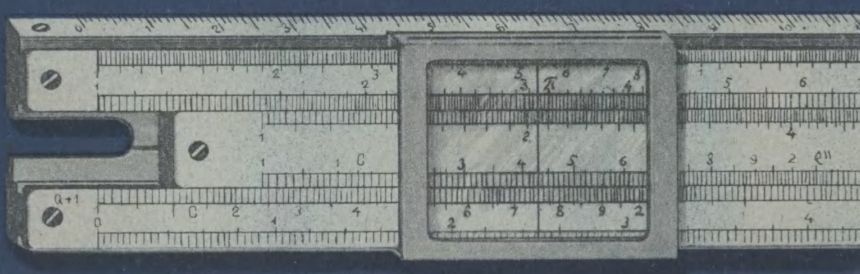
К. А. СЕМЕНДЯЕВ

Счётная линейка



К. А. СЕМЕНДЯЕВ

СЧЁТНАЯ ЛИНЕЙКА

КРАТКОЕ РУКОВОДСТВО

ИЗДАНИЕ ВОСЬМОЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1957

ВВЕДЕНИЕ

Техники, инженеры, командиры, научные работники, экономисты, бухгалтеры, представители всевозможных профессий и специальностей встречаются в своей повседневной деятельности с необходимостью производить вычисления. Все хорошо знают, насколько облегчает работу по сложению и вычитанию простейшее и широко распространённое в нашей стране приспособление — русские счёты. К сожалению, счётная линейка, которая может оказать существенную помощь при выполнении вычислений, содержащих умножение, деление, извлечение корня, возведение в степень, не имеет ещё такого же массового распространения. Счётная линейка должна стать необходимым инструментом всех, имеющих дело с вычислениями. Этот простой и портативный счётный прибор позволяет значительно упростить и ускорить вычислительную работу.

В отличие от счётов или арифмометра счётная линейка даёт результаты не точные, а приближённые. В большинстве практических вычислений исходные данные бывают известны лишь с определённой степенью точности. Выполнение «точных» вычислений с приближёнными числами влечёт только ненужную затрату времени и энергии. Если, например, сторона куба, полученная измерением с помощью масштабной линейки, имеющей миллиметровые деления, равна 5,7 *см*, бессмысленно считать его объём равным в точности 185,193 *см*^{3}. Действительно, если, получив более точное значение стороны, равное 5,74 *см*, мы вновь подсчитаем объём куба, то получим величину (189,119...), отличающуюся от первоначальной почти на 4 *см*^{3}. Ясно, что при этих условиях вычисление даже десятых долей *см*^{3} совершенно бесполезно *).

*) Подробнее об этом см. любую книгу, посвящённую приближённым вычислениям, например, В. М. Брадис, Как надо вычислять, или М. Л. Франк, Элементарные приближённые вычисления.

При вычислениях на линейке точность получаемых результатов соответствует точности участвующих в вычислении величин. И те и другие могут иметь, как мы увидим, не более трёх (иногда четырёх) значащих цифр. Если требуется бо́льшая точность, пользоваться линейкой нельзя.

Предполагается, что пользующийся настоящим руководством знаком с логарифмами и имеет под руками счётную линейку, чтобы выполнять при чтении все примеры и упражнения. При этом последнее особенно необходимо, так как, не зная логарифмов, можно, хотя бы формально, усвоить основные правила пользования линейкой, но научиться считать на линейке чисто теоретически, не видя её и не упражняясь практически,— невозможно.

1. ОПИСАНИЕ ЛИНЕЙКИ

Счётная линейка состоит из трёх частей (рис. 1): а) корпуса линейки (или просто линейки), б) движка, в) бегунка.

На корпусе линейки и на движке нанесены шкалы, которые мы будем в дальнейшем обозначать для краткости ***K***, ***A***, ***B***, ***I***, ***C***, ***D*** и ***L*** (рис. 2) *). Шкалы ***A*** и ***B***, а также ***C*** и ***D***, нанесённые на прилегающих друг к другу краях движка и линейки, тождественны. В этом легко убедиться, установив движок так, чтобы начальные отметки движка и линейки совпадали. При этом все деления шкал ***A*** и ***B***, ***C*** и ***D*** также должны совпасть. Наличие расхождений свидетельствует о низком качестве данной линейки.

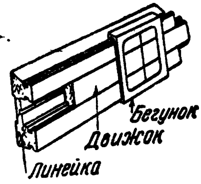


Рис. 1.

На бегунке нанесены одна или три визирные линии. Эти линии должны быть перпендикулярны к шкалам линейки и при

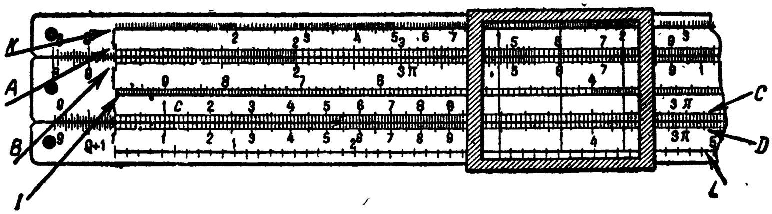


Рис. 2.

установке против начальной отметки шкалы ***D*** (или ***L***) должны проходить также через начальные отметки других шкал линейки.

*) На некоторых типах линеек шкалы ***K***, ***I*** и ***L*** не наносятся.

Если это условие не соблюдается, бегунок должен быть отрегулирован путём незначительного изгиба его направляющей закраины.

Корпус линейки слегка пружинит, сжимая движок. Движок ни в коем случае не должен ходить совершенно свободно в пазах линейки. Тугой ход движка затрудняет работу с линейкой и может быть устранён натиранием воском или парафином боковых рёбер движка.

2. РАВНОМЕРНАЯ ШКАЛА

Для того чтобы научиться считать на линейке, нужно прежде всего детально ознакомиться с нанесёнными на ней шкалами.

Простейший вид шкал — это хорошо всем известные **равномерные шкалы**, примером которых может служить любая масштабная шкала, в частности, хотя бы нане-

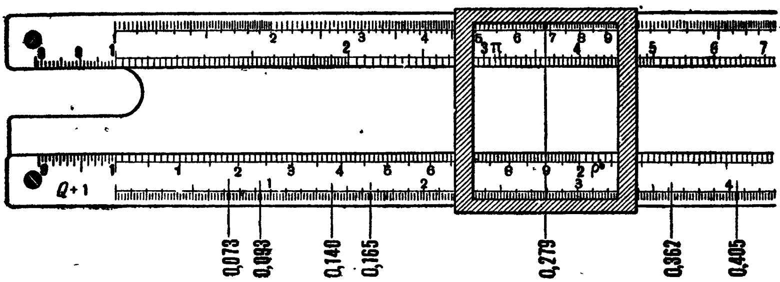


Рис. 3.

сённая на боковой грани счётной линейки. Число, стоящее у какой-либо отметки этой шкалы, указывает, сколько единиц масштаба (в нашем примере сантиметров) содержит отрезок шкалы от данной отметки до начала отсчёта (где, естественно, стоит отметка 0). Более мелкие деления позволяют получить отрезки, содержащие не только целое число сантиметров, но и ещё несколько миллиметров. Если требуются доли миллиметров, можно, мысленно разделив миллиметровое деление на десять равных частей, сделать нужную отметку на шкале. Каждое число, целое или дробное, изображается определённой точкой на шкале; однако практически мы не в состоянии различать изображения чисел, отличающиеся меньше чем на 0,01 *см*, так как наш невооружённый глаз не может отметить доли, меньшие, чем 0,01 *см*.

Помещённая внизу линейки шкала L также представляет собой равномерную шкалу, у которой за единицу масштаба взято 25 *см* *). Начальному делению шкалы соответствует отметка 0, конечному делению — отметка 1 (эти отметки не подписаны). Цифры 1, 2, ..., 9 указывают на десятые доли единицы, более длинные штрихи позволяют отсчитывать сотые. Расстояния между двумя соседними длинными штрихами разделены на пять равных частей, так что, следовательно, каждое самое маленькое деление соответствует 0,002. Если нам потребуется отсчитать одну тысячную, придётся это деление разделить пополам на-глаз. Примеры отсчётов на шкале L приведены на рис. 3 **).

Применения шкалы L будут даны в дальнейшем (см. n° 13).

3. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ШКАЛА

Шкала L — единственная равномерная шкала на линейке. Все остальные шкалы — неравномерные, логарифмические. Построим образец такой шкалы. Для этого возьмем из таблиц

Таблица

N	$\lg N$	N	$\lg N$
1	0,000	6	0,778
2	0,301	7	0,845
3	0,477	8	0,903
4	0,602	9	0,954
5	0,699	10	1,000

значения логарифмов целых чисел от 1 до 10 (см. таблицу) и отложим их в некотором масштабе на одной прямой от

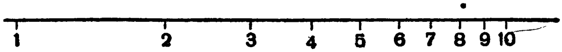


Рис. 4.

общего начала. Отложив логарифм какого-либо числа, надпишем это число около сделанной отметки (рис. 4). Получен-

*) Мы ограничиваемся рассмотрением наиболее распространённых линеек с длиной основной единицы в 25 *см*. Ознакомление со шкалами линеек другого размера может быть проведено самостоятельно.

**) У некоторых типов линеек шкала L нанесена не внизу линейки, а посредине обратной стороны движка и притом в обратном направлении (0 — справа, 1 — слева).

ные отметки служат основой первого участка логарифмической шкалы. Из способа его построения видно, что в начальной точке участка стоит отметка 1 (так как $\lg 1 = 0$), а в конечной — на расстоянии одной единицы масштаба — отметка 10.

Пользуясь таблицей логарифмов, можно нанести более мелкие деления, откладывая логарифмы чисел 1,1; 1,2; 1,3 и т. д. до 9,9 (рис. 5).

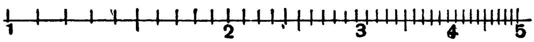


Рис. 5.

Таким образом, логарифмическая шкала строится так, что *расстояние от начала отсчёта* (*отмётка* 1) *до отметки* N *равно, в некотором масштабе, логарифму* N.

Продолжим теперь нашу шкалу. Для этого нужно отложить от начальной точки логарифмы чисел 11, 12, 13 и т. д. Но

$$\lg 11 = 1 + \lg 1{,}1;\ \lg 12 = 1 + \lg 1{,}2 \text{ и т. д.}$$

Следовательно, отметки 11, 12, 13 и т. д. будут на таком же расстоянии от отметки 10, как отметки 1,1; 1,2; 1,3 и т. д. от отметки 1. Другими словами, чтобы

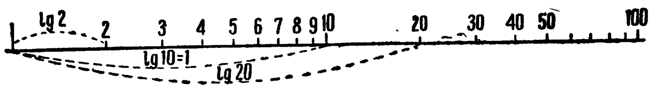


Рис. 6.

продолжить логарифмическую шкалу за пределы первого участка, достаточно повторить деления, нанесённые на первом участке, увеличив все числа отметок в десять раз (рис. 6).

Указанным способом логарифмическая шкала может быть продолжена как угодно далеко, причём не только вправо,

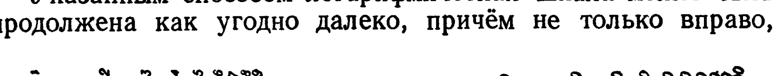


Рис. 7.

но и влево, если откладывать влево от начала отсчёта отрицательные величины (рис. 7). Действительно,

$$\lg 0{,}1 = -1;\ \lg 0{,}2 = -1 + \lg 2;\ \lg 0{,}3 = -1 + \lg 3 \text{ и т. д.}$$

Таким образом, имея один участок логарифмической шкалы длиной в одну единицу масштаба, можно получить простым его повторением бесконечную логарифмическую шкалу.

4. ОСНОВНЫЕ ШКАЛЫ ЛИНЕЙКИ

Шкала *D* на линейке и шкала *C* на движке, называемые обычно основными шкалами линейки, представляют собой как раз такие участки логарифмической шкалы с единицей масштаба, равной 25 *см*.

Рассмотрим подробнее нанесённые на эти шкалы деления. Сравнивая шкалы линейки с построенной выше (рис. 5) логарифмической шкалой, читатель легко найдёт штрихи, изображающие целые числа, а также штрихи десятых долей.

Так как нанесённый на линейке участок логарифмической шкалы будет служить нам представителем бесконечной логарифмической шкалы, то каждая отметка будет изображать не одно число, заключённое между 1 и 10, например 2,3, но все числа, получающиеся из данного переносом запятой и приписыванием нулей справа и слева, например 230, 0,023 и т. п. В связи с этим рассмотренные нами деления лучше называть не делениями целых и десятых, а делениями первого и второго разряда. Так как правый конец шкалы *C* или *D* может изображать с одинаковым успехом и 10, и 1, и 100, и 0,001, мы будем называть его правой единицей шкалы *D* или *C**), а начальную отметку этих шкал — их левой единицей.

Кроме делений второго разряда мы имеем на линейке более мелкие деления — деления третьего разряда, позволяющие отсчитывать на шкалах линейки трёхзначные числа.

