С. В. Синакевич

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

УЧПЕДГИЗ ~ 1959

С. В. СИНАКЕВИЧ

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Москва 1959

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Тригонометрия очень долгое время имела своей основной задачей решение треугольников. Этим объясняется и самое ее название, происходящее от греческих слов «тригонон» — треугольник и «метрейн» — измерение.

В настоящее время содержание и цели тригонометрии стали значительно шире. Тригонометрия играет большую роль в физике и технике при изучении главным образом периодических явлений.

Тригонометрия представляет собой раздел математики, посвященный изучению особого класса функций, называемых тригонометрическими.

В настоящем пособии для учителей мы рассматриваем свойства тригонометрических функций, оставаясь в рамках элементарного изложения и в основном в пределах содержания школьной программы. Для определения и изучения свойств функций мы используем имеющее большое значение в свете политехнического образования понятие вектора и проекции вектора на ось.

Мы надеемся, что читатель сможет использовать рассмотренные в пособии приемы и методы в своей практической работе.

До непосредственного изучения тригонометрических функций и их свойств рассматриваются (глава I и глава II) основные геометрические понятия (вектор и его проекция на ось, угол между двумя направлениями, измерение угла). На материале, рассмотренном в этих главах, основано изучение всего последующего. В конце каждого параграфа приведены упражнения, рекомендуемые читателю.

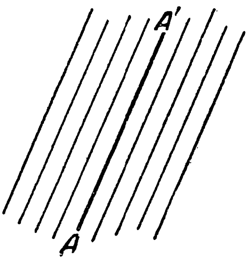
Считаю своим долгом выразить глубокую благодарность Б. А. Лурье и профессору С. И. Амосову за их ценные указания и советы в подготовке книги.

Все отзывы и замечания по книге просьба направлять по адресу: Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41, Учпедгиз, редакция математики.

ГЛАВА I

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О ВЕКТОРАХ.

Рассмотрим на плоскости совокупность всех прямых, параллельных данной прямой AA' (включая и эту прямую) (см. черт. 1).

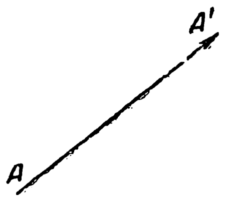


Черт. 1.

Если дана такая совокупность прямых, то будем говорить, что на плоскости задано направление прямой AA' (или любой другой прямой данной совокупности прямых). Две прямые называются *одинаково направленными*, если они параллельны (или совпадают).

Если мы не ограничиваемся заданием направления прямой на плоскости, но, кроме этого, еще указываем, какое из двух возможных направлений (от A к A' или от A' к A) считается положительным, то такая прямая называется *ориентированной прямой* или *осью*. На чертеже направление оси указывается стрелкой (см. черт. 2).

Условимся обозначать ось строчной буквой латинского алфавита со стрелкой над буквой, например $\vec{m}$.



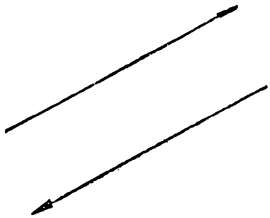
Черт. 2.

Черт. 3.

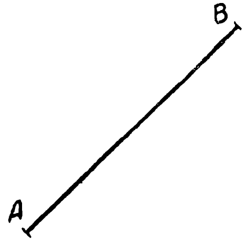
Две оси называются *одинаково направленными*, если они параллельны или совпадают и одинаково ориентированы (см. черт. 3).

Две оси называются *противоположно направленными* или антипараллельными, если они параллельны или совпадают и различно ориентированы (см. черт. 4).

Как известно, отрезок прямой определяется двумя ограничивающими его точками. Для обозначения отрезка достаточно обозначить буквами его крайние точки, каждая из которых называется концом отрезка. Таким образом, AB и BA обозначают один и тот же отрезок (см. черт. 5).

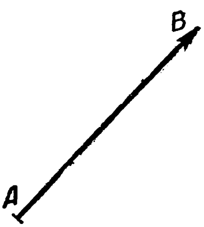


Черт. 4.

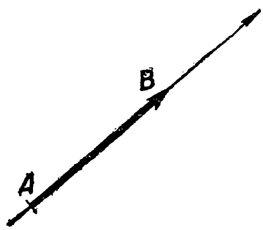


Черт. 5.

Точка может непрерывно двигаться по отрезку в двух противоположных направлениях (от A к B и от B к A). Ориентируем этот отрезок, т. е. выберем одно из этих двух возможных направлений. Отрезок, направление которого задано, называется **вектором**. Крайние точки вектора называются началом и концом вектора, а направлением вектора является направление от начала к концу. Мы будем обозначать вектор символом $\overrightarrow{AB}$, где A начало вектора, B конец вектора, или одной прописной буквой латинского алфавита со стрелкой над ней, например: $\overrightarrow{M}$. На чертеже направление вектора обозначается стрелкой (см. черт. 6).



Черт. 6.



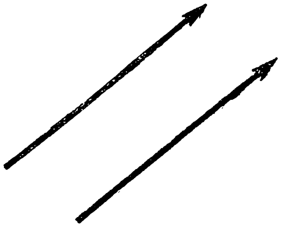
Черт. 7.

Длиной вектора называется расстояние между началом вектора и его концом. Вместо термина «длина вектора» часто употребляется термин «модуль вектора». Длину вектора (модуль) мы будем обозначать соответственно символом AB или M без стрелки над этими буквами.

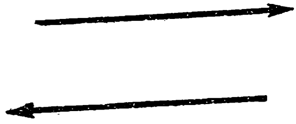
Ось, проходящую через начало и конец вектора и совпадающую с вектором по направлению, назовем **осью вектора**. Следовательно, направление вектора мы отождествляем с направлением его оси (см. черт. 7).

Два вектора $\vec{R}_1$ и $\vec{R}_2$ называются равными, если равны их длины ($R_1 = R_2$) и оси их одинаково направлены (см. черт. 8).

Из определения равенства двух векторов следует, что для однозначного определения вектора достаточно указать длину вектора и направление вектора (направление его оси).



Черт. 8.

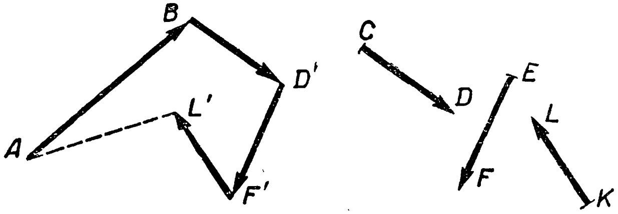


Черт. 9.

Два вектора называются противоположными, если длины векторов равны, а оси векторов противоположно направлены (см. черт. 9).

Многие физические величины (сила, скорость, ускорение, количество движения и др.) определяются не только их числовым значением, но и направлением. Такие величины изображаются при помощи векторов и называются векторными величинами. Иногда векторную величину называют просто вектором, т. е. говорят, например, что сила есть вектор. Физические величины, которые определяются только числовым значением (время, температура, объем и др.) называются скалярными величинами или просто скалярами.

Суммой двух или нескольких векторов называется вектор, построенный следующим образом: оставив первый вектор неподвижным, совмещают посредством параллельного переноса начало



Черт. 10.

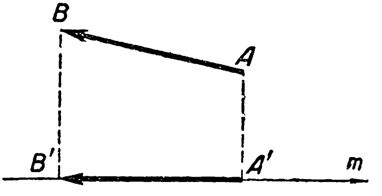
второго вектора с концом первого, начало третьего вектора с концом второго и т. д. и строят вектор, началом которого является начало первого слагаемого, а концом — конец последнего (см. черт. 10).

Правило нахождения суммы векторов называется **правилом многоугольника**, а в случае сложения двух векторов—правилом треугольника или правилом параллелограмма. Например, равнодействующая двух сил, приложенных к одной и той же точке тела, определяется, как известно из физики, по правилу параллелограмма.

Проекция вектора на ось.

Пусть дана ось $\vec{m}$ и вектор $\vec{R}$, расположенный в той же плоскости. Спроектируем начало A и конец B вектора $\vec{R}$ на ось $\vec{m}$. Ось $\vec{m}$ называется в этом случае **осью проекций** (см. черт. 11).

Рассмотрим вектор $\overrightarrow{A'B'}$, началом и концом которого являются соответственно проекции начала и конца вектора $\vec{R}$ на ось $\vec{m}$. Направление вектора $\overrightarrow{A'B'}$ или совпадает с направлением оси проекций или противоположно направлению этой оси.



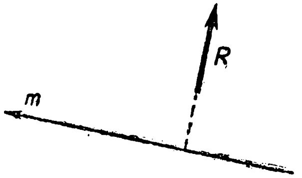
Черт. 11.

Проекцией вектора $\vec{R}$ на ось $\vec{m}$ назовем длину вектора $\overrightarrow{A'B'}$, взятую со знаком плюс, если направление вектора $\overrightarrow{A'B'}$ совпадает с направлением оси проекций и со знаком минус, если направление вектора $\overrightarrow{A'B'}$ противоположно направлению оси проекций.

Если проекция начала вектора совпадает с проекцией его конца, то проекция вектора равна нулю.

Проекцию вектора $\vec{R}$ на ось $\vec{m}$ будем обозначать символом R_m.

Из определения проекции вектора на ось вытекают нижеследующие семь теорем, доказательство которых читатель без труда может выполнить самостоятельно.



Черт. 12.

