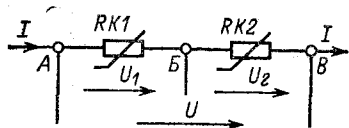


Рис. 19.2. Последовательное соединение терморезисторов

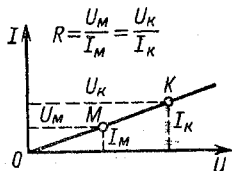


Рис. 19.3. Вольт-амперная характеристика линейного элемента

тика линейного сопротивления изображается графически прямой линией, выходящей из начала координат (рис. 19.3), так как для всех точек прямой отношение напряжения к току имеет одно и то же значение.

Легко заметить, что вольт-амперная характеристика, например, терморезистора  $T1$  (рис. 19.1) содержит линейный участок ( $Oa_1$ ). Поэтому при изменении тока от 0 до 1 мА (точка  $a_1$  характеристики) сопротивление терморезистора постоянно:

$$R_{T1} = \frac{U_{a1}}{I_{a1}} = \frac{1,75 \text{ В}}{1 \cdot 10^{-3} \text{ А}} = 1750 \text{ Ом} = 1,75 \text{ кОм},$$

т. е. на этом участке терморезистор является линейным сопротивлением.

Однако при дальнейшем увеличении тока вольт-амперная характеристика резко отклоняется от первоначальной прямой (участок  $a_1d_1$  на рис. 19.1, где ток больше 1 мА) и проходит приблизительно параллельно оси тока. Это означает, что в формуле для сопротивления терморезистора  $R_T = U/I$  растет знаменатель при мало изменяющемся числителе. Поэтому с ростом тока  $I$  сопротивление  $R_T$  уменьшается.

Как же построить зависимость  $R_T(I)$ ?

По вольт-амперной характеристике  $T1$  (рис. 19.1) для нескольких ее точек находим отношения напряжения к току, которые выражают сопротивления терморезистора в этих точках, и записываем полученные значения в табл. 19.1. По

Точка вольт-амперной характеристики	Ток $I$ , мА	Напряжение $U$ , В	Сопротивление $R_{T1}$ , кОм
$a_1$	1	1,75	1,75
$b_1$	2	1,90	0,95
$c_1$	4	1,85	0,46
$z_1$	6	1,95	0,325
$d_1$	8	2,15	0,27

этим данным строим график зависимости  $R_{T1}(I)$  (рис. 19.4).

Для удобства сравнения полученного графика с вольт-амперной характеристикой  $T1$  (рис. 19.1) соответствующие точки на графике и характеристике обозначены одинаково.

Итак, сопротивление нелинейного элемента непостоянно и определяется зависимостью  $R_T(I)$  или  $R_T(U)$ .

2. Определение пределов изменения напряжения на терморезисторах. Для терморезистора  $RK1$  можно воспользоваться данными табл. 19.1; из таблицы находим, что при изменении тока от 1 до 8 мА напряжение увеличивается от  $U_{a1}=1,75$  В до  $U_{d1}=2,15$  В. Для терморезистора  $RK2$  по его вольт-амперной характеристике (рис. 19.1) получим предельные значения напряжений  $U_{b2}=2,6$  В и  $U_{z2}=1,9$  В.

3. Построение вольт-амперной характеристики для двух последовательно соединенных терморезисторов. Зависимость напряжения на выводах  $AB$  (рис. 19.2) от тока  $I$  выражает вольт-амперную характеристику участка  $AB$ , т. е. двух последовательно соединенных нелинейных элементов. Как ее построить?

Для этого нужно воспользоваться свойствами последовательного соединения: напряжение на выводах  $AB$  (рис. 19.2) равно сумме напряжений на участках  $AB$  и  $BB$ , или  $U=U_1+U_2$ . В таком случае по вольт-амперным характе-

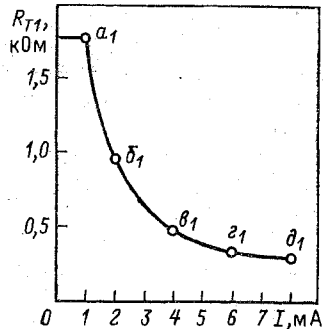


Рис. 19.4. График зависимости сопротивления терморезистора от тока

ристикам терморезисторов  $RK1$  и  $RK2$  (рис. 19.1) можно, например, при токе 1 мА определить общее напряжение на двух терморезисторах:  $U_a = U_{a1} + U_{a2}$ . Точка  $a$  (рис. 19.1), абсцисса которой равна сумме абсцисс точек  $a_1$  и  $a_2$ , принадлежит суммарной вольт-амперной характеристике. Продолжая дальше складывать абсциссы точек  $b_1$  и  $b_2$  (при токе 2 мА),  $v_1$  и  $v_2$  (при токе 4 мА) и т. д., получаем точки  $b$ ,  $v$  и т. д. суммарной вольт-амперной характеристики.

*Итак, суммарная характеристика последовательного соединения может быть построена графическим сложением напряжений на терморезисторах при одинаковых токах.*

По суммарной вольт-амперной характеристике (рис. 19.1) находим, что напряжение на участке  $AB$  (рис. 19.2) при изменении тока от 1 до 8 мА изменяется в пределах от максимального значения  $U_b$  до минимального  $U_e$ :

$$\Delta U = U_b - U_e = 4,45 - 4 = 0,45 \text{ В.}$$

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Можно ли заменить последовательно соединенные нелинейные сопротивления одним эквивалентным сопротивлением? Получив суммарную вольт-амперную характеристику ( $T1 + T2$ ), приведенную на рис. 19.1, можно построить график зависимости сопротивления от тока для всего участка  $AB$  (рис. 19.2), так же как это было выполнено в задаче для терморезистора  $RK1$ . График  $R_{AB}(I)$  характеризует изменение эквивалентного нелинейного сопротивления, заменяющего два последовательно соединенных.

График  $R_{AB}(I)$  можно построить и сложением ординат графиков  $R_T(I)$  обоих терморезисторов.

2. Какой ток будет в цепи терморезисторов, если участок  $AB$  (рис. 19.2) присоединить к выводам источника с напряжением 4 В?

По вольт-амперной характеристике ( $T1 + T2$ ) на рис. 19.1 можно не только определить напряжение на выводах участка  $AB$  по заданному току, но и ток по заданному напряжению. В данном случае участок  $KM$  характеристики почти параллелен оси тока, поэтому малейшие колебания напряжения источника около значения 4 В приведут к резким изменениям тока в цепи (в пределах 5—7 мА).

3. В каком режиме питания на участке  $AB$  будет стабилизированное напряжение? Участок  $AB$  (рис. 19.2) следует питать от источника с внутренним сопротивлением  $R_{вт} \gg R_{AB}$ , например подключив

обычный источник питания с относительно большим последовательно-включенным сопротивлением. При этом возможные колебания тока в цепи (участок  $KM$ ) очень мало скажутся на напряжении  $U_{AB}$ , т. е. будет обеспечена высокая стабильность напряжения на участке  $AB$ .

Для стабилизации напряжения в цепях постоянного тока обычно применяют нелинейные элементы с вольт-амперными характеристиками, имеющими участки, приблизительно параллельные оси тока (стабилитроны).

4. Для каких целей применяются терморезисторы? Температурный коэффициент сопротивления у терморезисторов многих типов приблизительно в 10 раз больше, чем у металлов, и имеет отрицательный знак. Поэтому они широко применяются в устройствах для регулирования, измерения и компенсации влияния температуры. Так, у вольтметра с ростом температуры появляется погрешность вследствие увеличения сопротивления его цепи (рамки и добавочного сопротивления). Заменяв часть добавочного сопротивления вольтметра терморезистором, у которого с ростом температуры сопротивление уменьшается, удастся резко снизить (в 10—15 раз) температурную погрешность вольтметра.

## 19.2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО И НЕЛИНЕЙНОГО ЭЛЕМЕНТОВ

### Условие задачи

Цепь рис. 19.5, *a* состоит из последовательно включенных ЭДС  $E_a = 300$  В; линейного сопротивления  $R_a = 115$  кОм и участка  $AK$  (анод — катод) электронного триода. Ток цепи (и он же анодный ток триода)  $I_a$  образует между анодом и катодом напряжение  $U_a$  (анодное напряжение). Между сеткой  $S$  и катодом  $K$  триода включена ЭДС  $E_c = 1$  В, при которой вольт-амперная характеристика (зависимость анодного тока  $I_a$  от анодного напряжения  $U_a$ ) определяется графиком  $HЭ$  (рис. 19.6). Требуется:

- 1) определить ток  $I_a$ , напряжения  $U_a$  и  $U_R$ ;
- 2) заменить нелинейный элемент (триод) эквивалентным линейным участком и определить ток цепи  $I_a$ , обеспечивающий напряжение  $U_a$  в пределах 140—170 В.

### Решение задачи

1. Метод решения. Заменяв триод (участок  $AK$ , рис. 19.5, *a*) нелинейным элементом  $HЭ$ , получим схему за-



мещения заданной цепи (рис. 19.5, б), состоящую из последовательного соединения линейного  $R_a$  и нелинейного  $HЭ$  сопротивлений. Вольт-амперная характеристика  $HЭ$  известна (рис. 19.6), а для линейного сопротивления  $R_a = 115 \text{ кОм}$  ее легко построить (далее будет показано).

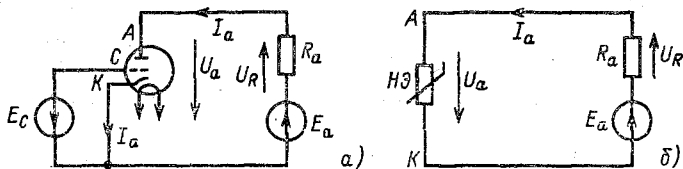


Рис. 19.5. Последовательное соединение линейного сопротивления и триода (а), схема замещения цепи (б)

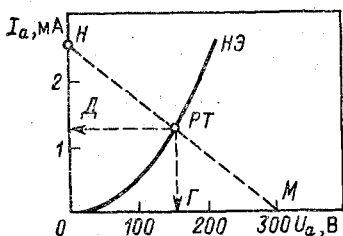


Рис. 19.6. Пересечение вольт-амперной характеристики нелинейного элемента нагрузочной характеристикой

Таким образом, для решения данной задачи можно полностью воспользоваться известными методами, приведенными в § 19.1 (см. также доп. вопрос 1 этого параграфа).

Зачем же здесь рассматривается аналогичная (уже изученная) задача? В данной цепи (рис. 19.5) в отличие от предыдущей (рис. 19.2) один из элементов является линейным сопротивлением. Такие цепи весьма распространены на практике, и их расчет представляет особый интерес. Кроме того, и это главное, существует более простой метод расчета последовательного соединения линейного и нелинейного элементов. Он основан на построении так называемой нагрузочной характеристики.

Покажем этот метод на примере заданной цепи (рис. 19.5, б), для которой

$$R_a I_a = U_R = E_a - U_a,$$

откуда

$$I_a = E_a/R_a - U_a/R_a.$$

Обозначив постоянные величины  $E_a/R_a = a$  и  $1/R_a = b$ ,

получим уравнение прямой

$$I_a = a - bU_a.$$

Оказывается, имеем две зависимости для тока  $I_a$  от напряжения  $U_a$ ; одна задана графиком  $HЭ$  (рис. 19.6) и определяется только свойствами нелинейного элемента (триода), другая — уравнением прямой  $I_a = a - bU_a$  и выражает свойства цепи из последовательно соединенных  $R_a$  и  $HЭ$ . Поэтому совместное решение двух указанных зависимостей позволит найти значения тока  $I_a$  и напряжения  $U_a$ , удовлетворяющие как свойствам  $HЭ$  (триода), так и свойствам цепи рис. 19.5, б.

Требуемое решение обычно выполняется графически, так как одна из зависимостей уже задана графиком  $HЭ$  (рис. 19.6). Чтобы построить другой график (прямую), выберем две характерные точки: а)  $I_a = 0$  или  $0 = a - bU_a$ , откуда

$$U_a = a/b = (E_a/R_a) R_a = E_a,$$

т. е. имеем точку  $M$  (рис. 19.7) с координатами  $U_a = E_a$ ,  $I_a = 0$ ; б)  $U_a = 0$  или  $I_a = a = E_a/R_a$ , т. е. точку  $H$  (рис. 19.7) с координатами  $U_a = 0$ ;  $I_a = E_a/R_a$ .

Итак, искомую прямую, называемую нагрузочной характеристикой, можно построить по точкам ее пересечения с осями напряжения и тока (точки  $M$  и  $H$ , рис. 19.7).

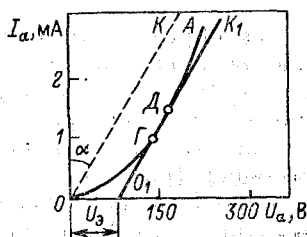
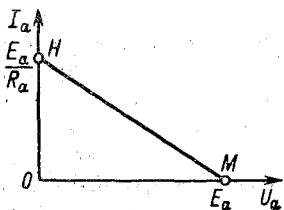


Рис. 19.7. Нагрузочная характеристика

Рис. 19.8. Линейризация участка ГД вольт-амперной характеристики ОГДА

2. Вычисление тока и напряжений. На рис. 19.6 в дополнение к графику  $HЭ$  построим другую зависимость  $I_a$  от  $U_a$ , т. е. нагрузочную характеристику  $MH$ . Ее точка  $M$  определяется напряжением  $U_a = E_a = 300$  В, а точка  $H$  — значением  $I_a = E_a/R_a = 300/115 \cdot 10^{-3} = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 2,6 \text{ мА}$ .

Прямая  $MH$  пересекает характеристику нелинейного

элемента в точке  $PT$  (рабочая точка), которая и является графическим решением двух рассмотренных зависимостей. Иначе говоря, точка  $PT$  определяет единственно возможный режим цепи (рис. 19.5).

Этот режим определяется током  $I_a = 1,3$  мА (рис. 19.6, ордината  $OD$  точки  $PT$ ) и напряжением  $U_a = 160$  В (рис. 19.6, абсцисса  $OG$  точки  $PT$ ).

Напряжение на линейном сопротивлении

$$U_R = E_a - U_a = 300 - 160 = 140 \text{ В}$$

определяется отрезком  $MG$  (рис. 19.6).

Так как решение задачи найдено на основе пересечения вольт-амперной и нагрузочной характеристик, то использованный метод часто называют «методом пересечений».

3. Замена нелинейного элемента эквивалентным линейным участком цепи. Прежде всего найдем участок вольт-амперной характеристики, подлежащий линеаризации. Для этого характеристику  $HЭ$  (рис. 19.6) перенесем на рис. 19.8 (кривая  $OGDA$ ) и обозначим участок  $ГД$ , соответствующий заданным (по условию задачи) напряжениям  $U_a = 140 \div 170$  В.

Затем заменим участок кривой  $ГД$  отрезком прямой  $ГД$  и найдем параметры последнего. В этих целях через точки  $Г$  и  $Д$  проведем прямую  $O_1K_1$  и сместим ее в начало координат (прямая  $OK$ ).

Все точки прямой  $OK$  (рис. 19.8) имеют одинаковое отношение  $U_a/I_a = R_0$ , поэтому его можно найти для одной любой точки. Так, при  $I_a = 2$  мА имеем  $U_a = 120$  В и

$$R_0 = U_a/I_a = 120/(2 \cdot 10^{-3}) = 60 \text{ кОм.}$$

Следовательно, прямая  $OK$  является вольт-амперной характеристикой линейного сопротивления  $R_0 = 60$  кОм.

Абсциссы соответствующих точек прямых  $OK$  и  $O_1K_1$  (рис. 19.8) смещены на постоянное напряжение  $U_0 = E_0 = 75$  В, определяемое отрезком  $OO_1$  (рис. 19.8). Поэтому если прямая  $OK$  определяется уравнением  $U_a = R_0 I_a$ , то прямая  $O_1K_1$  — уравнением

$$U_a = R_0 I_a + E_0,$$

или

$$I_a = (U_a - E_0)/R_0.$$

Последнему уравнению соответствует участок цепи  $AK$  рис. 19.9, который эквивалентен (в заданных условиях) участку  $AK$  рис. 19.5, б.

Определим ток  $I_a$  в цепи рис. 19.5, б, если вместо  $HЭ$  включен участок  $AK$  по рис. 19.9. При этом

$$I_a = \frac{E_a - E_э}{R_a + R_э} = \frac{300 - 75}{(115 + 60) \cdot 10^3} = 1,28 \text{ мА},$$

т. е. результат очень близок к ранее найденному  $I_a = 1,3 \text{ мА}$ . Погрешность менее 2 % является весьма малой при графических расчетах.

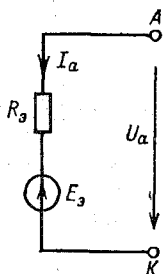


Рис. 19.9. Электродвижущая сила и сопротивление, эквивалентные участку вольт-амперной характеристики

Итак, если нелинейный элемент работает на небольшом участке своей вольт-амперной характеристики и этот участок с известным приближением может быть заменен прямой линией, то  $HЭ$  может быть представлен на схеме замещения эквивалентными сопротивлением и ЭДС.

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Как решить задачу методом сложения характеристик триода и сопротивления  $R_a$ ? На рис. 19.10 построены вольт-амперная характеристика триода 1 (перенесена с рис. 19.6 кривая  $HЭ$ ) и прямая 2, являющаяся характеристикой линейного сопротивления  $R_a$ . Эта прямая построена по уравнению  $I_a = U_a/R_a$  методами, показанными выше (при анализе прямой  $OK$ , рис. 19.8).

Сложением абсцисс соответствующих точек кривой 1 и прямой 2 получена кривая 3 (рис. 19.10), являющаяся результирующей вольт-амперной характеристикой соединения  $HЭ$  и  $R_a$  (рис. 19.5, б).

Воспользуемся кривой 3 (рис. 19.10) и определим при  $E_a = 300 \text{ В}$  ток  $I_a = 1,3 \text{ мА}$ , который был уже ранее найден для рассматриваемой цепи (рис. 19.5, б).

2. Имеется ли взаимосвязь между характеристиками сопротивления  $R_a$  и нагрузочной? Предлагаем читателям самостоятельно убедиться по

рис. 19.10, что углы  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ , т. е. нагрузочная прямая 4 (перенесена сюда с рис. 19.6) представляет собой зеркальное изображение прямой 2 относительно вертикальной оси, проведенной через точку  $U = E_a = 300$  В.

3. Как определить угол наклона нагрузочной характеристики? В ряде случаев оказывается удобным построение нагрузочной характеристики 4 (рис. 19.10) или прямой 2 (рис. 19.10) по углу  $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ .

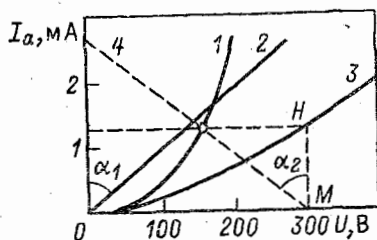


Рис. 19.10. Построение суммарной вольт-амперной характеристики (3) сложением абсцисс характеристик линейного сопротивления (2) и триода (1)

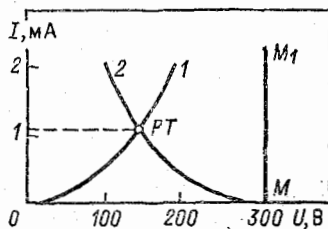


Рис. 19.11. Определение режима цепи из двух одинаковых нелинейных элементов пересечением вольт-амперной характеристики (1) и ее зеркального изображения (2)

Этот угол можно найти по

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{U_R}{M_U} : \frac{I}{M_I} = \frac{M_I}{M_U} R_a,$$

где  $M_U$ ,  $M_I$  — масштабы по осям абсцисс (напряжения) и ординат (тока) на рис. 19.10. В нашем случае выбраны масштабы  $M_U = 90$  В/см и  $M_I = 10^{-3}$  А/см, поэтому

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{10^{-3}}{90} R_a = \frac{10^{-3}}{90} 115 \cdot 10^3 = 1,28 \text{ и } \alpha = 51^\circ.$$

Использование угла  $\alpha$  для построения нагрузочной характеристики особенно удобно в тех случаях, когда отношение  $E_a/R_a$  настолько велико, что точка  $H$  (рис. 19.7) выходит за пределы графика.

Итак, в зависимости от линейного сопротивления  $R_a$  нагрузочную характеристику строят либо по углу наклона к оси тока, либо по току в режиме короткого замыкания нелинейного элемента.

4. Какими методами можно воспользо-

ваться для расчета последовательного соединения двух нелинейных элементов? Если в цепи рис. 19.5, б заменить  $R_a$  нелинейным элементом, то расчет цепи можно выполнить как методом сложения вольт-амперных характеристик (см. § 19.1 и доп. вопрос 1 этого параграфа), так и рассмотренным в этой задаче методом пересечений. Действительно, примем вольт-амперные характеристики обоих нелинейных элементов одинаковыми и соответствующими графику  $HЭ$  (рис. 19.6). Перенеся этот график на рис. 19.11 (кривая 1) и построив его зеркальное изображение относительно оси  $y$ , перемещенной в положение  $MM_1$  (кривая 2 на рис. 19.11), получим рабочую точку  $PT$  (как пересечение кривых 1 и 2). Ордината точки  $PT$  определяет ток рассматриваемой цепи  $I=1,1$  мА. Абсцисса точки  $PT$  определит напряжение на первом нелинейном элементе.

5. В каких случаях целесообразно пользоваться методом сложения характеристик? Если в нелинейной цепи с последовательным соединением элементов не задана ЭДС источника питания, как это, например, имело место в § 19.1, то применение метода пересечений весьма затруднено и более быстрое решение задачи дает метод сложения вольт-амперных характеристик.

6. Каковы достоинства и недостатки метода линеаризации участка вольт-амперной характеристики? Замена нелинейного элемента эквивалентным линейным сопротивлением и ЭДС позволяет преобразовать нелинейную цепь в линейную, для которой существуют достаточно простые аналитические методы расчета. Главное преимущество аналитических методов перед графическим заключается в возможности получения общего решения задачи.

Однако применение метода линеаризации вольт-амперной характеристики  $HЭ$  связано с затруднениями: нужно либо заранее знать рабочий участок характеристики, либо разделить ее на несколько линейных отрезков.

7. Зачем задана ЭДС  $E_c=1$  В, действующая между сеткой и катодом триода? Триод относится к числу так называемых управляемых  $HЭ$ . Он имеет две цепи: выходную (с током  $I_a$ ) и управляющую (между сеткой— катодом с ЭДС  $E_c$ ). Выходная, или основная, цепь имеет различные вольт-амперные характеристики в зависимости от управляющей ЭДС  $E_c$ . В задаче использован реальный

триод типа 6Н2П, для которого имеется (в справочниках) семейство выходных вольт-амперных характеристик для различных  $E_c$ . Выбрана одна из характеристик при  $E_c = 1$  В.

### 19.3. ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

#### Условие задачи

В цепь рис. 19.12 с номинальным током  $I = I_H = 600$  мА включены соединенные параллельно нелинейный элемент (бареттер) с вольт-амперной характеристикой  $I_G(U)$  (рис. 19.13) и линейное сопротивление  $R = 50$  Ом. Определить пределы изменения напряжения на бареттере при колебаниях общего тока цепи  $I$  на  $(-20 \div +10)\%$  номинального значения.

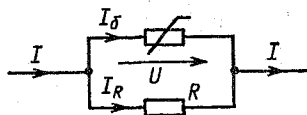


Рис. 19.12. Параллельное соединение линейного сопротивления и нелинейного элемента (бареттера)

#### Решение задачи

1. Построение суммарной вольт-амперной характеристики. Для последовательного соединения нелинейных элементов (§ 19.1) суммарная вольт-амперная характеристика была построена по условию равенства общего напряжения сумме напряжений на нелинейных элементах, т. е.  $U_a = U_{a1} + U_{a2}$  (рис. 19.1). Этот же метод использован в § 19.2 (доп. вопрос 1) для последовательного соединения нелинейного и линейного элементов.

При параллельном соединении, очевидно, можно получить общую вольт-амперную характеристику по условию равенства общего тока и суммы токов ветвей, т. е. в нашем случае (рис. 19.13)  $I = I_G + I_R$ .

Построим сначала вольт-амперную характеристику сопротивления  $R$ , проведя прямую  $I_R(U)$  из начала координат (рис. 19.13), например через точку  $a_2$  с координатами  $U_{a2} = 10$  В и  $I_{a2} = U_{a2}/R = 10/50 = 0,2$  А = 200 мА.

Общая вольт-амперная характеристика  $I(U)$  на рис. 19.13 получена сложением ординат (токов) кривых  $I_R(U)$  и  $I_G(U)$  при одинаковых абсциссах (напряжениях).

Например, при напряжении  $U = 12$  В точка  $b_3$  (рис. 19.13) получена сложением ординат точки  $b_3$  и точки  $a_3$  ( $I_{b3} = I_{G3} + I_{a3}$ ). Аналогичным образом построены точки  $b_2$ ,  $b_1$  и  $b$ .

2. Определение пределов изменения напряжения на бареттере. Ток цепи изменяется (по условию задачи) от значения  $I_1=0,8 I_H=0,8 \cdot 600=480$  мА до  $I_2=1,1 \cdot I_H=1,1 \cdot 600=660$  мА, или на  $\Delta I=I_2-I_1=660-$

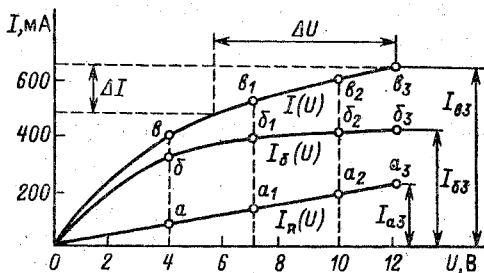


Рис. 19.13. Построение суммарной вольт-амперной характеристики ( $Oв_3$ ) сложением ординат характеристики линейного сопротивления ( $Oа_3$ ) и бареттера ( $Oб_3$ )

—480=180 мА. Обозначив на рис. 19.13  $I_1, I_2$  и  $\Delta I$ , найдем, используя характеристику  $I(U)$ , пределы изменения напряжения  $\Delta U=U_2-U_1=11,6-5,6=6$  В.

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Как решить обратную задачу: по заданному напряжению  $U$  определить общий ток  $I$ ? На первый взгляд может показаться, что обратная задача решается также построением суммарной вольт-амперной характеристики  $I(U)$  (рис. 19.13), по которой, имея заданное  $U$  или  $\Delta U$ , определяют искомое  $I$  или  $\Delta I$ . Хотя такой путь решения и возможен, но он сложен, так как нет необходимости (для обратной задачи) строить суммарную вольт-амперную характеристику. Действительно, по заданному  $U$  и характеристике  $I_б(U)$  определяем ток бареттера  $I_б$ , а по закону Ома — ток в сопротивлении  $I_R=U/R$ . Затем находим общий ток  $I=I_б+I_R$ .

Итак, суммарная вольт-амперная характеристика параллельного соединения нелинейных элементов необходима для расчета цепи при ее питании от источника тока. Если параллельная цепь питается от источника напряжения, то ее расчет можно выполнить без построения суммарной характеристики.

2. Влияет ли на метод расчета число параллельно соединенных элементов? Метод



расчета зависит от способа питания цепи (см. предыдущий вопрос), а не от числа параллельно соединенных элементов. Например, если бы цепь рис. 19.12 состояла из трех параллельно включенных элементов с заданными вольт-амперными характеристиками, то для получения зависимости  $I(U)$  (рис. 19.13) потребовалось бы сложить ординаты соответствующих точек трех заданных вольт-амперных характеристик. Если же такое параллельное соединение (из трех элементов) присоединить к источнику напряжения, то расчет цепи выполняется без построения суммарной характеристики.

#### 19.4. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО-ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ (СМЕШАННОЕ) СОЕДИНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ И ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

##### Условие задачи

Для обеспечения стабильного напряжения на сопротивлении нагрузки  $R_H = 12,5$  кОм его присоединили к кремниевому опорному диоду (полупроводниковому стабилизатору напряжения)  $VD$  (рис. 19.14) и подключили через сопротивление  $R = 1160$  Ом к источнику питания.

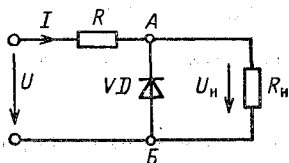


Рис. 19.14. Присоединение опорного диода  $VD$  и сопротивления нагрузки  $R_H$  к напряжению  $U$  через сопротивление  $R$

Определить пределы изменения напряжения нагрузки  $U_H$ , если напряжение источника питания  $U = 12$  В изменяется в пределах  $\pm 10\%$ . Вольт-амперная характеристика диода задана (кривая  $I$  на рис. 19.15).

##### Решение задачи

1. Построение суммарной вольт-амперной характеристики. Получение суммарной вольт-амперной характеристики разветвленной нелинейной цепи с одним источником питания равнозначно действию свертывания (упрощения) схемы цепи. Действительно, суммарная характеристика выражает свойства некоторого (одного) нелинейного элемента, эквивалентного всей внешней цепи.

Метод упрощения схемы смешанного соединения линейных сопротивлений хорошо известен. Аналогично поступа-

ют и в нелинейной цепи. Это означает, что в цепи рис. 19.14 прежде всего построим суммарную вольт-амперную характеристику для участка  $AB$  и этим как бы заменим диод  $VD$  и сопротивление  $R_n$  одним эквивалентным нелинейным элементом. Затем, рассмотрев последовательное соединение сопротивления  $R$  и участка  $AB$  (его суммарную характеристику

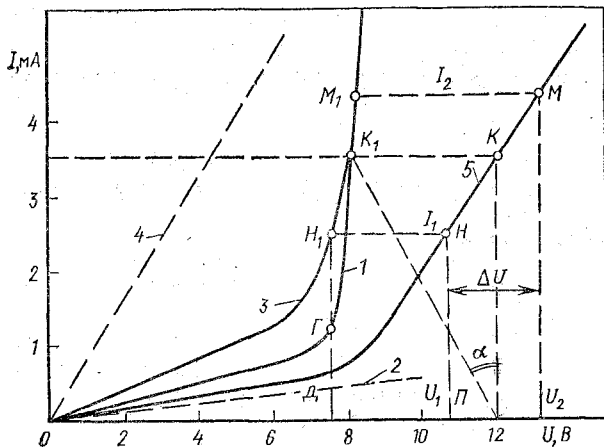


Рис. 19.15. Вольт-амперные характеристики отдельных элементов и всего соединения цепи рис. 19.14

тику), получим эквивалентную вольт-амперную характеристику всего внешнего участка цепи.

Чтобы выполнить указанные преобразования, воспользуемся методами построения суммарных вольт-амперных характеристик для параллельного и последовательного соединений (см. § 19.3 и 19.1).

Для участка  $AB$  (рис. 19.14) зависимость  $I=f(U_n)$  изображается кривой 3 (рис. 19.15), полученной сложением ординат соответствующих точек вольт-амперных характеристик диода (кривая 1) и сопротивления  $R_n$  (прямая 2).

Для последовательного соединения сопротивления  $R$  и участка  $AB$  (рис. 19.14) зависимость  $I=f(U)$  изображается кривой 5 (рис. 19.15), полученной сложением абсцисс соответствующих точек кривой 3 и прямой 4 (вольт-амперная характеристика сопротивления  $R$ ). Кривая 5 является суммарной вольт-амперной характеристикой всего внешнего участка цепи рис. 19.14.

2. Определение пределов изменения на-

пряжения  $U_H$ . По условию задачи напряжение  $U$  изменяется на  $\pm 10\%$ , т. е. от  $U_1=0,9 U=0,9 \cdot 12=10,8$  В до  $U_2=1,1 U=1,1 \cdot 12=13,2$  В.