В начале линейки, до отметки 2 первого разряда, деления второго разряда имеют цифровые отметки **), и между каждыми двумя делениями второго разряда помещено десять более мелких делений. Следовательно, здесь каждое деление соответствует одной единице третьего разряда.

П р и м е р. На рис. 8 визирная линия бегунка установлена у числа 1,71 (или 17,1; 0,171 и т. п.).

На участке между штрихами 2 и 4 первого разряда расстояние между любыми двумя соседними делениями второго

---

*) На многих линейках у правой единицы и стоит отметка 1, а не 10.

**) Обычно наносятся только цифры второго разряда 1, 2, ..., 9, а не полные отметки: 1,1; 1,2; ...; 1,9.

разряда разделено на пять частей. Следовательно, здесь каждое мелкое деление соответствует уже не одной, а двум единицам третьего разряда. Одной единице третьего разряда

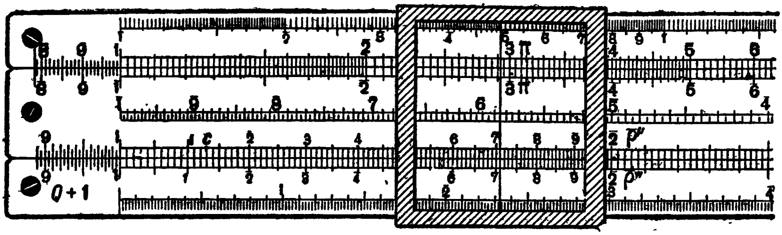


Рис. 8.

будет соответствовать половина имеющегося на линейке деления. Деление пополам легко выполняется на-глаз*).

Пример. На рис. 9 визирная линия бегунка установлена у числа 2,13 (или 213; 0,0213 и т. п.).

Наконец, на последнем участке шкалы, правее цифры 4 первого разряда, между двумя соседними делениями второго

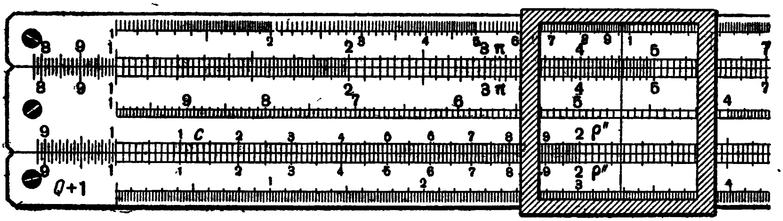


Рис. 9.

разряда мы видим только один промежуточный штрих, соответствующий пяти единицам третьего разряда. Если нам нужно получить отметку, соответствующую отличному от пяти числу единиц третьего разряда, следует мысленно разделить на-глаз нужный промежуток шкалы на пять равных частей и отделить требуемое количество долей**).

*) У начинающих пользоваться счётной линейкой на этом участке чаще всего встречаются ошибки в отсчёте. Здесь нужно быть особо внимательным.

**) На небольшом участке в пределах точности линейки вполне допустимо считать логарифмическую шкалу равномерной. Это совершенно равносильно пользованию пропорциональными частями в таблице логарифмов.

Сначала эта операция обыкновенно выполняется медленно и неуверенно, но довольно быстро приобретаются необходимые навыки.

Пример. На рис. 10 визирная линия бегунка установлена у числа 7,07 (или 70,7; 0,707 и т. п.).

Мы видим, что на линейке с длиной масштабной единицы в 25 *см* можно устанавливать достаточно точно числа, имеющие три значащие цифры *), причём при установке числа на линейке не обращают внимания на положение запятой и на нули на конце числа.

Поэтому каждую отметку на линейке читают обычно как трёхзначное число, называя последовательно все три состав-

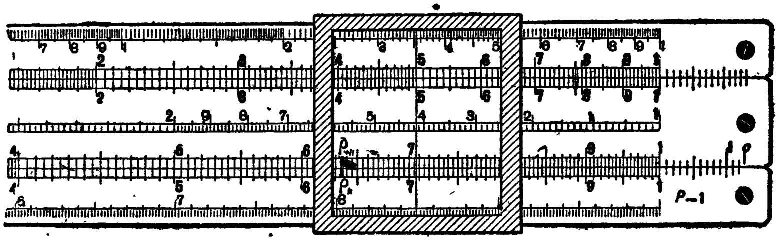


Рис. 10.

ляющие его цифры. Так, число, отмеченное на рис. 8, читают — один, семь, один; число, отмеченное на рис. 9,— два, один, три. Отметку 3 первого разряда следует читать — три, ноль, ноль.

В начале шкалы, где первая цифра числа равна 1, может быть установлена приблизительно и четвёртая значащая цифра числа.

Научиться быстро и точно устанавливать и читать числа на шкалах линейки — первая задача при обучении пользованию линейкой. Пока шкалы линейки не освоены, работа на линейке невозможна.

Упражнения. 1) Установить на основной шкале линейки визирной линией бегунка следующие числа: 13,7; 3,26; 0,675; 26,7; 0,103; 81,3; 0,0626; 302; 0,714; 4260.

---

*) Значащими цифрами числа называются все его цифры, кроме нулей слева. Например, числа 2,75; 0,0142; 0,401; 715 имеют по три значащие цифры.

2) Прочитать числа: сначала отмеченные сплошной чёрточкой, потом пунктирной (рис. 11).

3) Установив произвольно бегунок на линейке, прочитать стоящее под визирной линией число; повторить это упражнение несколько раз.

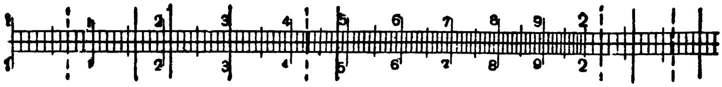


Рис. 11.

Особенно удобно делать эти упражнения вдвоем при взаимном контроле.

5. УМНОЖЕНИЕ

Как известно из алгебры, логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей. Это основное свойство логарифмов и используется счётной линейкой.

Выдвинем вправо движок так, чтобы его левая единица пришлась против отметки a на линейке. Возьмём на движке какое-либо число b и посмотрим, какое число c окажется против него на линейке. Так как основные шкалы C и D движка и линейки имеют одинаковый масштаб, то из рис. 12 очевидно, что $\lg c = \lg a + \lg b$, т. е. $c = ab$.

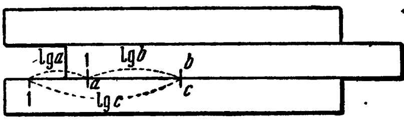


Рис. 12.

Таким образом, мы получаем следующее правило умножения:

Против первого множителя на линейке устанавливается единица движка; против второго множителя, взятого на движке, читается произведение на линейке.

Схематически это правило можно изобразить так, как показано на рис. 13.

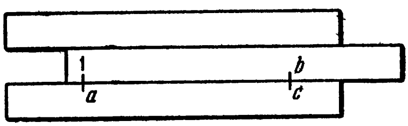


Рис. 13.

Упражнения. Проверить на линейке умножения: $2{,}45 \cdot 3{,}64 = 8{,}92$; $62{,}7 \cdot 0{,}135 = 8{,}46$; $39{,}2 \cdot 1{,}77 = 69{,}4$.

Если мы теперь попытаемся перемножить по данному выше правилу 3 на 5, мы не сможем прочитать произведение, так как отметка 5 выйдет за пределы линейки. Очевидно, мы смогли бы получить ответ, если бы шкала линейки была более длинной. Однако известно, что для получения продолжения шкалы *D* достаточно повторить уже имеющийся её участок. Этого легко достигнуть, переместив линейку вправо относительно движка на одну масштабную единицу, для чего достаточно поместить отметку 3 не против левой, а против правой единицы движка*). В новом положении против отметки 5 на движке прочитаем искомый ответ (15) на линейке (рис. 14).

Если мы посмотрим теперь на получившуюся установку движка, то увидим, что она вполне соответствует данному ранее правилу, с той только разницей, что вместо левой единицы движка против первого множителя на линейке уста-

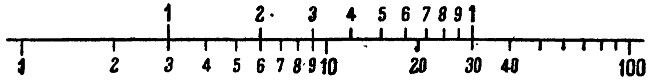


Рис. 14.

новлена правая единица движка. Очевидно, указанная замена одной единицы движка другой всегда позволит прочитать результат, если он не мог быть прочитан при первоначальной установке. Следовательно, в правиле умножения нужно иметь в виду, что для установки движка может быть использована или левая, или правая его единица.

Упражнения. Проверить на линейке умножения: $2{,}75 \cdot 8{,}13 = 22{,}35$; $4{,}07 \cdot 32{,}5 = 132{,}3$; $7{,}23 \cdot 64{,}8 = 469$.

Процесс умножения чисел обычным арифметическим путём состоит из двух этапов: сначала получается цифровой состав произведения и затем в нём устанавливается запятая или приписывается необходимое число нулей, в зависимости от положения запятой или наличия нулей справа у сомножителей. При вычислении на линейке мы имеем те же два этапа: линейка даёт только цифровой состав произведения, в котором необходимо ещё установить положение запятой. Так как на линейке мы не получаем всех знаков точного произведения, обычные арифметические правила подсчёта числа знаков после запятой оказываются непригодными. Наилучшим способом для установки запятой является грубый подсчёт величины произведения в уме, который легко выполняется, если множители округлить, сохраняя лишь одну значащую цифру. При наличии дробей или больших чисел

*) Фактически мы передвигаем не линейку на 25 *см* вправо относительно движка, а движок на 25 *см* влево относительно линейки, что совершенно равноценно.

при этом рекомендуется выделить множителем положительные или отрицательные степени десяти.

Примеры. 1) $32{,}7 \cdot 0{,}0267$. Сделав установку линейки, прочитаем 8—7—3; грубый подсчёт даёт: $30 \cdot 0{,}03 = 0{,}9$. Ответ: 0,873.

2) $0{,}0753 \cdot 0{,}00478$. Линейка даёт для произведения цифры 3—6—0; грубый подсчёт: $7 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 35 \cdot 10^{-5}$. Ответ: 0,000360.

3) $82\,300 \cdot 0{,}0341$. Линейка даёт для произведения цифры 2—8—1; грубый подсчёт: $8 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^{-2} = 24 \cdot 10^2 = 2400$, или $82\,300 \cdot 0{,}0341 = 823 \cdot 3{,}41 = 800 \cdot 3 = 2400$. Ответ: 2810.

Другой способ установки запятой заключается в нахождении так называемого «порядка» произведения. Условимся называть **порядком** числа, большего единицы, число его значащих цифр до запятой. Для числа, меньшего единицы, назовём порядком отрицательное число, содержащее столько отрицательных единиц, сколько нулей после запятой содержит данное число. Например, для чисел 327; 2,75; 0,863; 0,00403 порядки будут равны соответственно 3; 1; 0; — 2.

При умножении чисел на линейке оказывается справедливым следующее правило*): порядок произведения равен сумме порядков сомножителей, если движок выдвигается влево (используется правая единица), и на единицу меньше суммы порядков сомножителей, если движок выдвигается вправо (используется левая единица).

Чтобы легче запомнить это правило, на линейках справа у шкалы D стоит обычно надпись: $P - 1$, означающая, что порядок произведения (Produkt) при выдвижении движка вправо равен сумме порядков сомножителей минус 1.

Примеры. 1) $32{,}7 \cdot 0{,}0267$; на линейке читаем цифры произведения 8—7—3; движок вправо; порядок произведения равен $2 + (-1) - 1 = 0$. Ответ: 0,873.

2) $0{,}0753 \cdot 0{,}00478$; на линейке получаем произведение 3—6—0; движок влево; порядок произведения: $(-1) + (-2) = -3$. Ответ: 0,000360.

3) $82\,300 \cdot 0{,}0341$. Линейка даёт 2—8—1; движок влево; порядок произведения равен $5 + (-1) = 4$. Ответ: 2810.

Следует отметить, что при практических расчётах в большинстве случаев приблизительная величина результата бывает заранее известна, так что вопрос о возможном месте запятой не возникает.

Упражнения. Вычислить произведения: $0{,}309 \cdot 15{,}8$; $27{,}4 \cdot 5{,}08$; $62{,}7 \cdot 0{,}00845$; $517 \cdot 18{,}3$; $0{,}345 \cdot 0{,}00237$.

---

*) Доказательство его можно найти в каком-либо подробном руководстве по счётной линейке, например, Д. Ю. Панов, Счётная линейка, издание 9-е, Гостехиздат, 1953.

В заключение заметим, что после установки единицы движка против числа a на линейке мы получаем таблицу умножения на a: против каждого числа шкалы C движка стоит на линейке его произведение на a. Таким образом, если требуется выполнить ряд умножений на один и тот же множитель,— это может быть выполнено с помощью бегунка при одной установке движка. В отдельных случаях может понадобиться только переброска движка на 25 *см* — замена одной конечной единицы другой.

