

А.М.ЗЛЕЗДНЫЙ

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ
ПО КУРСУ
„ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ РАДИОТЕХНИКА“

А. М. ЗАЕЗДНЫЙ

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ
ПО КУРСУ
„ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ РАДИОТЕХНИКА“

*Допущено Главным управлением
политехнических и машиностроительных вузов
Министерства высшего образования СССР
в качестве учебного пособия
для радиотехнических высших учебных заведений
и факультетов*

Зак. 659



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛИТЕРАТУРЫ
ПО ВОПРОСАМ СВЯЗИ И РАДИО

М. А. 1957

ПРЕДИСЛОВИЕ

Изучение фундаментальных курсов должно сопровождаться упражнениями в решении задач; без этого немислимо овладение содержанием курса. Тем не менее по курсу „Теоретическая радиотехника“ уже многие годы нет задачника, соответствующего современным программам, уровню знаний и методам изложения. Настоящий сборник задач и упражнений должен восполнить этот пробел.

Содержание задачника в основном отражает содержание курса „Теоретическая радиотехника“, читавшегося автором в Ленинградском электротехническом институте связи им. проф. М. А. Бонч-Бруевича в течение последних десяти лет. Некоторые разделы курса, как например, основы общей теории связи (теории информации), основы теории релаксационных генераторов, применение круговых диаграмм к расчёту цепей с распределёнными постоянными и другие в настоящем задачнике отражения не нашли.

Каждый параграф снабжён пояснительным текстом, обстоятельность изложения которого для различных разделов неодинакова и определялась степенью обстоятельности изложения того или иного раздела в имеющихся учебниках. В задачнике есть также материал, который в учебниках и учебных пособиях прежде не излагался.

Задачник по своему содержанию является рабочим аппаратом для усвоения курса и развития навыков, необходимых в инженерных расчётах. Поэтому значительная часть задач снабжена подробными решениями¹⁾. Подробные решения помогут студенту, кроме всего, научиться правильно и экономно выполнять расчёты, выбирать наилучшую схему решения.

Содержание задач подчинено инженерной целеустремлённости в смысле соотношения заданных и искомых величин; цифры задач соответствуют границам мира реальных величин, знание которых необходимо инженеру.

¹⁾ Задачи, снабжённые решениями или указаниями к решению, отмечены звёздочками; остальные задачи снабжены только ответами. Решения и ответы выделены в отдельные разделы (стр. 225 и стр. 429).

При составлении задачника были использованы материалы и задачи из курсов и задачников, изданных ранее; подавляющее число задач составлено впервые.

Пользуясь случаем, выражаю свою глубокую признательность П. Г. Каранчуку за большой труд, проделанный им в процессе редактирования, что способствовало улучшению содержания задачника.

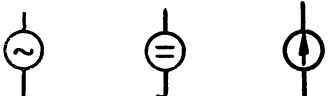
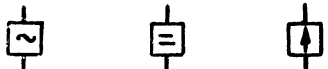

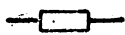
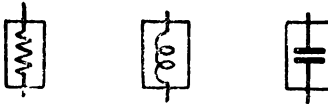

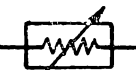

В решении примеров к задачам первых семи параграфов помощь оказал инженер К. А. Лавров, работа которого отмечается мной с благодарностью.

Книга была предметом внимания ряда рецензентов, сделавших много ценных замечаний. Особо следует отметить рецензии И. Е. Среднего, Д. Б. Головина, В. С. Андреева и М. В. Назарова, которых я искренне благодарю.

Замечания по книге следует направлять в адрес Связьиздата (Москва-центр, Чистопрудный бульвар, 2).

А. Заездный

НЕКОТОРЫЕ УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

№№ пп.	Обозначение	Содержание обозначения
1		генераторы напряжения синусоидальной формы, постоянного напряжения и напряжения произвольной формы
2		генераторы тока синусоидальной формы, постоянного тока и тока произвольной формы
3		активный, индуктивный и ёмкостный линейные элементы
4		комплексный или реактивный линейный элемент
5		активный, индуктивный и ёмкостный нелинейные элементы
6		активный, индуктивный и ёмкостный линейные параметрические элементы
7		активный нелинейно-параметрический элемент
8		матрица

№№ пп.	Обозначение	Содержание обозначения
9	$\overline{f(t)}$	спектральная функция или операционное изображение временной функции
10	$\overline{F(p)}, S(i\omega)$	временная функция, соответствующая операционному изображению $F(p)$ или спектральной функции $S(i\omega)$
11	$i(t), i, \overline{I(p)}$ $I(p) = \overline{i(t)} = \overline{i}$ $U(p) = \overline{u(t)} = \overline{u}$	временная функция тока изображение временной функции тока изображение временной функции напряжения
12	$F(i\omega)$ $F(\omega)$	комплексная функция переменной ω модуль комплексной функции переменной ω

ЗАДАЧИ

УСТАНОВИВШИЙСЯ РЕЖИМ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

§ 1. Частотные характеристики линейных систем

Частотные характеристики четырёхполюсника (рис. 1.1) представляются комплексным коэффициентом передачи $K(i\omega)$, который даёт отношение комплексных амплитуд напряжения выхода и входа, т. е.

$$K(i\omega) = \frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} = K_1(\omega) + iK_2(\omega). \quad (1.1)$$

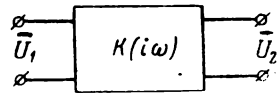


Рис. 1.1

Выражение, соответствующее модулю комплексного коэффициента передачи, представляет собой амплитудно-частотную (сокращённо: частотную) характеристику

$$K(\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \sqrt{K_1^2(\omega) + K_2^2(\omega)}, \quad (1.2)$$

а аргументу — фазо-частотную (сокращённо: фазовую) характеристику

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{K_2(\omega)}{K_1(\omega)}. \quad (1.3)$$

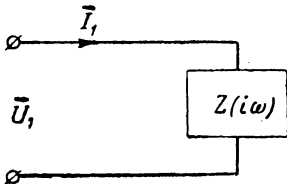


Рис. 1.2

Частотной характеристикой двухполюсника (рис. 1.2) является комплексное входное сопротивление $Z(i\omega)$ ²⁾, представляющее отношение комплексных амплитуд напряжения и тока на входе

$$Z(i\omega) = \frac{\bar{U}_1}{\bar{I}_1} = R(\omega) + iX(\omega). \quad (1.4)$$

¹⁾ По техническим причинам над обозначениями комплексных амплитуд ставятся чёрточки, а не точки.

²⁾ В качестве частотной характеристики двухполюсника может также приниматься комплексная входная проводимость $Y(i\omega)$ — величина, обратная входному сопротивлению.

Выражение, соответствующее модулю комплексного входного сопротивления, даёт отношение амплитуд напряжения и тока на входе

$$Z(\omega) = \frac{U_1}{I_1} = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)} \quad (1.5)$$

и называется частотной характеристикой двухполюсника, а выражение, соответствующее аргументу — сдвиг фаз между этими амплитудами, называется фазовой характеристикой двухполюсника

$$\varphi_{U_1 \rightarrow I_1}(\omega) = \frac{X(\omega)}{R(\omega)} \quad (1.6)$$

Амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики для подавляющего числа схем связаны между собой однозначной связью.

Нахождение частотных характеристик четырёхполюсников, схемы которых составлены из двух-трёх элементов, как правило, не встречает затруднений и производится достаточно быстро. Если же схемы составлены из большого числа элементов, для нахождения частотных характеристик целесообразно пользоваться методами общей теории четырёхполюсников (§ 6).

В настоящем параграфе рассматриваются задачи по нахождению частотных характеристик только простых цепей, задачи по нахождению частотных характеристик сложных систем рассматриваются в § 6.

В тех случаях, когда соотношение между амплитудами входа и выхода меняется в широких пределах целесообразно пользоваться логарифмическим масштабом; с этой целью вводятся логарифмические единицы измерения — непер и децибел, определяемые по ф-лам (1.7) и (1.8):

$$N = \ln \frac{U_1}{U_2} \text{ непер}, \quad (1.7)$$

$$D = 20 \lg \frac{U_1}{U_2} \text{ дб}. \quad (1.8)$$

Для перевода неперов в децибелы и обратно служат переводные формулы:

$$\left. \begin{aligned} 1 \text{ непер} &= 8,69 \text{ дб} \\ 1 \text{ дб} &= 0,115 \text{ непер} \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Если соотношения между амплитудами входа и выхода меняются в небольших пределах, обычно пользуются простыми числами и выражают эти изменения в процентах.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1.1*. Найти выражения частотной и фазовой характеристик цепи, изображенной на рис. 1.3. Полученные выражения представить в виде графиков.

1.2*. Задана схема рис. 1.3. Данные схемы $R = 10^3 \text{ ом}$, $C = 10^9 \text{ пф}$. Найти частоту f , при которой амплитуда напряжения на выходе будет составлять 0,8 амплитуды напряжения на входе, и определить сдвиг фаз между выходным и входным напряжениями на этой частоте.

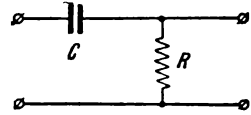


Рис. 1.3

1.3. Для схем рис. 1.4 (а, б и в) найти выражение частотных и фазовых характеристик, а затем построить соответствующие графики.

1.4*. Найти частотную и фазовую характеристики для схемы рис. 1.5, являющейся в определённых условиях (на высоких частотах) эквивалентной схемой лампового усилителя на сопротивлениях. Построить графики для случая $R_1 = R_2$.

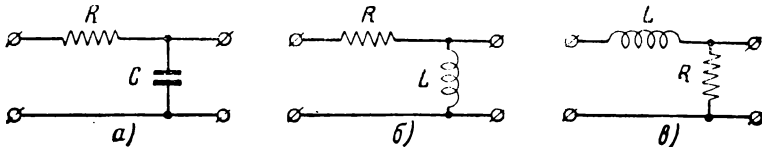


Рис. 1.4

1.5*. Найти частотную и фазовую характеристики для схемы рис. 1.6, являющейся эквивалентной схемой лампового усилителя на сопротивлениях для низких частот. Затем найти приближённые выражения при $R_i \gg R_a$ и $R_g \gg R_o$ (пентоды) и построить графики частотной и фазовой характеристик.

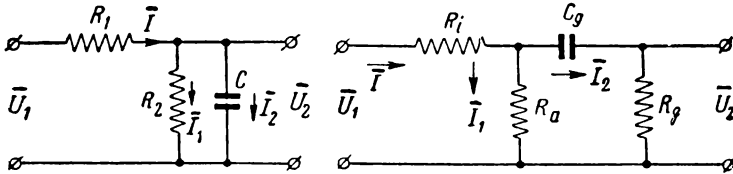


Рис. 1.5

Рис. 1.6

1.6*. Задана схема, изображённая на рис. 1.5. Частотная характеристика этой схемы, как было установлено в задаче 1.4, определяется выражением

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)^2 + (\omega CR_1)^2}}$$

Определить диапазон частот, в котором коэффициент передачи уменьшается не более чем на 20% от максимального значения.

1.7*. Задана схема, изображённая на рис. 1.6. Частотная характеристика этой схемы, как было установлено в задаче 1.5, определяется выражением

$$K(\omega) = \frac{\omega C_g R_g}{\sqrt{\left(1 + \frac{R_i}{R_a}\right)^2 + \left(1 + \frac{R_i}{R_a} + \frac{R_i}{R_g}\right)^2 \omega^2 C_g^2 R_g^2}}$$

Найти диапазон частот, в котором амплитуда напряжения на выходе будет составлять от 70 до 90% амплитуды напряжения на входе.

1.8. Найти выражения частотных и фазовых характеристик двухполюсников, изображённых на рис. 1.7. (а, б, в, г, д, е, ж).

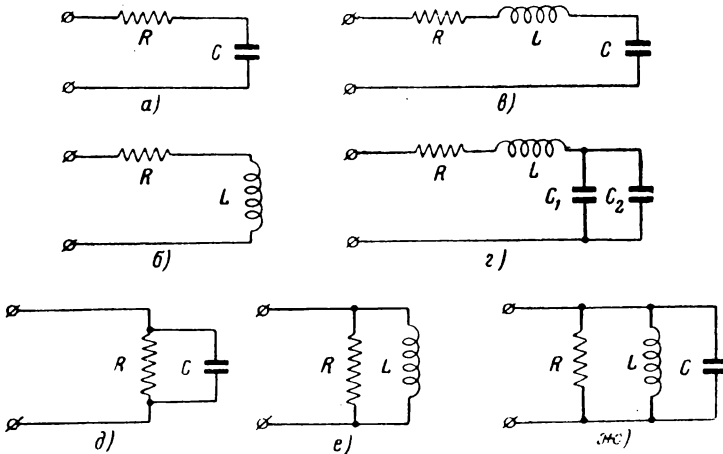


Рис. 1.7

1.9*. Задана схема, состоящая из ёмкости C и сопротивления R (рис. 1.3), причём $C = 100 \text{ нф}$, а $R = 10^3 \text{ ом}$. Найти, как изменится амплитуда напряжения на выходе при частоте $f = 0,6 \text{ МГц}$, если к сопротивлению схемы параллельно подключить ещё одно активное сопротивление, равное 400 ом .

1.10*. Найти величины отклонений фазовой характеристики от линейной для схемы рис. 1.3 (задача 1.1) в пределах изменения частоты от $\omega_1 = 0,8 \frac{1}{RC}$ до $\omega_2 = 1,2 \frac{1}{RC}$, если линейная характеристика получена разложением общего выражения в степенной ряд Тэйлора вокруг точки $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.

1.11. Найти фазовые характеристики (между $U_2 \rightarrow U_1$ и $U_1 \rightarrow I$) схемы простого колебательного контура без потерь (рис. 1.8). Найденные характеристики изобразить в виде графиков.

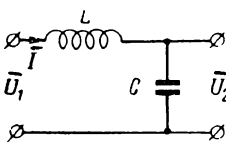


Рис. 1.8

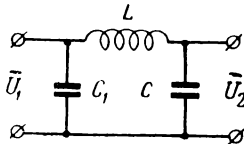


Рис. 1.9

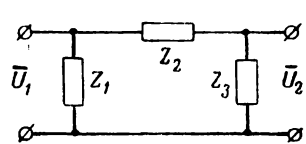


Рис. 1.10

1.12. Показать, что ёмкость C_1 в схеме рис. 1.9 не влияет на вид амплитудно-частотной характеристики по напряжению (т. е. $K(\omega) = \frac{U_2}{U_1}$).

1.13. Найти выражение комплексного коэффициента передачи для схемы рис. 1.10.

1.14. Составить таблицу отношений напряжений входа и выхода, выраженных в простых числах, неперах и децибелах. Взять следующие простые числа: 1, 10, 10^2 , 10^3 , 10^4 , 10^5 , 10^6 , 10^{-1} , 10^{-2} , 10^{-3} .

1.15*. Найти, какому соотношению амплитуд соответствует изменение (увеличение и уменьшение) в 1 неп.

1.16. Найти, какому соотношению амплитуд соответствует изменение (увеличение и уменьшение) в 1 дб.

1.17. На частоте f_1 напряжение больше напряжения на частоте f_2 на 70%. Выразить это соотношение в неперах и децибелах.

1.18. Напряжение на частоте f_1 превышает напряжение на частоте f_2 на 0,1 неп. Выразить это превышение в процентах.

§ 2. Последовательный колебательный контур

Схема, изображённая на рис. 2.1, представляет собой последовательное соединение элементов L , C и R с генератором и сокращённо называется последовательным колебательным контуром.

Входное сопротивление последовательного контура равно

$$\left. \begin{aligned} Z(i\omega) &= R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = R + iX = R((1 + i\xi)) \\ Z(\omega) &= R \sqrt{1 + \xi^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

где

$$\xi = \frac{X}{R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (2.2)$$

В области высоких частот при небольших расстройках справедливо приближённое равенство:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} \approx 2(\omega - \omega_0)L = 2\Delta\omega L, \quad (2.3)$$

в котором резонансная частота ω_0 равна

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (2.4)$$

Относительная ошибка δ , совершаемая при пользовании приближённым равенством (2.3), тем меньше, чем выше частота, и может быть рассчитана по формуле

$$\delta = - \frac{\Delta\omega}{2\omega_0} \quad (2.5)$$

Пользование приближённым равенством (2.3) существенно упрощает формулы и расчёты и на высоких частотах не приво-

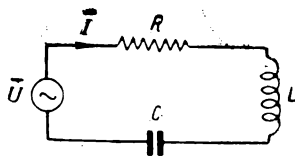


Рис. 2.1

дит к заметным ошибкам. При работе на не очень высоких частотах следует выполнять проверку по ф-ле (2.5).

Выражение для тока в контуре

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}}{Z(i\omega)} = \frac{\bar{U}}{R(1+i\xi)}. \quad (2.6)$$

При резонансе $\xi = 0$

$$I_0 = \frac{U}{R}. \quad (2.7)$$

Отношение модуля тока при любой частоте к току при резонансной частоте называют уравнением резонансной кривой по току

$$y_I = \frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}. \quad (2.8)$$

Из выражения (2.2) с учётом приближённого равенства (2.3) следует, что

$$\xi = \frac{2\lambda\omega L}{R} = \frac{\Delta\omega}{\frac{R}{2L}} = \frac{\Delta\omega}{\alpha}. \quad (2.9)$$

Уравнение резонансной кривой при замене ξ переписывается в виде

$$y_I = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta\omega}{\alpha}\right)^2}}. \quad (2.10)$$

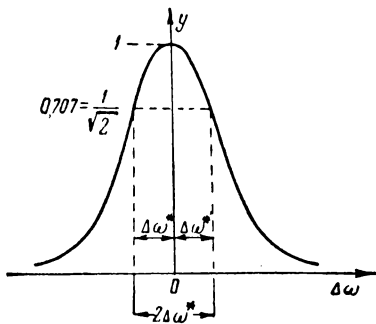


Рис. 2.2

Полоса частот, пропускаемая контуром, условно определяется по высоте $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (рис. 2.2); из ф-лы (2.10) следует, что половина полосы пропускания равна α

$$\Delta\omega^* = \pm \alpha. \quad (2.11)$$

Выражение (2.9) для ξ можно переписать в виде

$$\xi = \frac{\Delta\omega}{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{|\Delta\omega^*|} = \frac{\Delta f}{|\Delta f^*|}. \quad (2.12)$$

Величину ξ называют обобщённой расстройкой, так как она даёт отношение абсолютной расстройки $\Delta\omega$ к половине полосы пропускания $\Delta\omega^*$.

Комплексный коэффициент передачи для схемы рис. 2.3 определяется выражением

$$K(i\omega) = \frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} = -i \frac{\omega_0}{\omega} \cdot \frac{Q}{1+i\xi} \approx -i \frac{Q}{1+i\xi}, \quad (2.13)$$

где Q — добротность контура, равная

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} = \frac{\rho}{R} = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega^*}. \quad (2.14)$$

Коэффициент передачи (амплитудно-частотная характеристика) в соответствии с (2.13) имеет вид

$$K(\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{Q}{\sqrt{1 + \xi^2}}. \quad (2.15)$$

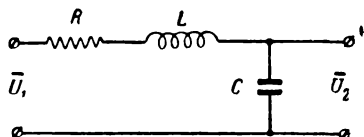


Рис. 2.3

При резонансе $K(\omega_0) = Q$. Составляя отношение $K(\omega)$ к $K(\omega_0)$, получаем уравнение резонансной кривой по напряжению

$$v_U = \frac{K(\omega)}{K(\omega_0)} = \frac{U_2}{U_{20}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \quad (2.16)$$

которое при использовании приближённого равенства (2.3) не отличается от уравнения резонансной кривой по току.

Фазовые характеристики легко определяются из (2.6) и (2.13):

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\omega) = \arctg \xi \\ \varphi(\omega) = \arctg \frac{1}{\xi} \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Уравнение резонансной кривой по ёмкости имеет вид

$$v_C = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\Delta C}{C_0}\right)^2}}, \quad (2.18)$$

где $\Delta C = C - C_0$, а C_0 — значение ёмкости, соответствующее резонансу.

Полагая $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, можно получить формулу для определения добротности

$$Q = \frac{C}{\Delta C^*}, \quad (2.19)$$

где $\Delta C^* = C_1 - C_0$, а C_1 — значение ёмкости, соответствующее $y = 0,707$.

Расчёт контура обычно сводится к определению его параметров L , C и R по заданной резонансной частоте

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (2.20)$$

и полосе пропускания $2\Delta f^*$

$$2\Delta f^* = \frac{2\Delta\omega^*}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \frac{R}{2L}. \quad (2.21)$$

Двух равенств (2.20) и (2.21) для определения трёх параметров недостаточно, и поэтому одним из параметров приходится задаваться.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

2.1*. К колебательному контуру последовательно включён генератор синусоидальной эдс, развивающий амплитуду $U_1 = 1$ в. Контур настроен на частоту $f_0 = 3$ Мгц; ёмкость контура $C = 60$ пф, а сопротивление $R = 20$ ом. Определить следующие данные при расстройке $\Delta f = 6$ кгц:

1. Амплитуду тока в контуре.
2. Величину реактивного сопротивления.
3. Амплитуду выходного напряжения (на конденсаторе).
4. Фазовые углы: $\varphi_{U_2 - U_1}$, $\varphi_{U_1 - I}$.
5. Относительную ошибку, совершаемую при пользовании приближёнными формулами.

2.2. Рассчитать по данным, приведённым в таблице для частоты f (или длины волны λ , расстройки Δf), следующие величины:

1. Амплитуду тока в контуре.
2. Величину реактивного сопротивления.
3. Амплитуду напряжения на конденсаторе.
4. Фазовые углы: $\varphi_{U_2 - U_1}$, $\varphi_{U_1 - I}$.
5. Относительную ошибку δ , совершаемую при пользовании приближёнными формулами.

№ пп.	$U_1, \text{ в}$	Резонансная частота или длина волны		Рабочая частота или длина волны, или расстройка			Параметры контура			
		f_0 Мгц	λ_0 м	$\lambda, \text{ м}$	f Мгц	Δf Мгц	L мкгн	C пф	R ом	Q
1	1,0	—	300	—	—	+2	—	160	20	—
2	2,0	3,2	—	—	—	+3	100	—	—	80
3	0,6	—	600	—	—	-8	—	300	16	—
4	0,2	12	—	—	12,03	—	—	80	—	70
5	0,1	—	1200	—	—	+4	—	600	—	40

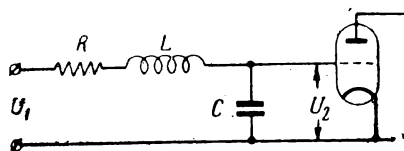


Рис. 2.4

2.3*. В настроенный на частоту f_0 контур, включённый ёмкостью на сетку лампы (рис. 2.4), вводится напряжение, имеющее амплитуду U_1 . Найти, при каких частотах внешнего напряжения f напряжение на сетке лампы U_2 будет больше напряжения U_1 в n раз.

Сопrotивление контура равно R , ёмкость равна C и индуктивность — L .
Данные:

№ пп.	m	L , мкгн	C , пф	R , ом	f_0 , Мгц	λ_0 , м
1	20	—	200	16	—	400
2	30	—	60	10	—	100
3	16	200	—	18	0,6	—
4	28	—	30	12	—	60
5	36	—	40	16	—	80

2.4*. Найти, при каком соотношении сопротивления контура R и внутреннего сопротивления R_i генератора в контуре выделяется максимальная мощность при резонансе.

2.5*. Найти отношение магнитной энергии колебательного контура при резонансе к энергии потерь за один период. Убедиться далее в том, что это отношение равно отношению электрической энергии к энергии потерь за один период.

2.6. Рассчитать индуктивность контура, настроенного на частоту 8,2 Мгц, если известно, что ёмкость контура составляет 40 пф. Контур включён так, как показано на схеме рис. 2.5, причём ёмкость $C_{gf} = 12$ пф.

2.7. Найти добротность контура Q по следующим измерениям:

$$\begin{aligned} f_0 &= 475 \text{ кгц}, \\ f_1 &= 478 \text{ кгц}. \end{aligned}$$

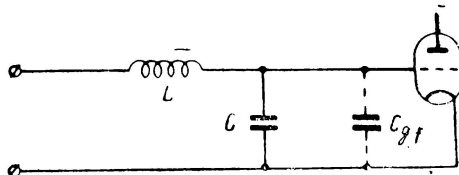


Рис. 2.5

Здесь f_1 — значение частоты, соответствующей границе полосы пропускания.

2.8*. По данным предыдущей задачи найти максимальное и минимальное значение ёмкости конденсатора, обеспечивающего настройку в диапазоне частот от 472 до 478 кгц, если известно, что средняя ёмкость (при резонансе) C_0 равна 300 пф.

2.9. Рассчитать два параметра последовательного колебательного контура по заданной резонансной частоте f_0 , полосе пропускания $2\Delta f^*$ (или добротности контура Q) и третьему известному параметру.

№ пп.	f_0 , Мгц	$2\Delta f^*$, кгц	Q	Третий параметр
1	0,38	—	40	$C = 395$ пф
2	0,8	9	—	$R = 12$ ом
3	1,6	20	—	$R = 40$ ом
4	4,0	—	60	$L = 42$ мкгн
5	12	8	—	$C = 12,5$ пф

2.10*. При некоторой частоте f в последовательном контуре $X_C = 220 \text{ ом}$, а $X_L = 178 \text{ ом}$. Определить добротность контура, если известно, что $R = 4 \text{ ом}$.

2.11*. Входной контур приёмника должен настраиваться в диапазоне от $f_{\text{мин}}$ до $f_{\text{макс}}$. Найти пределы изменения ёмкости переменного конденсатора, который обеспечивает настройку в указанном диапазоне при неизменной индуктивности L .

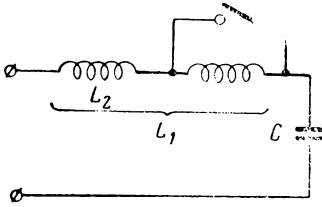


Рис. 2.6

2.12*. По данным предыдущей задачи рассчитать секции катушки индуктивности контура L с тем, чтобы конденсатор переменной ёмкости $50 \div 500 \text{ пф}$ перекрывал диапазон частот от 100 до 800 кГц (рис. 2.6).

2.13. Контур с постоянной индуктивностью и постоянной основной ёмкостью должен настраиваться на заданную частоту f_0 (длину волны λ_0) при помощи подстроечного переменного конденсатора C_x , который может включаться последовательно или парал-

лельно с основным конденсатором C . По следующим данным вычислить значения C_x и указать способ включения конденсатора C_x .

№ пп.	L , мкГн	C , пф	f_0 , кГц	λ_0 , м
1	200	700	—	1000
2	500	420	—	500
3	100	1000	—	800
4	10	160	—	60
5	120	340	800	—

2.14*. Найти частоту f , при которой реактивное сопротивление контура имеет индуктивный характер и численно равно 30 ом . Параметры контура: $L = 100 \text{ мкГн}$, $C = 100 \text{ пф}$.

2.15*. Найти выражение коэффициента передачи для контура, изображённого на рис. 2.7. Искомое выражение должно быть точным, т. е. при выводе не следует пользоваться приближённым равенством (2.3).

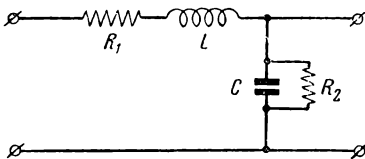


Рис. 2.7

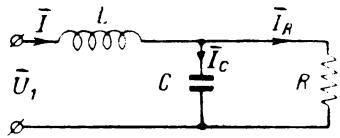


Рис. 2.8

2.16*. Вывести формулу для расчёта резонансной частоты и коэффициента передачи на резонансной частоте последовательного контура, конденсатор которого имеет сопротивление утечки R_2 (рис. 2.7).

2.17*. Дан обычный последовательный колебательный контур (рис. 2.3), имеющий активное сопротивление $R_1 = 10 \text{ ом}$. Вольтметром с бесконечно большим входным сопротивлением измерили добротность контура Q , которая оказалась равной 100, т. е. $\frac{U_2}{U_1} = 100$ на резонансной частоте. Затем были произве-

дены эти же измерения вольтметром, внутреннее сопротивление которого $R_2 = 100\ 000\ \text{ом}$.

Рассчитать амплитуду напряжения на конденсаторе в последнем случае, если на вход контура подается напряжение с амплитудой, равной $1\ \text{в}$.

2.18*. На последовательный колебательный контур воздействуют синусоидальные напряжения с частотами $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots, n\omega_0$, но с одинаковыми амплитудами.

Найти соотношение между токами, вызванными этими напряжениями.

2.19. Найти величину абсолютной расстройки Δf , при которой ток в контуре уменьшится до 0,5 значения тока при резонансе. Данные контура: $Q=125$, $f_0 = 10^6\ \text{гц}$. Расчёт провести по приближённой формуле с обобщённой расстройкой ξ и затем вычислить величину относительной ошибки. Найти также угол сдвига фаз между напряжением и током при вычисленной расстройке.

2.20*. В схеме рис. 2.8 напряжение U_1 стабилизировано; сопротивление R является переменным.

Подобрать индуктивность L и ёмкость C так, чтобы ток I_R оставался постоянным по амплитуде, несмотря на изменение сопротивления R .

§ 3. Параллельный колебательный контур

Схема, изображённая на рис. 3.1, является основной, т. е. наиболее распространённой схемой параллельного соединения элементов колебательного контура с генератором, питающим контур. Такая схема обычно называется простой схемой параллельного контура.

Входное сопротивление простого параллельного контура определяется выражением¹⁾

$$Z(i\omega) = \frac{R_\alpha}{1 + i\xi}, \quad (3.1)$$

где R_α — представляет собой сопротивление контура при параллельном резонансе, т. е. при

$$\xi = 0 \text{ и } \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Величина R_α вычисляется по формуле

$$R_\alpha = \frac{L}{RC} = \frac{\left(\sqrt{\frac{L}{C}}\right)^2}{R} = \frac{\rho^2}{R} = Q^2 R. \quad (3.2)$$

Активная составляющая полного сопротивления параллельного контура зависит от частоты и равна

$$R_\Omega = \frac{R_\alpha}{1 + \xi^2}. \quad (3.3)$$

¹⁾ Все формулы, содержащие приближённое равенство $X \approx 2\Delta\omega L$, являются приближёнными; относительная ошибка в этих формулах имеет порядок относительной расстройки:

$$|\delta| = \frac{\Delta\omega}{2\omega_0} \text{ (см. § 2).}$$

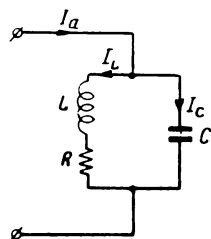


Рис. 3.1

Реактивная составляющая X_3 определяется выражением

$$X_3 = -\frac{R_\alpha}{1 + \xi^2} \xi = -R_3 \xi. \quad (3.4)$$

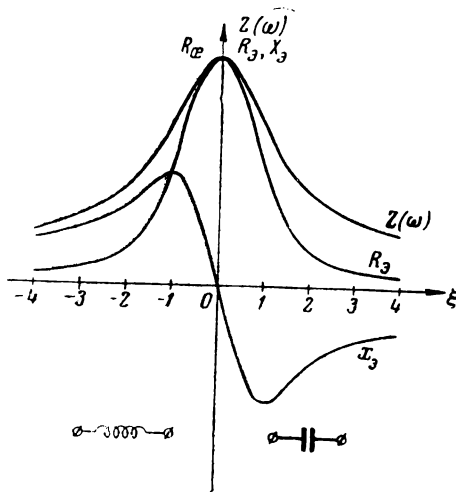


Рис. 3.2

Модуль полного сопротивления равен

$$Z(\omega) = \frac{R_\alpha}{\sqrt{1 + \xi^2}}. \quad (3.5)$$

Кривые R_3 , X_3 и $Z(\omega)$, построенные по ф-лам (3.3), (3.4) и (3.5), изображены на рис. 3.2.

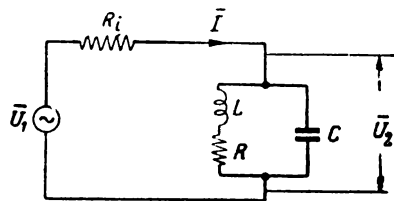


Рис. 3.3

Для выяснения резонансных свойств параллельного контура необходимо учитывать внутреннее сопротивление генератора R_i и рассматривать схему, соответствующую рис. 3.3.

Уравнение резонансной кривой по току для этой схемы определяется выражением

$$y_1 = \frac{I}{I_0} = \frac{(1 + \beta)(1 + i\xi)}{1 + \beta + i\xi}$$

или по модулю

$$y_1 = (1 + \beta) \frac{\sqrt{1 + \xi^2}}{\sqrt{(1 + \beta)^2 + \xi^2}}. \quad (3.6)$$

В этом выражении, как и ниже, коэффициент β определяется формулой

$$\beta = \frac{R_\alpha}{R_i}. \quad (3.7)$$

Если внутреннее сопротивление генератора велико, т. е. $R_i \gg R_\alpha$ (это условие соответствует применению пентодов), а $\beta \ll 1$, уравнение резонансной кривой вырождается в уравнение прямой

$$y_1 \approx 1.$$

Если же внутреннее сопротивление генератора очень мало, т. е. $R_i \ll R_\alpha$ (это условие соответствует применению триодов и очень хороших контуров), а $\beta \gg 1$, то при небольших расстройках ξ уравнение резонансной кривой принимает вид

$$y_i \approx \sqrt{1 + \xi^2}.$$

Резонансные кривые по току для различных β изображены на рис. 3.4а.

Уравнение резонансной кривой по напряжению соответствует выражению

$$y_U = \frac{U_2}{U_{20}} = \frac{1 + \beta}{\sqrt{(1 + \beta)^2 + \xi^2}}. \quad (3.8)$$

Если $\beta \ll 1$ (пентоды), резонансная кривая параллельного контура по напряжению совпадает с резонансной кривой последовательного контура

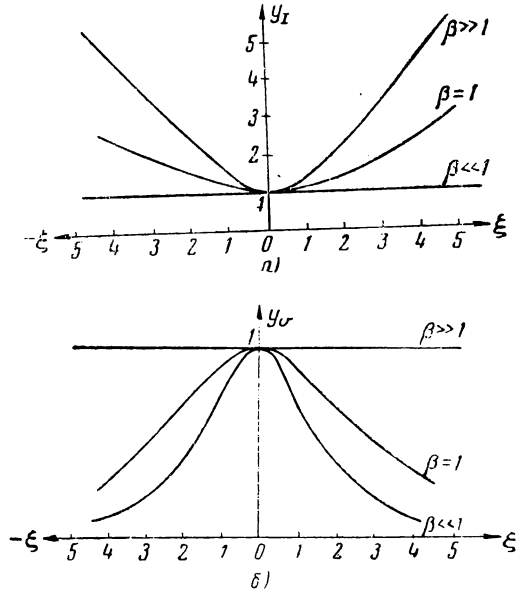


Рис. 3.4

$$y_U = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}};$$

если же $\beta \gg 1$, резонансная кривая стремится к прямой $y = 1$ (рис. 3.4б).

Полоса пропускания найдётся из выражения (3.8) при $y = 0,707$. Решая уравнение (3.8) относительно $\xi = \xi^*$ и далее относительно $\Delta\omega^*$, получаем

$$\Delta\omega^* = \pm \omega (1 + \beta). \quad (3.9)$$

Таким образом, полоса пропускания параллельного контура всегда шире в $(1 + \beta)$ раз полосы пропускания последовательного контура.

Соотношения между токами в неразветвлённой и разветвлённой цепях (рис. 3.1) при резонансной частоте определяются выражениями

$$\frac{I_c}{I_a} \approx \frac{I_r}{I_a} \approx Q. \quad (3.10)$$

Мощность, выделяемая в параллельном контуре при резонансе, равна

$$P = \frac{I_a^2}{2} R_{\alpha} = \frac{I_L^2}{2} R. \quad (3.11)$$

Условие, при котором в контуре выделяется максимальная мощность, записывается в виде

$$R_{\alpha} = R_i \quad (3.12)$$

или

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{RR_i}. \quad (3.13)$$

Параллельными контурами, собранными по сложной схеме, называются контуры, содержащие одноимённые реактивности в обеих ветвях. На рис. 3.5 дана схема, к которой может быть приведена любая схема параллельного контура.

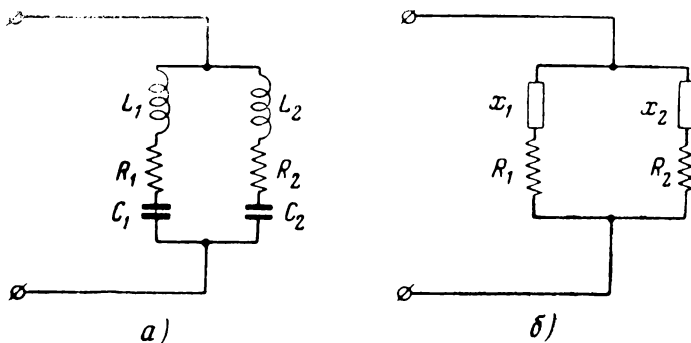


Рис. 3.5

Резонансные частоты находятся из условия равенства нулю реактивной составляющей входного сопротивления. В случае общей схемы, изображённой на рис. 3.5, для определения резонансной частоты получаем уравнение

$$X_1(R_2^2 + X_2^2) + X_2(R_1^2 + X_1^2) = 0. \quad (3.14)$$

Если, как обычно и бывает на высоких частотах, $R_1 \ll X_1$ и $R_2 \ll X_2$, уравнение для определения резонансной частоты существенно упрощается и принимает вид

$$X_1 X_2 (X_1 + X_2) = 0. \quad (3.15)$$

Любой из этих трёх сомножителей в общем случае может быть равен нулю:

$X_1 = 0$ — последовательный резонанс в первом плече,

$X_2 = 0$ — последовательный резонанс во втором плече,

$X_1 + X_2 = 0$ — параллельный резонанс.

Последняя формула

$$X_1 + X_2 = 0 \quad (3.16)$$

является расчётной для определения частоты параллельного резонанса. При этой частоте сопротивление сложного параллельного контура при резонансе будет определяться выражением

$$Z_{\alpha} = R_{\alpha} = \frac{-X_1 X_2}{R_1 + R_2} = \frac{X_1^2}{R_1 + R_2} = \frac{X_2^2}{R_1 + R_2} \quad (3.17)$$

То обстоятельство, что резонансная частота определяется суммой реактивностей обоих плеч, а эквивалентное сопротивление при резонансе — реактивным сопротивлением каждого из плеч в отдельности, даёт возможность регулировать Z_{α} при неизменной резонансной частоте.

С этой целью применяется, например, схема, показанная на рис. 3.6.

Резонансная частота для такой схемы определяется формулой

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2)C}} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C}}, \quad (3.18)$$

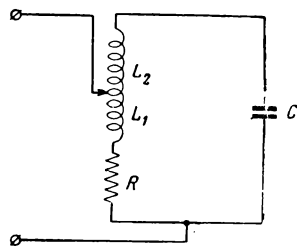


Рис. 3.6

а эквивалентное сопротивление при резонансе

$$R_{\alpha} = \frac{X_1^2}{R} \approx \frac{\omega_0^2 L_1^2}{R} = \left(\frac{L_1}{L_0}\right)^2 \frac{\omega_0^2 L_0^2}{R} = p^2 \frac{\omega_0^2 L_0^2}{R} \quad (3.19)$$

При расчёте параллельного колебательного контура обычно являются заданными резонансная частота ω_0 и внутреннее сопротивление лампы R_1 .

Используя соотношения (3.13) и (3.16), получаем уравнения для определения двух из трёх (L , C , R) параметров. Для определения третьего параметра приходится привлекать дополнительные условия.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

3.1*. Рассчитать эквивалентное сопротивление при резонансе простого параллельного контура со следующими параметрами:

$$L = 100 \text{ мкГн}, C = 100 \text{ нФ}, R = 10 \text{ ом}.$$

3.2. Рассчитать по приведённым данным сопротивление параллельного контура при резонансе:

№ пп.	L мкГн	C пф	R ом	f_0 МГц	λ_0 м	Q
1	140	80	15	—	—	—
2	—	120	—	—	200	40
3	—	150	20	1	—	—
4	180	100	—	—	—	30
5	—	300	16	—	600	—

3.3. Для ослабления помех от мешающих станций применяют фильтр, который принято называть „фильтр-пробка“ (рис. 3.7а). Наряду с этим для той же цели применяют „фильтр-цепочку“ (рис. 3.7б).

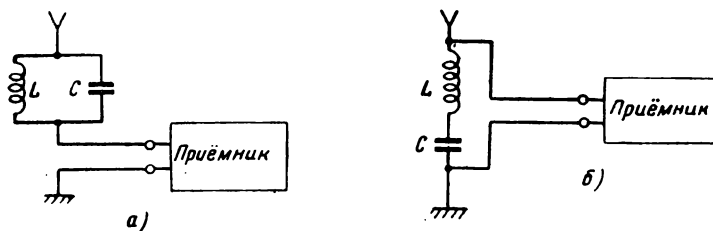


Рис. 3.7

Рассчитать, во сколько раз сопротивление „фильтра-пробки“, настроенного на частоту мешающей станции, больше сопротивления „фильтра-цепочки“, настроенного на ту же частоту, если $L = 640$ мкГн, $C = 400$ пф и $R = 20$ ом.

3.4*. Найти значения активной составляющей, реактивной составляющей и полного сопротивления простого параллельного контура, питаемого генератором с частотой $f = 935$ кГц.

Параметры контура: $L = 240$ мкГн, $C = 120$ пф, $R = 20$ ом.

3.5. Рассчитать активную и реактивную составляющие, а также полное сопротивление простого параллельного контура по следующим данным:

№ пп.	L мкГн	C пф	R ом	f МГц	λ м	Δf кГц	Q	f_0 МГц	λ_0 м
1	600	200	20	—	—	5	—	—	—
2	—	400	—	—	704	—	30	—	700
3	280	—	—	0,964	—	—	60	0,96	—
4	—	1000	30	—	1620	—	—	—	1600
5	—	200	—	—	—	6	40	—	400

3.6*. Задана схема простого параллельного контура, причём известно, что $\beta = \frac{R_{\alpha}}{R_i} = 0,2$.

Для настройки контура в резонанс можно использовать либо амперметр, либо вольтметр. Решить, каким прибором целесообразнее воспользоваться при данных условиях, и определить границы шкалы этого прибора, если известно, что $I_a = 10$ ма, а $R_{\alpha} = 20 \cdot 10^3$ ом.

3.7*. В схеме простого параллельного контура $R_i = 10\,000\ \text{ом}$ и $R_{\alpha} = 50\,000\ \text{ом}$.

Для настройки контура в резонанс можно использовать либо амперметр, либо вольтметр. Решить, каким прибором целесообразнее воспользоваться при данных условиях, и определить границы шкалы прибора, если известно, что напряжение генератора $U = 200\ \text{в}$, и настройку необходимо вести в пределах полосы пропускания. Добротность контура $Q = 50$.

3.8. Рассчитать по нижеприводимым данным параметры параллельного контура по простой схеме. Расчёт вести, исходя из условия (3.13), т. е. равенства резонансного сопротивления контура внутреннему сопротивлению генератора.

№ пп.	1	2	3	4	5
R_i ком	20	100	180	400	600
f_0 кГц	280	640	240	1200	3400
C пф	—	240	625	125	—
L мкГн	806	—	—	—	80

3.9. По нижеприведённым данным рассчитать ёмкость и индуктивность колебательного контура, собранного по простой схеме. Данные для расчёта: $f_0 = 900\ \text{м}$, $R = 10\ \text{ом}$, $R_{\alpha} = 9 \cdot 10^3\ \text{ом}$.

3.10*. Найти мощность, выделяемую в простом параллельном контуре, если известно, что его сопротивление при резонансе $R_{\alpha} = 40\,000\ \text{ом}$, а амплитуда тока в контуре равна $0,6\ \text{а}$. Добротность контура $Q = 30$.

3.11. Найти мощность, выделяемую в параллельном контуре, при резонансе по следующим данным:

№ вп.	L мкГн	C пф	R ом	Q	f_0 МГц	λ_0 м	I_k а	I_a мА	U в	R_i ком
1	—	300	10	—	—	600	—	—	200	80
2	300	200	—	40	—	—	0,4	—	—	—
3	—	60	15	—	3	—	—	—	160	R_{α}
4	800	400	—	30	—	—	—	20	—	—
5	100	60	—	50	—	—	—	15	—	—

Здесь I_k , I_a , U — амплитудные значения.

3.12. К параллельному колебательному контуру, собранному по простой схеме, подводится напряжение с резонансной частотой $f_0 = 0,5\ \text{МГц}$ и амплитудой $U = 3\ \text{кв}$. Ток в контуре (эффективное значение) равен $5\ \text{а}$, мощность, расходуемая в контуре, составляет $500\ \text{вт}$. По этим данным определить параметры контура L и C .

3.13. К простому параллельному контуру, включённому по схеме рис. 3.3, подведено напряжение с резонансной частотой $300\ \text{кГц}$ и амплитудой $5500\ \text{в}$. Данные схемы следующие: $R = 20\ \text{ом}$, $C = 900\ \text{пф}$, $R_i = 10^4\ \text{ом}$. Рассчитать индуктивность контура L , добротность Q , напряжение на контуре U_k и мощность в контуре P_k .

3.14*. Найти точное выражение для резонансной частоты простого параллельного контура.

3.15*. Найти точное выражение для резонансной частоты параллельного контура, изображённого на рис. 3.8.

3.16. Найти выражения для частоты параллельного резонанса и резонансного сопротивления параллельного контура, схема которого изображена на рис. 3.9, при условии, что

$$R \ll \omega L_1.$$

3.17*. Найти выражение для резонансной частоты и сопротивления при резонансе параллельного контура, изображённого на рис. 3.10, считая, что $R_1 \ll \omega L$, а $R_2 \gg R_1$.

3.18*. Рассчитать, чему равно эквивалентное резонансное сопротивление параллельного контура (рис. 3.10), если известно, что $L = 9 \text{ мкГн}$, $R_1 = 3 \text{ Ом}$, $C = 100 \text{ пф}$ и $R_2 = 30 \text{ ком}$.

3.19*. Контур, изображённый на схеме рис. 3.10, должен быть подключён к генератору с внутренним сопротивлением R_i .

Индуктивность L и ёмкость C , равно как и сопротивление катушки L (R_1) изменять нельзя; необходимо так рассчитать дополнительное сопротивление R_2 , чтобы $R_{\text{эк}} = R_i$.

3.20. Чему должно быть равно сопротивление R_0 , включённое последовательно с сопротивлением R_1 (рис. 3.11), если известно, что включение R_0 изменяет резонансное сопротивление $R_{\text{эк}}$ так же, как шунтирование контура сопротивлением R_2 .

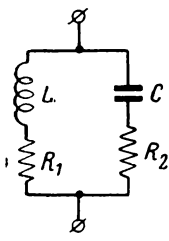


Рис. 3.8

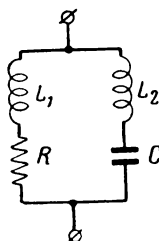


Рис. 3.9

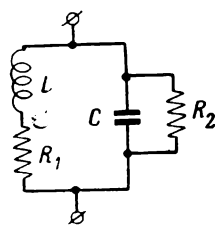


Рис. 3.10

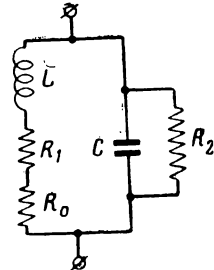


Рис. 3.11

3.21. Эквивалентная схема кварцевого резонатора может быть представлена схемой параллельного контура рис. 3.12. Найти частоту параллельного резонанса такого контура, считая, что $R \ll \omega L$.

3.22*. Показать при помощи предельного перехода, в какие кривые выродятся кривые активной и реактивной составляющих входного сопротивления простого параллельного контура без потерь (т. е. при $R \rightarrow 0$).

3.23*. Заменить схему простого параллельного контура на резонансной частоте эквивалентной схемой, представляющей собой параллельное соединение контура без потерь с активным сопротивлением R' , и рассчитать это сопротивление (рис. 3.13).

3.24*. Выяснить, во сколько раз сопротивление простого параллельного контура на частоте $n\omega_0$ (n — номер гармоники, любое число натурального ряда) меньше сопротивления на частоте ω_0 .

3.25*. Определить сопротивление простого параллельного контура при резонансной частоте и при частоте, соответствующей второй гармонике. Данные контура: $L = 250 \text{ мкГн}$, $C = 1000 \text{ пф}$, $R = 5 \text{ Ом}$.

3.26*. Дан контур, схема которого изображена на рис. 3.6.

Составить формулу, по которой можно было бы рассчитать, как нужно распределить индуктивности L_1 и L_2 с тем, чтобы получить заданное резонансное сопротивление R_α .

3.27*. Колебательный контур, собранный по схеме рис. 3.6, имеет $L_0 = 150 \text{ мкГн}$, $C = 600 \text{ пф}$ и $R = 10 \text{ ом}$. Определить, как следует распределить индуктивность контура между его ветвями, чтобы его резонансное сопротивление было равно 10 ком .

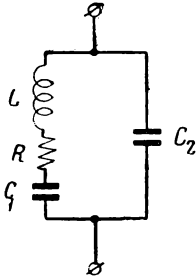


Рис. 3.12

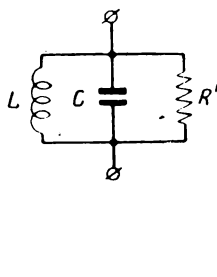


Рис. 3.13

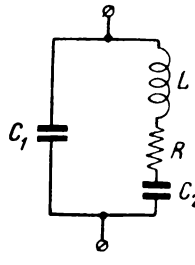


Рис. 3.14

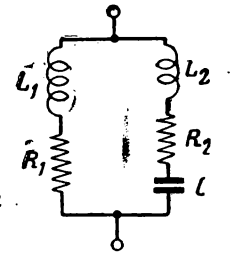


Рис. 3.15

3.28*. Дан колебательный контур, изображённый на рис. 3.14. Найти частоту параллельного резонанса этого контура и его сопротивление на резонансной частоте.

3.29*. Найти значения ёмкостей C_1 и C_2 контура рис. 3.14, если известно, что $R_\alpha = 10^4 \text{ ком}$, $L = 150 \text{ мкГн}$, $C_0 = 500 \text{ пф}$ и $R = 10 \text{ ом}$. Здесь

$$C_0 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

3.30*. Контур, изображённый на рис. 3.15, на практике используют для подавления второй гармоники. Достигается это настройкой всего контура в резонанс с частотой ω_0 , равной

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2)C}} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C}},$$

а правой ветви контура — в резонанс с частотой $2\omega_0$, т. е.

$$2\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C}}.$$

Тогда для напряжения частоты ω_0 контур будет представлять большое сопротивление, определяемое ф-лой (3.19),

$$R_\alpha = p^2 \frac{\omega_0^2 L_0^2}{R},$$

а для колебаний частоты $2\omega_0$ правая ветвь контура будет представлять очень малое сопротивление R_2 , и падение напряжения с частотой $2\omega_0$ будет очень малым.

Составить формулы, позволяющие рассчитать параметры контура по задаваемой частоте ω_0 и резонансному сопротивлению R_α , имея в виду, что правая ветвь должна быть настроена в резонанс по отношению ко второй гармонике. Сопротивление контура $R = R_1 + R_2$ считаем известным.

3.31*. Контур, рис. 3.15, настроенный на основную длину волны $\lambda_0 = 500 \text{ м}$ ($\omega_0 = 3,77 \cdot 10^6 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$) должен иметь эквивалентное сопротивление $R_\alpha = 10\,000 \text{ ом}$; активное сопротивление контура $R = 5 \text{ ом}$. Найти все па-

параметры контура при условии, что контур предназначен для подавления второй гармоники.

3.32*. Контур, изображённый на рис. 3.14, используют для подавления колебаний, имеющих частоту в два раза меньше основной частоты.

Достигается это настройкой всего контура в резонанс с частотой ω_0 , равной (задача 3.28

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_0}},$$

а правой ветви контура — в резонанс с частотой $\frac{1}{2} \omega_0$, т. е.

$$\frac{1}{2} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_2}}.$$

Тогда для напряжения частоты ω_0 контур будет представлять большое сопротивление, определяемое формулой (задача 3.28)

$$R_{\alpha} = \frac{1}{\omega_0^2 C_1^2 R} = \left(\frac{C_0}{C_1}\right)^2 \frac{L}{C_0 R} = p^2 \frac{L}{C_0 R},$$

а для колебаний частоты $\frac{1}{2} \omega_0$ правая ветвь будет представлять очень малое сопротивление R .

Составить формулы, позволяющие рассчитать параметры контура по заданной частоте ω_0 , активному сопротивлению R и резонансному сопротивлению R_{α} .

3.33*. Контур, изображённый на рис. 3.14, при настройке на частоту $\omega_0 = \pi \cdot 10^7 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$ ($\lambda_0 = 60 \text{ м}$) имеет сопротивление $R_{\alpha} = 10 \text{ кОм}$. Активное сопротивление контура $R = 10 \text{ Ом}$. Определить остальные параметры контура, имея в виду, что напряжение „половинной“ частоты должно быть подавлено.

§ 4. Связанные контуры

Общие замечания

По схемным признакам связанные контуры можно классифицировать на контуры с внутренней и внешней связью (рис. 4.1 а и б).

Схему с внешней связью можно привести к схеме с внутренней связью при помощи формул перехода от треугольника к звезде (рис. 4.2 а и б):

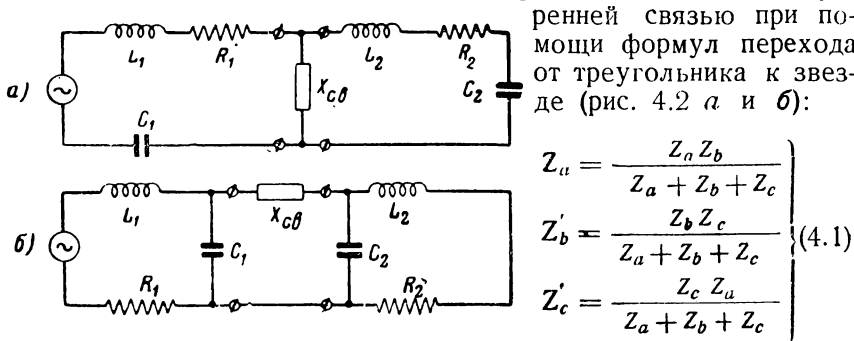


Рис. 4.1

По виду связи различают схемы с индуктивной трансформаторной связью, индуктивной автотрансформаторной связью, ёмкостной связью, активной связью и комбинированной связью (рис. 4.3 а, б, в, г и д).

Сопротивления связи для этих схем определяются выражениями:

а) индуктивная трансформаторная связь

$$Z_{св} = R_{св} + iX_{св} \approx i\omega M; \quad (4.2)$$

б) индуктивная автотрансформаторная связь

$$Z_{св} = R_{св} + iX_{св} \approx i\omega L_{св}; \quad (4.3)$$

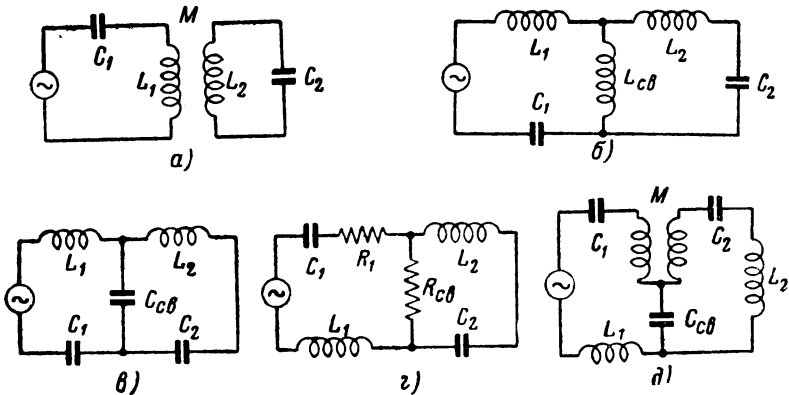


Рис. 4.3

в) ёмкостная связь

$$Z_{св} = -i \frac{1}{\omega C_{св}}; \quad (4.4)$$

г) активная связь

$$Z'_{св} = R_{св}; \quad (4.5)$$

д) комбинированная связь

$$Z_{св} \approx i \left(\omega M - \frac{1}{\omega C_{св}} \right). \quad (4.6)$$

Связанные системы могут содержать два, три и более контуров. Каждый из контуров, входящих в связанную систему,

может быть как колебательным, так и неколебательным (апериодическим).

Для обобщённой схемы, состоящей из двух связанных контуров (рис. 4.4), легко составить общие уравнения:

$$\begin{aligned}\bar{U}_1 &= \bar{I}_1 Z_1 + i \bar{I}_2 X_{cs}, \\ 0 &= \bar{I}_2 Z_2 + i \bar{I}_1 X_{cs}.\end{aligned}$$

В этих выражениях Z_1 и Z_2 включают в себя все элементы, обтекаемые током I_1 и I_2 соответственно.

Из общих уравнений легко найти связь между напряжением U_1 и любым из двух токов (I_1 или I_2), а также связь между токами I_1 и I_2 .

Входное сопротивление связанных колебательных контуров

Для обобщённой схемы (рис. 4.4) входное сопротивление связанных колебательных контуров на любой частоте определяется из общих уравнений как частное от деления входного напряжения U_1 на ток в первом контуре I_1

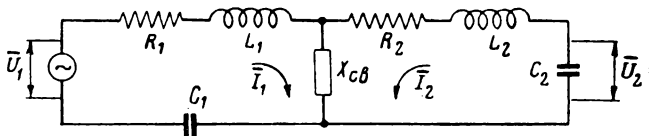


Рис. 4.4

$$Z(i\omega) = R_1 + \frac{X_{cs}^2}{|Z_2|^2} R_2 + i \left(X_1 - \frac{X_{cs}^2}{|Z_2|^2} X_2 \right) \quad (4.7)$$

или

$$Z(i\omega) = R_1 \left(1 + \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \right) + i \xi_1 R_1 \left(1 - \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \frac{\xi_2}{\xi_1} \right). \quad (4.7a)$$

В этих формулах:

$\xi_1 = \frac{X_1}{R_1} = \frac{\Delta \omega_1}{\sigma_1}$ — обобщённая расстройка первого контура (по отношению к частоте генератора),

$\xi_2 = \frac{X_2}{R_2} = \frac{\Delta \omega_2}{\sigma_2}$ — обобщённая расстройка второго контура,

$A = \frac{X_{cs}}{\sqrt{R_1 R_2}}$ — фактор связи¹⁾.

¹⁾ Здесь, как и в § 2 и 3 формулы, содержащие равенство $X \approx 2 \Delta \omega L_1$ являются приближёнными; ошибка имеет порядок относительной расстройки:

$$|\delta| = \frac{\Delta \omega}{2 \omega_0}$$

Сопровитления X_1 и X_2 должны учитывать относящиеся к каждому контуру сопротивления элемента связи.

Для схемы с индуктивной связью фактор связи A определяется выражением

$$A = \frac{X_{cs}}{\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{\omega M}{\sqrt{R_1 R_2}} \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{\omega \sqrt{L_1 L_2}}{\sqrt{R_1 R_2}} \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}.$$

Если контуры одинаковы ($R_1 = R_2 = R$; $L_1 = L_2 = L$) и расстройки невелики, т. е. можно считать что, $\frac{\omega}{\omega_0} \approx 1$, выражение для фактора связи A переписывается в виде

$$A = \frac{\omega L}{R} \frac{M}{L} \approx \frac{\omega_0 L}{R} \frac{M}{L} = Q\kappa,$$

где κ — коэффициент связи.

В практических расчётах удобно вычислять отдельно активную и реактивную составляющие полного сопротивления; эти составляющие обычно называются эквивалентными и обозначаются R_g и X_g . Из (4.7) получаем:

$$\left. \begin{aligned} R_g &= R_1 \left(1 + \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \right) \\ X_g &= \xi_1 R_1 \left(1 - \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \frac{\xi_2}{\xi_1} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (4.9)$$

Из выражений (4.7) и (4.9) следует возможность замены двух связанных контуров одним эквивалентным контуром, имеющим на данной частоте входное сопротивление

$$Z(i\omega) = R_g + iX_g.$$

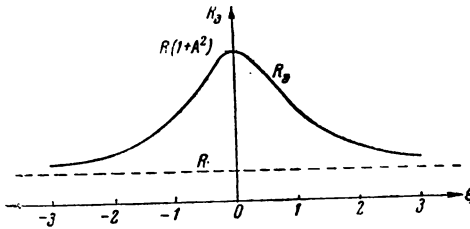
В случае применения контуров, у которых $R_1 = R_2 = R$ и $\xi_1 = \xi_2 = \xi$, формулы (4.9) упрощаются:

$$\left. \begin{aligned} R_g &= R \left(1 + \frac{A^2}{1 + \xi^2} \right) \\ X_g &= \xi R \left(1 - \frac{A^2}{1 + \xi^2} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (4.10)$$

Реактивная составляющая входного сопротивления двух связанных контуров [ф-ла (4.10)] обращается в нуль при следующих значениях обобщённой расстройки:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \sqrt{A^2 - 1} \\ \xi_2 &= -\sqrt{A^2 - 1} \\ \xi_3 &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (4.11)$$

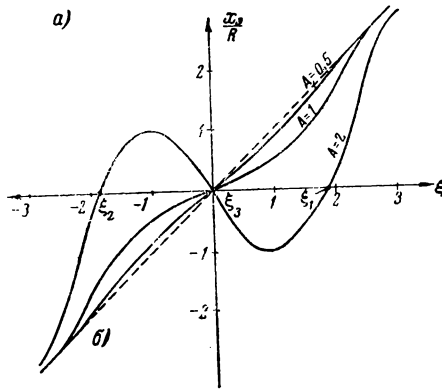
Соответствующие этим расстройкам, частоты, называемые частотами резонанса, будут равны:



$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0 + \alpha \sqrt{A^2 - 1} \\ \omega_2 &= \omega_0 - \alpha \sqrt{A^2 - 1} \\ \omega_3 &= \omega_0 \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

Частоты ω_1 и ω_2 называют также частотами связи.

Графики активной и реактивной составляющих входного сопротивления для случая одинаковых контуров даны на рис. 4.5а и б.



Частотные характеристики связанных колебательных контуров

Рис. 4.5

Для схемы, изображённой на рис. 4.4, амплитудно - частотная

характеристика (коэффициент передачи) определяется выражением

$$K(\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\omega C_2 \sqrt{R_1 R_2}} \frac{A}{\sqrt{(A^2 + 1 - \xi_1 \xi_2)^2 + (\xi_1 + \xi_2)^2}} \quad (4.13)$$

В случае одинаковых контуров и общей настройки, а также полагая, что

$$\frac{1}{\omega CR} \approx \frac{1}{\omega_0 CR} = Q,$$

выражение для коэффициента передачи упрощается и принимает вид

$$K(\omega) = \frac{QA}{\sqrt{(A^2 + 1 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}} \quad (4.14)$$

Семейство кривых, построенных по этому выражению, дано на рис. 4.6.

Экстремальные значения коэффициент передачи приобретает на частотах, при которых реактивная составляющая обращается в нуль [ф-лы (4.11) и (4.12)].

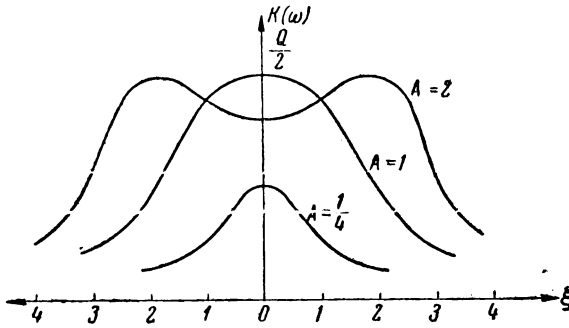


Рис. 4.6

Значения $K_{\text{макс}}(\omega)$ определяются выражением:

$$K_{\text{макс}}(\omega) = \frac{Q}{2}. \quad (4.15)$$

Относя текущее значение коэффициента передачи $K(\omega)$ к его максимальному значению $K_{\text{макс}}(\omega)$, получаем уравнение резонансной кривой по напряжению

$$y = \frac{K(\omega)}{K_{\text{макс}}(\omega)} = \frac{\frac{U_2}{U_1}}{\frac{U_{2\text{макс}}}{U_1}} = \frac{U_2}{U_{2\text{макс}}} = \frac{2A}{\sqrt{(A^2 + 1 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}}. \quad (4.16)$$

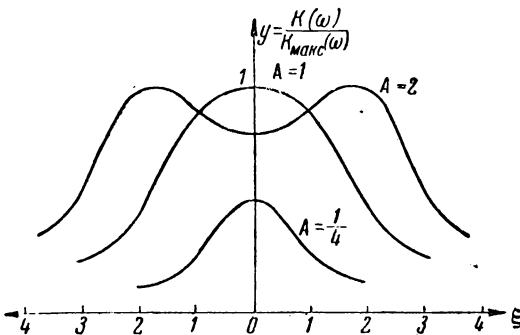


Рис. 4.7

Семейство кривых, построенных по выражению (4.16), дано на рис. 4.7.

Уравнение резонансной кривой по току во втором контуре имеет такой же вид, т. е. вид, соответствующий выражению (4.16).

Значение критической (оптимальной) связи, при которой

коэффициент передачи на резонансной частоте достигает максимума, находится из выражения

$$A_{\text{кр}} = 1.$$

Зависимость $K(\omega)$ от фактора связи A при $\xi=0$ дана на рис. 4.8.

Для расчёта одинаковых связанных контуров целесообразно использовать величину y_0 — значение ординаты резонансной кривой при $\omega=\omega_0$, т. е. при $\xi=0$ (рис. 4.9), определяемую из (4.16) следующей формулой

$$y_0 = \frac{2A}{A^2+1}. \quad (4.17)$$

Определяя полосу пропускания двухконтурной системы на высоте, соответствующей y_0 , из ур-ния (4.16), получаем формулу для расчёта этой полосы (рис. 4.9)

$$\xi^* = \pm \sqrt{2} \sqrt{A^2-1}. \quad (4.18)$$

При расчёте двух одинаковых контуров заданными величинами обычно являются резонансная частота ω_0 и полоса пропускания, оговариваемая либо величиной y_0 , либо „расстоянием между горбами“ — $2\xi_m$ (рис. 4.9), либо полосой пропускания на

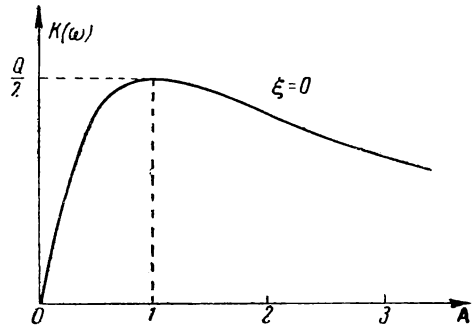


Рис. 4.8

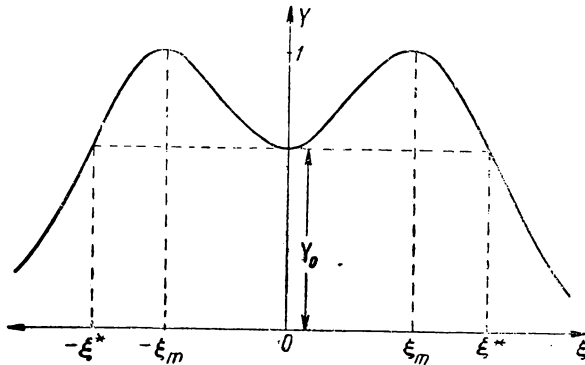


Рис. 4.9

уровне y_0 . Расчёту подлежат параметры контуров и связь между контурами.

Расчёт проводится следующим путём:

1. Из выражения для резонансной частоты

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (4.19)$$

находится один из двух параметров (вторым параметром приходится задаваться, исходя из дополнительных соображений).

2. Из выражения (4.17) определяется фактор связи

$$A = \frac{1}{y_0} + \sqrt{\frac{1}{y_0^2} - 1} \quad (4.20)$$

Если задано „расстояние между горбами“ ξ_m , а не y_0 , то фактор связи определяется по ф-ле (4.11)

$$A = \sqrt{\xi_m^2 + 1} \quad (4.21)$$

3. Из выражения для ξ_m

$$\xi_m = \frac{\Delta \omega_m}{\alpha} = \frac{\omega_m - \omega_0}{\alpha} = 2L \frac{\omega_m - \omega_0}{R}$$

определяется активное сопротивление R

$$R = 2L \frac{\omega_m - \omega_0}{\xi_m} \quad (4.22)$$

4. Наконец, из выражения $A = \frac{X_{св}}{R}$ определяется $X_{св}$

$$X_{св} = AR \quad (4.23)$$

и далее из последней формулы находится величина элемента связи (M , $C_{св}$, $L_{св}$).

5. Если задана полоса пропускания на уровне y_0 , то сопротивление R надо определять из ф-лы (4.18)

$$R = \frac{L}{\sqrt{2}} \frac{2 \Delta \omega^*}{\sqrt{A^2 - 1}} \quad (4.24)$$

В случае, когда изменяется не частота генератора, а настройка второго контура, выражение для коэффициента передачи (4.13) сохраняет силу, но при этом $\xi_1 = \text{const}$, а ξ_2 является величиной переменной.

Для частного случая настройки первого контура в резонанс, т. е. при $\xi_1 = 0$, это уравнение принимает вид

$$K(\omega) = \frac{1}{\omega C_2 \sqrt{R_1 R_2}} \frac{A}{\sqrt{(A^2 + 1)^2 + \xi_2^2}} \quad (4.25)$$

Если $\xi_1 \neq 0$, нужно пользоваться ф-лой (4.13).

Для того, чтобы коэффициент передачи имел максимальное значение при $\xi_1 \neq 0$ необходимо второй контур настроить так, чтобы выполнялось равенство

$$\xi_{20} = A^2 \frac{\xi_1}{1 + \xi_1^2} \quad (4.26)$$

Связь колебательного контура с аperiodическим и аperiodическими между собой

Входное сопротивление любой системы, состоящей из двух связанных контуров, в том числе если один из контуров, либо оба контура являются аperiodическими, рассчитывается по общей ф-ле (4.7) с учётом того, что у аperiodического контура $\xi = \frac{X}{R} \gg 1$.

Амплитудно-частотные характеристики для системы, состоящей из колебательного и аperiodического контуров, рассчитываются также по общей ф-ле (4.13) с учётом того же условия, что у аperiodического контура $\xi \gg 1$.

Настройка связанных контуров

Настройка связанных контуров может производиться следующими методами:

1. Настройкой первого контура при неизменных параметрах второго — так называемый первый частичный резонанс; при этом следует выполнить условия:

$$X_1 + X_{2 \rightarrow 1}^{gn} = 0,$$

$$X_1 - \frac{X_{cs}^2}{|Z_2|^2} X_2 = 0.$$

2. Настройкой второго контура при неизменных параметрах первого — так называемый второй частичный резонанс; при этом следует выполнить условия:

$$X_2 + X_{1 \rightarrow 2}^{gn} = 0,$$

$$X_2 - \frac{X_{cs}^2}{|Z_1|^2} X_1 = 0.$$

3. Настройкой обоих контуров — полный резонанс; при этом следует выполнить условия:

$$X_1 = 0,$$

$$X_2 = 0.$$

4. Настройкой обоих контуров и подбором связи — сложный резонанс; при этом следует выполнить условия:

$$X_1 = 0,$$

$$X_2 = 0,$$

$$X_{cs} = X_{cs \text{ опт.}}$$

Перечисленные виды настроек не охватывают всех возможных; можно также настраивать параметры одного из двух контуров и подбирать оптимальную связь между ними (задача 4.35).

Энергетические соотношения в связанных контурах

Мощность, расходуемая в первом контуре, равна

$$P_1 = \frac{I_1^2}{2} R_1 = \frac{1}{2} \frac{U_1^2}{|Z_1|^2} R_1 = \frac{1}{2} \frac{U_1^2}{R_1^2 + X_1^2} R_1. \quad (4.27)$$

Мощность, расходуемая во втором контуре, равна

$$P_2 = \frac{I_2^2}{2} R_2 = \frac{I_1^2}{2} \frac{X_{cb}^2}{|Z_2|^2} R_2 = \frac{I_1^2}{2} \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} R_1 \quad (4.28)$$

Полная мощность, расходуемая в обоих контурах, определяется выражением

$$\begin{aligned} P_0 = P_1 + P_2 &= \frac{I_1^2}{2} \left(R_1 + \frac{X_{cb}^2}{|Z_2|^2} R_2 \right) = \\ &= \frac{I_1^2}{2} R_1 = \frac{I_1^2}{2} R_1 \left(1 + \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \right). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Коэффициент полезного действия

$$\eta = \frac{P_2}{P_0} = \frac{A^2}{A^2 + 1 + \xi_2^2}. \quad (4.30)$$

Максимальное значение коэффициента полезного действия приобретает при $\xi_2 = 0$

$$\eta_{\max} = \frac{A^2}{A^2 + 1}. \quad (4.31)$$

Из (4.27) и (4.29) следует

$$P_2 = \frac{I_1^2}{2} \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} R_1 = \frac{1}{2} \frac{U_1^2}{|Z_1|^2} \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} R_1;$$

легко видеть, что $P_2 = P_{2\max}$ при $X_1 = 0$ и $X_2 = 0$, т. е.

$$\begin{aligned} P_{2\max} &= \frac{1}{2} \frac{U_1^2}{R_1^2} A^2 R_1 = \frac{1}{2} \frac{U_1^2}{R_1^2 (1 + A^2)^2} A^2 R_1 = \\ &= \frac{U_1^2}{2R_1} \frac{A^2}{(1 + A^2)^2}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

В свою очередь, максимальная мощность во втором контуре имеет максимально возможное значение при $A = 1$, т. е.

$$P_{2\text{ макс макс}} = \frac{U_1^2}{8R_1} \quad (4.33)$$

На рис. 4.10 дан график зависимости коэффициента полезного действия η и отмошения $\frac{P_{2\text{ макс}}}{P_{2\text{ макс макс}}}$ от фактора связи A .

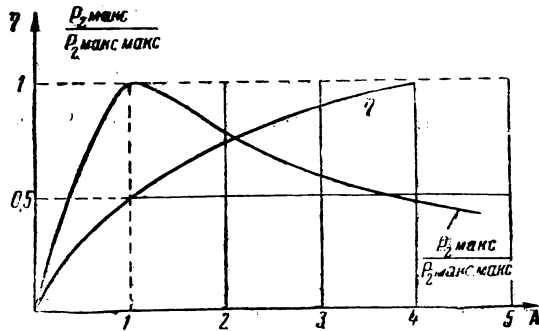


Рис. 4.10

Фазовые характеристики связанных контуров

Фазовая характеристика находится из выражения для комплексного коэффициента передачи (схема рис. 4.4)

$$K(i\omega) = \frac{i}{\omega C_2 \sqrt{R_1 R_2}} \frac{A}{[(A^2 + 1 - \xi_1 \xi_2) + i(\xi_1 + \xi_2)]}$$

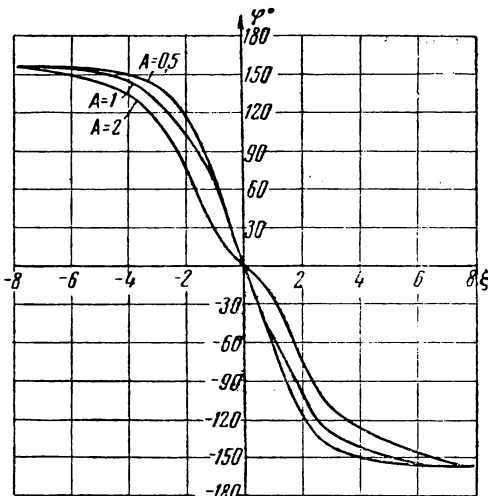


Рис. 4.11

т. е.

$$\operatorname{tg} \varphi_{U_2 \rightarrow U_1} = - \frac{\xi_1 + \xi_2}{A^2 + 1 - \xi_1 \xi_2} \quad (4.34)$$

Для частного случая одинаковых контуров выражение (4.33) упрощается

$$\operatorname{tg} \varphi_{U_2 \rightarrow U_1} = - \frac{2\xi}{A^2 + 1 - \xi^2} \quad (4.35)$$

График семейства фазовых характеристик, построенных по ф-ле (4.34), дан на рис. 4.11.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

4.1*. Два контура (рис. 4.12а) связаны между собой внешней ёмкостной связью через междуэлектродную ёмкость.

Представить данную схему в виде эквивалентной схемы с внутренней ёмкостной связью (рис. 4.12).

Данные контуров: $C_1 = 50 \text{ пф}$, $C_2 = 50 \text{ пф}$, $C_3 = 10 \text{ пф}$.

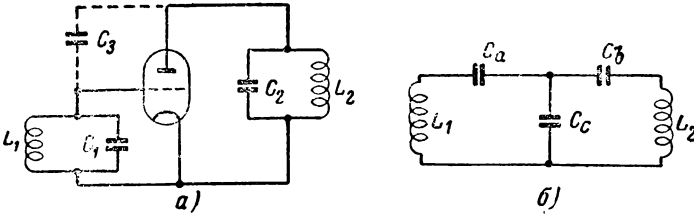


Рис. 4.12

4.2*. В схеме с комбинированной связью (рис. 4.33) сопротивление связи определяется ф-лой (4.6)

$$X_{св} = \pm \omega M - \frac{1}{\omega C_{св}}$$

Если направление витков выбрано так, что

$$X_{св} = \omega M + \frac{1}{\omega C_{св}}$$

то сопротивление связи в пределах некоторой полосы остаётся более или менее постоянным (рис. 4.13).

Найти значение частоты ω_m , при которой $X_{св}$ приобретает минимальное значение, а затем полосу частот справа от $\omega_m - \Delta\omega_1 = \omega_1 - \omega_m$ и полосу частот слева от $\omega_m - \Delta\omega_2 = \omega_m - \omega_2$, при которых сопротивление связи $X_{св}$ меняется не более чем в p раз (например, $p = 1,1$ и т. д.).

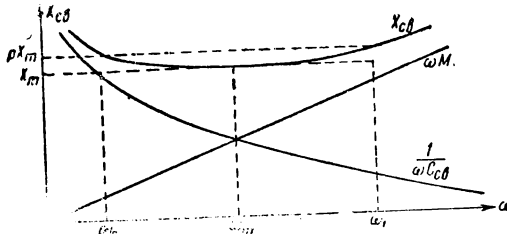


Рис. 4.13

4.3*. В схеме с комбинированной связью (рис. 4.33) рассчитать диапазон частот, в пределах которого сопротивление связи будет меняться не более чем на 10%, если $M = 10 \text{ мкГн}$ а $C_{св} = 50 \text{ пф}$ (задача 4.2).

4.4. Построить график изменения активной составляющей эквивалентного сопротивления связанных колебательных контуров в зависимости от расстройки второго контура, а также в зависимости от частоты генератора ω .

4.5*. Параметры двух связанных индуктивной трансформаторной связью контуров следующие: $L_1 = 510 \text{ мкГн}$, $L_2 = 238 \text{ мкГн}$, $C_1 = 2000 \text{ пф}$, $C_2 = 5000 \text{ пф}$, $R_1 = 2 \text{ ом}$, $R_2 = 6 \text{ ом}$, $M = 7 \text{ мкГн}$.

Найти эквивалентное (входное) сопротивление связанной системы на частоте $f = 159 \text{ кГц}$.

4.6. Рассчитать эквивалентное (входное) сопротивление системы, состоящей из двух связанных индуктивной трансформаторной связью контуров, по следующим данным:

№ пп.	Данные первого контура					Данные второго контура					Данные связи		Данные генератора	
	L_1 мкГн	C_1 пФ	f_{01} кГц	R_1 Ом	Q_1	L_2 мкГн	C_2 пФ	f_{02} кГц	R_2 Ом	Q_2	$X_{св}$ Ом	M мкГн	f кГц	λ м
1	164	600	—	4	—	195	540	—	6	—	—	4	500	—
2	—	500	340	—	30	—	460	320	—	34	—	6	330	—
3	226	220	—	6	—	248	200	—	8	—	12	—	—	420
4	—	60	3000	6	—	—	54	3004	5	—	9	—	3010	—
5	374	1600	—	—	36	333	2000	—	8	—	—	10	200	—

4.7*. Найти сопротивление между зажимами A и B (рис. 4.14), если сопротивление связи $X_{св} = 20$ Ом, а остальные данные указаны на рисунке.

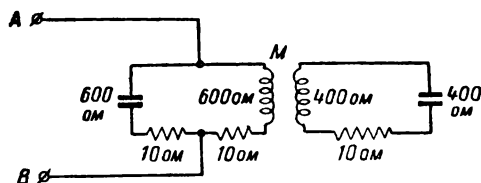


Рис. 4.14

4.8*. Даны два одинаковых контура, настроенные каждый в отдельности на частоту $f_0 = 2 \cdot 10^6$ Гц. Определить частоты связи f_1 и f_2 , если известно, что активное сопротивление каждого контура $R = 10$ Ом, а сопротивление связи $X_{св} = 16$ Ом. Ёмкость каждого контура равна 100 пФ.

4.9*. Рассчитать и построить график зависимости частот связи ω_1 и ω_2 от фактора связи A при одинаковых контурах, настроенных на одну частоту. Построение графика выполнить для $Q = 10$.

4.10*. Два связанных одинаковых контура настроены каждый в отдельности на частоту $f_0 = 1,6 \cdot 10^6$ Гц. Экспериментально определены частоты связи: $f_1 = 1,64 \cdot 10^6$ Гц и $f_2 = 1,56 \cdot 10^6$ Гц.

Найти значение фактора связи A , если известно, что добротность каждого контура $Q = 20$.

4.11*. Найти частоты, при которых реактивная составляющая входного сопротивления обращается в нуль для случая несимметричных связанных контуров.

4.12*. Два колебательных контура связаны трансформаторной индуктивной связью. Рассчитать частоты резонанса, при которых реактивное сопротивление обращается в нуль, если данные контуров следующие:

$$L_1 = 260 \text{ мкГн}, \quad L_2 = 280 \text{ мкГн},$$

$$C_1 = 900 \text{ пФ}, \quad C_2 = 920 \text{ пФ},$$

$$R_1 = 10 \text{ Ом}, \quad R_2 = 10 \text{ Ом},$$

$$X_{св} = 60 \text{ Ом}.$$

4.13*. Найти значения напряжения на конденсаторе второго контура схемы рис. 4.4 в диапазоне частот от 770 до 850 кГц, если известно, что

$$f_{01} = f_{02} = 810 \text{ кГц}, \quad R_1 = R_2 = 10 \text{ ом}, \\ X_{св} = \omega_0 M = 20 \text{ ом}, \quad Q_1 = Q_2 = 30, \\ U_1 = 0,1 \text{ в.}$$

Результаты расчёта изобразить в виде графика.

4.14. Построить графики коэффициента передачи для системы, состоящей из двух одинаковых индуктивно связанных контуров по приведённым в таблице данным. Диапазон изменения частоты принять равным

$$\omega_0 \pm \Delta\omega = \omega_0 \left(1 \pm \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) \approx \omega_0 \left(1 \pm \frac{2}{Q} \right).$$

№ пп.	f_0 МГц	λ_0 м	R ом	L мкГн	C пФ	Q	M	$X_{св}$ ом
1	1	—	12	—	—	40	—	16
2	—	600	—	—	300	40	0,05 L	—
3	—	1260	16	720	—	—	—	26

4.15*. Найти значение фактора связи A_m , при котором коэффициент передачи двух одинаковых связанных контуров (рис. 4.4) имеет максимальное значение при заданной частоте (настройке).

4.16*. Рассчитать пределы изменения взаимной индуктивности M катушек связи, при которых частоты связи будут меняться в пределах от ω_0 до $1,05 \omega_0$ для схемы, составленной из двух одинаковых индуктивно связанных контуров.

4.17*. Рассчитать параметры системы, состоящей из двух одинаковых индуктивно связанных контуров, по следующим данным:

резонансная частота $f_0 = 600$ кГц,

полоса пропускания, соответствующая уровню $y_0 = 0,707$, равна 8 кГц,

ёмкость каждого контура равна 250 пФ.

4.18. Рассчитать параметры двух одинаковых индуктивно связанных контуров по следующим данным:

№ пп.	f_0 МГц	λ_0 м	y_0	Интервал между горбами кГц	Полоса пропускания на уровне y_0 кГц	Q
1	1,2	—	0,707	—	12	—
2	12,8	—	0,707	—	60	—
3	—	600	—	6	—	100
4	—	1200	0,707	—	8	—
5	—	300	—	8	—	100

Ёмкость контура рассчитать по формуле: $C_{пФ} \approx \frac{1}{2} \lambda_{ом}$.

4.19*. Определить частоты связи системы, состоящей из двух одинаковых индуктивно связанных контуров с параметрами: $L = 10 \text{ мГн}$, $C = 100 \text{ пФ}$, $R = 240 \text{ Ом}$, $M = 340 \text{ мкГн}$, затем рассчитать уровень y_0 и полосу пропускания на этом уровне.

4.20. Найти полосу пропускания (на высоте 0,707) системы, состоящей из двух одинаковых связанных колебательных контуров, при критической связи, т. е. при $A = 1$.

4.21*. По экспериментально снятой резонансной кривой системы, состоящей из двух одинаковых контуров, получено значение полосы пропускания $2\Delta f^* = 12 \text{ кГц}$ при $f_0 = 60 \text{ кГц}$. Параметр связи $A = 1$. Определить добротность контуров.

4.22*. Даны два индуктивно связанных контура, причём частота генератора $f = 600 \text{ кГц}$, а частота, на которую настроен первый контур, $f_{01} = 610 \text{ кГц}$. Найти частоту, на которую должен быть настроен второй контур для получения максимального тока в нем, если известно, что

$$\begin{aligned} R_1 &= 12 \text{ Ом}, & R_2 &= 16 \text{ Ом}, \\ Q_1 &= 60, & L_2 &= 360 \text{ мкГн}, \\ & & M &= 20 \text{ мкГн}. \end{aligned}$$

4.23*. Найти резонансную частоту контура L_1 , R_1 , C_1 (рис. 4.15), связанного с аperiodическим контуром L_2 , R_2 .

4.24*. Дана схема, изображённая на рис. 4.15.

Колебательный контур, имеющий $L_1 = 40 \text{ мкГн}$ и $C_1 = 250 \text{ пФ}$, связан с короткозамкнутой катушкой $L_2 = 5 \text{ мкГн}$, взаимдуктивность может меняться в пределах от 0 до 4 мкГн .

Определить пределы изменения настройки контура при помощи короткозамкнутой катушки.

4.25*. Найти выражение для эквивалентного активного сопротивления схемы, изображённой на рис. 4.15.

4.26*. Генератор имеет внутреннее сопротивление $R_i = 200 \text{ Ом}$ и должен быть нагружен на сопротивление нагрузки $R_2 = 2000 \text{ Ом}$.

Для согласования нагрузки с внутренним сопротивлением генератора применена схема, изображённая на рис. 4.16.

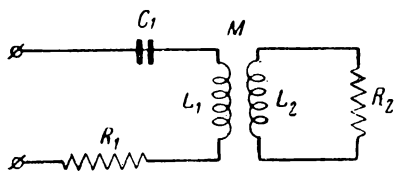


Рис. 4.15

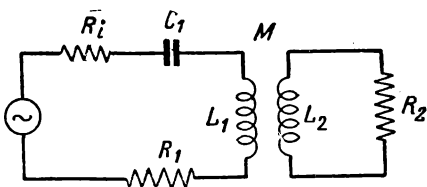


Рис. 4.16

Рассчитать связь M между контурами, если известно, что $R_1 = 20 \text{ Ом}$ и $L_2 = 800 \text{ мкГн}$. При этом считается, что первый контур настроен в резонанс.

4.27*. Для схемы (рис. 4.17), содержащей аperiodический контур L_1 , R_1 , связанный с колебательным контуром L_2 , C_2 , R_2 , привести выражения эквивалентных активного и реактивного сопротивлений и найти, на какую частоту должен быть настроен второй контур, чтобы входное сопротивление было чисто активным.

4.28*. В предыдущей задаче было показано, что для создания чисто активного сопротивления в схеме рис. 4.17 второй контур должен быть расстроен относительно частоты генератора на величину ξ_2 , определяемую выражением

$$\xi_2 = \frac{A^2}{2\xi_1} \pm \sqrt{\frac{A^4}{4\xi_1^2} - 1}.$$

Для практики представляет интерес установить минимально возможную связь, при которой ещё выполняется указанное условие (эти требования объясняются трудностью конструктивного выполнения воздушного трансформатора с большой связью). Найти такое соотношение между A и ξ_1 , которое бы позволило иметь связь минимально возможной.

4.29*. Дана схема, изображённая на рис. 4.17.

Известно, что $R_1 = 100 \text{ Ом}$, $L_1 = 2,5 \text{ мкГн}$, $R_2 = 12 \text{ Ом}$, $L_2 = 240 \text{ мкГн}$ и частота генератора $f = 750 \text{ кГц}$.

Рассчитать частоту, на которую должен быть настроен второй контур, чтобы генератор нагружался на чисто активное сопротивление, а также рассчитать минимальную взаимондуктивность M между катушками контуров.

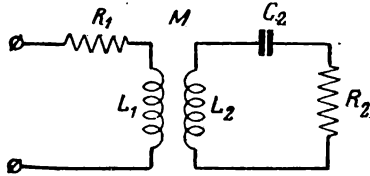


Рис. 4.17

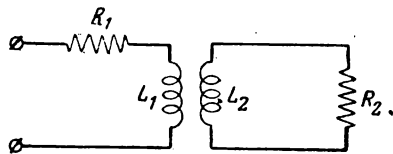


Рис. 4.18

4.30*. Для схемы, состоящей из двух апериодических индуктивно связанных контуров (рис. 4.18), вывести выражение эквивалентных сопротивлений, приняв, что

$$X_1 \gg R_1 \text{ и } X_2 \gg R_2.$$

4.31*. Показать, что условие получения максимального значения коэффициента передачи [ф-ла (4.13)] соответствует условию первого частичного резонанса

$$X_1 - \frac{X_{1A}^2}{|Z_2|^2} X_2 = 0.$$

4.32*. Даны два индуктивно связанных колебательных контура со следующими параметрами: $L_1 = 200 \text{ мкГн}$, $L_2 = 250 \text{ мкГн}$, $R_2 = 100 \text{ Ом}$, $C_2 = 900 \text{ пФ}$, $M = 40 \text{ мкГн}$, $f = 700 \text{ кГц}$.

Рассчитать ёмкость C_1 первого контура так, чтобы было выполнено условие первого частичного резонанса.

4.33. Колебательный контур I, C, R индуктивно связан с передающей антенной, которая может быть представлена эквивалентным контуром, имеющим параметры R_A и X_A . Частота генератора меняется в пределах от f_1 до f_2 и при этом реактивное сопротивление антенны меняется в пределах от X_{A_1} до X_{A_2} . Определить значения ёмкости (или индуктивности) первого контура C_1 и C_2 (или L_1 и L_2), при которых обеспечивается настройка заданной связанной системы по первому частичному резонансу. Данные задачи сведены в таблицу.

№ пп.	Колебательный контур		Частота генератора				Данные антенного контура			Связь M мкГн.
	C пФ	L мкГн	λ_1 м	f_1 МГц	λ_2 м	f_2 МГц	R_A Ом	X_{A_1} Ом	X_{A_2} Ом	
1	400	—	680	—	600	—	16	—18	—24	20
2	—	500	—	0,8	—	0,9	10	50	10	10
3	—	600	—	0,4	—	0,6	12	20	6	40

4.34. Приёмная антенна, которая может быть представлена эквивалентным контуром с параметрами R_A , X_A , индуктивно связана с колебательным контуром L , C , R . Частота принимаемых колебаний меняется в пределах от f_1 до f_2 . Найти пределы изменения ёмкости контура C_1 и C_2 , при которых обеспечивается настройка заданной системы по второму частичному резонансу. Данные для расчёта сведены в таблицу.

№ пп.	f_1 МГц	f_2 МГц	R_A ом	X_{A_1} ом	X_{A_2} ом	L мкГн	M мкГн
1	0,60	0,64	8	-16	-12	400	20
2	1,2	1,28	12	6	8	200	3
3	0,24	0,30	20	-24	-20	1000	50

4.35*. Задана система из двух индуктивно связанных контуров, причём первый контур ёмкостью C_1 настроен так, что удовлетворяется условие первого частичного резонанса, т. е. $X_3 = 0$.

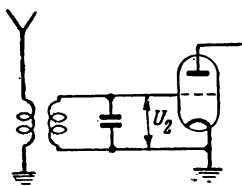


Рис. 4.19

Найти значение взаимной индуктивности $M_{опт}$, при котором ток во втором контуре имеет максимальное значение, и затем найти это максимальное значение тока.

4.36*. Приёмная аperiодическая антенна индуктивно связана с входным контуром (рис. 4.19). Контур имеет следующие данные: $C = 300$ пф, $R = 8$ ом.

Определить напряжение на сетке лампы, если ток в приёмной антенне $I_a = 0,17$ мка. Взаимная индуктивность $M = 20$ мкГн.

4.37*. Даны два индуктивно связанных контура со следующими данными:

$$\begin{aligned}
 L_1 &= 400 \text{ мкГн}, & L_2 &= 410 \text{ мкГн}, \\
 C_1 &= 310 \text{ пф}, & C_2 &= 290 \text{ пф}, \\
 R_1 &= 16 \text{ ом}, & R_2 &= 14 \text{ ом} \\
 f &= 460 \cdot 10^3 \text{ гц}, \\
 U_1 &= 100 \text{ в}, \\
 M &= 36 \text{ мкГн}.
 \end{aligned}$$

Рассчитать мощность, расходуемую в первом и втором контурах, коэффициент полезного действия при заданной связи, а затем определить оптимальную связь и значение P_{2max} при оптимальной связи и настройке обоих контуров в резонанс с частотой генератора.

4.38. Рассчитать по нижеприведённым данным мощность, расходуемую в первом и втором связанных трансформаторной индуктивной связью контурах, коэффициент полезного действия, оптимальную связь и найти значение максимально возможной мощности при оптимальной связи и настройке обоих контуров в резонанс.

№ пп.	1-й контур			2-й контур			U_1 в	f МГц	M мкГн	$X_{св}$ ом
	L_1 мкГн	C_1 пф	R_1 ом	L_2 мкГн	C_2 пф	R_2 ом				
1	350	250	10	360	240	8	200	0,54	30	—
2	200	130	6	210	120	4	100	0,995	—	15

4.39*. Найти фазовый сдвиг между напряжением на конденсаторе второго контура и напряжением входа (рис. 4.4), если контуры одинаковы и известно, что $\xi = 0,8$, а $A = 1,6$.

4.40*. Найти фазовый сдвиг между напряжением на конденсаторе второго контура и напряжением входа (рис. 4.4) по данным задачи 4.37.

§ 5. Цепи с распределёнными постоянными (длинные линии)

Общие замечания. Первичные параметры линии

Электрические цепи, геометрические размеры которых сопоставимы с длиной волны и, как следствие этого, распределение тока и напряжения в которых зависит от координат, называются цепями с распределёнными постоянными или, короче, длинными линиями.

Длинные линии характеризуются первичными параметрами:

$$L_1 — \text{погонная индуктивность} \left(\frac{\text{гн}}{\text{м}} \right),$$

$$C_1 — \text{погонная ёмкость} \left(\frac{\text{ф}}{\text{м}} \right),$$

$$R_1 — \text{погонное сопротивление} \left(\frac{\text{ом}}{\text{м}} \right),$$

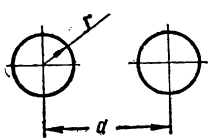
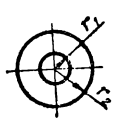
$$G_1 — \text{погонная проводимость} \left(\frac{1}{\text{ом} \cdot \text{м}} \right).$$

Конструктивно длинные линии чаще всего выполняются в виде двухпроводных линий, коаксиального кабеля, четырёхпроводных линий и однопроводных линий.

Погонные параметры длинных линий рассчитываются по формулам, известным из курса теоретической электротехники. Сводка этих формул для наиболее распространённых конструкций длинных линий дана в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Формулы для расчёта первичных параметров длинных линий

	Двухпроводная линия	Концентрическая линия
Обозначения		

	Двухпроводная линия	Концентрическая линия
Индуктивность L_1	$L_1 = 0,4 \ln \frac{d}{r} \frac{\text{мкГн}}{\text{м}} =$ $= 0,4 \cdot 10^{-5} \ln \frac{d}{r} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$	$L_1 = 0,2 \ln \frac{r_2}{r_1} \frac{\text{мкГн}}{\text{м}} =$ $= 0,2 \cdot 10^{-6} \ln \frac{r_2}{r_1} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$
Ёмкость C_1	$C_1 = \frac{27,8 \varepsilon_r \text{ пФ}}{\ln \frac{d}{r}} =$ $= \frac{27,8 \varepsilon_r}{\ln \frac{d}{r}} \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{м}}$	$C_1 = \frac{55,5 \varepsilon_r \text{ пФ}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} =$ $= \frac{55,5 \varepsilon_r}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{м}}$
Сопротивление R_1 (для меди $\tau = 5,80 \cdot 10^7 \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}}$)	$R_1 = \frac{8,32}{r_{\text{см}}} \sqrt{f_{\text{Гц}}} \frac{\text{мкОм}}{\text{м}} =$ $= \frac{8,32}{r_{\text{см}}} \sqrt{f_{\text{Гц}}} \cdot 10^{-6} \frac{\text{Ом}}{\text{м}} =$ $= \frac{1,44}{r_{\text{мм}} \sqrt{\lambda_{\text{м}}}} \frac{\text{Ом}}{\text{м}}$	$R_1 = 4,16 \left(\frac{1}{r_{1\text{см}}} + \frac{1}{r_{2\text{см}}} \right) \times$ $\times \sqrt{f_{\text{Гц}}} \frac{\text{нКОм}}{\text{м}} = 4,16 \frac{1}{r_{1\text{см}}} +$ $+ \frac{1}{r_{2\text{см}}} \sqrt{f_{\text{Гц}}} \cdot 10^{-6} \frac{\text{Ом}}{\text{м}} =$ $= \frac{0,72}{\sqrt{\lambda_{\text{м}}}} \left(\frac{1}{r_{1\text{мм}}} + \frac{1}{r_{2\text{мм}}} \right) \frac{\text{Ом}}{\text{м}}$
Проводимость G_1	$G_1 = \omega C_1 \text{tg } \delta \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}}$	$G_1 = \omega C_1 \text{tg } \delta \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}}$

Примечание. ε_r — относительная диэлектрическая проницаемость,
 δ — угол диэлектрических потерь.

Значения ε_r и $\text{tg } \delta$ для некоторых диэлектриков даны в табл. 5.2.

Наименование диэлектрика	ϵ_r	$\operatorname{tg} \delta \times 10^4$ (на радиочастотах)
Полистирол	2,5	1,5 ÷ 3
Полиэтилен	2,3	2 ÷ 5
Полихлорвинил	3,1 ÷ 3,4	200

Уравнения длинной линии.

Вторичные параметры линии

Исследование длинных линий в установившемся режиме можно проводить на базе уравнений длинной линии (телеграфных уравнений), составленных по заданным граничным условиям либо в начале, либо в конце линии:

$$\left. \begin{aligned} \bar{U} &= \bar{U}_1 \operatorname{ch} \gamma x - \bar{I}_1 Z_c \operatorname{sh} \gamma x \\ \bar{I} &= \bar{I}_1 \operatorname{ch} \gamma x - \frac{\bar{U}_1}{Z_c} \operatorname{sh} \gamma x \end{aligned} \right\}; \quad (5.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{U} &= \bar{U}_2 \operatorname{ch} \gamma y + \bar{I}_2 Z_c \operatorname{sh} \gamma y \\ \bar{I} &= \bar{I}_2 \operatorname{ch} \gamma y + \frac{\bar{U}_2}{Z_c} \operatorname{sh} \gamma y \end{aligned} \right\}. \quad (5.2)$$

В этих формулах: \bar{U}_1, \bar{I}_1 — напряжение и ток в начале линии,

\bar{U}_2, \bar{I}_2 — напряжение и ток в конце линии,

\bar{U}, \bar{I} — напряжение и ток в любой точке линии,

x — координата, отсчитываемая от начала линии,

y — координата, отсчитываемая от конца линии,

Z_c, γ — вторичные параметры линии, определяемые по первичным параметрам,

Z_c — волновое сопротивление.

$$\left. \begin{aligned} Z_c &= \sqrt{\frac{Z_1}{Y_1}} = \sqrt{\frac{R_1 + i \omega L_1}{G_1 + i \omega C_1}} = \rho + i X_c \\ Z_c &\approx \rho \left(1 - i \frac{1}{2} \frac{\frac{R_1}{\rho} + G_1 \rho}{m} \right) \approx \rho \left(1 - i \frac{\beta}{m} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

На высокой частоте, если $\beta \ll m$, волновое сопротивление Z_c приближённо равно

$$Z_c = \rho = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}, \quad (5.3a)$$

γ — коэффициент распространения

$$\gamma = \sqrt{Z_1 Y_1} = \beta + i m, \quad (5.4)$$

β — коэффициент затухания

$$\beta = \frac{R_1}{2\rho} + \frac{1}{2} G_1 \rho \approx \frac{R_1}{2\rho} \frac{\rho a d}{m}, \quad (5.5)$$

m — коэффициент фазы

$$m = \frac{2\tau}{\lambda} = \frac{\omega}{v} = \omega \sqrt{L_1 C_1} \frac{\rho a d}{m}, \quad (5.6)$$

v — скорость распространения электромагнитных волн вдоль линии

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}. \quad (5.6a)$$

Используя формулы табл. 5.1, легко составить выражения для расчёта волнового сопротивления

$$Z_c \approx \rho = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$$

непосредственно по геометрическим размерам линии.

Для двухпроводной линии

$$\rho = 120 \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{d}{r}. \quad (5.7)$$

Для коаксиальной линии

$$\rho = 60 \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (5.8)$$

По аналогии с четырёхполюсником можно вводить понятие комплексного коэффициента передачи, представляющего собой отношение комплексных амплитуд напряжения в любой точке и в начале (или конце) линии.

Из (5.1) и (5.2) получаем:

$$\left. \begin{aligned} K(i\omega, i x) &= \frac{\bar{U}}{\bar{U}_1} = \operatorname{ch} \gamma x - \frac{Z_c}{Z_{ax}} \operatorname{sh} \gamma x \\ K(i\omega, i y) &= \frac{\bar{U}}{\bar{U}_2} = \operatorname{ch} \gamma y + \frac{Z_c}{Z_2} \operatorname{sh} \gamma y \end{aligned} \right\}. \quad (5.9)$$

Здесь

$$Z_{ex} = \frac{\bar{U}_1}{I_1} \quad (5.10)$$

представляет собой комплексное входное сопротивление в начале линии, а

$$Z_2 = \frac{\bar{U}_2}{I_2} \quad (5.11)$$

комплексное сопротивление нагрузки.

Входное сопротивление длинной линии

Входное сопротивление длинной линии определяется непосредственно из телеграфных уравнений (5.2)

$$Z_{ex} = \frac{\bar{U}}{I} = Z_2 \frac{1 + \frac{Z_c}{Z_2} \operatorname{th} \gamma y}{1 + \frac{Z_2}{Z_c} \operatorname{th} \gamma y} \quad (5.12)$$

В случае линии без потерь, т. е. при $\gamma = im$, а также при $Z_c = \rho$, будет

$$Z_{ex} = Z_2 \frac{1 + i \frac{\rho}{Z_2} \operatorname{tg} my}{1 + i \frac{Z_2}{\rho} \operatorname{tg} my} \quad (5.13)$$

При согласованной нагрузке, т. е. при $Z_2 = \rho$, очевидно,

$$Z_{ex} = Z_2 = \rho \quad (5.14)$$

В режиме короткого замыкания ($Z_2 = 0$) входное сопротивление будет равно

$$Z_{ex} = i \rho \operatorname{tg} my \quad (5.15)$$

В режиме холостого хода ($Z_2 = \infty$)

$$Z_{ex} = -i \rho \operatorname{ctg} my \quad (5.16)$$

В общем случае для линии без потерь входное сопротивление нужно определять по ф-ле (5.13).

Рассматривая линию с потерями, выражению для входного сопротивления, в соответствии с 5.12, необходимо придать вид при $Z_c = \rho$:

$$Z_{ex} = Z_2 \frac{1 + \frac{\rho}{Z_2} \operatorname{th} (\beta + im)y}{1 + \frac{Z_2}{\rho} \operatorname{th} (\beta + im)y} \quad (5.17)$$

Для частного случая короткозамкнутой линии имеем

$$Z_{кз} = \rho \operatorname{th}(\beta + i m) y = \rho \frac{\operatorname{th} \beta y + i \operatorname{tg} m y}{1 + i \operatorname{th} \beta y \operatorname{tg} m y}.$$

Продельвая несложные преобразования, получаем

$$Z_{вх} = R_{вх} + i X_{вх} = \rho \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sh} 2\beta y}{\operatorname{sh}^2 \beta y + \cos^2 m y} + i \rho \frac{1}{2} \frac{\sin 2m y}{\operatorname{sh}^2 \beta y + \cos^2 m y}. \quad (5.18)$$

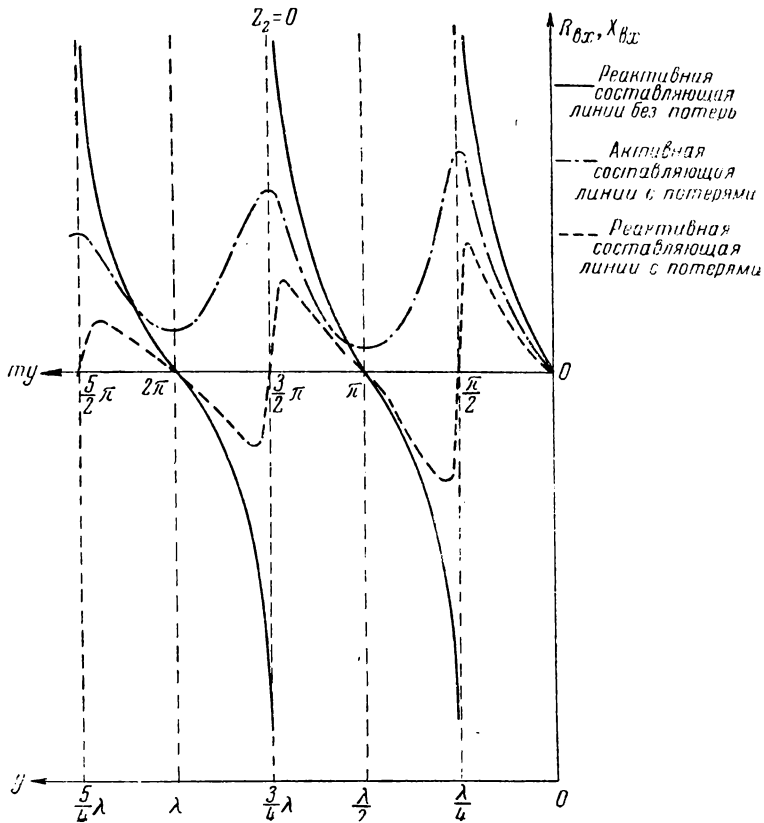
Аналогично для режима холостого хода будем иметь

$$Z_{вх} = \rho \operatorname{cth}(\beta + i m) y = R_{вх} + i X_{вх}$$

или

$$Z_{хх} = \rho \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sh} 2\beta y}{\operatorname{sh}^2 \beta y + \sin^2 m y} - i \rho \frac{1}{2} \frac{\sin 2m y}{\operatorname{sh}^2 \beta y + \sin^2 m y}. \quad (5.19)$$

Качественный характер кривых, соответствующих последним выражениям, дан на рис. 5.1 и 5.2. Там же даны кривые входного сопротивления для линии без потерь.



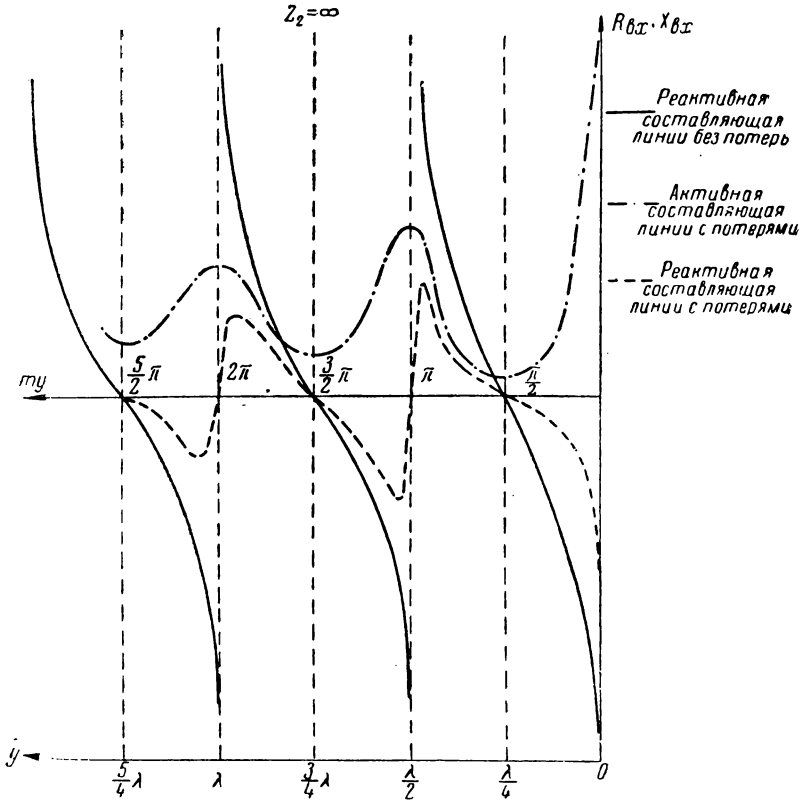


Рис. 5.2

Распределение тока и напряжения вдоль линии при различных нагрузках

Распределение тока и напряжения вдоль сравнительно коротких отрезков длинных линий обычно рассматривают, пренебрегая потерями в линии; волновое сопротивление, кроме того, принимается чисто активным.

Уравнения длинной линии (5.2) в этом случае упрощаются:

$$\left. \begin{aligned} \bar{U} &= \bar{U}_2 \cos my + i \bar{I}_2 \rho \sin my \\ \bar{I} &= \bar{I}_2 \cos my + i \frac{\bar{U}_2}{\rho} \sin my \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

В режиме короткого замыкания выражения для мгновенных значений напряжения и тока будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} u &= I_2 \rho \sin my \cos \omega t \\ i &= I_2 \cos my \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

В режиме холостого хода:

$$\left. \begin{aligned} u &= U_2 \cos my \sin \omega t \\ i &= \frac{U_2}{\rho} \sin my \cos \omega t \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

Распределение тока и напряжения в этих режимах соответствует стоячим волнам.

В режиме согласованной нагрузки ($Z_2 = \rho$):

$$\left. \begin{aligned} u &= U_2 \sin(\omega t + my) \\ i &= \frac{U_2}{\rho} \sin(\omega t + my) \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

В этом случае имеет место режим чисто бегущей волны.

Если нагрузка имеет чисто активный характер, т. е. $Z_2 = R_2$, в линии устанавливаются стоячие и бегущие волны:

$$\left. \begin{aligned} u &= U_2 \frac{\rho}{R_2} \sin(\omega t + my) + U_2 \cos my \left(1 - \frac{\rho}{R_2}\right) \sin \omega t \\ i &= \frac{U_2}{R_2} \sin(\omega t + my) + \frac{U_2}{\rho} \left(1 - \frac{\rho}{R_2}\right) \sin my \cos \omega t \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

Если нагрузка имеет чисто реактивный характер, т. е. $Z_2 = \pm iX_2$, в линии устанавливаются стоячие волны:

$$\left. \begin{aligned} u &= U_2 \left(\cos my + \frac{\rho}{X_2} \sin my \right) \sin \omega t \\ i &= \frac{U_2}{\rho} \left(\sin my - \frac{\rho}{X_2} \cos my \right) \cos \omega t \end{aligned} \right\} \quad (5.25)$$

Если нагрузка имеет комплексный характер, т. е. $Z_2 = R_2 + \pm iX_2$, в линии устанавливаются стоячие и бегущие волны (решение задачи 5.37):

$$\left. \begin{aligned} u &= U_2 \frac{\rho R_2}{Z_2^2} \sin(\omega t + my) + \\ &+ U_2 \left[\cos my \left(1 - \frac{\rho R_2}{Z_2^2}\right) + \sin my \frac{\rho X_2}{Z_2^2} \right] \sin \omega t \\ i &= \frac{U_2}{\rho} \frac{\rho R_2}{Z_2^2} \sin(\omega t + my) + \\ &+ \frac{U_2}{\rho} \left[\sin my \left(1 - \frac{\rho R_2}{Z_2^2}\right) - \cos my \frac{\rho X_2}{Z_2^2} \right] \cos \omega t \end{aligned} \right\} \quad (5.26)$$

Распределение тока и напряжения вдоль реальной линии, т. е. линии с потерями, будет отличаться только величиной и фазой амплитудного множителя. В этом случае амплитуда напряжения U_2 должна быть умножена на величину

$$\left[\operatorname{ch} \beta y + \frac{\rho}{Z_2} \operatorname{sh} \beta y \right],$$

а амплитуда тока I_2 — на величину

$$\left[\operatorname{ch} \beta y + \frac{Z_2}{\rho} \operatorname{sh} \beta y \right].$$

В остальных выражениях, полученные для линии без потерь, сохраняют свою силу и для линии с потерями.

Если длина линии невелика, указанные множители мало отличаются от единицы.

Использование отрезка линии в качестве колебательного контура

Короткозамкнутый отрезок длиной $\frac{\lambda}{4}$ можно на дециметровых волнах с успехом использовать в качестве колебательного контура, так как входное сопротивление такого отрезка существенно зависит от частоты (рис. 5.1).

При небольших расстройках, т. е. когда

$$x = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1,$$

сопротивление четвертьволнового отрезка на частоте $(\omega_0 + \Delta\omega)$ можно с достаточной точностью выразить формулой

$$Z(\omega) = \frac{\frac{\rho}{\beta l}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{2\beta l} x\right)^2}}, \quad (5.27)$$

а при частоте ω_0 , т. е. когда $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 0$, — формулой

$$Z(\omega_0) = \frac{\rho}{\beta l}. \quad (5.28)$$

Составим уравнение резонансной кривой в виде отношения

$$y = \frac{Z(\omega)}{Z(\omega_0)};$$

получаем

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{2\beta l} x\right)^2}}. \quad (5.29)$$

Сопоставляя это уравнение с уравнением резонансной кривой одиночного контура

$$v = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta \omega}{\alpha}\right)^2}},$$

легко получить выражение для добротности контура, образованного отрезком длинной линии

$$Q = \frac{\pi}{4\beta l} = \frac{\pi}{\beta \lambda}. \quad (5.30)$$

Неоднородные линии

Входное сопротивление неоднородной линии, составленной из двух однородных участков (рис. 5.3), подсчитывается по формуле

$$Z_{ax} = Z_{aa} \frac{1 + i \frac{\rho_1}{Z_{aa}} \operatorname{tg} ml_1}{1 + i \frac{Z_{aa}}{\rho_1} \operatorname{tg} ml_1}, \quad (5.31)$$

где

$$Z_{aa} = Z_2 \frac{1 + i \frac{\rho_2}{Z_2} \operatorname{tg} ml_2}{1 + i \frac{Z_2}{\rho_2} \operatorname{tg} ml_2}. \quad (5.32)$$

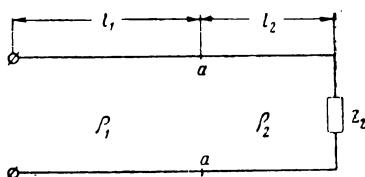


Рис. 5.3

Для частного случая неоднородной линии, состоящей из двух участков разомкнутых линий, применяют более простые формулы (решение задачи 5.51).

Для согласования сопротивлений генератора и нагрузки широко применяются экспоненциальные линии (рис. 5.4), у которых параметры L_1 и C_1 меняются вдоль линии по экспоненциальному закону:

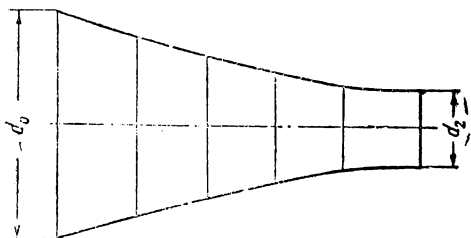


Рис. 5.4

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= L_0 e^{-\alpha x} \\ C_1 &= C_0 e^{\alpha x} \\ \rho &= \rho_0 e^{-\alpha x} \end{aligned} \right\} \quad (5.33)$$

Индекс „0“ относится величины к широкому концу линии; индекс „2“ — к узкому концу линии. Обычно ρ_0 и ρ_2 являются величинами заданными; коэффи-

циент расширения линии α можно по ним определить по формуле

$$\alpha = \frac{1}{l} \ln \frac{\rho_0}{\rho_2}. \quad (5.34)$$

Энергетические соотношения в длинной линии

Коэффициент полезного действия линии определяется формулой

$$\eta = \frac{P_2}{P_1}, \quad (5.35)$$

где P_2 — мощность, отдаваемая в нагрузку,

$$P_2 = \frac{I_2^2 R_2}{2}, \quad (5.36)$$

P_1 — мощность, отдаваемая в линию генератором,

$$P_1 = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\bar{U}_1 I_1^*). \quad (5.37)$$

Если не учитывать весьма малой реактивной составляющей волнового сопротивления, для определения кпд на основе ф-л (5.35), (5.36) и (5.37) можно получить выражение

$$\eta = \frac{2R_2 \rho}{(R_2^2 + \rho^2 + X_2^2) \operatorname{sh} 2\beta l + 2R_2 \rho \operatorname{ch} 2\beta l}. \quad (5.38)$$

Для случая чисто активной нагрузки, т. е. при $X_2 = 0$, последнее выражение можно преобразовать к виду

$$\eta = \frac{1}{\operatorname{ch} 2\beta l + \frac{1}{2} \left(\kappa + \frac{1}{\kappa} \right) \operatorname{sh} 2\beta l}, \quad (5.39)$$

в котором

$$\kappa = \frac{R_2}{\rho}. \quad (5.40)$$

Обычно $\beta l \ll 1$, $\operatorname{ch} 2\beta l \approx 1$, $\operatorname{sh} 2\beta l \approx 2\beta l$; тогда

$$\eta = \frac{1}{1 + \left(\kappa + \frac{1}{\kappa} \right) \beta l}. \quad (5.41)$$

Максимальное значение кпд имеет при $\kappa = 1$

$$\eta = \frac{1}{1 + 2\beta l} \approx e^{-2\beta l} \approx 1 - 2\beta l. \quad (5.42)$$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

5.1*. Рассчитать погонные параметры двухпроводной воздушной линии ($\operatorname{tg} \delta = 0$), составленной из медного провода диаметром 6 мм. Расстояние между проводами $d = 200$ мм. Рабочая частота $f = 100$ кГц.

5.2. Рассчитать первичные параметры открытой двухпроводной линии по следующим данным:

№ пп.		1	2	3	4
Расстояние между проводами, см		40	30	22	16
Диаметр провода, см		0,6	0,6	1,6	0,3
Данные генератора	λ , м	—	600	0,6	10
	f , Мгц	0,10	—	—	—

5.3*. Рассчитать погонные параметры коаксиального медного кабеля с полистироловой изоляцией, если известно:

$$\begin{aligned} r_1 &= 6 \text{ мм}, \\ r_2 &= 24 \text{ мм}, \\ f &= 10^7 \text{ гц}. \end{aligned}$$

5.4. Рассчитать первичные параметры медной коаксиальной линии, если наружный диаметр внутреннего провода (грубки) равен $2r_1 = 2$ см, а внутренний диаметр наружного $2r_2 = 16$ см. Угол потерь $\operatorname{tg} \delta$ принять равным нулю (изоляция-воздух). Частота колебаний $f = 10^8$ гц.

5.5. Рассчитать первичные параметры медного коаксиального кабеля по следующим данным:

№ пп.	1	2	3
Внутренний диаметр наружного провода, см	1,2	1,8	12
Наружный диаметр внутреннего провода, см	0,3	0,4	2
f , Мгц	10	1	—
λ , м	—	—	20
Вид изоляции	полистирол $\operatorname{tg} \delta = 2 \cdot 10^{-4}$	полистирол $\operatorname{tg} \delta = 2 \cdot 10^{-4}$	воздух

5.6*. Определить, каким должно быть соотношение диаметров наружного и внутреннего проводников в медной коаксиальной трубе, чтобы погонная ёмкость была равна $20 \frac{пФ}{м}$.

5.7*. Рассчитать волновое сопротивление воздушной двухпроводной медной линии на частоте 10^6 *Гц*.

Данные линии: $r = 1,5$ *мм*; $d = 200$ *мм*.

Рассчитать, кроме того, коэффициент затухания и коэффициент фазы. Коэффициент потерь $tg \delta$ принять равным нулю.

5.8. Рассчитать волновое сопротивление ρ , коэффициент затухания β и коэффициент фазы m для линий, данные о которых приведены в таблице. Значение погонной проводимости G_1 принять равным нулю.

№ пп.	Вид линии	Рабочая частота f , МГц	Длина волны λ , м	Двухпроводная медная линия		Концентрическая линия	
				расстояние между проводами d , см	диаметр провода $2r$, мм	наружный диаметр внутреннего провода d_1 , см	внутренний диаметр наружного провода d_2 , см
1	Открытая двухпроводная	0,6	—	20	6	—	—
2	Открытая двухпроводная	—	80	12	4	—	—
3	Концентрическая	1,2	—	—	—	1,2	8
4	Концентрическая	10,0	—	—	—	0,8	30

5.9. Рассчитать волновое сопротивление коаксиального кабеля, заполненного диэлектриком, у которого $\epsilon_r = 3$. Внутренний диаметр наружного проводника равен 10 *мм*, а наружный диаметр внутреннего 2,4 *мм*.

5.10. Дана линия с волновым сопротивлением $\rho = 100$ *ом*. Погонное сопротивление линии составляет $230 \frac{ом}{км}$. Найти затухание линии β и выразить его в $\frac{неп}{км}$ и $\frac{дБ}{км}$.

5.11*. Вывести формулу для расчёта коэффициента затухания β непосредственно по геометрическим размерам двухпроводной медной линии и длине волны генератора. Допустимо считать, что $G_1 = 0$.

5.12*. Выяснить, при каком соотношении между первичными параметрами линии L_1, C_1, R_1, G_1 , будет иметь место минимальное затухание.

5.13*. Найти соотношение между внешним и внутренним радиусами коаксиального кабеля, при котором будет иметь место минимальное затухание, считая, что $G_1 = 0$.

5.14*. В предыдущей задаче было установлено, что минимальное затухание будет иметь место при соотношении внешнего и внутреннего радиусов, равном 3,6. На практике однако, по конструктивным соображениям не всегда удаётся реализовать это соотношение.

Выяснить, в каких пределах можно изменять отношение $\frac{r_2}{r_1}$, так, чтобы затухание в линии отличалось не более чем на 10% от минимального.

5.15*. Найти соотношение между радиусом провода r и расстоянием между проводами d в двухпроводной линии, при котором будет иметь место минимальное затухание (считать, что $G_1 = 0$).

5.16*. Линия, питаемая генератором синусоидального напряжения с частотой $f = 25 \text{ МГц}$, имеет погонные параметры $C_1 = 16 \frac{\text{пФ}}{\text{м}}$ и $L_1 = 1 \frac{\text{мкГн}}{\text{м}}$. Найти скорость распространения радиоволн в такой линии и длину волны в линии.

5.17*. Составить общую формулу для расчёта длины волны в линии λ_L по известной длине волны в воздухе λ_g и параметрам линии.

5.18. Радиостанция работает на волне $\lambda_g = 300 \text{ м}$. Определить длину волны внутри фидера, соединяющего передатчик с антенной, если изолирующий слой обладает относительной диэлектрической постоянной $\epsilon_r = 2,25$.

5.19*. Рассчитать входное сопротивление короткозамкнутой линии без потерь, если длина линии равна 24 м , а рабочая длина волны $\lambda = 62 \text{ м}$. Линия выполнена из коаксиального воздушного кабеля, у которого радиус наружной трубы равен 200 мм , а радиус внутренней — 60 мм .

Определить также значение ёмкости или индуктивности, которое соответствует найденному входному сопротивлению.

5.20. Рассчитать входное сопротивление короткозамкнутой линии без потерь по данным, приведённым в таблице. Определить, кроме того, эквивалентные ёмкости и индуктивности, соответствующие найденным входным сопротивлениям.

№ пп.	Тип линии	Геометрические размеры линии мм	Длина линии м	Данные генератора	
				$\lambda, \text{ м}$	$f, \text{ МГц}$
1	Коаксиальный кабель с полистироловой изоляцией	$r_1 = 12$ $r_2 = 32$	1,5	—	74
2	Открытая двухпроводная медная	$r = 4$ $d = 200$	10	70	—
3	Воздушная коаксиальная из медных труб	$r_1 = 16$ $r_2 = 60$	6	20	—
4	Открытая двухпроводная медная	$r = 3$ $d = 160$	14	—	80

5.21*. Для согласования нагрузочного сопротивления с волновым сопротивлением применяют шлейфы, представляющие собой отрезки короткозамкнутых линий, длину которых можно менять. В таких задачах обычно расчёту подлежит длина линии, соответствующая заданному сопротивлению.

В настоящей задаче нужно рассчитать наименьшую длину короткозамкнутой линии, обеспечивающей входное сопротивление ёмкостного характера и равное 120 ом .

Волновое сопротивление линии $\rho = 100 \text{ ом}$. Длина волны генератора, питающего линию, $\lambda = 10 \text{ м}$.

5.22. Рассчитать наименьшую длину короткозамкнутой линии, входное сопротивление которой имеет заданные характер и величину. Данные для расчёта приведены в таблице.

№ пп.	Характер входного сопротивления	Величина входного сопротивления, <i>ом</i>	Волновое сопротивление линии, <i>ом</i>	Данные генератора	
				длина волны λ , <i>м</i>	частота f , <i>Мгц</i>
1	Ёмкостный	80	200	60	—
2	Индуктивный	60	180	—	70
3	Индуктивный	140	120	—	110
4	Ёмкостный	200	260	315	—

5.23*. Рассчитать входное сопротивление разомкнутой линии без потерь, имеющей волновое сопротивление 200 *ом*. Длина линии равна 9,7 *м*, а длина волны генератора, питающего линию, 36 *м*. Рассчитать также ёмкость или индуктивность, соответствующую данному входному сопротивлению.

5.24. Найти входное сопротивление разомкнутой линии без потерь, имеющей волновое сопротивление ρ и длину l . Данные для расчёта приведены в таблице

№ пп.	ρ , <i>ом</i>	l , <i>м</i>	Данные генератора	
			λ , <i>м</i>	f , <i>Мгц</i>
1	140	14	—	80
2	80	60	320	—
3	200	22	—	180
4	160	6	40	—

5.25*. Вывести формулу для расчёта волнового сопротивления по известным значениям входного сопротивления в режимах короткого замыкания и холостого хода и произвести расчёт волнового сопротивления для условий:

$$X_{кз} = 60 \text{ ом}, X_{хх} = 44 \text{ ом}.$$

5.26*. Линия без потерь, имеющая волновое сопротивление $\rho = 100$ *ом*, нагружена на чисто индуктивное сопротивление, равное 50 *ом*. Найти входное сопротивление линии на частоте $f = 310^6$ *гц* при длине линии, равной 5 *м*.