При напряжении  $U=U_1=10,8$  В в цепи рис. 19.14 ток  $I$  определяется ординатой точки  $H$  (рис. 19.15), так как кривая 5 выражает зависимость общего тока цепи  $I$  от напряжения на ее выводах  $U$ . Это значение тока  $I=I_1=2,5$  мА.

Имея зависимость  $I=f(U_H)$  (кривая 3) и значение тока  $I=I_1$  (ордината точки  $H$ ), находим, проведя прямую  $HN_1$  параллельно оси  $U$ , напряжение  $U_{H1}=7,7$  В (абсцисса точки  $H_1$ , или отрезок  $OD$  по оси  $U$ ).

Другому предельному значению  $U=U_2=13,2$  В соответствуют на рис. 19.15 точка  $M$  кривой 5 и точка  $M_1$  кривой 3. Их общая ордината (точек  $M$  и  $M_1$ ) определяет ток цепи  $I=I_2=4,3$  мА, а абсцисса точки  $M_1$  — напряжение на нагрузке  $U_H=U_{H2}=8,1$  В. Среднее значение  $U_{H,ср}=7,9$  В.

Изменение напряжения на нагрузке

$$\Delta U_H = U_{H2} - U_{H1} = 8,1 - 7,7 = 0,4 \text{ В,}$$

или

$$\Delta U_{H,ср} = (0,4/7,9) 100\% \approx 5\%.$$

Таким образом, при колебаниях напряжения источника на  $\pm 10\%$  напряжение на нагрузке изменяется только на  $\pm 2,5\%$ , т. е. в 4 раза меньше. Можно получить более высокую стабилизацию (большее отношение  $\Delta U/\Delta U_H$ ) при других режимах цепи рис. 19.14, что будет показано в ответах на дополнительные вопросы к этой задаче.

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Как определить токи диода и нагрузки при напряжении  $U=U_1=10,8$  В? При  $U=U_1$  напряжение участка  $AB$  (рис. 19.14), как было найдено в задаче,  $U_{H1}=7,7$  В (отрезок  $OD$  на рис. 19.15). Этому напряжению соответствует точка  $\Gamma$  (рис. 19.15) вольт-амперной характеристики диода. Ордината точки  $\Gamma$  определяет ток диода  $I_{д1}=1,3$  мА. Ток в сопротивлении  $R_H$ , или ток нагрузки,  $I_{H1}=I_1-I_{д1}=2,5-1,3=1,2$  мА.

2. Можно ли при решении задачи использовать «метод пересечений»? Нелинейный участок цепи  $AB$  (рис. 19.14), имеющий вольт-амперную характеристику 3 (рис. 19.15), соединен последовательно с линейным сопротивлением  $R$ . Напряжение на выводах цепи задано. В таком случае (см. § 19.2) можно отказаться от

построения суммарной вольт-амперной характеристики 5 (рис. 19.15) и воспользоваться нагрузочной характеристикой  $PK_1$  (рис. 19.15), проведенной из точки  $P$  ( $U=12$  В) под углом  $\alpha$  к оси ординат. Учитывая масштабы тока  $M_I = 10^{-3}$  А/см и напряжения  $M_U = 2$  В/см, получаем угол

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{M_I}{M_U} R = \operatorname{arctg} \frac{10^{-3}}{2} 1160 = 35^\circ.$$

Результаты двух методов решения задачи (использование кривой 5 или прямой  $PK_1$ ) совпадают, так как при  $U=12$  В точки  $K$  и  $K_1$  имеют одну и ту же ординату тока  $I=3,5$  мА.

Если из точек  $U_1$  и  $U_2$  (рис. 19.15) провести прямые, параллельные  $PK_1$  (на рис. 19.15 не показаны), то они пройдут через точки  $H_1$  и  $M_1$  (рис. 19.15), определяющие, как известно из решения задачи, режим цепи рис. 19.14 при заданных предельных значениях напряжения  $U=U_1$  и  $U=U_2$ ).

3. Как объяснить большие изменения тока  $I$  при сравнительно малых изменениях напряжения  $U$ ? При решении задачи было найдено, что ток цепи изменяется от  $I_1=2,5$  мА до  $I_2=4,3$  мА, или  $\Delta I = I_2 - I_1 = 4,3 - 2,5 = 1,8$  мА, что составляет

$$(\Delta I / I_{\text{ср}}) 100\% = (1,8 / 3,4) 100 \approx 50\%,$$

где

$$I_{\text{ср}} = (I_1 + I_2) / 2 = (2,5 + 4,3) / 2 = 3,4 \text{ мА.}$$

Оказывается, ток цепи изменяется на  $\pm 25\%$  при изменении общего напряжения только приблизительно на  $\pm 10\%$ . Этот результат понятен: во-первых, в нелинейной цепи нет прямой пропорциональности между током и напряжением и, во-вторых, в данной цепи (рис. 19.14) большие изменения тока  $I$  и напряжения на сопротивлении  $U_R = RI$ , превышающие колебания напряжения  $U$ , обеспечивают сравнительно малые изменения напряжения  $U_H = U - U_R$ , что необходимо для эффекта стабилизации напряжения  $U_H$ .

4. Как влияет значение сопротивления  $R_H$  на режим цепи? С увеличением сопротивления  $R_H$  (рис. 19.14) его вольт-амперная характеристика (прямая 2 на рис. 19.15) располагается более полого (уменьшается угол ее наклона к оси  $U$ ). Так как кривая 3 (рис. 19.15) построена по сумме ординат соответствующих точек прямой 2 и кривой 1, то с уменьшением ординат точек пря-

мой 2 кривая 3 приблизится к кривой 1. Это означает, что график зависимости  $I=f(U_n)$  (кривая 3) будет более крутым на рабочем участке  $H_1M_1$  (рис. 19.15) и стабилизация напряжения улучшится.

5. Как влияет на стабилизацию напряжения значение сопротивления  $R$ ? Нагрузочная характеристика  $ПК_1$  (рис. 19.15) наклонена к оси  $I$  под углом  $\alpha$ , значение которого (при заданных масштабах графика) зависит только от сопротивления  $R$  (рис. 19.14). Поэтому значение  $R$  выбирается таким образом, чтобы точка  $K_1$  находилась в середине диапазона рабочих токов диода (токи участка вольт-амперной характеристики диода, обеспечивающей стабилизацию напряжения). Заметим, что при  $R=0$  схема рис. 19.14 вовсе не стабилизирует напряжение, так как в этом случае  $U=U_n$  и оба напряжения изменяются одинаково.

### 19.5. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

349. Вольт-амперная характеристика германиевого выпрямителя при прямом включении задана табл. 19.2. Построить график зависимости сопротивления выпрямителя от напряжения (по четырем заданным точкам):

Таблица 19.2

$U, В$	0,5	1,0	1,5	1,8
$I, мА$	7,7	25	120	175

350. Два стабилитрона, вольт-амперные характеристики которых заданы табл. 19.3, включены последовательно. Построить общую вольт-амперную характеристику для двух стабилитронов и определить общее напряжение  $U$  на выводах при токе 18 мА.

Таблица 19.3

$I, мА$	5	10	15	20	25	30
$U_1, В$	74,5	74,6	74,8	75,1	75,5	76,0
$U_2, В$	146,4	146,5	146,7	147,0	147,4	148,0

351. Построить зависимость общего сопротивления от тока двух последовательно включенных стабилитронов из предыдущей задачи.

352. Двухэлектродная лампа с вольт-амперной характеристикой, заданной в табл. 19.4, и линейное сопротивление  $R=4$  кОм присоединены последовательно к источнику питания с напряжением 200 В. Определить ток лампы.

Таблица 19.4

$U$ , В	20	40	80	120	160	200
$I$ , мА	3,5	9	28	56	84	112

353. К цепи из последовательно включенных фотоэлемента и сопротивления  $R=10$  МОм подведено напряжение  $U=300$  В. Вольт-амперная характеристика фотоэлемента задана в табл. 19.5. Определить ток в цепи и напряжения на сопротивлении и фотоэлементе.

Таблица 19.5

$U$ , В	50	100	150	200	250
$I$ , мкА	0,2	0,6	1,4	2,6	5,6

354. В условиях предыдущей задачи определить угол  $\alpha$  наклона нагрузочной характеристики к оси тока, если масштабы оси тока  $M_I=3$  мкА/см и оси напряжения  $M_U=75$  В/см.

355. В условиях задачи 353 определить пределы колебаний напряжения на фотоэлементе при изменении сопротивления  $R$  на  $\pm 20\%$ .

356. От источника с напряжением  $U=300$  В питаются последовательно включенные сопротивление  $R=10$  кОм и трехэлектродная лампа 6Н8. В каких пределах изменяются ток в цепи и напряжение на лампе при изменении сопротивления  $R$  в пределах  $\pm 20\%$ ? Вольт-амперная характеристика лампы задана графиком на рис. 19.16.

357. Лампа накаливания, вольт-амперная характеристика которой задана (табл. 19.5), подключена последовательно с реостатом к источнику питания с напряжением  $U=120$  В. На какое значение сопротивления следует установить реостат, чтобы напряжение на лампе составляло 75 В?

358. Вольт-амперная характеристика бареттера типа 0,3Б-1-7-35 приведена на рис. 19.17. Спрямив участок характеристики при  $16 \leq U \leq 32$  В,

$U, \text{В}$	0	20	40	60	80	100	120
$I, \text{А}$	0	0,2	0,5	0,9	1,4	2,0	2,5

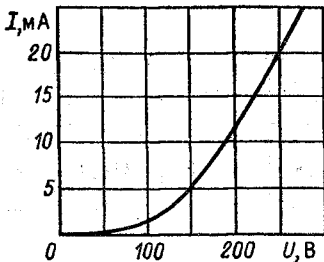


Рис. 19.16. Вольт-амперная характеристика триода 6Н8

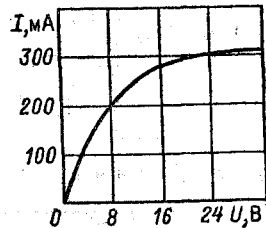


Рис. 19.17. Вольт-амперная характеристика барреттера типа 0,3Б-1-7-35

определить эквивалентные ЭДС и сопротивление линейной схемы замещения барреттера в заданном режиме работы, а также направления тока ветви и эквивалентной ЭДС.

359. Барреттер с вольт-амперной характеристикой (рис. 19.17) и линейное сопротивление  $R=80$  Ом соединены параллельно и включены на постоянное напряжение  $U=16$  В. Определить токи во всех ветвях цепи.

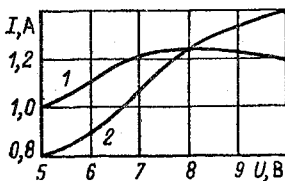


Рис. 19.18. К задаче 360

360. Терморезистор и барреттер, вольт-амперные характеристики которых заданы соответственно кривыми 2 и 1 рис. 19.18, соединены параллельно. Построить суммарную вольт-амперную характеристику соединения.

361. Последовательно с нелинейным участком цепи в задаче 360 включили линейное сопротивление  $R=1,15$  Ом. Определить ток в цепи и напряжения на нелинейном участке и на сопротивлении, если вся цепь питается от источника с напряжением 10 В.

19.6. ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ. 19

349.

$U, В$	0,5	1,0	1,5	1,8
$R, Ом$	65	40	12,5	6,55

350. 221,9 В.

$I, мА$	5	10	15	20	25	30
$U, В$	220,9	221,1	221,5	222,1	222,9	223,9

351.

$I, мА$	5	10	15	20	25	30
$R, кОм$	44,4	22,1	14,8	11,1	8,92	7,46

352. 30 мА.

353.  $5,6 \cdot 10^{-6}$  А; 50 В; 250 В.

354.  $\alpha \approx 22^\circ$ .

355. 240—255 В.

356. 10—12,5 мА; 180—200 В.

357. 36 Ом.

358. 215 В; 800 Ом; согласно.

359. 280 мА; 200 мА; 480 мА.

360.

$I, А$	1,85	1,98	2,3	2,5	2,5	2,6
$U, В$	5	6	7	8	9	10

361. 2,04 А; 7,5 В; 2,5 В.



## МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ ПРИ ПОСТОЯННЫХ МАГНИТОДВИЖУЩИХ СИЛАХ

### 20.1. НЕРАЗВЕТВЛЕННАЯ МАГНИТНАЯ ЦЕПЬ

#### Условие задачи

В магнитопроводе из литой стали, размеры которого в миллиметрах указаны на рис. 20.1, магнитный поток  $\Phi = 7,5 \cdot 10^{-4}$  Вб. Вычислить ток в катушке, имеющей 187 вит-

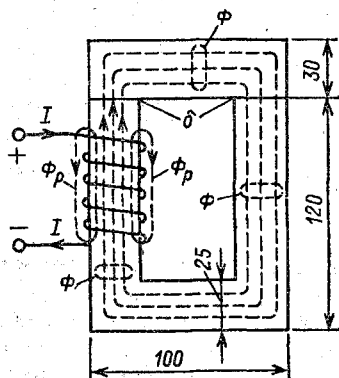


Рис. 20.1. Неразветвленная магнитная цепь

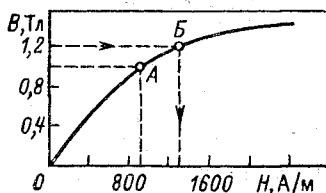


Рис. 20.2. Кривая намагничивания литой стали

ков, магнитную проницаемость стали и сопротивление участков магнитной цепи, если толщина магнитопровода 25 мм и в местах стыка ярма с П-образным магнитопроводом имеются воздушные зазоры  $\delta = 0,25 \text{ мм} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$  каждый.

#### Решение задачи

1. Влияние стального магнитопровода на магнитное поле катушки. При отсутствии стального магнитопровода магнитные линии замыкаются по воздуху непосредственно вокруг катушки.

Введение магнитопровода резко изменяет картину магнитного поля. Сталь, имеющая высокую магнитную проницаемость, создает для магнитного потока путь с гораздо меньшим магнитным сопротивлением, чем воздух, поэтому замыкающийся по стали магнитный поток  $\Phi$  (рис. 20.1) во много раз больше, чем у той же катушки без магнитопровода. Незначительная часть магнитных линий замыкается

по воздуху, образуя поток рассеяния  $\Phi_p$ . Во многих практических случаях сталь магнитной цепи не насыщена (участок *ОБ* кривой намагничивания, рис. 20.2) и магнитный поток  $\Phi$  превосходит в сотни и тысячи раз замыкающийся по воздуху магнитный поток  $\Phi_p$ . Поэтому можно принимать во внимание только поток  $\Phi$ , замыкающийся по стали, пренебрегая потоком рассеяния  $\Phi_p$ .

В таком случае относительно рассматриваемой магнитной цепи можно сделать два важных вывода:

во-первых, длина магнитного пути (магнитных линий) определяется длиной магнитопровода, который как бы превращает короткую катушку, размещенную на сердечнике, в длинную и замкнутую (наподобие тороидальной);

во-вторых, магнитный поток одинаков в любом поперечном сечении рассматриваемого магнитопровода (неразветвленная магнитная цепь).

2. Участки магнитной цепи. При расчете магнитопровод разбивают на участки.

По какому признаку делится магнитная цепь на участки (рис. 20.3)? Участок должен быть выполнен из одного материала, и в пределах участка должна оставаться постоянной напряженность поля

$$H = B/\mu_a = \Phi/S\mu_a, \quad (20.1)$$

где  $S$  и  $\mu_a$  — соответственно площадь поперечного сечения и абсолютная магнитная проницаемость участка магнитной цепи.

Учитывая, что в неразветвленной цепи магнитный поток один и тот же вдоль всей цепи, разделим ее на участки с постоянным  $S$  и  $\mu_a$ . Таких участков оказывается четыре (рис. 20.3):

участок *I*, площадь поперечного сечения которого  $S = 25 \cdot 25 = 625 \text{ мм}^2 = 6,25 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ , магнитная индукция

$$B_1 = \Phi/S_1 = (7,5 \cdot 10^{-4}) / (6,25 \cdot 10^{-4}) = 1,2 \text{ Тл.}$$

и по кривой намагничивания напряженность поля  $H_1 = 1300 \text{ А/м}$  (точка *Б* на рис. 20.2);

участок *II* имеет

$$S_2 = 3,0 \cdot 2,5 = 7,5 \text{ см}^2 = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

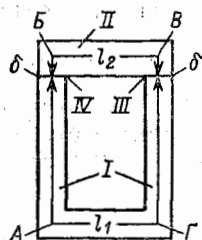


Рис. 20.3. Участки магнитной цепи (*I*, *II* — стальные; *III*, *IV* — воздушные зазоры)

$$B_2 = \Phi/S_2 = (7,5 \cdot 10^{-4})/(7,5 \cdot 10^{-4}) = 1 \text{ Тл}$$

и  $H = 920 \text{ А/м}$  (точка  $A$  на рис. 20.2);

участки  $III$  и  $IV$  — воздушные промежутки (зазоры). Ввиду малости их длины по сравнению с поперечными размерами площадь их поперечного сечения такая же, как и для участка  $I$ , т. е.  $S_3 = S_4 = S_1 = 6,25 \text{ см}^2$ . Соответственно и магнитная индукция  $B_4 = B_3 = B_1 = 1,2 \text{ Тл}$ .

Магнитная проницаемость воздуха практически равна магнитной постоянной  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ , поэтому напряженность поля

$$H_3 = H_4 = B_3/\mu_0 = 1,2/(4\pi \cdot 10^{-7}) = 9,6 \cdot 10^5 \text{ А/м.}$$

3. Вычисление тока в катушке. Применяя закон полного тока к средней магнитной линии (контур  $ABVGA$  на рис. 20.3), можно определить МДС ( $I\omega$ ) катушки как сумму магнитных напряжений ( $Hl$ ) вдоль указанного контура. Действительно,

$$I\omega = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3 + H_4 l_4. \quad (20.2)$$

По размерам магнитопровода (рис. 20.1) определяем  $l_1 = 29 \text{ см}$ ,  $l_2 = 10,5 \text{ см}$ . Кроме того, по условию задачи  $l_3 = l_4 = 0,025 \text{ см}$ .

Подставляя найденные значения  $H$  и  $l$  в уравнение (20.2), получаем

$$I\omega = 1300 \cdot 0,29 + 920 \cdot 0,105 + 2(9,6 \cdot 10^5 \cdot 2,5 \cdot 10^{-4}) \approx 953 \text{ А,}$$

откуда  $I = 953/\omega = 953/187 = 5,1 \text{ А}$ .

4. Вычисление магнитных сопротивлений. Для участка магнитной цепи можно составить уравнение, аналогичное закону Ома для участка электрической цепи, т. е. записать магнитное напряжение в виде произведения

$$U_M = \Phi R_M, \quad (20.3)$$

откуда магнитное сопротивление

$$R_M = U_M/\Phi = Hl/BS = l/\mu_a S. \quad (20.4)$$

Вычислив для участков  $I$  и  $II$  (рис. 20.3) абсолютные магнитные проницаемости

$$\mu_{a1} = B_1/H_1 = 1,2 \text{ (Тл)}/1300 \text{ (А/м)} = 9,25 \cdot 10^{-4} \text{ Гн/м;}$$

$$\mu_{a2} = B_2/H_2 = 1/920 = 10,9 \cdot 10^{-4} \text{ Гн/м,}$$

найдем магнитные сопротивления этих же участков:

$$R_{M1} = \frac{l_1}{\mu_{a1} S_1} = \frac{0,29}{9,25 \cdot 10^{-4} \cdot 6,25 \cdot 10^{-4}} = 5,02 \cdot 10^5 \text{ 1/Гн;}$$

$$R_{M2} = \frac{l_2}{\mu_{a2} S_2} = \frac{0,105}{10,9 \cdot 10^{-4} \cdot 7,5 \cdot 10^{-4}} = 1,29 \cdot 10^5 \text{ 1/Гн.}$$

Магнитное сопротивление воздушного промежутка

$$R_{M3} = R_{M4} = \frac{l_3}{\mu_0 S_3} = \frac{0,25 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 6,25 \cdot 10^{-4}} = 3,19 \cdot 10^5 \text{ 1/Гн.}$$

Оказывается, магнитные сопротивления стальных участков (*I* и *II*) и воздушных участков (*III* и *IV*) близки по значениям, хотя по длине они различаются приблизительно в 800 раз. Это легко понять, если учесть, что для рассматриваемой задачи приблизительно во столько же раз магнитная проницаемость литой стали больше, чем воздуха. Действительно,

$$\mu_{r1} = \mu_{a1}/\mu_0 = (9,25 \cdot 10^{-4})/(4\pi \cdot 10^{-7}) = 740;$$

$$\mu_{r2} = \mu_{a2}/\mu_0 = (10,9 \cdot 10^{-4})/(4\pi \cdot 10^{-7}) = 870.$$

Зная магнитное сопротивление всех участков рассматриваемой магнитной цепи, можно для нее составить эквивалентную электрическую схему (рис. 20.4). Следует обратить внимание на то, что это цепь с двумя нелинейными сопротивлениями  $R_{M1}$  и  $R_{M2}$ , значения которых зависят от магнитного потока.

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Почему не пользуются абсолютной магнитной проницаемостью для вычисления напряженности в стали и обращаются к кривой намагничивания? Магнитная проницаемость стали, как и других ферромагнитных материалов, непостоянна и зависит от индукции или напряженности магнитного поля. Поэтому для каждого значения индукции приходится находить напряженность поля по кривой намагничивания. Кривые намагничивания часто задаются в виде таблиц (см. прилож. 4 в конце книги).

Для воздушных промежутков и вообще неферромагнитных материалов магнитная проницаемость постоянна.

2. Какой ток потребуется для питания катушки при том же магнитном потоке, если устранить воздушный зазор в магнитопро-

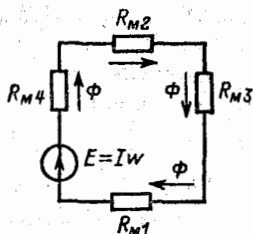


Рис. 20.4. Эквивалентная электрическая схема магнитной цепи

в воде? Уравнение (20.2) можно представить состоящим из двух частей:  $I'w = H_1l_1 + H_2l_2 = 473$  А для участков I и II в стали (рис. 20.3) и  $I''w = H_3l_3 + H_4l_4 = 480$  А для воздушных зазоров.

Поэтому при отсутствии воздушных зазоров тот же магнитный поток можно обеспечить, питая катушку током  $I' = 473/187 = 2,5$  А вместо тока  $I = 5,1$  А.

*Итак, отсутствие воздушных промежутков в магнитной части дает значительный выигрыш в МДС. Однако часто воздушные промежутки неизбежны или необходимы (наличие вращающихся или подвижных участков магнитной цепи, работа при ненасыщенном сердечнике и пр.).*

3. Какой выигрыш (по МДС) дает замена литой стали электротехнической? По характеристике намагничивания (см. прилож. 4) для электротехнической стали, например, 1511 (Э41) находим: при  $B_1 = 1,2$  Тл  $H_1 = 540$  А/м, при  $B_2 = 1,0$  Тл  $H_2 = 300$  А/м.

Вычисляя для этого случая  $H_1l_1 + H_2l_2 = 540 \cdot 0,29 + 300 \cdot 0,105 = 188,5$  А, получаем, что при отсутствии воздушных зазоров ток в катушке  $I = 188,5/187 \approx 1$  А, т. е. в 2,5 раза меньше необходимого при магнитопроводе из литой стали (без зазоров).

Следует учесть, что уменьшение тока позволяет применить более тонкий провод и этим уменьшить размеры катушки.

Если в магнитной цепи сохраняются воздушные зазоры, то выигрыш от применения электротехнической стали заметно сократится, так как магнитное напряжение для воздушных зазоров при таком же потоке останется прежним.

4. Почему расчет магнитной цепи часто проводится по заданному потоку и магнитной индукции? С одной стороны, для каждого ферромагнитного материала существует предельное значение магнитной индукции, превышение которого приводит к насыщению материала и требует значительного увеличения тока. С другой стороны, при малых значениях магнитной индукции для получения необходимого потока приходится увеличивать размеры магнитопровода, т. е. утяжелять или усложнять конструкцию. Поэтому при расчетах устройств, содержащих магнитные цепи, заранее выбирают  $B$  и  $\Phi$ , исходя из кривой намагничивания материала и требований к устройству.

5. Каким будет поток в магнитопроводе

(рис. 20.1), если уменьшить в 2 раза ток в катушке? Поставленная задача обратна рассмотренной, т.е. требуется определить магнитный поток по заданной МДС  $I\omega$ . Она не может быть решена простым аналитическим расчетом.

Для решения задачи построим график зависимости магнитного потока от МДС, задавая несколько значений магнитного потока и вычисляя для каждого из них МДС уже известным путем. Результаты вычислений сведены в табл. 20.1; по ее данным построен график зависимости  $\Phi(I\omega)$  (рис. 20.5), называемый магнитной характеристикой.

При новом значении тока в катушке получим  $I\omega = 953/2 = 476,5$  А, по магнитной характеристике (точка А на рис. 20.5) находим магнитный поток:  $0,41$  мВб  $= 4,1 \cdot 10^{-4}$  Вб.

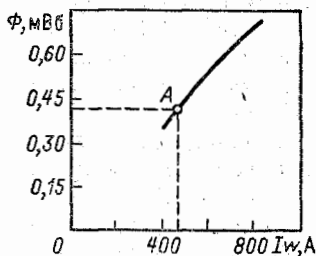


Рис. 20.5. Магнитная характеристика цепи со сталью; рассмотренная в § 20.1

Таблица 20.1

$\Phi, 10^{-4}$ Вб	6,25	5,0	3,75
$I\omega, \text{ А}$	740	575	425

## 20.2. РАЗВЕТВЛЕННАЯ СИММЕТРИЧНАЯ МАГНИТНАЯ ЦЕПЬ

### Условие задачи

В среднем стержне магнитопровода (рис. 20.6), выполненного из сплава пермендюр, магнитный поток  $\Phi = 5 \times 10^{-3}$  Вб. Вычислить МДС катушки, если толщина магнитопровода 50 мм и длина каждого воздушного зазора  $\delta = 0,25$  мм  $= 2,5 \cdot 10^{-4}$  м.

### Решение задачи

1. Эквивалентная неразветвленная магнитная цепь. Магнитный поток  $\Phi$  в среднем стержне

магнитопровода (рис. 20.6) равен сумме магнитных потоков  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , замыкающихся по двум участкам магнитной цепи со средними линиями  $A_1B_1B_1\Gamma_1A_1$  и  $A_2B_2B_2\Gamma_2A_2$ . Учитывая симметрию магнитной цепи, т. е. одинаковое магнитное сопротивление участков, по которым замыкаются потоки  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , имеем  $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi/2 = 2,5 \cdot 10^{-3}$  Вб.

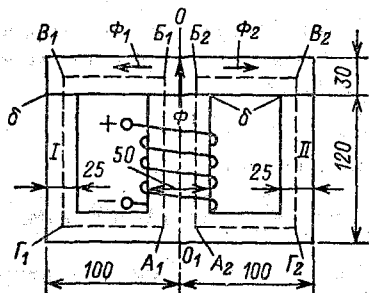


Рис. 20.6. Разветвленная симметричная магнитная цепь

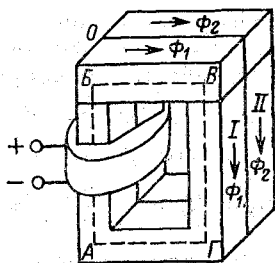


Рис. 20.7. Эквивалентная неразветвленная магнитная цепь

Поэтому, разрезав магнитопровод вдоль оси симметрии  $OO_1$  (рис. 20.6), получим две одинаковые неразветвленные магнитные цепи, аналогичные рассмотренной в предыдущей задаче (рис. 20.1). Повернув одну из них вокруг оси  $OO_1$  на  $180^\circ$ , получим эквивалентную неразветвленную магнитную цепь (рис. 20.7), для которой МДС катушки равна сумме магнитных напряжений по контуру  $AB\Gamma A$ .

У заданной симметричной разветвленной цепи сумма магнитных напряжений вдоль средней магнитной линии контура  $A_1B_1B_1\Gamma_1A_1$  или  $A_2B_2B_2\Gamma_2A_2$  (рис. 20.7) равна сумме магнитных напряжений вдоль контура  $AB\Gamma A$  эквивалентной цепи (рис. 20.7), так как их соответствующие участки имеют одинаковые напряженности поля и длины.

Итак, для симметричной разветвленной магнитной цепи (рис. 20.7) МДС катушки можно вычислить как сумму магнитных напряжений по одному из контуров, например,  $A_1B_1B_1\Gamma_1A_1$ .

2. Вычисление МДС катушки. Сравнивая магнитную цепь, рассмотренную в предыдущей задаче (рис. 20.1), с половиной магнитопровода (рис. 20.6), можно заметить, что размеры одинаковы (за исключением толщины магнитопровода). Поэтому  $A_1B_1B_1\Gamma_1A_1$  (рис. 20.1) можно разбить на такие же участки (рис. 20.3) и по аналогии

с предыдущей задачей вычислить

$$B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1} = \frac{2,5 \cdot 10^{-3}}{2,5 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 2 \text{ Тл};$$

$$B_2 = \frac{\Phi_2}{S_2} = \frac{2,5 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 1,67 \text{ Тл};$$

$$B_3 = B_4 = B_1 = 2 \text{ Тл}.$$

Полученным значениям магнитной индукции по характеристикам намагничивания для пермендюра (см. прилож. 4) соответствуют напряженности поля

$$H_1 = 620 \text{ А/см и } H_2 = 240 \text{ А/см}.$$

Для воздушных зазоров напряженность поля

$$H_3 = H_4 = \frac{B_3}{4\pi \cdot 10^{-7}} = \frac{B_4}{4\pi \cdot 10^{-7}} = \frac{2}{4\pi \cdot 10^{-7}} \approx 1,6 \cdot 10^6 \text{ А/м}.$$

При длине участков  $l_1 = 29$  см и  $l_2 = 10,5$  см (найжены в предыдущей задаче) МДС

$$I\omega = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3 + H_4 l_4 = 620 \cdot 0,29 + 240 \cdot 0,105 + (1,6 \cdot 10^6 \cdot 2,5 \cdot 10^{-4}) 2 = 1000 \text{ А}.$$

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Как повлияет на магнитный поток и магнитную индукцию удаление из магнитной цепи (рис. 20.6) одной ее половины? Разрежем магнитопровод вдоль оси  $OO_1$  на две равные части и одну из них (например,  $I$ ) удалим.

Так как для оставшейся половины можно по-прежнему записать уравнение

$$I\omega = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3 + H_4 l_4$$

и МДС  $I\omega$  не изменилась, то напряженности поля на всех участках останутся прежними:

$$H_1 = 620 \text{ А/м}; \quad H_2 = 240 \text{ А/м};$$

$$H_3 = H_4 = 1,6 \cdot 10^6 \text{ А/м}.$$

Значит, не изменятся магнитные индукции на участках и магнитный поток  $\Phi_2 = 2,5 \cdot 10^{-3}$  Вб.

Однако новую неразветвленную магнитную цепь нельзя считать полностью равнозначной разветвленной цепи, так как магнитный поток в стержне, где размещена катушка, теперь равен не  $\Phi$ , а  $\Phi_2$ , т.е. в 2 раза меньше.