Найдём, например, 21,3% от чисел: 175, 318, 521, 864, 1218, 2415. Задача сводится к умножению на 0,213. Установив против отметки 2—1—3 линейки левую единицу движка, мы сможем прочитать первые два результата 37,3; 67,7. Для получения следующего результата нужно выполнить переброску движка. Практически, однако, целесообразнее будет сначала прочитать все возможные результаты при имеющемся положении движка (в нашем примере для двух последних из заданных чисел) и уже после этого перебросить движок. Техника переброски, к которой приходится прибегать во всех случаях, когда отметка, против которой должен быть прочитан результат, оказывается за пределами линейки, сводится к следующему: визирная линия бегунка устанавливается против стоящей в пределах линейки единицы движка, после чего движок перемещается так, что к визирной линии подводится другая единица. Перебросив движок, мы прочитаем недостающие результаты. Окончательная таблица:

От чисел . . .	175	318	521	864	1218	2415
21,3% равны . .	37,3	67,7	111	184	259	514

6. ДЕЛЕНИЕ

Разобранная выше схема умножения может быть использована и для деления как действия, обратного умножению. Да и из самой схемы непосредственно вытекает (рис. 15):

$$\lg a = \lg c - \lg b$$

или

$$a = \frac{c}{b}.$$

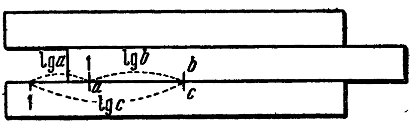


Рис. 15.

Приходим к следующему правилу деления:

Против делимого на линейке устанавливается делитель, взятый на движке: против единицы движка читается на линейке частное.

При рассмотрении схемы умножения уже было установлено равноправие обеих единиц движка. При делении мы также можем получать ответ как под правой, так и под левой единицей движка. В отличие от умножения здесь не приходится задумываться над тем, в какую сторону смещать движок, — его установка определяется делимым и делителем. Из двух единиц движка одна всегда будет находиться в пределах линейки, под ней и следует читать ответ.

Примеры. $\frac{19,6}{3,61} \doteq 5,43$; $\frac{7,67}{4,53} = 1,693$; $\frac{2,78}{6,23} = 0,446$.

Процесс деления, так же как и процесс умножения, состоит из двух этапов — получения цифрового состава частного и установки запятой. Линейка выполняет только первую часть работы. Для установки запятой опять-таки наиболее удобным способом является выполнение грубого подсчёта в уме. Менее удобный способ — подсчёт порядков. Здесь оказывается справедливым следующее правило: порядок частного равен разности между порядком делимого и порядком делителя, если частное читается у правой единицы движка (движок выдвинут влево), и на единицу больше этой разности, если ответ читается под левой единицей движка (движок выдвинут вправо) *). Чтобы легче было запомнить это правило, на линейке слева у шкалы ***D*** имеется обычно надпись $Q+1$, напоминающая, что при чтении частного (Quotient) у левой единицы движка к разности порядков делимого и делителя следует прибавить единицу.

Примеры. 1) $\frac{35,7}{0,271}$; цифровой состав частного получаем на линейке (под левой единицей) 1—3—1—7; грубый подсчёт: $\frac{30}{0,3} = 100$. Порядок частного $2 - 0 + 1 = 3$. Ответ: 131,7.

2) $\frac{6,85}{28,4}$; на линейке читаем (под левой единицей) 2—4—1; грубый подсчёт: $\frac{6}{30} = \frac{1}{5} = 0,2$; порядок частного равен $1-2+1=0$. Ответ: 0,241.

3) $\frac{0,00274}{0,873}$; на линейке читаем (под правой единицей) 3—1—4; грубый подсчёт: $\frac{0,003}{1} = 0,003$; порядок частного равен $-2-0=-2$. Ответ: 0,00314.

Упражнения. Вычислить частные: 9:3820; 3,72:1,643; 41,7:0,00815; 0,1863:0,0352; 61,4:5,26; 0,283:19,05.

*) Это правило имеет одно исключение: оно неверно, если при вычислении $1:a$ пользоваться правой единицей шкалы ***D***.

41,7 0000 | 800

28 | 2000

0,0

7. КОМБИНИРОВАННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

На линейке удобно производить несколько последовательных умножений или делений. Пусть требуется перемножить три числа: $2{,}73 \cdot 0{,}145 \cdot 52{,}3$. Перемножим по общему правилу первые два числа. Против 2—7—3 линейки ставим левую единицу движка, против 1—4—5 движка можем прочитать произведение. Однако это произведение нам знать не нужно, необходимо только умножить его на третий сомножитель. Для этой цели мы закрепим полученное произведение на шкале *D*, установив у отметки 1—4—5 движка визирную линию бегунка, и выполним второе умножение, подведя к визирной линии бегунка (т. е. к первому произведению на шкале *D*) единицу движка — на этот раз правую. Читая окончательный результат против отметки 5—2—3 движка, получим 2—0—7. Для установки запятой применяем грубый подсчёт: $3 \cdot 0{,}1 \cdot 50 = 15$, или подсчёт порядка (движок один раз был выдвинут вправо): $1 + 0 + 2 - 1 = 2$. Ответ: 20,7.

Из разобранного примера ясно, что, выполняя последовательные действия на линейке, мы имеем возможность не читать промежуточные результаты, а только закреплять их визирной линией бегунка.

Рассмотрим теперь случай последовательного умножения и деления. Пусть, например, требуется вычислить $\frac{5{,}3 \cdot 3{,}4}{2{,}2}$. Вычисления можно вести двумя способами — сначала умножение, потом деление или в обратном порядке. Посмотрим, к чему это сводится практически.

1) Против 5—3—0 линейки ставим единицу (правую) движка. Придвинув к отметке 3—4—0 движка визирную линию бегунка, отмечаем полученное произведение. Осталось выполнить деление, для чего подводим под визирную линию отметку 2—2—0 движка и под единицей движка читаем ответ 8,19.

2) Выполним действия в обратном порядке. Против 5—3—0 линейки устанавливаем 2—2—0 движка. Под левой единицей движка получим частное. Для последующего умножения против этого частного нужно поставить единицу движка, но она уже здесь стоит. Следовательно, мы можем, не отмечая промежуточный результат, сразу прочитать ответ 8,19 под отметкой 3—4—0 движка.

Очевидно, что второй способ более удобен, так как он требует только одного перемещения движка.

Итак, *при последовательном выполнении действий следует выполнять сначала деление, а потом умножение.*

Если требуется выполнить несколько умножений и делений (вычисляется выражение вида $\frac{a \cdot b \cdot c \cdot d}{e \cdot f \cdot g}$), рекомендуется чередовать деления с умножениями (т. е. вести вычисление в таком порядке: $[(a : e \cdot b) : f \cdot c] : g \cdot d$), благодаря чему уменьшается число установок движка.

Заметим, что в приведённом выше примере нам не удалось бы получить сразу результат, если бы второй множитель был равен не 3,4, а хотя бы 5,8. В этом случае, чтобы иметь возможность прочитать ответ, нам придётся прибегнуть к необходимой в подобных случаях переброске движка (т. е. заменить одну единицу другой). Везде в дальнейшем, когда мы будем говорить о вычислениях, выполняемых за одну установку движка, мы должны учитывать, что всегда может возникнуть потребность в переброске.

Для установки запятой при комбинированных вычислениях следует или прибегать к грубому подсчёту, или по ходу вычисления подсчитывать порядок получаемых результатов. Полезно заметить, что если вычисление вида $\frac{a \cdot b}{c}$ выполняется без переброски, порядок результатов равен сумме порядков сомножителей минус порядок делителя. Переброска влево увеличивает порядок результата на единицу, а переброска вправо уменьшает на единицу.

Упражнения. Вычислить:

$$\frac{5{,}83 \cdot 0{,}472}{65{,}3}; \quad \frac{3{,}15 \cdot 69{,}2}{0{,}784}; \quad \frac{0{,}284 \cdot 8{,}73}{4{,}28}; \quad \frac{6{,}83 \cdot 0{,}745 \cdot 22{,}3}{2{,}08 \cdot 43{,}7};$$

0,25 65 0,0 0,7

$$\frac{0{,}867 \cdot 12{,}7 \cdot 43{,}8}{5{,}64 \cdot 7{,}22 \cdot 0{,}348}.$$

8. ОБРАТНАЯ ШКАЛА

Линейки некоторых типов, кроме шкал ***B*** и ***C*** на движке, имеют ещё посредине так называемую обратную шкалу ***I***. Эта шкала в точности совпадает с основной шкалой ***C***; только на-

Рис. 16.

несена она в обратном порядке. Деления 1—1, 1—2 и т. д. находятся на этой шкале у правого конца, а 9, 8 и т. д.— слева. При отсчёте чисел на этой шкале важно не забывать отсчитывать деления второго и третьего разряда влево от делений первого разряда, а не вправо, как на шкалах *C* и *D*. Здесь часто делают ошибки. На рис. 16 показан отсчёт числа 3—1—4 правильный и неправильный (как его часто делают начинающие пользоваться линейкой).

Обратной шкалой очень удобно пользоваться для умножения. Оказывается, что *если поставить друг против друга отметки множителей на основной шкале линейки и обратной шкале движка, то находящаяся в пределах линейки единица движка укажет произведение на основной шкале линейки.*

Действительно, из рис. 17, изображающего описанную установку, видно, что $\lg a + \lg b = \lg c$, т. е. $a \cdot b = c$.

К этому правилу мы могли бы притти иначе. Сравним какие-либо две стоящие друг против друга отметки обратной и

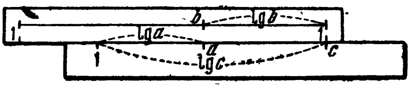


Рис. 17.

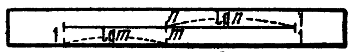


Рис. 18.

основной шкалы движка (рис. 18). Мы видим, что $\lg m + \lg n = 1$, или $m \cdot n = 10$, $n = \frac{10}{m}$. Принимая во внимание, что отсчёт числа на линейке не зависит от положения запятой, мы можем сказать, что *отметки обратной шкалы дают обратные величины стоящих против них отметок основной шкалы.* Теперь ясно, как получилось данное выше правило умножения с помощью обратной шкалы. Оно попросту повторяет обычное правило деления, только «делитель» устанавливается на обратной шкале. Но устанавливая какое-либо число на обратной шкале, мы тем самым установим обратную его величину на основной шкале. Следовательно, фактически мы будем выполнять деление на эту обратную величину, т. е. умножение на число, установленное на обратной шкале.

Порядок произведения при умножении с помощью обратной шкалы равен сумме порядков сомножителей, если результат читается под левой единицей движка (движок вправо), и на единицу меньше этой суммы, если результат читается под правой единицей движка (движок влево).

Умножение с помощью обратной шкалы делать проще, чем с помощью основной, так как не приходится задумываться над тем, которой единицей следует воспользоваться. Особенно удобно применять обратную шкалу при перемножении нескольких множителей. Если мы вспомним, что деление с последующим умножением делается на одну установку движка, то мы легко сообразим, что за одну установку *) может быть получено произведение трёх множителей, если первые два перемножить с помощью обратной шкалы, а умножение на третий выполнить обычным способом.

Пример. 32,4·0,0543·0,472. Против 3—2—4 основной шкалы линейки ставим 5—4—3 обратной шкалы движка. Под 4—7—2 основной шкалы движка читаем результат: 8—3—0. Для установки запятой пользуемся грубым подсчётом: (30·0,05 = 1,5; 1,5·0,5 = 0,75) или подсчётом порядков. Так как движок выдвинут вправо, то при втором умножении сумма порядков сомножителей должна быть уменьшена на единицу. Следовательно, порядок произведения равен 2 — 1 + 0 — 1 = 0. Ответ: 0,830.

Так как деление на какое-либо число равносильно умножению на величину, ему обратную, то правило деления с помощью обратной шкалы может быть получено из основного правила умножения.

Против делимого на основной шкале линейки устанавливается единица (правая или левая) движка; против делителя на обратной шкале читается частное на основной шкале линейки.

Порядок частного при делении по этому правилу равен разности порядков делимого и делителя, если движок выдвинут вправо, и на единицу больше этой разности, если движок выдвинут влево.

Деление удобнее выполнять, пользуясь основной шкалой; однако иногда оказывается целесообразным обращаться к обратной шкале. Так, например, если требуется получить несколько частных от деления одного и того же числа на различные делители, применение обратной шкалы позволит выполнить все вычисления за одну установку движка. Читатель легко сообразит сам, как, пользуясь обратной шкалой, вычислить с помощью одной установки движка выражение вида $\frac{a}{b \cdot c}$.

Конечно, во всех случаях вычислений, рассмотренных в настоящем параграфе, можно было бы обойтись и без обратной шкалы, но тогда потребовалось бы большее число установок движка. Каждое лишнее движение движка отнимает время и увеличивает погрешность вычислений. Поэтому нужно

*) В отдельных случаях может понадобиться переброска движка.

стремиться научиться считать на линейке наиболее экономным способом, делая как можно меньше перемещений движка.