5.27. Нагрузка линии без потерь представляет собой либо катушку, либо конденсатор. Рассчитать входное сопротивление по условиям, приведенным в таблице:

№ пп.	ρ , <i>ом</i>	Нагрузка		Данные генератора		Длина линии l , <i>м</i>
		C , <i>пф</i>	L , <i>мкгн</i>	λ , <i>м</i>	f , <i>Мгц</i>	
1	120	400	—	—	1,6	8
2	400	—	200	300	—	6
3	220	300	—	—	1,2	12
4	180	—	800	60	—	4

5.28*. Генератор, питающий линию без потерь, имеет частоту $f = 10^6$ гц. Длина линии равна 60 м, волновое сопротивление $\rho = 100$ ом. Рассчитать нагрузочное сопротивление так, чтобы входное сопротивление было равно нулю.

5.29*. Вывести общие формулы для расчёта входного сопротивления четверть-волновой и полуволновой линий (при любых нагрузках).

5.30*. Показать, что для линий небольшой длины ($l \ll \lambda$) входное сопротивление короткозамкнутой линии имеет индуктивный характер и входная индуктивность численно (приблизительно) равна статической индуктивности, а входное сопротивление разомкнутой линии имеет ёмкостный характер и входная ёмкость численно равна статической ёмкости.

5.31*. Составить график изменения активной составляющей входного сопротивления короткозамкнутой и разомкнутой линий без потерь. Исходным материалом могут служить ф-лы (5.18) и (5.19), а также рис. 5.1 и 5.2.

5.32*. Напряжение на зажимах генератора, питающего линию без потерь, равно 20 в. Найти напряжение на конце разомкнутой линии длиной 20 м, если частота генератора равна $3 \cdot 10^6$ гц. Внутреннее сопротивление генератора можно принять равным нулю.

Решение провести: 1) на основе уравнений с отсчётом от конца линии и 2) на основе уравнений с отсчётом от начала линии.

5.33. Найти напряжение на конце разомкнутой линии (антенны) по известному напряжению генератора, включённому в начале линии, частоте генератора и длине линии. Данные указаны в таблице.

№ пп.	$U_1, в$	Данные генератора		$l, м$
		$\lambda, м$	$f, гц$	
1	40	40	—	8
2	120	—	$30 \cdot 10^6$	12
3	15	80	—	18

5.34*. Амплитуда напряжения на конце разомкнутой воздушной линии (антенны) равна 600 в. Найти амплитуду напряжения на расстоянии 40 м от конца линии на частоте $f = 10^6$ гц, а также амплитуду тока на этом же расстоянии, приняв, что волновое сопротивление $\rho = 300$ ом.

5.35. Найти амплитуду напряжения и амплитуду тока в данной точке разомкнутой линии по следующим условиям (см. таблицу):

№ пп.	Амплитуда напряжения в конце линии, в	Данные генератора		Расстояние от конца линии, м	Волновое сопротивление ом
		частота гц	длина волны м		
1	10 000	$3 \cdot 10^6$	—	166,6	200
2	2000	—	40	8	260
3	250	—	20	2,5	500
4	120	$30 \cdot 10^6$	—	12	240

5.36*. Были проведены два измерения с разомкнутой линией: измерено напряжение в конце линии $U_2 = 200$ в и ток на расстоянии, равном 2 м от конца линии, $I = 0,5$ а. Длина волны генератора $\lambda = 20$ м.

По полученным данным найти волновое сопротивление линии.

5.37*. Вывести выражения, передающие распределение напряжения и тока в длинной линии без потерь, нагруженной на комплексное сопротивление $Z_2 = R_2 + iX_2$.

5.38. Найти добротность контура, составленного из отрезка длинной линии с данными: $\rho = 200$ ом, $R_1 = 0,1$ ом/м на волне $\lambda_0 = 3,5$ м.

5.39*. Вывести формулу для расчёта добротности контура, образованного коаксиальным кабелем, по геометрическим размерам контура и длине волны.

Отношение $\frac{r_2}{r_1}$ принять равным 3,6, т. е. соответствующим максимально возможному значению добротности.

5.40. Рассчитать добротность контура в виде четвертьволнового отрезка коаксиальной линии, если $r_2 = 2$ см, а $\lambda = 60$ см. Соотношение внешнего и внутреннего радиусов равно 3,6.

5.41. Рассчитать радиус внешнего проводника коаксиального кабеля, при котором на волне $\lambda = 40$ см можно получить добротность, равную $Q = 2500$. Отношение внешнего и внутреннего радиусов равно 3,6.

5.42. Вывести формулу для расчёта добротности контура, составленного из отрезка коаксиального кабеля, по заданным геометрическим размерам и частоте.

5.43. Контур, составленный из отрезка медного коаксиального кабеля, работает на частоте $f = 3000$ Мгц. Размеры кабеля: $r_2 = 10$ мм, $r_1 = 5$ мм. Рассчитать добротность контура.

5.44. Составить формулу для расчёта резонансного сопротивления четвертьволнового отрезка длинной линии по известному волновому сопротивлению ρ и полному активному сопротивлению $R = K_1 l$.

5.45. Сопротивление потерь четвертьволнового отрезка линии $R = 0,241$ ом. Волновое сопротивление составляет $\rho = 41$ ом. Найти значение резонансного сопротивления.

5.46*. Линия состоит из двух однородных участков. Длина первого $l_1 = 45$ м, второго $l_2 = 70$ м; волновое сопротивление первого $\rho_1 = 480$ ом, второго $\rho_2 = 60$ ом. В конце линии включена нагрузка $Z_2 = R_2 = 60$ ом. Длина волны генератора $\lambda = 40$ м.

Найти входное сопротивление данной неоднородной линии.

5.47. Линия состоит из двух однородных участков с данными: l_1, l_2, ρ_1, ρ_2 . Длина волны генератора равна λ ; нагрузка в конце второго участка Z_2 . Найти входное сопротивление всей линии по данным, приведенным в таблице, считая, что $Z_2 = R_2 = \rho_2$.

№ пп.	$l_1, \text{ м}$	$\rho_1, \text{ ом}$	$\rho_2, \text{ ом}$	$\lambda, \text{ м}$
1	55	450	580	60
2	60	450	560	70
3	10	700	500	50

5.48*. Каковы волновые сопротивления различных участков длинной линии АВ, ВС и CD (рис. 5.5), если во всех трёх участках наблюдается режим бегущей волны? Каждое из трёх активных сопротивлений равно 240 ом.

5.49*. Волновое сопротивление левого участка линии (рис. 5.6) $\rho_1 = 60 \text{ ом}$, а правого — $\rho_2 = 40 \text{ ом}$. Какую величину должны иметь сопротивления R_1 и R_2 , чтобы в обоих участках имел место режим бегущей волны? Что покажут при этом амперметры A_1 и A_2 , если эдс генератора 150 в, а его внутреннее сопротивление $R_i = 15 \text{ ом}$.

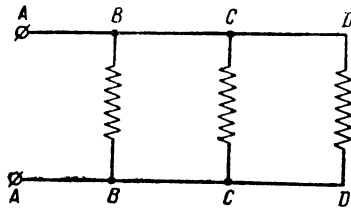


Рис. 5.5

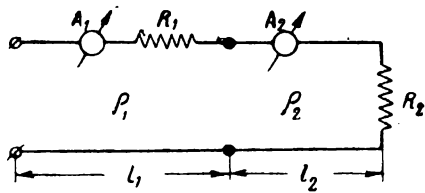


Рис. 5.6

5.50. В неоднородную линию, составленную из двух однородных участков (рис. 5.7), с $\rho_1 = 60 \text{ ом}$ и $\rho_2 = 100 \text{ ом}$, нужно включить сопротивления R_1 и R_2 с таким расчётом, чтобы в линии имела место бегущая волна. Определить сопротивления R_1 и R_2 .

5.51*. Дана неоднородная линия, состоящая из двух однородных участков l_1 и l_2 с волновыми сопротивлениями ρ_1 и ρ_2 (рис. 5.8а). Данную неоднородную линию заменить эквивалентной однородной линией с волновым сопротивлением ρ_1 (рис. 5.8 б). Рассчитать длину участка эквивалентной линии $l_{\text{эkv}}$.

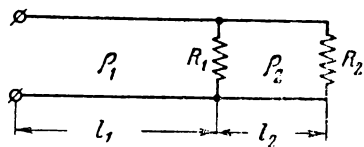


Рис. 5.7

5.52. Рассчитать коэффициент расширения экспоненциальной линии α , предназначенной для согласования сопротивлений 800 и 400 ом, если, кроме того, известно, что длина линии должна быть равна 10 м.

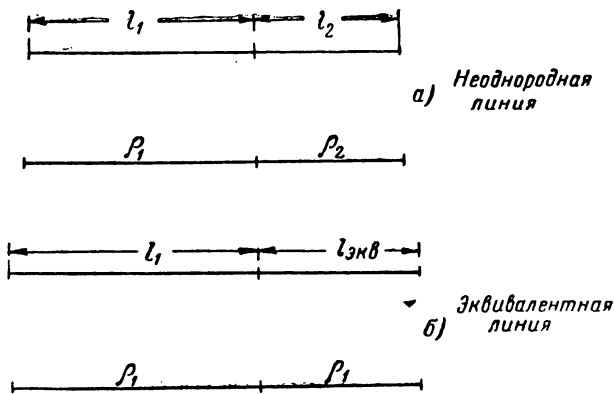


Рис. 5.8

5.53*. Вывести формулу для расчёта расстояния между проводами d_x в любой точке экспоненциальной двухпроводной линии.

5.54*. Рассчитать расстояние между проводами в начале и конце экспоненциальной двухпроводной линии по условиям задачи 5.52; радиус провода r принять равным 0,2 см.

5.55*. Дана согласованная линия с волновым сопротивлением ρ (рис. 5.9) к началу этой линии подключён небольшой отрезок ($l \ll \lambda$) линии с волновым сопротивлением ρ_1 . Выяснить, как меняется характер входного сопротивления общей неоднородной линии в зависимости от соотношения ρ и ρ_1 .

5.56. Линия длиной 50 м нагружена на комплексную нагрузку $Z_2 = (100 - i1000) \text{ ом}$. Волновое сопротивление линии $\rho = 100 \text{ ом}$; погонное сопротивление $R_1 = 10 \frac{\text{ом}}{\text{км}}$.

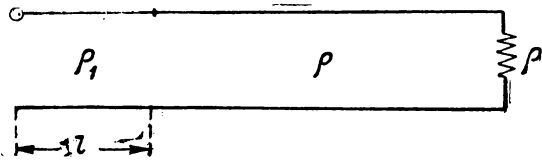


Рис. 5.9

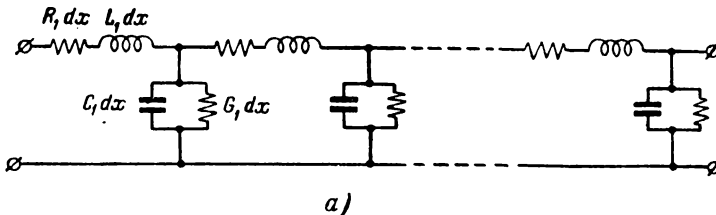
Рассчитать кпд линии.

5.57. Линия получает питание от генератора, имеющего внутреннее сопротивление $R_1 = 200 \text{ ом}$ и развивающего синусоидальную эдс с амплитудой $E = 60 \text{ в}$. Линия нагружена на активное сопротивление $R_2 = 100 \text{ ом}$, которое равно волновому сопротивлению.

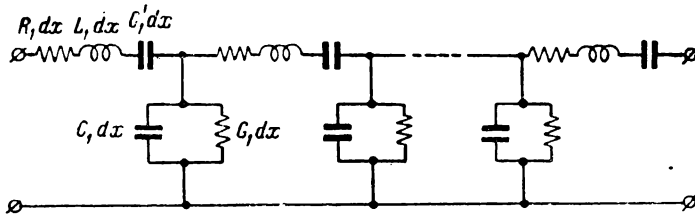
Найти напряжение U_1 на зажимах генератора и мощность, выделяемую на активной нагрузке.

5.58. Радиопередатчик, развивающий мощность $P_1 = 400 \text{ вт}$, работает на фидер, имеющий затухание $\beta l = 0,05 \text{ nep}$. Нагрузка фидера чисто активна и равна $R_2 = 500 \text{ ом}$. Фидер работает в режиме бегущей волны. Найти амплитуду напряжения и тока в конце линии, мощность, выделяемую на нагрузке, и кпд линии; кроме того, определить амплитуду напряжения в начале линии.

5.59. Линия с волновым сопротивлением $\rho = 200 \text{ ом}$, нагружена на активное сопротивление $R_2 = 600 \text{ ом}$. Затухание линии $0,1 \text{ nep}$. Определить коэффициент полезного действия.



а)



б)

Рис. 5.10

5.60*. Как известно, при выводе телеграфных уравнений линию представляют в виде бесконечно большой цепи соединений ячеек с бесконечно малыми сосредоточенными параметрами (рис. 5.10а). При этих предположениях, коэффициент распространения γ [ф-ла (5.4)] равен

$$\gamma = \sqrt{Z_1 Y_1} = \sqrt{(R_1 + i \omega L_1)(G_1 + i \omega C_1)} = \beta + i m.$$

В линии без потерь $\gamma = im$.

Пусть задана линия, которую можно представить в виде рис. 5.10 б. Составить выражение коэффициента распространения для этой линии и выяснить (только для линии без потерь) при каком соотношении между C_1 и C_1' в линии невозможно распространение электрических волн.

5.61. Задана линия, которую можно представить в виде, изображённом на рис. 5.11. Найти выражение для коэффициента распространения данной линии и выяснить (только для линии без потерь) границу значений L_1' , при которых в линии возможно распространение электромагнитной энергии.

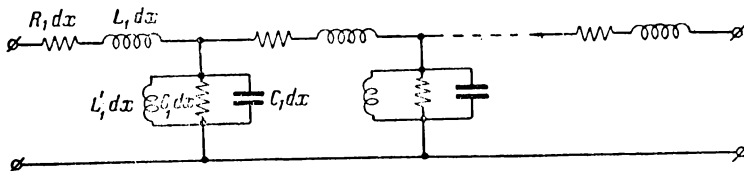


Рис. 5.11

§ 6. Четырёхполюсники

Основные уравнения четырёхполюсника

Теория четырёхполюсников упрощает расчёт линейных цепей путём типизации уравнений и вычисления (табулирования) их коэффициентов для наиболее распространённых схем.

Любой линейный четырёхполюсник (рис. 6.1) может быть охарактеризован рядом уравнений, связывающих токи и напряжения на входе с токами и напряжениями на выходе.

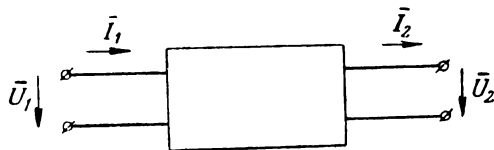


Рис. 6.1

Наибольшее распространение получили уравнения, связывающие «вход с выходом», так называемые основные уравнения четырёхполюсника:

$$\left. \begin{aligned} \bar{U}_1 &= A_{11} \bar{U}_2 + A_{12} \bar{I}_2 \\ \bar{I}_1 &= A_{21} \bar{U}_2 + A_{22} \bar{I}_2 \end{aligned} \right\}. \quad (6.1)$$

В тех случаях, когда другие уравнения четырёхполюсника [уравнения (6.3) и (6.4)] не используются, основные уравнения (6.1) удобнее представлять в виде:

$$\left. \begin{aligned} \bar{U}_1 &= A \bar{U}_2 + B \bar{I}_2 \\ \bar{I}_1 &= C \bar{U}_2 + D \bar{I}_2 \end{aligned} \right\}, \quad (6.2)$$

отличающемся от вида (6.1) только обозначениями коэффициентов.

Коэффициенты четырёхполюсников, записанные в виде матриц (см. ниже), приведены в табл. 6.2.

Уравнения, связывающие напряжения входа и выхода с токами входа и выхода, записываются в виде:

$$\left. \begin{aligned} \bar{U}_1 &= Z_{11} \bar{I}_1 + Z_{12} \bar{I}_2 \\ \bar{U}_2 &= Z_{21} \bar{I}_1 + Z_{22} \bar{I}_2 \end{aligned} \right\}, \quad (6.3)$$

а уравнения, связывающие токи входа и выхода с напряжениями входа и выхода, в виде:

$$\left. \begin{aligned} \bar{I}_1 &= Y_{11} \bar{U}_1 + Y_{12} \bar{U}_2 \\ \bar{I}_2 &= Y_{21} \bar{U}_1 + Y_{22} \bar{U}_2 \end{aligned} \right\}. \quad (6.4)$$

Коэффициенты A , так же как коэффициенты Z и Y , можно определять для каждой конкретной схемы при помощи „опытов холостого хода и короткого замыкания“.

При холостом ходе $I_2 = 0$ и ур-ния (6.1) упрощаются:

$$\left. \begin{aligned} \bar{U}_1 &= A_{11} \bar{U}_2 \\ \bar{I}_1 &= A_{21} \bar{U}_2 \end{aligned} \right\}. \quad (6.5)$$

При коротком замыкании $U_2 = 0$ и ур-ния (6.1) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \bar{U}_1 &= A_{12} \bar{I}_2 \\ \bar{I}_1 &= A_{22} \bar{I}_2 \end{aligned} \right\}. \quad (6.6)$$

Выражая напряжения и токи через параметры схемы и решая системы (6.5) и (6.6), получаем значения коэффициентов A .

Коэффициенты A можно также определять по известным значениям входных сопротивлений при холостом ходе и коротком замыкании (задача 6.12 и последующие).

Знание коэффициентов A даёт возможность определить коэффициенты Z и Y при помощи формул, которые можно получить из сопоставления ур-ний (6.3) и (6.4) с ур-ниями (6.1).

Формулы эти имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} Z_{11} &= \frac{A_{11}}{A_{21}}; & Z_{12} &= -\frac{1}{A_{21}} \\ Z_{21} &= \frac{1}{A_{21}}; & Z_{22} &= -\frac{A_{22}}{A_{21}} \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

$$\left. \begin{aligned} Y_{11} &= \frac{A_{22}}{A_{12}}; & Y_{12} &= -\frac{1}{A_{12}} \\ Y_{21} &= \frac{1}{A_{12}}; & Y_{22} &= -\frac{A_{11}}{A_{12}} \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

Между коэффициентами основных уравнений существует зависимость

$$A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21} = 1, \quad (6.9)$$

которая для симметричного четырёхполюсника ($A_{11} = A_{22}$) упрощается и принимает вид

$$A_{11}^2 - A_{12} A_{21} = 1. \quad (6.10)$$

Входное сопротивление „слева — направо“ четырёхполюсника находится из основных уравнений

$$Z_{вх} = \frac{\bar{U}_1}{\bar{I}_1} = \frac{A_{11} Z_2 + A_{12}}{A_{21} Z_2 + A_{22}}, \quad (6.11)$$

где $Z_2 = \frac{\bar{U}_2}{\bar{I}_2}$ — сопротивление нагрузки.

Входное сопротивление „справа — налево“, т. е. „выходное сопротивление“, рассчитывается по формуле

$$Z_{вых} = \frac{A_{22} Z_{вн} + A_{12}}{A_{21} Z_{вн} + A_{11}}, \quad (6.11a)$$

где $Z_{вн}$ — внутреннее сопротивление генератора.

Входные сопротивления „слева — направо“ четырёхполюсника для режимов холостого хода и короткого замыкания определяются выражениями:

$$Z_{xx} = \frac{A_{11}}{A_{21}}; \quad Z_{кз} = \frac{A_{12}}{A_{22}}. \quad (6.12)$$

Выражение для комплексного коэффициента передачи имеет вид

$$K(i\omega) = \frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} = \frac{1}{A_{11} + \frac{A_{12}}{Z_2}}. \quad (6.13)$$

Для ненагруженного четырёхполюсника ($Z_2 = \infty$) последнее выражение упрощается

$$K(i\omega) = \frac{1}{A_{11}}. \quad (6.14)$$

Таблица 6.1

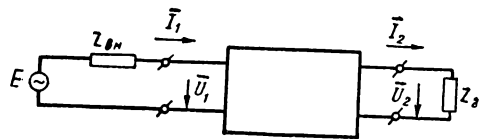
Сводка формул

Определяемая величина	Ф о р м у л а	№ фор- мул
Входное напряжение	$\bar{U}_1 = \bar{E} \frac{A_{11} Z_2 + A_{12}}{H_a}$	6.15
Входной ток	$\bar{I}_1 = \bar{E} \frac{A_{21} Z_2 + A_{22}}{H_a}$	6.16
Выходное напряжение	$\bar{U}_2 = \bar{E} \frac{Z_2}{H_a}$	6.17
Выходной ток	$\bar{I}_2 = \frac{\bar{E}}{H_a}$	6.18
Отношение выходного и входного напряжений (коэффициент передачи)	$\frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} = \frac{1}{A_{11} + \frac{A_{12}}{Z_2}}; \left(\frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} \right)_{Z_2=\infty} = \frac{1}{A_{11}}$	6.19
Отношение выходного и входного токов	$\frac{\bar{I}_2}{\bar{I}_1} = \frac{1}{A_{21} Z_2 + A_{22}}; \left(\frac{\bar{I}_2}{\bar{I}_1} \right)_{Z_2=0} = \frac{1}{A_{22}}$	6.20
Отношение выходного тока к входному напряжению	$\frac{\bar{I}_2}{\bar{U}_1} = \frac{1}{A_{11} Z_2 + A_{12}}; \left(\frac{\bar{I}_2}{\bar{U}_1} \right)_{Z_2=0} = \frac{1}{A_{12}}$	6.21
Отношение выходного напряжения к входному току	$\frac{\bar{U}_2}{\bar{I}_1} = \frac{1}{A_{21} + \frac{A_{22}}{Z_2}}; \left(\frac{\bar{U}_2}{\bar{I}_1} \right)_{Z_2=\infty} = \frac{1}{A_{21}}$	6.22
Входное сопротивление	$Z_{ex} = \frac{\bar{U}_1}{\bar{I}_1} = \frac{A_{11} Z_2 + A_{12}}{A_{21} Z_2 + A_{22}};$ $Z_{xx} = \frac{A_{11}}{A_{21}}; Z_{K3} = \frac{A_{12}}{A_{22}}$ ($Z_2=\infty$) ($Z_2=0$)	6.23

Примечание. $H_a = A_{22} Z_{\theta H} + A_{11} Z_2 + A_{21} Z_{\theta H} Z_2 + A_{12}$

С х е м а

Величина H_a называется сопротивлением передачи [см. ф-лу (6.18)].



Пользуясь ур-ниями (6.1), (6.3) и (6.4), можно составить удобные формулы для расчёта токов и напряжений по известным параметрам схемы, сопротивлению нагрузки, напряжению и внутреннему сопротивлению источника.

В табл. 6.1¹⁾ дана сводка этих формул вместе со схемой, обозначения которой не нуждаются в пояснениях. Все формулы выражены через коэффициенты A , определяемые по табл. 6.2.

По формулам табл. 6.1 можно быстро находить токи и напряжения входа и выхода, а также отношение этих токов и напряжений.

Применение матричного исчисления к теории четырёхполюсников

Матричное исчисление (матричная алгебра) упрощает расчёт параметров сложных четырёхполюсников.

Сложный четырёхполюсник можно рассматривать как сочетание элементарных четырёхполюсников, параметры которых известны. Параметры сложного четырёхполюсника соответствуют матрице, которая представляет собой результат действия над матрицами элементарных четырёхполюсников.

Матричное исчисление упрощает и, можно сказать, автоматизирует операции, производимые над системами уравнений.

Напомним самые основные сведения из матричной алгебры. Матрицей называется совокупность чисел, обычно записываемых в следующем виде:

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (6.24)$$

При $m = n$ матрица называется прямоугольной,

$m = n$ — квадратной,

$m = 1$ — матрицей-строкой,

$n = 1$ — матрицей-столбцом.

Матрицы равны друг другу, если равны все элементы в отдельности.

Любая матрица может быть сведена к квадратной путём добавления нулей:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}; \quad [ab] = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.25)$$

¹⁾ Э. В. Зелях. Основы общей теории линейных электрических схем. Издательство АН СССР 1951.

Сложение матриц производится по следующему правилу: каждый элемент матрицы суммы образуется из суммы соответствующих элементов слагаемых матриц. Например:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}. \quad (6.26)$$

Умножение матриц производится по следующему правилу: элемент C_{ij} ¹⁾ матрицы произведения равен сумме произведений из элементов i -й строки первой матрицы на соответствующие элементы j -го столбца второй матрицы.

Примеры:

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} (6.27)$$

Операция умножения имеет смысл лишь в том случае, если первая матрица имеет столько же столбцов сколько вторая матрица имеет строк.

Умножение матриц в общем случае не подчиняется переместительному закону, т. е.

$$[a] \cdot [b] \neq [b] \cdot [a]. \quad (6.28)$$

Уравнения четырёхполюсника могут быть записаны в матричном виде.

Например, основные уравнения:

$$\begin{aligned} \bar{U}_1 &= A_{11} \bar{U}_2 + A_{12} \bar{I}_2 \\ \bar{I}_1 &= A_{21} \bar{U}_2 + A_{22} \bar{I}_2 \end{aligned}$$

можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_2 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix}, \quad (6.29)$$

что легко проверить, пользуясь правилом умножения:

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} \bar{U}_2 + A_{12} \bar{I}_2 \\ A_{21} \bar{U}_2 + A_{22} \bar{I}_2 \end{bmatrix}.$$

¹⁾ Здесь i — номер строки, а j — номер столбца.

Так как равенство матриц возможно только лишь при условии равенства всех элементов в отдельности, то

$$\left. \begin{aligned} \bar{U}_1 &= A_{11} \bar{U}_2 + A_{12} \bar{I}_2 \\ \bar{I}_1 &= A_{21} \bar{U}_2 + A_{22} \bar{I}_2 \end{aligned} \right\},$$

т. е. получили основные уравнения четырёхполюсника.

Совершенно так же может быть произведена матричная запись и других уравнений четырёхполюсника:

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{I}_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\}. \quad (6.30)$$

Матрицы сложных четырёхполюсников можно находить, совершая операции над матрицами элементарных четырёхполюсников.

В случае „каскадного“ соединения четырёхполюсников (рис. 6.2) общая матрица „A“ равна матричному произведению

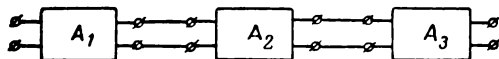


Рис. 6.2

матриц „A_i“ отдельных четырёхполюсников, взятому в том же порядке, в каком соединены эти четырёхполюсники, т. е.

$$[A] = [A_1] \cdot [A_2] \dots [A_n]. \quad (6.31)$$

В случае параллельного соединения четырёхполюсников (рис. 6.3) общая матрица „Y“ равна сумме матриц „Y_i“ отдельных четырёхполюсников, т. е.

$$[Y] = [Y_1] + [Y_2] + \dots + [Y_n]. \quad (6.32)$$

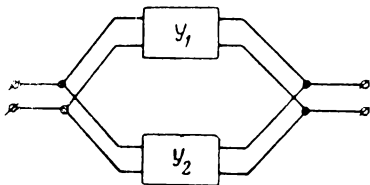


Рис. 6.3

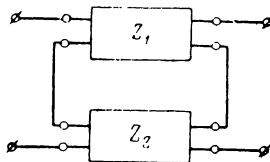


Рис. 6.4

В случае последовательного соединения четырёхполюсников (рис. 6.4) общая матрица „Z“ равна сумме матриц „Z_i“ отдельных четырёхполюсников, т. е.

$$[Z] = [Z_1] + [Z_2] + \dots + [Z_n]. \quad (6.33)$$

Таблица 6.2

Матрицы некоторых четырёхполюсников

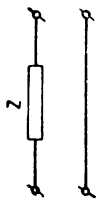
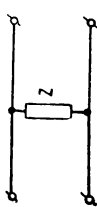
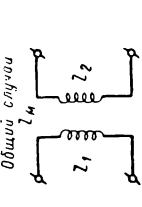
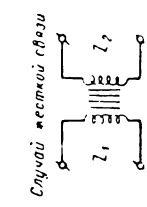
№ пп.	Схема	Матрица A	Матрица Z	Матрица Y
1		$\begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	-	$\frac{1}{Z} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
2		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{bmatrix}$	$Z \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	-
3	<p>Общий случай</p> 	$\pm \frac{1}{Z_M} \begin{bmatrix} Z_1 & Z_1 Z_2 - Z_M^2 \\ 1 & Z_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Z_1 & \mp Z_M \\ \pm Z_M & -Z_2 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} \begin{bmatrix} Z_2 & \mp Z_M \\ \pm Z_M & -Z_1 \end{bmatrix}$
4	<p>Случай жесткой связи</p> 	$\begin{bmatrix} \pm \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} & 0 \\ \pm \frac{1}{\sqrt{Z_1 Z_2}} & \pm \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Z_1 & \mp \sqrt{Z_1 Z_2} \\ \pm \sqrt{Z_1 Z_2} & -Z_2 \end{bmatrix}$	-

Таблица 6.2 (продолжение)

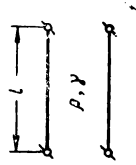
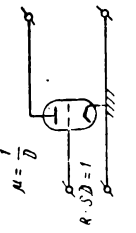
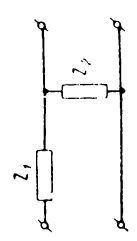
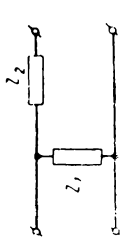
№ пп.	Схема	Матрица A	Матрица Z	Матрица Y
5		$\begin{bmatrix} \text{ch } \gamma l & \rho \text{ sh } \gamma l \\ \frac{\text{sh } \gamma l}{\rho} & \text{ch } \gamma l \end{bmatrix}$	$\frac{\rho}{\text{sh } \gamma l} \begin{bmatrix} \text{ch } \gamma l & -1 \\ 1 & -\text{ch } \gamma l \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\rho \text{ sh } \gamma l} \begin{bmatrix} \text{ch } \gamma l & -1 \\ 1 & -\text{ch } \gamma l \end{bmatrix}$
6		$\begin{bmatrix} -D & -\frac{1}{S} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	-	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -S & -\frac{1}{R_l} \end{bmatrix}$
7		$\begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_2} & Z_1 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & -Z_2 \\ Z_2 & -Z_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{Z_1} & -\frac{1}{Z_1} \\ \frac{1}{Z_2} & -\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right) \end{bmatrix}$
8		$\begin{bmatrix} 1 & Z_2 \\ \frac{1}{Z_1} & 1 + \frac{Z_2}{Z_1} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Z_1 & -Z_1 \\ Z_1 & -(Z_1 + Z_2) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} & -\frac{1}{Z_2} \\ \frac{1}{Z_2} & -\frac{1}{Z_2} \end{bmatrix}$

Таблица 6.2 (продолжение)

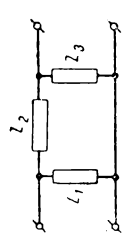
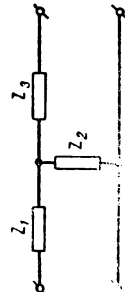
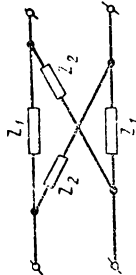
№ пп.	Схема	Матрица A	Матрица Z	Матрица Y
9		$\begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_2}{Z_3} & Z_3 \\ \frac{Z_1 + Z_3 + Z_2}{Z_1 Z_3} & 1 + \frac{Z_2}{Z_1} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{Z_1 + Z_3 + Z_2} \times \begin{bmatrix} Z_1(Z_3 + Z_2) & -Z_1 Z_3 \\ Z_1 Z_3 & -Z_3(Z_1 + Z_2) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 Z_3} & -\frac{1}{Z_3} \\ \frac{1}{Z_3} & -\frac{Z_2 + Z_3}{Z_3 Z_3} \end{bmatrix}$
10		$\begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_3} & Z_1 + Z_3 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2} \\ \frac{1}{Z_3} & 1 + \frac{Z_3}{Z_2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & -Z_3 \\ Z_3 & -(Z_3 + Z_2) \end{bmatrix}$	$\frac{1}{Z_1 Z_3 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3} \times \begin{bmatrix} Z_3 + Z_3 & -Z_3 \\ Z_3 & -(Z_1 + Z_2) \end{bmatrix}$
11		$\frac{1}{Z_2 - Z_1} \times \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & 2Z_1 Z_2 \\ 2 & Z_1 + Z_3 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_1 - Z_3 \\ -(Z_1 - Z_2) & -(Z_1 + Z_2) \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2Z_1 Z_3} \times \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_1 - Z_3 \\ -(Z_1 - Z_2) & -(Z_1 + Z_2) \end{bmatrix}$

Таблица 6.2 (продолжение)

№ пп.	Схема	Матрица А
12		$\begin{bmatrix} \frac{Z_2(Z_3 + Z_4) + Z_1(Z_3 + Z_3 + Z_4)}{Z_3 + Z_4} & \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_3} \\ \frac{Z_2 + Z_3 + Z_4}{Z_3 Z_4} & \frac{Z_2 + Z_3}{Z_3} \end{bmatrix}$
13		$\begin{bmatrix} \frac{Z_1(Z_3 + Z_4) + Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4)}{Z_1 Z_3 + Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4)} & \frac{Z_4(Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3)}{Z_1 Z_3 + Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4)} \\ \frac{Z_1 + Z_3 + Z_4}{Z_1 Z_3 + Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4)} & \frac{Z_3(Z_1 + Z_4) + Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4)}{Z_1 Z_3 + Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4)} \end{bmatrix}$
14		$\begin{bmatrix} \frac{(Z_3 + Z_3)(Z_4 + Z_5) + Z_3 Z_3}{Z_3 Z_5} & \frac{Z_2 Z_3 + Z_2 Z_4 + Z_3 Z_4}{Z_3} \\ \frac{Z_3(Z_1 + Z_2) + (Z_4 + Z_5)(Z_1 + Z_3 + Z_3)}{Z_3 Z_4 Z_5} & \frac{Z_4(Z_1 + Z_2) + Z_4(Z_1 + Z_3 + Z_3)}{Z_1 Z_3} \end{bmatrix}$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

6.1*. Для схемы, изображённой на рис. 6.5, вывести формулы для расчёта коэффициентов A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} .

6.2*. Для схемы, изображённой на рис. 6.6, вывести формулы для расчёта коэффициентов A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} .

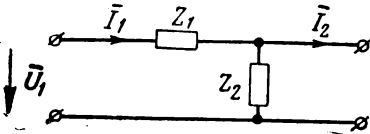


Рис. 6.5

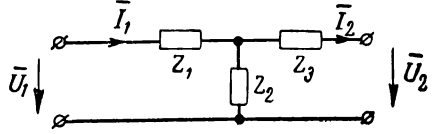


Рис. 6.6

6.3. Вывести формулы для расчёта коэффициентов A для схем, изображённых на рис. 6.7 и 6.8.

6.4*. По найденным в задаче 6.1 коэффициентам A_{11} , A_{12} , A_{21} и A_{22} найти коэффициенты Z и Y .

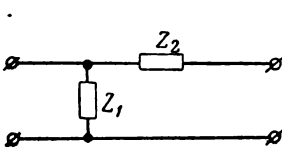


Рис. 6.7

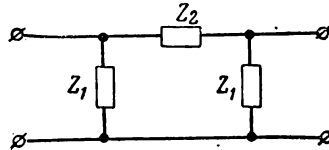


Рис. 6.8

6.5. По найденным в задаче 6.2 коэффициентам A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} определить коэффициенты Z и Y .

6.6*. Дана схема, изображённая на рис. 6.9.

Определить коэффициенты A и, кроме того, проверить, удовлетворяется ли равенство $A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1$.

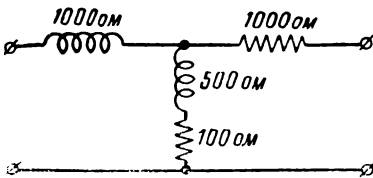


Рис. 6.9

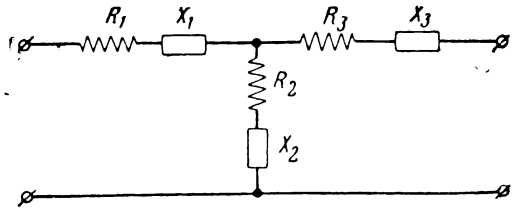


Рис. 6.10

6.7. Определить коэффициенты A на частоте f четырёхполюсника, схема которого изображена на рис. 6.10. Проверить, кроме того, удовлетворяется ли соотношение

$$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1.$$

Данные для расчёта приведены в таблице.

№ при- меров	R_1 ом	X_1	R_2 ом	X_2	R_3 ом	X_3	Частота f гц
1	10	$L = 0,318$ мгн	0	$C = 0,1$ мкф	10	$L = 0,318$ мгн	10 000
2	0	$C = 36 200$ пф	10^3	$L = 1,01$ гн	10	$C = 36 200$ пф	550
3	0	$L = 320$ мкгн	10	$L = 100$ мкгн	100	0	50 000

6.8*. Определить коэффициенты A схемы, состоящей из двух связанных катушек (рис. 6.11), по следующим данным:

индуктивность первой катушки $L_1 = 100$ мкгн,
индуктивность второй катушки $L_2 = 400$ мкгн,
активное сопротивление первой катушки $R_1 = 10$ ом,
активное сопротивление второй катушки $R_2 = 40$ ом,

коэффициент связи $\kappa = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = 0,1$,

частота $f = 159$ кгц.

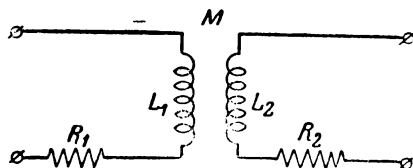


Рис. 6.11

6.9. Определить коэффициенты A для схем рис. 6.12. Данные параметров указаны на схемах.

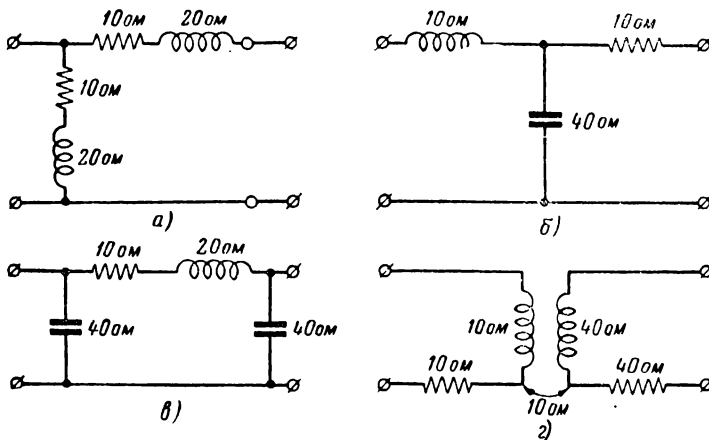


Рис. 6.12

6.10*. Определить на частоте $f = 500$ гц коэффициенты A четырёхполюсника, схема которого изображена на рис. 6.13; по найденным коэффициентам A определить коэффициенты Z и Y на той же частоте.

6.11. По найденным в задаче 6.7 (пример 1) коэффициентам A определить коэффициенты Z и Y .

6.12*. Найти коэффициенты A для отрезка однородной длинной линии, имеющей волновое сопротивление ρ и коэффициент распространения γ .

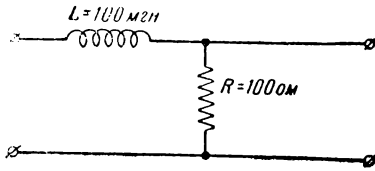


Рис. 6.13

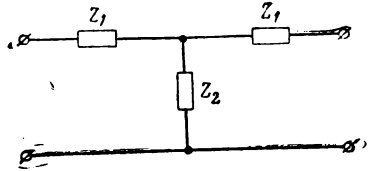


Рис. 6.14

6.13. По найденным в задаче 6.12 коэффициентам A отрезка длинной линии определить коэффициенты Z и Y .

6.14*. Вывести общие формулы для определения коэффициентов A симметричного четырёхполюсника по известным значениям входных сопротивлений холостого хода Z_{xx} и короткого замыкания $Z_{кз}$.

6.15*. По формулам, полученным в задаче 6.14, найти коэффициенты A для схемы рис. 6.14.

6.16*. Изменить основные уравнения четырёхполюсника (рис. 6.15а)

$$\bar{U}_1 = A_{11}\bar{U}_2 + A_{12}\bar{I}_2,$$

$$\bar{I}_1 = A_{21}\bar{U}_2 + A_{22}\bar{I}_2$$

применительно к схеме, в которой генератор и нагрузку поменяли местами (рис. 6.15б), и найти выражение для входного сопротивления „справа-налево“.

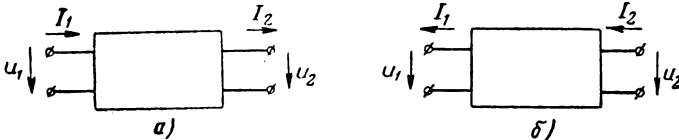


Рис. 6.15

6.17*. Вывести общие формулы для расчёта коэффициентов A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} несимметричного четырёхполюсника по известным значениям сопротивлений входа в режиме холостого хода Z_{xx} и в режиме короткого замыкания $Z_{кз}$, а также сопротивлению выхода в режиме короткого замыкания $Z_{вых кз}$.

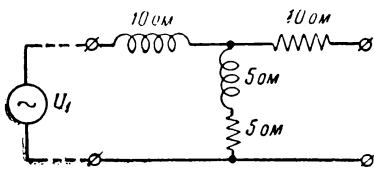


Рис. 6.16

6.18*. Найти входное сопротивление четырёхполюсника, схема которого изображена на рис. 6.13, если нагрузка представляет собой чисто активное сопротивление $Z_2 = R_2 = 100$ Ом. Частота $f = 500$ гц.

6.19. Найти входное сопротивление закороченного в нагрузку четырёхполюсника по данным первых двух примеров задачи 6.7.

6.20*. Дан четырёхполюсник, схема которого изображена на рис. 6.16. Известно, что на вход схемы подаётся синусоидальное напряжение $U_1 = 1$ в. Найти напряжение U_2 , а также сдвиг фаз между U_2 и U_1 .

6.21. Дан четырёхполюсник, схема которого приведена на рис. 6.17. Найти абсолютное значение амплитуды напряжения на выходе U_2 при частоте f , если известно напряжение на входе. Данные для расчёта приведены в таблице.

№ пп.	U_1 в	f гц	R_1 ом	X_1	R_2 ом	X_2	R_3 ом	X_3
1	10	15000	10	$L = 0,5$ мГн	0	$C = 0,05$ мкФ	20	$L = 1$ мГн
2	20	1000	0	$C = 0,1$ мкФ	10	$L = 0,5$ мкГн	0	$C = 0,1$ мкФ
3	10	500	0	$C = 0,5$ мкФ	20	$L = 1$ мГн	0	$C = 0,1$ мкФ
4	100	50000	100	$L = 2,5$ мГн	0	$C = 0,5$ мкФ	200	$L = 5$ мГн

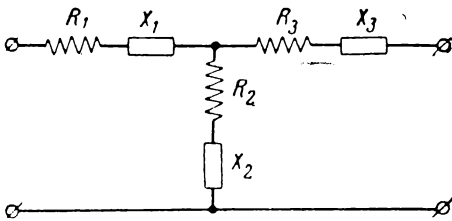


Рис. 6.17

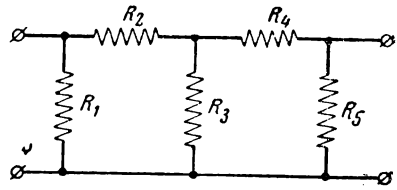


Рис. 6.18

6.22*. Дана схема (рис. 6.18), состоящая из активных сопротивлений:

- $R_1 = 150$ ом,
- $R_2 = 80$ ом,
- $R_3 = 20$ ом,
- $R_4 = 100$ ом,
- $R_5 = 100$ ом.

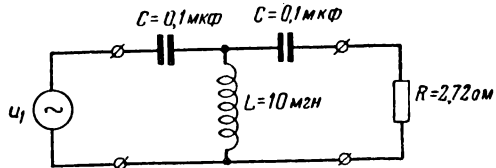


Рис. 6.19

Найти напряжение U_2 , если $U_1 = 10$ в.

6.23*. Четырёхполюсник, схема которого изображена на рис. 6.19, нагружен активным сопротивлением, равным 2,72 ом. Найти ток I_2 , если напряжение генератора равно 10 в на частоте $f = 100$ кгц. Внутреннее сопротивление генератора можно принять равным нулю.

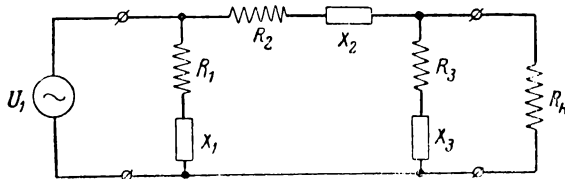


Рис. 6.20

6.24. Четырёхполюсник, схема которого дана на рис. 6.20, нагружен на сопротивление R_N . Определить абсолютное значение амплитуды тока I_2 в нагрузке,

если известно напряжение генератора U_1 и рабочая частота f . Внутреннее сопротивление генератора равно нулю

Данные для расчёта приведены в таблице.

№ пп.	f кГц	R_1 ом	X_1	R_2 ом	X_2	R_3 ом	X_3	R_H ом	U_1 в
1	50	100	$L_1 = 5 \text{ мГн}$	0	$C_2 = 2000 \text{ пф}$	100	$L_3 = 5 \text{ мГн}$	10	100
2	0,5	0	$C_1 = 0,1 \text{ мкф}$	100	$L_2 = 0,5 \text{ Гн}$	0	$C_3 = 0,1 \text{ мкф}$	5	50
3	100	50	$L_1 = 2,5 \text{ мГн}$	0	$C_2 = 5000 \text{ пф}$	75	$L_3 = 3 \text{ мГн}$	100	100

6.25*. Четырёхполюсник, составленный из активных сопротивлений (рис. 6 21), нагружен на сопротивление $R_H = 200 \text{ ом}$. Генератор, подключённый ко входу четырёхполюсника, развивает синусоидальное напряжение, равное 50 в. Внутреннее сопротивление генератора можно принять равным нулю. Найти входной ток I_1 , выходной ток I_2 и напряжение на нагрузке U_2 .

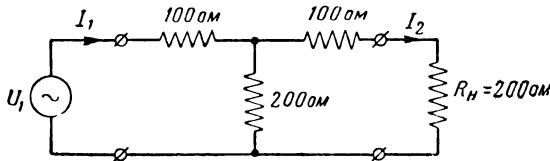


Рис. 6.21

6.26. Найти значения I_1 , I_2 и U_2 для схем, изображённых в таблице.

№ пп.	Схема	R_1 ом	R_2 ом	R_H ом	U_1 в
1		500	1000	500	50
2		2000	1000	5000	50

№ пп.	Схема	R_1 ом	R_2 ом	R_H ом	U_1 в
3		1000	1000	1000	100
4		200	400	600	100

6.27. На рис. 6.22 дана эквивалентная схема усилителя звуковых частот на сопротивлениях. Найти напряжение на сетке следующей лампы U_{g2} при следующих данных схемы:

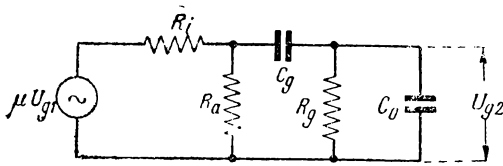


Рис. 6.22

- $U_{g1} = 1$ в,
- $\mu = 50$,
- $R_i = 50\,000$ ом,
- $R_a = 20\,000$ ом,
- $C_g = 0,1$ мкф,
- $R_g = 0,5$ Мом,
- $C_0 = 50$ нф,
- $f = 1590$ гц.

6.28. На рис. 6.23 дана эквивалентная схема усилителя звуковых частот на трансформаторе. Найти напряжение на сетке следующей лампы U_{g2} , при следующих данных схемы:

- $U_{g1} = 0,1$ в.
- $\mu = 35$,
- $R_i = 12 \cdot 10^3$ ом.
- $r_1 = 1200$ ом,
- $L_{s1} = 0,1$ гн,
- $L_1 = 57$ гм,
- $r_2 = 4800$ ом,
- $L_{s2} = 0,4$ гн,
- $r = 0,5$ Мом,
- $C = 120$ нф,
- $f = 4 \cdot 10^3$ гц.

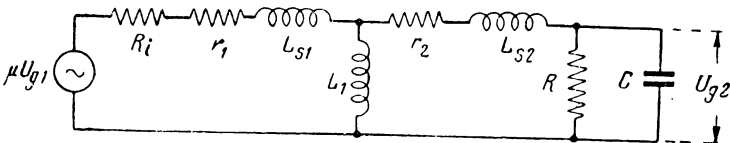


Рис. 6.23

6.29*. Определить коэффициенты A (т. е. найти матрицу A) четырёхполюсника, схема которого изображена на рис. 6.24, по известным матрицам элементарных четырёхполюсников (поз. 1 и 2 табл. 6.2).

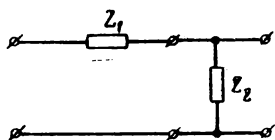


Рис. 6.24

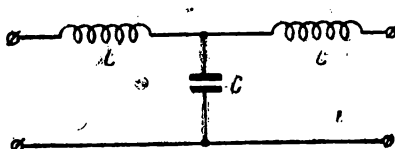


Рис. 6.25

6.30*. Найти матрицу A низкочастотного фильтра (рис. 6.25), пользуясь матрицами элементарных четырёхполюсников табл. 6.2 (поз. 1 и 2).

6.31*. Найти матрицу A фильтра, схема которого изображена на рис. 6.26 по известным из табл. 6.2 матрицам Π и T -образных четырёхполюсников.

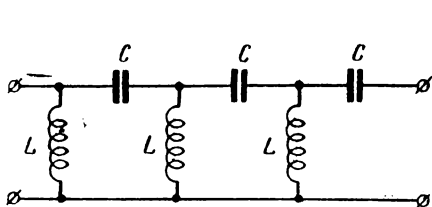


Рис. 6.26

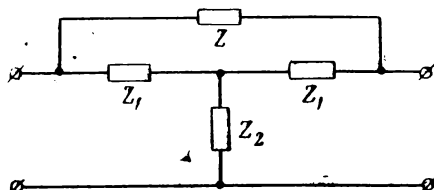


Рис. 6.27

6.32*. Найти матрицу для схемы рис. 6.27 по известным матрицам табл. 6.2 (поз. 1 и 10).

6.33*. Найти коэффициенты Z четырёхполюсника, схема которого изображена на рис. 6.28, по известным матрицам элементарных четырёхполюсников табл. 6.2 (поз. 1 и 3).

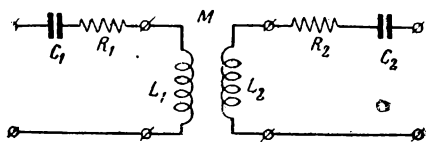


Рис. 6.28

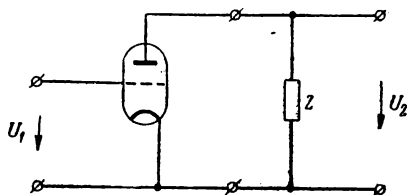


Рис. 6.29

6.34*. Найти матрицу A для усилителя, изображённого на рис. 6.29 (сеточные токи принимаются равными нулю), по известным матрицам табл. 6.2 (поз. 2 и 6) и затем получить выражение для коэффициента усиления усилителя.

6.35*. Доказать, что в случае каскадного соединения четырёхполюсников общая матрица A равна произведению частных матриц A_i .

6.36*. Доказать, что общая матрица Y для параллельного соединения двух четырёхполюсников равна сумме матриц каждого четырёхполюсника в отдельности.

6.37*. На рис. 6.30 приведена схема четырёхполюсника, составленная из активных сопротивлений.

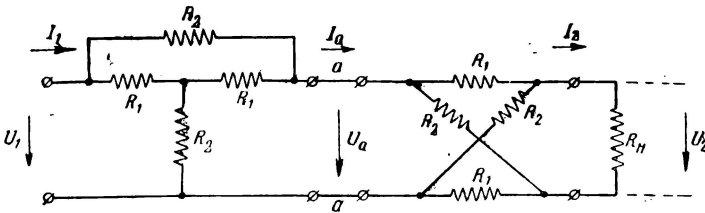


Рис. 6.30

Данные схемы следующие:

$$\begin{aligned} R_1 &= 500 \text{ ом}, \\ R_2 &= 1000 \text{ ом}, \\ R_N &= 1000 \text{ ом}, \\ U_1 &= 100 \text{ в}. \end{aligned}$$

Внутреннее сопротивление генератора равно нулю.

Определить токи на входе и выходе схемы I_1 и I_2 , напряжение на нагрузочном сопротивлении U_2 , а также напряжение и ток в точках aa — U_a и I_a .

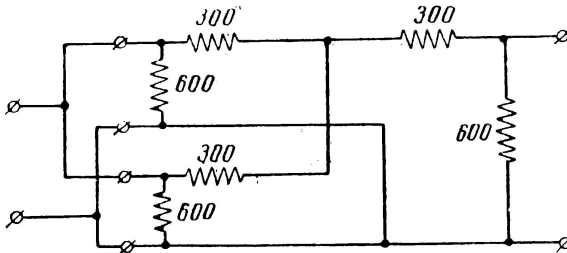


Рис. 6.31

6.38*. На схему широко применяемого в радиовещании аттенуатора (рис. 6.31) подаётся синусоидальное напряжение. Рассчитать уменьшение амплитуды напряжения на выходе (затухание) и выразить это уменьшение в децибелах

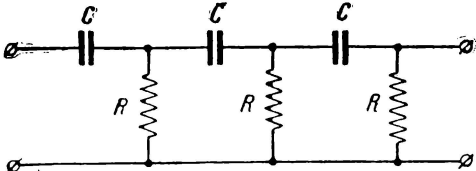


Рис. 6.32

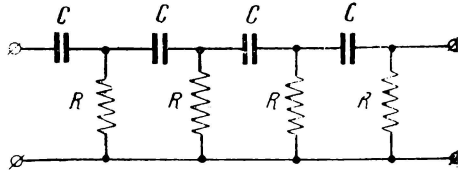


Рис. 6.33

6.39*. Найти коэффициенты A для трёхзвенной RC цепочки (рис. 6.32).

6.40*. Найти коэффициент A_{11} для четырёхзвенной цепочки RC (рис. 6.33).

§ 7. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФИЛЬТРЫ

Электрическим фильтром называют устройство, служащее для преимущественного ослабления колебаний одной части спектра по отношению к колебаниям другой части спектра.

Фильтры классифицируются по назначению, частотным диапазонам и схемным признакам.

Свойства фильтра целиком определяются амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристиками. Задача расчёта фильтра может формулироваться либо как задача нахождения частотных характеристик по заданным элементам схемы (анализ), либо как задача расчёта элементов схемы по заданным частотным характеристикам (синтез).

Амплитудно-частотные характеристики могут выражаться в простых числах, неперах и децибелах. Для простых несимметричных фильтров обычно пользуются простыми числами (коэффициент передачи); для симметричных фильтров чаще всего пользуются неперами и вместо амплитудно-частотной характеристики вводят понятие „затухание“, характеризующее уменьшение напряжения или тока на выходе фильтра относительно входа. Удобство последней характеристики заключается в том, что при включении фильтров в линию для оценки уменьшения амплитуд в фильтре и линии можно пользоваться одинаковыми единицами.

К несимметричным фильтрам в первую очередь относятся разделительные и блокировочные фильтры, а также их комбинации, развязывающие фильтры, простейшие сглаживающие фильтры в цепях питания, фильтры для подавления радиопомех, фильтры на сопротивлениях и ёмкостях в качестве элементов ламповых фильтров и т. д. Эта классификация является в известной мере, условной, так как, например, в качестве сглаживающих фильтров часто применяют симметричные Т- и П-образные фильтры и т. п.

Расчёт амплитудно-частотных и фазо-частотных характеристик несимметричных фильтров производится либо по общим законам теории переменных токов (§ 1), либо на основе использования таблиц четырёхполюсников (§ 6), а расчёт этих же характеристик симметричных фильтров производится, как правило, на основе сопоставления фильтра с однородной длинной линией. Из сопоставления основных уравнений четырёхполюсника с уравнениями длинной линии (задача 6.12) легко устанавливается связь между коэффициентами четырёхполюсника (параметрами фильтра) и постоянными линии:

$$A = \operatorname{ch} \gamma l, \quad (7.1)$$

$$B = Z_c \operatorname{sh} \gamma l, \quad (7.2)$$

$$C = \frac{\operatorname{sh} \gamma l}{Z_c}. \quad (7.3)$$

По аналогии с постоянными в длинных линиях вводятся понятия затухания и фазового сдвига.

№ пп.	Линия	Фильтр
1	Коэффициент распространения $\gamma l = (\beta + im) l$	Постоянная передачи фильтра $g = b + ia$
2	Затухание линии $\beta l = \ln \frac{U_1}{U_2} \text{ (неп)}$	Затухание фильтра $b = \ln \frac{U_1}{U_2} \text{ (неп)}$
3	Фазовый сдвиг в линии $\varphi_{U_1 - U_2} = ml \text{ (рад)}$	Фазовый сдвиг фильтра $\varphi_{U_1 - U_2} = a \text{ (рад)}$

Из (7.1) следует формула:

$$A = A_1 + iA_2 = \operatorname{ch}(b + ia) = \operatorname{ch} b \cos a + i \operatorname{sh} b \sin a,$$

которая даёт систему из двух уравнений:

$$\operatorname{ch} b \cos a = A_1, \quad (7.4)$$

$$\operatorname{sh} b \sin a = A_2. \quad (7.5)$$

Решив систему относительно b и a , получим характеристики затухания и сдвига фаз. A_1 и A_2 представляют собой вещественную и мнимую части коэффициента четырёхполюсника A (A_{11}).

Расчёт характеристического (волнового) сопротивления Z_c ведётся по формуле, вытекающей из сопоставления выражений (7.2) и (7.3):

$$Z_c = \sqrt{\frac{B}{C}}. \quad (7.6)$$

Расчёт затухания и фазы по ф-лам (7.4) и (7.5) в общем случае является трудоёмким; наиболее просто рассчитывать фильтры без потерь, т. е. без активных сопротивлений.

Для фильтров без потерь вводят понятия полосы прозрачности, внутри которой затухание равно нулю, т. е. $b = 0$, $\operatorname{ch} b = 1$, $\operatorname{sh} b = 0$. Коэффициент A для фильтров без потерь не содержит мнимой части, т. е. $A_2 = 0$ и $A = A_1$. Это обстоятель-

ство позволяет существенно упростить ур-ния (7.4) и (7.5) для характеристик в полосе прозрачности ($b = 0$) и вне полосы прозрачности ($b \neq 0$).

В полосе прозрачности	Вне полосы прозрачности	№№ фор- мул
$b = 0$	$\pm \operatorname{ch} b = A$	7.7
$\cos a = A$	$a = \pm \pi$	7.8

Границы полосы прозрачности устанавливаются из ф-лы (7.8) на основе неравенства

$$-1 < A < 1. \quad (7.9)$$

Приведённые формулы дают возможность рассчитать характеристики фильтра по известной схеме (анализ). Для расчёта элементов фильтра известной схемы по заданным характеристикам (полосе прозрачности и сопротивлению нагрузки), последние формулы нужно обратить. При этом считается, что нагрузочное сопротивление равно номинальному характеристическому сопротивлению фильтра $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$; это условие обеспе-

чивает наилучшие условия передачи энергии от генератора к нагрузке через фильтр для большей части полосы прозрачности.

В табл. 7.1 сведены формулы для расчёта наиболее распространённых схем симметричных фильтров без потерь. Эти формулы выводятся из выражений (7.6), (7.7), (7.8), (7.9). Примеры вывода их даны в задачах.

Обозначения, принятые в теории фильтров, ясны из таблицы и сводятся к следующему:

1. Параметры горизонтальных ветвей снабжаются индексами „1“, а параметры вертикальных ветвей индексами „2“.

2. Параметры фильтров обозначаются так, что сумма множителей всех одноимённых параметров горизонтальной или вертикальной ветви равна единице (например, в фильтре нижних частот: $\frac{1}{2} L_1 + \frac{1}{2} L_1 = L_1$). Такие обозначения удобны, так как характеристики затухания и фазовые характеристики при этих обозначениях одинаковы для Т- и П-образных фильтров (характеристические сопротивления различны).

В последних двух графах таблицы даны кривые и формулы для расчёта затухания и фазового сдвига.

Формулы для затухания приведены только для областей частот, лежащих вне полосы прозрачности, так как внутри полосы прозрачности затухание равно нулю.

Тип фильтры	Схема		Формулы для расчёта параметров	Характеристики затухания	Фазовая характеристика
	T	П			
Фильтр нижних частот			$L = 2 \frac{\rho}{\omega_0} \quad C = \frac{2}{\omega_0 \rho}$ $\rho = \sqrt{\frac{F}{C}} \quad \omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}}$	<p>$chd = 2\rho^2 \omega$</p>	<p>$\cos a = 1 - 2\rho^2 \omega$</p>
Фильтр верхних частот			$C = \frac{1}{2} \frac{1}{\omega_0 \rho} \quad L = \frac{\rho}{2\omega_0}$ $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \omega_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2L}{C}}$	<p>$chd = \frac{2}{\rho^2} \omega^{-1}$</p>	<p>$\cos a = 1 - \frac{2}{\rho^2 \omega}$</p>
Полосовой фильтр			$L_1 = 2\rho \frac{1}{\omega_2 - \omega_1}$ $C_2 = \frac{\rho(\omega_2 - \omega_1)}{2}$ $L_1 C_1 = L_2 C_2 = \frac{1}{\omega_1 \omega_2}$ $\rho = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}} = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}}$	<p>$chb = \frac{\pi}{2} (\rho \frac{\omega}{\rho})^2 - 1$</p>	<p>$\cos a = 1 - \frac{\pi(\rho - \frac{1}{\rho})^2}{2}$</p>
Заграждающий фильтр			$C_1 = \frac{1}{2\rho(\omega_2 - \omega_1)}$ $L_2 = \frac{\rho}{2(\omega_2 - \omega_1)}$ $L_1 C_1 = L_2 C_2 = \frac{1}{\omega_1 \omega_2}$ $\rho = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}} = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}}$	<p>$chb = \frac{\pi}{2} (\rho \frac{\omega}{\rho})^2 - 1$</p>	<p>$\cos a = 1 - \frac{\pi(\rho - \frac{1}{\rho})^2}{2}$</p>

Формулы для фазового сдвига даны только для частот, заключённых внутри полосы прозрачности, так как вне полосы прозрачности фазовый сдвиг постоянен и равен $\pm \pi$, что ясно видно из графиков.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

7.1. Вывести выражения амплитудно-частотных характеристик простейших фильтров, схемы которых изображены на рис. 7.1 (а, б, в, г и д). Рекомендуется ввести обозначения: $\omega RC = x$; $\frac{\omega L}{R} = y$.

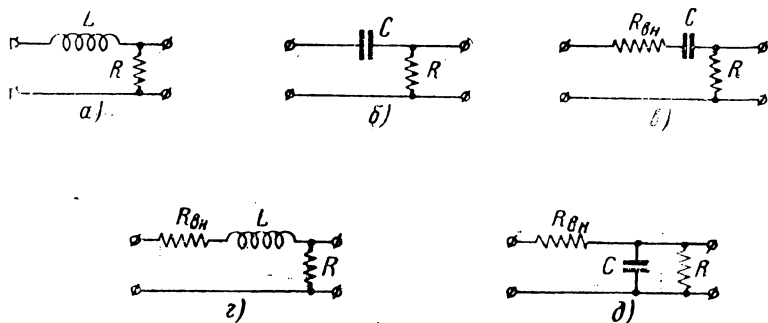


Рис. 7.1

7.2*. Нагрузкой в схеме простого сглаживающего (так называемого дроссельного) фильтра (рис. 7.1а) является активное сопротивление $R = 0,03 \text{ ом}$. Внутреннее сопротивление генератора R_{0n} можно принять равным нулю. Рассчитать индуктивность дросселя с тем, чтобы ослабление на частоте $f = 350 \text{ гц}$ было равно десяти, т. е. чтобы амплитуда напряжения на нагрузке при заданной частоте была в десять раз меньше, чем амплитуда входного напряжения.

7.3. Рассчитать индуктивность L дроссельного фильтра по условиям ослабления на заданной частоте. Внутреннее сопротивление генератора принять равным нулю. Данные для расчёта указаны в таблице.

№№ пп.	Сопротивление нагрузки ом	Заданное ослабление	
		частота гц	ослабление (число раз)
1	0,05	50	10
2	0,1	100	20
3	0,025	100	5
4	0,3	50	15

7.4*. Используя полученные в задаче 7.1 выражения для амплитудно-частотных характеристик фильтров, изображённых на рис. 7.1 г и д, а также постро-

енные по ним графики, решить, для каких схем питания выпрямленным током в смысле соотношения сопротивлений нагрузки и генератора целесообразно применять дроссельный фильтр, а для каких—конденсаторный.

7.5*. Вывести формулу, позволяющую рассчитать простой конденсаторный фильтр (рис. 7.1б), т. е. рассчитать ёмкость C по заданным сопротивлениям R и $R_{вн}$, а также величине ослабления, равной $\frac{1}{K(\omega)}$.

7.6*. Найти ёмкость простого конденсаторного фильтра (рис. 7.1б) при условии, что пульсации на частоте $f = 50$ гц должны быть уменьшены в 30 раз.

Данные схемы: $R_{вн} = 60$ ком; $R = 10^3$ ком.

7.7. Рассчитать ёмкость простого конденсаторного фильтра по заданным в нижеприводимой таблице условиям фильтрации и данным схемы:

№ пп.	Ослабление		Нагрузка R ом	Внутреннее сопротивление $R_{вн}$ ом
	f гц	$\frac{1}{K(f)}$		
1	50	10	$0,5 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^3$
2	100	20	10^3	$5 \cdot 10^3$
3	100	40	$2 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^3$
4	50	50	10^3	$2,5 \cdot 10^3$

7.8. Вывести выражения амплитудно-частотной характеристики для дроссельно-конденсаторного сглаживающего фильтра без учёта внутреннего сопротивления генератора R_i (рис. 7.2а) и с учётом последнего (рис. 7.2б).



Рис. 7.2

7.9. В схеме рис. 7.2а нагрузочное сопротивление $R = 300$ ом, индуктивность дросселя $L = 1,5$ гн и ёмкость конденсатора $C = 50$ мкф. Найти уменьшение пульсаций на частоте $f = 300$ гц.

7.10*. Изобразить амплитудно-частотную характеристику дроссельно-конденсаторного фильтра (рис. 7.2а) в виде графика в обобщённых координатах.

7.11*. Рассчитать индуктивность дросселя в схеме дроссельно-конденсаторного фильтра (рис. 7.2а), если ослабление на частоте $f = 50$ гц должно быть равно 80 и на выходе фильтра предполагается включить конденсатор ёмкостью $C = 30$ мкф. Сопротивление нагрузки равно $0,5 \cdot 10^3$ ом.

7.12*. Определить ёмкость C дроссельно-конденсаторного фильтра (рис. 7.2а), если индуктивность дросселя равна $L = 20$ гн, а ослабление на частоте $f = 50$ гц должно быть равно 350. Сопротивление нагрузки $R = 10^3$ ом.

7.13. Расчёт дроссельно-конденсаторного фильтра (рис. 7.2а) сводится к определению индуктивности L и ёмкости C по заданной нагрузке R и условиям фильтрации $K(\omega)$ на данной частоте f . Обычно одним из этих параметров (L или C) приходится задаваться и, таким образом, расчёту подлежат либо L , либо C .

Рассчитать по условиям, приводимым в таблице, L или C дроссельно-конденсаторного фильтра (рис. 7.2а).

№ пп.	Условия фильтрации		Нагрузка R ом	Данные фильтра	
	ослабление (число раз)	частота f гц		L гн	C мкф
1	100	50	10^6	—	16
2	150	50	$2 \cdot 10^6$	30	—
3	200	50	$0,5 \cdot 10^6$	—	20
4	300	50	10^6	15	—

7.14.* В схеме параллельного питания (рис. 7.3) применяются разделительный конденсатор C_p , разделительный дроссель L_p и блокировочный конденсатор C_b . Контур настроен на частоту ω_0 ; сопротивление контура равно

$$R_{\alpha} = \frac{L}{CR}.$$

Составить формулы для расчёта C_p , L_p и C_b .

7.15*. Рассчитать разделительный конденсатор и разделительный дроссель в схеме параллельного питания (рис. 7.3), если сопротивление контура на резонансной частоте $f = 3 \cdot 10^6$ гц равно $R_{\alpha} = 10^3$ ом.

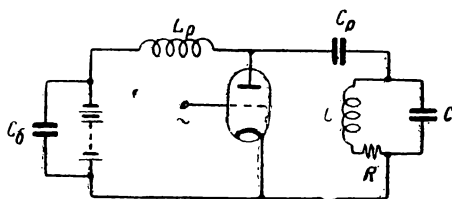


Рис. 7.3

7.16. Рассчитать по нижеприводимым условиям разделительный конденсатор и разделительный дроссель в схеме параллельного питания (рис. 7.3).

№ пп.	Данные контура			Резонансная частота f_0 гц	Резонансное сопротивление R_{α} ом
	L мгн	C пф	R ом		
1	0,18	60	35	—	—
2	—	—	—	$0,15 \cdot 10^6$	$15 \cdot 10^3$
3	—	—	—	$0,4 \cdot 10^6$	$38 \cdot 10^3$

7.17*. Найти выражения характеристик затухания, фазового сдвига и характеристического сопротивления для фильтров (без потерь) нижних и верхних частот.

7.18. Вывести формулы для расчёта параметров фильтров нижних и верхних частот по заданным значениям полосы прозрачности и нагрузки $R = \rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

7.19*. Рассчитать фильтр нижних частот, имеющий полосу прозрачности от нуля до $f_0 = 10\,000$ гц. Сопротивление нагрузки равно 600 ом.

7.20. Рассчитать по данным таблицы элементы фильтров нижних частот.

Данные	1	2	3	4	5
Полоса прозрачности, <i>гц</i>	0—300	0—2000	0—1000	0—8000	0—10 000
Нагрузка <i>R</i> , <i>ом</i>	1000	660	2000	1000	500

7.21.* Рассчитать затухание в фильтре нижних частот на частоте $f = 20\,000$ *гц*. Данные фильтра взять из задачи 7.19. Выразить затухание в неперлах, децибелах и простых числах.

7.22. Рассчитать затухание в фильтре нижних частот на заданной частоте по данным, приведённым в таблице. Затухание выразить в неперлах, децибелах и простым числом, равным отношению амплитуд входа и выхода.

№ пп.	Частота <i>гц</i>	Данные фильтра		
		полоса прозрачности <i>гц</i>	<i>L</i> <i>гн</i>	<i>C</i> <i>мкф</i>
1	6000	0—1000	—	—
2	4000	—	0,64	0 16
3	3000	0—2000	—	—
4	10 000	0—2500	—	—

7.23*. Найти, на какой частоте затухание фильтра нижних частот будет равно 2,4 *неп*, если полоса прозрачности фильтра простирается до 10 000 *гц*.

7.24*. Найти фазовый сдвиг в фильтре нижних частот на частоте 5000 *гц*, если полоса прозрачности фильтра соответствует пределам от 0 до 10 000 *гц*.

7.25. По данным задачи 7.22 рассчитать фазовые сдвиги на следующих частотах:

№ пп.	1	2	3	4
Частота <i>f</i> , <i>гц</i>	300	500	700	1000

7.26. На какой частоте фазовый сдвиг будет равен 40°, если граничная частота фильтра нижних частот равна 10 000 *гц*.

7.27*. Рассчитать фильтр верхних частот, имеющий полосу прозрачности от 12 000 *гц*. Нагрузка фильтра равна 2000 *ом*.

7.28. Рассчитать фильтр верхних частот по заданным в таблице полосе прозрачности и нагрузке.

№ пп.	1	2	3	4	5
Граничная частота f_0 , <i>гц</i>	500	1000	20 000	5000	10 000
Нагрузка <i>R</i> , <i>ом</i>	5000	1000	2000	1000	5000

7.29. Найти затухание (в неперах и децибелах) и фазовый сдвиг фильтра верхних частот по данным приводимым в таблице.

№ пп.	Данные фильтра			Частота, на которой определяется затухание, гц	Частота, на которой определяется фазовый сдвиг, гц
	f_0 гц	L мгн	C мкф		
1	2000	—	—	500	4 000
2	—	16	0,1	1000	3 000
3	5000	—	—	4000	10 000
4	8000	—	—	1000	24 000
5	—	3,2	0,01	5000	30 000

7.30. Найти, на каких частотах будут иметь место заданные затухание и фазовый угол в фильтрах верхних частот. Данные приведены в таблице.

№ пп.	b неп	a град	Данные фильтра		
			f_0 гц	L мгн	C мкф
1	0,45	45	10 000	—	—
2	0,8	30	5 000	—	—
3	1,0	60	—	3,2	0,01
4	1,25	80	8 000	—	—
5	1,6	15	—	16	0,1

7.31. Найти значения характеристического сопротивления фильтров по данным приводимым в таблице.

№ пп.	Тип фильтра	Элементы фильтра		Граничная частота f_0 гц	Частота, на которой определяется характеристическое сопротивление гц
		L гн	C мкф		
1	Т-образный, нижних частот	1,06	1,06	300	600
2	П-образный, нижних частот	0,795	3,18	200	310
3	П-образный, верхних частот	$19,9 \cdot 10^{-3}$	0,0796	2000	1000

7.32. Рассчитать параметры полосового фильтра по следующим данным: полоса прозрачности: $f_1 = 290$ гц, $f_2 = 1096$ гц; номинальное характеристическое сопротивление $\rho = 800$ ом.

7.33*. Задан полосовой фильтр, собранный по Т-образной схеме. В горизонтальные ветви фильтра включены катушки индуктивностью 80 мгн каждая и конденсаторы ёмкостью 1 мкф каждый; в вертикальную ветвь включена катушка индуктивностью 160 мгн и конденсатор ёмкостью 0,5 мкф.

Рассчитать полосу прозрачности и номинальное характеристическое сопротивление фильтра.

7.34. Найти полосу прозрачности и номинальное характеристическое сопротивление Т-образного полосового фильтра по данным, приводимым в таблице.

№ пп.	Горизонтальная ветвь		Вертикальная ветвь	
	индуктивность каждой катушки мгн	ёмкость каждого конденсатора мкф	индуктивность катушки мгн	ёмкость конденсатора мкф
1	80	2	160	1
2	14,4	1	14,4	1

§ 8. Установившийся режим при несинусоидальном воздействии

Изучение линейных систем, находящихся под воздействием периодических колебаний несинусоидальной формы, можно свести к изучению систем при синусоидальном воздействии на основе применения принципа суперпозиции.

В подобных задачах периодическое внешнее воздействие раскладывают по известным законам гармонического анализа на сумму элементарных синусоидальных воздействий и находят вызванные этими элементарными воздействиями токи или напряжения. Эти выходные токи (напряжения) будут отличаться от входных только амплитудами и фазами; частота колебаний в силу линейности системы не изменится. Суммирование (гармонический синтез) выходных колебаний даст форму выходного тока (напряжения).

Задачи, в которых внешнее воздействие представляет собой модулированное высокочастотное колебание, также можно свести к сумме задач, в каждой из которых рассматривается одно синусоидальное колебание.

В общем виде высокочастотное колебание может быть записано так:

$$u = U(t) \sin [\omega t + \varphi(t)], \quad (8.1)$$

где $U(t)$ — амплитуда, меняющаяся во времени;

$\varphi(t)$ — фаза, меняющаяся во времени.

Раскрывая выражение (8.1) по формуле синуса суммы, получаем

$$u = U(t) \cos [\varphi(t)] \sin \omega t + U(t) \sin [\varphi(t)] \cos \omega t. \quad (8.2)$$

Выражение (8.2) представляет собой сумму двух амплитудно-модулированных колебаний.

Если $U(t)$ и $\varphi(t)$ представляют собой периодические функции времени с основной частотой Ω , множители перед „высокочастотным заполнением“ $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$ можно разложить в ряд Фурье:

$$U = [U_0 + U_1 \cos(\Omega t - \psi_1) + U_2 \cos(2\Omega t - \psi_2) + \dots] \sin \omega t + [U'_0 + U'_1 \cos(\Omega t - \psi'_1) + U'_2 \cos(2\Omega t - \psi'_2) + \dots] \cos \omega t. \quad (8.3)$$

Выражения, стоящие в квадратных скобках, называютсягибающими высокочастотного колебания.

Раскрывая выражение (8.3) по известным формулам произведения тригонометрических функций, получаем сумму синусоидальных колебаний, из которых составляется входное воздействие. Изучив, как проходит через систему каждое воздействие в отдельности (при помощи амплитудно-частотных и фазо-частотных характеристик) и просуммировав выходные напряжения (токи), получаем искомую форму выходной кривой.

В тех задачах, где число элементарных колебаний, т. е. составляющих синусоид, велико и суммирование представляет значительные трудности, очень часто для нахождения формы кривой выходного напряжения (тока) можно применять методы изучения переходных процессов, полагая в полученном решении $t = \infty$ (см. ч. II).

Указанные задачи могут решаться и другим методом — методом припасовывания решений дифференциальных уравнений.

Метод припасовывания ближе стоит к методам изучения переходных процессов и соответствующие задачи рассматриваются во второй части (задачи 12.10 и 12.11).

Энергетические соотношения при несинусоидальных колебаниях можно выяснять на основе знания энергетических соотношений элементарных колебаний.

Действующее значение периодического несинусоидального колебания (соответствующее показаниям измерительных приборов) тогда, когда известна форма кривой, рассчитывается по формуле:

$$I_{\text{д}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(\Omega t) dt}. \quad (8.4)$$

Если известны амплитуды I_n или действующие значения I_{nd} гармонических составляющих, то действующее значение несинусоидального колебания рассчитывается по формуле:

$$I_d = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} I_{nd}^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} I_n^2}. \quad (8.5)$$

Действующее значение несинусоидального колебания зависит только от действующих значений гармонических составляющих и не зависит от их фаз.

Активная мощность периодического несинусоидального колебания определяется как средняя мощность за период

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt.$$

Средняя мощность несинусоидального колебания равна сумме средних мощностей отдельных составляющих

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} P_n. \quad (8.6)$$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

8.1*. На вход цепи, схема которой изображена на рис. 8.1, подаётся напряжение

$$u_1 = \sum_{n=0}^{\infty} U_{2n+1} \sin(2n+1)\Omega t; \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Составить выражение для напряжения на выходе.

8.2*. На вход схемы (рис. 8.1) подаётся напряжение

$$u_1 = 100 \sin \Omega t + 33,3 \sin 3\Omega t + 20 \sin 5\Omega t.$$

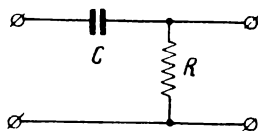


Рис. 8.1

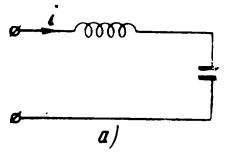
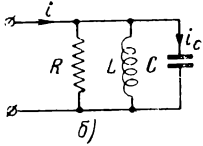
Найти напряжение на выходе по следующим данным:

$$\Omega = 2\pi F = 1000 \frac{\text{рад}}{\text{сек}},$$

$$R = 10^3 \text{ ом},$$

$$C = 1 \text{ мкф}.$$

8.3. По условиям, приведённым в таблице, найти выражение для мгновенных значений тока.

№ пп.	Амплитуды и фазы входного напряжения	Схема	Параметры схемы	Искомая величина
1	$U_1 = 200 \text{ в}$ $U_2 = 50 \text{ в}$ $\varphi_1 = 0$ $\varphi_2 = -30^\circ$	 <p style="text-align: center;">а)</p> <p style="text-align: center;">Рис. 8.2</p>	$\omega L = 25 \text{ ом}$ $\frac{1}{\omega C} = 125 \text{ ом}$	ток
2	$U_1 = 180 \text{ в}$ $U_2 = 60 \text{ в}$ $\varphi_1 = 0$ $\varphi_2 = +20^\circ$	 <p style="text-align: center;">б)</p> <p style="text-align: center;">Рис. 8.2</p>	$R = 6 \text{ ом}$ $\omega L = 2 \text{ ом}$ $\frac{1}{\omega C} = 18 \text{ ом}$	1) ток 2) ток i_c

8.4*. Амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики некоторого четырёхполюсника изображены на рис. 8.3. На вход четырёхполюсника подаётся напряжение

$$u_1 = \sum_{m=1}^{\infty} U_m \sin m \Omega t.$$

Найти выражение для напряжения на выходе. §

8.5*. Для случая нулевых фаз у составляющих входного напряжения амплитуда выходного напряжения n -й гармоники рассчитывается по формуле

$$U_{n \text{ вых}} = U_{n \text{ вх}} K(n \Omega) \sin [n \Omega t + \varphi(n \Omega)], \quad (1)$$

где

$$K(\omega) = \sqrt{K_1^2(\omega) + K_2^2(\omega)}$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{K_2(\omega)}{K_1(\omega)}.$$

Составить формулу для расчёта выходного напряжения, не содержащую функции

$$\arctg \frac{K_2(\omega)}{K_1(\omega)}.$$

8.6*. На вход схемы, изображённой на рис. 8.4, подаётся напряжение прямоугольной формы, которое представляется рядом

$$u_{\text{вх}} = \frac{4E}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \omega t}{n} \quad \left(\begin{array}{l} n = 2\kappa + 1 \\ \kappa = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right).$$

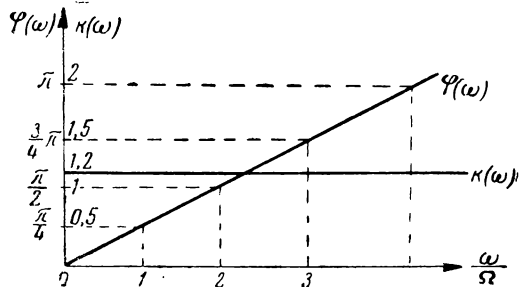


Рис. 8.3

Составить формулы для расчёта амплитуд синусоидальных и косинусоидальных составляющих выходного напряжения.

8.7. На вход схемы, изображённой на рис. 8.4, подаётся „прямоугольное“ напряжение со следующими данными: $E = 5$ в, $F = \frac{1}{T} = 250$ гц. Данные схемы: $R = 10^3$ ом; $C = 1$ мкф.

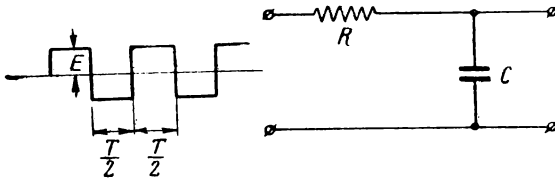


Рис. 8.4

Рассчитать амплитуды первых шести синусоидальных и косинусоидальных составляющих выходного напряжения.

8.8*. На вход колебательного контура (рис. 8.5) подаётся амплитудно-модулированное напряжение вида

$$u = U_0 (1 + m \sin \Omega t) \sin \omega_0 t.$$

Выяснить форму тока в контуре, считая, что контур настроен в резонанс с частотой ω_0 .

8.9*. По условиям предыдущей задачи рассчитать уменьшение коэффициента модуляции и сдвиг по фазе огибающей по следующим данным:

$$f_0 = 300 \text{ кгц}, \quad C = 10^3 \text{ нф}, \quad F_1 = 1000 \text{ гц}, \\ m = 0,7, \quad R = 10 \text{ ом}, \quad F_2 = 10\,000 \text{ гц}.$$

Здесь F_1 и F_2 — частоты модулирующего синусоидального колебания.

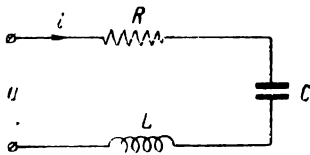


Рис. 8.5

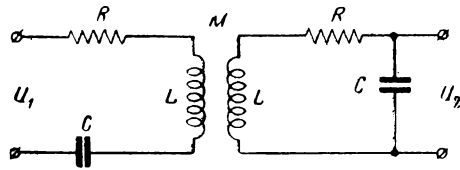


Рис. 8.6

8.10*. На вход колебательного контура (рис. 8.5) подаётся амплитудно-модулированное напряжение вида

$$u = U_0 (1 + m \sin \Omega t) \sin \omega t,$$

причём частота несущего колебания ω отличается от резонансной частоты контура на $\Delta \omega = \omega - \omega_0$.

Выяснить форму тока в контуре.

8.11*. На вход связанной системы, состоящей из двух одинаковых колебательных контуров (рис. 8.6), подаётся модулированное напряжение вида

$$u_1 = U_0 (1 + m \sin \Omega t) \sin \omega_0 t.$$

Найти напряжение на конденсаторе второго контура, считая, что каждый из контуров в отдельности настроен на частоту ω_0 .

8.12*. Рассчитать изменение коэффициента модуляции при прохождении амплитудно-модулированного колебания через систему, состоящую из двух связанных колебательных контуров.

Данные для расчёта те же, что и в задаче 8.9. Фактор связи $A = 3$.

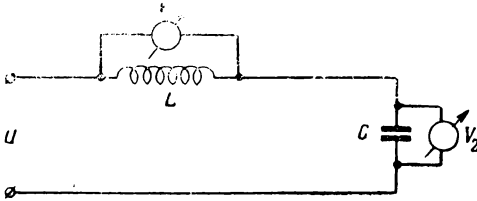


Рис. 8.7

8.13*. На схему подаётся напряжение, состоящее из первой и третьей гармоник, причём $U_1 = 20$ в, а $U_3 = 5$ в. Данные схемы: $\omega_0 L = 3000$ ом, $\frac{1}{\omega_0 C} = 15000$ ом.

Выяснить, что покажут электродинамические приборы V_1 и V_2 включенные, как показано на рис. 8.7.

8.14. На схему, изображённую на рис. 8.8, подаётся напряжение

$$u = 100 \sin \omega t + 50 \sin 3\omega t.$$

Найти показания электродинамического прибора, включённого в ёмкостную ветвь контура.

Данные схемы: $R_i = 10^4$ ом, $R = 10$ ом, $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = 30$ ом.

8.15*. На схему, изображённую на рис. 8.9, подаётся напряжение, состоящее из первой, третьей и пятой гармоник.

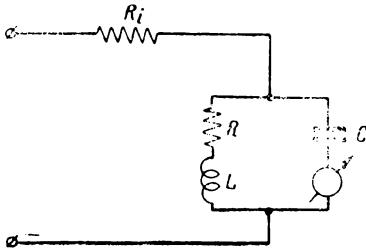


Рис. 8.8

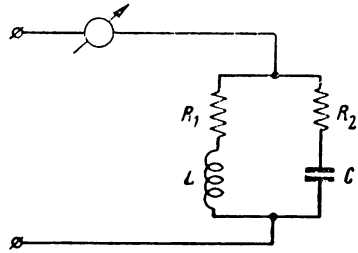


Рис. 8.9

Определить показания электродинамического прибора, включённого так, как показано на схеме при следующих условиях:

$$R_1 = R_2 = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad U_1 = 50 \text{ в},$$

$$\sqrt{\frac{L}{C}} = 100 \text{ ом}, \quad U_3 = 20 \text{ в},$$

$$U_5 = 10 \text{ в}.$$

8.16*. Рассчитать среднюю мощность высокочастотного колебания, модулированного одним синусоидальным тоном

$$i = I_0(1 + m \sin \Omega t) \sin \omega t.$$

Нагрузку допустимо считать чисто активной, равной R .

8.17*. Найти мгновенную мощность высокочастотного колебания, модулированного одним синусоидальным тоном

$$i = I_0 (1 + m \sin \Omega t) \sin \omega t.$$

Нагрузку допустимо считать чисто активной, равной R .

8.18*. Известно, что спектр высокочастотного колебания, модулированного по частоте (или фазе) одним тоном

$$i = I_0 \sin(\omega_0 t + M \sin \Omega t),$$

определяется выражением

$$i = I_0 \{ J_0(M) \sin \omega_0 t + J_1(M) [\sin(\omega_0 + \Omega)t - \sin(\omega_0 - \Omega)t] + \\ + J_2(M) [\sin(\omega_0 + 2\Omega)t + \sin(\omega_0 - 2\Omega)t] + \\ \dots \\ + J_n(M) [\sin(\omega_0 + n\Omega)t + (-1)^n \sin(\omega_0 - n\Omega)t] + \\ \dots \}$$

В этом выражении M — индекс модуляции:

$$M = \frac{\Delta\omega}{\Omega} \text{ — при частотной модуляции,}$$

$$M = \Delta\varphi \text{ — при фазовой модуляции,}$$

$$J_n(M) \text{ — бесселева функция порядка } n \text{ от аргумента } M.$$

Вычислить среднюю мощность ЧМ (ФМ) колебания, считая нагрузку активной и равной R .

8.19*. Найти мгновенную мощность высокочастотного колебания, модулированного по частоте одним синусоидальным тоном

$$i = I_0 \sin(\omega_0 t + M \sin \Omega t).$$

Нагрузочное сопротивление считать чисто активным и равным R .

8.20*. Показать, что при малых значениях индекса модуляции ($M \ll 1$) спектр ЧМ (ФМ) колебания совпадает со спектром АМ колебания.

8.21. Средняя мощность передатчика на песущей (при отсутствии модулирующего напряжения) составляет 1 кВт . Какова будет средняя мощность P при модуляции одним синусоидальным тоном с глубиной $m = 0,7$? Чему будет равна средняя мощность боковых полос P_{σ} ? Каково будет максимальное значение мгновенной мощности $P_{\text{макс}}$?

§ 9. Теоремы об эквивалентных генераторах напряжения и тока

Общие замечания

Теоремы об эквивалентных генераторах напряжения и тока позволяют свести сложные линейные схемы, содержащие ряд источников и ряд элементов, к простым схемам, содержащим только один источник и один элемент (не считая нагрузки). Такая замена, конечно, не сокращает числа операций, необходимых для расчёта схемы¹⁾, но во многих случаях представляет значительные удобства.

¹⁾ Для некоторых конкретных условий (крайние значения сопротивлений — очень большие и очень малые значения) применение теорем пересчёта генераторов напряжения в генераторы тока (и наоборот) приводит к сокращению выкладок при расчётах.

Особенно ярко эти удобства проявляются при расчёте схем, содержащих не только линейные, но и нелинейные элементы. В подобных схемах после приведения их к виду с одним линейным и одним нелинейным элементом задача расчёта существенно упрощается.

В других схемах применение теорем об эквивалентных генераторах напряжения и тока позволяет свести неизвестные схемы к схемам известным; очень часто применение этих теорем повышает наглядность схем и, следовательно, делает эти схемы более доступными для изучения.

Приведём основные теоремы, предназначенные для упрощения анализа и расчёта схем.

Теорема перехода от генератора напряжения к генератору тока и обратно

Генератор (источник) напряжения U_0 , имеющий внутреннее сопротивление Z_0 , может быть заменён генератором (источником) тока I_0 с параллельно включённым сопротивлением Z_0 . Ток I_0 рассчитывается по формуле

$$I_0 = \frac{U_0}{Z_0}. \quad (9.1)$$

В равной степени генератор тока может быть заменён генератором напряжения

$$U_0 = I_0 Z_0. \quad (9.2)$$

Теорема иллюстрируется рис. 9.1.

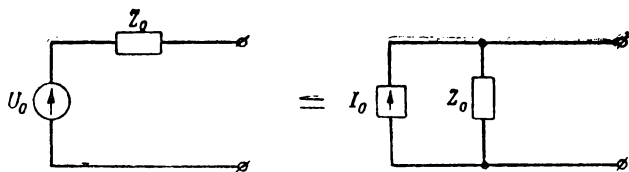


Рис. 9.1

Теорема об эквивалентном генераторе напряжения

Линейный двухполюсник, содержащий ряд источников эдс и ряд сопротивлений, может быть заменён эквивалентной схемой с одним генератором напряжения, равного U_s , и одним сопротивлением Z_s , включённым последовательно с генератором эдс.

Эквивалентная эдс U_s равна напряжению холостого хода на

зажимах двухполюсника, а эквивалентное сопротивление Z_3 равно входному сопротивлению двухполюсника при закороченных внутри него источниках эдс (рис. 9.2).

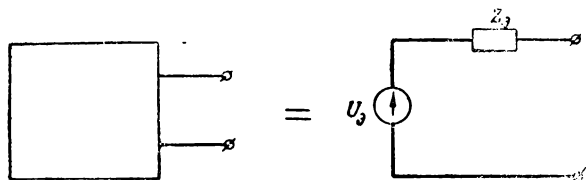


Рис. 9.2

Теорема об эквивалентном генераторе тока

Линейный двухполюсник, содержащий ряд источников эдс и ряд сопротивлений, может быть заменён эквивалентной схемой с одним генератором тока I_3 и одним сопротивлением Z_3 , включённым параллельно генератору тока. Эквивалентный ток I_3 равен току короткого замыкания двухполюсника, а эквива-

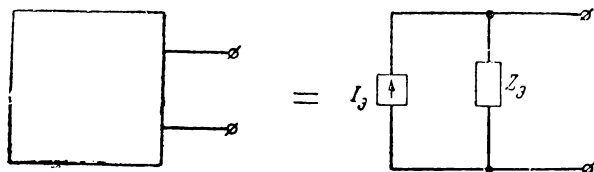


Рис. 9.3

лентное сопротивление Z_3 равно выходному сопротивлению двухполюсника при закороченных внутри него источниках эдс (рис. 9.3).

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

9.1*. На рис. 9.4 изображена схема усилителя на трёхэлектродной лампе. Составить эквивалентную схему усилителя на основе использования теоремы об эквивалентном генераторе напряжения и по найденной схеме составить эквивалентную схему с генератором тока.

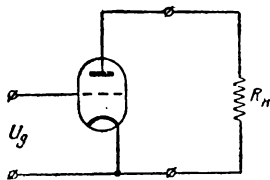


Рис. 9.4

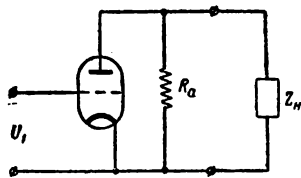


Рис. 9.5

9.2*. Составить эквивалентную схему с генератором напряжения для лампы усилителя, изображенного на рис. 9.5.

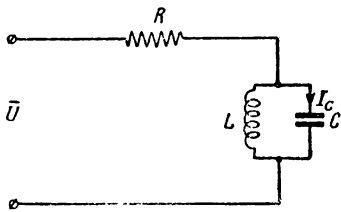


Рис. 9.6

9.3*. Пользуясь теоремой об эквивалентности генераторе напряжения, составить эквивалентную схему по рис. 9.6 и найти выражение для модуля тока в ёмкостной ветви.

9.4. Пользуясь теоремой об эквивалентности генераторе напряжения, составить эквивалентные схемы по рис. 9.7а и б и найти выражения для абсолютных значений токов, отмеченных на схемах.

9.5*. Заменить схему рис. 9.8 эквивалентными схемами с генераторами напряжения и тока.

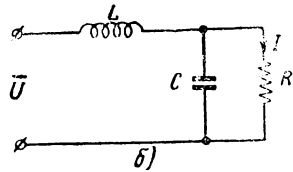
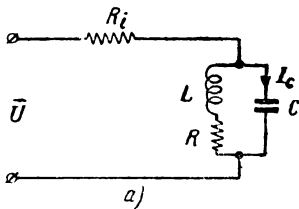


Рис. 9.7

9.6. Составить эквивалентную схему с генератором напряжения по рис. 9.9.

9.7*. Часть схемы, расположенную правее пунктирной линии (рис. 9.10), заменить одним источником эдс с одним активным сопротивлением.

Данные схемы: $R_a = 20 \text{ КОМ}$, $R_g = 180 \text{ КОМ}$, $E_a = 200 \text{ В}$, $E_g = 100 \text{ В}$.

9.8. Заменить схему рис. 9.11 эквивалентной по теореме об эквивалентном генераторе напряжения, считая нагрузкой R и C .

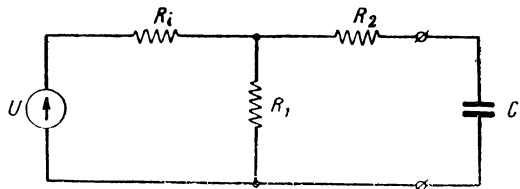


Рис. 9.8

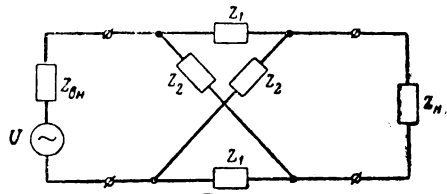


Рис. 9.9

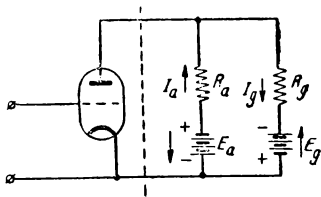


Рис. 9.10

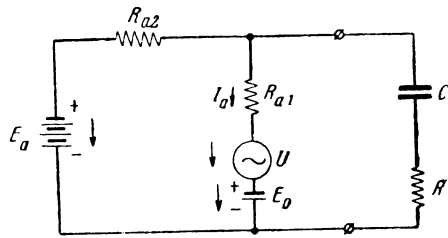


Рис. 9.11

ЧАСТЬ II
ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

§ 10. Основы спектральных и операционных представлений

Периодическую функцию $f(t)$, т. е. функцию, для которой справедливо равенство

$$f(t) = f(t + nT) \quad (n = 0, 1, 2, 3 \dots)$$

можно представить в виде гармонического ряда (в частном случае — гармонического полинома)

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n \Omega t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n \Omega t, \quad (10.1)$$

в котором коэффициенты A_n и B_n вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n \Omega t dt \\ B_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n \Omega t dt \end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$

Формула (10.1) соответствует операции гармонического синтеза, а ф-лы (10.2) — операции гармонического анализа. На операциях анализа и синтеза построены все применения спектральных методов.

Другая тригонометрическая форма записи гармонического ряда (10.1) имеет вид

$$f(t) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\Omega t - \varphi_n), \quad (10.3)$$

где

$$\left. \begin{aligned} C_n &= \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \\ \varphi_n &= \arctg \frac{B_n}{A_n} \end{aligned} \right\} \quad (10.4)$$

В комплексной форме гармонический ряд записывается в виде

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{i(n\Omega t - \varphi_n)}$$

или

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \bar{C}_n e^{i n \Omega t}, \quad (10.5)$$

где

$$\bar{C}_n = C_n e^{-i\varphi_n} \quad (10.6)$$

представляет собой комплексную амплитуду соответствующей гармоники спектра. Комплексная амплитуда \bar{C}_n может быть рассчитана также по формуле

$$\bar{C}_n = \frac{\Omega}{\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i n \Omega t} dt. \quad (10.7)$$

Заменяя дискретные частоты вида $n\Omega$ текущей частотой ω и вводя обозначение

$$S(i\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (10.8)$$

получаем выражение для комплексной амплитуды в виде

$$\bar{C}_n = \frac{\Omega}{\pi} S(i\omega), \quad (10.9)$$

причём в расчётах конкретных гармоник вместо текущей частоты ω нужно подставлять частоты соответствующих гармоник $\omega = n\Omega$.

Величина $S(i\omega)$ называется спектральной функцией или спектральной плотностью и представляет собой в масштабе $\frac{\Omega}{\pi}$ воображаемую пространственную линию, соединяющую вершины комплексных амплитуд спектра, т. е. огибающую комплексных амплитуд спектра.

Спектральную функцию также можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} S(i\omega) &= S(\omega) e^{i\varphi(\omega)} \\ S(i\omega) &= S_1(\omega) + i S_2(\omega) \end{aligned} \right\}, \quad (10.10)$$

или

где

$$S(\omega) = \sqrt{S_1^2(\omega) + S_2^2(\omega)}, \quad \operatorname{tg} \varphi(\omega) = \frac{S_2(\omega)}{S_1(\omega)}.$$

Модуль спектральной функции $S(\omega)$ представляет собой плоскостную кривую, соответствующую огибающей амплитуд спектра. На рисунках, называемых спектрограммами, обычно изображают амплитуды и их огибающую (рис. 10.1); значения фаз каждого колебания указывают цифрами или обозначениями.

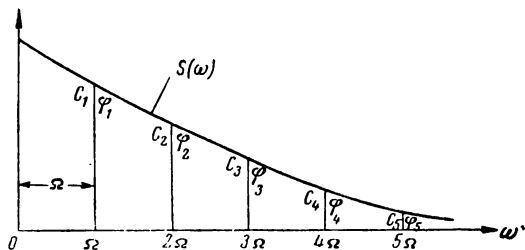


Рис. 10.1

Выражения спектральных функций для часто встречающихся

$f(t)$ можно вычислить раз навсегда и составить соответствующие таблицы; подобные таблицы существенно упрощают гармонический анализ. Для вычисления конкретных гармоник нужно пользоваться ф-лой (10.9), в которой учтён множитель $\frac{\Omega}{\pi}$.

В случае непериодических кривых, т. е. при $T \rightarrow \infty$ и $\Omega \rightarrow d\omega$, формула для гармонического синтеза вместо (10.5) с учётом (10.9) записывается в виде

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(i\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (10.11)$$

где спектральная функция $S(i\omega)$ соответствует по-прежнему (10.8), но с изменёнными пределами

$$S(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (10.12)$$

Формулы (10.11) и (10.12) носят названия формул обратного и прямого преобразования Фурье.

Формула для гармонического анализа (10.9) с физической точки зрения сохраняет свою силу; однако в силу того, что $\Omega \rightarrow 0$ (так как $T \rightarrow \infty$) амплитуды \bar{C}_n становятся бесконечно малыми и вычисление каждой из них в отдельности теряет смысл. Поэтому гармонический анализ непериодических процессов заканчивается нахождением спектральной функции.

При изучении непериодических временных функций $f(t)$ почти всегда (за небольшими исключениями, например, задача 10.14) переносом начала координат можно сделать так, чтобы при $t < 0$ временная функция $f(t)$ была тождественно равна нулю. В этом случае нижнюю границу интегрирования можно заменить нулём и для спектральной функции формула примет вид

$$S(i\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (10.13)$$

Нахождение спектральной функции по ф-ле (10.13) производится достаточно просто, если интеграл имеет конечное значение. В случаях, когда интеграл не имеет конечного значения, считается допустимым применение приёма, заключающегося в умножении функции $f(t)$ на затухающую экспоненту $e^{-\alpha t}$; в результате имеет место выражение

$$S(i\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-\alpha t} e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(i\omega + \alpha)t} dt.$$

Вычислив спектральную функцию по последнему выражению и найдя предел при $\alpha \rightarrow 0$, придём к искомой спектральной функции.

Используя этот приём и вводя обозначение $\alpha + i\omega = p$, получаем соотношение

$$S(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad (10.14)$$

известное в операционном исчислении как прямое одностороннее преобразование Лапласа.

Таким образом, для нахождения спектральных функций $S(i\omega)$ нет необходимости вычислять интеграл (10.13); для этого можно пользоваться таблицами операционных изображений по Лапласу, если при раскрытии этих изображений считать $p = i\omega$, т. е. $\alpha = 0$.

Терминология спектрального и операционного методов соответствует следующему:

Спектральный метод	Операционный метод
Временная функция $f(t)$	Оригинал $f(t)$
Спектральная функция $S(i\omega)$	Изображение $S(p)$

Для упрощения записи мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\begin{aligned} \overleftarrow{f}(i\omega) &= S(i\omega); & \overleftarrow{f}(t) &= S(p); \\ \overrightarrow{S}(i\omega) &= f(t); & \overrightarrow{S}(p) &= f(t), \end{aligned}$$

которые следует читать так: спектр временной функции $\overleftarrow{f}(t)$ равен $S(i\omega)$; временная функция, соответствующая спектру $\overrightarrow{S}(i\omega)$, равна $f(t)$. На языке операционного исчисления эти же обозначения следует читать так: изображение оригинала $\overleftarrow{f}(t)$ равно $S(p)$; оригинал, соответствующий изображению $\overrightarrow{S}(p)$, равен $f(t)$.

Устанавливая физическую общность методов Фурье и Лапласа, можно сказать, что по Фурье непериодический процесс представляется рядом бесконечных синусоид с постоянной амплитудой, а по Лапласу — рядом бесконечных „синусоид с экспоненциально изменяющейся амплитудой“.

Приведём основные теоремы (правила) спектрального (операционного) исчисления:

Эти теоремы решают следующие две основные задачи:

1. Функция $f_1(t)$ имеет спектр $S_1(i\omega)$; нужно найти спектр $S_2(i\omega)$ функции $f_2(t)$, которая связана с $f_1(t)$ известным соотношением:

2. Спектр $S_1(i\omega)$ соответствует функции $f_1(t)$; нужно найти функцию $f_2(t)$, соответствующую спектру $S_2(i\omega)$, который связан со спектром $S_1(i\omega)$ известным соотношением.

Названия теорем, решающих первую задачу, адресуются к временной функции (оригиналу); названия теорем, решающих вторую задачу, адресуются к спектральной функции (изображению).

Ниже приводятся основные теоремы: в левой части — теоремы, решающие первую задачу, а в правой — вторую задачу. Эти теоремы имеют одинаковую силу для спектрального и опе-

рационального исчислений и поэтому в любой из теорем слово „спектр“ можно заменить словом „изображение“, а слова „временная функция“ — словом „оригинал“. В равной степени обозначение $S(i\omega)$ может быть заменено обозначением $S(p)$.

1. Теорема линейности.

Спектр суммы временных функций равен сумме спектров этих функций

$$\overrightarrow{f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t)} = S_1(i\omega) + S_2(i\omega) + \dots + S_n(i\omega).$$

2. Теорема умножения оригинала на постоянное число.

Умножение оригинала на постоянное число вызывает изменение изображения, заключающееся в умножении на то же постоянное число

$$\overrightarrow{a \cdot f_1(t)} = a \cdot S_1(i\omega).$$

3. Теорема запаздывания (смещения) оригинала.

Запаздывание (смещение) оригинала на $\mp t_0$ вызывает изменение изображения, заключающееся в умножении на $e^{\mp i\omega t_0}$

$$\overrightarrow{f_1(t \mp t_0)} = S_1(i\omega) e^{\mp i\omega t_0}.$$

4. Теорема умножения оригинала на $e^{\mp \alpha t}$.

Умножение оригинала на $e^{\mp \alpha t}$ вызывает изменение изображения, заключающееся в смещении на величину $\pm \alpha$

$$\overrightarrow{f_1(t) e^{\mp \alpha t}} = S_1(i\omega \pm \alpha).$$

1. Теорема линейности.

Временная функция, соответствующая сумме спектров, равна сумме временных функций, соответствующих каждому спектру в отдельности

$$\overrightarrow{S_1(i\omega) + S_2(i\omega) + \dots + S_n(i\omega)} = f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t).$$

2. Теорема умножения изображения на постоянное число.

Умножение изображения на постоянное число соответствует умножению оригинала на то же постоянное число

$$a \overrightarrow{S_1(i\omega)} = a \cdot f_1(t).$$

3. Теорема умножения изображения на $e^{\mp i\omega t_0}$.

Умножение изображения на $e^{\mp i\omega t_0}$ соответствует изменению оригинала, заключающемуся в смещении аргумента на величину $\mp t_0$

$$\overrightarrow{S_1(i\omega t) e^{\mp i\omega t_0}} = f_1(t \mp t_0).$$

4. Теорема смещения изображения на $\pm \alpha$.

Смещение изображения на $\pm \alpha$ соответствует изменению оригинала, заключающемуся в умножении на величину $e^{\mp \alpha t}$

$$\overrightarrow{S_1(i\omega \pm \alpha)} = f_1(t) e^{\mp \alpha t}.$$

5. Теорема подобия оригинала.

Изменение аргумента оригинала на множитель a вызывает изменение изображения, заключающееся в умножении аргумента изображения на $\frac{1}{a}$ и умножении изображения на $\frac{1}{a}$.

$$\overrightarrow{f_1(at)} = \frac{1}{a} S_1 \left(\frac{i\omega}{a} \right),$$

$$\overrightarrow{f_1\left(\frac{t}{a}\right)} = a \cdot S_1(a \cdot i\omega).$$

6. Теорема дифференцирования оригинала ¹⁾.

Дифференцирование оригинала по его аргументу вызывает изменение изображения, заключающееся в умножении на аргумент изображения

$$\overrightarrow{\frac{d}{dt} f_1(t)} = i\omega S_1(i\omega).$$

7. Теорема интегрирования оригинала.

Интегрирование оригинала вызывает изменение изображения, заключающееся в делении изображения на свой аргумент

$$\overrightarrow{\int_0^t f_1(t) dt} = \frac{S_1(i\omega)}{i\omega}.$$

5. Теорема подобия изображения.

Изменение аргумента изображения на множитель a соответствует изменению оригинала, заключающемуся в умножении аргумента оригинала на $\frac{1}{a}$ и умножении оригинала на $\frac{1}{a}$.

$$\overrightarrow{S_1(i\omega \cdot a)} = \frac{1}{a} \cdot f_1 \left[\frac{t}{a} \right],$$

$$\overrightarrow{S_1\left(\frac{i\omega}{a}\right)} = a \cdot f_1(at).$$

6. Умножение изображения на свой аргумент ¹⁾.

Умножение изображения на свой аргумент соответствует изменению оригинала, заключающемуся в дифференцировании оригинала по своему аргументу

$$\overrightarrow{i\omega S_1(i\omega)} = \frac{d}{dt} f_1(t).$$

7. Теорема деления изображения на свой аргумент.

Деление изображения на свой аргумент соответствует изменению оригинала, заключающемуся в интегрировании оригинала

$$\overrightarrow{\frac{S_1(i\omega)}{i\omega}} = \int_0^t f_1(t) dt.$$

Приведённые теоремы в ряде случаев существенно облегчают задачу анализа непериодической функции $f(t)$ [т. е. по

¹⁾ Здесь считается, что при $t = 0$ $f(t) = 0$. Подробнее об этом см. в § 11, где рассматриваются системы с ненулевыми начальными условиями.

заданной $f(t)$ найти $S[i\omega]$ и синтеза [т. е. по заданному спектру $S(i\omega)$ найти временную функцию $f(t)$].

Обычно задача анализа благодаря относительной простоте исходных временных функций серьёзных затруднений не встречает.

В тех случаях, когда исходные временные функции трудно (или невозможно) передать простыми выражениями (например, импульсные воздействия), нужно заданную функцию разбить на ряд элементарных, легко поддающихся аналитическому выражению. Для каждой из этих элементарных функций просто найти соответствующий спектр (изображение), а затем при помощи теоремы линейности найти спектр (изображение) всей заданной временной функции.

Представление исходной временной функции в виде суммы элементарных функций осуществляется при помощи единичной функции (рис. 10.2), которая аналитически записывается в виде $1(t)$.

В качестве примера, иллюстрирующего сказанное, приведём аналитическую запись прямоугольного импульса высотой E с длительностью τ (рис. 10.3).

Этот импульс можно представить как разность двух умноженных на E единичных функций, причём первая начинается в момент $t = 0$, а вторая — в момент $t = \tau$.

Таким образом, аналитически прямоугольный импульс может быть записан в виде

$$f(t) = E [1(t) - 1(t - \tau)].$$

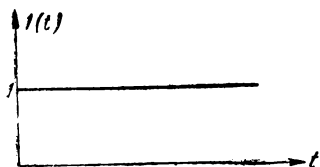


Рис. 10.2

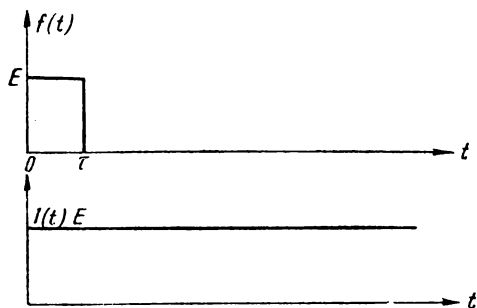


Рис. 10.3

Зная изображение (спектр) единичной функции и пользуясь далее теоремой смещения оригинала и теоремой линейности, легко найти изображение (спектр) прямоугольного импульса.

С задачей синтеза дело обстоит существенно иначе.

В случае периодических кривых задача синтеза состоит в суммировании отдельных составляющих ряда Фурье. В случае

же непериодических кривых задача синтеза (т. е. перехода от изображения к оригиналу) требует вычисления интеграла (10.11) — формулы обратного преобразования Фурье — или аналогичного интеграла в комплексной области, который в операционном исчислении носит название обратного преобразования Лапласа.

В практических инженерных задачах широко пользуются двумя методами перехода от изображения к оригиналу, которые позволяют избежать применения теории функций комплексного переменного. Идея, составляющая основу этих методов, состоит в замене сложного изображения рядом элементарных и именно таких, оригиналы которых известны. Сумма элементарных оригиналов даёт искомый оригинал сложного изображения.

Эти методы будем называть: 1) метод разложения изображения на простые дроби; 2) метод разложения изображения по отрицательным степеням аргумента. Очень часто эти методы называют теоремами разложения.

Приведём рецептуру пользования этими методами.

Метод разложения изображения на простые дроби

Задача ставится так: задано изображение $F(p)$; нужно найти соответствующий ему оригинал $f(t)$, т. е. найти $\overline{F(p)}$.

Считаем, что изображение $F(p)$ может быть представлено в виде рациональной алгебраической дроби относительно p , т. е.

$$F(p) = \frac{V(p)}{W(p)} = \frac{A_0 p^m + A_1 p^{m-1} + A_2 p^{m-2} + \dots + A_{m-1} p + A_m}{B_0 p^n + B_1 p^{n-1} + B_2 p^{n-2} + \dots + B_{n-1} p + B_n},$$

причём в практических задачах всегда $n \geq m$.

Выражение для $F(p)$ можно также представить в виде суммы элементарных дробей

$$F(p) = \frac{V(p)}{W(p)} = \frac{a_1}{p-p_1} + \frac{a_2}{p-p_2} + \dots + \frac{a_n}{p-p_n}, \quad (10.15)$$

где

$$a_i = \frac{V(p_i)}{W'(p_i)} \quad (10.16)$$

а p_i — корни уравнения

$$W(p) = 0. \quad (10.17)$$

Функцию $F(p)$ теперь можно представить в виде

$$F(p) = \sum_{i=1}^n \frac{V(p_i)}{W'(p_i)} \frac{1}{p-p_i}.$$

1) Заметим, что коэффициенты a_i можно определить по хорошо известному способу неопределённых коэффициентов.

Оригиналы, соответствующие изображениям $\frac{1}{p - p_i}$, известны (см. ниже)

$$\frac{1}{p - p_i} \xrightarrow{\text{---}} e^{p_i t}$$

и, следовательно, временная функция $f(t)$, соответствующая изображению $F(p)$, запишется следующим образом

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \frac{F(p_i)}{W'(p_i)} e^{p_i t}. \quad (10.18)$$

Последней формуле для того частного случая, когда один из корней уравнения (10.17) равен нулю, т. е. когда

$$W(p) = pW_1(p) \quad (10.19)$$

можно придать другой, иногда более удобный вид

$$f(t) = \frac{F(0)}{W_1(0)} + \sum_{i=2}^n \frac{F(p_i)}{p_i W_1'(p_i)} e^{p_i t}. \quad (10.20)$$

Формулу (10.20) обычно называют „формулой разложения“.

Формулы (10.18) и (10.20) справедливы только для разложений, в которых уравнение $W(p) = 0$ не содержит равных (кратных) корней. В случаях, когда встречаются равные корни, нужно прибегать к операциям, при помощи которых можно обойти это затруднение.

Укажем наиболее простые приёмы, позволяющие решать задачи в случаях кратных корней.

1-й приём. Искусственно (временно) сделать корни разными, а потом после вычислений, т. е. в полученном результате, устремить их один к другому (задача 10.32).

2-й приём. Искусственно видоизменить числитель так, чтобы можно было не применять теорему разложения, а вычисление оригинала провести на основе теоремы смещения изображения и теоремы линейности (задача 10.33).

3-й приём. Применить разложение на простейшие дроби при помощи способа неопределённых коэффициентов (задача 10.34) в случаях, когда есть и простые и кратные корни.

Следует указать, что есть другие приёмы, позволяющие обходить затруднения в задачах с кратными корнями.

Метод разложения изображения по отрицательным степеням аргумента

Задача ставится совершенно так же: задано $F(p)$, нужно найти $f(t)$.

Изображение $F(p)$ может быть разложено по отрицательным степеням p в виде

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{C_0}{p} + \frac{C_1}{p^2} + \frac{C_2}{p^3} + \dots + \frac{C_n}{p^{n+1}} = \\ &= \frac{1}{p} \left(C_0 + \frac{C_1}{p} + \frac{C_2}{p^2} + \dots + \frac{C_n}{p^n} \right). \end{aligned} \quad (10.21)$$

Оригинал соответствующей каждой элементарной дроби известен

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p^i} = \frac{t^i}{i!};$$

следовательно, для оригинала, соответствующего сумме элементарных дробей, получаем

$$f(t) = C_0 + C_1 t + \frac{C_2}{2!} t^2 + \frac{C_3}{3!} t^3 + \dots + \frac{C_n}{n!} t^n. \quad (10.22)$$

Приёмов для разложения в ряд по отрицательным степеням аргумента, т. е. для вычисления коэффициентов C_i , есть много; наиболее простым из них является приём непосредственно деления числителя на знаменатель (задача 10.31).

Как это указывалось выше (стр. 104), выражение спектральных функций (изображений) можно вычислить раз навсегда для наиболее часто встречающихся временных функций (оригиналов) и составить соответствующие таблицы. Современные таблицы содержат более тысячи оригиналов и изображений¹⁾.

В качестве приложения к настоящему параграфу даётся табл. 10.1 некоторых операционных соотношений, встречающихся в задачах §§ 10 и 11. В табл. 10.2 даны наиболее распространённые неперiodические воздействия в виде аналитических и операционных записей. В правой колонке таблицы, кроме того, спектральные функции представлены в виде, удобном для нахождения амплитуд и фаз гармоник при периодическом повторении этих неперiodических процессов. Таблицы 10.1 и 10.2 следует рассматривать как справочный материал.

В настоящем параграфе задачи расположены в следующей последовательности:

1) Рекомендуется пользоваться „Справочником по операционному исчислению“, составленным В. А. Диткиным и П. И. Кузнецовым, Гостехиздат, 1951 г. Необходимо иметь в виду, что изображения, взятые из этого справочника (по Карсону) нужно делить на p , чтобы получить изображения по Лапласу (Фурье).

Сначала даются задачи на вычисление спектральных функций как при помощи интеграла Фурье, так и при помощи таблиц операционного исчисления. В этих же задачах содержатся элементы аналитической записи сложных кривых (импульсов), составляемых из отрезков прямых или кривых (задачи 10.1—10.7).

Далее следуют задачи на вычисление гармоник периодической последовательности импульсов (задачи 10.8—10.17).

После этих задач даны задачи, иллюстрирующие практическую ценность знания основных теорем (задачи 10.18—10.25).

Наконец, в заключение параграфа, приводятся задачи на применение теорем разложения (задачи 10.26—10.35).

Знание материала настоящего параграфа необходимо для решения задач последующих параграфов.

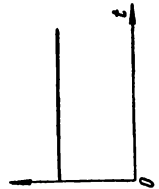
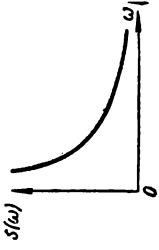
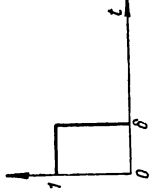
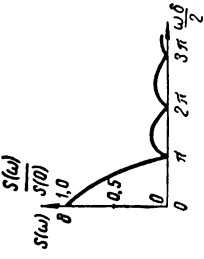
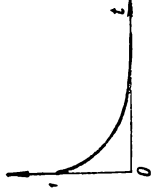
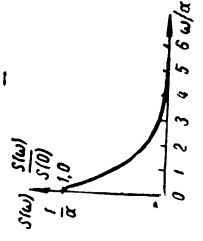
Нужно отметить, что множитель $1(t)$ перед временной функцией во всех тех случаях, когда ясно, что при $t < 0$, $f(t) = 0$, для упрощения записи, как правило, опускается.

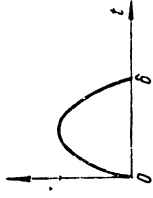
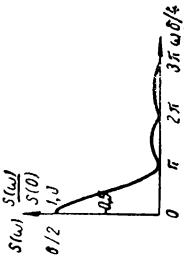
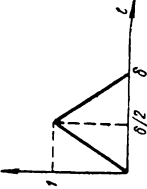

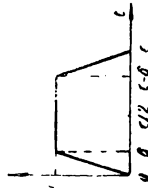
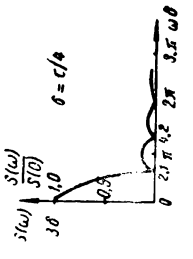
Таблица 10.1

Таблица операционных соотношений по Лапласу

№ пп.	Оригинал	Изображение	№ пп.	Оригинал	Изображение
1	1	$\frac{1}{p}$	10	sh αt	$\frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}$
2	t	$\frac{1}{p^2}$	11	ch αt	$\frac{p}{p^2 - \alpha^2}$
3	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	12	\sqrt{t}	$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{p \sqrt{p}}$
4	$e^{\mp \alpha t}$	$\frac{1}{p \pm \alpha}$	13	$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}$
5	$1 - e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{p(p + \alpha)}$	14	$e^{-\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(\nu + \alpha)^2 + \omega^2}$
6	$e^{\alpha t} - 1$	$\frac{\alpha}{p(p - \alpha)}$	15	$e^{-\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$
7	$t e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p + \alpha)^2}$	16	$1 - \cos \omega t$	$\frac{\omega^2}{p(\nu^2 + \omega^2)}$
8	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	17	$t - \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha}$	$\frac{\alpha}{p^2(\nu + \alpha)}$
9	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	18	$\sin \omega t$	$2\omega \frac{p}{(\nu^2 + \omega^2)^2}$

Таблица 10.2

№	Оригинал (временная функция)		Изображение (спектральная функция)			
	наименование	кривая временной функции	аналитическая запись	операционная запись	запись в виде спектральной функции	кривая модуля спектральной функции
1	Единичная функция		$1(t)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{i\omega}$	
2	Прямоугольный импульс		$1(t) - 1(t - \delta)$	$\frac{1}{p} (1 - e^{-p\delta})$	$\delta \frac{\sin \frac{\omega\delta}{2}}{\frac{\omega\delta}{2}} e^{-i\frac{\omega\delta}{2}}$	
3	Экспоненциальная функция		e^{-at}	$\frac{1}{p + a}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + \omega^2}} e^{-i \arctg \frac{\omega}{a}}$	

<p>4 Синусоидальный импульс</p>		$\frac{\pi}{\delta} t \cdot 1(t) - \sin \frac{\pi}{\delta} (t - \delta) 1(t - \delta)$	$\frac{\pi}{\delta} \frac{1}{\left(\frac{\pi}{\delta}\right)^2 + p^2} \times (1 - e^{-p\delta})$	$\frac{\pi \delta}{2} \frac{\sin \frac{\omega \delta}{2}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\omega \delta}{2}\right)^2} \times e^{-i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega \delta}{2}\right)}$	
<p>5 Треугольный импульс</p>		$\kappa t \cdot 1(t) - 2\kappa \left(t - \frac{\delta}{2}\right) \times 1\left(t - \frac{\delta}{2}\right) + \kappa(t - \delta) \times 1(t - \delta)$ $\kappa = \frac{\delta}{2}$	$\kappa \frac{\left(1 - e^{-p\frac{\delta}{2}}\right)^2}{p^2}$	$\frac{\delta}{2} \left(\frac{\sin \frac{\omega \delta}{4}}{\frac{\omega \delta}{4}}\right)^2 e^{-i\frac{\omega \delta}{2}}$	
<p>6 Трапецидальный импульс</p>		$\kappa t 1(t) - \kappa(t - \delta) \times 1(t - \delta) - \kappa \left[t - (\tau - \delta) \right] + \kappa(t - \tau) 1(t - \tau)$ $\kappa = \frac{E}{\delta}$	$\kappa \frac{1 - e^{-p\delta} + p^2}{1 - e^{-p\delta} + p^2} + \frac{e^{-p\tau}(1 - e^{p\delta})}{1 - e^{-p\delta} + p^2}$	$\frac{2}{\delta} \frac{\left[\cos \omega \left(\frac{\tau - \delta}{2}\right) - \cos \omega \frac{\tau}{2} \right] e^{-i\frac{\omega \delta}{2}}}{\omega^2}$	

№ п/п	Оригинал (временная функция)		Изображение (спектральная функция)	
	кривая временной функции	аналитическая запись	операционная запись	запись в виде спектральной функции
7	<p>Линейно-экспоненциальный импульс</p>	$e^{-\alpha/\alpha t}$	$\frac{\alpha}{(p + \alpha)^2}$	<p>кривая модуля спектральной функции</p>
8	<p>Кольцевой импульс</p>	$e^{-\beta t^2}$	<p>—</p>	<p>кривая модуля спектральной функции</p>

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

10.1*. Найти выражение спектральной функции последовательности прямоугольных импульсов (рис. 10.4) как при помощи прямого преобразования Фурье, так и при помощи таблиц операционного исчисления. Построить график модуля спектральной функции.

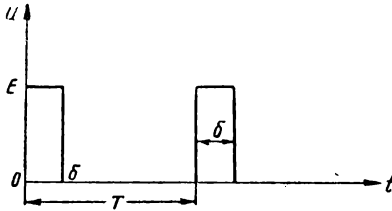


Рис. 10.4

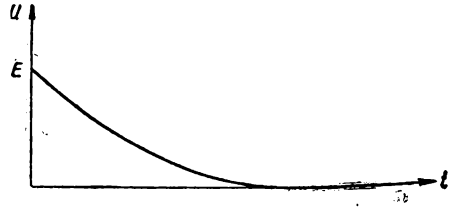


Рис. 10.5

10.2*. Найти спектр экспоненциального видеопульса, определяемого уравнением (рис. 10.5)

$$u = E e^{-\alpha t}.$$

10.3*. Составить аналитическое выражение временной функции, изображённой на рис. 10.6, и затем найти изображение этой функции.

10.4*. Составить аналитическую запись импульса в виде отрезка синусоиды длительностью полпериода (рис. 10.7), найти его операционное изображение и затем составить выражение для спектральной функции, удобное для последующего расчёта амплитуд и фаз.