2. Как составить эквивалентную электри-



ческую схему магнитной цепи по рис. 20.6? Средний стержень магнитопровода имеет магнитное сопротивление участка стали  $R_{M,C}$  и воздушного зазора  $R_{M4}$ . На этом же стержне размещается катушка с током, МДС  $I\omega$  которой определяет ЭДС эквивалентного источника. Остальные ветви эквивалентной схемы составлены по аналогии с эквивалентной схемой неразветвленной магнитной цепи (рис. 20.4).

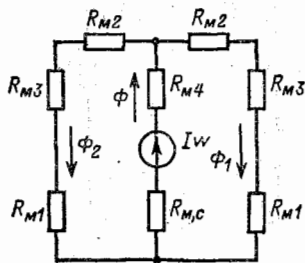


Рис. 20.8. Эквивалентная электрическая схема разветвленной магнитной цепи

3. Можно ли разместить катушку на другом стержне магнитопровода? Проводя аналогию между магнитным потоком и электрическим током в эквивалентной схеме (рис. 20.8), легко установить, что перемещение катушки на другой стержень, т.е. ЭДС источника в другую ветвь, привело бы к перераспределению магнитных потоков и изменению всего режима магнитной цепи, которая, кстати говоря, уже была бы несимметричной.

которая, кстати говоря, уже была бы несимметричной.

### 20.3. РАЗВЕТВЛЕННАЯ НЕСИММЕТРИЧНАЯ МАГНИТНАЯ ЦЕПЬ. РАСЧЕТ ЦЕПИ ПРИ ЗАДАННОЙ МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

#### Условие задачи

Обмотки  $\omega_1$  и  $\omega_2$  (рис. 20.9) размещены на двух стержнях магнитопровода, в каждом из которых магнитная индукция равна 0,9 Тл. Вычислить МДС обмоток, если в местах стыка ярма  $Я$  и стержней сердечника  $С$ , выполненных из электротехнической стали 1512 (Э42), образуются зазоры  $\delta = 0,1 \text{ мм} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ м}$  и толщина магнитопровода 20 мм = 0,02 м.

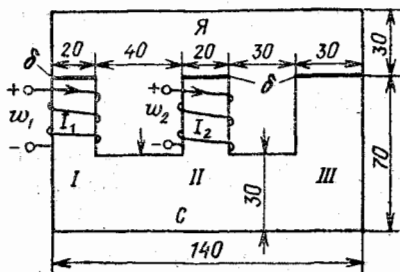


Рис. 20.9. Разветвленная несимметричная магнитная цепь

Решение задачи

1. Распределение магнитного потока. Выделение участ-

ков магнитной цепи. Рассматриваемую магнитную цепь, как показано на рис. 20.10, можно разделить на три ветви:  $ОАВВ$ ,  $ОВ$  и  $ОДГВ$  с магнитными потоками соответственно  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$ .

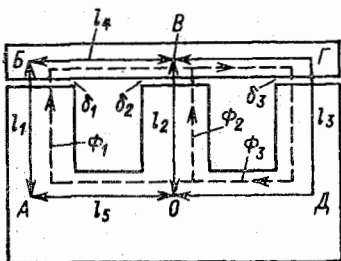


Рис. 20.10. Схема участков магнитной цепи, приведенной на рис. 20.9

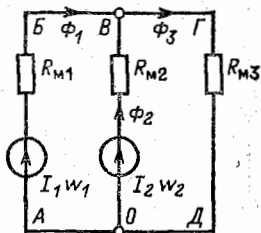


Рис. 20.11. Эквивалентная электрическая схема магнитной цепи, приведенной на рис. 20.9

Учитывая, что в пределах одной ветви магнитный поток не изменяется, составим для рассматриваемой магнитной цепи эквивалентную электрическую схему (рис. 20.11), на которой  $R_{m1}$ ,  $R_{m2}$  и  $R_{m3}$  — полные магнитные сопротивления соответствующих ветвей (для удобства сравнения на рис. 20.10 и 20.11 приняты одинаковые буквенные обозначения участков цепи). Всю магнитную цепь разделим на участки  $l_1, \dots, l_5$  и  $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta$  (рис. 20.10), каждый из которых характеризуется одним значением напряженности поля. По размерам магнитопровода (на рис. 20.9 указаны в миллиметрах) находим:  $l_1 = l_2 = 70 \text{ мм} = 0,07 \text{ м}$ ;  $l_3 = 0,18 \text{ м}$ ;  $l_4 = l_5 = 0,06 \text{ м}$ ;  $S_1 = S_2 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ,  $S_3 = S_4 = S_5 = 6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ .

2. Вычисление МДС катушки. Прежде всего по первому закону Кирхгофа запишем для узла  $B$  (рис. 20.11) уравнение

$$\Phi_3 = \Phi_1 + \Phi_2.$$

Замечая, что в стержнях  $I$  и  $II$  (рис. 20.9) магнитная индукция (по условию  $0,9 \text{ Тл}$ ) одинакова и одинакова площадь поперечного сечения стержней, получаем

$$\Phi_1 = \Phi_2 = B_1 S_1 = 0,9 \cdot 4 \cdot 10^{-4} = 3,6 \cdot 10^{-4} \text{ Вб};$$

$$\Phi_3 = \Phi_1 + \Phi_2 = 7,2 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}$$

Теперь найдем магнитные индукции и напряженности

поля остальных участков магнитной цепи (рис. 20.9):

$$B_3 = \Phi_3/S_3 = (7,2 \cdot 10^{-4})/(6 \cdot 10^{-4}) = 1,2 \text{ Тл};$$

$$B_4 = \Phi_1/S_4 = (3,6 \cdot 10^{-4})/(6 \cdot 10^{-4}) = 0,6 \text{ Тл};$$

$$B_5 = B_4.$$

Далее по характеристике намагничивания для стали Э42 (см. прилож. 4) находим

$$H_1 = H_2 = 235 \text{ А/м}; \quad H_3 = 540 \text{ А/м};$$

$$H_4 = H_5 = 110 \text{ А/м}.$$

В воздушных зазорах напряженности поля равны

$$H_{B1} = H_{B2} = B_1/(4\pi \cdot 10^{-7}) = 0,9/(4\pi \cdot 10^{-7}) = 0,72 \cdot 10^6 \text{ А/м};$$

$$H_{B3} = B_3/(4\pi \cdot 10^{-7}) = 1,2/(4\pi \cdot 10^{-7}) = 0,96 \cdot 10^6 \text{ А/м}.$$

Теперь можно вычислить МДС обмоток, применив второй закон Кирхгофа для двух контуров магнитной цепи (рис. 20.9) или ее эквивалентной электрической цепи (рис. 20.10).

Действительно, для контура *ОВГДО*

$$I_2 \omega_2 = H_2 l_2 + H_{B2} \delta_2 + H_3 l_3 + H_{B3} \delta_3 = 235 \cdot 0,07 + 0,72 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^{-4} + 540 \cdot 0,18 + 0,96 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^{-4} = 281 \text{ А};$$

для контура *ОАВВО*

$$I_1 \omega_1 - I_2 \omega_2 = H_5 l_5 + H_1 l_1 + H_{B1} \delta_1 + H_4 l_4 - H_2 l_2 - H_{B2} \delta_2 = H_5 l_5 + H_4 l_4,$$

так как  $H_1 l_1 = H_2 l_2$  и  $H_{B1} \delta_1 = H_{B2} \delta_2$ .

Таким образом, получаем

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2 + H_5 l_5 + H_4 l_4 = 281 + (110 \cdot 0,06) \cdot 2 = 294 \text{ А}.$$

#### 20.4. РАЗВЕТВЛЕННАЯ НЕСИММЕТРИЧНАЯ МАГНИТНАЯ ЦЕПЬ. РАСЧЕТ ЦЕПИ ПРИ ЗАДАНЫХ МАГНИТОДВИЖУЩИХ СИЛАХ

##### Условие задачи

Для магнитной цепи предыдущей задачи (рис. 20.9) заданы МДС обмоток  $I_1 \omega_1 = 300 \text{ А}$  и  $I_2 \omega_2 = 260 \text{ А}$ .

Определить магнитные потоки  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$ .

## Решение задачи

1. Обоснование метода решения задачи. Предложенная задача обратна предыдущей (§ 20.3), т.е. требуется определить магнитные потоки при заданных МДС, как было показано (§ 20.1, доп. вопрос 5); решение обратной задачи расчета магнитных цепей сводится к решению серии прямых задач, если считать заданным ряд значений магнитного потока. Воспользуемся этим методом.

Зададимся несколькими значениями, например, магнитного потока  $\Phi_1$ . Для каждого значения потока вычислим узловое магнитное напряжение между точками  $B$  и  $O$  (рис. 20.10 и 20.11):

$$U_{м,BO} = I_1 \omega_1 - \Phi_1 R_{м1} = I_1 \omega_1 - \Sigma (Hl)_I, \quad (20.5)$$

где

$$\Sigma (Hl)_I = H_5 l_5 + H_1 l_1 + H_{B1} \delta_1 + H_4 l_4. \quad (20.6)$$

Имея узловое магнитное напряжение  $U_{м,BO}$ , рассчитаем магнитные величины (напряженность поля, магнитную индукцию и поток) для второй и третьей ветвей цепи (рис. 20.10 и 20.9).

Полученные значения магнитных потоков должны удовлетворять первому закону Кирхгофа для узла  $B$  или  $O$ :

$$\Sigma \Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3 = 0. \quad (20.7)$$

Если при первом произвольно выбранном значении  $\Phi_1$  окажется  $\Phi_1 + \Phi_2 < \Phi_3$ , то второе значение  $\Phi_1$  надо взять больше, чем первое. При обратном знаке неравенства нужно выбрать меньшим значение  $\Phi_1$ .

Выполнив ряд расчетов и построив зависимость  $\Sigma \Phi$  от  $\Phi_1$ , найдем, при каком значении  $\Phi_1$  удовлетворяется уравнение (20.7).

Это значение потока  $\Phi_1$  и будет решением задачи.

2. Вычисление магнитных потоков. Примем магнитный поток первой ветви (рис. 20.9)  $\Phi_1 = 3,0 \cdot 10^{-4}$  Вб. При этом

$$B_1 = \Phi_1 / S_1 = 3 \cdot 10^{-4} / (4 \cdot 10^{-4}) = 0,75 \text{ Тл}$$

и по таблице (прилож. 4)  $H_1 = 165$  А/м.

Аналогично

$$B_4 = B_5 = \Phi_1 / S_4 = 3 \cdot 10^{-4} / 6 \cdot 10^{-4} = 0,5 \text{ Тл}$$

$$\text{и } H_4 = H_5 = 85 \text{ А/м.}$$

Напряженность поля воздушного промежутка.

$$H_{В1} = B_1 / (4\pi \cdot 10^{-7}) = 0,75 / (4\pi \cdot 10^{-7}) = 0,6 \cdot 10^6 \text{ А/м.}$$

Подставляя полученные величины и длины участков в уравнение (20.6), получаем

$$\Sigma(Hl)_I = 165 \cdot 0,07 + 2 \cdot 85 \cdot 0,06 + 0,6 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^{-4} = 81,75 \text{ А.}$$

По уравнению (20.5) найдем узловое магнитное напряжение:

$$U_{м.ВО} = 300 - 81,75 = 218,25 \text{ А.}$$

Полученное магнитное напряжение приложено и к выводам второй ветви цепи (рис. 20.10 и 20.11). Поэтому сумма магнитных напряжений второй ветви

$$\Phi_2 R_{м2} = \Sigma(Hl)_{II} = I_2 \omega_2 - U_{м.ВО} = 260 - 218,25 = 41,75 \text{ А.}$$

Вторая ветвь состоит из участка стали и воздушного зазора:

$$\Sigma(Hl)_{II} = H_2 l_2 + H_{B2} \delta. \quad (20.8)$$

Поэтому суммарное магнитное напряжение  $\Sigma(Hl)_{II}$  следует распределить между двумя последовательно соединенными участками магнитной цепи, из которых один нелинейный (по стали), а другой линейный (воздушный зазор).

Подобная задача решалась ранее для электрической цепи (§ 19.1 и 19.2), где применялось графическое суммирование напряжений участков для ряда значений их общего тока. В данном случае величиной, аналогичной току, является магнитный поток  $\Phi_2$  или магнитная индукция  $B_2$  (сечения участка стали и воздушного зазора приняты одинаковыми). Поэтому, задавшись несколькими значениями  $B_2$  (табл. 20.2), вычислим магнитные напряжения  $H_2 l_2$

Таблица 20.2

$B_2$ , Тл	0,4	0,45	0,5	0,6	0,7	0,8
$H_{B2} \delta$ , А	32	36	39,8	48	56	64
$H_2 l_2$ , А	4,9	5,25	5,95	7,7	10,15	12,9
$\Sigma(Hl)_{II}$ , А	36,9	41,25	45,75	55,7	66,15	76,9

и  $H_{B_2} \delta$  уже известными методами. Значения магнитного напряжения  $\Sigma(Hl)_{II}$  можно найти, выполнив графическое суммирование характеристик  $B_2(H_2 l_2)$  и  $B_2(H_{B_2} \delta)$ , аналогичное построению суммарной вольт-амперной характеристики на рис. 19.10. Однако суммирование магнитных напряжений можно выполнить и по формуле (20.8), записывая результаты в ту же табл. 20.2.

Из табл. 20.2 следует, что значению  $\Sigma(Hl)_{II} = 41,75$  Тл соответствует магнитная индукция  $B_2$ , которая несколько больше, чем 0,45 Тл, и значительно меньше, чем 0,5 Тл. Прибегая к линейной интерполяции данных таблицы, получаем  $B_2 = 0,46$  Тл.

Для рассматриваемой второй ветви магнитной цепи (рис. 20.10) магнитный поток

$$\Phi_2 = B_2 S_2 = 0,46 \cdot 4 \cdot 10^{-4} = 1,84 \cdot 10^{-4} \text{ Вб.}$$

Перейдем к расчету магнитных величин третьей ветви цепи (рис. 20.11 и 20.10). В этой ветви нет МДС ( $I_3 \omega_3 = 0$ ), поэтому по закону Ома

$$U_{м,вО} = \Phi_3 R_{м3} = \Sigma(Hl)_{III} = 218,25 \text{ А} = H_3 l_3 + H_{B_3} \delta.$$

Из табл. 20.3, составленной аналогично табл. 20.2, находим,

Таблица 20.3

$B_3$ , Тл	1,1	1,15	1,2	1,25	1,3
$H_{B_3} \delta$ , А	87,5	91,5	95,5	100	103,5
$H_3 l_3$ , А	71,0	83,0	97,2	115	138,5
$\Sigma(Hl)_{III}$ , А	158,5	174,5	192,7	215	242

что значению  $\Sigma(Hl)_{III} = 218,25$  А соответствует магнитная индукция  $B_3 \approx 1,25$  Тл. Магнитный поток

$$\Phi_3 = B_3 S_3 = 1,25 \cdot 6 \cdot 10^{-4} = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ Вб.}$$

В результате первого этапа расчета (при выбранном значении  $\Phi_1 = 3,0 \cdot 10^{-4}$  Вб) оказалось

$$\Phi_1 + \Phi_2 = 4,84 \cdot 10^{-4} < \Phi_3 = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ Вб.}$$

Поэтому задаемся другим (увеличенным) значением  $\Phi_1 = 4 \cdot 10^{-4}$  Вб и повторяем расчеты.

В результате получим

$$\Phi_1 + \Phi_2 = 7,2 \cdot 10^{-4} \text{ Вб} > \Phi_3 = 7,08 \cdot 10^{-4} \text{ Вб.}$$

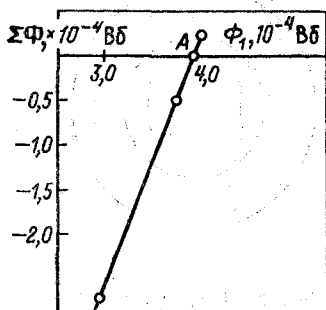
Очевидно, что в третий раз следует выбрать  $\Phi_1$  несколько меньшим, чем  $4,0 \cdot 10^{-4}$  Вб, но близким к этому значению.

Принимая  $\Phi_1 = 3,8 \cdot 10^{-4}$  Вб и выполнив еще раз все расчеты, получим

$$\begin{aligned} \Phi_1 + \Phi_2 &= 6,68 \cdot 10^{-4} \text{ Вб} < \\ &< \Phi_3 = 7,14 \cdot 10^{-4} \text{ Вб.} \end{aligned}$$

По полученным результатам составим табл. 20.4 и построим график зависимости  $\Sigma\Phi(\Phi_1)$ , показанный на рис. 20.12.

Рис. 20.12. Изменение суммарного магнитного потока для узла магнитной цепи (рис. 20.9)



Абсцисса точки А графика рис. 20.12 выражает искомое значение  $\Phi_1 = 3,97 \cdot 10^{-4}$  Вб, так как для этой точки  $\Sigma\Phi = 0$ . С увеличением числа точек кривой (рис. 20.12) точность расчета возрастает.

Таблица 20.4

$\Sigma\Phi, \text{ Вб}$	$-2,66 \cdot 10^{-4}$	$0,12 \cdot 10^{-4}$	$-0,46 \cdot 10^{-4}$
$\Phi_1, \text{ Вб}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$3,8 \cdot 10^{-4}$

Имея значение магнитного потока  $\Phi_1$ , определим известными методами значения  $\Phi_2 = 3,14 \cdot 10^{-4}$  Вб и  $\Phi_3 = 7,11 \times 10^{-4}$  Вб.

## 20.5. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

362. На тороидальном кольце из литой стали, размеры которого указаны на рис. 20.13 в миллиметрах, размещена обмотка из 925 витков провода. Вычислить ток в обмотке и магнитную проницаемость стали при магнитном потоке в кольце, равном  $1,25 \cdot 10^{-3}$  Вб.

363. Стальное кольцо в предыдущей задаче выполнили из двух ча-

стей (рис. 20.14) с зазорами  $\delta=0,2$  мм. Вычислить ток в обмотке, при котором сохранится прежнее значение магнитного потока в сердечнике.

364. Вычислить МДС катушки, создающую в сердечнике, на котором размещена обмотка (рис. 20.15), магнитную индукцию 1Тл. Размеры магнитопровода в миллиметрах, выполненного из стали 1211 (Э21), указаны на рисунке. Как изменится МДС, если выполнить весь магнитопро-

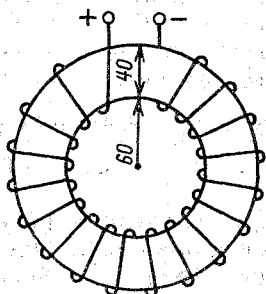


Рис. 20.13. К задаче 362

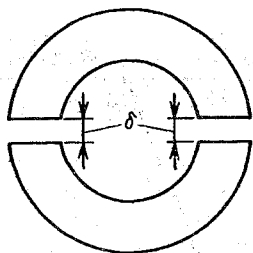


Рис. 20.14. К задаче 363

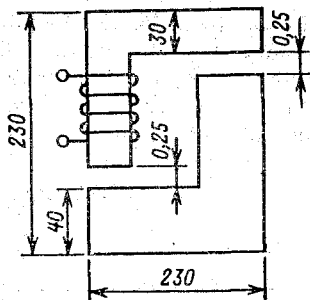


Рис. 20.15. К задаче 364

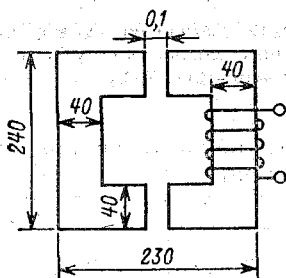


Рис. 20.16. К задаче 366

вод шириной 40 мм, сохранив неизменными остальные данные задачи?

365. Для предыдущей задачи вычислить магнитное сопротивление основного сердечника при его толщине 30 мм.

366. Какую МДС должна иметь катушка с током, размещенная на сердечнике из стали 1212 (Э12) (рис. 20.16), чтобы магнитная индукция в зазоре составляла 0,825 Тл? Сердечник имеет одинаковую толщину. Все размеры — в миллиметрах.

367. Для магнитной цепи предыдущей задачи построить график зависимости индукции в зазоре от МДС при изменении тока в обмотке в пределах от  $-20$  до  $+10$  % номинального значения (393 А) и определить значения индукции при наименьшем и наибольшем токе.



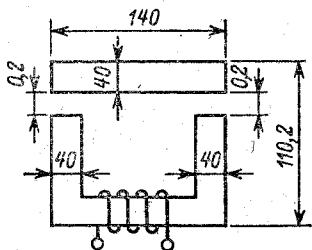


Рис. 20.17. К задаче 368

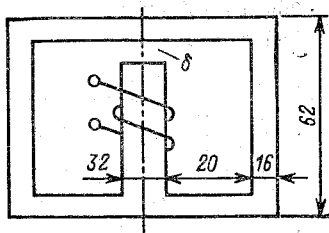


Рис. 20.18. К задаче 370

368. Вычислить магнитный поток и магнитную индукцию в зазоре сердечника из стали 1511 (Э41) (рис. 20.17), если по обмотке, имеющей 900 витков, проходит ток 2 А. Толщина сердечника всюду одинакова и равна 40 мм; все размеры на рис. 20.17 указаны в миллиметрах.

369. В магнитной цепи рис. 20.17 воздушный зазор устранили, сблизив участки стального сердечника. При этом магнитный поток возрос в 2 раза (МДС осталась прежней). Вычислить магнитную проницаемость стали, считая ее величиной постоянной (магнитопровод не насыщается).

370. На среднем стержне сердечника из электротехнической стали 1512 (Э42) (рис. 20.18) размещена обмотка с числом витков  $w=1850$ .

Вычислить ток в катушке, если магнитный поток в зазоре ( $\delta=0,2$  мм) равен  $3,46 \times 10^{-4}$  Вб. Толщина сердечника 16 мм; остальные его размеры (в миллиметрах) указаны на рисунке.

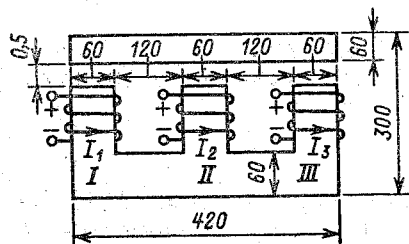


Рис. 20.19. К задаче 372

371. Предыдущую задачу решить при отсутствии зазора и том же магнитном потоке в среднем стержне.

372. В стержнях I и II (рис. 20.19) магнитная индукция соответственно  $B_1=0,8$  Тл и  $B_2=0,6$  Т; МДС обмотки, размещенной на стержне I, известна ( $I_1 w_1=900$ ). Вычислить МДС двух других обмоток, если материал магнитопровода — сталь 1511; его толщина 60 мм. Направления токов указаны на рисунке.

## 20.6. ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ. 20

362. 0,5 А; 870.

363. 0,74 А.

364. 658 А; увеличится на 123 А.

365.  $4,2 \cdot 10^5$  1/Гц.

366. 393 А.

367.

$B$ , Тл	0,90	0,825	0,75	0,65	0,55	0,50
$I_{\omega}$ , А	454	393	347	288	237	215

Индукция при наименьшем токе 0,6 Тл, при наибольшем 0,875 Тл.

368.  $25 \cdot 10^{-4}$  Вб; 1,55 Тл.

369. 800.

370. 72,6 мА.

371. 12,3 мА.

372. 970 А, 710 А.

## Глава двадцать первая

# НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

## 21.1. НЕЛИНЕЙНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

### КАК ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ СИНУСОИДАЛЬНОГО СИГНАЛА В НЕСИНУСОИДАЛЬНЫЙ

#### Условие задачи

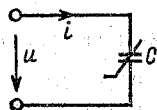
Конденсатор с сегнетоэлектриком (рис. 21.1) присоединен к источнику синусоидального напряжения  $U = 100$  В,  $f = 400$  Гц. Связь между мгновенными значениями заряда  $q$  и напряжения  $u$  на обкладках конденсатора задана двумя способами: графиком (рис. 21.2) и уравнением

$$q = k_1 u + k_2 u^3,$$

где  $q$  — в кулонах;  $u$  — в вольтах;  $k_1 = 3 \cdot 10^{-7}$  Ф и  $k_2 = 1,2 \cdot 10^{-11}$  Ф/В<sup>2</sup>.

Определить графически и аналитически зависимость заряда конденсатора от времени  $q(t)$ . Составить выражение мгновенного значения тока в цепи  $i(t)$ .

Рис. 21.1. Конденсатор с сегнетоэлектриком, присоединенный к источнику синусоидального напряжения



Вычислить действующее значение тока, активную, реактивную, полную мощности и мощность искажения. Потери энергии в конденсаторе пренебречь.

### Решение задачи

1. Особенности конденсатора с сегнето-диэлектриком. У применяемых в обычных конденсаторах диэлектриков (слюда, парафинированная бумага

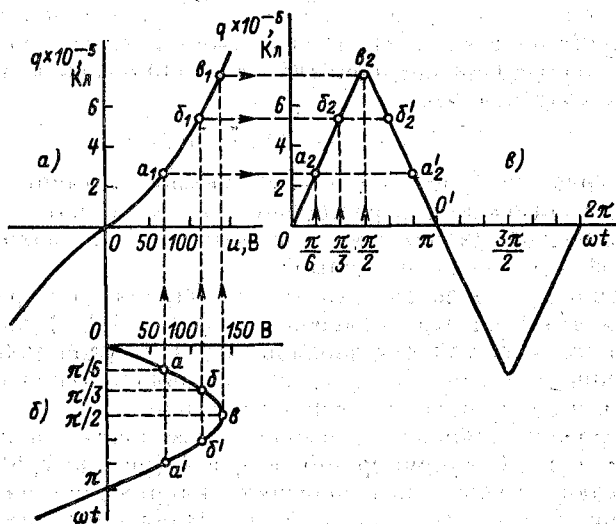


Рис. 21.2. Построение графика заряда на обкладках нелинейного конденсатора (в) по заданным кулон-вольтной характеристике (а) и графику напряжения на выводах (б)

и др.) диэлектрическая проницаемость постоянна (не зависит от напряженности электрического поля). Иными свойствами обладают сегнетодиэлектрики, у которых диэлектрическая проницаемость является функцией напряженности поля.

У конденсаторов с сегнетодиэлектриками зависимость мгновенного значения заряда на обкладках от мгновенного значения напряжения между обкладками (кулон-вольтная характеристика) изображается некоторой кривой  $q(u)$ , пример которой показан на рис. 21.2, а. Такие конденсаторы называются нелинейными (в отличие от линейных конденсаторов, у которых кулон-вольтная характеристика — прямая, проходящая через начало координат).

Итак, конденсаторы с сегнетодиэлектриками относятся к числу нелинейных элементов, их емкость является функцией приложенного напряжения.

Нелинейные конденсаторы называют еще варикондами.

2. Графическое определение зависимости заряда от времени. Требуемую зависимость можно получить как графически, так и аналитически. По первому способу (графическому) построение по точкам выполнено на рис. 21.2, где показана заданная кулон-вольтная характеристика  $q(u)$  и изображен график положительной полуволны синусоидального напряжения на обкладках конденсатора:

$$u = U_m \sin \omega t = 100 \sqrt{2} \sin 2\pi f t.$$

Эти графики (рис. 21.2, а и б) построены таким образом, что горизонтали, параллельные оси  $u$ , имеют одинаковый масштаб напряжения и нулевые точки находятся на одной вертикальной прямой.

У искомого графика зависимости заряда от времени  $q(t)$  или  $q(\omega t)$  по вертикальной оси (рис. 21.2, в) получается тот же масштаб для зарядов, что и у кулон-вольтной характеристики (рис. 21.2, а); ось  $\omega t$  является продолжением оси  $u$  кулон-вольтной характеристики.

Построение начинаем с выбора нескольких значений времени, т. е.  $\omega t$ , например  $\pi/6$ ,  $\pi/3$ ,  $\pi/2$  (рис. 21.2, б). Затем находим мгновенные значения напряжения на конденсаторе (абсциссы точек а, б, в). Найденные значения напряжения переносим на кулон-вольтную характеристику (точки  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $v_1$  на рис. 21.2, а). Ординаты полученных точек ( $a_1$ ,  $b_1$ ,  $v_1$ ) и соответствующих им на рис. 21.2, в ( $a_2$ ,  $b_2$ ,  $v_2$ ) выражают мгновенные значения заряда для тех же моментов времени  $t$  или  $\omega t$  ( $\pi/6$ ,  $\pi/3$ ,  $\pi/2$ ).

Таким построением получены на рис. 21.2, в участок графика  $Oa_2b_2v_2$  и симметричный ему  $v_2b_2'a_2'O'$ .

Замечая, что кулон-вольтная характеристика (рис. 21.2, а) симметрична относительно начала координат, строим симметрично графику  $q(\omega t)$  отрицательную полуволну.

Полученный график имеет несинусоидальную форму, о чем более подробно будет сказано в следующем пункте.

3. Аналитическое определение зависимости заряда от времени. Мгновенное значение напряжения на конденсаторе, если принять его начальную фазу равной нулю,

$$u = 100 \sqrt{2} \sin \omega t.$$

Уравнение кулон-вольтной характеристики по условию задачи задано:

$$q = 3 \cdot 10^{-7} u + 1,2 \cdot 10^{-11} u^3. \quad (21.1)$$

Подставляя в (21.1) значение  $u$ , получаем (в кулонах)

$$q = 3 \cdot 10^{-5} \sqrt{2} \sin \omega t + 2,4 \cdot 10^{-5} \sqrt{2} \sin^3 \omega t.$$

Заменяя в последнем уравнении  $\sin^3 \omega t$  выражением  $(3 \sin \omega t - \sin 3\omega t)/4$ , имеем

$$q = 3 \cdot 10^{-5} \sqrt{2} \sin \omega t + 1,8 \cdot 10^{-5} \sqrt{2} \sin \omega t - \\ - 0,6 \cdot 10^{-5} \sqrt{2} \sin 3\omega t,$$

или окончательно

$$q = 4,8 \cdot 10^{-5} \sqrt{2} \sin \omega t - 0,6 \cdot 10^{-5} \sqrt{2} \sin 3\omega t. \quad (21.2)$$

Уравнение (21.2) показывает, что мгновенное значение заряда на обкладках конденсатора содержит две гармоники: первую и третью. Таким образом, появление третьей гармоники мгновенного значения заряда является причиной несинусоидальности кривой  $q(\omega t)$ , построенной на рис. 21.2, в.

4. Получение выражения мгновенного значения тока. За бесконечно малый промежуток времени  $dt$  заряд на обкладках конденсатора изменится на  $dq$ , а мгновенное значение тока (по определению)  $i = dq/dt$  выражается производной заряда по времени.

Дифференцируя уравнение (21.2), получаем мгновенное значение тока, состоящего из первой и третьей гармоник (в амперах):

$$i = dq/dt = 4,8 \cdot 10^{-5} \sqrt{2} \omega \cos \omega t - 0,6 \cdot 10^{-5} \sqrt{2} 3\omega \cos 3\omega t = i_1 + i_3,$$

или, подставляя  $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 400 = 2512$  рад/с,

$$i = i_1 + i_3 = 0,12 \sqrt{2} \cos \omega t - 0,0453 \sqrt{2} \cos 3\omega t. \quad (21.3)$$

На рис. 21.3 построены (пунктиром) косинусоидальные графики гармоник тока и приведена кривая  $i$  тока в конденсаторе, полученная сложением ординат соответствующих точек графиков  $i_1$  и  $i_3$  (графическое сложение гармоник несинусоидальной величины подробно рассмотрено в § 18.1).

Таким образом, нелинейная емкость в цепи переменного тока может служить преобразователем сигнала си-

нусоидальной формы (в нашем случае напряжение) в сигнал несинусоидальной формы (в нашем случае ток).