Упражнения. 1) Вычислить:

$$7{,}53\cdot 27{,}4\cdot 33{,}7;\quad 8{,}61\cdot 5{,}03\cdot 0{,}427\cdot 0{,}143\cdot 0{,}0369;$$

$$\frac{4{,}73}{5{,}28\cdot 0{,}0189};\quad \frac{641}{0{,}354\cdot 4{,}68\cdot 2{,}35\cdot 9{,}67}.$$

2) Найти частные от деления 83 на 23, 33, 43, 53, 63, 73, 93, 103.

9. ШКАЛА КВАДРАТОВ

Рассмотрим теперь шкалы, помещённые на верхнем крае движка и прилегающей к нему части линейки, которые мы называли шкалами ***A*** и ***B*** (см. рис. 2). Эти шкалы, тождественные между собой, так же как шкалы ***C*** и ***D***,— логарифмические, но единица масштаба у них вдвое меньше — не 25 *см*, а 12,5 *см*. Поэтому на линейке помещается не одна, а две единицы масштаба. Деления, нанесённые на обеих половинах линейки, совершенно тождественны, как это и следует из n° 3. Деления первого разряда имеют цифровые отметки, причём на многих линейках во второй половине шкал ***A*** и ***B*** вместо отметок 2, 3, . . ., 9 стоят отметки 20, 30, . . ., 90. Каждая половина может изображать любой участок бесконечной логарифмической шкалы. Обе они вполне равноценны при всех вычислениях, кроме извлечения квадратного корня, о чём см. ниже, стр. 23.

Читатель, научившийся свободно читать числа на шкалах ***C*** и ***D***, легко ориентируется в делениях шкал ***A*** и ***B***. Самые мелкие деления соответствуют на участке от 1 до 2 — двум единицам 3-го разряда, на участке от 2 до 5 — пяти единицам 3-го разряда и, наконец, от 5 до следующей единицы — одной единице 2-го разряда.

Очевидно, что точность установки и чтения чисел на шкалах ***A*** и ***B*** меньше, чем на шкалах ***C*** и ***D***. В то время как на нижних шкалах мы можем получить даже четыре знака в начале шкалы и довольно надёжные три знака в конце, на верхних шкалах получить больше трёх знаков невозможно, а третий знак в конце шкалы получается весьма сомнительным.

С помощью шкал ***A*** и ***B*** можно вести вычисления, совершенно так же, как и с помощью шкал ***C*** и ***D***. Так как шкалы ***A*** и ***B*** содержат по два участка единичной длины, то на этих шкалах можно вести вычисления, не прибегая к переброскам. Всякое число может быть установлено как на правой, так и на левой половине шкалы. Единиц здесь имеется три — справа, слева и посредине, причём все могут быть использованы с равным правом. При работе на шкалах A и B данные ранее правила подсчёта порядков неприменимы, так что для установки запятой приходится всегда прибегать к грубому подсчёту *).

Упражнения. Сделать с помощью верхних шкал упражнения, приведённые на стр. 14, 16 и 18.

Сравним стоящие друг против друга отметки шкал A и D (рис. 19). Установим на нижней шкале какое-либо число m. Расстояние от начальной единицы до отметки m на нижней шкале будет равно $\lg m$ в масштабе нижней шкалы ($1 = 25$ *см*). Так как масштаб на верхней шкале вдвое меньше, то в масштабе верхней шкалы на этом же расстоянии уложится $2 \lg m$. Значит, если против отметки m шкалы D стоит отметка n шкалы A, то $\lg n = 2 \lg m$, т. е. $n = m^2$.

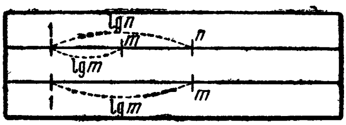


Рис. 19.

Итак, против каждого числа шкалы D *стоит его квадрат на шкале* A.

В связи с этим шкалу A (а так же и B) называют обычно шкалой квадратов.

Чтобы получить квадрат какого-либо числа, достаточно отметить это число на основной шкале и под той же визирной линией на шкале квадратов прочитать искомый квадрат. Для установки запятой служит, как всегда, или грубый подсчёт, или следующее правило: порядок квадрата равен удвоенному порядку основания, если ответ читается на второй половине шкалы квадратов, и на единицу меньше, если на первой.

Примеры. $2{,}73^2 = 7{,}45$; $717^2 = 514\,000$; $0{,}165^2 = 0{,}0272$; $0{,}0428^2 = 0{,}00183$.

Установленное соответствие между шкалами A и D можно использовать, очевидно, и для выполнения действия, обратного возведению в квадрат, а именно — извлечения квадратного корня.

Против каждого числа шкалы квадратов может быть прочитан на основной шкале корень квадратный из этого числа.

Однако при извлечении корня не безразлично, на какой половине шкалы квадратов устанавливать подкоренное число.

*) Конечно, правила подсчёта порядков могут быть переработаны для верхних шкал, но они при этом настолько усложняются, что применять их нецелесообразно.

Из правила нахождения порядка квадрата видно, что при возведении в квадрат числа второй половины шкалы квадратов оказываются всегда чётного порядка, а числа первой половины — нечётного. Поэтому при извлечении корня следует устанавливать числа нечётного порядка на первой, а чётного — на второй половине шкалы. Порядок корня равен половине порядка подкоренного числа, причём, если этот последний порядок нечётный, он должен быть предварительно увеличен на единицу.

Существует другое правило, позволяющее определять, куда следует устанавливать подкоренное число при извлечении квадратного корня. Для этой цели данное число разбивают на «грани» из двух цифр, вправо и влево от запятой, как при алгебраическом процессе извлечения квадратного корня. Если первая слева грань (не считая граней, состоящих из одних нулей) содержит одну значащую цифру, подкоренное число устанавливается на первой половине шкалы квадратов, если же две,— то на второй. Например, при вычислении квадратных корней из чисел 475, 0,0321, 1723, 45,2, 0,0075 мы будем пользоваться первой половиной шкалы *А* в первых двух случаях, а второй — во всех остальных *). Пользуясь этим способом, легко устанавливать запятую, так как каждая грань подкоренного числа, стоящая до запятой, даёт у корня один знак до запятой, а каждая чисто нулевая грань после запятой (если подкоренное число меньше единицы) даёт у корня один нуль после запятой.

Примеры.

$$\sqrt{475}=21,8;\quad \sqrt{0,0321}=0,179;\quad \sqrt{1723}=41,5;$$
$$\sqrt{45,2}=6,72;\quad \sqrt{0,0075}=0,0866.$$

Упражнения. 1) Вычислить: $3,71^2$; $0,0124^2$; 868^2; $0,0063^2$; $0,261^2$.
2) Вычислить:

$$\sqrt{5673};\quad \sqrt{0,0863};\quad \sqrt{29,7};\quad \sqrt{0,003};\quad \sqrt{0,00011}.$$

10. ШКАЛА КУБОВ

Некоторые типы линеек имеют у верхнего края логарифмическую шкалу *К* (см. рис. 2), масштаб которой в три раза меньше основного, так что на протяжении линейки помещаются три масштабные единицы шкалы. Повторяя рассуждение, проведённое на стр. 22, мы легко придём к выводу, что против

*) Грани должны содержать по две цифры. Поэтому при вычислении $\sqrt{0,007}$ семёрку следует устанавливать на второй половине шкалы квадратов, так как подкоренное число должно быть представлено в виде 0,0070.

числа m шкалы D на шкале K стоит число m^3 (рис. 20). Шкала K называется обычно **шкалой кубов**. Деления второго и третьего разрядов нанесены на этой шкале так же, как и на шкале квадратов.

Для возведения какого-либо числа в куб достаточно установить против этого числа на основной шкале линейки визирную линию бегунка. На шкале K под той же визирной линией мы сможем прочитать искомый куб. Порядок куба будет равен утроенному порядку основания, если ответ читается на последнем участке шкалы K, и на одну или две единицы меньше, если ответ читается соответственно на втором или на первом участке этой шкалы.

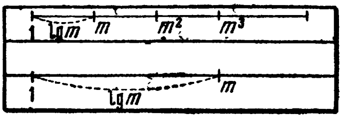


Рис. 20.

Примеры. $2{,}32^3 = 12{,}5$; $0{,}133^3 = 0{,}00235$; $68{,}3^3 = 319\,000$; $0{,}043^3 = 0{,}0000795$.

Извлечение кубического корня выполняется также просто путём перехода со шкалы K на шкалу D. При этом важно установить подкоренное число на нужном участке шкалы кубов. Для этой цели наиболее удобно правило разделения подкоренного числа на грани, аналогичное правилу извлечения квадратного корня (стр. 23). Только теперь грани должны содержать не по две, а по три цифры. Число значащих цифр в первой слева грани (не считая чисто нулевых) определяет номер того участка шкалы K, на котором должно быть установлено подкоренное число. Запятая у корня устанавливается в зависимости от числа граней, в точности так же, как в случае квадратного корня.

Примеры. $\sqrt[3]{47{,}3} = 3{,}62$; $\sqrt[3]{0{,}349} = 0{,}704$; $\sqrt[3]{0{,}0063} = 0{,}1847$; $\sqrt[3]{2730} = 13{,}98$; $\sqrt[3]{0{,}07} = 0{,}412$ $(0{,}07 = 0{,}070)$.

Упражнения. 1) Вычислить: $0{,}253^3$; $79{,}3^3$; $0{,}0128^3$; $3{,}54^3$.
2) Вычислить $\sqrt[3]{612}$; $\sqrt[3]{0{,}0483}$; $\sqrt[3]{0{,}8}$; $\sqrt[3]{0{,}0023}$.

11. КОМБИНИРОВАННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ НА РАЗНЫХ ШКАЛАХ

Используя различные шкалы на линейке, можно легко производить вычисления, содержащие, кроме умножения и деления, также возведения в квадрат и в куб и извлечение корня квадратного и кубического. Рассмотрим несколько примеров подобных вычислений.

1) Вычислить $2{,}75^2 \cdot 0{,}562$. Чтобы получить $2{,}75^2$, устанавливаем визирную линию у отметки 2—7—5 на основной шкале линейки. На шкале квадратов может быть прочитан искомый квадрат, но можно, не читая, умножить его на 5—6—2 с помощью шкалы квадратов движка. Для этой цели к установленной отметке подводим единицу движка (безразлично, какую из трёх единиц шкалы *B*). Против 5—6—2 шкалы *B* читаем на шкале *A* ответ: 4,25. Установка запятой сделана по грубому подсчёту. Обратим внимание, что полученная установка линейки в точности соответствует правилу умножения (см. стр. 12); только один из «множителей» устанавливается на основной шкале, хотя процесс умножения ведётся по существу на шкалах квадратов. Последнее совершенно неизбежно, так как множитель $2{,}75^2$ как промежуточный результат мы можем получить только на шкале квадратов.

2) Вычислить $\frac{37{,}5}{\sqrt{6{,}03}}$. Нам нужно разделить на корень квадратный. Значения квадратных корней мы получаем, переходя со шкалы квадратов на основную. Стало быть, деление следует выполнять на основных шкалах, но подкореннсе число делителя должно устанавливаться на шкале квадратов. Итак, против 3—7—5 основной шкалы линейки устанавливаем 6—0—3 шкалы квадратов (в соответствии с правилом извлечения корня — на первой половине). Под единицей на основной шкале линейки читаем ответ: 15,27 (запятая установлена с помощью грубого подсчёта).

3) Вычислить $\sqrt{\frac{51{,}3 \cdot 0{,}074}{21{,}3}}$. Чтобы извлечь квадратный корень, мы должны подкоренное число иметь на шкале квадратов. Следовательно, указанные под корнем действия нужно выполнить на шкалах *A* и *B*. При этом, чтобы получить результат на той половине шкалы, на которой он должен стоять для извлечения корня, следует все входящие в вычисление числа устанавливать так, как если бы из них нужно было извлекать корень*). Итак, против 5—1—3 шкалы *A* (вторая половина) устанавливаем 2—1—3 шкалы *B* (вторая половина). Против 7—4—0 шкалы *B* (первая половина) мы могли бы прочитать на шкале *A* подкоренное число, но проще сразу читать квадратный корень из него на шкале *D*. Ответ: 0,422.

4) Вычислить: $4{,}71 \cdot 23{,}5 \cdot 3{,}42^2$. Мы видели, что произведение трёх множителей легко находится с помощью обратной шкалы (стр. 20). Поскольку среди множителей имеется один

*) Фактически на нижних шкалах выполняются действия с корнями из тех чисел, которые мы устанавливаем наверху.

квадрат, вычислять нужно на шкале квадратов. Если мы хотим использовать обратную шкалу, то на ней следует устанавливать именно то число, которое возводится в квадрат, так как обратная шкала имеет тот же масштаб, что и основная. Итак, против 4—7—1 шкалы ***А*** устанавливаем 3—4—2 обратной шкалы, над 2—3—5 шкалы ***В*** читаем на шкале ***А*** ответ: 1295. Так как в настоящем вычислении нет извлечения корня, отсчёты на шкалах ***А*** и ***В*** могут делаться на любой половине.