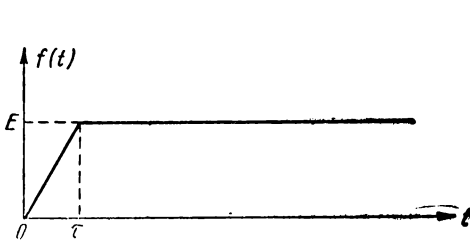


Рис. 10.6

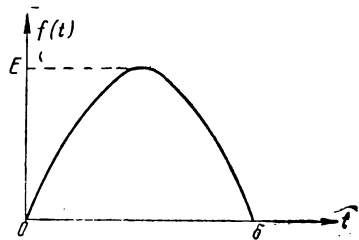


Рис. 10.7

10.5. Составить аналитическую запись импульса в виде равнобедренного треугольника (рис. 10.8), найти его операционное изображение, а затем составить выражение спектральной функции, удобное для расчёта амплитуд и фаз.

Построить график модуля спектральной функции.

10.6*. Составить аналитическое выражение, а затем найти операционное изображение симметричного трапециoidalного импульса (рис. 10.9).

Построить график модуля спектральной функции для частного случая

$$h = \frac{1}{4} \tau.$$

10.7. Найти операционное выражение и спектральную функцию импульса, описываемого выражением (рис. 10.10):

$$f(t) = E e^{-\alpha t} \cdot \alpha t.$$

Построить график модуля спектральной функции:

10.8*. Составить общее выражение для расчёта амплитуд гармонических составляющих последовательности прямоугольных импульсов (рис. 10.4).

10.9*. Найти значения амплитуд и фаз первых пяти гармоник для последовательности прямоугольных импульсов, при-

чём $\delta = \frac{1}{2} T$ (рис. 10.4).

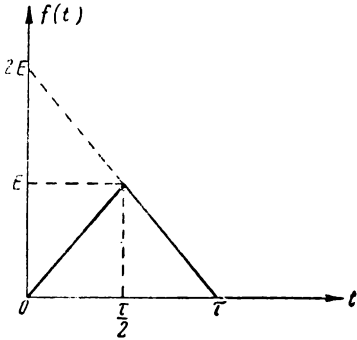


Рис. 10.8

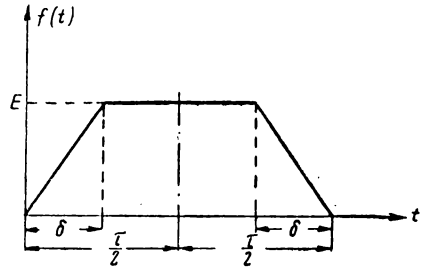


Рис. 10.9

10.10*. Сравнить выражения для амплитуд n -й гармоники двух последовательностей прямоугольных импульсов: при скважности $\frac{T}{\delta} = 2$, при скважности

$$\frac{T}{\delta} = 50.$$

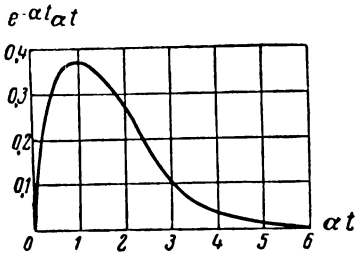


Рис. 10.10

10.11*. Дана последовательность прямоугольных импульсов с периодом следования $T = 2$ мсек. Высота импульса $E = 10$ в.

Найти значение амплитуд 15-й гармоники для импульсов длительностью $\delta_1 = 1$ мксек и для импульсов длительностью $\delta_2 = 100$ мксек.

Тот же расчёт проделать для 75-й гармоники.

10.12. Найти гармоники последовательности прямоугольных импульсов по условиям, приведённым в следующей таблице.

№ пп.	Номер искомой гармоники n	Частота повторения F гц	Длительность импульса δ мсек	Скважность $\frac{T}{\delta}$	Размах (высота) импульса E в
1	17	50	100	--	10
2	11 и 95	--	--	20	10
3	11 и 95	--	--	500	10
4	13	100	10	--	20
5	510	--	--	1000	10

10.13. Составить общее выражение для расчёта n -й гармоники последовательности треугольных импульсов (рис. 10.8). Длительность импульса τ , период повторения T , высота E .

10.14*. Найти спектральную функцию колокольного импульса, описываемого, выражением

$$f(t) = e^{-\beta^2 t^2}.$$

10.15. Найти девятую гармонику последовательности треугольных импульсов, если известно, что длительность импульса равна 100 мксек, а частота повторения $F = 100$ гц. Высота (размах) импульса равна 10 в.

10.16. Найти указанные в таблице гармоники последовательности симметричных треугольных импульсов по данным, приведённым в этой же таблице.

№ пп.	Длительность импульса τ мксек	Период повторения T мксек	Сквозность $\frac{T}{\delta}$	Высота (размах) импульса v	№ искомым гармоник
1	1	1	—	10	110,350
2	10	1	—	10	110,350
3	—	—	150	20	17

10.17. Найти девятую гармонику последовательности синусоидальных импульсов по следующим данным: длительность импульса $\delta = 1$ мсек, частота повторения — 100 гц, высота (размах) импульса — 10 в.

10.18*. Пользуясь табл. 10.1, найти изображение функции

$$f(t) = E [1(t) + \sin \omega t].$$

10.19. Применяя теоремы линейности и умножения на постоянное число, найти изображения следующих функций:

- | | |
|------------------------------------|--|
| 1) $1 - e^{-\alpha t}$, | 4) $[(x - \beta)t + 1]e^{-\alpha t}$, |
| 2) $kt + \sin \omega t$, | 5) $e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}$, |
| 3) $(1 - \alpha t)e^{-\alpha t}$, | 6) $\sin(\omega t + \varphi)$. |

10.20. Применяя теорему умножения оригинала на экспоненту, найти изображения следующих функций:

- | | |
|---|--|
| 1) $e^{-\alpha t} \sin \omega t$, | 4) $\sin(\omega t + \varphi)e^{-\alpha t}$, |
| 2) $t e^{-\alpha t}$, | 5) $t e^{-\alpha t} e^{-\beta t}$. |
| 3) $\text{sh } \beta t e^{-\alpha t}$, | |

10.21*. Применяя теорему смещения оригинала, найти изображение функции $\sin(\omega t - \varphi)$, где $\varphi = \omega t_0$.

10.22. Получить новые операционные соотношения путём применения теоремы дифференцирования из следующих соотношений:

$$1) \overrightarrow{\sin \omega t} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2},$$

$$2) \overleftarrow{e^{-\alpha t} \cdot \sin \omega t} = \frac{\omega}{(\rho + \alpha)^2 + \omega^2}.$$

10.23. Получить ф-лу (3) табл. 10.1 из ф-лы (2) той же таблицы при помощи теоремы интегрирования.

10.24*. Составить „теорему умножения временной функции на $\sin \omega t$, т. е. дать общую формулу для нахождения изображения временной функции $\tilde{f}(t) \sin \omega t$ по известному изображению функции $\tilde{f}(t) = F(p)$.

10.25*. Используя полученную в предыдущей задаче теорему умножения на $\sin \omega t$, найти изображение функции $e^{-\alpha t} \sin \omega t$ по известному изображению

$$\overleftarrow{e^{-\alpha t}} = \frac{1}{p + \alpha}.$$

10.26. Используя теорему умножения на $\sin \omega t$, получить из изображения единичной функции изображение функции $\sin \omega t$ (см. задачу 10.24).

10.27*. Найти оригинал, соответствующий изображению $\frac{1}{(p + a)(p + b)}$, с помощью теоремы разложения на простые дроби.

10.28. Найти, пользуясь теоремой разложения на простые дроби, оригиналы, соответствующие следующим изображениям:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{1}{p^2 + \omega^2}, & 3) \frac{1}{(p + a)(p^2 + \omega^2)}, \\ 2) \frac{1}{(p + a)^2 + \omega^2}, & 4) \frac{p}{(p + a)(p^2 + \omega^2)}. \end{array}$$

10.29*. Пользуясь теоремой разложения на простые дроби, найти оригинал соответствующий изображению $\frac{1}{p(p + a)}$.

10.30. Найти, пользуясь теоремой разложения на простые дроби, оригиналы, соответствующие следующим изображениям:

$$\begin{array}{l} 1) \frac{1}{p(p^2 - a^2)}, \\ 2) \frac{1}{p(p^2 + a^2)}. \end{array}$$

10.31*. Пользуясь теоремой разложения по отрицательным степеням аргумента, найти оригинал, соответствующий изображению $\frac{1}{p + a}$.

10.32*. Найти оригинал, соответствующий изображению $\frac{1}{(p + a)^3}$.

10.33*. Найти оригинал, соответствующий изображениям:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{p}{(p + a)^2}, & 4) \frac{p}{(p \pm a)^n}, \\ 2) \frac{p}{(p + a)^3}, & 5) \frac{p^2}{(p + a)^3}, \\ 3) \frac{1}{(p \pm a)^n}, & 6) \frac{p^2}{(p + a)^4}. \end{array}$$

10.34°. Найти оригинал, соответствующий изображению $\frac{1}{p(p+a)^2}$.

10.35°. Пользуясь теоремами разложения, найти связь между оригиналами и изображениями при предельных значениях аргументов t и p соответственно, т. е. при $t = 0$, $p = \infty$ и $p = 0$, $t = \infty$.

§ 11. Исследование переходных процессов на основе применения спектральных и операционных методов

Физические представления, лежащие в основе изучения переходных процессов спектральными методами, сводятся к следующему.

Внешнее воздействие при помощи операций гармонического анализа представляется суммой элементарных гармонических колебаний, т. е. временная картина заменяется рядом бесконечных синусоид (спектром). Зная частотные характеристики системы, можно установить, как вследствие реакции системы изменится каждая из синусоид по амплитуде и фазе. Сумма этих изменённых синусоид (гармонический синтез) даст картину искомого напряжения (или тока) на выходе системы.

В качестве частотных характеристик используются комплексный коэффициент передачи $K(i\omega)$ для четырёхполюсника и комплексное входное сопротивление $Z(i\omega)$ или комплексная входная проводимость $Y(i\omega)$ для двухполюсника. Изучение переходного режима, таким образом, строится на основе характеристик системы для установившегося режима.

Так как переходные процессы являются следствием непериодического воздействия — воздействия, начавшегося в некоторый момент, с которого обычно и начинают отсчёт времени, т. е. в момент $t = 0$, — то спектры внешних воздействий будут сплошными и операции гармонического анализа и синтеза должны проводиться при помощи одностороннего преобразования Фурье¹⁾.

Как уже было указано в § 10, вычисления при помощи интеграла Фурье не отличаются от вычислений при помощи преобразований Лапласа, если пользоваться приёмом умножения временной функции $f(t)$ на $e^{-\epsilon t}$. При этом, производя вычисления методом интеграла Фурье, можно пользоваться таблицами операционного исчисления, заменяя оператор p символом $i\omega$.

¹⁾ Применение рядов Фурье для исследования переходных процессов возможно путём искусственного сведения непериодического процесса к периодическому — метод П. К. Акульшина.

Другими словами, оба метода при решении указанных выше задач на основе использования таблиц операционного исчисления являются одинаковыми.

При операционном исчислении физические представления могут быть построены совершенно так же, как и при спектральном методе: бесконечные синусоиды заменяются „синусоидами с экспоненциально меняющейся амплитудой“.

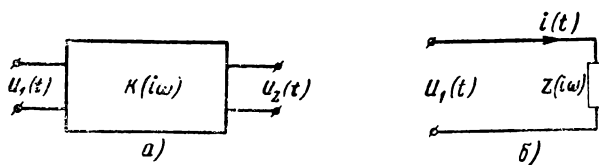


Рис. 11.1

Комплексный коэффициент передачи $K(i\omega)$ заменяется операторным коэффициентом $K(p)$, а комплексное входное сопротивление $Z(i\omega)$ — операторным сопротивлением $Z(p)$.

В практических задачах изучения переходных процессов возможны три постановки как для схем, содержащих четырёхполюсники, так и для схем, содержащих двухполюсники (рис. 11.1).

Для схем, содержащих четырёхполюсники, эти постановки формулируются следующим образом:

- 1) Задано входное напряжение $u_1(t)$ и характеристика системы $K(i\omega)$. Найти выходное напряжение $u_2(t)$.
- 2) Задано выходное напряжение $u_2(t)$ и характеристика системы $K(i\omega)$. Найти входное напряжение $u_1(t)$.
- 3) Задано входное напряжение $u_1(t)$ и выходное напряжение $u_2(t)$. Найти характеристику системы, т. е. $K(i\omega)$.

Первые две постановки являются аналитическими (анализ свойств системы); третья постановка является синтетической (синтез системы).

Решение любой из трёх задач сводится к следующим трём этапам (в качестве примера рассмотрим первую постановку).

I этап. По заданной входной временной функции $u_1(t)$ находим её спектральную функцию $U_1(i\omega)$ по формуле

$$U_1(i\omega) = \int_0^{\infty} u_1(t) e^{-i\omega t} dt.$$

II этап. Находим спектральную функцию выходного напряжения $U_2(i\omega)$ по известному комплексному коэффициенту передачи

$$U_2(i\omega) = K(i\omega) U_1(i\omega).$$

III этап. Определяем временную функцию выходного напряжения $u_2(t)$ по формуле

$$u_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_2(i\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Первый и третий этапы следует решать при помощи таблиц операционных соотношений (оригиналов и изображений); таким образом, вычисления производятся только по второму этапу.

Совершенно аналогично ставятся задачи при изучении схем, содержащих двухполюсник (рис. 11.1б).

Пусть, например, задано входное напряжение $u_1(t)$ и характеристика системы $Z(i\omega)$. Нужно найти ток $i(t)$. Решение проводится по тем же трём этапам.

I этап. Находим спектральную функцию входного напряжения $U_1(i\omega)$:

$$U_1(i\omega) = \int_0^{\infty} u_1(t) e^{-i\omega t} dt.$$

II этап. Находим спектральную функцию тока $I(i\omega)$ по известному входному сопротивлению

$$I(i\omega) = \frac{U_1(i\omega)}{Z(i\omega)}.$$

III этап. Определяем временную функцию тока $i(t)$

$$i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} I(i\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

При пользовании таблицами операционных соотношений, как уже было указано, следует $i\omega$ заменять p и $K(i\omega)$ и $Z(i\omega)$ функциями $K(p)$ и $Z(p)$.

Наличие самых подробных таблиц не освобождает от необходимости пользоваться основными теоремами, рассмотренными в предыдущем параграфе.

Следует указать, что в сложных задачах не следует вычислять $K(i\omega)$ и $Z(i\omega)$; с этой целью нужно пользоваться таблицами коэффициентов основных уравнений четырёхполюсника (§ 6).

Рассмотренная методика, как уже указывалось выше, даёт возможность изучать переходный процесс на основе характеристик системы для установившегося процесса.

Однако использование характеристик установившегося режима в явном виде не является обязательным. Изучение переходного режима можно проводить путём решения диффе-

ренциальных и интегро-дифференциальных уравнений методами операционного исчисления. В этом случае левую и правую части дифференциального уравнения, заданные в виде временных функций, нужно заменить их изображениями и полученное новое операционное уравнение решить относительно изображения искомой временной функции. Найденное изображение затем по таблицам переводится в оригинал, который и представляет собой решение дифференциального уравнения.

Операции замены временных функций левой и правой частей дифференциального уравнения требуют применения теорем дифференцирования и интегрирования (§ 10).

При изучении переходных процессов следует различать задачи с нулевыми и ненулевыми начальными условиями.

Наиболее простыми являются задачи с нулевыми начальными условиями. В этих задачах считается, что в элементах схемы, на которую подаётся внешнее воздействие в момент $t = 0$, не было никаких запасов энергии при $t \leq 0$, т. е. на обкладках конденсаторов не было напряжений, а в катушках токов. Внешнее воздействие подаётся на „пустую“ схему. В такой схеме при отсутствии внешнего воздействия никаких токов и напряжений нет.

Несколько сложнее дело обстоит с задачами с ненулевыми начальными условиями. В этих задачах нужно учитывать напряжения на конденсаторах и токи в катушках, которые имели место в момент подачи внешнего воздействия. В этих схемах несмотря на отсутствие внешнего воздействия, могут протекать токи и возникать напряжения. Последние условия соответствуют так называемому свободному режиму.

С учётом начальных условий теоремы дифференцирования и интегрирования необходимо уточнить по отношению к тексту этих теорем, данному в § 10.

Напомним, что при оригинале $f(t)$ и изображении $F(p)$ эти теоремы при нулевых начальных условиях записываются так:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\frac{d}{dt} f(t)} &= p F(p), \\ \overleftarrow{\int f(t) dt} &= \int_0^t f(t) dt = \frac{1}{p} F(p). \end{aligned}$$

С учётом ненулевых начальных условий эти теоремы имеют следующий вид:

$$\overrightarrow{\frac{d}{dt} f(t)} = p F(p) - f(0); \quad (11.1)$$

$$\overleftarrow{\int f(t) dt} = \int_0^t f(t) dt + \kappa = \frac{1}{p} F(p) + \frac{\kappa}{p} \quad (11.2)$$

В этих формулах: $f(0)$ — значение функции $f(t)$ в момент $t=0$, т. е. в момент подачи внешнего воздействия; κ — значение $\int f(t) dt$ в момент $t=0$, т. е. опять-таки в момент подачи внешнего воздействия.

Например, изображение напряжения на катушке

$$\vec{u}_L = L \frac{d\vec{i}_L}{dt} = L [p \vec{i}_L - i_L(0)], \quad (11.3)$$

где $i_L(0)$ — ток, протекающий через катушку в момент $t=0$.

Аналогично найдём изображение напряжения на конденсаторе

$$\vec{u}_C = \frac{1}{C} \int_0^t i_C dt + u_C(0) = \frac{1}{pC} \vec{i}_C + \frac{u_C(0)}{p}. \quad (11.4)$$

Здесь $u_C(0)$ — напряжение на конденсаторе в момент $t=0^1$.

Подобным же образом могут быть найдены токи через катушку и конденсатор:

$$\vec{i}_L = \frac{1}{L} \int_0^t u_L dt + i_L(0) = \frac{1}{pL} \vec{u}_L + \frac{i_L(0)}{p}, \quad (11.5)$$

$$\vec{i}_C = C \frac{d\vec{u}_C}{dt} = C [p \vec{u}_C - u_C(0)]. \quad (11.6)$$

В тех задачах, где встречается двойное дифференцирование временной функции, нужно дважды применять теорему дифференцирования.

Пусть y представляет собой временную функцию; тогда

$$\begin{aligned} \vec{y}' &= p \vec{y} - y(0), \\ \vec{y}'' &= p \vec{y}' - y'(0) = p [p \vec{y} - y(0)] - y'(0) = \\ &= p^2 \vec{y} - p y(0) - y'(0). \end{aligned} \quad (11.7)$$

Как уже известно из § 10, без знания материала которого невозможно решение задач настоящего параграфа, некоторые операционные соотношения даны в табл. 10.1 и 10.2.

В настоящем параграфе задачи расположены в следующей последовательности.

¹⁾ Если конденсатор ко времени $t=0$ был заряжен до напряжения E , то $u_C(0) = -E$.

В первой группе задач (11.1 — 11.18) рассматриваются схемы с нулевыми начальными условиями; на вход этих схем подаётся либо постоянное воздействие¹⁾, либо воздействие в форме видеоимпульсов. Решение этих задач можно проводить как при помощи частотных (операционных) характеристик, так и при помощи составления и решения дифференциальных уравнений операционным методом. Если в условии задачи нет указаний относительно выбора способа решения, читателю предлагается сделать выбор самостоятельно. В каждой задаче, кроме того, можно прибегать к теоремам разложения даже в тех случаях, когда необходимое операционное соотношение есть в таблицах.

Во второй группе задач (11.19 — 11.20) условия остаются в основном прежними, но на вход схемы подаётся либо гармоническое напряжение, либо радиопульсы.

В третьей группе задач (11.21 — 11.24) рассматриваются схемы с ненулевыми начальными условиями; эти задачи в основном посвящены отысканию токов свободного режима. Решение этих задач операционным методом на основе дифференциальных уравнений соответствует общей методике, которая была подробно изложена выше. Относительно же решения этих задач методом частотных (операционных) характеристик, необходимо привести дополнительные соображения.

Операционное уравнение для тока имеет вид

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)},$$

где $U(p)$ — изображение входного напряжения, $Z(p)$ — входное сопротивление в операционной записи. В условиях свободного режима $U(p)$ равно нулю и ток $I(p)$ может быть не равен нулю только при условии

$$Z(p) = 0. \quad (11.8)$$

Считая, что изображение тока $I(p)$ может быть представлено в виде суммы дробей

$$I(p) = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \dots,$$

где p_1, p_2, \dots — корни уравнения (11.8), временную функцию (оригинал) тока можно по аналогии с теоремой разложения (§ 10) и используя теорему смещения изображения представить в виде

$$i(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{p_i t}. \quad (11.9)$$

¹⁾ При подаче на вход в момент $t = 0$ постоянного напряжения $E \cdot 1(t)$, как правило, будем писать, как и прежде, только E , опуская множитель $1(t)$.

По теореме разложения коэффициенты A_i определялись через функции $V(p)$ и $W(p)$ и корни $W(p)$; здесь же коэффициенты A_i определяются по начальным условиям. В некоторых задачах нужно знать только характер изменения тока и коэффициенты A_i можно не определять.

Необходимо помнить, что пользование этой методикой связано с ограничениями, совпадающими с ограничениями при пользовании теоремой разложения (уравнение $Z(p) = 0$ не должно иметь кратных корней). Эти ограничения можно обойти приёмами, изложенными в § 10.

Укажем, кроме того, что задачи с ненулевыми начальными условиями могут быть сведены к задачам с нулевыми начальными условиями путём выделения источника напряжения или источника тока, причём данные этих источников должны соответствовать напряжению на конденсаторе или току в катушке в момент $t = 0$.

Содержание задач четвертой группы (11.25 — 11.33) посвящено вопросам исследования уже известных законов переходного и свободного процессов.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

11.1*. На вход схемы, изображённой на рис. 11.2, подано постоянное напряжение E в момент $t = 0$ (рис. 11.3). Найти ток i в схеме, пользуясь частотными (операционными) характеристиками.

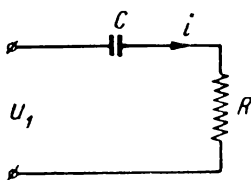


Рис. 11.2

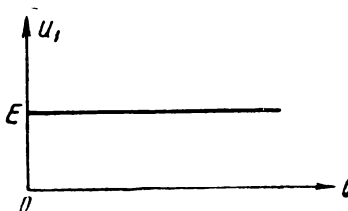


Рис. 11.3

11.2*. На вход схемы, изображённой на рис. 11.4, подано постоянное напряжение E в момент $t = 0$. Найти напряжение на выходе $u_2(t)$, пользуясь частотными (операционными) характеристиками.

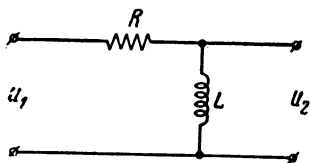


Рис. 11.4

11.3*. Решить задачи 11.1 и 11.2 методом операционного решения дифференциальных уравнений.

11.4. На вход схем, изображённых на рис. 11.5, подаётся в момент $t = 0$ постоянное напряжение. Найти напряжение на выходе как при помощи частотных (операционных) характеристик, так и дифференциальных уравнений.

11.5*. Найти напряжение на выходе в схеме рис. 11.6, если на вход подано постоянное напряжение E в момент $t = 0$.

11.6. На схемы, изображённые на рис. 11.7, подаётся в момент $t = 0$ постоянное напряжение E ; найти выходное напряжение $u_2(t)$ как при помощи частотных характеристик, так и дифференциальных уравнений.

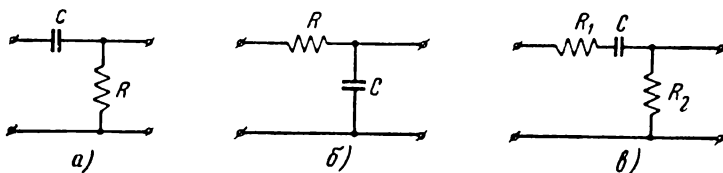


Рис. 11.5

11.7*. На вход схемы, изображённой на рис. 11.8, в момент $t = 0$ подано постоянное напряжение E . Найти ток в схеме, пользуясь как частотными характеристиками, так и дифференциальными уравнениями.

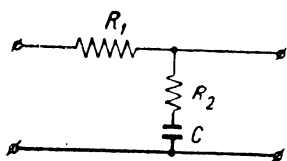


Рис. 11.6

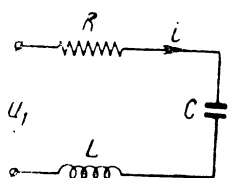


Рис. 11.8

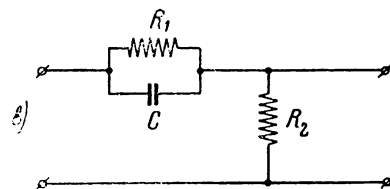
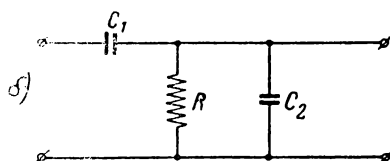
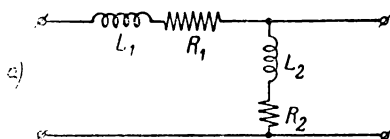


Рис. 11.7

11.8. Найти, пользуясь как частотными (операционными) характеристиками, так и дифференциальными уравнениями выходное напряжения в схемах рис. 11.9, имея в виду, что на вход в момент $t = 0$ подано постоянное напряжение E .

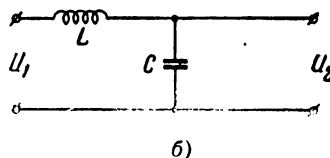
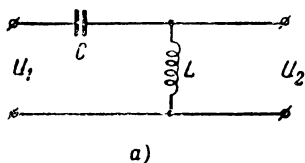


Рис. 11.9

11.9. На схему, изображённую на рис. 11.10, подаётся от генератора ток в момент $t = 0$ ток I_0 . Найти напряжение $u(t)$.

11.10*. На схему рис. 11.5а подаётся прямоугольный импульс высотой E и длительностью δ . Найти выходное напряжение.

11.11. На схему рис. 11.4 подан прямоугольный импульс высотой E и длительностью δ . Найти выходное напряжение.

11.12*. На вход схемы рис. 11.5а подаётся линейно растущее напряжение $u_1 = \kappa t$. Найти закон изменения выходного напряжения.

11.13. На вход схемы рис. 11.5б подаётся линейно растущее напряжение $u_1 = \kappa t$. Найти закон изменения выходного напряжения.

11.14*. На цепь, состоящую из последовательно соединённых R и C (рис. 11.2), подан симметричный треугольный импульс длительностью τ и высотой E . Найти ток в цепи.

11.15*. Найти входное сопротивление системы, способной формировать экспоненциальные импульсы тока вида $i = I_0 e^{-\alpha t}$ из постоянного напряжения E .

11.16*. На вход RC системы подано постоянное напряжение $E = 10$ в, из которого нужно формировать экспоненциальный импульс высотой $I_0 = 0,1$ а. Длительность экспоненциального импульса на уровне 5% составляет $\tau = 3$ мксек; при этом соотношение между коэффициентом затухания α и длительностью τ (задача 11.25) определяется формулой $\alpha\tau \approx 3$. Рассчитать параметры схемы для заданных условий формирования.

11.17*. Найти входное сопротивление системы, способной формировать прямоугольные импульсы длительностью τ из прямоугольных импульсов значительно большей длительности, так что каждый внешний импульс можно рассматривать как включение постоянного напряжения.

11.18. Найти входное сопротивление системы, способной формировать импульсы вида $i = I_0 (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$ из постоянного напряжения E .

11.19*. На вход консервативного колебательного контура (контура без потерь) в момент $t = 0$ подаётся напряжение вида

$$u = U_0 \sin \omega_0 t.$$

Найти ток в контуре (рис. 11.11).

11.20*. По условиям предыдущей задачи найти ток в контуре, если на вход подаётся напряжение вида $u = U_0 \cos \omega_0 t$.

11.21*. Найти ток свободного режима в схеме рис. 11.12, если известно что в момент $t = 0$ ток в катушке был равен $i(0) = I_0$.

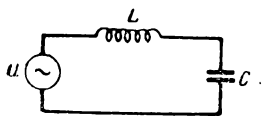


Рис. 11.11

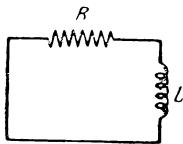


Рис. 11.12

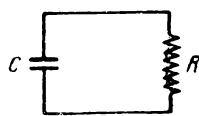


Рис. 11.13

Решение провести двумя способами: 1) решением дифференциального уравнения и 2) решением уравнения $Z(p) = 0$.

11.22. Использовать условия предыдущей задачи для схемы рис. 11.13, учитывая, что в момент $t = 0$ напряжение на конденсаторе было равно E .

11.23*. Найти ток свободного режима в колебательном контуре L, C, R , считая, что $\omega_0 > \alpha$. В момент $t = 0$ напряжение на конденсаторе равно E .

11.24*. Найти свободные токи i_1 и i_2 каждого контура в системе, состоящей из двух одинаковых связанных контуров (рис. 11.14). Начальные условия: при $t = 0$, $i_1 = 0$, $i_2 = 0$; напряжение на конденсаторе первого контура равно E .

11.25*. Найти в общем виде длительность свободного процесса $t_{св}$, если процесс характеризуется уменьшением по экспоненциальному закону.

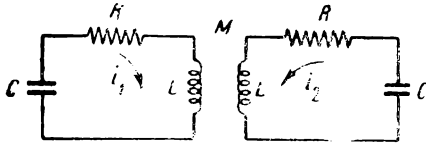


Рис. 11.14

Под длительностью свободного процесса понимается время, соответствующее не всему изменению процесса от начального до установившегося (нулевого) значения, а только его часть, за время которого величина уменьшится до значения, составляющего m частей от начального. Обычно принимают $m = 0,1$ или $0,05$. В первом случае говорят о длительности на уровне 10%; во втором — на уровне 5%.

11.26*. Найти длительность свободного процесса на уровне 5% для схемы рис. 11.8, если известно, что $R = 10$ ом, а $L = 120$ мкгн.

11.27*. Рассчитать, сколько успеет совершиться колебаний в контуре схемы рис. 11.8, если сохранить условия задачи 11.26 и принять во внимание, что ёмкость контура C равна 100 пф.

11.28*. Найти формулу, связывающую длительность свободного процесса в одиночном колебательном контуре с полосой пропускания этого контура. Длительность свободного процесса отсчитывать на уровне 5%, а полосу пропускания, как обычно, на уровне $0,707$.

11.29*. Исходя из выражения $t_{1n} \approx \frac{3}{\alpha}$, найти формулу, связывающую время свободного процесса с периодом колебаний и добротностью контура, а также формулу, связывающую число колебаний с добротностью контура.

11.30. Рассчитать время свободного процесса на уровне 5% в колебательном контуре, имеющем указанные в таблице параметры. Рассчитать, кроме того, число колебаний, совершающихся в данном контуре за время свободного процесса.

№ пп.	R ом	L мкгн	C пф	Q	f_0 гц	λ_0 м
1	15	400	300	—	—	—
2	—	—	100	40	—	120
3	—	600	200	50	—	—
4	20	—	400	—	10^6	—

11.31*. Определить, на каком уровне m нужно отсчитывать длительность свободного процесса для того, чтобы равенство $Q = N$ выполнялось точно, а не приближённо?

11.32. Кривая свободного тока в контуре L, C, R при условии $\omega_0 = \alpha$ передается выражением

$$i = \frac{E}{L} t e^{-\alpha t}.$$

Найти максимальное значение тока i_{\max} и время t_m , соответствующее максимальному значению.

11.33. Кривая апериодического разряда конденсатора в контуре L, C, R передается выражением

$$= \frac{E}{\omega L} e^{-\alpha t} \operatorname{sh} \omega t.$$

Найти максимальное значение тока i_{\max} и время t_m , соответствующее максимальному значению тока.

§ 12. Исследование переходных процессов на основе наложения установившегося и свободного процессов

Переходные процессы в линейных системах с постоянными параметрами описываются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n y = f(x). \quad (9.1)$$

Общее решение неоднородного (с правой частью) дифференциального уравнения (9.1) является суммой двух решений—общего решения того же дифференциального уравнения, но без правой части (однородного дифференциального уравнения)

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n y = 0 \quad (9.2)$$

и какого-либо частного решения неоднородного уравнения

$$y = y_{\text{общ}} + y_{\text{част}}.$$

Частное решение зависит от вида правой части $f(x)$. В качестве частного решения удобно выбирать установившееся значение решения неоднородного дифференциального уравнения (при $t \rightarrow \infty$), т. е. решение, соответствующее виду внешнего воздействия $f(x)$, но с другими постоянными коэффициентами.

Таким образом, для нахождения общего решения неоднородного уравнения необходимо найти общее решение однородного уравнения и сложить его с частным решением, которое при элементарных $f(x)$ соответствует виду $f(x)$.

Так как общее решение однородного дифференциального уравнения соответствует условию отсутствия внешнего воздействия, т. е. свободному режиму, а частное решение, как было указано, соответствует установившемуся режиму, то для нахождения тока в переходном режиме необходимо сложить токи установившегося и свободного режимов

$$i = i_{\text{уст}} + i_{\text{св}}. \quad (9.3)$$

Если известны выражения для токов установившегося и свободного режимов, нет необходимости решать дифференциальные уравнения; именно поэтому в отличие от классического этот метод следует называть методом наложения установившегося и свободного режимов.

В настоящем параграфе будем предполагать известными выражения для токов установившегося режима (по материалу §§ 1—9) и токов свободного режима (по материалу § 11).

Значения постоянных, входящих в выражения для токов установившегося и свободного режимов, определяются внешним воздействием, параметрами схемы и начальными условиями. Постоянные, входящие в выражения для установившегося режима, полностью определяются внешним воздействием и параметрами схемы. Для нахождения постоянных, входящих в выражение для свободного режима, необходимо дополнительно привлекать начальные условия.

При определении начальных условий надо помнить, что напряжение на конденсаторе и ток в катушке не могут меняться скачком.

Эти исходные правила вытекают из свойств ёмкости и индуктивности, которые выражаются следующими равенствами:

$$u_c = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_c(0),$$

$$i_L = \frac{1}{L} \int_0^t u dt + i_L(0).$$

Из этих соотношений непосредственно следует, что если t мало отличается от нуля, то u_c мало отличается от $u_c(0)$ [аналогично: i_L от $i_L(0)$], т. е. напряжение на ёмкости и ток через индуктивность скачками изменяться не могут.

Отсюда ясно, что в моменты коммутации (переключений) для проходящего тока конденсатор следует рассматривать как короткое замыкание цепи, а катушку — как разрыв цепи.

Этими правилами необходимо пользоваться при определении начальных значений свободного тока.

Определение начальных значений в общем случае представляет собой сложную операцию и поэтому изложенный метод как и классический метод, уступает операционному методу (§§ 10—11). Однако, если для определения начальных значений свободного тока составить удобные (иногда и приближённые) правила, то для целого ряда радиотехнических задач ме-

тод наложения установившегося и свободного режимов будет иметь известные преимущества. Эти преимущества ярко выступают в тех радиотехнических задачах, где конечной целью является нахождение закона изменения огибающей, а фаза „высокочастотного заполнения“ интереса не представляет.

Приведём некоторые правила, полезные при определении начальных значений свободного тока в схемах с нулевыми начальными условиями:

1. В цепи, состоящей из R и L , начальное значение свободного тока равно и противоположно по знаку значению установившегося тока в момент $t = 0$ (задача 12.12).

2. В цепи, состоящей из R и C , начальное значение свободного напряжения на конденсаторе равно и противоположно по знаку значению установившегося напряжения в момент $t = 0$ (задача 12.12).

3. В цепи, состоящей из R , L и C , причём $\omega_0 \gg \frac{R}{2L}$, начальное значение огибающей свободного тока с собственной частотой ω_0 ¹⁾ не зависит от фазы приложенного напряжения и равно и противоположно по знаку установившемуся значению огибающей тока в момент $t = 0$. Это правило справедливо при малых расстройках, т. е. если частота внешнего воздействия мало отличается от собственной частоты: $\frac{\omega}{\omega_0} \approx 1$ (задача 12.13).

Методом наложения установившегося и свободного режимов удобно пользоваться в случаях, соответствующих элементарному воздействию, т. е. либо воздействию в виде постоянного напряжения, либо в виде синусоидального напряжения с постоянной амплитудой. В равной степени воздействие может соответствовать импульсам, образованным из элементарных воздействий, т. е. прямоугольным видеоимпульсам и радиоимпульсам с прямоугольной огибающей. В этих задачах отдельно рассматривается режим включения, как наложение установившегося и свободного режимов, и режим выключения, как свободный режим.

Методом наложения установившегося и свободного режимов можно также изучать переходные процессы в системах, находящихся под периодическим воздействием при условии, что это воздействие составлено из отрезков прямых (например, напряжение „прямоугольной“ или „треугольной“ формы и т. п.).

Изучение переходных процессов при этих условиях проводится по „кусочкам“, методом „приписывания“ начальных

¹⁾ Во всём дальнейшем изложении настоящего параграфа считается, что в цепях R , L и C (колебательных контурах), резонансная частота равна частоте свободных колебаний

$$\omega_0 \approx \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}.$$

условий на границах каждого участка изучаемого отрезка времени. Применение метода к условиям такого вида иллюстрируется в задачах 12.10 и 12.11.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

12.1*. В схеме рис. 12.1 найти ток, если на вход в момент $t = 0$ подано постоянное напряжение E (рис. 12.2)¹⁾.

12.2*. Найти ток в схеме рис. 12.3, если на вход в момент $t = 0$ подано постоянное напряжение E (рис. 12.2).

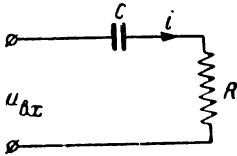


Рис. 12.1

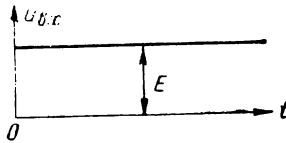


Рис. 12.2

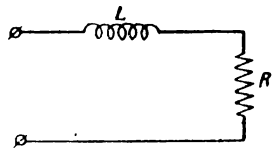


Рис. 12.3

12.3*. На вход схемы рис. 12.1 подан видеопульс прямоугольной формы (рис. 12.4). Найти ток в цепи.

12.4. Найти выходное напряжение в схемах рис. 12.5 при условии, что на вход в момент $t = 0$ подано постоянное напряжение E .

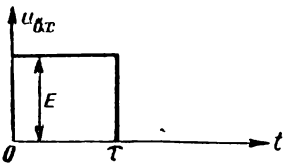


Рис. 12.4

12.5. На вход колебательного контура (рис. 12.6), у которого $Q \gg 1$, подано в момент $t = 0$ синусоидальное напряжение с частотой ω_0 и амплитудой U , т. е. $u = U \sin \omega_0 t$ при $t > 0$. Найти форму тока²⁾ в контуре.

12.6*. На вход колебательного контура, у которого $Q \gg 1$, подан радиопульс длительностью δ (рис. 12.7). Найти ток в контуре, если частота внешнего напряжения равна ω_0 , а амплитуда U .

12.7*. На вход колебательного контура, настроенного на частоту ω_0 , подается прямоугольный радиопульс длительностью δ . Высокочастотные колебания, заполняющие импульс, имеют частоту ω , отличающуюся от ω_0 на величину $\Delta\omega$, и амплитуду U . Найти форму тока в контуре.

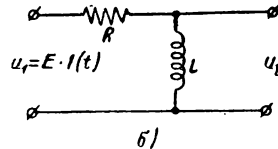
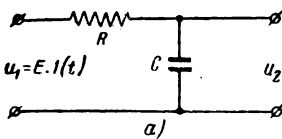


Рис. 12.5

12.8*. На вход системы, состоящей из двух одинаковых индуктивно связанных колебательных контуров, подается радиопульс прямоугольной формы. Ампли-

¹⁾ Во всех задачах настоящего параграфа считается, что внутреннее сопротивление генератора равно нулю.

²⁾ Под формой тока здесь и далее понимается зависимость тока от времени.

туда высокочастотных колебаний равна U , частота ω_0 , длительность импульса δ . Каждый из контуров настроен на частоту ω_0 . Найти ток в первом контуре.

12.9*. На вход системы, состоящей из двух одинаковых индуктивно связанных контуров, подаётся радиопульс прямоугольной формы. Амплитуда высокочастотных колебаний равна U , частота $\omega = \omega_0 + \Delta$, длительность импульса δ . Каждый из контуров настроен на частоту ω_0 . Найти ток в первом контуре.

12.10*. На вход цепи, изображённой на рис. 12.8, подаётся периодическое напряжение прямоугольной формы. Найти форму напряжения на конденсаторе.

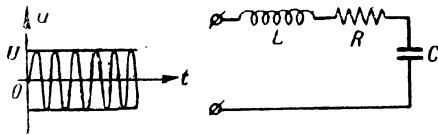


Рис. 12.6

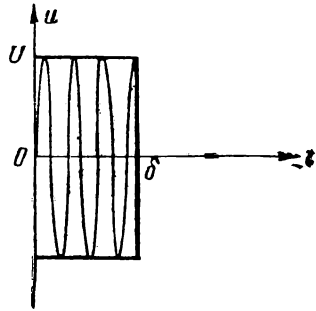


Рис. 12.7

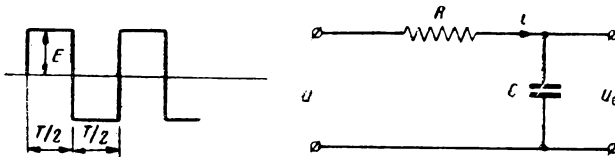


Рис. 12.8

12.11. На вход цепи рис. 12.9 подаётся пилообразное напряжение с данными, указанными на рисунке. Найти выражение для тока в цепи.

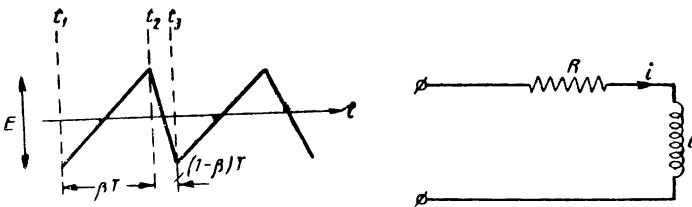


Рис. 12.9

12.12*. Дать обоснование правил 1 и 2 (стр. 133), пользуясь классическими результатами, известными из курсов электротехники.

12.13*. Дать обоснование правила 3 (стр. 133) для контуров L, C, R с высокой добротностью ($\omega_0 \gg \alpha$) и при условии малой расстройки ($\frac{\omega}{\omega_0} \approx 1$). Обоснование провести, используя классические результаты, известные из курса электротехники.

§ 13. Изучение переходных процессов на основе временных методов (метод интеграла Дюамеля)

Физические основы, на которых построен временной метод изучения переходных процессов, совпадают по своему существу с физическими основами, на которых построен спектральный (операционный) метод изучения переходных процессов. В обоих методах сложное входное воздействие разбивается на сумму элементарных воздействий и затем по известным характеристикам системы находят реакции системы на каждое элементарное воздействие в отдельности. Сумма этих элементарных реакций в соответствии с принципом суперпозиции даёт искомую реакцию системы на сложное воздействие.

В качестве элементарных воздействий можно выбирать различные воздействия, например, в виде бесконечной синусоиды (спектральный метод), в виде „синусоиды с экспоненциально изменяющейся амплитудой“ (операционный метод), в виде единичной функции или единичного импульса (временные методы — интеграл Дюамеля), в виде воздействия типа $\frac{\sin x}{x}$ ¹⁾.

В настоящем параграфе будет рассматриваться метод интеграла Дюамеля, построенный на использовании элементарного воздействия в виде единичной функции $1(t)$ (рис. 13.1). Характеристики системы, представляющие собой реакцию на поданную единичную функцию, могут быть вычислены любым из методов, изложенных в §§ 11 и 12, и в настоящем параграфе предполагаются известными.

Терминология, относящаяся к этим характеристикам, следующая.

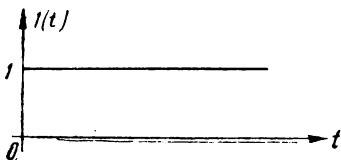


Рис. 13.1

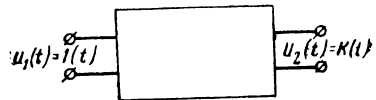


Рис. 13.2

Если единичная функция напряжения подана на вход четырёхполюсника (рис. 13.2), т. е. $u_1(t) = 1(t)$, то напряжение на выходе $u_2(t) = \kappa(t)$ и называется переходной характеристикой. Выражение $\kappa(t)$ является безразмерным.

1) Воздействие типа $\frac{\sin x}{x}$ имеет „удобный“ спектр с прямоугольной огибающей.

Если единичная функция напряжения подана на вход двух-полюсника (рис. 13.3, т. е. $u_1(t) = 1(t)$), то ток в системе равен $i(t) = y(t)$ и называется переходной проводимостью. Выражение $y(t)$ имеет размерность проводимости.

Формулы интеграла Дюамеля дают возможность рассчитывать выходные напряжения по известному входному напряжению и характеристике системы.

Основная форма интеграла Дюамеля имеет следующий вид:

$$u_2(t) = u_1(0) \kappa(t) + \int_0^t u_1'(\tau) \kappa(t - \tau) d\tau. \quad (13.1)$$

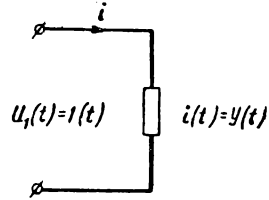


Рис. 13.3

Другие формы интеграла Дюамеля записываются в следующем виде:

$$u_2(t) = u_1(t) \kappa(0) + \int_0^t u_1(\tau) \kappa'(t - \tau) d\tau, \quad (13.2)$$

$$u_2(t) = u_1(0) \kappa(t) + \int_0^t u_1'(t - \tau) \kappa(\tau) d\tau, \quad (13.3)$$

$$u_2(t) = u_1(t) \kappa(0) + \int_0^t u_1(t - \tau) \kappa'(\tau) d\tau. \quad (13.4)$$

Все приведённые формулы являются совершенно равноценными. Выбор той или иной формы определяется исключительно соображениями упрощения вычислений.

Если выражение внешнего напряжения $u_1(\tau)$ после дифференцирования принимает более простой вид [например, линейно растущее напряжение $u_1(\tau) = b\tau$; $u_1'(\tau) = b$], следует пользоваться выражениями (13.1) или (13.3); если при дифференцировании упрощается выражение переходной характеристики, следует пользоваться выражениями (13.2) и (13.4).

Дополнительно следует принимать во внимание упрощение выражений внешнего напряжения и переходной характеристики при $t = 0$. Если при $t = 0$ существенно упрощается выражение внешнего напряжения, например, $u_1(0) = 0$, удобно пользоваться выражениями (13.1) и (13.3); если же $\kappa(0) = 0$, удобно пользоваться выражениями (13.2) и (13.4).

В других случаях выбор формы определяется необходимостью и возможностью разделения переменных t и τ . Если выражение $(t - \tau)$ находится под знаком трансцендентного символа (кроме экспоненциальной функции), разделение t и τ осу-

Временные характеристики простейших электрических цепей

№ пп.	Схема	Переходная характеристика $\kappa(t)$	Переходная проводимость $y(t)$
1	<p>$\alpha = \frac{1}{RC}$</p>	<p>$\kappa(t) = 1 - e^{-\alpha t}$</p>	<p>$y(t) = \frac{1}{R} e^{-\alpha t}$</p>
2	<p>$\alpha = \frac{R}{L}$</p>	<p>$\kappa(t) = 1 - e^{-\alpha t}$</p>	<p>$y(t) = \frac{1}{R} (1 - e^{-\alpha t})$</p>
3	<p>$\alpha = \frac{1}{RC}$</p>	<p>$\kappa(t) = e^{-\alpha t}$</p>	<p>$y(t) = \frac{1}{R} e^{-\alpha t}$</p>
4	<p>$\alpha = \frac{R}{L}$</p>	<p>$\kappa(t) = e^{-\alpha t}$</p>	<p>$y(t) = \frac{1}{R} (1 - e^{-\alpha t})$</p>
5	<p>$\alpha = \frac{1}{(R_1 + R_2)C}$</p>	<p>$\kappa(t) = 1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} e^{-\alpha t}$</p>	<p>$y(t) = \frac{1}{R_1 + R_2} e^{-\alpha t}$</p>
6	<p>$\alpha = \frac{R_1 + R_2}{L}$</p>	<p>$\kappa(t) = \frac{1}{R_1 + R_2} (R_2 + R_1 e^{-\alpha t})$</p>	<p>$y(t) = \frac{1}{R_1 + R_2} (1 - e^{-\alpha t})$</p>
7	<p>$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$</p>	<p>$\kappa(t) = \cos \omega_0 t$</p>	<p>$y(t) = \frac{1}{\omega_0 L} \sin \omega_0 t = \omega_0 C \sin \omega_0 t$</p>
8	<p>$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$</p>	<p>$\kappa(t) = 1 - \cos \omega_0 t$</p>	<p>$y(t) = -\sin \omega_0 t = \omega_0 C \sin \omega_0 t$</p>

ществляется нелегко и именно из этих соображений следует выбирать выражения (13.1) и (13.2) или (13.3) и (13.4).

Формулы (13.1—13.4) остаются в силе и для задач в постановке двухполюсника, т. е. когда задача состоит в нахождении тока $i(t)$ по известной переходной проводимости $y(t)$; в указанных формулах нужно только произвести замену $u_2(t)$ на $i(t)$ и $\kappa(t)$ на $y(t)$. В качестве примера приведём выражение, соответствующее ф-ле (13.2):

$$i(t) = u_1(t) y(0) + \int_0^t u_1(\tau) y'(t - \tau) d\tau. \quad (13.5)$$

В практических задачах внешнее напряжение не всегда удается передать одним аналитическим выражением. В этих задачах следует разбивать сложное внешнее воздействие на сумму более простых. Делается это при помощи единичной функции приёмами, изложенными в § 10 (а также в задачах 10.1—10.7).

Для облегчения решения задач настоящего параграфа в табл. 13.1 даны временные характеристики наиболее распространённых схем.

Нужно напомнить, что так же, как в §§ 10 и 11, множитель $l(t)$ во всех тех случаях, когда это не может привести к недоразумению, для упрощения записи, опускается.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

13.1*. На вход дифференцирующей RC цепи (схема 3 табл. 13.1) подаётся линейно-растущее напряжение $u_1(t) = bt$. Определить форму выходного напряжения.

13.2. На вход интегрирующей цепи (схемы 1 и 2 табл. 13.1) подаётся линейно-растущее напряжение $u_1(t) = bt$. Определить форму выходного напряжения и построить его график.

13.3*. На цепь, состоящую из последовательно соединённых R и L подаётся напряжение, растущее по экспоненциальному закону $u_1(t) = E e^{\beta t}$. Найти ток в системе.

13.4. На вход дифференцирующей RC цепи (схема 3 табл. 13.1) подано напряжение, меняющееся по закону

$$u_1(t) = E(1 - e^{-\beta t}).$$

Найти напряжение на выходе и построить график для условия $\beta \gg \alpha$, где

$$\alpha = \frac{1}{RC}.$$

13.5. На вход дифференцирующей RC цепи подаётся напряжение, меняющееся по закону

$$u_1(t) = bt^2;$$

найти закон изменения выходного напряжения.

13.6*. На вход дифференцирующей RC цепи подаётся прямоугольный импульс высотой E и длительностью δ . Найти форму выходного напряжения.

13.7. На вход интегрирующей RC цепи (схема 1 табл. 13.1) подано напряжение, имеющее форму, показанную на рис. 13.4. Найти форму выходного напряжения.

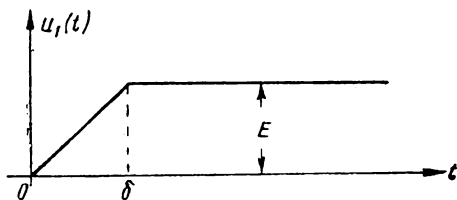


Рис. 13.4

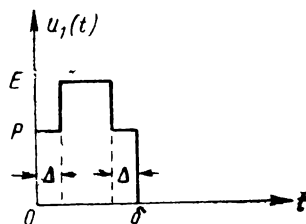


Рис. 13.5

13.8*. На вход дифференцирующей RC цепи подан симметричный треугольный импульс длительностью δ и высотой E . Найти форму напряжения на выходе.

13.9*. На вход дифференцирующей RC цепи подаётся импульс «с пьедесталом» (рис. 13.5). Найти форму выходного напряжения.

13.10*. На вход схемы 7 табл. 13.1 подаётся линейно-растущее напряжение

$$u_1(t) = bt.$$

Найти закон изменения выходного напряжения.

13.11. На вход схемы 8 табл. 13.1 подаётся линейно-растущее напряжение

$$u_1(t) = bt.$$

Найти закон изменения выходного напряжения и построить его график.

§ 14. Исследование переходных процессов в избирательных системах на основе метода медленно меняющихся амплитуд

При изучении переходных процессов в избирательных системах методами, рассмотренными в §§ 11—13, встречаются значительные вычислительные трудности. Эти трудности делаются особенно серьёзными в тех случаях, когда входное воздействие

$$u_1(t) = U(t) \sin \omega_0 t \quad (14.1)$$

имеет огибающую $U(t)$ сложной формы. Для задач подобного содержания приближённый метод медленно меняющихся амплитуд, который обычно применяется для изучения нелинейных систем, имеет свои преимущества и при изучении линейных систем.

В настоящем параграфе этот метод будет рассмотрен применительно к одиночному колебательному контуру (рис. 14.1), на вход которого подаётся напряжение вида (14.1)¹⁾.

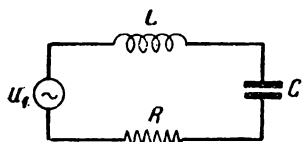


Рис. 14.1

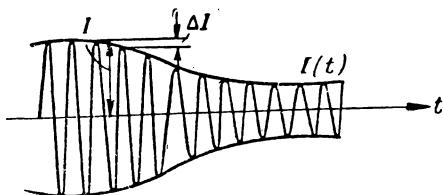


Рис. 14.2

Условие медленности изменения амплитуды „синусоидального“ колебания состоит в выполнении неравенств

$$\left. \begin{aligned} \frac{dI}{dt} &\ll \omega_0 I \\ \frac{d^2 I}{dt^2} &\ll \omega_0 \frac{dI}{dt} \end{aligned} \right\}, \quad (14.2)$$

физический смысл которых заключается в том, что изменение амплитуды ΔI (рис. 14.2) за один период значительно меньше самой амплитуды I , т. е.

$$\Delta I \ll I.$$

Этому условию удовлетворяют системы с ярко выраженными избирательными свойствами; для одиночного контура это условие соответствует высокой добротности, т. е. условию

$$Q \gg 1 \quad \text{или} \quad \alpha \ll \omega_0.$$

Дифференциальное уравнение, соответствующее схеме рис. 14.1, имеет вид

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = U(t) \sin \omega_0 t$$

или

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \frac{1}{L} \frac{d}{dt} [U(t) \sin \omega_0 t], \quad (14.3)$$

$$\left(2\alpha = \frac{R}{L}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \right).$$

¹⁾ Н. Н. Крылов, „Полоса пропускания контура, необходимая для неискажённого воспроизведения импульсных колебаний различной формы“. Труды ЛЭИС, выпуск V, 1949 г.

Если частота внешнего воздействия равна резонансной частоте контура¹⁾, то решение дифференциального уравнения (14.3) можно искать в виде

$$i = I(t) \sin \omega_0 t, \quad (14.4)$$

где $I(t)$ — искомая огибающая тока в контуре.

Подставляя решение (14.4) в уравнение (14.3) и используя условия медленности изменения амплитуды как по отношению к току в контуре, так и по отношению к внешнему воздействию, приходим к дифференциальному уравнению первого порядка, составленному относительно амплитуд

$$\frac{dI(t)}{dt} + \alpha I(t) = \frac{1}{2L} U(t). \quad (14.5)$$

Решение последнего уравнения относительно $I(t)$ известно

$$I(t) = e^{-\alpha t} \left[\frac{1}{2L} \int e^{\alpha t} U(t) dt + C \right]. \quad (14.6)$$

Здесь C — произвольная постоянная, определяемая из начальных условий.

Если ввести переменный верхний параметр, выражение (14.6) можно переписать в следующем виде

$$I(t) = e^{-\alpha t} \left[\frac{1}{2L} \int_0^t e^{\alpha t} U(t) dt + I(0) \right], \quad (14.6a)$$

где $I(0)$ — значение амплитуды тока в момент $t = 0$.

Формулы (14.6) являются расчётными. После нахождения огибающей $I(t)$ к мгновенным значениям можно вернуться по формуле (14.4).

Пользование методом медленно меняющихся амплитуд правомерно только по отношению к контурам с высокой добротностью ($Q \gg 1$), находящимся под воздействием высокочастотного напряжения с медленно меняющейся амплитудой (условие 14.2). Изменение огибающей внешнего напряжения в виде скачка, т. е. режим включения синусоидального напряжения, также можно изучать методом медленно меняющихся амплитуд (задача 14.12).

В практических задачах огибающая внешнего воздействия $U(t)$ очень часто представляет собой ломаную линию или другую кривую, которую нельзя передать аналитическим выраже-

¹⁾ Здесь считается, что резонансная частота равна частоте собственных колебаний, так как $Q \gg 1$.

нием. В этих задачах нужно вести интегрирование (выражение 14.6) по „кусочкам“, припасовывая начальные условия на границах каждого участка.

Если частота внешнего воздействия ω отличается от собственной частоты контура ω_0 , то нужно искусственно привести внешнее колебание к частоте ω_0 за счёт изменения огибающей путём следующего простого преобразования

$$u = U(t) \sin \omega t = U(t) \sin(\omega_0 + \Delta\omega)t = U(t) \cos \Delta\omega t \sin \omega_0 t + \\ + U(t) \sin \Delta\omega t \cos \omega_0 t = U_1(t) \sin \omega_0 t + U_2(t) \cos \omega_0 t. \quad (14.7)$$

В этом случае ток в контуре будет вызываться двумя ЭДС и будет равен

$$i = I_1(t) \sin \omega_0 t + I_2(t) \cos \omega_0 t. \quad (14.8)$$

Огибающие $I_1(t)$ и $I_2(t)$ рассчитываются по ф-лам (14.6).

Изложенным приёмом можно пользоваться также в случае, когда частота внешнего воздействия зависит от времени.

При пользовании методом медленно меняющихся амплитуд приходится встречаться с табличными интегралами, которые приводятся в табл. 14.1 для справок.

Таблица 14.1

Некоторые табличные интегралы

- 1) $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}.$
- 2) $\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx).$
- 3) $\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx).$
- 4) $\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1).$
- 5) $\int x^2 e^{ax} dx = e^{ax} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right).$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

14.1*. Свободные колебания в одиночном контуре совершаются по закону

$$i = I_0 e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t.$$

Выяснить, при каких условиях амплитуда в контуре меняется медленно?

14.2. Амплитудно-модулированное колебание в простейшем виде передаётся выражением:

$$i = I_0 (1 + m \sin \Omega t) \sin \omega_0 t.$$

Выяснить, при каких условиях амплитуда этих колебаний меняется медленно?

14.3. Частотно-модулированное колебание, записываемое в виде

$$i = I_0 \sin(\omega_0 t + M \sin \Omega t)$$

может быть представлено в виде двух амплитудно-модулированных колебаний:

$$\begin{aligned} i &= I_0 \cos(M \sin \Omega t) \sin \omega_0 t + \\ &+ I_0 \sin(M \sin \Omega t) \cos \omega_0 t = \\ &= I_1(t) \sin \omega_0 t + I_2(t) \cos \omega_0 t. \end{aligned}$$

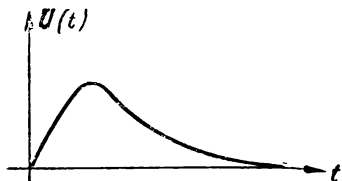


Рис. 14.3

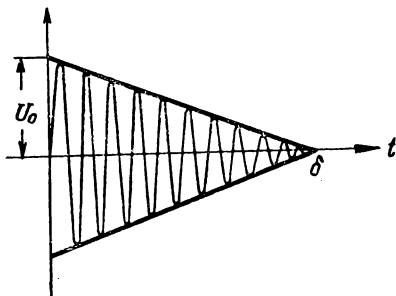


Рис. 14.4

Выяснить, при каких условиях амплитуда этих колебаний будет меняться медленно?

14.4*. На вход настроенного колебательного контура (рис. 14.1) подаётся в момент $t = 0$ высокочастотное напряжение с постоянной огибающей

$$U(t) = U_0 \quad (t > 0).$$

Найти выражение для тока в контуре.

14.5*. На вход настроенного колебательного контура подано амплитудно-модулированное колебание с огибающей

$$U(t) = U_0 (1 + m \sin \Omega t).$$

Найти значение тока в контуре в установившемся режиме ($t = \infty$).

14.6*. На вход настроенного колебательного контура подаётся радиоимпульс с прямоугольной огибающей U_0 . Длительность импульса равна δ .

Найти выражения, передающие форму импульса тока в контуре.

14.7. Огибающая входного напряжения меняется по закону

$$U(t) = kt;$$

найти ток в настроенном колебательном контуре и построить соответствующий график.

14.8. На вход настроенного колебательного контура подаётся радиоимпульс, огибающая (рис. 14.3) которого описывается выражением

$$U(t) = U_0 \beta t e^{-\beta t}.$$

Найти ток в контуре.

14.9*. На вход настроенного колебательного контура подаётся напряжение, меняющееся в соответствии с рис. 14.4.

Найти ток в контуре.

14.10. На вход настроенного колебательного контура подаётся радиоимпульс симметричной треугольной формы. Высота импульса U_0 , длительность — δ .

Найти форму тока в контуре.

14.11*. На вход колебательного контура подаётся напряжение

$$u(t) = U_0 \sin \omega t,$$

причём $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$. Найти выражение для огибающей тока в контуре, приведя выражение для мгновенного значения к частоте ω_0 .

14.12*. Показать правомерность пользования методом медленно меняющихся амплитуд для режима включения высокочастотного напряжения на вход колебательного контура с высокой добротностью.

§ 15. Основания к расчёту полосы пропускания линейных цепей

Задачи расчёта оптимальной полосы пропускания являются одними из центральных в радиотехнической практике. Факт существования оптимального решения в таких задачах вытекает из непримиримости двух основных требований: требования расширения полосы пропускания для обеспечения неискажённости воспроизведения сигнала и требования сужения полосы пропускания для уменьшения вредного действия помех.

К расчёту полосы пропускания можно подходить как на основе спектральных, так и на основе временных представлений.

На основе спектральных представлений задача решается в следующей последовательности.

По известной форме сигнала выписывается его спектр; составляющие спектра сигнала должны быть воспроизведены приёмным устройством. Однако, имея в виду мешающее действие помех, нужно обеспечить приём не всех составляющих, а только тех „главных“ составляющих, в которых сосредоточена основная энергия сигнала и уровень которых выше уровня помех.

Совершенно ясно, что для обоснованного расчёта в указанном плане должно быть известно распределение помех по спектру. В тех случаях, когда распределение помех не известно, расчёт ведётся, исходя из приближённых условий, либо по энергетическим величинам, либо по амплитудным значениям. Можно, например, задаться условием приёма 90% всей энергии, заключённой в спектре сигнала; можно потребовать приёма всех составляющих спектра, амплитуды которых не меньше 0,1 амплитуды максимальной составляющей, и т. п. Нормы, по которым следует вести расчёт, зависят от ряда причин, характеризующих данный канал связи (разборчивость речи, качество музыкальной передачи, качество телевизионной картины и т. д.) и устанавливаются, как правило, опытным путём.

На основе временных представлений решение задачи представляется в следующем виде.

По известной форме передаваемого сигнала и заданным параметрам приёмной системы определяется форма сигнала на выходе системы. Задаваясь определёнными отступлениями искажённого сигнала от неискажённого, можно определить параметры системы, при которых указанное отступление не

превышает заданного. По найденным, таким образом, параметрам системы можно, в свою очередь, определить полосу пропускания.

Критерии для выбора допустимой степени отступления искажённого сигнала от неискажённого устанавливаются опытным путём и в задачах настоящего параграфа считаются известными.

Для решения задач по расчёту полосы пропускания необходимо владеть спектральными представлениями (§ 10) и быть знакомыми с законами переходных процессов (§§ 11—14).

Напомним, что для расчёта спектра высокочастотных (радио) сигналов достаточно рассчитать спектр огибающей (условно можно говорить — спектр видеосигнала), так как спектр радиосигнала в два раза шире спектра видеосигнала.

Необходимую полосу пропускания будем отличать индексом в виде звёздочки вверху: для видеосигналов — $\Delta\omega^*$, для радиосигналов — $2\Delta\omega^*$.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

15.1*. Передача точек по азбуке Морзе совершается по закону, огибающая которого изображена на рис. 15.1. Рассчитать полосу частот, необходимую для воспроизведения указанных радиосигналов, полагая, что составляющими спектра, амплитуды которых меньше 0,2 амплитуды максимальной составляющей, можно пренебрегать.

15.2. Рассчитать по условию предыдущей задачи необходимую полосу частот для передачи знаков (точек) по радио (рис. 15.1) со скоростью $48 \frac{\text{зн.}}{\text{сек}}$, т. е.

при условии, что $\tau = \frac{1}{48}$ сек.

15.3. По радио передаётся сигнал, огибающая которого меняется по закону

$$I(t) = I_0 + \Delta I \sin \Omega t.$$

Рассчитать полосу пропускания, необходимую для неискажённого воспроизведения сигнала.

15.4. Модуляция радиосигнала по амплитуде осуществляется низкочастотными колебаниями, занимающими спектр от 30 гц до 5000 гц. Какой ширины должна быть полоса пропускания для неискажённого воспроизведения?

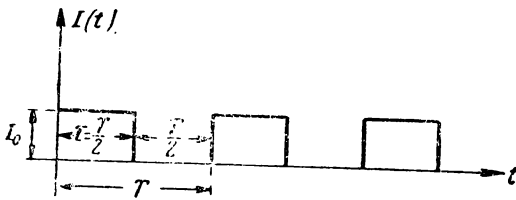


Рис. 15.1

15.5*. Спектр высокочастотного колебания, модулированного по частоте одним тоном Ω , определяется рядом

$$u = U_0 [J_0(M) + 2J_2(M) \cos 2\Omega t + 2J_4(M) \cos 4\Omega t + \dots] \sin \omega_0 t + \\ + [2J_1(M) \sin \Omega t + 2J_3(M) \sin 3\Omega t + \dots] \cos \omega_0 t,$$

где M — индекс частотной модуляции; $M = \frac{\Delta\omega}{\Omega} = \frac{\Delta f}{F}$;

Δf — половина полосы качания частоты (девиация частоты) при данном уровне сигнала;

$J_n(M)$ — функция Бесселя первого рода от аргумента M .

Определить необходимую полосу пропускания при $M = 1$ и условии допустимости пренебрежения всеми составляющими, амплитуды которых меньше 0,02 амплитуды максимальной составляющей.

15.6*. Определить полосу частот, необходимую для приёма частотно-модулированного колебания при качании частоты $\Delta f = 50$ кГц и частоте модуляции $F = 5$ кГц. Условия ограничения спектра такие же, как и в задаче 15.5.

15.7*. Ведётся приём последовательности экспоненциальных радиоимпульсов

$$i = I_0 e^{-\alpha t} \sin \omega t,$$

причём по условию скважность велика ($T \gg \tau$), а длительность импульса τ отсчитывается на уровне 10%; тогда (задача 11.25)

$$\tau \approx \frac{2,3}{\alpha}.$$

Рассчитать полосу пропускания, исходя из условия приёма 90% всей энергии каждого импульса.

15.8*. Ведётся приём последовательности прямоугольных радиоимпульсов длительностью τ , причём период повторения $T \gg \tau$. Найти полосу пропускания, исходя из условия приёма большей части энергии импульса.

15.9*. Рассчитать полосу пропускания одиночного колебательного контура, необходимую для воспроизведения прямоугольных радиоимпульсов длительностью τ , исходя из условия: в момент окончания импульса значение тока в контуре должно составлять 0,95 установившегося значения.

15.10*. Рассчитать полосу пропускания одиночного колебательного контура, необходимую для воспроизведения симметричных треугольных радиоимпульсов длительностью δ , исходя из условия: максимальное значение амплитуды тока в контуре должно составлять 0,95 от значения при неограниченной полосе пропускания.

НЕЛИНЕЙНЫЕ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

§ 16. Нелинейные и параметрические системы

1. Любая электрическая система представляет собой сочетание простейших элементов-параметров — R , C и L или M . Параметры R , C и L могут быть как постоянными, так и переменными; по этому признаку оказывается удобным провести основную классификацию. Нужно только отметить, что параметры могут меняться как вследствие изменения токов и напряжений внутри схемы, так и вследствие внешних воздействий (механических, электрических, тепловых). Внешние воздействия всегда можно представить функциями времени.

В соответствии со сказанным все электрические системы можно делить на линейные, нелинейные и параметрические.

В линейных системах параметры постоянны. В нелинейных системах причинным фактором является изменение тока (напряжения), а следствием — изменение параметров. В параметрических системах причиной является изменение параметров, а следствием — изменение тока (напряжения).

Линейные системы описываются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами (параметрами).

Нелинейные системы описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, т. е. уравнениями с коэффициентами (параметрами), зависящими от функции (тока, напряжения).

Параметрические системы описываются линейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами, т. е. уравнениями с коэффициентами, зависящими от аргумента (времени).

В радиотехнической практике встречаются также нелинейно-параметрические системы, в которых есть как нелинейные, так и параметрические элементы, а также элементы, обладающие нелинейными свойствами, и параметры которых меняются во времени.

Системы, содержащие только активные сопротивления (линейные и нелинейные), т. е. не содержащие энергоёмких элемен-

тов, называются безинерционными системами, или системами нулевого порядка. Эти системы описываются алгебраическими уравнениями.

Системы, содержащие активные и реактивные элементы (линейные и нелинейные), называются инерционными системами или системами n -го порядка, где n указывает число самостоятельных энергоёмких элементов (конденсаторов, катушек индуктивности). Эти системы описываются дифференциальными уравнениями n -го порядка.

2. Связь между током и напряжением в линейных элементах определяется известными соотношениями, которые трактуются как выражение их свойств:

а) для активного элемента:

$$\left. \begin{aligned} u &= Ri \\ i &= \frac{1}{R} u = Gu \end{aligned} \right\}; \quad (16.1)$$

б) для ёмкостного элемента:

$$\left. \begin{aligned} i &= \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} (Cu) = C \frac{du}{dt} \\ u &= \frac{1}{C} \int idt \\ q &= Cu \end{aligned} \right\}; \quad (16.2)$$

в) для индуктивного элемента:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} (Li) = L \frac{di}{dt} \\ i &= \frac{1}{L} \int udt \\ \Phi &= Li \end{aligned} \right\}. \quad (16.3)$$

Здесь q — заряд в кулонах (амперсекундах),
 Φ — поток в веберах (вольтсекундах).

Из этих формул следует, что в линейных элементах между причиной и следствием существует линейная связь: для активного элемента — между напряжением и током; для ёмкостного — между зарядом и напряжением; для индуктивного — между потоком и током. В реактивных элементах имеет место линейная связь между током и производной напряжения (ёмкость) и между напряжением и производной тока (индуктивность).

Выражения (16.1), (16.2) и (16.3) вскрывают две особенности линейных элементов:

а) линейные элементы не меняют форму синусоидального колебания, влияя на амплитуду и фазу (так как производная и интеграл от синусоидальных функций дают также синусоидальные функции);

б) к системам, состоящим из линейных элементов, применим принцип суперпозиции (наложения). Последнее утверждение вытекает из известных теорем анализа: интеграл (производная) суммы равен сумме интегралов (производных).

3. Связь между током и напряжением в нелинейных элементах выражается более сложными соотношениями.

а) Активный элемент

Свойства активного нелинейного элемента обычно выражают при помощи вольтамперных характеристик вида $u = f(i)$ или $i = \varphi(u)$.

Для активного элемента пользуются понятием динамического или дифференциального сопротивления

$$R = \frac{du}{di}. \quad (16.4)$$

Если сопротивление зависит от напряжения, то для вычисления тока служит формула

$$i = \int \frac{du}{R(u)}. \quad (16.5)$$

Если же сопротивление определяется током, расчёт напряжения производится по соотношению

$$u = \int R(i) di. \quad (16.6)$$

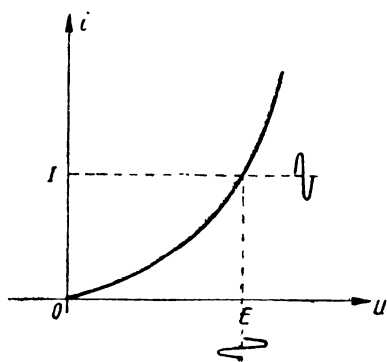


Рис. 16.1

Необходимо подчеркнуть, что дифференциальное сопротивление представляет собой сопротивление „в точке“ или сопротивление „в окрестности точки“ (рис. 16.1) вольтамперной характеристики $i = \varphi(u)$ или $u = f(i)$. Измерение дифференциального сопротивления производится либо с помощью постоянного напряжения E (устанавливающего „рабочую точку“ — смещение) и малого переменного напряжения, либо

с помощью „малых приращений“ постоянного напряжения. Дифференциальное сопротивление называют также „сопротивлением переменному току“ в отличие от так называемого статического сопротивления или „сопротивления постоянному току“, соответ-

ствующего измерениям „постоянных“ значений напряжения E и тока I (рис. 16.1).

Совершенно аналогичные соотношения имеют место при задании характеристики элемента в виде проводимости G , а не сопротивления R . В этом случае

$$G = \frac{di}{du}, \quad (16.7)$$

$$u = \int \frac{di}{G(i)}, \quad (16.8)$$

$$i = \int G(u) du. \quad (16.9)$$

Связь между динамическими и статическими сопротивлениями (проводимостями) выражается соотношениями (задача 16.13):

$$\frac{R_{\sim}}{R_{-}} = i \frac{f'(i)}{f(i)}, \quad (16.10)$$

$$\frac{R_{\sim}}{R_{-}} = \frac{\varphi(u)}{u \varphi'(u)}. \quad (16.11)$$

Из соотношений (16.4) — (16.9) следует, что в схемах, содержащих активные нелинейные элементы, синусоидальное колебание подвергается изменению формы и что к этим схемам принцип суперпозиции не применим.

б) Индуктивный элемент

Свойства индуктивного нелинейного элемента обычно выражаются зависимостью $L(i)$ или $i(\Phi)$.

• Напряжение на зажимах нелинейного индуктивного элемента равно

$$u_L = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} [L(i) i]$$

или

$$u_L = \left[L(i) + i \frac{dL(i)}{di} \right] \frac{di}{dt}. \quad (16.12)$$

Величина $\beta_L = \frac{dL(i)}{di}$ определяет зависимость индуктивности от тока.

Непосредственно из выражения (16.12) следует, что проходящий по нелинейной катушке синусоидальный ток вызывает на ней несинусоидальное напряжение; принцип суперпозиции к нелинейным индуктивностям не применим.

в) Ёмкостный элемент

Свойства ёмкостного нелинейного элемента обычно выражаются зависимостью $C(u)$ или $u(q)$.

Ток проходящий через нелинейный конденсатор, к которому приложено напряжение u , равен

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} [C(u) u]$$

или

$$i = \left[C(u) + u \frac{dC(u)}{du} \right] \frac{du}{dt}. \quad (16.13)$$

Величина $\beta_c = \frac{dC(u)}{du}$ определяет зависимость ёмкости от напряжения.

Непосредственно из выражения (16.13) следует, что подводимое к нелинейному конденсатору синусоидальное напряжение вызывает несинусоидальный ток в цепи; принцип суперпозиции к нелинейным ёмкостям не применим.

4. Связь между током и напряжением в параметрических элементах имеет свои характерные особенности.

а) Активный элемент

Свойства активного параметрического элемента выражаются зависимостями $R(t)$ или $G(t)$.

Связь между током и напряжением определяется равенствами:

$$\left. \begin{aligned} i &= \frac{1}{R(t)} u \\ u &= R(t) i \\ i &= G(t) u \\ u &= \frac{1}{G(t)} i \end{aligned} \right\}. \quad (16.14)$$

Непосредственно из этих соотношений следует, что ток не повторяет форму синусоидального напряжения (и наоборот) вследствие изменения параметра во времени. С другой же стороны, выражения (16.14) говорят о применимости принципа суперпозиции.

б) Индуктивный элемент

Свойства параметрического индуктивного элемента выражаются зависимостью $L(t)$.

Напряжение на зажимах u будет равно

$$u = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d}{dt} [L(t) i]$$

или

$$u = L(t) \frac{di}{dt} + \frac{dL(t)}{dt} i. \quad (16.15)$$

Из выражения (16.15) следует неизбежность деформации формы кривой и применимость принципа суперпозиции.

в) Ёмкостный элемент

Свойства параметрического ёмкостного элемента выражаются зависимостью $C(t)$.

Ток через параметрический конденсатор будет равен

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} [C(t) u]$$

или

$$i = C(t) \frac{du}{dt} + \frac{dC(t)}{dt} u. \quad (16.16)$$

Из выражения (16.16) следуют те же выводы, что и из выражения (16.15).

В настоящем параграфе даются типовые задачи на общие соотношения, приведённые выше, а также задачи на классификацию систем по признакам нелинейности и параметричности.

Обозначения, встречающиеся в тексте третьей части, соответствуют обозначениям общей таблицы на стр. 5; читателю рекомендуется восстановить в памяти обозначения, относящиеся к линейным, нелинейным и параметрическим элементам.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

16.1. На рис. 16.2 изображены восемь схем колебательного контура. Указать, к какому классу систем относится каждая схема.

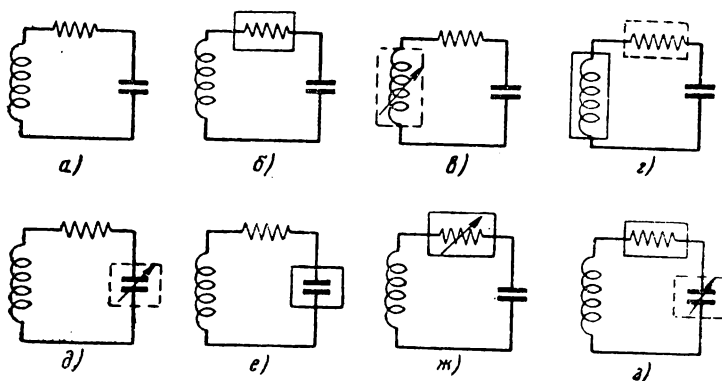


Рис. 16.2

16.2. В схеме рис. 16.3 при помощи ключа K параллельно балластному сопротивлению R_0 периодически подключается сопротивление нагрузки R_n . К какому классу следует отнести данную схему?

16.3*. В схеме рис. 16.4 на сетку лампы, поставленной в нелинейный режим, подаётся синусоидальное напряжение. К какому классу отнести данную схему?

16.4. В схеме рис. 16.5 конденсатор C находится под напряжением, соответствующим падению напряжения на лампе. На сетку лампы периодически подаются импульсы отрицательной полярности, в течение которых лампа запирается (ток

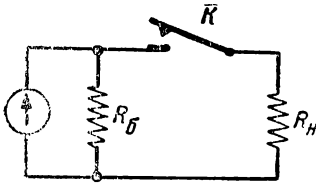


Рис. 16.3

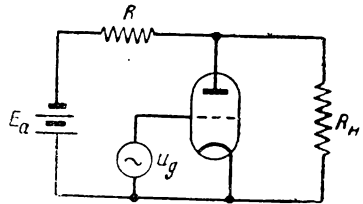


Рис. 16.4

через неё не проходит). В эти отрезки времени конденсатор C заряжается от батареи E через сопротивление R . Как следует рассматривать данную схему — как параметрическую или нелинейную?

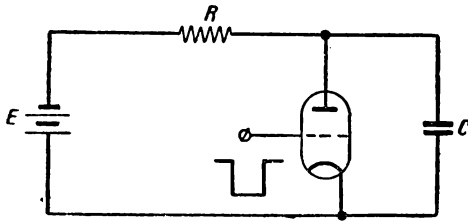


Рис. 16.5

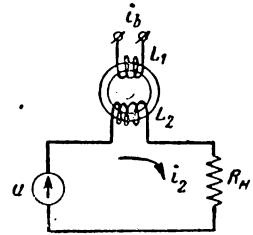


Рис. 16.6

16.5. В схеме рис. 16.6 катушки L_1 и L_2 намотаны на ферритовый сердечник, вследствие чего индуктивности являются нелинейными. Как рассматривать данную схему — как параметрическую или как нелинейную, имея в виду, что ток возбуждения i_b подаётся на катушку L_1 от постороннего источника.

16.6. Известно, что сопротивление некоторых полупроводников зависит от падающего на них светового потока. Как рассматривать схему рис. 16.7, если R

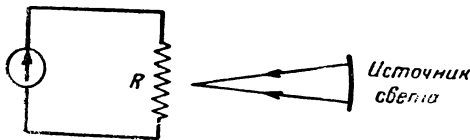


Рис. 16.7

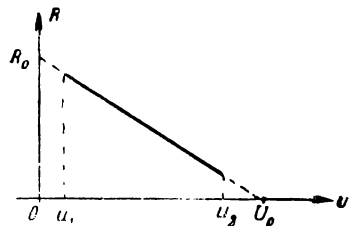


Рис. 16.8

представляет собой сопротивление полупроводника, находящегося под воздействием источника меняющегося во времени света.

16.7*. Внутреннее сопротивление лампы на некотором участке (рис. 16.8) — $u_1 < u < u_2$ может быть выражено уравнением прямой

$$R = R_0(1 - qu),$$

где

$$q = \frac{1}{U_0}.$$

Найти ток в цепи, если известно, что при $u = 0$ ток $i = 0$.

16.8. Внутреннее сопротивление лампы на некотором участке (рис. 16.9) может быть представлено выражением

$$R(u) = R_0 e^{-qu}.$$

Найти уравнение вольтамперной характеристики $i(u)$, если известно, что при $u = 0$ ток $i = 0$.

16.9. К нелинейному элементу $R(i)$ подключён генератор тока (рис. 16.10). Найти напряжение u , если сопротивление $R(i)$ выражается функцией

$$R(i) = R_0 + bi$$

и известно, что при $i = 0, u = 0$.

16.10. По известным нижеприведённым выражениям вольтамперных характеристик найти выражения для дифференциального сопротивления и дифференциальной проводимости:

$$1) i = I_0 e^{qu}, \quad 2) u = ai + \frac{1}{2} bi^2, \quad 3) i = -I_0 \ln(1 - qu), \quad 4) i = au^2.$$

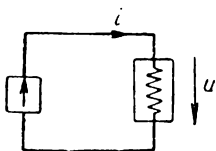


Рис. 16.10

16.11. Вольтамперная характеристика бареттора имеет вид, показанный на рис. 16.11. В диапазоне изменения напряжения от $u = 0$ до $u = u_1$ эту характеристику приближенно можно передать формулой

$$i = I_0 \operatorname{th} qu,$$

где коэффициент $q = \frac{S}{I_0}$, а величина S определяется

из треугольника OAB : $S = \frac{AB}{OB}$. Найти закон изменения

сопротивления бареттора от напряжения и построить соответствующий график.

16.12. Вольтамперная характеристика термосопротивления показана на

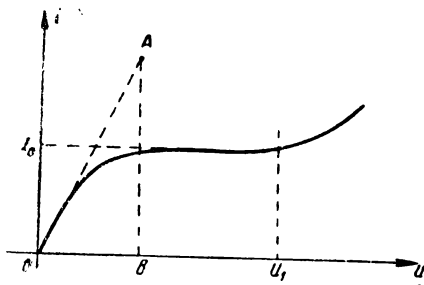


Рис. 16.11

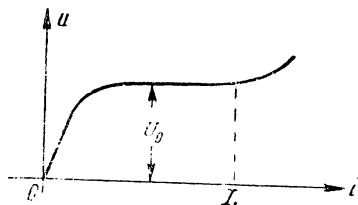


Рис. 16.12

рис. 16.12. В пределах от $i = 0$ до $i = I_1$ эту характеристику можно представить выражением

$$u = U_0 \operatorname{th} pi,$$

где коэффициент p определяется так же, как коэффициент q в предыдущей задаче. Найти закон изменения сопротивления от тока и построить соответствующий график.

16.13*. Найти аналитическую связь между сопротивлением переменному току R_{\sim} и сопротивлением постоянному току $R_{=}$, считая, что вольтамперная характеристика задана либо в виде $u = f(i)$, либо в виде $i = \varphi(u)$.

16.14*. Характеристика нелинейного элемента дана на рис. 16.13. Уравнение этой характеристики

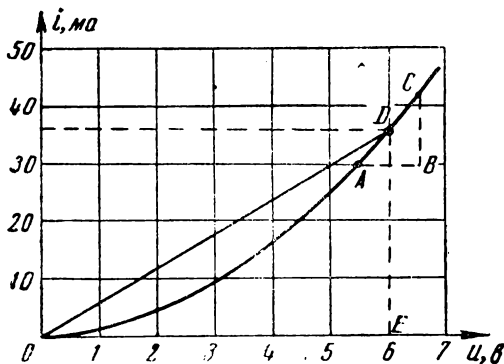


Рис. 16.13

$$i_{ma} = au_e^2,$$

причём коэффициент $a = 1 \frac{ma}{e^2}$.

Найти значения сопротивлений переменному и постоянному току при напряжении 6 в как графически, так и аналитически. Проверить, кроме того, найденный результат по ф-лам (16.11).

16.15*. Задан элемент, имеющий вольтамперную характеристику, изображённую на рис. 16.14. Уравнение этой характеристики записывается в виде

$$i = I_0 + S_a u.$$

Показать, является ли данный элемент линейным или нелинейным, считая, что $I_0 = \text{const.}$

16.16. Характеристика некоторого элемента передаётся выражением

$$i = I_0 + S_a u,$$

причём $I_0 = \text{const.}$ Пользуясь ф-лой (16.11), найти выражение для сопротивления постоянному току, если известно, что сопротивление переменному току

$$R_{\sim} = \frac{1}{S_a}.$$

16.17. Характеристика нелинейного элемента передаётся выражением

$$i = I_0 e^{qu},$$

причём $I_0 = 10 \text{ ма}$, а $q = 0,1 \frac{1}{\text{в}}$. Найти значение $R_{=}$ при $u = 10 \text{ в}$ и по найденному значению $R_{=}$ найти R_{\sim} при том же напряжении. Вывести также общую формулу, дающую связь между R_{\sim} и $R_{=}$ при данной характеристике.

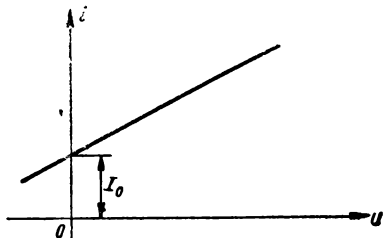


Рис. 16.14

16.18*. Показать, какой должен быть вид u характеристики $i = \varphi(u)$ для того, чтобы сопротивление постоянному току $R_{=}$ было равно сопротивлению переменному току R_{\sim} в любой точке.

16.19*. Известно что к линейным системам применим принцип суперпозиции. Соответствующее доказательство строится на аналитической основе, т. е. вольтамперная характеристика $i = \varphi(u)$ исследуется (анализируется) на применимость суперпозиции. Возможна обратная—синтетическая постановка, которая и составляет содержание настоящей задачи.

Дан элемент с характеристикой $i = \varphi(u)$, представленной в виде степенного ряда.

Определить вид функции $\varphi(u)$, исходя из условия удовлетворения принципа суперпозиции:

$$\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2).$$

16.20. На нелинейный активный элемент, характеристика которого передаётся выражением

$$i = au^2,$$

подаётся синусоидальное напряжение

$$u = U_0 \sin \omega t.$$

Найти ток в цепи и убедиться в том, что он не повторяет форму приложенного напряжения.

16.21. Характеристика нелинейной индуктивности может быть передана выражением

$$L = L_0(1 - \rho i).$$

Найти общее выражение для напряжения на индуктивности.

16.22. Через катушку, нелинейность которой характеризуется выражением (см. задачу 16.21)

$$L = L_0(1 - \rho i),$$

пропускается ток, меняющийся во времени по закону

$$i = I_0 \sin \Omega t.$$

Найти форму напряжения на катушке и убедиться в том, что она не повторяет форму тока.

16.23. Характеристика ёмкостного нелинейного элемента может быть представлена формулой

$$C = C_0(1 - qu).$$

Найти выражение для тока через конденсатор.

16.24. На нелинейный конденсатор с характеристикой

$$C = C_0(1 - qu)$$

подаётся линейно растущее напряжение

$$u = bt.$$

Найти закон изменения тока через конденсатор.

16.25. Показать, на примере внешнего напряжения u , состоящего из двух напряжений $u = u_1 + u_2$, что к параметрическим системам, содержащим $R(t)$ или $C(t)$, применим принцип суперпозиции.

16.26. Сопротивление активного параметрического элемента меняется по закону

$$R(t) = R_0(1 + m \sin^2 \Omega t),$$

на это сопротивление подаётся напряжение

$$u = U_0 \sin \omega t.$$

Найти ток в цепи и убедиться в том, что он не повторяет форму приложенного напряжения.

16.27. Индуктивность катушки меняется во времени по закону

$$L(t) = L_0(1 + m \cos \Omega t).$$

Найти напряжение на этой катушке, если через неё пропускается ток высокой частоты

$$i = I_0 \sin \omega t$$

и убедиться в том, что напряжение не повторяет форму тока.

§ 17. Аппроксимация характеристик нелинейных элементов. Методы гармонического анализа в нелинейной радиотехнике

1. Общая часть

Изучение нелинейных систем в аналитической постановке обычно проводится в следующем плане: по известным элементам схемы и заданному входному напряжению (току) выясняется выходное напряжение (ток).

Элементы схемы считаются известными, если даны значения параметров линейных элементов и характеристики нелинейных элементов. Последние чаще задаются в виде экспериментальных кривых. Для графических расчётов такой способ изображения характеристики является приемлемым; для аналитических расчётов эти кривые должны быть переданы аналитическими выражениями. Представление графически заданных кривых аналитическими выражениями называется аппроксимацией и составляет совершенно неотъемлемую часть большинства радиотехнических расчётов.

Полученное в результате изучения нелинейной системы выражение (график), дающее временную картину выходного тока (напряжения), может являться завершающим этапом расчёта, а может нуждаться в дополнительном исследовании.

При изучении переходных процессов, а также при изучении установившихся процессов в системах, в которых выходным устройством является прибор, реагирующий на форму колебаний, получение временной картины выходного колебания является завершающим этапом исследования.

При изучении установившихся процессов в системах, на выходе которых включается прибор, реагирующий на спектральный состав колебаний (гармонический анализатор—колебательный контур, человеческое ухо и т. д.), появляется необходимость в проведении исследования частотного (спектрального) состава выходного колебания, т. е. необходимость в проведении операций гармонического анализа. Методы и приёмы гармонического анализа, применяемые в нелинейной радиотехнике, имеют ряд специфических особенностей и не излагаются в обычных курсах анализа.

В настоящем параграфе последовательно будут рассмотрены методы аппроксимации и методы гармонического (спектрального) анализа, нашедшие исключительное распространение в нелинейной радиотехнике.

2. Аппроксимация характеристик нелинейных элементов.

Задача аппроксимации состоит из двух самостоятельных частей: 1) выбор класса (типа) функций и 2) определение постоянных коэффициентов, так называемых коэффициентов аппроксимации.

Применяемые для целей аппроксимации в радиотехнике функции можно разбить на следующие группы:

а) Степенной полином

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \quad (17.1)$$

К этой группе относится также ломаная прямая, т. е. функция, сконструированная из отрезков прямых линий.

б) Тригонометрический полином

$$y = A_0 + A_1 \cos(x + \varphi_1) + A_2 \cos(2x + \varphi_2) + \dots + A_n \cos(nx + \varphi_n). \quad (17.2)$$

в) Экспоненциальный полином

$$y = A_1 e^{a_1 x} + A_2 e^{a_2 x} + \dots + A_n e^{a_n x} \quad (17.3)$$

г) Степенная функция

$$y = A x^a. \quad (17.4)$$

Здесь a — дробное число.

д) Различные трансцендентные функции (функция арктангенса, функция гиперболического тангенса, функция гиперболического синуса, функция интеграла вероятности и др.).

Важно отметить, что функции первых трёх групп можно использовать для аппроксимации характеристик любого вида (взяв достаточное число членов полинома), а функции последних двух групп используются только для характеристик определённого вида, соответствующих виду данных кривых.

При выборе класса функции для аппроксимации руководствуются соображениями точности и простоты расчёта.

Степень точности определяется, в первую очередь, разбросом параметров характеристик нелинейных элементов.

Относительно простоты расчёта нужно отметить следующее.

При изучении безынерционных систем, находящихся под периодическим воздействием, аппроксимирующую функцию нужно выбирать, исходя из условий простоты последующих операций гармонического (спектрального) анализа.

При изучении инерционных систем в переходном режиме, т. е. при решении дифференциальных уравнений, аппроксимирующую функцию нужно выбирать, исходя из условий упрощения решения дифференциального уравнения.

Вторая часть задачи аппроксимации состоит в определении коэффициентов аппроксимации. Для этой цели в радиотехнике обычно пользуются методом выбранных точек, геометрический смысл которого состоит в следующем требовании: аппроксими-

рующая кривая должна пройти через выбранные точки или иметь в выбранных точках заданные значения производных. Наложением этих требований на выражение аппроксимирующей функции получаем систему алгебраических уравнений, решение которых относительно коэффициентов аппроксимации и решает поставленную задачу.

В случаях, когда характеристика аппроксимируется выражением, содержащим число членов больше двух-трёх, значения функции целесообразно выбирать при равностоящих значениях аргумента.

Примеры на применение метода выбранных точек даны в задачах 17.1 — 17.6, 17.8, 17.10, 17.16.

Определение коэффициентов аппроксимации можно также проводить „методом приведения к линейному виду“.

Сущность метода состоит в том, что заданное нелинейное уравнение путём введения нелинейных масштабов приводится к линейному виду, по графику которого легко определяются коэффициенты аппроксимации.

Этим методом можно пользоваться в тех случаях, когда уравнение характеристики нелинейного элемента содержит только один член.

Соответствующие примеры даны в задачах 17.7, 17.9, 17.11—17.15.

3. Методы гармонического анализа при простом (синусоидальном) воздействии

Каждому методу аппроксимации соответствует свой оптимальный метод гармонического анализа. При синусоидальном (простом) воздействии это соответствие устанавливается следующей таблицей.

№ пп.	Метод аппроксимации	Метод гармонического анализа	Примечания
1	Степенной полином	Формулы кратных дуг	
2	Ломаная прямая	Метод угла отсечки	
3	Тригонометрический полином	Разложение по бесселевым функциям от вещественного аргумента	
4	Экспоненциальный полином	Разложение по бесселевым функциям от мнимого аргумента	
5	Различные трансцендентные функции	Формулы трёх и пяти ординат и другие приёмы	Формулами трёх и пяти ординат пользуются также при аппроксимации другими функциями и при графических расчётах

Ниже приводятся необходимые справочные данные по каждому методу гармонического анализа.

а. Формулы кратных дуг

Пользование этими формулами показано в соответствующих задачах (см. задачи 17.17 — 17.21)

Формулы для справок даются в табл. 17.1.

б. Метод угла отсечки (метод Берга)

Применяя обозначения рис. 17.1, легко получить следующие расчётные соотношения. Выражение наклонной части характеристики:

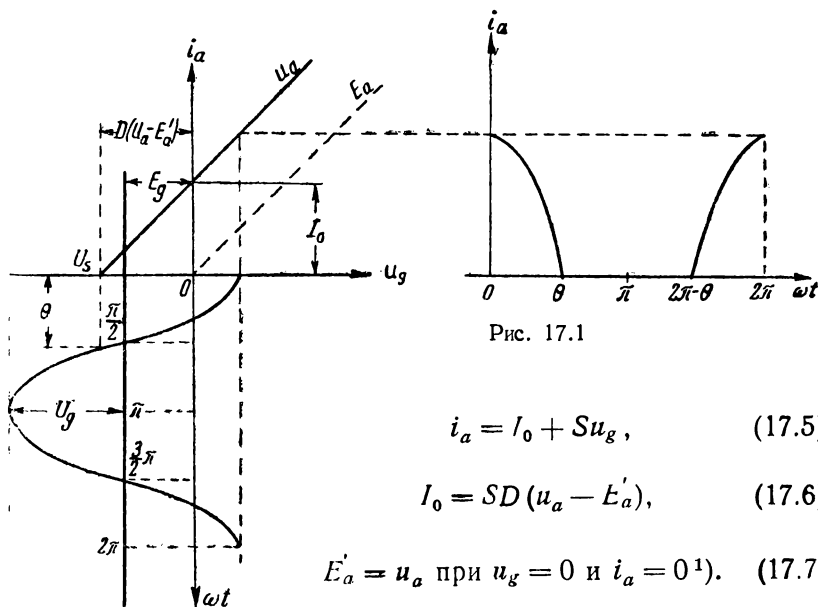


Рис. 17.1

$$i_a = I_0 + S u_g, \quad (17.5)$$

$$I_0 = S D (u_a - E'_a), \quad (17.6)$$

$$E'_a = u_a \text{ при } u_g = 0 \text{ и } i_a = 0^1). \quad (17.7)$$

Выражение для выходного тока в отрезке безразмерного времени ωt от 0 до Θ и от $2\pi - \Theta$ до 2π :

$$i_a(\omega t) = S U_g (\cos \omega t - \cos \Theta), \quad (17.8)$$

$$i_{a \text{ макс}} = S U_g (1 - \cos \Theta), \quad (17.9)$$

¹⁾ E'_a — отсчётное напряжение, так называемое напряжение приведения; ф-ла (17.7) справедлива для идеализированных (спрямлённых) характеристик.

Связь между углом отсечки θ и параметрами схемы даётся выражением

$$\cos \theta = \frac{SE_g - I_0}{SU_g} = \frac{E_g - D(u_a - E'_a)}{U_g}. \quad (17.10)$$

Выражение для n -й гармоники выходного тока

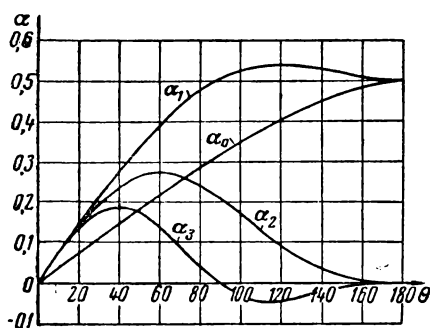


Рис. 17.2

$$I_{an} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} i_a(\omega t) \cos n \omega t d \omega t = SU_g F_n(\theta). \quad (17.11)$$

Выражение для коэффициентов разложения:

$$\alpha_n = \frac{I_{an}}{i_{a \max}} = \frac{SU_g F_n(\theta)}{SU_g (1 - \cos \theta)} = f_n(\theta). \quad (17.12)$$

Графики $\alpha = f(\theta)$ для первых трёх гармоник и постоянной составляющей даны на рис. 17.2.

Примеры пользования методом угла отсечки даны в задачах 17.22 — 17.26.

в. Разложение по бесселевым функциям от вещественного аргумента

Разложение по бесселевым функциям от вещественного аргумента применяется тогда, когда для целей аппроксимации используются тригонометрические функции синуса и косинуса и гиперболические функции синуса и косинуса. Соответствующие формулы имеют вид¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} \sin(a \sin x) &= 2J_1(a) \sin x + 2J_3(a) \sin 3x + \dots \\ \sin(a \cos x) &= 2J_1(a) \cos x - 2J_3(a) \cos 3x + \dots \\ \cos(a \sin x) &= J_0(a) + 2J_2(a) \cos 2x + 2J_4(a) \cos 4x + \dots \\ \cos(a \cos x) &= J_0(a) - 2J_2(a) \cos 2x + 2J_4(a) \cos 4x - \dots \end{aligned} \right\} (17.13)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sh}(a \sin x) &= 2J_1(a) \sin x - 2J_3(a) \sin 3x + \dots \\ \operatorname{sh}(a \cos x) &= 2J_1(a) \cos x + 2J_3(a) \cos 3x + \dots \\ \operatorname{ch}(a \sin x) &= J_0(a) - 2J_2(a) \cos 2x + 2J_4(a) \cos 4x - \dots \\ \operatorname{ch}(a \cos x) &= J_0(a) + 2J_2(a) \cos 2x + 2J_4(a) \cos 4x + \dots \end{aligned} \right\} (17.14)$$

¹⁾ Э. Грей и Г. Б. Мэтьюз. Функции Бесселя и их приложение к физике и механике ИЛ. 1949 г. (стр. 46, 59).

Примеры пользования этими разложениями даны в задаче 17.27. Графики (для справок к задачам) бесселевых функций для расчёта первых пяти гармоник и постоянной составляющей даны на рис. 17.3.

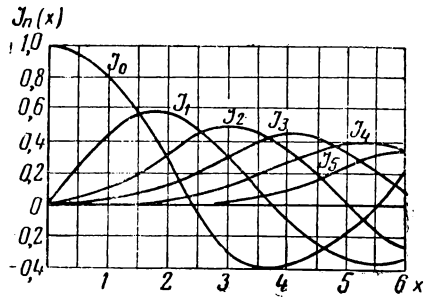


Рис. 17.3

г. Разложение по бесселевым функциям от мнимого аргумента

Разложение по бесселевым функциям от мнимого аргумента применяется в тех случаях, когда для целей аппроксимации используются экспоненциальные функции. Соответствующие формулы имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} e^{a \cos x} &= B_0(a) + 2B_1(a) \cos x + 2B_2(a) \cos 2x + \dots \\ e^{a \sin x} &= B_0(a) + 2B_2(a) \cos 2x + 2B_4(a) \cos 4x + \dots \\ &+ 2B_1(a) \sin x + 2B_3(a) \sin 3x + \dots \end{aligned} \right\} \quad (17.15)$$

В математической литературе функции Бесселя от мнимого аргумента обозначают не символом $B_n(a)$, а символом $I_n(a)$;

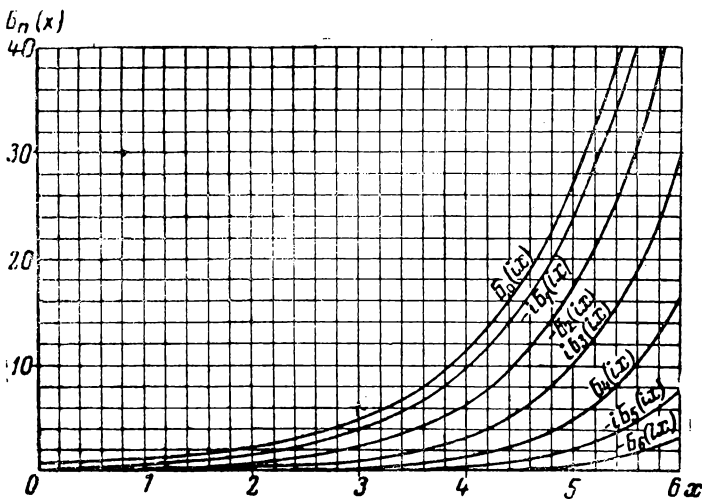


Рис. 17.4

мы **вынуждены** отступить от принятых обозначений из-за обозначения амплитуды тока буквой I .

Следует подчеркнуть, что в расчётах разложения встречается только вещественный аргумент; название „функции от

много аргумента“ следует понимать так же, как понимается второе название гиперболических функций — „тригонометрические функции от мнимого аргумента“. Бесселевы функции от вещественного и мнимого аргументов находятся между собой в таком же соотношении, в каком находятся тригонометрические и гиперболические функции.

Графики бесселевых функций от мнимого аргумента для расчёта постоянной составляющей и первых шести гармоник даны на рис. 17.4.

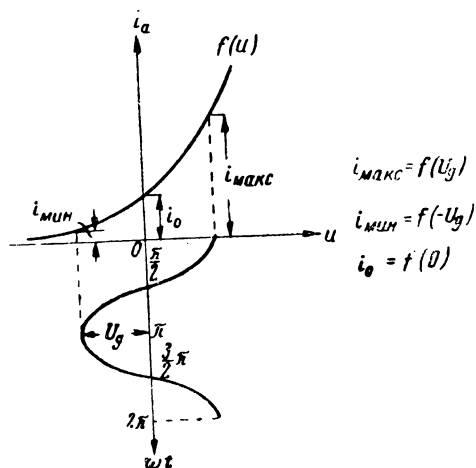
Примеры разложений по бесселевым функциям от мнимого аргумента даны в задачах 17.28 — 17.30.

д. Формулы трёх и пяти ординат

Формулы трёх и пяти ординат являются некоторым видоизменением известных формул приближённого гармонического анализа. Формулы трёх ординат позволяют находить приближённые значения постоянной составляющей и амплитуд первых двух гармоник по следующим известным значениям временной функции (рис. 17.5): максимальному значению i_{\max} ,

минимальному значению i_{\min} и значению i_0 , соответствующему отсутствию переменного напряжения (ток покоя).

Формулы трёх ординат имеют вид:



$$\left. \begin{aligned} I_{a0} &= \frac{i_{\max} + i_{\min}}{4} + \frac{i_0}{2} \\ I_{a1} &= \frac{i_{\max} - i_{\min}}{2} \\ I_{a2} &= \frac{i_{\max} + i_{\min}}{4} - \frac{i_0}{2} \end{aligned} \right\} (17.16)$$

Формулы пяти ординат позволяют находить приближённые значения постоянной составляющей и амплитуд первых четырёх гармоник по следующим известным значениям временной функции (рис. 17.6): i_{\max} , i_{\min} ,

i_0 , i_1 и i_2 .

Значения i_1 и i_2 соответствуют таким значениям временной функции, при которых аргумент равен \pm половинному значению амплитуды подведённого напряжения.

Формулы пяти ординат имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} I_{a_0} &= \frac{1}{6} [(i_{\max} + i_{\min} + 2(i_1 + i_2))] \\ I_{a_1} &= \frac{1}{3} [(i_{\max} - i_{\min}) + (i_1 - i_2)] \\ I_{a_2} &= \frac{1}{4} [(i_{\max} + i_{\min}) - 2i_0] \\ I_{a_3} &= \frac{1}{6} [(i_{\max} - i_{\min}) - 2(i_1 - i_2)] \\ I_{a_4} &= \frac{1}{12} [(i_{\max} + i_{\min}) - 4(i_1 + i_2) + 6i_0] \end{aligned} \right\} \quad (17.17)$$

Формулами трёх и пяти ординат пользуются при аппроксимации любыми функциями и, в частности, при аппроксимации различными трансцендентными функциями, а также при графических расчётах.

Необходимо иметь в виду, что ошибка, совершаемая при пользовании этими формулами, растёт вместе с ростом амплитуды подводимого напряжения.

Примеры пользования формулами трёх и пяти ординат даны в задачах 17.31—17.33.

4. Методы спектрального анализа при сложном периодическом воздействии

При подаче на вход нелинейной системы, сложного колебания, состоящего из двух и более простых синусоидальных колебаний, на выходе системы будут иметь место как гармонические, так и комбинационные колебания.

Если на вход подаются два колебания с частотами ω_1 и ω_2 , на выходе будет ряд колебаний с частотами

$$n \omega_1 \pm m \omega_2,$$

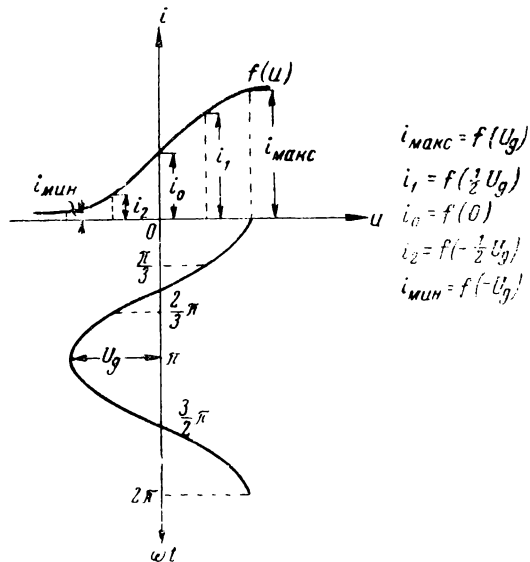


Рис. 17.6

где n и m любые целые числа натурального ряда, включая нули. Число N , равное

$$N = |n| + |m|,$$

называется порядком комбинационного колебания.

Гармонические колебания соответствуют случаю, когда n или m равно нулю; если m и n не равны нулю, колебания являются комбинационными.

Для обозначения амплитуд гармонических и комбинационных колебаний используется символ I_{nm} .

Если на вход подаются три колебания с частотами ω_1 , ω_2 и ω_3 , на выходе будет ряд колебаний с частотами

$$\pm n\omega_1 \pm m\omega_2 \pm k\omega_3.$$

Порядком комбинационного колебания будет число

$$N = |n| + |m| + |k|.$$

Задача спектрального анализа состоит в определении амплитуд гармонических и комбинационных колебаний.

В общем случае при любых соотношениях амплитуд входных колебаний задача спектрального анализа решается только для аппроксимирующих функций вида степенного и экспоненциального полиномов.

При аппроксимации степенным полиномом для нахождения спектра нужно пользоваться формулами кратных дуг и формулами произведения синусов и косинусов (табл. 17.1). Соответствующие примеры приведены в задачах 17.34—17.36.

При аппроксимации одной экспоненциальной функцией $i = I_0 e^{au}$ для нахождения амплитуд любых гармонических и комбинационных колебаний нужно пользоваться формулами:

$$\left. \begin{aligned} I_{mn} &= 2 I_0 B_m(aU_1) B_n(aU_2) \\ I_{mnl} &= 2 I_0 B_m(aU_1) B_n(aU_2) B_l(aU_3) \\ I_{mn\dots k} &= 2 I_0 \Pi_i B_i(aU_i) \end{aligned} \right\} \quad (17.18)$$

Вывод этих формул дан в задаче 17.37.

Примеры расчётов по этим формулам даны в задачах 17.37—17.39.

В частном случае, при входном сигнале, состоящем из двух синусоид и при условии, что амплитуда одной синусоиды значительно больше амплитуды другой синусоиды, задачу спектрального анализа можно решить при любой аппроксимации. При этом для напряжения u_1 с малой амплитудой характеристику принимают линейной

$$i \approx su_1,$$

а коэффициент наклона характеристики s , являющийся нелинейной функцией большого напряжения u_2 , и, следовательно, периодической функцией времени, вычисляют по характеристике нелинейного элемента и затем представляют в виде ряда Фурье:

$$s = S_0 + S_1 \sin \omega_2 t + S_2 \sin 2 \omega_2 t + \dots$$

Тогда выходной ток будет

$$i = (S_0 + S_1 \sin \omega_2 t + S_2 \sin 2 \omega_2 t + \dots) U_1 \sin \omega_1 t.$$

Из последнего выражения можно определить амплитуду любого комбинационного колебания.

Изложенным приёмом пользуются при изучении схем преобразования частоты при слабых сигналах (см. § 18, задача 18.44).

В заключение необходимо указать, что материал настоящего параграфа составляет основу материала следующих параграфов.

Таблица 17.1

Формулы кратных дуг

$$1) \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2 \alpha,$$

$$2) \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2 \alpha,$$

$$3) \sin^3 \alpha = \frac{3}{4} \sin \alpha - \frac{1}{4} \sin 3 \alpha,$$

$$4) \cos^3 \alpha = \frac{3}{4} \cos \alpha + \frac{1}{4} \cos 3 \alpha,$$

$$5) \sin^4 \alpha = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2 \alpha + \frac{1}{8} \cos 4 \alpha,$$

$$6) \cos^4 \alpha = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2 \alpha + \frac{1}{8} \cos 4 \alpha,$$

$$7) \sin^5 \alpha = \frac{1}{16} \sin 5 \alpha - \frac{5}{16} \sin 3 \alpha + \frac{5}{8} \sin \alpha,$$

$$8) \cos^5 \alpha = \frac{1}{16} \cos 5 \alpha + \frac{5}{16} \cos 3 \alpha + \frac{5}{8} \cos \alpha.$$

Формулы произведений синусов и косинусов различных степеней

$$1) \sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cos (\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos (\alpha + \beta),$$

$$2) \sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \sin (\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \sin (\alpha + \beta),$$

- 3) $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \cos (\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos (\alpha + \beta),$
 4) $\sin \alpha \cdot \sin^2 \beta = \frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{1}{4} \sin (\alpha - 2 \beta) - \frac{1}{4} \sin (\alpha + 2 \beta),$
 5) $\sin \alpha \cdot \cos^2 \beta = \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{1}{4} \sin (\alpha - 2 \beta) + \frac{1}{4} \sin (\alpha + 2 \beta),$
 6) $\cos \alpha \cdot \cos^2 \beta = \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{1}{4} \cos (\alpha - 2 \beta) + \frac{1}{4} \cos (\alpha + 2 \beta),$
 7) $\cos \alpha \cdot \sin^2 \beta = \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{1}{4} \cos (\alpha - 2 \beta) - \frac{1}{4} \cos (\alpha + 2 \beta),$
 8) $\sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \frac{1}{4} \sin \alpha + \frac{1}{4} \sin 3 \alpha,$
 9) $\cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha = \frac{1}{4} \cos \alpha - \frac{1}{4} \cos 3 \alpha.$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

17.1*. Характеристика лампы изображена на рис. 17.7. Требуется аппроксимировать эту характеристику полиномом второй степени в пределах от $u = 0$ и до $u = -16$ в, потребовав совпадения в точках $u_1 = 0, u_2 = -8$ в и $u_3 = -16$ в.

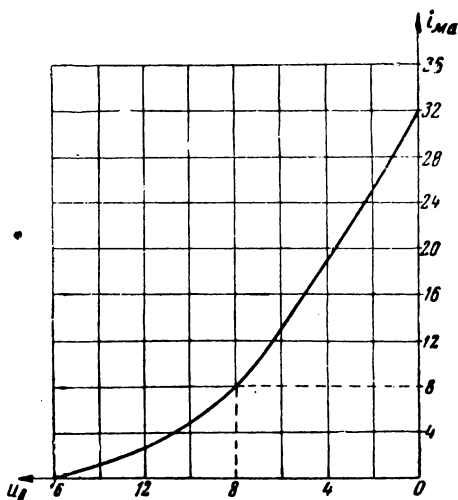


Рис. 17.7

17.2. Характеристику лампы, изображённую на рис. 17.8, представить полиномом второй степени, исходя из требования совпадения аппроксимирующей функции с аппроксимируемой кривой в трёх точках: 1) $u = 0, i = 0,$ 2) $u = 2$ в, $i = 1$ ма; 3) $u = 6$ в, $i = 4$ ма.

17.3*. Динамическая характеристика лампы 6Ж7 при $E_a = 240$ в, $E_g = 135$ в и $R_a = 30$ ком дана на рис. 17.9.

Рабочая точка соответствует смещению $E_g = -2,9$ в. Крутизна в рабочей точке равна $\xi_0 = 1,35 \frac{\text{ма}}{\text{в}}$.

В точке $u_g = -2,9$ в анодный ток равен $i_0 = 4,3$ ма. В точке $u_g = 1,35$ в прекращается рост анодного тока,

т. е. $\frac{di_a}{du_g} = 0.$

Нужно аппроксимировать характеристику укороченным полиномом третьей степени

$$i_a = a_0 + a_1(u_g - E_g) + a_2(u_g - E_g)^2,$$

в котором начало координат перенесено в рабочую точку.

17.4*. Заданную в виде графика характеристику (рис. 17.10) нужно аппроксимировать степенным полиномом второй степени относительно рабочей точки U_0 :

$$i = a_0 + a_1(u + U_0) + a_2(u + U_0)^2.$$

Требуется вывести общие формулы для расчёта коэффициентов a_0 , a_1 и a_2 , задавая равноотстоящими значениями аргумента.

17.5. Заданную в виде графика характеристику (рис. 17.11) нужно аппроксимировать полиномом второй степени вида

$$i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2.$$

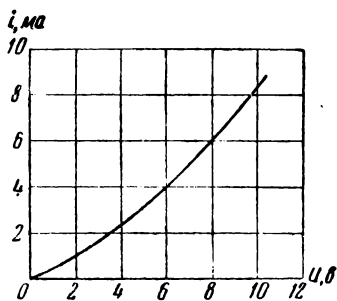


Рис. 17.8

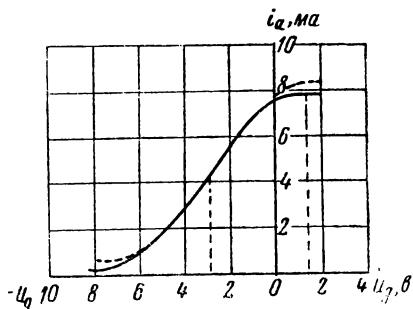


Рис. 17.9

Для расчёта коэффициентов a_0 , a_1 и a_2 вывести общие формулы, считая, что значения тока i_0 , i_1 и i_2 соответствуют равноотстоящим значениям аргумента.

17.6. Заданную в виде графика характеристику (рис. 17.12) нужно аппроксимировать полиномом четвёртой степени относительно рабочей точки $u = U_0$.

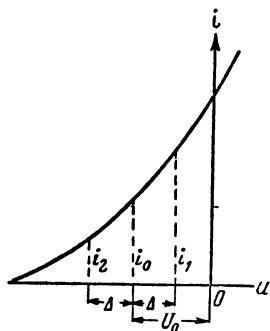


Рис. 17.10

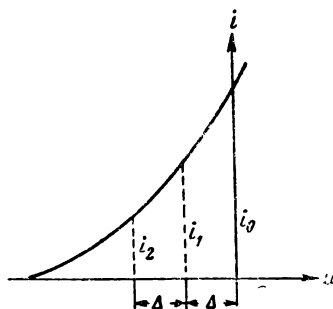


Рис. 17.11

Для расчёта коэффициентов a_0 , a_1 , a_2 , a_3 и a_4 вывести общие формулы, считая, что известные значения токов i_1 , i_2 , i_3 , i_4 и i_5 соответствуют равноотстоящим значениям аргумента.

17.7*. Характеристику, изображённую на рис. 17.13, предполагается аппроксимировать выражением

$$i = au^2.$$

Проверить методом приведения к линейному виду, подходит ли данное выражение к заданной характеристике и в случае положительного ответа найти коэффициент a .

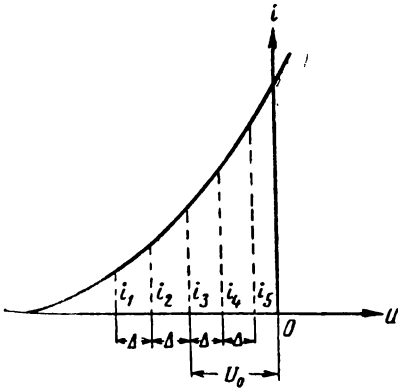


Рис. 17.12

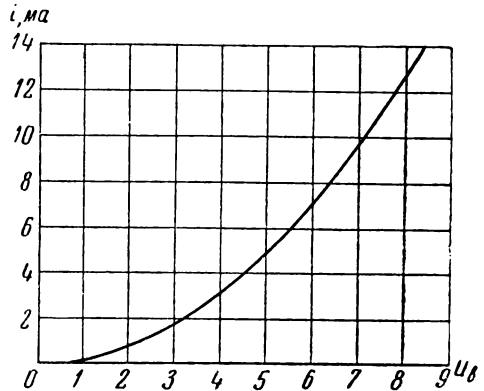


Рис. 17.13

Значения u и i , соответствующие графику рис. 17.13, приведены в таблице:

$u, \text{ в}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$i, \text{ ма}$	0	0,2	0,8	1,8	3,2	5,0	7,2	9,8	12,8

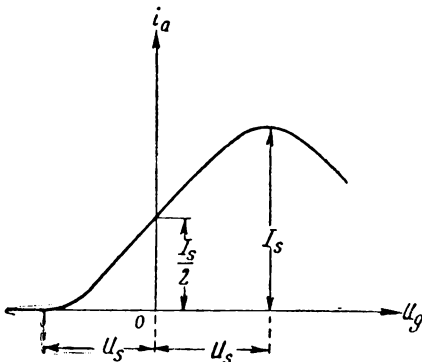


Рис. 17.14

17.8*. Характеристика лампы с вольфрамовым катодом имеет вид, изображённый на рис. 17.14.

Нужно аппроксимировать эту характеристику укороченным полиномом третьей степени

$$i_a = a_0 + a_1 u_g + a_3 u_g^3,$$

выразив коэффициенты аппроксимации только через два параметра: 1) крутизну

в рабочей точке $\left. \frac{di_a}{du_g} \right|_{u_g = 0} = S_0$

и 2) ток насыщения I_s .
Характеристику можно считать нечётной функцией относительно оси ординат.

17.9. Проверить, можно ли аппроксимировать характеристику рис. 17.8 (задача 17.2) функцией вида

$$i = au^2.$$

17.10. Характеристику лампы, изображённую на рис. 17.15, представить в виде синусоидальной функции

$$i = a + b \sin(qu + \varphi).$$

действительной в пределах $-U_s < u < U_s$. Необходимо также определить коэффициенты аппроксимации a , b , q и φ , потребовав совпадения в точках $u = -U_s$ и $u = U_s$.

7.11*. При снятии характеристики сеточного тока лампы были получены следующие данные:

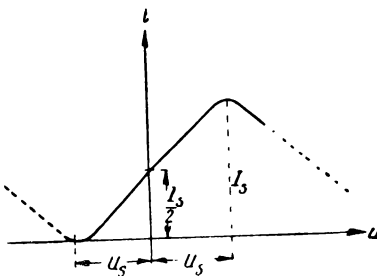
$u_g, \text{ в}$	0	0,3	0,4	0,6	0,8	0,9	1
$i_g, \text{ мка}$	0,1	1	5	30	130	300	700

Представить эту характеристику в виде экспоненциальной функции

$$i_g = I_0 e^{au_g}.$$

Рекомендуется воспользоваться методом приведения к линейному виду.

17.12*. При снятии характеристики сеточного тока были получены данные, соответствующие данным задачи 17.11, кроме значения тока при напряжении $u = 0$, которое в виду его малости по имеющемуся прибору нельзя было определить. Характеристику предполагается аппроксимировать функцией



$$i_g = I_0 e^{au_g}$$

Рис. 17.15

нужно определить коэффициенты I_0 и a .

17.13. При снятии статической характеристики диода были получены следующие значения:

$u, \text{ в}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$i, \text{ ма}$	1,1	2,45	5,5	12,3	27,3	61	135

Характеристику предполагается аппроксимировать экспоненциальной функцией

$$i = I_0 e^{au}.$$

Определить, подходит ли в данном случае экспоненциальная функция и при положительном результате найти коэффициенты I_0 и a .

17.14*. Характеристика катодного тока триода в некоторой части удовлетворительно передается функцией вида¹⁾

$$i_K = A (u_g + U_0)^{3/2},$$

где $U_0 = Du_a$ и считается известным. Дать удобную методику расчета коэффициента A по известным значениям u_g и i_K , а также показать, каким образом легко удостовериться в том, что данная функция соответствует аппроксимируемой характеристике.

17.15*. При снятии характеристики триода были получены следующие значения:

$u_g, \text{ в}$	-14	-10	-6	-2	+2	+6
$i_a, \text{ мА}$	1	4,5	10	16	24	30

Проверить, можно ли в указанном диапазоне пользоваться для аппроксимации формулой

$$i_a = A (u_g + Du_a)^{3/2}$$

и в случае положительного результата рассчитать коэффициент A . Известно, что $u_a = 320 \text{ в}$, а $D = 0,05$.

17.16. Характеристики анодного тока триода и пентода могут быть с удовлетворительной степенью точности аппроксимированы формулой Крылова

$$i_a = A + B \operatorname{th} qu_g.$$

Найти значения коэффициентов A , B и q для случая симметричной характеристики и для случая, когда аппроксимируется только левая часть характеристики рис. 17.16 а и б).

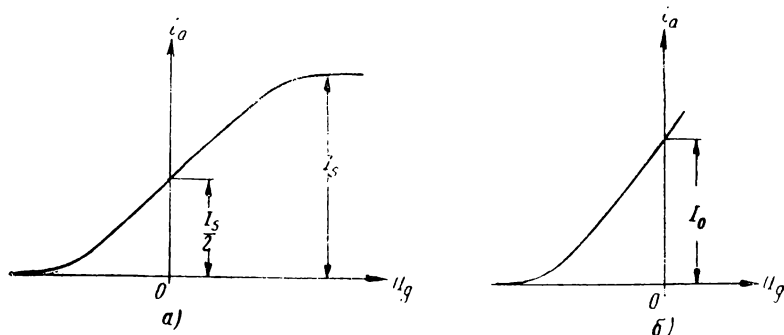


Рис. 17.16

В точке $u_g = 0$ крутизна характеристики равна S .

¹⁾ В. Ф. Власов. Электровакuumные приборы. Связьиздат, 1949 г., стр. 159.

17.17*. Характеристика лампы, на которую подано напряжение

$$u_g = -8 + 8 \cos \omega t \text{ в,}$$

аппроксимируется выражением

$$i_a = 32 + 4 u_g + \frac{1}{8} u_g^2 \text{ ма.}$$

Найти значения постоянной составляющей I_{a0} амплитуды первой гармоники I_{a1} и амплитуды второй гармоники I_{a2} .

17.18. На сетку лампы с характеристикой

$$i_a = 5 + 2 u_g + 0,2 u_g^2 \text{ ма}$$

подано напряжение

$$u_g = -3 + 2 \cos \omega t \text{ в.}$$

Найти значения постоянной составляющей, амплитуды первой гармоники и амплитуды второй гармоники.

17.19. На сетку лампы, характеристика которой передаётся выражением

$$i_a = 20 + 4 u_g - 0,1 u_g^3 \text{ ма}$$

подаётся напряжение $u_g = 6 \sin \omega t \text{ в.}$

Найти значения постоянной составляющей и гармоник.

17.20. Показать в общем виде, что члены с чётными степенями (в выражении характеристики нелинейного элемента) приводят к появлению чётных гармоник, а члены с нечётными степенями — к появлению нечётных гармоник.

17.21. Вывести формулу для расчёта коэффициента гармоник

$$\kappa_n = \frac{I_n}{I_1}$$

для случая, когда характеристика лампы передаётся выражением

$$i_a = I_0 + S u_g - \gamma u_g^3.$$

Рабочая точка выбрана при $u_g = 0$.

17.22*. Уравнение характеристики лампы (рис. 17.1) передаётся двумя прямыми:

$$1) i_a = 0 \text{ при } u_g < U_s = -6 \text{ в,}$$

$$2) i_a = I_0 + S u_g \text{ при } u_g > U_s.$$

$$S = 5 \frac{\text{ма}}{\text{в}}; I_0 = S |U_s| = 30 \text{ ма.}$$

На сетку подаётся напряжение

$$u_g = -10 + 8 \cos (\omega t + \varphi) \text{ в.}$$

Найти постоянную составляющую и амплитуды первой, второй и третьей гармоник анодного тока.

17.23. Характеристика лампы передаётся двумя прямыми:

$$1) i_a = 0 \text{ при } u_g < -8 \text{ в,}$$

$$2) i_a = 32 + 4 u_g \text{ при } u_g > -8 \text{ в.}$$

На сетку подаётся напряжение

$$u_g = -8 + 8 \cos \omega t \text{ в.}$$

Найти значения постоянной составляющей и амплитуд первой и второй гармоник.