Это свойство характерно не только для нелинейных емкостей, но и для других нелинейных элементов. Изменение формы сигнала в нелинейных цепях переменного тока находит практическое применение (см. § 21.2). В ряде случаев изменение формы нежелательно (см. § 21.3) и именуется искажением сигнала.

5. Вычисление действующего значения тока. Действующее значение тока в цепи (рис 21.1).

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_3^2} = \sqrt{0,12^2 + 0,0453^2} = 0,128 \text{ А,}$$

где  $I_1 = 0,12 \text{ А}$  и  $I_3 = 0,0453 \text{ А}$  — действующие значения первой и третьей гармоник (21.3).

6. Вычисление мощностей. Активная мощность цепи

$$P = P_1 + P_3,$$

где  $P_1$  и  $P_3$  — активные мощности первой и третьей гармоник.

Активная мощность первой гармоники  $P_1 = U I_1 \cos \varphi = 0$ , так как угол сдвига фазы между напряжением и током этой гармоники  $\varphi_1 = 90^\circ$ , что ясно из сравнения выражения для  $i_1$  из (21.3) с выражением для напряжения  $u$ . Активная мощность третьей гармоники  $P_3 = U_3 I_3 \cos \varphi_3 = 0$ , так как заданное напряжение синусоидально и  $U_3 = 0$ .

В результате активная мощность цепи  $P = 0$ , что и следовало ожидать, так как по условию задачи потерями в конденсаторе пренебрегаем.

Аналогичным образом реактивная мощность цепи

$$Q = Q_1 + Q_3 = U_1 I_1 \sin \varphi_1 + U_3 I_3 \sin \varphi_3 = 100 \cdot 0,12 \sin 90^\circ + 0 = 12 \text{ вар.}$$

Полная мощность

$$S = UI = 100 \cdot 0,128 = 12,8 \text{ В} \cdot \text{А.}$$

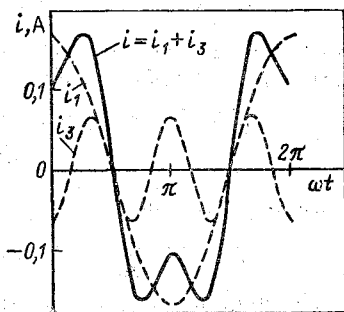


Рис. 21.3. Несинусоидальный ток в цепи рис. 21.1, состоящей из первой  $i_1$  и третьей  $i_3$  гармоник

Оказалось, что полная мощность

$$S = 12,8 \neq \sqrt{P^2 + Q^2} = 12 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

Такое неравенство имеет место в тех случаях, когда кривая напряжения отличается по форме от кривой тока.

Различие в форме кривых тока и напряжения характеризуют мощностью искажения

$$T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}.$$

Для рассматриваемой задачи

$$T = \sqrt{12,8^2 - 12^2} = 4,5 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

## 21.2. ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ПРИБОРОВ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЕРЕМЕННОГО НАПРЯЖЕНИЯ В ПОСТОЯННОЕ

### Условие задачи

Полупроводниковый диод, представляющий собой активное сопротивление  $R_{\text{пр}} = 10 \text{ Ом}$  при прохождении тока в прямом направлении (направление проводимости) и  $R_{\text{обр}} = 2000 \text{ Ом}$  при обратном направлении тока, включен последовательно с активным сопротивлением  $R_{\text{н}} = 500 \text{ Ом}$ . Цепь присоединена к сети переменного тока  $U = 220 \text{ В}$ ,  $f = 50 \text{ Гц}$ .

Построить вольт-амперные характеристики диода и всей цепи, а также кривую тока в цепи. Определить среднее и действующее значения тока, полную, активную мощность, мощность искажения источника и коэффициент мощности.

### Решение задачи

1. Основные свойства диода, его вольт-амперная характеристика. Диоды — это нелинейные элементы, которые применяют для выпрямления переменного напряжения (преобразования его в постоянное или пульсирующее). Направление проводимости диода обозначается на схемах треугольной стрелкой (рис. 21.4, диод Д). Сопротивление вентиля в проводящем (прямом) направлении в сотни или тысячи раз меньше, чем в непроводящем (обратном) направлении.

Для многих практических расчетов можно характеризовать диод двумя сопротивлениями (прямым и обратным), что и принято по условию задачи. При этом вольт-ампер-

ная характеристика диода содержит два линейных участка (рис. 21.5, участки  $OK$  и  $OL$ ), построенных при заданных  $R_{пр}$  и  $R_{обр}$  (построение характеристик с линейными участками см. в § 19.1 и 19.2). Заметим, что для участков  $OK$  и  $OL$  выбраны различные масштабы по оси ординат,

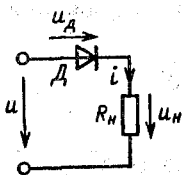


Рис. 21.4. Включение диода и нагрузки

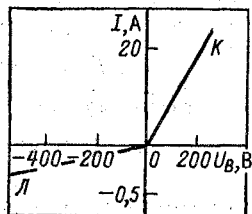


Рис. 21.5. Вольт-амперная характеристика диода, представленная двумя линейными участками

так как токи в режимах проводимости и непроводимости диода резко различаются.

*Активное нелинейное сопротивление с резко выраженной несимметрией характеристики (относительно начала координат) называется электрическим диодом.*

У реальных диодов оба участка вольт-амперной характеристики нелинейны, что в некоторых случаях приходится учитывать.

2. Построение вольт-амперной характеристики всей цепи. Поставленная задача для аналогичной цепи с активными сопротивлениями решалась раньше (§ 19.1 и 19.2) способом суммирования абсцисс (значений напряжения) соответствующих точек вольт-амперных характеристик отдельных элементов. Чтобы применить указанный метод в данной задаче, необходимо иметь вольт-амперные характеристики элементов цепи рис. 21.4.

Для диода требуемая зависимость уже построена (рис. 21.5). Однако для графических расчетов неудобен различный масштаб положительных и отрицательных значений тока. Поэтому вольт-амперная характеристика диода перенесена на рис. 21.6, а с одинаковым масштабом по оси токов (показана пунктиром). При выбранных масштабах участок вольт-амперной характеристики  $OK$  (рис. 21.6, а) практически совпадает с осью токов.



Для другого элемента цепи рис. 21.4 — сопротивления нагрузки  $R_n$  — вольт-амперная характеристика изображается прямой  $OT$  (рис. 21.6, а), проходящей через начало координат и точку  $T$ , координаты которой  $u_T = 500$  В и  $i_T = u_T/R_n = 500/500 = 1$  А.

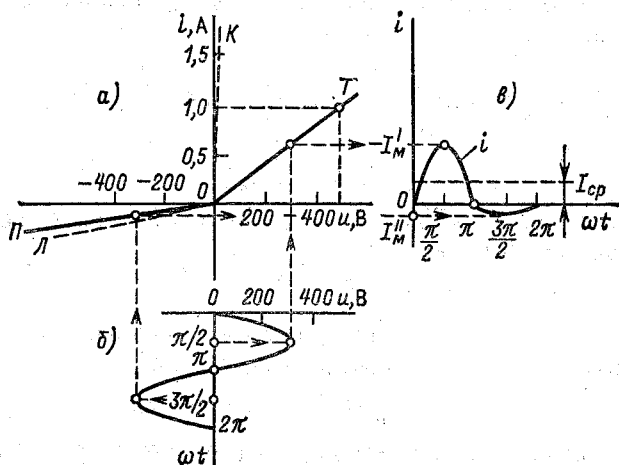


Рис. 21.6. Построение кривой тока в цепи рис. 21.5

Для получения вольт-амперной характеристики всей цепи поступаем так: выбираем несколько значений тока  $i$  (рис. 21.6, а), для каждого из них находим напряжения на диоде  $u_d$  и нагрузке  $u_n$ , а также напряжение цепи  $u = u_d + u_n$ . Найденные напряжения  $u$  (для выбранных значений тока  $i$ ) дают точки суммарной характеристики.

Построенный таким образом график вольт-амперной характеристики всей цепи при положительных значениях тока практически совпадает с прямой  $OT$  (рис. 21.6, а), а при отрицательных значениях тока изображается прямой  $OP$ .

3. Построение кривой тока. Имея графики зависимости  $u(i)$ , изображаемой  $ПО$  и  $OT$  на рис. 21.6, а, и синусоидального напряжения на выводах цепи  $u = 220 \sqrt{2} \sin \omega t$  (рис. 21.6, б), строим тем же методом, что и на рис. 21.2, график тока  $i$  (рис. 21.6, в).

Полученный график тока  $i$  несимметричен относительно оси  $\omega t$  ( $I'_M \gg I''_M$ ), и ток  $i$  имеет не равное нулю сред-

нее значение  $I_{\text{ср}}$  (рис. 21.6, в). Появление среднего значения или постоянной составляющей тока определяет эффект выпрямления переменного напряжения в постоянное.

4. Вычисление среднего и действующего значений тока. Положительная полуволна тока  $i$  (рис. 21.6, в) с амплитудой  $I'_M$  создает среднее за период значение

$$I'_{\text{ср}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} I'_M \sin \omega t d(\omega t) = \frac{1}{2\pi} I'_M \left[ -\cos \omega t \right]_0^{\pi} = \frac{I'_M}{2\pi} (-\cos \pi + \cos 0) = I'_M / \pi.$$

Аналогично среднее значение отрицательной полуволны тока (по модулю)

$$I''_{\text{ср}} = I''_M / \pi.$$

Ток  $I''_{\text{ср}}$  отрицательный, поэтому среднее за период значение тока в рассматриваемой цепи

$$I_{\text{ср}} = I'_{\text{ср}} - I''_{\text{ср}} = (I'_M - I''_M) / \pi. \quad (21.4)$$

Учитывая, что сопротивление всей цепи рис. 21.4 для положительной полуволны тока (в прямом направлении диода)

$$R_1 = R_{\text{пр}} + R_{\text{н}} = 10 + 500 = 510 \text{ Ом}$$

и для отрицательной (обратной) полуволны

$$R_2 = R_{\text{обр}} + R_{\text{н}} = 2000 + 500 = 2500 \text{ Ом},$$

преобразуем выражение (21.4) к виду

$$I_{\text{ср}} = \frac{U_M}{\pi} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad (21.5)$$

или

$$I_{\text{ср}} = \frac{220 \sqrt{2}}{\pi} \left( \frac{1}{510} - \frac{1}{2500} \right) = 0,155 \text{ А.}$$

Действующее значение тока определяется выражением

$$I = \frac{U_M}{2} \sqrt{\left( \frac{1}{R_1} \right)^2 + \left( \frac{1}{R_2} \right)^2}, \quad (21.6)$$

т. е. при наших данных

$$I = \frac{220 \sqrt{2}}{2} \sqrt{\left( \frac{1}{510} \right)^2 + \left( \frac{1}{2500} \right)^2} = 0,311 \text{ А.}$$

5. Вычисление мощностей. Активная мощность для цепи с синусоидальным напряжением может быть записана как

$$P_0 = U^2/R = U_m^2/2R.$$

Активная (средняя за период) мощность, создаваемая одной полуволной синусоидального напряжения, в 2 раза меньше, т.е.  $P_{0,5} = U_m^2/4R$ . Применяя последнее выражение отдельно для каждой полуволны напряжения питания, получаем активную мощность цепи

$$P = \frac{U_m^2}{4R_1} + \frac{U_m^2}{4R_2} = \frac{U_m^2}{4} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (21.7)$$

или при наших данных

$$P = \frac{(220\sqrt{2})^2}{4} \left( \frac{1}{510} + \frac{1}{2500} \right) = 57,3 \text{ Вт.}$$

Полная мощность цепи

$$S = UI = 220 \cdot 0,311 = 68,5 \text{ В} \cdot \text{А.}$$

Коэффициент мощности (условный)

$$\cos \varphi = P/S = 57,3/68,5 = 0,84.$$

*Оказалось, что в цепи, где реактивная мощность равна нулю, коэффициент мощности меньше единицы и источник питания используется плохо. В чем же причина?*

Это объясняется тем, что в отрицательный полупериод (обратный режим диода) ток в цепи весьма мал, хотя напряжение на выводах такое же, как и в положительный полупериод. Так как формы кривых тока и напряжения цепи отличаются друг от друга, то мощность искажения не равна нулю:

$$T = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{68,5^2 - 57,3^2} = 37,5 \text{ В} \cdot \text{А.}$$

### 21.3. КАТУШКА СО СТАЛЬНЫМ МАГНИТОПРОВОДОМ, ПИТАЕМАЯ ПЕРЕМЕННЫМ НАПРЯЖЕНИЕМ

#### Условие задачи

Обмотка с числом витков  $w = 380$  и активным сопротивлением  $R = 3,6 \text{ Ом}$  размещается на магнитопроводе из электротехнической стали 1311 (Э21). Толщина листов стали 0,5 мм, а всего пакета 50 мм. Остальные размеры (в миллиметрах) указаны на рис. 21.7. Стальные листы

разделены изоляцией, занимающей 11,4 % объема магнитопровода.

Вычислить ток в обмотке, если она присоединена к сети переменного тока (50 Гц) напряжением 220 В. Построить векторную диаграмму. Магнитным потоком рассеяния пренебречь.

### Решение задачи

1. Особенности катушки индуктивности с магнитопроводом. В гл. 9 рассматривался расчет тока в катушке индуктивности по заданным ее параметрам ( $R$  и  $L$ ) и напряжению на выводах. Такая задача, как известно, очень проста и решается по формуле

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}.$$

Можно ли так рассчитать ток в рассматриваемой задаче? Если нет, то что нового вносит магнитопровод?

Во-первых, индуктивность катушки с магнитопроводом зависит от тока в ее обмотке, так как магнитная проницаемость материала магнитопровода различна при различных индукциях. Иначе говоря, цепь, содержащая катушку с магнитопроводом, относится к нелинейным цепям.

Во-вторых, при прохождении переменного тока по обмотке магнитопровод намагничивается в течение четверти периода, размагничивается в следующую четверть периода, затем намагничивается в обратном направлении и т. д. На перемагничивание, а также вследствие образования вихревых токов в магнитопроводе расходуется энергия, оцениваемая мощностью потерь в стали.

В-третьих, при синусоидальном напряжении на обмотке ток в обмотке имеет синусоидальную форму только в том случае, если магнитная индукция в магнитопроводе не выходит за пределы линейного участка кривой намагничивания. Поскольку во многих практических случаях значения магнитной индукции соответствуют криволинейному участку («колону») кривой намагничивания, ток в обмотке получается несинусоидальным. При построении векторных диаграмм, расчете потерь и составлении схем замещения катушки несинусоидальный ток заменяют равноценным синусоидальным, вводя поправочный коэффициент (на не-

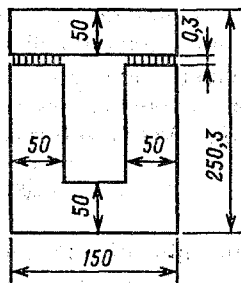


Рис. 21.7. К условию задачи § 21.3

синусоидальность). Равноценный синусоидальный ток должен иметь такое же действующее значение, как и несинусоидальный, и создавать такие же потери.

Указанные особенности катушки с магнитопроводом на переменном токе определяют и метод расчета. Ток в обмотке рассматривают состоящим из двух составляющих: намагничивающей (реактивной)  $I_\mu$  и активной  $I_a$ . Первая составляющая (намагничивающая) определяется магнитными свойствами цепи. Вторая составляющая (активная) определяется по мощности потерь в стали.

Ток в обмотке равен геометрической сумме намагничивающей и активной составляющих:

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_\mu^2}. \quad (21.8)$$

2. Вычисление намагничивающего тока. Прежде всего определим магнитный поток в магнитопроводе, приняв наводимую им ЭДС в обмотке численно равной напряжению на выводах, т.е.  $E=U=220$  В.

Это допущение практически вполне возможно, так как падение напряжения на активном сопротивлении обмотки не превышает нескольких процентов напряжения  $U$ . Таким образом,

$$\Phi_M = \frac{E}{4,44f\omega} = \frac{220}{4,44 \cdot 50 \cdot 380} = 2,63 \cdot 10^{-3} \text{ Вб.}$$

Теперь определим максимальное значение магнитной индукции с учетом заполнения изоляцией 11,4% площади поперечного сечения магнитопровода.

Сечение стали  $S_{ст} = S - 0,114 S$ , откуда  $S_{ст} = 0,886 S = 0,886 (5 \cdot 5) = 22 \text{ см}^2 = 22 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ . Поэтому

$$B_M = \frac{\Phi_M}{S_{ст}} = \frac{2,63 \cdot 10^{-3}}{22 \cdot 10^{-4}} = 1,2 \text{ Тл.}$$

По таблице (см. прилож. 4) для стали марки 1311 (Э21) находим максимальное значение напряженности поля  $H_{ст,м} = 840 \text{ А/м}$ . Для воздушных зазоров  $H_{в,м} = B_M / \mu_0 = 1,2 / 4\pi \cdot 10^{-7} = 96 \cdot 10^4 \text{ А/м}$ .

По закону полного тока максимальная МДС

$$I_{\mu \max} \omega = H_{ст,м} l_{ст} + H_{в,м} l_{в} = 840 \cdot 0,6 + 96 \cdot 10^4 \times \\ \times 6 \cdot 10^{-4} = 1080 \text{ А,}$$

где  $l_{ст} = 0,6 \text{ м}$  и  $l_{в} = 6 \cdot 10^{-4} \text{ м}$  найдены по рис. 21.7.

Намагничивающий ток при указанной магнитной ин-

дукции можно принять практически синусоидальным (для стали 1311 насыщения еще нет) и найти его действующее значение

$$I_{\mu} = \frac{I_{\mu \max} \omega}{\sqrt{2} \omega} = \frac{1080}{\sqrt{2} \cdot 380} = 2,0 \text{ А.}$$

3. Вычисление активной составляющей тока. Для определения активной составляющей тока нужно рассчитать мощность потерь в стали; она зависит от свойств материала магнитопровода. Поэтому мощность потерь рассчитывается по эмпирическим формулам (либо по формулам, содержащим эмпирические коэффициенты) или определяется экспериментально. Воспользуемся наиболее простой из них

$$p_c = p_{1/50} B_m^2,$$

где  $p_c$  — удельная мощность потерь в стали, Вт/(кг·Тл<sup>2</sup>);  $B_m$  — максимальное значение магнитной индукции, Тл;  $p_{1/50}$  — удельная мощность потерь при индукции 1 Тл и частоте 50 Гц, приводимая для различных сортов стали в ГОСТ 21427.2—83.

Для рассматриваемой стали по ГОСТ  $p_{1/50} = 2,5$  Вт/(кг×Тл<sup>2</sup>).

Удельная мощность потерь  $p_c = 2,5(1,2)^2 = 3,6$  Вт/кг. Принимая плотность стали 7800 кг/м<sup>3</sup>, находим массу стальной части (без изоляции) магнитопровода:

$$G = 7800 S_{\text{ст}} l_{\text{ст}} = 7800 \cdot 22 \cdot 10^{-4} \cdot 0,6 = 10,3 \text{ кг,}$$

а вся мощность потерь в стали

$$P_c = p_c G = 3,6 \cdot 10,3 = 37,1 \text{ Вт.}$$

Активная составляющая тока

$$I_a = P_c / U = 37,1 / 220 = 0,17 \text{ А.}$$

Ток в обмотке

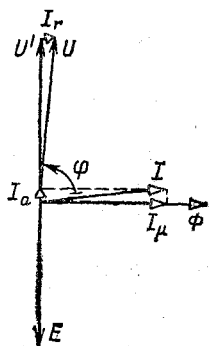
$$I = \sqrt{I_{\mu}^2 + I_a^2} = \sqrt{2^2 + 0,17^2} \approx 2 \text{ А.}$$

4. Векторная диаграмма. Построение векторной диаграммы (рис 21.8) начнем с вектора магнитного потока  $\Phi$ , он индуцирует в обмотке ЭДС  $E$ , отстающую по фазе на 90°. Этот фазовый сдвиг легко объяснить, если вспомнить, что ЭДС индукции определяется скоростью изменения магнитного потока  $e = -\omega d\Phi/dt$ .

Напряжение  $U$  на обмотке состоит из двух частей. Пер-

вая  $U'$  уравнивает наводимую ЭДС, равна ей и противоположна по фазе. Вторая равна падению напряжения  $IR = 2 \cdot 3,6 = 7,2$  В. При расчете цепи принималось  $U = U' = E$ , так как  $IR \ll U$  ( $7,2 \text{ В} \ll 220 \text{ В}$ ).

Активная составляющая тока  $I_a$  совпадает по фазе с напряжением  $U'$ , а реактивная  $I_\mu$  отстает на угол  $90^\circ$ , т. е. совпадает по фазе с магнитным потоком, что и следовало ожидать. Отложив в масштабе токи  $I_a$  и  $I_\mu$ , построим вектор тока  $I$  в обмотке.



### Дополнительные вопросы к задаче

1. Как выполнить расчет цепи с учетом падения напряжения в обмотке? Начать расчет надо так, как было показано в задаче, т. е. принять  $U = U' = E$  и определить падение напряжения на обмотке. Затем по напряжению на выводах  $U$  и падению напряжения в обмотке  $IR$  найти новое значение  $U' = E$  и повторить весь расчет цепи.

Рис. 21.8. Векторная диаграмма цепи со сталью без учета магнитного потока рассеяния

Такой путь расчета называется методом последовательного приближения; к нему приходится прибегать не часто, так как для большинства практических случаев можно принять  $U = E$ .

2. Можно ли отдельно вычислить потери от гистерезиса и вихревых токов? Для индукции более 1 Тл удельные потери от гистерезиса  $P_r = k_r f B^{2,4}$  Вт/кг, где  $k_r = (2,5 \div 4,5) \cdot 10^{-2}$  Вт/(кг·Гц·Тл<sup>2</sup>) в зависимости от сорта стали. Принимая  $k_r = 3,0 \cdot 10^{-2}$ , получаем  $p_r = 3,0 \cdot 10^{-2} \cdot 50 \cdot (1,2)^2 = 2,16$  Вт/кг и удельные потери от вихревых токов  $p_v = p_c - p_r = 3,6 - 2,16 = 1,44$  Вт/кг.

Учитывая, что удельные потери от вихревых токов определяются как  $p_v = k_v f^2 B_m^2$ , Вт/кг, имеем в нашем случае

$$k_v = \frac{p_v}{f^2 B_m^2} = \frac{1,44}{50^2 \cdot 1,2^2} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ Вт/(кг} \cdot \text{Гц}^2 \cdot \text{Тл}^2\text{)}.$$

Полученное значение коэффициента  $k_v$  подходит для электротехнических сталей при толщине листа 0,5 мм.

3. Как изменятся потери в стали, если

увеличить частоту в 10 раз? Поскольку потери от гистерезиса пропорциональны частоте в первой степени, а потери от вихревых токов — частоте во второй степени (см. предыдущий пункт), окажется, что  $p_r = 21,6$  Вт/кг и  $p_v = 144$  Вт/кг.

Таким образом, с увеличением частоты начинают преобладать потери от вихревых токов и их ослаблению придется уделять главное внимание. Для подавления вихревых токов применяют более тонкие пластины (0,1 и 0,05 мм) или мелкозернистые материалы (ферриты).

4. Как измерить потери в стали? Вначале нужно измерить мощность потерь в меди обмотки, например питая обмотку постоянным током. При этом опыте потери в стали будут отсутствовать. Зная потери в меди, легко определить активное сопротивление обмотки. Затем нужно измерить общие потери в меди и стали и вычислить потери в стали как разность общих потерь и потерь в меди.

#### 21.4. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

373. К источнику с напряжением  $u = 4 \sin \omega t$  присоединен нелинейный элемент, вольт-амперная характеристика которого  $i = 0,08u^3$ . Определить аналитически и графически зависимость  $i(t)$ . Найти максимальное значение тока.

374. Цепь из параллельно соединенных нелинейного сопротивления, вольт-амперная характеристика которого  $i = 0,2u^2$  (где ток — в миллиамперах, напряжение — в вольтах), и линейного сопротивления  $R = 100$  Ом присоединена к напряжению  $u = 60 \sin \omega t$ , В. Определить мгновенное и действующее значения общего тока цепи. Вычислить полную и активную мощность и мощность искажения цепи.

375. Полупроводниковый диод, сопротивление которого в прямом направлении  $R_{пр} = 10$  Ом и в обратном направлении  $R_{обр} = 2000$  Ом, работает на активную нагрузку  $R_n = 700$  Ом. Цепь присоединена к напряжению  $u = 180 \sin \omega t$ , В. Определить среднее и действующее значения тока, а также полную и активную мощности источника.

376. Идеальный диод, характеризуемый сопротивлениями в прямом направлении  $R_{пр} = 0$  и в обратном направлении  $R_{обр} = \infty$ , включен последовательно с линейным сопротивлением  $R$  в сеть переменного тока 220 В. Определить постоянную составляющую напряжения на сопротивлении  $R$ .

377. Построить график тока в обмотке с числом витков  $w = 200$ , размещенной на магнитопроводе из стали 1212 (Э12) с площадью поперечного сечения  $9$  см<sup>2</sup> и длиной средней магнитной линии  $20$  см, если магнитный поток синусоидальный с максимальным значением  $14,4 \cdot 10^{-4}$  Вб



и частотой  $f=50$  Гц. Принять начальную фазу магнитного потока равной нулю (таблица кривой намагничивания приведена в прилож. 4).

378. В условиях задачи 376 определить максимальное обратное напряжение на диоде и максимальное значение тока.

379. Аккумуляторная батарея с ЭДС  $E=78$  В заряжается от источника синусоидального напряжения  $U=110$  В через диод и последовательно включенное сопротивление  $R=2,5$  Ом. Диод считать идеальным ( $R_{пр}=0$ ,  $R_{обр}=\infty$ ). Построить кривую тока в цепи и определить (графически) среднее значение тока.

380. Обмотка с активным сопротивлением  $R=2$  Ом расположена на магнитопроводе и питается от сети переменного тока с напряжением 220 В. Ток в катушке 2,5 А, коэффициент мощности 0,1. Определить мощности потерь в меди и стали.

381. По катушке с магнитопроводом при питании от источника постоянного тока с напряжением 40 В проходил ток 10 А, а при питании от сети переменного тока с напряжением 220 В и частотой 50 Гц — ток 2 А. При этом  $\cos \varphi=0,12$ . Определить мощности потерь в меди и стали.

382. К сети переменного тока ( $f=50$  Гц) присоединена катушка с магнитопроводом. Максимальное значение магнитного потока в магнитопроводе 0,01 Вб. Ток в обмотке 10 А, ее сопротивление 0,4 Ом, число витков 100, общая мощность потерь 440 Вт. Определить напряжение сети, а также активную и намагничивающую составляющие тока в катушке.

383. Ток в катушке с магнитопроводом равен 2 А, а общая мощность потерь 20 Вт. Определить составляющие потерь в меди и стали, если при вынутом магнитопроводе ток и общая мощность возрастают до 8 А и 64 Вт.

384. Удельную мощность потерь в стали можно определить по формуле

$$P_c = K_v f^2 B_m^2 + K_r f B_m^2,$$

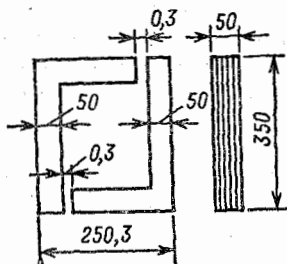
где  $K_v$  и  $K_r$  — соответственно коэффициенты потерь от вихревых токов и гистерезиса. Определить эти коэффициенты для катушки с магнитопроводом, которая при максимальной индукции 1,4 Тл на частоте 40 Гц имеет удельную мощность потерь 3,13 Вт, а на частоте 50 Гц (при той же индукции) — 4,12 Вт.

385. На магнитопроводе из стали 1511 (Э41) толщиной листа 0,5 мм, площадью поперечного сечения 16 см<sup>2</sup> и длиной средней магнитной линии 44 см расположена обмотка с числом витков 480 и активным сопротивлением 20 Ом. Определить ток в обмотке, его активную и намагничивающую составляющие, построить векторную диаграмму, если напряжение на обмотке 120 В при частоте 50 Гц. Удельные потери в стали  $P_{1/50}=1,6$  Вт/(кг·Тл<sup>2</sup>).

386. Обмотка с числом витков 480 расположена на магнитопроводе

из стали 1512 (Э42) толщиной листа 0,35 мм (рис. 21.9), 11 % объема магнитопровода составляет изоляция. Напряжение источника питания 220 В. Определить ток в обмотке, его намагничивающую и активную составляющие, построить векторную диаграмму. Активным сопротивлением обмотки пренебречь. Принять  $P_{1/50} = 1,2 \text{ Вт}/(\text{кг} \cdot \text{Тл}^2)$ .

387. Для катушки из предыдущей задачи вычислить параметры последовательной и параллельной электрических схем замещения.



## 21.5. ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ. 21

373.  $0,384 \sin \omega t - 0,128 \sin 3\omega t$ ; 0,512. Рис. 21.9. К задаче 386

374.  $0,35 + 0,6 \sin \omega t + 0,36 \sin(2\omega t - \pi/2)$  А; 0,61 А; 25,9 В·А; 18 Вт; 18,6 В·А.

375. 59,5 мА; 131 мА; 16,7 В·А; 14,4 Вт.

376. 100,5 В.

377.

$t$ , мс	0	2,5	5,0	7,5	10
$i$ , А	0	0,44	0,73	0,44	0

378. 475 В; 0,316 А.

379. 3,8 А.

380. 12,5 Вт; 42,5 В.

381. 16 Вт; 36,8 Вт.

382. 222 В; 1,6 А; 9,8 А.

383. 4 Вт; 16 Вт.

384.  $3,2 \cdot 10^{-2} \text{ Вт}/(\text{кг} \cdot \text{Гц}^2 \cdot \text{Тл}^2)$ ;  $2 \cdot 10^{-4} \text{ Вт}/(\text{кг} \cdot \text{Гц} \cdot \text{Тл}^2)$ .

385. 106 мА; 36 мА; 94 мА.

386. 2 А; 1,98 А; 0,09 А.

387. Для последовательной схемы 5 и 110 Ом; для параллельной 2,4 и 0,11 кОм.

## ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

### 22.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАЧАЛЬНЫХ И КОНЕЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ТОКОВ И НАПРЯЖЕНИЙ

#### Условие задачи

Цепь рис. 22.1, параметры которой  $R_1=R_3=60 \text{ Ом}$ ,  $R_2=500 \text{ Ом}$ ,  $L=0,3 \text{ Гн}$ ,  $C=2 \text{ мкФ}$ , присоединяется (рубильником  $P$ ) в момент времени  $t=0$  к источнику питания с напряжением  $U=60 \text{ В}$ . Определить значения токов ветвей, общего тока цепи, а также напряжений на индуктивности и емкости для двух моментов времени: а) при  $t=0$ , т. е.

сразу же после замыкания рубильника; б) при  $t=\infty$ , т. е. спустя бесконечно большое время после замыкания рубильника. Кроме того, вычислить постоянные времени переходного процесса.

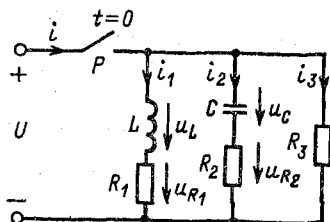


Рис. 22.1. Присоединение к источнику питания ветвей с индуктивностью, емкостью и сопротивлением

#### Решение задачи

1. Особенности схемы и ее режима. В заданной цепи (рис. 22.1) в отличие от рассмотренных в предыдущих главах на схеме обозначена коммутация цепи (за-

мыкание рубильника  $P$ ). Это означает, что цепь исследуется в режиме перехода от одного установившегося состояния, существовавшего до коммутации, в другое установившееся состояние, которое наступит спустя значительное время после коммутации (теоретически при  $t=\infty$ ). Этот режим, называемый переходным процессом, длится, как доказано, бесконечно долго, или в наших условиях в интервале времени от  $t=0$  до  $t=\infty$ .