1. Проекция вектора на ось по абсолютному значению не превосходит длины вектора:

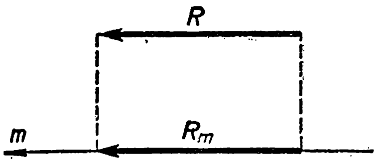
$$|R_m| \leqslant R.$$

2. Проекция вектора на ось, перпендикулярную вектору, равна нулю (черт. 12).

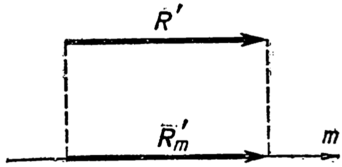
3. Проекция вектора на ось, параллельную вектору, по абсолютному значению равна длине вектора (см. черт. 13 и 14).

4. Проекции вектора на одинаково направленные оси равны (черт. 15).

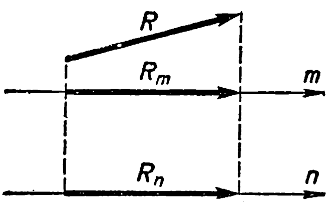
5. Проекции вектора на противоположно направленные оси равны по абсолютному значению и противоположны по знаку (черт. 16).



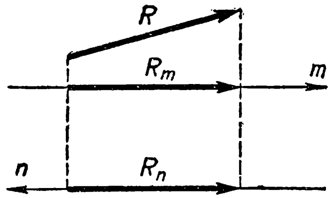
Черт. 13.



Черт. 14.

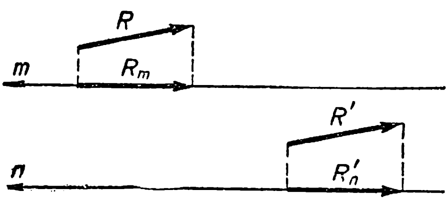


Черт. 15.

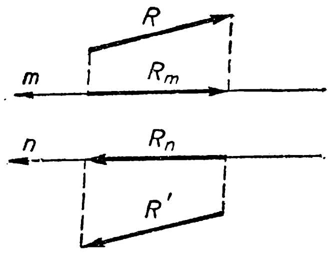


Черт. 16.

6. Проекции равных векторов на одну и ту же или на одинаково направленные оси равны (см. черт. 17).



Черт. 17.



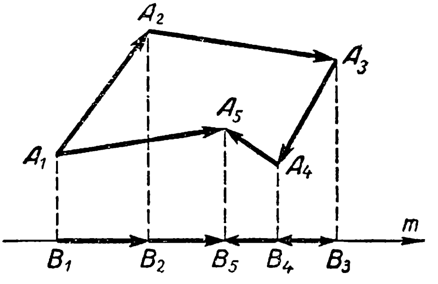
Черт. 18.

7. Проекции противоположных векторов на одну и ту же или на одинаково направленные оси равны по абсолютному значению и противоположны по знаку (см. черт. 18).

Докажем теорему: *Проекция суммы векторов на некоторую ось равна сумме проекций слагаемых векторов на эту ось.*

На чертеже 19 векторы $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, $\overrightarrow{A_3A_4}$, $\overrightarrow{A_4A_5}$ являются слагаемыми векторами, а вектор $\overrightarrow{A_1A_5}$ — их суммой. Построим проекции слагаемых векторов на ось $\vec{m}$.

Получаем векторы B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, B_4B_5, расположенные так, что конец предшествующего вектора совпадает с началом последующего. Суммой этих векторов является вектор, начало которого является началом первого слагаемого, а конец — концом последнего слагаемого, т. е. вектор B_1B_5. Но B_1 является проекцией точки A_1, а B_5 проекцией точки A_5. Следовательно, проекция суммы векторов на некоторую ось равна сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось.



Черт. 19.

Очевидно, доказательство сохраняет силу при любом числе слагаемых векторов и при произвольном расположении их на плоскости.

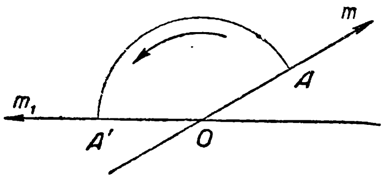
ГЛАВА II

ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ ОБ УГЛЕ.

§ 1. Измерение углов.

Рассмотрим некоторую ось $\vec{m}$, вращающуюся в данной плоскости вокруг неподвижной точки O, лежащей на этой оси. Пусть в процессе вращения ось $\vec{m}$ заняла новое положение $\vec{m}_1$.

Каждая точка A (отличная от точки O) оси $\vec{m}$ описывает дугу $\overset{\frown}{AA'}$ радиуса $OA = r$ (см. черт. 20).



Черт. 20.

Длину дуги $\overset{\frown}{AA'}$ обозначим буквой l. Из курса геометрии известно, что отношение длины дуги l к длине радиуса r не зависит от длины радиуса. Величину отношения $\frac{l}{r}$ будем называть **числовой мерой угла** AOA'. В дальнейшем, для краткости, числовую меру угла будем называть углом (подобно тому как вместо «длина стороны треугольника» говорят «сторона треугольника» и т. п.):

$$\angle AOA' = \frac{l}{r}.$$

Из определения следует, что угол, отождествляемый с отношением $\frac{l}{r}$, измеряется *отвлеченным* (безразмерным) числом, не зависящим ни от величины радиуса, ни от величины единицы длины.

Если угол рассматривать как числовую меру вращения, то существенным является и направление вращения. Условимся называть направление вращения и соответствующий угол поворота положительным, если направление вращения противоположно направлению вращения часовой стрелки, и отрицательным, если направление вращения совпадает с направлением вращения часовой стрелки. Два угла называются равными, если равны их алгебраические значения, т. е. если они равны по абсолютному значению и имеют один и тот же знак.

Если длина дуги $\overset{\frown}{AA'}$, описываемая произвольной точкой A оси $\vec{m}$, вращающейся около неподвижной точки O «против часовой стрелки», равна длине радиуса OA (т. е. $l = r$), то в соответствии с определением угла и с принятым условием о знаке угла

$$\angle AOA' = 1.$$

Угол, числовая мера которого равна единице, принято называть **радианом**. Радиан является единицей измерения в изложенной выше системе измерения углов. Поэтому эта система называется **радианной**. Радианная система измерения углов является наиболее употребительной и в математике и в ее технических приложениях.

Из курса геометрии известно, что отношение длины окружности к длине ее диаметра есть постоянное иррациональное число, обозначаемое греческой буквой π, т. е. если радиус окружности равен r, то длина окружности равна $2\pi r$.

Существуют различные методы вычисления π с любой степенью точности. Не останавливаясь на этих методах, укажем приближенное значение π с точностью, более чем достаточной для обычных расчетов.

$$\pi = 3{,}1415926535897\ldots$$

Если ось $\vec{m}$ в процессе вращения «против часовой стрелки» сделает полный оборот, т. е. новое направление $\vec{m}_1$ совпадет с направлением $\vec{m}$, то длина дуги $\overset{\frown}{AA'}$ будет равна длине окружности радиуса r. В этом случае

$$\angle AOA' = \frac{l}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi.$$

Взяв значение π с известной степенью точности, можно получить приближенные значения угла, соответствующего полному обороту в положительном направлении. Например, этот угол равен 6,28 с точностью до 0,01; 6,283 с точностью до 0,001; 6,2832 с точностью до 0,0001 и т. д.

Если ось $\vec{m}$ сделает полный оборот в результате вращения в отрицательном направлении, «по часовой стрелке», то соответствующий угол равен -2π, или приближенно $-6{,}28$ (с точностью до 0,01), $-6{,}283$ (с точностью до 0,001) и т. д.

Если ось $\vec{m}$, вращаясь в положительном направлении, сделает половину оборота, то соответствующий угол, так называемый развернутый угол, равен $\frac{\pi r}{r} = \pi$, т. е. приближенно равен 3,14 (с точностью до 0,01) 3,142 (с точностью до 0,001), 3,1416 (с точностью до 0,0001) и т. д.

Если в результате вращения «против часовой стрелки» новое направление оси образует с первоначальным прямой угол, т. е. половину развернутого, то в радианной системе измерения этот угол равен $\frac{\pi}{2}$, т. е. приближенно 1,57 (с точностью до 0,01), 1,571 (с точностью до 0,001), 1,5708 (с точностью до 0,0001) и т. д.

В течение часа минутная стрелка на часах сделает полный оборот в отрицательном направлении, т. е. повернется на угол, равный -2π, за полчаса она повернется на угол $-\pi$, за четверть часа — на угол $-\frac{\pi}{2}$. Часовая стрелка за один час сделает одну двенадцатую часть полного оборота в отрицательном направлении, следовательно, угол ее поворота равен $-\frac{2\pi}{12}=-\frac{\pi}{6}$.

Нетрудно установить связь между радианной системой измерения углов и другими системами, например весьма употребительной, особенно в геометрии, градусной системой измерения.

В связи с введенным соглашением о знаке угла, известное из геометрии определение углового градуса должно быть сформулировано следующим образом: *угловым градусом называется одна трехсотшестидесятая часть полного оборота* «против часовой стрелки». Градусная мера полного оборота в положительном направлении равна по этому определению 360°.

Определим градусную меру угла, равного α. Мы подразумеваем под α радианную меру угла. Так мы будем поступать и в дальнейшем: если не указано, в какой системе измерения задан угол, то подразумевается его радианная мера.