17.24. По условию задачи 17.22 выяснить, как изменить смещение E_g , чтобы третья гармоника была равна нулю.

17.25. Найти, как изменить смещение E_g по условиям задачи 17.23, чтобы амплитуда второй гармоники имела максимальное значение.

17.26. Найти значение угла отсечки θ , при котором угол отсечки не зависит от амплитуды приложенного напряжения U_g .

17.27*. Характеристика лампы в некоторой области (задача 17.10) может быть аппроксимирована уравнением

$$i_a = \frac{I_s}{2} \left[1 + \sin \left(\frac{\pi}{2U_s} u_g \right) \right].$$

На сетку лампы с такой характеристикой подаётся напряжение

$$u_g = 8 \cos \omega t \text{ в.}$$

Известно, что $U_s = 8 \text{ в}$ (рис. 17.15), $\frac{I_s}{2} = 16 \text{ ма}$.

Найти значения постоянной составляющей и амплитуд первой и третьей гармоник анодного тока.

17.28*. К диоду, характеристика которого аппроксимируется выражением

$$i = 0,5 e^{0,5u}$$

подаётся напряжение

$$u = -0,5 + 0,4 \cos \omega t.$$

Найти постоянную составляющую и амплитуды первых трёх гармоник.

17.29. Характеристика диода аппроксимируется формулой

$$i = 0,5 e^{0,5u} \text{ ма.}$$

Какое нужно подать смещение, чтобы при амплитуде $0,5 \text{ в}$ постоянная составляющая составляла $0,05 \text{ мА}$.

17.30. К диоду, характеристика которого передаётся выражением

$$i = 0,5 e^{10u} \text{ ма,}$$

подаётся напряжение

$$u = -0,1 + 0,5 \cos \omega t.$$

Найти значение постоянной составляющей и амплитуды первой гармоники.

17.31*. На сетку лампы, характеристика которой изображена на рис. 17.17, подаётся напряжение

$$u_g = -4 + 4 \cos \omega t \text{ в.}$$

Найти значения постоянной составляющей и амплитуд первой и второй гармоник, пользуясь формулами трёх и пяти ординат.

17.32. Характеристика нелинейного элемента передаётся формулой:

$$i = 0,4 e^{0,5u} \text{ ма,}$$

причём

$$u = 0,5 \cos \omega t \text{ в.}$$

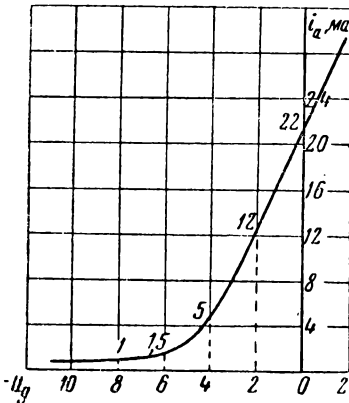


Рис. 17.17

Найти амплитуду тока первой гармоники по формуле трёх ординат.

17.33. На сетку лампы, характеристика которой передаётся формулой Крылова (задача 17.16)

$$i = \frac{I_s}{2} (1 + \text{th } qu_g),$$

подаётся напряжение

$$u_g = 5 \sin \omega t_0$$

Найти по формуле трёх ординат значение тока первой гармоники, если

$$S = 2 \frac{m\alpha}{\beta}, \text{ а } \frac{I_s}{2} = 10 \text{ ма.}$$

17.34*. На вход нелинейной системы, характеристика которой передаётся выражением

$$i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2,$$

подаётся колебание

$$u = U_1 \sin \omega_1 t + U_2 \sin \omega_2 t.$$

Найти спектр выходного тока и сравнить по мощности комбинационные и высшие гармонические колебания.

17.35. На сетку лампы, характеристика которой аппроксимируется выражением

$$i = 10 + 2u + 0,2u^2 \text{ ма,}$$

подаётся напряжение

$$u = 3 \sin \omega t + 2 \sin 2t.$$

Найти значения постоянной составляющей, амплитуд гармоник и амплитуд комбинационных колебаний.

17.36. Найти гармонические и комбинационные колебания на выходе нелинейной системы, характеристика которой аппроксимируется выражением

$$i_a = I_0 + Su_g - \gamma u_g^3,$$

а напряжение u_g состоит из двух синусоидальных напряжений

$$u_g = U_1 \sin \omega t + U_2 \sin 2t.$$

17.37*. Вывести формулы для расчёта амплитуд гармонических и комбинационных колебаний при подаче на вход нелинейной системы двух и более косинусоидальных колебаний, если характеристика нелинейной системы аппроксимируется выражением вида

$$i = I_0 e^{au}.$$

17.38*. На вход нелинейной системы с характеристикой

$$i = 0,5 e^{10u} \text{ ма}$$

подаются два колебания с частотами ω и 2ω и амплитудами 0,2 в и 0,1 в.

Найти амплитуду колебания с частотой $\omega \pm 2\omega$.

17.39. На вход нелинейной системы с характеристикой

$$i = 0,5 e^{8u}$$

подаются колебания с амплитудами 0,4 в и 0,3 в и частотами ω и 2ω .

Найти амплитуду комбинационного колебания с частотой $(3\omega \pm 2\omega)$.

§ 18. Установившийся режим в безынерционных нелинейных и параметрических системах. Основные преобразования спектра

1. В этом параграфе рассматривается установившийся режим в безынерционных системах, т. е. системах, в которых нет переходного процесса, благодаря отсутствию реактивных элементов. К этим системам мы условно относим и те, в которых используются реактивные элементы только для отвода ненужных составляющих спектра; будем считать, что для полезных составляющих нагрузка представляет собой чисто активное сопротивление.

Материал параграфа сгруппирован по признакам, характеризующим внешнее воздействие.

В первую очередь рассматривается воздействие в виде постоянного и медленно меняющегося напряжения или тока. Затем рассматриваются преобразования при воздействии чисто синусоидального колебания; в результате преобразования и фильтрации выделяется колебание другой формы или частоты (выпрямление, умножение частоты, ограничение мгновенных значений). Далее рассматриваются преобразования при двух, трёх и более синусоидальных колебаниях; в результате преобразования и фильтрации выделяются колебания другой формы или частоты (амплитудная модуляция, детектирование амплитудно-модулированных колебаний, преобразование частоты, гетеродинирование).

Основные преобразования спектра могут осуществляться как нелинейными, так и параметрическими системами.

2. На примере обобщённой схемы преобразования спектра при помощи нелинейной системы (рис. 18.1) можно показать общую методику изучения и расчёта этих схем.

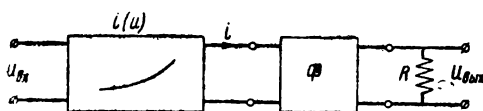


Рис. 18.1

К нелинейному четырёхполюснику с вольт-амперной характеристикой $i(u)$ подводится входное напряжение $u_{вх}$. Вследствие нелинейности характеристики ток i как по форме, так и по спектральному составу будет отличаться от входного напряжения. На выходе устройства включается в общем случае фильтр и активная нагрузка; фильтр предназначен для отвода ненужных составляющих спектра, а активная нагрузка — для создания напряжения от тех составляющих тока, которые являются полезным продуктом данного преобразования.

Изучение схем преобразования состоит, прежде всего, в установлении связи между полезным продуктом преобразо-

вания и напряжением входа. Эта связь является основной характеристикой преобразования и для каждого вида преобразования имеет соответствующее наименование (характеристика детектирования, модуляционная характеристика и т. д.).

Дальнейшее изучение схем преобразования состоит, во-первых, в исследовании основной характеристики с целью определения оптимальных параметров и оптимального режима схемы и, во-вторых, в определении относительного влияния паразитных продуктов преобразования, проникающих к нагрузочному сопротивлению R .

Вывод выражения основной характеристики преобразования содержит следующие четыре стадии (этапа):

- 1) Аналитическая запись условий входа.
- 2) Аппроксимация характеристики нелинейного элемента.
- 3) Сопоставление первых двух этапов с целью получения временной зависимости выходного тока.
- 4) Гармонический (спектральный) анализ выходного тока для выявления полезных составляющих и составляющих, являющихся для данного преобразования вредными.

Необходимо отметить, что в некоторых схемах характеристики нелинейного элемента зависят от величины выходного напряжения, т. е. от напряжения на нагрузке. Такие схемы обычно называют схемами с обратным воздействием. Учёт реакции нагрузки на характеристику нелинейного элемента требует „своего подхода“ к каждой конкретной схеме, и в задачах настоящего параграфа не рассматривается. В условиях задач считается, что характеристики нелинейного элемента не зависят от напряжения на нагрузке.

3. На примере обобщённой схемы преобразования спектра при помощи параметрического элемента (рис. 18.2) можно показать общую методику изучения этих схем.

Ко входу схемы подводится входное напряжение $u_{вх}$, подлежащее преобразованию. Вследствие периодического изменения сопротивления $R(t)$ или проводимости $G(t)$, ток в схеме (а следовательно, и напряжение на выходе) не будет повторять форму и спектр входного напряжения. Задача исследования состоит либо в определении тока по заданному закону $R(t)$, либо в определении закона, по которому должно меняться сопротивление $R(t)$ по заданной форме преобразования, т. е. по заданному спектру тока.

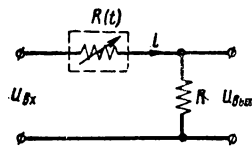


Рис. 18.2

Необходимо подчеркнуть, что для таких схем можно пользоваться принципом суперпозиции; это важно для тех преобразований, в которых преобразуемое напряжение состоит из ряда синусоидальных напряжений.

4. Изучение нелинейных схем, находящихся под постоянным или медленно меняющимся воздействием, обычно проводится графически и реже аналитически.

Задача обычно ставится так (рис. 18.3).

Задана схема, т. е. известно входное напряжение E , сопротивление R и характеристика нелинейного элемента R_u в виде либо графика $i = f(u)$, либо аналитического выражения. Нужно найти ток i , напряжение u_1 на линейном элементе и напряжение u_2 на нелинейном элементе.

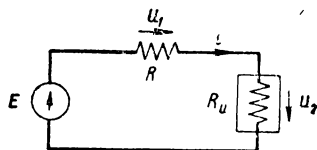


Рис. 18.3

Для схемы справедливы уравнения:

$$E = iR + u_2,$$

$$i = f(u_2),$$

которые можно записать и так:

$$\left. \begin{aligned} i &= \frac{E - u_2}{R} \\ i &= f(u_2) \end{aligned} \right\} \quad (18.1)$$

Решая эту систему относительно i и u_2 , получаем искомые результаты.

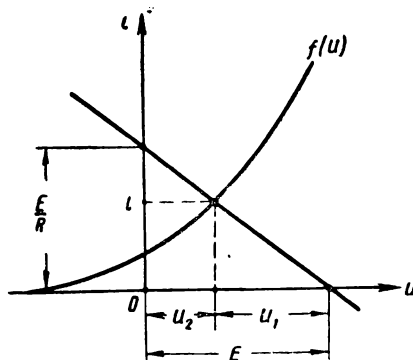


Рис. 18.4

Если характеристика $i = f(u)$ задана в виде графика (рис. 18.4), решение можно провести графически.

Значения u_2 и i находятся в точке пересечения кривых уравнений (18.1); прямая наносится по двум точкам: 1) при $i^* = 0$, $u = E$; 2) при $u = 0$, $i = \frac{E}{R}$.

Прямую $i = \frac{E - u_2}{R}$ называют «нагрузочной прямой».

Совершенно аналогично рассчитывается схема с нелинейным элементом, управляемым током, т. е. с характеристикой вида $u = \varphi(i)$.

Примеры расчёта схем, находящихся под постоянным или медленно меняющимся воздействием, даны в задачах 18.1 — 18.9.

5. Методика изучения схем, находящихся под воздействием чисто синусоидального колебания, излагалась выше. Основными этапами исследования здесь являются аппроксимация характеристик и гармонический анализ.

В соответствующих задачах рассматриваются выпрямление, умножение частоты и ограничение колебаний.

В первых двух схемах преобразования на выходе включается гармонический анализатор (в выпрямителе — фильтр, в умножителе — колебательный контур); в третьей схеме гармонического анализатора нет и, следовательно, в этом случае нужно ограничиться выяснением формы кривой, не выясняя спектрального состава.

Расчёты по этим трём схемам преобразования даны в задачах 18.10—18.22.

Для решения этих задач необходимо знание материала § 17.

6. К схемам преобразования, в которых входное напряжение состоит из ряда синусоидальных колебаний, относятся схемы амплитудной модуляции, детектирования амплитудно-модулированных колебаний, преобразования частоты, гетеродинирования.

Преобразование при амплитудной модуляции чистым тоном состоит в выделении одного гармонического и двух (разностного и суммарного) комбинационных колебаний второго порядка при подаче на вход колебаний высокой и низкой частоты. Выделение необходимых колебаний совершается при помощи колебательного контура.

Детектирование амплитудно-модулированного колебания состоит в выделении одного разностного комбинационного колебания второго порядка, имеющего частоту модулирующего колебания. Выделение нужного колебания в нагрузке осуществляется цепью, состоящей из активного сопротивления и ёмкости.

Преобразование частоты заключается в выделении одного (обычно разностного), комбинационного колебания второго порядка. Если это колебание имеет высокую частоту (радиочастоту), — преобразование так и называется „преобразованием“ частоты, если же это колебание имеет низкую частоту (звуковую частоту), — такое преобразование называют гетеродинированием. В схемах преобразования частоты выделение полезного продукта совершается колебательным контуром, а в схемах гетеродинирования — цепью *НС*.

Примеры расчёта по этим схемам преобразования даны в задачах 18.23—18.45.

В заключение приведём таблицу основных преобразований спектра.

Таблица 18.1

Таблица основных преобразований спектра

№ пп.	Наименование преобразования	Входное колебание	Выходное (полезное) колебание	Нагрузка, при помощи которой выделяется полезное колебание
1	Выпрямление	Синусоидальное с частотой Ω	Постоянная составляющая	Активное сопротивление с фильтром
2	Умножение частоты	Синусоидальное с частотой ω	Гармоническое с частотой $n\omega$	Контур, настроенный на частоту $n\omega$
3	Амплитудная модуляция	Сумма двух синусоидальных с частотами высокой ω и низкой Ω	Гармоническое с частотой ω и два комбинационных второго порядка с частотами $\omega \pm \Omega$	Колебательный контур, настроенный на частоту ω
4	Детектирование амплитудно-модулированных колебаний	1) Сумма двух синусоидальных с частотами ω и $\omega + \Omega$ 2) Сумма трёх синусоидальных с частотами ω и $\omega \pm \Omega$	Комбинационное второго порядка с частотой Ω	Цепь RC
5	Преобразование частоты	Сумма двух синусоидальных с частотами ω_1 и ω_2	Комбинационное второго порядка с частотой $\omega_1 - \omega_2$	Контур, настроенный на частоту $\omega_1 - \omega_2 = \omega_p$
6	Гетеродинирование	Сумма двух синусоидальных с частотами ω_1 и ω_2	Комбинационное второго порядка с частотой $\omega_1 - \omega_2$	Цепь RC

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

18.1*. В схеме рис. 18.5 напряжение $E = 60$ в, а сопротивление $R_{вн} = 300$ ом. Характеристика нелинейного элемента изображена на рис. 18.6. Найти ток в цепи и напряжение на нелинейном элементе.

18.2. Какое дополнительное сопротивление нужно включить последовательно с внутренним сопротивлением генератора в схеме рис. 18.5 для того, чтобы ток был равен 100 мА. Остальные условия соответствуют условию задачи 18.1.

18.3. Характеристика тиристового элемента изображена на рис. 18.7. Последовательно с ним введено постоянное сопротивление $R = 0,6 \text{ Мом}$;

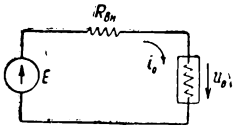


Рис. 18.5

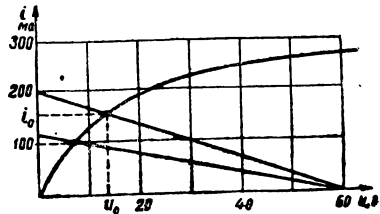


Рис. 18.6

цепь включена под постоянное напряжение 500 в. Найти ток в цепи и напряжение на тиристовом элементе.

18.4. Тиристовый элемент и активное сопротивление R , соединённые между собой параллельно (рис. 18.8), подключены к источнику постоянного напряжения.

Ток в неразветвлённой части цепи $i = 0,66 \text{ ма}$. Характеристика тиристового элемента изображена на рис. 18.7 (задача 18.3); сопротивление $R = 0,6 \text{ Мом}$. Найти токи i_1 и i_2 , а также напряжение источника E .

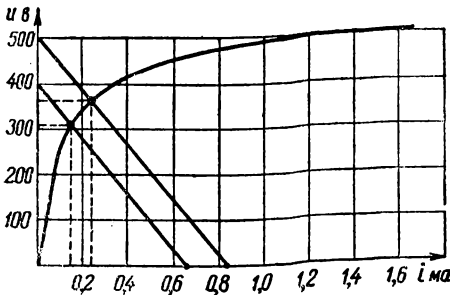


Рис. 18.7

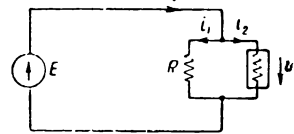


Рис. 18.8

18.5. Для стабилизации тока в цепи питания накала ламп применяется баретор, характеристика которого дана на рис. 18.9. Ток, который нужно стабилизировать, равен 1 а, а сопротивление нити накала равно 20 о.м. Выбрать напряжение источника питания, считая, что на участке характеристики от 8 до 12 в ток не меняется.

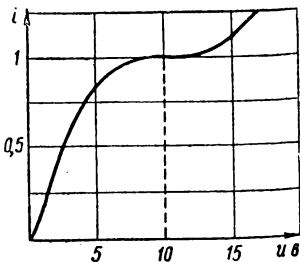


Рис. 18.9

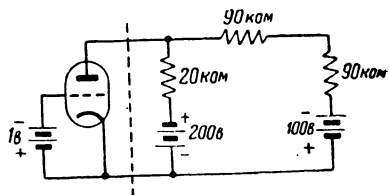


Рис. 18.10

18.6*. На рис 18.10 изображена часть схемы усилителя постоянного тока; данные схемы указаны на рисунке. Найти ток в анодной цепи и напряжение на аноде. Характеристика анодного тока лампы дана на рис. 18.11.

18.7. Последовательно с источником постоянного напряжения (рис. 18.12) включено постоянное сопротивление R и нелинейное сопротивление с характеристикой $i = au^2$, справедливой для положительных значений напряжения, т. е. при $u > 0$.

Найти выражение для напряжения на нелинейном элементе и объяснить стабилизирующее (по отношению к напряжению u на нелинейном элементе) действие такого нелинейного элемента.

18.8. В схеме рис. 18.13 нелинейный элемент имеет характеристику вида

$$i = a\sqrt{u},$$

справедливую для положительных значений тока, т. е. при $i > 0$.

Найти общее выражение для тока в цепи и объяснить стабилизирующее (по отношению к току) действие такого нелинейного элемента.

18.9*. Дана схема (рис. 18.14), в которой характеристика нелинейного элемента $u = f(i)$ аппроксимируется для положительных значений тока выражением

$$u = U_0 \operatorname{sh} qi.$$

Найти ток в цепи и напряжение на нелинейном элементе по следующим данным: $E = 10$ в; $R = 100$ ом; $U_0 = 10$ в; $q = 10 \frac{1}{\text{а}}$.

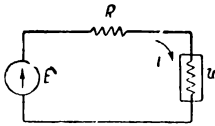


Рис. 18.12

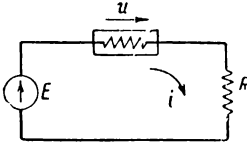


Рис. 18.13

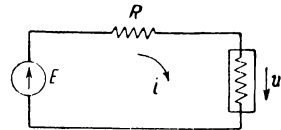


Рис. 18.14

18.10*. На вход двухполупериодного выпрямителя, характеристика которого (рис. 18.15) передается уравнением $i = a|u|$, подается синусоидальное напряжение

$$u = U_m \sin \Omega t.$$

Найти значение выпрямленного тока, а также амплитуду наибольшей подложной фильтрации переменной составляющей.

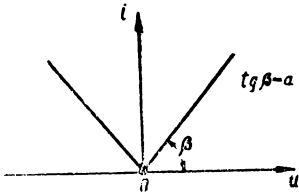


Рис. 18.15

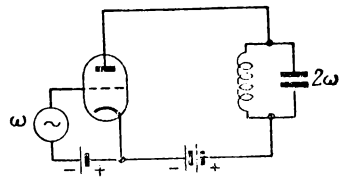


Рис. 18.16

18.11. На вход двухполупериодного выпрямителя с характеристикой $i = bu^2$ подается напряжение

$$u = U_m \sin \Omega t.$$

Найти значение выпрямленного тока и переменной составляющей и сравнить относительные значения переменной составляющей двух выпрямителей: 1) выпрямителя с характеристикой $i = bu^2$ и 2) выпрямителя с характеристикой $i = a|u|$ (задача 18.10).

18.12*. В схеме удвоителя частоты (рис. 18.16) характеристика лампы аппроксимируется ломаной прямой:

$$\begin{aligned} i_a &= 0 && \text{при } u_g < -5 \text{ в,} \\ i_a &= I_0 + Su_g && \text{при } u_g > -5 \text{ в.} \end{aligned}$$

Параметры лампы следующие:

$$S = 2 \frac{\text{мА}}{\text{в}}; \quad I_0 = SD(u_a - E'_a) = 10 \text{ мА.}$$

Можно считать, как уже указывалось, что на анодное напряжение не влияет изменение падения напряжения на нагрузке.

Рассчитать смещение E_g , при котором будут иметь место наилучшие условия для удвоения частоты, если амплитуда входного напряжения равна 6 в.

18.13. Найти по условиям задачи 18.12 напряжение частоты 2ω на настроенном анодном контуре, у которого $R_{\text{эк}} = 30 \text{ ком.}$

18.14. В анодную цепь лампы включён контур, настроенный на частоту 3ω ; ω — частота напряжения на сетке. В остальных условиях соответствуют условиям задачи 18.12.

Рассчитать:

1) смещение, при котором будут наилучшие условия для утроения частоты; 2) амплитуду тока третьей гармоники при этих условиях.

18.15. Спроектировать удвоитель частоты так, чтобы амплитуда второй гармоники выходного тока была связана линейной зависимостью с амплитудой входного напряжения; какой должна быть характеристика удвоителя при этих условиях?

18.16. Какой должна быть характеристика удвоителя частоты, чтобы в спектре выходного тока не содержалось побочных продуктов преобразования?

18.17. Какой должна быть характеристика утроителя частоты, чтобы в спектре выходного тока не содержалось побочных продуктов преобразования?

18.18. Как нужно менять в схеме (рис. 18.17) сопротивление $R(t)$ для того, чтобы ток менялся по закону

$$i = I_0 \sin 2\Omega t$$

при условии изменения напряжения генератора по закону

$$u = U_0 \sin \Omega t.$$

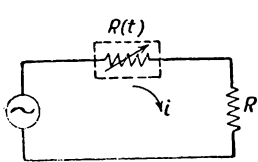


Рис. 18.17

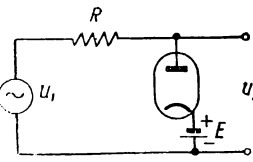


Рис. 18.18

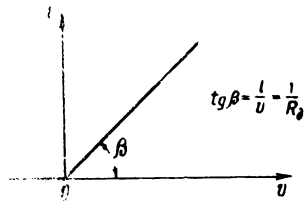


Рис. 18.19

18.19*. На сетку лампы, характеристика которой в широких пределах удовлетворительно передаётся формулой Крылова¹⁾

$$i = \frac{I_s}{2} (1 + \text{th } qu_g)$$

¹⁾ Это имеет место при очень низком анодном напряжении — порядка 10 в; в формуле в данном случае не учтён перенос начала координат.

подаётся синусоидальное напряжение, которое необходимо превратить в «трапецеидальное» с возможно более крутыми фронтами.

Найти аналитическое выражение закона изменения тока во времени и показать условие, при котором фронт будет крутым.

18.20*. Составить общую формулу для расчёта выходного напряжения параллельного диодного ограничителя (рис. 18.18), считая характеристику диода ломаной прямой (рис. 18.19).

Найти, кроме того, формулу для расчёта сопротивления R по заданным значениям входного и выходного напряжений, а также напряжения смещения E_g .

18.21*. На рис. 18.20 приведена схема двустороннего ограничителя мгновенных значений. Характеристика каждого диода дана на рис. 18.21. На вход схемы подаётся синусоидальное напряжение с амплитудой 50 в. Рассчитать напряжения E_1 и E_2 и сопротивление R так, чтобы напряжение на выходе имело трапецеидальную форму с высотой 10 в; максимальное отклонение не должно превышать 0,5 в (рис. 18.22).

18.22. На сетку лампы с нелинейной характеристикой

$$i_a = a_0 + a_1 u_g^i + a_2 u_g^2 + a_3 u_g^3 + \dots$$

подаётся синусоидальное напряжение

$$u_g = U_g \sin \omega t.$$

Выяснить, какими свойствами должна обладать характеристика лампы, чтобы постоянная составляющая не зависела от амплитуды приложенного напряжения.

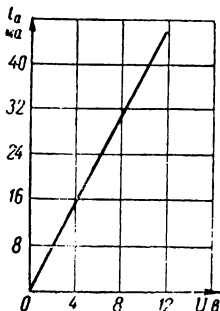


Рис. 18.21

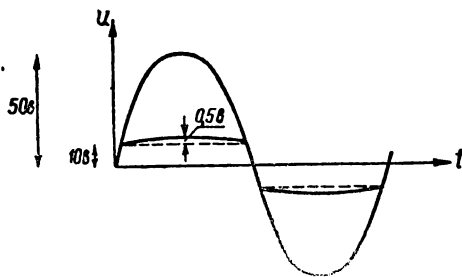


Рис. 18.22

18.23*. Вывести уравнение модуляционной характеристики

$$I_{a1} = f(u_2)$$

в схеме сеточной модуляции, если характеристика лампы передаётся уравнением

$$i = a_0 + a_1 u_g + a_2 u_g^2.$$

а

$$u_g = u_\omega + u_2 = U_\omega \sin \omega t + U_2 \sin \Omega t.$$

Рабочая точка совпадает с началом координат.

18.24. Объяснить, возможна ли амплитудная модуляция в схеме, содержащей нелинейный элемент с характеристикой

$$i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2,$$

причём рабочая точка соответствует $u = 0$.

18.25. Модулирующее напряжение состоит из двух синусоидальных колебаний

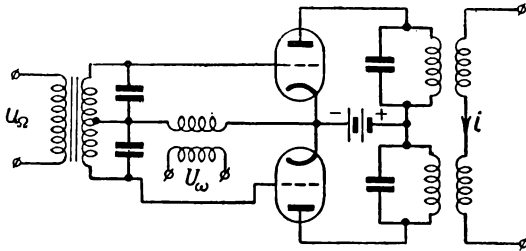


Рис. 18.23

$$u_2 = U_1 \sin \Omega_1 t + U_2 \sin \Omega_2 t;$$

характеристика лампы даётся уравнением второй степени:

$$i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2,$$

$$u = U_\omega \sin \omega t + u_2.$$

Рабочая точка соответствует условию: $u = 0$.

Найти выражение для мгновенного значения тех составляющих тока, от которых будет иметь место заметное падение напряжения на контуре, настроенном на частоту ω .

18.26. Какие члены степенного полинома должна содержать характеристика нелинейного элемента для того, чтобы имела место модуляция с одновременным подавлением несущей частоты?

18.27. Показать, что в схеме, изображённой на рис. 18.23, имеет место модуляция с одновременным подавлением несущей частоты.

18.28. Можно ли в схеме с одним нелинейным элементом получить модулированное колебание без посторонних продуктов преобразования путём видоизменения формы характеристики?

18.29. В схеме сеточной модуляции (рис. 18.24) характеристика лампы может быть аппроксимирована формулой Крылова:

$$a = \frac{I_s}{2} (1 + \text{th } q u_g).$$

На сетку лампы подаётся напряжение

$$u_g = u_\omega + u_{\text{св}} = U_\omega \sin \omega t + U_\Omega \sin \Omega t - E_g.$$

Вывести уравнение модуляционной характеристики, используя для этой цели формулу трёх ординат.

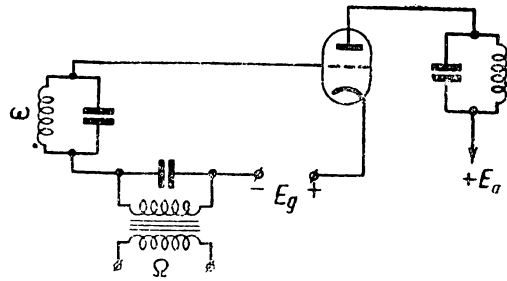


Рис. 18.24

18.30. Найти по формуле, полученной в предыдущей задаче, величину тока первой гармоники, если амплитуда напряжения высокой частоты составляет 75 в, а максимальное напряжение, развиваемое микрофонным трансформатором, равно 100 в. Напряжение смещения $|E_g| = 75$ в. Данные лампы: $S = 2 \frac{\text{ма}}{\text{в}}$; $I_s = 200$ ма.

18.31. Показать, что «середина прямолинейного участка» статической модуляционной характеристики (задача 18.29) при сеточной модуляции соответствует

условию

$$|E_g| \approx U_\omega.$$

18.32. В схеме рис. 18.25 генератор развивает низкочастотное напряжение $u = U_0 + U_\Omega \sin \Omega t$; проводимость G меняется по закону

$$G(t) = G_0(1 + m \sin \omega t).$$

Найти закон изменения тока в цепи.

18.33. По какому закону должно меняться сопротивление $R(t)$ (рис. 18.26) для создания высокочастотного колебания, модулированного по амплитуде одним тоном с частотой Ω ?

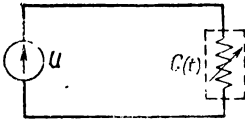


Рис. 18.25

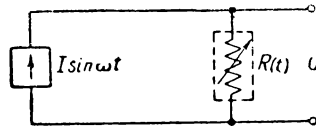


Рис. 18.26

18.34. На вход нелинейной системы подаётся амплитудно-модулированное колебание

$$\begin{aligned} u &= U_0(1 + m \sin \Omega t) \sin \omega t = \\ &= U_0 \sin \omega t + \frac{mU_0}{2} \cos(\omega - \Omega)t - \frac{mU_0}{2} \cos(\omega + \Omega)t. \end{aligned}$$

Выяснить, какие члены в уравнении степенного полинома приводят к появлению комбинационных колебаний второго порядка со звуковой частотой Ω ?

18.35*. Объяснить, не производя математических выкладок, почему детектирование амплитудно-модулированного колебания с подавленной несущей

$$u = U_0 m \sin \Omega t \sin \omega t$$

не может привести к появлению звуковой частоты Ω ?

18.36*. Объяснить без математических выкладок, почему возможно детектирование амплитудно-модулированных колебаний с подавленной одной боковой, т. е.

$$u = U_0 \sin \omega t + \frac{mU_0}{2} \cos(\omega - \Omega)t.$$

18.37. Характеристикой детектирования называется зависимость тока детектирования I_d от амплитуды высокой частоты U_ω . Током детектирования является постоянная составляющая (по отношению к высокой частоте) минус ток покоя I_{00} (т. е. ток при отсутствии колебаний высокой частоты).

Вывести выражение характеристики детектирования диодного детектора, если характеристика лампы аппроксимируется уравнением

$$i = I_{00} e^{a u}.$$

Считается, как и в других задачах, что изменение напряжения на нагрузке не влияет на вид характеристики.

При выводе воспользоваться формулой трёх ординат.

Полученное выражение, далее, рекомендуется упростить для случая малых амплитуд, т. е. при условии $a U_\omega \ll 1$.

18.38. Характеристика нелинейного элемента, используемого в схеме детектирования, аппроксимируется полиномом второй степени

$$i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2.$$

Найти выражение для характеристики детектирования.

18.39. Вывести выражение для характеристики детектирования в схеме анодного детектора (рис. 18.27), если характеристику лампы можно аппроксимировать формулой Крылова.

Рекомендуется воспользоваться формулой трёх ординат.

18.40. На вход детектора, характеристика детектирования которого передаётся формулой (задача 18.38)

$$I_d = \frac{a_2 U^2}{2}$$

подаётся напряжение, модулированное двумя частотами:

$$u_{\omega} = U_0 (1 + m_1 \sin \Omega_1 t + m_2 \sin \Omega_2 t) \sin \omega t.$$

Найти соотношение между полезными и вредными продуктами в виде

$$K_{\text{нп}} = \sqrt{\frac{\sum I_{\text{зад}}^2 + \sum I_{\text{комб}}^2}{I_1^2 + I_2^2}}$$

Полученное выражение упростить для двух частных случаев: 1) $m = 0$, 2) $m_1 = m_2 = m$.

18.41. Характеристика детектора изображается ломаной прямой; рабочая точка соответствует $\theta = 90^\circ$. Найти выражение для характеристики детектирования и объяснить, почему при такой характеристике детектирование не сопровождается искажениями.

18.42. В схеме односеточного преобразователя частоты (рис. 18.28) характеристика лампы может быть представлена полиномом второй степени

$$i_a = a_0 + a_1 u_g + a_2 u_g^2.$$

Найти выражение характеристики преобразования, т. е. зависимость амплитуды тока I_p разностной частоты $(\omega_1 - \omega_2)$ от амплитуд входных напряжений U_1 и U_2 . Рабочая точка соответствует началу координат, т. е. $E_g = 0$.

18.43. Какой должна быть характеристика преобразователя частоты, чтобы в спектре выходного тока не содержалось побочных продуктов преобразования?

18.44*. На сетку лампы (рис. 18.28), характеристика которой передаётся формулой Крылова, подаётся смещение E_g , напряжение сигнала высокой частоты $u_c = U_c \sin \omega_c t$ и напряжение гетеродина $u_2 = U_2 \sin \omega_2 t$. Найти выражение характеристики преобразователя $I_p = f(U_c)$ при условии, что $U_c \gg U_2$.

18.45*. На вход нелинейной системы, характеристика которой передаётся рядом

$$i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + \dots,$$

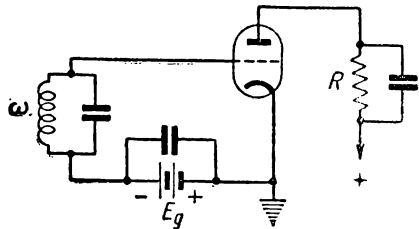


Рис. 18.27

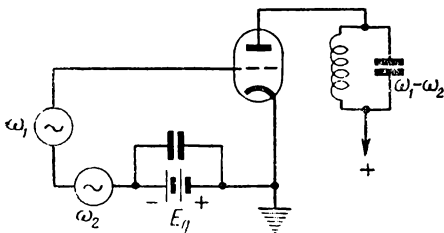


Рис. 18.28

подаётся последовательность прямоугольных импульсов. Доказать, что на выходе нелинейной системы форма каждого импульса также будет прямоугольной при любом виде характеристики; изменится только высота импульса.

§ 19. Переходные процессы в нелинейных и параметрических системах первого порядка

Изучение переходных процессов в нелинейных системах нельзя проводить методами, основанными на использовании принципа суперпозиции (метод интеграла Фурье, операционный метод, метод интеграла Дюамеля, метод наложения свободных и установившегося режимов и др.) и, таким образом, единственным методом остаётся метод дифференциальных уравнений. Нелинейные дифференциальные уравнения, в том числе и первого порядка, далеко не всегда интегрируются в известных функциях и в инженерных расчётах, поэтому приходится ограничиваться приближёнными решениями.

В настоящем параграфе будут рассмотрены только системы первого порядка, т. е. системы, содержащие всего один независимый накопитель энергии (индуктивность, ёмкость). Эти системы описываются дифференциальными уравнениями первого порядка. В качестве энергоёмкого элемента (конденсатора, катушки) может выступать как линейный, так и нелинейный элемент.

Характеристики нелинейных элементов здесь принимаются однозначными; для изучения систем, содержащих элементы с неоднозначными характеристиками, должны применяться другие методы и приёмы.

При изучении переходных процессов задача обычно формулируется так: задана схема (т. е. известны все элементы схемы) и задано напряжение (ток), питающее схему. Нужно найти закон изменения напряжения (тока) в указанном участке цепи. Форма внешнего воздействия может быть любой.

Решение поставленной задачи содержит два этапа: составление дифференциального уравнения и его решение.

Составление нелинейных дифференциальных уравнений обычно проводится так же, как и составление линейных дифференциальных уравнений, т. е. на основе законов Кирхгофа.

Если нелинейными элементами являются индуктивность или ёмкость, нужно пользоваться уже известными (§ 16) соотношениями:

$$u_L = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} [L(i) \cdot i_L] = L(i) \frac{di_L}{dt} + i_L \frac{dL(i)}{dt}, \quad (19.1)$$

$$i_C = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} [C(u) \cdot u_C] = C(u) \frac{du_C}{dt} + u_C \frac{dC(u_C)}{dt}. \quad (19.2)$$

Здесь Φ — магнитный поток в веберах (вольтсекундах),
 q — электрический заряд в кулонах (амперсекундах).

При составлении дифференциальных уравнений систем, содержащих активные нелинейные элементы, нужно принимать во внимание форму задания вольтамперной характеристики. Если элемент управляется напряжением и вольтамперная характеристика задана в виде $i = f(u)$, дифференциальное уравнение нужно составить относительно напряжения; если элемент управляется током и вольтамперная характеристика задана в виде $u = \varphi(i)$, дифференциальное уравнение нужно составить относительно тока.

Так как решения нелинейных дифференциальных уравнений обычно удаётся получить не в виде формул, а в виде графиков, дифференциальные уравнения с самого начала рекомендуется приводить к безразмерному виду.

В качестве масштабов для приведения уравнений к безразмерному виду следует принимать либо постоянные системы, либо постоянные внешнего воздействия. Например, в качестве масштаба времени целесообразно принимать или постоянные времени цепи $(RC, \frac{L}{R})$, или период внешнего воздействия $(T = \frac{2\pi}{\Omega})$; в качестве масштаба напряжения (тока) целесообразно выбирать либо установившееся (или начальное) значение тока, либо амплитуду внешнего воздействия и т. п. Выбор рационального масштаба во многом способствует облегчению анализа результатов.

Для решения нелинейных дифференциальных уравнений 1-го порядка предложено довольно много приближённых методов.

В первую очередь следует назвать следующие методы:

1) метод непосредственного интегрирования (метод подбора аппроксимирующей функции для возможности непосредственного интегрирования);

2) метод линеаризации дифференциальных уравнений (метод аппроксимации ломаной прямой),

3) метод изоклин (метод поля направлений),

4) метод фазовой плоскости,

5) методы численного интегрирования и другие методы.

Здесь будут рассмотрены решения задач первыми четырьмя методами.

Выбор того или иного метода определяется целым рядом соображений. В первую очередь эти соображения связываются с формой внешнего воздействия.

Внешние воздействия условно могут быть классифицированы следующим образом:

1) внешнее напряжение (ток) равно нулю — свободный режим,

2) внешнее напряжение является постоянным или медленно меняющимся,

3) внешнее напряжение представляет собой конечную сумму синусоидальных (любых частот) колебаний,

4) внешнее напряжение имеет импульсный характер.

При изучении свободного режима очень часто удаётся довести решение до конца на основе первого метода — метода непосредственного интегрирования. При этом следует иметь в виду, что, как правило, приходится мириться с тем, что искомая зависимость получается не в виде, например, напряжения в функции времени — $u(t)$, а в виде обратной функции, т. е. времени в функции напряжения — $(t)u$ (см., например, задачу 19.14).

При изучении свободного режима можно пользоваться также любым другим методом и, в частности, методом фазовой плоскости.

В равной степени любым из этих методов можно пользоваться при изучении нелинейных систем, находящихся под воздействием постоянного или медленно меняющегося напряжения (стабилизация).

Изучение переходных процессов в нелинейных системах, находящихся под внешним воздействием любой формы не удаётся проводить методами непосредственного интегрирования в фазовой плоскости.

В этих задачах нужно пользоваться методом линеаризации дифференциальных уравнений, а также можно пользоваться методом изоклин и любыми методами численного интегрирования.

В настоящем параграфе одна часть задач посвящена вопросам методики составления дифференциальных уравнений и приведения их к безразмерному виду. Другая часть задач посвящена решению нелинейных дифференциальных уравнений, а также и линейных дифференциальных уравнений, но методами, применяемыми для решения нелинейных уравнений. Решение линейных уравнений „нелинейными методами“ облегчает усвоение последних.

Напомним вкратце, как пользоваться методами¹⁾ линеаризации дифференциальных уравнений, методом изоклин и методом фазовой плоскости.

1. Метод линеаризации дифференциальных уравнений.

В основе метода лежит аппроксимация характеристики нелинейного элемента ломаной прямой; для каждого участка характеристики составляется своё дифференциальное уравнение, являющееся линейным для своего участка. Линейные дифференциальные уравнения решаются известными методами; на общих границах двух участков начальные условия „припасовываются“ (этот метод потому иногда и называют методом „припасовывания“).

Таким путём решается задача исследования переходного процесса. Если же необходимо выяснить только установившийся процесс, то в местах „стыков“ накладываются условия равенства напряжений на конденсаторах (или токов в катушках), что доставляет уравнения для определения этих напряжений (или токов).

¹⁾ Относительно метода непосредственного интегрирования нужно напомнить только обращение функции и аргумента.

Примеры изучения переходных процессов методом линеаризации дифференциальных уравнений даны в задачах 19.19 и 19.20.

2. Метод изоклин

Дифференциальное уравнение первого порядка, записанное в виде

$$\frac{dx}{d\tau} = f(x, \tau), \quad (19.3)$$

определяет зависимость между координатами точки (x, τ) и наклоном искомой интегральной кривой $x = \varphi(\tau)$. Уравнение интегральной кривой $x = \varphi(\tau)$ нам неизвестно; если мы зададимся постоянным углом наклона, тангенс которого равен $\frac{dx}{d\tau} = \kappa$, то уравнение $f(x, \tau) = \kappa$ даст геометрическое место точек, через которые интегральная кривая проходит под данным углом. Если например, $\kappa = 1$, то интегральная кривая будет проходить через все точки $f(x, \tau) = 1$ под углом 45° . Нанося, таким образом, на кривые $f(x, \tau) = \kappa$ засечки соответствующих направлений, мы получим поле направлений, по которым может проходить интегральная кривая.

Наложение начальных условий позволяет из множества направлений выбрать одно, соответствующее данному начальному условию.

Методика графического построения интегральной кривой подробно изложена в решении задачи 19.21.

Примеры решения дифференциальных уравнений первого порядка методом изоклин даны в задачах 19.21 — 19.26.

3. Метод фазовой плоскости

Метод фазовой плоскости основан на использовании зависимости

$$\frac{dx}{d\tau} = f(x). \quad (19.4)$$

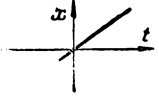

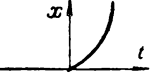
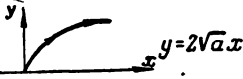
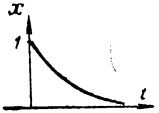
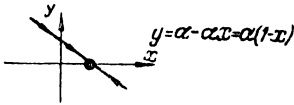
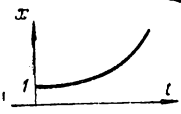
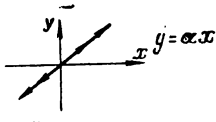
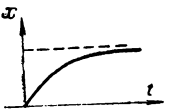
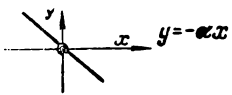
т. е. зависимости скорости движения точки от координаты точки (скорость изменения, например, напряжения от значения напряжения и т. п.).

Выражение (19.4) называют „фазовым изображением“ или „фазовым портретом“.

Располагая фазовым изображением, можно косвенным путём¹⁾ судить о характере самого движения, т. е. судить о характере зависимости $x = \varphi(\tau)$, являющейся искомой интегральной кривой.

¹⁾ Разработаны и „прямые“ пути перехода от фазового изображения к интегральной кривой; эти приёмы основаны на численных геометрических построениях и здесь не рассматриваются (см., например, „Физические основы электротехники“, Госэнергоиздат, 1950 г., стр. 469 — 470),

Основные виды движений в линейных системах первого порядка
и соответствующие им фазовые изображения

№ пп.	Вид движений (временная картина — оригинал)	Фазовое изображение
1	 $x = vt$	 $y = v$
2	 $x = at^2$	 $y = 2\sqrt{a}x$
3	 $x = e^{-\alpha t}$	 $y = \alpha - \alpha x = \alpha(1-x)$
4	 $x = e^{\alpha t}$	 $y = \alpha x$
5	 $x = 1 - e^{-\alpha t}$	 $y = -\alpha x$

Координатную плоскость с координатами $y = \frac{dx}{d\tau}$ и x называют фазовой плоскостью, а точку на этой плоскости (y, x) называют изображающей точкой.

В верхней полуплоскости (рис. 19.1) скорость $v = \frac{dx}{d\tau}$ всегда положительна и, следовательно, с течением времени τ величина x будет расти. Таким образом, направление движения в верхней полуплоскости всегда „слева направо“, т. е. по часовой стрелке; в нижней же полуплоскости — всегда „справа налево“, т. е. тоже по часовой стрелке. Это обстоятельство позволяет легко находить устойчивые установившиеся значения.

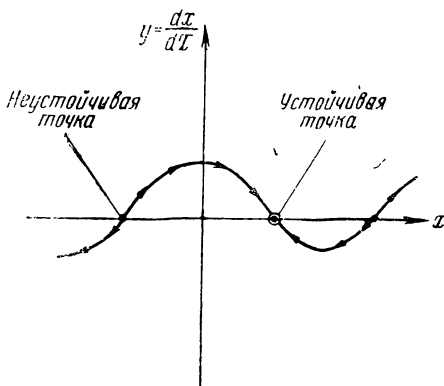


Рис. 19.1

При изучении систем первого порядка методом фазовой плоскости вообще отпадает необходимость в решении дифференциальных уравнений, так как фазовое изображение описывается алгебраическими уравнениями.

Наиболее характерные виды движений в системах первого порядка и их фазовые изображения даны для справок в табл. 19.1. Эти движения характерны для линейных систем и отступления от них и определяют нелинейность.

В задачах 19.27 — 19.33 даны примеры использования метода фазовой плоскости для изучения дифференциальных уравнений первого порядка.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

19.1*. Характеристика нелинейного элемента в схеме рис. 19.2 задана в виде функции $i = f(u)$. Составить дифференциальное уравнение как относительно напряжения на нелинейном элементе u , так и относительно напряжения на конденсаторе u_C . Показать, кроме того, как найти ток в цепи.

19.2. В схеме рис. 19.3 характеристика нелинейного элемента задана в виде функции $i = f(u)$. Составить дифференциальное уравнение для последовательного расчёта u , u_C и тока i .

19.3. Характеристика диода в схеме рис. 19.4 выражается зависимостью $i = f(u)$. Составить дифференциальные уравнения для расчёта напряжения на конденсаторе u_C и напряжения на диоде u .

19.4. В схеме рис. 19.5 характеристика нелинейного элемента (электрической дуги) задана в виде функции $u = \varphi(i)$. Составить дифференциальное уравнение для расчёта тока i .

19.5. В схеме рис. 19.6 характеристика нелинейного элемента задана в виде функции $u = \varphi(i)$. Составить дифференциальное уравнение.

19.6. Характеристика нелинейного элемента в схеме рис. 19.7 задана в виде функции $\varphi(i)$. Составить дифференциальное уравнение для схемы.

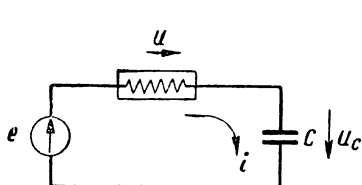


Рис. 19.2

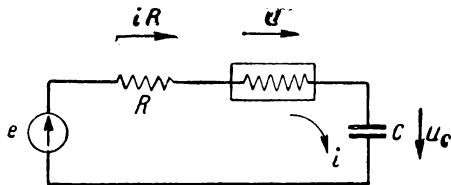


Рис. 19.3

19.7*. Нелинейный элемент в схеме рис. 19.8 задан характеристикой вида $i = f(u)$. Составить дифференциальное уравнение схемы.

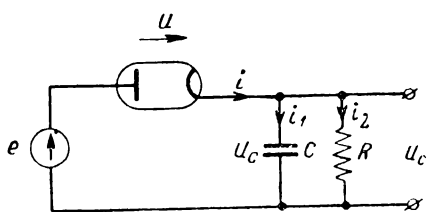


Рис. 19.4

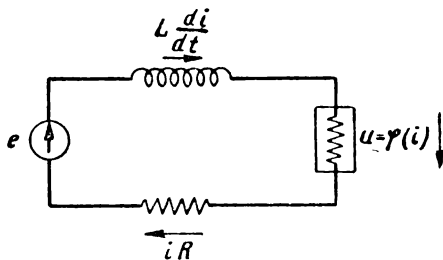


Рис. 19.5

19.8. В схеме рис. 19.9 нелинейный элемент управляется напряжением и его характеристика имеет вид $i = f(u)$. Составить дифференциальное уравнение в общем виде и затем для частного случая экспоненциальной характеристики, т. е. при $i = I_0 e^{au}$.

19.9. В схеме рис. 19.10 нелинейный элемент задан характеристикой $u = \varphi(i)$. Составить дифференциальное уравнение.

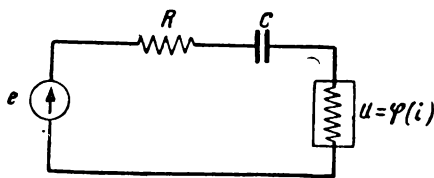


Рис. 19.6

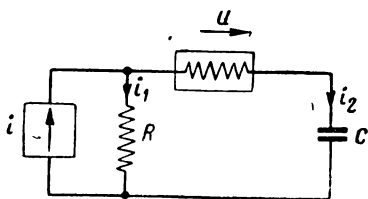


Рис. 19.7

19.10*. В схеме рис. 19.11 нелинейный конденсатор задан характеристикой $C(u_C)$. Составить дифференциальное уравнение в общем виде и затем для частного случая, когда $C(u_C) = C_0(1 - a u_C)$.

19.11. В схеме рис. 19.12 нелинейная катушка задана характеристикой $L(i)$. Составить дифференциальное уравнение в общем виде и затем для частного случая, когда $L(i) = L_0(1 - bi)$.

19.12*. Дифференциальное уравнение схемы рис. 19.8 имеет вид (задача 19.7)

$$\frac{d}{dt} f(u) + \frac{1}{L} u = \frac{1}{L} E.$$

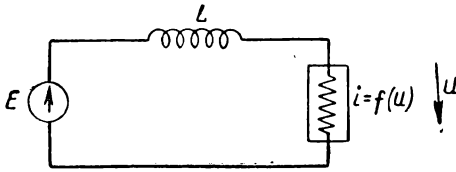


Рис. 19.8

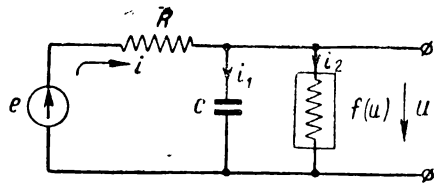


Рис. 19.9

Характеристика нелинейного элемента $i = f(u)$ показана на рис. 19.13 и в интересующем участке может быть аппроксимирована как полиномом второй степени, так и экспоненциальной функцией. Составить дифференциальные уравнения для обоих случаев и решить, какой функцией удобнее пользоваться с точки зрения простоты интегрирования дифференциального уравнения,

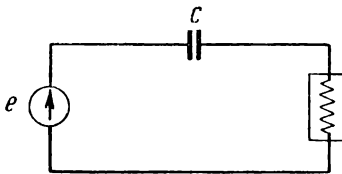


Рис. 19.10

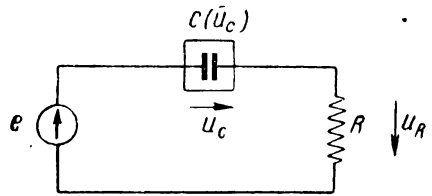


Рис. 19.11

19.13*. В схеме рис. 19.8 сопротивление меняется по закону $R = R_0(1 + \beta u)$; такой закон изменения сопротивления соответствует вольтамперной характеристике вида

$$i = I_0 \ln(1 + \beta u),$$

где $I_0 = \frac{1}{\beta R_0}$ (рис. 19.14).

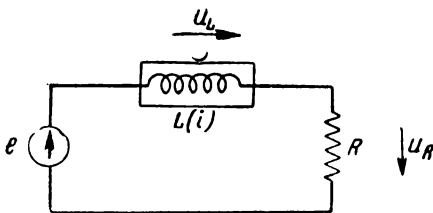


Рис. 19.12

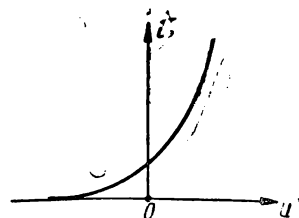


Рис. 19.13

Найти закон изменения напряжения на нелинейном элементе при подаче на схему рис. 19.8 постоянного напряжения E и сравнить полученное решение с решением для линейной цепи, т. е. при $\beta = 0$.

19.14. В схеме рис. 19.8 сопротивление управляется напряжением по закону

$$R = \frac{R_0}{1 + q^2 u^2}.$$

Найти выражение для вольтамперной характеристики $i = f(u)$ и затем найти в общем виде закон изменения напряжения на нелинейном элементе во времени при подаче на вход постоянного напряжения E . Проверить найденное выражение для случая $q = 0$, т. е. для линейной системы.

19.15*. Найти закон, по которому совершается свободный процесс в схеме рис. 19.15, если характеристика нелинейного элемента выражается функцией

$$L = L_0 (1 - pi).$$

Начальные условия таковы: при $t = 0$ $i = I_0$.

Полученный результат представить в виде двух графиков: одного для линейной цепи, т. е. при $p = 0$, и второго для не-

линейной цепи при $p = \frac{1}{2I_0}$.

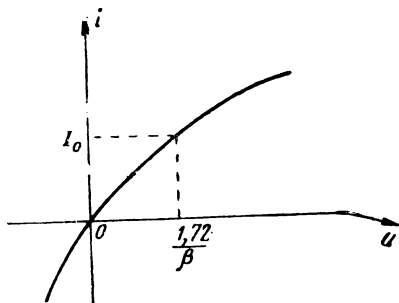


Рис. 9.14

19.16. В схеме рис. 19.16 конденсатор, заряженный до напряжения E , разряжается на сопротивление R . Ёмкость конденсатора зависит от напряжения на нём: эта зависимость выражается формулой: $C = C_0 (1 - qu)$.

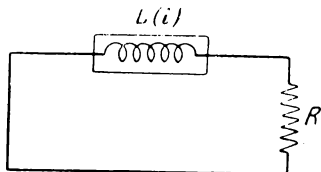


Рис. 19.15

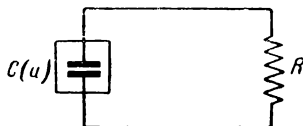


Рис. 19.16

Найти закон, по которому совершаются свободные колебания, т. е. закон разряда конденсатора.

Полученный результат представить в виде двух графиков: 1) для линейной цепи, т. е. при $q = 0$; 2) для нелинейной цепи при $q = \frac{1}{2E}$.

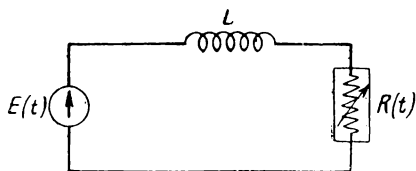


Рис. 19.17

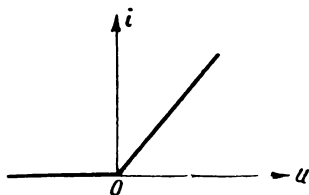


Рис. 19.18

19.17. Найти закон изменения напряжения на нелинейном элементе в схеме рис. 19.2 в свободном режиме. Характеристику нелинейного элемента принять в виде укороченного полинома третьей степени $i = \frac{1}{R} (u - q^2 u^3)$.

Начальные условия: при $t = 0$, $u = E$.

19.18*. Показать в общем виде, что свободный режим в системах первого порядка с однозначными характеристиками не может быть колебательным.

19.19*. В схеме рис. 19.4 напряжение e меняется по закону $e = U_m \sin \Omega t$.

Характеристика диода аппроксимируется ломаной прямой (рис. 19.18):

$$\text{при } u < 0 \quad i = 0,$$

$$\text{при } u > 0 \quad i = Su.$$

Реакция нагрузки, смещающая рабочую точку, во внимание не принимается.

Найти закон изменения напряжения на конденсаторе $u_C(t)$ в переходном режиме в течение первого периода.

Полученный результат иллюстрировать графиком при следующих данных:

$$R = 10^3 \text{ ом}, C = 1 \text{ мкф}; \Omega = 10^3 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}; S = 1 \frac{\text{ма}}{\text{в}}.$$

19.20*. В предыдущей задаче 19.19 были найдены уравнения переходного процесса для схемы рис. 19.4. По этим уравнениям можно найти и кривые установившегося режима, выполняя последовательно построения одного периода колебаний за другим. Однако только для установившегося режима эту задачу можно решить более простым путём, имея в виду, что напряжение на конденсаторе не может меняться скачком и в точках 0 (или 2π) и π напряжение «слева» будет равно напряжению «справа».

В настоящей задаче предлагается найти закон изменения напряжения на конденсаторе схемы рис. 19.4 в установившемся режиме.

19.21*. Решить методом изоклин дифференциальное уравнение $\frac{dx}{d\tau} = -\frac{\tau}{x}$

с начальными условиями: при $\tau = 0$ $x = x_0$.

19.22. Решить методом изоклин следующие простейшие дифференциальные уравнения:

$$1) \quad \frac{dx}{d\tau} = 1 - x; \quad \text{при } \tau = 0 \quad x = 0;$$

$$2) \quad \frac{dx}{d\tau} + x = 0; \quad \text{при } \tau = 0 \quad x = 1.$$

19.23*. На линейную цепь, состоящую из последовательно соединённых R и C , включено синусоидальное напряжение $u = U \sin \Omega t$.

Найти уравнение изоклины при следующих данных:

$$\Omega = 10^3 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}; R = 10^3 \text{ ом}; C = 1 \text{ мкф}; U = 10 \text{ в}.$$

19.24*. Показать путь решения методом изоклин нелинейного дифференциального уравнения (задача 19.17)

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{RC} U (1 - q^2 u^2) = 0.$$

19.25*. Найти уравнение изоклины дифференциального уравнения (задача 19.15)

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L_0} \frac{i}{1 - 2pi} = 0.$$

19.26*. Показать в общем виде путь решения методом изоклин нелинейного дифференциального уравнения

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{RC} u + \beta u^3 = \frac{U_0}{RC} \sin \omega t.$$

19.27. Найти фазовые изображения для следующих простейших видов движения:

1) $x = vt$;

2) $x = at^2$;

3) $x = e^{-at}$;

4) $x = e^{at}$;

5) $x = 1 - e^{-at}$.

19.28*. Показать в общем виде, что устойчивыми точками на фазовой плоскости являются точки, для которых выполняются два условия:

$$1) y = \frac{dx}{dt} = 0 \text{ и } 2) \frac{dv}{dx} < 0 \text{ (рис. 19.1).}$$

19.29*. На схему рис. 19.9 (задача 19.8) подаётся постоянное напряжение E . По условиям задачи 19.8 построить качественно фазовое изображение для напряжения на конденсаторе, а также найти установившееся значение напряжения на конденсаторе при следующих данных схемы:

$$E = 0,2 \text{ в}; I_0 = 1 \text{ мА}; R = 100 \text{ Ом}; a = 10 \frac{1}{\text{с}}.$$

19.30*. На схему рис. 19.11 подаётся постоянное напряжение.

Построить качественно фазовое изображение изменения напряжения на конденсаторе и найти его установившееся значение. Условия задачи в остальном соответствуют условиям задачи 19.10.

19.31. В схеме рис. 19.8 вольтамперная характеристика задана в виде функции (задача 19.13)

$$i = I_0 \ln(1 + \beta u).$$

Найти выражение фазовой траектории для напряжения на нелинейном элементе, если на вход подано постоянное напряжение $E = 1 \text{ в}$ и коэффициент $\beta = 2 \frac{1}{\text{в}}$.

Найти, кроме того, установившиеся значения напряжения на нелинейном элементе u_0 и аналитически проверить их на устойчивость.

19.32*. Показать в общем виде, как по известному уравнению фазовой траектории $y = \frac{dx}{dt} = f(x)$ можно найти время τ , за которое изображающая точка перейдёт из x_1 в x_2 .

19.33*. За какое время напряжение на нелинейном элементе в схеме рис. 19.8 (задача 19.31) возрастёт от нуля до значения $\frac{E}{2}$. Условия задачи в остальном совпадают с условиями задачи 19.31.

§ 20. Генерация синусоидальных колебаний нелинейными системами. Условия самовозбуждения

1. В настоящем параграфе из всего комплекса вопросов, относящихся к генерации синусоидальных колебаний, рассматриваются только вопросы возникновения колебаний — условия самовозбуждения. По общей классификации эти вопросы могут быть названы так: начало свободных процессов в системах второго и более высоких порядков.

Все схемы генераторов, с точки зрения составления эквивалентных схем и их математического расчёта, удобно делить на две группы: 1) генераторы с усилителями (генераторы с внешней обратной связью) и 2) генераторы, в которых используется падающий участок характеристики нелинейного элемента (генераторы с внутренней обратной связью).

2. Обобщённая схема генератора синусоидальных колебаний с усилителем дана на рис. 20.1.

Буквой \mathcal{U} в схеме обозначен усилитель, осуществляющий баланс „амплитуд“, а буквой β — линейное устройство, предназначенное для осуществления необходимого „баланса фаз“, а иногда и для фильтрации гармоник.

В реальных схемах усилитель \mathcal{U} содержит элементы, влияющие на фазовые соотношения, а линейное устройство β — элементы, влияющие на амплитудные соотношения. С этой точки зрения разделение схемы на два самостоятельных элемента — усилитель и фазобалансную цепь — конечно, является условным.

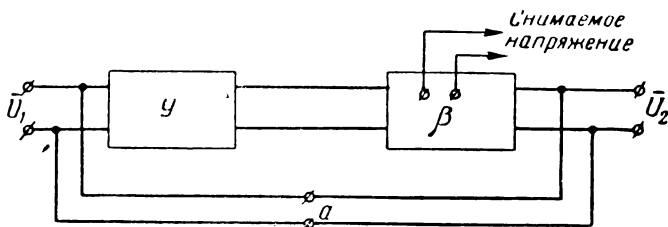


Рис. 20.1

Цепь a представляет собой цепь обратной связи, соединяющей выход \bar{U}_2 со входом \bar{U}_1 . Когда цепь обратной связи разомкнута, связь между выходным напряжением \bar{U}_2 и входным напряжением \bar{U}_1 даётся комплексным коэффициентом передачи:

$$K(i\omega) = \frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1}.$$

Если будут выполнены так называемые условия баланса амплитуд

$$K(\omega_0) = \frac{U_2}{U_1} > 1 \quad (20.1)$$

и баланса фаз

$$\varphi_{U_2 \rightarrow U_1}(\omega) = 2n\pi, \quad (20.2)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$, то при замыкании цепи обратной связи будет иметь место генерация колебаний с основной частотой ω_0 , на которой выполняется условие баланса фаз.

Для выяснения условий возникновения генерации, т. е. условий самовозбуждения, генератор нужно рассматривать как линейное устройство¹⁾ с разорванной цепью обратной связи. Проверку условия баланса амплитуд и фаз во всех тех случаях, когда аналитические выкладки оказываются громоздкими, рекомендуется проводить с привлечением теории четырёхполюсников (ч. 1, § 6) и теорем об эквивалентных генераторах (ч. 1, § 9).

При изучении условий самовозбуждения сначала следует выяснить условие баланса фаз, а затем уже условие баланса амплитуд. Баланс фаз будет иметь место только на одной частоте и при подстановке этой частоты в условие баланса амплитуд, выражение последнего существенно упростится.

Необходимо помнить, что в усилителе на электронной лампе с заземлённым катодом, напряжение на нагрузке, если она активна, повернуто на 180° относительно входного (сеточного) напряжения; в аналитических выкладках это обстоятельство учитывается знаком минус.

При составлении эквивалентной схемы усилителя с разорванной цепью обратной связи необходимо учитывать входное сопротивление усилителя. В ламповых схемах при полном отсутствии сеточных токов активное сопротивление мало отличается от бесконечности; входная ёмкость, вообще говоря, является малой и необходимость её учёта зависит от данных конкретной схемы.

3. Обобщённая эквивалентная схема генератора синусоидальных колебаний, построенного на использовании падающего участка характеристики нелинейного элемента, показана на рис. 20.2.

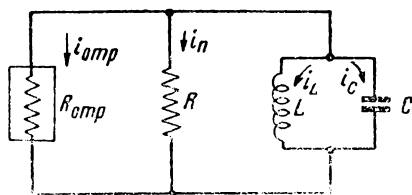


Рис. 20.2

¹⁾ Возможность линейной трактовки для выяснения условий самовозбуждения вытекает из того, что процесс генерации начинается с малых амплитуд, для которых любая характеристика может считаться линейной.

В этой схеме активные сопротивления контура выделены в параллельную ветвь; таким образом, колебательный контур L, C является консервативным контуром — контуром без потерь. Такой контур будет поддерживать незатухающие синусоидальные колебания неограниченно долгое время. Для того, чтобы это имело место, необходимо осуществить полную компенсацию потерь R при помощи отрицательного сопротивления R_{omp} , т. е. потребовать выполнения условия

$$\left| \frac{1}{R_{omp}} \right| > \frac{1}{R}, \quad (20.3)$$

которое и является условием самовозбуждения для генераторов этого типа.

Условие (20.3) можно записать и так:

$$|R_{omp}| < R. \quad (20.4)$$

4. Условия самовозбуждения можно находить также по дифференциальному уравнению схемы.

В системах второго порядка описываемых линейными дифференциальными уравнениями вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0x = 0, \quad (20.5)$$

самовозбуждение будет иметь место при выполнении условий:

$$\left. \begin{array}{l} a_1 < 0 \\ a_0 > 0 \end{array} \right\}. \quad (20.6)$$

Условия (20.6) являются частным случаем критерия Рауса-Гурвица для дифференциальных уравнений n -го порядка.

Для нелинейных дифференциальных уравнений, в которых коэффициенты a_1 и a_0 могут быть функциями независимой переменной x , условия (20.6) также применимы, но после приведения нелинейных дифференциальных уравнений к линейным (сноска на стр. 200), т. е.

$$\left. \begin{array}{l} a_1(x) < 0 \\ a_0(x) > 0 \end{array} \right\}_{x \rightarrow 0}. \quad (20.7)$$

В системах порядка выше второго, характеристические уравнения которых имеют вид

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0$$

условия самовозбуждения нужно определять по общему критерию Рауса—Гурвица.

С этой целью нужно составить определитель $(n - 1)$ -го порядка, у которого диагональные¹⁾ элементы представляют собой коэффициенты a с возрастающими справа налево индексами. Горизонтальные строки заполняются коэффициентами: справа от диагонали—с возрастающими индексами, а слева—с убывающими. Места, остающиеся свободными, заполняются нулями.

Для устойчивости необходимо, чтобы все главные миноры²⁾ определителя и свободный были положительны.

Для самовозбуждения, очевидно, нужно, чтобы один из главных миноров был меньше нуля.

Определитель, например, уравнения 6-го порядка записывается в виде:

$$\begin{vmatrix} a_5 & a_6 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix}$$

Для дифференциального уравнения, например, третьего порядка

$$a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$$

условие самовозбуждения при $a_0 > 0$ будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 < 0. \quad (20.8)$$

5. В настоящем параграфе задачи расположены в следующей последовательности.

Первая группа задач (20.1—20.16) посвящена аналитическому выяснению условий самовозбуждения на основе представления генераторной схемы в виде усилителя с разорванной цепью обратной связи.

¹⁾ Здесь имеется в виду диагональ, соединяющая левый верхний угол с правым нижним углом.

²⁾ Главные миноры, напоминаем, образуются отбрасыванием m нижних строк и m правых столбцов, где $m = 0, 1, 2, \dots, n - 2$.

Вторая группа задач (20.17—20.18) посвящена выяснению условий самовозбуждения в генераторах, построенных на использовании падающего участка вольтамперной характеристики.

В третьей группе задач (20.19—20.22) решение должно содержать два этапа: 1) составление дифференциального уравнения по заданной схеме и 2) нахождение условий самовозбуждения по критерию Рауса—Гурвица.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

20.1*. Найти условия самовозбуждения для схемы лампового генератора с индуктивной связью, с контуром в цепи сетки (рис. 20.3; в схеме опущены элементы питания, как не влияющие на цепи высокой частоты).

При выводе условий самовозбуждения допустимо пренебречь реакцией анода, т. е. считать, что внутреннее сопротивление лампы R_i значительно больше сопротивления в анодной цепи. Кроме того, допустимо пренебречь сеточными токами, т. е. считать, что входное сопротивление лампы равно бесконечности.

20.2. Найти величину добротности колебательного контура в схеме лампового генератора с индуктивной связью с контуром в цепи сетки (рис. 20.3), при которой будет иметь место самовозбуждение схемы.

Данные схемы следующие:

$$S = 1,5 \frac{M\Omega}{\sigma}$$

$$\lambda_0 = 500 \text{ м,}$$

$$M = 4 \text{ мкГн.}$$

20.3*. Найти условия самовозбуждения для схемы лампового генератора с индуктивной связью с контуром в цепи анода (рис. 20.4).

Сеточными токами можно пренебречь; входную ёмкость принять равной нулю.

20.4*. В задаче 20.1 было получено условие самовозбуждения для схемы с контуром в цепи сетки. В условии задачи было указано, что внутреннее сопротивление лампы R_i может быть принято весьма большим.

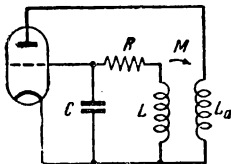


Рис. 20.3

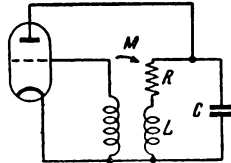


Рис. 20.4

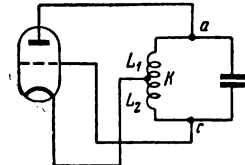


Рис. 20.5

В настоящей задаче нужно выяснить, как изменятся условия самовозбуждения при учёте нагрузки, т. е. когда сопротивлением нагрузки в анодной цепи нельзя пренебречь по сравнению с внутренним сопротивлением лампы.

20.5*. На рис. 20.5 изображена так называемая трёхточечная схема лампового генератора с индуктивной связью.

Вывести условия самовозбуждения, пренебрегая сеточными токами и активным сопротивлением контура; реакцией нагрузки пренебрегать нельзя. Входную ёмкость принять равной нулю.

20.6. Доказать, что в схеме, изображённой на рис. 20.6, самовозбуждение невозможно.

Доказательство провести на основе теории четырёхполюсников (получить выражение комплексного коэффициента передачи и показать невозможность выполнения условия баланса фаз).

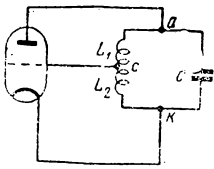


Рис. 20.6

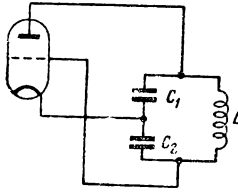


Рис. 20.7

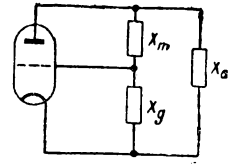


Рис. 20.8

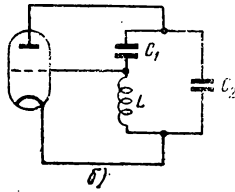
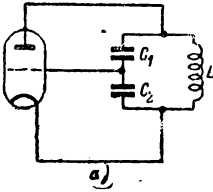


Рис. 20.9

20.7. Вывести условия самовозбуждения для трёхточечной схемы с ёмкостной связью (рис. 20.7), пренебрегая сеточными токами и активным сопротивлением контура.

20.8*. На рис. 20.8 изображена трёхточечная схема генератора в общем виде. Вывести условия самовозбуждения (баланса фаз и амплитуд) в общем виде.

20.9. Показать, что в схемах, изображённых на рис. 20.9 а и б невозможна генерация, так как не выполняются условия самовозбуждения.

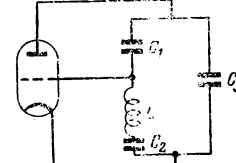
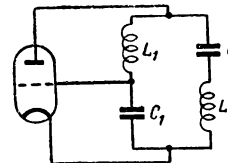
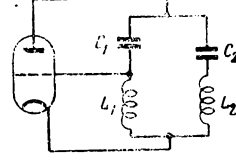
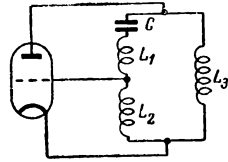
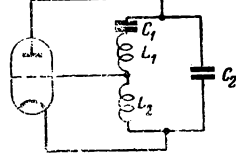
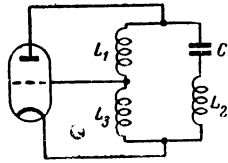
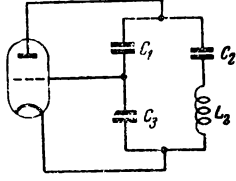
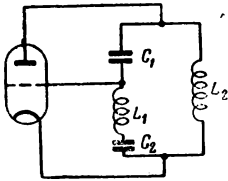


Рис. 20.10

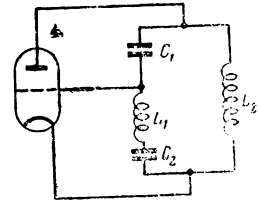


Рис. 20.11

20.10. На рис. 20.10 изображены 8 трёхточечных схем ламповых генераторов. Выяснить, в каких схемах удовлетворяются фазовые соотношения и генерация возможна, а в каких схемах фазовые соотношения не удовлетворяются и генерация невозможна.

20.11*. На рис. 20.11 дана схема генератора. Найти условия самовозбуждения с учётом реакции нагрузки.

20.12*. На рис. 20.12 показана схема генератора, применяемая на метровых волнах.

Найти частоту генерации ω_0 , считая, что контуры одинаковы и настроены на частоту

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_a C_a}} = \frac{1}{\sqrt{L_g C_g}}.$$

Активными сопротивлениями в колебательных контурах можно пренебречь.

20.13*. Найти в общем виде условия самовозбуждения в схеме однолампового трёхзвенного RC генератора (рис. 20.13). Сеточными токами и входной ёмкостью можно пренебречь.

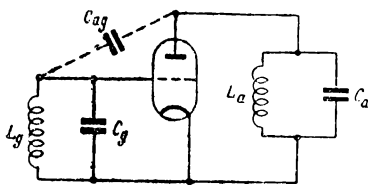


Рис. 20.12

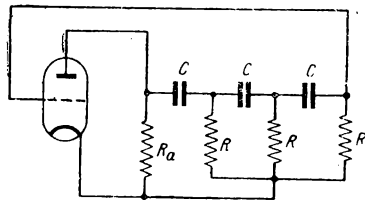


Рис. 20.13

Из условий самовозбуждения в общем виде получить условия для случая $R_i \ll R_a$; $R_i \ll R$.

20.14*. Найти условия самовозбуждения в схеме однолампового четырёхзвенного RC генератора (рис. 20.14), приняв, что $R_i \ll R_a$ и $R_i \ll R$.

20.15. Получить условия самовозбуждения для схемы двухлампового RC генератора с фазобалансной цепью (рис. 20.15). Условия само-

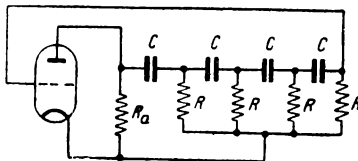


Рис. 20.14

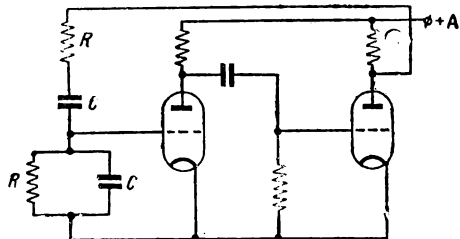


Рис. 20.15

возбуждения должны дать значение генерируемой частоты и коэффициента усиления двухлампового усилителя.

Сеточными токами пренебречь; допустимо, кроме того, считать, что реактивные элементы собственно усилителя не вносят фазового сдвига.

20.16. Генератор, изображенный на рис. 20.16, должен генерировать колебания в диапазоне частот от 300 гц до 300 кгц. Найти, на какие поддиапазоны следует разбить общий диапазон и рассчитать фиксированные сопротивления R , если переменный конденсатор имеет ёмкость от 30 пф до 300 пф?

20.17. На рис. 20.17 изображена схема диатронного генератора, собранного на лампе с характеристикой, приведённой на рис. 20.18. Выяснить возможность генерации в такой схеме со следующими данными:

$$L = 1 \text{ мкГн}, \quad f_0 = 10^6 \text{ гц},$$

$$Q = 100, \quad E_a = 75 \text{ в.}$$

20.18. На рис. 20.19 изображены характеристики двух различных ламп; выяснить, какую из ламп следует использовать в схеме динаatronного генератора (рис. 20.17), если эквивалентное сопротивление контура на резонансной частоте равно 20 ком .

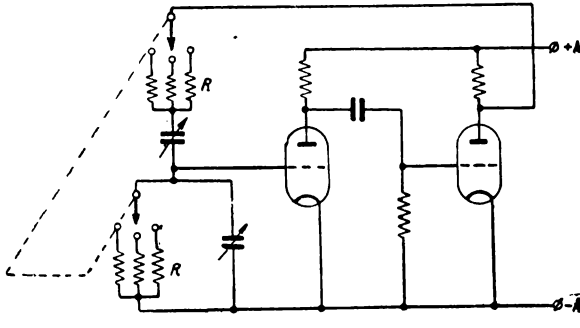


Рис. 20.16

20.19. Составить дифференциальные уравнения и вывести условие самовозбуждения для схем ламповых генераторов:

1) с индуктивной связью и контуром в цепи сетки (рис. 20.3),

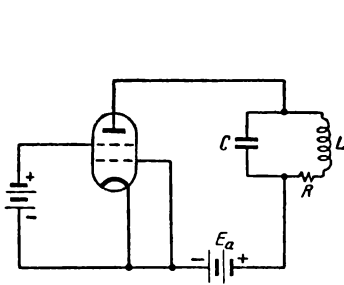


Рис. 20.17

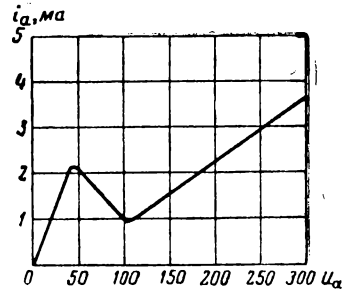


Рис. 20.18

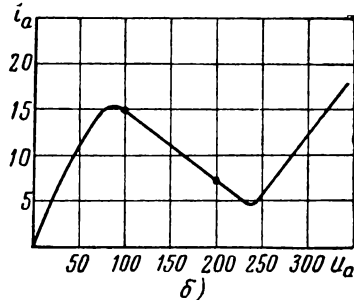
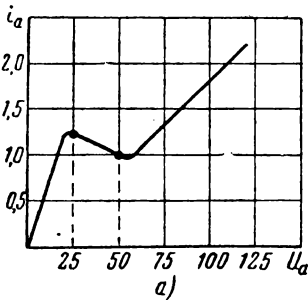


Рис. 20.19

2) с индуктивной связью и контуром в цепи анода (рис. 20.4). Характеристику лампы аппроксимировать уравнением прямой

$$i_a = S u_{np},$$

где

$$u_{упр} = u_g + Du_a.$$

Для схемы с контуром в цепи сетки можно считать, что

$$u_{упр} \approx u_g.$$

20.20*. На рис. 20.20 изображена схема динаatronного генератора; составить дифференциальное уравнение схемы и найти условие самовозбуждения.

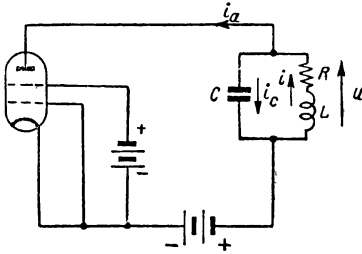


Рис. 20.20

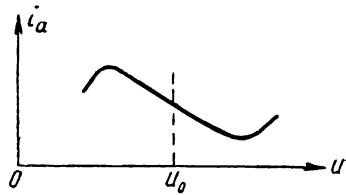


Рис. 20.21

Характеристику лампы, изображённую на рис. 20.21 в окрестности рабочей точки можно аппроксимировать уравнением

$$i_a = -S_0 u.$$

20.21*. Составить дифференциальное уравнение и вывести условие самовозбуждения для трёхточечной схемы генератора, изображённой на рис. 20.22.

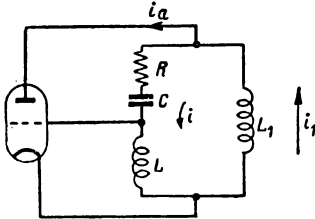


Рис. 20.22

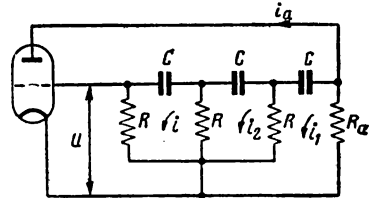


Рис. 20.23

Характеристику лампы аппроксимировать линейной функцией

$$i_a = s u_g.$$

Реакцией нагрузки можно пренебречь.

20.22*. Составить дифференциальное уравнение и вывести условия самовозбуждения для трёхзвенной схемы однолампового RC генератора (рис. 20.23).

Характеристику лампы аппроксимировать линейной функцией $i_a = s u$; реакцией нагрузки можно пренебречь.

§ 21. Генерация синусоидальных колебаний нелинейными системами. Стационарная амплитуда первой гармоники

1. В предыдущем параграфе рассматривались вопросы, относящиеся к начальной стадии процесса генерации, — вопросы самовозбуждения. В настоящем параграфе рассматриваются вопросы конечной стадии процесса генерации — стационарного режима генераторов синусоидальных колебаний.

В изучении стационарного режима основное место занимают вопросы расчёта амплитуды первой гармоники стационарных колебаний, которую будем называть стационарной амплитудой первой гармоники.

Этим вопросам и посвящён настоящий параграф.

2. Определение стационарной амплитуды первой гармоники удобнее всего проводить на квазилинейной основе, разработанной, главным образом, трудами Ю. Б. Кобзарева.

Сущность квазилинейного метода, пригодного только для избирательных систем, состоит в замене безынерционного нелинейного элемента, т. е. элемента, реагирующего на мгновенные значения тока или напряжения, некоторым фиктивным элементом, реагирующим только на амплитудные значения. В установившемся режиме инерционный нелинейный элемент ведёт себя как линейный элемент.

Для практических расчётов по квазилинейному методу параметры нелинейных элементов, зависящие от мгновенных значений, нужно заменить некоторыми новыми параметрами, зависящими от амплитудных значений. Эти последние параметры называют „параметрами по первой гармонике“ или „средними параметрами“. В этом параграфе будем пользоваться вторым, более коротким (правда, менее точным), определением.

Для расчёта стационарной амплитуды генератора можно воспользоваться условием самовозбуждения (условием баланса амплитуд), представляющим собой неравенство, содержащее нелинейный параметр (например, крутизну S) мгновенных значений¹⁾. Этот параметр мгновенных значений нужно заменить средним параметром (параметром амплитудных значений) и, кроме того, неравенство обратить в равенство. Последнее равенство представляет собой уравнение стационарности. Из этого уравнения можно определить стационарную амплитуду графическим или аналитическим путём.

Для нахождения аналитических выражений средних параметров необходимо владеть материалом, изложенным в §§ 17 и 18.

¹⁾ Так как начало процесса генерации рассматривается при очень малых колебаниях, нелинейный параметр представляет собой «параметр в точке» и для условия самовозбуждения принимается постоянным. Чаще всего приходится пользоваться крутизной в рабочей точке.

Наиболее часто встречающимся средним параметром является параметр „средняя крутизна“ — S_{cp} , определяемый по формуле

$$S_{cp} = \frac{I_1}{U_1}, \quad (21.1)$$

где I_1 — амплитуда первой гармоники выходного тока,
 U_1 — амплитуда входного (управляющего) напряжения.

Аналогично могут быть введены и другие параметры, например, „среднее сопротивление“

$$R_{cp} = \frac{U_1}{I_1},$$

где U_1 — амплитуда первой гармоники анодного напряжения,
 I_1 — амплитуда первой гармоники анодного тока.

Средние параметры могут быть легко найдены экспериментально по снятым амплитудным характеристикам.

3. В настоящем параграфе первая группа задач (21.1 — 21.7) посвящена вопросам определения кривых (аналитически и графически) средних параметров.

Во второй группе задач (21.8 — 21.12) находятся аналитические выражения стационарных амплитуд.

Наконец, в третьей группе задач (21.13 — 21.15) рассчитывается стационарная амплитуда лампового генератора по конкретным данным схемы.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

21. 1. На рис. 21. 1а изображены полученные экспериментально амплитудные характеристики $I_{a1} = f(U_g)$ лампы 6С5 при анодном напряжении $E_a = 200$ в и $E_a = 100$ в при фиксированном напряжении смещения на управляющей сетке.

По этим характеристикам построить характеристики средней крутизны.

Аналогичные построения выполнить для характеристик лампы 6Ж7, изображенных на рис. 21.1б.

Данные, по которым построены амплитудные характеристики, приводятся в таблице:

$U_g, \text{в}$		0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
6С5	$E_a = 200 \text{ в}$	0	6	10,4	12,6	13,8	14,6	15,2	15,6	16,2	16,4	17	17,2
	$E_a = 100 \text{ в}$	0	3,6	5,4	6,2	6,4	6,6	6,8	6,8	6,8	6,8	6,8	6,8
6Ж7	$E_a = 200 \text{ в}$	0	5,1	8,4	9,2	10,6	11,2	11,6	11,7	11,7	11,8	11,8	—
	$E_a = 100 \text{ в}$	0	2,2	4,0	4,8	5,2	5,6	5,8	5,8	5,8	5,8	5,8	—

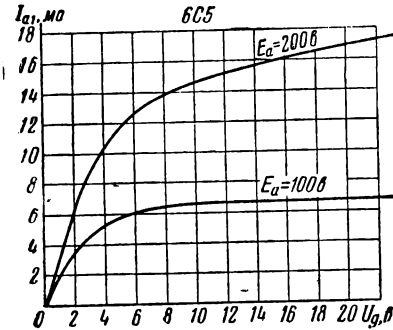
21.2*. На рис. 21.2 изображена характеристика лампы $i_a = f(u_g)$.

По этой характеристике построить кривую средней крутизны, используя для этой цели формулу трёх ординат.

Построение выполнить для двух значений напряжения смещения:

- 1) $E_g = 0$; 2) $E_g = -8$ в.

21.3. Найти выражение для средней крутизны, если характеристика лампы может быть аппроксимирована полиномом третьей степени



$$i_a = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3.$$

Определить в общем виде знак коэффициента a_3 , исходя из условия: при росте амплитуды напряжения крутизна должна падать.

Полученную формулу для средней крутизны изобразить в виде графика и определить границы изменения амплитуды U , в которых эта формула имеет смысл.

21.4. Найти выражение для средней крутизны, если характеристика лампы аппроксимируется полиномом пятой степени

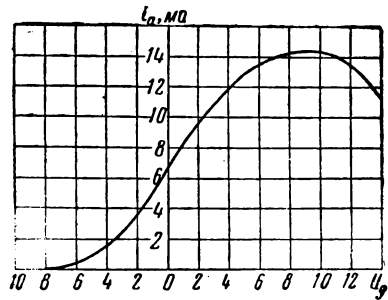
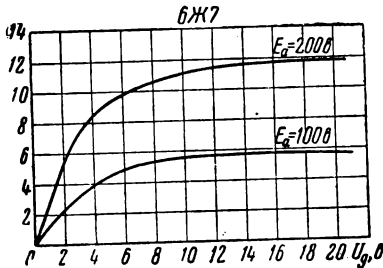


Рис. 21.1

Рис. 21.2

$$i_a = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + a_4 u^4 + a_5 u^5.$$

Построить кривую средней крутизны сначала качественно при $a_5 < 0$, а затем для характеристики лампы, аппроксимируемой формулой

$$i_a = 26 + 4u + 15u^2 + u^3 - 0,16u^5 \text{ ма.}$$

21.5*. Пусть характеристику лампы $i_a = f(u_g)$ можно представить в виде ломаной прямой (рис. 21.3). Найти аналитические выражения для средней крутизны в функции амплитуды напряжения на сетке при двух положениях рабочей точки:

- 1) $\theta = 90^\circ$; 2) $0^\circ < \theta < 90^\circ$.

Аналитическое выражение тока первой гармоники имеет вид [(ф-ла (17.10) и (17.11)]:

$$I_{a1} = \frac{SU_g}{\pi} (\theta - \sin \theta \cos \theta),$$

$$\cos \theta = \frac{SE_g - I_0}{SU_g}.$$

Обозначения ясны из рис. 21.3.

Полученные аналитические выражения иллюстрировать графиками.

21.6. Характеристика лампы аппроксимируется формулой Крылова

$$i_a = \frac{I_2}{2} (1 + \text{th } qu_g).$$

Найти выражение для средней крутизны, используя для вывода формулу трёх ординат.

Полученный результат представить в виде графика.

21.7*. Характеристика лампы $i_a = f(u_g)$ в некоторой части с известным приближением может быть представлена экспоненциальной функцией $i_a = I e^{cu_g}$.

Найти выражение для средней крутизны при произвольном смещении E_g (рис. 21.4).

Полученное выражение иллюстрировать графиком.

21.8*. Характеристика лампы в схеме лампового генератора аппроксимируется ломаной прямой, состоящей из двух отрезков. Рабочая

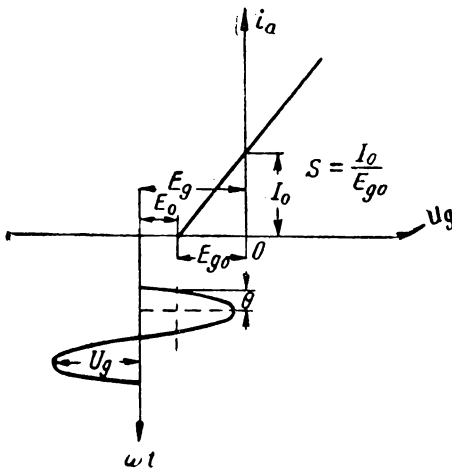


Рис. 21.3

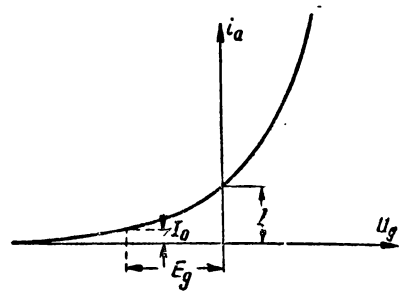


Рис. 21.4

точка на характеристике устанавливается последовательно так, что осуществляются следующие режимы (по углу отсечки θ):

- 1) $\theta = 90^\circ$,
- 2) $0^\circ < \theta < 90^\circ$.
- 3) $90^\circ < \theta < 180^\circ$.

Объяснить, возможна ли генерация при указанных трёх режимах и заданной характеристике.

21.9*. Известно, что условие самовозбуждения лампового генератора с индуктивной связью и с контуром в цепи сетки имеет вид (задача 20.1)

$$M > \frac{RC}{S}.$$

Найти стационарную амплитуду напряжения на сетке, если характеристика лампы аппроксимируется полиномом третьей степени

$$i = a_0 + a_1 u_g - a_3 u_g^3.$$

21.10. Найти выражение для стационарной амплитуды напряжения на сетке лампового генератора с индуктивной связью с контуром в цепи анода (задача 20.3). Характеристику лампы аппроксимировать функцией

$$i = a_0 + a_1 u_g - a_3 u_g^3.$$

21.11. Для трёхточечной схемы генератора (рис. 20.22) было получено условие самовозбуждения в виде (задача 20.21)

$$S > RC \frac{L + L_1}{L_1 L}.$$

Найти стационарную амплитуду напряжения на сетке при аппроксимации характеристики лампы полиномом третьей степени

$$i_a = a_0 + a_1 u_g - a_3 u_g^3.$$

21.12. В задаче 20.13 было получено условие самовозбуждения трёхзвенного RC генератора в виде

$$S > \frac{1}{R_p} \left[9 + 23 \frac{R_p}{R} + 4 \left(\frac{R_p}{R} \right)^2 \right],$$

где

$$R_p = \frac{R_l R_a}{R_l + R_a}.$$

Найти стационарную амплитуду напряжения на сетке, если характеристика лампы передаётся выражением

$$i_a = a_0 + a_1 u_g - a_3 u_g^3.$$

21.13*. Рассчитать элементы схемы лампового генератора (гетеродина) с индуктивной связью с контуром в цепи сетки по следующим исходным данным (задача 21.1):

лампа 6С5, $E_a = 200$ в, $f_0 = 10^6$ гц, $U_{гсм} = 20$ в, $C = 100$ пф, $Q = 50$.

21.14. Рассчитать по условию задачи 21.3, необходимую взаимондуктивность M , если анодное напряжение $E_a = 100$ в.

21.15. Рассчитать стационарную амплитуду лампового генератора, собранного на лампе 6Ж7 при $E_a = 200$ в (задача 21.1) по известным данным схемы с контуром в цепи сетки и с индуктивной связью:

$$R = 60 \text{ ом}, \quad C = 100 \text{ пф}, \quad M = 5 \text{ мкгн}.$$

§ 22. Переходные и установившиеся процессы в избирательных нелинейных системах второго порядка

1. Изучение переходных процессов в нелинейных системах второго порядка сопряжено со значительными математическими трудностями; точное решение такой задачи без создания новых функций вообще невозможно.

Наиболее распространёнными приближёнными методами являются метод медленно меняющихся амплитуд (в различных модификациях) и метод фазовой плоскости¹⁾.

Методом медленно меняющихся амплитуд можно пользоваться только при изучении избирательных систем, т. е. таких, в которых первые гармоники резко преобладают над всеми остальными.

¹⁾ Предполагается, что читатель знаком с §§ 14, 17 и 19.

Метод фазовой плоскости не содержит в своей основе никаких допущений и им, следовательно, можно пользоваться при изучении любых автономных систем.

2. Избирательные системы 2-го порядка описываются дифференциальными уравнениями, которые всегда могут быть приведены к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \mu F\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right). \quad (22.1)$$

В этом уравнении μ — некоторый параметр, характеризующий избирательность системы¹⁾; этот параметр должен быть мал. При $\mu \rightarrow 0$ ур-ние (22.1) вырождается в линейное дифференциальное уравнение консервативного контура.

Явно входящее в правую часть ур-ния (22.1) время t указывает на наличие внешних сил. В дифференциальные уравнения автономных систем время t в явном виде не входит.

Решение ур-ния (22.1) методом медленно меняющихся амплитуд проводится не относительно мгновенного значения x , а относительно огибающей, т. е. относительно амплитуд. Переход от мгновенных значений к амплитудным позволяет снизить порядок дифференциального уравнения вдвое и полученное, таким образом, дифференциальное уравнение первого порядка удаётся либо проинтегрировать непосредственно, либо изучить его на фазовой плоскости.

Метод медленно меняющихся амплитуд в приложении к нелинейным системам создан трудами ряда учёных и, в первую очередь, трудами ван дер-Поля, Мандельштама и Папалекси. К. Ф. Теодорчиком этот метод был переработан в плане создания обобщённой и практически удобной методики. можно сказать — в плане создания алгоритма. В настоящем изложении будем следовать К. Ф. Теодорчику.

3. Решение дифференциального ур-ния (22.1) можно представить состоящим из следующих этапов:

1 этап. По заданной схеме составляется дифференциальное уравнение; это дифференциальное уравнение приводится к виду (22.1):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \mu F\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right).$$

Решение дифференциального ур-ния (22.1) ищется в виде

$$x = a \sin \omega t + b \cos \omega t, \quad (22.2)$$

где a и b — медленно меняющиеся амплитуды, а ω — частота внешнего воздействия.

¹⁾ Обычно этим параметром является затухание контура $d = \frac{1}{Q}$, где Q — добротность контура.

Для автономных систем время t в правой части (22.1) отсутствует, фаза в решении (22.2) может быть выбрана произвольно и поэтому для этих систем принимают $b = 0$, а амплитуда a и частота ω в решении (22.2) подлежат определению.

II этап. Правую часть (22.1) разлагаем в ряд Фурье и сохраняем только первые гармоники:

$$\mu F\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right) = \psi_1(a, b) \sin \omega t + f_1(a, b) \cos \omega t. \quad (22.3)$$

При разложении в ряд Фурье нужно пользоваться табл. 22.1.

Формулы для разложения в ряд Фурье

Таблица 22.1

№ пп.	Функция	Точное разложение	Первая гармоника
1	$\sin^2 \alpha$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha$	—
2	$\cos^2 \alpha$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha$	—
3	$\sin \alpha \cos \alpha$	$\frac{1}{2} \sin 2\alpha$	—
4	$\sin^3 \alpha$	$\frac{3}{4} \sin \alpha - \frac{1}{4} \sin 3\alpha$	$\frac{3}{4} \sin \alpha$
5	$\cos^3 \alpha$	$\frac{3}{4} \cos \alpha + \frac{1}{4} \cos 3\alpha$	$\frac{3}{4} \cos \alpha$
6	$\sin \alpha \cos^2 \alpha$	$\frac{1}{4} \sin \alpha + \frac{1}{4} \sin 3\alpha$	$\frac{1}{4} \sin \alpha$
7	$\cos \alpha \sin^2 \alpha$	$\frac{1}{4} \cos \alpha - \frac{1}{4} \cos 3\alpha$	$\frac{1}{4} \cos \alpha$
8	$\sin^4 \alpha$	$\frac{1}{8} (3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha)$	—
9	$\cos^4 \alpha$	$\frac{1}{8} (3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha)$	—
10	$\sin^3 \alpha \cos \alpha$	$\frac{1}{8} (2\sin 2\alpha - \sin 4\alpha)$	—
11	$\sin \alpha \cos^3 \alpha$	$\frac{1}{8} (2\sin 2\alpha + \sin 4\alpha)$	—
12	$\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$	$\frac{1}{8} (1 - \cos 4\alpha)$	—
13	$\sin^5 \alpha$	$\frac{1}{16} (\sin 5\alpha - 5\sin 3\alpha + 10\sin \alpha)$	$\frac{5}{8} \sin \alpha$
14	$\cos^5 \alpha$	$\frac{1}{16} (\cos 5\alpha + 5\cos 3\alpha + 10\cos \alpha)$	$\frac{5}{8} \cos \alpha$

№ пп.	Функция	Точное разложение	Первая гармоника
15	$\sin^3 \alpha \cos^3 \alpha$	$\frac{1}{8} \left(\sin \alpha + \frac{1}{2} \sin 3\alpha - \frac{1}{2} \sin 5\alpha \right)$	$\frac{1}{8} \sin \alpha$
16	$\cos^3 \alpha \sin^3 \alpha$	$\frac{1}{8} \left(\cos \alpha - \frac{1}{2} \cos 3\alpha - \frac{1}{2} \cos 5\alpha \right)$	$\frac{1}{8} \cos \alpha$
17	$\sin \alpha \cos^4 \alpha$	$-\frac{1}{8} \sin \alpha + \frac{3}{16} \sin \alpha + \frac{1}{16} \sin 5\alpha$	$-\frac{1}{8} \sin \alpha$
18	$\cos \alpha \sin^4 \alpha$	$-\frac{1}{8} \cos \alpha - \frac{3}{16} \cos 3\alpha + \frac{1}{16} \cos 5\alpha$	$-\frac{1}{8} \cos \alpha$
19	$\sin \alpha \sin \beta$	$\frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)]$	—
20	$\sin \alpha \cos \beta$	$\frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)]$	—
21	$\cos \alpha \cos \beta$	$\frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)]$	—

III этап. Полученные во втором этапе значения $\psi_1(a, b)$ и $f_1(a, b)$ подставляются в нижеприводимые дифференциальные уравнения первого порядка (22.4):

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{1}{2\omega} [f_1(a, b) - (\omega_0^2 - \omega^2) b] \\ \frac{db}{dt} &= -\frac{1}{2\omega} [\psi_1(a, b) - (\omega_0^2 - \omega^2) a] \end{aligned} \right\} \quad (22.4)$$

Уравнения (22.4) выводятся из ур-ния (22.1) при подстановке в него решения (22.2) и разложения правой части по (22.3); при этом выводе принимается во внимание медленность изменения амплитуд a и b .

IV этап. Полученные в третьем этапе ур-ния (22.4) решаются либо непосредственным интегрированием, либо интегрированием на фазовой плоскости. В результате интегрирования появляются зависимости $a(t)$ и $b(t)$, которые в сочетании с (22.2) дают закон изменения мгновенных значений.

Подставляя в закон изменения $a(t)$ и $b(t)$ время $t \rightarrow \infty$, получаем установившиеся стационарные значения амплитуд a_0 и b_0 . Стационарные значения можно находить также из уравнений стационарности, которые получаются из (22.4) при подстановке $\frac{da}{dt} = \frac{db}{dt} = 0$.

В автономных системах ур-ния (22.4) дают закон изменения амплитуды и частоты.

У этап. Полученные значения стационарных амплитуд необходимо проверить на устойчивость и сохранить в решении только те значения, которые окажутся устойчивыми.

Сущность проверки на устойчивость состоит в следующем.

Стационарным значениям a_0 и b_0 сообщаются некоторые возмущения:

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0 + \Delta a \\ b &= b_0 + \Delta b \end{aligned} \right\} \quad (22.5)$$

Используя ур-ния (22.4), можно составить дифференциальные уравнения относительно возмущений Δa и Δb (см. задачу 19.28); решение этих дифференциальных уравнений даст закон изменения возмущений во времени. Если с течением времени возмущения стремятся к нулю — система устойчива.

Изложенная методика, как уже указывалось, является довольно общей и применима как к нелинейным (автономным и неавтономным), так и к параметрическим системам.

Иногда удобно проводить решение в полярных координатах; переход к полярным координатам легко осуществляется при помощи известных равенств:

$$\begin{aligned} a \sin \omega t + b \cos \omega t &= A \sin(\omega t + \varphi); \\ a &= A \cos \varphi, \quad A^2 = a^2 + b^2, \\ b &= A \sin \varphi, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Кроме того, в этих преобразованиях, как правило, используется равенство

$$\frac{dA^2}{dt^2} = 2A \frac{dA}{dt}.$$

4. Изучение переходных процессов в автономных системах второго порядка на фазовой плоскости проводится в следующем плане.

По заданному дифференциальному уравнению второго порядка составляется система из двух уравнений первого порядка; решение одного из этих дифференциальных уравнений даёт фазовое изображение искомого движения. Решение обычно проводится графо-аналитическим методом — методом изоклин (§ 19). По получаемому фазовому изображению можно судить о характере процесса.

Наиболее трудоёмкой частью подобного исследования является построение фазового изображения. Однако для того, чтобы судить об основных, наиболее ярких, чертах движения нет необходимости выполнять „полное“ построение: достаточно

„схватить“ некоторые главные моменты и качественно картина будет довольно ясной.

Именно поэтому метод фазовой плоскости считают качественным методом. При выполнении всех необходимых построений этот метод даёт количественное решение; эти построения, однако, настолько громоздки, что для практики интереса не представляют. Качественное же решение можно провести очень простыми средствами.

Ниже будут изложены приёмы, с помощью которых можно быстро построить фазовое изображение.

Дифференциальное уравнение автономной системы 2-го порядка всегда может быть приведено к виду

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + A(x) \frac{dx}{d\tau} + B(x)x = 0. \quad (22.6)$$

Применяя подстановку

$$\frac{dx}{d\tau} = y, \quad (22.7)$$

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{dy}{d\tau} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{d\tau} = y \frac{dy}{dx}$$

и вводя её в (22.6), получаем

$$y \frac{dy}{dx} + A(x)y + B(x)x = 0,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = -A(x) - \frac{1}{y} B(x)x. \quad (22.8)$$

Система дифференциальных уравнений (22.7) и (22.8) эквивалентна одному дифференциальному уравнению (22.6).

Решение уравнения (22.8), т. е. получение зависимости $y(x)$, даёт фазовое изображение.

Решение проводится методом изоклин.

Подставляя в (22.8) некоторое постоянное значение производной $\frac{dy}{dx} = \kappa$ и решая уравнение относительно y , получаем

$$y = \frac{B(x) \cdot x}{-\kappa - A(x)}. \quad (22.9)$$

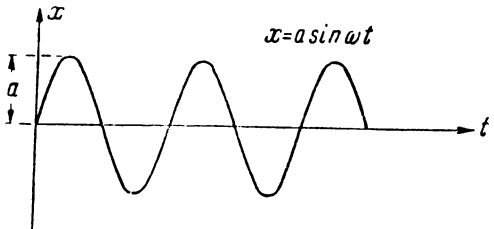
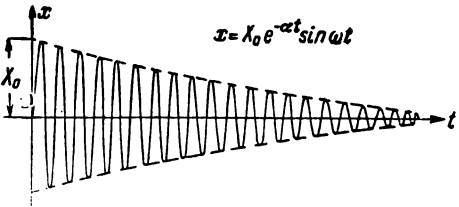
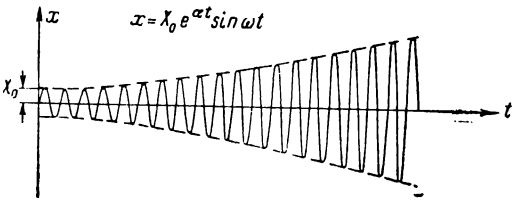
Выражение (22.9) представляет собой уравнение изоклины в общем виде.

Удобно ввести понятие „главных изоклин“, через которые интегральная кривая (фазовое изображение) проходит под углами:

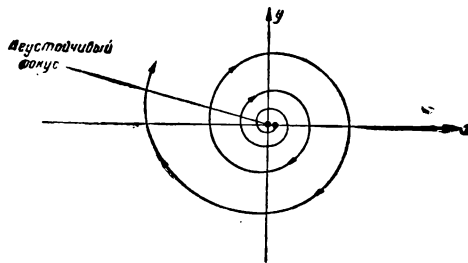
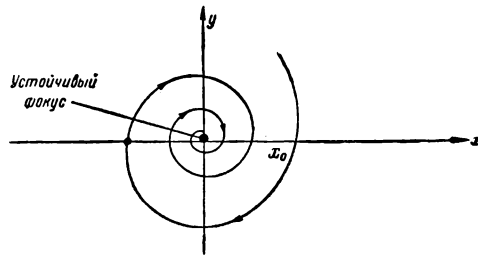
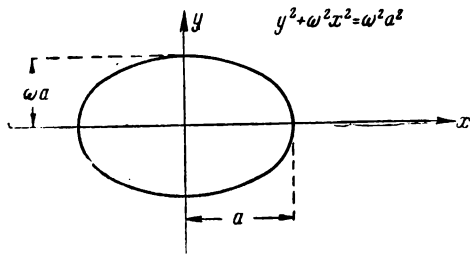
- 1) изоклина $A - \varphi = 0^\circ - \kappa = 0$,
- 2) „ $B - \varphi = 90^\circ - \kappa = \infty$,
- 3) „ $C - \varphi = 45^\circ - \kappa = 1$,
- 4) „ $D - \varphi = -45^\circ - \kappa = -1$.

Таблица 22.2

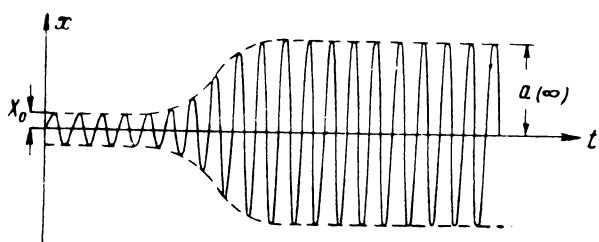
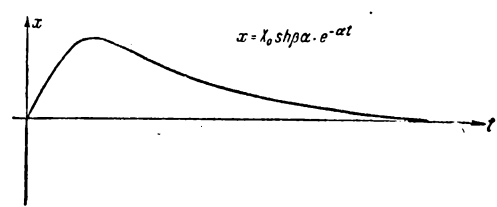
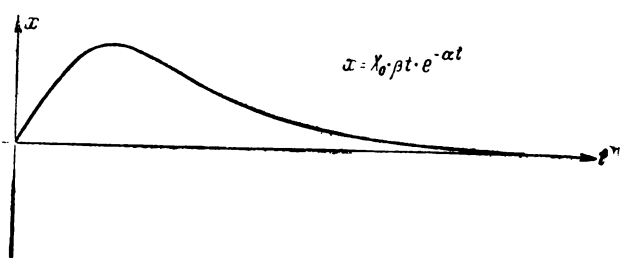
Основные виды движений в линейных и нелинейных системах
второго порядка и соответствующие им фазовые изображения

№ пп.	Вид движения (временная картина—оригинал)
1	 <p style="text-align: center;">$x = a \sin \omega t$</p>
2	 <p style="text-align: center;">$x = \lambda_0 e^{-\alpha t} \sin \omega t$</p>
3	 <p style="text-align: center;">$x = \lambda_0 e^{\alpha t} \sin \omega t$</p>

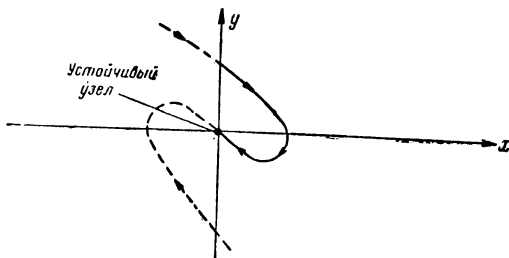
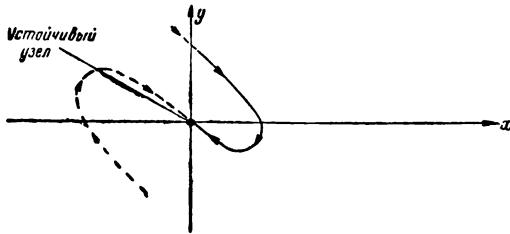
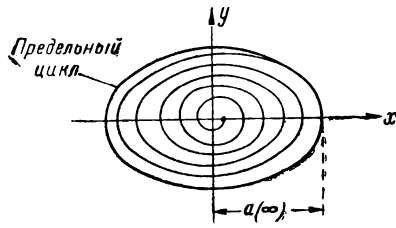
Фазовое изображение



Продолжение

№ пп.	Вид движения (временная картина—оригинал)
4.	 <p>The graph shows a coordinate system with a vertical axis labeled x and a horizontal axis labeled t. A sinusoidal wave starts with a small amplitude and gradually increases in amplitude as it moves along the t-axis. A dashed envelope curve follows the peaks and troughs of the oscillation. The initial amplitude is marked as x_0 on the x-axis. The final, steady-state amplitude is marked as $a(\infty)$ on the right side of the graph.</p>
5.	 <p>The graph shows a coordinate system with a vertical axis labeled x and a horizontal axis labeled t. A smooth curve starts at the origin (0,0), rises to a peak, and then gradually decays towards the t-axis. The equation $x = x_0 \operatorname{sh} \beta t \cdot e^{-\alpha t}$ is written next to the curve.</p>
6.	 <p>The graph shows a coordinate system with a vertical axis labeled x and a horizontal axis labeled t. A smooth curve starts at the origin (0,0), rises to a peak, and then gradually decays towards the t-axis. The equation $x = x_0 \beta t \cdot e^{-\alpha t}$ is written next to the curve.</p>

Фазовое изображение



Соответствующие уравнения главных изоклин будут:

$$v_A = -\frac{B(x)}{A(x)}x. \quad (22.10)$$

$$v_B = 0. \quad (22.11)$$

$$v_C = \frac{B(x)}{-1-A(x)}x. \quad (22.12)$$

$$v_D = \frac{B(x)}{1-A(x)}x. \quad (22.13)$$

Четыре главные изоклины дают возможность быстро представить себе основные черты фазового изображения.

Необходимо отметить, что в тех точках, в которых $\frac{dy}{dx}$ представляет собой неопределённость вида $\frac{0}{0}$, фазовое изображение может проходить через изоклину под любым углом. Эти точки называются „особыми точками“.

Для некоторых типовых процессов, характерных для систем второго порядка, фазовые изображения могут быть найдены раз навсегда.

В табл. 22.2 (см. стр. 218) по аналогии с табл. 19.1 даны рисунки основных видов движений и их фазовых изображений в избирательных системах второго порядка (поз. 1, 2, 3 и 4). Позиции 5 и 6 также относятся к избирательным системам, но эти последние характеризуются большими потерями.

5. Изучение переходных процессов в избирательных системах второго порядка может проводиться на основе одновременного использования методов медленно меняющихся амплитуд и фазовой плоскости. В этом случае дифференциальное уравнение 2-го порядка сводится (с учётом медленности изменения амплитуды) к дифференциальному уравнению 1-го порядка, а это последнее изучается методом фазовой плоскости (§ 19). Фазовое изображение, таким образом, даст картину изменения амплитуды, а не мгновенного значения.

В таком методе решения содержатся два приближения: первое — за счёт применения метода медленно меняющихся амплитуд, второе — за счёт применения метода фазовой плоскости.

6. В настоящем параграфе приводится в том числе ряд задач, содержащих исследование линейных систем нелинейными методами. Объясняется это тем, что изучение нелинейных систем изложенной методикой всегда сопряжено с громоздкими математическими выкладками; освоение же существа метода может быть достаточно хорошо проведено на основе рассмотрения уже известных линейных систем.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

22.1*. Рассмотреть методом медленно меняющихся амплитуд режим свободных колебаний в линейном колебательном контуре (рис. 22.1) для двух случаев:

- 1) $R > 0$, при $t = 0$, $i = I_0$,
- 2) $R = 0$, при $t = 0$, $i = I_0$.

Изучение дифференциального уравнения первого порядка (для огибающей) провести на фазовой плоскости.

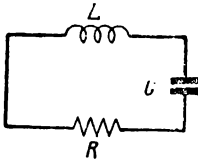


Рис. 22.1

22.2*. Рассмотреть режим вынужденных колебаний в линейном консервативном контуре, находящемся под воздействием синусоидальной эдс с частотой, равной собственной частоте контура (рис. 22.2).

22.3*. Рассмотреть установившийся режим вынужденных колебаний в линейном диссипативном контуре, находящемся под воздействием синусоидальной эдс (рис. 22.3) с частотой, равной собственной частоте контура (считается, что $\alpha \ll \omega_0$, т. е. $\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \approx \omega_0$).

22.4*. Рассмотреть режим вынужденных установившихся колебаний в линейном диссипативном контуре, находящемся под воздействием синусоидальной эдс с частотой ω , не равной собственной частоте ω_0 колебательного контура. Составить уравнение резонансной кривой, дающей зависимость установившейся амплитуды от расстройки $\Delta\omega = \omega - \omega_0$.

22.5*. Дифференциальное уравнение лампового генератора с индуктивной связью (см. задачу 20.19) имеет вид

$$\frac{d^2 u_g}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} - \frac{M}{LC} \frac{di_a}{du_g} \right) \frac{du_g}{dt} + \frac{1}{LC} u_g = 0.$$

Решить это дифференциальное уравнение методом медленно меняющихся амплитуд; дифференциальное уравнение относительно амплитуд исследовать на фазовой плоскости.

Характеристика лампы аппроксимируется симметричной функцией

$$i_a = a_0 + S_0 u_g - \gamma u_g^3;$$

рабочая точка находится в середине характеристики.

22.6*. Найти время, в течение которого амплитуда достигнет 0,95 от установившегося значения по условиям задачи 22.5, считая, что процесс генерации начинается с амплитуды, составляющей 10^{-6} от установившейся.

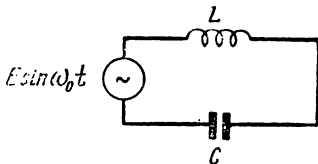


Рис. 22.2

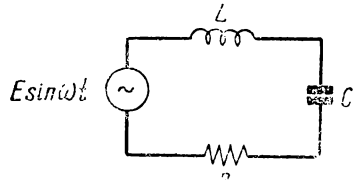


Рис. 22.3

22.7*. Дифференциальное уравнение лампового генератора (задача 22.5) имеет вид (уравнение ван дер-Поля)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 2\varepsilon(1-x^2) \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

Есть генераторы, процессы в которых описываются уравнением другого вида (уравнение Рэлея)

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\varepsilon \left[1 - \frac{1}{\omega_0^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right] \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

Показать, что уравнение Рэлея можно свести к уравнению ван дер-Поля.

22.8*. Составить дифференциальное уравнение для консервативных колебательных контуров с нелинейными элементами (рис. 22.4).

Нелинейные зависимости передаются следующими выражениями:

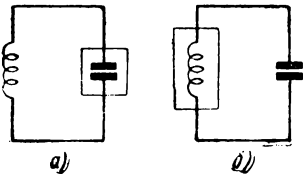


Рис. 22.4

$$u_c = \alpha q + \beta q^3,$$

$$i = \alpha \Phi + \beta \Phi^3.$$

22.9*. Дифференциальное уравнение консервативного колебательного контура с одним нелинейным параметром, характеристика которого передается полукубической параболой, записывается в общем виде в следующей форме (задача 22.8):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x + \gamma x^3 = 0.$$

Найти колебания свободного процесса.

22.10*. Построить фазовое изображение колебаний в свободном режиме консервативного колебательного контура.

Начальные условия: при $\frac{dx}{dt} = 0$, $x = x_0$.

22.11*. Построить фазовое изображение свободных колебаний в контуре с добротностью $Q = 5$.

Начальные условия: при $\frac{dx}{dt} = 0$, $x = x_0$.

22.12. Построить фазовое изображение свободного процесса в контуре с добротностью $Q = \frac{1}{2}$.

Начальные условия: при $\frac{dx}{dt} = 0$, $x = x_0$.

22.13. Построить фазовое изображение свободных колебаний в ламповом генераторе с контуром в цепи сетки и с индуктивной связью по следующим данным:

1) данные лампы

$$i_{ма} = 30 \left(1 + 0,1u_g - \frac{4}{27 \cdot 10^3} u_g^3 \right);$$

2) данные контура

$$L = 80 \text{ мкГн},$$

$$C = 318 \text{ пФ},$$

$$R = 50 \text{ Ом};$$

3) данные обратной связи

$$M = 16 \text{ мкГн}.$$

**РЕШЕНИЯ
И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ**

УСТАНОВИВШИЙСЯ РЕЖИМ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 1

1.1. Непосредственно по рис. 1.3 находим выражение для комплексного коэффициента передачи:

$$K(i\omega) = \frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} = \frac{R}{R + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{i\omega RC}{1 + i\omega RC}$$

и затем выражения для частотной и фазовой характеристик:

$$K(\omega) = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi(\omega) = \frac{1}{\omega RC}$$

Графики, рассчитанные по полученным формулам, показаны на рис. Р. 1.1 (а и б).

1.2. Из выражения

$$K(\omega) = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

находим

$$\omega = \frac{1}{RC} \frac{K(\omega)}{\sqrt{1 - K^2(\omega)}}$$

Так как по условию $K(\omega) = 0,8$, а $RC = 10^9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-12} = 10^{-6}$ сек, то

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{10^{-6}} \frac{0,8}{\sqrt{1 - 0,8^2}} = \\ &= 1,33 \cdot 10^6 \text{ рад/сек} \end{aligned}$$

и

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1,33 \cdot 10^6}{6,28} = 0,212 \cdot 10^6 \text{ гц} = 212 \text{ кгц}$$

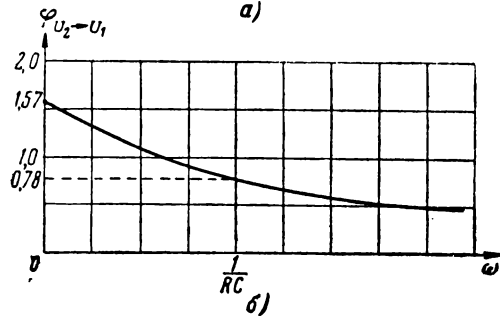
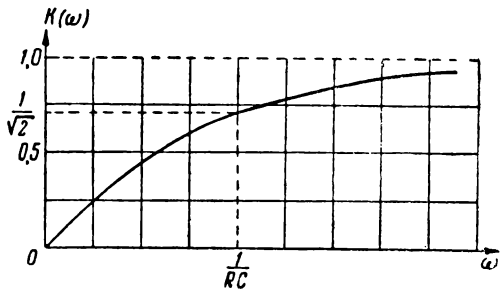


Рис. Р. 1.1

Найдём теперь сдвиг фаз $\varphi_{U_2 \rightarrow U_1}$.

$$\operatorname{tg} \varphi_{U_2 \rightarrow U_1} = \frac{1}{\omega RC} = \frac{1}{1,33 \cdot 10^6 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^{-12}} = 0,75,$$

$$\varphi_{U_2 \rightarrow U_1} \approx 0,646 \approx 37^\circ.$$

1.4

$$K(i\omega) = \frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} = \frac{\bar{I}_2 \cdot \frac{1}{i\omega C}}{\bar{I}R_1 + \bar{I}_2 \frac{1}{i\omega C}}.$$

С другой стороны, $\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2$, а ток \bar{I}_1 можно выразить через \bar{I}_2 на основе равенств

$$\bar{I}_1 R_2 = \bar{I}_2 \frac{1}{i\omega C},$$

тогда имеем

$$\bar{I} = \bar{I}_2 \frac{1}{i\omega CR_2} + \bar{I}_2.$$

Подставляя значение \bar{I} в основное выражение, получаем

$$K(i\omega) = \frac{\bar{I}_2 \frac{1}{i\omega C}}{\bar{I}_2 \left(\frac{1}{i\omega CR_2} + 1 \right) R_1 + \bar{I}_2 \frac{1}{i\omega C}}.$$

Преобразовав это выражение, получим

$$\begin{aligned} K(i\omega) &= \frac{\frac{1}{i\omega C}}{\frac{R_1}{R_2} \frac{1}{i\omega C} + R_1 + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{1}{\frac{R_1}{R_2} + 1 + i\omega CR_1} = \\ &= \frac{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) - i\omega CR_1}{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)^2 + \omega^2 C^2 R_1^2}. \end{aligned}$$

Амплитудно-частотная характеристика определится выражением

$$K(\omega) = \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)^2 + \omega^2 C^2 R_1^2}}{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)^2 + \omega^2 C^2 R_1^2} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)^2 + (\omega CR_1)^2}}.$$

Приняв $R_1 = R_2 = R$ и обозначая $\omega CR = x$, получим

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{4 + x^2}}.$$

Построенный график $K(\omega)$ показан на рис. Р. 1.2а. Фазовая характеристика определяется выражением

$$\operatorname{tg} \varphi_{U_2-U_1} = - \frac{\omega CR_1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} = - \frac{1}{2} x$$

и изображена на рис. Р.1.2б.

1.5. Составляем очевидные уравнения:

$$\bar{U}_2 = \bar{I}_2 R_g;$$

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2;$$

$$\bar{I}_1 R_a = \bar{I}_2 \left(R_g + \frac{1}{i\omega C_g} \right);$$

$$\bar{U}_1 = \bar{I} R_i + \bar{I}_1 R_a.$$

Найдём $K(i\omega)$

$$K(i\omega) = \frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} =$$

$$= \frac{\bar{I}_2 R_g}{\bar{I}_1 R_i + \bar{I}_1 R_a} =$$

$$= \frac{\bar{I}_2 R_g}{\bar{I}_1 R_i + \bar{I}_2 R_i + \bar{I}_1 R_a} =$$

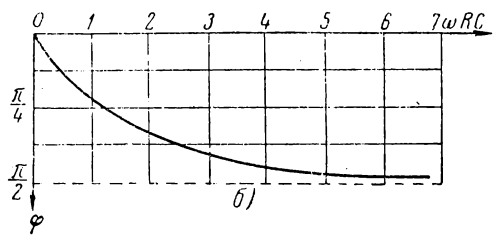
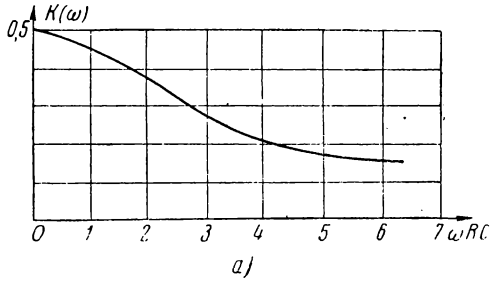


Рис. Р. 1.2

$$= \frac{\bar{I}_2 R_g}{\bar{I}_2 \frac{R_i}{R_a} \left(R_g + \frac{1}{i\omega C_g} \right) + \bar{I}_2 R_i + \bar{I}_2 \frac{1}{R_a} \left(R_g + \frac{1}{i\omega C_g} \right) R_a} =$$

$$= \frac{1}{\frac{R_i}{R_a} \left(1 + \frac{1}{i\omega C_g R_g} \right) + \frac{R_i}{R_g} + \left(1 + \frac{1}{i\omega C_g R_g} \right)} =$$

$$= \frac{i\omega C_g R_g}{(1 + i\omega C_g R_g) \left(\frac{R_i}{R_a} + 1 \right) + i\omega C_g R_i} =$$

$$= \frac{i\omega C_g R_g}{\left(1 + \frac{R_i}{R_a} \right) + i\omega C_g R_g \left(\frac{R_i}{R_a} + 1 \right) + i\omega C_g R_i}$$

Обозначим

$$\omega C_g R_g = x.$$

Тогда

$$K(i\omega) = \frac{ix}{\left(1 + \frac{R_i}{R_a} \right) + i \left[\left(1 + \frac{R_i}{R_a} \right) + \frac{R_i}{R_g} \right] x}$$

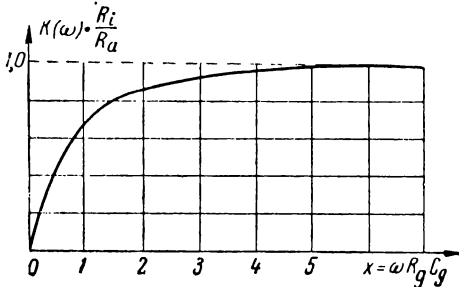
$$K(\omega) = \frac{x}{\sqrt{\left(1 + \frac{R_i}{R_a}\right)^2 + \left(1 + \frac{R_i}{R_a} + \frac{R_i}{R_g}\right)^2 x^2}}$$

Если $R_i \gg R_a$ и $R_g \gg R_a$, получим

$$K(\omega) = \frac{R_a}{R_i} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

График, соответствующий последнему выражению, дан на рис. Р.1.3

Фазовая характеристика



$$\operatorname{tg} \varphi_{U_2 \rightarrow U_1} =$$

$$= \frac{1 + \frac{R_i}{R_a}}{\left(1 + \frac{R_i}{R_a} + \frac{R_i}{R_g}\right) x}$$

Если $R_i \gg R_a$ и $R_g \gg R_a$, то

$$\operatorname{tg} \varphi_{U_2 \rightarrow U_1} = \frac{1}{x}$$

Рис. Р. 1.3

и фазовая характеристика будет иметь вид, совпадающий с рис. Р.1.1

1.6. Максимальное значение $K(\omega)$ принимает при $\omega = 0$; это значение равно

$$K(0) = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}}$$

Составляя отношение по условию задачи

$$\frac{K(\omega)}{K(0)} = \frac{1 + \frac{R_1}{R_2}}{\sqrt{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)^2 + (\omega_{2p} CR_1)^2}} = 0,8.$$

найдём соответствующую этому условию частоту ω_{2p} .