Возникает вопрос: только ли указанный вид коммутации (включение источника питания) вызывает переходный процесс? Конечно, нет. Любое внезапное изменение питающего напряжения, включения и выключения пассивных или активных ветвей может вызывать переходный процесс.

При переходном процессе токи и напряжения цепи явля-

ются функциями времени и называются переходными токами (напряжениями). Полное исследование этих функций составляет содержание следующих задач (§ 22.2, 22.3 и др.).

Целью этой задачи является нахождение только начальных (при  $t=0$ ) и конечных (при  $t=\infty$ ) значений переходных токов и напряжений на примере цепи рис. 22.1.

Какова наиболее целесообразная последовательность решения данной задачи?

Поскольку цепь рис. 22.1 состоит из трех параллельных ветвей, а в таком соединении токи ветвей взаимно независимы, имеется возможность рассматривать процесс включения к напряжению источника  $U$  каждой ветви в отдельности. Так и поступим.

2. Определение тока и напряжений ветви с индуктивностью. Поскольку продолжительность коммутации (в нашем случае время замыкания рубильника  $P$ ) принимается равной нулю, удобно пользоваться обозначениями: 1)  $t=(0-)$  — для момента, предшествовавшего коммутации (рубильник еще не замкнут), и 2)  $t=0+$  — для момента завершения коммутации (первый момент замыкания рубильника).

До коммутации или при разомкнутом рубильнике  $P$  (рис. 22.1) в ветви  $R_1, L$  ток отсутствовал, т. е. при  $t=0-$  ток  $i_1(0-)=0$ .

В первый момент после замыкания рубильника  $P$ , т. е. в момент начала переходного процесса ( $t=0+$ ), ток в цепи  $i_1(0+)$  будет таким же, как перед коммутацией. Это объясняется тем, что энергия, запасаемая в магнитном поле катушки  $W=Li_1^2/2$ , не может изменяться скачком, а значит, не изменится скачком и ток в индуктивности  $L$  и в цепи  $R_1, L$  (при изменении энергии скачком получается бесконечно большая мощность, а в реальных цепях нет источников и потребителей бесконечной мощности).

Следовательно,  $i_1(0-)=i_1(0+)$ , или в нашем случае  $i_1(0+)=0$ .

*Итак, ток в индуктивности не может измениться скачком (первый закон коммутации). В наших условиях это означает, что ток не изменится в момент коммутации (в момент замыкания рубильника).*

Сейчас легко определить (для рассматриваемого момента времени) напряжения  $u_1$  (на индуктивности) и  $u_{R_1}$  (на сопротивлении  $R_1$ ). Очевидно, что до коммутации эти напряжения  $u_{L_1}(0-)=0$  и  $u_{R_1}(0-)=0$ .

В момент коммутации при  $(t=0+)$  по закону Ома напряжение на сопротивлении  $u_{R_1}(0+) = R_1 i_1(0+) = R_1 \times 0 = 0$ , а напряжение на индуктивности получим как разность напряжений на ветви и на сопротивлении  $R_1$ , т. е.

$$u_L(0+) = U - u_{R_1}(0+) = 60 - 0 = 60 \text{ В.}$$

Оказалось, что в момент коммутации напряжение на индуктивности изменяется скачком [в наших условиях от  $u_L(0-) = 0$  до  $u_L(0+) = 60 \text{ В}$ ].

*Таким образом, в индуктивности возможен и обычно имеет место скачок напряжения.*

Перейдем к другому крайнему режиму переходного процесса — установившемуся, который наступает спустя длительное время после коммутации (при  $t = \infty$ ). В этом режиме по ветви  $R_1, L$  проходит постоянный ток, при котором индуктивное сопротивление  $X_L = \omega L = 0 \cdot L = 0$ .

Общее сопротивление ветви равно сопротивлению  $R_1$ , а установившийся ток

$$i_{1y} = i_1(\infty) = U/R_1 = 60/60 = 1 \text{ А.}$$

В этих условиях напряжение на ветви  $U$  приложено только к сопротивлению  $R_1$ , т. е.  $u_{R_1}(\infty) = U = 60 \text{ В}$ .

3. Определение напряжений и тока ветви с емкостью. Прежде всего выясним, может ли напряжение на конденсаторе измениться скачком? Если допустить скачок напряжения  $u_C$  (рис. 22.1), то при этом ток в емкости

$$i_2 = (C du_C/dt) \rightarrow \infty,$$

что невозможно, так как в любой реальной электрической цепи не может быть создан бесконечно большой ток. К этому же выводу можно прийти иначе. Если допустить скачок напряжения  $u_C$ , то энергия конденсатора  $w = C u_C^2/2$  тоже изменится скачком, что потребует бесконечно большой мощности цепи, т. е. опять же невозможный результат.

*Итак, напряжение на емкости не может измениться скачком (второй закон коммутации). Математически этот закон записывается так:  $u_C(0-) = u_C(0+)$ .*

В наших условиях до коммутации (рубильник  $P$  разомкнут) конденсатор не был заряжен. Поэтому при  $t=0$  напряжение на емкости  $u_C(0-) = 0$ . Но напряжение на конденсаторе в момент коммутации не изменяется, поэтому сразу после замыкания рубильника (в момент времени  $t=0+$ )  $u_C(0+) = 0$ .

При разомкнутом рубильнике  $P$  рассматриваемая ветвь  $R_2, C$  отключена от источника питания, а потому в режиме до коммутации ток ветви  $i_2(0-) = 0$  и на сопротивлении  $R_2$  напряжение  $u_{R_2}(0-) = 0$ .

В первый момент после коммутации, как было показано, напряжение на емкости  $u_C(0+) = 0$ , поэтому на сопротивлении  $R_2$  действует напряжение

$$u_{R_2}(0+) = U - u_C(0+) = U - 0 = U = 60 \text{ В},$$

а ток этой ветви (ток в сопротивлении  $R_2$ )

$$i_2(0+) = u_{R_2}(0+)/R_2 = U/R_2 = 60/500 = 0,12 \text{ А}.$$

Оказалось, что в момент коммутации напряжение на сопротивлении изменяется скачком (от 0 до 60 В). Ток ветви также делает скачок (от 0 до 0,12 А).

Перейдем к другому крайнему режиму переходного процесса — установившемуся, наступающему при  $t = \infty$ .

В этом режиме ветвь  $R_2, C$  присоединена к постоянному напряжению. Ее емкостное сопротивление  $X_C = 1/\omega C = \infty$ , ток ветви  $i_{2y} = i_2(\infty) = 0$ . Следовательно, напряжение  $u_{R_2}(\infty) = R_2 i_2(\infty) = 0$ , а конденсатор заряжен до напряжения

$$u_{C(y)} = u_C(\infty) = U = 60 \text{ В}.$$

4. Определение напряжения и тока в сопротивлении  $R_3$ . Рассматривая схему рис. 22.1, легко убедиться, что на сопротивлении  $R_3$  напряжение отсутствует при разомкнутом рубильнике и равно напряжению  $U$  при замкнутом рубильнике, т. е. можно записать

$$u_{R_3}(0-) = 0; \quad u_{R_3}(0+) = u_{R_3}(\infty) = U = 60 \text{ В}.$$

Соответственно и ток ветви

$$i_3(0-) = 0,$$

а

$$i_3(0+) = i_3(\infty) = u_{R_3}(\infty)/R_3 = 60/60 = 1 \text{ А}.$$

Таким образом, напряжение и ток в сопротивлении  $R_3$  в момент коммутации изменяются скачком и сразу достигают предельных (установившихся) значений.

5. Определение общего тока. Сводная таблица результатов. Полученные результаты решения задачи сведены в табл. 22.1, по которой легко обнаружить выполнение законов коммутации, а также условия

возникновения скачков напряжения или тока, о чем говорилось выше, и это представляется читателю проследить самостоятельно.

Таблица 22.1

$t$	$i_1, A$	$i_2, A$	$i_3, A$	$i, A$	$u_L, B$	$u_{R_1}, B$	$u_C, B$	$u_{R_2}, B$	$u_{R_3}, B$
0—	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0+	0	0,12	1,0	1,12	60	0	0	60	60
$\infty$	1,0	0	1,0	2,0	0	60	60	0	60

Кроме того, используя первый закон Кирхгофа, можно определить общий ток цепи  $i = i_1 + i_2 + i_3$ , что и выполнено в табл. 22.1 для трех обозначенных моментов времени.

Имеется возможность выполнить проверку результатов вычислений, применяя второй закон Кирхгофа для каждой ветви схемы рис. 22.1. Действительно, в режиме замкнутого рубильника  $P$  (рис. 22.1), т. е. для моментов времени  $t = 0+$  и  $t = \infty$  (табл. 22.1), сумма напряжений участков любой ветви равна напряжению на цепи  $U = 60$  В.

6. Вычисление постоянных времени. При исследовании переходных процессов в простейших цепях вводят понятие о постоянной времени  $\tau$ , которая характеризует скорость изменения переходных тока или напряжений в ветви с индуктивностью и емкостью.

Для ветви из последовательно включенных индуктивности  $L$  и сопротивления  $R$  постоянная времени  $\tau = L/R$ ; она измеряется в  $1 \text{ н/Ом} = \text{Ом} \cdot \text{с/Ом} = \text{с}$ .

$$\tau_1 = L/R_1 = 0,3/60 = 0,005 \text{ с} = 5 \text{ мс.}$$

Для ветви из последовательно включенных емкости  $C$  и сопротивления  $R$  постоянная времени  $\tau = RC$ ; она измеряется в  $\text{Ом} \cdot \text{Ф} = \text{Ом} \cdot \text{Кл/В} = \text{Ом} \cdot \text{А} \cdot \text{с/В} = \text{с}$ .

При этом для ветви  $R_2, C$  (рис. 22.1) постоянная времени

$$\tau_2 = R_2 C = 500 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 10^{-3} \text{ с} = 1 \text{ мс.}$$

Постоянная времени — важная для практических целей величина. Ее используют для характеристики длительности переходного процесса.

*Теоретически переходный процесс длится бесконечно долго, но практически его можно считать законченным за время  $t = (4 \div 5)\tau$ .*

Это означает, что в ветви  $R_1, L$  (рис. 22.1) ток  $i_1$  нарастает до предельного установившегося значения за время

$$t_1 \approx (4 \div 5) \tau_1 = (4 \div 5) \cdot 5 = 20 \div 25 \text{ мс.}$$

Аналогично конденсатор  $C$  (рис. 22.1) заряжается до предельного напряжения за время

$$t_2 \approx (4 \div 5) \tau_2 = (4 \div 5) \cdot 1 = 4 \div 5 \text{ мс.}$$

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Каково сопротивление индуктивности  $L$  и емкости  $C$  (рис. 22.1) в первый момент времени — после замыкания рубильника  $P$ ? При решении задачи было получено для индуктивной ветви значение тока  $i_1(0+) = 0$ , т. е. в этой ветви тока нет в первый момент после замыкания рубильника, что возможно при бесконечно большом сопротивлении индуктивности. Иначе говоря, *в первый момент включения цепи (при нулевых начальных условиях) индуктивность ведет себя как обрыв цепи.*

Для напряжения на емкости (при  $t=0+$ ) было получено  $u_C(0+) = 0$ . Это означает, что *в первый момент времени после замыкания рубильника емкость имеет сопротивление, равное нулю, т. е. она представляет собой участок, замкнутый накоротко.*

Следует иметь в виду, что указанные свойства индуктивности и емкости справедливы только для первого момента времени после включения питания цепи рис. 22.1.

2. Каким будет процесс свечения ламп  $L_1$  и  $L_2$  (рис. 22.2) с момента замыкания рубильника  $P$ ? Цепь рис. 22.2 представляет собой часть цепи рис. 22.1 при замене сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$  осветительными лампами  $L_1$  и  $L_2$ .

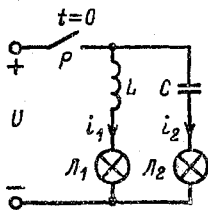


Рис. 22.2. К дополнительному вопросу 2

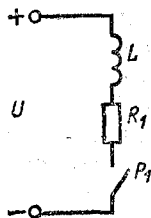


Рис. 22.3. К дополнительному вопросу 3



Если пренебречь тепловой инерцией накала осветительных ламп, то переходный процесс в цепи рис. 22.2 аналогичен рассмотренному в цепи рис. 22.1 для первой и второй ветвей.

При принятом допущении в первый момент после замыкания рубильника  $P$  лампа  $L_1$  не будет гореть, так как ток  $i_1=0$ . С течением времени свечение лампы будет увеличиваться и через время  $t_1=20\div 25$  мс (см. п. 6 решения задачи) достигнет практически максимальной яркости.

Иная картина свечения лампы  $L_2$ . В первый момент замыкания рубильника  $P$  отсутствует напряжение на емкости (она как бы замкнута накоротко — см. предыдущий дополнительный вопрос) и на лампе  $L_2$  действует полное напряжение питания  $U$  (при этом ток  $i_2$  также максимален), что обеспечивает наибольшую яркость свечения.

По мере заряда конденсатора напряжение на лампе  $L_2$  уменьшается и соответственно ослабляется ее свечение. Через время  $t_2=4\div 5$  мс (см. п. 6 решения задачи) лампа практически полностью погаснет.

3. Как выполняется закон коммутации при обрыве ветви с индуктивностью? Если в ветвь  $R_1, L$  (рис. 22.1) включить рубильник  $P_1$  (рис. 22.3) и в установившемся режиме ветви, когда ее ток, полученный в задаче,  $i_{1y}=1$  А, разомкнуть рубильник, то, казалось бы, ток  $i_1$  скачком уменьшится до нуля, но это невозможно (противоречит первому закону коммутации).

В действительности при размыкании  $P_1$  между контактами рубильника образуется электрическая дуга, т. е. ток сразу не исчезает, что и подтверждает закон коммутации.

Поэтому на практике для устройств включения и выключения индуктивных цепей применяют схемы защиты от электрической дуги и обгорания контактов.

4. Какими будут начальные и конечные значения тока  $i_1$  и напряжения  $u_c$  (рис. 22.1) при размыкании рубильника  $P$ ? Если в установившемся режиме цепи рис. 22.1 разомкнуть рубильник  $P$ , то в соответствии с законами коммутации, не допускающими скачки тока  $i_1$  и напряжения  $u_c$ , получим для них начальные значения  $i_{1нач}=i_{1y}=1$  А и  $u_{cнач}=u_{cy}=60$  В, т. е. начальные значения нового переходного процесса равны установившимся значениям, полученным в предыдущем переходном процессе (при замыкании рубильника  $P$ ).

В цепи с разомкнутым рубильником  $P$  конечные значе-

ния тока  $i_1$  и напряжения  $u_C$  очевидны: они равны нулю, так как из цепи рис. 22.1 исключается источник питания.

5. Возможно ли получить скачки тока или напряжения в реальных электрических цепях (устройствах)? Скачки тока или напряжения, как было показано при решении задачи, возможны в идеализированных элементах цепи: в сопротивлении (скачки тока и напряжения), в индуктивности (скачки напряжения), в емкости (скачки тока).

Однако любой реальный элемент (резистор, катушка индуктивности, конденсатор) имеет все виды параметров  $R$ ,  $L$  и  $C$ . При этом индуктивность препятствует скачку тока, а емкость — скачку напряжения.

Следовательно, в реальных цепях (устройствах) невозможно получить идеальный скачок тока или напряжения, но к этому можно приблизиться, если в реальном элементе цепи существенно преобладает основной параметр, к чему в практических условиях часто стремятся.

## 22.2. ЦЕПЬ $R, L$ В РЕЖИМЕ ВКЛЮЧЕНИЯ И ВЫКЛЮЧЕНИЯ ПОСТОЯННОГО НАПРЯЖЕНИЯ

### Условие задачи

Обмотка реле  $P$  (рис. 22.4), принцип действия которого описан ниже, имеет сопротивление  $R=400$  Ом и индуктивность  $L=6$  Гн. Контакты  $K1$  замыкают цепь питания обмотки через каждые 75 мс на время  $t_3=45$  мс, после чего эти же контакты размыкаются на время  $t_p=30$  мс.

Контакты  $K1$  и  $K2$  так взаимосвязаны, что при замыкании первых размыкаются вторые и наоборот.

Построить график изменения тока в обмотке, полагая ее индуктивность  $L$  постоянной. Определить время срабатывания и отпускания реле, если ток притяжения  $I_{\text{п}}=12$  мА, ток отпускания  $I_0=8$  мА, напряжение источника  $U=12$  В и сопротивление  $R'=400$  Ом.

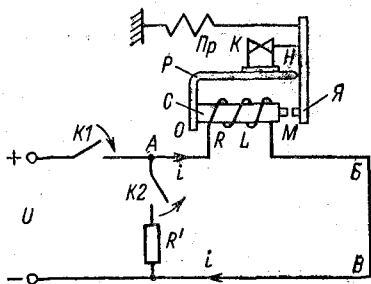


Рис. 22.4. Схема питания обмотки реле

## Решение задачи

1. Режим цепи. Для управления режимом электрических цепей весьма широко пользуются различными электромагнитными механизмами и в частности реле, принцип действия которого можно уяснить из схемы рис. 22.4.

При прохождении тока по обмотке реле к сердечнику  $C$  притягивается якорь  $Я$ , составляющий часть магнитной цепи  $ОМНО$ . При повороте якоря вокруг точки  $Н$  размыкаются контакты  $K$  реле. Пружина  $Пр$  создает противодействующий момент (препятствует притяжению якоря). По условию задачи цепь питания обмотки реле (рис. 22.4) замыкается и размыкается контактами  $K1$  соответственно на время  $t_3$  и  $t_p$ .

Может ли реле сработать (притянуть якорь) сразу после очередного включения питания цепи, т. е. при замыкании контактов  $K1$ ?

Обмотка реле, размещенная на сердечнике из ферромагнитного материала, обладает значительной индуктивностью, а, как известно (§ 22.1), ток в такой цепи нарастает постепенно. Потребуется некоторое время, пока ток достигнет указанного в условии задачи значения  $I_n = 12$  мА, при котором электромагнитная сила достаточна для притяжения якоря (преодоления противодействующей силы пружин  $Пр$ ). То же относится к отпусканию якоря, которое произойдет не сразу после размыкания контактора  $K1$ , а через некоторое время, необходимое для уменьшения тока до значения  $I_o = 8$  мА.

2. Установившаяся и свободная составляющие тока. Из предыдущего параграфа уже известно понятие установившегося тока, который при наших данных

$$i_y = U/R = 12/400 = 0,03 \text{ А} = 30 \text{ мА}. \quad (22.1)$$

Такой ток будет в цепи по окончании переходного процесса, а в течение переходного процесса, т. е. с момента замыкания контактов  $K1$  (при  $t=0$ ), существует переходный ток  $i$ , который, как дальше будет показано, можно представить суммой составляющих: уже известной (22.1) установившейся  $i_y$  и так называемой свободной  $i_{св}$

$$i = i_y + i_{св}. \quad (22.2)$$

Чтобы найти  $i_{св}$ , составим для цепи рис. 22.4 при замкнутых контактах  $K1$  уравнение по второму закону Кирхгофа  $U = u_R + u_L$ . Заменяя напряжение на индуктивности  $u_L$  ЭДС

в индуктивности  $e_L = -u_L$ , получаем

$$U = u_R - e_L = Ri - e_L,$$

откуда

$$i = U/R + e_L/R = i_y + i_{св}, \quad (22.3)$$

где свободная составляющая переходного тока  $i_{св} = e_L/R$ .

Таким образом, свободный ток  $i_{св}$  существует вследствие возникновения ЭДС индукции магнитного поля катушки. Очевидно, что по окончании переходного процесса, когда в цепи установится постоянный ток  $i_y = 0,03$  А, магнитное поле катушки также будет постоянным, а при этом ЭДС индукции  $e_L = 0$  и соответственно  $i_{св} = 0$ .

Оказывается, свободный ток  $i_{св}$  — это часть переходного тока, существующая только при переходном процессе.

Свободный ток

$$\begin{aligned} i_{св} &= \frac{e_L}{R} = -\frac{1}{R} L \frac{di}{dt} = -\frac{1}{R} L \left( \frac{di_y}{dt} + \frac{di_{св}}{dt} \right) = \\ &= -\frac{1}{R} L \frac{di_{св}}{dt} = -\tau \frac{di_{св}}{dt}, \end{aligned}$$

так как  $di_y/dt = 0$ .

Полученное дифференциальное уравнение

$$i_{св} = -\tau (di_{св}/dt) \quad (22.4)$$

имеет решение

$$i_{св} = Ae^{-t/\tau}, \quad (22.5)$$

где  $A$  — постоянная интегрирования (вычисляется дальше).

Решение (22.5) легко проверить подстановкой в (22.4).

Заметим, что для определения свободного тока в различных задачах на исследование переходного процесса нет необходимости всякий раз составлять и решать дифференциальное уравнение, а можно пользоваться сразу конечным результатом — выражением вида (22.5).

3. Построение графика тока при включении цепи. Заменяем в уравнении (22.2)  $i_{св}$  его выражением (22.5), тогда получим решение для нарастающего переходного тока:

$$i = i_y + Ae^{-t/\tau_1} = U/R + Ae^{-t/\tau_1}. \quad (22.6)$$

До первого включения питания цепи тока в ней не было ( $i=0$ ). Учитывая, что ток в цепи с индуктивностью не может измениться скачком (см. § 22.1), следует в формуле

(22.6) принять его равным нулю в первый момент после замыкания контактов  $KI$ :

$$i(0) = 0 = U/R + A,$$

откуда  $A = -U/R$  и

$$i = \frac{U}{R} - \frac{U}{R} e^{-t/\tau_1} = \frac{U}{R} (1 - e^{-t/\tau_1}). \quad (22.7)$$

При наших данных постоянная времени  $\tau_1 = L/R = 6/400 = 0,015 \text{ с} = 15 \text{ мс}$ , а установившийся ток  $i_v = U/R = 30 \text{ мА}$ . При этом

$$i = 30 (1 - e^{-t/15}), \quad (22.8)$$

где время  $t$  — в миллисекундах.

Задавшись несколькими значениями времени  $t$ , прошедшего с момента включения цепи, вычислим по уравнению (22.8) значения нарастающего тока (табл. 22.2) и построим его график (рис. 22.5, ветвь  $a$ ).

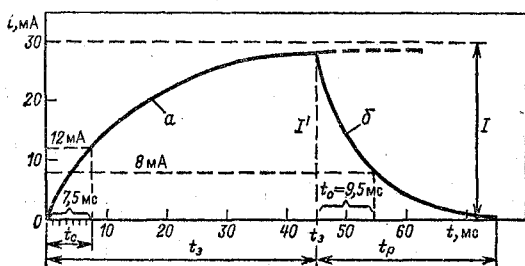


Рис. 22.5. Изменение тока в цепи обмотки реле при включении источника энергии (ветвь  $a$  графика) и при его отключении (ветвь  $b$  графика)

График нарастающего тока  $i(t)$  построен только до момента  $t = t_3 = 45 \text{ мс}$ , когда ток достигает значения  $I' =$

Таблица 22.2

$t, \text{ мс}$	0	15	30	45
$e^{-t/15}$	1	0,37	0,135	0,05
$i, \text{ мА}$	0	18,9	26,0	28,5

$=28,5$  мА (табл. 22.2 и рис. 22.5), так как принято, что в этот момент времени цепь питания реле отключается контактами  $K1$ . Если бы цепь питания не отключалась, то ток продолжал бы нарастать (рис. 22.5, пунктир), приближаясь к установившемуся значению.

4. Построение графика изменения тока после отключения источника. При размыкании контактов  $K1$  отключается источник энергии, контакты  $K2$  (рис. 22.4) замыкают цепь  $АВВА$  с постоянной времени

$$\tau_2 = L/(R + R') = 6/(400 + 400) = 0,0075 \text{ с} = 7,5 \text{ мс.}$$

В этом режиме (при отключенном источнике питания) ток  $i$  существует за счет уменьшения энергии магнитного поля индуктивности  $L$ . Интересующий нас ток  $i$  представим, как и ранее, двумя составляющими:  $i = i_y + i_{св}$ . Установившаяся составляющая  $i_y = 0$ , так как за время  $t \rightarrow \infty$  энергия магнитного поля уменьшится до нуля (израсходуется).

Свободная составляющая тока  $i_{св} = Be^{-t'/\tau_2}$  в первый момент ( $t' = 0$ ) равна току  $i$  в индуктивности  $L$  до коммутации, так как невозможен скачок тока в индуктивности (первый закон коммутации), т.е.  $i(t' = 0) = B = I' = 28,5$  мА.

В результате имеем

$$i = i_y + i_{св} = 0 + Be^{-t'/\tau_2} = 28,5e^{-t'/7,5}, \quad (22.9)$$

где  $t'$  — время (в миллисекундах), прошедшее с момента отключения источника энергии.

Вычислив по формуле (22.9) для нескольких значений  $t'$  значения тока (табл. 22.3), построим график изменения тока при отключенном источнике (рис. 22.5, ветвь б).

Таблица 22.3

$t', \text{ мс}$	0	7,5	15,0	30,0
$e^{-t'/7,5}$	1	0,37	0,135	0,018
$i, \text{ мА}$	28,5	10,5	3,85	0,52

К моменту размыкания  $t' = t_p = 30$  мс контактов  $K2$  и нового замыкания контактов  $K1$  ток в обмотке умень-

шится до значения

$$i = 28,5e^{-30/7,5} = 28,5e^{-4} = 0,52 \text{ мА.}$$

График вторичного нарастания тока будет аналогичен кривой  $a$  на рис. 22.5, но ток будет увеличиваться не с нуля, а со значения  $I'' = 0,52 \text{ мА}$ , и поэтому за время  $t_3$  ток успеет возрасти до значения, несколько большего  $I'$ .

5. Вычисление времени срабатывания и отпускания реле. По условию задачи якорь реле притягивается при токе  $12 \text{ мА}$ , который устанавливается в цепи спустя некоторое время  $t_c$  (время срабатывания) после включения цепи.

Величину  $t_c$  можно определить двумя путями: по-пер-вым, по графику рис. 22.5, откуда  $t_c = 7,5 \text{ мс}$ ; во-вторых, из формулы (22.8) при токе  $i = 12 \text{ мА}$  и  $t = t_c$ , т. е.  $12 = 30(1 - e^{-t_c/15})$ , откуда  $e^{-t_c/15} = 0,6$ ;  $-t_c/15 = \ln 0,6 = -0,52$  и  $t_c = 15 \cdot 0,52 = 7,8 \text{ мс}$ .

Так же определяется время отпускания  $t_0$ , которое отсчитывается от момента размыкания контактов  $K1$  до момента отпускания якоря реле (уменьшение тока до  $8 \text{ мА}$ ).

По графику рис. 22.5  $t_0 \approx 9,5 \text{ мс}$ . По формуле (22.9)  $8 = 28,5 e^{-t_0/7,5}$ , откуда  $e^{-t_0/7,5} = 0,28$ , или  $t_0/7,5 = 1,27$  и  $t_0 \approx 9,5 \text{ мс}$ .

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Почему при отключении источника энергии к обмотке реле присоединяют сопротивление  $R'$  (рис. 22.4)? При отсутствии дополнительного сопротивления  $R'$  размыкаемая цепь обмотки реле имеет весьма большое сопротивление, определяемое воздушным промежутком контактов  $K1$ , или весьма малую постоянную времени (практически близкую к нулю). Ток в обмотке реле будет быстро убывать, что приведет к появлению весьма большой ЭДС самоиндукции в катушке и электрической дуги между контактами  $K1$ . При этом возможно повреждение обмотки и контактов.

Присоединив дополнительное сопротивление  $R'$  (рис. 22.4), удастся замедлить убывание тока, уменьшить ЭДС самоиндукции и ослабить электрическую дугу между контактами, размыкающими цепь питания.

2. Можно ли применить короткое замыкание обмотки реле при отключении источника? Если принять  $R' = 0$  (рис. 22.4), то после размыкания контактов  $K1$  обмотка реле окажется замкнутой кон-

тактами  $K2$  (рис. 22.6). Постоянная времени контура закороченной обмотки  $\tau_3 = L/R = \tau_1 = 15$  мс в 2 раза больше, чем постоянная времени  $\tau_2 = 7,5$  мс. График убывания тока  $i = 28,5 e^{-t'/\tau_3}$  мА в рассматриваемых условиях (рис. 22.7, кривая  $b'$ ) легко получить, увеличив в 2 раза абсциссы точек кривой  $b$ , перенесенной с рис. 22.5.

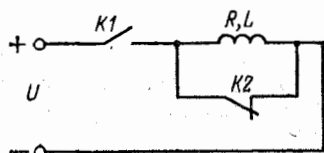


Рис. 22.6. Короткое замыкание обмотки реле, отключенной от источника энергии

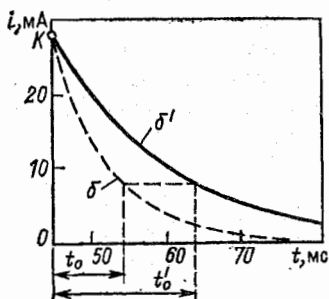


Рис. 22.7. Кривые убывания тока в цепи рис. 22.4 при  $R=0$  и  $R \neq 0$

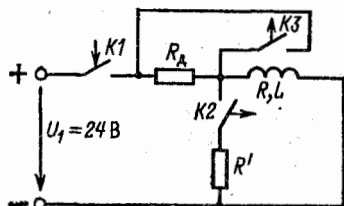


Рис. 22.8. Схема питания обмотки реле повышенным напряжением

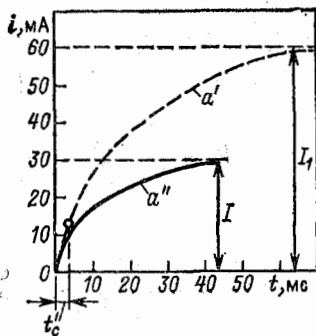


Рис. 22.9. К дополнительному вопросу 3

3. Как сократить время нарастания тока в обмотке реле? Для уменьшения времени срабатывания реле можно, например, увеличить напряжение источника до значения  $U_1 = 2U = 24$  В (рис. 22.8) и присоединить последовательно с обмоткой реле добавочное сопротивление  $R_d = R$ , которое при включении источника энергии закорочено контактами  $K3$ . В этом случае установившийся ток

$$I_1 = U_1/R = 2U/R = 2I = 60 \text{ мА}$$



и уравнение (22.8) примет вид

$$i = 60(1 - e^{-t/15}).$$

Подставив  $i = I_{\text{п}} = 12$  мА и  $t = t'_c$ , где  $t'_c$  — новое значение времени срабатывания реле, получим  $12 = 60(1 - e^{-t'_c/15})$ , откуда  $e^{-t'_c/15} = 0,8$  или  $\ln 0,8 = -0,22 = -t'_c/15$  и  $t'_c = 15 \cdot 0,22 = 3,3$  мс.

После срабатывания реле размыкаются контакты  $K3$  и в цепь вводится добавочное сопротивление  $R_d$ , что обеспечивает дальнейший рост тока по кривой  $a''$  вместо  $a'$  (рис. 22.9).