Обозначим число градусов, содержащихся в угле, равном α, через n. Тогда можно составить пропорцию:

$$n^\circ : 360^\circ = \alpha : 2\pi.$$

Следовательно,

$$n^\circ = \frac{\alpha}{\pi}\cdot 180^\circ. \qquad (1)$$

Если известна градусная мера угла, то из той же пропорции определим его радианную меру:

$$\alpha = \frac{\pi n}{180}. \qquad (2)$$

Примеры:

1. Чтобы определить градусную меру угла, равного единице, т. е. радиана, произведем вычисление n при $\alpha = 1$:

$$n^\circ = \frac{180^\circ}{\pi}.$$

С точностью до 10^{-3} градуса

$$n^\circ \approx \frac{180^\circ}{3{,}1416} \approx 57{,}296^\circ.$$

2. Определим радианную меру угла в 10°, т. е, вычислим α при $n = 10$. Получим:

$$\alpha = \frac{\pi\cdot 10}{180} = \frac{\pi}{18}.$$

С точностью до 10^{-4}

$$\alpha \approx \frac{3{,}1416}{18} \approx 0{,}1745.$$

Соотношения (1) и (2) являются, очевидно, следствиями друг друга. Из этих соотношений устанавливаем, что при рациональном α число n иррациональное, а при рациональном n число α иррациональное, так как π, как известно, является иррациональным числом.

В частности, из соотношения:

$$n^\circ = \frac{180^\circ}{\pi}$$

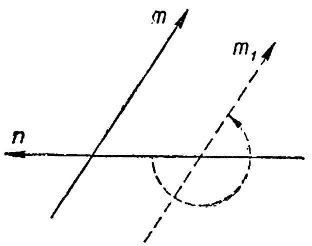
следует, что градус несоизмерим с единицей.

§ 2. Угол между двумя направлениями.

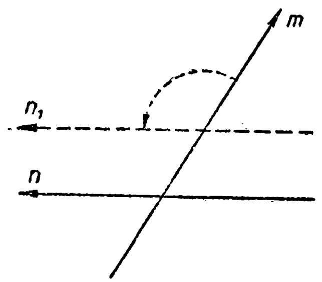
При изучении геометрии рассматривается понятие угла между двумя отрезками или между двумя прямыми. Угол при этом всегда считается не только положительным, но и ограниченным по величине. Углы выпуклого многоугольника, например углы любого треугольника, не превышают π. Угол между двумя радиусами окружности не превышает 2π.

Исходя из потребностей физики и техники, мы, связывая понятие угла с понятием о вращательном движении, можем рассматривать углы, неограниченные по абсолютной величине (положительные или отрицательные).

Пусть мы имеем две оси, лежащие в одной плоскости. Углом между этими двумя осями назовем угол, на который должна по-



Черт. 21, *а*.



Черт. 21, *б*.

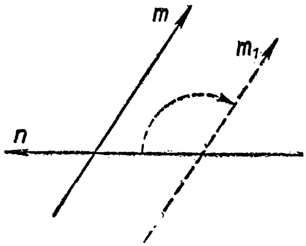
вернуться вокруг любой своей точки одна из осей при неподвижной другой оси, чтобы эти оси стали одинаково направленными.

Подвижную ось будем называть в дальнейшем «начальной», а неподвижную—«конечной».

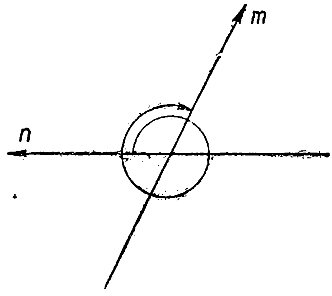
Некоторые из возможных значений угла между осями $\vec{m}$ и $\vec{n}$ указаны на чертеже 21 *а*, *б*, *в* и *г*.

Угол на этих чертежах обозначен дуговой стрелкой; новое положение начальной оси обозначено пунктиром.

На чертеже 21, *г* угол между осями $\vec{m}$ и $\vec{n}$ отрицателен, но по абсолютному значению он превосходит 2π, так как начальная ось $\vec{n}$ сделала более одного полного оборота для того, чтобы совпасть с осью $\vec{m}$.



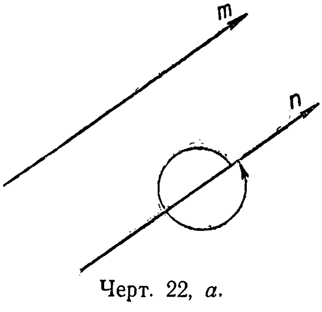
Черт. 21, *в*.



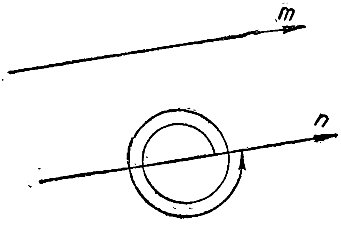
Черт. 21, *г*.

Таким образом устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством различных поворотов и множеством действительных чисел: каждому повороту (каждому углу) соответствует определенное действительное число, и, наоборот, каждому числу соответствует определенный угол.

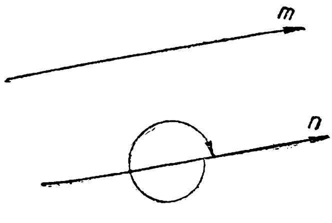
Угол между двумя одинаково направленными осями может равняться либо нулю, если никакого вращения не было; либо 2π, если начальная ось сделала один полный оборот в положительном направлении (см. черт. 22, *а*); либо 4π, если начальная ось сделала два полных оборота в положительном направлении (см. черт. 22, *б*); либо -2π, если начальная ось сделала один полный оборот в отрицательном направлении (см. черт. 22, *в*) и т. д. Следовательно, угол между двумя одинаково направленными осями равен $2\pi k$, где k любое целое число (положительное, отрицательное или нуль).



Черт. 22, *а*.



Черт. 22, *б*.

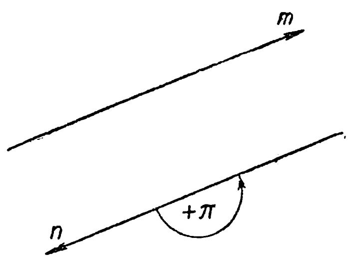


Черт. 22, *в*.

Возьмем две противоположно направленные оси $\vec{m}$ и $\vec{n}$. Наименьший положительный угол между ними равен π (см. черт. 23, *а*). Действительно, начальной оси достаточно повернуться на половину оборота против часовой стрелки, чтобы она совпала по направлению с конечной осью. Если начальная ось повернулась на половину оборота «по часовой стрелке», то она тоже совпадет по направлению с конечной осью (см. черт. 23, *б*). В этом случае угол между противоположно направленными осями $\vec{m}$ и $\vec{n}$ равен $-\pi$.

Некоторые из возможных значений угла между противоположно направленными осями указаны дуговой стрелкой на чертеже 23 *в*, *г*, *д*.

Все возможные значения угла двумя противоположно направленными осями охватываются формулой $\pi + 2\pi k$, где k любое целое число (положительное, отрицательное или нуль).



Черт. 23, *а*.

Действительно, при $k = 0$, этот угол $= \pi$; при $k = 1$, угол $= 3\pi$; при $k = 2$, угол равен 5π; при $k = -1$, угол $= -\pi$; при $k = -2$, угол $= -3\pi$ и т. д.

Для однозначного определения угла между двумя осями достаточно указать:

а) какая из данных двух осей является начальной;

б) направление вращения;

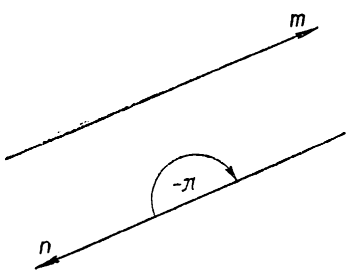
в) число полных оборотов.

На чертеже 24 указан угол между осями $\vec{m}$ и $\vec{n}$ при условии, что

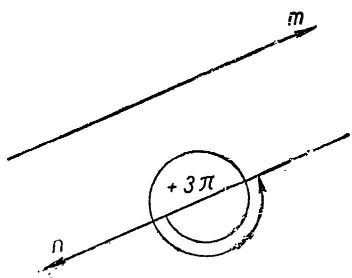
а) ось $\vec{m}$ начальная;

б) направление вращения — отрицательное;

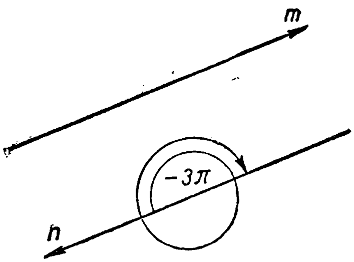
в) число полных оборотов равно единице.



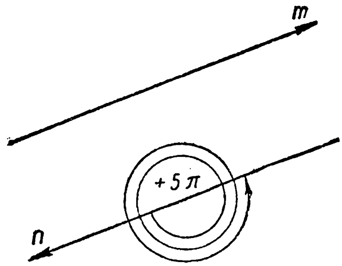
Черт. 23, *б*.



Черт. 23, *в*.



Черт. 23, *г*.



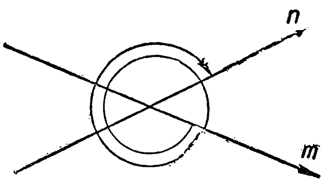
Черт. 23, *д*.