Продельвая очевидные преобразования, получим

$$\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)^2 = 0,64 \left[\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)^2 + (\omega_{2p} CR_1)^2 \right]$$

или

$$0,8 \omega_{2p} CR_1 = 0,6 \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right),$$

откуда

$$\omega_{2p} = \frac{3}{4 CR_1} \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)$$

$$f_{2p} = \frac{3}{8 \pi CR_1} \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right).$$

1.7. Для упрощения письма введём временные обозначения

$$\omega C_g R_g = x;$$

$$\frac{R_l}{R_a} = \alpha;$$

$$\frac{R_l}{R_g} = \beta.$$

Тогда получим

$$K(\omega) = \frac{x}{\sqrt{(1+\alpha)^2 + (1+\alpha+\beta)^2 x^2}}$$

По условиям задачи $K(\omega)$ на частотах ω_1 (или x_1) и ω_2 (x_2) должен принимать значения 0,7 и 0,9.

Составляем два очевидных уравнения:

$$K(\omega_1) = 0,7 = \frac{x_1}{\sqrt{(1+\alpha)^2 + (1+\alpha+\beta)^2 x_1^2}}$$

$$K(\omega_2) = 0,9 = \frac{x_2}{\sqrt{(1+\alpha)^2 + (1+\alpha+\beta)^2 x_2^2}}$$

которые нужно решить относительно x_1 и x_2 .

В общем виде решение этого уравнения относительно x имеет вид

$$x_{z,p} = \frac{(1+\alpha) K(\omega_{z,p})}{\sqrt{1 - (1+\alpha+\beta)^2 K^2(\omega_{z,p})}}$$

Подставляя в это выражение условия задачи, находим:

$$\omega_1 = \frac{1}{C_g R_g} \cdot \frac{0,7 \left(1 + \frac{R_l}{R_a}\right)}{\sqrt{1 - \left(1 + \frac{R_l}{R_a} + \frac{R_l}{R_g}\right)^2 \cdot 0,49}}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{C_g R_g} \cdot \frac{0,9 \left(1 + \frac{R_l}{R_a}\right)}{\sqrt{1 - \left(1 + \frac{R_l}{R_a} + \frac{R_l}{R_g}\right)^2 \cdot 0,81}}$$

Выражение для граничной частоты позволяет выяснить условия, при которых возможно осуществление заданного соотношения амплитуд напряжения выхода и входа.

Требую отсутствия мнимости, мы получаем

$$\left(1 + \frac{R_l}{R_a} + \frac{R_l}{R_g}\right)^2 K^2(\omega_{z,p}) < 1.$$

откуда

$$K(\omega_{z,p}) < \frac{1}{1 + \frac{R_l}{R_a} + \frac{R_l}{R_g}}$$

или

$$R_i \left(\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_g} \right) < \frac{1}{K(\omega_{2p})} - 1.$$

1.9. Выражение для коэффициента передачи рассматриваемой схемы (см. задачу 1.1) имеет вид

$$K(\omega) = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}.$$

Пусть при $R = R_1 = 10^3$ ом, $K(\omega) = K_1$, а при $R = \frac{10^3 \cdot 400}{10^3 + 400} = 286$ ом, $K(\omega) = K_2$.

Тогда, имея в виду, что $K(\omega) = \frac{U_2}{U_1}$, получим отношение искомых амплитуд в виде отношения $\frac{K_2}{K_1}$.

Подставляя условия задачи, находим:

$$K_1 \approx 0,35,$$

$$K_2 \approx 0,104.$$

Таким образом, при подключении сопротивления 400 ом амплитуда напряжения на выходе уменьшится в

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{0,35}{0,104} \approx 3,36 \text{ раз.}$$

1.10. Уравнение фазовой характеристики (задача 1.1) имеет вид

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{1}{\omega RC}.$$

Воспользуемся разложением в ряд Тейлора, ограничиваясь первой степенью разложения:

$$\varphi(\omega) = \varphi(\omega_0) + \frac{\omega - \omega_0}{1} \varphi'(\omega_0),$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{1}{\omega_0 RC} - \frac{\omega - \omega_0}{1} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\omega_0 RC} \right)^2} \cdot \frac{RC}{(\omega_0 RC)^2}.$$

Так как по условию задачи $\omega_0 RC = \frac{\omega_0}{\omega_0} = 1$,

то

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \arctg 1 - (\omega - \omega_0) \frac{1}{1 + 1} RC = \\ &= \arctg 1 - (\omega - \omega_0) \frac{1}{2 \omega_0}. \end{aligned}$$

Итак, окончательно уравнение «линеаризованной» фазовой характеристики запишется в виде

$$\varphi(\omega) = \arctg 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\omega}{\omega_0} \approx 1,285 - 0,5 \frac{\omega}{\omega_0}.$$

На рис. Р.1.4 даны для сопоставления графики реальной и линейризованной характеристик.

Вернемся к условиям задачи. Нам нужно найти отклонения реальной фазовой характеристики от линейной в двух точках:

$$\omega_1 = 0,8 \omega_0 \text{ и } \omega_2 = 1,2 \omega_0.$$

Найдём значения фазовой характеристики по реальной кривой:

$$\varphi_p(\omega_1) = \operatorname{arctg} \frac{1}{\omega_1 RC} =$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{1}{0,8} \approx 0,897,$$

$$\varphi_p(\omega_2) = \operatorname{arctg} \frac{1}{\omega_2 RC} =$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{1}{1,2} \approx 0,696.$$

Теперь найдём значения фазовой характеристики по линейризованной кривой:

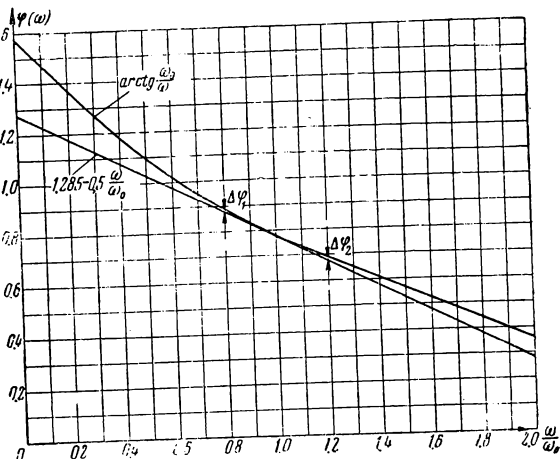


Рис. Р. 1.4

$$\varphi_{\lambda}(\omega_1) = 1,285 - 0,5 \cdot 0,8 = 0,885,$$

$$\varphi_{\lambda}(\omega_2) = 1,285 - 0,5 \cdot 1,2 = 0,685.$$

Итак, абсолютные отклонения фазовой характеристики от линейной составляют:

$$\Delta\varphi_1 = 0,012;$$

$$\Delta\varphi_2 = 0,011,$$

а относительные:

$$\frac{\Delta\varphi_1}{\varphi_p(\omega_1)} = \frac{0,012}{0,897} = 0,0134 \text{ или } 1,34\%,$$

$$\frac{\Delta\varphi_2}{\varphi_p(\omega_2)} = \frac{0,011}{0,696} = 0,0157 \text{ или } 1,57\%$$

1.15. По условию:

$$1) \ln \frac{U_1}{U_2} = 1; \quad 2) \ln \frac{U_1}{U_2} = -1.$$

Потенцируя, находим:

$$1) \frac{U_1}{U_2} = e^1 = 2,718;$$

$$2) \frac{U_1}{U_2} = e^{-1} = 0,368.$$

Итак, плюс 1 *нел* соответствует числу e , а минус 1 *нел* соответствует числу $0,368$.

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 2

2.1. Прежде всего найдём обобщённую расстройку ξ , соответствующую заданной расстройке Δf :

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{2\pi\Delta f}{R} 2L = \frac{2\pi\Delta f}{R} 2 \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C} = \\ &= \frac{2\pi \cdot 6 \cdot 10^3 \cdot 2}{20 \cdot 4 \cdot \pi^2 (3 \cdot 10^6)^2 \cdot 60 \cdot 10^{-12}} = 0,177 \end{aligned}$$

Полное сопротивление контура

$$Z(\omega) = R \sqrt{1 + \xi^2} = 20 \sqrt{1 + 0,177^2} = 20,4 \text{ ом}$$

Амплитуда тока в контуре

$$I = \frac{U_1}{Z(\omega)} = \frac{1}{20,4} = 0,049 \text{ а} = 49 \text{ ма}$$

Реактивное сопротивление

$$X = \xi R = 20 \cdot 0,177 = 3,54 \text{ ом.}$$

Так как расстройка положительна, характер реактивного сопротивления соответствует индуктивности.

Амплитуда выходного напряжения

$$U_0 = U_1 \frac{Q}{\sqrt{1 + \xi^2}} = U_1 \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} \frac{\omega_0 RC}{1} = 1 \cdot \frac{44,2}{\sqrt{1 + 0,177^2}} \approx 43 \text{ в}$$

$$Q = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{10^{12}}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^6 \cdot 20 \cdot 60} \approx 44,2$$

Фазовые углы

$$\operatorname{tg} \varphi_{U_0 \rightarrow U_1} = \frac{1}{\xi} = \frac{1}{0,177} = 5,66;$$

$$\operatorname{tg} \varphi_{U_1 \rightarrow I} = \xi = 0,177.$$

Найденным значениям тангенсов соответствует множество значений углов.

$$\varphi_{U_0 \rightarrow U_1} \approx 79^\circ 58', \quad -100^\circ 02' \quad \text{и др.},$$

$$\varphi_{U_1 \rightarrow I} \approx 10^\circ 02', \quad -169^\circ 58' \quad \text{и др.}$$

Для того, чтобы выбрать из всех возможных решений правильное, нужно привлечь, кроме формулы, дополнительные соображения. С этой целью построим векторную диаграмму (рис. P.2.1).

Так как при положительной расстройке ($\Delta f > 0$) напряжение опережает ток, то угол $\varphi_{U_1 \rightarrow I}$ будет положительным и лежать в пределах $0 < \varphi_{U_1 \rightarrow I} < 90^\circ$. Следовательно, $\varphi_{U_1 \rightarrow I} = 10^\circ 02'$.

Напряжение на конденсаторе U_2 отстаёт от тока на 90° ; угол $\varphi_{U_2 \rightarrow U_1}$, таким образом, отрицательный и лежит в пределах $-180^\circ < \varphi_{U_2 \rightarrow U_1} < -90^\circ$. Следовательно, $\varphi_{U_2 \rightarrow U_1} = -100^\circ 02'$.

Относительная ошибка:

$$|\delta| = \frac{\Delta f}{2f_0} = \frac{6}{2 \cdot 3 \cdot 10^3} = 1 \cdot 10^{-3} = 0,1\%$$

2.3. Указание к решению.

Из выражения

$$K(\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{Q}{\sqrt{1 + \xi^2}} = m$$

находим ξ

$$\xi = \pm \sqrt{\frac{Q^2}{m^2} - 1}$$

Так как

$$\xi = \frac{\Delta \omega}{\alpha} = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha}, \quad \alpha = \frac{\omega_0}{2Q},$$

то

$$f = f_0 \left(1 \pm \frac{1}{2Q} \sqrt{\left(\frac{Q}{m}\right)^2 - 1} \right).$$

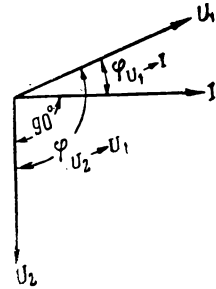


Рис. Р. 2 1

(Последняя формула является расчётной.)

2.4. Мощность в контуре при резонансе

$$P_{\kappa} = \frac{I^2 R}{2} = \frac{U^2}{(R_i + R)^2} \cdot \frac{R}{2}.$$

Взяв производную по R и приравняв её нулю, находим искомое условие

$$\frac{dP_{\kappa}}{dR} = \frac{U^2}{2} \cdot \frac{(R_i + R)^2 - R \cdot 2(R_i + R)}{(R_i + R)^4} = 0;$$

$$R_i + R - 2R = 0;$$

$$R_i = R.$$

2.6 Указание к решению.

Магнитная энергия при резонансе: $\frac{L I_0^2}{2}$.

Энергия потерь за период: $\frac{I_0^2 R}{2} T = \frac{U^2}{2R} T$.

Электрическая энергия при резонансе: $\frac{C(\Delta U)^2}{2}$.

2.8. Из 2.18 находим, что

$$\Delta C^* = C_{\max} - C_0 = C_0 - C_{\min} = \frac{C_0}{Q} = \frac{300}{79,2} = 3,79 \approx 3,8$$

Таким образом,

$$C_{\max} = C_0 + \Delta C^* = 300 + 3,8 = 303,8 \text{ пф};$$

$$C_{\min} = C_0 - \Delta C^* = 300 - 3,8 = 296,2 \text{ пф}.$$

2.10 Сопоставляя выражения

$$\frac{1}{\omega C} = 220,$$

$$\omega L = 178,$$

находим, что $\frac{L}{C} = 220 \cdot 178$.

Добротность контура, следовательно, равна

$$Q = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} = \frac{\sqrt{220 \cdot 178}}{4} = 49,5.$$

2.11. Из двух равенств:

$$f_{\text{мин}}^2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \frac{1}{LC_{\text{макс}}}$$

$$f_{\text{макс}}^2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \frac{1}{LC_{\text{мин}}}$$

получаем

$$\frac{C_{\text{макс}}}{C_{\text{мин}}} = \left(\frac{f_{\text{макс}}}{f_{\text{мин}}} \right)^2.$$

Так как обычно $C_{\text{мин}}$ соответствует начальной ёмкости переменного конденсатора C_{\bullet} , то можно написать

$$C_{\text{макс}} = C_{\bullet} \left(\frac{f_{\text{макс}}}{f_{\text{мин}}} \right)^2.$$

2.12. В данном случае

$$\frac{C_{\text{макс}}}{C_{\text{мин}}} = \frac{500}{50} = 10$$

т. е. следовательно, одним конденсатором при постоянной индуктивности можно охватить перекрытие частоты

$$\frac{f_{\text{макс}}}{f_{\text{мин}}} = \sqrt{\frac{C_{\text{макс}}}{C_{\text{мин}}}} = \sqrt{10} \approx 3,15.$$

Так как по условию

$$\frac{f_{\text{макс}}}{f_{\text{мин}}} = \frac{800}{100} = 8$$

катушку нужно разбить на две секции, т. е. два поддиапазона.

В первом диапазоне границы: 100 кГц — 300 кГц, во втором диапазоне границы: 300 кГц — 900 кГц.

Теперь расчёт индуктивностей для каждого из поддиапазонов не представляет труда:

$$L_1 = \frac{1}{4\pi^2 f_1^2 C_{\text{мин}}} = \frac{1}{4\pi^2 f_1^2 C_{\text{макс}}} = \frac{10^{12}}{4\pi^2 \cdot (10^5)^2 \cdot 500} = 5 \cdot 10^{-8} = 5 \text{ мкГн.}$$

$$L_2 = \frac{1}{4\pi^2 f_2^2 C_{\text{мин}}} = \frac{1}{4\pi^2 f_2^2 C_{\text{макс}}} = \frac{10^{12}}{4\pi^2 \cdot 300^2 \cdot 10^8 \cdot 500} \approx 0,56 \text{ мкГн.}$$

Катушка должна иметь общую индуктивность 5 мкГн и один отвод, соответствующий индуктивности 0,56 мкГн.

2.14. Искомая частота f найдётся из уравнения

$$X_f \approx 2\Delta\omega L = 2(\omega - \omega_{\bullet}) L,$$

решая которое относительно f , получаем

$$f = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{LC}} + \frac{X_f}{2L} \right).$$

Подставляя условия задачи, будем иметь

$$f = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{100 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 10^{-12}}} + \frac{30}{2 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} \right) \approx 1.6 \cdot 10^5 \text{ гц.}$$

2.15. Непосредственно по схеме составляем исходное выражение

$$K(i\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\frac{R_2 \frac{1}{i\omega C}}{R_2 + \frac{1}{i\omega C}}}{R_1 + i\omega L + \frac{R_2 \frac{1}{i\omega C}}{R_2 + \frac{1}{i\omega C}}}.$$

Упростим исходное выражение с помощью простых преобразований:

$$\begin{aligned} K(i\omega) &= \frac{\frac{R_2}{1 + i\omega C R_2}}{R_1 + i\omega L + \frac{R_2}{1 + i\omega C R_2}} = \frac{R_2}{R_1 + i\omega L + i\omega C R_1 R_2 - \omega^2 L C R_2 + R_2} = \\ &= \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} - \omega^2 L C + i\omega C R_1 + i \frac{\omega L}{R_2}}. \end{aligned}$$

Вычислим модуль последнего выражения:

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{R_1}{R_2} - \omega^2 L C\right)^2 + \left(\omega C R_1 + \frac{\omega L}{R_2}\right)^2}}.$$

2.16. Резонансная частота находится из условия $X_{ex} = 0$.

Так как

$$Z_{ex} = R_1 + i\omega L + \frac{R_2 \frac{1}{i\omega C}}{\frac{1}{i\omega C} + R_2},$$

то

$$X_{ex} = \omega L - \frac{\omega C R_2^2}{1 + \omega^2 C^2 R_2^2}.$$

Приравняв X_{ex} нулю и решая уравнение относительно ω_0 , получаем

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R_2^2}{R_1^2}}.$$

где

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Подставляя значение резонансной частоты ω_0 в выражение для коэффициента передачи (задача 2.15)

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{R_1}{R_2} - \omega^2 LC\right)^2 + \left(\omega CR_1 + \frac{\omega L}{R_2}\right)^2}}$$

и совершая преобразования, находим

$$K(\omega_0) = \frac{Q}{1 + Q^2 \frac{R_1}{R_2}}$$

где

$$Q = \frac{\rho}{R_1}$$

При $R_2 = \infty$, $K(\omega_0) = Q$.

2.17. В данном случае (задача 2.16)

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{Q}{1 + Q^2 \frac{R_1}{R_2}} = \frac{100}{1 + 10^4 \frac{10}{10^5}} = 50.$$

Если $U_1 = 1$ в, то $U_2 = 50$ в.

Полезно отметить, что резонансная частота при этих условиях остаётся практически прежней

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 + \frac{10}{10^5}} \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

2.18. В данном случае расстройки велики и приближёнными формулами пользоваться нельзя. Ток в контуре определяется точным выражением

$$I = \frac{U_1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U_1}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2}}$$

При частоте $n\omega_0$ получаем

$$I_{n\omega_0} = \frac{U_1}{R \sqrt{1 + \frac{n^2 \omega_0^2 L^2}{R^2} \left(1 - \frac{\omega_0^2}{n^2 \omega_0^2}\right)^2}}, \quad I_{\omega_0} = \frac{U_1}{R}$$

Так как $\frac{\omega_0 L}{R} = Q$, то

$$I_{n\omega_0} = \frac{U_1}{R \sqrt{1 + n^2 Q^2 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^2}}$$

Полагая, что $Q \gg 1$, приближённо получаем

$$I_{n\omega_0} \approx \frac{U_1 n}{R Q (n^2 - 1)}$$

Сопоставляя выражения для $I_{n\omega_0}$ и I_{ω_0} , будем иметь

$$I_{n\omega_0} = \frac{I_{\omega_0} n}{Q (n^2 - 1)}$$

Например, при $n = 2$, получаем

$$I_2 = \frac{2 I_1}{3Q}$$

2.20. Найдём выражение для тока I_R

$$\bar{I}_R = \bar{I} - \bar{I}_C$$

Ток \bar{I}_C можно выразить через ток \bar{I}_R

$$\bar{I}_C \frac{1}{i \omega C} = \bar{I}_R R.$$

откуда

$$\bar{I}_C = \bar{I}_R i \omega CR.$$

Таким образом,

$$\bar{I}_R = \bar{I} - \bar{I}_R i \omega CR$$

или

$$\bar{I}_R = \frac{\bar{I}}{1 + i \omega CR}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \frac{\bar{U}_1}{i \omega L + \frac{R \frac{1}{i \omega C}}{R + \frac{1}{i \omega C}}} = \frac{\bar{U}_1}{i \omega L + \frac{R}{1 + i \omega CR}} = \\ &= \frac{U_1 (1 + i \omega CR)}{i \omega L - \omega^2 LCR + R} = \frac{\bar{U}_1 (1 + i \omega CR)}{R \left(1 - \omega^2 LC + i \frac{\omega L}{R} \right)}. \end{aligned}$$

Подставляя это значение в выражение для \bar{I}_R , получим

$$\bar{I}_R = \frac{\bar{U}_1}{R \left(1 - \omega^2 LC + i \frac{\omega L}{R} \right)}.$$

Подберём L и C так, чтобы на данной частоте $\omega^2 LC = 1$, тогда

$$\bar{I}_R = -i \frac{\bar{U}_1}{\omega L}; \quad I_R = \frac{U_1}{\omega L}$$

и не будет зависеть от величины сопротивления R .

В этой задаче не были учтены активное сопротивление катушки и внутреннее сопротивление генератора, которые ухудшают стабилизацию тока I_R .

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 3

3.1. По ф-ле (3.2) находим

$$R_{\alpha} = \frac{L}{CR} = \frac{100 \cdot 10^{-6}}{10 \cdot 100 \cdot 10^{-12}} = 10^5 \text{ ом.}$$

3.4. Находим резонансную частоту

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{240 \cdot 10^{-6} \cdot 120 \cdot 10^{-12}}} = 940 \cdot 10^3 \text{ гц.}$$

Находим абсолютную расстройку

$$\Delta f = f - f_0 = 935 - 940 = -5 \text{ кгц.}$$

Находим обобщённую расстройку

$$\xi = \frac{\Delta \omega}{\alpha} = \frac{2\pi \Delta f}{\frac{R}{2L}} = \frac{-2\pi \cdot 5 \cdot 10^3}{\frac{20}{2 \cdot 240 \cdot 10^{-6}}} = -0,755.$$

Определяем эквивалентное сопротивление при резонансе

$$R_{\alpha} = \frac{L}{CR} = \frac{240 \cdot 10^{-6}}{120 \cdot 10^{-12} \cdot 20} = 10^5 \text{ ом.}$$

Активная составляющая (ф-ла 3.3) будет равна

$$R_p = \frac{R_{\alpha}}{1 + \xi^2} = \frac{10^5}{10 + (-0,755)^2} = 63,8 \cdot 10^3 \text{ ом.}$$

Реактивная составляющая (ф-ла 3.4)

$$X_p = -\xi R_p = -(-0,755) 63,8 \cdot 10^3 = 48,2 \cdot 10^3 \text{ ом.}$$

Так как расстройка отрицательна — характер сопротивления индуктивный. Полное сопротивление

$$Z(\omega) = \frac{R_{\alpha}}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \frac{10^5}{\sqrt{1 + 0,755^2}} \approx 80 \cdot 10^3 \text{ ом.}$$

3.6. В данном случае сопротивление контура существенно меньше внутреннего сопротивления генератора и поэтому ток в неразветвленной цепи будет в основном определяться внутренним сопротивлением генератора; минимум резонансной кривой по току будет „размыт“ (рис. 3.4а). Настройку целесообразно вести по вольтметру, включённому параллельно контуру: максимум резонансной кривой по напряжению заметно „острее“ (рис. 3.4 б).

Шкала вольтметра должна соответствовать максимальному напряжению на контуре

$$U_{\kappa} = I_a R_{\alpha} = 10 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 10^3 = 200 \text{ в.}$$

3.7. Рассуждениями, совершенно аналогичными рассуждениям в задаче 3.6, устанавливаем, что при данных условиях целесообразно вести настройку по амперметру. Амперметр должен быть включен в неразветвленную цепь.

В этом случае шкала определится значением тока в неразветвленной цепи при максимальной расстройке, т. е. при $\xi \approx 1$

$$\bar{I}_a = \frac{\bar{U}}{R_i + Z(i\omega)} = \frac{\bar{U}}{R_i + R_{\alpha} + iX_{\beta}} = \frac{\bar{U}}{R_i + \frac{R_{\alpha}}{1 + \xi^2} - i \frac{R_{\alpha}}{1 + \xi^2} \xi}$$

Вычисляя модуль тока I_a , получим

$$I_a = \frac{U}{\sqrt{\left(R_i + \frac{1}{2}R_{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}R_{\alpha}\right)^2}} = \frac{200}{\sqrt{(10^4 + 2,5 \cdot 10^4)^2 + 2,5^2 \cdot 10^8}} =$$

$$= 4,65 \cdot 10^{-3} \text{ а;}$$

$$I_a = 4,65 \text{ ма.}$$

3.10. Мощность в контуре определяется ф-лой (3.11)

$$P = \frac{I_a^2}{2} R_{\alpha}$$

Для расчёта I_a воспользуемся ф-лой (3.10)

$$I_a = \frac{I_{\kappa}}{Q} = \frac{0,6}{30} = 20 \cdot 10^{-3} \text{ а} = 20 \text{ ма.}$$

Теперь найдём мощность

$$P = \frac{(20 \cdot 10^{-3})^2}{2} \cdot 40 \cdot 10^3 = 8 \text{ вт.}$$

3.14. Выражение для входного сопротивления простого параллельного контура (рис. 3.1) имеет вид

$$Z(i\omega) = \frac{(R + i\omega L) \frac{1}{i\omega C}}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

Резонансная частота находится из условия $X = 0$. Избавляясь от мнимости в знаменателе и приравняв мнимую часть числителя нулю, получаем

$$\frac{R^2}{\omega_0 C} + \frac{L}{C} \left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} \right) = 0,$$

откуда

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2}{C}}$$

Так как $\frac{L}{C} = \rho^2$, окончательно имеем

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \left(\frac{R}{\rho}\right)^2}$$

Конечно, тот же ответ мы бы получили, если бы воспользовались общим условием (3.14):

$$X_1 (R_2^2 + X_2^2) + X_2 (R_1^2 + X_1^2) = 0.$$

В данном случае для простого контура:

$$X_1 = \omega L,$$

$$R_1 = R,$$

$$X_2 = -\frac{1}{\omega C},$$

$$R_2 = 0.$$

Подставляя эти значения, получаем уравнение

$$-\frac{L}{C} + R^2 + \omega_0^2 L^2 = 0$$

из которого легко находим ω_0

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \left(\frac{R}{\rho}\right)^2}$$

3.15. Выражение для входного сопротивления имеет вид

$$Z(i\omega) = \frac{(R_1 + i\omega L) \left(R_2 + \frac{1}{i\omega C} \right)}{R_1 + R_2 + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}$$

Избавившись от мнимости в знаменателе и приравняв мнимую часть числителя нулю, получаем уравнение

$$\omega_0^2 R_2^2 - \frac{\omega_0 L^2}{C} + \frac{L}{\omega_0 C^2} - \frac{R_1^2}{\omega_0 C} = 0.$$

откуда

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{R_1}{\rho}\right)^2}{1 - \left(\frac{R_2}{\rho}\right)^2}}$$

При $R_1 \ll \rho$ и $R_2 \ll \rho$

$$\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Рекомендуем читателю получить тот же результат, исходя из общего условия (3.14).

3.17. Составляем общее выражение для входного сопротивления

$$Z(i\omega) = \frac{(R_1 + iX_1) \frac{R_2 iX_2}{R_2 + iX_2}}{(R_1 + iX_1) + \frac{R_2 iX_2}{R_2 + iX_2}}$$

Проделявая элементарные преобразования (с учётом того, что $R_1 \ll X_1$), получаем

$$Z(i\omega) = \frac{X_1 X_2 R_2}{X_1 X_2 - R_1 R_2 - i(X_1 R_2 + X_2 R_1 + R_2 X_2)}$$

Резонансная частота определится из условия

$$X_1 R_2 + X_2 R_1 + R_2 X_2 = 0$$

или

$$\omega_0 L R_2 - \frac{R_1}{\omega_0 C} - \frac{R_2}{\omega_0 C} = 0,$$

откуда

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 + \frac{R_1}{R_2}}$$

Если $R_1 \ll R_2$, то $\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Сопротивление при резонансе будет равно

$$\begin{aligned} Z(\omega_0) = R_{\Sigma} &= \frac{X_1 X_2 R_2}{X_1 X_2 - R_1 R_2} = \frac{-\omega_0 L \frac{1}{\omega_0 C} R_2}{-\omega_0 L \frac{1}{\omega_0 C} - R_1 R_2} = \\ &= \frac{\frac{L}{C} R_2}{\frac{L}{C} + R_1 R_2} = \frac{\rho^2}{R_1 + \frac{\rho^2}{R_2}} \end{aligned}$$

Здесь $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

При $R_2 \rightarrow \infty$ формула для $Z(\omega_0)$ переходит в формулу для простого параллельного контура.

3.18. Подставляем в формулу, полученную в предыдущей задаче, условия настоящей задачи:

$$Z(\omega_0) = \frac{\rho^2}{R_1 + \frac{\rho^2}{R_2}} = \frac{\frac{L}{C}}{R_1 + \frac{L}{CR_2}} = \frac{9 \cdot 10^{-6}}{100 \cdot 10^{-12}} = 15 \cdot 10^5 \text{ ом.}$$

$$3 + \frac{9 \cdot 10^{-6}}{100 \cdot 10^{-12} \cdot 30 \cdot 10^3}$$

Заметим, что эту задачу можно было решить и так: определить резонансное сопротивление R_{Σ} простого параллельного контура, т. е. при $R_2 \rightarrow \infty$, и затем

уже резонансное сопротивление сложного контура (рис. 3.10) как сопротивление R_{α} , параллельно соединенное с R_2 .

3.19. Из формулы (задача 3.17)

$$R_{\alpha} = \frac{\rho^2}{R_1 + \frac{\rho^2}{R_2}}$$

определяем R_2

$$R_2 = \frac{\rho^2}{\left(\frac{\rho^2}{R_{\alpha}} - R_1\right)} = \frac{\rho^2}{\left(\frac{\rho^2}{R_1} - R_1\right)}.$$

Очевидно подобным способом можно изменять R_{α} , если выполняется неравенство

$$\frac{\rho^2}{R_i} > R_1,$$

т. е.

$$\frac{l}{C} > R_i R_1.$$

3.22. 1) Реактивная составляющая входного сопротивления

$$X_{ex} = \frac{X_1 X_2}{X_1 + X_2} = \frac{-\frac{L_1}{C_2}}{\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_2}} = \frac{-\frac{L_1}{C_2}}{\sqrt{\frac{L_1}{C_2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}} = \frac{-\sqrt{\frac{L_1}{C_2}}}{\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}}.$$

График этой зависимости дан на рис. Р.3.1а.

2) Активная составляющая входного сопротивления

$$R_{ex} = \frac{R_{\alpha}}{1 + \xi^2} = \frac{L}{C} \frac{R}{R^2 + X^2}$$

при $R \rightarrow 0$ и $X = 0$ вырождается в бесконечно узкую линию бесконечной высоты, так называемую δ -функцию (рис. Р.3.1б).

3.23. Так как сопротивление простого параллельного контура без потерь равно бесконечности, то из условия равенства сопротивлений получаем, что

$$R' = R_{\alpha} = \frac{L}{CR}.$$

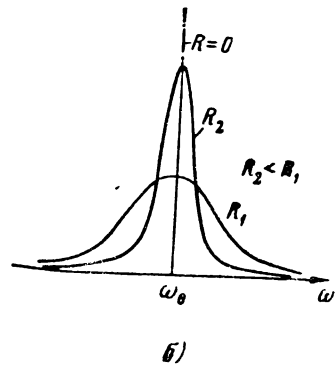
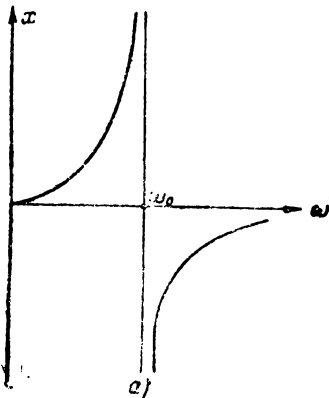


Рис. Р. 3.1

3.24. В данной задаче расстройки велики и пользование формулами, содержащими приближенное равенство $\omega L - \frac{1}{\omega C} \approx 2 \Delta \omega L$ привело бы к большой ошибке. Поэтому будем исходить из формулы

$$Z(i\omega) = \frac{\frac{L}{C}}{R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}$$

При частоте $\omega = \omega_0$ получаем

$$Z(\omega_0) = \frac{L}{RC}$$

При частоте $\omega = n \omega_0$ будем иметь

$$\begin{aligned} Z(in\omega_0) &= \frac{\frac{L}{C}}{R + i \left(n\omega_0 L - \frac{1}{n\omega_0 C} \right)} = \frac{\frac{L}{CR}}{1 + i \frac{\omega_0 L}{R} \left(n - \frac{1}{n\omega_0^2 LC} \right)} \\ &= \frac{R\alpha}{1 + i Q \left(n - \frac{1}{n} \right)} \end{aligned}$$

Вычисляя модуль последнего выражения, получим

$$Z(n\omega_0) = \frac{R\alpha}{\sqrt{1 + Q^2 \left(n - \frac{1}{n} \right)^2}}$$

Сравним теперь $Z(\omega_0)$ с $Z(n\omega_0)$:

$$\frac{Z(\omega_0)}{Z(n\omega_0)} = \sqrt{1 + Q^2 \left(n - \frac{1}{n} \right)^2}$$

Так как $Q \gg 1$, то можно считать, что

$$Z(\omega_0) \approx Q \left(n - \frac{1}{n} \right) Z(n\omega_0) = Q \left(\frac{n^2 - 1}{n} \right) Z(n\omega_0)$$

$$3.25. \quad Z(\omega_0) = \frac{L}{CR} = \frac{250 \cdot 10^{-6}}{1000 \cdot 10^{-12} \cdot 5} = 50 \cdot 10^3 \text{ ом};$$

$$Q = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} = \frac{\sqrt{\frac{250 \cdot 10^{-6}}{1000 \cdot 10^{-12}}}}{5} = 100;$$

$$Z(n\omega_0) = \frac{Z(\omega_0)}{Q \left(n - \frac{1}{n} \right)} = \frac{50 \cdot 10^3}{100 \left(2 - \frac{1}{2} \right)} \approx 333 \text{ ом}.$$

3.26. Из ф-лы (3.19)

$$R_{\alpha} = \left(\frac{L_1}{L_1 + L_2} \right)^2 \frac{\omega_0^2 (L_1 + L_2)^2}{R} = \rho^2 \frac{\omega_0^2 L_0^2}{R}$$

легко получаем

$$\rho = \frac{\sqrt{RR_{\alpha}}}{\omega_0 L_0}.$$

Так как

$$\rho = \frac{L_1}{L_1 + L_2} = \frac{\frac{L_1}{L_2}}{1 + \frac{L_1}{L_2}},$$

то по найденному выше значению ρ легко рассчитать отношение

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{\rho}{1 - \rho}.$$

3.27. Резонансная частота контура

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{150 \cdot 10^{-6} \cdot 600 \cdot 10^{-12}}} \approx 3,33 \cdot 10^6 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}.$$

Находим параметр ρ

$$\rho = \frac{\sqrt{R R_{\alpha}}}{\omega_0 L_0} = \frac{\sqrt{10 \cdot 10^6}}{3,33 \cdot 10^6 \cdot 150 \cdot 10^{-6}} \approx 0,63.$$

Рассчитаем соотношение индуктивностей

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{0,63}{1 - 0,63} \approx 1,7.$$

Так как $L_1 + L_2 = L_0 = 150$ мкГн, то

$$L_1 = 0,63 L_0 = 0,63 \cdot 150 = 94,5 \text{ мкГн},$$

$$L_2 = 0,37 L_0 = 0,37 \cdot 150 = 55,5 \text{ мкГн}.$$

3.28. Частоту параллельного резонанса определяем из условия (3.15)

$$X_1 + X_2 = 0,$$

т. е.

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C_2} - \frac{1}{\omega_0 C_1} = 0.$$

Решая уравнение относительно ω_0 , получим

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_0}},$$

где

$$C_0 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Сопротивление при резонансе определяем по ф-ле (3.17)

$$R_x = \frac{\left(\frac{1}{\omega_0 C_1}\right)^2}{R} = \frac{1}{\omega_0^2 C_1^2 R} = \frac{LC_0}{C_1^2 R} = \left(\frac{C_0}{C_1}\right)^2 \frac{L}{C_0 R} = \rho^2 \frac{L}{C_0 R}$$

где

$$\rho = \frac{C_0}{C_1}$$

3.29. Из формулы $R_x = \rho^2 \frac{L}{C_0 R}$

находим ρ

$$\rho = \sqrt{\frac{C_0}{L}} \cdot \sqrt{R R_x}$$

Подставляя условия задачи, получим

$$\rho = \sqrt{\frac{500 \cdot 10^{-12}}{150 \cdot 10^{-6}}} \cdot \sqrt{10 \cdot 10^4} \approx 0,58$$

Так как

$$\rho = \frac{C_0}{C_1}$$

то

$$C_1 = \frac{C_0}{\rho} = \frac{500}{0,58} = 861 \text{ пф.}$$

Ёмкость C_2 определяем из формулы

$$C_0 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

откуда

$$C_2 = \frac{C_0}{1 - \rho} = \frac{500}{1 - 0,58} = 1190 \text{ пф}$$

3.30. Из формулы

$$R_x = \rho^2 \frac{\omega_0^2 L_0^2}{R}$$

находим L_0

$$L_0 = \frac{\sqrt{R R_x}}{\rho \omega_0} \quad (1)$$

Далее из формулы

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C}}$$

находим C

$$C = \frac{1}{\omega_0^2 L_0} \quad (2)$$

Наконец, сопоставляя выражения

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C}} \quad (a)$$

$$2\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C}} \quad (б)$$

находим, что

$$\frac{L_2}{L_0} = \frac{1}{4}.$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} L_2 &= \frac{1}{4} L_0 \\ L_1 &= \frac{3}{4} L_0 \\ \rho &= \frac{L_1}{L_0} = \frac{3}{4} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Формулы (1), (2) и (3) дают возможность рассчитать контур по поставленным выше условиям.

Заметим в заключение, что схема рис. 3.15 позволяет подавлять только высшие гармоники, что следует из выражений (а) и (б), так как $L_0 > L_2$.

3.31. Пользуемся формулами, полученными в предыдущей задаче:

$$L_0 = \frac{\sqrt{R R_{\alpha}}}{\rho \omega_0} = \frac{\sqrt{5 \cdot 10^4}}{\frac{3}{4} \cdot 3,77 \cdot 10^6} = 79,1 \cdot 10^{-6} \text{ гн} = 79,1 \text{ мкгн.}$$

$$C = \frac{1}{\omega_0^2 L_0} = \frac{1}{(3,77 \cdot 10^6)^2 \cdot 79,1 \cdot 10^{-6}} = 891 \cdot 10^{-12} \text{ ф} = 891 \text{ пф.}$$

$$L_1 = \frac{3}{4} L_0 = 0,75 \cdot 79,1 = 59,3 \text{ мкгн.}$$

$$L_2 = \frac{1}{4} L_0 = 0,25 \cdot 79,1 = 19,8 \text{ мкгн.}$$

32. Из формулы $R_{\alpha} = \frac{1}{\omega_0^2 C_1^2 R}$ определяем C_1

$$C_1 = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{R R_{\alpha}}} \quad (1)$$

Сопоставляя далее выражения:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L C_0}} \quad (a)$$

$$\frac{1}{2} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L C_2}} \quad (б)$$

находим

$$C_2 = 4 C_0. \quad (2)$$

Имея в виду, что (см. задачу № 3. 24)

$$C_2 = \frac{C_0}{1-p},$$

находим

$$p = 1 - \frac{C_0}{C_2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \quad (3)$$

Преобразуя ф-лу (2) к виду

$$C_2 = 4 C_0 = 4 \frac{C_0}{C_1} C_1 = 4p C_1.$$

получаем формулы для расчёта

$$C_2 = 4 \frac{3}{4} C_1 = 3 C_1. \quad (4)$$

$$C_0 = \frac{C_2}{4} = \frac{3}{4} C_1. \quad (5)$$

Индуктивность L найдётся из выражения (а)

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C_0}. \quad (6)$$

Формулы (1), (4), (5) и (6) решают поставленную задачу

3.33. Пользуясь формулами, полученными в предыдущей задаче, можно определить:

$$C_1 = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{R R_{\text{в}}}} = \frac{1}{\pi \cdot 10^7 \sqrt{10 \cdot 10^4}} \approx 100 \cdot 10^{-12} \text{ ф} \approx 100 \text{ пф},$$

$$C_2 = 3 C_1 \approx 300 \text{ пф},$$

$$C_0 = \frac{3}{4} C_1 \approx 75 \text{ пф},$$

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C_0} = \frac{1}{\pi^2 (10^7)^2 \cdot 75 \cdot 10^{-12}} \approx 13,5 \cdot 10^{-6} \text{ гн} = 13,5 \text{ мкгн}$$

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 4

4.1. В соответствии с ф-лой (4.1) имеем:

$$\frac{1}{i \omega C_{\text{в}}} = \frac{\frac{1}{i \omega C_1} \frac{1}{i \omega C_2}}{\frac{1}{i \omega C_1} + \frac{1}{i \omega C_2} + \frac{1}{i \omega C_3}}.$$

$$\frac{1}{i\omega C_a} = \frac{\frac{1}{i\omega C_3} \cdot \frac{1}{i\omega C_2}}{\frac{1}{i\omega C_1} + \frac{1}{i\omega C_2} + \frac{1}{i\omega C_3}}$$

$$\frac{1}{i\omega C_c} = \frac{\frac{1}{i\omega C_2} \cdot \frac{1}{i\omega C_1}}{\frac{1}{i\omega C_1} + \frac{1}{i\omega C_2} + \frac{1}{i\omega C_3}}$$

Сокращая на $i\omega$, получим

$$\frac{1}{C_a} = \frac{\frac{1}{C_1 C_3}}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} = \frac{C_2}{C_2 C_3 + C_1 C_3 + C_1 C_2}$$

$$\frac{1}{C_b} = \frac{C_1}{C_2 C_3 + C_1 C_3 + C_1 C_2}$$

$$\frac{1}{C_c} = \frac{C_3}{C_2 C_3 + C_1 C_3 + C_1 C_2}$$

Находим C_a, C_b, C_c :

$$C_a = \frac{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_1 C_3}{C_2} = \frac{A}{C_2}$$

$$C_b = \frac{A}{C_1}$$

$$C_c = \frac{A}{C_3}$$

Вычислим по условиям задачи величину A :

$$A = C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_1 C_3 = 50 \cdot 50 + 50 \cdot 10 + 50 \cdot 10 = 3500 \text{ нФ}^2$$

тогда

$$C_a = \frac{A}{C_2} = \frac{3500}{50} = 70 \text{ нФ},$$

$$C_b = \frac{A}{C_1} = \frac{3500}{50} = 70 \text{ нФ},$$

$$C_c = \frac{A}{C_3} = \frac{3500}{10} = 350 \text{ нФ}.$$

4.2. Исследуя выражение для коэффициента связи на минимальное значение, получаем:

$$\frac{d}{d\omega} |X_{cs}| = M - \frac{1}{C_{cs} \omega_m^2} = 0$$

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{M C_{cs}}}$$

$$X_m = \omega_m M + \frac{1}{\omega_m C_{cs}} = 2\sqrt{\frac{M}{C_{cs}}}$$

Далее составляем по условию задачи очевидные уравнения:

$$\omega_1 M + \frac{1}{\omega_1 C_{св}} = p X_m, \quad (a)$$

$$\omega_2 M + \frac{1}{\omega_2 C_{св}} = p X_m \quad (б)$$

Вычитая из (а) ур-ние (б), получим

$$(\omega_1 - \omega_2) M + \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1 \omega_2 C_{св}} = 0,$$

откуда

$$\omega_1 \omega_2 = \frac{1}{M C_{св}} = \omega_m^2. \quad (1)$$

Складывая ур-ния (а) и (б), находим

$$(\omega_1 + \omega_2) M + \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{\omega_1 \omega_2 C_{св}} = 2p X_m$$

или

$$(\omega_1 + \omega_2) \left[M + \frac{1}{\omega_m^2 C_{св}} \right] = 2p X_m.$$

откуда

$$\omega_1 + \omega_2 = \frac{2p X_m}{M + \frac{1}{\omega_m^2 C_{св}}} = \omega_m 2p. \quad (2)$$

Решение системы (1) и (2) даёт возможность рассчитать частоты ω_1 и ω_2 . Решая эту систему, получаем

$$\omega_{1,2} = \omega_m (p \pm \sqrt{p^2 - 1}).$$

Последняя формула и является расчётной.

4.3. В соответствии с результатами предыдущей задачи расчёт проведем по формуле

$$\omega_{1,2} = \omega_m (p \pm \sqrt{p^2 - 1})$$

причем по условию задачи $p = 1,1$.

Рассчитаем частоту ω_m

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{M C_{св}}} = \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 10^{-6} \cdot 50 \cdot 10^{-12}}} = 44,7 \cdot 10^6 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$$

Теперь рассчитаем частоты ω_1 и ω_2 :

$$\omega_{1,2} = 44,7 \cdot 10^6 (1,1 \pm \sqrt{1,1^2 - 1}) = 44,7 (1,1 \pm 0,46) \cdot 10^6 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$$

Соответственно

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{44,7 \cdot 1,56}{6,28} \cdot 10^6 = 11,1 \cdot 10^6 \text{ гц},$$

$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{44,7 \cdot 0,64}{6,28} \cdot 10^6 = 4,56 \cdot 10^6 \text{ гц}.$$

$$f_m = \frac{\omega_m}{2\pi} = \frac{44,7}{6,28} \cdot 10^6 = 7,12 \cdot 10^6 \text{ гц}.$$

Следовательно, искомый диапазон будет равен

$$\Delta f = f_1 - f_2 = 11,1 \cdot 10^6 - 4,56 \cdot 10^6 = 6,51 \cdot 10^6 \text{ гц.}$$

4.3. Расчёт входного сопротивления будем проводить по ф-лам (4.7)

$$R_2 = R_1 \left(1 + \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \right),$$

$$X_2 = X_1 \left(1 - \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \frac{\xi_2}{\xi_1} \right).$$

Вычислим необходимые величины:

$$\omega = 2\pi f = 6,28 \cdot 159 \cdot 10^3 = 10^6 \frac{\text{рад}}{\text{сек}},$$

$$X_1 = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} = 10^6 \cdot 510 \cdot 10^{-6} - \frac{1}{10^6 \cdot 2000 \cdot 10^{-12}} = 10 \text{ ом}^1),$$

$$X_2 = \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} = 10^6 \cdot 208 \cdot 10^{-6} - \frac{1}{10^6 \cdot 5000 \cdot 10^{-12}} = 8 \text{ ом.}$$

$$\xi_1 = \frac{X_1}{R_1} = \frac{10}{2} = 5,$$

$$\xi_2 = \frac{X_2}{R_2} = \frac{8}{6} = 1,33,$$

$$A = \frac{X_{ce}}{\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{M}{\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{10^6 \cdot 7 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{2 \cdot 6}} = 2,02.$$

Располагая полученными данными, легко вычислить активное и реактивное сопротивления:

$$R_2 = R_1 + R_1 \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} = 2 + 2 \frac{2,02^2}{1 + 1,33^2} = 4,94 \text{ ом.}$$

$$X_2 = X_1 - X_1 \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \frac{\xi_2}{\xi_1} = 10 - 10 \cdot \frac{2,02^2}{1 + 1,33^2} \cdot \frac{1,33}{5} = 6,08 \text{ ом}$$

Вносимые сопротивления равны:

$$R_{вн} = R_2 - R_1 = 2,94 \text{ ом},$$

$$X_{вн} = X_2 - X_1 = -3,92 \text{ ом.}$$

1) Для расчёта реактивных сопротивлений X_1 и X_2 можно пользоваться приближённой формулой $X \approx 2 \omega L$; в данной задаче, однако, условия составлены так, что пользование точной формулой не усложняет расчёта.

4.7. Подсчитаем прежде всего сопротивление, вносимое из второго контура в первый:

$$X_{\text{вн}} = \frac{X_{\text{св}}^2}{|Z_2|^2} X_2 = \frac{20^2}{100} \cdot 0 = 0;$$

$$|Z_2|^2 = R_2^2 + X_2^2 = 10^2 = 100 \text{ ом}^2;$$

$$R_{\text{вн}} = \frac{X_{\text{св}}^2}{|Z_2|^2} R_2 = \frac{20^2}{100} 10 = 40 \text{ ом}.$$

Затем рассчитаем сопротивление в точках AB как сопротивление настроенного в резонанс параллельного контура, у которого общее сопротивление

$$R = 10 \text{ ом} + 10 \text{ ом} + R_{\text{вн}} = 10 + 10 + 40 = 60 \text{ ом},$$

тогда получим

$$R_{AB} = \frac{L}{kC} = \frac{\omega L}{\omega CR} = \frac{600 \cdot 600}{60} = 6000 \text{ ом}.$$

4.8. Для расчёта частот связи воспользуемся ф-лой (4.12); с этой целью вычислим фактор связи A и добротность Q :

$$A = \frac{X_{\text{св}}}{R} = \frac{16}{10} = 1,6; \quad A^2 = 2,56;$$

$$Q = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 100 \cdot 10^{-12} \cdot 10} = 79,6.$$

Теперь вычислим ω_1 и ω_2 :

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \pm \alpha \sqrt{A^2 - 1} = \omega_0 \left(1 \pm \frac{\alpha}{\omega_0} \sqrt{A^2 - 1} \right) = \omega_0 \left(1 \pm \frac{1}{2Q} \sqrt{A^2 - 1} \right).$$

Частоты связи:

$$f_{1,2} = f_0 \left(1 \pm \frac{1}{2Q} \sqrt{A^2 - 1} \right) = f_0 \left(1 \pm \frac{1}{2 \cdot 79,6} \sqrt{1,6^2 - 1} \right);$$

$$f_1 = 2015,7 \text{ кГц};$$

$$f_2 = 1984,3 \text{ кГц}.$$

4.9. Построение будем вести по ф-лам (4.12).

Для удобства построения перепишем эти формулы в безразмерном виде:

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = 1 + \frac{\alpha}{\omega_0} \sqrt{A^2 - 1};$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_0} = 1 - \frac{\alpha}{\omega_0} \sqrt{A^2 - 1}.$$

Воспользовавшись известным соотношением (§ 2)

$$\frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{1}{2Q},$$

получим

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = 1 + \frac{1}{2Q} \sqrt{A^2 - 1};$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_0} = 1 - \frac{1}{2Q} \sqrt{A^2 - 1}$$

Построение выполним для значения $Q = 10$.

Соответствующие графики даны на рис. P.4.1. По подобным графикам, выполненным в нужном масштабе, очень легко и быстро можно находить частоты связи.

4.10. Из ф-л (4.11) легко получить

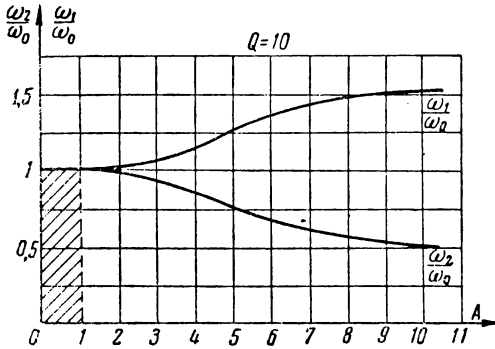


Рис. P.4.1

$$= \left(\frac{2\pi \cdot 1,64 \cdot 10^8}{2\pi \cdot 1,6 \cdot 10^8} - 1 \right)^2 \cdot 4 \cdot 20^2 + 1 = 2.$$

$$A = 1,41.$$

4.11. Исходным выражением будет служить выражение (4.9), которое нужно приравнять нулю

$$X_p = \xi_1 R_1 \left(1 - \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \frac{\xi_2}{\xi_1} \right) = 0$$

и затем решить относительно ω .

Вводя замену

$$\xi_1 = \frac{\omega - \omega_{01}}{\alpha_1},$$

$$\xi_2 = \frac{\omega - \omega_{02}}{\alpha_2},$$

где ω — частота генератора, а ω_{01} и ω_{02} — собственные частоты 1 и 2-го контуров, получим

$$\frac{\omega - \omega_{01}}{\alpha_1} - \frac{A^2}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_{02}}{\alpha_2} \right)^2} \left(\frac{\omega - \omega_{02}}{\alpha_2} \right) = 0.$$

Последнее уравнение и нужно решить относительно частоты ω .

С этой целью введём переменную $\omega - \omega_{02} = x$ и перепишем уравнение в виде

$$\frac{x + (\omega_{02} - \omega_{01})}{\alpha_1} - \frac{A^2}{1 + \frac{x^2}{\alpha_2^2}} \frac{x}{\alpha_2} = 0.$$

После элементарных преобразований приходим к кубическому уравнению

$$x^3 + \Delta\omega x^2 + (\alpha_2^2 - A^2 \alpha_1 \alpha_2) x + \Delta\omega \alpha_2^2 = 0.$$

Здесь обозначено: $\omega_{02} - \omega_{01} = \Delta\omega$.

В случае, если $\omega_{01} = \omega_{02}$ и $\alpha_1 = \alpha_2$, получаем решение в виде ф-л (4.12).

В общем случае данное уравнение нужно решать по правилам решения кубических уравнений.

В полученных формулах допустимо считать, что при небольших расстройках фактор связи A не зависит от частоты (например, при индуктивной связи

$$A = \frac{X_{св}}{\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{\omega M}{\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{\omega}{\omega_{01}} \frac{\omega_{01} M}{\sqrt{R_1 R_2}} \approx \frac{\omega_{01} M}{\sqrt{R_1 R_2}})$$

Для решения уравнения временно введём новую переменную:

$$x = \Delta\omega Z;$$

тогда получим

$$\Delta\omega^3 Z^3 + \Delta\omega^3 Z^2 + \Delta\omega Z (\alpha_2^2 - A^2 \alpha_1 \alpha_2) + \alpha_2^2 \Delta\omega = 0$$

или

$$Z^3 + Z^2 + \frac{\alpha_2^2 - A^2 \alpha_1 \alpha_2}{\Delta\omega^2} Z + \frac{\alpha_2^2}{\Delta\omega^3} = 0.$$

Последнее уравнение относительно Z легко решается графически: корни уравнения будут соответствовать точкам пересечения кривой $y = Z^3 + Z^2$ с прямой

$$y = -\frac{\alpha_2^2 - A^2 \alpha_1 \alpha_2}{\Delta\omega^2} Z - \frac{\alpha_2^2}{\Delta\omega^3}.$$

4.12. Расчёт частот связи будем проводить методом, изложенным в решении предыдущей задачи.

Рассчитаем необходимые величины:

$$A = \frac{X_{св}}{\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{60}{\sqrt{10 \cdot 10}} = 6;$$

$$\alpha_1 = \frac{R_1}{2L_1} = \frac{10}{2 \cdot 260 \cdot 10^{-6}} = 1,92 \cdot 10^4 \frac{1}{сек};$$

$$\alpha_2 = \frac{R_2}{2L_2} = \frac{10}{2 \cdot 280 \cdot 10^{-6}} = 1,785 \cdot 10^4 \frac{1}{сек};$$

$$\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{260 \cdot 10^{-6} \cdot 900 \cdot 10^{-12}}} = 2,06 \cdot 10^6 \frac{рад}{сек}$$

$$\omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} = \frac{1}{\sqrt{280 \cdot 10^{-6} \cdot 920 \cdot 10^{-12}}} = 1,97 \cdot 10^6 \frac{рад}{сек}$$

$$\Delta\omega = \omega_{02} - \omega_{01} = 1,97 \cdot 10^6 - 2,06 \cdot 10^6 = -0,09 \cdot 10^6 \frac{рад}{сек}$$

Теперь приступим к решению кубического уравнения, которое проведём так, как было указано в задаче 4.11.

Заметим, перед построением графика $y = Z^3 + Z^2$, что так как переменная Z определяется

$$Z = \frac{x}{\Delta\omega} = \frac{\omega - \omega_{02}}{\omega_{02} - \omega_{01}},$$

то масштаб по отношению к величине Z выбрать легко: величина Z будет меняться в пределах, сопоставимых с единицей.

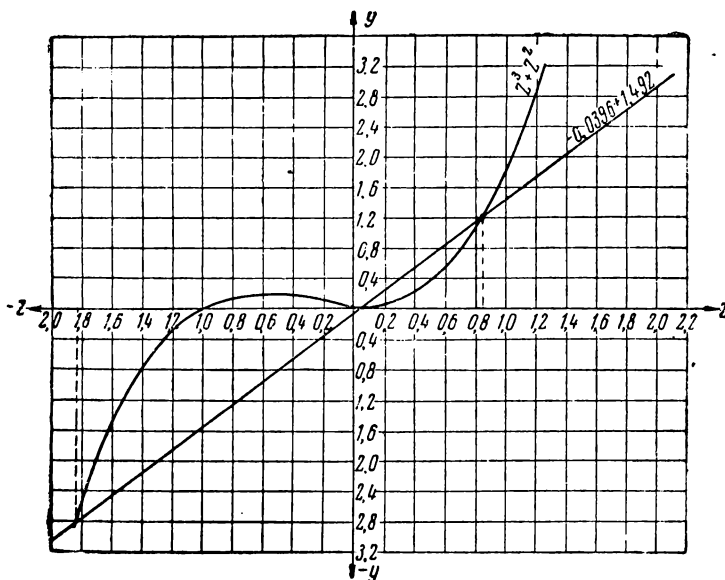


Рис. P.4.2

Решение уравнения выполнено на рис. P.4.2; по этому графику находим точки пересечения кривой $y = Z^3 + Z^2$, с прямой $y = -0,0396 + 1,49Z$:

$$Z_1 = 0,8,$$

$$Z_2 \approx -1,83;$$

$$Z_3 = 0,04.$$

Следовательно,

$$x_1 = Z_1 \Delta\omega = -0,8 \cdot 0,09 \cdot 10^6 = -72 \cdot 10^3 \frac{\text{рад}}{\text{сек}},$$

$$x_2 = Z_2 \Delta\omega = 1,83 \cdot 0,09 \cdot 10^6 = 165 \cdot 10^3 \frac{\text{рад}}{\text{сек}},$$

$$x_3 = Z_3 \Delta\omega = -0,04 \cdot 0,09 \cdot 10^6 = -3,6 \cdot 10^3 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}.$$

Круговые частоты резонанса будут равны:

$$\omega_1 = x_1 + \omega_{02} = -72 \cdot 10^3 + 1,97 \cdot 10^6 = 1,898 \cdot 10^6 \frac{\text{рад}}{\text{сек}};$$

$$\omega_2 = x_2 + \omega_{02} = 165 \cdot 10^3 + 1,97 \cdot 10^6 = 2,135 \cdot 10^6 \frac{\text{рад}}{\text{сек}};$$

$$\omega_3 = x_3 + \omega_{03} = -3,6 \cdot 10^3 + 1,97 \cdot 10^6 = 1,966 \cdot 10^6 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$$

и, наконец

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1,898 \cdot 10^6}{6,28} = 0,302 \cdot 10^6 \text{ гц};$$

$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{2,135 \cdot 10^6}{6,28} = 0,340 \cdot 10^6 \text{ гц};$$

$$f_3 = \frac{\omega_3}{2\pi} = \frac{1,966 \cdot 10^6}{6,28} = 0,314 \cdot 10^6 \text{ гц}.$$

В заключение задачи следует отметить, что система, состоящая из двух одинаковых связанных контуров, не всегда будет иметь три резонансные частоты, даже при условии $A > 1$. Математически это вытекает из того обстоятельства, что прямая (рис. Р.4.2) может пересечь кривую $Z^3 + Z^3$ только в одной точке. Физически это означает, что расстройка контуров друг по отношению к другу велика и для того, чтобы влияние одного контура на другой было существенным (т. е. таким, при котором возникает двугорбость в общей резонансной кривой), необходимо иметь достаточно большую связь.

4.13. Расчёт проводим по ф-ле (4.14)

$$K(\omega) = \frac{QA}{\sqrt{(A^2 + 1 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}}.$$

В качестве независимой переменной должна быть взята текущая частота ω , определяемая из формулы

$$\xi = \frac{\Delta\omega}{\alpha} = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha}$$

т. е.

$$\omega = \omega_0 + \alpha\xi.$$

Коэффициент α находится из выражения

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q} = \frac{2\pi f_0}{2Q} = \frac{2 \cdot 810 \cdot 10^3}{2 \cdot 30} = 8,5 \cdot 10^4 \frac{1}{\text{сек}}.$$

Фактор связи A по условиям задачи будет равен

$$A = \frac{X_{12}}{\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{20}{10} = 2.$$

Исходная формула примет вид

$$K(\omega) = \frac{60}{\sqrt{(5 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}}.$$

Теперь, последовательно задавая значениями ξ (т. е. значениями частоты ω), определяем значения $K(\omega)$.

Максимальные значения $K(\omega)$ примет в точках, определяемых ф-лами (4.11),

$$\xi_{1,2} = \pm \sqrt{A^2 - 1} = \pm \sqrt{2^2 - 1} = \pm 1,73.$$

При этих значениях

$$K(\omega) = \frac{Q}{2} = \frac{30}{2} = 15,$$

$$U_2 = K(\omega)U_1 = 15 \cdot 0,1 = 1,5 \text{ в.}$$

График $K(\omega) = f(\omega)$ и $U_2 = f(\omega)$ в заданном диапазоне частот изображён на рис. Р.4.3.

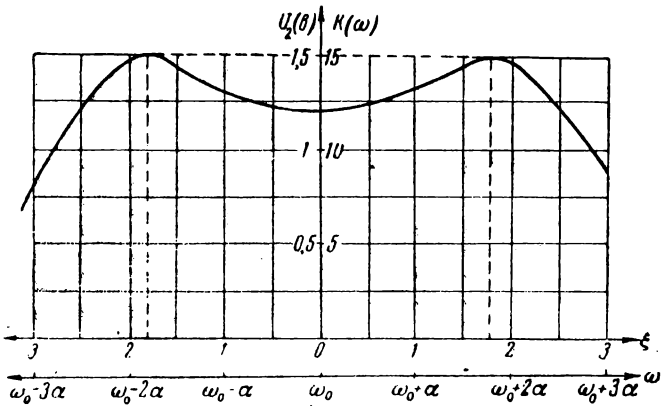


Рис. Р.4.3

4.15. Найдём производную $\frac{dK(\omega)}{dA}$ из выражения (4.14) и приравняем её нулю

$$\frac{dK(\omega)}{dA} = Q \frac{\sqrt{(A^2 + 1 - \xi^2)^2 + 4\xi^2} - A \frac{1}{2} \cdot \frac{2(A^2 + 1 - \xi^2) 2A}{\sqrt{(A^2 + 1 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}}}{[\sqrt{(A^2 + 1 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}]^2} = 0.$$

Решим полученное уравнение относительно A ; проведя решение, получим

$$A_m = \pm \sqrt{1 + \xi^2}.$$

Знак минус должен быть отброшен, как не имеющий смысла.

Последняя формула и является решением поставленной задачи. Совершенно ясно, что она должна совпадать с ф-лой (4.11).

4.16. Из формулы

$$A_m = \sqrt{1 + \xi^2},$$

полученной в предыдущей задаче, подставляя значения $\xi_1 = 0$ и ξ_2 , равное

$$\xi_2 = \frac{\Delta\omega}{\alpha} = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{1,05\omega_0 - \omega_0}{\alpha} = 0,05 \frac{\omega_0}{\alpha} = 2Q \cdot 0,05 = 0,1Q,$$

получаем два значения фактора связи A_m :

$$A_m = 1;$$

$$A_m = \sqrt{1 + (0,1 \cdot Q)^2} = \sqrt{1 + 0,01 Q^2}.$$

Следовательно, имея в виду, что

$$A = \frac{\omega_0 M}{R},$$

получаем:

$$M_1 = \frac{R}{\omega_0};$$

$$M_2 = \frac{R}{\omega_0} \sqrt{1 + 0,01 Q^2}$$

4.17. Находим индуктивность

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C} = \frac{1}{(2\pi \cdot 6 \cdot 10^5)^2 \cdot 250 \cdot 10^{-12}} = 282 \cdot 10^{-6} \text{ гн} = 282 \text{ мкгн}.$$

Фактор связи [ф-ла (4.20)]

$$A = \frac{1}{y_0} + \sqrt{\left(\frac{1}{y_0}\right)^2 - 1} = \frac{1}{0,707} + \sqrt{\frac{1}{0,707^2} - 1} = 2,41.$$

Активное сопротивление контура рассчитываем по ф-ле (4.24)

$$R = \frac{L \cdot 2\Delta\omega^*}{\sqrt{2} \sqrt{A^2 - 1}} = \frac{282 \cdot 10^{-6} \cdot 2\pi \cdot 8 \cdot 10^3 \cdot 2}{1,41 \sqrt{2,41^2 - 1}} = 4,6 \text{ ом}.$$

Сопротивление связи

$$X_{св} = AR = 2,41 \cdot 4,6 \approx 11,1 \text{ ом}$$

Коэффициент взаимоиנדукции

$$M = \frac{X_{св}}{\omega} = \frac{11,1}{6,28 \cdot 600 \cdot 10^3} = 2,94 \cdot 10^{-6} \text{ гн} = 2,94 \text{ мкгн}.$$

4.19. Резонансная частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 10^{-3} \cdot 100 \cdot 10^{-12}}} = 10^6 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}.$$

Фактор связи

$$A = \frac{X_{св}}{R} = \frac{\omega_0 M}{R} = \frac{10^6 \cdot 340 \cdot 10^{-6}}{240} = 1,415$$

Частоты связи (ф-ла 4.12)

$$\begin{aligned} \omega_{1,2} &= \omega_0 \pm \alpha \sqrt{A^2 - 1} = \omega_0 \pm \frac{R}{2L} \sqrt{A^2 - 1} = \\ &= 10^6 \pm \frac{240}{2 \cdot 10 \cdot 10^{-3}} \sqrt{1,415^2 - 1} = (10^6 \pm 12 \cdot 10^3) \frac{\text{рад}}{\text{сек}} \end{aligned}$$

Величина y_0 (ф-ла 4.17)

$$y_0 = \frac{2A}{A^2 + 1} = \frac{2 \cdot 1,415}{1,415^2 + 1} = 0,945.$$

Полоса пропускания (ф-ла 4.18)

$$2 \Delta \omega^* = \alpha \cdot 2 \sqrt{2} \sqrt{A^2 - 1} = 12 \cdot 10^3 \cdot 2,82 \cdot 1 = 33,8 \cdot 10^3 \frac{\text{рад}}{\text{сек}} ;$$

$$2 \Delta f^* = \frac{2 \Delta \omega^*}{2 \pi} = \frac{33,8 \cdot 10^3}{6,28} = 5,38 \cdot 10^3 \text{ гц.}$$

4.21. Воспользуемся формулой, полученной в предыдущей задаче,

$$\Delta \omega^* = \pm 1,41 \alpha$$

и перепишем её в следующем виде

$$\Delta \omega^* = \pm 1,41 \frac{\alpha}{\omega_0} \omega_0 = \pm 1,41 \frac{1}{2Q} \omega_0$$

Решая последнее уравнение относительно Q , имеем

$$Q = \pm \frac{1,41}{2} \cdot \frac{\omega_0}{\Delta \omega^*}.$$

В данном случае знак минус нужно опустить

$$Q = 1,41 \frac{f_0}{2 \Delta f^*} = 1,41 \frac{600}{12} = 70,5.$$

4.22. Искомая частота определится из выражения (4.25)

$$\xi_{20} = A^2 \frac{\xi_1}{1 + \xi_1^2},$$

откуда

$$\omega_{02} = \omega - \sigma_2 \xi_{20}.$$

Найдём α_1 , ξ_1 , A , α_2 и ξ_2 :

$$\alpha_1 = \frac{\omega_{01}}{2Q_1} = \frac{2 \pi f_{01}}{2Q_1} = \frac{2 \pi \cdot 610 \cdot 10^3}{2 \cdot 60} = 31,9 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{сек}};$$

$$\xi_1 = \frac{\Delta \omega_1}{\alpha_1} = \frac{2 \pi \Delta f_1}{\alpha_1} = \frac{2 \pi (f - f_{01})}{\alpha_1} = \frac{2 \pi (600 - 610) 10^3}{31,9 \cdot 10^3} = -1,97;$$

$$A = \frac{X_{св}}{\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{2 \pi f M}{\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{2 \pi \cdot 600 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{12 \cdot 16}} = 5,44;$$

$$\alpha_2 = \frac{R_2}{2 L_2} = \frac{16}{2 \cdot 360 \cdot 10^{-6}} = 22,2 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{сек}};$$

$$\xi_{20} = A^2 \frac{\xi_1}{1 + \xi_1^2} = 5,44^2 \frac{-1,97}{1 + (1,97)^2} = -11,9.$$

Теперь найдём частоту f_0 .

$$f_{02} = \frac{1}{2\pi} (\omega - \alpha_2 \xi_{20}) = \frac{1}{2\pi} (2\pi \cdot 600 \cdot 10^4 + 22,2 \cdot 10^3 \cdot 11,9) = 642 \cdot 10^3 \text{ гц.}$$

4.23. Резонансная частота находится из условия равенства нулю эквивалентного реактивного сопротивления

$$X_2 = 0.$$

В данном случае, имея в виду (4.9), получаем

$$X_2 = \xi_1 R_1 - \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \xi_2 R_1 = 0$$

Принимая во внимание, что во втором контуре имеет место неравенство $\xi_2 \gg 1$, можно написать

$$X_1 - \frac{A^2}{X_2} R_1 R_2 = 0$$

или

$$X_1 X_2 - X_{c0}^2 = 0.$$

Так как в данном случае:

$$X_1 = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}$$

$$X_2 = \omega L_2;$$

$$X_{c0} = \omega M,$$

то для определения резонансной частоты ω_p получаем уравнение

$$\left(\omega_p L_1 - \frac{1}{\omega_p C} \right) \omega_p L_2 - \omega_p^2 M^2 = 0$$

Решение этого уравнения относительно ω_p даёт

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \kappa^2}}$$

Полученная формула показывает возможность настройки колебательного контура путём внесения дополнительного реактивного сопротивления за счёт связи с аperiodическим контуром. Практически, в передатчиках такой аperiodический контур выполняется в виде короткозамкнутого витка, вращаемого внутри основной катушки передатчика.

4.24. Из формулы, полученной в предыдущей задаче, находим:

$$I_{p \text{ макс}} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{M_{\text{макс}}^2}{L_1 L_2}}}$$

$$I_{p \text{ мин}} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{M_{\text{мин}}^2}{L_1 L_2}}} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$$

Подставляя условия задачи, находим:

$$f_{p \text{ мин}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{40 \cdot 10^{-6} \cdot 250 \cdot 10^{-12}}} = 1,595 \cdot 10^6 \text{ гц,}$$

$$f_{p \text{ макс}} = f_{p \text{ мин}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{M^2_{\text{макс}}}{L_1 L_2}}} = 1,595 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4^2}{40 \cdot 5}}} = 1,66 \cdot 10^6 \text{ гц,}$$

$$\Delta f = f_{p \text{ макс}} - f_{p \text{ мин}} = (1,660 - 1,595) 10^6 \text{ гц} = 65 \cdot 10^3 \text{ гц.}$$

4.25. Из (4.9) получаем

$$R_s = R_1 \left(1 + \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \right).$$

Так как в данном случае

$$\xi_2 = \frac{X_2}{R_2} \gg 1,$$

то

$$R_s = R_1 \left(1 + \frac{A^2}{X_2^2} R_2^2 \right) = R_1 + \frac{A_{c0}^2}{X_2^2} R_2.$$

Имея в виду, что

$$X_{c0} = \omega M;$$

$$X_2 = \omega L_2,$$

получаем

$$R_s = R_1 + \frac{M^2}{L_2^2} R_2.$$

Полученная формула показывает возможность согласования собственного внутреннего сопротивления генератора с сопротивлением нагрузки при помощи введения промежуточного контура и изменения связи M . Подобное согласование широко используется на практике.

4.26. Из выражения, полученного в предыдущей задаче,

$$R_s = R_1 + \frac{M^2}{L_2^2} R_2$$

легко рассчитать необходимую взаимную индуктивность M :

$$M = \sqrt{\frac{R_s - R_1}{R_2}} L_2.$$

Подставляя условия задачи и имея в виду, что для согласования, необходимо выполнить условие $R_s = R_i$, находим

$$M = \sqrt{\frac{200 - 20}{2000}} \cdot 800 = 240 \text{ мкГн.}$$

4.27. Из (4.9) имеем:

$$R_3 = R_1 \left(1 + \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \right),$$

$$X_3 = X_1 \left(1 - \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \frac{\xi_2}{\xi_1} \right).$$

Для того, чтобы входное сопротивление имело чисто активный характер, нужно выполнить условие $X_3 = 0$, из которого получаем, что

$$\frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \frac{\xi_2}{\xi_1} = 1.$$

Решая уравнение относительно ξ_2 , имеем

$$\xi_2 = \frac{A^2}{2\xi_1} \pm \sqrt{\frac{A^4}{4\xi_1^2} - 1}.$$

Раскрывая ξ_2 по формуле

$$\xi_2 = \frac{\Delta \omega_2}{\alpha_2} = \frac{\omega - \omega_{02}}{\alpha_2},$$

где ω — частота генератора, а ω_{02} — частота, на которую должен быть настроен второй контур, составляем выражение для ω_{02}

$$\omega_{02} = \omega - \alpha_2 \xi_2 = \omega - \alpha_2 \left[\frac{A^2}{2\xi_1} \pm \sqrt{\frac{A^4}{4\xi_1^2} - 1} \right].$$

4.28. Для того, чтобы решение было вещественным, нужно, чтобы удовлетворялось неравенство

$$\frac{A^4}{4\xi_1^2} - 1 > 0,$$

из которого можно определить минимальное значение связи.

Очевидно,

$$A_{мин}^2 = 2\xi_1$$

или

$$A_{мин} = \sqrt{2\xi_1}.$$

В данном случае для схемы с индуктивной связью будет

$$M_{мин} = \frac{1}{\omega} \sqrt{R_1 R_2} \sqrt{2\xi_1}.$$

Заметим в заключение, что при расчёте связи по последней формуле расстройку второго контура ξ_2 (задача 4.27) можно вести по упрощённому выражению

$$\xi_2 = \frac{A_{мин}^2}{2\xi_1}$$

так как

$$\sqrt{\frac{A^4}{4\xi_1^2} - 1} = 0$$

Так как далее $\frac{A_{мин}^2}{2\xi_1} = 1$, то при любых данных контуров $\xi_2 = 1$.

4.29. Решение задачи построим по формулам, полученным в двух предыдущих задачах.

Рассчитаем частоту, на которую должен быть настроен второй контур, чтобы входное сопротивление было чисто активным, имея в виду, что при минимальной связи $\xi_2 = 1$:

$$\omega_{02} = \omega - \alpha_2 \xi_2 = \omega - \frac{R_2}{2L_2} = 2\pi \cdot 750 \cdot 10^3 - \frac{12}{2 \cdot 240 \cdot 10^{-6}} = 4,675 \cdot 10^6 \frac{рад}{сек};$$

$$f_{02} = \frac{\omega_{02}}{2\pi} = \frac{4,675 \cdot 10^6}{6,28} \approx 746 \cdot 10^3 \text{ гц.}$$

Найдём ξ_1

$$\xi_1 = \frac{\lambda_1}{R_1} = \frac{\omega L_1}{R_1} = \frac{2\pi \cdot 750 \cdot 10^3 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3}}{100} = 118.$$

Рассчитаем необходимую величину фактора связи

$$A_{мин} = \sqrt{2\xi_1} = \sqrt{2 \cdot 118} \approx 15,4.$$

Минимальная взаимная индуктивность будет равна:

$$M_{мин} = \frac{1}{\omega} \sqrt{R_1 R_2} A_{мин} = \frac{1}{2\pi \cdot 750 \cdot 10^3} \sqrt{100 \cdot 12} \cdot 15,4 = 113 \cdot 10^{-6} \text{ гн.}$$

$$M_{мин} = 113 \text{ мкГн.}$$

4.30. Непосредственно из выражения

$$Z(i\omega) = R_1 \left(1 + \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \right) + i \xi_1 R_1 \left(1 - \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \frac{\xi_2}{\xi_1} \right),$$

принимая во внимание, что $\xi_2 \gg 1$, получаем

$$\begin{aligned} Z(i\omega) &= R_1 + A^2 R_1 \frac{R_2^2}{X_2^2} + i \left(X_1 - \frac{A^2}{X_2} R_1 R_2 \right) = \\ &= R_1 + \frac{X_{св}^2}{X_2^2} R_2 + i \left(X_1 - \frac{X_{св}^2}{X_2} \right). \end{aligned}$$

Так как далее

$$X_{св} = \omega M;$$

$$X_1 = \omega L_1;$$

$$X_2 = \omega L_2,$$

получим

$$Z(i\omega) = R_1 + \frac{\omega^2 M^2}{\omega^2 L_2^2} R_2 + i \left(\omega L_1 - \frac{\omega^2 M^2}{\omega L_2} \right) = \\ = R_1 + \left(\frac{M}{L_2} \right)^2 R_2 + i \omega \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2^2} L_2 \right).$$

Таким образом

$$R_{\partial} = R_1 + \left(\frac{M}{L_2} \right)^2 R_2;$$

$$L_{\partial} = L_1 - \left(\frac{M}{L_2} \right)^2 L_2.$$

Для того, чтобы реактивная составляющая была равна нулю, взаиминдуктивность M должна быть равна

$$M = \sqrt{L_1 L_2}.$$

4.31. Найдём производную $\frac{dK(\omega)}{d\xi_1}$ по выражению (4.13) и приравняем её нулю. Полученное уравнение решим относительно ξ_1 ; в результате получим условие максимума коэффициента передачи:

$$\xi_1 = \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \xi_2.$$

Подставив в условие первого частичного резонанса:

$$X_1 = R_1 \xi_1;$$

$$X_2 = R_2 \xi_2;$$

$$|Z_2|^2 = R_2^2 (1 + \xi_2^2);$$

$$\frac{X_{ca}^2}{R_1 R_2} = A^2,$$

приходим к такому же равенству.

4.32. Из условия первого частичного резонанса

$$X_1 = -\frac{X_{ca}}{2-i} = \frac{X_{ca}^2}{|Z_2|^2} X_2$$

можно рассчитать сопротивление X_1

$$X_1 = \frac{\omega^2 M^2}{R_2^2 + X_2^2} X_2,$$

а затем по известному X_1 определить C_1 .

Найдём X_2

$$X_2 = \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} = 2\pi \cdot 700 \cdot 10^3 \cdot 250 \cdot 10^{-6} - \\ - \frac{1}{2\pi \cdot 700 \cdot 10^3 \cdot 900 \cdot 10^{-12}} = 847 \text{ ом}.$$

Теперь найдём X_1

$$X_1 = \frac{(2\pi \cdot 700 \cdot 10^3)^2 \cdot (40 \cdot 10^{-6})^2}{100^2 + 847^2} \cdot 847 = 36 \text{ ом.}$$

Из выражения

$$\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} = X_1$$

находим ёмкость C_1

$$C_1 = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{\omega L_1 - X_1} = \frac{1}{2\pi \cdot 0,7 \cdot 10^6} \cdot \frac{1}{2\pi \cdot 0,7 \cdot 10^6 \cdot 200 \cdot 10^{-6} - 36} = \\ = 270 \cdot 10^{-12} \text{ ф} = 270 \text{ пф.}$$

4.35. Модуль тока во втором контуре

$$I_2 = \frac{U_2}{Z_2} = \frac{I_1 \omega M}{Z_2} = \frac{U_1 \omega M}{Z_2 Z_2} \quad (1)$$

В данном случае $Z_2 = \text{const}$, $Z_2 = R_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_2^2} R_2$; получаем

$$I_2 = \frac{U_1 \omega M}{Z_2 \left(R_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_2^2} R_2 \right)} = \frac{U_1 X_{св}}{Z_2 \left(R_1 + \frac{X_{св}^2}{Z_2^2} R_2 \right)} \quad (2)$$

Для определения $X_{св \text{ опт}}$ найдём производную $\frac{dI_2}{dX_{св}}$ и приравняем её нулю

$$\frac{dI_2}{dX_{св}} = \frac{U_1}{Z_2} \frac{\left(R_1 + \frac{X_{св \text{ опт}}^2}{Z_2^2} R_2 \right) - X_{св \text{ опт}}^2 \frac{X_{св \text{ опт}}}{Z_2^2} R_2}{\left(R_1 + \frac{X_{св \text{ опт}}^2}{Z_2^2} R_2 \right)^2} = 0.$$

Решим полученное уравнение относительно $X_{св \text{ опт}}$

$$\left. \begin{aligned} X_{св \text{ опт}} &= Z_2 \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \\ M_{\text{опт}} &= \frac{Z_2}{\omega} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2), получаем максимально возможное значение тока во втором контуре:

$$I_{2 \text{ макс макс}} = \frac{U_1}{2 \sqrt{R_1 R_2}} \quad (4)$$

Заметим, что поставленную задачу можно решить при помощи фактора связи $A = \frac{X_{св}}{\sqrt{R_1 R_2}}$ и обобщённой расстройки $\xi = \frac{X}{R}$ несколько проще. В самом деле, учтя, что

$$Z_2 = R_1 \left(1 + \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \right),$$

$$Z_2^2 = R_2^2 (1 + \xi_2^2),$$

перепишем (1) в виде

$$I_2 = \frac{U_1}{Z_2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \frac{A}{1 + \frac{A^2}{1 + \xi_2^2}}.$$

Дифференцируя по A и приравняв производную нулю, получаем

$$A_{opt}^2 = 1 + \xi_2^2 = \frac{Z_2^2}{R_2^2}.$$

Следовательно,

$$A_{opt} = \frac{Z_2}{R_2}$$

и

$$X_{св\ opt} = \sqrt{R_1 R_2} \frac{Z_2}{R_2} = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} Z_2$$

или

$$M_{opt} = \frac{Z_2}{\omega} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}.$$

4.36. Из основных уравнений связанной системы:

$$\bar{U}_1 = \bar{I}_1 Z_1 + i \bar{I}_2 X_{св};$$

$$0 = \bar{I}_2 Z_2 + i \bar{I}_1 X_{св},$$

выводим связь между токами \bar{I}_2 и \bar{I}_1

$$\bar{I}_2 = -i \bar{I}_1 \frac{X_{св}}{Z_2}.$$

Модуль тока во втором контуре, принимая во внимание, что второй контур настроен в резонанс, будет равен

$$I_2 = I_1 \frac{X_{св}}{R_2}.$$

Модуль напряжения на конденсаторе

$$U_2 = I_2 \frac{1}{\omega C} = I_1 \frac{\omega M}{R_2} \frac{1}{\omega C}.$$

Подставляя условия задачи, находим

$$U_2 = 0,17 \cdot 10^{-6} \frac{20 \cdot 10^{-6}}{8} \cdot \frac{1}{300 \cdot 10^{-12}} = 1,42 \cdot 10^{-3} \text{ в.}$$

4.37. Расчёт ведём по ф-лам (4.27) — (4.32). Рассчитываем вспомогательные величины:

$$X_1 = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} = 2\pi \cdot 4,6 \cdot 10^5 \cdot 400 \cdot 10^{-6} - \frac{1}{2\pi \cdot 4,6 \cdot 10^5 \cdot 310 \cdot 10^{-12}} = 40 \text{ ом.}$$

$$X_2 = \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} = 2\pi \cdot 4,6 \cdot 10^5 \cdot 410 \cdot 10^{-6} - \frac{1}{2\pi \cdot 4,6 \cdot 10^5 \cdot 290 \cdot 10^{-12}} = -12 \text{ ом.}$$

$$\xi_1 = \frac{X_1}{R_1} = \frac{40}{16} = 2,5;$$

$$\xi_2 = \frac{X_2}{R_2} = \frac{-12}{14} = -0,858 \approx -0,86;$$

$$A = \frac{X_{св}}{\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{\omega M}{\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{2,89 \cdot 10^6 \cdot 36 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{16 \cdot 14}} = 6,95;$$

$$R_3 = R_1 \left(1 + \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \right) = 16 \left(1 + \frac{6,95^2}{1 + 0,86^2} \right) = 460 \text{ ом,}$$

$$X_3 = X_1 \left(1 - \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \frac{\xi_2}{\xi_1} \right) = 40 \left(1 - \frac{6,95^2}{1 + 0,86^2} \cdot \frac{(-0,86)}{2,5} \right) = 422 \text{ ом.}$$

Мощность, расходуемая в первом контуре

$$P_1 = \frac{1}{2} \frac{U_1^2}{R_3^2 + X_3^2} R_1 = \frac{1}{2} \frac{100^2}{460^2 + 422^2} \cdot 16 = 0,205 \text{ вт.}$$

Мощность, расходуемая во втором контуре

$$P_2 = \frac{1}{2} \frac{U_1^2}{R_3^2 + X_3^2} R_1 \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} = P_1 \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} = 0,205 \cdot 27,7 = 5,68 \text{ вт.}$$

Коэффициент полезного действия

$$\eta = \frac{A^2}{A^2 + 1 + \xi_2^2} = \frac{48,3}{48,3 + 1 + 0,74} = 0,966.$$

Теперь рассчитаем оптимальную связь из условия $A = 1$

$$M_{opt} = \frac{1}{\omega} \sqrt{R_1 R_2} = \frac{1}{2,89 \cdot 10^6} \sqrt{16 \cdot 14} = 5,18 \text{ мкГн.}$$

Если, кроме того, оба контура настроить в резонанс с частотой ω , то мощность, расходуемая во втором контуре, будет максимально возможной и будет равна

$$P_{\text{макс макс}} = \frac{U_1^2}{8R_1} = \frac{100^2}{8 \cdot 16} \approx 78 \text{ вт.}$$

4.39. По ф-ле (4.34) имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_{U_2 \rightarrow U_1} &= -\frac{2i}{A^2 + 1 - \xi^2} = -\frac{2 \cdot 0,8}{1,6^2 + 1 - 0,8^2} = -0,548; \\ \varphi_{U_2 \rightarrow U_1} &= -28^\circ 45'. \end{aligned}$$

4.40. В данном случае воспользуемся ф-лой (4.33)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_{U_2 \rightarrow U_1} &= -\frac{\xi_1 + \xi_2}{A^2 + 1 - \xi_1 \xi_2} = -\frac{2,5 - 0,86}{6,95^2 + 1 + 2,5 \cdot 0,86} = -0,032; \\ \varphi_{U_2 \rightarrow U_1} &= -1^\circ 50'. \end{aligned}$$

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 5

5.1. По формулам табл. 5.1 находим:

$$\begin{aligned} L_1 &= 0,4 \ln \frac{d}{r} = 0,4 \ln \frac{200}{3} = 1,68 \frac{\text{мкГн}}{\text{м}}; \\ C_1 &= \frac{27,8}{\ln \frac{d}{r}} = \frac{27,8}{\ln \frac{200}{3}} = 6,64 \frac{\text{пФ}}{\text{м}}; \\ R_1 &= \frac{8,32}{r_{\text{см}}} \sqrt{f} = \frac{8,32}{0,3} \sqrt{10^5} = 8760 \frac{\text{МОм}}{\text{м}} = 8,76 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Ом}}{\text{м}} = 8,76 \frac{\text{Ом}}{\text{км}}; \\ G_1 &= \omega C_1 \operatorname{tg} \delta = \omega C_1 0 = 0. \end{aligned}$$

5.3. По формулам табл. 5.1 имеем:

$$\begin{aligned} L_1 &= 0,2 \ln \frac{r_2}{r_1} = 0,2 \ln \frac{24}{6} = 0,277 \frac{\text{мкГн}}{\text{м}}; \\ C_1 &= \frac{55,5 \varepsilon_r}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{55,5 \cdot 2,5}{\ln \frac{24}{6}} = 100 \frac{\text{пФ}}{\text{м}}; \\ R_1 &= 4,16 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \sqrt{f} = 4,16 \left(\frac{1}{0,6} + \frac{1}{2,4} \right) \sqrt{10^7} = 27,4 \cdot 10^3 \frac{\text{МОм}}{\text{м}} = \\ &= 27,4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Ом}}{\text{м}} = 27,4 \frac{\text{Ом}}{\text{км}}; \\ G_1 &= \omega C_1 \operatorname{tg} \delta \approx 6,28 \cdot 10^7 \cdot 100 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 1,25 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}}. \end{aligned}$$

(Значения ε_r и $\operatorname{tg} \delta$ определяются из табл. 5.2.)

5.6. Из формулы

$$C_1 = \frac{55,5}{\ln \frac{r_2}{r_1}},$$

находим

$$\ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{55,5}{C_1},$$

откуда

$$\frac{r_2}{r_1} = e^{\frac{55,5}{C_1}}.$$

Подставляя условие задачи, находим

$$\frac{r_2}{r_1} = e^{\frac{55,5}{20}} = e^{2,78} \approx 16.$$

5.7. Волновое сопротивление определяется ф-лой (5.3)

$$Z_c \approx \rho \left(1 - i \frac{\beta}{m} \right) = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \left(1 - i \frac{\beta}{m} \right).$$

Для двухпроводной воздушной линии [ф-ла (5.7)]

$$\rho = 120 \ln \frac{d}{r} = 120 \ln \frac{200}{1,5} = 588 \text{ ом}.$$

Рассчитаем β и m :

$$\beta \approx \frac{R_1}{2 \rho} = \frac{56 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 588} \frac{\text{неп}}{\text{м}} = 0,048 \frac{\text{неп}}{\text{км}} = 0,048 \cdot 10^{-3} \frac{\text{неп}}{\text{м}};$$

$$R_1 = \frac{8,32}{r_{с.м}} \sqrt{f} \cdot 10^{-6} \frac{\text{ом}}{\text{м}} = \frac{8,32}{0,15} \sqrt{10^6} \cdot 10^{-6} \frac{\text{ом}}{\text{м}} = 56 \cdot 10^{-3} \frac{\text{ом}}{\text{м}};$$

$$m = \frac{2 \pi}{\lambda} = \frac{2 \pi}{c} f = \frac{2 \pi}{3 \cdot 10^8} 10^9 = 0,021 \frac{\text{рад}}{\text{м}} \approx 1,2 \frac{\text{град}}{\text{м}}.$$

Так как

$$\frac{\beta}{m} = \frac{0,048 \cdot 10^{-3}}{0,021} = 0,0023 \ll 1,$$

то легко видеть, что

$$Z_c \approx \rho.$$

5.11. Подставим в формулу

$$\beta = \frac{R_1}{2 \rho},$$

значения R_1 и ρ :

$$R_1 = \frac{1,44}{r_{м.м} \sqrt{\lambda_{м}}} \frac{\text{ом}}{\text{м}};$$

$$\rho = 120 \ln \frac{d}{r} \text{ ом}.$$

В результате получаем

$$\beta = \frac{R_1}{2\rho} = \frac{1,44}{r_{\text{ММ}} \sqrt{\lambda_{\text{М}}} \cdot 2 \cdot 120 \ln \frac{d}{r}} = 0,006 \frac{1}{r_{\text{ММ}} \sqrt{\lambda_{\text{М}}} \ln \frac{d}{r}} \frac{\text{неп.}}{\text{м}}$$

5.12. По формуле коэффициента затухания

$$\beta = \frac{R_1}{2\rho} + \frac{1}{2} G_1 \rho,$$

найдем производную $\frac{d\beta}{d\rho}$

$$\frac{d\beta}{d\rho} = -\frac{1}{2} \frac{R_1}{\rho^2} + \frac{1}{2} G_1.$$

Исследуя полученное выражение на минимум, находим, что минимальное значение коэффициента β будет иметь место при

$$\rho^2 = \frac{R_1}{G_1}$$

или

$$\frac{L_1}{C_1} = \frac{R_1}{G_1}.$$

$$\frac{R_1}{L_1} = \frac{G_1}{C_1}.$$

Полученное условие называется условием минимального затухания. Так как обычно $R_1 C_1 \gg L_1 G_1$, то в протяженных линиях принимают специальные меры для увеличения погонной индуктивности L_1 (крупнизация и пупинизация линий). Равенство $R_1 C_1 = L_1 G_1$ является, кроме того, условием отсутствия реактивной составляющей в волновом сопротивлении [ф-ла (5.3)].

5.13. В выражении для β

$$\beta \approx \frac{1}{2} \frac{R_1}{\rho},$$

подставив значения R_1 и ρ по формулам:

$$R_1 = 4,16 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \sqrt{f} \cdot 10^{-6} \frac{\text{ОМ}}{\text{м}};$$

$$\rho = 60 \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

получим

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{4,16 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \sqrt{f} \cdot 10^{-6}}{60 \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Преобразуем последнее выражение так, чтобы независимой переменной было отношение $\frac{r_2}{r_1}$,

$$\beta = \frac{4,16\sqrt{f} \cdot 10^{-6} \sqrt{\varepsilon_r}}{2 \cdot 60} \frac{1}{r_2} \frac{\left(\frac{r_2}{r_1} + 1\right)}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

Вводя очевидные обозначения, можно написать

$$\beta = A \frac{1+x}{\ln x}$$

Вычислим производную $\frac{d\beta}{dx}$ и приравняем её нулю

$$\frac{d\beta}{dx} = A \frac{\ln x - (1+x) \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = 0$$

Полученное трансцендентное уравнение

$$\ln x = \frac{1+x}{x}$$

нужно решить относительно x .

Графическое решение (рис. Р.5.1) даёт

$$x = \left| \frac{r_2}{r_1} \right|_{opt} = 3,6$$

Таким образом, коаксиальные кабели целесообразно конструировать с найденным соотношением внешнего и внутреннего радиусов.

5.14. Пользуясь обозначениями предыдущей задачи, запишем выражение для коэффициента затухания в виде

$$\beta = A \frac{1+x}{\ln x}$$

$$\text{где } x = \frac{r_2}{r_1}$$

Было установлено, что $\beta = \beta_{мин}$ при $x = 3,6$, т. е.

$$\beta_{мин} = A \frac{1+3,6}{\ln 3,6} = A \cdot 3,6$$

Согласно условию нужно найти такие границы x (x_{m1} и x_{m2}), в которых $\beta = 1,1 \beta_{мин}$.

Составляем очевидное уравнение

$$1,1 \beta_{мин} = A \frac{1+x_m}{\ln x_m}$$

или

$$1,1 \cdot 3,6 = \frac{1 + x_m}{\ln x_m};$$

$$\ln x_m = \frac{1 + x_m}{3,96} = 0,252 + 0,252 x_m.$$

Последнее уравнение легко решается графически (рис. Р.5.2). Из этого рисунка находим:

$$x_{m1} = \left(\frac{r_2}{r_1} \right)_1 = 2,4;$$

$$x_{m2} = \left(\frac{r_2}{r_1} \right)_2 = 6,6.$$

Решение настоящей задачи показывает, что отступления от оптимального соотношения $\frac{r_2}{r_1} = 3,6$ в пределах от 2,4 до 6,6 практически могут считаться допустимыми.

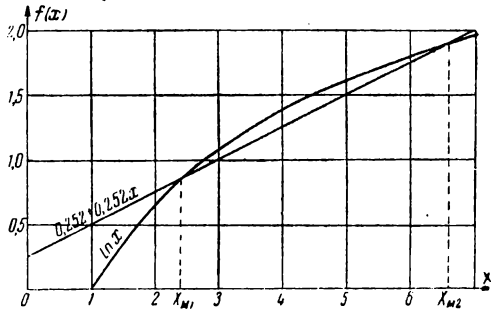


Рис. Р.5.2

5.15. В выражение для β

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{R_1}{\rho};$$

подставив значения R_1 и ρ по формулам:

$$R_1 = \frac{8,32}{r} \sqrt{f} \cdot 10^{-6} \frac{\text{ОМ}}{\text{М}},$$

$$\rho = 120 \ln \frac{d}{r} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}},$$

получим

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{8,32 \sqrt{f} \cdot 10^{-6} \sqrt{\epsilon_r}}{r \cdot 120 \ln \frac{d}{r}} = \frac{8,32 \sqrt{f} \cdot 10^{-6} \sqrt{\epsilon_r}}{2 \cdot 120} \frac{1}{r \ln \frac{d}{r}}.$$

Преобразуем последнее выражение

$$\beta = \frac{8,32 \sqrt{f} \cdot 10^{-6} \sqrt{\epsilon_r}}{2 \cdot 120 \cdot d} \frac{\frac{d}{r}}{\ln \frac{d}{r}}.$$

Вводя очевидные обозначения, напомним

$$\beta = A \frac{x}{\ln x}.$$

Исследуем последнее выражение на минимум

$$\frac{d\beta}{dx} = A \frac{\ln x - x \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = 0;$$

$$\ln x = 1;$$

$$x = e \approx 2,7.$$

Следовательно, с точки зрения затухания

$$\left| \frac{d}{r} \right|_{\text{онм}} = 2,7.$$

Однако по конструктивным соображениям, а также по соображениям, относящимся к электрическим явлениям, которые здесь не рассматриваются, расстояние между проводами в двухпроводных линиях на практике выбирают гораздо больше.

5.16. В соответствии с ф-лой (5.6) скорость распространения радиоволн вдоль линии равна

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}.$$

Подставляя условия задачи, находим

$$v = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 10^{-6} \cdot 16 \cdot 10^{-12}}} = \frac{10^9}{4} = 2,5 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{сек}}.$$

Длина волны в линии будет равна

$$\lambda_{\text{л}} = v T = \frac{v}{f} = \frac{2,5 \cdot 10^8}{25 \cdot 10^6} = 10 \text{ м.}$$

Отметим, что длина волны в воздухе при той же частоте будет равна

$$\lambda_{\text{в}} = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{25 \cdot 10^6} = 12 \text{ м.}$$

5.17. Длина волны в воздухе равна

$$\lambda_{\text{в}} = \frac{c}{f},$$

где c — скорость распространения электромагнитных волн в воздухе, равная

$$c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{сек}}.$$

Длина волны в линии равна

$$\lambda_{\text{л}} = \frac{v}{f},$$

где v — скорость распространения электромагнитных волн в линии

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}.$$

Произведение $L_1 C_1$ в соответствии с формулами табл. 5.1 равно: для двухпроводной линии

$$L_1 C_1 = 0,4 \cdot 10^{-6} \ln \frac{d}{r} \frac{27,8 \epsilon_r}{\ln \frac{d}{r}} 10^{-12} = 11,1 \cdot 10^{-18} \epsilon_r;$$

для концентрической линии

$$L_1 C_1 = 0,2 \cdot 10^{-6} \ln \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{55,5 \epsilon_r}{\ln \frac{r_2}{r_1}} 10^{-12} = 11,1 \cdot 10^{-18} \epsilon_r.$$

Следовательно, скорость распространения в двухпроводных и концентрических линиях одинакова и зависит только от относительной диэлектрической постоянной ϵ_r

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{11,1 \cdot 10^{-18} \epsilon_r}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}.$$

Таким образом, длина волны в линии будет равна

$$\lambda_n = \frac{v}{f} = \frac{c}{f} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} = \lambda_0 \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}}.$$

5.19. Входное сопротивление будем определять по ф-ле (5.15):

$$Z_{вх\ кз} = i \rho \operatorname{tg} my,$$

$$X_{вх} = \rho \operatorname{tg} my.$$

Волновое сопротивление

$$\rho = 60 \ln \frac{r_2}{r_1} = 60 \ln \frac{200}{60} = 72 \text{ ом.}$$

Входное сопротивление, следовательно, будет равно

$$X_{вх} = \rho \operatorname{tg} my = 72 \operatorname{tg} \frac{2\pi}{62} \cdot 24 = -62,5 \text{ ом.}$$

Входное сопротивление имеет ёмкостный характер. Ёмкость, соответствующая данному входному сопротивлению, найдётся из соотношения

$$\frac{1}{\omega C_0} = X_{вх},$$

т. е.

$$C_0 = \frac{1}{\omega X_{вх}} = \frac{1}{\frac{2\pi c}{\lambda} X_{вх}} = \frac{62}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 62,5} = 525 \cdot 10^{-12} \text{ ф.}$$

$$C_0 = 525 \text{ пф.}$$

5.21. Из выражения

$$X_{вх} = \rho \operatorname{tg} my,$$

нужно определить длину y .

Подставляя условия задачи, находим, что

$$\operatorname{tg} my = \frac{X_{yx}}{\rho} = \frac{-120}{100} = -1,2.$$

Из таблицы тригонометрических функций следует, что аргумент my при этом равен

$$my = 2,26 \quad (my \approx 129),$$

откуда

$$y = \frac{2,26}{m} = \frac{2,26}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{2,26}{2\pi} 10 = 3,6 \text{ м.}$$

5.23. Расчёт проводим по ф-ле (5.16)

$$X_{yx} = -\rho \operatorname{ctg} my.$$

Подставляя условия задачи, получаем

$$X_{yx} = -200 \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{36} 9,7 = -200 \operatorname{ctg} 1,69 \approx 24,5 \text{ ом.}$$

Входное сопротивление имеет индуктивный характер.

Эквивалентная индуктивность, соответствующая данному сопротивлению, найдётся из соотношения

$$\omega L_g = X_{yx},$$

т. е.

$$L_g = \frac{X_{yx}}{\omega} = \frac{X_{yx}}{2\pi c} \lambda = \frac{24,5 \cdot 36}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^8} \approx 0,47 \text{ мкГн.}$$

5.25. Из выражений:

$$Z_{yx \text{ кз}} = \rho \operatorname{th} \gamma l,$$

$$Z_{yx \text{ хх}} = \rho \operatorname{cth} \gamma l$$

получаем, что

$$\rho^2 = Z_{yx \text{ кз}} \cdot Z_{yx \text{ хх}},$$

откуда

$$\rho = \sqrt{Z_{yx \text{ кз}} Z_{yx \text{ хх}}}.$$

Для линии без потерь получим

$$\rho = \sqrt{X_{кз} X_{хх}}.$$

По условиям задачи находим

$$\rho = \sqrt{60 \cdot 44} \approx 51,4 \text{ ом.}$$

5.26. Будем пользоваться ф-лой (5.13)

$$Z_{yx} = Z_2 \frac{1 + i \frac{\rho}{Z_2} \operatorname{tg} my}{1 + i \frac{Z_2}{\rho} \operatorname{tg} my}.$$

В данном случае $Z_2 = iX_2 = i50$ ом.
Подставляя условия задачи, найдём

$$Z_{\theta x} = i50 \frac{1 + i \frac{100}{i50} \operatorname{tg} \frac{\omega}{c} y}{1 + i \frac{i50}{100} \operatorname{tg} \frac{\omega}{c} y} = i50 \frac{1 + 2 \operatorname{tg} \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8} 5}{1 - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8} 5} = i50 \frac{1,65}{0,84} =$$

$$= i98,2 \text{ ом.}$$

Таким образом, входное сопротивление также имеет индуктивный характер и численно равно 98,2 ом.

5.28. В соответствии с условием задачи и ф-лой (5.13) требуем, чтобы

$$Z_{\theta x} = Z_2 \frac{1 + i \frac{\rho}{Z_2} \operatorname{tg} my}{1 + i \frac{Z_2}{\rho} \operatorname{tg} my} = 0,$$

т. е.

$$1 + i \frac{\rho}{Z_2} \operatorname{tg} my = 0.$$

Из этого условия получаем

$$Z_2 = -i\rho \operatorname{tg} my.$$

Подставляя условия задачи, находим

$$\rho \operatorname{tg} my = \rho \operatorname{tg} \frac{\omega}{c} y = \rho \operatorname{tg} \frac{2\pi f}{c} y = 100 \operatorname{tg} \frac{2\pi \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8} 60 =$$

$$= 100 \operatorname{tg} \frac{4\pi}{10} = 100 \cdot 3,08 = 308 \text{ ом.}$$

Следовательно, характер нагрузочного сопротивления должен быть ёмкостным; величина сопротивления $X_C = 308$ ом.

5.29. При условии $y = \frac{\lambda}{4}$

$$\operatorname{tg} my = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} = \infty.$$

Поэтому ф-ла (5.13) упрощается и принимает вид

$$Z_{\theta x} = Z_2 \frac{1 + i \frac{\rho}{Z_2} \operatorname{tg} my}{1 + i \frac{Z_2}{\rho} \operatorname{tg} my} = Z_2 \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} my} + i \frac{\rho}{Z_2}}{\frac{1}{\operatorname{tg} my} + i \frac{Z_2}{\rho}} = Z_2 \frac{\rho^2}{Z_2^2} = \frac{\rho^2}{Z_2}.$$

Следовательно, при расчёте входного сопротивления четвертьволновой линии можно пользоваться формулой

$$Z_{\theta x} = \frac{\rho^2}{Z_2}.$$

Для случая полуволновой линии $y = \frac{\lambda}{2}$ и

$$\operatorname{tg} my = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2} = \operatorname{tg} \pi = 0 \text{ и } Z_{вх} = Z_{\lambda}.$$

5.30. В соответствии с условием, если $l \ll \lambda$, то

$$ml = \frac{2\pi}{\lambda} l \ll 1$$

и можно считать, что

$$\operatorname{tg} ml \approx ml = \frac{2\pi}{\lambda} l = \frac{\omega}{c} l.$$

Решим поставленную задачу для двухпроводной открытой линии. При короткозамкнутой линии будем иметь

$$Z_{вх} = i \rho \operatorname{tg} ml \approx i \rho ml.$$

Таким образом, характер входного сопротивления индуктивный. Входная индуктивность найдётся из равенства

$$\omega L_{вх} = \rho ml = \rho \frac{\omega}{c} l,$$

откуда

$$L_{вх} = \frac{1}{c} \rho l.$$

Так как [ф-ла (5.7)] для открытой двухпроводной линии

$$\rho = 120 \ln \frac{d}{r}$$

можно написать

$$L_{вх} = \frac{l}{c} 120 \ln \frac{d}{r} = 0,4 \cdot 10^{-6} l \ln \frac{d}{r}.$$

Сопоставляя полученное выражение с первой формулой табл. 5.1

$$L_1 = 0,4 \cdot 10^{-6} \ln \frac{d}{r},$$

видим, что

$$L_{вх} = L_1 l,$$

что и требовалось доказать.

Для разомкнутой линии

$$Z_{вх} = -i \rho \operatorname{ctg} ml \approx -i \frac{\rho}{ml}.$$

Характер входного сопротивления короткой разомкнутой линии — ёмкостный. Входная ёмкость найдётся из равенства

$$\frac{1}{\omega C_{вх}} = \frac{\rho}{\frac{\omega}{c} l},$$

откуда

$$C_{вх} = \frac{l}{\rho c} = \frac{l}{120 \cdot 3 \cdot 10^8 \ln \frac{d}{r}} = 27,8 \cdot 10^{-12} l \frac{1}{\ln \frac{d}{r}}.$$

Сопоставляя это выражение со второй формулой табл. 5,1, находим

$$C_{вх} = C_1 l,$$

что и требовалось доказать.

5.31. Активную составляющую входного сопротивления короткозамкнутой линии с потерями можно определить по ф-ле (5.18)

$$R_{вх} = \frac{1}{2} \rho \frac{\text{sh } 2\beta y}{\text{sh}^2 \beta y + \cos^2 m y}.$$

В линии с очень малыми потерями $\beta y \ll 1$ и

$$R_{вх} \approx \rho \frac{\beta y}{(\beta y)^2 + \cos^2 m y}.$$

Если $\beta \rightarrow 0$, то $R_{вх}$ также стремится к нулю во всех точках, где $\cos^2 m y \neq 0$. В точках же $m y = (2\kappa + 1) \frac{\pi}{2}$, $\cos^2 m y = 0$ и $R_{вх}$ стремится к бесконечности.

График активной составляющей входного сопротивления короткозамкнутой линии без потерь, следовательно, будет иметь вид рис. Р.5.3а. В точках $y = \frac{(2\kappa + 1) \pi}{m}$ характер изменения активной составляющей будет соответствовать δ -функции.

Аналогичными рассуждениями, исходя из ф-лы (5.19), можно построить график изменения активной составляющей входного сопротивления разомкнутой линии (рис. Р.5.3б)

5.32. 1) На основе уравнений с отсчётом от конца линии [ф-ла (5.22)] имеем из формулы

$$U = U_2 \cos m y$$

находим U_2

$$U_2 = \frac{U}{\cos m y} = \frac{U_1}{\cos m l}.$$

Подставляя условия задачи, получаем

$$U_2 = \frac{U_1}{\cos \frac{\omega}{c} l} = \frac{20}{\cos \frac{2\kappa \cdot 3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8} 20} \approx 65 \text{ в.}$$

2) На основе уравнений с отсчётом от начала линии [ф-лы (5.1)]

$$U = U_1 \text{ch } \gamma x - I_1 Z_C \text{sh } \gamma x.$$

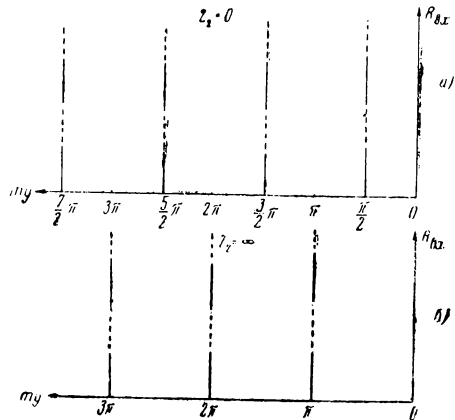


Рис. Р.5.3

Принимая во внимание, что $\gamma = i m$; $\frac{U_1}{I_1} = Z_{ax} = -i Z_C \operatorname{ctg} mx$, получаем

$$U = U_1 (\cos mx + \operatorname{tg} mx \sin mx).$$

Вычислив $mx = \frac{2\pi}{\lambda} l = \frac{\omega}{c} l = 72^\circ$ и подставив $U_1 = 20$ в, находим U_2

$$U_2 = 20 (0,31 + 3,08 \cdot 0,95) = 20 \cdot 3,25 \approx 65 \text{ в.}$$

Этот пример наглядно показывает удобство пользования уравнениями с отсчётом от конца линии.

5.34. Распределение напряжения вдоль разомкнутой линии без потерь определяется формулой

$$U = U_2 \cos my;$$

следовательно, в данном случае

$$U = U_2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} y = 600 \cos \frac{2\pi}{300} 40 = 401 \text{ в.}$$

Распределение тока вдоль разомкнутой линии определяется выражением

$$I = \frac{U_2}{\rho} \sin my;$$

таким образом, в данном случае

$$I = \frac{U_2}{\rho} \sin \frac{2\pi}{\lambda} y = \frac{600}{300} \sin \frac{2\pi}{300} 40 = 1,49 \text{ а.}$$

5.36. Исходным выражением будет ф-ла (5.22)

$$I = \frac{U_2}{\rho} \sin my,$$

из которой легко определить ρ

$$\rho = \frac{U_2}{I} \sin my.$$

Подставляя условия задачи, находим

$$\rho = \frac{200}{0,5} \sin \frac{2\pi}{20} \cdot 2 = 235 \text{ ом.}$$

5.37. Исходя из общих телеграфных уравнений длинной линии без потерь (5.20):

$$\bar{U} = \bar{U}_2 \left(\cos my + i \frac{\rho}{Z_2} \sin my \right);$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}_2}{\rho} \left(\frac{\rho}{Z_2} \cos my + i \sin my \right),$$

можно написать:

$$\bar{U} = \bar{U}_2 \left[\cos my + i \frac{\rho (R_2 - i X_2)}{R_2^2 + X_2^2} \sin my \right];$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}_2}{\rho} \left[\frac{\rho (R_2 - i X_2)}{R_2^2 + X_2^2} \cos my + i \sin my \right].$$

Займёмся выражением для напряжения. Разделяя вещественную и мнимую части, получим

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \bar{U}_2 \left[\cos my + \frac{\rho X_2}{R_2^2 + X_2^2} \sin my + i \frac{\rho R_2}{R_2^2 + X_2^2} \sin my \right] = \\ &= \bar{U}_2 \left[\cos my + \frac{\rho X_2}{R_2^2 + X_2^2} \sin my - \frac{\rho R_2}{R_2^2 + X_2^2} \cos my + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\rho R_2}{R_2^2 + X_2^2} \cos my + i \frac{\rho R_2}{R_2^2 + X_2^2} \sin my \right] = \\ &= \bar{U}_2 \left[\frac{\rho R_2}{R_2^2 + X_2^2} e^{i my} + \cos my \left(1 - \frac{\rho R_2}{R_2^2 + X_2^2} \right) + \sin my \frac{\rho X_2}{R_2^2 + X_2^2} \right]. \end{aligned}$$

Переходя к мгновенным значениям, запишем

$$u = U_2 \left\{ \frac{\rho R_2}{R_2^2 + X_2^2} \sin(\omega t + my) + \left[\cos my \left(1 - \frac{\rho R_2}{R_2^2 + X_2^2} \right) + \sin my \frac{\rho X_2}{R_2^2 + X_2^2} \right] \sin \omega t \right\}.$$

Легко видеть, что если нагрузка чисто активная ($X_2 = 0$), последнее выражение соответствует выражению (5.24); если нагрузка чисто реактивная ($R_2 = 0$) — выражению (5.25).

Прделаем аналогичные преобразования с выражением для тока:

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \frac{\bar{U}_2}{\rho} \left[-\frac{\rho R_2}{R_2^2 + X_2^2} \cos my - i \frac{\rho X_2}{R_2^2 + X_2^2} \cos my + i \sin my \right] = \\ &= \frac{\bar{U}_2}{\rho} \left[\frac{\rho R_2}{R_2^2 + X_2^2} \cos my + i \frac{\rho R_2}{R_2^2 + X_2^2} \sin my - i \frac{\rho R_2}{R_2^2 + X_2^2} \sin my - \right. \\ &\quad \left. - i \frac{\rho X_2}{R_2^2 + X_2^2} \cos my + i \sin my \right] = \\ &= \frac{\bar{U}_2}{\rho} \left\{ \frac{\rho R_2}{R_2^2 + X_2^2} e^{i my} + i \left[\sin my \left(1 - \frac{\rho R_2}{R_2^2 + X_2^2} \right) - \frac{\rho X_2}{R_2^2 + X_2^2} \cos my \right] \right\}. \end{aligned}$$

Переходя к мгновенным значениям, запишем

$$i = \frac{U_2}{\rho} \left\{ \frac{\rho R_2}{R_2^2 + X_2^2} \sin(\omega t + my) + \left[\sin my \left(1 - \frac{\rho R_2}{R_2^2 + X_2^2} \right) - \frac{\rho X_2}{R_2^2 + X_2^2} \cos my \right] \cos \omega t \right\}.$$

Легко видеть, что при $X_2 = 0$ и $R_2 = 0$ последнее выражение переходит в выражения (5.24) и (5.25).

Обозначая $R_2^2 + X_2^2 = Z_2^2$, окончательно запишем:

$$u = U_2 \left\{ \frac{\rho R_2}{Z_2^2} \sin(\omega t + my) + \left[\cos my \left(1 - \frac{\rho R_2}{Z_2^2} \right) + \sin my \frac{\rho X_2}{Z_2^2} \right] \sin \omega t \right\},$$

$$i = \frac{U_2}{\rho} \left\{ \frac{\rho R_2}{Z_2^2} \sin(\omega t + my) + \left[\sin my \left(1 - \frac{\rho R_2}{Z_2^2} \right) - \cos my \frac{\rho X_2}{Z_2^2} \right] \cos \omega t \right\}.$$

Следовательно, при комплексной нагрузке в линии устанавливаются стоячие и бегущие волны. Первый член в фигурных скобках представляет собой бегущую, а второй (заклоченный в квадратные скобки) — стоячую волну.

5.39. В основное уравнение для добротности

$$Q = \frac{\pi}{\beta \lambda}$$

подставим выражения R_1 , β и ρ [ф-ла (5.5), ф-ла 3 в табл. 5.1 и ф-ла (5.8)].

$$\beta = \frac{R_1}{2l} = \frac{3,32}{2 \cdot r_2 \sqrt{\lambda \cdot 77}} = \frac{0,0215}{r_2 \sqrt{\lambda}};$$

$$R_1 = \frac{0,72}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \frac{0,72}{\sqrt{\lambda}} \cdot \frac{1}{r_2} \left(1 + \frac{r_2}{r_1} \right) = 3,32 \frac{1}{r_2 \sqrt{\lambda}}$$

(в этой формуле R_1 в $\frac{\text{ом}}{\text{м}}$, r_2 в мм и λ в м),

$$\rho = 60 \ln \frac{r_2}{r_1} = 60 \ln 3,6 = 77 \text{ ом};$$

в результате получим

$$Q = \frac{\pi r_2 \sqrt{\lambda}}{0,0215 \lambda} \approx 146 \frac{r_2}{\sqrt{\lambda}}.$$

Если выразить r_2 и λ в см, получим

$$Q \approx 14600 \frac{r_2}{\sqrt{\lambda}}.$$

5.46. Решение подобных задач следует начинать с нахождения аргумента ml . В данном случае

$$ml_1 = \frac{2\pi}{\lambda} l_1 = \frac{2\pi}{40} 45 = \frac{9}{4} \pi = 2\pi + \frac{\pi}{4}; \quad \text{tg } ml_1 = 1;$$

$$ml_2 = \frac{2\pi}{\lambda} l_2 = \frac{2\pi}{40} 70 = 7 \frac{\pi}{2}; \quad \text{tg } ml_2 = \infty.$$

Найдём сначала входное сопротивление второго участка.

Как было показано (задача 5.29), для случая $\operatorname{tg} ml = \infty$, из ф-лы (5.13) легко получить

$$Z_{вх} = \frac{\rho^2}{Z_2};$$

в данном случае

$$Z_{вх} = \frac{60^2}{60} = 60 \text{ ом.}$$

Таким образом, первый участок нагружен на чисто активную нагрузку, равную 60 ом.

Для случая $\operatorname{tg} ml = 1$ из ф-лы (5.13), избавляясь обычным путём от мнимости в знаменателе, получаем, имея в виду, что $Z_2 = R_2$, следующее выражение

$$Z_{вх} = \rho \frac{2 \frac{Z_2}{\rho} + i \left(1 - \frac{Z_2^2}{\rho^2} \right)}{1 + \left(\frac{Z_2}{\rho} \right)^2}.$$

В данном случае:

$$\rho = \rho_1 = 480 \text{ ом,}$$

$$Z_2 = R_2 = 60 \text{ ом,}$$

$$\frac{Z_2}{\rho} = \frac{60}{480} = \frac{1}{8}.$$

Следовательно,

$$Z_{вх} = 480 \frac{\frac{1}{4} + i \left(1 - \frac{1}{64} \right)}{1 + \frac{1}{64}} = (118 + i 466) \text{ ом.}$$

5.48. Волновое сопротивление участка CD должно быть равно 240 ом.

Участок BC нагружен на два параллельно соединённых сопротивления по 240 ом, т. е. на 120 ом и, следовательно, его волновое сопротивление тоже должно быть равно 120 ом.

Участок AB нагружен на сопротивление 240 ом, параллельно которому подключено сопротивление 120 ом, т. е. участок AB нагружен на

$$R_{AB} = \frac{240 \cdot 120}{240 + 120} = 80 \text{ ом.}$$

Таким образом, волновое сопротивление участка AB должно быть равно 80 ом.

5.49. Для режима бегущей волны $R_2 = \rho_2 = 40 \text{ ом}$.

Так как далее $\rho_1 = 60 \text{ ом}$ и, кроме того, для согласования необходимо, чтобы

$$\rho_1 = R_1 + R_{вх} = R_1 + \rho_2,$$

то

$$R_1 = \rho_1 - \rho_2 = 60 - 40 = 20 \text{ ом.}$$

Ток в линии будет равен

$$I = \frac{E}{R_i + \rho_1} = \frac{150}{15 + 60} = 2a.$$

Каждый из амперметров покажет $2a$.

5.51. Составляем очевидное уравнение

$$-i \rho_2 \operatorname{ctg} ml_2 = -i \rho_1 \operatorname{ctg} ml_{\text{экв}}.$$

Решая уравнение относительно $l_{\text{экв}}$, получим

$$l_{\text{экв}} = \frac{1}{m} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \operatorname{tg} ml_2 \right).$$

5.53. Для двухпроводной линии известно, что

$$\rho = 120 \ln \frac{d}{r}.$$

В данном случае величины d и ρ являются функциями координаты x ; обозначим их d_x и ρ_x .

Известно далее, что

$$\rho_x = \rho_0 e^{-\alpha x}.$$

Следовательно,

$$\rho_0 e^{-\alpha x} = 120 \ln \frac{d_x}{r}.$$

Решая полученное уравнение относительно d_x , имеем

$$d_x = re^{\frac{\rho_0}{120} e^{-\alpha x}}.$$

Эта формула справедлива при условии $d \gg r$.

5.54. Подставляя в формулу (задача 5.53)

$$d_x = re^{\frac{\rho_0}{120} e^{-\alpha x}}$$

два значения длины x , т. е. $x = 0$ и $x = l = 10$ м, получим:

$$d_0 = re^{\frac{\rho_0}{120}} = 0,2 e^{\frac{800}{120}} = 157 \text{ см};$$

$$d_l = 0,2 \cdot e^{\frac{800}{120} \cdot e^{-0,069 \cdot 10}} \approx 5,6 \text{ см}.$$

5.55. По ф-ле (5.13)

$$Z_{\theta, x} = Z_2 \frac{1 + i \frac{\rho}{Z_2} \operatorname{tg} my}{1 + i \frac{Z_2}{\rho} \operatorname{tg} my}.$$

В данном случае

$$Z_{\theta, x} = \rho \frac{1 + i \frac{\rho_1}{\rho} \operatorname{tg} ml}{1 + i \frac{\rho}{\rho_1} \operatorname{tg} ml} = \rho_1 \frac{\rho + i \rho_1 \operatorname{tg} ml}{\rho_1 + i \rho \operatorname{tg} ml}.$$

Так как по условию $ml \ll 1$, то $\operatorname{tg} ml \approx ml$

$$Z_{вх} = \rho_1 \frac{\rho + i \rho_1 ml}{\rho_1 + i \rho ml}.$$

Избавимся от мнимости в знаменателе:

$$Z_{вх} = \rho_1 \frac{\rho \rho_1 (1 + m^2 l^2) + i ml (\rho_1^2 - \rho^2)}{\rho_1^2 + \rho^2 m^2 l^2}.$$

Пренебрегая $m^2 l^2$ по сравнению с единицей в числителе и $m^2 l^2 \rho^2$ по сравнению с ρ_1^2 в знаменателе, получим

$$Z_{вх} = \rho + i \frac{(\rho_1^2 - \rho^2)}{\rho_1} ml.$$

Очевидно что если $\rho_1 > \rho$, входное сопротивление будет иметь индуктивный характер; если $\rho_1 < \rho$, входное сопротивление будет иметь ёмкостный характер.

5.60. Для данной схемы:

$$Z_1 = R_1 + i \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1'} \right);$$

$$Y_1 = G_1 + i \omega C_1;$$

$$\gamma = \sqrt{\left[R_1 + i \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1'} \right) \right] (G_1 + i \omega C_1)}.$$

Для линии без потерь

$$\gamma = \sqrt{i \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1'} \right) i \omega C_1} = i \sqrt{\omega^2 L_1 C_1 - \frac{C_1'}{C_1}}.$$

Очевидно, распространение возможно при условии

$$\frac{C_1'}{C_1} < \omega^2 L_1 C_1$$

или

$$C_1' > \frac{1}{\omega^2 L_1}.$$

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 6

6.1. Составляем схемы «опытов холостого хода и короткого замыкания» (рис. Р. 6.1 а, б).

Непосредственно по схемам составляем очевидные уравнения:

холостой ход:

$$\bar{U}_2 = \bar{I}_1 Z_2;$$

$$\bar{U}_1 = \bar{I}_1 (Z_1 + Z_2) = \frac{\bar{U}_2}{Z_2} (Z_1 + Z_2);$$

короткое замыкание:

$$\bar{U}_1 = \bar{I}_2 Z_1;$$

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_2.$$

Сопоставляя эти уравнения с ур-ниями (6.5) и (6.6), сразу получаем:

$$A_{11} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2}; \quad A_{12} = Z_1;$$

$$A_{21} = \frac{1}{Z_2}; \quad A_{22} = 1.$$

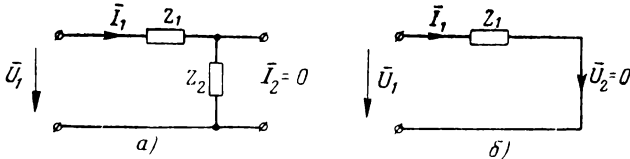


Рис. P.6.1

6.2. Составляем схемы «опытов холостого хода и короткого замыкания» рис. P.6.2a, б).

Непосредственно по схемам составляем очевидные уравнения:
 холостой ход: короткое замыкание:

$$\bar{U}_2 = \bar{I}_1 Z_2; \quad (1) \quad \bar{U}_1 = \bar{I}_1 \left(Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} \right), \quad (3)$$

$$\bar{U}_1 = \bar{I}_1 (Z_1 + Z_2) = \frac{\bar{U}_2}{Z_2} (Z_1 + Z_2); \quad (2) \quad \bar{I}_2 Z_3 = \bar{U}_1 - \bar{I}_1 Z_1. \quad (4)$$

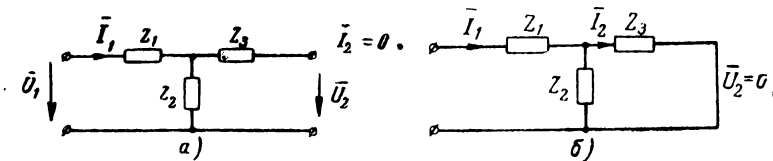


Рис. P.6.2

Уравнения (1) и (2) при сопоставлении с ур-ниями (6.5) дают возможность сразу определить коэффициенты A_{11} и A_{21} :

$$A_{11} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2}; \quad A_{21} = \frac{1}{Z_2}.$$

Для определения коэффициентов A_{12} и A_{22} нужно ур-ния (3) и (4) привести к виду, соответствующему виду ур-ний (6.6). Это легко сделать, определив \bar{U}_1 из (4) и подставив его в (3), а затем \bar{I}_1 из (3) и подставив в (4). Тогда получим уравнения:

$$\bar{I}_2 Z_3 + \bar{I}_1 Z_1 = \bar{I}_1 \left(Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} \right);$$

$$\bar{I}_2 Z_3 = \bar{U}_1 - Z_1 \frac{\bar{U}_1}{Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}}.$$

которые легко приводятся к виду, соответствующему (6.6):

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_1 \cdot \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3}; \quad (5)$$

$$\bar{I}_2 = \bar{U}_1 \cdot \frac{Z_2}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}. \quad (6)$$

Сопоставляя последние уравнения с уравнениями (6.6) сразу же получаем

$$A_{12} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_2}; \quad A_{22} = \frac{Z_2 + Z_3}{Z_3}.$$

6.4. По ф-лам (6.7) и (6.8) получаем:

$$Z_{11} = \frac{A_{11}}{A_{21}} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} \cdot Z_2 = Z_1 + Z_2;$$

$$Z_{12} = -\frac{1}{A_{21}} = -Z_2;$$

$$Z_{21} = \frac{1}{A_{21}} = Z_2;$$

$$Z_{22} = -\frac{A_{22}}{A_{21}} = -Z_3;$$

$$Y_{11} = \frac{A_{22}}{A_{12}} = \frac{1}{Z_1};$$

$$Y_{12} = -\frac{1}{A_{12}} = -\frac{1}{Z_1};$$

$$Y_{21} = \frac{1}{A_{12}} = \frac{1}{Z_1};$$

$$Y_{22} = -\frac{A_{11}}{A_{12}} = -\frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} \cdot \frac{1}{Z_1} = -\frac{1}{Z_1} - \frac{1}{Z_2}.$$

6.5. Из табл. 6.2 для данной схемы (поз. 10) находим:

$$A_{11} = 1 + \frac{Z_1}{Z_2}; \quad A_{12} = Z_1 + Z_3 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2},$$

$$A_{21} = \frac{1}{Z_2}; \quad A_{22} = 1 + \frac{Z_3}{Z_2}.$$

В данном случае:

$$Z_1 = i 1000 \text{ ом}; \quad Z_2 = (100 + i 500) \text{ ом}; \quad Z_3 = 1000 \text{ ом}.$$

Подставляя в формулы для коэффициентов эти значения сопротивлений, получаем

$$A_{11} = 1 + \frac{i 1000}{100 + i 500} = 1 + \frac{i 10(1 - i 5)}{1 + 5^2} = 2,92 + i 0,385;$$

$$A_{12} = i 1000 + 1000 + \frac{i 1000 \cdot 1000}{100 + i 500} = 2920 + i 1385;$$

$$A_{21} = \frac{1}{100 + i500} = \frac{1}{2600} - i \frac{5}{2600};$$

$$A_{22} = 1 + \frac{1000}{100 + i500} = 1,385 - i1,92.$$

Проверим соотношение $A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1$

$$(2,92 + i0,385)(1,385 - i1,92) - (2920 + i1385) \left(\frac{1}{2600} - i \frac{5}{2600} \right) \approx 1.$$

Равенство удовлетворяется.