Приведённые примеры наглядно показывают, что при комбинированных вычислениях с применением различных шкал используются данные ранее правила, причём там, где встречается возведение в квадрат или извлечение корня, должен быть по ходу вычисления сделан переход с нижней шкалы на верхнюю, или наоборот. Наличие того или иного перехода определяет шкалы, на которых должны выполняться вычисления. Если в вычислениях встречается извлечение квадратного корня, то, устанавливая числа на шкалах ***А*** и ***В***, надо соблюдать правило, данное на стр. 23 *).

Комбинированные вычисления с участием шкалы кубов выполняются аналогично. Здесь могут встретиться затруднения в связи с тем, что эта шкала имеется только на линейке. Во многих случаях из этого затруднения можно выйти, меняя в правилах действий роль шкал движка и линейки, которые, вообще говоря, вполне равноправны. Проиллюстрируем этот приём на примере. Вычислим:

$$0{,}453\sqrt[3]{\frac{23{,}5}{3{,}42}}.$$

По данным ранее правилам нужно поступать так: против 4—5—3 основной шкалы линейки ставим 3—4—2 первого участка шкалы кубов движка; ответ прочитается на основной шкале линейки против 2—3—5 второго участка шкалы кубов движка. Эта установка невозможна, так как шкалы кубов на движке нет. Если же переставить везде слова «линейка» и «движок», установку удастся осуществить. Ответ будет прочитан на движке: 0,861.

При первом знакомстве с линейкой комбинированные вычисления часто вызывают затруднения, и обучающийся идёт по пути наименьшего сопротивления — делает вычисление по частям, прочитывая и вновь устанавливая промежуточные результаты.

---

*) В следующем пункте даны правила пропорции, которые с успехом могут применяться для выбора схем комбинированных вычислений.

Это совершенно недопустимо. Необходимо добиваться наилучшего использования линейки, а в комбинированных вычислениях возможности линейки особенно ярко выявляются.

Упражнения: Вычислить (везде за одну установку движка, не считая перебросок): 1) $\frac{\sqrt{3,71}}{0,0562}$; 2) $\frac{2,83\cdot 72,8}{4,03^2}$; 3) $(0,784\cdot 6,21\cdot 0,142)^2$; 4) $\frac{61,5\cdot\sqrt{0,007}}{33,4}$; 5) $28,3\cdot\sqrt[3]{0,0175}$.

1,13 2 0,6 0,8 0,48

12. ПРАВИЛО ПРОПОРЦИИ

Все правила действий на счётной линейке могут быть по существу сведены к одному правилу — «правилу пропорций», которое мы здесь и рассмотрим.

Возьмем линейку с произвольно выдвинутым движком и рассмотрим какие-либо две пары чисел, стоящих друг против друга на одинаковых (*C* и *D* или *A* и *B*) шкалах линейки и движка. Из рис. 21 следует, что

$$\lg c - \lg a = \lg d - \lg b$$

или

$$\frac{c}{a} = \frac{d}{b}.$$

Записав последнюю пропорцию в виде

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

мы приходим к выводу, что *при любом положении движка стоящие друг против друга числа одинаковых шкал будут пропорциональны*. Другими словами, при каждом закреплённом положении движка отношение чисел шкалы *B* (или *C*) движка к стоящим против них числам шкалы *A* (или *D*) линейки будет одно и то же.

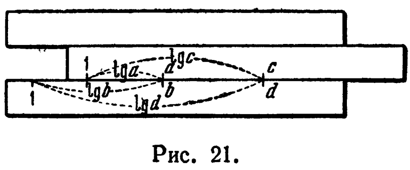


Рис. 21.

Замечательно, что сама запись пропорции очень хорошо отражает установку чисел на линейке: стоящие друг над другом числа в пропорции должны находиться друг над другом и на линейке; числа, стоящие в числителе, соответствуют числам одной шкалы (например, на движке); числа, стоящие в знаменателе, соответствуют числам другой шкалы (например, на линейке). Записав в виде пропорции формулу, по которой должны вестись вычисления, мы тем самым получаем правило для установки чисел на линейке. Так, например, записав формулу $x=a\cdot b$ в виде пропорции $\frac{x}{b}=\frac{a}{1}$, получим правило умножения (здесь и ниже везде числитель — линейка, знаменатель — движок). Пропорция $\frac{x}{1}=\frac{a}{b}$ определяет правило деления. Наконец, правило чередования деления с умножением при вычислении выражения $x=\frac{a\cdot b}{c}$ (стр. 17) прямо вытекает из пропорции $\frac{x}{b}=\frac{a}{c}$.

С помощью правила пропорции легко вести пропорциональные расчёты, процентирование и т. п. Рассмотрим два примера.

1) Химический анализ некоторой смеси дал для количества отдельных составляющих значения, помещённые в первом столбце приводимой ниже таблицы. Определить процентное содержание каждой составляющей.

A	353 *г*	53,6%
B	204 *г*	31,0%
C	73 *г*	11,1%
D	28 *г*	4,3%
	658 *г*	100%

Задача сводится к решению пропорций

$$\frac{x_1}{353}=\frac{x_2}{204}=\frac{x_3}{73}=\frac{x_4}{28}=\frac{100}{658}.$$

Из записи пропорции вытекает установка: против единицы линейки (удобнее правой) ставим 6—5—8 движка *). Против стоящих в знаменателе чисел на движке (поскольку 6—5—8 ставилось на движке) читаем на линейке ответы (для x_3 понадобится переброска движка). Установка запятой не вызывает затруднений.

2) Распределить сумму счёта за электроэнергию 27 р. 50 к. между тремя потребителями пропорционально потребляемой

*) Можно пользоваться как основной шкалой, так и шкалой квадратов. В первом случае получим более точные результаты, во втором — избегнем переброски движка.

мощности: A — 115 W, B — 65 W и C — 245 W. Задача сводится к решению пропорций:

$$\frac{27{,}5}{425}=\frac{x_1}{115}=\frac{x_2}{65}=\frac{x_3}{245}.$$

Из записи пропорции вытекает установка: против 2—7—5 (сумма) линейки ставим 4—2—5 (мощность) движка. Против значений потребляемой мощности на движке читаем на линейке ответы (в рублях): $x_1=7{,}44$, $x_2=4{,}21$, $x_3=15{,}85$. Установка запятой не вызывает сомнений. Контроль: $x_1+x_2+x_3=$ $=27{,}5$ *).

Из основного правила пропорции можно получить другие правила, если сопоставлять стоящие друг против друга числа на различных шкалах линейки. Введём, например, в рассмотрение обратную шкалу. Как известно, против каждого числа m на обратной шкале стоит число $\frac{1}{m}$ на основной шкале движка (рис. 22). Значит, если против отметок a и c основной шкалы линейки стоят соответственно отметки b и d обратной шкалы, то тем самым на основной шкале движка установлены числа $\frac{1}{b}$ и $\frac{1}{d}$, так что имеет место пропорция

$$a:\frac{1}{b}=c:\frac{1}{d},$$

или

$$a\cdot b=c\cdot d.$$

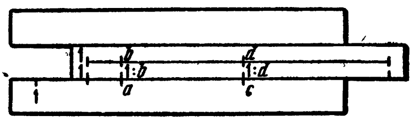


Рис. 22.

Таким образом, *при каждом положении движка произведения чисел, стоящих друг против друга на обратной шкале и на основной шкале линейки, равны между собой.*

Это свойство обратной шкалы позволяет с удобством применять её при расчётах, связанных с обратно пропорциональной зависимостью.

Например, пусть переменные x и y связаны зависимостью: $x\cdot y=\text{const}$. При $x=3{,}8$ дано $y=54{,}3$. Найти y при $x=5$, 7, 9, 11, 13, 15, 20, 25. Будем отсчитывать x на обратной шкале, а y на основной шкале линейки. Установив друг против друга отметки 3—8—0 (на шкале x) и 5—4—3 (на шкале y), сможем против каждого заданного значения x найти соответствую-

*) Можно было бы ставить мощность на линейке, а сумму на движке. Однако обычно установку выбирают так, чтобы искомые величины читались на линейке.

щее значение y (для получения последнего значения потребуется переброска движка):

x	5	7	9	11	13	15	20	25
y	41,3	29,5	22,9	18,76	15,87	13,76	10,32	8,25

Установка запятой не вызывает затруднений, если помнить, что y убывает с ростом x.

Сопоставляя шкалы B и D (или A и C), мы легко получим (рис. 23):

$$\frac{m}{b}=\frac{n}{d}, \text{ т. е. } \frac{a^2}{b}=\frac{c^2}{d} \quad (\text{так как } m=a^2,\ n=c^2),$$

или

$$\frac{a}{p}=\frac{c}{q}, \text{ т. е. } \frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{c}{\sqrt{d}} \quad (\text{так как } p=\sqrt{b},\ q=\sqrt{d}).$$

Совершенно так же обратная шкала и шкала квадратов дадут нам соотношения (рис. 24):

$$\frac{a}{m^2}=\frac{c}{n^2} \text{ или } ab^2=cd^2 \left(\text{так как } m=\frac{1}{b},\ n=\frac{1}{d}\right).$$

Таким образом, сопоставляя стоящие друг против друга отметки различных шкал, мы легко можем вычислять на линейке величины, прямо или обратно пропорциональные квадратам заданных чисел или корням квадратным из них.

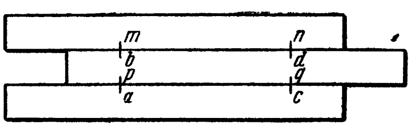


Рис. 23.

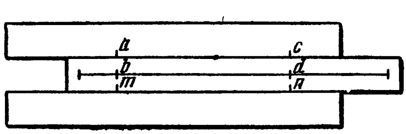


Рис. 24.

Для получения соответствующей установки линейки при решении практических задач важно понять лишь основное правило пропорции для одинаковых шкал и то, что при сопоставлении шкалы квадратов с какой-либо из нижних (основной и обратной) шкал, числа, стоящие на этой нижней шкале, возводятся в квадрат. Замена основной шкалы обратной меняет прямую пропорциональность на обратную.

При пользовании шкалой квадратов совместно с одной из нижних шкал необходимо твёрдо соблюдать правило установки чисел нечётного порядка на одной половине шкалы, чётного порядка — на другой *).

Пример. Металлический цилиндр диаметром 17,3 *см* и высотой 36,7 *см* весит 62,4 *кг*. 1) Сколько будет весить цилиндр такого же диаметра, но высоты 15, 20, 25, 30 *см*? Вес цилиндра пропорционален высоте. Будем отсчитывать высоту на шкале *C*, вес — на шкале *D*. Установив высоту 3—6—7 против веса 6—2—4, сможем прочитать искомые веса: 25,5; 34,0; 42,5; 51,0 *кг*.

2) Сколько будет весить цилиндр той же высоты, но диаметра 3, 5, 12, 16, 20, 24 *см*? Вес пропорционален квадрату диаметра. Величина, возводимая в квадрат (диаметр), должна устанавливаться на основной шкале. Если мы хотим читать результаты на линейке, мы должны взять за шкалу веса шкалу *A*, а за шкалу диаметра шкалу *C*. Установив диаметр 1—7—3 против веса 6—2—4 (удобнее на левой половине шкалы — движок менее выдвинут), сможем прочитать искомые веса**): 1,88; 5,21; 30,0; 53,4; 83,4; 120 *кг*.

3) Каков должен быть диаметр цилиндра того же веса, но высоты 15, 20, 25, 30 *см*? При данном объёме (весе) квадрат диаметра обратно пропорционален высоте. Шкалы для переменных диаметра и высоты определяются однозначно. Действительно, в вычислении должна участвовать обратная шкала; она может служить только шкалой диаметров, так как диаметр должен отсчитываться на одной из нижних шкал. Следовательно, для высоты может быть использована только шкала *A*. Итак, устанавливаем 1—7—3 шкалы диаметров (*I*) против 3—6—7 шкалы высот (*A*)***). Против заданных высот читаем искомые диаметры: 27,1; 23,4; 21,0; 19,13 *см*.

Упражнения. 1) Скорость истечения жидкости из малого отверстия пропорциональна корню квадратному из величины напора. Если при напоре $H = 8,3$ *м* скорость истечения равнялась 11,2 *м/сек*, какова будет скорость при $H = 7$, 6, 5, 4, 3 и 2 *м*?

2) Какова должна быть длина провода диаметром 1,2; 0,75; 0,5; 0,35 *мм*, имеющего такое же электрическое сопротивление, как кусок провода из того же материала длиной 23,5 *м* и диаметром 0,9 *мм* (сопротивление пропорционально длине и обратно пропорционально квадрату диаметра)?

3) Через трубу диаметром 75 *мм* течёт вода со скоростью 1,85 *м/сек*. Какова будет скорость течения (при том же расходе жидкости) в трубе диаметром 90, 60, 45, 25 *мм*?

Если на линейке имеется шкала *K*, то, сопоставляя её со шкалами *C* или *I*, мы можем получать величины, прямо или

---

*) При вычислениях с пропорциями несущественно, чтобы числа нечётного порядка устанавливались именно на первой половине шкалы квадратов; важно лишь, чтобы в процессе данного вычисления на одной и той же половине не устанавливались числа как чётных, так и нечётных порядков.