Одно из определенных значений угла между осями $\vec{m}$ и $\vec{n}$ будем обозначать символом

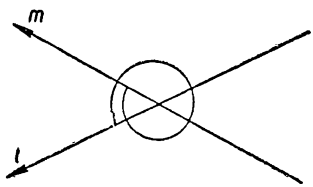
$$(\widehat{m,\ n}),$$

где на первом месте условимся указывать начальную ось. Следовательно, если записан символ $(\widehat{m,\ n})$, то мы предполагаем, что в условии оговорено и направление вращения и число полных оборотов (ось $\vec{m}$ — начальная).

Например, на чертеже 25 дуговой стрелкой изображен угол



Черт. 24.



Черт. 25.

$(\widehat{m,\ l})$ при условии, что направление вращения положительно и число полных оборотов равно единице.

Упражнения.

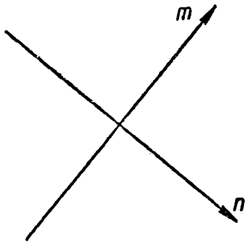
1. Определить угол между двумя взаимно перпендикулярными осями, изображенными на чертеже 26 при условии, если а) ось $\vec{m}$ начальная, б) вращение происходит «против часовой стрелки» и в) число полных оборотов равно единице.

2. Пусть наименьший по абсолютной величине угол между осями на чертеже 27 равен —2. Какая ось является начальной? Определить наименьший положительный угол при тех же условиях?

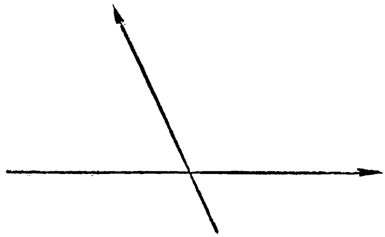
3. На чертеже 28 дана ось $\vec{l}$ и точка О. Построить вторую ось так, чтобы она проходила через точку О и образовала с данной осью угол, равный:

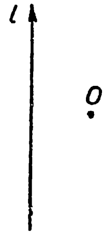
$$1.\ \frac{5}{4}\pi; \quad 2.\ \frac{-\pi}{4}; \quad 3.\ \frac{3\pi}{4}; \quad 4.\ -\frac{2\pi}{3}.$$

Углом между вектором и данной осью назовем угол между осью вектора и данной осью; при этом данная ось всегда считается начальной; поэтому угол между вектором $\vec{R}$ и осью $\vec{m}$ обозначается: $(\widehat{m, R})$ (черт. 29).



Черт. 26.


Черт. 27.

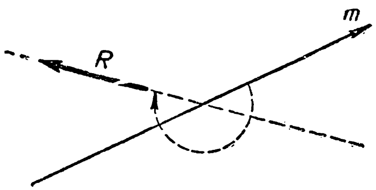


Черт. 28.

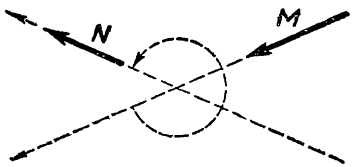
Углом между двумя векторами $\vec{M}$ и $\vec{N}$ назовем угол между осями этих векторов, обозначаемый $(\widehat{M, N})$, если начальной осью является ось вектора $\vec{M}$, и $(\widehat{N, M})$, если начальной осью является ось вектора N.

На чертеже 30 изображен угол $(\widehat{M, N})$.

Угол между вектором и осью и угол между двумя векторами,



Черт. 29.

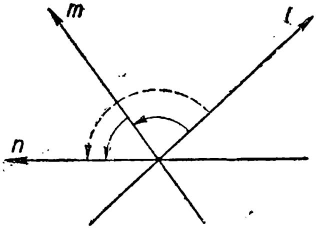


Черт. 30.

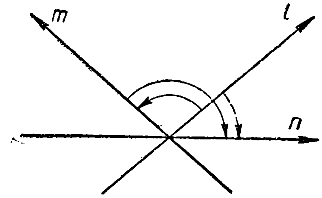
очевидно, как и угол между двумя осями, многозначно определяется заданным вектором и осью или заданными двумя векторами. Для однозначного определения угла между этими направлениями достаточно задать вышеуказанные условия. В случае угла между вектором и осью, когда по определению начальная ось задана, таких условий должно быть только два; направление вращения и число полных оборотов.

Правило цепи для углов. Пусть мы имеем на плоскости три оси $\vec{l}$, $\vec{m}$, $\vec{n}$. Для упрощения чертежа выберем их так, чтобы они все пересекались в одной точке. Возьмем какие-нибудь определенные значения углов $(\widehat{l, m})$ и $(\widehat{m, n})$ (см. черт. 31 *а*, *б*, *в*, *г*).

Как бы ни были расположены оси $\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}$, сумма определенных значений углов $(\widehat{l, m})$ и $(\widehat{m, n})$ равна одному из значений угла $(\widehat{l, n})$, т. е.



Черт. 31, *а.*

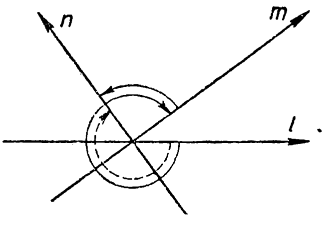


Черт. 31, *б.*

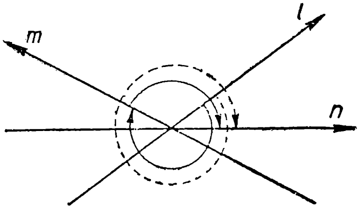
$$(\widehat{l, m}) + (\widehat{m, n}) = (\widehat{l, n}).$$

Эта формула выражает так называемое правило цепи для углов.

Действительно, угол $(\widehat{l, m})$, представляет собой угол поворота оси $\vec{l}$ до совпадения по направлению с осью $\vec{m}$, а угол $(\widehat{m, n})$ —



Черт. 31, *в.*



Черт. 31, *г.*

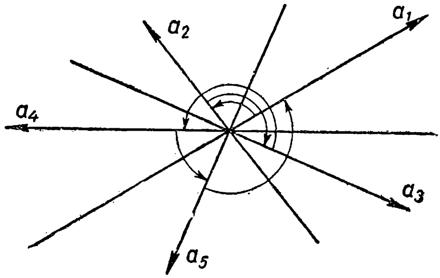
угол поворота оси $\vec{m}$ до совпадения по направлению с осью $\vec{n}$. В результате этих двух поворотов ось $\vec{l}$ совпадает по направлению с осью $\vec{n}$. На чертеже 31 *а, б, в, г,* изображены конкретные случаи применения правила цепи для углов.

Применяя те же рассуждения, можно обобщить правило цепи на любое число осей. Обозначая оси буквой a с указанием номера, получаем, если число осей n, нижеследующую запись:

$$(\widehat{a_1, a_2}) + (\widehat{a_2, a_3}) + (\widehat{a_3, a_4}) + \ldots + (\widehat{a_{n-1}, a_n}) = (\widehat{a_1, a_n}).$$

Правило цепи можно записать и в таком виде:

$$(\widehat{a_1, a_2}) + (\widehat{a_2, a_3}) + (\widehat{a_3, a_4}) + \ldots + (\widehat{a_{n-1}, a_n}) + (\widehat{a_n, a_1}) = 2\pi k,$$
где k одно определенное целое число.



Черт. 32.

Действительно, на основании правила цепи для углов имеем:

$$(\widehat{a_1, a_2}) + (\widehat{a_2, a_3}) + (\widehat{a_3, a_4}) + \ldots + (\widehat{a_{n-1}, a_n}) + (\widehat{a_n, a_1}) = (\widehat{a_1, a_1}).$$

Но $(\widehat{a_1, a_1}) = 2\pi k$, как угол между двумя одинаково направленными осями.

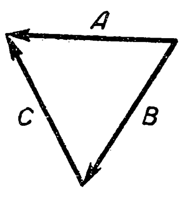
На чертеже 32 дана иллюстрация правила цепи для пяти осей.

Упражнения.

1. Три вектора $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$, длины которых равны, расположены так, как указано на чертеже 33. Определить наименьшие положительные значения углов $(\widehat{A, B})$, $(\widehat{A, C})$, $(\widehat{B, C})$, $(\widehat{B, A})$, $(\widehat{C, A})$, и $(\widehat{C, B})$.

2. Определить угол, на который поворачиваются секундная, минутная и часовая стрелки за сутки.

3. Часы отстали на 1 час. 30 мин. На какой угол «по часовой стрелке» необходимо повернуть минутную стрелку, чтобы часы показывали верное время? (Перевод стрелок предполагается мгновенным.)



Черт. 33.

4. Два зацепляющиеся зубчатых колеса имеют 18 зубьев и 40 зубьев. Меньшее из колес («ведущее») приводит во вращательное движение большее колесо («ведомое»). На какой угол должно повернуться ведущее колесо, чтобы ведомое повернулось на полный оборот «по часовой стрелке».

5. Часы отстали на t мин. Для приведения стрелок в правильное положение минутную стрелку часов вращают в отрицательном направлении с постоянной угловой скоростью $\omega \frac{1}{мин}$. Определить угол, на который необходимо повернуть минутную стрелку, чтобы часы показывали верное время (предполагается, что во время перевода стрелки механизм часов не работает).

6. В котором часу направления часовой и минутной стрелок совпадают?

7. В котором часу направления часовой и минутной стрелок противоположны?

8. Дано $(\widehat{m, R}) - (\widehat{n, R}) = 2\pi k$. Доказать, пользуясь правилом цепи для углов, что оси $\vec{m}$ и $\vec{n}$ одинаково направлены.