6.8. По табл. 6.2 (поз.3) находим:

$$A_{11} = \pm \frac{Z_1}{Z_M}; \quad A_{12} = \pm \frac{Z_1 Z_2 - Z_M^2}{Z_M};$$

$$A_{21} = \pm \frac{1}{Z_M}; \quad A_{22} = \pm \frac{Z_2}{Z_M}.$$

Подготовим необходимые для расчёта данные:

$$X_1 = \omega L_1 = 2\pi f L_1 = 2\pi \cdot 159 \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-6} = 100 \text{ ом};$$

$$X_2 = \omega L_2 = 2\pi f L_2 = 2\pi \cdot 159 \cdot 10^3 \cdot 400 \cdot 10^{-6} = 400 \text{ ом};$$

$$M = \kappa \sqrt{L_1 L_2} = 0,1 \sqrt{100 \cdot 400} = 0,1 \cdot 2 \cdot 10^2 = 20 \text{ мкГн}^1);$$

$$X_M = \omega M = 2\pi \cdot 159 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 10^{-6} = 20 \text{ ом};$$

$$Z_1 = (10 + i100) \text{ ом}; \quad Z_2 = (40 + i400) \text{ ом}; \quad Z_M = i20 \text{ ом}.$$

Рассчитаем коэффициенты:

$$A_{11} = \frac{10 + i100}{i20} = 5 - i0,5;$$

$$A_{12} = \frac{(10 + i100)(40 + i400) - (i20)^2}{i20} = 400 - i1960;$$

$$A_{21} = \frac{1}{i20} = -i0,05;$$

$$A_{22} = \frac{40 + i400}{i20} = 20 - i2.$$

6.10. В данном случае:

$$Z_1 = i\omega L = i2\pi f L = i2\pi \cdot 500 \cdot 100 \cdot 10^{-3} = i314 \text{ ом};$$

$$Z_2 = R = 100 \text{ ом}.$$

Находим коэффициенты A по формулам (поз. 7 табл. 6.2):

$$A_{11} = 1 + \frac{Z_1}{Z_2} = 1 + \frac{i314}{100} = 1 + i3,14;$$

$$A_{12} = Z_1 = i314;$$

$$A_{21} = \frac{1}{Z_2} = 0,01;$$

$$A_{22} = 1.$$

¹⁾ Выбираем для M знак +.

Коэффициенты Z находим по ф-лам (6.7):

$$Z_{11} = \frac{A_{11}}{A_{21}} = \frac{1 + i 3,14}{0,01} = 100(1 + i 3,14);$$

$$Z_{12} = -\frac{1}{A_{21}} = -100;$$

$$Z_{21} = \frac{1}{A_{21}} = 100;$$

$$Z_{22} = -\frac{A_{22}}{A_{21}} = -\frac{1}{0,01} = -100.$$

Коэффициенты Y находим по ф-лам (6.8):

$$Y_{11} = \frac{A_{22}}{A_{12}} = \frac{1}{i 314} = -i \frac{1}{314};$$

$$Y_{12} = -\frac{1}{A_{12}} = -\frac{1}{i 314} = i \frac{1}{314};$$

$$Y_{21} = \frac{1}{A_{12}} = \frac{1}{i 314} = -i \frac{1}{314};$$

$$Y_{22} = -\frac{A_{11}}{A_{12}} = -\frac{1 + i 3,14}{i \cdot 314} = -\frac{1}{100} + i \frac{1}{314}.$$

6.12. Сопоставляя основные уравнения четырёхполюсника:

$$\bar{U}_1 = A_{11} \bar{U}_2 + A_{12} \bar{I}_2;$$

$$\bar{I}_1 = A_{21} \bar{U}_2 + A_{22} \bar{I}_2$$

с уравнениями длинной линии:

$$\bar{U}_1 = \bar{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \bar{I}_2 \rho \operatorname{sh} \gamma l;$$

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \frac{\bar{U}_2}{\rho} \operatorname{sh} \gamma l,$$

легко находим:

$$A_{11} = \operatorname{ch} \gamma l;$$

$$A_{12} = \rho \operatorname{sh} \gamma l;$$

$$A_{21} = \frac{\operatorname{sh} \gamma l}{\rho};$$

$$A_{22} = \operatorname{ch} \gamma l.$$

6.14. Для симметричного четырёхполюсника $A_{11} = A_{22}$, и таким образом определению подлежат три коэффициента: A_{11} , A_{12} и A_{21} . Для определения трёх неизвестных нужно располагать тремя уравнениями.

Эти уравнения можно составить из выражений (6.12) для входных соотношений:

$$Z_{xx} = \frac{A_{11}}{A_{21}}, \quad (1)$$

$$Z_{kz} = \frac{A_{12}}{A_{11}} \quad (2)$$

и из соотношения (6.10) между коэффициентами

$$A_{11}^2 - A_{12} A_{21} = 1. \quad (3)$$

Решим системы (1), (2) и (3) относительно A_{11} , A_{12} и A_{21} .
Разделив (1) на (2), получаем

$$\frac{Z_{xx}}{Z_{kz}} = \frac{A_{11}^2}{A_{21} A_{12}},$$

откуда получаем вспомогательное равенство (4)

$$A_{21} A_{12} = \frac{Z_{kz}}{Z_{xx}} A_{11}^2. \quad (4)$$

Подставляя последнее равенство в (3) и решая его относительно A_{11} , получаем

$$A_{11} = \sqrt{\frac{Z_{xx}}{Z_{xx} - Z_{kz}}}. \quad (5)$$

Подставляя значение A_{11} в (1), получаем выражение для A_{21}

$$A_{21} = \frac{1}{\sqrt{Z_{xx}(Z_{xx} - Z_{kz})}}. \quad (6)$$

Подставляя значение A_{11} в (2), находим выражение для A_{12}

$$A_{12} = Z_{kz} \sqrt{\frac{Z_{xx}}{Z_{xx} - Z_{kz}}}. \quad (7)$$

Формулы (5), (6) и (7) и представляют собой решение поставленной задачи.

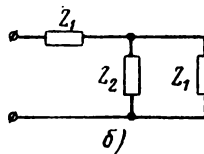
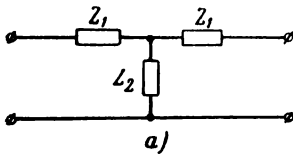


Рис. Р.6.3

6.15. Находим входные сопротивления для режимов холостого хода и короткого замыкания (рис. Р.6.3 а и б):

$$\begin{aligned} Z_{xx} &= Z_1 + Z_2; \\ Z_{kz} &= Z_1 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_2 + Z_2} = \frac{Z_1^2 + 2Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}. \end{aligned}$$

Подставляя значения Z_{xx} и Z_{kz} в ф-лы (5), (6) и (7) предыдущей задачи, получаем:

$$A_{11} = \sqrt{\frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 + Z_2 - Z_1 - \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}}} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} = 1 + \frac{Z_1}{Z_2};$$

$$A_{12} = A_{11} Z_{kz} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} \left(Z_1 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \right) = \frac{Z_1^2 + 2Z_1 Z_2}{Z_2};$$

$$A_{21} = \frac{A_{11}}{Z_{xx}} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} \cdot \frac{1}{Z_1 + Z_2} = \frac{1}{Z_2}.$$

6.16. Новые уравнения в силу изменения направлений токов (рис. 6.15б) примут вид:

$$\bar{U}_1 = A_{11}\bar{U}_2 - A_{12}\bar{I}_2, \quad (1)$$

$$-\bar{I}_1 = A_{21}\bar{U}_2 - A_{22}\bar{I}_2. \quad (2)$$

Решим полученные уравнения относительно U_2 и I_2 с тем, чтобы найти $Z_{вх} = \frac{\bar{U}_2}{\bar{I}_2}$.

Решая (1) и (2) соответственно относительно \bar{U}_2 и \bar{I}_2 , получим:

$$\bar{U}_2 = \frac{\bar{U}_1 + A_{12}\bar{I}_2}{A_{11}}, \quad (3)$$

$$\bar{I}_2 = \frac{A_{21}\bar{U}_2 + \bar{I}_1}{A_{22}} \quad (4)$$

Подставив в ур-не (3) значение \bar{I}_2 и равенство (4), будем иметь

$$\bar{U}_2 = \frac{\bar{U}_1}{A_{11}} + \frac{A_{12}}{A_{11}} \cdot \frac{A_{21}}{A_{22}} \bar{U}_2 + \frac{A_{12}}{A_{11}} \cdot \frac{1}{A_{22}} \bar{I}_1$$

или

$$\bar{U}_2 \left(1 - \frac{A_{12}A_{21}}{A_{11}A_{22}} \right) = \frac{1}{A_{11}} \bar{U}_1 + \frac{A_{12}}{A_{11}A_{22}} \bar{I}_1.$$

Решая последнее уравнение относительно U_2 , приняв во внимание, что $A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1$, получим

$$\bar{U}_2 = A_{22}\bar{U}_1 + A_{12}\bar{I}_1. \quad (5)$$

Теперь подставим (5) в (4)

$$\bar{I}_2 = \frac{A_{21}}{A_{22}} (A_{22}\bar{U}_1 + A_{12}\bar{I}_1) + \frac{\bar{I}_1}{A_{22}}$$

или

$$\bar{I}_2 = A_{21}\bar{U}_1 + \left(\frac{A_{21}A_{12}}{A_{22}} + \frac{1}{A_{22}} \right) \bar{I}_1.$$

Так как $A_{21}A_{12} + 1 = A_{11}A_{22}$, то можно окончательно записать

$$\bar{I}_2 = A_{21}\bar{U}_1 + A_{11}\bar{I}_1. \quad (6)$$

Сравнивая ур-ния (5) и (6) с основными уравнениями четырёхполюсника, замечаем, что при замене входных зажимов выходными коэффициенты A_{11} и A_{21} меняются местами. Для симметричного четырёхполюсника, у которого $A_{11} = A_{22}$, перемена зажимов не изменяет основных уравнений.

Сопrotивление „справа налево“ будет равно

$$Z_{вых} = \frac{\bar{U}_2}{\bar{I}_2} = \frac{A_{22}\bar{U}_1 + A_{12}\bar{I}_1}{A_{21}\bar{U}_1 + A_{11}\bar{I}_1} = Z_1 \frac{A_{22} + \frac{A_{12}}{Z_1}}{A_{21}Z_1 + A_{11}}.$$

При коротком замыкании $Z_1 = 0$

$$Z_{об.кз} = \frac{A_{12}}{A_{11}}. \quad (7)$$

При холостом ходе $Z_1 = \infty$

$$Z_{вых.хх} = \frac{A_{22}}{A_{21}}. \quad (8)$$

6.17. Для нахождения четырёх неизвестных нужно иметь четыре уравнения. Три из них использовались в аналогичной задаче 6.14:

$$Z_{xx} = \frac{A_{11}}{A_{21}};$$

$$Z_{кз} = \frac{A_{12}}{A_{22}};$$

$$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1.$$

Четвёртое уравнение возьмём из задачи 6.16 [ур-ние (7)]

$$Z_{об.кз} = \frac{A_{12}}{A_{11}}.$$

Решая систему уравнений (по аналогии с задачей 6.14), получим:

$$A_{11} = \sqrt{\frac{Z_{xx}Z_{кз}}{Z_{вых.кз}(Z_{xx} - Z_{кз})}}; \quad A_{21} = \sqrt{\frac{Z_{кз}}{Z_{вых.кз}(Z_{xx} - Z_{кз})}};$$

$$A_{12} = \sqrt{\frac{Z_{вых.кз}Z_{кз}Z_{кз}}{Z_{xx} - Z_{кз}}}; \quad A_{22} = \sqrt{\frac{Z_{вых.кз}Z_{xx}}{Z_{кз}(Z_{xx} - Z_{кз})}}.$$

6.18. Расчёт входного сопротивления ведем по ф-ле (6.23) табл. 6.1

$$Z_{вх} = \frac{A_{11}Z_2 + A_{12}}{A_{21}Z_2 + A_{22}}.$$

Воспользовавшись значениями коэффициентов A , найденными в задаче 6.10:

$$A_{11} = 1 + i3,14;$$

$$A_{12} = i314;$$

$$A_{21} = 0,01;$$

$$A_{22} = 1$$

и подставляя их в формулу для $Z_{вх}$ с учётом того, что $Z_2 = 100 \text{ ом}$, получаем

$$Z_{вх} = \frac{(1 + i3,14)100 + i314}{0,01 \cdot 100 + 1} = (50 + i314) \text{ ом}.$$

6.20. Из табл. 6.1 находим интересующую нас ф-лу (6.19) при $Z_2 = \infty$

$$\frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} = \frac{1}{A_{11}}.$$

Так как для данной схемы $A_{11} = 1 + \frac{Z_1}{Z_2}$, то

$$\frac{1}{A_{11}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{5 + i5}{i10 + 5 + i5} = \frac{2 - i}{5},$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\sqrt{2^2 + 1^2}}{5} = 0,447.$$

Напряжение U_2 равно

$$U_2 = 0,447 \cdot 1 = 0,447 \text{ в.}$$

Сдвиг фаз между U_2 и U_1 :

$$\operatorname{tg} \varphi_{U_2 \rightarrow U_1} = -\frac{1}{2}; \quad \varphi_{U_2 \rightarrow U_1} \approx -26,5^\circ.$$

6.22. Нужно нам ур-ние (6.19) имеет вид

$$\bar{U}_2 = \bar{U}_1 \frac{1}{A_{11}}.$$

Коэффициент A_{11} находим из табл. 6.2 (поз. 14)

$$A_{11} = \frac{(Z_2 + Z_3)(Z_4 + Z_5) + Z_2 Z_3}{Z_3 Z_5} = \frac{(80 + 20)(100 + 100) + 80 \cdot 20}{20 \cdot 100} = 10,8.$$

Следовательно,

$$U_2 = 10 \cdot \frac{1}{10,8} = 0,925 \text{ в.}$$

6.23. Из табл. 6.1 выбираем нужно нам ур-ние (6.18), которое ввиду того, что внутреннее сопротивление генератора равно нулю, совпадает с ур-нием (6.21) той же таблицы

$$\bar{I}_2 = \bar{U}_1 \frac{1}{A_{11} Z_2 + A_{12}}.$$

Рассчитаем сопротивления:

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{10^6}{2\pi \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot 0,1} = \frac{10^3}{2\pi} \text{ ом};$$

$$\omega L = 2\pi \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot \frac{10}{10^3} = 2\pi \cdot 10^3 \text{ ом};$$

$$Z_1 = Z_3 = -i \frac{10^3}{2\pi} \text{ ом};$$

$$Z_2 = i 2\pi \cdot 10^3 \text{ ом.}$$

Коэффициенты A_{11} и A_{12} :

$$A_{11} = 1 + \frac{Z_1}{Z_2} = 1 - \frac{i \frac{10^3}{2\pi}}{2\pi \cdot 10^3} \approx 1;$$

$$A_{12} = 2L_1 + \frac{Z_1^2}{Z_2} = Z_1 \left(2 + \frac{Z_1}{Z_2} \right) = -i \frac{10^3}{2\pi} \left(2 - \frac{1}{4\pi^2 \cdot 10} \right) \approx -i \frac{10^3}{\pi}.$$

Находим ток I_2

$$I_2 = U_1 \frac{1}{A_{11}Z_2 + A_{12}} = 10 \frac{1}{1 \cdot 2,72 - i 31,8}.$$

Модуль тока I_2

$$I_2 = \frac{10}{\sqrt{2,72^2 + 31,8^2}} = 0,314 \text{ а.}$$

6.25. Из табл. 6.1 подберем соответствующие выражения (6.16, 6.18 и 6.17), имея в виду, что при $Z_{вк} = 0$, $E = U_1$. Эти выражения имеют вид:

$$\bar{I}_1 = U_1 \frac{A_{21}Z_2 + A_{22}}{H_a};$$

$$\bar{I}_2 = \bar{U}_1 \frac{1}{H_a};$$

$$\bar{U}_2 = \bar{U}_1 \frac{Z_2}{H_a};$$

$$H_a = A_{11}Z_2 + A_{12}.$$

Найдём коэффициенты A :

$$A_{11} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = \frac{100 + 200}{200} = 1,5;$$

$$A_{12} = \frac{R_1^2 + 2R_1R_2}{R_2} = \frac{100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 200}{200} = 250;$$

$$A_{21} = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{200} = 0,005;$$

$$A_{22} = A_{11} = 1,5.$$

Найдём сопротивление передачи H_a :

$$H_a = A_{11}Z_2 + A_{12} = 1,5 \cdot 200 + 250 = 550 \text{ ом.}$$

Подставляя найденные значения в расчётные формулы для I_1 , I_2 и U_2 , получим:

$$I_1 = U_1 \frac{A_{21}Z_2 + A_{22}}{H_a} = 50 \cdot \frac{\frac{1}{200} \cdot 200 + 1,5}{550} = 0,227 \text{ а} = 227 \text{ ма};$$

$$I_2 = U_1 \frac{1}{H_a} = 50 \cdot \frac{1}{550} = 0,091 \text{ а} = 91 \text{ ма};$$

$$U_2 = U_1 \frac{Z_2}{H_a} = 50 \cdot \frac{200}{550} \approx 18,2 \text{ в.}$$

6.29. Рассматриваем заданный четырёхполюсник как каскадное соединение двух элементарных четырёхполюсников (рис. Р. 6.4), матрицы которых известны. Пользуясь правилом (6.31) и таблицей матриц (табл. 6.2), находим

$$\begin{aligned}
 [A] &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + Z_1 \cdot \frac{1}{Z_2} & 1 \cdot 0 + Z_1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{Z_2} & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_2} & Z_1 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Легко видеть, что полученная матрица соответствует матрице для схемы табл. 6.2 (поз. 7).

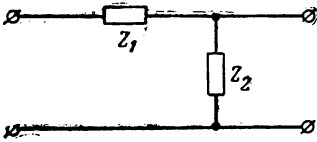


Рис. Р.6.4

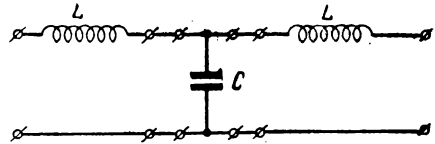


Рис. Р.6.5

6.30. Рассматриваем фильтр нижних частот как каскадное соединение (рис. Р. 6.5) трёх четырёхполюсников, матрицы A которых известны. Искомая матрица будет определяться произведением трёх матриц:

$$\begin{aligned}
 [A] &= \begin{bmatrix} 1 & i\omega L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i\omega C & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & i\omega L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 + i\omega L \cdot i\omega C & 1 \cdot 0 + i\omega L \\ 0 + i\omega C & 0 + 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & i\omega L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} (1 - \omega^2 LC) \cdot 1 + i\omega L \cdot 0 & (1 - \omega^2 LC) i\omega L + i\omega L \\ i\omega C + 1 \cdot 0 & -\omega^2 LC + 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 - \omega^2 LC & 2i\omega L - i\omega^3 L^2 C \\ i\omega C & 1 - \omega^2 LC \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

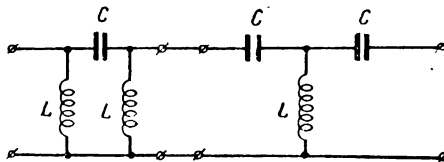


Рис. Р.6.6

6.31. Из табл. 6.2 находим матрицы A_1 для П-образного фильтра (рис. Р.6.6) и A_2 для Т-образного фильтра:

$$\begin{aligned}
 [A_1] &= \begin{bmatrix} \frac{i\omega L + \frac{1}{i\omega C}}{i\omega L} & \frac{1}{i\omega C} \\ \frac{1}{i\omega C} + 2i\omega L & i\omega L + \frac{1}{i\omega C} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega^2 LC} & \frac{1}{i\omega C} \\ \frac{2\omega^2 LC - 1}{i\omega^3 L^2 C} & \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega^2 LC} \end{bmatrix}; \\
 [A_2] &= \begin{bmatrix} \frac{\frac{1}{i\omega C} + i\omega L}{i\omega L} & \frac{2 \cdot \frac{1}{i\omega C} i\omega L + \frac{1}{(i\omega C)^2}}{i\omega L} \\ \frac{1}{i\omega L} & \frac{\frac{1}{i\omega C} + i\omega L}{i\omega L} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega^2 LC} & \frac{2\omega^2 LC - 1}{i\omega^3 C^2 L} \\ \frac{1}{i\omega L} & \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega^2 LC} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Общая матрица A равна матричному произведению двух матриц A_1 и A_2

$$\begin{aligned}
 [A] &= [A_1] \cdot [A_2] = \begin{bmatrix} \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega^2 LC} & \frac{1}{i\omega C} \\ \frac{2\omega^2 LC - 1}{i\omega^3 L^2 C} & \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega^2 LC} \end{bmatrix} \times \\
 &\times \begin{bmatrix} \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega^2 LC} & \frac{2\omega^2 LC - 1}{i\omega^3 C^2 L} \\ \frac{1}{i\omega L} & \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega^2 LC} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega^2 LC} \cdot \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega^2 LC} + \frac{1}{i\omega C} \cdot \frac{1}{i\omega L} \\ \frac{2\omega^2 LC - 1}{i\omega^3 L^2 C} \cdot \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega^2 LC} + \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega^2 LC} \cdot \frac{1}{i\omega L} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{l} \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega^2 LC} \cdot \frac{2\omega^2 LC - 1}{i\omega^3 C^2 L} + \frac{1}{i\omega C} \cdot \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega^2 LC} \\ \frac{2\omega^2 LC - 1}{i\omega^3 L^2 C} \cdot \frac{2\omega^2 LC - 1}{i\omega^3 C^2 L} + \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega^2 LC} \cdot \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega^2 LC} \end{array} \right] - \\
& = \left[\begin{array}{l} \frac{(\omega^2 LC - 1)^2 - \omega^2 LC}{(\omega^2 LC)^2} \\ \frac{(2\omega^2 LC - 1)(\omega^2 LC - 1) + (\omega^2 LC - 1)\omega^2 LC}{i\omega^3 L^2 C \cdot \omega^2 LC} \end{array} \right] = \\
& \left[\begin{array}{l} \frac{(\omega^2 LC - 1)(2\omega^2 LC - 1) + (\omega^2 LC - 1)\omega^2 LC}{i\omega^3 C^2 L \cdot \omega^2 LC} \\ \frac{(2\omega^2 LC - 1)(2\omega^2 LC - 1) - (\omega^2 LC - 1)(\omega^2 LC - 1)\omega^2 LC}{i\omega^3 L^2 C \cdot i\omega^3 LC^2} \end{array} \right] = \\
& = \frac{1}{(\omega^2 LC)^2} \times \\
& \times \left[\begin{array}{l} (\omega^2 LC - 1)^2 - \omega^2 LC \quad \frac{(\omega^2 LC - 1)(3\omega^2 LC - 1)}{i\omega C} \\ \frac{(\omega^2 LC - 1)(3\omega^2 LC - 1)}{i\omega L} \quad \frac{(\omega^2 LC - 1)^2 \omega^2 LC - (2\omega^2 LC - 1)^2}{\omega^2 LC} \end{array} \right]
\end{aligned}$$

6.32. В данном случае удобно искать матрицу Y , так как, разбив общую схему на два четырёхполюсника (рис. Р. 6.7), мы получаем согласно правилу 6.32

$$[Y] = [Y_1] + [Y_2].$$

Из табл. 6.2 находим:

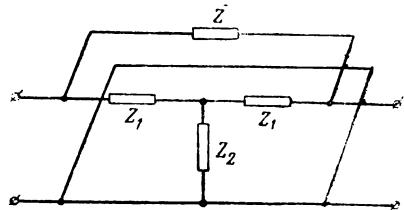


Рис. Р.6.7

$$[Y_1] = \begin{bmatrix} \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1^2 + 2Z_1 Z_2} & -\frac{Z_2}{Z_1^2 + 2Z_1 Z_2} \\ \frac{Z_2}{Z_1^2 + 2Z_1 Z_2} & -\frac{Z_1 + Z_2}{Z_1^2 + 2Z_1 Z_2} \end{bmatrix};$$

$$[Y_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z} & -\frac{1}{Z} \\ \frac{1}{Z} & -\frac{1}{Z} \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned}
 [Y] = [Y_1] + [Y_2] &= \begin{bmatrix} \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1^2 + 2Z_1Z_2} + \frac{1}{Z} & -\frac{Z_2}{Z_1^2 + 2Z_1Z_2} - \frac{1}{Z} \\ \frac{Z_2}{Z_1^2 + 2Z_1Z_2} + \frac{1}{Z} & -\frac{Z_1 + Z_2}{Z_1^2 + 2Z_1Z_2} - \frac{1}{Z} \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{1}{ZZ_1(Z_1 + 2Z_2)} \times \\
 &\times \begin{bmatrix} Z(Z_1 + Z_2) + Z_1(Z_1 + 2Z_2) & -Z_2Z - Z_1(Z_1 + 2Z_2) \\ ZZ_2 + Z_1(Z_1 + 2Z_2) & -Z(Z_1 + Z_2) - Z_1(Z_1 + 2Z_2) \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

В случае необходимости, обратив ф-лы (6.8), можно найти матрицу A .

6.33. Будем рассматривать заданный четырехполюсник как каскадное соединение трёх элементарных четырехполюсников; тогда легко будет определить общую матрицу A :

$$[A] = [A_1] \cdot [A_2] \cdot [A_3],$$

а по значениям коэффициентов матрицы A по ф-лам (6.7) найти коэффициенты Z . В таблице матриц (табл. 6.2) находим:

$$\begin{aligned}
 [A_1] &= \begin{bmatrix} 1 & R_1 + \frac{1}{i\omega C_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
 [A_2] &= \pm \frac{1}{i\omega M} \begin{bmatrix} i\omega L_1 & i\omega L_1 \cdot i\omega L_2 - (i\omega M)^2 \\ 1 & i\omega L_2 \end{bmatrix} = \\
 &= \pm \begin{bmatrix} \frac{L_1}{M}; & i\omega \left(\frac{L_1 L_2}{M} - M \right) \\ \frac{1}{i\omega M}; & \frac{L_2}{M} \end{bmatrix}, \\
 [A_3] &= \begin{bmatrix} 1 & R_2 + \frac{1}{i\omega C_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Совершаем последовательное перемножение матриц, выбрав для матрицы A_2 знак плюс

$$\begin{aligned}
 [A_1] \cdot [A_2] &= \begin{bmatrix} 1 & R_1 + \frac{1}{i\omega C_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{L_1}{M} & i\omega \left(\frac{L_1 L_2}{M} - M \right) \\ \frac{1}{i\omega M} & \frac{L_2}{M} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{L_1}{M} + \left(\frac{R_1}{i\omega M} - \frac{1}{\omega^2 M C_1} \right) & i\omega \left(\frac{L_1 L_2}{M} - M \right) + \frac{R_1 L_2}{M} + \frac{1}{i\omega C_1} \cdot \frac{L_2}{M} \\ 0 + \frac{1}{i\omega M} & \frac{L_2}{M} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Умножим теперь полученную матрицу на матрицу A_3

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cc} \frac{L_1}{M} + \frac{R_1}{i\omega M} - \frac{1}{\omega^2 MC_1} & i\omega \left(\frac{L_1 L_2}{M} - M \right) + \frac{R_1 L_2}{M} + \frac{1}{i\omega C_1} \cdot \frac{L_2}{M} \\ \frac{1}{i\omega M} & \frac{L_2}{M} \end{array} \right] \times \\ & \times \left[\begin{array}{cc} 1 & R_2 + \frac{1}{i\omega C_2} \\ 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \frac{L_1}{M} + \frac{R_1}{i\omega M} - \frac{1}{\omega^2 MC_1} + 0 & \\ \frac{1}{i\omega M} + 0 & \end{array} \right] = \\ & \left(\frac{L_1}{M} + \frac{R_1}{i\omega M} - \frac{1}{\omega^2 MC_1} \right) \left(R_2 + \frac{1}{i\omega C_2} \right) + i\omega \left(\frac{L_1 L_2}{M} - M \right) + \frac{R_1 L_2}{M} + \frac{L_2}{i\omega MC_1} \Bigg] = \\ & \frac{R_2}{i\omega M} - \frac{1}{\omega^2 MC_2} + \frac{L_2}{M} \\ & = \left[\begin{array}{c} \frac{1}{i\omega M} \left(R_1 + i\omega L_1 + \frac{1}{i\omega C_1} \right) \\ \frac{1}{i\omega M} \end{array} \right] \\ & \frac{1}{i\omega M} \left[\left(R_1 + i\omega L_1 + \frac{1}{i\omega C_1} \right) \left(R_2 + i\omega L_2 + \frac{1}{i\omega C_2} \right) - \omega^2 M^2 \right] \\ & \frac{1}{i\omega M} \left(R_2 + i\omega L_2 + \frac{1}{i\omega C_2} \right) \Bigg] . \end{aligned}$$

Введя обозначения:

$$R_1 + i\omega L_1 + \frac{1}{i\omega C_1} = Z_1, \quad R_2 + i\omega L_2 + \frac{1}{i\omega C_2} = Z_2, \quad i\omega M = Z_M,$$

запишем общую матрицу в виде

$$A = \frac{1}{Z_M} \begin{bmatrix} Z_1 & Z_1 Z_2 - Z_M^2 \\ 1 & Z_2 \end{bmatrix}.$$

По ф-лам (6.7) находим:

$$\begin{aligned} Z_{11} &= \frac{A_{11}}{A_{21}}; & Z_{12} &= -\frac{1}{A_{21}}; \\ Z_{21} &= \frac{1}{A_{21}}; & Z_{22} &= -\frac{A_{22}}{A_{21}}. \end{aligned}$$

Подставляя значения коэффициентов A , окончательно получаем:

$$\begin{aligned} Z_{11} &= Z_1; & Z_{12} &= -Z_M; \\ Z_{21} &= Z_M; & Z_{22} &= -Z_2. \end{aligned}$$

Полученный результат соответствует матрице табл. 6.2 (поз. 3).

6.34. Общую матрицу A найдём как матричное произведение матриц A_1 и A_2 , двух четырёхполюсников (рис. 6.29), соединённых между собой каскадно; матрицы A_1 и A_2 находим из табл. 6.2 (поз. 6 и 2)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -D - \frac{1}{S} & \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} A_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{Z} & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Общая матрица A будет равна

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D - \frac{1}{S} & \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{Z} & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -D - \frac{1}{SZ} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{S} \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_i} - \frac{1}{Z} & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Выражение для коэффициента усиления (рис. 6.29)

$$K = \frac{U_2}{U_1}$$

легко находится через коэффициент A_{11} [ф-ла (6.19) табл. 6.1:

$$\begin{aligned} K &= \frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} = \frac{1}{A_{11}}, \\ A_{11} &= -\frac{1}{S} \left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{Z} \right) = -\frac{1}{S} \frac{R_i + Z}{R_i Z} \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $SR_i = \mu$, получаем

$$K = \frac{U_2}{U_1} = -\mu \frac{Z}{R_i + Z}.$$

Знак минус указывает на то, что напряжение \bar{U}_2 сдвинуто по отношению к \bar{U}_1 на 180° .

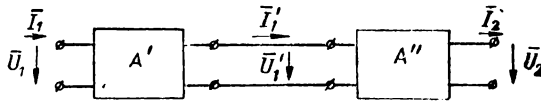


Рис. Р.6.8

6.35. Из рис. Р.6.8 на основании ф-л (6.29) непосредственно следует, что

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{U}'_1 \\ \bar{I}'_1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{U}'_1 \\ \bar{I}'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A''_{11} & A''_{12} \\ A''_{21} & A''_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{U}_2 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Наша задача состоит в установлении связи между матрицей-столбцом $\begin{bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{I}_1 \end{bmatrix}$ и матрицей-столбцом $\begin{bmatrix} \bar{U}_2 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix}$.

Подставляя из (2) в (1) значение матрицы-столбца $\begin{bmatrix} \bar{U}'_1 \\ \bar{I}'_1 \end{bmatrix}$, получаем

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A''_{11} & A''_{12} \\ A''_{21} & A''_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{U}_2 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix},$$

чем и доказывается, что общая матрица A равна произведению частных матриц A при каскадном соединении четырёхполюсников.

6.36. Воспользуемся уравнениями четырёхполюсника 6.30 в матричном виде

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Наша задача состоит в определении коэффициентов Y для общей схемы рис. Р.6.9.

Из рис. Р.6.9 видно, что

$$\left. \begin{aligned} \bar{I}_1 &= \bar{I}'_1 + \bar{I}''_1 \\ \bar{I}_2 &= \bar{I}'_2 + \bar{I}''_2 \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

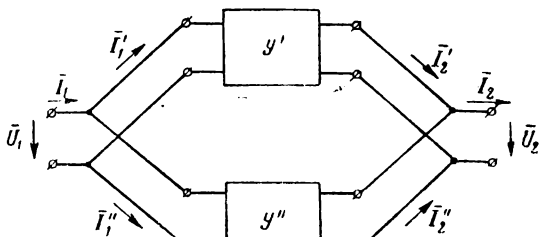


Рис. Р.6.9

Токи \bar{I}'_1 , \bar{I}''_1 , \bar{I}'_2 и \bar{I}''_2 можно выразить через параметры отдельных четырёхполюсников при помощи выражений 6.30:

$$\begin{bmatrix} \bar{I}'_1 \\ \bar{I}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y'_{11} & Y'_{12} \\ Y'_{21} & Y'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{I}''_1 \\ \bar{I}''_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y''_{11} & Y''_{12} \\ Y''_{21} & Y''_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Сложим левые и правые части равенств (3) и (4)

$$\begin{bmatrix} \bar{I}'_1 + \bar{I}''_1 \\ \bar{I}'_2 + \bar{I}''_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y'_{11} + Y''_{11} & Y'_{12} + Y''_{12} \\ Y'_{21} + Y''_{21} & Y'_{22} + Y''_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Принимая во внимание равенство (2), получим

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} Y'_{11} & Y'_{12} \\ Y'_{21} & Y'_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y''_{11} & Y''_{12} \\ Y''_{21} & Y''_{22} \end{bmatrix} \right\} \cdot \begin{bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Таким образом, доказано, что общая матрица Y параллельно соединённых четырёхполюсников равна сумме матриц Y каждого четырёхполюсника в отдельности.

6.37. Расчётные формулы берём из табл. 6.1. Во все эти формулы входят коэффициенты A общей схемы, в то время как мы располагаем только матрицами левого и правого четырёхполюсника.

Подсчитаем коэффициенты A для каждого четырёхполюсника в отдельности, а потом, пользуясь правилом каскадного соединения четырёхполюсников, найдём общую матрицу.

Для левого четырёхполюсника воспользуемся матрицей табл. 6.2 (поз. 13)

$$[A_1] = \begin{bmatrix} \frac{Z_1(Z_1 + Z_2) + Z_2(2Z_1 + Z_2)}{Z_1^2 + Z_2(2Z_1 + Z_2)} & \frac{Z_2(2Z_1 Z_2 + Z_1^2)}{Z_1^2 + Z_2(2Z_1 + Z_2)} \\ \frac{2Z_1 + Z_2}{Z_1^2 + Z_2(2Z_1 + Z_2)} & \frac{Z_1(Z_1 + Z_2) + Z_2(2Z_1 + Z_2)}{Z_1^2 + Z_2(2Z_1 + Z_2)} \end{bmatrix}$$

Подставляя условия задачи, находим

$$[A_1] = \frac{1}{500^2 + 1000(2 \cdot 500 + 1000)} \begin{bmatrix} 500(500 + 1000) + 1000(2 \cdot 500 + 1000) & 2 \cdot 500 \cdot 1000 \\ 1000(2 \cdot 500 + 1000) + 25 \cdot 10^4 & 2 \cdot 500 \cdot 1000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,22 & 0,556 \cdot 10^3 \\ 0,889 \cdot 10^{-3} & 1,22 \end{bmatrix}$$

Для правого четырёхполюсника воспользуемся матрицей табл. 6.2 (поз. 11)

$$[A_2] = \frac{1}{Z_2 - Z_1} \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & 2Z_1 Z_2 \\ 2 & Z_1 + Z_2 \end{bmatrix} = \\ = \frac{1}{1000 - 500} \begin{bmatrix} 1000 + 500 & 2 \cdot 1000 \cdot 500 \\ 2 & 1000 + 500 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 3 & 2 \cdot 10^3 \\ 4 \cdot 10^{-3} & 3 \end{bmatrix}$$

Общая матрица A равна произведению матриц

$$[A] = [A_1] \cdot [A_2] = \begin{bmatrix} 1,22 & 0,556 \cdot 10^3 \\ 0,889 \cdot 10^{-3} & 1,22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \cdot 10^3 \\ 4 \cdot 10^{-3} & 3 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 3,66 + 0,556 \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} & 1,22 \cdot 2 \cdot 10^3 + 0,555 \cdot 10^3 \cdot 3 \\ 0,889 \cdot 10^{-3} \cdot 3 + 1,22 \cdot 4 \cdot 10^{-3} & 0,889 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^3 + 1,22 \cdot 3 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 5,88 & 4,11 \cdot 10^3 \\ 7,55 \cdot 10^{-3} & 5,44 \end{bmatrix}$$

Для расчёта по формулам табл. 6.2 целесообразно рассчитать вначале сопротивление передачи H_a , так как оно встречается почти во всех формулах

$$H_a = A_{11} Z_2 + A_{12} = 5,88 \cdot 10^3 + 4,11 \cdot 10^3 = 9,99 \cdot 10^3 \text{ ом.}$$

Теперь последовательно найдём все необходимые величины:

1) входной ток [ф-ла (6.16)]

$$I_1 = U_1 \frac{A_{21} Z_H + A_{22}}{H_a} = 100 \frac{7,55 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 + 5,44}{9,99 \cdot 10^3} = 0,13 \text{ а;}$$

2) выходной ток [ф-ла(6.18)]

$$I_2 = \frac{U_1}{H_a} = \frac{100}{9,99 \cdot 10^3} \approx 0,01 a;$$

3) выходное напряжение [ф-ла (6.17)]

$$U_2 = U_1 \frac{Z_H}{H_a} = 100 \frac{1000}{9,99 \cdot 10^3} \approx 10 v;$$

4) для нахождения U_a и I_a сперва найдём входное сопротивление правого четырёхполюсника с нагрузкой [ф-ла (6.23)]

$$Z_{вх} = \frac{A_{11}Z_H + A_{12}}{A_{21}Z_H + A_{22}} = \frac{3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 + 3} = 715 \text{ ом.}$$

Ток и напряжение в точках aa найдутся по ф-лам (6.18) и (6.17)

$$I_a = \frac{U_1}{H_a} = \frac{U_1}{A_{11}Z_{вх} + A_{12}}$$

Здесь коэффициенты A_{11} и A_{12} относятся только к левому четырёхполюснику

$$I_a = \frac{100}{1,22 \cdot 715 + 0,555 \cdot 10^3} = 0,07 \text{ а,}$$

$$U_a = U_1 \frac{Z_{вх}}{H_a} = 100 \frac{715}{1,428 \cdot 10^3} \approx 50 \text{ в.}$$

6.38. Отношение напряжений входа и выхода при холостом ходе рассчитывается по ф-ле (6.19)

$$\frac{\bar{U}_1}{U_2} = A_{11}.$$

Так как матрицы для заданной схемы нет в таблицах, разобьём весь четырёхполюсник на три четырёхполюсника (рис. Р. 6.10) и тогда мы легко найдём матрицу A всего четырёхполюсника.

Первые два четырёхполюсника соединены между собой параллельно; для них, следовательно, справедливо соотношение (6.32):

$$[Y] = [Y_1] + [Y_2].$$

Пользуясь табл. 6.2, находим

$$[Y_1] = [Y_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{R_2} \begin{bmatrix} 1 + \frac{R_2}{R_1} & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{300} \begin{bmatrix} 1,5 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

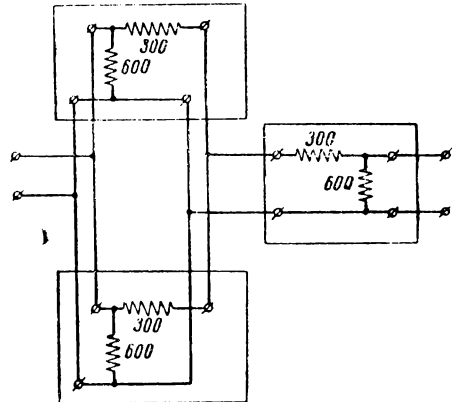


Рис. Р.6.10

Сумма матриц будет равна

$$[Y] = [Y_1] + [Y_2] = \frac{1}{300} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Найдём матрицу $[A]$ для этих двух параллельно соединённых четырёхполюсников; с этой целью воспользуемся ф-лами (6.8), из которых легко находятся формулы для A_{11} , A_{12} и A_{22} . Коэффициент A_{21} можно найти из соотношения $A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21} = 1$:

$$A_{11} = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} = -\frac{-2}{2} = 1;$$

$$A_{12} = \frac{1}{Y_{21}} = \frac{300}{2} = 150;$$

$$A_{22} = \frac{Y_{11}}{Y_{21}} = \frac{3}{2} = 1,5;$$

$$A_{21} = \frac{A_{11} A_{22} - 1}{A_{12}} = \frac{1}{300}.$$

Таким образом, матрица запишется в виде

$$[A_{II}] = \begin{bmatrix} 1 & 150 \\ \frac{1}{300} & 1,5 \end{bmatrix}.$$

Матрицу A_{III} третьего четырёхполюсника находим из табл. 6.2

$$[A_{III}] = \begin{bmatrix} 1 + 0,5 \cdot 300 & \\ \frac{1}{600} & 1 \end{bmatrix}.$$

Общая матрица A равна произведению двух последних матриц

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 150 \\ \frac{1}{300} & 1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,5 & 300 \\ \frac{1}{600} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 + \frac{150}{600} & 300 + 150 \\ \frac{1,5}{300} + \frac{1,5}{600} & \frac{300}{300} + 1,5 \end{bmatrix}$$

Коэффициент $A_{11} = 1,75$.

Таким образом,

$$\frac{U_1}{U_2} = 1,75.$$

Затухание в децибелах будет равно

$$B = 20 \lg \frac{U_1}{U_2} = 20 \lg 1,75 = 20 \cdot 0,243 = 4,86 \text{ дБ}.$$

6.40. Представляем схему в виде каскадного соединения двух четырёхполюсников (рис. Р. 6.11), матрицы A для которых известны (табл. 6.2, поз. 12):

$$[A_1] = [A_2] = \begin{bmatrix} \frac{R\left(R + \frac{1}{i\omega C}\right) + \frac{1}{i\omega C}\left(2R + \frac{1}{i\omega C}\right)}{R^2} & \frac{2\frac{R}{i\omega C} + \left(\frac{1}{i\omega C}\right)^2}{R} \\ \frac{2R + \frac{1}{i\omega C}}{R^2} & \frac{R + \frac{1}{i\omega C}}{R} \end{bmatrix}$$

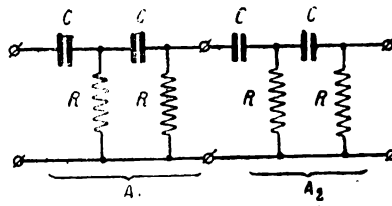


Рис. Р.6.11

Согласно ф-ле (6.27) коэффициент A_{11} равен

$$A_{11} = \left[\frac{R\left(R + \frac{1}{i\omega C}\right) + \frac{1}{i\omega C}\left(2R + \frac{1}{i\omega C}\right)}{R^2} \right]^2 + \frac{2\frac{R}{i\omega C} + \left(\frac{1}{i\omega C}\right)^2}{R} \frac{2R + \frac{1}{i\omega C}}{R^2}$$

Раскрывая скобки и совершая элементарные преобразования, получаем

$$A_{11} = \frac{\omega^4 C^4 R^4 - 15\omega^2 C^2 R^2 + 1 + 1(7\omega C R - 10\omega^3 C^3 R^3)}{\omega^4 C^4 R^4}$$

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 7

7.2. Решим исходное уравнение (см. задачу 7.1)

$$K(\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}}$$

относительно L

$$L = \frac{R}{\omega} \sqrt{\frac{1}{K^2(\omega)} - 1} \approx \frac{R}{\omega K(\omega)}$$

Подставляя условия задачи, находим

$$L = \frac{0,03}{2\pi \cdot 350 \cdot 0,1} \approx 1,36 \cdot 10^{-4} \text{ гн} = 136 \text{ мкГн.}$$

7.4. Построив графики для трёх характерных значений отношения $R_{вн}$ к R (рис. Р. 7.1), можно сделать следующие выводы:

1) $R_{вн} \ll R$. Подобные условия встречаются при питании цепей накала мощных ламп от генераторов постоянного тока с неизбежными пульсациями. В этих схемах, как это видно из графиков рис. Р. 7.1, следует применять дроссельный фильтр; конденсаторный фильтр фильтрации не даёт.

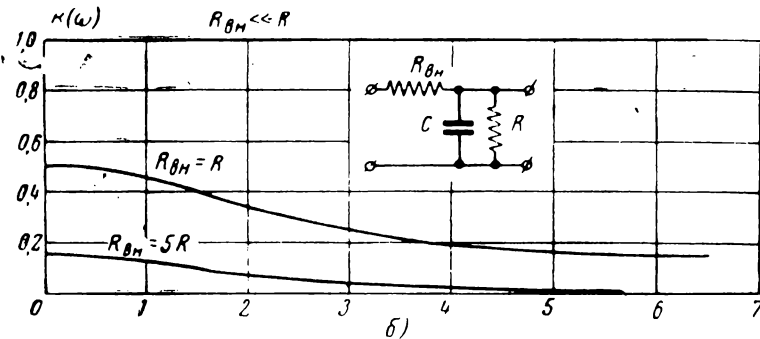
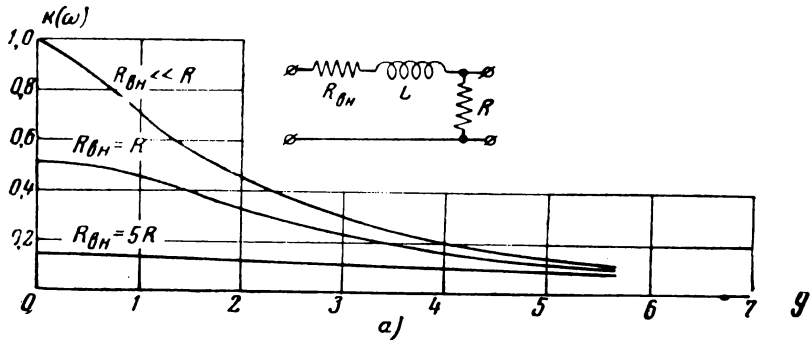


Рис. Р.7.1

2) $R_{вн} \gg R$. При этих условиях дроссельный фильтр имеет малое фильтрующее действие; лучше применять конденсаторный фильтр.

3) $R_{вн}$ сопоставимо с нагрузочным сопротивлением. При этих условиях фильтры имеют одинаковые характеристики, и выбирать ту или иную схему нужно, исходя из дополнительных соображений.

Дополнительными соображениями, которые нужно принимать во внимание при любых условиях, являются очевидные неравенства:

$$R \ll \omega L,$$

$$R \gg \frac{1}{\omega C}$$

в которых ω — частота напряжения, которое фильтр должен уменьшить.

7.5. Решая уравнение амплитудно-частотной характеристики (см. задачу 7.1) относительно C , получаем

$$C = \frac{1}{\omega R_{вн}} \sqrt{\frac{1}{K^2(\omega)} - \left(1 + \frac{R_{вн}}{R}\right)^2},$$

Если ослабление велико, т. е. $K(\omega) \ll 1$, а $R_{\text{вн}}$ меньше или сопоставимо с R , вторым членом подкоренного выражения можно пренебречь, и формула упростится:

$$C \approx \frac{1}{\omega R_{\text{вн}} K(\omega)}.$$

7.6. В данном случае можно пользоваться приближённой формулой (см. задачу 7.5):

$$C = \frac{1}{\omega R_{\text{вн}} K(\omega)} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 60 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{30}} \approx 1,59 \cdot 10^{-6} \text{ ф} = 1,59 \text{ мкф}.$$

7.10. Перепишем выражение амплитудно-частотной характеристики

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega L}{R} \omega CR\right)^2 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}}$$

с учётом ранее введённых обозначений:

$$\frac{\omega L}{R} = y; \quad \omega CR = x$$

в виде

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - xy)^2 + y^2}}.$$

Между переменными x и y легко установить связь:

$$\frac{x}{y} = \frac{\omega RC}{\omega L} R = \frac{R^2 C}{L} = \frac{R^2}{\frac{L}{C}} = \frac{R^2}{\left(\sqrt{\frac{L}{C}}\right)^2}.$$

Обозначив $\frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} = D$, получим:

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{D^2};$$

$$x = \frac{1}{D^2} y;$$

$$y = D^2 x.$$

Вводя последнее обозначение в выражение $K(\omega)$, окончательно напишем

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - D^2 x^2)^2 + D^4 x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{D^2}\right)^2 + y^2}}.$$

По последним выражениям легко построить семейство амплитудно-частотных характеристик для различных значений D .

Дифференцируя последнее выражение по x и приравнявая производную нулю, получаем уравнение, из которого можно определить значения x , соответствующие экстремальным значениям $K(\omega)$. Эти значения будут:

$$x_1 = 0;$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{2 - D^2}{2D^2}}.$$

Второй экстремум имеет место только при условии $D < 1,41$.

Подставляя значения корней x_1 и x_2 в выражение $K(\omega)$, получаем два экстремальных значения $K(\omega)_1$ и $K(\omega)_2$:

$$K(\omega)_1 = 1,$$

$$K(\omega)_2 = \frac{1}{D\sqrt{1 - 0,25D^2}}.$$

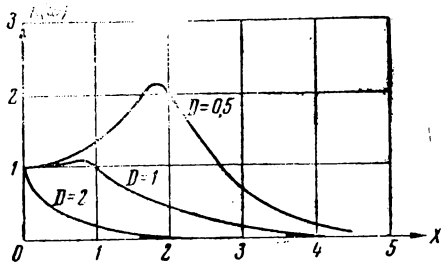


Рис. Р.7.2

Теперь легко построить графики, например, для трёх значений D : 1) $D = 1$; 2) $D = 2$; 3) $D = 0,5$. Эти графики изображены на рис. Р.7.2.

7.11. Расчётной формулой будет служить выражение, полученное в задаче 7.8

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}}.$$

Быстрой проверкой легко установить, что вторым членом в подкоренном выражении при данных условиях можно пренебречь. Тогда, подставляя условия задачи и избавляясь от радикала, получим

$$\pm (1 - \omega^2 LC) = \frac{1}{K(\omega)} = 80.$$

Совершенно очевидно, что перед скобками нужно сохранить знак минус, так как для того, чтобы данное равенство удовлетворялось, величина $\omega^2 LC$ должна быть равна 81.

Решая последнее уравнение относительно L , находим

$$L = \frac{81}{4\pi^2 \cdot 50^2 \cdot 30 \cdot 10^{-6}} = 27,4 \text{ мк.}$$

7.12. Как и в предыдущей задаче, вторым членом подкоренного выражения можно пренебречь, тогда

$$\pm (1 - \omega^2 LC) = \frac{1}{K(\omega)} = 350,$$

$$\omega^2 LC = 351,$$

$$C = \frac{351}{\omega^2 L} = \frac{351}{4\pi^2 \cdot 50^2 \cdot 20} \approx 178 \cdot 10^{-6} \text{ ф} = 178 \text{ мкф.}$$

7.14.1) Конденсатор C_p предназначен для предотвращения проникновения постоянного тока в контур. Падение напряжения на конденсаторе должно быть много меньше, чем на контуре, т. е.

$$\frac{1}{\omega_0 C_p} \ll R_{\alpha},$$

откуда

$$C_p \gg \frac{1}{\omega_0 R_{\alpha}}.$$

Примем, что

$$C_p \approx \frac{20}{\omega_0 R_{\alpha}}.$$

2) Индуктивность L_p должна представлять значительное сопротивление для тока частоты ω_0 , т. е.

$$\omega_0 L_p \gg R_{\alpha},$$

откуда

$$L_p \gg \frac{R_{\alpha}}{\omega_0}.$$

Примем, что

$$L_p \sim \frac{20 R_{\alpha}}{\omega_0}.$$

3) Конденсатор C_{β} должен представлять очень малое сопротивление для тока частоты ω_0 . Нужно, чтобы сопротивление конденсатора было значительно меньше внутреннего сопротивления R_{β} источника питания, т. е.

$$\frac{1}{\omega_0 C_{\beta}} \ll R_{\beta}.$$

откуда

$$C_{\beta} \gg \frac{1}{\omega_0 R_{\beta}}.$$

Примем, что

$$C_{\beta} \approx \frac{20}{\omega_0 R_{\beta}}.$$

7.15. По формулам, полученным в предыдущей задаче, находим:

$$C_p \approx \frac{20}{\omega_0 R_{\alpha}} = \frac{20}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^6 \cdot 10^4} \approx 100 \cdot 10^{-12} \text{ ф} = 100 \text{ пф};$$

$$L_p \approx \frac{20 R_{\alpha}}{\omega_0} = \frac{20 \cdot 10^4}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^6} \approx 0,01 \text{ гн} = 10 \text{ мгн}.$$

7.17. Исходными выражениями являются выражения (7.7) и (7.8). При обозначениях, принятых в теории фильтров (табл. 7.1), коэффициент $A = A_1 + i A_2$ для Т и П-образной схем одинаков. По табл. 6.2 коэффициентов четырёхплосников, принимая во внимание схемы фильтров нижних и верхних частот (табл. 7.1), легко находим:

$$A = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2};$$

$$\text{фнч} \quad A = 1 - \frac{1}{2} \omega^2 LC;$$

$$\text{фвч} \quad A = 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\omega^2 LC}.$$

Пользуясь ф-лой (7.9), находим частоты, соответствующие границам полосы прозрачности:

$$\text{фнч} \quad \omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}};$$

$$\text{фвч} \quad \omega_0 = \frac{1}{2\sqrt{LC}}.$$

Вводя обозначение $\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$, перепишем выражение для коэффициента A :

$$\text{фнч} \quad A = 1 - 2\eta^2;$$

$$\text{фвч} \quad A = 1 - \frac{2}{\eta^2}.$$

Теперь непосредственно по ф-лам (7.7) и (7.8) получаем искомые характеристики:

В полосе прозрачности		Вне полосы прозрачности	
фнч	$b = 0$ $\cos a = 1 - 2\eta^2$	фнч	$\text{ch } b = 2\eta^2 - 1$ $a = \pm \pi$
фвч	$b = 0$ $\cos a = 1 - \frac{2}{\eta^2}$	фвч	$\text{ch } b = \frac{2}{\eta^2} - 1$ $a = \mp \pi$

Относительно знака фазовой характеристики (ввиду чётности функции \cos непосредственно из формулы знак не вытекает) нужно заметить, что выбор знака можно считать делом условным. При желании знак фазовой характеристики может быть определён путём привлечения дополнительных соображений. Этими дополнительными соображениями может, например, служить ф-ла (6.19)

$$\frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_2} = A_{11} + \frac{A_{12}}{Z_2}.$$

Полагая, что фильтр нагружен на активное сопротивление, равное волновому ($Z_2 = \rho$), и находя из табл. 6.11 коэффициенты A_{11} и A_{12} для фильтра нижних частот, получаем

$$\frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_2} = 1 - \frac{\omega^2 LC}{2} + 1 \frac{\omega L}{\rho},$$

Отсюда видно, что в полосе прозрачности, т. е. когда $\frac{\omega^2 LC}{2} < 1$, напряжение U_1 опережает U_2 и сдвиг фаз положительный. Заметим, что достаточно определить фазовый сдвиг в одной точке, так как фазовая характеристика не претерпевает скачков.

Выражения для характеристического сопротивления находятся после подстановки значений B и C в ф-лу (7.6). Используя уже введённое обозначение

$\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$, получаем:

$$\begin{array}{ll}
 \text{ФНЧ} & \text{ФВЧ} \\
 Z_{СТ} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \eta^2}; & Z_{СТ} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2}}; \\
 Z_{СН} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{\sqrt{1 - \eta^2}}; & Z_{СН} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2}}}.
 \end{array}$$

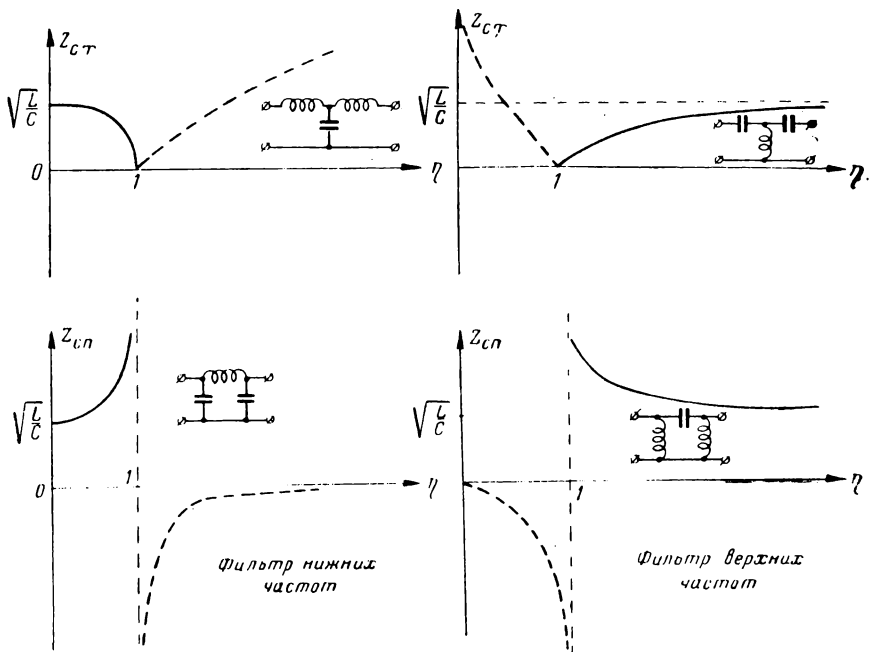


Рис. Р.7.3

Графики, соответствующие последним формулам, даны на рис. Р. 7.3. Из графиков видно, что для большей части полосы прозрачности характеристическое сопротивление мало отличается от номинального характеристического сопротивления

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

7.19. По формулам табл. 7.1 находим:

$$L = 2 \frac{\rho}{\omega_0} = 2 \frac{600}{2\pi \cdot 10^4} = 0,0191 \text{ гн} = 19,1 \text{ мгн};$$

$$C = 2 \frac{1}{\rho \omega_0} = \frac{2}{600 \cdot 2\pi \cdot 10^4} = 0,053 \cdot 10^{-6} \text{ ф} = 0,053 \text{ мкф}.$$

7.21. Расчёт затухания ведем по формуле

$$\operatorname{ch} b = 2\eta^2 - 1.$$

В данном случае

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0} = \frac{20\,000}{10\,000} = 2$$

и, следовательно,

$$\operatorname{ch} b = 2 \cdot 2^2 - 1 = 7.$$

По таблицам гиперболических функций находим, что

$$b = 2,64 \text{ неп.}$$

Выражая затухание в децибелах, получим

$$B = 8,7 \quad b = 8,7 \cdot 2,64 \approx 23 \text{ дб.}$$

Найдём в заключение отношение амплитуд входа и выхода.
Так как

$$b = \ln \frac{U_1}{U_2},$$

то

$$\frac{U_1}{U_2} = e^b = e^{2,64}.$$

По таблицам значений e^x находим

$$\frac{U_1}{U_2} \approx 14.$$

7.23. Исходное выражение

$$\operatorname{ch} b = 2\eta^2 - 1$$

решим относительно $\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$

$$\eta = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} b + 1}{2}}.$$

Следовательно,

$$f = f_0 \sqrt{\frac{\operatorname{ch} b + 1}{2}} = 10\,000 \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2,4 + 1}{2}} \approx 18\,100 \text{ гц.}$$

7.24. Исходная формула

$$\cos a = 1 - 2\eta^2.$$

В данном случае

$$\eta = \frac{f}{f_0} = \frac{5000}{10\,000} = \frac{1}{2}$$

и, следовательно,

$$\cos a = 1 - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0,5; \\ a = 60^\circ.$$

7.27. По формулам табл. 7.1 находим:

$$L = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\omega_0} = \frac{2000}{2 \cdot 2\pi \cdot 12\,000} = 13,25 \cdot 10^{-3} \text{ гн} = 13,25 \text{ мгн};$$

$$C = \frac{1}{2} \frac{1}{\rho \omega_0} = \frac{1}{2 \cdot 2000 \cdot 2\pi \cdot 12\,000} = 3320 \cdot 10^{-12} \text{ ф} = 3320 \text{ пф.}$$

7.33. Из формул, приведённых в табл. 7.1, получим выражения для расчёта частот ω_1 и ω_2 по параметрам фильтра.

В формулу

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{2\rho}{L_1}$$

подставим значение ω_1 из равенства $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$, в результате получим,

$$\omega_2^2 - \frac{2\rho}{L_1} \omega_2 - \omega_0^2 = 0.$$

Решая квадратное уравнение, находим

$$\omega_2 = \frac{\rho}{L_1} \pm \sqrt{\frac{\rho^2}{L_1^2} + \omega_0^2}.$$

В данном случае знак минус должен быть отброшен, так как второй член больше первого, а частота не может быть отрицательной.

Подставляя значение $\rho = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}}$, а также $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$, получаем

$$\omega_2 = \omega_0 \left(\sqrt{\frac{L_2}{L_1} + 1} + \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \right).$$

Аналогично для частоты ω_1

$$\omega_1 = \omega_0 \left(\sqrt{\frac{L_2}{L_1} + 1} - \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \right).$$

По условиям задачи:

$$L_1 = 160 \text{ мГн}; \quad C_1 = 0,5 \text{ мкФ};$$

$$L_2 = 160 \text{ мГн}; \quad C_2 = 0,5 \text{ мкФ}$$

(здесь учтены условности обозначений, принятых в теории фильтров).

Подставляя условия задачи в расчётные формулы, находим:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{160 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5 \cdot 10^{-6}}} = 3,54 \cdot 10^3 \frac{\text{рад}}{\text{сек}};$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 564 \text{ Гц};$$

$$f_1 = f_0 \left(\sqrt{\frac{L_2}{L_1} + 1} - \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \right) = 564 (\sqrt{1+1} - \sqrt{1}) \approx 230 \text{ Гц};$$

$$f_2 = f_0 \left(\sqrt{\frac{L_2}{L_1} + 1} + \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \right) = 564 (\sqrt{1+1} + \sqrt{1}) \approx 1360 \text{ Гц};$$

$$\rho = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}} = \sqrt{\frac{160 \cdot 10^{-3}}{0,5 \cdot 10^{-6}}} = 565 \text{ Ом}.$$

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 8

8.1. Комплексный коэффициент передачи для рассматриваемой схемы (задача 1.1) равен

$$K(i\omega) = \frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} e^{i\varphi},$$

где

$$\varphi = \arctg \frac{1}{\omega RC}.$$

Каждая из составляющих выходного напряжения образуется путём умножения амплитуды входного напряжения на коэффициент передачи

$$K[(2n+1)\Omega] = \frac{(2n+1)\Omega RC}{\sqrt{1 + [(2n+1)\Omega RC]^2}}$$

и введения сдвига фаз φ_{2n+1}

$$\varphi_{2n+1} = \arctg \frac{1}{(2n+1)\Omega RC}.$$

В результате получаем

$$u_2 = \sum_{n=0}^{\infty} U_{2n+1} \frac{(2n+1)\Omega RC}{\sqrt{1 + [(2n+1)\Omega RC]^2}} \sin \left[(2n+1)\Omega t - \arctg \frac{1}{(2n+1)\Omega RC} \right].$$

8.2. Коэффициент передачи для данной схемы равен

$$K(i\omega) = \frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} e^{i \arctg \frac{1}{\omega RC}}.$$

По условиям задачи:

$$\Omega RC = 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6} = 1; \quad U_{1\text{вых}} = U_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 100 \cdot 0,707 = 70,7 \text{ в};$$

$$3\Omega RC = 3; \quad U_{3\text{вых}} = \frac{3}{\sqrt{10}} U_3 = 0,95 \cdot 33,3 = 31,6 \text{ в};$$

$$5\Omega RC = 5; \quad U_{5\text{вых}} = \frac{5}{\sqrt{26}} \cdot U_5 = 0,98 \cdot 20 = 19,6 \text{ в};$$

$$\varphi_1 = \arctg \frac{1}{\Omega RC} = \arctg 1 = \frac{\pi}{4} = 0,785;$$

$$\varphi_3 = \arctg \frac{1}{3\Omega RC} = \arctg \frac{1}{3} = 0,319;$$

$$\varphi_5 = \arctg \frac{1}{5\Omega RC} = 0,197.$$

Выходное напряжение

$$u_2 = 70,7 \sin(\Omega t - 0,785) + 31,6 \sin(3\Omega t - 0,319) + 19,6 \sin(5\Omega t - 0,197).$$

8.4. Непосредственно по рис. 8.3 заключаем, что

$$K(\omega) = 1,2;$$

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{4\Omega} \cdot \omega.$$

Следовательно,

$$K(m\Omega) = 1,2;$$

$$\varphi(m\Omega) = \frac{\pi}{4\Omega} m\Omega = m \frac{\pi}{4}.$$

Выражение для выходного напряжения будет

$$u_{\mathfrak{B}} = \sum_{m=1}^{\infty} U_m 1,2 \sin\left(m\Omega t - m \frac{\pi}{4}\right)$$

или

$$u_{\mathfrak{B}} = 1,2 \sum_{m=1}^{\infty} U_m \sin m\left(\Omega t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Таким образом, ординаты кривой увеличатся в 1,2 раза; вся кривая сдвинется во времени на величину

$$t_0 = \frac{\pi}{4\Omega};$$

форма кривой не изменится. (Четырёхполосники с показанными на рис. 8.3 характеристиками, так называемые неискажающие четырёхполосники, физически нереализуемы.)

8.5. Поставленную задачу легко решить, воспользовавшись известными соотношениями (см. § 1):

$$K_1(\omega) = K(\omega) \cos \varphi;$$

$$K_2(\omega) = K(\omega) \sin \varphi.$$

Раскрывая выражение (1) из условия задачи по формуле синуса разности и пользуясь указанными равенствами, получаем

$$U_{n \text{ вых}} = U_{n \text{ вх}} [K_1(n\Omega) \sin n\Omega t + K_2(n\Omega) \cos n\Omega t].$$

Последнему выражению можно придать другой вид

$$U_{n \text{ вых}} = U_{n \text{ вх}} K_1(n\Omega) [\sin n\Omega t + \operatorname{tg} \varphi(n\Omega) \cos n\Omega t].$$

8.6. Положим в основу выражение, полученное в задаче 8.5

$$U_{n \text{ вых}} = U_{n \text{ вх}} K_1(n\Omega) [\sin n\Omega t + \operatorname{tg} \varphi(n\Omega) \cos n\Omega t].$$

Амплитуды синусоидальных B_n и косинусоидальных A_n составляющих будут:

$$B_n = U_{n \text{ вх}} K_1(n\Omega);$$

$$A_n = B_n \operatorname{tg} \varphi(n\Omega).$$

Так как для заданной схемы

$$K(i\omega) = \frac{1}{1 + i\omega RC} = \frac{1}{1 + (\omega RC)^2} - i \frac{\omega RC}{1 + (\omega RC)^2},$$

то

$$K_1(n \Omega) = \frac{1}{1 + (n \Omega RC)^2};$$

$$\operatorname{tg} \varphi(n \Omega) = -n \Omega RC.$$

Следовательно, для выходных амплитуд:

$$B_n = \frac{4E}{\pi n} \frac{1}{1 + (n \Omega RC)^2};$$

$$A_n = -B_n \cdot n \Omega RC.$$

8.8. Представим входное колебание в виде суммы трёх колебаний

$$u = U_0 \sin \omega_0 t + \frac{U_0 m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega) t - \frac{U_0 m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega) t$$

и найдём токи, вызванные каждым напряжением в отдельности.

Входное сопротивление колебательного контура на высокой частоте (§ 2) приближённо рассчитывается по формуле

$$Z(i \omega) = R \sqrt{1 + \xi^2} \cdot e^{i\varphi},$$

где $\xi = \frac{X}{R} \approx \frac{\Delta \omega}{\alpha} = \frac{\omega - \omega_0}{\frac{R}{2L}}$ — обобщённая расстройка; $\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \xi$.

Следовательно, для тока получим

$$i = \frac{U_0}{R} \sin \omega_0 t + \frac{U_0 m}{2R \sqrt{1 + \left(\frac{\Omega}{\alpha}\right)^2}} \cos(\omega_0 t - \Omega t + \varphi) - \frac{U_0 m}{2R \sqrt{1 + \left(\frac{\Omega}{\alpha}\right)^2}} \cos(\omega_0 t + \Omega t - \varphi).$$

Представив выражения с косинусами в виде

$$\cos[\omega_0 t - (\Omega t - \varphi)] \text{ и } \cos[\omega_0 t + (\Omega t - \varphi)]$$

и воспользовавшись формулой синуса разности, получим

$$i = \frac{U_0}{R} \sin \omega_0 t + \frac{U_0 m}{R \sqrt{1 + \left(\frac{\Omega}{\alpha}\right)^2}} \sin(\Omega t - \varphi) \sin \omega_0 t$$

или

$$i = \frac{U_0}{R} \left[1 + \frac{m}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega}{\alpha}\right)^2}} \sin(\Omega t - \varphi) \right] \sin \omega_0 t.$$

Последнее выражение показывает, что вследствие неравномерности частотных характеристик колебательного контура модулированное колебание претерпевает деформацию: коэффициент модуляции изменяется на величину, определяемую мно-

жителем $\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}}$; фаза огибающей сдвигается на величину φ , равную

$\arctg \frac{\Omega}{\omega}$. Полученные результаты иллюстрируются рис. Р.8.1.

8.9. Найдём добротность контура Q :

$$Q = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot 10^{-12} \cdot 10} = 53.$$

Найдём коэффициент α

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q} = \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^5}{2 \cdot 53} = 17,8 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{сек}}.$$

Найдём отношение $\frac{\Omega}{\alpha}$

$$\frac{\Omega_1}{\alpha} = \frac{2\pi \cdot 1000}{17,8 \cdot 10^3} = 0,353;$$

$$\frac{\Omega_2}{\alpha} = \frac{2\pi \cdot 10^4}{17,8 \cdot 10^3} = 3,53.$$

Множители при коэффициенте модуляции будут равны:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega_1}{\alpha}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,353^2}} = 0,94,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega_2}{\alpha}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 3,53^2}} = 0,273.$$

Следовательно, при модуляции частотой 1000 гц коэффициент модуляции

$$m_1 = 0,7 \cdot 0,94 \approx 0,658,$$

а при модуляции частотой 10 000 гц

$$m_2 = 0,7 \cdot 0,273 = 0,191.$$

Сдвиг фазы огибающей соответственно будет:

$$\text{tg } \varphi_1 = 0,353; \quad \varphi_1 = 19 \text{ } 30';$$

$$\text{tg } \varphi_2 = 3,53; \quad \varphi_2 = 74^\circ.$$

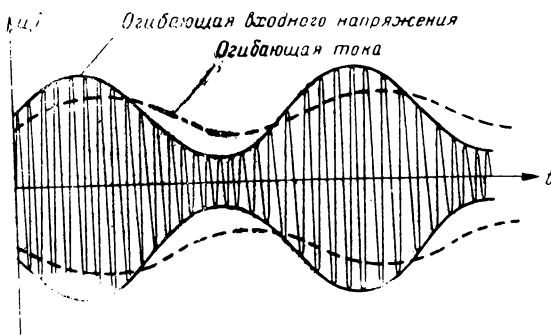


Рис. Р.8.1

Этот пример наглядно показывает возникновение искажений в одиночном контуре: низкие тона заметно выделяются по сравнению с высокими. Существенное ослабление высоких частот модулирующего колебания иллюстрируется рис. Р.8.2.

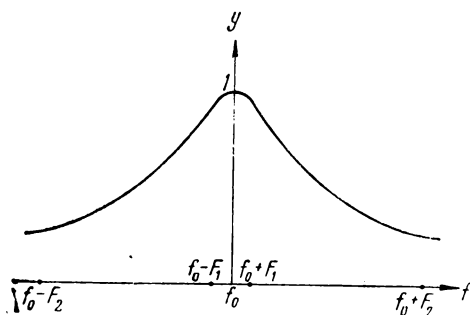


Рис. Р.8.2

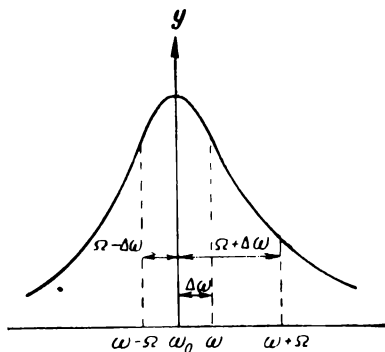


Рис. Р.8.3

8.10. Методика решения остаётся той же, что и в задаче 8.8.

Выполнив иллюстративный рис. Р.8.3, легко найти соответствующие составляющие тока

$$\begin{aligned}
 &= \frac{U_0}{R \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta\omega}{\alpha}\right)^2}} \sin\left(\omega t - \operatorname{arctg} \frac{\Delta\omega}{\alpha}\right) + \\
 &+ \frac{U_0 m}{2R \sqrt{1 + \left(\frac{\Omega - \Delta\omega}{\alpha}\right)^2}} \cos\left(\omega t - \Omega t + \operatorname{arctg} \frac{\Omega - \Delta\omega}{\alpha}\right) - \\
 &- \frac{U_0 m}{2R \sqrt{1 + \left(\frac{\Omega + \Delta\omega}{\alpha}\right)^2}} \cos\left(\omega t + \Omega t - \operatorname{arctg} \frac{\Omega + \Delta\omega}{\alpha}\right).
 \end{aligned}$$

Представить последнее выражение в свернутом виде можно, но выкладки здесь будут более громоздкими.

8.11. Комплексный коэффициент передачи для рассматриваемой схемы (§ 4) равен

$$K(i\omega) = \frac{\bar{U}_2}{U_1} = \frac{QA}{\sqrt{(A^2 + 1 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}} e^{i\varphi},$$

где

$$\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{-2\xi}{A^2 + 1 - \xi^2}.$$

Рассматривая каждую составляющую входного колебания в отдельности, получаем

$$u_2 = U_0 \frac{QA}{A^2 + 1} \sin \omega_0 t + \frac{U_0 m}{2} \cdot \frac{QA}{\sqrt{\left(A^2 + 1 - \frac{\Omega^2}{\alpha^2}\right)^2 + 4 \frac{\Omega^2}{\alpha^2}}} \times \\ \times \cos(\omega_0 t - \Omega t - \varphi) - \\ - \frac{U_0 m}{2} \frac{QA}{\sqrt{\left(A^2 + 1 - \frac{\Omega^2}{\alpha^2}\right)^2 + 4 \frac{\Omega^2}{\alpha^2}}} \cos(\omega_0 t + \Omega t + \varphi).$$

Воспользовавшись формулой

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta,$$

представим последнее выражение в свернутом виде

$$u_2 = U_0 Q \left[\frac{A}{A^2 + 1} + m \frac{A}{\sqrt{\left(A^2 + 1 - \frac{\Omega^2}{\alpha^2}\right)^2 + 4 \frac{\Omega^2}{\alpha^2}}} \sin(\Omega t + \varphi) \right] \sin \omega_0 t$$

или

$$u_2 = U_0 Q \frac{A}{A^2 + 1} \left[1 + m \frac{A^2 + 1}{\sqrt{\left(A^2 + 1 - \frac{\Omega^2}{\alpha^2}\right)^2 + 4 \frac{\Omega^2}{\alpha^2}}} \sin(\Omega t + \varphi) \right] \sin \omega_0 t.$$

Множитель коэффициента модуляции в этом случае равен

$$\frac{A^2 + 1}{\sqrt{\left(A^2 + 1 - \frac{\Omega^2}{\alpha^2}\right)^2 + 4 \frac{\Omega^2}{\alpha^2}}}$$

и в зависимости от величины связи может быть меньше или больше единицы (сравни с задачей 8.8).

8.12. Выпишем необходимые данные:

$$m = 0,7; \quad \frac{\Omega_1}{\alpha} = 0,353;$$

$$F_1 = 1000 \text{ гц}; \quad \frac{\Omega_2}{\alpha} = 3,53;$$

$$F_2 = 10\,000 \text{ гц}; \quad A = 3.$$

Рассчитаем множитель коэффициента модуляции для обеих частот модулирующего колебания:

$$1) \frac{A^2 + 1}{\sqrt{\left(A^2 + 1 - \frac{\Omega_1^2}{\alpha^2}\right)^2 + 4 \frac{\Omega_1^2}{\alpha^2}}} = \frac{9 + 1}{\sqrt{(9 + 1 - 0,353^2)^2 + 4 \cdot 0,353^2}} = 1,01;$$

$$2) \frac{A^2 + 1}{\sqrt{\left(A^2 + 1 - \frac{\Omega_2^2}{\alpha^2}\right)^2 + 4 \frac{\Omega_2^2}{\alpha^2}}} = \frac{9 + 1}{\sqrt{(9 + 1 - 3,53^2)^2 + 4 \cdot 3,53^2}} \approx 1,34.$$

Следовательно, при модуляции частотой 1000 гц коэффициент модуляции будет равен

$$m_1 = 0,7 \cdot 1,01 = 0,707,$$

а при модуляции частотой 10 000 гц,

$$m_2 = 0,7 \cdot 1,34 = 0,938.$$

Этот пример (сравни с задачей 8.9) показывает возникновение искажений в связанных контурах: высокие составляющие звукового диапазона могут выделяться больше, чем низкие. Сказанное иллюстрируется качественным рис. Р.8.4.

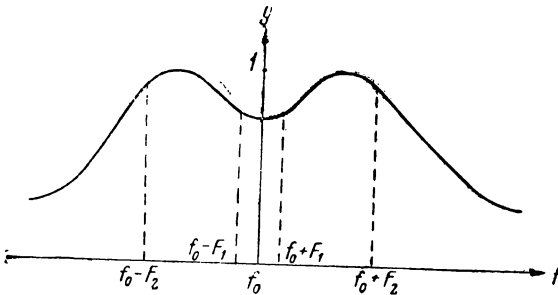


Рис. Р.8.4

8.13. Общее выражение для гармоник тока:

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \frac{\bar{U}}{Z(i\omega)} = \\ &= \frac{\bar{U}}{i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \\ &= \frac{\bar{U} \omega C}{i(\omega L \cdot \omega C - 1)}. \end{aligned}$$

Напряжение на индуктивности

$$\bar{U}_L = \bar{I} i \omega L = \bar{U} \frac{\omega L \omega C}{(\omega L \omega C - 1)}.$$

Напряжение на ёмкости

$$\bar{U}_C = \bar{I} \frac{1}{i \omega C} = \bar{U} \frac{\omega C}{i(\omega L \omega C - 1)} \cdot \frac{1}{i \omega C} = \frac{\bar{U}}{1 - \omega^2 LC}.$$

Находим напряжения первой гармоники ($\omega = \omega_0$) и третьей гармоники ($\omega = 3 \omega_0$):

$$\bar{U}_{L_1} = \bar{U}_1 \frac{\omega_0 L \cdot \omega_0 C}{(\omega_0 L \cdot \omega_0 C - 1)} = 20 \cdot \frac{3 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{15 \cdot 10^3}}{\left(\frac{1}{5} - 1\right)} = -5 \text{ в};$$

$$\bar{U}_{L_3} = \bar{U}_3 \frac{3 \omega_0 L \cdot 3 \omega_0 C}{(3 \omega_0 L \cdot 3 \omega_0 C - 1)} = 11,25 \text{ в};$$

$$\bar{U}_{C_1} = \frac{\bar{U}_1}{1 - \omega_0 L \cdot \omega_0 C} = \frac{20}{1 - \frac{1}{5}} = 25 \text{ в};$$

$$\bar{U}_{C_3} = \frac{\bar{U}_3}{1 - 3 \omega_0 L \cdot 3 \omega_0 C} = \frac{5}{1 - \frac{9}{5}} = -6,25 \text{ в}.$$

Действующие значения в соответствии с ф-лой (8.5) будут равны:

$$U_{L\partial} = 0,707 \sqrt{U_{L_1}^2 + U_{L_2}^2} = 0,707 \sqrt{5^2 + 11,25^2} = 8,7 \text{ в};$$

$$U_{C\partial} = 0,707 \sqrt{U_{C_1}^2 + U_{C_2}^2} = 0,707 \sqrt{25^2 + 6,25^2} = 18,2 \text{ в}.$$

8.15. Легко показать, что сопротивление такого контура не зависит от частоты и равно $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

Следовательно

$$I_1 = \frac{U_1}{\rho} = \frac{50}{100} = 0,5 \text{ а},$$

$$I_2 = \frac{U_2}{\rho} = \frac{20}{100} = 0,2 \text{ а},$$

$$I_3 = \frac{U_3}{\rho} = \frac{10}{100} = 0,1 \text{ а}.$$

Показания прибора

$$I_{\partial} = 0,707 \sqrt{0,5^2 + 0,2^2 + 0,1^2} = 0,707 \cdot 0,518 = 0,388 \text{ а}.$$

8.16. Так как средняя мощность несинусоидального колебания равна сумме мощностей отдельных составляющих (ф-ла 8.7), для определения общей мощности рассчитаем мощность каждой составляющей:

$$P_0 = \frac{I_0^2 R}{2},$$

$$P_1 = \left(\frac{I_0 m}{2} \right)^2 \frac{R}{2},$$

$$P_2 = \left(\frac{I_0 m}{2} \right)^2 \frac{R}{2}.$$

Общая мощность

$$P = P_0 + P_1 + P_2,$$

$$P = \frac{I_0^2 R}{2} \left(1 + \frac{m^2}{2} \right) = P_0 \left(1 + \frac{m^2}{2} \right).$$

Из последней формулы видно, что средняя мощность боковых составляющих не превосходит половины мощности несущей (так как $m < 1$). Средняя мощность зависит от коэффициента модуляции m .

8.17. При расчёте мгновенной мощности амплитудой высокочастотного колебания считаем весь множитель перед $\sin \omega t$, тогда

$$p = \frac{I^2 R}{2} = I_0^2 (1 + m \sin \omega t)^2 \frac{R}{2}.$$

Если $m = 0$, то

$$p = P_0 = \frac{I_0^2 R}{2}.$$

Следовательно,

$$p = P_0 (1 + m \sin \Omega t)^2.$$

Последняя формула показывает, что мгновенная мощность меняется в широких пределах

$$0 < p < 4P_0.$$

Это является существенным недостатком амплитудной модуляции.

8.18. Из теории бесселевых функций известно равенство

$$J_0^2(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(x) = 1.$$

Воспользовавшись этим равенством и просуммировав мощность всех составляющих, получаем среднюю мощность ЧМ (ФМ) колебания

$$p = \frac{I_0^2 R}{2}.$$

8.19. Представляя ЧМ колебание в виде синусоидального колебания с переменной фазой

$$i = I_0 \sin(\omega_0 t + M \sin \Omega t) = I_0 \sin[\omega_0 t + \varphi(t)]$$

и имея в виду, что фаза колебаний при вычислении мощности значения не имеет, получаем

$$p = \frac{I_0^2 R}{2}.$$

Из последней формулы следует, что мгновенная мощность ЧМ колебания не зависит от времени и это является преимуществом частотной (и фазовой) модуляции перед амплитудной (задача 8.17).

8.20. Представив ЧМ колебания в виде двух АМ колебаний

$$= I_0 \sin(\omega_0 t + M \sin \Omega t) = I_0 \cos(M \sin \Omega t) \sin \omega_0 t + I_0 \sin(M \sin \Omega t) \cos \omega_0 t$$

и, замечая, что при $M \ll 1$

$$\cos(M \sin \Omega t) \approx 1$$

$$\sin(M \sin \Omega t) \approx M \sin \Omega t,$$

получаем

$$\approx I_0 \sin \omega_0 t + I_0 M \sin \Omega t \cos \omega_0 t.$$

Воспользовавшись формулой

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)],$$

предыдущему выражению для тока вид

$$i = I_0 \sin \omega_0 t + \frac{I_0 M}{2} \sin (\omega_0 + \Omega) t - \frac{I_0 M}{2} \sin (\omega_0 - \Omega) t$$

Последнее выражение по спектральному составу совпадает с выражением для АМ колебания.

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 9

9.1. Воспользуемся для решения матрицей A схемы с трёхэлектродной лампой (поз. 6 табл. 6.2).

Напряжение холостого хода (эквивалентное напряжение) найдём по ф-ле (6.19) табл. 6.1:

$$\frac{\bar{U}_g}{\bar{U}_g} = \frac{1}{A_{11}} = \frac{1}{-D} = -\mu,$$

откуда

$$\bar{U}_g = -\mu \bar{U}_g.$$

Эквивалентное сопротивление найдём по ф-ле (6.11 а):

$$Z_{\text{экв}} = \frac{A_{22}Z_{\text{вн}} + A_{12}}{A_{21}Z_{\text{вн}} + A_{11}} = \frac{0 + \left(-\frac{1}{S}\right)}{0 + (-D)} = \frac{1}{SD} = R_i.$$

Эквивалентная схема с генератором напряжения изображена на рис. Р. 9. 1а.

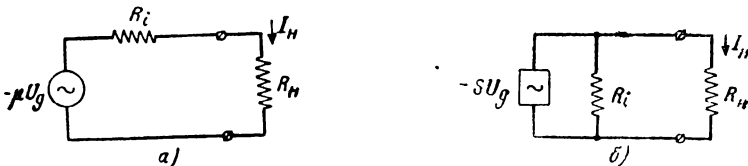


Рис. Р.9.1

Пользуясь ф-лой (9.1), легко составить эквивалентную схему с генератором тока I_g :

$$\bar{I}_g = \frac{\bar{U}_g}{Z_g} = \frac{-\mu \bar{U}_g}{R_i} = -S \bar{U}_g.$$

Эквивалентная схема изображена на рис. Р. 9. 1б.

9.2. Заменяя лампу эквивалентной схемой с сопротивлением R_i , приходим к схеме рис. P.9.2a. Эквивалентная схема дана на рис. P.9.2б. Данные схемы:

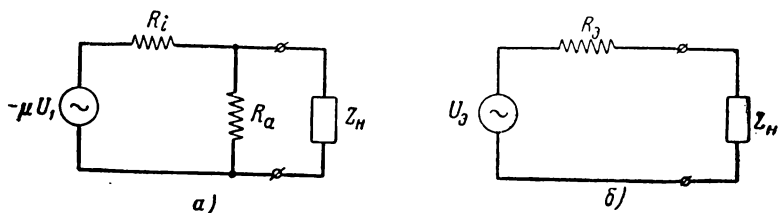


Рис. P.9.2

$$U_3 = - \frac{\mu I'_{11}}{R_i + R_a} R_a,$$

$$R_3 = \frac{R_i \cdot R_a}{R_i + R_a}.$$

9.3. Эквивалентная схема изображена на рис. P.9.3:

$$Z_{эKB} = \frac{R i \omega L}{R + i \omega L};$$

$$\bar{U}_{эKB} = \frac{\bar{U}}{R + i \omega L} i \omega L.$$

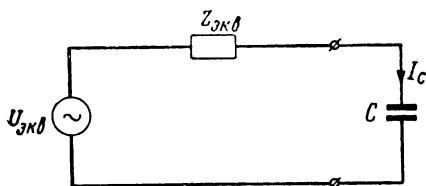


Рис. P.9.3

$$\bar{I}_C = \frac{\bar{U}_{эKB}}{Z_{эKB} + \frac{1}{i \omega C}} = - \frac{\bar{U} \omega L \omega C}{R - R \omega L \omega C + i \omega L};$$

$$I_C = U \frac{\omega^2 LC}{\sqrt{k^2 (1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega L)^2}}.$$

9.5. Эквивалентное сопротивление находим как входное сопротивление четырёхполюсника рис. Р. 9. 4а.

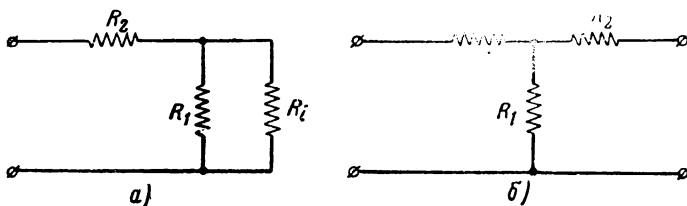


Рис. Р.9.4

По ф-ле (6.23) табл. 6.1

$$Z_{кз} = \frac{A_{12}}{A_{22}}.$$

По табл. 6.2 находим:

$$A_{12} = R_2 + R_i + \frac{R_2 R_i}{R_1} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_i + R_2 R_i}{R_1};$$

$$A_{22} = \frac{R_i + R_1}{R_1};$$

$$Z_{экв} = Z_{кз} = \frac{R_1 (R_2 + R_i) + R_2 R_i}{R_1 + R_i}.$$

Эквивалентное напряжение находим по ф-ле 6.19 табл. 6.1. (Рис. Р. 9. 4б):

$$U_{экв} = U \frac{1}{A_{11}} = U \frac{R_1}{R_1 + R_i};$$

$$A_{11} = 1 + \frac{R_i}{R_1}.$$

Переход к схеме с генератором тока совершается по ф-ле (9.1)

$$I_{экв} = \frac{U_{экв}}{Z_{экв}} = U \frac{R_1}{R_1 (R_2 + R_i) + R_2 R_i}.$$

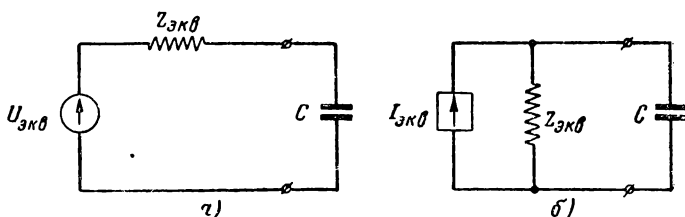


Рис. Р.9.5

Эквивалентные схемы изображены на рис. Р. 9.5а и Р. 9.5б.

9.7. Находим эквивалентное сопротивление:

$$R_{\text{э}} = \frac{R_a R_g}{R_a + R_g} = \frac{20 \cdot 180}{20 + 180} = 18 \text{ ком.}$$

Находим эквивалентное напряжение (направления токов и напряжений указаны на рис. 9.10):

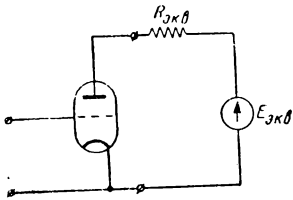


Рис. Р.9.6

$$E_{\text{э}} = E_a - I_a R_a = E_a - \frac{E_a + E_g}{R_a + R_g} R_a =$$

$$= 200 - \frac{200 + 100}{180 + 20} 20 = 170 \text{ в.}$$

$$I_a = \frac{E_a + E_g}{R_a + R_g}.$$

Эквивалентная схема изображена на рис. Р. 9 6.

Легко проверить, что, задавшись обратными направлениями токов и напряжений, мы получили бы тот же результат.

ЧАСТЬ II

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 10

10.1. В соответствии с ф-лой (10.8) или (10.13) имеем

$$\begin{aligned}
 S(i\omega) &= \int_0^T f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\delta} E e^{-i\omega t} dt = \\
 &= -\frac{E}{i\omega} \left| e^{-i\omega t} \right|_0^{\delta} = -\frac{E}{i\omega} (e^{-i\omega\delta} - 1) = \\
 &= -\frac{E}{i\omega} (\cos \omega\delta - i \sin \omega\delta - 1) = \frac{E}{\omega} (\sin \omega\delta + i \cos \omega\delta - 1) = \\
 &= \frac{E}{\omega} \left[\sin \omega\delta + i(\cos \omega\delta - 1) \right]. \tag{1}
 \end{aligned}$$

Это и есть выражение спектральной функции последовательности прямоугольных импульсов.

Для практических расчетов нужно этому выражению придать вид, удобный для последующих расчетов амплитуд и фаз отдельных составляющих.

С этой целью вычислим модуль и аргумент $S(i\omega)$.

Выражение для модуля

$$\begin{aligned}
 S(\omega) &= \frac{E}{\omega} \sqrt{\sin^2 \omega\delta + (\cos \omega\delta - 1)^2} = \\
 &= \frac{E}{\omega} \sqrt{2(1 - \cos \omega\delta)} = \frac{2E}{\omega} \sin \frac{\omega\delta}{2}.
 \end{aligned}$$

Последнему выражению можно также придать более удобный вид

$$S(\omega) = E\delta \frac{\sin \frac{\omega\delta}{2}}{\frac{\omega\delta}{2}}. \tag{2}$$

График, построенный по последнему выражению, дан на рис. P.10.1. Найдём теперь аргумент спектральной функции

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\operatorname{Im} S(i\omega)}{\operatorname{Re} S(i\omega)} = \frac{\cos \omega \delta - 1}{\sin \omega \delta} = - \frac{1 - \cos \omega \delta}{\sin \omega \delta} = \\ &= - \frac{2 \sin^2 \frac{\omega \delta}{2}}{2 \sin \frac{\omega \delta}{2} \cos \frac{\omega \delta}{2}} = - \operatorname{tg} \frac{\omega \delta}{2}. \end{aligned}$$

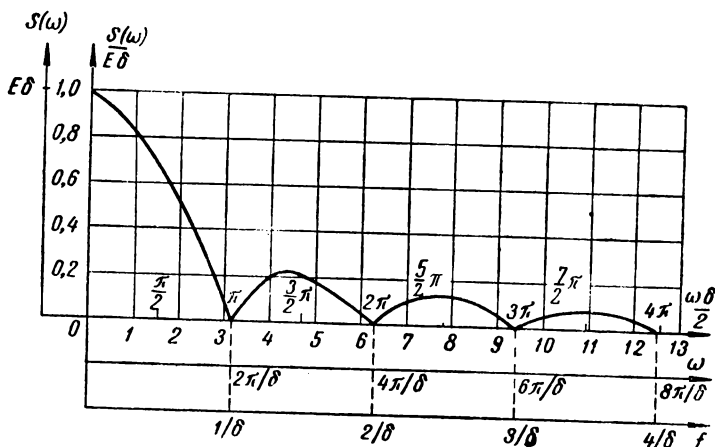


Рис. P.10.1

Таким образом, $\varphi = - \frac{\omega \delta}{2}$. (3)

В соответствии с ф-лой (10.10) можно написать

$$S(i\omega) = E \delta \frac{\sin \frac{\omega \delta}{2}}{\frac{\omega \delta}{2}} e^{-i \frac{\omega \delta}{2}}. \quad (4)$$

Теперь найдём выражение спектральной функции при помощи таблиц операционного исчисления.

Записывая прямоугольный импульс аналитически в виде разности двух постоянных напряжений (стр. 110)

$$u(t) = E[1(t) - 1(t - \delta)]$$

и применяя теорему линейности, легко получить операционное выражение.

Так как [табл. 10.1, ф-ла (1)]:

$$\overline{1(t)} = \frac{1}{p},$$

$$\overleftarrow{f}(t - \delta) = \frac{1}{p} e^{-p \delta^1} ,$$

то

$$\overleftarrow{u}(t) = \frac{E}{p} (1 - e^{-p \delta}) .$$

Заменяя $p = i\omega$, легко убедиться, что это выражение соответствует одному из промежуточных выражений (1), т. е. найденному путём интегрирования выражению спектральной функции.

10.2. Найдем спектральную функцию по ф-ле (10.13):

$$\begin{aligned} S(i\omega) &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} E e^{-\alpha t} e^{-i\omega t} dt = \\ &= E \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + i\omega)t} dt = \frac{E}{-(\alpha + i\omega)} \left| e^{-(\alpha + i\omega)t} \right|_0^{\infty} = \\ &= \frac{E}{-(\alpha + i\omega)} (0 - 1) = \frac{E}{\alpha + i\omega} . \end{aligned} \quad (1)$$

Модуль спектральной функции равен

$$S(\omega) = \frac{E}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} . \quad (2)$$

Аргумент спектральной функции

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\omega}{\alpha} ; \varphi = -\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\omega}{\alpha} . \quad (3)$$

Таким образом, окончательно

$$S(i\omega) = \frac{E}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} e^{-i \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\omega}{\alpha}} . \quad (4)$$

Используя таблицу операционных соотношений, эту задачу можно решить быстрее.

В самом деле в соответствии с ф-лой 4 табл. 10.1 имеем

$$\overleftarrow{e^{-\alpha t}} = \frac{1}{p + \alpha}$$

или

$$\overleftarrow{E e^{-\alpha t}} = \frac{E}{\alpha + i\omega} .$$

т. е. получили ф-лу (1) настоящей задачи.

10.3. В интервале времени $0 < t < \tau$ аналитическая запись для $f(t)$ будет соответствовать уравнению прямой

$$f(t) = \frac{E}{\tau} t = \kappa t .$$

1) Это соотношение получается из предыдущего применением теоремы смещения оригинала.

При $t > \tau$ нужно вычесть уравнение прямой κt , но начинающейся в момент $t = \tau$, т. е.

$$f(t) = \kappa t \cdot 1(t) - \kappa(t - \tau) \cdot 1(t - \tau).$$

Изображение для данной $f(t)$ легко найдётся, так как [Ф-ла (2) табл. 10.1]

$$\overrightarrow{f} = \frac{1}{p^2} = \frac{1}{(i\omega)^2}.$$

Применяя теорему смещения оригинала, получаем

$$\overrightarrow{f}(t) = \frac{\kappa}{p^2} - \frac{\kappa}{p^2} e^{-p\tau} = \frac{\kappa}{p^2} (1 - e^{-p\tau}).$$

10.4. Аналитическая запись составляется непосредственно по рис. 10.7

$$\begin{aligned} f(t) &= E \sin\left(\frac{2\pi}{2\delta} t\right) \cdot 1(t) + E \sin\left[\frac{2\pi}{2\delta} (t - \delta)\right] \cdot 1(t - \delta) = \\ &= E \sin\frac{\pi}{\delta} t \cdot 1(t) + E \sin\left[\frac{\pi}{\delta} (t - \delta)\right] \cdot 1(t - \delta). \end{aligned}$$

Так как (Ф-ла 8 табл. 10.1)

$$\overrightarrow{\sin \omega_0 t} = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + p^2},$$

то

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f}(t) &= E \frac{\frac{\pi}{\delta}}{\left(\frac{\pi}{\delta}\right)^2 + p^2} + E \frac{\frac{\pi}{\delta}}{\left(\frac{\pi}{\delta}\right)^2 + p^2} e^{-p\delta} = \\ &= E \frac{\pi}{\delta} \frac{1}{\left(\frac{\pi}{\delta}\right)^2 + p^2} (1 + e^{-p\delta}). \end{aligned}$$

Это и есть изображение синусоидального импульса.

Придадим ему теперь вид, удобный для последующего расчёта амплитуд и фаз.

Общее выражение

$$S(i\omega) = E \frac{\pi}{\delta} \frac{1 + e^{-1\omega\delta}}{\left(\frac{\pi}{\delta}\right)^2 + (i\omega)^2}$$

можно преобразовать:

$$S(i\omega) = E \frac{\pi}{\delta} \frac{1 + \cos \omega\delta - i \sin \omega\delta}{\left(\frac{\pi}{\delta}\right)^2 - \omega^2} = E \frac{\pi}{\delta} \frac{2 \cos \frac{\omega\delta}{2} \left(\cos \frac{\omega\delta}{2} - i \sin \frac{\omega\delta}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{\delta}\right)^2 - \omega^2}$$

и.т.д.

$$S(i\omega) = \frac{2E\pi}{\delta} \frac{\cos \frac{\omega\delta}{2}}{\left(\frac{\pi}{\delta}\right)^2 - \omega^2} e^{-i \frac{\omega\delta}{2}}. \quad (2)$$

Для упрощения дальнейших вычислений последнему выражению целесообразно придать вид

$$S(i\omega) = \frac{E \delta \pi}{2} \frac{\cos \frac{\omega \delta}{2}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\omega \delta}{2}\right)^2} e^{-i \frac{\omega \delta}{2}} \quad (3)$$

10.6. Непосредственно по рис. 10.9 составляем аналитическую запись

$$u(t) = \kappa t \cdot 1(t) - \kappa(t - \delta) \cdot 1(t - \delta) - \kappa[t - (\tau - \delta)] \cdot 1[t - (\tau - \delta)] + \kappa(t - \tau) \cdot 1(t - \tau).$$

Здесь $\kappa = \frac{E}{\delta}$.

Операционное выражение (изображение) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \bar{u}(i) &= \frac{\kappa}{p^2} - \frac{\kappa}{p^2} e^{-p\delta} - \frac{\kappa}{p^2} e^{-p(\tau - \delta)} + \frac{\kappa}{p^2} e^{-p\tau} = \\ &= \frac{\kappa}{p^2} (1 - e^{-p\delta} - e^{-p\tau} \cdot e^{p\delta} + e^{-p\tau}) = \\ &= \frac{\kappa}{p^2} [1 - e^{-p\delta} + e^{-p\tau} (1 - e^{p\delta})]. \end{aligned}$$

Если $\delta = \frac{\tau}{2}$ последнее выражение совпадает с операционным выражением треугольного импульса (задача 10.5).

Совершая преобразования, аналогичные преобразованиям в задаче 10.4, можно получить выражения для спектральной функции в виде

$$S(i\omega) = \frac{2E}{\delta} \frac{\left[\cos \omega \left(\frac{\tau}{2} - \delta \right) - \cos \omega \frac{\tau}{2} \right]}{\omega^2} e^{-i \frac{\omega \tau}{2}}.$$

При $\delta = 0$ это выражение совпадает с выражением спектральной функции прямоугольного импульса; при $\delta = \frac{\tau}{2}$ — треугольного импульса.

График модуля последнего выражения для частного случая $\delta = \frac{\tau}{4}$ дан на рис. Р.10.2.

10.8. Исходным выражением служит ф-ла (10.9)

$$\bar{C}_n = \frac{\Omega}{\pi} S(i\omega),$$

причём $\omega = n \Omega$.

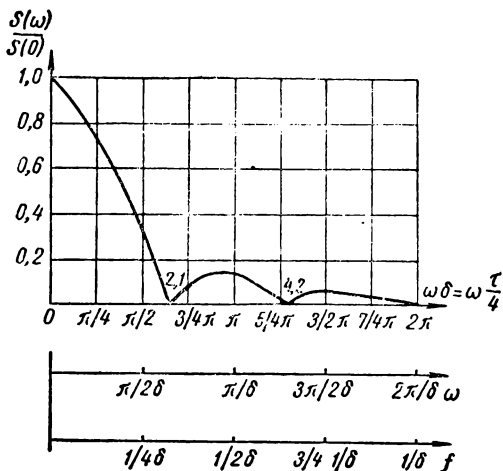


Рис. Р.10.2

Для прямоугольного импульса (поз. 2 табл. 10.2 или задача 10.1) имеем

$$S(i\omega) = E\delta \frac{\sin \frac{\omega\delta}{2}}{\frac{\omega\delta}{2}} e^{-i\frac{\omega\delta}{2}}.$$

Подставляя последнее выражение в формулу для расчёта n -й гармоники и заменяя текущие частоты ω дискретными частотами $n\Omega$ (где $\Omega = \frac{2\pi}{T}$), получаем формулы для расчёта амплитуд и фаз конкретных составляющих:

$$C_n = \frac{\Omega}{\pi} 2E \frac{\sin \frac{n\Omega\delta}{2}}{n\Omega} = \frac{2E}{n\pi} \sin n\pi \frac{\delta}{T};$$

$$\varphi_n = -\frac{n\Omega\delta}{2} = -n\pi \frac{\delta}{T}.$$

Для расчёта постоянной составляющей нужно принять во внимание, что $\left. \frac{\sin x}{x} \right|_{x=0} = 1$ и, кроме того, учесть множитель $\frac{1}{2}$ (ф-ла 10.3)

$$\frac{C_0}{2} = \frac{1}{2} \frac{\Omega}{\pi} E\delta = E \frac{\delta}{T}.$$

10.9. Общие выражения для амплитуд и фаз (задача 10.8) при $\frac{\delta}{T} = 0,5$ запишутся в виде:

$$C_n = \frac{2E}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2},$$

$$\varphi_n = -\frac{n\pi}{2}.$$

При

$$n = 1; \quad C_1 = E \frac{2}{\pi} = 0,636E; \quad \varphi_1 = -\frac{\pi}{2};$$

$$n = 2; \quad C_2 = 0;$$

$$n = 3; \quad C_3 = E \frac{2}{3\pi} = 0,212E; \quad \varphi_3 = -\frac{3\pi}{2};$$

$$n = 4; \quad C_4 = 0;$$

$$n = 5; \quad C_5 = E \frac{2}{5\pi} = 0,127E; \quad \varphi_5 = -\frac{5\pi}{2}$$

Постоянная составляющая

$$a_0 = \frac{C_0}{2} = E \frac{\delta}{T} = \frac{E}{2}.$$

10.10. Общее выражение для амплитуды n -й гармоники (задача 10.8) имеет вид

$$C_n = \frac{2E}{n\pi} \sin n\pi \frac{\delta}{T}.$$

Следовательно

$$C_{nI} = \frac{2E}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2};$$

$$C_{nII} = \frac{2E}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{50}.$$

Сопоставляя эти выражения, получаем

$$\frac{C_{nI}}{C_{nII}} = \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\sin \frac{n\pi}{50}}.$$

На этом примере легко видеть влияние относительной длительности импульса $\frac{\delta}{T}$ на величину гармоник: чем уже импульс, тем меньше амплитуды гармоник, но тем существеннее относительное влияние высших гармоник.

10.11. Исходная формула

$$C_n = \frac{2E}{n\pi} \sin n\pi \frac{\delta}{T}.$$

Для импульса длительностью $\delta_1 = 1$ мксек имеем:

$$C_{15} = \frac{2 \cdot 10}{15\pi} \sin 15\pi \frac{1}{2000} = 0,424 \cdot 0,0236 = 0,01 \text{ в};$$

$$C_{75} = \frac{2 \cdot 10}{75\pi} \sin 75\pi \frac{1}{2000} = 0,0849 \cdot 0,1175 = 0,00997 \text{ в}.$$

Для импульса длительностью $\delta_2 = 100$ мксек имеем;

$$C_{15} = \frac{2 \cdot 10}{15\pi} \sin 15\pi \frac{100}{2000} = 0,424 \sin 2,36 = 0,3 \text{ в};$$

$$C_{75} = \frac{2 \cdot 10}{75\pi} \sin 75\pi \frac{100}{2000} = 0,0849 \sin 11,8 = -0,06 \text{ в}.$$

Этот пример, в дополнение к задаче 10.10, показывает рост влияния высших гармоник при уменьшении длительности импульса. Если при длительности $\delta_1 = 1$ мксек разница между 15- и 75-й гармониками составляет доли процента, то при длительности $\delta_2 = 100$ мксек 15-я гармоника в пять раз больше 75-й; однако абсолютные значения амплитуд составляющих спектра импульсов с малой длительностью существенно меньше и при переходе к бесконечно „тонкому“ импульсу приобретают бесконечно малые значения.

10.14. В данном случае нельзя воспользоваться односторонним преобразованием Фурье, ф-лой (10.13), так как нельзя создать условия, при которых $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$. Поэтому воспользуемся двусторонним преобразованием Фурье ф-лой (10.12):

$$S(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Подставляя закон $f(t)$, получим

$$S(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\beta^2 t^2 + i\omega t)} dt. \quad (1)$$

Показатель степени под интегралом можно преобразовать так

$$\begin{aligned}
 -(\beta^2 t^2 + i \omega t) &= - \left[\beta^2 t^2 + i \omega t + \left(\frac{i \frac{\omega}{2}}{\beta} \right)^2 \right] + \left(\frac{i \frac{\omega}{2}}{\beta} \right)^2 \\
 &= - \left(\beta t + \frac{i \frac{\omega}{2}}{\beta} \right)^2 - \left(\frac{\omega}{2} \right)^2.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), находим

$$S(i \omega) = e^{-\left(\frac{\omega}{2\beta}\right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\beta t + i \frac{\omega}{2\beta}\right)^2} dt. \tag{3}$$

Введём временно обозначение:

$$\begin{aligned}
 \beta t + i \frac{\omega}{2\beta} &= z, \\
 dz &= \beta dt,
 \end{aligned}$$

тогда

$$S(i \omega) = \frac{1}{\beta} e^{-\left(\frac{\omega}{2\beta}\right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz. \tag{4}$$

Определённый интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz$$

можно легко вычислить по таблицам интеграла вероятности, совершив элементарные преобразования (И. Н. Бронштейн и К. А. Семендяев. Справочник по математике, 1953 г., стр. 81 — 82)¹⁾, в результате получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}.$$

Следовательно,

$$S(i \omega) = S(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} e^{-\left(\frac{\omega}{2\beta}\right)^2} \tag{5}$$

¹⁾ Из „Справочника“ известно, что $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$. Вводя новую пе-

ременную $\frac{1}{2} t^2 = z^2$; $dt = \sqrt{2} dz$, получаем, что $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = 1$. Так как

подынтегральная функция является чётной, интеграл в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ будет равен удвоенному значению интеграла в пределах от нуля до бесконечности.

10.18. Так как

$$\overline{f(t)} = \frac{1}{p} \quad (\text{Ф-ла 1 табл. 10.1}),$$

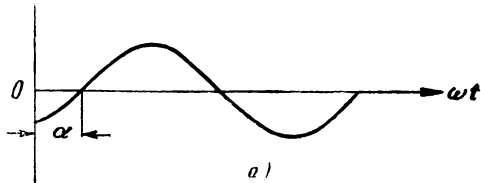
$$\overline{\sin \omega t} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \quad (\text{Ф-ла 8 табл. 10.1}),$$

то, применяя теорему линейности и теорему умножения на постоянное число, получим

$$E \overline{f(t) + E \sin \omega t} = \frac{E}{p} + \frac{E \omega}{p^2 + \omega^2} = E \frac{p^2 + \omega p + \omega^2}{p(p^2 + \omega^2)}.$$

10.21.
$$\overline{\sin \omega(t - t_0)} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} e^{-pt_0}.$$

Не следует путать эту задачу с примером 6 задачи 10.19. В примере 6 задачи 10.19 речь шла о синусоиде с фазовым углом α (рис. Р.10.3а) и применению теоремы сдвига не может быть места; в настоящей задаче речь идёт о синусоиде, сдвинутой относительно начала координат на величину t_0 (рис. Р. 10.3б) и здесь следует пользоваться теоремой сдвига.

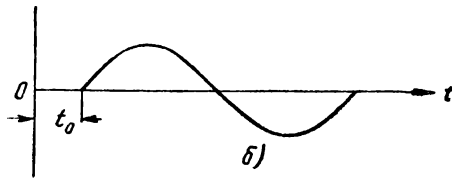


10.24. Представим $\sin \omega t$ в виде

$$\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$$

и воспользуемся теоремой умножения на экспоненту

$$\overline{f(t) e^{\pm i\omega t}} = F(p \mp i\omega),$$



тогда получим

Рис. Р.10.3

$$\overline{f(t) \sin \omega t} = \frac{1}{2i} [F(p - i\omega) - F(p + i\omega)].$$

10.25.
$$\begin{aligned} \overline{e^{-\alpha t} \sin \omega t} &= \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{p + \alpha - i\omega} - \frac{1}{p + \alpha + i\omega} \right] = \\ &= \frac{1}{2i} \cdot \frac{p + \alpha + i\omega - p - \alpha + i\omega}{(p + \alpha - i\omega)(p + \alpha + i\omega)} = \frac{\omega}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

10.27. Пользуемся ф-лой (10.18)

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \frac{v(p_i)}{\omega'(p_i)} e^{p_i t}$$

В данном случае:

$$\begin{aligned}v(p) &= 1, \\w(p) &= p^2 + (a+b)p + ab, \\w'(p) &= 2p + a + b.\end{aligned}$$

Найдём корни уравнения $w(p) = 0$:

$$\begin{aligned}p_1 &= -b, \\p_2 &= -a.\end{aligned}$$

Подставляем в основную формулу

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{1}{-2b + a + b} e^{-bt} + \frac{1}{-2a + a + b} e^{-at} = \\&= \frac{e^{-bt} - e^{-at}}{a - b}.\end{aligned}$$

10.29. В данном случае один из корней знаменателя равен нулю и поэтому целесообразно воспользоваться ф-лой (10.20)

$$f(t) = \frac{v(0)}{w_1(0)} + \sum_{i=2}^n \frac{v(p_i)}{p_i w_1'(p_i)} e^{p_i t}.$$

По условиям задачи:

$$\begin{aligned}v(p) &= 1, \\w_1(p) &= p + a, \\w_1'(p) &= 1, \\p_1 &= 0, \\p_2 &= -a.\end{aligned}$$

Подставляя в основную формулу, получаем

$$f(t) = \frac{1}{a} + \frac{1}{(-a) \cdot 1} e^{-at} = \frac{1}{a} (1 - e^{-at}).$$

10.31. Для разложения поделим числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1 + \frac{\alpha}{p} \end{array} \left| \begin{array}{l} p + \alpha \\ \hline p - \frac{\alpha}{p^2} + \frac{\alpha^2}{p^3} - \dots \\ \hline -\frac{\alpha}{p} \\ \hline -\frac{\alpha}{p} - \frac{\alpha^2}{p^2} \\ \hline \frac{\alpha^2}{p^2} \end{array} \right.$$

Итак

$$\frac{1}{p + \alpha} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{p^2} + \frac{\alpha^2}{p^3} - \dots$$

Пользуемся ф-лой (10.22):

$$f(t) = 1 - \alpha t + \frac{\alpha^2 t^2}{2!} - \frac{\alpha^3 t^3}{3!} + \dots$$

Так как

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

то

$$f(t) = e^{-\alpha t}.$$

10.32. В данном случае корни равны и теоремой разложения пользоваться нельзя. Обойти это затруднение, как указывалось, можно разными приёмами.

1) Временно сделаем корни разными.

$$\frac{1}{(p+a)^2} \text{ условно равно } \frac{1}{(p+a)(p+b)}.$$

Оригинал, соответствующий изображению $\frac{1}{(p+a)(p+b)}$, можно найти по теореме разложения (задача 10.27)

$$\frac{1}{(p+a)(p+b)} = \frac{e^{-bt} - e^{-at}}{a-b}.$$

Теперь устремим b к a :

$$\left| \frac{e^{-bt} - e^{-at}}{a-b} \right|_{b \rightarrow a} = t e^{-at}.$$

(Для получения этого результата нужно вскрыть неопределённость).

2) Воспользуемся теоремой смещения изображения, приняв во внимание, что

$$\frac{1}{p^2} = t,$$

тогда

$$\frac{1}{(p+a)^2} = t e^{-at}.$$

10.33. Указания к решению.

1. Прибавим и отнимем в числителе a :

$$\frac{p}{(p+a)^2} = \frac{p+a-a}{(p+a)^2} = \frac{1}{p+a} - \frac{a}{(p+a)^2}.$$

Оригиналы полученных изображений известны.

2. Аналогично

$$\frac{p}{(p+a)^3} = \frac{p+a-a}{(p+a)^3} = \frac{1}{(p+a)^2} - \frac{a}{(p+a)^3}$$

Оригинал первого изображения известен (см. пример 1), оригинал второго можно найти, пользуясь теоремой смещения изображения.

3. Воспользуемся теоремой смещения.

4. Добавлением и вычитанием в числителе a , можно данное изображение свести к известным.

5. Искусственное преобразование

$$\frac{p^2}{(p+a)^3} = \frac{(p+a)^2 - 2ap - a^2}{(p+a)^3}$$

6. Искусственное преобразование

$$\frac{p^2}{(p+a)^4} = \frac{(p+a)^2 - 2ap - a^2}{(p+a)^4}$$

10.34. В данном случае из трёх корней один простой и два кратных.

Представим заданную дробь в виде суммы дробей с неопределёнными коэффициентами

$$\frac{1}{p(p+a)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{(p+a)^2} + \frac{C}{p+a}$$

Определяя обычными способами коэффициенты A , B и C , находим

$$A = \frac{1}{a^2}, \quad B = -\frac{1}{a}, \quad C = -\frac{1}{a^2},$$

тогда

$$\frac{1}{p(p+a)^2} = \frac{1}{a^2 p} - \frac{1}{a(p+a)^2} - \frac{1}{a^2(p+a)}$$

Оригинал, соответствующий каждому изображению в отдельности, известен.

$$\begin{aligned} \frac{1}{p(p+a)^2} &= \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a} t e^{-at} - \frac{1}{a^2} e^{-at} = \\ &= \frac{1}{a^2} (1 - e^{-at}) - \frac{1}{a} t e^{-at}. \end{aligned}$$

10.35. 1. Сопоставляя (10.21) и (10.22), получаем:

$$\left. \begin{aligned} p F(p) &= C_0 + \frac{C_1}{p} + \frac{C_2}{p^2} + \dots \\ f(t) &= C_0 + C_1 t + \frac{C_2 t^2}{2} + \dots \\ |pF(p)|_{p \rightarrow \infty} &= |f(t)|_{t=0} \end{aligned} \right\} (1)$$

2. Из (10.15) с учётом (10.19) имеем

$$F(p) = \frac{v(p)}{w(p)} = \frac{v(p)}{p\omega_1(p)}$$

или

$$p F(p) = \frac{v(p)}{\omega_1(p)}$$

При $p = 0$ будет

$$|pF(p)|_{p=0} = \frac{v(0)}{\omega_1(0)}$$

С другой стороны из (10.20) следует, что при $t = \infty$, так как вещественная часть p всегда отрицательна, экспоненциальные сомножители обращаются в нуль и

$$|f(t)|_{t=\infty} = \frac{v(0)}{\omega_1(0)}.$$

Таким образом

$$|pF(p)|_{p=0} = |f(t)|_{t=\infty}. \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) называются предельными соотношениями.

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 11

11.1. Решение проводим по намеченным трём этапам:

1. Находим спектр (изображение) внешнего воздействия (поз. 1 табл. 10.1)

$$U_1(p) = \overrightarrow{E \cdot 1(t)} = \frac{E}{p}.$$

2. Находим операционное изображение (спектр) для тока, имея в виду, что

$$Z(i\omega) = R + \frac{1}{i\omega C}$$

или

$$Z(p) = R + \frac{1}{pC};$$

для тока получаем

$$I(p) = \frac{U_1(p)}{Z(p)} = E \frac{1}{p} \frac{1}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{E}{R} \frac{1}{p + \frac{1}{RC}}.$$

3. Находим оригинал (временную функцию) для тока (поз. 4 табл. 10.1)

$$i(t) = \overleftarrow{I(p)} = \frac{E}{R} \frac{\overleftarrow{1}}{p + \frac{1}{RC}} = \frac{E}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}.$$

График, построенный по последнему выражению, изображён на рис. Р. 11.1.

11.2. 1.. Спектр (изображение) входного напряжения

$$U_1(p) = \frac{E}{p}.$$

2. Спектр (изображение) выходного напряжения

$$U_2(p) = K(p) U_1(p).$$

Коэффициент передачи находим по ф-ле (6.19) и матрице поз. 7 (табл. 6.2)

$$K(p) = \frac{1}{A_{11}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{i\omega L}{R + i\omega L} = \frac{pL}{R + pL},$$

тогда

$$\dot{U}_2(p) = \frac{pL}{R + pL} \frac{E}{p} = E \frac{1}{p + \frac{R}{L}}.$$

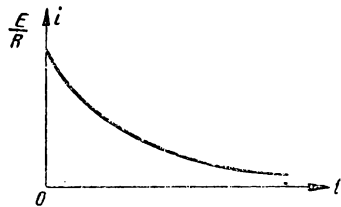


Рис. Р.11.1

3. Оригинал (временная функция) выходного напряжения (поз. 4 табл. 10.1)

$$u_2(t) = E e^{-\frac{R}{L}t}$$

11.3. 1. Схема рис. 11.2. Составим исходное интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{C} \int i dt + Ri = E.$$

Находим изображения левой и правой частей

$$\frac{1}{pC} \overleftarrow{i} + R \overleftarrow{i} = \frac{E}{p}.$$

Решаем полученное алгебраическое уравнение относительно изображения тока:

$$\overleftarrow{i} = \frac{E}{R} \frac{1}{p + \frac{1}{RC}}.$$

Находим оригинал (временную зависимость) тока

$$i = \frac{E}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}.$$

2. Найдём сперва ток, аналогично примеру 1:

$$iR + L \frac{di}{dt} = E;$$

$$\overleftarrow{i} R + pL \overleftarrow{i} = \frac{E}{p}; \quad \overleftarrow{i} = \frac{E}{L} \frac{1}{p \left(p + \frac{R}{L} \right)}.$$

Воспользовавшись поз. 5 (табл. 10.1), находим

$$i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

Напряжение на катушке равно $L \frac{di}{dt}$; изображение напряжения

$$\overleftarrow{u_2} = pL \overleftarrow{i} = E \frac{1}{p + \frac{R}{L}}.$$

Находим u_2 (поз. 4 табл. 10.1)

$$u_2 = E e^{-\frac{R}{L}t}.$$

11.5 1 Изображение входного напряжения

$$U_1(p) = \frac{E}{p}.$$

2. Коэффициент передачи (поз. 7 табл. 6.2)

$$K(p) = \frac{1}{A_{11}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{R_2 + \frac{1}{pC}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{pC}} =$$

$$= \frac{1}{1 + (R_1 + R_2) pC} + CR_2 \frac{p}{1 + (R_1 + R_2) pC}$$

Изображение выходного напряжения:

$$U_2(p) = K(p) U_1(p) = \frac{E}{p [1 + (R_1 + R_2) pC]} + \frac{ER_2 C}{1 + (R_1 + R_2) pC}$$

Для того, чтобы привести к „табличному виду“, преобразуем последнее выражение

$$U_2(p) = \frac{E}{(R_1 + R_2) C} \cdot \frac{1}{p \left[\frac{1}{(R_1 + R_2) C} + p \right]} +$$

$$+ \frac{ER_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{\left[\frac{1}{(R_1 + R_2) C} + p \right]}$$

3. Теперь воспользуемся ф-лами (4) и (5) табл. 10.1

$$u_2(t) = E \left[1 - e^{-\frac{1}{(R_1 + R_2) C} t} \right] + E \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{1}{(R_1 + R_2) C} t}$$

Полученное выражение можно несколько упростить:

$$u_2(t) = E - E e^{-\frac{1}{(R_1 + R_2) C} t} + E \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{1}{(R_1 + R_2) C} t} =$$

$$= E - E e^{-\frac{1}{(R_1 + R_2) C} t} \left(1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) =$$

$$= E - E e^{-\frac{1}{(R_1 + R_2) C} t} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} =$$

$$= E \left[1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} e^{-\frac{1}{(R_1 + R_2) C} t} \right]$$

11.7. Решаем задачу сначала на основании использования $Z(p)$.

1. Спектр (изображение) входного воздействия

$$\vec{u}_1(t) = \vec{E} \cdot \vec{1}(t) \Rightarrow U_1(p) = \frac{E}{p}$$

2. Входное сопротивление

$$Z(p) = R + pL + \frac{1}{pC}$$

Изображение тока

$$I(p) = \frac{U_1(p)}{Z(p)} = \frac{E}{p} \frac{1}{R + pL + \frac{1}{pC}}$$

Преобразуем последнее выражение

$$I(p) = \frac{E}{p} \frac{pC}{pCR + p^2LC + 1} = \frac{E}{L} \cdot \frac{1}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}}$$

Обозначая, как обычно принято,

$$\frac{R}{L} = 2\alpha, \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2,$$

получим

$$I(p) = \frac{E}{L} \frac{1}{p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2}.$$

3. Найдём оригинал (временную функцию) тока, для чего воспользуемся формулой (поз. 14 табл. 10.1)

$$\frac{1}{(p + \alpha)^2 + \omega^2} = e^{-\alpha t} \frac{\sin \omega t}{\omega}.$$

В нашем случае

$$\alpha^2 + \omega^2 = \omega_0^2; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}.$$

Таким образом, если $\omega_0 > \alpha$, получаем

$$i(t) = \frac{E}{L} e^{-\alpha t} \frac{\sin \omega t}{\omega} = \frac{E}{\omega L} e^{-\alpha t} \sin \omega t.$$

Если $\alpha > \omega_0$, величина ω будет мнимой и мы получим

$$i(t) = \frac{E}{i \omega L} e^{-\alpha t} \sin i \omega t = \frac{E}{i \omega L} e^{-\alpha t} i \operatorname{sh} \omega t = \frac{E}{\omega L} e^{-\alpha t} \operatorname{sh} \omega t.$$

Если $\alpha = \omega_0$, $\omega = 0$, появляется неопределённость в выражении $\frac{\operatorname{sh} \omega t}{\omega}$, раскрывая эту неопределённость, получаем

$$\left| \frac{\operatorname{sh} \omega t}{\omega} \right|_{\omega=0} = t.$$

Таким образом, для случая $\alpha = \omega_0$ имеем

$$i(t) = \frac{E}{L} t e^{-\alpha t}.$$

Решим теперь на основе дифференциального уравнения, составим исходное интегродифференциальное уравнение

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = E.$$

Находим изображение левой и правой частей

$$pL \overleftarrow{i} + R \overleftarrow{i} + \frac{1}{pC} \overleftarrow{i} = \frac{E}{p}.$$

Решая полученное алгебраическое уравнение относительно изображением тока \overleftarrow{i} , находим

$$\overleftarrow{i} = \frac{E}{p \left(pL + R + \frac{1}{pC} \right)} = \frac{E}{L \left(p^2 + p \frac{R}{L} + \frac{1}{LC} \right)}.$$

Последнее выражение совпадает с выражением, полученным в п. 2 на основании использования $Z(p)$.