4. Какая энергия расходуется в сопротивлении  $R'$  (рис. 22.4) за 7,5 ч работы реле? В сопротивлении  $R'$  за время отключения источника  $t_p$  (рис. 22.5) проходит ток за счет уменьшения энергии магнитного поля катушки от значения  $W_1 = 1/2 LI_{\text{max}}^2$  до значения  $W_2 = 1/2 LI_{\text{min}}^2$ . Здесь  $I_{\text{max}} = I' = 28,5$  мА, а  $I_{\text{min}} = I'' = 0,52$  мА.

Изменение энергии

$$\Delta W = W_1 - W_2 = 1/2 L (I_{\text{max}}^2 - I_{\text{min}}^2) = 2,37 \cdot 10^{-3} \text{ Дж.}$$

Учитывая, что один цикл работы реле длится 75 мс, имеем за 7,5 ч

$$N = (7,5 \cdot 3600) / (75 \cdot 10^{-3}) = 360 \cdot 10^3 \text{ циклов,}$$

$$W = N \Delta W = 360 \cdot 10^3 \cdot 2,37 \cdot 10^{-3} = 854 \text{ Дж.}$$

### 22.3. ВКЛЮЧЕНИЕ ЦЕПИ $R, L$ НА СИНУСОИДАЛЬНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ

Условие задачи

Цепь рис. 22.10, параметры которой  $R = 100$  Ом и  $L = 1$  Гн, присоединяется к сети синусоидального напряжения  $U = 220$  В,  $f = 50$  Гц.

Построить графики тока переходного процесса для двух значений начальной фазы напряжения в момент присоединения питания (два случая включения):  $\psi = 0^\circ$  и  $\psi_2 = 72^\circ 20'$ .

Решение задачи

1. Метод решения. В предыдущей задаче (§ 22.2) также рассматривался переходный процесс в цепи из по-

следовательно включенных активного сопротивления и индуктивности и применялось представление тока двумя составляющими: установившейся и свободной.

Такой метод решения можно использовать и в этой задаче, отличающейся от предыдущих только видом подведенного к цепи напряжения (синусоидальное вместо постоянного).

2. Определение установившегося тока. Установившийся ток определяется расчетом заданной цепи в ее установившемся режиме, т. е. при длительно замкнутом рубильнике  $P$  (рис. 22.10). Такие задачи хорошо известны (см. гл. 9), и потому расчет установившегося тока выполним без подробных пояснений.

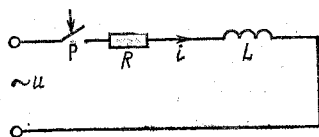


Рис. 22.10. К условию задачи § 22.3.

Полное сопротивление цепи рис. 22.10

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{100^2 + (314 \cdot 1)^2} = 330 \text{ Ом.}$$

Косинус угла сдвига фаз между напряжением и током

$$\cos \varphi = R/Z = 100/330 = 0,303 \text{ и } \varphi = 72^\circ 20'.$$

При заданном (по условию задачи) напряжении питания

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi) = 220\sqrt{2} \sin(314t + \psi) \text{ В,}$$

максимальное значение принужденного тока

$$I_m = U_m/Z = 220\sqrt{2}/330 = 0,94 \text{ А,}$$

а его мгновенное значение

$$i_y = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) = 0,94 \sin(\omega t + \psi - 72^\circ 20') \text{ А.}$$

Соответственно для первого заданного режима включения питания ( $\psi_1 = 0$ )

$$i_{y1} = 0,94 \sin(\omega t - 72^\circ 20') \text{ А} \quad (22.10)$$

и для второго режима ( $\psi_2 = 72^\circ 20'$ )

$$i_{y2} = 0,94 \sin \omega t \text{ А.}$$

3. Определение свободного тока. Свободная составляющая тока определяется выражением (22.5):

$$i_{св} = Ae^{-t/\tau}.$$

Постоянную  $A$  определим, применяя первый закон коммутации, который устанавливает невозможность скачка

тока в индуктивности. Это означает, что ток непосредственно перед замыканием рубильника  $[i(0) = 0]$  равен току в первый момент после его включения, т. е. при  $t=0$  имеем

$$i(0) = 0 = i_y + i_{св} = I_m \sin(0 + \psi - \varphi) + Ae^{-0/\tau} = I_m \sin(\psi - \varphi) + A,$$

откуда постоянная

$$A = -I_m \sin(\psi - \varphi)$$

и свободный ток

$$i_{св} = -I_m \sin(\psi - \varphi) e^{-t/\tau}.$$

Максимальное значение тока  $I_m$  и угол сдвига фаз  $\varphi$  найдены выше. Постоянная времени цепи  $\tau = L/R = 1/100 = 0,01$  с. Начальная фаза напряжения  $\psi$  задана по условию задачи двумя значениями, для которых (с учетом других данных) свободные токи:

$$\begin{aligned} i_{св1} &= -0,94 \sin(-72^\circ 20') e^{-100t} = \\ &= 0,94 \cdot 0,953 e^{-100t} = 0,896 e^{-100t} \end{aligned} \quad (22.11)$$

и 
$$i_{св2} = 0,94 \sin 0^\circ \cdot e^{-100t} = 0.$$

Отсутствие свободного тока  $i_{св2} = 0$  говорит о том, что во втором случае имеем в цепи сразу установившийся ток  $i_{y2}$  без переходного процесса.

4. Построение графика тока для первого режима включения питания. Свободная составляющая тока  $i_{св1}$ , определяемая уравнением (22.11), вычислена для нескольких моментов времени, и по результатам (табл. 22.4) построен ее график (рис. 22.11).

Установившаяся составляющая тока  $i_{y1}$ , изменяющаяся по синусоидальному закону (22.10), также построена на рис. 22.11.

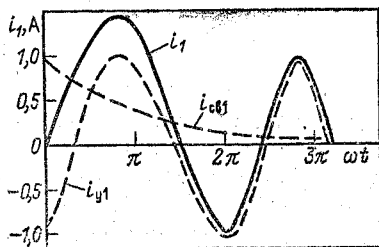


Рис. 22.11. Ток переходного процесса, его установившаяся и свободная составляющие при присоединении цепи  $R, L$  к синусоидальному напряжению

$t, \text{ с}$	0	0,01	0,02	0,03
$\omega t$	0	$\pi$	$2\pi$	$3\pi$
$e^{-100t}$	1	0,37	0,135	0,05
$i_{\text{св1}}, \text{ А}$	0,896	0,33	0,12	0,045

График переходного тока цепи построен (рис. 22.11) суммированием ординат соответствующих точек графиков установившейся и свободной составляющих.

## 22.4. ЦЕПЬ $R, C$ В РЕЖИМЕ ЗАРЯДКИ И РАЗРЯДКИ КОНДЕНСАТОРА

### Условие задачи

При замыкании рубильника  $P$  (рис. 22.12) в положение 1 конденсатор  $C=10 \text{ мкФ}$  заряжается от источника энергии, у которого ЭДС  $E=120 \text{ В}$ , а внутреннее сопротивление  $R_{\text{вт}}=400 \text{ Ом}$ . При переключении рубильника в положение 2 конденсатор разряжается через сопротивление  $R=2000 \text{ Ом}$ .

Построить графики изменения напряжения и тока конденсатора при зарядке и разрядке. Вычислить энергию, расходуемую источником на зарядку конденсатора, и энергию, отдаваемую конденсатором при разрядке.

### Решение задачи

1. Установившаяся и свободная составляющие напряжения заряжающего конденсатора. При решении задач на переходный процесс в цепи  $R, L$  ток представлялся суммой установившейся и свободной составляющих. Нельзя ли аналогично посту-

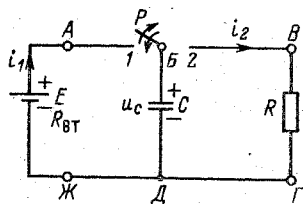


Рис. 22.12. Схема присоединения конденсатора и потребителя к источнику энергии

пить с напряжением  $u_C$  заряжающегося конденсатора? Чтобы ответить на этот вопрос, составим для контура АБДЖА (рис. 22.12, рубильник  $P$  в положении 1) уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$E = R_{\text{вт}} i_1 + u_C, \quad (22.12)$$

где  $i_1$  — ток контура (он же ток в конденсаторе  $i_C$ ) — определим как скорость накопления заряда на обкладках конденсатора:

$$i_1 = i_C = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}. \quad (22.13)$$

Заменив в уравнении (22.12) ток его значением (22.13), получим выражение для  $u_C$ :

$$u_C = E - R_{\text{вт}} C \frac{du_C}{dt} = u_{Cy} + u_{C\text{св}}.$$

Поясним последнее уравнение. При полной зарядке конденсатора (установившийся режим) ток контура  $i_C = 0$  и в соответствии с (22.12)  $u_C = u_{Cy} = E$ .

Свободную составляющую напряжения конденсатора

$$u_{C\text{св}} = -R_{\text{вт}} C \frac{du_C}{dt} = -R_{\text{вт}} C \left( \frac{du_{Cy}}{dt} + \frac{du_{C\text{св}}}{dt} \right) = -\tau_1 \frac{du_{C\text{св}}}{dt} \quad (22.14)$$

можно узнать по аналогии с уравнением (22.4) для свободного тока в цепи с индуктивностью. Здесь принято во внимание, что  $du_{Cy}/dt = 0$  и  $\tau_1 = R_{\text{вт}} C$  — постоянная времени цепи заряда конденсатора.

Для уравнения, подобного (22.14), уже имелось решение (22.5); по аналогии запишем

$$u_{C\text{св}} = A e^{-t/\tau_1}. \quad (22.15)$$

Таким образом, напряжение на конденсаторе во время переходного процесса

$$u_C = u_{Cy} + u_{C\text{св}} = E + A e^{-t/\tau_1}. \quad (22.16)$$

Чтобы определить постоянную  $A$ , воспользуемся вторым законом коммутации (§ 22.1), гласящим, что напряжение на конденсаторе не может измениться скачком, т. е.  $u_C(0-) = u_C(0+)$ .

Применительно к нашим условиям это означает, что до замыкания рубильника  $P$  (рис. 22.12) напряжение на незаряженном конденсаторе  $u_C(0-) = 0$  остается таким же и в первый момент после замыкания, т. е. при  $t=0$  напряжение  $u_C(0) = 0$ , поэтому из уравнения (22.16) находим,

что

$$0 = E + Ae^0 = E + A,$$

или  $A = -E$  и

$$u_{C\text{св}} = -Ee^{-t/\tau_1}, \quad (22.17)$$

где постоянная времени

$$\tau_1 = R_{\text{вт}} C = 400 \cdot 10 \cdot 10^{-6} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ с} = 4 \text{ мс.}$$

2. Кривые тока и напряжения при зарядке конденсатора. В процессе зарядки напряжение на конденсаторе нарастает по закону

$$u_C = u_{C\text{у}} + u_{C\text{св}} = E(1 - e^{-t/\tau_1}) = 120(1 - e^{-t/4}), \quad (22.18)$$

где  $t$  — в миллисекундах;  $u_C$  — в вольтах.

Для нескольких значений времени  $t$ , прошедшего с момента замыкания рубильника, вычислены напряжения  $u_C$  (табл. 22.5) и по этим данным построен график  $u_C(t)$  на рис. 22.13.

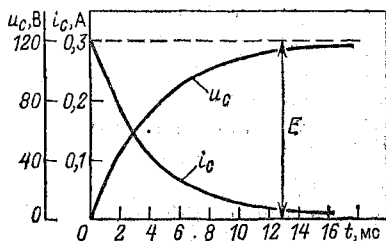


Рис. 22.13. Изменения напряжения на конденсаторе и тока в режиме зарядки

Таблица 22.5

$t$ , мс	0	2	4	8	12	16
$e^{-t/4}$	1	0,61	0,37	0,135	0,05	0,018
$u_C$ , В	0	47	75	104	114	118
$i_C$ , А	0,3	0,183	0,111	0,040	0,015	0,005

Ток зарядки пропорционален скорости изменения напряжения на обкладках конденсатора (22.13):

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{d}{dt} [E(1 - e^{-t/\tau_1})] = \\ = EC \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau_1} = \frac{E}{R_{вТ}} e^{-t/\tau_1} = \frac{120}{400} e^{-t/4} \text{ А.}$$

В табл. 22.5 приведены значения тока зарядки, а на рис. 22.13— график  $i_C(t)$ .

Сравнение графика  $u_C(t)$  на рис. 22.13 с графиком  $i(t)$  на рис. 22.5 позволяет сделать вывод о том, что изменение напряжения на емкости при зарядке конденсатора в цепи с сопротивлением происходит аналогично изменению тока при включении цепи с сопротивлением и индуктивностью. Теоретически процесс зарядки конденсатора продолжается

бесконечно долго, но практически его можно считать законченным за время  $t = (4 \div 5)\tau$ , как и процесс нарастания тока в цепи с сопротивлением и индуктивностью.

3. Кривые тока и напряжения при разрядке конденсатора. Если по окончании зарядки конденсатора до напряжения  $u_C = E$  (установившийся режим) переключить рубильник  $P$  в положение 2, то через сопротивление  $R$

пойдет ток разрядки  $i_2$ ; заряд, напряжение и энергия электрического поля конденсатора  $C$  будут убывать.

При разрядке конденсатора установившаяся составляющая напряжения  $u_{Cу} = 0$ , так как в цепи разрядки нет источников энергии (см. также § 22.1, доп. вопрос 4). Остается только свободная составляющая, которая убывает от максимального значения (в наших условиях 120 В) до нуля по закону

$$u_C = u_{Cсв} = 120e^{-t'/\tau_2}, \quad (22.19)$$

где постоянная времени цепи разрядки  $\tau_2 = CR = 10 \cdot 10^{-6} \times 2000 = 0,02 \text{ с} = 20 \text{ мс}$ , а время  $t'$  отсчитывается от момента переключения рубильника  $P$  в положение 2. По выраже-

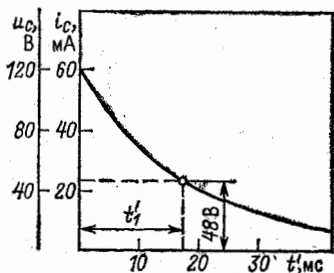


Рис. 22.14. Изменение напряжения на конденсаторе и тока в режиме разрядки

нию (22.19) построен график зависимости  $u_C(t')$  на рис. 22.14.

Ток в емкости  $i_C$  при ее разрядке направлен противоположно току  $i_C$  при ее зарядке и равен току  $i_2$  в сопротивлении  $R$ , а напряжение на емкости  $u_C$  — напряжению на сопротивлении  $u_R$ . Поэтому

$$i_C = \frac{u_C}{R} = \frac{120}{2000} e^{-t'/\tau_2} = 0,06 e^{-t'/\tau_2} \text{ А,}$$

т.е. кривая  $u_C(t)$  в другом масштабе, указанном на рис. 22.14, служит графиком зависимости тока от времени  $i_C(t')$ .

4. Вычисление электрической энергии. При зарядке конденсатора источник отдает энергию  $W_{\text{и}} = E^2 C = 120^2 \cdot 10 \cdot 10^{-6} = 0,144$  Дж, половина которой  $Cu_{Cy} = CE^2/2 = W = 0,072$  Дж запасается в электрическом поле конденсатора. Энергия  $W$  расходуется при разрядке конденсатора.

#### Дополнительные вопросы к задаче

1. Через какое время после переключения рубильника  $P$  в положение 2 можно прикасаться к выводам сопротивления, если безопасным принять напряжение 48 В? Из графика рис. 22.14 можно определить время  $t'_1 = 17,5$  мс, в течение которого напряжение на конденсаторе при его разрядке упадет до 48 В.

Эту же величину  $t'_1$  можно определить из выражения  $u_C = 120 e^{-t'_1/\tau_2}$ , приняв в нем  $u_C = 48$  В.

2. Как ускорить разрядку конденсатора? В ряде практических устройств постоянная времени цепи разрядки конденсатора измеряется многими десятками секунд. В таких случаях иногда необходимо ускорить разрядку конденсатора. Например, в схеме рис. 22.12 надо было бы после переключения рубильника  $P$  присоединить к выводам  $БД$  добавочное сопротивление  $R_d \ll R$ .

3. Как будут происходить зарядка и разрядка конденсатора, если источник будет включаться и выключаться через интервалы времени 10 мс? При первом включении источника напряжение на конденсаторе будет возрастать по кривой  $ОА$  (рис. 22.15, пунктир), перенесенной с рис. 22.13. После переключения рубильника  $P$  разрядка конденсатора бу-



дет происходить по кривой  $AB$ , аналогичной кривой на рис. 22.14 (конденсатор не успел зарядиться до напряжения 120 В, поэтому разрядка начинается при меньшем начальном напряжении).

Следующая кривая зарядки ( $BE$  на рис. 22.15) аналогична по форме кривой первой зарядки  $OA$ , но зарядка начинается при начальном напряжении на конденсаторе, не равном нулю.

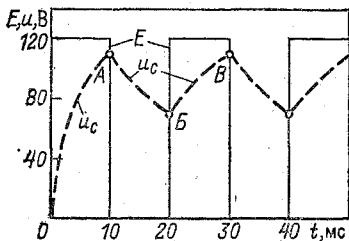


Рис. 22.15. К дополнительному вопросу 3

В дальнейшем участки зарядки и разрядки образуют периодическую кривую напряжения, имеющую пилообразную форму.

4. Какое назначение может иметь конденсатор, присоединенный в выводах источника энергии? Часто в качестве источника постоянного тока применяется источник переменного тока с выпрямителями. Такие выпрямители дают, например, в радиоприемниках напряжение в виде отдельных полуволн синусоиды, показанных на рис. 22.16 сплошной кривой.

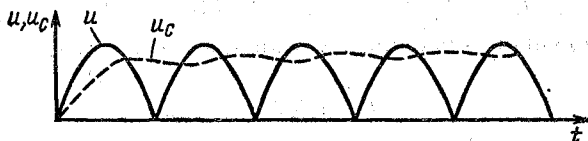


Рис. 22.16. К дополнительному вопросу 4

Если на выводы выпрямителя включить конденсатор, но напряжение на конденсаторе  $u_c$  и потребителе будет меньше пульсировать (пунктирная кривая на рис. 22.16), чем при отсутствии конденсатора.

Итак, в результате присоединения конденсатора сглаживается форма напряжения (уменьшаются пульсации).

## 22.5. ПРИСОЕДИНЕНИЕ ЦЕПИ $R, C$ К ИСТОЧНИКУ СИНУСОИДАЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ

### Условие задачи

Цепь из последовательно включенных активного сопротивления  $R=50$  Ом и емкости  $C=100$  мкФ присоединили

к сети  $U=127$  В,  $f=50$  Гц в момент времени, при котором напряжение питания имело максимальное положительное значение.

Построить для переходного процесса графики напряжения на емкости  $u_C$  и тока  $i$  в цепи.

### Решение задачи

1. Определение тока и напряжения для установившегося режима. Расчет цепи в установившемся режиме обоснован в § 22.3 (п. 2). Выполним его аналогично без подробных пояснений.

Емкостное сопротивление

$$X_C = 1/\omega C = 10^6/(314 \cdot 100) = 31,8 \text{ Ом.}$$

Полное сопротивление цепи

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{50^2 + 31,8^2} = 59,25 \text{ Ом.}$$

Модуль угла сдвига фазы между напряжением на выводах  $u$  и током цепи

$$|\varphi| = \arccos(R/Z) = \arccos(50/59,25) = \arccos 0,845 = 32^\circ 20'.$$

Этот угол в цепи с емкостным сопротивлением имеет отрицательный знак, т. е.  $\varphi = -32^\circ 20'$ .

Амплитуда тока принужденного режима

$$I_m = U_m/Z = 127\sqrt{2}/59,25 = 3,04 \text{ А.}$$

Мгновенное значение установившегося тока в общем виде

$$i_y = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi), \quad (22.20)$$

где начальная фаза напряжения  $\psi = 90^\circ$  (по условию задачи), т. е.  $\psi - \varphi = 90^\circ + 32^\circ 20' = 122^\circ 20'$ , и ток

$$i_y = 3,04 \sin(314t + 122^\circ 20') \text{ А.}$$

Напряжение на емкости отстает по фазе от тока на  $90^\circ$ , и поэтому

$$u_{Cy} = U_{Cm} \sin(\omega t + \psi - \varphi - \pi/2),$$

где  $U_{Cm} = I_m X_C = 3,04 \cdot 31,8 = 96,6$  В и при наших данных

$$u_{Cy} = 96,6 \sin(314t + 32^\circ 20') \text{ В.} \quad (22.21)$$

2. Определение свободной составляющей напряжения на емкости  $u_{Cсв}$ . Вид этой составляющей для цепи  $R, C$  известен (22.15). Напряжение на емко-

сти есть сумма установившейся и свободной составляющих:  
 $u_C = u_{Cy} + u_{Cсв} = U_{Cm} \sin(\omega t + \psi - \varphi - \pi/2) + Ae^{-t/\tau}$ . (22.22)

В последнем выражении при  $t=0$  (первый момент после включения сети переменного тока) напряжение на емкости  $u_C(0)=0$ , так как оно не может измениться скачком. Запишем выражение (22.22) для момента включения  $t=0$ :

$$0 = U_{Cm} \sin(\psi - \varphi - \pi/2) + A,$$

откуда

$$A = -U_{Cm} \sin(\psi - \varphi - \pi/2),$$

и свободная составляющая напряжения на емкости

$$u_{Cсв} = Ae^{-t/\tau} = -U_{Cm} \sin(\psi - \varphi - \pi/2) e^{-t/\tau},$$

где постоянная времени цепи  $\tau = RC = 50 \cdot 100 \cdot 10^{-6} = 0,005$  с.

При наших данных

$$\begin{aligned} u_{Cсв} &= -96,6 \sin 32^\circ 20' e^{-t/0,005} = \\ &= -96,6 \cdot 0,535 e^{-200t} = -51,7 e^{-200t}, \text{ В.} \end{aligned} \quad (22.23)$$

3. Построение графика напряжения на емкости. Синусоидальный график установившейся составляющей напряжения  $u_{Cy}$  построен по уравнению (22.21) на рис. 22.17. Свободная составляющая напряжения  $u_{Cсв}$

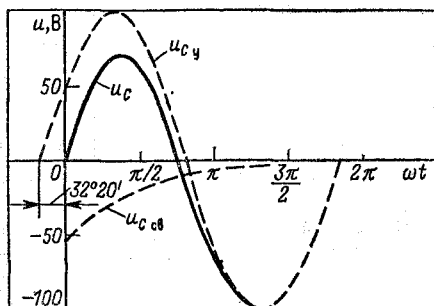


Рис. 22.17. Изменение напряжения на емкости, его свободной и установившейся составляющих при присоединении цепи  $R, C$  к синусоидальному напряжению

вычислена по уравнению (22.23) для нескольких моментов времени  $t$  (табл. 22.6) и по этим данным построена на рис. 22.17.

$t, \text{с}$	0	0,005	0,01	0,015
$\omega t$	0	$\pi/2$	$\pi$	$1,5\pi$
$e^{-200t}$	1	0,37	0,135	0,05
$u_{\text{СВ}}, \text{В}$	51,7	19,13	6,98	2,58
$i_{\text{СВ}}, \text{А}$	1,03	0,38	0,14	0,05

График напряжения на емкости  $u_c$  (рис. 22.17) построен графическим сложением кривых свободной  $u_{\text{СВ}}$  и установившейся  $u_{\text{С}}$  составляющих.

4. Построение графика тока. Закон изменения тока цепи  $i = Cdu_c/dt$  получим, дифференцируя выражение (22.22):

$$i = U_{\text{См}} \omega C \sin(\omega t + \psi - \varphi - \pi/2 + \pi/2) - (AC/\tau) e^{-t/\tau}.$$

Заменяя в этом уравнении  $U_{\text{См}} \omega C = I_m = 3,04$ ,  $\psi - \varphi = 90^\circ + 32^\circ 20' = 122^\circ 20'$ ,  $C/\tau = C/RC = 1/R = 0,02 \text{ См}$ ,  $A = -51,7 \text{ В}$  и  $1/\tau = 1/0,005 = 200 \text{ 1/с}$ , окончательно имеем

$$i = 3,04 \sin(314t + 122^\circ 20') + 1,034e^{-200t} \text{ А.} \quad (22.24)$$

В полученном законе изменения тока первое слагаемое выражает уже известную (22.20) установившуюся составляющую тока, синусоидальный график которой построен на рис. 22.18. Второе слагаемое рассматриваемой зависимости — свободная составляющая тока — изображается кривой  $i_{\text{СВ}}$  (рис. 22.18), построенной по данным табл. 22.6.

График тока переходного процесса  $i$  (рис. 22.18) может быть получен двумя способами: либо

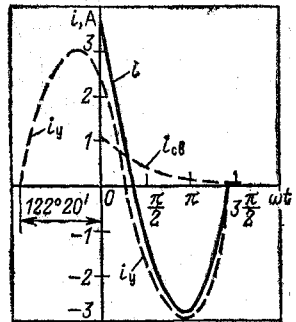


Рис. 22.18. Изменение тока, его свободной и установившейся составляющих при включении напряжения питания цепи  $R, C$

сложением ординат соответствующих точек графиков  $i_y$  и  $i_{св}$ , либо вычислением ряда точек зависимости  $i(t)$  по (22.24).

Заметим, что ток цепи изменяется скачком в момент  $t=0$  (включение питания) и превышает при этом амплитудное значение принужденного тока. Скачок тока в момент коммутации характерен для цепей  $R, C$ .

## 22.6. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

388. Цепь, состоящая из индуктивности  $L=0,1$  Гн и двух сопротивлений по 10 Ом каждое, включается на постоянное напряжение  $U=24$  В. Определить закон изменения тока и ЭДС самоиндукции при замыкании одного из сопротивлений.

389. Цепь из последовательно включенных сопротивлений  $R=2$  Ом и индуктивности  $L=5$  Гн присоединяется к источнику с постоянным напряжением  $U=6$  В.

Построить график изменения тока и ЭДС в катушке в течение 7,5 с с момента включения источника питания.

390. Для цепи предыдущей задачи вычислить по графику и аналитически время, в течение которого ток достигнет значения 2 А.

391. Какое напряжение нужно подвести к обмотке реле ( $L=2$  Гн,  $R=40$  Ом), чтобы ток в ней достиг значения 495 мА за время  $t=40$  мс от момента включения цепи?

392. Для цепи предыдущей задачи вычислить значение сопротивления, которое нужно включить последовательно с обмоткой реле, чтобы ток не мог превысить 0,5 А.

393. Цепь из последовательно включенных сопротивлений  $R=2$  Ом и индуктивности  $L=100$  мГн присоединяется на время, равное 100 мс, к источнику с напряжением  $U=20$  В, после чего источник питания отключается, а индуктивность замыкается на сопротивление  $R=4$  Ом. Построить графики изменения тока и ЭДС в катушке в интервале времени 150 мс от момента включения цепи.

394. В цепи рис. 22.19, параметры которой  $R_1=20$  Ом,  $R_2=5$  Ом и  $L=0,25$  Гн, до размыкания рубильника  $P$  проходил постоянный ток  $I=5$  А.

Найти закон и построить график изменения тока во времени с момента размыкания рубильника.

395. К источнику напряжения  $u=160 \sin(314t+\pi/3)$  присоединяется в момент времени  $t=0$  катушка с индуктивностью  $L=364$  мГн и активным сопротивлением  $R=10$  Ом. Определить значение тока через два периода после момента включения.

396. Найти закон и построить график изменения тока во времени при включении катушки с индуктивностью  $L=31,4$  мГн и активным сопро-

тивлением  $R=1$  Ом к синусоидальному напряжению  $U=120$  В,  $f=50$  Гц. Включение питания происходит в момент времени, когда начальная фаза напряжения равна  $30^\circ$ .

397. Для цепи предыдущей задачи найти максимальное значение тока переходного процесса.

398. Цепь, показанная на рис. 22.20, имеет следующие параметры:  $E=500$  В,  $R_{вт}=100$  Ом,  $R=800$  Ом,  $C=100$  мкФ.

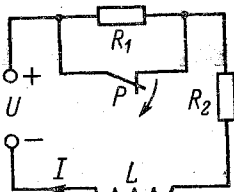


Рис. 22.19. К задаче 394

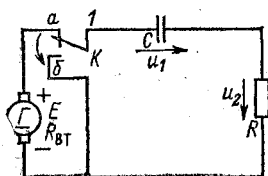


Рис. 22.20. К задаче 398

Определить напряжения  $u_1$  и  $u_2$  и ток в цепи через 90 мс после перевода ключа  $K$  в положение  $a$ .

399. В цепи предыдущей задачи (рис. 22.20) при замкнутом ключе  $K$  (в положении  $a$ ) наступил установившийся режим. Затем ключ  $K$  перевели в положение  $b$ .

Определить напряжения  $u_1$  и  $u_2$  и ток в цепи через 80 мс после переключения.

400. Для цепи задачи 398 построить график изменения тока и напряжения на емкости за время, равное пяти постоянным времени. Вычислить энергию, которую отдает источник, и его КПД за все время зарядки.

401. Плоский конденсатор с бумажной изоляцией ( $\epsilon=4$ , удельное сопротивление диэлектрика  $\rho=5 \cdot 10^{11}$  Ом·м) и напряжением между пластинами 1 кВ самозаряжается. За какое время напряжение между пластинами уменьшится до 50 В?

402. Цепь из последовательно соединенных активного сопротивления  $R=20$  Ом и емкости  $C=400$  мкФ присоединяется к сети переменного тока  $U=220$  В,  $f=50$  Гц в момент времени, при котором принужденный ток проходит нулевое значение.

Определить закон изменения во времени напряжения на емкости и тока в цепи.

## ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ. 22

388.  $2,4-1,2e^{-100t}$  А;  $-120e^{-100t}$  В.

$t, \text{ с}$	0	2,5	5,0	7,5
$i, \text{ А}$	0	1,89	2,59	2,85
$ e_L , \text{ В}$	6	2,22	0,81	0,30

390. 2,75 с.

391. 36 В.

392. 32 Ом.

393. При  $t=0$   $i_0=0$ ,  $e_0=-20$  В, при  $t=100$  мс  $i_{100}=8,65$  А, ЭДС изменяется скачком от  $-27$  В до  $34,6$  В, при  $t=150$  мс  $i_{150}=1,17$  А,  $e_{150}=4,92$  В.

394.  $1+4e^{-100t}$  А.395.  $-0,053$  А.396.  $17 \sin(314t-54^\circ)+13,7e^{-31,8t}$  А.

397. 28 А.

398. 315 В; 164 В; 0,205 А.

399. 185 В; 205 В; 0,23 А.

400.  $W_{\text{н}}=25$  Дж,  $\eta=0,5$ .

$t$	$\tau$	$2\tau$	$3\tau$	$4\tau$	$5\tau$
$u_C, \text{ В}$	315	433	475	490	498,5
$i, \text{ мА}$	205,5	75	27,8	10	3,7

401. 5,3 с.

402.  $115,2 [\sin(314t - \pi/2) + e^{-125t}]$  В;  $14,4 (\sin 314t - 0,4e^{-125t})$  А.

## Глава двадцать третья

### ДЛИННЫЕ ЛИНИИ

#### 23.1. ЛИНИЯ С ПОТЕРЯМИ ПРИ СОГЛАСОВАННОЙ НАГРУЗКЕ

##### Условие задачи

К источнику синусоидального напряжения  $\dot{U}_1$  с частотой  $f=800$  Гц присоединена воздушная линия связи (рис.