9. Оси $\vec{m}$ и $\vec{n}$ антипараллельны. Доказать, пользуясь правилом цепи для углов, что для произвольного вектора $\vec{R}$ справедливо равенство:

$$(\widehat{m, R}) - (\widehat{n, R}) = \pi(2k + 1).$$

10. Два угла α и β называются равными с точностью до $2\pi k$, если $\alpha - \beta = 2\pi k$ (где k любое целое число). Доказать, пользуясь правилом цепи для углов, что два угла, образуемые соответственно одинаково направленными осями, равны, с точностью до $2\pi k$.

Ответ. 1. $(\widehat{A, B}) = \frac{\pi}{3}$; $(\widehat{A, C}) = \frac{5}{3}\pi$; $(\widehat{B, C}) = \frac{4}{3}\pi$; $(\widehat{B, A}) = \frac{5}{3}\pi$; $(\widehat{C, A}) = \frac{\pi}{3}$; $(\widehat{C, B}) = \frac{2}{3}\pi$. 2. -2880π; -48π; -4π. 3. -3π. 4. $+\frac{40}{9}\pi$. 5. $-\dfrac{\pi t}{30 - \dfrac{\pi}{\omega}}$. 6. $t = \frac{12k}{11}$ час. 7. $t = \frac{6(2k+1)}{11}$ час.

ГЛАВА III

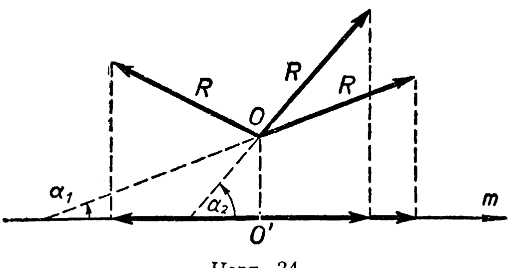
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ УГЛА И ИХ СВОЙСТВА.

На основе понятия о векторе и его проекции на ось дадим определения тригонометрических функций угла между вектором и осью и установим их свойства.

§ 1. Определение косинуса угла и его свойства.

Из главы I «Краткие сведения о векторах» ясно, что проекция вектора на ось зависит от длины вектора. Покажем, что проекция вектора на ось зависит также от угла между вектором и этой осью так, что каждому значению угла соответствует определенная величина проекции вектора на эту ось.

Выберем произвольный вектор $\vec{R}$ и будем вращать этот вектор вокруг его начала, обозначенного буквой O, в каком-нибудь направлении, например в направлении «против часовой стрелки».



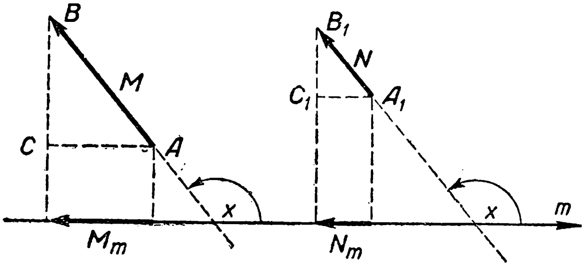
Черт. 34.

Проектируем этот вектор в каждом из занимаемых им положений на неподвижную ось $\vec{m}$, выбранную произвольно. Как это видно из чертежа 34, проекция вектора на ось изменяется вместе с изменением угла между вектором и этой осью.

Рассмотрим теперь отношение проекции вектора на некоторую ось к длине самого вектора, т. е. дробь $\frac{R_m}{R}$. Из изложенного следует, что при неизменной длине вектора это отношение меняется в зависимости от изменения угла между вектором и этой осью.

Докажем теперь теорему: *При изменении длины вектора и неизменном его направлении отношение проекции вектора на любую ось к длине самого вектора является величиной постоянной.*

Рассмотрим два вектора $\vec{M}$ и $\vec{N}$, образующие с некоторой осью $\vec{m}$ равные углы, т. е. $(\widehat{m, M}) = (\widehat{m, N})$. Спроектируем эти векторы на ось $\vec{m}$ и обозначим их проекции на эту ось соответственно M_m и N_m (см. черт. 35). Так как эти векторы образуют с осью $\vec{m}$ равные углы, то они одинаково направлены, и проекции их на ось $\vec{m}$ имеют один и тот же знак.



Черт. 35.

Из начала каждого вектора, т. е. из точек A и A_1 проведем прямую параллельно оси $\vec{m}$ до пересечения в точках C и C_1 с перпендикулярами, проектирующими концы векторов B и B_1 на ось $\vec{m}$. $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, так как это прямоугольные треугольники с равными острыми углами ($\angle CAB = \angle C_1A_1B_1$, как острые углы с соответственно параллельными сторонами). Следовательно,

$$\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}, \tag{1}$$

но $AB = M$, $A_1B_1 = N$, $AC = |M_m|$, $A_1C_1 = |N_m|$, поэтому имеем:

$$\frac{|M_m|}{M} = \frac{|N_m|}{N}. \tag{2}$$

Так как M_m и N_m одного знака, то

$$\frac{M_m}{M} = \frac{N_m}{N},$$

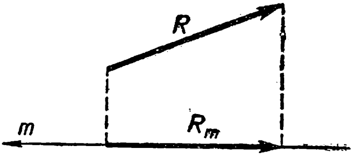
что и требовалось доказать.

Таким образом, *каждому значению угла между вектором и произвольной осью соответствует одно определенное значение отношения проекции вектора на эту ось к длине самого вектора,* *не зависящее от длины вектора*, т. е. отношение проекции вектора на данную ось к длине вектора является функцией угла между вектором и этой осью.

$$\frac{R_m}{R} = f(x), \text{ где } x = (\widehat{m, R}).$$

Такая функция называется «косинус угла» (cosinus) и обозначается символом $\cos x$, где буквой x обозначен аргумент — угол между вектором и осью.

Определение. *Косинусом угла между вектором и данной осью называется отношение проекции вектора на данную ось к длине самого вектора.* (см. черт. 36).



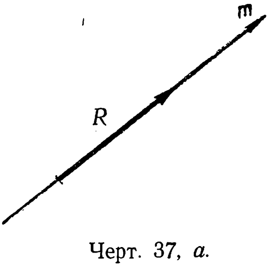
Черт. 36.

В главе II было установлено, что угол между двумя осями, а следовательно, и угол между вектором и осью может равняться любому действительному числу. Следовательно, допустимым значением аргумента функции $y = \cos x$ является любое действительное число.

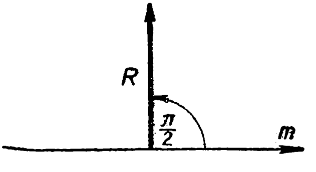
Мы ввели определение функции $\cos x$, пользуясь геометрическим образом угла, но так как установлено взаимно однозначное соответствие между множеством углов и множеством чисел, то функцию $\cos x$ (а в дальнейшем и другие тригонометрические функции) мы можем рассматривать, абстрагируясь от угла, как геометрического образа, отождествляя косинус угла, равного x, с косинусом числа x.

Из определения нетрудно установить, что косинус угла по абсолютному значению не может быть больше единицы, т. е.

$$|\cos x| \leqslant 1 \quad \text{или} \quad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1.$$



Черт. 37, *а*.



Черт. 37, *б*.

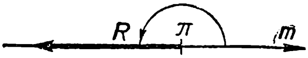
Действительно, $|R_m| \leqslant R$ или $-R \leqslant R_m \leqslant R$ (глава I, свойство 1). При делении обеих частей этих неравенств на длину вектора знак неравенства не изменится, так как $R > 0$.

$$\frac{|R_m|}{R} \leqslant 1 \quad \text{или} \quad -1 \leqslant \frac{R_m}{R} \leqslant 1,$$

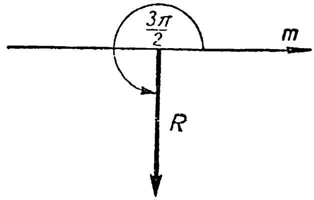
т. е.

$$|\cos x| \leqslant 1 \quad \text{или} \quad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1.$$

Найдем значения функции $\cos x$ для значений аргумента, равных 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3}{2}\pi$, 2π, для чего рассмотрим чертежи 37, *а*, *б*, *в*, *г*, *д*.



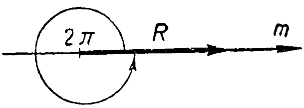
Черт. 37, *в*.



Черт 37, *г*.

Полученные результаты запишем в виде таблицы:

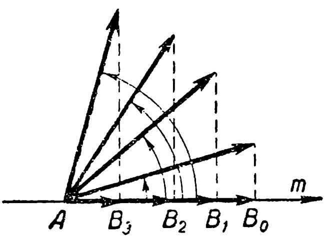
x	R_m	$\cos x$
0	R	1
$\frac{\pi}{2}$	0	0
π	$-R$	-1
$\frac{3\pi}{2}$	0	0
2π	R	1



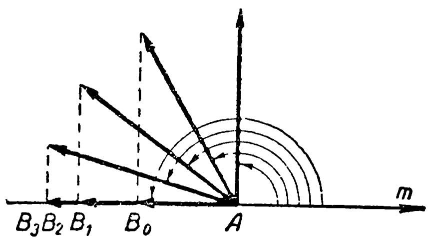
Черт. 37, *д*.

Исследуем изменение косинуса угла, образованного вектором с данной осью, при изменении угла от 0 до 2π.