11.10. 1. Изображение входного напряжения (поз. 2 табл. 10.2) запишется в виде

$$\overleftarrow{u_1(t)} = U_1(p) = E \frac{1 - e^{-p\delta}}{p}.$$

2. Для данной схемы операторный коэффициент передачи равен

$$K(p) = \frac{p}{p + \frac{1}{LC}}.$$

Следовательно, изображение выходного напряжения:

$$\begin{aligned} U_2(p) = U_1(p) K(p) &= \frac{p}{p + \frac{1}{RC}} E \frac{1 - e^{-p\delta}}{p} = \\ &= E \left(\frac{1}{p + \frac{1}{RC}} - \frac{e^{-p\delta}}{p + \frac{1}{RC}} \right). \end{aligned}$$

3. Находим временную функцию (оригинал) выходного напряжения, воспользовавшись формулой поз. 4 (табл. 10.1) и теоремой умножения изображения на экспоненту. В результате получим

$$u_2(t) = E \left[e^{-\frac{1}{RC}t} \cdot 1(t) - e^{-\frac{1}{RC}(t-\delta)} \cdot 1(t-\delta) \right].$$

График выходного напряжения приведён на рис. Р. 11.2.

11.12. 1. Изображение входного напряжения [Фла (2) табл. 10.1] имеет вид

$$U_1(p) = \overleftarrow{u_1(t)} = \overleftarrow{\kappa t} = \frac{\kappa}{p^2}.$$

2. Изображение выходного напряжения, принимая во внимание, что

$$K(p) = \frac{p}{p + \frac{1}{RC}}$$

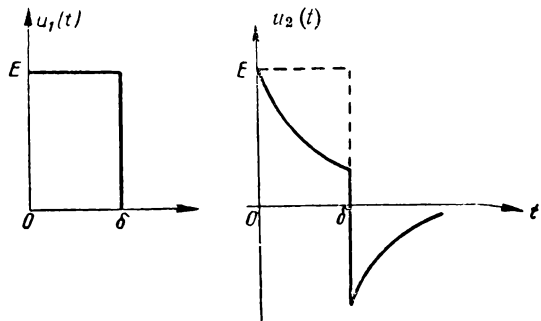


Рис. Р.11.2

запишется следующим образом

$$U_2(p) = K(p) U_1(p) = \frac{p}{p + \frac{1}{RC}} \frac{\kappa}{p^2} = \kappa \frac{1}{p \left(p + \frac{1}{RC} \right)}$$

3. Находим закон изменения выходного напряжения (поз. 5 табл. 10.1)

$$u_2(t) = \overline{U_2(p)} = \kappa \frac{\overleftarrow{1}}{p \left(p + \frac{1}{RC} \right)} = \kappa RC \left(1 - e^{-\frac{1}{RC} t} \right)$$

11.14. 1. Из табл. 10.2 находим изображение входного напряжения

$$U_1(p) = \frac{2E}{\tau} \frac{\left(1 - e^{-p \frac{\tau}{2}} \right)^2}{p^2}$$

2. Зная, что операторное сопротивление данной цепи равно

$$Z(p) = R + \frac{1}{pC} = R \frac{1 + pRC}{p}$$

получаем выражение для изображения тока

$$\begin{aligned} I(p) &= \frac{U_1(p)}{Z(p)} = \frac{2E}{\tau} \frac{\left(1 - e^{-p \frac{\tau}{2}} \right)^2}{p^2} \frac{p}{R \left(p + \frac{1}{RC} \right)} = \\ &= \frac{2E}{\tau R} \left[\frac{1}{p \left(p + \frac{1}{RC} \right)} - \frac{2}{p \left(p + \frac{1}{RC} \right)} e^{-p \frac{\tau}{2}} + \frac{e^{-p \tau}}{p \left(p + \frac{1}{RC} \right)} \right] \end{aligned}$$

3. В соответствии с формулой поз. 5 (табл. 10.1), а также применяя теорему умножения изображения на экспоненту, получаем

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{2E}{\tau R} \left\{ RC \left(1 - e^{-\frac{1}{RC} t} \right) \cdot 1(t) - \right. \\ &\quad \left. - 2RC \left[1 - e^{-\frac{1}{RC} \left(t - \frac{\tau}{2} \right)} \right] \cdot 1 \left(t - \frac{\tau}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + RC \left[1 - e^{-\frac{1}{RC} (t - \tau)} \right] \cdot 1(t - \tau) \right\} = 2 \frac{EC}{\tau} \left\{ \left(1 - e^{-\frac{1}{RC} t} \right) \cdot 1(t) - \right. \\ &\quad \left. - 2 \left[1 - e^{-\frac{1}{RC} \left(t - \frac{\tau}{2} \right)} \right] \cdot 1 \left(t - \frac{\tau}{2} \right) + \left[1 - e^{-\frac{1}{RC} (t - \tau)} \right] \cdot 1(t - \tau) \right\} \end{aligned}$$

На рис. Р. 11.3 изображены кривые, соответствующие отдельным выражениям, а также общая кривая тока $i(t)$.

11.15. В данном случае задано входное напряжение

$$u_1(t) = E; U_1(p) = \frac{E}{p}$$

и ток

$$i(t) = I_0 e^{-\alpha t}; I(p) = I_0 \frac{1}{p + \alpha}$$

Входное сопротивление системы определится выражением

$$\begin{aligned} Z(p) &= \frac{U_1(p)}{I(p)} = \frac{E}{I_0} \frac{p + \alpha}{p} = \\ &= \frac{E}{I_0} \left(1 + \frac{\alpha}{p} \right). \end{aligned}$$

Заменяя $p = i\omega$ и обозначая $\frac{E}{I_0} = R$, получим

$$\widetilde{Z}(i\omega) = \frac{E}{I_0} \left(1 + \frac{\alpha}{i\omega} \right) = R + \frac{\alpha R}{i\omega}.$$

$$\text{Очевидно } \alpha R = \frac{1}{C}; \alpha = \frac{1}{RC}.$$

Окончательно получаем

$$Z(i\omega) = R + \frac{1}{i\omega C}.$$

Таким образом, для формирования экспоненциального импульса может быть использована цепь из последовательно соединённых R и C .

11.16. Расчёт вести по формулам, полученным в задаче № 11.15.

11.17. В данном случае задано входное напряжение

$$u_1(t) = E; U_1(p) = \frac{E}{p}$$

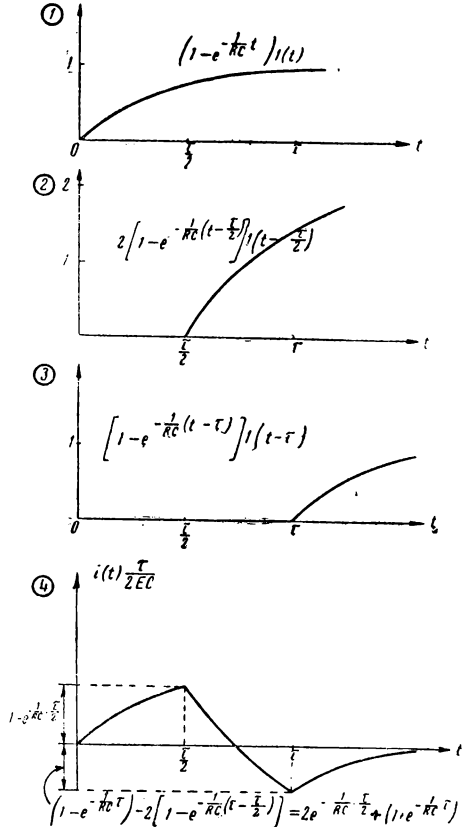


Рис. Р.11.3

и ток

$$i(t) = I_0 [1(t) - 1(t - \tau)]; \quad I(p) = I_0 \frac{1 - e^{-p\tau}}{p}$$

Входное сопротивление системы определится выражением

$$Z(p) = \frac{U(p)}{I(p)} = \frac{E}{p} \frac{p}{I_0 (1 - e^{-p\tau})} = \frac{E}{I_0} \frac{1}{1 - e^{-p\tau}}$$

Заменяя $p = i\omega$ и $\frac{E}{I_0} = R$, получим

$$Z(i\omega) = R \frac{1}{1 - e^{-i\omega\tau}}$$

Заменяя далее $e^{-i\omega\tau} = \cos \omega\tau - i \sin \omega\tau$ и избавляясь от мнимости в знаменателе, будем иметь

$$\begin{aligned} Z(i\omega) &= R \frac{1 - \cos \omega\tau - i \sin \omega\tau}{(1 - \cos \omega\tau)^2 + \sin^2 \omega\tau} = R \frac{1 - \cos \omega\tau - i \sin \omega\tau}{2 - 2\cos \omega\tau} = \\ &= \frac{R}{2} \left(1 - i \frac{\sin \omega\tau}{1 - \cos \omega\tau} \right). \end{aligned}$$

Так как

$$1 - \cos \omega\tau = 2\sin^2 \frac{\omega\tau}{2};$$

$$\sin \omega\tau = 2\sin \frac{\omega\tau}{2} \cos \frac{\omega\tau}{2},$$

то можно написать

$$Z(i\omega) = \frac{R}{2} \left(1 - i \frac{2\sin \frac{\omega\tau}{2} \cos \frac{\omega\tau}{2}}{2\sin^2 \frac{\omega\tau}{2}} \right) = \frac{R}{2} \left(1 - i \operatorname{ctg} \frac{\omega\tau}{2} \right).$$

Таким образом, заданное преобразование можно осуществить при помощи цепи, состоящей из активного сопротивления $\frac{R}{2} = \frac{E}{2I_0}$ и разомкнутой длиной линии, входное сопротивление которой равно $Z_{вх} = -i \frac{R}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega\tau}{2}$ (рис. Р. 11.4). Волновое сопротивление такой линии должно быть равно $\frac{R}{2}$, а длина, определяемая из равенства $\frac{\omega\tau}{2} = \frac{2\pi}{\lambda} l$, должна быть равна $\frac{c\tau}{2}$, где $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$.

11.19. 1 Входное напряжение и его изображение записывается в виде:

$$u(t) = U_0 \sin \omega_0 t;$$

$$U(p) = U_0 \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}.$$

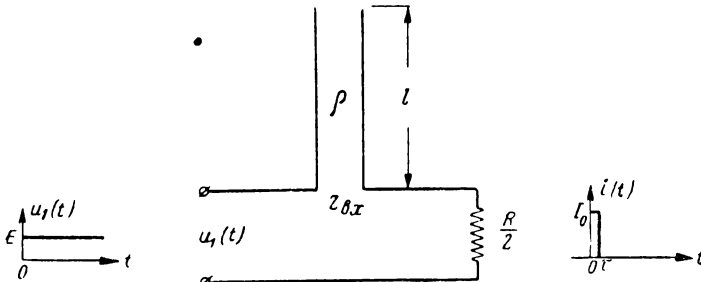


Рис. P.11.4

2. Входное сопротивление контура

$$Z(p) = pL + \frac{1}{pC} = \frac{L}{p} (p^2 + \omega_0^2).$$

Изображение тока

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{U_0 \omega_0}{L} \cdot \frac{p}{(p^2 + \omega_0^2)^2}.$$

3. Воспользуемся ф-лой (18) табл. 10.1

$$i(t) = \frac{U_0}{2L} t \sin \omega_0 t.$$

11.20. Указания к решению.

Для получения оригинала данного изображения необходимо воспользоваться теоремой умножения на p , применительно к ф-ле 18 табл. 10.1; кроме того, допустимо считать, что $\omega t \gg 1$.

11.21. 1. Исходное дифференциальное уравнение

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0.$$

Находим изображения

$$pL \overset{\leftarrow}{i} - Li(0) + R \overset{\leftarrow}{i} = 0.$$

Примем во внимание, что по условию $i(0) = I_0$ и решим уравнение относительно изображения тока

$$\overset{\leftarrow}{i} = \frac{I_0}{p + \frac{R}{L}}.$$

Оригинал выражения для тока

$$i = i_0 e^{-\frac{R}{L} t}.$$

2. Теперь решим ту же задачу вторым способом. Полагаем, что

$$i = \sum_i A_i e^{p_i t},$$

где p_i корни уравнения $Z(p) = 0$, а A_i определяются из начальных условий. В данном случае

$$Z(p) = pL + R = 0;$$

$$p = -\frac{R}{L};$$

$$i_{t=0} = A = I_0;$$

следовательно,

$$i = I_0 e^{-\frac{R}{L} t}.$$

11.23. В исходном дифференциальном уравнении

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = 0$$

заменим временные функции изображениями с учётом того, что напряжение на конденсаторе в момент $t = 0$ было равно E (ф-лы 11.2 и 11.4)

$$L p \overleftarrow{i} + R \overleftarrow{i} + \frac{1}{pC} \overleftarrow{i} - \frac{E}{p} = 0.$$

Решая последнее уравнение относительно изображения тока, получаем

$$\overleftarrow{i} = I(p) = \frac{E}{L} \frac{1}{p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2} = \frac{E}{\omega L} \frac{\omega}{(p + \alpha)^2 + \omega^2},$$

где, как обычно,

$$\alpha = \frac{R}{2L}; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}.$$

Находим (поз. 14 табл. 10.1) соответствующий данному изображению оригинал

$$i(t) = \frac{E}{\omega L} e^{-\alpha t} \sin \omega t.$$

При $\omega \gg \alpha$ приближённо

$$i(t) = \frac{E}{\omega_0 L} e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t.$$

11.24. В соответствии с рис. 11.14 дифференциальные уравнения системы имеют вид:

$$L \frac{di_1}{dt} + Ri_1 + \frac{1}{C} \int i_1 dt - M \frac{di_2}{dt} = 0;$$

$$L \frac{di_2}{dt} + Ri_2 + \frac{1}{C} \int i_2 dt - M \frac{di_1}{dt} = 0.$$

Составим изображения с учётом того, что в момент $t = 0$ на конденсаторе первого контура напряжение было равно E :

$$\rho L \overleftrightarrow{i_1} + R \overleftrightarrow{i_1} + \frac{1}{\rho C} \overleftrightarrow{i_1} - \frac{E}{\rho} - \rho M \overleftrightarrow{i_2} = 0. \quad (1)$$

$$\rho L \overleftrightarrow{i_2} + R \overleftrightarrow{i_2} + \frac{1}{\rho C} \overleftrightarrow{i_2} - \rho M \overleftrightarrow{i_1} = 0. \quad (2)$$

Для упрощения дальнейшего решения будем искать изображения и оригиналы суммы и разности токов i_1 и i_2 . С этой целью сложим и вычтем (1) и (2):

$$\rho(L - M) (\overleftrightarrow{i_1} + \overleftrightarrow{i_2}) + R (\overleftrightarrow{i_1} + \overleftrightarrow{i_2}) + \frac{1}{\rho C} (\overleftrightarrow{i_1} + \overleftrightarrow{i_2}) = \frac{E}{\rho}; \quad (3)$$

$$\rho(L + M) (\overleftrightarrow{i_1} - \overleftrightarrow{i_2}) + R (\overleftrightarrow{i_1} - \overleftrightarrow{i_2}) + \frac{1}{\rho C} (\overleftrightarrow{i_1} - \overleftrightarrow{i_2}) = \frac{E}{\rho}. \quad (4)$$

Введём обозначения:

$$\kappa = \frac{M}{L}; \quad \alpha_{1,2} = \frac{R}{2L(1 \mp \kappa)}; \quad \omega_{01,2}^2 = \frac{1}{LC(1 \mp \kappa)} = \frac{\omega_0^2}{1 \mp \kappa};$$

$$\omega_1^2 = \omega_{01}^2 - \alpha_1^2; \quad \omega_2^2 = \omega_{02}^2 - \alpha_2^2.$$

Решая с учётом введённых обозначений ур-ние (3) относительно изображения суммы токов, получим

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{i_1} + \overleftrightarrow{i_2} &= \frac{E}{L(1 - \kappa)} \cdot \frac{1}{\rho^2 + 2\alpha_1 + \omega_{01}^2} = \\ &= \frac{E}{\omega_1 L(1 - \kappa)} \cdot \frac{\omega_1}{(\rho + \alpha_1)^2 + \omega_1^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Оригинал, соответствующий этому изображению (поз. 14 табл. 10.1), будет

$$i_1(t) + i_2(t) = \frac{E}{\omega_1 L(1 - \kappa)} e^{-\alpha_1 t} \sin \omega_1 t. \quad (6)$$

Совершенно аналогично из равенства (4) получим для разности токов

$$i_1(t) - i_2(t) = \frac{E}{\omega_2 L(1 + \kappa)} e^{-\alpha_2 t} \sin \omega_2 t. \quad (7)$$

Решая (6) и (7), находим для каждого из токов:

$$i_1(t) = \frac{E}{2} \left[\frac{1}{\omega_1 L(1 - \kappa)} e^{-\alpha_1 t} \sin \omega_1 t + \frac{1}{\omega_2 L(1 + \kappa)} e^{-\alpha_2 t} \sin \omega_2 t \right];$$

$$i_2(t) = \frac{E}{2} \left[\frac{1}{\omega_1 L(1 - \kappa)} e^{-\alpha_1 t} \sin \omega_1 t - \frac{1}{\omega_2 L(1 + \kappa)} e^{-\alpha_2 t} \sin \omega_2 t \right].$$

Считая, что амплитуды первого и второго слагаемых равны (т. е. что $\kappa \ll 1$, $e^{-\alpha_1 t} \approx e^{-\alpha_2 t}$, $\omega_{\theta 1} \gg \alpha_1$, $\omega_{\theta 2} \gg \alpha_2$), легко получить приближённые формулы:

$$i_1(t) \approx \frac{E}{\omega_{\theta} L} \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right);$$

$$i_2(t) \approx \frac{E}{\omega_{\theta} L} \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right).$$

Обозначая далее $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \Delta\omega$ и отмечая, что $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_{\theta}$, окончательно получим:

$$i_1(t) \approx \frac{E}{\omega_{\theta} L} \cos \Delta\omega t \sin \omega_{\theta} t;$$

$$i_2(t) \approx \frac{E}{\omega_{\theta} L} \sin \Delta\omega t \cos \omega_{\theta} t.$$

Временная картина токов дана на рис. P.11.5.

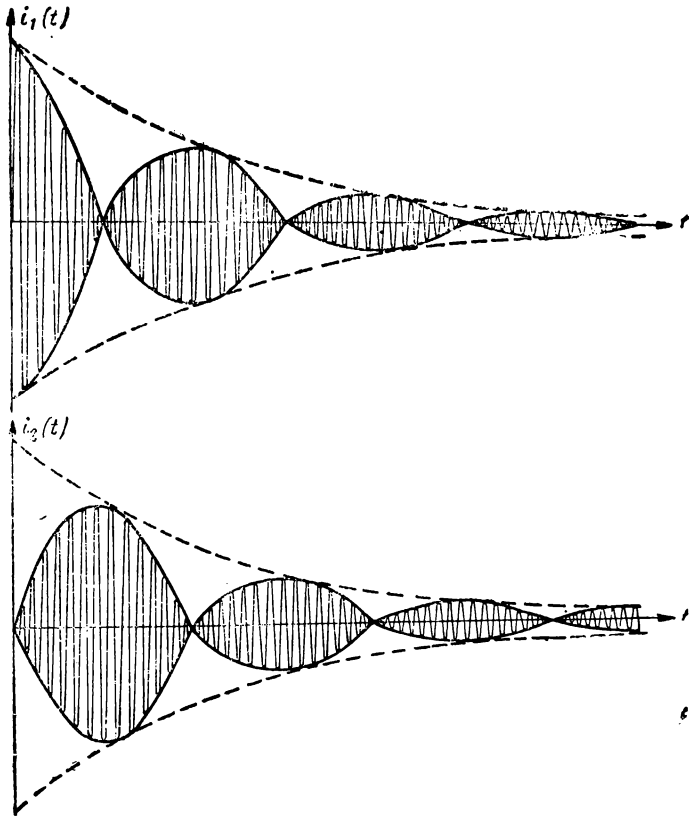


Рис. P.11.5

11.25. Подставив в выражение

$$I = I_0 e^{-at}$$

условие $I = mI_0$ при $t = t_{св}$, получим

$$m = e^{-at_{св}}.$$

Решая последнее уравнение относительно $t_{св}$, будем иметь

$$t_{св} = \frac{1}{a} \ln \frac{1}{m}.$$

$$\text{Если } m = 0,1, \quad \text{то } t_{св} \approx \frac{2,3}{a}.$$

$$\text{Если } m = 0,05, \quad \text{то } t_{св} \approx \frac{3}{a}.$$

$$\text{Если } m = 0,01, \quad \text{то } t_{св} \approx \frac{4,6}{a}.$$

11.27. Число колебаний N определится выражением

$$N = \frac{t_{св}}{T},$$

где T — период колебаний.

Так как

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{LC} = 2\pi \sqrt{120 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 10^{-12}} = \\ &= 0,69 \cdot 10^{-6} \text{ сек} = 0,69 \text{ мксек}, \end{aligned}$$

то

$$N = \frac{72}{0,69} \approx 104.$$

11.28. В исходное выражение $t_{св} \approx \frac{3}{a}$ (задача 11.25) подставим вместо a половину полосы пропускания $\Delta\omega^*$ (§ 2):

$$t_{св} = \frac{3}{\Delta\omega^*} = \frac{3}{2\pi \Delta f^*}.$$

Приближённо

$$t_{св} \approx \frac{1}{2\Delta f^*}.$$

11.29. Так как

$$\frac{\omega_0}{2\alpha} = Q; \quad \alpha = \frac{\omega_0}{2Q} = \frac{2\pi}{2QT} = \frac{\pi}{QT},$$

то

$$t_{св} = \frac{3}{\alpha} = \frac{3}{\pi} QT \approx QT$$

Итак, первая формула имеет вид

$$t_{св} \approx QT.$$

Вторая формула находится из соотношения

$$N = \frac{t_{св}}{T} = Q.$$

11.31. Как было показано в задаче 11.25,

$$t_{св} = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{m} = -\frac{\ln m}{\alpha},$$

так как

$$t_{св} = NT,$$

то

$$N = \frac{t_{св}}{T} = -\frac{\ln m}{\alpha T}.$$

По условию задачи $N = Q$; следовательно,

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{1}{2\alpha} = -\frac{\ln m}{\alpha T},$$

откуда

$$\ln m = \pi$$

и

$$m = e^{-\pi} = 0,0432.$$

Таким образом, если длительность свободного процесса определять на уровне $e^{-\pi}$, т. е. 4,32%, формула

$$Q = N$$

будет точной.

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 12

12.1. В данном случае установившийся ток равен нулю; свободный ток (задача 11.22) определяется формулой

$$i_{св} = I_0 e^{-\frac{1}{RC}t}.$$

Так как $t_{уст} = 0$, ток переходного режима i совпадает с током свободного режима.

Определим начальное значение свободного тока I_0 .

Согласно правилу 2 (стр. 133) в момент $t = 0$ напряжение $u_C = 0$; следовательно, $iR = E$; отсюда, так как при $t = 0$ $i = I_0$, получаем, что $I_0 = \frac{E}{R}$; следовательно,

$$i = \frac{E}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

12.2. В данном случае установившийся ток равен

$$i_{ycm} = \frac{E}{R},$$

а свободный ток изменяется по закону (задача 11.21)

$$i_{cb} = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Начальное значение I_0 свободного тока находится по правилу 1 (стр. 134)

$$I_0 = -\frac{E}{R},$$

следовательно,

$$i = i_{ycm} + i_{cb} = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

12.3. В течение отрезка времени $0 < t < \tau$ ток будет меняться по закону переходного процесса¹⁾ (задача 12.1)

$$i_1 = \frac{E}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} \quad (0 < t < \tau).$$

В момент τ начнётся свободный процесс, причём ток свободного процесса будет направлен в другую сторону и изменяться по тому же закону:

$i_2 = I_0 e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)}$. Определим I_0 , исходя из того, что при $t = \tau$ свободный процесс начнётся с напряжения на конденсаторе, равного

$$E - i_1(\tau)R = E - E e^{-\frac{\tau}{RC}} = E \left(1 - e^{-\frac{\tau}{RC}} \right);$$

ток

$$I_0 = -\frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{\tau}{RC}} \right).$$

Следовательно, ток при $t > \tau$ будет изменяться по закону

$$i_2 = -\frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{\tau}{RC}} \right) e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} \quad (t > \tau).$$

Сделанные выкладки иллюстрируются рис. Р. 12.1.

Теперь сделаем то же решение, рассматривая прямоугольный импульс, как разность двух постоянных напряжений, сдвинутых друг относительно друга на время τ (рис. Р.12.2.)

При подаче напряжения u_1 ток будет равен

$$i_1 = \frac{E}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} \quad (t > 0).$$

¹⁾ В данном случае переходный процесс совпадает со свободным процессом.

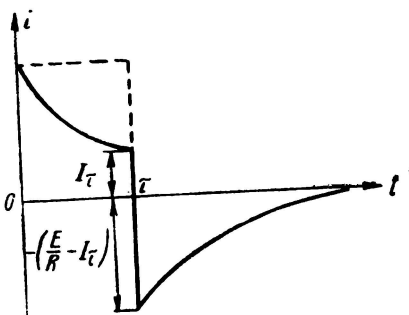


Рис. Р.12.1

При подаче напряжения u_2 ток будет равен

$$i_2 = \frac{E}{R} e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} \quad (t > \tau).$$

Рассматривая ток i , вызываемый суммарным действием обоих напряжений u_1 и u_2 , замечаем, что в интервале $0 < t < \tau$, ток i равен току i_1 , а в интервале $\tau < t < \infty$ ток i равен разности токов i_1 и i_2 (рис. Р.12.3):

$$\begin{aligned} i = i_1 - i_2 &= \frac{E}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} - \frac{E}{R} e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} \\ &= \frac{E}{R} \left(e^{-\frac{t}{RC}} - 1 \right) e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} \end{aligned}$$

или

$$i = -\frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}\tau} \right) e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)},$$

т. е. получим тот же результат.

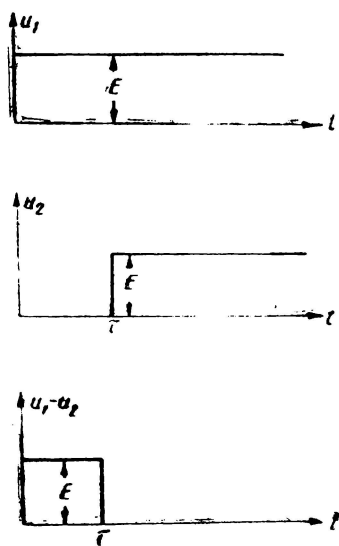


Рис. Р.12.2

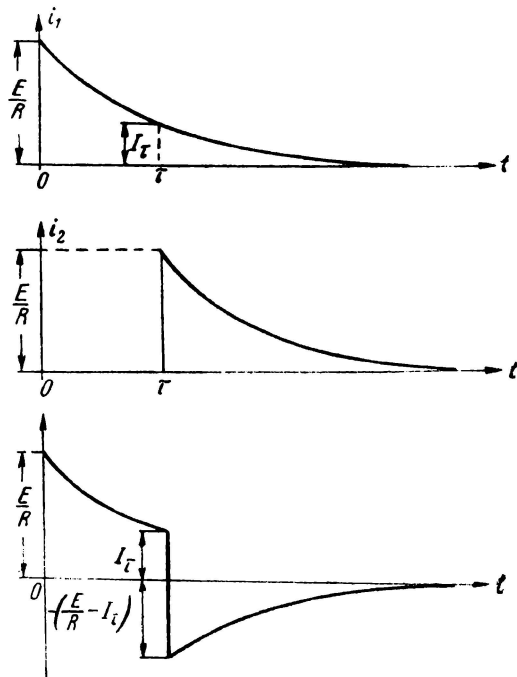


Рис. Р.12.3

12.6. В период времени $0 < t < \delta$ изменение тока в контуре будет происходить по закону (задача 12.5)

$$i = \frac{U}{R} (1 - e^{-\alpha t}) \sin \omega_0 t \quad (0 < t < \delta).$$

В момент времени $t = \delta$ амплитуда тока в контуре будет равна

$$I_\delta = \frac{U}{R} (1 - e^{-\alpha \delta}) \quad (t = \delta).$$

При $t > \delta$ будет иметь место свободный процесс, начальная амплитуда которого будет равна I_δ , т. е.

$$i = I_\delta e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t.$$

Составляя полученные результаты, получаем кривую (рис. Р.12.4).

12.7. В данном случае установившийся ток будет равен

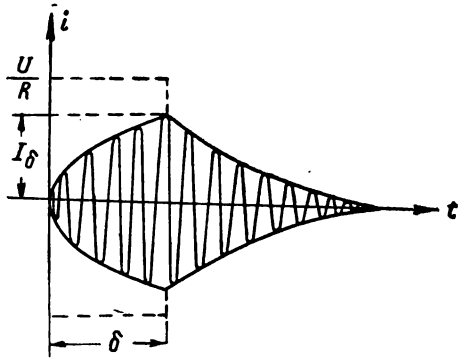


Рис. Р.12.4

$$i_{уст} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}} \sin \omega t = \frac{U}{R\sqrt{1 + \xi^2}} \sin \omega t,$$

а свободный ток, появившийся в момент включения (правило 3),

$$i_{св} = - \frac{U}{R\sqrt{1 + \xi^2}} e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t.$$

Фазы установившегося и свободного токов одинаковы (задача 12.13) и поэтому их можно не писать.

В период времени от нуля до δ ток в контуре будет определяться выражением

$$i = i_{уст} + i_{св} = \frac{U}{R\sqrt{1 + \xi^2}} (\sin \omega t - e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t). \quad (1)$$

Приведём эти два колебания с разными частотами к одному колебанию с частотой ω_0 и другим законом изменения амплитуды.

Так как

$$\sin \omega t = \sin (\omega_0 + \Delta \omega) t = \sin \omega_0 t \cos \Delta \omega t + \cos \omega_0 t \sin \Delta \omega t,$$

то можно написать

$$i = \frac{U}{R\sqrt{1 + \xi^2}} \left[(\cos \Delta \omega t - e^{-\alpha t}) \sin \omega_0 t + \sin \Delta \omega t \cos \omega_0 t \right].$$

Последнему выражению можно также придать и такой вид

$$i = \frac{U}{R\sqrt{1 + \xi^2}} \sqrt{(\cos \Delta \omega t - e^{-\alpha t})^2 + \sin^2 \Delta \omega t} \sin (\omega_0 t + \gamma),$$

где

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sin \Delta \omega t}{\cos \Delta \omega t - e^{-\alpha t}}$$

Открывая скобки в подкоренном выражении, получим следующий закон изменения амплитуды тока:

$$I = \frac{U}{R\sqrt{1+\xi^2}} \sqrt{1 - 2\cos \Delta\omega t \cdot e^{-\alpha t} + e^{-2\alpha t}}. \quad (3)$$

При $\Delta\omega = 0$ последнее выражение переходит в выражение для настроенного контура, полученное в задаче 12.5.

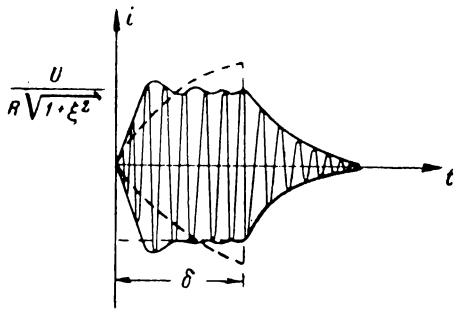


Рис. Р.12.5

Итак, за время от нуля до δ ток будет изменяться по этому закону; с момента $t = \delta$ начнётся свободный процесс (переносим начало координат в точку $t = \delta$)

$$i = I_\delta e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t,$$

причём I_δ находится из выражения (3) при подстановке $t = \delta$.

Полученные выражения и иллюстрируются графиком рис. Р. 12.5.

Из графика видно, что расстройка контура уменьшает значение установившегося тока; однако при этом увеличивается крутизна переднего фронта. По-

этому при приёме коротких импульсов расстройка контура может оказать положительное влияние.

12.8. В период времени от нуля до δ имеем:

$$i_{уст} = \frac{U}{R_{экв}} \sin \omega_0 t = I_0 \sin \omega_0 t;$$

$$i_{св}^1) = - \frac{U}{R_{экв}} e^{-\alpha t} \cos \Delta\omega t \sin \omega_0 t = - I_0 e^{-\alpha t} \cos \Delta\omega t \sin \omega_0 t.$$

Следовательно,

$$i = i_{уст} + i_{св} = I_0 (1 - e^{-\alpha t} \cos \Delta\omega t) \sin \omega_0 t. \quad (1)$$

В период времени $t > \delta$ ток будет равен (перенесём начало координат в точку $t = \delta$)

$$i = I_\delta e^{-\alpha t} \cos \Delta\omega t \sin \omega_0 t_0. \quad (2)$$

Составляя выражения (1) и (2), получаем полную картину изменения тока в системе (рис. Р.12.6).

12.9. В данном случае для периода $0 < t < \delta$ будет:

$$i_{уст} = \frac{U}{Z_{экв}} \sin \omega t = I_0 \sin (\omega_0 + \Omega) t = I_0 (\cos \Omega t \sin \omega_0 t + \sin \Omega t \cdot \cos \omega_0 t);$$

$$i_{св} = - I_0 e^{-\alpha t} \cos \Delta\omega t \sin \omega_0 t.$$

Ток переходного режима будет равен

$$i = i_{уст} + i_{св} = I_0 [(\cos \Omega t - e^{-\alpha t} \cos \Delta\omega t) \sin \omega_0 t + \sin \Omega t \cos \omega_0 t].$$

1) См. задачу 11.24; $\Delta\omega = \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega_2)$; $\omega_{1,2} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 \pm \kappa}}$

Последнему выражению можно придать более удобный вид

$$i = I_0 \sqrt{(\cos \Omega t - e^{-\alpha t} \cos \Delta \omega t)^2 + \sin^2 \Omega t} \sin(\omega_0 t + \gamma),$$

где

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sin \Omega t}{\cos \Omega t - e^{-\alpha t} \cos \Delta \omega t}.$$

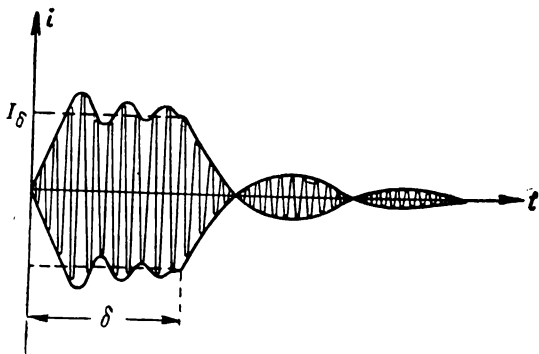


Рис. P.12.6

Раскрывая скобки в подкоренном выражении для амплитуды тока, получаем формулу

$$I(t) = I_0 \sqrt{1 - 2e^{-\alpha t} \cos \Omega t \cdot \cos \Delta \omega t + e^{-2\alpha t} \cos^2 \Delta \omega t}.$$

В период времени $t > \delta$ изменение тока будет происходить в соответствии с выражением для свободного процесса (см. предыдущую задачу) по закону (с учётом переноса начала координат в точку $t = \delta$):

$$i = I_\delta e^{-\alpha t} \cos \Delta \omega t \sin \omega_0 t.$$

12.10. Составляем исходное дифференциальное уравнение:

$$u_C = u - iR = u - C \frac{du_C}{dt} R.$$

или

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = \frac{1}{RC} u.$$

Для отрезка времени $0 < t < \frac{T}{2}$, $u = E$ (рис. P.12.7) и решение дифференциального уравнения, составленное наложением свободного и установившегося режимов будет

$$u_C = A_1 e^{-\frac{1}{RC} t} + E \left(0 < t < \frac{T}{2} \right).$$

Для отрезка времени $\frac{T}{2} < t < T$, $u = -E$ и решение имеет вид

$$u_C = A_2 e^{-\frac{1}{RC} t} - E \left(\frac{T}{2} < t < T \right).$$

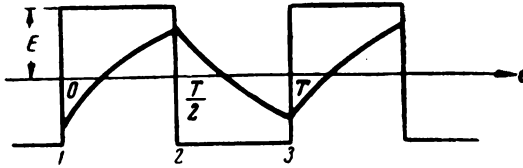


Рис. P.12.7

Определим постоянные A_1 и A_2 , исходя из условий равенства напряжений в точках стыка (точки 1, 2 и 3 на рис. P.12.7):

$$u_1 = A_1 e^{-\frac{1}{RC} \cdot 0} + E; \quad (1)$$

$$u_2 = u_1 = A_2 e^{-\frac{1}{RC} \frac{T}{2}} - E; \quad (2)$$

$$u_2 = A_1 e^{-\frac{1}{RC} \frac{T}{2}} + E; \quad (3)$$

$$u_3 = A_2 e^{-\frac{1}{RC} \cdot 0} - E. \quad (4)$$

Из сопоставления (1) и (2) получаем

$$A_1 + E = A_2 e^{-\frac{1}{RC} \frac{T}{2}} - E. \quad (5)$$

Из сопоставления (3) и (4):

$$A_1 e^{-\frac{1}{RC} \frac{T}{2}} + E = A_2 - E. \quad (6)$$

Сравнение (5) и (6) даёт, что

$$A_1 = A = -A_2.$$

Из (5) получаем

$$A = -2 \frac{E}{1 - e^{-\frac{1}{RC} \frac{T}{2}}}.$$

Следовательно, для первого участка

$$u_C = -2 \frac{E}{1 - e^{-\frac{1}{RC} \frac{T}{2}}} e^{-\frac{1}{RC} t} + E$$

или

$$u_C = E \left(1 - \frac{2e^{-\frac{1}{RC}t}}{1 - e^{-\frac{1}{RC}\frac{T}{2}}} \right) \quad \left(0 < t < \frac{T}{2} \right).$$

Для второго участка

$$u_C = +2 \frac{E \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}}{1 - e^{-\frac{1}{RC}\frac{T}{2}}} - E$$

или

$$u_C = -E \left(1 - \frac{2e^{-\frac{1}{RC}t}}{1 - e^{-\frac{1}{RC}\frac{T}{2}}} \right) \quad \left(\frac{T}{2} < t < T \right).$$

12.12. Известно, что если на цепь, состоящую из R и L , подаётся в момент $t = 0$ синусоидальное напряжение

$$u = U \sin(\omega t + \psi),$$

то ток в этой цепи будет равен

$$i = i_{ycm} + i_{cs},$$

где

$$i_{ycm} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \psi - \varphi);$$

$$i_{cs} = -\frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{-a t} \sin(\psi - \varphi);$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}; \quad a = \frac{R}{L}.$$

Подставляя $t = 0$, убеждаемся в том, что начальное значение свободного тока равно и противоположно по знаку начальному значению установившегося тока.

Для цепи RC аналогичное обоснование (правило 2) можно построить, используя ф-лу (5.37)¹⁾.

12.13. Известно, что если на колебательный контур L , C , R подаётся в момент $t = 0$ синусоидальное напряжение

$$u = U \sin(\omega t + \psi),$$

¹⁾ А. В. Нетушил, С. В. Страхов. „Основы электротехники“, ч. II, Госэнергоиздат, стр. 115, ф-ла (5.18) и стр. 119.

то ток в контуре будет определяться выражением (А. В. Нетушил, С. В. Страхов, стр. 130, ф-ла 5.95)

$$i = i_{ycm} + i_{cс},$$

где

$$i_{ycm} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}} \sin(\omega t + \psi - \varphi);$$

$$i_{cс} = -\frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}} \frac{1}{\omega \omega_0 LC} \cos(\psi - \varphi) e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t + \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}} \times$$

$$\times \frac{\sin(\psi - \varphi)}{\sin \gamma} e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t - \gamma);$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R}; \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{\omega_0}{\alpha}.$$

В радиотехнических контурах (см. условие задачи) $\omega_0 \gg \alpha$ и, следовательно, $\gamma \approx \frac{\pi}{2}$. Считая, кроме того, что расстройки невелики, т. е. $\omega \omega_0 LC \approx 1$, можно написать для свободного тока:

$$i_{cс} = -\frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}} e^{-\alpha t} \cos(\psi - \varphi) \sin \omega_0 t - \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}} e^{-\alpha t} \times$$

$$\times \sin(\psi - \varphi) \cos \omega_0 t = -\frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}} e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t + \psi - \varphi).$$

Значение огибающей свободного тока равно и противоположно по знаку значению огибающей установившегося тока в момент $t = 0$ при любой фазе внешнего напряжения.

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 13

13.1. В данном случае целесообразно воспользоваться первой ф-лой (ф-ла 13.1)

$$u_2(t) = u_1(0) \kappa(t) + \int_0^t u_1'(\tau) \kappa(t - \tau) d\tau.$$

Составим необходимые данные по условию задачи:

1) $u_1(0) = 0;$

2) $u_1(\tau) = b \tau; \quad u_1'(\tau) = b;$

3) $\kappa(t) = e^{-\alpha t}; \quad \kappa(t - \tau) = e^{-\alpha(t - \tau)} = e^{-\alpha t} e^{\alpha \tau}; \quad \alpha = \frac{1}{RC}.$

Подставляем в основную формулу и производим интегрирование:

$$u_2(t) = 0 + \int_0^t b e^{-\alpha t} e^{\alpha \tau} d\tau = b e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha \tau} d\tau = b e^{-\alpha t} \left. \frac{1}{\alpha} e^{\alpha \tau} \right|_0^t =$$

$$= b e^{-\alpha t} \frac{1}{\alpha} (e^{\alpha t} - 1) = \frac{b}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) = bRC (1 - e^{-\alpha t}).$$

13.3. Переходная проводимость для цепи RL (схема 2 и 4 табл. 13.1) равна

$$y(t) = \frac{1}{R} (1 - e^{-\alpha t}), \quad \alpha = \frac{R}{L}.$$

В данном случае целесообразно воспользоваться ф-лой (13.2), так как, во-первых, при дифференцировании $y(t)$ выражение упростится и, во-вторых, $y(0) = 0$.

Таким образом, расчётная формула примет вид

$$\begin{aligned} i(t) &= u_1(t) y(0) + \int_0^t u_1(\tau) y'(t-\tau) d\tau = \int_0^t E e^{\beta\tau} \frac{\alpha}{R} e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = \\ &= \frac{E}{R} \alpha e^{-\alpha t} \int_0^t e^{(\beta+\alpha)\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Выполняя интегрирование, получим

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{E}{R} e^{-\alpha t} \left. \frac{\alpha}{\beta+\alpha} e^{(\beta+\alpha)\tau} \right|_0^t = \frac{E}{R} \frac{\alpha}{\beta+\alpha} e^{-\alpha t} [e^{(\beta+\alpha)t} - 1] = \\ &= \frac{E}{R} \frac{\alpha}{\beta+\alpha} e^{\beta t} [1 - e^{-(\alpha+\beta)t}]. \end{aligned}$$

Итак,

$$i(t) = \frac{E}{R} \frac{\alpha}{\beta+\alpha} e^{\beta t} [1 - e^{-(\alpha+\beta)t}].$$

13.6. Аналитическое выражение прямоугольного импульса (§ 10) имеет вид

$$u_1(t) = E [1(t) - 1(t-\delta)].$$

Будем искать выходное напряжение от каждого воздействия в отдельности и затем просуммируем их.

В данном случае $\kappa(t) = e^{-\frac{1}{RC}t}$.

Выходное напряжение, вызванное воздействием $E \cdot 1(t)$, будет равно

$$E e^{-\frac{1}{RC}t} \cdot 1(t).$$

Выходное напряжение, вызванное воздействием $-E \cdot 1(t-\delta)$, будет равно

$$-E \cdot 1(t-\delta) e^{-\frac{1}{RC}(t-\delta)}.$$

Выходное напряжение, равное сумме двух частных напряжений, будет равно

$$u_2(t) = E \left[1(t) e^{-\frac{1}{RC}t} - 1(t-\delta) e^{-\frac{1}{RC}(t-\delta)} \right].$$

Решение этой задачи рекомендуется сравнить с решением задачи 11.10.

13.8. Введём обозначения:

$$\frac{2E}{\delta} = b; \quad \frac{1}{RC} = \alpha;$$

выходное напряжение может быть записано в виде суммы трёх напряжений:

$$u_1(t) = bt \cdot 1(t) - 2b \left(t - \frac{\delta}{2} \right) \cdot 1 \left(t - \frac{\delta}{2} \right) + b(t - \delta) \cdot 1(t - \delta).$$

Найдём выходное напряжение от каждого воздействия, учтя результаты задачи 13.1:

$$u_{2I} = \frac{b}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) \cdot 1(t);$$

$$u_{2II} = -\frac{2b}{\alpha} \left[1 - e^{-\alpha \left(t - \frac{\delta}{2} \right)} \right] \cdot 1 \left(t - \frac{\delta}{2} \right);$$

$$u_{2III} = \frac{b}{\alpha} \left[1 - e^{-\alpha (t - \delta)} \right] \cdot 1(t - \delta).$$

Закон изменения выходного напряжения легко получить, просуммировав все три кривые.

Аналогичные построения были проделаны при решении задачи 11.14.

13.9. Выходное напряжение может быть представлено в виде суммы четырёх напряжений

$$u_1(t) = P \cdot 1(t) + (E - P) \cdot 1(t - \Delta) - (E - P) 1(t - \delta + \Delta) - P \cdot 1(t - \delta).$$

Переходная характеристика $\kappa(t) = e^{-\alpha t}$; $\alpha = \frac{1}{RC}$.

Выходное напряжение будет

$$u_2(t) = P e^{-\alpha t} 1(t) + (E - P) e^{-\alpha (t - \Delta)} 1(t - \Delta) - (E - P) e^{-\alpha (t - \delta + \Delta)} \times \\ \times 1(t - \delta + \Delta) - P e^{-\alpha (t - \delta)} 1(t - \delta).$$

График, на котором схематически показано суммирование четырёх выходных напряжений, показан на рис. P.13.1.

13.10. В данном случае

$$\kappa(t) = \cos \omega_0 t.$$

Воспользуемся ф-лой (13.1).

$$u_2(t) = u_1(0) \kappa(t) + \int_0^t u_1'(\tau) \kappa(t - \tau) d\tau = \int_0^t b \cos \omega_0 (t - \tau) d\tau = \\ = -\frac{b}{\omega_0} \left| \sin \omega_0 (t - \tau) \right|_0^t = -\frac{b}{\omega_0} (0 - \sin \omega_0 t).$$

Итак

$$u_2(t) = \frac{b}{\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

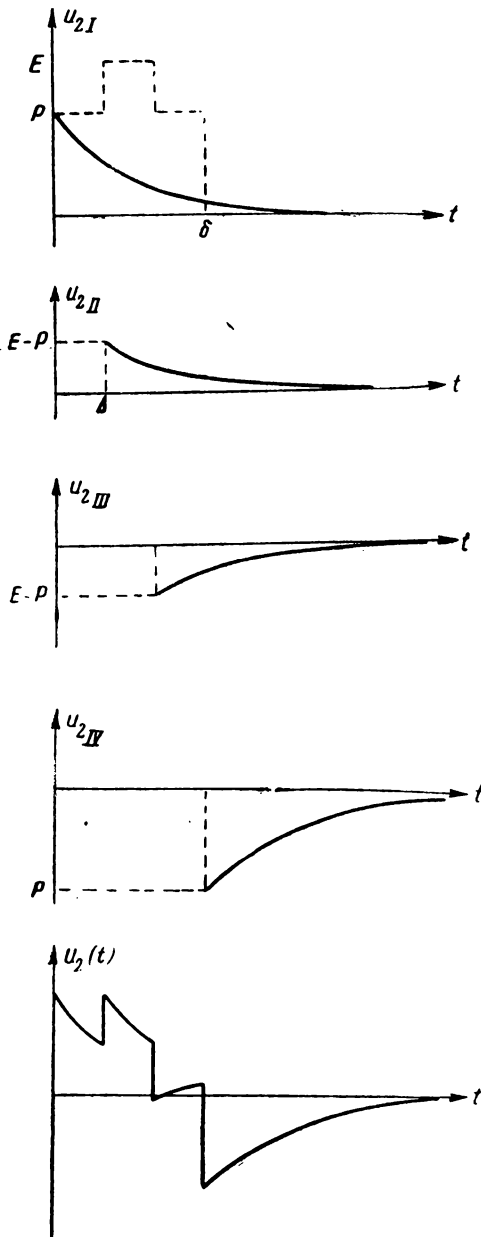


Рис. P.13.1

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 14

14.1. В данном случае

$$I(t) = I_0 e^{-\alpha t}.$$

Проверим условие (14.2)

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\alpha I_0 e^{-\alpha t} = -\alpha I(t),$$

по этому условию

$$\alpha I(t) \ll \omega_0 I(t),$$

т. е. амплитуда будет меняться медленно, если

$$\alpha \ll \omega_0$$

или, так как

$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha},$$

то

$$Q \gg 1.$$

Легко убедиться, что второе неравенство (14.2) также выполняется при том же условии.

14.4. Вычисление проводим по ф-ле (14.6):

$$I(t) = e^{-\alpha t} \left[\frac{1}{2L} \int e^{\alpha t} U_0 dt + C \right] = e^{-\alpha t} \left[\frac{U_0}{2\alpha L} e^{\alpha t} + C \right] = \frac{U_0}{R} + C e^{-\alpha t}.$$

Постоянную C определяем из условия: при $t = 0$, $I(t) = 0$. Следовательно, $C = -\frac{U_0}{R}$. Окончательно

$$I(t) = \frac{U_0}{R} (1 - e^{-\alpha t}),$$

$$i = \frac{U_0}{R} (1 - e^{-\alpha t}) \sin \omega_0 t.$$

Если $U_0 = 0$, как легко видеть из ф-лы (14.6)

$$I(t) = C \cdot e^{-\alpha t}$$

Если далее при $t = 0$, $I(t) = I_0$, то в этом случае

$$I(t) = I_0 e^{-\alpha t}.$$

14.5. Подставим $U(t)$ в ф-лу (14.6)

$$I(t) = e^{-\alpha t} \left[\frac{1}{2L} \int e^{\alpha t} U_0 (1 + m \sin \Omega t) dt + C \right].$$

Пользуясь формулами табл. 14.1, вычисляем интегралы; в результате получаем

$$I(t) = \frac{U_0}{R} + \frac{U_0}{R} m \frac{\alpha}{\alpha^2 + \Omega^2} (\alpha \sin \Omega t - \Omega \cos \Omega t) + C e^{-\alpha t}.$$

Интересуясь, по условию задачи, только установившимся режимом ($t = \infty$), последний член можно опустить.

Выполнив далее простое преобразование:

$$a \sin \Omega t - \Omega \cos \Omega t = \sqrt{a^2 + \Omega^2} \sin(\Omega t - \varphi),$$

где $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Omega}{a}$, последнему выражению можно придать вид

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \left[1 + \frac{m}{\sqrt{1 + \xi^2}} \sin(\Omega t - \varphi) \right],$$

где $\xi = \frac{\Omega}{a}$.

(Сравните эту задачу с задачей 8.8).

14.6. Решение этой задачи легко провести на основе результатов, полученных в задаче 14.4.

В интервале времени $0 < t < \delta$ действует огибающая $U(t) = U_0$ и, следовательно, огибающая тока будет меняться по закону

$$I(t) = \frac{U_0}{R} (1 - e^{-at}) \quad (0 < t < \delta).$$

В интервале времени $\delta < t < \infty$ действует огибающая $U(t) = 0$ и, следовательно, огибающая тока будет меняться по закону

$$I(t) = I_0 e^{-at} \quad (\delta < t < \infty).$$

В данном случае начальное значение тока I_0 равно (рис. Р. 14.1) I_δ

$$I_\delta = \frac{U_0}{R} (1 - e^{-a\delta}).$$

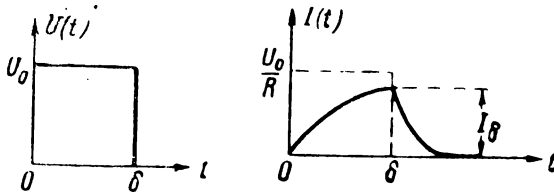


Рис. Р.14.1

14.9- Составляем выражение для огибающей входного напряжения, пользуясь ис. 14.4:

$$U(t) = U_0 - \frac{U_0}{\delta} t = U_0 \left(1 - \frac{t}{\delta} \right) \quad (0 < t < \delta);$$

$$U(t) = 0 \quad (\delta < t < \infty).$$

Для интервала времени $0 < t < \delta$ получаем:

$$\begin{aligned} I(t) &= e^{-\alpha t} \left[\frac{1}{2L} \int e^{\alpha t} U_0 \left(1 - \frac{t}{\delta}\right) dt + C \right] = \\ &= e^{-\alpha t} \left[\frac{1}{2L} U_0 \left(\int e^{\alpha t} dt - \frac{1}{\delta} \int t e^{\alpha t} dt \right) + C \right] = \\ &= \frac{U_0}{2\alpha L} \left[1 - \frac{1}{\alpha\delta} (\alpha t - 1) + C e^{-\alpha t} \right]. \end{aligned}$$

Определим C .

При $t = 0$, $I(t) = 0$;

$$C = -\left(\frac{1}{\alpha\delta} + 1\right).$$

Теперь, заменим $2\alpha L$ через R :

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{U_0}{R} \left[1 - \frac{t}{\delta} + \frac{1}{\alpha\delta} - \left(\frac{1}{\alpha\delta} + 1\right) e^{-\alpha t} \right] = \\ &= \frac{U_0}{R} \left[\left(1 + \frac{1}{\alpha\delta}\right) - \frac{t}{\delta} - \left(1 + \frac{1}{\alpha\delta}\right) e^{-\alpha t} \right]. \end{aligned}$$

Последнее выражение справедливо в интервале времени $0 < t < \delta$.

При $t > \delta$ огибающая тока будет равна (начало координат переносится в точку $t = \delta$)

$$I(t) = I_\delta e^{-\alpha t},$$

где I_δ вычисляется по выражению огибающей при $0 < t < \delta$ с заменой $t = \delta$.

График общей огибающей тока дан на рис. Р. 14.2.

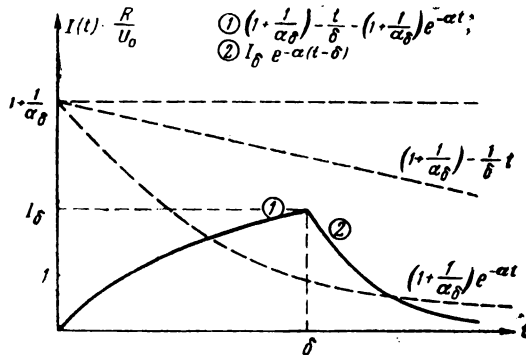


Рис. Р.14.2

14.11.

$$\begin{aligned} U(t) &= U_0 \cos \Delta\omega t \sin \omega_0 t + U_0 \sin \Delta\omega t \cos \omega_0 t = \\ &= U_1(t) \sin \omega_0 t + U_2(t) \cos \omega_0 t. \end{aligned}$$

Вычисляем огибающие токов:

$$I_1(t) = e^{-\alpha t} \left[\frac{1}{2L} \int e^{\alpha t} U_0 \cos \Delta \omega t dt + C_1 \right];$$

$$I_2(t) = e^{-\alpha t} \left[\frac{1}{2L} \int e^{\alpha t} U_0 \sin \Delta \omega t dt + C_2 \right];$$

После вычисления интегралов получаем:

$$I_1(t) = \frac{U_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} \cos(\Delta \omega t - \varphi) + C_1 e^{-\alpha t};$$

$$I_2(t) = \frac{U_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} \sin(\Delta \omega t - \varphi) + C_2 e^{-\alpha t}.$$

Здесь

$$\xi = \frac{\Delta \omega}{\alpha}; \quad \tan \varphi = \xi.$$

Найдём C_1 и C_2 , исходя из условия: при $t = 0$, $I_1(t) = I_2(t) = 0$. В результате получаем:

$$C_1 = -\frac{U_0}{R \sqrt{1 + \xi^2}} \cos \varphi;$$

$$C_2 = \frac{U_0}{R \sqrt{1 + \xi^2}} \sin \varphi.$$

Выражения для $I_1(t)$ и $I_2(t)$ теперь переписутся в виде:

$$I_1(t) = \frac{U_0}{R \sqrt{1 + \xi^2}} [\cos(\Delta \omega t - \varphi) - \cos \varphi \cdot e^{-\alpha t}],$$

$$I_2(t) = \frac{U_0}{R \sqrt{1 + \xi^2}} [\sin(\Delta \omega t - \varphi) + \sin \varphi \cdot e^{-\alpha t}].$$

Для мгновенных значений получаем:

$$i_1 = I_1(t) \sin \omega_0 t;$$

$$i_2 = I_2(t) \cos \omega_0 t.$$

Общий ток будет равен

$$i = \sqrt{I_1^2(t) + I_2^2(t)} \sin(\omega_0 t + \psi).$$

где

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{I_2(t)}{I_1(t)}.$$

Подставляя значения $I_1(t)$ и $I_2(t)$ после простых преобразований, находим

$$I(t) = \frac{U_0}{R \sqrt{1 + \xi^2}} \sqrt{1 - 2e^{-\alpha t} \cos \Delta \omega t + e^{-2\alpha t}}.$$

Сравните решение этой задачи с задачей 12.7.

14.12. Уравнение (14.3) текста

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2x \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \frac{1}{L} U(t) \omega_0 \cos \omega_0 t + \frac{1}{L} \frac{d}{dt} [U(t)] \sin \omega_0 t \quad (1)$$

решается в предположении, что для правой части справедливо неравенство

$$\frac{d}{dt} U(t) \ll \omega_0 U(t). \quad (2)$$

Если $U(t)$ имеет вид единичной функции, т. е. имеется в виду режим включения синусоидальной ЭДС, то производная в точке разрыва будет бесконечной и неравенство (1) для этой точки выполняться не будет. Нужно доказать, что невыполнение неравенства (1) в течение бесконечно малого промежутка времени не влечёт за собой изменения результатов, т. е. что за время действия скачка огибающей изменение тока в контуре будет бесконечно малым.

Так как в контуре есть реактивности, то за бесконечно малый промежуток времени значение тока в контуре измениться не может (см. § 12, стр. 132); это положение объясняет медленность изменения тока в контуре, несмотря на скачок внешнего напряжения. В дополнение к этому можно сравнить решения дифференциального уравнения для контура, находящегося под действием скачка напряжения, точным классическим методом и методом медленно меняющихся амплитуд: эти решения совпадают.

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 15

15.1. Разложение в ряд Фурье заданной последовательности имеет вид

$$I(t) = I_0 \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin \Omega t + \frac{1}{3} \sin 3\Omega t + \frac{1}{5} \sin 5\Omega t + \dots \right) \right],$$

где

$$\Omega = \frac{2\pi}{T}.$$

По условию можно отбросить все гармоники, начиная с седьмой. Таким образом, полоса частот для огибающей составляет 5%, а для радиосигналов в два раза больше, т. е. 10%.

Итак

$$2\Delta\omega^* = 10 \Omega$$

или

$$2\Delta f^* = 10F = \frac{10}{T}.$$

Так как $T = 2\tau$, то

$$2\Delta f^* = \frac{5}{\tau}.$$

15.5. По таблицам функций Бесселя¹⁾ находим, что при аргументе $M = 1$, наибольшее значение имеет функция нулевого порядка:

$$J_0(1) = 0,765.$$

¹⁾ Е. Янке и Ф. Эмде. Таблицы функций. Гостехиздат, 1948 г., стр. 300 и 301.

2% от этого значения составляет

$$0,765 \cdot 0,02 = 0,0153.$$

Из таблицы устанавливаем, что в данном случае достаточно ограничиться третьей боковой, т. е. функцией Бесселя третьего порядка.

Следовательно, при $M = 1$

$$2\Delta\omega^* = 2 \cdot 3\Omega = 6\Omega.$$

15.6. В данном случае $M = 10$. По таблицам устанавливаем, что наибольшей составляющей является восьмая боковая:

$$J_8(10) = 0,318.$$

2% от данного числа составляет:

$$0,02 \cdot 0,318 = 0,0064.$$

По таблице находим, что нужно ограничиться четырнадцатой боковой. Тогда

$$2\Delta\omega^* = 2 \cdot 14\Omega = 28\lambda,$$

$$2\Delta f^* = 28F = 28 \cdot 5 = 140 \text{ кгц.}$$

15.7. Спектральная функция (табл. 10.2) экспоненциального импульса определяется выражением

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}.$$

Распределение энергии по частотному спектру будет

$$\mathcal{E} = A \int_0^{\omega} \left[\frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega'^2}} \right]^2 d\omega,$$

где A — коэффициент пропорциональности.

Производя интегрирование, получим

$$\mathcal{E} = A \operatorname{arctg} \frac{\omega}{a}.$$

$$\text{При } \omega = \infty, \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max} = A \frac{\pi}{2}.$$

По условию нужно принять 90% энергии импульса. Составляем очевидное уравнение

$$0,9 A \frac{\pi}{2} = A \operatorname{arctg} \frac{\omega_m}{a},$$

решая которое, находим

$$\frac{\omega_m}{a} = \operatorname{tg} 1,41 = 6,17.$$

Следовательно, полоса пропускания будет равна:

$$2\Delta\omega^* = 12,34a$$

и

$$2\Delta f^* = 1,97a,$$

Вспомня, что $\alpha = 2,3 \frac{1}{\tau}$ окончательно получим

$$2\Delta f^* = \frac{4,5}{\tau}$$

15.8. Спектральная функция прямоугольного импульса (табл. 10.2) определяется выражением

$$S(\omega) = \tau \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}$$

Распределение энергии по частоте будет пропорционально интегралу

$$\mathcal{E} = A \int_0^{\frac{\omega\tau}{2}} \left(\frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} \right)^2 d\left(\frac{\omega\tau}{2}\right).$$

Имея в виду трудности, связанные с вычислением этого интеграла, можно предложить следующий путь решения.

График спектральной функции изображён на Р. 10.1. Возводя ординаты этой функции в квадрат, получим график подинтегральной функции (рис. Р. 15.1).

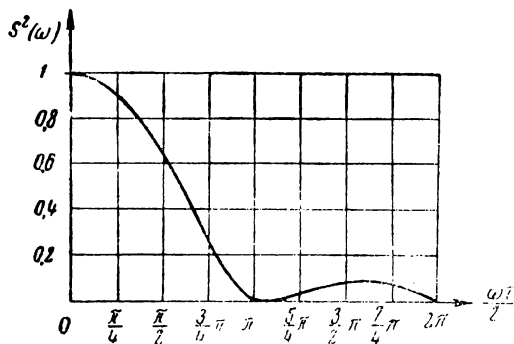


Рис. Р.15.1

Из кривой рис. Р. 15.1 мы видим, что основная энергия импульса лежит в диапазоне частот, соответствующем условию

$$\frac{\omega\tau}{2} < \frac{3}{4} \pi.$$

Энергия, содержащаяся в колебаниях частот, определяемых условием

$$\frac{\omega\tau}{2} > \frac{3}{4} \pi,$$

составляет небольшую часть от всей энергии импульса.

Расширение частотной полосы пропускания с целью приема всей энергии импульса сопряжено с увеличением влияния помех. Отсутствие определенных данных о частотном распределении помех позволяет сделать лишь тот вывод, что рабочий частотный диапазон приемного устройства должен охватить область, в которой заключена наибольшая часть энергии прямоугольного импульса. Можно предположить, что именно в этой области отношение энергии импульса к энергии помех будет иметь наибольшее значение.

Следовательно, для того, чтобы принять большую часть энергии, нужно граничную частоту определить из условия

$$\frac{\omega_m \tau}{2} = \frac{3}{4} \pi,$$

откуда

$$\omega_m = \frac{3\pi}{2\tau}$$

или

$$2\Delta\omega^* = \frac{3\pi}{\tau}$$

а

$$2\Delta f^* = \frac{1,5}{\tau}.$$

15.9. Огибающая тока в контуре нарастает по закону (задача 14.6)

$$I(t) = I_0(1 - e^{-\alpha t}).$$

Согласно условию при $t = \tau$, $I(t) = 0,95 I_0$.
Составляем очевидное уравнение

$$0,95 I_0 = I_0(1 - e^{-\alpha\tau}),$$

решение которого относительно α даёт

$$\alpha \approx \frac{3}{\tau}.$$

Так как $2\Delta\omega^* = 2\alpha$ (§ 2), то

$$2\Delta\omega^* \approx \frac{6}{\tau}$$

$$2\Delta f^* \approx \frac{1}{\tau}.$$

15.10. Воспользуемся результатом задачи 14.10 (см. также рис. 0.14.2).

Найдём максимальное значение амплитуды тока, воспользовавшись выражением

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \left[1 + \frac{1}{\alpha \frac{\delta}{2}} - \frac{a}{\alpha \frac{\delta}{2}} t - \frac{2 - e^{-\frac{\delta}{2} t}}{\alpha \frac{\delta}{2}} e^{-\alpha t} \right]. \quad (1)$$

Дифференцируя (1) по t , находим:

$$\frac{d}{dt} I(t) = \frac{U_0}{R} \left[-\frac{1}{\alpha \frac{\delta}{2}} + \frac{2 - e^{-\frac{\delta}{2} t}}{\alpha \frac{\delta}{2}} e^{-\alpha t} \right].$$

Приравнявая производную нулю, получаем

$$\left(2 - e^{-\alpha \frac{\delta}{2}}\right) e^{-\alpha t_0} = 1, \quad (2)$$

откуда

$$\alpha t_0 = \ln \left(2 - e^{-\alpha \frac{\delta}{2}}\right). \quad (3)$$

Подставляя (3) и (2) в (1), получаем значение максимального тока

$$I_{\max} = \frac{U_0}{R} \left[1 - \frac{\ln \left(2 - \frac{\alpha \delta}{2}\right)}{\alpha \frac{\delta}{2}} \right]. \quad (4)$$

По условию задачи $I_{\max} = 0,95 \frac{U_0}{R}$, следовательно,

$$\frac{\ln \left(2 - \alpha \frac{\delta}{2}\right)}{\alpha \frac{\delta}{2}} = 0,05 \quad (5)$$

Для решения этого уравнения введём обозначение

$$\frac{\alpha \delta}{2} = x$$

и перепишем его в виде

$$2 - x = e^{0,05x} \approx 1 + 0,05x$$

или

$$1 = 1,05x,$$

откуда

$$x = \frac{1}{1,05} \approx 1.$$

Следовательно,

$$\alpha = \frac{2}{\delta}$$

и

$$2\Delta\omega^* = \frac{4}{\delta};$$

$$2\Delta f^* \approx \frac{0,64}{\delta}.$$

ЧАСТЬ III

НЕЛИНЕЙНЫЕ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 16

16.3. Лампу можно рассматривать как сопротивление, подключённое параллельно R_n . Это сопротивление лампы является переменным во времени и, следовательно, эквивалентная схема может быть изображена так, как показано на рис. Р.16.1. Очевидно, эта схема является параметрической. В этом случае из рассмотрения исключается напряжение u_a , так как его действие учтено в законе изменения сопротивления лампы.

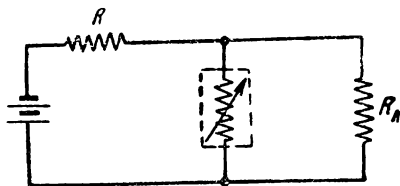


Рис. Р.16.1

Эту же схему можно рассматривать как нелинейную, зная зависимость анодного тока от напряжения u_a при данном напряжении анодной батареи E_a .

Выбор того или иного решения зависит от удобств конкретного расчёта и вида заданных условий.

16.7. Воспользовавшись ф-лой (16.5), получаем

$$i = \int \frac{du}{R(u)} = \int \frac{du}{R_0(1-qu)} = \frac{1}{R_0} \frac{1}{-q} \ln(1-qu) + C.$$

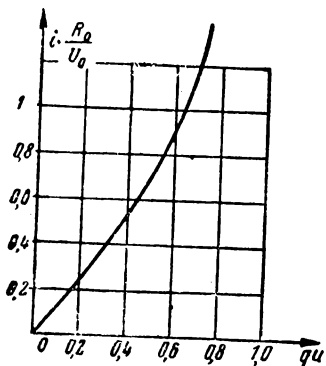


Рис. Р.16.2

Подставляя условие: при $u = 0$, $i = 0$, находим, что постоянная интегрирования $C = 0$. Следовательно,

$$i = -\frac{1}{qR_0} \ln(1-qu) = -\frac{U_0}{R_0} \ln\left(1 - \frac{u}{U_0}\right).$$

График, построенный по последнему выражению, дан рис. Р.16.2. Этот график в соответствии с условием справедлив в границах $u_1 < u < u_2$.

16.13. 1. При характеристике $u = f(i)$ имеем

$$R_{\sim} = \frac{du}{di} = \frac{d}{di} f(i) = f'(i);$$

$$R_{-} = \frac{u}{i} = \frac{f(i)}{i}.$$

Сопоставляя эти два выражения, находим

$$\frac{R_{\sim}}{R_{-}} = \frac{f'(i)}{f(i)} i$$

или

$$R_{\sim} = R_{-} \frac{f'(i)}{f(i)} i;$$

$$R_{-} = R_{\sim} \frac{f(i)}{if'(i)}.$$

2. При характеристике $i = \dot{\varphi}(u)$ получим:

$$\frac{di}{du} = \varphi'(u); \quad R_{\sim} = \frac{du}{di} = \frac{1}{\varphi'(u)}$$

$$R_{-} = \frac{u}{i} = \frac{u}{\varphi(u)}.$$

Сопоставляя, находим

$$\frac{R_{\sim}}{R_{-}} = \frac{\varphi(u)}{u \varphi'(u)}$$

или

$$R_{\sim} = R_{-} \frac{\varphi(u)}{u \varphi'(u)};$$

$$R_{-} = R_{\sim} \frac{u \varphi'(u)}{\varphi(u)}.$$

16.14. Из рис. 16.13 находим

$$R_{-} = \frac{OE}{DE} = \frac{6}{36} 10^3 = \frac{1}{6} \cdot 10^3 \text{ ом};$$

$$R_{\sim} = \frac{AB}{CB} \approx \frac{1}{12} 10^3 = \frac{1}{12} 10^3 \text{ ом}.$$

Аналитическое решение

$$R_{\sim} = \frac{du}{di} = \frac{1}{2u};$$

$$R_{-} = \frac{u}{i} = \frac{1}{u}.$$

При $u = 6$ в получаем результат, найденный графическим путём. По ф-ле (16.11) имеем

$$\frac{R_{-}}{R_{\sim}} = u \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} = u \frac{2au}{au^2} = 2.$$

16.15. Так как исходным признаком линейности является независимость параметров от напряжения или тока, найдём сопротивление данного элемента.

Для переменного тока сопротивление будет равно

$$R_{\sim} = \frac{du}{di} = \frac{1}{S}$$

и, следовательно, для переменного тока элемент является линейным
Для постоянного тока

$$R_{-} = \frac{u}{i} = \frac{u}{I_0 + Su}$$

и, следовательно, сопротивление является функцией напряжения. Однако при постоянном токе и напряжении $u = \cos pt$ и поэтому в данном случае нельзя говорить о нелинейности. Понятие нелинейности имеет смысл только для меняющихся токов и напряжений.

16.18. Из ф-лы (16.11) следует, что для выполнения поставленного условия нужно выполнить равенство

$$\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} u = 1,$$

откуда

$$\varphi(u) = u \varphi'(u).$$

Легко убедиться в том, что последнее равенство возможно только, если

$$\varphi(u) = \varphi(0) + ku,$$

т. е. характеристика должна быть линейной.

Следовательно, равенство $R_{\sim} = R_{-}$ является условием линейности системы.

16.19. Исходное равенство

$$\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2). \quad (1)$$

Возьмём от (1) частную производную по u_1

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \varphi(u_1 + u_2) = \frac{\partial}{\partial u_1} \varphi(u_1). \quad (2)$$

Возьмём от (1) и частную производную по u_2

$$\frac{\partial}{\partial u_2} \varphi(u_1 + u_2) = \frac{\partial}{\partial u_2} \varphi(u_2). \quad (3)$$

Равенства (2) и (3) выполняются тождественно, т. е. при любых значениях u_1 и u_2 ; так как равны левые части, то равны и правые части, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \varphi(u_1) = \frac{\partial}{\partial u_2} \varphi(u_2). \quad (4)$$

В последнем тождестве левая часть не зависит от u_2 , а правая от u_1 ; отсюда следует, что каждая часть равна постоянной

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \varphi(u_1) = \kappa,$$

откуда после интегрирования получаем

$$\varphi(u_1) = \kappa u_1 + C.$$

Имея в виду, что равенство справедливо для любых значений u , можно написать

$$\varphi(u) = C + ku,$$

т. е. требование (1) удовлетворяется только в линейных системах.

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 17

17.1. Пользуемся методом выбранных точек.
Накладываем на исходное выражение

$$i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2$$

- три условия: 1) $u = 0, i = 32 \text{ ма}$;
2) $u = -8 \text{ в}, i = 8 \text{ ма}$;
3) $u = -16 \text{ в}, i = 0$.

Получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} 32 &= a_0; \\ 8 &= a_0 - a_1 \cdot 8 + a_2 \cdot 64; \\ 0 &= a_0 - a_1 \cdot 16 + a_2 \cdot 256. \end{aligned}$$

Решение этой системы даёт:

$$\begin{aligned} a_0 &= 32 \text{ ма}; \\ a_1 &= 4 \frac{\text{ма}}{\text{в}}; \\ a_2 &= 0,125 \frac{\text{ма}}{\text{в}^2} \end{aligned}$$

Общее уравнение, следовательно, будет:

$$i = 32 + 4u + \frac{1}{8}u^2.$$

17.3. Перенесём начало координат в рабочую точку. Тогда общее уравнение запишется в виде

$$i_a = a_0 + a_1(u_g + |E_g|) + a_2(u_g + |E_g|)^2,$$

причём по условию $|E_g| = 2,9 \text{ в}$.

Коэффициент $a_0 = i_0$; коэффициент $a_1 = S_0$, следовательно,

$$i_a = 4,3 + 1,35(u_g + 2,9) + a_2(u_g + 2,9)^2.$$

Коэффициент a_2 определяем из условия:

$$\begin{aligned} \text{при } u_g = 1,35 \text{ в}, \quad \frac{di_a}{du_g} &= 0, \\ 0 &= 1,35 + 2a_2(1,35 + 2,9), \end{aligned}$$

откуда

$$a_2 = -\frac{1,35}{3(1,35 + 2,9)^2} = -\frac{1,35 \text{ ма}}{54 \text{ в}^2}.$$

Общее выражение характеристики лампы запишется в виде

$$i_a = 4,3 + 1,35 \left[(u_g + 2,9) - \frac{1}{54} (u_g + 2,9)^3 \right].$$

Построенная по последнему выражению характеристика изображена на рис. 17.9 пунктиром.

17.4. Составляем систему уравнений:

$$\begin{aligned} i_0 &= a_0; \\ i_1 &= a_0 + a_1 \Delta + a_2 \Delta^2; \\ i_2 &= a_0 + a_1 \Delta + a_2 \Delta^2. \end{aligned}$$

Решая эту систему, получаем:

$$\begin{aligned} a_0 &= i_0; \\ a_1 &= \frac{i_1 - i_2}{2 \Delta}; \\ a_2 &= \frac{i_1 - i_2 - 2 i_0}{2 \Delta^2}. \end{aligned}$$

17.7. Введём временно обозначение:

$$u^2 = x,$$

тогда

$$i = ax.$$

Составляем таблицу значений x и i .

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$u^2 = x$	0	1	4	9	16	25	36	49	64
	0	0,2	0,8	1,8	3,2	5,0	7,2	9,8	12,8

Строим график $i = f(x)$ (рис. Р.17.1) и убеждаемся в том, что все точки лежат на одной прямой с угловым коэффициентом $a = 0,2 \frac{\text{мА}}{\text{в}^2}$.

17.8. Указание к решению.

Ввести временно напряжение u_g , при котором $\frac{di_a}{du_g} = 0$ и $i_a = I_0$. Напряжение u_g потом исключить.

17.11. Величина I_0 находится из условия: при $u_g = 0$, $i_g = 0,1$ мкА.

Следовательно,

$$i_g = 0,1 e^{au_g}.$$

Переписав последнее выражение в виде

$$\ln \frac{i_g}{0,1} = au_g,$$

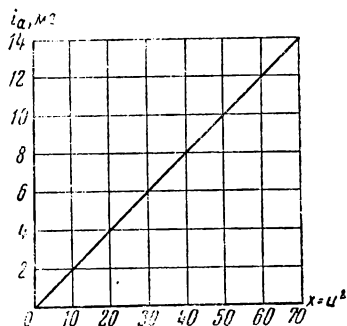


Рис. Р.17.1

можно проверить, будет ли оно соответствовать прямой линии в координатах $\ln \frac{i_g}{0,1}$, u_g и в случае положительного результата по этой прямой найти коэффициент a .

Составляем таблицу данных для построения.

u_g	0	0,3	0,4	0,6	0,8	0,9	1
$\frac{i_g}{0,1}$	1	10	50	300	1300	3000	7000
$\ln \frac{i_g}{0,1}$	0	2,3	3,91	5,7	7,16	8,0	8,85

Построенный по этим данным график изображён на рис. Р.17.2. Легко видеть, что он мало отличается от прямой. По графику находим: $a \approx 9 \frac{1}{e}$. Следовательно,

$$i_g = 0,1 e^{9u_g}$$

Проверку соответствия рассчитанной характеристики с опытными данными представляем проделать читателю.

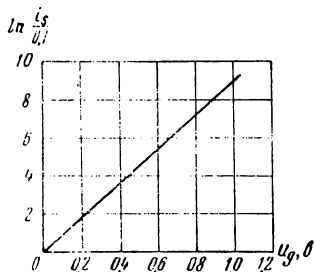


Рис. Р.17.2

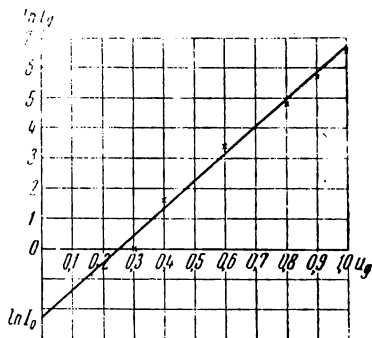


Рис. Р.17.3

17.12. Перепишем исходное выражение в виде

$$\ln i_g = \ln I_0 + au_g$$

и нанесём в координатах u_g , $\ln i_g$ точки в соответствии с условиями (рис. Р.17.3).

$u_g, в$	0,3	0,4	0,6	0,8	0,9	1
$i_g, ма$	1	5	30	130	300	700
$\ln i_g$	0	1,61	3,4	4,86	5,7	6,54

Усредняя нанесённые точки, получаем приближённо:

$$\ln I_0 = -2,3; \quad I_0 = e^{-2,3} = 0,1 \text{ мка};$$

$$a \approx 9 \frac{1}{\sigma}.$$

17.14. Введя обозначение

$$u_g + U_0 = u_d,$$

перепишем исходное выражение в виде

$$\ln i_k = \ln A + \frac{3}{2} \ln u_d.$$

Откладывая на графике с координатами $\ln u_d$, $\ln i_k$ соответствующие точки, легко установить, насколько хорошо они соответствуют прямой с угловым коэффициентом $3/2$; по этому графику непосредственно определяется $\ln A$ (рис. Р.17.4).

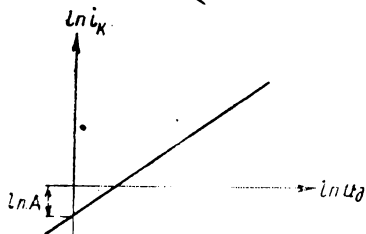


Рис. Р.17.4

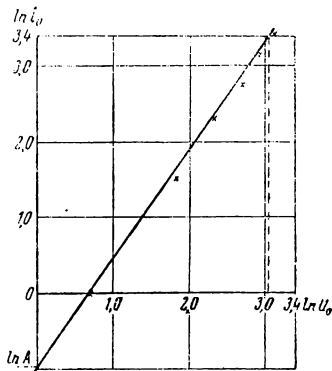


Рис. Р.17.5

17.15. Перепишем исходное выражение в виде

$$\ln i_a = \ln A + \frac{3}{2} \ln u_d,$$

где $u_d = u_g + Du_a = u_g + 16$; рассчитываем значение $\ln i_a$ и $\ln u_d$.

u_g	-14	-10	-6	-2	+2	+6
u_d	2	6	10	14	18	22
$\ln u_d$	0,69	1,79	2,3	2,64	2,89	3,09
i_a	1	4,5	10	16	24	30
$\ln i_a$	0	1,5	2,3	2,77	3,17	3,4

Нанеся табличные точки (рис. Р.17.5), мы видим, что они мало уклоняются от прямой.

Угловой коэффициент проверяем при $\ln u_d = 3,02$ (пунктирная линия на рис. Р.17.5)

$$\frac{3,4}{3,02 - 0,69} = \frac{3,4}{2,33} = 1,46 \approx 1,5.$$

Можно считать данную аппроксимацию приемлемой.

Из рис. Р.17.5 находим

$$\ln A = -0,98; \quad A = e^{-0,98} \approx 0,38.$$

Итак, окончательно

$$i_a = 0,38(u_g + 16)^{\frac{3}{4}}.$$

17.17. Подставляя закон изменения напряжения в формулу характеристики лампы, получаем

$$i_a = 32 + 4(-8 + 8 \cos \omega t) + \frac{1}{8}(-8 + 8 \cos \omega t)^3.$$

Раскрывая скобки и пользуясь формулами кратных дуг, находим:

$$I_{a0} = 12 \text{ ма};$$

$$I_{a1} = 16 \text{ ма};$$

$$I_{a2} = 4 \text{ ма}.$$

17.22. В соответствии с ф-лой (17.12) амплитуда n -й гармоники равна

$$I_{an} = a_n i_{a \text{ макс}}.$$

Находим $i_{a \text{ макс}}$ по ф лам (17.9) и (17.10):

$$i_{a \text{ макс}} = SU_g(1 - \cos \theta) = 5 \cdot 8(1 - 0,5) = 20 \text{ ма}.$$

$$\cos \theta = \frac{SE_g - I_0}{SU_g} = \frac{5 \cdot 10 - 30}{8 \cdot 5} = 0,5; \quad \theta = 60^\circ.$$

Находим по графикам рис. 17.2 значения коэффициентов:

$$a_0 \approx 0,22;$$

$$a_2 \approx 0,28;$$

$$a_1 \approx 0,39;$$

$$a_3 \approx 0,14.$$

Теперь рассчитываем I_{a0} , I_{a1} , I_{a2} и I_{a3} :

$$I_{a0} = 0,22 \cdot 20 = 4,4 \text{ ма};$$

$$I_{a1} = 0,39 \cdot 20 = 7,8 \text{ ма};$$

$$I_{a2} = 0,28 \cdot 20 = 5,6 \text{ ма};$$

$$I_{a3} = 0,14 \cdot 20 = 2,8 \text{ ма}.$$

17.27. Подставляя значение u_g в уравнение характеристики лампы, получаем

$$\begin{aligned} i_a &= \frac{I_S}{2} + \frac{I_S}{2} \sin \left(\frac{\pi}{2 \cdot 8} 8 \cdot \cos \omega t \right) = \\ &= \frac{I_S}{2} + \frac{I_S}{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} \cos \omega t \right). \end{aligned}$$

Воспользовавшись ф-лой 17.13, находим:

$$I_{a0} = \frac{I_S}{2};$$

$$I_{a1} = \frac{I_S}{2} \cdot 2 J_1 \left(\frac{\pi}{2} \right);$$

$$I_{a3} = \frac{I_S}{2} \cdot 2 J_3 \left(\frac{\pi}{2} \right).$$

По графикам рис. 17.3 находим¹⁾:

$$J_1 \left(\frac{\pi}{2} \right) \approx 0,57;$$

$$J_3 \left(\frac{\pi}{2} \right) \approx 0,08.$$

Следовательно

$$I_{a0} = \frac{I_S}{2} = 16 \text{ ма};$$

$$I_{a1} = 32 \cdot 0,57 \approx 18,2 \text{ ма};$$

$$I_{a3} = 32 \cdot 0,08 \approx 2,56 \text{ ма}.$$

17.28. Подставляя закон изменения напряжения в формулу для характеристики лампы, получаем:

$$= 0,5 \cdot e^3 (-0,5 + 0,4 \cos \omega t) = 0,5 \cdot e^{-4} \cdot e^{3,2 \cos \omega t} =$$

$$= 0,5 \cdot 0,0183 e^{3,2 \cos \omega t} = 0,00915 \cdot e^{3,2 \cos \omega t}.$$

На основании ф-лы (17.15) имеем²⁾:

$$I_{a0} = 0,00915 \cdot B_0(3,2) \approx 0,00915 \cdot 5,75 \approx 0,052 \text{ ма};$$

$$I_{a1} = 0,00915 \cdot 2B_1(3,2) \approx 0,00915 \cdot 2 \cdot 4,73 \approx 0,086 \text{ ма};$$

$$I_{a2} = 0,00915 \cdot 2B_2(3,2) \approx 0,00915 \cdot 2 \cdot 2,79 \approx 0,051 \text{ ма};$$

$$I_{a3} = 0,00915 \cdot 2B_3(3,2) \approx 0,00915 \cdot 2 \cdot 1,25 = 0,023 \text{ ма}.$$

17.31. Чтобы воспользоваться для расчёта формулами трёх ординат (ф-ла (7.16)), нужно располагать значениями i_{\max} , i_{\min} и i_0 . Непосредственно по рис. 17.17 (см. также рис. 17.5) получаем:

$$i_{\max} = 22 \text{ ма};$$

$$i_{\min} = 1 \text{ ма};$$

$$i_0 = 5 \text{ ма}$$

¹⁾ Для более точного определения значений функций Бесселя рекомендуется пользоваться таблицами: Е. Янке и Ф. Эмде. Таблица функций. Гостехиздат, 1948 г., стр. 291 — 307.

²⁾ Значение функций $B_n(x)$, найденные по рис. 17.4, могут содержать существенную ошибку. Рекомендуется пользоваться таблицами: Е. Янке и Ф. Эмде. Таблицы функций. Гостехиздат, 1948 г., стр. 342 — 343.

Следовательно:

$$I_{a0} = \frac{i_{\max} + i_{\min}}{4} + \frac{i_0}{2} = \frac{23}{4} + \frac{5}{2} = \frac{33}{4} = 8,25 \text{ ма.}$$

$$I_{a1} = \frac{i_{\max} - i_{\min}}{2} = \frac{21}{2} = 10,5 \text{ ма.}$$

$$I_{a2} = \frac{i_{\max} + i_{\min}}{4} - \frac{i_0}{2} = \frac{23}{4} - \frac{5}{2} = \frac{13}{4} = 3,25 \text{ ма.}$$

При расчёте по формулам пяти ординат [ф-ла (17.17)] нужно располагать значениями i_{\max} , i_{\min} , i_0 , i_1 , i_2 (рис. 17.6). По рис. 17.17 находим:

$$i_1 = 12 \text{ ма.}$$

$$i_2 = 1,5 \text{ ма.}$$

Выполняем расчет:

$$I_{a0} = \frac{1}{6} [(i_{\max} + i_{\min}) + 2(i_1 + i_2)] = \frac{1}{6} (23 + 27) = \frac{50}{6} = 8,34 \text{ ма.}$$

$$I_{a1} = \frac{1}{3} [(i_{\max} - i_{\min}) + (i_1 - i_2)] = \frac{1}{3} (21 + 10,5) = \frac{31,5}{3} = 10,5 \text{ ма.}$$

$$I_{a2} = \frac{i_{\max} + i_{\min}}{4} - \frac{i_0}{2} = 3,25 \text{ ма.}$$

17.34. Изменение выходного тока во времени будет происходить по закону

$$i = a_0 + a_1 U_1 \sin \omega_1 t + a_1 U_2 \sin \omega_2 t + a_2 U_1^2 \sin^2 \omega_1 t + \\ + a_2 U_2^2 \sin^2 \omega_2 t + a_2 U_1 U_2 \sin \omega_1 t \sin \omega_2 t.$$

Постоянная составляющая, амплитуды гармоник и амплитуда комбинационных колебаний будут равны:

$$I_0 = a_0 + \frac{a_2 U_1^2}{2} + \frac{a_2 U_2^2}{2};$$

$$I_{\omega_1} = a_1 U_1; \quad I_{\omega_2} = a_1 U_2;$$

$$I_{2\omega_1} = \frac{a_2 U_1^2}{2}; \quad I_{2\omega_2} = \frac{a_2 U_2^2}{2};$$

$$I_{\omega_1 - \omega_2} = I_{\omega_1 + \omega_2} = a_2 U_1 U_2.$$

Сравнение по мощности нужно проводить по формуле $\frac{I^2 R}{2}$, считая, что сопротивление R одинаково для всех частот, т. е. сравнивать между собой квадраты соответствующих амплитуд.

Мощность высших (вторых) гармоник

$$P_{\Gamma} = A \left(\frac{a_1^2 U_1^4}{4} + \frac{a_2^2 U_2^4}{4} \right) = \\ = A a_2^2 U_1^2 U_2^2 \left(\frac{U_1^2}{4 U_2^2} + \frac{U_2^2}{4 U_1^2} \right).$$

Мощность комбинационных колебаний

$$P_k = A \cdot 2a_2^2 U_1^2 U_2^2.$$

В этих выражениях A — коэффициент пропорциональности.

Сравним теперь мощность высших гармоник с мощностью комбинационных колебаний:

$$\frac{P_r}{P_k} = \frac{1}{8} \left(\frac{U_1^2}{U_2^2} + \frac{U_2^2}{U_1^2} \right).$$

Если $U_1 = U_2$, то $P_k = 4 P_r$, т. е. мощность комбинационных колебаний в 4 раза больше мощности высших гармоник.

При любых других соотношениях U_1 и U_2 влияние высших гармоник относительно больше (рис. Р.17.6).

17.37. Входное напряжение u пусть состоит из двух напряжений:

$$u = U_1 \cos \omega_1 t + U_2 \cos \omega_2 t.$$

Тогда выходной ток будет равен

$$i = I_0 e^{aU_1 \cos \omega_1 t} e^{aU_2 \cos \omega_2 t}$$

или, воспользовавшись ф-лами (17.15):

$$i = I_0 \left[B_0(aU_1) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} B_i(aU_1) \cos i \omega_1 t \right] \times \left[B_0(aU_2) + 2 \sum_{l=1}^{\infty} B_l(aU_2) \cos l \omega_2 t \right].$$

Перемножение этих рядов даёт составляющие с частотами

$$m \omega_1 \pm n \omega_2,$$

где

$$m = 0, 1, 2, 3 \dots$$

$$n = 0, 1, 2, 3 \dots$$

Если m или n равно нулю, составляющие называются гармоническими; если m и n целые числа — комбинационными.

Для постоянной составляющей получаем

$$I_{00} = I_0 B_0(aU_1) \cdot B_0(aU_2).$$

Для гармоник частоты ω_1

$$I_{m0} = 2I_0 B_0(aU_2) B_m(aU_1).$$

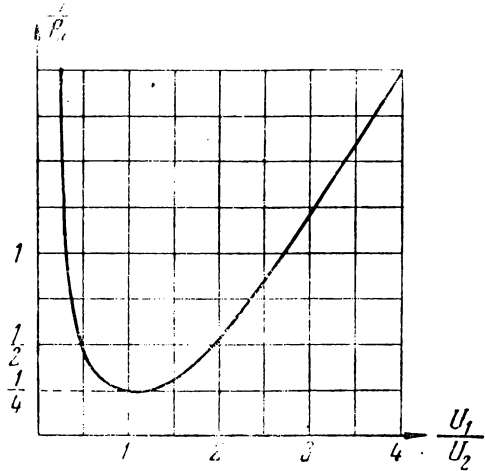


Рис. Р.17.6

Для гармоник частоты ω_0

$$I_{n\omega_0} = 2I_0 B_0(aU_1) B_n(aU_2)$$

Для комбинационных колебаний частоты $m\omega_1 \pm n\omega_2$

$$I_{mn} = 2I_0 B_m(aU_1) B_n(aU_2)$$

Последняя формула является общей и справедлива для расчёта не только комбинационных колебаний, но и гармонических и постоянной составляющих (при этом полученное по общей формуле значение постоянной составляющей нужно, как всегда, разделить пополам).

При воздействии большого числа входных колебаний аналогичным путём можно получить формулу

$$I_{m,n,\dots,k} = 2I_0 \prod_i B_i(aU_i)$$

Пользоваться этой формулой нужно с учётом указаний, сделанных выше по формуле для случая двух входных колебаний.

17.38. По ф-ле (17.18)

$$I_{11} = 2I_0 B_1(aU_1) B_1(aU_2)$$

Подставляя условия задачи, находим

$$I_{11} = 2 \cdot 0,5 \cdot B_1(10 \cdot 0,2) \cdot B_1(10 \cdot 0,1) = 1 \cdot B_1(2) B_1(1) = 1 \cdot 1,59 \cdot 0,56 = 0,89 \text{ мА.}$$

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 18

18.1. Строим нагрузочную прямую (рис. 18.6)

$$i = \frac{E - u}{R_{ан}}$$

по двум точкам: 1) при $u = 0$, $i = \frac{E}{R_{ан}}$; 2) при $i = 0$, $u = E$. Точка пересечения нагрузочной прямой с характеристикой $i = f(u)$ даёт значение тока i_0 и напряжение u_0 на нелинейном элементе:

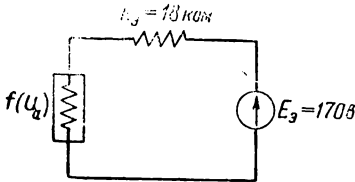


Рис. Р.18.1

$$i_0 = 160 \text{ мА;}$$

$$u_0 = 13 \text{ В.}$$

18.6. Всю правую часть схемы рис. 18.10 (правее пунктирной линии) можно заменить по теореме об эквивалентном генераторе (задача 9.7) схемой, изображённой на рис. Р.18.1.

Наносим „нагрузочную прямую“ на характеристику рис. 18.11 по формуле

$$i = \frac{E_э - u_a}{R_э} = \frac{170}{18} - \frac{1}{18} u_a \text{ мА.}$$

Точка пересечения даёт:

$$U_a \approx 92 \text{ В;}$$

$$I_a \approx 4,2 \text{ мА.}$$

18.9. Исходные уравнения:

$$E = iR + u;$$

$$u = f(i) = U_0 \operatorname{sh} qi$$

Искомые значения напряжения и тока найдутся по точке пересечения кривой $U_0 \operatorname{sh} qi$ и прямой $E - iR$.

Соответствующее построение показано на рис. Р.18.2. Из рисунка находим:

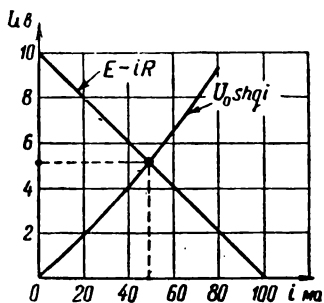


Рис. Р.18.2

$$u_1 = 5,2 \text{ в;}$$

$$i = 48 \text{ ма.}$$

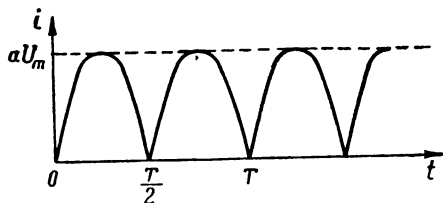


Рис. Р.18.3

18.10. Для каждого полупериода ток (рис. Р. 18.3) будет выражаться формулой

$$i = aU_m \sin \Omega t \quad \left(0 < t < \frac{T}{2} \right).$$

Разложение в ряд Фурье такой кривой известно (И. Н. Бронштейн и К. А. Семендяев. Справочник по математике, 1953 г., стр. 557):

$$i = aU_m \left[\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos 2 \Omega t}{1.3} + \frac{\cos 4 \Omega t}{3.5} + \dots \right) \right],$$

Выпрямленный ток, следовательно, будет равен

$$I_0 = \frac{2}{\pi} aU_m.$$

Наибольшая переменная составляющая будет иметь амплитуду

$$I_2 = \frac{4}{3\pi} aU_m.$$

18.12. По рис. 17.2 устанавливаем, что $\alpha_2 = \alpha_{\text{макс}} = 0,28$ при $\theta = 60^\circ$; $\cos \theta = 0,5$.

По ф-ле (17.10) находим

$$\begin{aligned} SE_g &= SU_g \cos \theta + I_0; \\ E_g &= \frac{2 \cdot 6 \cdot 0,5 + 10}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ в.} \end{aligned}$$

18.19. Если $u_g = U_0 \sin \Omega t$,
то

$$i_a = \frac{I_s}{2} \left[1 + \operatorname{th} (qU_0 \sin \Omega t) \right].$$

Это и есть уравнение трапецидальной кривой.

Чем больше будет qU_0 , т. е. чем существенней неравенство

$$qU_0 > 1,$$

тем ближе будет данная кривая к прямоугольной; крутые фронты будут при условии

$$U_0 \gg \frac{1}{q}.$$

18.20. Когда диод заперт, т. е. когда $u_1 < E$, $i = 0$ и выходное напряжение повторяет входное $u_2 = u_1$.

Когда ток через диод проходит, выходное напряжение равно

$$u_2 = u_1 - iR;$$

но ток i равен

$$i = \frac{u_1 - E}{R + R_\partial};$$

следовательно,

$$u_2 = u_1 - \frac{u_1 - E}{R + R_\partial} R = u_1 \frac{1}{1 + \frac{R}{R_\partial}} + E \frac{1}{1 + \frac{R_\partial}{R}}.$$

Из последнего выражения легко составить формулу для расчёта сопротивления R :

$$R = R_\partial \frac{u_1 - u_2}{u_2 - E}.$$

18.21. Очевидно, $E_1 = 10$ в; $E_2 = 10$ в; полярность показана на схеме рис. 18.20.

Расчет сопротивления R производим по формуле (задача 18.20)

$$R = R_\partial \frac{u_1 - u_2}{u_2 - E}.$$

В данном случае:

$$R_\partial = 250 \text{ ом (рис. 18.21);}$$

$$u_1 = 50 \text{ в;}$$

$$E = 10 \text{ в;}$$

$$u_2 = 10,5 \text{ в;}$$

$$R = 250 \frac{50 - 10,5}{10,5 - 10} = 19,75 \text{ ком.}$$

18.23. Изменение анодного тока во времени будет происходить по закону

$$i = a_0 + a_1 (U_\omega \sin \omega t + U_\Omega \sin \Omega t) + a_2 (U_\omega \sin \omega t + U_\Omega \sin \Omega t)^2.$$

Открывая скобки и сохраняя только члены, содержащие множитель $\sin \omega t$ (контур настроен на частоту ω), получим

$$\begin{aligned} i_\omega &= a_1 U_\omega \sin \omega t + 2a_2 U_\Omega U_\omega \sin \Omega t \sin \omega t = \\ &= a_1 U_\omega \left(1 + \frac{2a_2 U_\Omega}{a_1} \sin \Omega t \right) \sin \omega t. \end{aligned}$$

Таким образом, амплитуда первой гармоники равна

$$I_{a1} = a_1 U_{\omega} \left(1 + \frac{2a_2 U_{\Omega}}{a_1} \sin \Omega t \right)$$

и связана линейной зависимостью с модулирующим напряжением

$$u_{\Omega} = U_{\Omega} \sin \Omega t.$$

18.35. Среди комбинационных колебаний, являющихся следствием двух исходных колебаний:

$$\frac{U_0 m}{2} \cos(\omega + \Omega)t \quad \text{и} \quad \frac{U_0 m}{2} \cos(\omega - \Omega)t$$

не будет колебаний с частотой Ω .

18.36. Комбинационное колебание второго порядка содержит частоту Ω .

18.44. Указание к решению. Воспользоваться методикой спектрального анализа, изложенной в § 17 на стр. 166—167. Первую гармонику крутизны найти по формуле трёх ординат.

18.45. Указание к решению. Доказательство провести графическими построениями.

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 19

19.1. Исходное уравнение

$$e = u + u_C$$

можно переписать в виде

$$\frac{de}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{du_C}{dt}.$$

Так как

$$i = C \frac{du_C}{dt} = f(u),$$

то

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{C} f(u) = \frac{de}{dt}.$$

Это и есть основное дифференциальное уравнение, составленное относительно u . Для перехода к напряжению u_C достаточно воспользоваться равенством

$$u = e - u_C,$$

тогда получим

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} f(e - u_C).$$

Зная u_C , ток i легко найти по формуле

$$i = C \frac{du_C}{dt}.$$

19.7. Исходное уравнение

$$L \frac{di}{dt} + u = E$$

можно записать и так

$$L \frac{d}{dt} f(u) + u = E$$

или

$$\frac{d}{dt} f(u) + \frac{1}{L} u = \frac{1}{L} E.$$

Имея в виду, что $\frac{d}{dt} f(u) = f'(u) \frac{du}{dt}$, последнему выражению можно придать и такой вид

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{L f'(u)} u = \frac{1}{L f'(u)} E.$$

19.10. Исходное уравнение

$$\begin{aligned} e = u_C + iR = u_C + R \frac{dq}{dt} &= u_C + R \frac{d}{dt} [C(u_C)u_C] = \\ &= u_C + RC(u_C) \frac{du_C}{dt} + Ru_C \frac{d}{dt} C(u_C). \end{aligned}$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{R \frac{d}{dt} C(u_C) + 1}{RC(u_C)} u_C = \frac{1}{RC(u_C)} e.$$

В зависимости от вида характеристики $C(u_C)$ последнее выражение можно преобразовать наиболее удобным образом.

Если

$$C(u_C) = C_0(1 - \alpha u_C);$$

$$\frac{dC(u_C)}{dt} = -\alpha C_0 \frac{du_C}{dt},$$

получаем

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1 - R\alpha C_0 \frac{du_C}{dt}}{RC_0(1 - \alpha u_C)} u_C = \frac{1}{RC_0(1 - \alpha u_C)} e.$$

Это выражение целесообразно преобразовать к виду

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC_0(1 - 2\alpha u_C)} u_C = \frac{1}{RC_0(1 - 2\alpha u_C)} e.$$

19.12. В первом случае

$$i = f(u) = I_0 + Su + Lu^2;$$

$$\frac{d}{dt} f(u) = S \frac{du}{dt} + 2Lu \frac{du}{dt} = \frac{du}{dt} (S + 2Lu).$$

Подставляя полученное выражение в дифференциальное уравнение, имеем

$$\frac{du}{dt} (S + 2Lu) + \frac{1}{L} u = \frac{1}{L} E$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{u - E}{L(S + 2Lu)} = 0.$$

Это дифференциальное уравнение интегрируется без затруднений. Во втором случае:

$$i = f(u) = I_0 e^{au};$$

или

$$\frac{d}{dt} f(u) = I_0 a e^{au} \frac{du}{dt}.$$

Подставляя выражение $\frac{d}{dt} f(u)$ в дифференциальное уравнение, находим

$$I_0 a e^{au} \frac{du}{dt} + \frac{1}{L} u = \frac{1}{L} E$$

или

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{aL I_0} e^{-au} (u - E) = 0.$$

Простыми подстановками это дифференциальное уравнение приводится к виду

$$\frac{e^x}{x} dx = Adt$$

и, так как $\int \frac{e^x}{x} dx = Ei(x)$ не выражается в элементарных функциях, можно сказать, что аппроксимация степенным полиномом имеет известные преимущества перед аппроксимацией экспоненциальной функцией.

19.13. Исходное дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt} f(u) + \frac{1}{L} u = \frac{1}{L} E. \quad (1)$$

В данном случае

$$f(u) = I_0 \ln(1 + \beta u);$$

$$\frac{d}{dt} f(u) = I_0 \beta \frac{1}{1 + \beta u} \frac{du}{dt}.$$

Следовательно, учтя, что $I_0 = \frac{1}{\beta R_0}$, получим

$$\frac{du}{dt} + R_0 \frac{(1 + \beta u)}{L} u = \frac{R_0}{L} (1 + \beta u) E.$$

Последнее выражение легко привести к виду

$$\int \frac{du}{\beta u^2 + (1 - \beta E)u - E} = - \int \frac{R_0}{L} dt.$$

Оба интеграла являются табличными. Выполняя интегрирование, находим

$$\frac{1}{1 + \beta E} \ln \frac{\beta(u - E)}{1 + \beta u} = - \frac{R_0}{L} t + C. \quad (2)$$

Постоянная интегрирования C найдётся из условия

при $t = 0, u = 0:$

$$C = \frac{1}{1 + \beta E} \ln(-\beta E). \quad (3)$$

Вводя выражение для C в (2), получаем

$$\ln \frac{E - u}{E(1 + \beta u)} = -(1 + \beta E) \frac{R_0}{L} t. \quad (4)$$

Для линейной цепи $\beta = 0$ и из (4) легко получить

$$u = E \left(1 - e^{-\frac{R_0}{L} t} \right). \quad (5)$$

Решая ур-ние (4) относительно u , получаем

$$u = E \frac{1 - e^{-(1 + \beta E) \frac{R_0}{L} t}}{1 + E \beta e^{-(1 + \beta E) \frac{R_0}{L} t}}. \quad (6)$$

Приведём выражения (5) и (6) к безразмерному виду. С этой целью введём обозначения:

$$t \frac{R_0}{L} = \tau;$$

$$\beta E = a;$$

$$\frac{u}{E} = x.$$

тогда

$$x = 1 - e^{-\tau}; \quad (5a)$$

$$x = \frac{1 - e^{-(1+a)\tau}}{1 + a \cdot e^{-(1+a)\tau}} \quad (6a)$$

при $a = 1$, $x = \text{th} \tau$.

На рис. Р. 19.1 показаны два графика $x(\tau)$:

1) при $a = 0$ (линейная система), 2) при $a = 1$ (нелинейная система).

19.14. Выражение вольтамперной характеристики:

$$i = \int \frac{1}{R} du = \int \frac{1 + q^2 u^2}{R_0} du = \frac{1}{R_0} u + \frac{q^2}{3R_0} u^3. \quad (1)$$

Дифференциальное уравнение для заданной схемы (з. дача 19.7) имеет вид:

$$\frac{d}{dt} f(u) + \frac{1}{L} u = \frac{1}{L} E. \quad (2)$$

Так как

$$\frac{d}{dt} f(u) = \frac{1}{R_0} (1 + q^2 u^2) \frac{du}{dt},$$

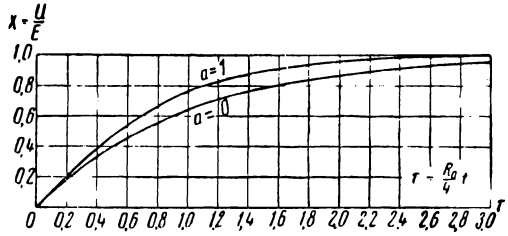


Рис. Р.19.1

дифференциальное уравнение можно переписать в форме

$$\frac{du}{dt} + \frac{R_0}{L} \cdot \frac{u - E}{1 + q^2 u^2} = 0$$

или, разделяя переменные,

$$\frac{1 + q^2 u^2}{u - E} du = - \frac{R_0}{L} dt. \quad (3)$$

Введём обозначения

$$\left. \begin{aligned} qu &= x \\ qE &= b \\ \frac{R_0}{L} t &= \tau \\ \frac{u}{E} &= \frac{x}{b} = y \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

тогда

$$\frac{1 + x^2}{x - b} dx = - d\tau. \quad (5)$$

Интегралы в (5) являются табличными. После интегрирования получаем

$$\ln(x - b) + \frac{1}{2} (x - b)^2 + 2b(x - b) + b^2 \ln(x - b) = -\tau + C.$$

Постоянную интегрирования C определяем из начальных условий при $\tau = 0, x = 0$

$$C = \ln(-b) + \frac{1}{2} b^2 - 2b^2 + b^2 \ln(-b).$$

Подставляя значение C после небольших преобразований, находим

$$(1 + b^2) \ln\left(1 - \frac{x}{b}\right) + \frac{x^2}{2} + bx = -\tau. \quad (6)$$

Решить это уравнение относительно x не удаётся и поэтому будем считать задачу решённой, найдя обратную функцию $\tau(x)$. Вводя последнее обозначение из

(4): $y = \frac{x}{b}$, окончательно получим

$$\tau = -(1 + b^2) \ln(1 - y) - b^2 y \left(\frac{y}{2} + 1\right). \quad (7)$$

Если
то

$$q = 0, \quad b = 0, \\ \tau = -\ln(1 - y)$$

или

$$y = 1 - e^{-\tau}. \quad (8)$$

19.15. Указания к решению. Обычным путём приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{1 - 2pi}{i} \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L_0}.$$

Интегрируя дифференциальное уравнение с учётом начального условия и вводя обозначения:

$$\frac{i}{I_0} = x; \\ \frac{R}{L_0} t = \tau; \\ 2piI_0 = a,$$

получаем

$$\tau = -a(1 - x) - \ln x = a(x - 1) - \ln x.$$

$$\text{При } a = 0, \quad \tau = -\ln x, \quad x = e^{-\tau}, \\ a = 1, \quad \tau = x - 1 - \ln x.$$

Графики, построенные по двум последним выражениям, приведены на рис.Р. 19 2.

19.18. Дифференциальное уравнение для свободного режима в системе первого порядка имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

в котором $f(x)$ отображает свойства характеристики системы.

Время t в явном виде в дифференциальное уравнение не входит.

В случае периодических движений любое конкретное значение скорости $\frac{dx}{dt}$ должно периодически повторяться, т. е. изображающая точка на фазовой

плоскости должна проходить через одно и то же значение $\frac{dx}{dt}$ (например, нулевое значение) не меньше двух раз в течение каждого периода: один раз при движении в прямом направлении и один раз в обратном. Если $f(x)$ однозначная функция, такое состояние исключается.

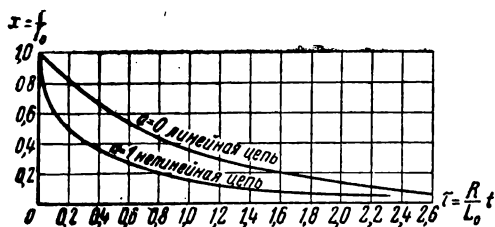


Рис. Р.19.2

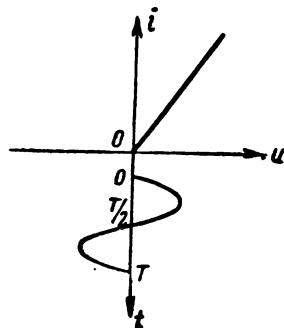


Рис. Р.19.3

19.19. Исходное дифференциальное уравнение (задача 19.3)

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = \frac{1}{C} \varphi (e - u_C) = \frac{1}{C} \varphi (U_m \sin \Omega t - u_C). \quad (1)$$

Проведя решение методом «приспособления», будем рассматривать дифференциальное уравнение по кусочкам (рис. Р. 19.3).

1. Отрезок времени, в течение которого $u > 0$, $\varphi(u) = Su_C$.

Дифференциальное уравнение примет вид

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = \frac{1}{C} S U_m \sin \Omega t - \frac{1}{C} S u_C. \quad (2)$$

Для приведения к безразмерному виду введём обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \Omega t &= \tau \\ \frac{u_C}{U_m} &= y \\ \frac{S}{\Omega C} &= F \\ \frac{1}{RC \Omega} &= \gamma \\ \gamma + F &= p \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Тогда получим

$$\frac{dy}{d\tau} + py = F \sin \tau. \quad (4)$$

Решение (4) известно:

$$y = e^{-p\tau} \left[F \int e^{p\tau} \sin \tau d\tau + C_1 \right].$$

Выполнив интегрирование, получим

$$y = e^{-p\tau} \left[F \frac{e^{p\tau}}{p^2 + 1} (p \sin \tau - \cos \tau) + C_1 \right].$$

Постоянная C_1 находится из условия: при $\tau = 0$, $y = 0$:

$$C_1 = \frac{F}{p^2 + 1},$$

тогда

$$y = \frac{F}{p^2 + 1} [(p \sin \tau - \cos \tau) + e^{-p\tau}]. \quad (5)$$

По этому закону будет меняться безразмерное напряжение на конденсаторе в течение времени пока $u > 0$, т. е. пока правомерно пользование аппроксимирующей функцией в виде $\varphi(u) = Su$. Когда напряжение $u \leq 0$, необходимо пользоваться аппроксимирующей функцией $\varphi(u) = 0$. Найдём безразмерное время τ_1 , соответствующее переходу к другой аппроксимирующей функции.

Так как

$$u = e - u_C = U_m \sin \Omega t - u_C,$$

то после введения обозначения $\frac{u}{U_m} = x$, получим

$$x = \sin \tau - y.$$

В соответствии со сказанным найдём время τ_1 , при котором $x = 0$, т. е. $u_1 = \sin \tau_1$. Подставляя значение y из (5), получаем

$$\frac{p^2 + 1}{F} \sin \tau_1 = p \sin \tau_1 - \cos \tau_1 + e^{-p\tau_1}.$$

Последнее уравнение в общем виде решить относительно τ_1 трудно, поэтому подставим заданные условия для конкретной схемы:

$$F = \frac{S}{\Omega C} = \frac{10^{-3}}{10^3 \cdot 10^{-6}} = 1;$$

$$\gamma = \frac{1}{R \cdot C} = \frac{1}{10^3 \cdot 10^{-6} \cdot 10^3} = 1;$$

$$p = 1 + 1 = 2.$$

Тогда получим

$$3 \sin \tau_1 + \cos \tau_1 = e^{-2\tau_1}.$$

Последнее уравнение можно переписать в виде

$$\sin(\tau_1 + 0,322) = 0,318e^{-2\tau_1}$$

и решить графически. Так как можно предположить, что τ_1 лежит вблизи π , допустимо разложить $e^{-2\tau_1}$ в ряд и ограничиться первыми двумя членами. Продолжив соответствующее решение, получаем

$$\tau_1 \approx 2,8.$$

Начиная с этого момента, напряжение u будет меньше нуля и нужно пользоваться аппроксимацией $\varphi(u) = 0$.

2. Отрезок времени, в течение которого $u < 0$, $\varphi(u) = 0$.

Дифференциальное уравнение будет иметь вид

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = 0$$

или

$$\frac{dy}{d\tau} + \gamma y = 0. \quad (6)$$

Решение этого уравнения

$$y = y_0 e^{-\gamma\tau}. \quad (7)$$

Значение y_0 определяется по ф-ле (5) при $\tau = \tau_1$, т. е.

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{F}{p^2 + 1} [(p \sin \tau_1 - \cos \tau_1) + e^{-p \tau_1}] = \\ &= \frac{1}{5} (2 \cdot \sin 2,8 - \cos 2,8 + e^{-2 \cdot 2,8}) \approx 0,32. \end{aligned}$$

Таким образом, в течение времени, когда $u < 0$, безразмерное напряжение на конденсаторе будет меняться по закону

$$y \approx 0,32 e^{-\tau}. \quad (8)$$

Так будет продолжаться до момента τ_2 , когда напряжение u вновь станет равным нулю; τ_2 можно найти из уравнения

$$\sin \tau_2 = 0,32 e^{-\tau_2}.$$

Решая уравнение, находим

$$\tau_2 \approx 6,61.$$

Теперь можно выполнить построение.

В течение безразмерного времени $0 < \tau < 2,8$, безразмерное напряжение на конденсаторе y будет меняться в соответствии с (5) по закону

$$y = \frac{1}{5} (2 \sin \tau - \cos \tau + e^{-2\tau}).$$

В течение безразмерного времени $2,8 < \tau < 6,61$ безразмерное напряжение y будет меняться по закону (8).

$$y \approx 0,32 e^{-\tau}.$$

На рис. Р.19.4 выполнено построение для первого периода. Для сопоставления дана кривая входного напряжения; напряжение на конденсаторе меняется по кривой OAB .

19.20. В установившемся режиме (рис. Р.19.5) период колебания (в безразмерном выражении) будет состоять из неизвестных отрезков τ_1 и τ_2 :

$$\Omega T = \tau_1 + \tau_2 = 2\pi. \quad (1)$$

В течение времени $0 < \tau < \tau_1$ ¹⁾

$$y = \frac{1}{5} (2 \sin \tau - \cos \tau) + C_1 e^{-2\tau}. \quad (2)$$

В течение времени $\tau_1 < \tau < \tau_2$

$$y = y_{\tau_1} e^{-\tau}. \quad (3)$$

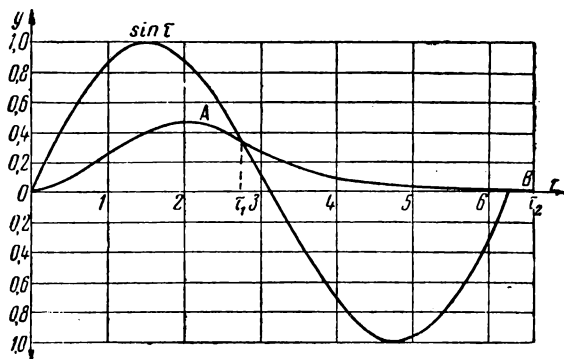


Рис. Р.19.4

Неизвестными величинами являются C_1 , y_{τ_1} , τ_1 и τ_2 .

В решении задачи 19.19 составлялось два уравнения для определения τ_1 и τ_2 ; составим аналогичные уравнения:

$$\frac{1}{5} (3 \sin \tau_1 + \cos \tau_1) - C_1 e^{-2\tau_1} = 0, \quad (4)$$

$$\sin \tau_2 - y_{\tau_1} e^{-\tau_2} = 0. \quad (5)$$

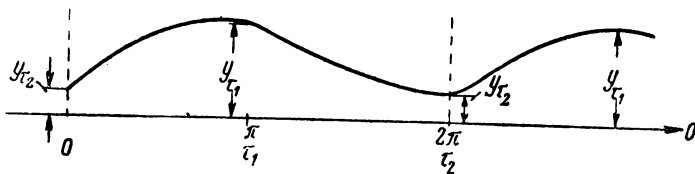


Рис. Р.19.5

В установившемся режиме

$$\tau_1 + \tau_2 = 2\pi. \quad (6)$$

Для определения четырёх неизвестных необходимо составить ещё одно уравнение.

Из рис. Р.19.5 видим, что в точке 0 имеет место равенство напряжений, определённых по выражениям (2) и (3):

$$-\frac{1}{5} + C_1 = y_{\tau_1} e^{-\tau_2}. \quad (7)$$

¹⁾ В данном случае понятие „нуль“ является условным, т. е. соответствует началу любого периода установившегося колебания (рис. Р.19.5).

Система уравнений (4), (5), (6) и (7) даёт возможность определить все постоянные; выражения (2) и (3) дают законы изменения напряжения в установившемся режиме.

19.21. Полагая в дифференциальном уравнении $\frac{dx}{d\tau} = \kappa$, получаем $\kappa = -\frac{\tau}{x}$;

уравнение изоклины, следовательно, $x = -\frac{1}{\kappa} \tau$. На график нанесём семейство изоклин при $\kappa = 0, 1, -1, \infty$ (рис. P.19.6).

Отмечаем точку, соответствующую начальным условиям: при $\tau=0$, $x=x_0$. Из этой точки проводим две прямые: OA под углом 0 ($\kappa=0$) и OB под углом -45 ($\kappa=-1$). Затем проводим биссектрису OC ; прямая OC является участком искомой интегральной кривой. Из точки C построения повторяются сначала. В результате получаем многоугольник.

Точки на изоклинах следует соединять плавными кривыми; чем больше изоклин, тем точнее интегральная кривая. В данном случае многоугольник превращается в окружность.

19.23. Указание к решению.

Исходное дифференциальное уравнение

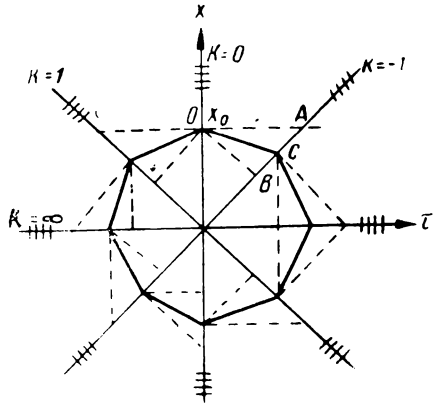


Рис. P.19.6

$$Ri + \frac{1}{C} \int i dt = U \sin \Omega t$$

путём введения обозначений:

$$\frac{1}{RC} t = \tau; \quad i \frac{R}{U} = x; \quad \Omega RC = p$$

легко привести к виду

$$\frac{dx}{d\tau} + x - p \cos p\tau = 0.$$

Уравнение изоклины будет

$$x = p \cos p\tau - \kappa,$$

а при заданных условиях

$$x = \cos \tau - \kappa.$$

19.24. Вводя обозначения

$$qu = x; \quad \frac{1}{RC} t = \tau,$$

перепишем дифференциальное уравнение в виде

$$\frac{dx}{d\tau} + x(1 - x^2) = 0.$$

Полагая $\frac{dx}{d\tau} = \kappa$, находим уравнение изоклины:

$$\kappa + x(1 - x^2) = 0$$

или

$$x^3 - x + \kappa = 0.$$

Задавая различными значениями $\kappa_1, \kappa_2, \dots$, можно найти соответствующие значения x_1, x_2, \dots и нанести в координатах x, τ прямые параллельные оси абсцисс (рис. Р.19.7). Далее построение ведется обычным путём, например так, как в задаче 19.22.

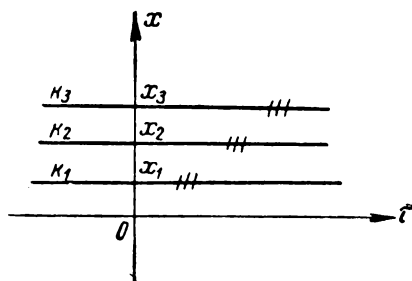


Рис. Р.19.7

19.25. Вводя обозначения:

$$pi = x; \quad \frac{R}{L_0} t = \tau,$$

перепишем дифференциальное уравнение в виде

$$\frac{dx}{d\tau} + \frac{x}{1 - 2x} = 0.$$

Полагая $\frac{dx}{d\tau} = \kappa$, находим уравнение изоклины:

$$\kappa + \frac{x}{1 - 2x} = 0,$$

откуда

$$x = \frac{\kappa}{2\kappa - 1}.$$

19.26. Путём введения обозначений

$$\omega t = \tau; \quad \frac{u}{U_0} = x; \quad \frac{\beta U_0^2}{\omega} = A; \quad \frac{1}{\omega RC} = b,$$

дифференциальное уравнение можно привести к виду:

$$\frac{dx}{d\tau} + bx + Ax^3 = b \sin \tau.$$

Заменяя $\frac{dx}{d\tau} = \kappa$, получаем уравнение изоклины

$$\kappa + bx + Ax^3 = b \sin \tau.$$

В данном случае удобнее решить это уравнение относительно τ :

$$\sin \tau = \frac{\kappa + bx + Ax^3}{b}$$

или

$$\tau = \arcsin \left[\frac{\kappa}{b} + \left(x + \frac{A}{b} x^3 \right) \right].$$

Задавая значения x при определённых значениях t , можно построить кривые $t(x)$ или $x(t)$ и далее вести расчёт обычным способом.

19.28. Первое условие является очевидным, так как движения нет только в случае $\frac{dx}{dt} = 0$.

Докажем второе условие.

Пусть изучаемая точка будет x_0 . Дифференциальное уравнение в общем виде запишется

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \quad (1)$$

Для того, чтобы выяснить, является ли данная точка устойчивой, дадим небольшое возмущение Δx и составим относительно него дифференциальное уравнение. Решение дифференциального уравнения даст зависимость Δx от времени. Наложение требования уменьшения Δx с течением времени даст искомое условие устойчивости.

Итак, полагаем: $x = x_0 + \Delta x$, тогда

$$\frac{d}{dt}(x_0 + \Delta x) = f(x_0 + \Delta x)$$

или, так как

$$\frac{d}{dt} x_0 = 0,$$

то

$$\frac{d}{dt} \Delta x = f(x_0 + \Delta x).$$

Разложим правую часть в ряд Тейлора по степеням Δx и ввиду малости Δx ограничимся первой степенью разложения:

$$\frac{d \Delta x}{dt} = f(x_0) + \frac{\Delta x^1}{1!} f'(x_0) + \dots$$

Но по условию

$$f(x_0) = 0,$$

тогда

$$\frac{d \Delta x}{dt} = \Delta x f'(x_0)$$

или

$$\frac{d \Delta x}{\Delta x} = f'(x_0) dt.$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение, получаем

$$\ln \Delta x = f'(x_0) t - \ln C$$

или

$$\Delta x = C e^{f'(x_0) t}.$$

Здесь C -- постоянная интегрирования.

Для того, чтобы с ростом t возмущение Δx стремилось к нулю, нужно чтобы

$$f'(x_0) < 0$$

или

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \frac{dy}{dx_{x=x_0}} < 0.$$

19.29. Исходное дифференциальное уравнение

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{C} I_0 e^{au} + \frac{1}{RC} u = \frac{1}{RC} E,$$

приведём к безразмерному виду при помощи обозначений:

$$\frac{1}{RC} t = \tau; \quad au = x; \quad aE = b; \quad aRI_0 = D,$$

тогда получим

$$\frac{dx}{d\tau} + D e^x + x = b.$$

Уравнение фазовой траектории будет:

$$y = b - x - D e^x.$$

Фазовая траектория качественно изображена на рис. P.19.8.

Установившееся значение x_0 найдётся из уравнения $y = 0$, т. е.

$$b - x_0 = D e^{x_0}.$$

Подставляя условия задачи, находим, что $b = 2$ и $D = 1$.

Решая уравнение

$$2 - x_0 = e^{x_0},$$

получаем

$$x_0 = 0,44.$$

Следовательно,

$$u_0 = \frac{x_0}{a} = \frac{0,44}{10} = 0,044 \text{ в.}$$

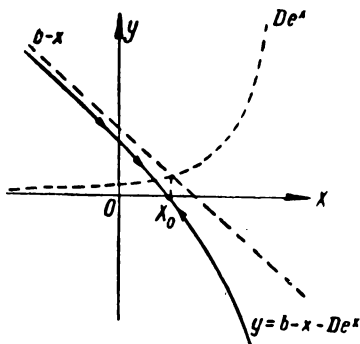


Рис. P.19.8

19.30. Введём обозначения:

$$\frac{u_C}{E} = x; \quad \frac{1}{RC_0} t = \tau; \quad 2aE = a$$

и перепишем исходное дифференциальное уравнение (задача 19.10) в виде

$$\frac{dx}{d\tau} + \frac{x}{1-ax} = \frac{1}{1-ax}.$$

Уравнение фазовой траектории будет

$$y = \frac{1}{1-ax} - \frac{x}{1-ax} = \frac{1-x}{1-ax}.$$

Установившееся значение определится из уравнения

$$\frac{1-x_0}{1-ax_0} = 0,$$

т. е. $x_0 = 1$ и не зависит от степени нелинейности, определяемой коэффициентом a .