**) Вычисления выполняются без переброски, которая была бы необходима, если бы число 6—2—4 было установлено на правой половине шкалы.

***) Здесь удобнее 3—6—7 брать на правой половине шкалы, чтобы бо́льшая часть движка находилась внутри линейки.

обратно пропорциональные кубам заданных чисел. Всё сказанное выше для шкалы квадратов может быть применено и к шкале кубов.

Легко установить также, что кубы чисел шкалы ***B*** пропорциональны квадратам стоящих против них чисел шкалы ***K*** или, что то же, числа шкалы ***K*** пропорциональны стоящим против них числам шкалы ***B***, возведённым в степень $\frac{3}{2}$.

Останавливаться детально на вычислениях со шкалой ***K*** мы не будем, считая, что читатель самостоятельно сумеет их освоить. Укажем только на необходимость тщательного соблюдения данных на стр. 24 правил установки чисел на шкале ***K***.

В заключение заметим, что правило пропорции может облегчить нахождение нужной установки при выполнении каких-либо действий над тремя заданными числами. Записав формулу, по которой ведутся вычисления, в виде пропорции и учитывая сказанное на стр. 27—28, а также соотношения между различными шкалами линейки, мы тем самым получим нужную установку. Рассмотрим это на примерах.

1) Как вести вычисления по формуле: $x=ab\sqrt{c}$? Записав данную формулу в виде: $\frac{x}{a}=\frac{\sqrt{c}}{\frac{1}{b}}$, получим установку: против c шкалы ***A*** ставим b шкалы ***I***. Против a шкалы ***C*** читаем x на шкале ***D***. Поясним эту установку несколько подробнее. Наличие в формуле квадратного корня приводит к необходимости вести вычисление на основных шкалах. Обратная шкала, на которой мы должны установить b для получения $\frac{1}{b}$, имеется только на движке; значит, в пропорции числители должны устанавливаться на линейке, знаменатели — на движке.

Другой вариант: $\frac{x}{\sqrt{c}}=\frac{a}{\frac{1}{b}}$. Против a шкалы ***D*** ставим b шкалы ***I***; против c на шкале ***B*** читаем ответ на шкале ***D***.

2) Как вести вычисление по формуле $x=\frac{a}{bc^2}$? Наличие квадрата приводит к необходимости вести вычисление на шкалах квадратов. При этом нельзя обойтись без обратной шкалы, так как из чисел x, a, b, c^2 составить пропорцию нельзя. Пропорцию $\frac{x}{\frac{1}{b}}=\frac{a}{c^2}$ нельзя реализовать на линейке,

так как для этого мы должны были бы иметь обратную шкалу квадратов $\left(\text{для получения } \frac{1}{b}\right)$. Пропорция: $\frac{x}{\frac{1}{c^2}} = \frac{a}{b}$ даёт следующую установку: против a шкалы A ставим b шкалы B; против c на обратной шкале читаем x на шкале A.

Упражнение. Разобрать с помощью правила пропорции установки в примерах и упражнениях n° 11.

13. ЛОГАРИФМИРОВАНИЕ

Логарифмическая шкала, как видно из принципов её построения, представляет собой графическую таблицу логарифмов. Для нахождения логарифма какого-либо числа x достаточно измерить расстояние от начала отсчёта (отметки 1) до отметки x логарифмической шкалы. Это измерение мы можем легко осуществить на основной шкале линейки, так как на линейке имеется равномерная шкала L, рассмотренная в n° 2, с единицей масштаба 25 *см*. Если установить визирную линию бегунка против числа x на шкале D, то на шкале L эта визирная линия даст нам величину $\lg x$. Вернее, мы получим только дробную часть логарифма, его мантиссу, так как отметку x можно отнести к любому участку логарифмической шкалы и, стало быть, прибавить к отсчитанному логарифму любое целое число положительных или отрицательных единиц. Целая часть логарифма, его характеристика, находится по обычным правилам алгебры. Заметим, что порядок числа, как мы его определили на стр. 14, будет на единицу больше характеристики.

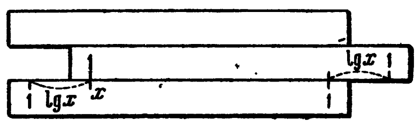


Рис. 25.

Обратно, зная логарифм числа, нетрудно найти это число. Отсчитав на шкале L мантиссу данного логарифма, с помощью бегунка читаем соответствующее число на шкале D. Характеристика логарифма позволит поставить у получившегося числа запятую.

Как уже указывалось в n° 2, у некоторых систем линеек шкала L нанесена посреди движка, на обратной его стороне, причём отсчёт на этой шкале ведётся справа налево. Для получения логарифма числа x на такой линейке нужно выдвинуть движок вправо, установив его левую единицу против отметки x шкалы D. Искомый логарифм (точнее, его мантисса) будет равен смещению движка (рис. 25). Чтобы измерить это смещение, достаточно перевернуть линейку и сделать отсчёт по шкале L с помощью нижнего штриха в имеющемся справа вырезе линейки (рис. 26). Этот штрих приходится в точности против правой единицы на лицевой стороне линейки.

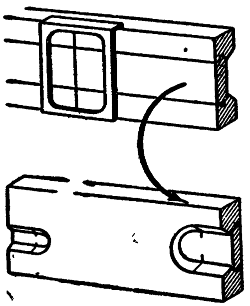


Рис. 26.

Чаще всего к логарифмированию приходится прибегать для вычисления дробных степеней.

Примеры. 1) Вычислить $x=3{,}74^{1{,}63}$. Логарифмируя, получим $\lg x=1{,}63\cdot\lg 3{,}74$. Шкала L даёт $\lg 3{,}74=0{,}573$. Умножая на линейке, найдём $\lg x=1{,}63\cdot 0{,}573=0{,}934$. По полученному логарифму найдём число: $x=8{,}59$.

2) Вычислить $y=0{,}644^{0{,}216}$. Логарифмируя, получим $\lg y=0{,}216\cdot\lg 0{,}644$. С помощью шкалы L найдём $\lg 0{,}644=\bar{1}{,}809$. Для дальнейшего умножения найденный логарифм придётся преобразовать к отрицательной мантиссе: $\lg 0{,}644=-1+0{,}809=-0{,}191$. Выполняя на линейке умножение $0{,}216\cdot 0{,}191$, получим $\lg y=-0{,}041$, или, преобразовывая в искусственную форму, $\lg y=\bar{1}{,}959$. По полученному логарифму найдём число: $y=0{,}910$.

Упражнения. Вычислить $23{,}7^{0{,}513}$; $0{,}0642^{1{,}535}$; $4{,}73^{-0{,}074}$.

14. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ. ТАНГЕНСЫ

На обратной стороне движка нанесены шкалы, позволяющие вести на линейке тригонометрические вычисления (рис. 27). Эти шкалы обозначают обычно буквами T, S и $S\&T$ (вместо шкалы $S\&T$ бывает иногда нанесена шкала L) и называют соответственно шкалами тангенсов, синусов и малых углов.

Будем считать в дальнейшем движок вставленным в линейку тригонометрическими шкалами наружу *).

Познакомимся подробнее с этими шкалами. Начнём со шкалы T. Шкала тангенсов представляет собой участок логарифмической шкалы, на которой отложены от начальной точки в масштабе основной шкалы логарифмы тангенсов острых углов.

Легко сообразить, что логарифмы тангенсов всех острых углов невозможно уложить на линейке, так как при измене-

*) При вынимании движок переворачивается вокруг оси, идущей вдоль движка, так что его нижний край становится верхним.

нии угла от 0° до 90° тангенс его возрастает от 0 до бесконечности, а логарифм тангенса от $-\infty$ до $+\infty$. На линейке же умещается только одна единица в масштабе основной шкалы. Следовательно, на линейке может быть получен только один участок логарифмической шкалы тангенсов, охватывающий углы, тангенсы которых являются числами, лежащими в пределах одного единичного участка основной шкалы линейки (то-есть от 0,01 до 0,1, или от 0,1 до 1, или от 1 до 10 и т. д.).

Шкала *T* содержит углы, тангенсы которых меняются от 0,1 до 1, а шкала *S&T* (малых углов) — углы, тангенсы которых меняются от 0,01 до 0,1. Левой единице основной шкалы линейки соответствуют отметки 5°44′ шкалы *T* (так как $\operatorname{tg} 5°43' = 0{,}100$) и 0°34,4′ шкалы *S&T* ($\operatorname{tg} 0°34{,}4' =$

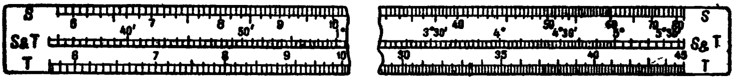


Рис. 27.

$= 0{,}0100$). Правой единице основной шкалы соответствует на шкале *T* отметка 45° ($\operatorname{tg} 45° = 1$), а на шкале *S&T* отметка 5°44′. Детальное знакомство с делениями на шкалах *T* и *S&T* может быть проведено самостоятельно. Заметим только, что штрихи, отделяющие целое число градусов, вдоль всей шкалы *T* имеют несколько бо́льшую длину, а самые мелкие деления нанесены через 5′ для углов, меньших 20°, и через 10′ в остальной части шкалы.

Совместив концевые отметки шкал движка и линейки, мы сможем против любого угла, отсчитанного на шкале *T* (или *S&T*), прочитать соответствующее значение тангенса на шкале *D*. Обратно, зная величину тангенса какого-либо угла, можно найти этот угол, установив тангенс на шкале *D* и читая угол на соответствующей шкале движка. Важно всегда твёрдо помнить, что шкала *T* служит для тангенсов, заключённых между 0,1 и 1, а шкала *S&T* для тангенсов, заключённых между 0,01 и 0,1. Случай, когда тангенс больше 1, будет рассмотрен ниже (стр. 36).

Примеры. $\operatorname{tg} 23°19' = 0{,}431$; $\operatorname{tg} 3°38' = 0{,}0635$; $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}275$; $\alpha = 15°23'$; $\operatorname{tg} \beta = 0{,}0275$; $\beta = 1°34{,}5'$.

Таким образом, шкала *T* является такой же логарифмической шкалой, как и шкала *D*, с той только разницей, что отметки на ней указывают не число, логарифм которого отложен на шкале (как на шкале D), но угол, тангенс которого равен этому числу. Поэтому с помощью шкалы тангенсов можно выполнять все вычисления с тангенсами заданных углов, пользуясь установленными раньше правилами. Для определения положения запятой делают грубый подсчёт или пользуются правилами для порядков, учитывая, что порядок чисел шкалы T равен нулю, а шкалы $S\&T$ — минус единице.

Примеры. 1) $45{,}3 \cdot \operatorname{tg} 28°17'$. По правилу умножения (стр. 12) против отметки 4—5—3 шкалы D ставим концевую отметку шкалы T (в данном примере — правую, т. е. 45°). Против отметки 28°17' шкалы T читаем ответ 2—4—4 на шкале D. Искомое произведение равно 24,4.

2) $\dfrac{17{,}3}{\operatorname{tg} 3°41'}$. По правилу деления (стр. 15) устанавливаем отметку 3°41' шкалы $S\&T$ против числа 1—7—3 шкалы D. Конечная отметка движка укажет результат на шкале D. Искомое частное равно 269 (грубый подсчёт: 17,3 делится на число, заключённое между 0,1 и 0,01, то-есть увеличивается больше чем в 10, но меньше чем в 100 раз).

3) $0{,}743 \cdot \dfrac{\operatorname{tg} 17°31'}{\operatorname{tg} 38°42'}$. Выполняем сначала деление, потом умножение. Против 7—4—3 шкалы D ставим 38°42' шкалы T, под 17°31' шкалы T читаем ответ: 0,292 на шкале D.

Для нахождения тангенсов острых углов, больших 45°, а также для нахождения котангенсов используют тригонометрические формулы

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg}(90° - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{ctg}(90° - \alpha)} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha},$$

с помощью которых тангенс и котангенс любого острого угла всегда могут быть сведены к тангенсу угла, меньшего 45°.

Примеры. 1) Найти $\operatorname{tg} 67°18'$. Так как $\operatorname{tg} 67°18' = 1 : \operatorname{tg} 22°42'$, то мы сделаем следующую установку (рис. 28): против единицы шкалы D ставим 22°42' шкалы T. Конечная отметка шкалы T укажет искомое число на шкале D: 2,39. Установка запятой очевидна: величины, обратные тангенсам шкалы T, заключены между 1 и 10.

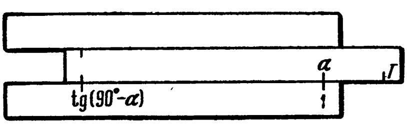


Рис. 28.