Для упрощения чертежа помещаем начало вектора на оси проекций. Это не нарушает общности рассуждений. Действительно: если начало вектора не лежит на оси проекций, то мы можем построить вектор, равный данному так, чтобы его начало лежало на этой оси, или через начало данного вектора провести ось, одинаково направленную с осью проекций; в обоих случаях проекция вектора на ось не меняется (глава I, свойства проекций 4 и 6).



Черт. 38, *а*.



Черт. 38, *б*.

Будем вращать вектор вокруг его начала в положительном направлении, увеличивая угол между вектором и осью от 0 до 2π.

Так как длина вектора остается постоянной, изменение косинуса угла будет определяться только изменением проекции вектора на ось.

При увеличении угла между вектором и осью от 0 до $\frac{\pi}{2}$ (см. черт. 38, *а*) проекция вектора R_m, будучи положительной, уменьшается от R до 0 так, что каждое последующее ее значение меньше ее предыдущего значения.

$$AB_0 > AB_1 > AB_2 > AB_3.$$

Следовательно, при увеличении аргумента x от 0 до $\frac{\pi}{2}$ функция $\cos x$ убывает от 1 до 0.

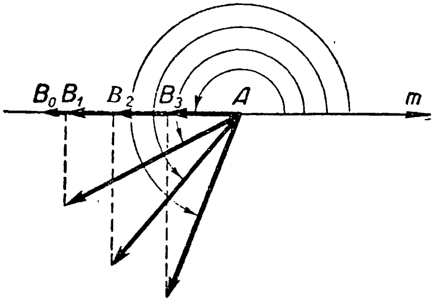
При увеличении угла между вектором и осью от $\frac{\pi}{2}$ до π (см. черт. 38, *б*) $|R_m|$ увеличивается от 0 до R; но так как проекция отрицательна, то, возрастая по абсолютному значению, R_m убывает от 0 до $-R$ так, что каждое ее последующее значение меньше предыдущего.

$$|AB_0| < |AB_1| < |AB_2| < |AB_3|$$

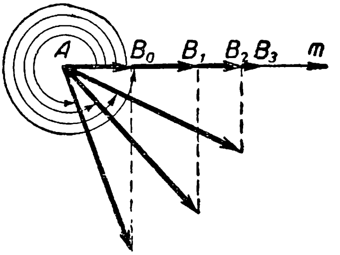
и

$$AB_0 > AB_1 > AB_2 > AB_3.$$

Следовательно, при увеличении аргумента x от $\frac{\pi}{2}$ до π функция $\cos x$ убывает от 0 до -1.



Черт. 38, *в*.



Черт 38, *г*.

При увеличении угла между вектором и осью от π до $\frac{3\pi}{2}$ (см. черт. 38, *в*) $|R_m|$ уменьшается от R до 0; но так как проекция отрицательна, то, убывая по абсолютному значению, R_m возрастает от $-R$ до 0 так, что каждое ее последующее значение больше предыдущего.

$$|AB_0| > |AB_1| > |AB_2| > |AB_3|$$

и

$$AB_0 < AB_1 < AB_2 < AB_3.$$

Следовательно, при увеличении аргумента x от π до $\frac{3\pi}{2}$ функция $\cos x$ возрастает от -1 до 0.

При увеличении угла между вектором и осью от $\frac{3\pi}{2}$ до 2π (см. черт. 38, *г*) проекция вектора, будучи положительной, возрастает от 0 до R так, что каждое последующее ее значение больше ее предыдущего значения.

$$AB_0 < AB_1 < AB_2 < AB_3.$$

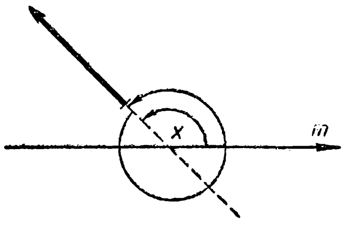
Следовательно, при увеличении аргумента x от $\frac{3\pi}{2}$ до 2π функция $\cos x$ возрастает от 0 до 1.

Полученные результаты представим в виде таблицы. В первой (верхней) строке таблицы указано изменение аргумента (угла между вектором и осью); во второй строке указано изменение проекции вектора на ось; в третьей строке указано изменение функции $\cos x$ при изменении аргумента x от 0 до 2π.

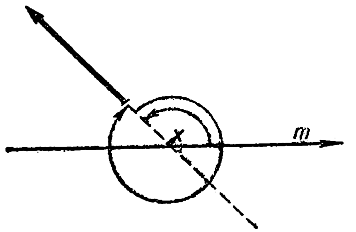
x	$x=0$	$0<x<\frac{\pi}{2}$	$x=\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}<x<\pi$	$x=\pi$	$\pi<x<\frac{3\pi}{2}$	$x=\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$	$x=2\pi$
R_m	R	убывает >0	0	убывает <0	$-R$	возрастает <0	0	возрастает >0	R
$\cos x$	1	убывает >0	0	убывает <0	-1	возрастает <0	0	возрастает >0	1

Основные свойства функции $\cos x$.

1. Свойство периодичности функции $\cos x$. Мы исследовали изменение функции $\cos x$ при увеличении аргумента от 0 до 2π. При дальнейшем вращении вектора вокруг его начала значения косинуса угла между вектором и осью будут повторяться.



Черт. 39, *а*.



Черт. 39, *б*.

Действительно, если вектор $\vec{R}$ сделает полный оборот, т. е. угол x между вектором и осью увеличится или уменьшится на 2π, вектор примет начальное положение, и проекция вектора на ось, а следовательно, и значение функции $\cos x$ не изменится (см. черт. 39 *а*, *б*).

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x; \qquad \cos(x - 2\pi) = \cos x.$$

Если вектор повернется на угол, равный $2\pi k$, т. е. сделает целое число k полных оборотов, то он примет начальное положение, и проекция вектора на ось, а следовательно, и значение функции $\cos x$ не изменится, т. е.

$$\cos(x + 2\pi k) = \cos x,$$

где k — любое целое число (положительное, отрицательное или нуль).

Таким образом, если к аргументу x прибавить 2π; -2π; 4π; 6π; -8π и т. д., значение $\cos x$ не меняется. Таким свойством обладают так называемые периодические функции.

Определение. *Наименьшее положительное число, от прибавления которого к произвольному значению аргумента значение функции не меняется, называется периодом.*

Функция, для которой существует период, называется периодической.

Пользуясь общим обозначением функции можно следующим образом формулировать определение периодической функции: *функция $f(x)$ называется периодической, если существует такое постоянное положительное число λ, что равенство $f(x+\lambda) = f(x)$ удовлетворяется при любом допустимом для данной функции значении аргумента x.*

Докажем, что периодом функции $\cos x$ является число 2π. Обозначим период функции $\cos x$ буквой λ. Это значит, что $\cos(x + \lambda) = \cos x$. Мы уже видели, что $\cos(x + 2\pi) = \cos x$. Остается доказать, что при $0 < \lambda < 2\pi$ равенство $\cos(x + \lambda) = \cos x$ не может быть тождеством.

Пусть $x = 0$; тогда $\cos\lambda = \cos 0 = 1$. Но равенство $\cos\lambda = 1$ может иметь место лишь в том случае, когда направление вектора совпадает с направлением оси проекций, т. е. при $\lambda=0$, $\lambda=2\pi$; $\lambda = 4\pi$... и т. д. При $0 < \lambda < 2\pi$ это равенство не имеет места. Следовательно, наименьшее положительное значение λ, при котором равенство $\cos(x + \lambda) = \cos x$ является тождеством, будет 2π.

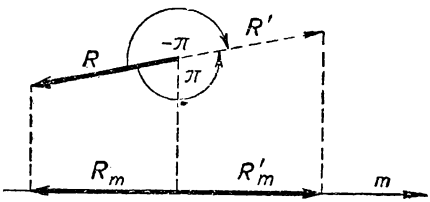
Таким образом, $\cos x$ является периодической функцией x с периодом, равным 2π.

$$\cos(x + 2\pi k) = \cos x. \tag{I}$$

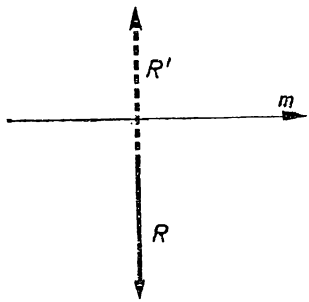
при любом целом k.

Периодические функции отражают целый ряд явлений природы. Например, можно сказать, что времена года, фазы луны, дни недели сменяются периодически (период равен одному году, месяцу, неделе). Периодически повторяются положения часовой, минутной и секундной стрелок часов. Если, например, в данный момент наименьший положительный угол между часовой стрелкой и данным диаметром циферблата равен 40°, то через 12 часов, 24 часа, 36 часов, 48 часов и т. д. и вообще через $12 \cdot k$ часов, где k целое число, наименьший положительный угол между часовой стрелкой и данным диаметром циферблата останется равным 40°, т. е. наименьший положительный угол между часовой стрелкой и данным направлением является периодической функцией времени с периодом, равным 12 часов.

2. Свойство половины периода функции $\cos x$. Если вектор $\vec{R}$ повернуть на угол π или $-\pi$, то вектор примет противоположное направление, и его проекция на ось $\vec{m}$ изменится только по знаку (глава I; теорема 7-я). На чертеже 40 буквой R' обозначен вектор, равный по длине вектору R и противоположный ему по на-



Черт. 40.



Черт. 40, *а*.