23.1) длиной  $l=100$  км и параметрами  $R_0=5,4$  Ом/км;  $L_0=2 \cdot 10^{-3}$  Гн/км;  $G_0=1 \cdot 10^{-6}$  См/км;  $C_0=6 \cdot 10^{-9}$  Ф/км. Напряжение в конце линии (на нагрузке)  $U_2=10$  В, а сопротивление нагрузки равно волновому (характеристическому  $Z_c$ ).

Определить действующее и мгновенные значения напряжения  $U_1$ ,  $u_1$  и тока  $I_1$ ,  $i_1$  в начале линии. Построить кривые распределения вдоль линии действующих значений напряжения  $U$  и тока  $I$ . Вычислить мощности, подводимые к нагрузке и ко входу линии.

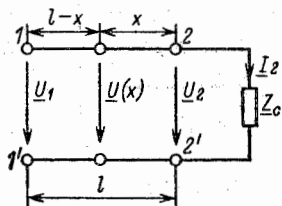


Рис. 23.1. Линия длиной  $l$ , нагруженная на сопротивление, равное характеристическому

### Решение задачи

1. Общая характеристика согласованного режима. Линии передачи информации, к числу которых относится и заданная линия связи, весьма часто работают в режиме согласования, при котором сопротивление нагрузки  $Z_n$  равно волновому сопротивлению линии  $Z_c$ . Чем это объяснить?

При согласованной нагрузке энергия перемещается вдоль линии только в одном направлении — от источника к приемнику (прямые волны напряжения и тока). В конце линии вся энергия и соответственно вся передаваемая информация воспринимается приемником без отражения.

Отсутствие отраженных волн напряжения и тока исключает возврат посылаемого сигнала (от приемника к источнику).

В рассматриваемом режиме нагрузки (при  $Z_n=Z_c$ ) комплексное напряжение в любой точке линии на расстоянии от ее конца определяется только прямой волной

$$\underline{U} = \underline{U}_{\text{пр}} = \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 Z_c}{2} e^{\gamma x} = \underline{U}_2 e^{\gamma x}, \quad (23.1)$$

так как  $Z_n \underline{I}_2 = Z_c \underline{I}_2 = \underline{U}_2$  и комплексный ток в любой точке линии

$$\underline{I} = \underline{I}_{\text{пр}} = \frac{\underline{U}_{\text{пр}}}{Z_c} = \frac{\underline{U}_2}{Z_c} e^{\gamma x} = \underline{I}_2 e^{\gamma x}, \quad (23.2)$$

где  $\underline{U}_2$  и  $\underline{I}_2$  — комплексное напряжение и ток в конце ли-



нии;  $\underline{\gamma}$  — коэффициент распространения (комплексная величина);  $\underline{Z}_c$  — волновое сопротивление линии.

В приведенных формулах неизвестны две величины: волновое сопротивление  $\underline{Z}_c$  и коэффициент распространения  $\underline{\gamma}$ , называемые вторичными параметрами линии. Перейдем к их вычислению.

2. Вычисление  $\underline{Z}_c$  и  $\underline{\gamma}$ . Волновое (характеристическое) сопротивление определяется по формуле

$$\underline{Z}_c = Z_c e^{j\theta} = \sqrt{\underline{Z}_0 / \underline{Y}_0},$$

где сопротивление на 1 км линии

$$\begin{aligned} \underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0 &= 5,4 + j2\pi \cdot 800 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 5,4 + j10 = \\ &= 11,4 \angle 61^\circ 40' \text{ Ом} \end{aligned}$$

и проводимость на 1 км линии

$$\begin{aligned} \underline{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0 &= 10^{-6} + j2\pi \cdot 800 \cdot 6 \cdot 10^{-9} \approx \\ &\approx 10^{-6} (1 + j30) = 10^{-6} \cdot 30 \angle 88^\circ 05' \text{ См.} \end{aligned}$$

При полученных величинах  $\underline{Z}_0$  и  $\underline{Y}_0$  волновое сопротивление

$$\begin{aligned} Z_c = \sqrt{\frac{11,4 \angle 61^\circ 41'}{10^{-6} \cdot 30 \angle 88^\circ 05'}} &= \sqrt{0,38 \cdot 10^{-6} e^{-j16^\circ 25'}} = \\ &= 620 \angle -8^\circ 10' \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Коэффициент распространения

$$\begin{aligned} \underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} &= 18,5 \cdot 10^{-3} \angle 74^\circ 50' = \\ &= 4,8 \cdot 10^{-3} + j17,9 \cdot 10^{-3} \text{ 1/км,} \end{aligned}$$

где вещественная часть комплексного коэффициента распространения называется коэффициентом затухания ( $\alpha = 4,8 \cdot 10^{-3}$  Нп/км), а мнимая часть — коэффициентом фазы ( $\beta = 17,9 \cdot 10^{-3}$  рад/км).

3. Вычисление напряжения и тока в начале линии и тока в конце линии. По условию задачи задано напряжение в конце линии  $U_2 = 10$  В, начальная фаза которого принята равной нулю. Поэтому запишем  $\underline{U}_2 = U_2 = 10$  В и преобразуем формулу (23.1):

$$\underline{U} = \underline{U}_2 e^{\gamma x} = 10 e^{(\alpha + j\beta)x} = 10 e^{\alpha x} e^{j\beta x} \text{ В.} \quad (23.4)$$

Поскольку  $x$  — расстояние от конца линии, то при  $x =$

$=l$ , где  $l$  — длина линии, получим по формуле (23.4) напряжение начала линии  $\underline{U}_1$ . Предварительно вычислим:  $\alpha x = \alpha l = 4,8 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 0,48$  Нп,  $e^{\alpha l} = e^{0,48} = 1,62$  и  $\beta x = \beta l = 17,9 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 1,79$  рад, и так как 1 рад =  $57,3^\circ$ , то  $\beta l = 1,79 \cdot 57,3 = 102,5^\circ = 102^\circ 30'$ .

При полученных данных комплексное напряжение в начале линии

$$\underline{U}_1 = 16,2 \angle 102^\circ 30' \text{ В,}$$

его мгновенное значение

$$u_1 = 16,2 \sqrt{2} \sin(\omega t + 102^\circ 30') \text{ В}$$

и действующее значение  $U_1 = 16,2$  В.

По формуле (23.2) и полученным результатам вычислим ток в начале линии:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \left( \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \right) e^{\gamma l} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_c} = \frac{16,2 \angle 102^\circ 30'}{620 \angle -8^\circ 30'} = \\ &= 26,2 \cdot 10^{-3} \angle 110^\circ 40' \text{ А} = 26,2 \angle 110^\circ 40' \text{ мА.} \end{aligned}$$

Мгновенное значение этого тока

$$i_1 = 26,2 \sqrt{2} \sin(\omega t + 110^\circ 40') \text{ мА,}$$

и действующее значение  $I_1 = 26,2$  мА.

Ток в конце линии ( $x=0$ ) по формуле (23.2)

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} = \frac{10}{620 \angle -8^\circ 10'} = 16,1 \angle 8^\circ 10' \text{ мА.} \quad (23.5)$$

Сдвиг по фазе между напряжением и током в конце линии зависит от аргумента сопротивления нагрузки. При согласованной нагрузке  $\underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_c = Z_c e^{j\theta}$  сдвиг по фазе равен  $\theta$ .

Сдвиг по фазе между напряжением и током в начале линии зависит от аргумента входного сопротивления линии. При согласованной нагрузке  $\underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_c = Z_c e^{j\theta}$  сдвиг по фазе равен  $\theta$ . Таким образом, при согласованной нагрузке

$$\angle \underline{U}_1, \underline{I}_1 = \angle \underline{U}_2, \underline{I}_2 = \theta. \quad (23.6)$$

4. Построение графиков распределения действующих значений напряжений и тока вдоль линии. Формула (23.4) выражает комплексное действующее значение напряжения в любой точке линии

$U(x)$ . Модуль этой величины

$$U(x) = U_2 e^{\alpha x} = 10e^{4,8 \cdot 10^{-3} x} \quad (23.7)$$

определяет действующее значение напряжения в зависимости от расстояния  $x$  от конца линии. Для различных расстояний  $x$  значения  $U$  приведены в табл. 23.1. По этим значениям напряжения построен график на рис. 23.2, где по оси абсцисс отложены расстояния  $l-x$  (рис. 23.1), отсчитываемые от начала линии.

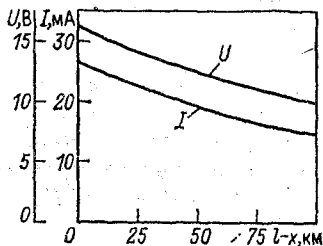


Рис. 23.2. Уменьшение действующих значений напряжения и тока в линии с согласованной нагрузкой

Для построения графика тока преобразуем уравнение (23.2) к аналогичному виду:

Для построения графика тока преобразуем уравнение (23.2) к аналогичному виду:

$$I(x) = \frac{U_2}{Z_c} e^{\alpha x} = I_2 e^{\alpha x} = 16,1 e^{\alpha x} \text{ мА.} \quad (23.8)$$

Для выбранных значений  $x$  (табл. 23.1) вычислены значения тока, и по этим данным построен график на рис. 23.2.

Графики  $U$  и  $I$  (рис. 23.2) показывают ослабление волн напряжения и тока при их перемещении от начала линии к концу.

Таблица 23.1

Параметр	$x$ , км				
	0	25	50	75	100
$\alpha x$ , Нп	0	0,12	0,24	0,36	0,48
$e^{\alpha x}$	1	1,13	1,27	1,43	1,62
$U$ , В	10	11,3	12,7	14,3	16,2
$I$ , мА	16,1	18,2	20,5	23,0	26,2

5. Вычисление мощностей. Полная комплексная мощность в нагрузке

$$\begin{aligned} S_2 &= U_2 \dot{I}_2 = 10 \cdot 16,1 \cdot 10^{-3} \angle -8^\circ 10' = \\ &= 0,161 (0,99 - j0,143) = 0,159 - j0,023 \text{ В} \cdot \text{А}, \end{aligned}$$

откуда активная мощность в нагрузке  $P_2 = 0,159 \text{ Вт} = 159 \text{ мВт}$ .

Полная комплексная мощность на входе линий

$$\begin{aligned} \underline{S}_1 &= \underline{U}_1 \underline{I}_1^* = 16,2 \angle 102^\circ 30' \cdot 26,2 \cdot 10^{-3} \angle -110^\circ 40' = \\ &= 0,424e^{-j8^\circ 10'} = 0,42 - j0,0607 \text{ В} \cdot \text{А}, \end{aligned}$$

откуда активная мощность источника энергии

$$P_1 = 0,42 \text{ Вт} = 420 \text{ мВт}.$$

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Какое ослабление тока и напряжения создает рассматриваемая линия? В заданных условиях (при согласованной нагрузке) отношение напряжений и токов в начале линии и в ее конце, как следует из (23.7) и (23.8), при  $x=l$ , т. е. при  $U=U_1$  и  $I=I_1$   $U_1/U_2 = I_1/I_2 = e^{\alpha l} = e^{0,48} = 1,62$ .

Следовательно, ток и напряжение ослабляются линией в 1,62 раза. Это же ослабление характеризуется в неперях величиной  $\alpha l = \ln 1,62 = \ln e^{0,48} = 0,48 \text{ Нп}$ .

2. Каково ослабление в линии подводимой к ней активной мощности? Отношение активных мощностей  $P_1/P_2 = 420/159 = 2,6$ . Это же ослабление мощности, но выраженное в неперях,

$$1/2 \ln (P_1/P_2) = 1/2 \ln 2,6 = 1/2 \cdot 0,96 = 0,48$$

совпадает с полученным в предыдущем вопросе ослаблением напряжений и токов. Полученный результат не случаен: при согласованной нагрузке с учетом (23.6) отношение мощностей

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{U_1 I_1 \cos \theta}{U_2 I_2 \cos \theta} = \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} = e^{2\alpha l},$$

а

$$1/2 \ln (P_1/P_2) = 1/2 \ln e^{2\alpha l} = \alpha l.$$

3. Будет ли рассматриваемая линия неискажающей для спектра частот от 200 до 2000 Гц? Отсутствие искажений означает, что формы сигнала в начале линии и в ее конце подобны, т. е. сигнал изменяется только по значению.

Линия будет не искажающей, если коэффициент ослабления  $\alpha$  и фазовая скорость  $v = \omega/\beta = 2\pi f/\beta$  не будут изменяться в диапазоне частот. Для заданной линии  $\alpha$  и  $v$  вычислены для трех значений частоты (табл. 23.2). Результаты вычислений показывают, что линия вносит искажения,

$f$ , Гц	$\alpha$ , (Нп/км) · 10 <sup>-3</sup>	$\beta$ , (рад/км) · 10 <sup>-3</sup>	$v$ , км/с
200	3,88	5,6	224
800	4,8	17,9	280
2000	4,6	45,7	275

т. е. при передаче, например, телефонного разговора речь будет искажаться.

4. Можно ли сделать рассматриваемую линию без искажений (см. предыдущий вопрос)? У неискажающей линии между ее параметрами должно выполняться соотношение  $R_0/L_0 = G_0/C_0$ . В заданной линии это условие не соблюдается. Следовательно, надо изменить какой-либо параметр. Иногда вводят дополнительную индуктивность, включаемую через каждый километр в линию, которая при наших данных

$$L_{0, \text{доп}} = \frac{C_0 R_0}{G_0} - L_0 = \frac{6 \cdot 10^{-9} \cdot 5,4}{10^{-6}} - 2 \cdot 10^{-3} = 30,4 \cdot 10^{-3} \text{ Гн} = 30,4 \text{ мГн.}$$

5. Как построить график волны напряжения в линии для моментов времени  $t = 0$  и  $t = 50$  мкс? На основании (23.4) запишем мгновенное значение напряжения вдоль линии:

$$u = 10\sqrt{2} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x). \quad (23.9)$$

Выражение (23.9) показывает, что в любой заданный момент времени  $t$  напряжение вдоль линии при согласованной нагрузке распределяется по синусоидальному закону с уменьшающейся от начала линии к концу амплитудой  $10\sqrt{2}e^{\alpha x}$ .

В частности, при  $\omega t = 0$  получим

$$u(0) = 10\sqrt{2} e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

или, например, при частоте  $f = 2000$  Гц, для которой  $\alpha = 4,6 \cdot 10^{-3}$  Нп/км,  $\beta = 45,7 \cdot 10^{-3}$  рад/км (табл. 23.2),

$$u(0) = 10\sqrt{2} e^{4,6 \cdot 10^{-3} x} \sin 45,7 \cdot 10^{-3} x.$$

Задаваясь значениями  $x$  от 0 до 100 км, вычисляем  $u(0)$  и строим по точкам график (рис. 23.3). В частности,

$u(0) = 0$  при  $x=0$  и  $45,7 \cdot 10^{-3} x = \pi$ , откуда  $x = 68,8$  км (точка  $K$ ).

Ослабление синусоиды на рис. 23.3 мало заметно, так как вдоль линии уложилось всего 1,5 полуволны.

Для другого заданного момента времени  $t_1 = 50$  мкс  $= 5 \cdot 10^{-5}$  с

$$u(t_1) = 10\sqrt{2} e^{\alpha x} \sin(\omega t_1 + \beta x).$$

В конце линии ( $x=0$ ) напряжение уже равно не нулю, а  $u_2(t_1) = 10\sqrt{2} \sin 2\pi f t_1 = 10\sqrt{2} \times \sin 36^\circ = 8,3$  В (рис. 23.3).

Нулевое значение (точка  $K_1$ ) будет на расстоянии  $x_1$ , определяемом из условия

$$\omega t_1 + \beta x_1 = \pi,$$

откуда  $x_1 = 55$  км.

Как видно из сопоставления графиков  $u(0)$  и  $u(t_1)$ , за время  $t_1$  волна напряжения сместилась к концу линии и прошла путь  $68,8 - 55 = 13,8$  км.

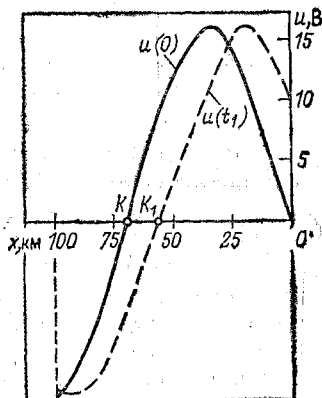


Рис. 23.3. Мгновенные значения напряжения в линии для двух моментов времени

## 23.2. ЛИНИЯ С ПОТЕРЯМИ ПРИ НЕСОГЛАСОВАННОЙ НАГРУЗКЕ

### Условия задачи

Линия, рассмотренная в предыдущей задаче (§ 23.1), нагружена на активное сопротивление  $R_n = 500$  Ом.

Определить напряжения и ток на входе линии, если напряжение на ее выходе (на сопротивлении  $R_n$ )  $U_2 = 10$  В.

Найти также напряжение и токи в начале и конце линии в режимах холостого хода и короткого замыкания, считая при этом заданным найденное напряжение  $U_1$  на входе линии.

### Решение задачи

1. Вычисление напряжения и тока на входе линии. В предыдущем параграфе заданная линия изучалась в режиме согласованной загрузки, при которой

существует только прямая волна напряжения, определяемая формулами (23.1) и (23.2).

При несогласованной нагрузке в линии будут как прямая, так и обратная волны напряжения и тока. Их суммы определяют напряжение и ток в любой точке линии:

$$\underline{U} = \underline{U}_{\text{пр}} + \underline{U}_{\text{обр}} = \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_c}{2} e^{\gamma x} + \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_c}{2} e^{-\gamma x}; \quad (23.10)$$

$$\underline{I} = \underline{I}_{\text{пр}} + \underline{I}_{\text{обр}} = \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_c}{2 \underline{Z}_c} e^{\gamma x} + \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_c}{2 \underline{Z}_c} e^{-\gamma x}. \quad (23.11)$$

Формулы (23.10) и (23.11) записываются еще с гиперболическими синусами и косинусами:

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \gamma x + \underline{I}_2 \underline{Z}_c \operatorname{sh} \gamma x; \quad (23.12)$$

$$\underline{I} = (\underline{U}_2 / \underline{Z}_c) \operatorname{sh} \gamma x + \underline{I}_2 \operatorname{ch} \gamma x, \quad (23.13)$$

где

$$\operatorname{sh} \gamma x = 0,5 (e^{\gamma x} - e^{-\gamma x})$$

и

$$\operatorname{ch} \gamma x = 0,5 (e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}).$$

В частности, чтобы получить напряжение и ток на входе линии  $\underline{U}_1$  и  $\underline{I}_1$ , нужно принять  $x=l$ .

Многие величины, входящие в формулы (23.10) — (23.13), вычислены в § 23.1. К их числу относятся: волновое сопротивление линии

$$\underline{Z}_c = 620 \angle -8^\circ 10' = 614 - j87,5 \text{ Ом};$$

произведение коэффициента распространения на длину линии

$$\gamma l = (\alpha + j\beta) l = 0,48 + j1,79,$$

а также

$$e^{\gamma l} = e^{0,48} e^{j1,79} = 1,62 e^{j102^\circ 30'} = -0,35 + j1,58.$$

Другая вспомогательная величина будет

$$e^{-\gamma l} = \frac{1}{e^{\gamma l}} = \frac{1}{-0,35 + j1,58} = -0,133 - j0,603,$$

и гиперболические функции равны

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \gamma l &= 0,5 (-0,35 + j1,58 + 0,133 + j0,603) = \\ &= -0,11 + j1,09 = 1,1 \angle 95^\circ 50'; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \gamma l &= 0,5(-0,35 + j1,58 - 0,133 - j0,603) = \\ &= -0,24 + j0,5 = 0,54 \angle 116^\circ 30'. \end{aligned}$$

Принимая комплексное напряжение на выходе линии  $\underline{U}_2 = U_2 = 10$  В, вычислим ток в нагрузке  $\underline{I}_2 = \underline{U}_2/R_n = 10/500 = 0,02$  А и по формуле (23.12) — напряжение на входе линии:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= 10(-0,24 + j0,5) + 0,02(614 - j87,5)(-0,11 + j1,09) = \\ &= 1,9 + j19,2 = 19,3 \angle 84^\circ 20' \text{ В}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= 10(-0,24 + j0,5) + 0,02(614 - j87,5)(-0,11 + j1,09) = \\ &= 1,9 + j19,2 = 19,3 \angle 84^\circ 20' \text{ В}. \end{aligned}$$

Чтобы получить напряжение на входе линии от каждой из волн (прямой и обратной), следует пользоваться формулой (23.10), что сделано в доп. вопросе 3. По формуле (23.13) ток на входе

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \frac{10 \cdot 1,1 \angle 95^\circ 50'}{620 \angle -8^\circ 10'} + 0,02(-0,24 + j0,5) = \\ &= 28,5 \cdot 10^{-3} \angle 108^\circ 40' \text{ А}, \end{aligned}$$

т. е. на входе линии ток  $\underline{I}_1 = 28,5$  мА опережает напряжение на угол  $24^\circ 20'$  (рис. 23.4). Это означает, что входное напряжение линии активно-емкостное.

2. Холостой ход линии. Этот режим (по условию задачи) необходимо рассчитать при найденном на-

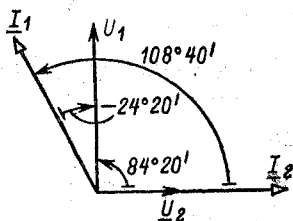


Рис. 23.4. Векторная диаграмма при нагрузке линии

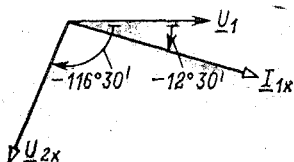


Рис. 23.5. Векторная диаграмма при холостом ходе линии

пряжении на входе линии, т. е. напряжении источника энергии  $\underline{U}_1 = 19,3$  В. В новых заданных условиях представляется возможным выбрать произвольно начальную фазу входного напряжения, и в целях упрощения расчета примем  $\underline{U}_1 = U_1 = 19,3$  В.



Приняв в (23.12)  $x=l$  и  $\underline{U}=\underline{U}_1$ , перепишем уравнение для режима холостого хода ( $\underline{I}_2=0$ ):

$$\underline{U}_1 = U_{2x} \operatorname{ch} \gamma l,$$

откуда

$$\underline{U}_{2x} = \frac{\underline{U}_1}{\operatorname{ch} \gamma l} = \frac{19,3}{0,54 \angle 116^\circ 30'} = 35,8 \angle -116^\circ 30' \text{ В.}$$

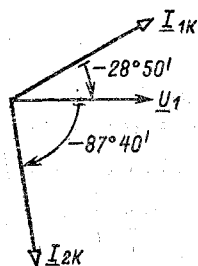
Из уравнения (23.13) при тех же предположениях найдем

$$\begin{aligned} \underline{I}_{1x} &= \frac{U_{2x}}{Z_c} \operatorname{sh} \gamma l = \frac{35,8 \angle -116^\circ 30'}{620 \angle -8^\circ 10'} \cdot 1,1 \angle 95^\circ 50' = \\ &= 63,5 \cdot 10^{-3} \angle -12^\circ 30' \text{ А.} \end{aligned}$$

Векторная диаграмма рис. 23.5 показывает, что в режиме холостого хода линия нагружает источник энергии активно-индуктивным сопротивлением (ток  $\underline{I}_1$  отстает по фазе от напряжения  $\underline{U}_1$ ).

3. Короткое замыкание линии. Для этого режима, принимая  $x=l$  и  $U_2=0$ , найдем из выражения (23.12)

$$\underline{U}_1 = I_{2K} Z_c \operatorname{sh} \gamma l$$



или

$$\begin{aligned} \underline{I}_{2K} &= \frac{\underline{U}_1}{Z_c \operatorname{sh} \gamma l} = \\ &= \frac{19,3}{620 \angle -8^\circ 10' \cdot 1,1 \angle 95^\circ 50'} = \\ &= 28,5 \cdot 10^{-3} \angle -87^\circ 40' \text{ А.} \end{aligned}$$

Из выражения (23.13)

$$\begin{aligned} \underline{I}_{1K} &= \underline{I}_{2K} \operatorname{ch} \gamma l = 28,5 \cdot 10^{-3} \angle -87^\circ 40' \times \\ &\times 0,54 \angle 116^\circ 30' = 15,3 \cdot 10^{-3} \angle 28^\circ 50' \text{ А.} \end{aligned}$$

Рис. 23.6. Векторная диаграмма линии при коротком замыкании.

Векторная диаграмма для этого режима (рис. 23.6) показывает, что угол сдвига фазы между напряжением и током на входе линии изменил знак (стал отрицательным) по сравнению с углом в режиме холостого хода.

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Как вычислить входное сопротивление линии? При решении задачи входное сопротивление

линии оценивалось только качественно, но его легко вычислить как отношение напряжения на входе линии к входному току. Соответственно для режимов нагрузки, холостого хода и короткого замыкания линии имеем

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{19,3 \angle 84^\circ 20'}{28,6 \cdot 10^{-3} \angle 108^\circ 40'} = 680e^{-j24^\circ 20'} = 620 - j276 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_x = \frac{U_1}{I_{1x}} = \frac{19,3}{63,5 \cdot 10^{-3} \angle -12^\circ 30'} = 304e^{j12^\circ 30'} = 298 + j632 \text{ Ом}$$

и

$$\underline{Z}_k = \frac{U_1}{I_{1k}} = \frac{19,3}{15,3 \cdot 10^{-3} \angle 28^\circ 50'} = 1260 \angle -28^\circ 50' = 1120 - j605 \text{ Ом}.$$

Значительные изменения входного сопротивления линии при включении, отключении или случайном закорачивании приемника следует учитывать, выбирая источники энергии или защитные устройства.

2. При каких режимах линии возможны превышения напряжения или перегрузки током? Результаты вычислений в задаче, сведенные в табл. 23.3, показывают, что некоторые величины превы-

Таблица 23.3

Режим	Входные и выходные величины			
	$U_1$ , В	$I_1$ , мА	$U_2$ , В	$I_2$ , мА
Номинальная нагрузка	19,3	28,5	10,0	20
Холостой ход	19,3	63,5	35,8	0
Короткое замыкание	19,3	15,3	0	28,5

шают номинальные значения, например, входной ток и напряжение на выходе при холостом ходе и ток в конце линии при ее коротком замыкании. В других линиях при замыкании приемника возможен рост входного тока.

3. Как определить напряжение прямой и обратной волн на входе линии при номинальной нагрузке? По уравнению (23.10) напряже-

ние прямой волны на входе линии ( $x=l$ )

$$\underline{U}_{\text{лпр}} = 0,5 (\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_c) e^{-\gamma l} = 18,5 \angle 98^\circ \text{ В.}$$

В уравнении (23.10) второе слагаемое правой части определяет обратную волну напряжения, которая на выводах линии равна

$$U_{\text{лобр}} = 0,5 (\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_c) e^{-\gamma l} = 1,06 \angle 46^\circ \text{ В.}$$

Таким образом, при выбранной нагрузке напряжение на входе линии состоит преимущественно из напряжения прямой волны.

### 23.3. ЛИНИЯ БЕЗ ПОТЕРЬ

#### Условие задачи

Резонансный контур электронного усилителя метровых волн состоит из емкости  $C = 10 \text{ пФ} = 10 \cdot 10^{-12} \text{ Ф}$  и переменной (настраиваемой) индуктивности. Индуктивностью служит отрезок линии (рис. 23.7), замкнутый на конце перемычкой  $K_1 K_2$ . Диаметр проводов линии  $d = 6 \text{ мм}$ , расстояние между осями проводов  $a = 16 \text{ мм}$ , максимальная длина до перемычки  $l_{\text{max}} = 12 \text{ см}$ . При настройке контура скользящие контакты  $K_1$  и  $K_2$  (рис. 23.7) перемещают

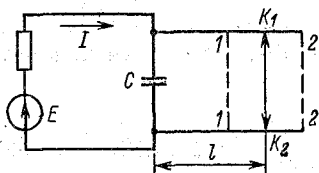


Рис. 23.7. Настраиваемый резонансный контур, переменная индуктивность которого выполнена в виде регулируемой короткозамкнутой линии

вдоль линии. Потери энергии в линии весьма малы, и ими можно пренебречь.

Усилитель, питающий резонансный контур, можно представить в виде эквивалентного источника энергии с ЭДС  $E = 3 \text{ кВ}$  и внутренним сопротивлением  $R_{\text{вт}} = 300 \text{ Ом}$ .

Определить положение перемычки  $K_1 K_2$ , обеспечивающее режим резонанса на частоте  $200 \text{ МГц} = 2 \cdot 10^8 \text{ Гц}$ . Вычислить ток источника и напряжение на входе линии для режима резонанса и крайнего положения перемычки (в конце линии).

## Решение задачи

1. Вторичные параметры линии без потерь. Для линии без потерь  $R_0=0$  и  $G_0=0$ . Поэтому волновое сопротивление

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\underline{Z}_0/\underline{Y}_0} = \sqrt{j\omega L_0/j\omega C_0} = \sqrt{L_0/C_0} = Z_c,$$

— вещественное число ( $\theta=0$ ), т. е. волновое сопротивление линии без потерь — активное.

Коэффициент распространения

$$\gamma = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \sqrt{j\omega L_0 j\omega C_0} = j\omega \sqrt{L_0 C_0} = j\beta,$$

и коэффициент ослабления  $\alpha=0$ , что и следовало ожидать.

2. Входное сопротивление линии без потерь. Токи и напряжения на входе и выходе линии без потерь связаны уравнениями, аналогичными (23.12) и (23.13):

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \cos \beta l + j \underline{I}_2 Z_c \sin \beta l; \quad (23.14)$$

$$\underline{I}_1 = j \frac{\underline{U}_2}{Z_c} \sin \beta l + \underline{I}_2 \cos \beta l, \quad (23.15)$$

так как

$$\operatorname{ch} j\beta l = \cos \beta l \text{ и } \operatorname{sh} j\beta l = j \sin \beta l.$$

Комплексное входное сопротивление линии равно отношению комплексных величин напряжения (23.14) и тока (23.15) в канале линии. В частности, для режима короткого замыкания ( $\underline{U}_2=0$ ) имеем

$$\underline{Z}_k = \frac{\underline{U}_{1к}}{\underline{I}_{1к}} = \frac{j \underline{I}_{2к} Z_c \sin \beta l}{\underline{I}_{2к} \cos \beta l} = j Z_c \operatorname{tg} \beta l. \quad (23.16)$$

Таким образом,  $\underline{Z}_k$  — чисто мнимая величина, т. е. реактивное сопротивление и, в частности, индуктивное сопротивление, если  $\operatorname{tg} \beta l > 0$ . Входящие в уравнение (23.16) вторичные параметры линии ( $Z_c$  и  $\beta$ ) являются нерегулируемыми величинами. Они зависят от диаметра проводов, расстояния между их осями, окружающей провод среды, но не от длины линии. Следовательно, изменить входное сопротивление  $\underline{Z}_k$  можно только изменением длины  $l$  линии, что и предусмотрено ее конструкцией (рис. 23.7).