2) $\operatorname{tg} \alpha = 4{,}19$; найти α. Так как $\operatorname{tg} \alpha > 1$, установка, указанная на стр. 35 для нахождения угла по тангенсу, не может быть применена. Здесь приходится воспользоваться той же установкой, что и в предыдущем примере (рис. 28). Против 4—1—9 шкалы D устанавливаем конечную отметку шкалы T (безразлично, правую или левую). Против единицы шкалы D прочитаем на шкале T угол, дополнительный до α, т. е. 13°25'; $\alpha = 76°35'$.

3) $\operatorname{tg}\alpha = 41{,}9$; найти α. Читатель легко сообразит, что в данном примере должна быть использована та же установка, что и в предыдущем, но угол $90^\circ - \alpha$ читается на шкале *S&T*:

$$90^\circ - \alpha = 1^\circ 22'; \quad \alpha = 88^\circ 38'.$$

При выполнении расчётов с тангенсами может быть использовано правило пропорции (стр. 27). Однако следует иметь в виду, что на движке имеется только два участка шкалы тангенсов, которые не могут заменить, в отличие от основной логарифмической шкалы, всю бесконечную шкалу тангенсов. Поэтому в некоторых случаях результаты не удастся получить непосредственно с помощью правила пропорции и придётся прибегать к обходным путям.

П р и м е р. Найти острые углы, определяемые уравнениями:

$$\frac{\operatorname{tg} 34^\circ}{5} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{3{,}7} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{6{,}2} = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{9{,}8} = \frac{\operatorname{tg}\delta}{0{,}65}.$$

В соответствии с правилом стр. 27 ставим отметку 34° шкалы *T* против отметки 5 шкалы *D*. Против 3—7—0 и 6—2—0 мы на шкале *T* сразу получим $\alpha = 26^\circ 32'$ и $\beta = 39^\circ 55'$. Однако будет ошибкой на шкале *T* прочитать $\gamma = 7^\circ 32'$ (против 9—8—0 после переброски) или $\delta = 41^\circ 15'$ (против 6—5—0). С увеличением знаменателей должны увеличиваться и числители. Эти ошибочные значения γ и δ соответствуют тангенсам, в 10 раз меньшему и в 10 раз большему, чем истинные. Правильное нахождение δ не вызывает затруднений — достаточно при нашей установке сделать отсчёт не на шкале *T*, а на шкале *S&T*: $\delta = 5^\circ 0{,}5'$. Для нахождения угла γ придётся прибегнуть к установке примера стр. 36 (рис. 28), поскольку этот угол больше 45°. Величина $\operatorname{tg}\gamma$ может быть установлена на шкале *D* с помощью неверного отсчёта $\gamma_1 = 7^\circ 32'$, сделанного на шкале *T*. Действительно, так как $\operatorname{tg}\gamma_1 = 0{,}1 \operatorname{tg}\gamma$, то на шкале *D* оба тангенса будут изображаться одной и той же отметкой. Для получения её достаточно вдвинуть движок так, чтобы его концевые отметки совпали с единицами шкалы *D*, и установить визирную линию бегунка на γ_1 шкалы *T*.

Подведя теперь под эту визирную линию левую концевую отметку шкалы *T*, прочитаем на этой шкале, над единицей шкалы *D*, значение $90^\circ - \gamma = 37^\circ 6'$, следовательно, $\gamma = 52^\circ 54'$.

Остановимся теперь на решении одной часто встречающейся задачи — нахождении острого угла прямоугольного треугольника по его катетам (рис. 29). Задача эта сводится к определению угла из соотношения

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$$

или

$$\frac{\operatorname{tg} A}{a} = \frac{1}{b}.$$

Установка делается обычным образом по способу пропорции, а в качестве единицы может быть использован любой конец движка.

Сравнивая отношение $\frac{a}{b}$ с 0,1, мы можем узнать, где должен быть сделан отсчёт угла A — на шкале T или $S\&T$.

Для углов, тангенс которых меньше 0,01, следует заменять тангенс радианной мерой угла. О нахождении радианной меры на линейке сказано ниже (см. стр. 44).

Указанная установка годится лишь, если $b > a$. В противном случае угол A находится как дополнительный к углу B, тангенс которого может быть найден описанным выше способом:

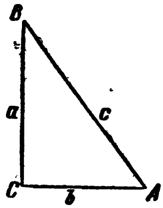


Рис. 29.

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{a}.$$

В заключение заметим, что некоторые вычисления с тангенсами могут быть выполнены и при обычном положении движка, то-есть когда он вставлен в линейку числовыми шкалами (*B*, *I*, *C*) наружу.

Для этой цели служат имеющиеся на обратной стороне линейки справа и слева вырезы (рис. 30). В вырезах имеются штрихи, нанесённые в точности против единичных штрихов основной шкалы линейки. Если перевернуть линейку около её продольной оси, так чтобы нижний её край оказался наверху, то деления шкалы T

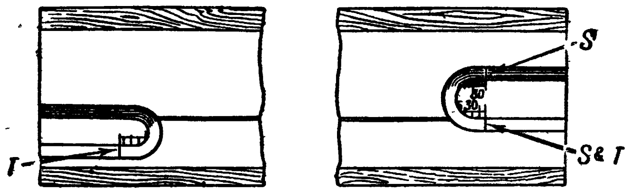


Рис. 30.

при выдвигании движка влево будут приходиться против штриха, нанесённого у левого выреза (рис. 31). Если установить против этого штриха отметку α и перевернуть линейку лицевой стороной, то, как легко сообразить, против левой единицы линейки мы сможем прочитать на шкале C значение $\operatorname{tg}\alpha$, а против правой единицы движка на шкале D значение $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}(90° - \alpha)$. Если при этом числа c и d шкал

C и *D* стоят друг против друга, то на основании правила пропорции мы можем заключить, что $\frac{c}{d}=\operatorname{tg}\alpha$. Таким образом, умножение на $\operatorname{tg}\alpha$ или деление на $\operatorname{tg}\alpha$, а также определение тангенса острого угла прямоугольного треугольника по его катетам могут выполняться без перевёртывания движка *).

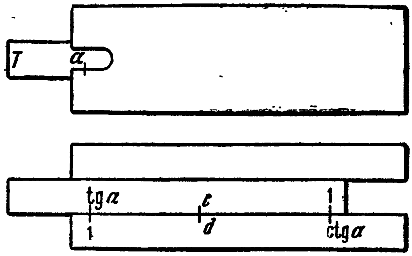


Рис. 31.

Для углов, тангенс которых меньше 0,1 **), вместо шкалы *T* должна быть использована шкала *S&T*. Отсчёты на ней могут делаться у нижнего штриха правого выреза обратной стороны линейки (рис. 32). Всё сказанное выше для шкалы *T* сохранит силу и для шкалы *S&T*, если везде переставить слова «правый» и «левый».

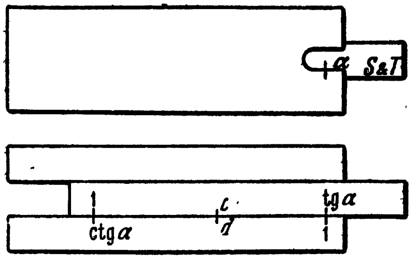


Рис. 32.

Например, вычислим при обычном положении движка $43{,}7\cdot\operatorname{tg}14°28'$. Выдвинем движок влево так, чтобы отметка 14°28′ шкалы *T* установилась против штриха в левом вырезе обратной стороны линейки. Тогда против начальной единицы шкалы *D* мы сможем прочитать $\operatorname{tg}14°28'$ (что нам не нужно), а против каждого числа шкалы *D*, в соответствии с правилом пропорции, окажется на шкале *C* его произведение на $\operatorname{tg}14°28'$. В частности, против 4—3—7 прочитаем искомую величину: 11,27.

---

*) При определении α из соотношения $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}$ на движке устанавливается всегда меньшее из чисел a и b. Если $a<b$, то на шкале *T* читается угол α, если $a>b$—угол $90°-\alpha$. Если при установке движок окажется выдвинутым вправо, то для отсчёта придётся сделать переброску движка.

**) Но больше 0,01.

Упражнения. 1) Вычислить: $\frac{32,7}{\operatorname{tg} 15°42'}$; $0,738 \cdot \operatorname{tg} 2°27'$; $28,4 \cdot \operatorname{tg} 62°17'$; $\frac{7,43}{\operatorname{tg} 55°13'}$; $\frac{\operatorname{tg} 24°52'}{0,0835}$.

2) Найти $\operatorname{arctg} \frac{5}{17}$; $\operatorname{arctg} \frac{27,3}{14,8}$; $\operatorname{arctg} \frac{1}{13}$; $\operatorname{arctg} \frac{0,73}{0,64}$; $\operatorname{arctg} \frac{4,75}{0,13}$.

3) Определить неизвестные в пропорциях:

$$\frac{\operatorname{tg} 38°17'}{0,643} = \frac{\operatorname{tg} 3°14'}{x_1} = \frac{\operatorname{tg} 10°45'}{x_2} = \frac{\operatorname{tg} 27°24'}{x_3} = \frac{\operatorname{tg} 49°12'}{x_4};$$

$$\frac{2,64}{\operatorname{tg} 18°35'} = \frac{0,62}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{1,84}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{4,52}{\operatorname{tg} \alpha_3} = \frac{12,75}{\operatorname{tg} \alpha_4}.$$

15. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ. СИНУСЫ

Перейдём теперь к шкале синусов (*S*). Шкала эта является такой же логарифмической шкалой, как и шкала *D*, но отметки на ней указывают не число, логарифм которого отложен на шкале, а угол, синус которого равен этому числу. Таким образом, по принципу построения шкала синусов совершенно аналогична шкале тангенсов. Имеющийся на движке участок шкалы *S* соответствует участку бесконечной логарифмической шкалы, охватывающему числа, заключённые между 0,1 и 1. Поэтому концевые штрихи шкалы *S* имеют отметки 5°44′ ($\sin 5°44' = 0,1$) и 90° ($\sin 90° = 1$). Синусы углов, меньших 5°44′, в пределах точности даваемой линейкой, можно считать равными их тангенсам (и равными их радианной мере). Следовательно, шкалу *S&T* можно рассматривать в равной степени и как шкалу синусов, и как шкалу тангенсов для малых углов. Этим объясняется её обозначение.

У некоторых линеек шкала синусов нанесена на движке в масштабе шкалы квадратов. В этом случае на движке умещаются две масштабные единицы логарифмической шкалы, охватывающие область изменения синусов от 0,01 до 1. На линейках подобного типа отметка 5°44′ будет находиться посреди шкалы *S* (на месте средней единицы шкалы квадратов), а у левого конца шкалы будет стоять отметка 0°34,4′. Шкала *S&T* в этом случае отсутствует (на её месте обычно бывает нанесена шкала *L* — см. стр. 7). Её заменяет начальный участок шкалы *S*, который может служить для вычислений как с синусами, так и с тангенсами малых углов. Все методы вычисления, которые будут нами получены для шкалы *S*, построенной в масштабе основной шкалы, могут быть применены и при наличии шкалы *S* масштаба шкалы квадратов, с соответствующей заменой других шкал линейки, участвующих в вычислениях. В дальнейшем мы будем считать, что шкала S имеет масштаб основной шкалы.

Прежде чем вести какие-либо вычисления со шкалой S, необходимо внимательно изучить деления на ней, которые чрезвычайно разнообразны на протяжении всей шкалы. Для углов, меньших 10°, деления нанесены через 5′, целые градусы надписаны. От 10° до 20° деления нанесены через 10′; цифры имеются только у отметок, соответствующих чётному числу градусов. Дальше (до 70°) штрихи, соответствующие целым градусам, отличаются большей длиной, а мелкие деления нанесены через 20′ до 40° и через 30′ от 40° до 70°. На участке от 70° до 80° имеются деления только для целых градусов. После 80° имеются только три штриха, соответствующие 82°, 84° и 86°.

При. ознакомлении со шкалой рекомендуется в первую очередь внимательно изучить деления, соответствующие целому числу градусов.

Установив движок так, чтобы его конечные штрихи совпали с единичными штрихами линейки, мы сможем получить синус заданного угла или угол по его синусу, находя стоящие друг против друга отметки шкал S и D при помощи визирной линии бегунка. Заметим при этом, что углы, близкие к 90°, не могут быть сколько-нибудь точно определены по их синусам *).

Шкала S позволяет выполнять вычисления, содержащие синусы, совершенно так же, как шкала T давала нам возможность вести вычисления с тангенсами.

Если в вычислениях участвуют косинусы каких-либо углов, то, пользуясь формулой $\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$, мы всегда можем заменить их синусами.

Примеры. 1) $0{,}653\cdot\sin 23°17'$. По правилу умножения против 6—5—3 шкалы D ставим единицу движка (в данном примере правую). Против 23°17′ шкалы S читаем на шкале D искомое произведение: 0,258.

2) $\dfrac{7{,}53\cdot\operatorname{tg} 24°17'}{\sin 38°42'}$. Выполняем сначала деление, для чего устанавливаем отметку 38°42′ шкалы S против 7—5—3 шкалы D. Умножение выполняется с помощью шкалы T; против отметки 24°17′ этой шкалы прочитаем на шкале D результат: 5,43.