правлению. Случай, когда вектор перпендикулярен оси проекций (см. черт. 40, *а*) не составляет исключения, так как нуль есть число противоположное самому себе: $-0=0$.

Таким образом, во всех случаях $R'_m = -R_m$, следовательно, $\cos(\widehat{m, R'}) = -\cos(\widehat{m, R})$
или

$$\cos(x \pm \pi) = -\cos x. \qquad \text{(II)}$$

Значение функции $\cos x$ изменяется только по знаку при изменении аргумента на половину периода.

3. Свойство четности функции $\cos x$. Функция называется *четной, если при изменении аргумента только по знаку значение функции не меняется, т. е. $f(x)$* называется четной функцией x, если при любом допустимом значении x справедливо равенство:

$$f(-x) = f(x).$$

Например, функции x^2; $5x^4-1$; $\sqrt{a^2-x^2}$ являются четными функциями, так как

$$(-x)^2 = x^2;\ 5(-x)^4 - 1 = 5x^4 - 1;\ \sqrt{a^2-(-x)^2} = \sqrt{a^2-x^2}.$$

Функция называется *нечетной, если при изменении аргумента только по знаку абсолютное значение функции остается неизменным, а знак функции меняется на противоположный*, т. е. $f(x)$ называется нечетной функцией x, если при любом допустимом значении x справедливо равенство:

$$f(-x) = -f(x).$$

Например, функции $5x^3$, $x - 2x^5$, $x\sqrt{1+2x^4}$ являются нечетными, так как

$$5(-x)^3 = -5x^3; \quad -x - 2(-x)^5 = -(x - 2x^5);$$

$$-x\sqrt{1+2(-x)^4} = -x\sqrt{1+2x^4}.$$

Названия «четная» и «нечетная» функции введены по аналогии с четной и нечетной степенью: изменение знака основания не меняет степени при четном показателе и меняет степень только по знаку при нечетном показателе.

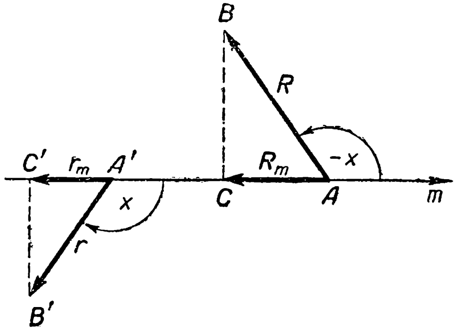
Необходимо иметь в виду, что, разумеется, далеко не все функции обладают свойствами четности или нечетности. Нетрудно убедиться, что функции

$$x - 1; \; 2^x; \; 2x^2 + 3x - 1$$

не являются ни четными, ни нечетными. Таким образом, четные и нечетные функции далеко не исчерпывают всего многообразия функций.

Покажем, что функция $\cos x$ есть четная функция x.

Рассмотрим два вектора $\vec{R}$ и $\vec{r}$, образующие с данной осью $\vec{m}$ углы, равные по абсолютной величине и противоположные по знаку. Для упрощения чертежа поместим начало обоих векторов на оси



Черт. 41.

$\vec{m}$, что, как мы уже указывали, не нарушает общности рассуждений, и спроектируем эти векторы на ось $\vec{m}$ (черт. 41).

В прямоугольных треугольниках ABC и $A'B'C'$ острые углы BAC и $B'A'C'$ равны, так как оба вектора образуют с осью $\vec{m}$ равные по абсолютной величине углы. Следовательно, $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$. Из подобия этих треугольников следует, что

$$\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}.$$

Но $AC = |R_m|$; $A'C' = |r_m|$; $AB = R$; $A'B' = r$. Значит,

$$\frac{|R_m|}{R} = \frac{|r_m|}{r}.$$

Так как R_m и r_m или одновременно положительны, или одновременно отрицательны, или одновременно равны нулю, то и

$$\frac{R_m}{R} = \frac{r_m}{r}.$$

Но $\frac{R_m}{R} = \cos(-x)$; $\frac{r_m}{r} = \cos x$,

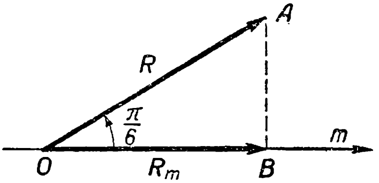
следовательно, $$\cos(-x) = \cos x. \tag{III}$$

Функция $\cos x$ *является четной функцией аргумента* x, *так как значение* $\cos x$ *не меняется при изменении аргумента только по знаку.*

С помощью установленных трех основных свойств функции $\cos x$ мы можем, не пользуясь чертежом, свести определение косинуса любого угла к определению косинуса острого положительного угла.

Примеры.

1. $\cos 2{,}3\pi = \cos 0{,}3\pi$ (свойство I).
2. $\cos(-330°) = \cos 30°$ [свойство I; прибавляем период (360°)].
3. $\cos\left(-\frac{30}{7}\pi\right) = \cos\left(-\frac{2}{7}\pi\right) = \cos\frac{2}{7}\pi$ [свойства I и III; прибавляем два периода (4π) и изменяем знак угла].
4. $\cos 3{,}7\pi = \cos 0{,}3\pi$ [свойства I и III; вычитаем два периода (4π) и изменяем знак угла].
5. $\cos 0{,}8\pi = -\cos 0{,}2\pi$ [свойства II и III; вычитаем половину периода (π) и изменяем знак угла].
6. $\cos 6 = \cos(6 - 2\pi) = \cos(2\pi - 6)$ [свойства I и III].
7. $\cos 3 = -\cos(3 - \pi) = -\cos(\pi - 3)$ [свойства II и III].
8. $\cos 500° = \cos 140° = -\cos(-40°) = -\cos 40°$ [свойства I, II и III; вычитаем один период (360°), вычитаем половину периода (180°), изменяем знак аргумента).



Черт. 42.

Вычисление значений функции $\cos x$ при значениях аргумента, равных $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{3}$.

Пусть вектор $\vec{R}$ составляет с осью $\vec{m}$ угол $\frac{\pi}{6}$.

Спроектируем вектор $\vec{R}$ на ось $\vec{m}$ (черт. 42).

В прямоугольном треугольнике OAB: $OA = R$, $OB = |R_m| = R_m$ (т. к. $R_m > 0$). Катет AB равен половине гипотенузы, т. е. $AB = \frac{1}{2}R$. Применяя к треугольнику AOB теорему Пифагора, получим, что $OB = R_m = \frac{1}{2}R\sqrt{3}$.

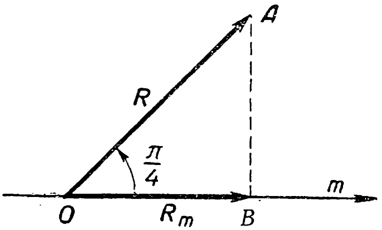
Следовательно,

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\frac{1}{2}R\sqrt{3}}{R} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0{,}866.$$

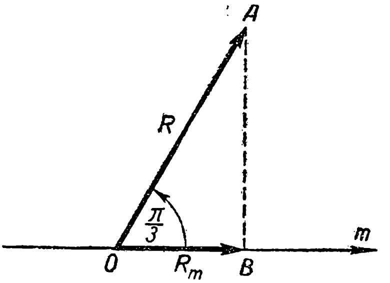
Аналогично найдем, что

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707 \qquad \text{(черт. 43)},$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = 0{,}500 \qquad \text{(черт. 44)}.$$



Черт. 43.



Черт. 44.

Примеры.

1. Вычислить $\cos\frac{5\pi}{3}$.

$$\cos\frac{5\pi}{3} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

2. Вычислить $\cos\frac{3\pi}{4}$.

$$\cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Упражнения.

1. Определить знак функции $\cos x$ при значениях аргумента, равных 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7.

2. Какое из данных двух чисел больше: а) $\cos\frac{\pi}{5}$ и $\cos\frac{\pi}{7}$;

   б) $\cos 100°$ и $\cos 110°$; в) $\cos 2$ и $\cos 3$;
   г) $\cos 300°$ и $\cos 320°$; д) $\cos 3$ и $\cos 4$.

3. Дано $f(x) = 8\cos 5x - 5\cos 8x$. Определить $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f(\pi)$.

   Ответ. 3; $-4\sqrt{3} + \frac{5}{2}$; $\frac{13}{2}$; -5; -13.

4. Доказать, что $\cos(\alpha + \pi k) = (-1)^k \cos \alpha$.

5. Доказать, что при любом α $\cos(500^\circ + \alpha) + \cos(400^\circ - \alpha) = 0$.

6. Доказать, что сумма $\cos\alpha + \cos(\alpha + \pi) + \cos(\alpha + 2\pi) + \ldots + \cos(\alpha + \pi k)$ равна $\cos\alpha$ при k четном и равна 0 при k нечетном.

7. Найти сумму ста слагаемых:

$$\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{3\pi}{3} + \ldots + \cos\frac{100\pi}{3}.$$

Ответ. $-\frac{3}{2}$.

8. Вычислить с точностью до 0,001:

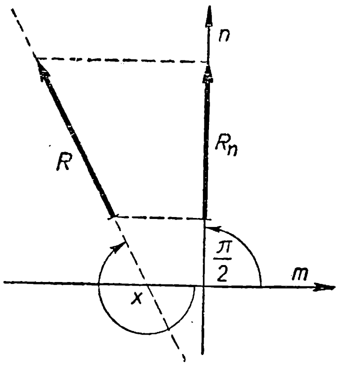
$$\left(\cos\frac{5}{6}\pi + \cos\frac{5}{2}\pi\right) \cdot \left(\cos\frac{5}{3}\pi + \cos\frac{5}{4}\pi\right).$$

Ответ. 0,179.