3. Вычисление вторичных параметров линии. Индуктивность двухпроводной линии (см. § 8.4) на

1 м длины

$$L_0 = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{2a}{d} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{\pi} \ln \frac{32}{6} = 4 \cdot 10^{-7} \cdot 1,675 \text{ Гн/м} = \\ = 0,67 \text{ мкГн/м.}$$

Емкость на 1 м длины двухпроводной линии

$$C_0 = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln(2a/d)} = \frac{\pi \cdot 10^{-9}}{36\pi \ln(32/6)} = \frac{10^{-9}}{36 \cdot 1,675} = \\ = 16,6 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м} = 16,6 \text{ пФ/м.}$$

Волновое сопротивление линии без потерь

$$Z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{0,67 \cdot 10^{-6}}{16,6 \cdot 10^{-12}}} \approx 200 \text{ Ом.}$$

Коэффициент фазы линии без потерь

$$\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0} = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^8 \sqrt{0,67 \cdot 10^{-6} \cdot 16,6 \cdot 10^{-12}} = 4,2 \text{ рад/м,}$$

или иначе, если подставить выражение для  $L_0$  и  $C_0$ ,

$$\beta = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 2\pi f \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}.$$

Магнитная  $\mu_0$  и электрическая  $\epsilon_0$  постоянные связаны между собой соотношением  $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$ , где  $c = 3 \cdot 10^8$  мс — скорость света в вакууме. Поэтому

$$\beta = 2\pi f/c = 2\pi/cT = 2\pi/\lambda,$$

где  $\lambda = cT = c/f$  — длина волны в воздухе, а также вдоль воздушной линии без потерь. При данных задачи длина волны  $\lambda = 3 \cdot 10^8 / 2 \cdot 10^8 = 1,5$  м.

4. Вычисление длины линии, обеспечивающей режим резонанса. В заданном контуре (рис. 23.7) потеря энергии не учитывается (идеальный контур). В таком случае резонанс токов наступает при условии  $\omega L = 1/\omega C$  и для контура необходимо индуктивное сопротивление

$$\omega L = 1/\omega C = \frac{1}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 10 \cdot 10^{-12}} = 80 \text{ Ом.}$$

Таким должно быть индуктивное входное сопротивление линии, т. е.

$$\underline{Z}_K = j\omega L = j \cdot 80 \text{ Ом.}$$

Заменяя в формуле (23.16)  $\underline{Z}_k$  и  $\underline{Z}_c$  найденными значениями, получаем

$$\operatorname{tg} \beta l_0 = \frac{j\omega L}{jZ_c} = \frac{80}{200} = 0,4;$$

$$\beta l_0 = 21,8^\circ = \frac{2\pi}{360} 21,8 \text{ рад} = 0,38 \text{ рад},$$

откуда  $l_0 = \frac{0,38}{4,2} = 0,09 \text{ м} = 9 \text{ см}$  определяет длину линии, при которой контур (рис. 23.7) настроен в резонанс. Тангенс — периодическая функция, поэтому такое же входное сопротивление получится и при  $\beta l = 0,38 + n\pi$ , где  $n$  — целое число, т.е. при любой длине линии, которая больше  $l_0$  на

$$n\pi/\beta = n\lambda/2 = n \cdot 1,5 \text{ (м)}/2$$

или на целое число полуволн. Однако созданная длина линии много меньше  $\lambda/2$ , и другие решения не подходят.

5. Вычисление тока источника энергии и напряжения на входе линии. В режиме резонанса токов, т.е. при длине линии  $l_0 = 9 \text{ см}$ , полное (эквивалентное) сопротивление параллельного контура без потерь бесконечно велико. При этом ток источника  $I = 0$  и напряжение на входе линии  $U_1 = E$ .

При установке перемычки  $K_1 K_2$  (рис. 23.7) в другое положение, при котором длина линии  $l_{\max} = 0,12 \text{ м}$ , а угол сдвига фазы

$$\beta l_{\max} = 4,2 \cdot 0,12 = 0,504 \text{ рад} = 0,504 \cdot 360^\circ/2\pi = 28,8^\circ,$$

получим входное сопротивление линии по формуле (23.16):

$$\underline{Z}_k = jZ_c \operatorname{tg} \beta l_{\max} = j200 \cdot 0,55 = j110 \text{ Ом} = jX_L.$$

Сопротивление  $\underline{Z}_k$  и ему параллельно включенное емкостное сопротивление  $-jX_C = -80 \text{ Ом}$  образуют эквивалентное сопротивление

$$\underline{Z}_0 = \frac{-j80 \cdot j110}{-j80 + j110} = \frac{8800}{j30} = -j293,3 \text{ Ом}.$$

Сопротивление  $\underline{Z}_0$  включено последовательно с внутренним сопротивлением  $R_{\text{вт}}$  источника энергии, и поэтому ток источника

$$I = \frac{E}{R_{\text{вт}} + \underline{Z}_0} = \frac{3000}{300 - j293,3} = 7,15 \angle 44^\circ 20' \text{ А}.$$

Напряжение на входе линии

$$\underline{U}_1 = \underline{I} \underline{Z}_s = 7,15^{i44^\circ 20'} \cdot 293,3e^{-i90^\circ} = 2100e^{-i45^\circ 40'} \text{ В.}$$

#### 23.4. ДВУХПРОВОДНАЯ ЛИНИЯ ПРИ ВЫСОКОЙ ЧАСТОТЕ

##### Условие задачи

Двухпроводная линия, используемая для передачи энергии от радиопередатчика с длиной волны  $\lambda = 25$  м к антенне, имеет мощность синусоидального сигнала на выходе  $P_2 = 2$  кВт и сопротивление одного метра длины линии (двух проводов)  $R_0 = 0,29$  Ом/м.

Радиус проводов фидера  $a = 1$  мм, его длина  $l = 200$  м, а расстояние между проводами  $D = 0,1$  м.

Определить характеристическое сопротивление линии, мощность на входе, мощность потерь в фидере, его КПД, а также напряжение и ток на входе и выходе линии.

##### Решение задачи

1. Особенности линии (фидера). Излучающие системы передающей радиостанции (антенны), как правило, удалены от самого помещения радиостанции. При этом возникает необходимость в передаче энергии высокой частоты на некоторое расстояние от места ее производства (генератора) к излучающей системе (антенне). Чтобы уменьшить потери при передаче энергии, используют двухпроводную линию, пример которой рассматривается в этой задаче. Такие линии, называемые фидерами, выполняются с высокой изоляцией между проводами, что позволяет принять проводимость (между проводами)  $G_0 = 0$ .

2. Параметры линии. Сопротивление линии  $R_0$  задано по условию задачи, а проводимость  $G_0 = 0$  (см. п. 1). Два других параметра линии (индуктивность и емкость) в принятых в задаче обозначениях определяются:

$$L = (\mu_0 l / \pi) \ln (D/a);$$

$$C = \pi \epsilon_0 l / \ln (D/a)$$

или на единицу длины линии ( $l = 1$  м) при наших данных

$$\begin{aligned} L_0 &= (4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 / \pi) \ln (0,1/0,001) = 4 \cdot 10^{-7} \ln 100 = \\ &= 18,4 \cdot 10^{-7} \text{ Гн,} \end{aligned}$$

а

$$C_0 = (\pi / 36\pi \cdot 10^{-9}) / \ln 100 = 0,0278 \cdot 10^{-9} / 4,6 = 0,605 \cdot 10^{-11} \text{ Ф.}$$

В наших условиях (линия работает на высокой частоте)  $R_0 \ll \omega L_0$ , поэтому характеристическое сопротивление

$$\begin{aligned} Z_c &= \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} \approx \sqrt{L_0/C_0} = \\ &= \sqrt{18,4 \cdot 10^{-7}/0,605 \cdot 10^{-11}} \approx 550 \text{ Ом} = Z_c. \end{aligned}$$

Для линии, работающей на высокой частоте ( $R_0 \ll \omega L_0$  и  $G_0 \ll \omega C_0$ ), коэффициент затухания определяется как

$$\alpha = (R_0 \sqrt{C_0/L_0} + G_0 \sqrt{L_0/C_0})/2,$$

или, учитывая, что  $\sqrt{L_0/C_0} = Z_c$ , имеем

$$\alpha = (R_0/Z_c + G_0 Z_c)/2 = 0,29/550 \cdot 2 = 0,262 \cdot 10^{-3},$$

где учтено, что в задаче принято  $G_0 = 0$ .

3. Мощности и КПД линии. Активная мощность сигнала в конце линии

$$P_2 = \text{Re}(U_2 I_2^*).$$

Учитывая, что напряжение и ток на выходе линии ( $U_2, I_2$ ) и они же на входе линии ( $U_1, I_1$ ) связаны зависимостями

$$U_2 = U_1 e^{-\gamma l} = U_1 e^{-(\alpha + j\beta)l} = e^{-\alpha l} e^{-j\beta l},$$

$$I_2 = I_1 e^{-\gamma l} e^{-j\varphi} = I_1 e^{-\alpha l} e^{-j(\beta l + \varphi)},$$

имеем окончательно

$$P_2 = U_1 I_1 e^{-2\alpha l} \cos \varphi.$$

Так как при высокой частоте характеристическое сопротивление фидера  $Z_c$  является чисто активным, то  $\varphi = 0$  и мощность

$$P_2 = U_1 I_1 e^{-2\alpha l}.$$

Замечая, что  $U_1 I_1 = P_1$  (мощности на входе линии), получаем формулу для КПД фидера

$$\eta_{\Phi} = P_2/P_1 = e^{-2\alpha l},$$

или при наших данных

$$2\alpha l = 2 \cdot 0,262 \cdot 10^{-3} \cdot 200 = 104,8 \cdot 10^{-3}$$

и

$$\eta_{\Phi} = e^{-0,1048} \approx 0,9 = 90\%.$$

Следовательно, к фидеру подводится мощность

$$P_1 = P_2/\eta_{\Phi} = 2/0,9 \approx 2,22 \text{ кВт}$$



и теряется в фидере мощность

$$\Delta P = P_1 - P_2 = 2,22 - 2,0 = 0,22 \text{ кВт} = 220 \text{ Вт.}$$

4. Определение напряжения и тока на входе и выходе линии. Преобразуя формулу

$$P_1 = U_1 I_1 = U_1 U_1 / Z_c = U_1^2 / Z_c,$$

определим напряжение на входе линии

$$U_1 = \sqrt{P_1 Z_c} = \sqrt{2220 \cdot 550} \approx 1100 \text{ В.}$$

Сейчас легко найти ток в начале линии:

$$I_1 = U_1 / Z_c = 1100 / 550 = 2 \text{ А.}$$

Аналогично находим напряжение и ток в конце линии:

$$U_2 = \sqrt{P_2 Z_c} = \sqrt{2000 \cdot 550} \approx 1050 \text{ В;}$$

$$I_2 = U_2 / Z_c = 1050 / 550 \approx 1,92 \text{ А.}$$

Результаты, полученные в задаче, показывают, что при высокой частоте линия, нагруженная на сопротивление, равное волновому, имеет почти одинаковое значение тока на всем протяжении линии. Действительно,  $I_1 = 2 \text{ А}$  и  $I_2 = 1,92 \text{ А}$  мало отличаются. В любой промежуточной точке линии (между входом и выходом) ток будет находиться в указанных пределах.

Так, например, на расстоянии 100 м от начала линии ток

$$I_{100} = I_1 e^{-\alpha l} = 2e^{-0,262 \cdot 10^{-3} \cdot 100} \approx 1,96 \text{ А.}$$

### 23.5. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

403. Линия длиной  $l = 200 \text{ км}$ , параметры которой  $R_0 = 3 \text{ Ом/км}$ ,  $L_0 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Гн/км}$ ,  $C_0 = 6 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/км}$ ,  $G_0 = 1,0 / 10^{-6} \text{ Ом/км}$ , нагружена на сопротивление, равное волновому. Напряжение в конце линии  $U_2 = 20 \text{ В}$  при частоте  $f = 800 \text{ Гц}$ . Построить кривую распределения действующих значений напряжения и тока вдоль линии. Точки брать через каждые 50 км.

404. Параметры линии:  $R_0 = 5 \text{ Ом/км}$ ,  $L_0 = 2 \text{ мГн/км}$ ,  $C_0 = 5 \times 10^{-3} \text{ мкФ/км}$ ;  $G_0 = 10^{-6} \text{ См/км}$ . Вычислить дополнительную индуктивность, которую нужно включить на каждый километр длины линии, чтобы не было искажения сигналов.

405. Линия электропередачи длиной  $l = 1000 \text{ км}$  имеет первичные параметры  $R_0 = 0,035 \text{ Ом/км}$ ;  $\omega L_0 = 0,392 \text{ Ом/км}$ ,  $G_0 = 4,17 \cdot 10^{-8} \text{ См/км}$

и  $\omega C_0 = 2,92 \cdot 10^{-6}$  См/км. Мощность в нагрузке  $P_2 = 300$  МВт при напряжении  $U_2 = 220$  кВ и  $\cos \varphi_2 = 1$ . Определить вторичные параметры линии, напряжение и ток на ее входе.

406. Кабельная линия длиной  $l = 70$  км нагружена на сопротивление, равное волновому. Напряжение на приемном конце линии  $U_2 = 10$  кВ. Определить напряжение и ток в начале линии, если параметры линии  $R_0 = 1$  Ом/км,  $\omega C_0 = 4 \cdot 10^{-4}$  См/км;  $G_0 = \omega L_0 = 0$ .

407. Вторичные параметры линии без потерь:  $Z_c = 500$  Ом,  $\beta = 105$  рад/км. Линия работает на частоте  $f = 5$  МГц. Определить, на каком расстоянии от начала следует закоротить линию, чтобы она была эквивалентна индуктивности  $L = 10$  мГц.

### 23.6. ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ. 23

403.

$l$ , км	0	50	100	150	200
$U$ , В	32,4	28,6	25,4	22,6	20
$I$ , мА	95	84	74,5	66,0	58,5

404. 23 мГн/км.

405.  $367e^{-j2^\circ 15'}$ ,  $1,07 \cdot 10^{-3}e^{j87^\circ}$  1/км;  $201e^{j57^\circ}$  кВ;  $570e^{j65^\circ 30'}$  А.

406. 27 кВ, 540 А.

407. 5,4 м.

Приложение 1

Основные параметры изоляционных материалов

Материал	Относительная диэлектрическая проницаемость	Электрическая прочность, $\times 10^6$ В/м	Удельное электрическое сопротивление при 20° С, Ом·м
Бумага:			
кабельная сухая	2,3—3,5	6—9	$10^{11}$ — $10^{12}$
пропитанная маслом	3,5—3,7	10—25	$10^{13}$
парафинированная	4,3	10—25	—
Вода дистиллированная	80	—	—
Воздух	1,0	—	—
Ткань лакированная	3,5—5,0	32—45	$10^{10}$ — $10^{11}$
Масло минеральное	2,2	7—12	—
Миканит	4,6—6,0	15—20	10
Мрамор	8—10	3,5—5,5	$10^7$ — $10^8$
Парафин	2—2,2	15—30	$10$ — $10^8$
Электроизоляционный картон:			
сухой	2,5—4	8—10	$10^7$ — $10^{11}$
пропитанный маслом	4—5	12—27	$10^{10}$ — $10^{11}$
Резина	3—6	15—20	—
Слюда:			
мусковит	6—7,5	120—200	$10^{12}$ — $10^{12}$
флогопит	4—6	80—150	$10^{10}$ — $10^{12}$
Стекло	5,5—10	10—40	$10^9$ — $10^{13}$

Приложение 2

Основные параметры проводниковых материалов

Материал	Плотность, $10^3$ кг/м <sup>3</sup>	Удельная проводимость, $\times 10^6$ См/м	Удельное сопротивление, $\times 10^{-6}$ Ом·м	Температурный коэффициент сопротивления, °С <sup>-1</sup>
Алюминий	2,7	34	0,029	0,004
Константан	8,8	2	0,40—0,51	0,00005
Медь	8,9	57	0,0175	0,004
Манганин	8,14	2,4	0,42	0,000015
Нихром	8,2	0,9	1,1	0,0003
Сталь	7,85	10—5	0,1—0,2	0,005
Фехраль	7,6	0,83	1,2	0,0002

## Допустимые плотности токов для проводов и некоторых видов намоток

Вид намотки или условия размещения провода	Допустимая плотность тока, А/мм <sup>2</sup>
Одиночный провод в закрытом помещении сечением, мм <sup>2</sup> :	
5	10
10	7
50	4
100	3
Катушка с однорядной намоткой	3—5
Катушка с многорядной намоткой при мощностях:	
малых (до 10 Вт)	2—3
средних (до 1 кВт)	1,8—2,5
больших	1,2—1,8

## Приложение 4

## Характеристика намагничивания сталей

В, Т	H, А/м, для стали марок			
	1211 1212 1311	1511 1512	Литая сталь	Пермендюр
0,10	—	40	80	57
0,20	—	50	160	70
0,30	—	60	240	73
0,40	140	70	320	76
0,45	152	75	360	79
0,50	171	85	400	82
0,55	191	94	443	—
0,60	211	110	448	85
0,65	236	127	535	—
0,70	261	145	584	88
0,75	287	165	632	—
0,80	318	185	682	91
0,85	352	210	745	—
0,90	397	235	798	94
0,95	447	270	850	—
1,00	502	300	920	97
1,05	570	340	1004	100
1,10	647	395	1090	105
1,15	739	460	1187	110
1,20	840	540	1290	115
1,25	976	640	1430	120

В, Т	Н, А/м, для стали марок			
	1211 1212 1311	1511 1512	Литая сталь	Пермендюр
1,30	1140	770	1590	125
1,35	1340	970	1810	132
1,40	1580	1300	2090	140
1,45	1950	1830	2440	150
1,50	2500	2750	2890	162
1,55	3280	3850	3430	180
1,60	4370	5150	4100	200
1,65	5880	6950	4870	225
1,70	7780	8900	5750	260

## Приложение 5

## Единицы электрических и магнитных величин

Наименование электрической величины	Обозначение величины	Единица	Наименование единицы	Обозначение единицы (русские)
Энергия электрического и магнитного поля; электромагнитная энергия; механическая работа	$W_C, W_L$	джоуль	Джоуль	Дж
Активная мощность электрической цепи	$P$	ватт	Ватт	Вт
Реактивная мощность электрической цепи	$Q$	—	вар	вар
Полная мощность электрической цепи	$S$	вольт-ампер	Вольт-ампер	В·А
Электрический ток	$I$	ампер	Ампер	А
Электрический заряд	$q$	ампер-секунда	Кулон	Кл
Магнитный поток	$\Phi$	вольт-секунда	Вебер	Вб
Электрическое напряжение; потенциал; разность потенциалов; ЭДС	$U, V, E$	джоуль на кулон; ватт на ампер	Вольт	В
Магнитодвижущая сила; магнитное напряжение; потенциал; разность потенциалов	$F, U_M, V_M$	ампер	Ампер	А
Электрическое сопротивление	$R$	вольт на ампер	Ом	Ом
Электрическая емкость	$C$	кулон на вольт	Фарад	Ф

Наименование электрической величины	Обозначение величины	Единица	Наименование единицы	Обозначение единицы (русское)
Электрическая проводимость	$G$	ампер на вольт	Сименс	См
Индуктивность; взаимная индуктивность	$L, M$	вебер на ампер	Генри	Гн
Магнитное сопротивление	$R_M$	ампер на вебер	—	А/Вб
Магнитная проводимость	$G_M$	вебер на ампер	—	Гн
Плотность электрического тока	$J$	ампер на квадратный метр	—	А/м <sup>2</sup>
Плотность электрического заряда:	$\rho, \sigma$			
объемная		кулон на кубический метр	—	Кл/м <sup>3</sup>
поверхностная		кулон на квадратный метр	—	Кл/м <sup>2</sup>
Магнитная индукция	$B$	вебер на квадратный метр	Тесла	Тл
Напряженность электрического поля	$E$	вольт на метр	—	В/м
Напряженность магнитного поля	$H$	ампер на метр	—	А/м
Удельное электрическое сопротивление	$\rho$	Ом на метр	—	Ом/м
Удельная электрическая проводимость	$\gamma$	Сименс на метр	—	См/м
Абсолютная диэлектрическая проницаемость	$\epsilon_a$	—	—	—
Электрическая постоянная	$\epsilon_0$	Фарад на метр	—	Ф/м

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие . . . . .	3
<b>Глава первая. Электрическая цепь, ее элементы и основные законы . . . . .</b>	<b>5</b>
1.1. Виды цепей. Взаимосвязь токов и напряжений . . . . .	5
1.2. Источник ЭДС при переменной нагрузке. Режимы источника и приемника энергии . . . . .	12
1.3. Источник тока при переменной нагрузке. Режимы источника . . . . .	17
1.4. Выбор элементов цепи и ее выполнение (сборка) . . . . .	22
1.5. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	27
1.6. Ответы к задачам гл. 1 . . . . .	30
<b>Глава вторая. Неразветвленная цепь постоянного тока . . . . .</b>	<b>31</b>
2.1. Цепь с одним источником энергии . . . . .	31
2.2. Цепь с несколькими ЭДС. Источники энергии в режимах «генератора» и «потребителя» . . . . .	36
2.3. Потенциалы точек электрической цепи. Потенциальная диаграмма . . . . .	40
2.4. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	44
2.5. Ответы к задачам гл. 2 . . . . .	47
<b>Глава третья. Разветвленная цепь постоянного тока с одним источником энергии . . . . .</b>	<b>47</b>
3.1. Цепь с двумя узлами. Расчет цепи . . . . .	47
3.2. Цепь с несколькими узлами. Составление схемы и расчет цепи как делителя напряжения . . . . .	54
3.3. Цепь с несколькими узлами. Расчет цепи с учетом потери напряжения в проводях . . . . .	58
3.4. Расчет цепи с применением метода преобразования . . . . .	64
3.5. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	67
3.6. Ответы к задачам гл. 3 . . . . .	72

Глава четвертая. Разветвленная цепь постоянного тока с несколькими источниками энергии, включенными в разные ветви . . . . .	73
4.1. Метод наложения тока . . . . .	73
4.2. Метод уравнений Кирхгофа . . . . .	77
4.3. Метод контурных токов . . . . .	81
4.4. Метод узловых потенциалов . . . . .	85
4.5. Метод двух узлов . . . . .	89
4.6. Метод эквивалентного генератора . . . . .	93
4.7. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	96
4.8. Ответы к задачам гл. 4 . . . . .	98
Глава пятая. Электростатическое поле . . . . .	98
5.1. Электрическое поле точечного заряда . . . . .	98
5.2. Электрическое поле нескольких точечных зарядов . . . . .	106
5.3. Однородное электрическое поле . . . . .	111
5.4. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	116
5.5. Ответы к задачам гл. 5 . . . . .	119
Глава шестая. Электрическая емкость . . . . .	120
6.1. Расчет общей емкости соединения конденсаторов . . . . .	120
6.2. Распределение напряжений и зарядов в цепи конденсаторов . . . . .	122
6.3. Плоский конденсатор . . . . .	125
6.4. Цилиндрический конденсатор . . . . .	128
6.5. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	130
6.6. Ответы к задачам гл. 6 . . . . .	132
Глава седьмая. Электромагнетизм. Магнитное поле проводов с токами . . . . .	133
7.1. Проводник с током в однородном магнитном поле . . . . .	133
7.2. Магнитное поле прямого провода с током . . . . .	139
7.3. Магнитное поле нескольких проводов с токами . . . . .	145
7.4. Магнитное поле катушки с током . . . . .	150
7.5. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	154
7.6. Ответы к задачам гл. 7 . . . . .	158
Глава восьмая. Электромагнитная индукция . . . . .	159
8.1. Электродвижущая сила электромагнитной индукции в проводе . . . . .	159
8.2. Электродвижущая сила электромагнитной индукции в контуре (катушке) . . . . .	163
8.3. Индуктивность катушек . . . . .	168
8.4. Индуктивность линии . . . . .	171



8.5. Взаимная индуктивность. Электродвижущая сила взаимной индукции . . . . .	172
8.6. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	175
8.7. Ответы к задачам гл. 8 . . . . .	178
<b>Глава девятая. Неразветвленная цепь переменного тока . . . . .</b>	<b>180</b>
9.1. Изображение синусоидальных величин. Векторная и волновая диаграммы . . . . .	180
9.2. Цепь с активным сопротивлением и индуктивностью . . . . .	186
9.3. Цепь, состоящая из резистора и катушки индуктивности . . . . .	192
9.4. Цепь с активным сопротивлением и емкостью . . . . .	196
9.5. Цепь, содержащая $R$ , $L$ и $C$ . . . . .	200
9.6. Цепь, содержащая несколько активных и реактивных элементов . . . . .	204
9.7. Расчет неразветвленной цепи по показаниям приборов . . . . .	209
9.8. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	214
9.9. Ответы к задачам гл. 9 . . . . .	220
<b>Глава десятая. Разветвленная цепь переменного тока . . . . .</b>	<b>222</b>
10.1. Применение векторной диаграммы для расчета разветвленной цепи . . . . .	222
10.2. Расчет цепи методом проводимостей . . . . .	227
10.3. Улучшение коэффициента мощности . . . . .	230
10.4. Расчет разветвленной цепи по показаниям приборов . . . . .	234
10.5. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	238
10.6. Ответы к задачам гл. 10 . . . . .	242
<b>Глава одиннадцатая. Резонанс в электрической цепи . . . . .</b>	<b>243</b>
11.1. Режим резонанса напряжений. Частотные характеристики . . . . .	243
11.2. Режим резонанса токов. Частотные характеристики параллельного контура . . . . .	250
11.3. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	257
11.4. Ответы к задачам гл. 11 . . . . .	261
<b>Глава двенадцатая. Применение комплексных чисел к расчету цепей переменного тока . . . . .</b>	<b>263</b>
12.1. Комплексные токи, напряжения и сопротивления . . . . .	263
12.2. Разветвленная цепь, содержащая только параллельные ветви . . . . .	267
12.3. Разветвленная цепь с параллельными и последовательными участками . . . . .	270
12.4. Сложная цепь . . . . .	275
12.5. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	277

12.6. Ответы к задачам гл. 12 . . . . .	281
<b>Глава тринадцатая. Электрические цепи с взаимной индуктивностью</b> . . . . .	282
13.1. Линейный трансформатор . . . . .	282
13.2. Неразветвленная цепь, содержащая взаимную индуктивность . . . . .	292
13.3. Разветвленная цепь, содержащая взаимную индуктивность . . . . .	297
13.4. Сложная цепь, содержащая взаимную индуктивность . . . . .	301
13.5. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	307
13.6. Ответы к задачам гл. 13 . . . . .	309
<b>Глава четырнадцатая. Круговые диаграммы напряжений и тока</b> . . . . .	309
14.1. Неразветвленная цепь с переменным активным сопротивлением . . . . .	309
14.2. Неразветвленная цепь с переменными реактивными сопротивлениями . . . . .	315
14.3. Разветвленная цепь с переменным сопротивлением ветви . . . . .	319
14.4. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	323
14.5. Ответы к задачам гл. 14 . . . . .	325
<b>Глава пятнадцатая. Симметричная трехфазная цепь</b> . . . . .	326
15.1. Трехфазная система ЭДС. Соединение обмоток трехфазных генераторов . . . . .	326
15.2. Трехпроводная цепь с приемником, соединенным звездой . . . . .	330
15.3. Трехфазная цепь с приемником, соединенным треугольником . . . . .	333
15.4. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	336
15.5. Ответы к задачам гл. 15 . . . . .	337
<b>Глава шестнадцатая. Несимметричная трехфазная цепь</b> . . . . .	338
16.1. Четырехпроводная цепь . . . . .	338
16.2. Трехпроводная цепь с несимметричным приемником, соединенным треугольником . . . . .	343
16.3. Трехфазная цепь с различными соединениями приемников . . . . .	347
16.4. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	349
16.5. Ответы к задачам гл. 16 . . . . .	351
<b>Глава семнадцатая. Четырехполюсники</b> . . . . .	352
17.1. Расчет четырехполюсника при заданных параметрах его схемы . . . . .	352

17.2. Расчет четырехполюсника по данным опытов холостого хода и короткого замыкания . . . . .	361
17.3. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	366
17.4. Ответы к задачам гл. 17 . . . . .	367
<b>Глава восемнадцатая. Электрические цепи при периодических несинусоидальных токах и напряжениях . . . . .</b>	<b>367</b>
18.1. Гармонические составляющие периодических кривых . . . . .	367
18.2. Электрическая цепь с несинусоидальным источником энергии . . . . .	371
18.3. Электрическая цепь с резонансными контурами. Фильтрация гармоник . . . . .	375
18.4. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	380
18.5. Ответы к задачам гл. 18 . . . . .	382
<b>Глава девятнадцатая. Нелинейные электрические цепи постоянного тока . . . . .</b>	<b>383</b>
19.1. Последовательное соединение нелинейных элементов . . . . .	383
19.2. Последовательное соединение линейного и нелинейного элементов . . . . .	387
19.3. Параллельное соединение линейных и нелинейных элементов . . . . .	394
19.4. Последовательно-параллельное (смешанное) соединение нелинейных и линейных элементов . . . . .	396
19.5. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	400
19.6. Ответы к задачам гл. 19 . . . . .	403
<b>Глава двадцатая. Магнитные цепи при постоянных магнитодвижущих силах . . . . .</b>	<b>404</b>
20.1. Неразветвленная магнитная цепь . . . . .	404
20.2. Разветвленная симметричная магнитная цепь . . . . .	409
20.3. Разветвленная несимметричная магнитная цепь. Расчет цепи при заданной магнитной индукции . . . . .	412
20.4. Разветвленная несимметричная цепь. Расчет цепи при заданных магнитодвижущих силах . . . . .	414
20.5. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	418
20.6. Ответы к задачам гл. 20 . . . . .	420
<b>Глава двадцать первая. Нелинейные цепи переменного тока . . . . .</b>	<b>421</b>
21.1. Нелинейное сопротивление как преобразователь синусоидального сигнала в несинусоидальный . . . . .	421
21.2. Применение полупроводниковых приборов для преобразования переменного напряжения в постоянное . . . . .	426

21.3. Катушка со стальным магвитопроводом, питаемая переменным напряжением . . . . .	430
21.4. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	435
21.5. Ответы к задачам гл. 21 . . . . .	437
<b>Глава двадцать вторая. Переходные процессы в линейных электрических цепях . . . . .</b>	<b>438</b>
22.1. Определение начальных и конечных значений токов и напряжений . . . . .	438
22.2. Цепь $R, L$ в режиме включения и выключения постоянного напряжения . . . . .	445
22.3. Включение цепи $R, L$ на синусоидальное напряжение . . . . .	452
22.4. Цепь $R, C$ в режиме зарядки и разрядки конденсатора . . . . .	455
22.5. Присоединение цепи $R, C$ к источнику синусоидального напряжения . . . . .	460
22.6. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	464
22.7. Ответы к задачам гл. 22 . . . . .	465
<b>Глава двадцать третья. Длинные линии . . . . .</b>	<b>466</b>
23.1. Линия с потерями при согласованной нагрузке . . . . .	466
23.2. Линия с потерями при несогласованной нагрузке . . . . .	473
23.3. Линия без потерь . . . . .	478
23.4. Двухпроводная линия при высокой частоте . . . . .	482
23.5. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	484
23.6. Ответы к задачам гл. 23 . . . . .	485
<b>Приложения . . . . .</b>	<b>486</b>

Учебное пособие

**ЗАЙЧИК МОИСЕЙ ЮРЬЕВИЧ**

**Сборник задач и упражнений по теоретической  
электротехнике**

Редактор *Т. Н. Платова*

Художественные редакторы *В. А. Гозак-Хозак, Г. И. Панфилова*

Технический редактор *Н. Н. Хотулёва*

Корректор *З. Б. Драновская*

ИБ № 1863

Сдано в набор 17.09.87. Подписано в печать 05.02.88. Формат 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>.  
Бумага типографская № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая.  
Усл. печ. л. 26,04. Усл. кр.-отт. 26,19. Уч.-изд. л. 26,42. Тираж 90 000 экз.  
Заказ № 950. Цена 1 р.

Энергоатомиздат, 113114, Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10

Владимирская типография Союзполиграфпрома  
при Госкомиздате СССР

600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7