3) $\sin 23°22'\cdot\sin 42°53'=\cos\alpha$. Первый множитель необходимо иметь на линейке. Для этого придётся вдвинуть движок так, чтобы его концевые штрихи совпали с концевыми штрихами шкал линейки, и с помощью бегунка отметить величину $\sin 23°22'$ на шкале D. Подведя к визирной линии бегунка единицу (вернее, отметку 5°43′) движка, мы против

*) Это зависит не от свойств счётной линейки, а от поведения синуса при аргументах, близких к 90°.

отметки 42°53′ шкалы S сможем прочитать (если это требуется) величину $\cos\alpha$. Если же нас интересует непосредственно угол α, придётся закрепить полученное произведение визирной линией бегунка и, вдвинув вновь движок, на шкале S прочитать $90°-\alpha=15°39'$, откуда $\alpha=74°21'$.

4) Определить неизвестные углы из пропорции:

$$\frac{38,3}{\sin 17°35'}=\frac{54,5}{\sin\alpha}=\frac{63,7}{\sin\beta}=\frac{12,5}{\sin\gamma}=\frac{7,54}{\sin\delta}.$$

По правилу пропорции устанавливаем 17°35′ шкалы S против 3—8—3 шкалы D. Читатель легко сообразит, что α и β должны быть прочитаны на шкале S, а γ и δ на шкале $S\&T$ (для отсчёта γ потребуется переброска движка): $\alpha=25°28'$, $\beta=30°10'$, $\gamma=5°39'$, $\delta=3°25'$.

5) Вычислить $\arcsin\frac{7}{13}$. Эта задача решается так же, как и рассмотренная выше (стр. 37) аналогичная задача для тангенсов. Установка определяется пропорцией: $\frac{\sin\alpha}{7}=\frac{1}{13}$. Против 1—3—0 шкалы D ставим концевую отметку («единицу») движка, против 7—0—0 читаем на шкале S ответ: $\alpha=32°35'$. Если бы нам был нужен $\arcsin\frac{7}{130}$, ответ следовало бы читать на шкале $S\&T$: $\arcsin\frac{7}{130}=3°5'$.

Используя правый вырез на обратной стороне линейки, можно многие вычисления с синусами выполнять при нормальном (не перевёрнутом) положении движка. Если при нормальном положении движка выдвинуть его вправо так, чтобы против верхнего штриха правого выреза обратной стороны линейки оказалась установленной отметка α шкалы S (рис. 33), на шкале C движка против правой единицы линейки может быть прочитано значение $\sin\alpha$. Из правила пропорции следует, что для стоящих при этом друг против друга отметок c и d шкал C и D будет справедливо соотношение: $\frac{c}{d}=\sin\alpha$. Таким образом, умножение и деление на синус заданного угла может быть выполнено без перевёртывания движка. Угол, синус которого задан в виде отношения двух величин, также может быть найден без перевёртывания движка.

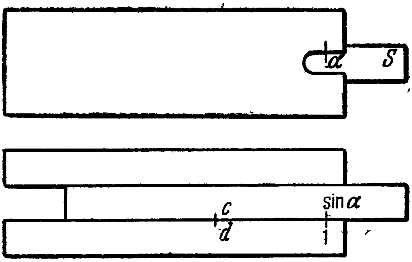


Рис. 33.

Примеры. 1) Сделаем при нормальном положении движка пример 1 стр. 41. Для этого установим отметку 23°17′ шкалы S против верхнего штриха правого выреза обратной стороны линейки. Тогда, как видно из предыдущего, против каждого числа шкалы D мы сможем прочитать на шкале C его произведение на $\sin 23°17'$. В частности, против 6—5—3 найдём 2—5—8, что совпадает с полученным ранее ответом.

2) Для примера 5 стр. 42 мы должны установить 7—0—0 шкалы C против 1—3—0 шкалы D. При этом движок окажется выдвинутым влево. Чтобы сделать отсчёт в правом вырезе, нам придётся сделать переброску движка. Против верхнего штриха выреза на шкале S находим $\arcsin\frac{7}{13} = 32°35'$, а против нижнего на шкале $S\&T$ находим $\arcsin\frac{7}{130} = 3°5'$.

Упражнения. 1) Вычислить: $\frac{23,4}{\sin 38°43'}$; $8,73\cdot\sin 13°12'\cdot\operatorname{tg} 26°24'$; $0,482\cdot\operatorname{tg} 63°17'\cdot\sin 27°38'$.

2) Определить неизвестные углы из уравнений:

$$\sin\alpha = \frac{3,74}{5,08};\ \sin\beta = \frac{4,37}{12,63};\ \operatorname{tg}\gamma = \frac{\sin 49°24'}{\sin 24°42'};\ \sin\delta = \frac{\operatorname{tg} 25°17'}{\operatorname{tg} 36°28'}.$$

3) Известны два угла треугольника $A = 23°17'$ и $B = 37°27'$ и сторона $c = 133,5$ *см*, лежащая против третьего угла. Определить остальные стороны треугольника (указание: применить теорему синусов).

16. ОСОБЫЕ ОТМЕТКИ

Для ряда постоянных величин, часто встречающихся в вычислениях, на шкалах линейки имеются особые отметки.

Число $\pi = 3,14\ldots$ отмечено на шкалах A, B, C, D. На некоторых линейках бывает также отмечено число $\frac{\pi}{4} = 0,785\ldots$ длинной чёрточкой на втором участке шкал A и B. На шкале C нанесена отметка $c = \sqrt{\frac{4}{\pi}} = 1,128\ldots$ Эта отметка служит для вычисления площади круга (S) по его диаметру (d). Так как $S = \pi\frac{d^2}{4} = \left(\frac{d}{c}\right)^2$, то, установив против отметки d шкалы D отметку c движка, мы сможем прочитать площадь круга S на шкале A против концевой единицы движка.

Пример. Площади кругов диаметра 2,75 *м*, 0,143 *м*, 49,2 *м* равны соответственно 5,94 *м*^{2}, 0,0161 *м*^{2}, 1900 *м*^{2}.

Очевидно, что описанная установка может служить и для обратной цели — определения диаметра круга по его площади.

Кроме отметки c иногда на шкале C бывает нанесена ещё отметка $c_1 = \sqrt{\frac{40}{\pi}} = 3,568\ldots$ Употребление её такое же, как и отметки c, только при пользовании отметкой c_1 площадь круга читается против средней единицы шкалы B.

На некоторых бегунках бывают нанесены не одна, а три визирные линии. Расстояние между ними делают равным расстоянию отметки c до левой единицы. Легко видеть, что при наличии подобного бегунка вычисление площади круга может быть произведено без помощи движка. Установив среднюю, визирную линию против заданного диаметра на шкале D, мы сможем прочитать площадь круга под левой визирной линией на шкале A (на рис. 34 имеем: $d=6{,}9$, $S=37{,}4$).

Отметки ρ', ρ'', нанесённые на шкалах C и D, служат для перевода градусной меры углов в радианную, и обратно. Отметка ρ' даёт нам число минут в одном радиане: $\rho'=3437{,}7\ldots$ Умножив радианную меру угла α на ρ', получим величину угла α, выраженную в минутах. Обратно, выразив угол α в

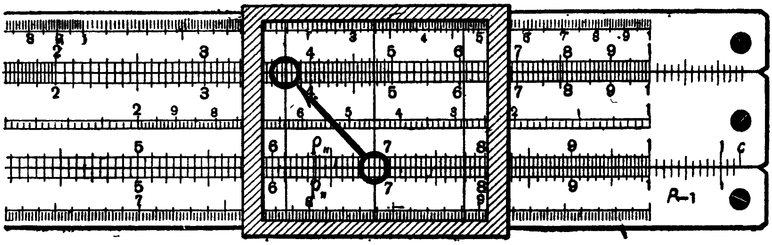


Рис. 34.

минутах и разделив полученное число на ρ', получим радианную меру угла.

Пример. $0{,}744$ рад. $=\rho'\cdot 0{,}744$ минут $=2560'=42°40'\cdot 7°33'=$ $=453'=\dfrac{453'}{\rho'}$ рад. $=0{,}1318$ рад.

Для определения положения запятой важно помнить или грубую величину $\rho'\approx 3000$, или порядок ρ', равный четырём.

Употребление отметки ρ'', дающей число секунд в радиане $\rho''=206\,264\ldots$, совершенно такое же, как и отметки ρ'.

Пример. $23'47''$ перевести в радианы. Переводим отдельно минуты и секунды: $23'=\dfrac{23'}{\rho'}$ рад. $=0{,}00669$; $47''=\dfrac{47''}{\rho''}$ рад. $=0{,}000228$; $23'47''=0{,}00692$*).

Заметим, что для малых углов радианная мера заменяет, в пределах точности линейки, синусы и тангенсы этих углов.

*) Шестой знак при сложении округляется.

По существу шкала *S&T* даёт нам радианную меру помещённых на ней углов вместо их синусов и тангенсов.

На некоторых линейках бывает нанесена отметка ρ°, дающая выражение радиана в градусах ($\rho^\circ = 57,29\ldots$). Применяется эта отметка так же, как отметки ρ' и ρ''.

При пользовании десятичной системой измерения углов, при которой прямой угол делится на 100 градов, а каждый град на 100 сантиградов, для перевода в радианную меру применяют отметку $\rho_{,,}$. Эта отметка даёт нам число градов в одном радиане ($\rho_{,,} = \frac{400}{2\pi} = 63,66\ldots$). Увеличивая это число в 100 раз, получим число сантиградов в радиане.

Так как десятичная система деления углов мало употребительна в СССР, отметка $\rho_{,,}$ на линейки отечественного производства наносится редко.

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ *)

К стр. 14	4,88; 139,2; 0,530; 9460; 0,000818.
К стр. 16	0,00236; 2,26; 5120; 5,29; 11,67; 0,01486.
К стр. 18	0,0421; 278; 0,579; 1,248; 34,1.
К стр. 21	1) 6950; 0,0976; 47,4; 17,03.
	2) 3,61; 2,52; 1,93; 1,566; 1,317; 1,137; 0,892; 0,806.
К стр. 23	1) 13,8; 0,000154; 753 000; 0,0000397; 0,0681.
	2) 75,3; 0,294; 5,45; 0,0548; 0,01049.
К стр. 24	1) 0,0162; 499 000; 0,00000210; 44,4.
	2) 8,49; 0,364; 0,928; 0,132.
К стр. 27	34,3 12,69; 0,478; 0,1541; 7,35.
К стр. 31	1) 10,29; 9,52; 8,69; 7,78; 6,73; 5,50 *м/сек.*
	2) 41,8; 16,3; 7,25; 3,55 *м.*
	3) 1,285; 2,89; 5,14; 16,65 *м/сек.*
К стр. 34	5,07; 0,01477; 0,891.
К стр. 40	1) 116,3; 0,0316; 54,1; 5,16; 5,55.
	2) 16°23′; 61°32′; 4°24′; 48°45′; 88°26′.
	3) $x_1=0{,}0460$; $x_2=0{,}1547$; $x_3=0{,}42$; $x_4=0{,}944$; $\alpha_1=4°31'$; $\alpha_2=13°11'$; $\alpha_3=29°55'$; $\alpha_4=58°22'$.
К стр. 43	1) 37,4; 0,990; 0,444.
	2) $\alpha=47°25'$; $\beta=20°15'$; $\gamma=61°10'$; $\delta=39°45'$.
	3) $a=60{,}5$; $b=93{,}1$.

*) Так как линейка даёт приближённый результат, читатель не должен смущаться, если его ответ будет отличаться на одну-две единицы от данного в книге последнего (третьего или четвёртого) знака. При наличии больших расхождений вычисление следует повторить.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 3
1. Описание линейки 5
2. Равномерная шкала 6
3. Логарифмическая шкала 7
4. Основные шкалы линейки 9
5. Умножение 12
6. Деление 15
7. Комбинированные вычисления. 17
8. Обратная шкала 18
9. Шкала квадратов 21
10. Шкала кубов 23
11. Комбинированные вычисления на разных шкалах . . . 24
12. Правило пропорции 27
13. Логарифмирование 33
14. Тригонометрические вычисления. Тангенсы. 34
15. Тригонометрические вычисления. Синусы. 40
16. Особые отметки 43
Ответы к упражнениям 46

Константин Адольфович Семендяев.
Счётная линейка,
Редактор *А. З. Рывкин.*
Техн. редактор *С. Н. Ахламов.*
Корректор *Л. О. Сечейко.*

☆

Печать с матриц. Подписано к печати 22/II 1957 г. Бумага $84 \times 108^1/_{32}$.
Физ. печ. л. 1,5. Условн. печ. л. 2,46.
Уч.-изд. л. 2,78. Тираж 200 000 экз.
Т-02107. Цена 85 коп. Заказ № 229.

☆

Государственное издательство технико-теоретической литературы.
Москва, Б. Калужская, 15.

Министерство культуры СССР.
Главное управление полиграфической промышленности. Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова,
Москва, Ж-54, Валовая, 28.

Цена 85 коп.

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1957