Качественное построение выполнено на рис. Р.19.9.

Очевидно: $u_{C_0} = E$.

19.32. Представляя уравнение фазовой траектории

$$u = \frac{dx}{d\tau} = f(x)$$

в виде

$$d\tau = \frac{dx}{f(x)}$$

и интегрируя в пределах от x_1 до x_2 , получаем

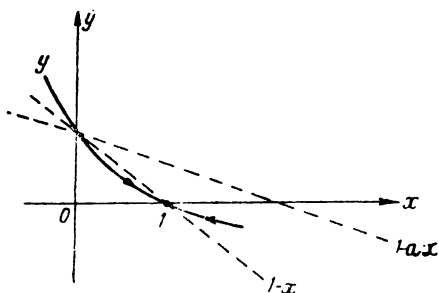


Рис. Р.19.9

$$\tau = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{f(x)} dx.$$

19.33. В данном случае

$$\frac{dx}{d\tau} = 1 + x - 2x^2$$

или

$$\tau = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1 + x - 2x^2}.$$

Вычисляя интеграл, получим

$$\tau = \left| \frac{1}{3} \ln \frac{-4x + 1 - 3}{-4x + 1 + 3} \right|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \ln 4 = 0,463.$$

Так как

$$\tau = t \frac{R_0}{L},$$

то

$$t = 0,463 \frac{L}{R_0}.$$

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 20

20.1. Представим схему рис. 20.1 в виде усилителя с разорванной цепью обратной связи (рис. Р. 20.1); заменим, кроме того, электронную лампу эквивалентной схемой, учтя, что внутреннее сопротивление достаточно велико. Выкладки будут проще, если воспользуемся теоремой об эквивалентном генераторе тока (задача 9.1). В результате получим схему, изображённую на рис. Р.20.2: для этой схемы нужно найти условия баланса амплитуд и фаз.

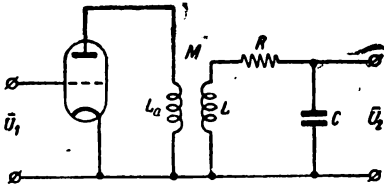


Рис. Р.20.1

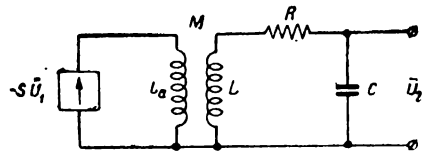


Рис. Р.20.2

Напряжение \bar{U}_k , вводимое во второй контур из первого, с большой точностью равно

$$\bar{U}_k = \pm i \bar{I}_1 \omega M = \pm i \bar{S} \bar{U}_1 \omega M,$$

причём знак определяется включением концов катушки.

Напряжение \bar{U}_2 связано с напряжением \bar{U}_k соотношением

$$\frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_k} = \frac{1}{i \omega C} \frac{1}{R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} \approx \frac{1}{i \omega CR} \frac{1}{1 + i \xi}.$$

Подставляя вместо \bar{U}_k его значение, выраженное через \bar{U}_1 , получим

$$\frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} = \pm \frac{S \omega M}{\omega CR (1 + i \xi)}.$$

Баланс фаз будет иметь место при $\xi = \frac{X}{R} = 0$, т. е. при $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ или $\omega = \omega_0$; кроме того, перед дробью должен быть знак плюс.

Условие баланса амплитуд запишется в виде

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{SM}{RC} > 1$$

или

$$M > \frac{RC}{S}.$$

20.3 Составляем схему усилителя с разорванной цепью обратной связи (рис. Р. 20. 3а); эту последнюю упрощаем при помощи теоремы об эквивалентном генераторе напряжения (рис. Р. 20. 3б).

Найдём теперь $K(i\omega) = \frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1}$.

Напряжение на контуре \bar{U}_k равно

$$\bar{U}_k = - \frac{\mu \bar{U}_1}{R_i + \frac{R_\sigma}{1 + i\xi}} \cdot \frac{R_\sigma}{1 + i\xi}.$$

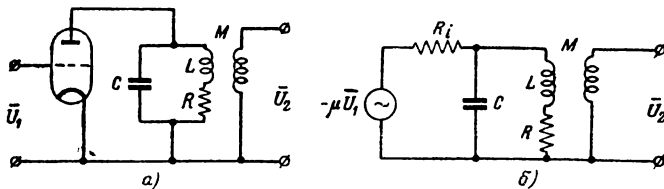


Рис. Р.20.3

Напряжение на выходе \bar{U}_2 связано с напряжением на контуре \bar{U}_k соотношением ¹⁾

$$\frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_k} \approx \pm \frac{M}{L}.$$

Составляя отношение $\frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1}$, получаем

$$\frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} = \mp \frac{M}{L} \frac{\mu}{R_i + \frac{R_\sigma}{1 + i\xi}} \cdot \frac{R_\sigma}{1 + i\xi}.$$

Для баланса фаз необходимо, чтобы $\xi = 0$ и, кроме того, необходимо включить катушку так, чтобы остался только знак плюс. Для баланса амплитуд на частоте ω_0 получаем условие

$$\frac{M}{L} > \frac{R_i + R_\sigma}{\mu R_\sigma}.$$

Заменяя $\frac{1}{\mu} = D$ и $\frac{R_i}{\mu} = \frac{1}{S}$, последнему условию можно придать вид

$$\frac{M}{L} > D + \frac{1}{S R_\sigma}.$$

Вспомня, что $R_\sigma = \frac{L}{CR}$, можно также написать

$$M > LD + \frac{RC}{S}.$$

20.4. Представим заданную схему в виде эквивалентной, состоящей из двух контуров. В первом контуре ёмкость $C_1 = \infty$; второй контур является колебательным (рис. Р. 20.1).

Исходя из уравнений связанных контуров (§ 4, стр. 30), можно получить выражение для комплексного коэффициента передачи

$$k(i\omega) = \frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} = - \frac{\mu}{\omega C \sqrt{R_i R}} \frac{A}{[(1 + i\xi_1)(1 + i\xi_2) + A^2]},$$

¹⁾ Считаем, что $R \ll \omega L$.

где

$$\xi_1 = \frac{X_1}{R_i} = \frac{\omega L_a}{R_i};$$

$$\xi_2 = \frac{X_2}{R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R};$$

$$A = \frac{\omega M}{\sqrt{R_i R}}.$$

Условие баланса фаз будет выполняться на частоте, определяемой из уравнения $J_m [K(i\omega)] = 0$,

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC} \sqrt{1 + \frac{L_a}{L} \cdot \frac{R}{R_i}}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \frac{L_a R}{L R_i}}}.$$

Если $R_i \gg R$, то

$$\omega \approx \omega_0.$$

Условие баланса амплитуд находится из неравенства

$$K(\omega_0) = \frac{U_2}{U_1} > 1.$$

Продельвая несложные преобразования, получаем

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\mu M}{C} \cdot \frac{1}{(R_i R + \omega_0^2 M^2)}.$$

Если $R_i R \gg \omega_0^2 M^2$, то условие баланса амплитуд будет

$$M > \frac{RC}{S},$$

т. е. совпадает с условием, полученным в задаче 20.1.

В общем случае, получаем

$$M > \frac{RC}{S} + \frac{\kappa^2}{\mu} L_a,$$

где

$$\kappa^2 = \frac{M^2}{L L_a}.$$

Так как обычно $\kappa \ll 1$, мы видим, что учёт реакции нагрузки в данной схеме мало влияет на условия самовозбуждения.

20.5. Заменяем схему генератора схемой усилителя с разорванной цепью обратной связи (рис. Р. 20.4а) и далее электронную лампу — эквивалентным генератором (рис. Р. 20.4б).

Для дальнейшего анализа целесообразно воспользоваться теорией четырёхполюсника (§ 6).

В соответствии с ф-лой (6.17), имеем

$$\overline{U}_2 = -\mu \overline{U}_1 \frac{i\omega L_2}{H_a} \quad (1)$$

где

$$H_a = A_{22} R_i + A_{11} \cdot i\omega L_2 + A_{21} R_i \cdot i\omega L_2 + A_{12}$$

Коэффициенты A относятся к схеме рис Р. 20.4в.

По табл. 6.2(поз. 8) находим:

$$A_{11} = 1;$$

$$A_{12} = \frac{1}{i\omega C}$$

$$A_{21} = \frac{1}{i\omega L_1}$$

$$A_{22} = 1 - \frac{1}{\omega^2 L_1 C}$$

Подставляя значения коэффициентов в выражение для сопротивления передачи H_a , получаем:

$$H_a = R_i \frac{\omega^2 L_1 C - 1}{\omega^2 L_1 C} + i\omega L_2 + R_i \frac{L_2}{L_1} + \frac{1}{i\omega C} = \frac{R_i(\omega^2 L_1 C - 1) i\omega C - \omega^2 L_1 C \cdot \omega^2 L_2 C + R_i \omega^2 L_2 C i\omega C + \omega^2 L_1 C}{i\omega C \cdot \omega^2 L_1 C}$$

Подставив найденное выражение в (1) будем иметь

$$\frac{\overline{U}_2}{\overline{U}_1} = -\mu \frac{i\omega L_2 i\omega C \cdot \omega^2 L_1 C}{-\omega^2 L_1 C \cdot \omega^2 L_2 C + \omega^2 L_1 C + i\omega C \cdot R_i [(\omega^2 L_1 C - 1) + \omega^2 L_2 C]}$$

или

$$\frac{\overline{U}_2}{\overline{U}_1} = \mu \frac{\omega^2 L_1 C \cdot \omega^2 L_2 C}{\omega^2 L_1 C (1 - \omega^2 L_2 C) + i\omega C \cdot R_i (\omega^2 L_1 C + \omega^2 L_2 C - 1)} \quad (2)$$

Условие баланса фаз требует обращения в нуль мнимой части. На частоте, при которой выполняется условие баланса фаз, будет иметь место генерация

$$\omega_0^2 = \frac{1}{C(L_1 + L_2)} \quad (3)$$

Условие баланса амплитуд будет

$$\frac{U_2}{U_1} = \mu \frac{\omega_0^2 L_2 C}{1 - \omega_0^2 L_2 C} > 1.$$

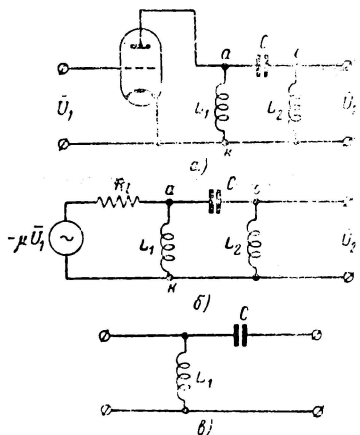


Рис. Р.20.4

Из (3) находим, что

$$\omega_0^2 L_2 C = \frac{L_2}{L_1 + L_2},$$

тогда

$$\mu > \frac{1 - \frac{L_2}{L_1 + L_2}}{\frac{L_2}{L_1 + L_2}}$$

или

$$\mu > \frac{L_1}{L_2}. \quad (4)$$

20.8. Эквивалентная схема изображена на рис. Р. 20.5.

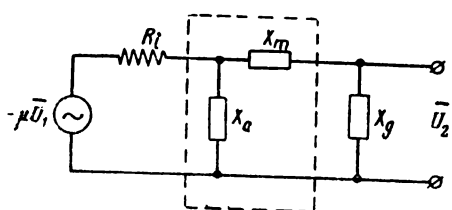


Рис. Р.20.5

По ф-ле 6.17 табл. 6.1 (§ 6) находим

$$\bar{U}_2 = -\mu \bar{U}_1 \frac{i X_g}{H_a}, \quad (1)$$

где

$$H_a = A_{22} R_i + A_{11} i X_g + A_{21} R_i i X_g + A_{12}.$$

Коэффициенты A относятся к четырёхполюснику, обведённому пунктиром на рис. Р. 20.5. В соответствии с табл. 6.2 (поз. 8) находим:

$$A_{11} = 1; \quad A_{12} = i X_m; \quad A_{21} = \frac{1}{i X_a}; \quad A_{22} = 1 + \frac{X_m}{X_a}.$$

Подставляя значение H_a в (1), получаем

$$\frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} = -\mu \frac{i X_g X_a}{R_i (X_a + X_m + X_g) + i (X_g + X_m) X_a}$$

или

$$\frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} = -\mu \frac{i X_g X_a [R_i (X_a + X_m + X_g) - i (X_g + X_m) X_a]}{R_i^2 (X_a + X_m + X_g)^2 + (X_g + X_m)^2 X_a^2}. \quad (2)$$

Условие баланса фаз получаем, обращая в нуль мнимую часть

$$X_a + X_m + X_g = 0. \quad (3)$$

Из этого условия находится частота генерации ω_0 .

Условие баланса амплитуд получаем из (2) при подстановке в него условия (3):

$$\frac{U_2}{U_1} = -\mu \frac{X_g}{X_g + X_m} > 1$$

$$-X_m > X_g (1 + \mu). \quad (4)$$

Для выполнения условия баланса амплитуд необходимо, чтобы сопротивления X_m и X_g имели противоположные знаки, кроме того $|X_m| > |X_g|$.
 20.11. Составляем эквивалентные схемы (рис. Р. 20.6а и б)

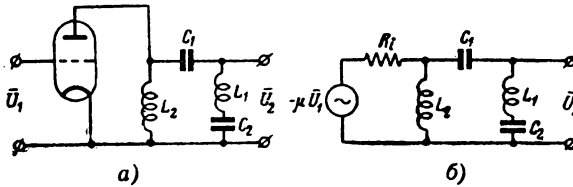


Рис. Р.20.6

В данном случае (см. решение задачи 20.8):

$$X_a = \omega L_2;$$

$$X_m = -\frac{1}{\omega C_1};$$

$$X_g = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_2}.$$

Условие баланса фаз (рис. Р. 20.7)

$$\omega_0 L_2 - \frac{1}{\omega_0 C_1} + \omega_0 L_1 - \frac{1}{\omega_0 C_2} = 0,$$

откуда

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2) \cdot \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{C_1(L_1 + L_2)}} \sqrt{1 + \frac{C_1}{C_2}}.$$

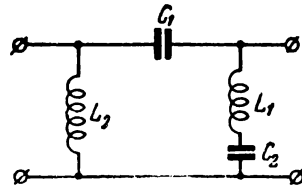


Рис. Р.20.7

При $C_2 = \infty$ получаем формулу для схемы рис. 20.5 (задача 20.5).

Условие баланса амплитуд

$$\frac{1}{\omega_0 C_1} > \left(\omega_0 L_1 - \frac{1}{\omega_0 C_2} \right) (1 + \mu).$$

Подставляя значение ω_0 после преобразований, получаем

$$\mu > \frac{L_2 \left(1 + \frac{C_1}{C_2} \right)}{L_1 - \frac{C_1}{C_2} L_2}.$$

При $C_2 = \infty$ последняя формула совпадает с аналогичной формулой задачи 20.5.
 20.12. Воспользуемся условием баланса фаз (задача 20.8)

$$X_a + X_g + X_m = 0.$$

В данном случае (рис. P. 20.8)

$$X_m = -\frac{1}{\omega C_{ag}};$$

$$X_a = X_g = -\frac{\frac{L}{C}}{\omega L - \frac{1}{\omega C}}.$$

Подставляя значение X_a и X_g в условие баланса фаз, получаем уравнение

$$-2 \frac{\frac{L}{C}}{\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}} - \frac{1}{\omega_2 C_{ag}} = 0,$$

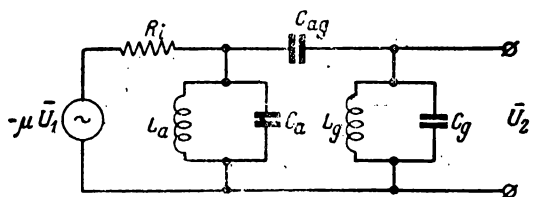


Рис. P. 20.8

решение которого относительно генерируемой частоты ω_2 даёт

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{LC + 2LC_{ag}}}$$

или

$$\omega_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + 2\frac{C_{ag}}{C}}}$$

Таким образом, частота генерации ω_2 всегда ниже собственной частоты ω_0 .

20.13. Указания к решению. Схему генератора необходимо представить в виде схемы усилителя с разорванной цепью обратной связи и воспользоваться значениями коэффициентов A , найденными в задаче 6.39.

Целесообразно, кроме того, с самого начала воспользоваться теоремой об эквивалентном генераторе и заменить R_i и R_a через

$$R_* = \frac{R_i R_a}{R_i + R_a}$$

20.14. Указания к решению.

При сделанных допущениях эквивалентная схема будет иметь вид рис. P.20.9.

Так как

$$K(i\omega) = \frac{\bar{U}_2}{-\mu \bar{U}_1} = \frac{1}{A_{11}}$$

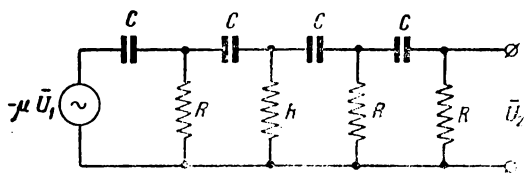


Рис. P.20.9

то для решения поставленной задачи нужно найти коэффициент A_{11} . Воспользуемся результатом задачи 6.40

$$A_{11} = \frac{x^4 - 15x^2 + 1 + i(7x - 10x^3)}{x^4},$$

где

$$x = \omega CR_*$$

Таким образом,

$$\frac{U_2}{U_1} = -\mu \frac{x^4}{x^4 - 15x^2 + 1 + i(7x - 10x^3)}$$

Баланс фаз:

$$7x_0 - 10x_0^3 = 0;$$

$$x_0 = \sqrt{\frac{7}{10}};$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{7}{10}} \cdot \frac{1}{RC}$$

Баланс амплитуд:

$$\frac{U_2}{U_1} = -\mu \frac{\frac{49}{100}}{\frac{49}{100} - 15 \cdot \frac{7}{10} + 1} = \frac{\mu}{18,4}$$

$$\mu > 13,4.$$

20.20. Составляем исходные уравнения:

$$i_a = -i_c;$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri = -\frac{1}{C} \int i_c dt = -\frac{1}{C} \int i dt + \frac{1}{C} \int i_a dt.$$

Продифференцируем по t

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{1}{C} i_a.$$

Анодный ток связан с напряжением u на аноде функцией

$$i_a = -S_0 u;$$

с другой стороны достаточно точно

$$u \approx -L \frac{di}{dt};$$

тогда

$$i_a \approx S_0 L \frac{di}{dt}.$$

Подставляя значение i_a в дифференциальное уравнение и группируя подобные члены, получим:

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + \left(R - \frac{S_0 L}{C} \right) \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0$$

или

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} - \frac{S_0}{C} \right) \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0.$$

Условие самовозбуждения найдётся из требования

$$\frac{R}{L} - \frac{S_0}{C} < 0,$$

откуда

$$S_0 > \frac{RC}{L}$$

или

$$S_0 > \frac{1}{R_{\sigma}}$$

20.21. По схеме рис. 20.22 составляем уравнения

$$\begin{aligned} i_a &= i_1 - i; \\ -L \frac{di}{dt} - Ri - \frac{1}{C} \int i dt &= L_1 \frac{di_1}{dt}. \end{aligned} \quad (1)$$

Из этих двух уравнений получаем

$$L \frac{di}{dt} + L_1 \left(\frac{di}{dt} + \frac{di_a}{dt} \right) + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = 0. \quad (2)$$

Выразим анодный ток i_a через ток i

$$i_a = Su_g = SL \frac{di}{dt},$$

тогда

$$\frac{di_a}{dt} = SL \frac{d^2i}{dt^2}.$$

Выражение (2) переписется

$$L_1 SL \frac{d^2i}{dt^2} + (L + L_1) \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = 0.$$

или

$$L_1 LCS \frac{d^2i}{dt^2} + (L + L_1) C \frac{di}{dt} + RC \frac{di}{dt} + i = 0. \quad (3)$$

Применяя к выражению (3) условие самовозбуждения [ф-ла (20.8)], получаем

$$RC(L + L_1)C - L_1 LCS \cdot 1 < 0. \quad (4)$$

Решая это неравенство относительно S , будем иметь

$$S > RC \frac{L + L_1}{L_1 L} \quad (5)$$

или

$$S > \frac{RC}{L_{эка}},$$

где

$$L_{эка} = \frac{L_1 L}{L_1 + L}.$$

20.22. Указания к решению.

Составляем исходные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} u &= Ri \\ i_a &= Su \\ \frac{1}{C} \int i_1 dt + R(i_1 - i_2) + R_a(i_1 + i_a) &= 0 \\ \frac{1}{C} \int i_2 dt + R(i_2 - i) + R(i_2 - i_1) &= 0 \\ \frac{1}{C} \int i dt + Ri + R(i - i_2) &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Исключив из этой системы все неизвестные, кроме u , получим уравнение

$$(2\alpha + \beta S) \frac{d^3 u}{dt^3} + \frac{d^2 u}{dt^2} + 2\beta \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0,$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{1}{(RC)^2} \frac{R}{6R + 4R_a};$$

$$2\beta = \frac{1}{RC} \frac{5R + R_a}{6R + 4R_a};$$

$$2\alpha = RC \frac{R + 3R_a}{6R + 4R_a};$$

$$\beta = RC \frac{RR_a}{6R + 4R_a}.$$

Применив к дифференциальному уравнению критерий Рауса — Гурвица [Ф-ла (20.8)], получим условие самовозбуждения

$$2\beta - \omega_0^2 (2\alpha + \beta S) < 0,$$

которое можно привести к виду

$$R_a S > 29 + 23 \frac{R_a}{R} + 4 \left(\frac{R_a}{R} \right)^2.$$

Это условие совпадает с условием, полученным в задаче 20.13, если в последнем положить $R_l \gg R_a$.

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 21

21.2. Указание к решению.

Задаваясь различными значениями U_g , находим амплитуду тока первой гармоники по формуле трёх ординат

$$I_{a1} = \frac{i_{\max} - i_{\min}}{2};$$

по формуле $S_{cp} = \frac{I_{a1}}{U_g}$ находятся значения средней крутизны.

21.5. 1. Для случая $\theta = 90^\circ$, $E_g = E_{g0}$.

В этом случае

$$I_{a1} = \frac{SU_g}{\pi} \frac{\pi}{2} = \frac{SU_g}{2},$$

следовательно,

$$S_{cp} = \frac{I_{a1}}{U_g} = \frac{S}{2}. \quad (1)$$

2. Для случая $0 < \theta < 90^\circ$ введём обозначение

$$\frac{SU_g}{SE_g - I_0} = x; \quad \frac{U_g}{E_0} = \frac{U_g}{E_g - E_{g0}} = x, \quad x > 1; \quad (2)$$

тогда

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1}{x} \\ \sin \theta &= \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x} \sqrt{x^2 - 1} \\ \theta &= \arccos \frac{1}{x} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Для первой гармоники

$$I_{a1} = \frac{SU_g}{\pi} \left(\arccos \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \sqrt{x^2 - 1} \right).$$

Для средней крутизны

$$S_{cp} = \frac{I_{a1}}{U_g} = \frac{S}{\pi} \left(\arccos \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2} \right). \quad (4)$$

Если $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $x \rightarrow \infty$; тогда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} S_{cp} = \frac{S}{\pi} \arccos 0 = \frac{S}{2}.$$

т. е. получили ф-лу (1).

Выражение (4), используя тождество¹⁾

$$\arccos y = \arctg \frac{\sqrt{1-y^2}}{y},$$

можно переписать в более удобном виде

$$S_{cp} = \frac{S}{\pi} \left(\arctg \sqrt{x^2-1} - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2} \right) \quad (6)$$

По выражению (6) построен график средней крутизны в безразмерных единицах

$$\frac{S_{cp}}{S} = f \left(\frac{U_g}{E_0} \right).$$

Этот график дан на рис. P.21.1.

При $U_g \gg E_0$, $S_{cp} \approx \frac{S}{2}$.

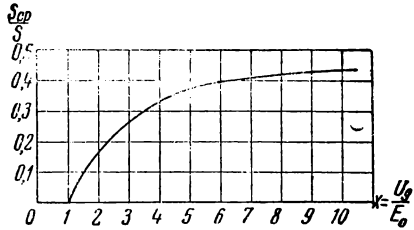


Рис. P.21.1

21.7. Указание к решению.

Для решения задачи воспользуемся ф-лой (17.15).

Для вскрытия неопределённости выражения $\frac{B_1(x)}{x}$ при $x=0$, нужно воспользоваться приближённым значением $B_1(x)$ при $x \ll 1$

$$B_1(x) \approx \frac{1}{2} x.$$

21.8. Иллюстративный график дан на рис. P. 21.2a

1. Для случая $\theta = 90^\circ$ (задача 21.5)

$$S_{cp} = \frac{S}{2},$$

т. е. средняя крутизна не зависит от амплитуды сеточного напряжения. Таким образом, в схеме генератора, скранныго на лампе с заданной характеристикой, колебания будут расти бесконечно, так как вместе с ростом колебаний средняя крутизна (т. е. усилительные свойства лампы в среднем) не уменьшается. Осуществление подобного генератора невозможно.

2. Для случая $0^\circ < \theta < 90^\circ$ (задача 21.5)

$$S_{cp} = \frac{S}{\pi} \left(\arctg \sqrt{x^2-1} - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2} \right),$$

где

$$x = \frac{U_g}{E_0} = \frac{U_g}{E_g - E_{g0}}.$$

График $S_{cp} = f(x)$ дан на рис. P. 21.1.

В данном случае средняя крутизна вместе с ростом колебаний увеличивается, что способствует ещё большему росту колебаний.

¹⁾ И. Н. Бронштейн и К. А. Семендяев. Справочник по математике. Гостехиздат, 1953 г., стр. 189.

Следовательно, при этом режиме осуществление генерации также невозможно, т. е. при $0^\circ < \theta < 90^\circ$ нижняя отсечка не может быть причиной ограничения роста колебаний.

3. Для случая $90^\circ < \theta < 180^\circ$ удобнее найти зависимость S_{cp} от угла отсечки θ , а по ней уже определить зависимость S_{cp} , а от амплитуды U_g . Из ф-лы (17.10) имеем

$$I_{a1} = \frac{SU_g}{\pi} (\theta - \sin \theta \cos \theta),$$

откуда

$$S_{cp} = \frac{I_{a1}}{U_g} = \frac{S}{\pi} (\theta - \sin \theta \cos \theta).$$

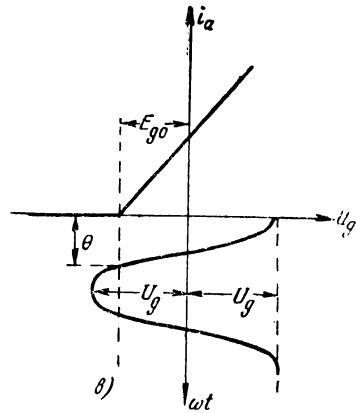
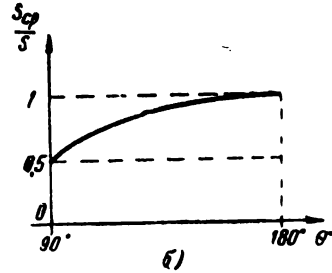
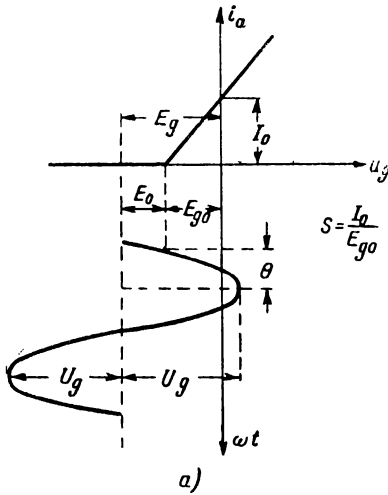


Рис. P.21.2

График $S_{cp} = \varphi(\theta)$ при $90^\circ < \theta < 180^\circ$ изображён на рис. P. 21.26.

Из иллюстративного графика для данного режима (рис. P. 21.2в) видно, что при уменьшении амплитуды $\theta \rightarrow 180^\circ$, а при увеличении амплитуды, $\theta \rightarrow 90^\circ$. Следовательно в данном случае вместе с ростом колебаний средняя крутизна уменьшается и генерация возможна.

В этом режиме нижняя отсечка является причиной ограничения роста колебаний.

21.9. Уравнение стационарности в данном случае

$$S_{cp} = \frac{RC}{M}.$$

Выражение для S_{cp} (задача 21.3)

$$S_{cp} = a_1 - \frac{3}{4} a_3 U_g^2.$$

Подставляя это выражение в уравнение стационарности и решая его относительно U_g , получаем

$$U_{gcm} = \frac{2}{\sqrt{3a_3}} \sqrt{a_1 - \frac{RC}{M}}.$$

21.13. Нужно рассчитать индуктивность контура L , сопротивление R и взаимную индуктивность M , при которой генератор будет развивать напряжение с амплитудой, равной 20 в.

Индуктивность L и сопротивление R легко рассчитываются по формулам:

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C} = \frac{10^{12}}{4\pi^2 \cdot 10^{14} \cdot 100} \approx 250 \cdot 10^{-6} \text{ гн} = 250 \text{ мкгн};$$

$$R = \frac{2\pi f_0 L}{Q} = \frac{2\pi \cdot 10^6 \cdot 250 \cdot 10^{-6}}{50} = 31,4 \text{ ом}.$$

Для расчёта взаимной индуктивности M нужно воспользоваться графиком средней крутизны лампы 6С5, полученным в задаче 21.1.

Из уравнения стационарности

$$S_{cp} = \frac{RC}{M}$$

находим

$$M = \frac{RC}{S_{cp}}.$$

Значение S_{cp} при $U_g = 20$ в находим по графику рис. 0.21.1а

$$S_{cp} = 0,85 \frac{\text{ма}}{\text{в}},$$

следовательно,

$$M = \frac{RC}{S_{cp}} = \frac{31,4 \cdot 100 \cdot 10^{-12}}{0,85 \cdot 10^{-3}} = 3,7 \cdot 10^{-6} \text{ гн} = 3,7 \text{ мкгн}.$$

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ § 22

22.1. Решение проводится по намеченным этапам.

1-й этап. Составляется исходное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0,$$

которое с использованием обозначения

$$\frac{i}{I_0} = x$$

приводится к виду (22.1)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = -2\alpha \frac{dx}{dt}. \quad (1)$$

Так как система является автономной, решение будет иметь вид

$$x = a \sin \omega t. \quad (2)$$

2-й этап. Раскладываем правую часть в ряд Фурье и определяем коэффициенты ψ_1 и f_1 :

$$-2\alpha \frac{dx}{dt} = -2\alpha a \omega \cos \omega t;$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= 0 \\ f_1 &= -2\alpha a \omega \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

3-й этап. Подставляем значения коэффициентов f_1 и ψ_1 в 22.4:

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2\omega} \left[-2\alpha a \omega - (\omega_0^2 - \omega^2) 0 \right];$$

$$\frac{db}{dt} = -\frac{1}{2\omega} 0 - (\omega_0^2 - \omega^2) a = 0.$$

Эти уравнения дают:

1) для амплитуды

$$\frac{da}{dt} = -\alpha a;$$

2) для частоты

$$\omega = \omega_0.$$

4-й этап. Полученное дифференциальное уравнение можно проинтегрировать непосредственно; однако по условию задачи это уравнение должно быть рассмотрено на фазовой плоскости для двух случаев: 1) $a > 0$; 2) $a = 0$.

Первый случай даёт знакомое фазовое изображение (рис. Р. 22.1): амплитуда a изменяется по экспоненциальному закону (таблица 19.1, поз. 3).

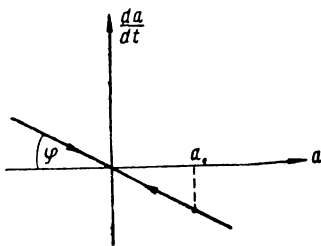


Рис. Р.22.1

Во втором случае $\frac{da}{dt} = 0$ и, следовательно, $a = \text{const}$. Если при $t = 0$, $a = a_0$, то и при любом t имеет место равенство $a = a_0$.

5-й этап. Для оценки устойчивости (задача 19.28) должно быть проверено неравенство

$$\frac{d}{da} \left(\frac{da}{dt} \right) < 0$$

в точке $\frac{da}{dt} = 0$. В данном случае неравенство удовлетворяется.

22.2. 1-й этап. Исходное дифференциальное уравнение

$$L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = E \sin \omega_0 t$$

легко приводится к виду

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \omega_0^2 i = \frac{\omega_0 E}{L} \cos \omega_0 t.$$

Вводя обозначения

$$\frac{E}{\omega_0 L} = I_0; \quad \frac{i}{I_0} = x,$$

получаем

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \cos \omega_0 t. \quad (1)$$

Решение ищется в виде (система не автономна)

$$x = a \sin \omega_0 t + b \cos \omega_0 t. \quad (2)$$

2-й этап. Находим коэффициенты правой части (22.3):

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(a, b) &= 0 \\ f_1(a, b) &= \omega_0^2 \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

3-й этап. Подставляем значения коэффициентов ψ_1 и f_1 в ур-ние (22.4):

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{1}{2\omega_0} \omega_0^2 i = \frac{1}{2} \omega_0 i \\ \frac{db}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

4-й этап. Решение ур-ния (4) известно (см. табл. 19.1, поз. 1); на фазовой плоскости получим прямую, параллельную оси абсцисс (рис. Р. 22.2); амплитуда неограниченно растёт.

5-й этап. Так как

$$\frac{d}{da} \left(\frac{da}{dt} \right) \equiv 0,$$

то, следовательно, устойчивых амплитуд нет.

22.3. 1-й этап. Исходное дифференциальное уравнение

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = E \sin \omega_0 t$$

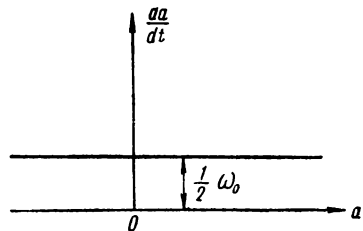


Рис. Р.22.2

легко приводится к виду

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \frac{\omega_0 E}{L} \cos \omega_0 t.$$

Вводя обозначение

$$\frac{E}{\omega_0 L} = I_0; \quad \frac{i}{I_0} = x,$$

получаем

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = -2\alpha \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \cos \omega_0 t. \quad (1)$$

Решение ищем в виде:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \sin \omega_0 t + b \cos \omega_0 t \\ \frac{dx}{dt} &= a \omega_0 \cos \omega_0 t - b \omega_0 \sin \omega_0 t \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

2-й этап. С учётом (2) уравнение (1) переписывается

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = -2\alpha a \omega_0 \cos \omega_0 t + 2\alpha b \omega_0 \sin \omega_0 t + \omega_0^2 \cos \omega_0 t.$$

Коэффициенты ψ_1 и f_1 будут равны:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(a, b) &= 2\alpha b \omega_0 \\ f_1(a, b) &= \omega_0^2 - 2\alpha a b \omega_0 \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

3-й этап. Подставляем значения коэффициентов ψ_1 и f_1 в (22.4):

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{1}{2\omega_0} (\omega_0^2 - 2\alpha a \omega_0) = \frac{1}{2} \omega_0 - \alpha a \\ \frac{db}{dt} &= -\frac{1}{2\omega_0} \cdot 2\alpha b \omega_0 = -\alpha b \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

4-й этап. Найдём установившиеся значения, положив $\frac{da}{dt} = \frac{db}{dt} = 0$.

Получаем:

$$b_{уст} = 0;$$

$$a_{уст} = \frac{\omega_0}{2\alpha} = Q.$$

Следовательно,

$$x = Q \sin \omega_0 t$$

или

$$i = xI_0 = x \frac{E}{\omega_0 L} = \frac{QE}{\omega_0 L} \sin \omega_0 t = \frac{E}{R} \sin \omega_0 t.$$

22.4. 1-й этап. Исходное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \frac{\omega E}{L} \cos \omega t$$

путём введения обозначений

$$\frac{E}{\omega_0 L} = I_0; \quad \frac{t}{I_0} = x$$

приводим к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = -2\alpha \frac{dx}{dt} + \omega \cos \omega t. \quad (1)$$

Решение ищем в виде:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \sin \omega t + b \cos \omega t \\ \frac{dx}{dt} &= a \omega \cos \omega t - b \omega \sin \omega t \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

2-й этап. С учётом (2) выражение (1) переписывается

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = -2\alpha a \omega \cos \omega t + 2\alpha b \omega \sin \omega t + \omega \omega_0 \cos \omega t.$$

Коэффициенты ψ_1 и f_1 будут равны:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(a, b) &= 2\alpha b \omega \\ f_1(a, b) &= \omega \omega_0 - 2\alpha a \omega \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

3-й этап. Подставляем значения коэффициентов ψ_1 и f_1 в (2.2.4):

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{1}{2\omega} [\omega \omega_0 - 2\alpha a \omega - (\omega_0^2 - \omega^2) b] \\ \frac{db}{dt} &= -\frac{1}{2\omega} [2\alpha b \omega - (\omega_0^2 - \omega^2) a] \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

4-й этап. Для решения системы (4) целесообразно перейти к полярным координатам:

$$x = a \sin \omega t + b \cos \omega t = A \sin(\omega t + \varphi);$$

$$a = A \cos \varphi; \quad b = A \sin \varphi, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a};$$

$$a^2 + b^2 = A^2.$$

Умножая первое уравнение (4) на a , второе на b и складывая, получаем

$$\frac{dA^2}{dt} = \omega_0 a - 2\alpha A^2.$$

Так как

$$\frac{dA^2}{dt} = 2A \frac{dA}{dt};$$

$$a = A \cos \varphi,$$

то

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\omega_0}{2} \cos \varphi - \alpha A. \quad (5)$$

Заменяя в (4) $a = A \cos \varphi$ и $b = A \sin \varphi$, получаем

$$\frac{dA}{dt} \cos \varphi - A \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2\omega} [\omega \omega_0 - 2\alpha \omega A \cos \varphi - (\omega_0^2 - \omega^2) A \sin \varphi];$$

$$\frac{dA}{dt} \sin \varphi + A \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{2\omega} [2\alpha \omega A \sin \varphi - (\omega_0^2 - \omega^2) A \cos \varphi].$$

Умножая первое уравнение на $\sin \varphi$, а второе на $\cos \varphi$ и вычитая из второго первое, получаем

$$A \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{2} \omega_0 \sin \varphi + \frac{1}{2\omega} (\omega_0^2 - \omega^2) A$$

или

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega} - \frac{\omega_0 \sin \varphi}{2A}. \quad (6)$$

Уравнения (5) и (6) дают изменение амплитуды A и фазы φ в переходном режиме.

В установившемся режиме $\frac{dA}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = 0$ и мы получаем:

$$\cos \varphi = 2 \frac{\alpha A}{\omega_0};$$

$$\sin \varphi = \frac{A}{\omega \omega_0} (\omega_0^2 - \omega^2).$$

Возводя в квадрат и складывая, будем иметь

$$1 = \left[\frac{4 \alpha^2}{\omega_0^2} + \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega^2 \omega_0^2} \right] A^2.$$

Решая последнее уравнение относительно A , находим

$$A = \frac{Q}{\sqrt{1 + \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{4 \alpha^2 \omega^2}}}.$$

Здесь $Q = \frac{\omega_0}{2 \alpha}$.

Используя обычные обозначения (§ 2), последнему выражению можно придать вид

$$A = \frac{Q}{\sqrt{1 + \xi^2}},$$

где

$$\xi = \frac{\Delta \omega}{\alpha} = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha}.$$

Вспоминая обозначения

$$x = \frac{i}{I_0}; \quad I_0 = \frac{E}{\omega_0 L} = Q \frac{E}{R},$$

получаем для амплитуды тока

$$I = \frac{E}{R \sqrt{1 + \xi^2}}.$$

Заметим в заключение, что строгое решение требует также проверки всех амплитуд на устойчивость; в данном случае эта проверка даёт положительные результаты.

22.5. В данном случае

$$\frac{d^2 u_g}{dt^2} = S_0 - 3 \gamma u_g^2,$$

следовательно,

$$\frac{d^2 u_g}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} - \frac{MS_0}{LC} + \frac{M}{LC} 3 \gamma u_g^2 \right) \frac{du_g}{dt} + \frac{1}{LC} u_g = 0.$$

Обозначим:

$$\frac{MS_0}{RC} = m; \quad \frac{R}{L} = 2\alpha; \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2,$$

тогда

$$\frac{d^2 u_g}{dt^2} + 2\alpha \left(1 - m + \frac{M}{RC} 3\gamma u_g^2 \right) \frac{du_g}{dt} + \omega_0^2 u_g = 0$$

или

$$\frac{d^2 u_g}{dt^2} + 2\alpha(1-m) \left[1 + \frac{M}{(1-m)RC} 3\gamma u_g^2 \right] \frac{du_g}{dt} + \omega_0^2 u_g = 0.$$

Введём ещё обозначения:

$$\frac{1}{m-1} \frac{MS_0}{RC} \frac{3\gamma}{S_0} u_g^2 = x^2; \quad \alpha(m-1) = \varepsilon$$

и помножим все члены уравнения на величину

$$\frac{1}{\sqrt{m-1}} \sqrt{\frac{MS_0}{RC}} \sqrt{\frac{3\gamma}{S_0}},$$

тогда получим

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 2\varepsilon(1-x^2) \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

Это уравнение — уравнение ван дер-Поля.

Решение его проводим по намеченным этапам.

1-й этап.

Решение исходного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 2\varepsilon(1-x^2) \frac{dx}{dt}$$

ищем в виде:

$$x = a \sin \omega t;$$

$$\frac{dx}{dt} = a\omega \cos \omega t;$$

$$x^2 = a^2 \sin^2 \omega t.$$

2-й этап.

Раскроем правую часть и найдём коэффициенты ψ_1 и f_1 :

$$2\varepsilon(1-x^2) \frac{dx}{dt} = 2\varepsilon [a\omega \cos \omega t - a^2 \sin^2 \omega t \cdot a\omega \cos \omega t].$$

Пользуясь табл. 22.1 [ф-ла (7)], найдём

$$2\varepsilon(1-x^2) \frac{dx}{dt} = 2\varepsilon \left[a\omega \cos \omega t - a^3 \omega \left(\frac{1}{4} \cos \omega t - \frac{1}{4} \cos 3\omega t \right) \right].$$

Коэффициенты ψ_1 и f_1 будут равны:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= 0; \\ f_1 &= 2 \varepsilon a \omega \left(1 - \frac{a^2}{4}\right).\end{aligned}$$

3-й этап.

Подставляем ψ_1 и f_1 в уравнение (22.4):

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \frac{1}{2\omega} \left[2 \varepsilon a \omega \left(1 - \frac{a^2}{4}\right) - (\omega_0^2 - \omega^2) \cdot 0 \right]; \\ \frac{db}{dt} &= 0 = - \frac{1}{2\omega} [0 - (\omega_0^2 - \omega^2) a].\end{aligned}$$

Для амплитуды

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon a \left(1 - \frac{a^2}{4}\right).$$

для частоты

$$\omega = \omega_0.$$

4-й этап.

Установившаяся амплитуда находится из условия $\frac{da}{dt} = 0$, следовательно,

$$a_{1уст} = 0;$$

$$a_{2уст} = 2.$$

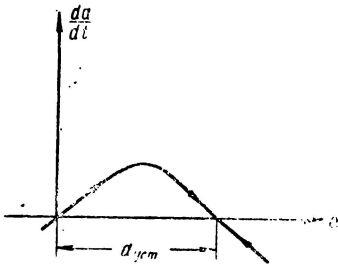


Рис. Р.22.3

Картину установления колебаний легко проследить на фазовой плоскости (рис. Р.22.3).

5-й этап.

Проверка устойчивости выполняется по условию

$$\frac{d}{da} \left(\frac{da}{dt} \right) a = a_{уст} < 0,$$

Легко видеть, что при $a = 0$ это условие не удовлетворяется, а при $a = 2$ удовлетворяется.

Конечно, к этому выводу легко прийти непосредственно по фазовому изображению.

22.6. Из дифференциального уравнения для огибающей

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon a \left(1 - \frac{a^2}{4}\right).$$

и значения установившейся амплитуды $a_{уст} = 2$, находим

$$t = \frac{1}{\varepsilon} \int_{2 \cdot 10^{-6}}^{1,9} \frac{da}{a \left(1 - \frac{a^2}{4}\right)}.$$

Выполняя интегрирование, получаем

$$t \approx \frac{15}{\epsilon} = \frac{15}{\alpha(m-1)}.$$

22.7. Приведём уравнение Рэлея к безразмерному виду, введя обозначение:

$$\omega_0 t = \tau;$$

$$\frac{2\epsilon}{\omega_0} = \mu;$$

тогда получим

$$\frac{d^3x}{d\tau^3} - \mu \left[1 - \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 \right] \frac{dx}{d\tau} + x = 0.$$

Продифференцируем последнее выражение по τ :

$$\frac{d^3x}{d\tau^3} - \mu \frac{d^2x}{d\tau^2} + \mu \left[\left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 \frac{dx}{d\tau} \right]' + \frac{dx}{d\tau} = 0;$$

$$\frac{d^3x}{d\tau^3} - \mu \frac{d^2x}{d\tau^2} + \mu \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 \frac{d^2x}{d\tau^2} + \mu \frac{dx}{d\tau} \cdot 2 \frac{dx}{d\tau} \frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{dx}{d\tau} = 0.$$

Сгруппировав подобные члены, получаем

$$\frac{d^3x}{d\tau^3} - \mu \left[1 - 3 \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 \right] \frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{dx}{d\tau} = 0.$$

Вводя обозначение

$$\frac{dx}{d\tau} = z,$$

приведём последнее уравнение к виду уравнения ван дер-Поля

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} - \mu(1 - 3z^2) \frac{dz}{d\tau} + z = 0.$$

22.8. Для схемы рис. 22.4а

$$L \frac{di}{dt} + u_C = 0,$$

но

$$i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{dq}{dt},$$

тогда

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + u_C = 0.$$

Так как

$$u_C = \alpha q + \beta q^3,$$

то

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \alpha q + \beta q^3 = 0$$

или

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{\alpha}{L} q + \frac{\beta}{L} q^3 = 0.$$

Для схемы рис. 22.4б:

$$\frac{d\Phi}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = 0$$

или

$$\frac{d^2 \Phi}{dt^2} + \frac{1}{C} i = 0.$$

Однако

$$i = \alpha \Phi + \beta \Phi^3,$$

тогда

$$\frac{d^2 \Phi}{dt^2} + \frac{\alpha}{C} \Phi + \frac{\beta}{C} \Phi^3 = 0.$$

22.9. 1-й этап. Приводим исходное дифференциальное уравнение к виду

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = -\gamma x^3.$$

Решение имеем в виде

$$x = a \sin \omega t.$$

2-й этап. Раскроем правую часть

$$-\gamma x^3 = -\gamma a^3 \sin^3 \omega t = -\gamma a^3 \left(\frac{3}{4} \sin \omega t - \frac{1}{4} \sin 3\omega t \right).$$

Коэффициенты ψ_1 и f_1 :

$$\psi_1 = -\frac{3}{4} \gamma a^3;$$

$$f_1 = 0.$$

3-й этап. Подставляем значение ψ_1 и f_1 в (22.4):

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2\omega} [0 - (\omega_0^2 - \omega^2) 0];$$

$$\frac{db}{dt} = 0 = -\frac{1}{2\omega} \left[-\frac{3}{4} \gamma a^3 - (\omega_0^2 - \omega^2) a \right].$$

Итак, для амплитуды

$$\frac{da}{dt} = 0,$$

для частоты

$$\frac{3}{4} \gamma a^3 + (\omega_0^2 - \omega^2) a = 0.$$

4-й этап. Из уравнения для амплитуды находим, что $a = \text{const} = a_0$, т. е. амплитуда определяется начальными условиями и является постоянной.

Частота зависит от амплитуды

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4} \gamma a^2.$$

Колебания, частота которых зависит от амплитуды, называются неизохронными.

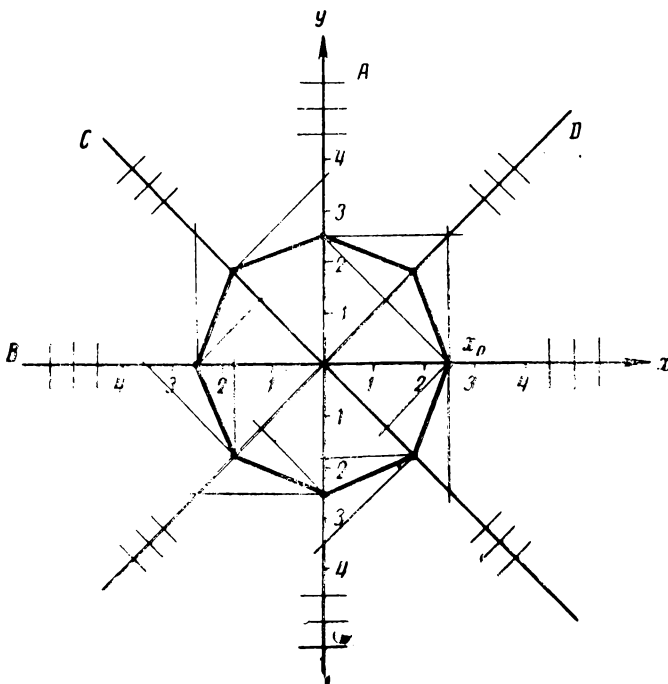


Рис. Р.22.4

22.10. Сопоставляя дифференциальное уравнение консервативного колебательного контура

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0;$$

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = 0 \quad \omega_0 t = \tau$$

с ур-нием (2.2.6), мы видим, что в данном случае

$$A(x) = 0;$$

$$B(x) = 1.$$

Уравнения главных изоклин будут:

изоклина	A:	$x = 0$	$(\varphi = 0^\circ)$
	B:	$y = 0$	$(\varphi = 90^\circ)$
	C:	$y = -x$	$(\varphi = 45^\circ)$
	D:	$y = x$	$(\varphi = -45^\circ)$

Нанося графики главных изоклин и проводя засечки под углами φ (рис. P.22.4), получаем искомую кривую в виде окружности.

22.11. Дифференциальное уравнение колебательного контура

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2a \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

с использованием общепринятых обозначений

$$\omega_0 t = \tau; \quad \frac{2a}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$$

приводим к виду

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{1}{Q} \frac{dx}{d\tau} + x = 0.$$

В данном случае $Q = 5$; следовательно,

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{1}{5} \frac{dx}{d\tau} + x = 0.$$

Сопоставляя с (22.6), мы видим, что

$$A(x) = \frac{1}{5};$$

$$B(x) = 1.$$

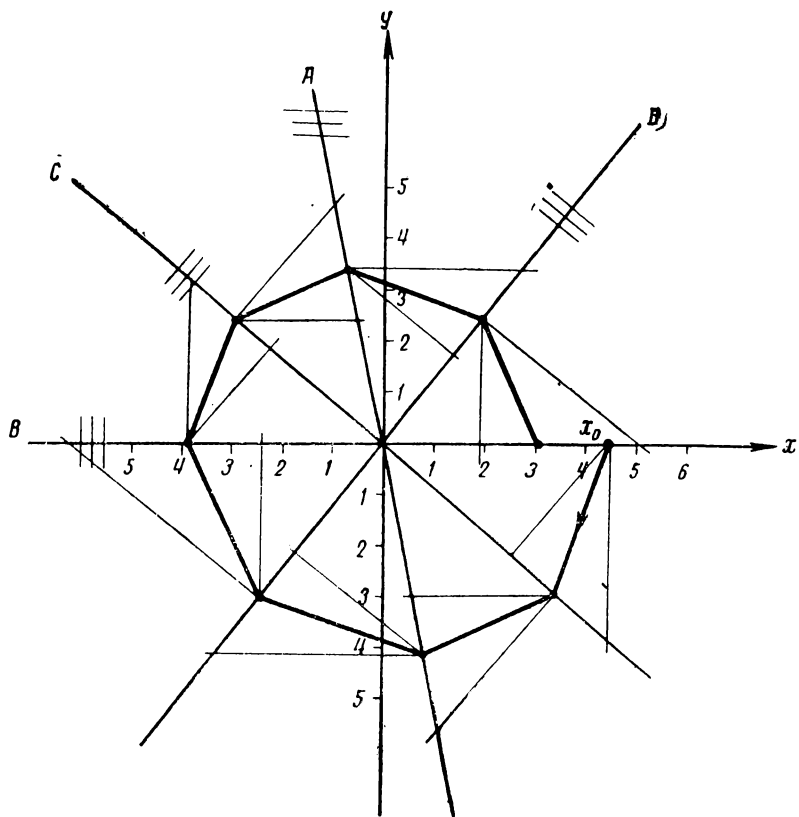


Рис. Р.22.5

Уравнения главных изоклин будут:

$$y_A = -5x;$$

$$y_B = 0;$$

$$y_C = \frac{1}{-1 - \frac{1}{5}} x = -\frac{5}{6} x;$$

$$y_D = \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} x = \frac{5}{4} x.$$

Нанося главные изоклины с засечками и пользуясь известными графическими построениями (рис. P.22.5), получаем на фазовой плоскости картину свёртывающейся спирали.

ОТВЕТЫ

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ § 1

1.3. а) $K(i\omega) = \frac{1}{1 + i\omega RC}$; $\operatorname{tg} \varphi = -\omega RC$;

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}.$$

б) $K(i\omega) = \frac{1}{1 - i\frac{R}{\omega L}}$; $\operatorname{tg} \varphi = \frac{R}{\omega L}$;

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega L}\right)^2}}.$$

в) $K(i\omega) = \frac{1}{1 + i\frac{\omega L}{R}}$; $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\omega L}{R}$;

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}}.$$

1.8. а) $Z(i\omega) = R + \frac{1}{i\omega C}$; $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{\omega CR}$;

$$Z(\omega) = R \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega CR}\right)^2}.$$

б) $Z(i\omega) = R + i\omega L$; $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}$;

$$Z(\omega) = R \sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}.$$

в) $Z(i\omega) = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$; $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega RC}$;

$$Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

г) Положив $C_1 + C_2 = C$, приводим схему к схеме рис. 1.7 в.

$$д) Z(i\omega) = \frac{R}{1 + i\omega CR}; \quad \operatorname{tg} \varphi = -\omega CR;$$

$$Z(\omega) = \frac{R}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}}.$$

$$е) Z(i\omega) = \frac{i\omega L}{1 + i\frac{\omega L}{R}}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{R}{\omega L};$$

$$Z(\omega) = \frac{\omega L}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}}.$$

$$ж) Z(i\omega) = \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 LC + i\frac{\omega L}{R}}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{1 - \omega^2 LC}{\frac{\omega L}{R}};$$

$$Z(\omega) = \frac{\omega L}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}}.$$

$$1.11. 1) \varphi_{U_2 \rightarrow U_1} = 0 \quad \text{при} \quad \omega L < \frac{1}{\omega C};$$

$$\varphi_{U_2 \rightarrow U_1} = \pm \pi^1) \quad \text{при} \quad \omega L > \frac{1}{\omega C};$$

$$2) \varphi_{U_1 \rightarrow I} = -\frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad \omega L < \frac{1}{\omega C};$$

$$\varphi_{U_1 \rightarrow I} = \frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad \omega L > \frac{1}{\omega C}.$$

Фазовые характеристики изображены на рис. 0.1.1.

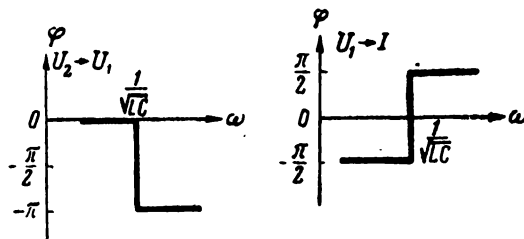


Рис. 0.1.1

1.12. В выражение для коэффициента передачи

$$K(\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC}$$

ёмкость C_1 не входит.

¹⁾ Выбор знака является условным, так как в установившемся режиме этот знак значения не имеет.

$$1.13. K(i\omega) = \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

1.14.

$\frac{U_1}{U_2}$ в простых числах	1	10	10 ²	10 ³	10 ⁴	10 ⁵	10 ⁶	10 ⁻¹	10 ⁻²	10 ⁻³
$\ln \frac{U_1}{U_2}$ нсп	0	2,3	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8	-2,3	-4,6	-6,9
20 lg $\frac{U_1}{U_2}$ дб	0	20	40	60	80	100	120	-20	-40	-60

1.16. 1) $\frac{U_1}{U_2} = 1,162$ (плюс 1 дб);

2) $\frac{U_1}{U_2} = 0,892$ (минус 1 дб).

1.17. 1) 0,068 нсп; 2) 0,59 дб.

1.18. 10,5%.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ § 2

2.2.

№ пп.	I	X	U ₂	$\varphi_{U_2 \rightarrow U_1}$	$\varphi_{U \rightarrow I}$	δ
	ма	ом	в	град.	град.	%
1	49	3,98	48,7	-101°20'	11°20'	0,1
2	78,8	3,77	158	-98°35'	8°35'	0,047
3	16,0	-34,5	17	-24°50'	-65°10'	0,8
4	80	0,83	13,2	-109°20'	19°20'	0,125
5	2,32	34	2,46	-142°	52°	0,8

- 2.3. 1) $f = (0,75 \cdot 10^6 \pm 1,79 \cdot 10^4)$ гц;
 2) $f = (3 \cdot 10^6 \pm 4,7 \cdot 10^4)$ гц;
 3) $f = (0,6 \cdot 10^6 \pm 1,73 \cdot 10^4)$ гц;
 4) $f = (5 \cdot 10^6 \pm 8,5 \cdot 10^4)$ гц;
 5) $f = (3,75 \cdot 10^6 \pm 4,37 \cdot 10^4)$ гц.

2.5. Искомое отношение равно $\frac{1}{2\pi} Q$.

2.6. 7,29 мкГн.

2.7. 79.2.

2.9.

Параметры	1	2	3	4	5
$R, \text{ ом}$	26,6	—	—	17,6	0,71
$L, \text{ мкГн}$	446	212	319	--	14,1
$C, \text{ пф}$	—	187	31,2	37,7	—

2.13.

№ пп.	Значение ёмкости, пф	Способ включения
1	710	параллельно
2	213	последовательно
3	800	параллельно
4	278	последовательно
5	11 230	последовательно

2.19.

$$\Delta f = 6,93 \text{ кгц};$$

$$|\delta| \approx 7 \cdot 10^{-3} = 0,7\%;$$

$$\varphi_{U \rightarrow I} = 60^\circ.$$

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ § 3

- 3.2. 1) 116,5 ком;
 2) 35,3 ком;
 3) 56,3 ком;
 4) 40 ком;
 5) 70,4 ком.

3.3. В $Q^2 = 4000$ раз.

3.5.

	1	2	3	4	5
$R_3, \text{ком}$	33,1	24,9	81,0	15,3	30,0
$X_3, \text{ком}$	-62,2	8,7	-40,5	11,55	-19,2
$Z(\omega), \text{ком}$	70,3	26,3	90,5	19,15	35,8

3.8.

	1	2	3	4	5
$L, \text{мкГн}$	—	258	706	141	—
$C, \text{пФ}$	403	—	—	—	27,4
$R, \text{ом}$	100	10,7	6,3	2,8	4,9

3.9. $C = 1594 \text{ пФ}$; $L = 143,5 \text{ мкГн}$.3.11. 1) $6,1 \cdot 10^{-2} \text{ вт}$;2) $2,45 \text{ вт}$;3) $6,1 \cdot 10^{-2} \text{ вт}$;4) $8,46 \text{ вт}$;5) $7,26 \text{ вт}$.3.12. $C \approx 750 \text{ пФ}$. $L \approx 135 \text{ мкГн}$.3.13. $L = 313 \text{ мкГн}$; $Q = 29,5$; $U_K = 3480 \text{ в}$; $P_K = 348 \text{ вт}$.

3.16.

$$\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2)C}}$$

$$R_{\sigma} = \frac{L_1}{\left(1 + \frac{L_2}{L_1}\right)CR}$$

3.20.

$$R_0 = \frac{L}{CR_2}$$

3.21.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \sqrt{1 + \frac{C_1}{C_2}}$$

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ § 4

4.4. Ответом является рис. О.4.1.

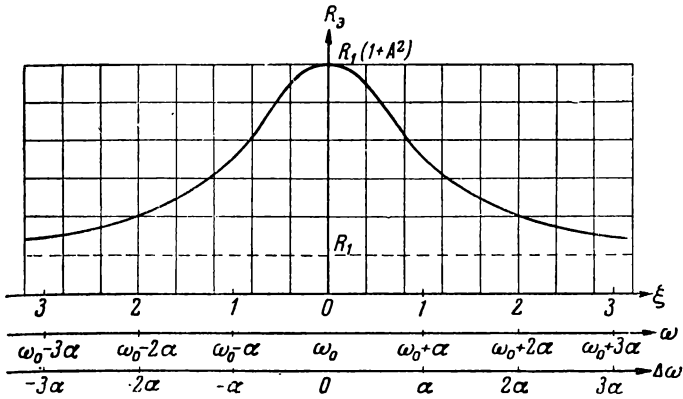


Рис. О.4.1

4.6.

	1	2	3	4	5
$R_3, \text{ ом}$	5,82	32,1	15	16	16,1
$X_3, \text{ ом}$	-21,7	-60,9	6	-2,0	-35,8

4.14. Ответом являются графики рис. О.4.2.

Характерные точки приводятся в таблице:

№ пп.	$\kappa_{\text{макс}}(\omega)$	$\kappa(\omega_0)$	$\xi_{1,2}$
1	20	19,2	$\pm 0,885$
2	20	16	$\pm 1,73$
3	33,6	30	$\pm 1,28$

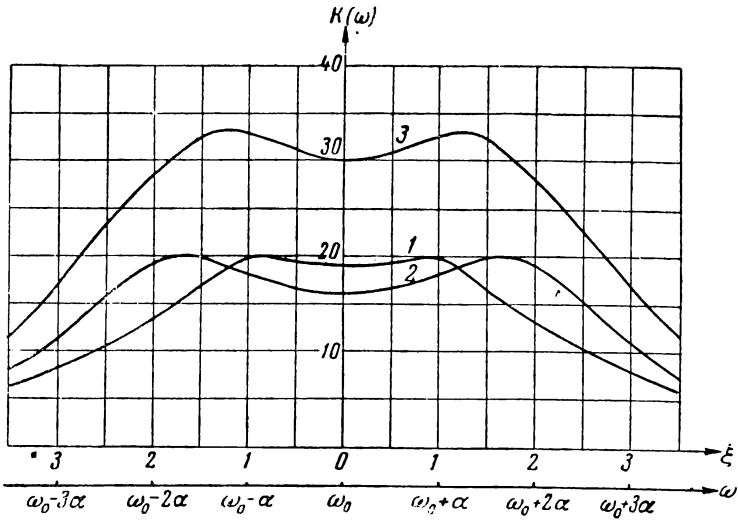


Рис. 0.4.2

4.18.

	1	2	3	4	5
L , мкГн	141	13,3	338	676	169
C , пФ	125	11,7	300	600	150
R , Ом	3,44	1,62	10,6	11,0	10,6
$X_{св}$, Ом	7,5	3,9	16,6	26,5	13,6
M , мкГн	1	0,048	5,3	16,9	2,16

4.20. $\Delta\omega = \pm 1,41 \alpha$.

4.33.

1	L_1 , мкГн	242
	L_2 , мкГн	218
2	C_1 , пФ	81
	C_2 , пФ	66,3
3	C_1 , пФ	351
	C_2 , пФ	177

4.34.

1	$C_1, \text{ нф}$	148
	$C_2, \text{ нф}$	126
2	$C_1, \text{ нф}$	89
	$C_2, \text{ нф}$	78,5
3	$C_1, \text{ нф}$	404
	$C_2, \text{ нф}$	252

4.38.

№ пп.	$P_1, \text{ вт}$	$P_2, \text{ вт}$	$\eta, \%$	$P_{\text{макс макс}} \text{ вт}$	$M_{\text{опт}}, \text{ мкгн}$
1	0,3	15,1	98	500	2,64
2	35,8	10,7	23,1	208	0,784

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ § 5

5.2.

Данные	1	2	3	4
$L_1, \frac{\text{мкгн}}{\text{м}}$	1,95	1,84	1,32	1,86
$C_1, \frac{\text{нф}}{\text{м}}$	5,7	6,05	8,4	5,96
$R_1, \frac{\text{ом}}{\text{км}}$	6,76	19,5	233	304

$$5.4. L_1 = 0,415 \frac{\text{мкГн}}{\text{м}} ;$$

$$C_1 = 26,7 \frac{\text{пФ}}{\text{м}} ;$$

$$R_1 = 4,68 \frac{\text{Ом}}{\text{км}} ;$$

$$G_1 = 0.$$

5.5.

Данные	1	2	3
$L_1, \frac{\text{мкГн}}{\text{м}}$	0,277	0,3	0,358
$C_1, \frac{\text{пФ}}{\text{м}}$	100	92,3	31
$R_1, \frac{\text{мКОм}}{\text{м}}$	$109 \cdot 10^3$	$25,4 \cdot 10^3$	$18,8 \cdot 10^3$
$G_1, \frac{1}{\text{Ом}\cdot\text{м}}$	$1,26 \cdot 10^{-6}$	$0,116 \cdot 10^{-6}$	0

5.8.

Данные	1	2	3	4
$r, \text{Ом}$	503	490	114	217
$\beta, \frac{\text{неп}}{\text{км}}$	$21,7 \cdot 10^{-3}$	$82 \cdot 10^{-3}$	$38,5 \cdot 10^{-3}$	$78 \cdot 10^{-3}$
$m, \frac{\text{град}}{\text{м}}$	0,72	4,5	1,44	12

$$5.9. r = 49,5 \text{ Ом.}$$

$$5.10. \beta = 1,15 \frac{\text{неп}}{\text{км}} = 10 \frac{\text{дБ}}{\text{км}}$$

$$5.18. \lambda_A = 200 \text{ м.}$$

5.20.

Данные	1	2	3	4
$X_{вх}, \text{ом}$	21,6	586	-244	4530
$C_2, \text{пф}$	—	—	43,5	—
$L_2, \text{мкГн}$	0,0465	21,7	—	9,02

5.22.

№ пп.	1	2	3	4
$y, \text{м}$	26,3	0,22	0,374	125

5.24.

№ пп.	1	2	3	4
$X_{вх}, \text{ом}$	-14,7	-32,1	-65	-116

5.27.

№ пп.	1	2	3	4
$Z_{вх}, \text{ом}$	1 138	i 2165	i 230	- i 423

5.33.

№ пп.	1	2	3
$U_2, \text{в}$	129	388	96

5.35.

Данные	1	2	3	4
$U, \text{в}$	5000	618	177	37,1
$I, \text{а}$	43,5	7,32	0,353	0,475

5.38. $Q \approx 3590$.

5.40. $Q = 3770$.

5.41. $r_2 = 1,1 \text{ см.}$

5.42. $Q \approx 0,3 \sqrt{f_{2\text{ц}}} \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\left(\frac{1}{r_{1\text{см}}} + \frac{1}{r_{2\text{см}}} \right)}$.

5.43. $Q \approx 3800$.

5.44. $Z(\omega_0) = \frac{2 \rho^2}{R}$.

5.45. $Z(\omega_0) \approx 14\,000 \text{ ом.}$

5.47.

Данные	1	2	3
$Z_{\text{вх}}, \text{ ом}$	$500 + i\,110$	$420 + i\,90$	$898 + i\,1180$

5.50. $R_1 = 150 \text{ ом};$
 $R_2 = 100 \text{ ом.}$

5.52. $\alpha = 0,069$.

5.56. $\eta \approx 80\%$.

5.57. $U_1 = 20 \text{ в};$
 $P_2 = 2 \text{ вт.}$

5.58. $P_2 = 362 \text{ вт};$
 $U_2 = 602 \text{ в};$
 $I_2 = 1,2 \text{ а};$
 $\gamma_1 = 0,905;$
 $U_1 = 633 \text{ в.}$

5.59. $\eta = 0,75$.

5.61. Для линии с потерями $\gamma = \sqrt{(R_1 + i \omega L_1) \left[G_1 + i \left(\omega C_1 - \frac{1}{\omega L_1'} \right) \right]}$.

Для линии без потерь $\gamma = i \sqrt{\omega^2 L_1 C_1 - \frac{L_1}{L_1'}}$.

Распространение возможно при выполнении условия

$$L_1' > \frac{1}{\omega^2 C_1}.$$

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ § 6

6.3. Ответ см. в табл. 6.2.

6.5. Ответ см. в табл. 6.2.

6.7. 1) $A_{11} = 0,875 + i0,0628$;

$A_{12} = 17,5 + i38,1$;

$A_{21} = i0,00528$;

$A_{22} = 0,875 + i0,0628$.

2) $A_{11} = -1,11 - i0,604$;

$A_{12} = -4830 + i900$;

$A_{21} = 10^{-4} (0,756 - i2,64)$;

$A_{22} = -1,11 - i0,604$.

3) $A_{11} = 3,91 + i0,926$;

$A_{12} = 391 + i193$;

$A_{21} = 0,0092 - i0,029$;

$A_{22} = 1,92 - i2,9$.

6.9.

Кoeffициенты Примеры	A_{11}	A_{12}	A_{21}	A_{22}
a	1	$10 + i20$	$\frac{1}{50} (1 - i2)$	2
b	0,75	$7,5 + i10$	$i \frac{1}{40}$	$1 + i0,25$
c	$0,5 + i0,25$	$10 + i20$	$\frac{1}{160} (-1 + i6)$	$0,5 + i0,25$
d	$1 - i$	$80 - i10$	$-0,1i$	$4(1 - i)$

6.11. $Z_{11} = (10 - i140) \text{ ом}, \quad Y_{11} = (10 - i18,3) 10^{-3} \frac{1}{\text{ом}}$;

$Z_{12} = i160 \text{ ом}, \quad Y_{12} = (-10 + i21,7) 10^{-3} \frac{1}{\text{ом}}$;

$Z_{21} = -i160 \text{ ом}, \quad Y_{21} = (10 - i21,7) 10^{-3} \frac{1}{\text{ом}}$;

$Z_{22} = (-10 + i140) \text{ ом}, \quad Y_{22} = (-10 + i18,3) 10^{-3} \frac{1}{\text{ом}}$.

6.13. Ответ см. в табл. 6.2.

6.19. 1) $Z_{BX} = (23 + i 41,8) \text{ ом};$

2) $Z_{BX} = (3020 - i 2460) \text{ ом}.$

6.21. 1) 12,8 с. 2) 0,126 с. 3) 0,32 с. 4) 0,812 с.

6.24. 1) 63 ма; 2) 32 ма; 3) 310 ма.

6.26. 1) $I_1 = 133,5 \text{ ма}; \quad I_2 = 33,3 \text{ ма}; \quad U_2 = 16,7 \text{ в};$

2) $I_1 = 45,6 \text{ ма}; \quad I_2 = 5,88 \text{ ма}; \quad U_2 = 29,4 \text{ в};$

3) $I_1 = 60 \text{ ма}; \quad I_2 = 20 \text{ ма}; \quad U_2 = 20 \text{ в};$

4) $I_1 = 346 \text{ ма}; \quad I_2 = 38,5 \text{ ма}; \quad U_2 = 23,1 \text{ в}$

6.27. $U_2 \approx 13,7 \text{ в}.$

6.28. $U_2 \approx 3,5 \text{ в}.$

$$6.39. A_{11} = \frac{\omega^3 C^2 R^3 - 5\omega CR - i(6\omega^2 C^2 R^2 - 1)}{\omega^3 C^3 R^3};$$

$$A_{12} = - \frac{4\omega CR + i(3\omega^2 C^2 R^2 - 1)}{\omega^2 C^2 R^2};$$

$$A_{21} = \frac{(3\omega^2 C^2 R^2 - 1) - i 4\omega CR}{\omega^2 C^2 R^3 R};$$

$$A_{22} = \frac{\omega^2 C^2 R^2 - 1 - i 3\omega CR}{\omega^2 C^2 R^2}.$$

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ § 7

7.1. а) $K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}};$

б) $K(\omega) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}};$

в) $K(\omega) = \frac{x}{\sqrt{1 + \left(1 + \frac{R_{BH}}{R}\right)^2 x^2}};$

г) $K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{R_{BH}}{R}\right)^2 + y^2}};$

д) $K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{R_{BH}}{R}\right)^2 + \left(\frac{R_{BH}}{R}\right)^2 x^2}}.$

7.3.

1	2	3	4
1,59 мкс	3,18 мкс	195 мкс	14,3 мкс

7.7.

1	2	3	4
16 мкф	6,4 мкф	12,8 мкф	63,6 мкф

$$7.8. \quad 1) K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}};$$

$$2) K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left[\left(1 + \frac{R_i}{R}\right) - \omega^2 LC\right]^2 + \left[\omega RC \cdot \frac{R_i}{R} + \frac{\omega L}{R}\right]^2}}.$$

7.9. $K \approx 0,0038;$ $K \approx 0,38\%.$

7.13.

1	2	3	4
$L = 64 \text{ гн}$	$C = 50 \text{ мкф}$	$L = 102 \text{ гн}$	$C = 203 \text{ мкф}$

7.16.

Данные	1	2	3
$L_p, \text{ мгн}$	180	320	300
$C_p, \text{ пф}$	25	1400	210

7.18. Ответ даёт табл. 7.1.

7.20.

Данные	1	2	3	4	5
$L, \text{ гн}$	1,06	0,105	0,64	0,04	0,016
$C, \text{ мкф}$	1,06	0,24	0,16	0,04	0,064

7.22.

Данные	1	2	3	4
$1_n \frac{U_1}{U_2}, \text{ неп}$	4,96	4,13	1,94	4,15
$20 \lg \frac{U_1}{U_2}, \text{ дб}$	43,2	36	16,9	36,2
$\frac{U_1}{U_2}$	135	63	6,96	65

7.25.

№ пп.	1	2	3	4
α°	34°50'	60°20'	40°50'	47°

7.26. $f = 3420$ гц.

7.28.

Данные	1	2	3	4	5
L , мгн	796	79,5	7,95	16	39,8
C , мкф	0,0318	0,08	0,002	0,016	0,0016

7.29.

Данные	1	2	3	4	5
Затухание <i>нел</i>	4,15	2,63	1,39	5,55	3,4
Затухание <i>дб</i>	36	22,9	12,1	48,3	29,6
Фазовый угол <i>град</i>	60°	83°40'	60°	39°	56°

7.30.

Данные	1	2	3	4	5
f_n , гц	9 750	4 630	12 500	6 670	1 500
f_a , гц	26 200	19 300	28 200	12 450	15 300

7.31.

Данные	1	2	3
Z_c , ом	$i 1730$	$-i 423$	$-i 290$

7.32. $L_1 = 320$ мгн,
 $L_2 = 160$ мгн,
 $C_1 = 0,25$ мкф,
 $C_2 = 0,5$ мкф.

7.34.

№ пп.	f_1 Гц	f_2 Гц	P ом
1	163	960	400
2	690	2570	170

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ § 8

8.3. 1) $i = 2 \sin(\omega t + 90^\circ) + 0,5 \sin(5\omega t - 120^\circ)$.

2) $i = 85,5 \sin(\omega t - 69^\circ 30') + 10 \sin(3\omega t + 20^\circ)$;

$i_c = 10 \sin(\omega t + 90^\circ) + 10 \sin(3\omega t + 110^\circ)$.

8.7.

Амплитуды	Номер a гармоник					
	1	3	5	7	9	11
B_n	1,840	0,092	0,020	0,008	0,004	0,002
A_n	-2,89	-0,433	-0,160	-0,083	-0,051	-0,034

8.14. $I_D = 22,5$ ма.

8.21. $P = 1,245$ квт.

$P_G = 0,245$ квт.

$P_{\max} = 2,89$ квт.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ § 9

9.4. а) $Z_{\text{вкв}} = \frac{(R + i\omega L) R_i}{R_i + R + i\omega L}$;

$\bar{U}_{\text{вкв}} = \bar{U} \frac{R + i\omega L}{R + R_i + i\omega L}$;

$I_c = U \frac{\omega C \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}{\sqrt{(R_i + R - R_i \omega^2 LC)^2 + (\omega L + RR_i \omega C)^2}}$

б) $Z_{\text{вкв}} = i \frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC}$;

$$\bar{U}_{\partial K \theta} = \frac{\bar{U}}{1 - \omega^2 LC};$$

$$I = U \frac{1}{\sqrt{R^2(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega L)^2}};$$

$$9.6. \quad Z_{\partial K \theta} = \frac{2Z_1Z_2 + (Z_1 + Z_2)Z_{\partial H}}{Z_1 + Z_2 + 2Z_{\partial H}};$$

$$U_{\partial K \theta} = U \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2 + 2Z_{\partial H}}.$$

$$9.8 \quad R_{\partial K \theta} = \frac{R_{a_1} R_{a_2}}{R_{a_1} + R_{a_2}};$$

$$U_{\partial K \theta} = \frac{(E_a - E_0 - U)}{R_{a_1} + R_{a_2}} R_{a_1} + U + I \cdot$$

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ § 10

10.5. 1) Аналитическая запись

$$f(t) = \frac{E}{\tau/2} t \cdot 1(t) - 2 \frac{E}{\tau/2} \left(t - \frac{\tau}{2}\right) \cdot 1\left(t - \frac{\tau}{2}\right) + \frac{E}{\tau/2} (t - \tau) \cdot 1(t - \tau).$$

2) Операционное изображение

$$\overrightarrow{f}(p) = \frac{2E}{\tau} \frac{\left(1 - e^{-p \frac{\tau}{2}}\right)^2}{p^2}.$$

3) Выражение спектральной функции

$$S(i\omega) = \frac{E\tau}{2} \left(\frac{\sin \frac{\omega\tau}{4}}{\frac{\omega\tau}{4}} \right)^2 e^{-i \frac{\omega\tau}{2}}.$$

4) График модуля спектральной функции дан на рис. О.10.1.

10.7. 1) Операционное изображение

$$\overleftarrow{E e^{-\alpha t}} \alpha t = \frac{E\alpha}{(p + \alpha)^2}.$$

2) Спектральная функция

$$S(i\omega) = \frac{E\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} e^{-1 \operatorname{arctg} \frac{2\alpha\omega}{\alpha^2 - \omega^2}}.$$

3) График модуля спектральной функции дан на рис. О.10.2,

- 10.12. 1) $C_{17} = 0,099 \text{ с;}$
 2) $C_{11} = 0,57 \text{ с; } C_{95} = 0,047 \text{ с;}$
 3) $C_{11} = 0,04 \text{ с; } C_{95} = 0,037 \text{ с;}$
 4) $C_{13} = 0,04 \text{ с;}$
 5) $C_{510} = 0,0125 \text{ с.}$

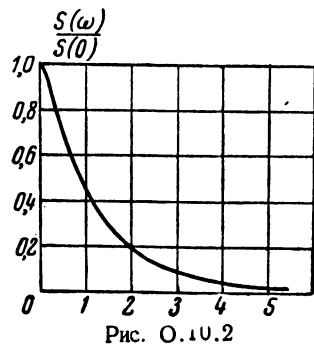
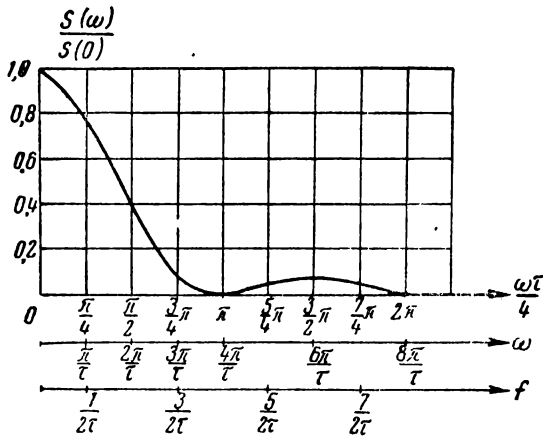


Рис. О.10.1

Рис. О.10.2

10.13.

$$C_n = E \frac{\tau}{T} \left(\frac{\sin n \frac{\pi}{2} \frac{\tau}{T}}{n \frac{\pi}{2} \frac{\tau}{T}} \right)^2$$

10.15. $C_0 = 0,1 \text{ с.}$

10.16. 1) $C_{110} = 0,01 \text{ с; } C_{350} = 0,009 \text{ с;}$

2) $C_{110} = 0,033 \text{ с; } C_{350} = 0,0016 \text{ с;}$

3) $C_{17} = 0,132 \text{ с.}$

10.17. $C_9 = 0,545 \text{ с.}$

10.19. 1) $\frac{\alpha}{p(p + \alpha)}$,

2) $\frac{p^2(\kappa + \omega) + \kappa \omega^2}{p^2(p^2 + \omega^2)}$;

3) $\frac{p}{(p + \alpha)^2}$;

$$4) \frac{p + 2\alpha - \beta}{(p + \alpha)^2};$$

$$5) \frac{\alpha - \beta}{(p + \alpha)(p + \beta)};$$

$$6) \frac{p \sin \alpha + \omega \cos \alpha}{p^2 + \omega^2}.$$

10.20.

$$1) \frac{\omega}{(p + \alpha)^2 + \omega^2};$$

$$2) \frac{1}{(p + \alpha)^2};$$

$$3) \frac{\beta}{(p + \alpha)^2 - \beta^2};$$

$$4) \frac{\omega \cos \alpha + (p + \alpha) \sin \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$$

$$5) \frac{1}{(p + \alpha + \beta)^2},$$

10.22

$$1) \overleftrightarrow{\cos \omega t} = \frac{p}{p^2 + \omega^2};$$

$$2) \overleftrightarrow{e^{-\alpha t} (\omega \cos \omega t - \alpha \sin \omega t)} = \frac{\omega p}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}.$$

10.28.

$$1) \frac{1}{\omega} \sin \omega t;$$

$$2) \frac{1}{\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega t;$$

$$3) \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{1}{\alpha^2 + \omega^2}} \sin(\omega t - \varphi) + \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} e^{-\alpha t}; \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega}{\alpha};$$

$$4) \sqrt{\frac{1}{\alpha^2 + \omega^2}} \cos(\omega t - \varphi) - \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} e^{-\alpha t}; \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega}{\alpha}.$$

10.30.

$$1) \frac{1}{a^2} (\operatorname{ch} at - 1);$$

$$2) \frac{1}{a^2} (1 - \cos at).$$

10.33.

$$1) (1 - at) e^{-\alpha t};$$

$$2) t e^{-\alpha t} \left(1 - \frac{1}{2} at \right);$$

$$3) \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha t};$$

$$4) e^{\mp at} \left[\frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \mp a \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right];$$

$$5) e^{-at} \left(1 - 2at + \frac{a^2 t^2}{2} \right);$$

$$6) te^{-at} \left(1 - at + \frac{a^2 t^2}{6} \right).$$

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ § 11

$$11.4. \quad 1) u_2(t) = E e^{-\frac{1}{RC} t};$$

$$2) u_2(t) = E (1 - e^{-at});$$

$$3) u_2(t) = E \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{1}{C(R_1 + R_2)} t}.$$

$$11.6. \quad 1) u_2(t) = \frac{E}{R_1 + R_2} \left\{ R_2 + \left[(R_1 + R_2) \frac{L_2}{L_1 + L_2} - R_2 \right] e^{-\frac{R_1 + R_2}{L_1 + L_2} t} \right\};$$

$$2) u_2(t) = E \frac{C_1}{C_1 + C_2} e^{-\frac{1}{R(C_1 + C_2)} t};$$

$$3) u_2(t) = E \left[\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - 1 \right) e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_2} \cdot \frac{1}{RC} t} \right].$$

$$11.8. \quad 1) u_2(t) = E \cos \omega_0 t;$$

$$2) u_2(t) = E (1 - \cos \omega_0 t).$$

$$11.9. \quad u(t) = \frac{I_0}{C \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}} e^{-\alpha t} \sin \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} t;$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

$$11.11. \quad u_2(t) = E \left[e^{-\frac{R}{L} t} \cdot 1(t) - e^{-\frac{R}{L} (t - \delta)} \cdot 1(t - \delta) \right].$$

$$11.13. \quad u_2(t) = \kappa t - \kappa RC \left(1 - e^{-\frac{1}{RC} t} \right).$$

$$11.16. \quad R = 100 \text{ } \Omega; \quad C = 10\,000 \text{ } \mu\text{Ф}.$$

11.18. Схема должна состоять из последовательно соединённых R , L и C .
 Параметры рассчитываются по формулам:

$$L = \frac{R_0}{\beta - \alpha};$$

$$R = R_0 \frac{\beta + \alpha}{\beta - \alpha};$$

$$C = \frac{1}{R_0} \frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta},$$

где $R_0 = \frac{E}{I_0}$.

11.20. $i(t) = \frac{U_0}{2\omega_0 L} (\omega_0 t \cos \omega_0 t + \sin \omega_0 t)$. При $t \gg \frac{1}{\omega_0}$

$$i(t) \approx \frac{U_0}{2L} t \cos \omega_0 t.$$

11.22. $i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{1}{RC} t}$.

11.26. $t_{св} = 72$ мксек.

11.30.

№ пп.	1	2	3	4
$t_{св}$, мксек	160	15,3	109	19
N	77	40	50	20

11.32. $t_m = \frac{1}{\alpha} = \frac{2L}{R};$

$$i_{\max} = 0,736 \frac{E}{R}.$$

11.33. $t_m = \frac{1}{\omega} \operatorname{Ar th} \frac{\omega}{\alpha};$

$$i_{\max} = \frac{E}{\omega L} e^{-\frac{\alpha}{\omega} \operatorname{Ar th} \frac{\omega}{\alpha}} \cdot \operatorname{sh} \left(\operatorname{Ar th} \frac{\omega}{\alpha} \right)$$

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ § 12

12.4. 1) $u_2 = E \left(1 - e^{-\frac{1}{RC} t} \right);$

2) $u_2 = E e^{-\frac{R}{L} t}.$

12.5. $i = \frac{U}{R} (1 - e^{-\alpha t}) \sin \omega_0 t; \quad \alpha = \frac{R}{2L}.$

12.11. Для отрезка времени $t_1 < t < t_2$

$$i = \frac{E}{R} \left[\frac{1 - e^{-\frac{R}{L} (1-\beta) T}}{1 - e^{-\frac{R}{L} T}} \frac{\frac{L}{R}}{\beta (1-\beta) T} e^{-\frac{R}{L} t} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\beta T} t - \frac{L}{R \beta T} - \frac{1}{2} \right].$$

Для отрезка времени $t_2 < t < t_3$

$$i = -\frac{E}{R} \left[\frac{1 - e^{-\frac{R}{L} \beta T}}{1 - e^{-\frac{R}{L} T}} \frac{\frac{L}{R}}{\beta (1-\beta) T} e^{-\frac{R}{L} t} + \right. \\ \left. + \frac{1}{(1-\beta) T} t - \frac{L}{(1-\beta) T} - \frac{1}{2} \right].$$

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ § 13

13.2. $u_2(t) = b \left(t - \frac{1}{\alpha} \right) + \frac{b}{\alpha} e^{-\alpha t}.$

Для схемы 1: $\alpha = \frac{1}{RC}.$

Для схемы 2: $\alpha = \frac{R}{L}.$

На рис. О.13.1 дан график выходного напряжения.

13.4. $u_2(t) = E \frac{\beta}{\alpha - \beta} (e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}).$

На рис. О.13.2 дан график выходного напряжения для случая $\beta \gg \alpha$. При этом условии

$$u_2(t) \approx Ee^{-\alpha t} - Ee^{-\beta t}.$$

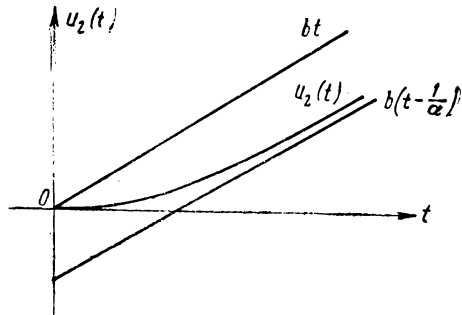


Рис. О.13.1

13.5.
$$u_2(t) = \frac{2b}{\alpha^2} (\alpha t - 1 + e^{-\alpha t}).$$

$$\alpha = \frac{1}{RC}.$$

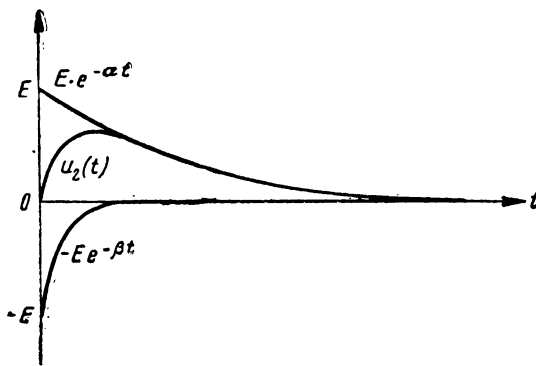


Рис. О.13.2

13.7.
$$u_2(t) = \frac{E}{\delta} \left[(t - RC) + RC e^{-\frac{1}{RC} t} \right] \cdot 1(t) -$$

$$- \frac{E}{\delta} \left[(t - \delta - RC) + RC e^{-\frac{1}{RC} (t - \delta)} \right] \cdot 1(t - \delta).$$

13.11. $u_2(t) = bt - \frac{b}{\omega_0} \sin \omega_0 t$.

График этой функции изображён на рис. О.13.3.

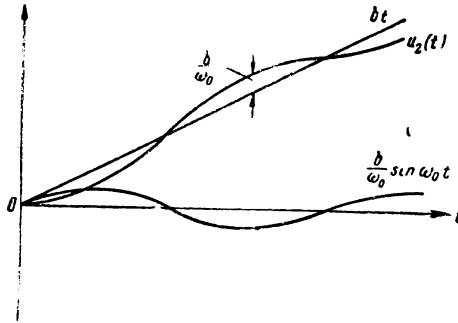


Рис. О.13.3

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ § 14

14.2. Амплитуда будет меняться медленно при условии $\Omega \ll \omega_0$.

14.3. Амплитуда будет меняться медленно при условии $M\Omega \ll \omega_0$.

14.7. $I(t) = \frac{\kappa}{R} t - \frac{\kappa}{R\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) = \frac{\kappa}{R\alpha} (\alpha t - 1 + e^{-\alpha t})$.

График изменения тока дан на рис. О.14.1.

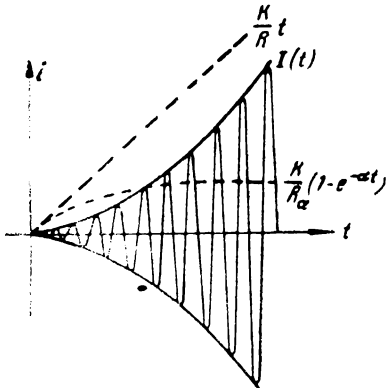


Рис. О.14.1

14.8. $I(t) = \frac{U_0}{2(\alpha - \beta)L} \left[\beta t \cdot e^{-\beta t} + \frac{t\beta}{\alpha - \beta} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) \right]$.

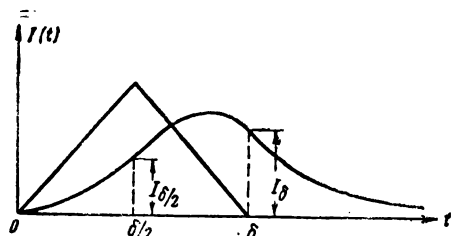


Рис. О.14.2

14.10. График изменения огибающей тока дан на рис. О.14.2.

Аналитическое выражение огибающей тока составляется из трёх выражений (начало координат переносится каждый раз в точку, соответствующую новому участку):

$$1) 0 < t < \frac{\delta}{2}, I(t) = \frac{U_0}{R\alpha \frac{\delta}{2}} [\alpha t - 1 + e^{-\alpha t}].$$

$$2) \frac{\delta}{2} < t < \delta, I(t) = \frac{U_0}{R} \left[1 + \frac{1}{\alpha \frac{\delta}{2}} - \frac{\alpha t}{\alpha \frac{\delta}{2}} - \frac{2 - e^{-\alpha \frac{\delta}{2}}}{\alpha \frac{\delta}{2}} e^{-\alpha t} \right].$$

$$3) \delta < t < \infty, I(t) = \frac{U_0}{R} \left[\frac{1}{\alpha \frac{\delta}{2}} - \frac{2 - e^{-\alpha \frac{\delta}{2}}}{\alpha \frac{\delta}{2}} e^{-\alpha \frac{\delta}{2}} \right] e^{-\alpha t}.$$

$$I_{\frac{\delta}{2}} = \frac{U_0}{R\alpha \frac{\delta}{2}} \left[\alpha \frac{\delta}{2} - 1 + e^{-\alpha \frac{\delta}{2}} \right].$$

$$I_{\delta} = \frac{U_0}{R\alpha \frac{\delta}{2}} \left[1 - \left(2 - e^{-\alpha \frac{\delta}{2}} \right) e^{-\alpha \frac{\delta}{2}} \right] e^{-\alpha t}.$$

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ § 15

15.2. $2\Delta f^* = 240$ гц.

15.3. $2\Delta f^* = 2\Omega$.

15.4. $2\Delta f^* = 10$ кГц.

НЕЛИНЕЙНЫЕ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ § 16

- 16.1. а) Линейная
 б) Нелинейная
 в) Параметрическая
 г) Нелинейно-параметрическая
 д) Параметрическая
 е) Нелинейная
 ж) Нелинейно-параметрическая
 з) Нелинейно-параметрическая

16.2. Параметрическому.

16.4. При выяснении закона изменения напряжения на конденсаторе схему следует рассматривать как параметрическую, считая сопротивление лампы переменным. При расчёте величины сопротивления лампы в зависимости от поданного на сетку напряжения эту часть схемы следует рассчитывать как нелинейную.

16.5. Общую схему следует разделить на две схемы:

1) схему, состоящую из генератора тока i_g и катушки L_1 , и 2) схему, состоящую из генератора напряжения u , катушки L_2 и сопротивления R_N .

Первая схема является нелинейной, так как индуктивность L_1 зависит от тока i_g .

Вторая схема в общем случае является нелинейно-параметрической, так как, во-первых, индуктивность L_2 меняется во времени в соответствии с законом изменения тока i_g и свойствами сердечника и, во-вторых, индуктивность L_2 зависит от тока i_2 в схеме L_2, R_N .

В частном случае малых изменений тока i_2 вторую схему можно считать чисто параметрической, если допустимо принять, что индуктивность L_2 не зависит от тока i_2 .

16.6. Схема является параметрической, так как сопротивление R , зависящее от освещённости, является функцией времени.

$$16.6. \quad i = \frac{1}{qR_0} (e^{qu} - 1).$$

$$16.9. \quad u = R_0 i + \frac{bi^2}{2}.$$

18.10.

№ пп.	G_{\sim}	R_{\sim}
1	$I_0 q e^{qu}$	$\frac{1}{I_0 q} e^{-qu}$
2	$\frac{1}{a + bi}$	$a + bi$
3	$\frac{I_0 q}{1 - qu}$	$\frac{1}{I_0 q} (1 - qu)$
4	$2au$	$\frac{1}{2au}$

$$18.11. \quad R_{\sim} = \frac{du}{di} = \frac{1}{I_0 q} \operatorname{ch}^2 qu.$$

График $R(u)$ дан на рис. О.16.1.

$$18.12. \quad R_{\sim} = U_0 \rho \frac{1}{\operatorname{ch}^2 pi}.$$

График $R(i)$ дан на рис. О.16.2.

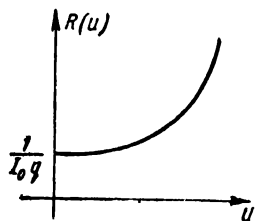


Рис. О.16.1

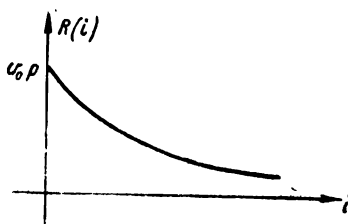


Рис. О.16.2

$$18.16. \quad R_{\sim} = \frac{u}{I_0 + S_a u}.$$

$$18.17. \quad R_{\sim} = \frac{R_{\sim}}{qu}.$$

При $u = 10 \text{ в}$ $R_{\sim} = R_{\sim} = 369 \text{ ом}$.

$$16.20. \quad i = a U_0^2 \sin^2 \omega t.$$

$$16.21. \quad u_L = L_0(1 - 2pt) \frac{di}{dt}.$$

$$16.22. \quad u_L = I_0 \Omega L_0(1 - 2p I_0 \sin \Omega t) \cos \Omega t$$

$$16.23. \quad i = C_0(1 - 2qu) \frac{du}{dt}.$$

$$16.24. \quad i = C_0 b(1 - 2qbt).$$

$$16.26. \quad i = \frac{U_0 \sin \omega t}{R_0(1 + m \sin^2 \Omega t)}.$$

$$16.27. \quad u_L = I_0 \omega L_0(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega t - I_0 \Omega L_0 m \sin \omega t \sin \Omega t$$

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ § 17

$$17.2. \quad i = \frac{5}{12} u + \frac{1}{24} u^2.$$

$$a_0 = i_0;$$

$$17.5. \quad a_1 = \frac{3i_0 - 4i_1 + i_2}{2 \Delta};$$

$$a_2 = \frac{i_0 - 2i_1 + i_2}{2 \Delta^2}.$$

$$a_0 = i_3;$$

$$17.6. \quad a_1 = \frac{8(i_4 - i_2) - (i_5 - i_1)}{12 \Delta};$$

$$a_2 = \frac{16(i_4 + i_2) - (i_5 + i_1) - 30i_3}{24 \Delta^2};$$

$$a_3 = \frac{(i_5 - i_1) - 2(i_4 - i_2)}{12 \Delta^3};$$

$$a_4 = \frac{(i_5 + i_1) - 4(i_4 + i_2) + 6i_3}{24 \Delta^4}.$$

$$17.8. \quad i_u = \frac{I_s}{2} \left[1 + \frac{S_0}{\frac{I_s}{2}} u_g - \frac{4}{27} \frac{S_0^3}{\left(\frac{I_s}{2}\right)^3} u_g^3 \right].$$

17.9. Проверка показывает, что данная функция мало пригодна для аппроксимации характеристики рис. 17.9, так как кривая построена в координатах r, u^3 существенно отличается от прямой (рис. О.17.1).

$$17.10. \quad i = \frac{I_s}{2} \left[1 + \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{u}{u_s} \right) \right].$$

$$17.13. \quad i = 0,5 e^{3iu}.$$

$$17.16. \quad 1) A = B = \frac{I_s}{2}; \quad q = \frac{2S}{I_s}.$$

$$2) A = B = I_0; \quad q = \frac{S}{I_0}.$$

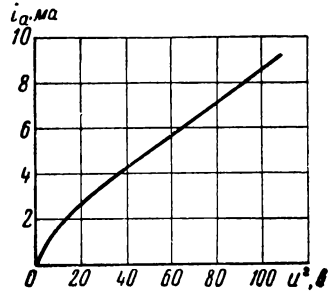


Рис. О.17.1

$$17.18. \quad I_{a_0} = 1,2 \text{ ма};$$

$$I_{a_1} = 1,6 \text{ ма};$$

$$I_{a_2} = 0,4 \text{ ма}.$$

$$17.19. \quad I_{a_0} = 20 \text{ ма};$$

$$I_{a_1} = 7,8 \text{ ма};$$

$$I_{a_2} = 5,4 \text{ ма}.$$

17.20. Доказательство вытекает из формул кратных дуг непосредственно (табл. 17.1).

$$17.21. \quad \kappa_3 = \frac{\frac{\gamma}{S} U_g^2}{4 - 3 \frac{\gamma}{S} U_g^2},$$

$$17.23. \quad I_{a_0} = 10,2 \text{ ма};$$

$$I_{a_1} = 16 \text{ ма};$$

$$I_{a_2} = 6,4 \text{ ма}.$$

$$17.24. \quad E_g = -6 \text{ в}.$$

$$17.25. \quad E_g = -12 \text{ в}.$$

$$17.26. \quad \theta = \frac{\pi}{2}.$$

$$17.29. \quad E \approx -0,6 \text{ в}.$$

$$17.30. \quad I_{a_0} \approx 5 \text{ ма};$$

$$I_{0_1} \approx 8,9 \text{ ма}$$

17.32. $I_{a_1} = 10,9 \text{ ма.}$

17.33. $I_{a_1} = 7,6 \text{ ма.}$

17.35. $I_0 = 11,3 \text{ ма;}$
 $I_{1\omega} = 6 \text{ ма;}$
 $I_{1\Omega} = 4 \text{ ма;}$
 $I_{2\omega} = 0,9 \text{ ма;}$
 $I_{2\Omega} = 0,4 \text{ ма;}$
 $I_{\omega - \Omega} = I_{\omega + \Omega} = 1,2 \text{ ма}$

17.36. $I_{a_0} = I_0;$
 $I_{1\omega} = SU_1 - \frac{3}{4} \gamma U_1^3 - \frac{3}{2} \gamma U_1$
 $I_{1\Omega} = SU_2 - \frac{3}{4} \gamma U_2^3 - \frac{3}{2} \gamma U_1^2 U_2.$
 $I_{3\omega} = \frac{\gamma}{4} U_1^3; \quad I_{3\Omega} = \frac{\gamma}{4} U_2^3;$
 $I_{2\omega - \Omega} = I_{2\omega + \Omega} = 3 \gamma U_1^2 U_2;$
 $I_{\omega - 2\Omega} = I_{\omega + 2\Omega} = 3 \gamma U_1 U_2^2.$

17.39. $I_{a_2} = 1,41 \text{ ма.}$

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ § 18

18.2. $R = 200 \text{ ом.}$

18.3. $t = 0,23 \text{ ма,}$
 $u = 360 \text{ в.}$

18.4. $i_1 = 0,51 \text{ ма,}$
 $i_2 = 0,15 \text{ ма,}$
 $E = 310 \text{ в.}$

18.5. $E = 30 \text{ в.}$

18.7. $u = \frac{1}{2aR} (\sqrt{1 + 4aRE} - 1).$

18.8. $i = \frac{Ra^2}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4E}{R^2 a^2}} - 1 \right).$

18.11. Для выпрямителя с характеристикой $i = bu^2$ $\frac{I_2}{I_0} = 1.$

Для выпрямителя с характеристикой $i = a|u|$ $\frac{I_2}{I_0} = \frac{2}{3}.$

18.13. $U_K = 50,4 \text{ в.}$

18.14. $E_g \approx 9,6 \text{ в.}$
 $I_{a2} \approx 0,5 \text{ ма.}$

18.15. Характеристика должна быть составлена из отрезков прямых. Наилучшей является характеристика вида $i = a |u|$.

18.16. $i = au^2$.

18.17. $i = a \left(u - \frac{4}{3U^2} u^3 \right)$.

Здесь U — амплитуда приложенного напряжения.

18.18. $R(t) = \frac{U_0}{I_0} \frac{1}{2 \cos \Omega t} - R$.

18.22. Характеристика должна быть нечётной функцией относительно рабочей точки, т. е. должны отсутствовать члены с чётными степенями.

18.24. Амплитудная модуляция невозможна, так как для образования комбинационных колебаний второго порядка необходимы члены чётных степеней в характеристике.

18.25. $i_\omega = a_1 U_\omega \left(1 + \frac{2a_2}{a_1} U_1 \sin \Omega_1 t + \frac{2a_2}{a_1} U_2 \sin \Omega_2 t \right) \sin \omega t$.

18.26. Характеристика нелинейного элемента не должна содержать членов с нечётными степенями.

18.28. Нельзя, так как появление комбинационных колебаний второго порядка обязано тем членам характеристики нелинейного элемента, которые вызывают и появление чётных гармоник.

18.29. $I_{a1} = \frac{I_s}{4} [\text{th } q (u_{3\Omega} + U_\omega) - \text{th } q (u_{3\Omega} - U_\omega)]$.

18.30. $I_{a1} = 86 \text{ ма.}$

18.32. $i = U_0 G_0 \left(1 + \frac{U_\Omega}{U_0} \sin \Omega t \right) (1 + m \sin \omega t)$.

18.33. $R(t) = R_0 (1 + m \sin \Omega t)$.

18.34. Члены, содержащие чётные степени.

18.37. $I_d = \frac{I_{00}}{2} (\text{ch } a U_\omega - 1)$.

При $a U_\omega \ll 1$

$$I_d = \frac{I_{00}}{2} \frac{a^2 U_\omega^2}{2}$$

$$18.38. \quad I_d = \frac{a_2 U_\omega^2}{2}.$$

$$18.39. \quad I_d = \frac{I_s}{4} \left\{ \operatorname{th} q E_g - \frac{1}{2} \left[\operatorname{th} q (U_\omega + E_g) - \operatorname{th} q (U_\omega - E_g) \right] \right\}.$$

$$18.40. \quad K_{Hu} = \sqrt{\frac{\frac{m_1^4}{4} + \frac{m_2^4}{4} + 4m_1^2 m_2^2}{4m_1^2 + 4m_2^2}}.$$

Если $m_2 = 0$, то $K_{Hu} = \frac{m_1}{4}$.

2) Если $m_1 = m_2 = m$, то $K_{Hu} = \frac{3}{4} m$.

$$18.41. \quad I_d \approx 0,32 S U_\omega.$$

$$18.42. \quad I_p = a_2 U_1 U_2.$$

18.43. Характеристика должна быть квадратичной функцией относительно осей ординат.

$$18.44. \quad I_p = \frac{S}{4} [\operatorname{th}^2 q (E_g + U_2) - \operatorname{th}^2 q (E_g - U_2)] U_C.$$

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ § 19

$$19.2. \quad \frac{du}{dt} + \frac{d}{dt} f(u) R + \frac{1}{C} f(u) = \frac{de}{dt};$$

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} f \left(e - u_C - RC \frac{du_C}{dt} \right);$$

$$i = C \frac{du_C}{dt}.$$

$$19.3. \quad \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = \frac{1}{C} f(e - u_C);$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{RC} u + \frac{1}{C} f(u) = \frac{de}{dt} + \frac{1}{RC} e.$$

$$19.4. \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i + \frac{1}{L} \varphi(i) - \frac{e}{L} = 0.$$

$$19.5. \quad \frac{di}{dt} + \frac{1}{RC} i + \frac{1}{R} \frac{d}{dt} \varphi(i) = \frac{1}{R} \frac{de}{dt}.$$

или

$$\frac{di}{dt} \left[1 + \frac{1}{R} \varphi'(i) \right] + \frac{1}{RC} i = \frac{1}{R} \frac{de}{dt}.$$

$$19.6. \quad \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{RC} i_2 + \frac{1}{R} \frac{d}{dt} \varphi(i_2) = \frac{di}{dt}$$

или

$$\frac{di_2}{dt} \left[1 + \frac{1}{R} \varphi'(i_2) \right] + \frac{1}{RC} i_2 = \frac{di}{dt}.$$

$$19.8. \quad \frac{du}{dt} + \frac{1}{C} f(u) + \frac{1}{RC} u = \frac{1}{RC} e;$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{C} I_0 e^{au} + \frac{1}{RC} u = \frac{1}{RC} e.$$

$$19.9. \quad \frac{d}{dt} \varphi(i) + \frac{1}{C} i = \frac{de}{dt}$$

или

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{C \varphi'(i)} i = \frac{1}{\varphi'(i)} \frac{de}{dt}.$$

$$19.11. \quad \frac{di}{dt} + \frac{\frac{d}{dt} L(i) + R}{L(i)} i = \frac{1}{L(i)} e;$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L_0(1-2bi)} i = \frac{1}{L_0(1-2bi)} e.$$

$$19.16. \quad \tau = -a(1-x) - \ln x.$$

При $a = 0$ $\tau = -\ln x$, $x = e^{-\tau}$.

$a = 1$ $\tau = x - 1 - \ln x$.

Здесь

$$x = \frac{u}{E}; \quad \tau = \frac{t}{RC_0}; \quad a = 2qE.$$

При этих обозначениях кривые разряда конденсатора совпадают с кривыми свободного процесса в схеме нелинейной индуктивности и линейного активного сопротивления (см. задачу 19.15).

$$19.17. \quad \tau = -\ln \frac{q_0 u}{\sqrt{1 - q^2 u^2}}.$$

$q_0 = \frac{\sqrt{1 - q^2 E^2}}{E}$ — постоянная интегрирования.

19.22. 1) Уравнение изоклины: $x = 1 - \kappa$. График интегральной кривой дан на рис. О.19.1.

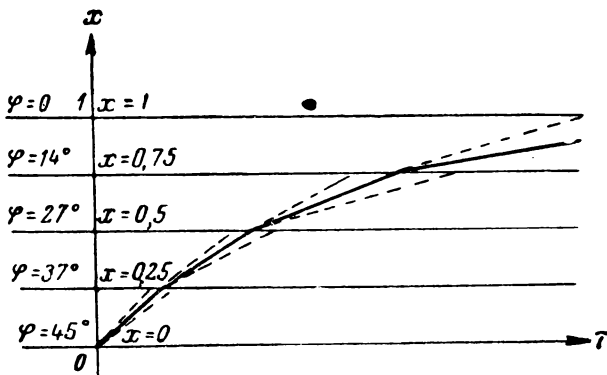


Рис. О.19.1

2) Уравнение изоклины: $x = -\kappa$. График интегральной кривой дан на рис. О.19.2.

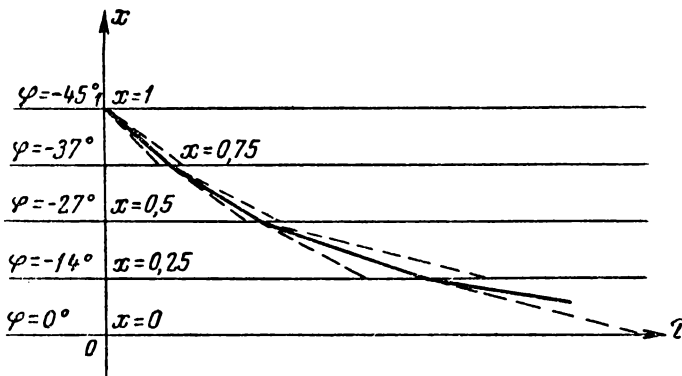


Рис. О.19.2

19.27. Ответ даётся табл. 19.1.

19.31. $y = 1 + x - 2x^2;$

$u_0 = E;$

$y = \frac{dx}{d\tau}; x = \frac{u}{E}; \tau = \frac{R_0}{L} t.$

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ § 20

20.2. $Q > 44,3$.

20.7. 1) Условие баланса фаз даёт

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}; C_0 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

2) Условие баланса амплитуд

$$\mu > \frac{C_2}{C_1}.$$

- 20.10. 1) Генерация возможна.
 2) Генерация невозможна.
 3) Генерация невозможна.
 4) Генерация невозможна.
 5) Генерация возможна.
 6) Генерация возможна.
 7) Генерация возможна.
 8) Генерация невозможна.

20.13. 1) Баланс фаз

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{\sqrt{6 + 4 \frac{R_2}{R}}}.$$

2) Баланс амплитуд

$$\mu > \frac{R_i}{R_2} \left[29 + 23 \frac{R_2}{R} + 4 \left(\frac{R_2}{R} \right)^2 \right].$$

В этих формулах

$$R_2 = \frac{R_i R_a}{R_i + R_a}.$$

При условии $R_i \ll R_a$; $R_i \ll R$, получаем:

1. Баланс фаз

$$\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{6} RC}.$$

2. Баланс амплитуд

$$\mu > 29.$$

20.15.

$$\omega_0 = \frac{1}{RC};$$

$$K(\omega_0) > 3.$$

20.16. Три поддиапазона:

- 1) $f = 300 \div 3000$ гц; $R_1 = 1,77$ Мом;
 2) $f = 3 \div 30$ кгц; $R_2 = 177$ ком;
 3) $f = 30 \div 300$ кгц; $R_3 = 17,7$ ком.

20.17. Генерация возможна, так как выполняется условие

$$|R_{отп}| < R_{\alpha};$$

$$5 \cdot 10^4 \text{ ом} < 10^5 \text{ ом}.$$

20.18. Генерация возможна только при лампе с характеристикой, изображённой на рис. 20.19б.

20.19. 1) Если $i_a = S u_g$, то $\frac{di_a}{du_g} \approx S$. Тогда $R < \frac{MS}{C}$ и $M > \frac{RC}{S}$.

2) Если $i_a = S(u_g + D u_a)$, а $\frac{u_a}{u_g} \approx -\frac{L}{M}$, то $i_a = S(u_g - D \frac{L}{M} u_g)$ и

$$\frac{di_a}{du_g} = S - SD \frac{L}{M}.$$

Тогда

$$R < \frac{M}{C} \left(S - SD \frac{L}{M} \right)$$

или

$$M > LD + \frac{RC}{S}.$$

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ § 21

21.1. Графики кривых $S_{cp} = \varphi(U_g)$ даны на рис. О.21.1а и б.

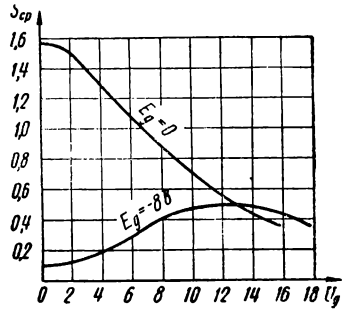
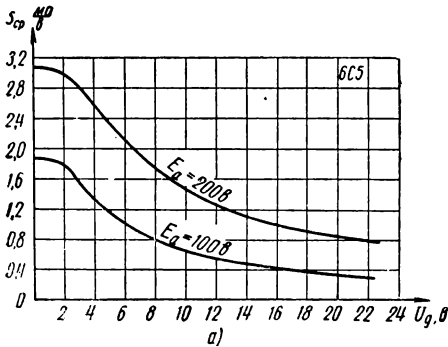


Рис. О.21.2

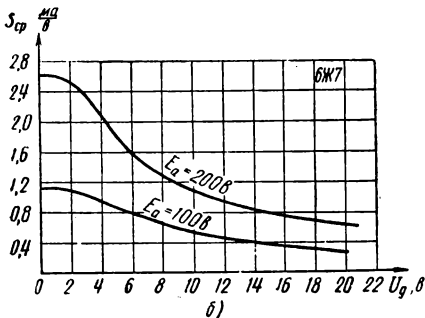


Рис. О.21.1

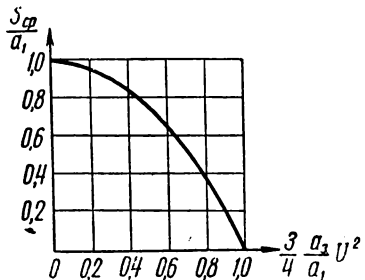


Рис. О.21.3

21.2. Графики кривых $S_{cp} = \varphi(U_g)$ даны на рис. О.21.2.

21.3. Коэффициент a_3 должен быть отрицательным.

$$S_{cp} = a_1 - \frac{3}{4} a_3 U^2 = a_1 \left(1 - \frac{3}{4} \frac{a_3}{a_1} U^2 \right).$$

График $S_{cp}(U)$ изображён на рис. О.21.3.

Границы, в которых формула для S_{cp} имеет смысл, следующие:

$$0 < U < 2 \sqrt{\frac{a_1}{3a_3}}.$$

21.4. Качественный график кривой S_{cp} дан на рис. 0.21а; график S_{cp} для заданной характеристики — на рис. 0.21.4б.

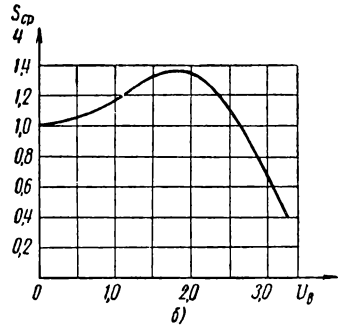
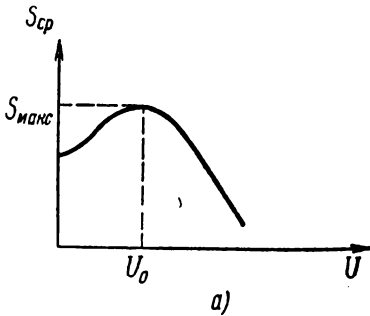


Рис. О.21.4

Для графика рис. 0.21.4б: $S_{max} \approx 4 \cdot 1,35 \frac{ma}{a}$; $U_0 = 1,93$ в.

21.6.
$$S_{cp} = S \frac{\text{th } q U_g}{q U_g}.$$

График, построенный по этому выражению, дан на рис. О.21.5.



Рис. О.21.5

21.7.
$$S_{cp} = 2aI_0 \frac{B_1(aU_g)}{aU_g}.$$

График, построенный по этому выражению, дан на рис. О.21.6.

$$21.10. \quad U_{гсм} = \frac{2}{\sqrt{3a_3}} \sqrt{a_1 - \frac{RC}{M - LD}}$$

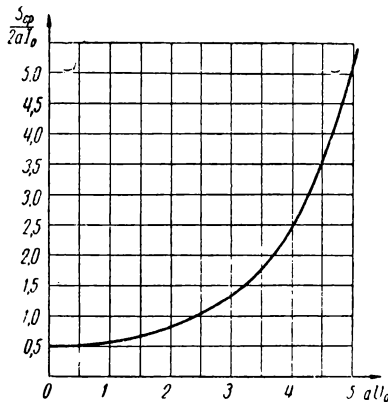


Рис. О.21.6

$$21.11. \quad U_{гсм} = 2 \sqrt{\frac{a_1 - RC \frac{L + L_1}{LL_1}}{3a_3}}$$

$$21.12. \quad U_{гсм} = 2 \sqrt{\frac{a_1 R_2 - 29 - 23 \frac{R_2}{R} - 4 \left(\frac{R_2}{R}\right)^2}{3a_3 R_2}}$$

$$21.14. \quad M \approx 8,3 \text{ мксн.}$$

$$21.15. \quad U_{гсм} = 9 \text{ в.}$$

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ § 22

$$22.12. \quad y_A = -\frac{1}{2} x;$$

$$y_B = 0;$$

$$y_C = -\frac{1}{3} x;$$

$$y_D = -x.$$

Построение дано на рис. О.22.1.

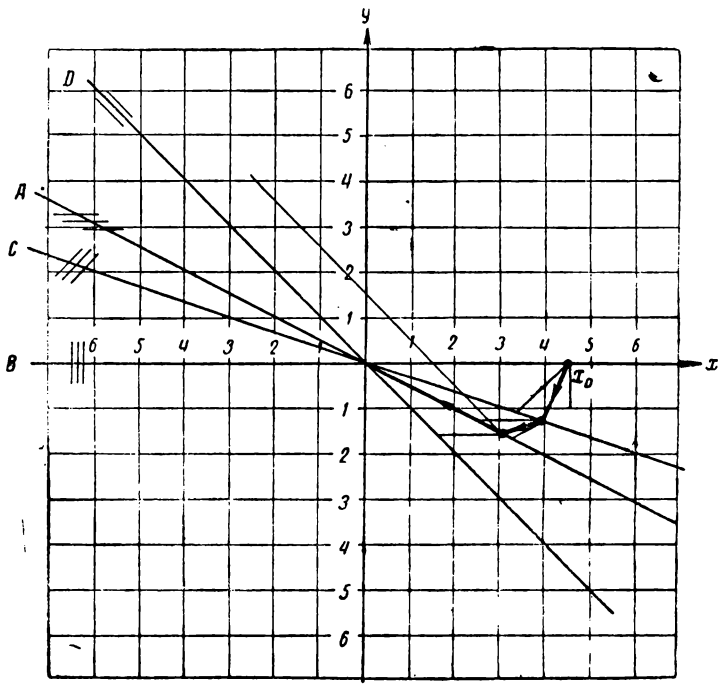


Рис. 0.22.1

22.13. Фазовое изображение дано на рис. 0.22.2.
Уравнение изоклины

$$y = \frac{10x}{2 - 10x - 1,33x^2}$$

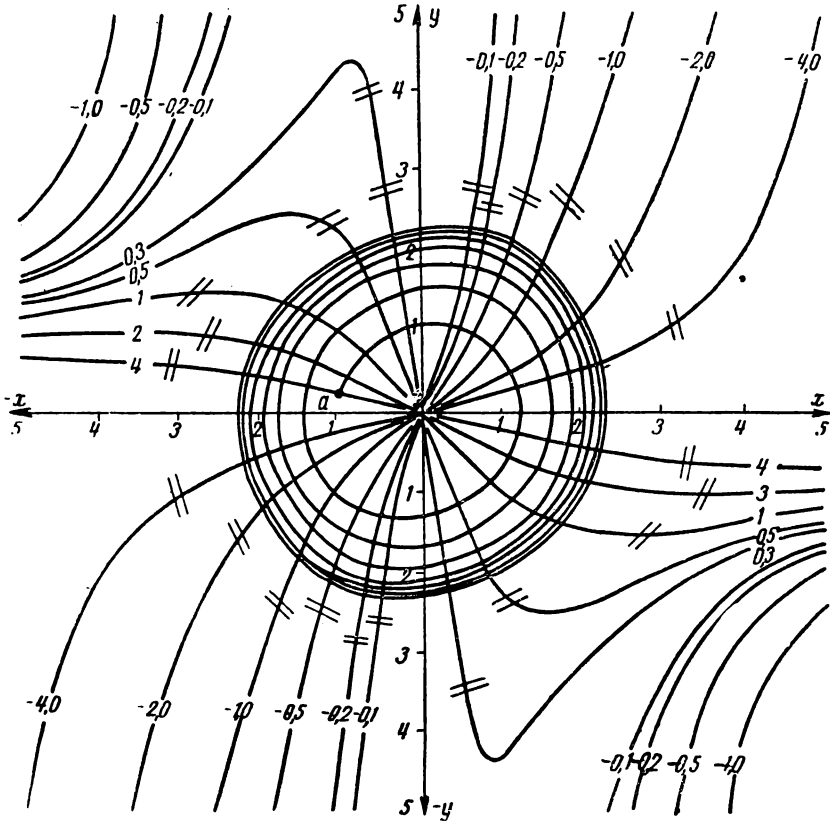


Рис. 0.22.2

Обозначения

$$\tau = \omega \phi;$$

$$x = q\mu_g;$$

$$q = \frac{2S}{I_s}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Котельников и А. М. Николаев. Основы радиотехники. Связьиздат. Ч. 1, 1950, ч. 2, 1954.
 2. Э. В. Зелях. Основы общей теории линейных электрических схем. Издательство АН СССР, 1951
 3. А. А. Харкевич. Спектры и анализ. Гостехиздат, 1953.
 4. К. Ф. Теодорчик. Автоколебательные системы. Гостехиздат, 1952.
 5. Б. П. Асеев. Основы радиотехники. Связьиздат, 1947.
 6. Н. Н. Крылов. Теоретические основы радиотехники. „Морской транспорт“. 1953.
 7. Л. А. Меерович, Л. Г. Зеличенко. Импульсная техника. „Советское радио“, 1954.
 8. В. И. Раков, С. Я. Шац. Основы импульсной техники. Издательство ВМА им. А. Н. Крылова. Ч. 1 — 5, 1951 — 1954.
 9. А. В. Нетушил, С. В. Страхов. Основы электротехники, ч. 2. Госэнергоиздат, 1955
 10. В. Л. Крейцер. Видеоусилители. „Советское радио“, 1952.
 11. Н. Н. Крылов. Полоса пропускания контура, необходимая для неискаженного воспроизведения импульсных колебаний различной формы. Труды ЛЭИС, выпуск V, 1949.
 12. Н. Н. Крылов. Задачник по судовой радиотехнике. „Морской транспорт“, 1950.
 13. И. А. Зайцев и А. Г. Лурье. Задачник по теоретическим основам электротехники. Госэнергоиздат, 1952.
 14. Под редакцией К. А. Круга и др. Задачник по теоретическим основам электротехники. Госэнергоиздат, 1948.
 15. Д. Ф. Масанов. Задачник по радиотехнике. Воениздат, 1949.
 16. А. С. Садовский. Сборник задач по курсу „Теория электрической связи“. Связьиздат, 1954.
 17. М. К. Белкин. Расчёт гетеродина приёмника. Издание КПИ, 1949.
 18. Ю. И. Соколовский. Задачник по теоретическим основам радиотехники. Издание ЛКВИА, 1951.
-

СОДЕРЖАНИЕ

	Задачи	Решения и указания к ре- шениям	Ответы
Предисловие	3		
Таблица некоторых условных обозначений	5		
Часть I			
Установившийся режим в линейных системах			
§ 1. Частотные характеристики линейных систем	9	227	431
§ 2. Последовательный колебательный контур	13	234	433
§ 3. Параллельный колебательный контур	19	240	434
§ 4. Связанные контуры	28	249	436
§ 5. Цепи с распределёнными постоянными (длинные линии)	46	269	438
§ 6. Четырёхполюсники	65	285	442
§ 7. Электрические фильтры	84	305	443
§ 8. Установившийся режим при несинусоидальном воздействии	93	314	446
§ 9. Теоремы об эквивалентных генераторах напряжения и тока	99	323	446
Часть II			
Переходные процессы в линейных системах			
§ 10. Основы спектральных и операционных представлений	103	327	448
§ 11. Исследование переходных процессов на основе применения спектральных и операционных методов	122	339	451
§ 12. Исследование переходных процессов на основе наложения установившегося и свободного процессов	132	352	453
§ 13. Изучение переходных процессов на основе временных методов (метод интеграла Дюамеля)	137	360	453
§ 14. Исследование переходных процессов в избирательных системах на основе метода медленно меняющихся амплитуд	141	364	455
§ 15. Основания к расчёту полосы пропускания линейных цепей	146	368	456
Часть III			
Нелинейные и параметрические системы			
§ 16. Нелинейные и параметрические системы	149	373	457
§ 17. Аппроксимация характеристик нелинейных элементов. Методы гармонического анализа в нелинейной радиотехнике	159	376	459

	Задачи	Решения и указания к ре- шениям	Ответы
§ 18. Установившийся режим в безынерционных нелинейных и параметрических системах. Основные преобразования спектра	177	384	461
§ 19. Переходные процессы в нелинейных и параметрических системах первого порядка	189	387	463
§ 20. Генерация синусоидальных колебаний нелинейными системами. Условия самовозбуждения	200	402	466
§ 21. Генерация синусоидальных колебаний нелинейными системами. Стационарная амплитуда первой гармоники . . .	209	412	467
§ 22. Переходные и установившиеся процессы в избирательных нелинейных системах	213	415	469
Литература	472		

Александр Михайлович Заездный
СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ
ПО КУРСУ
„Теоретическая радиотехника“

Отв. редактор *П. Г. Каранчук*
Редактор *А. И. Воронова*
Техн. редактор *Н. В. Риттбергер*
Корректоры *Е. Н. Каплина, Е. А. Куканова*

Сдано в набор 10/VIII 1956 г. Подписано к печати 4/III 1957 г. Форм. бум. 60×92/16. 29,75 печ. л. 25,30 уч.-изд. л. Зак. изд. 7146. Тираж 25 000. Т-02128 Связьиздат, Москва-центр, Чистопрудный бульвар, 2
Цена 10 руб. 35 коп.

Типография Связьиздата, Москва-центр.
ул. Кирова, 40. Зак. тип. 659