§ 2. Определение синуса угла и его свойства.

Рассмотрим вектор $\vec{R}$, образующий некоторый угол x с произвольной осью $\vec{m}$, т. е. $(m, \widehat{\ } R) = x$.

Построим ось $\vec{n}$, образующую с осью $\vec{m}$ угол, равный $\frac{\pi}{2}$, т. е. $(\widehat{m, n}) = \frac{\pi}{2}$. Спроектируем вектор $\vec{R}$ на ось $\vec{n}$ (см. черт. 45).



Черт. 45.

Рассмотрим отношение $\frac{R_n}{R}$. Так же, как и для отношения $\frac{R_m}{R}$, может быть доказано, что это отношение не зависит от длины вектора и является функцией **только** угла между вектором и осью $\vec{m}$. Такая функция называется «синус угла» (sinus) и обозначается символом $\sin x$, где буквой x обозначается аргумент — угол между вектором $\vec{R}$ и осью $\vec{m}$.

Определение. *Синусом угла между вектором и данной осью называется отношение проекции вектора на ось, составляющую с данной осью угол, равный $\frac{\pi}{2}$, к длине самого вектора.*

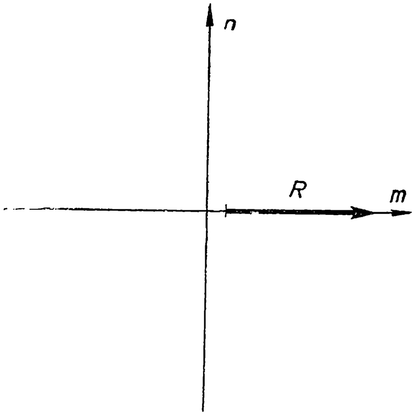
$$\sin(m, \widehat{\ } R) = \frac{R_n}{R}, \text{ если } (m, \widehat{\ } n) = \frac{\pi}{2}.$$

Так же, как и функция $\cos x$, функция $\sin x$ определена нами для всех действительных значений аргумента.

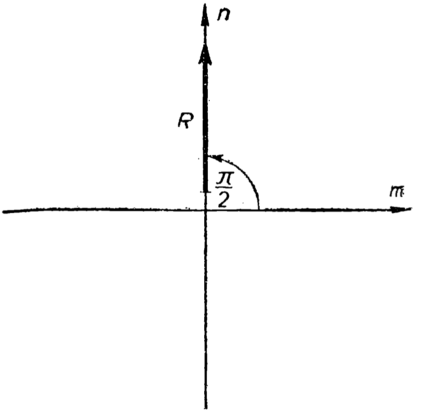
Исходя из определения $\sin x$, можно установить, как это было сделано для $\cos x$, что

$$|\sin x| \leqslant 1 \text{ или } -1 \leqslant \sin x \leqslant 1.$$

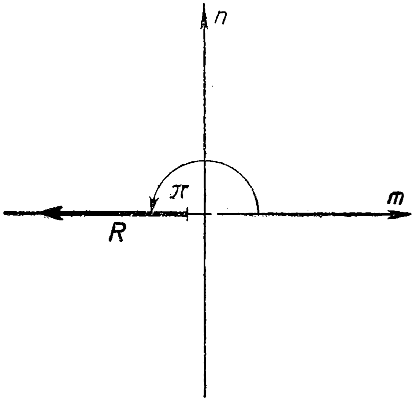
Найдем значения функции $\sin x$ для значений аргумента, равных 0, $\frac{\pi}{2}$; π; $\frac{3\pi}{2}$; 2π, для чего рассмотрим нижеследующие чертежи (черт. 46 *а, б, в, г, д*):



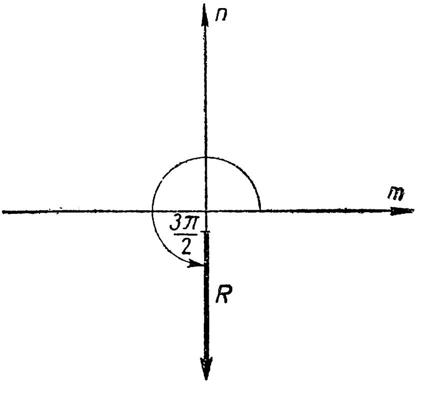
Черт. 46, *а*.



Черт. 46, *б*.



Черт 46, *в*.

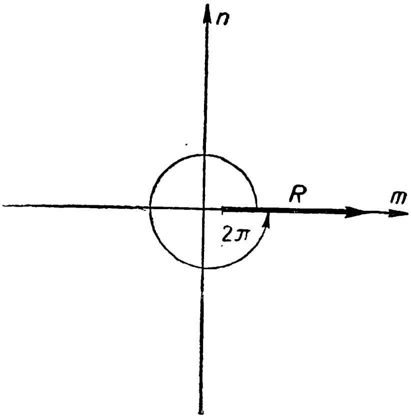


Черт 46, *г*.

Полученные результаты запишем в виде нижеследующей таблицы (стр. 34).

Исследуем изменение синуса угла, образованного вектором с данной осью, при изменении угла от 0 до 2π, подобно проведенному исследованию для функции $\cos x$.

Выберем две оси $\vec{m}$ и $\vec{n}$, расположенные так, что $(\widehat{m\ n}) = \frac{\pi}{2}$. Для упрощения чертежа помещаем начало вектора в точку пересечения этих осей. Как мы уже установили в параграфе о косинусе, рассуждения сохраняют свою силу и в том случае, когда начало вектора не лежит на осях. Будем вращать вектор в положительном направлении, увеличивая угол между вектором и осью $\vec{m}$ от 0 до 2π. Так как длина вектора остается постоянной, изменение синуса будет определяться только изменением проекции вектора на ось $\vec{n}$.

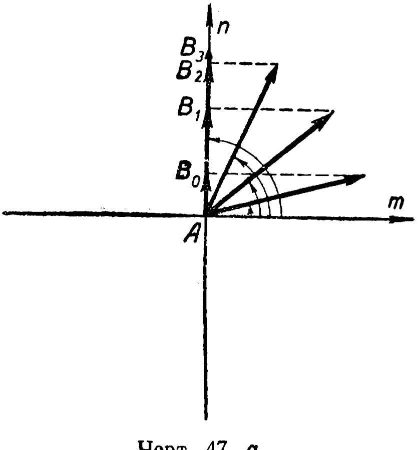


Черт. 46. *д.*

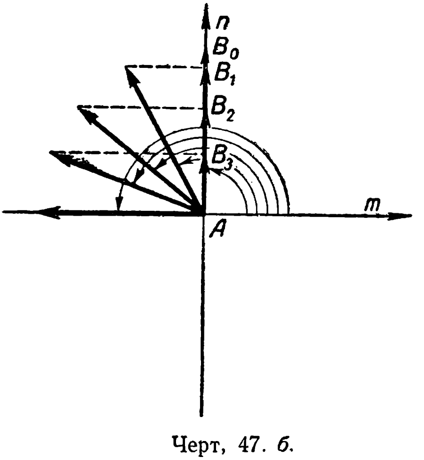
x	R_n	$\sin x$
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	R	1
π	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	$-R$	-1
2π	0	0

При увеличении угла между вектором и осью $\vec{m}$ от 0 до $\frac{\pi}{2}$ (см. черт. 47, *а*) проекция вектора на ось $\vec{n}$, будучи положительной, увеличивается от 0 до R так, что каждое ее последующее значение больше ее предыдущего значения:

$$AB_0 < AB_1 < AB_2 < AB_3.$$



Черт. 47, *а.*

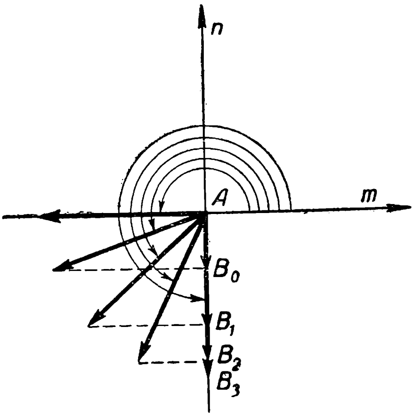


Черт, 47. *б.*

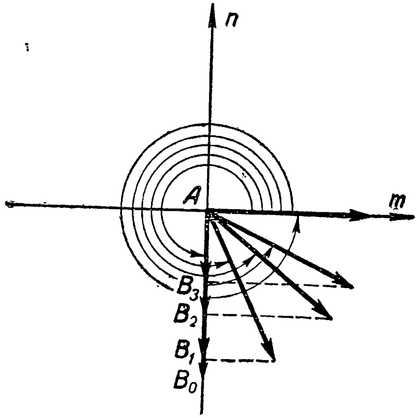
Следовательно, *при увеличении аргумента* x *от* 0 *до* $\frac{\pi}{2}$ *функция* $\sin x$ *возрастает от* 0 *до* 1.

При увеличении угла между вектором и осью $\vec{m}$ от $\frac{\pi}{2}$ до π (см. черт. 47, *б*), проекция вектора на ось $\vec{n}$, оставаясь положительной, убывает от R до 0 так, что каждое ее последующее значение меньше ее предыдущего значения:

$$AB_0 > AB_1 > AB_2 > AB_3.$$



Черт. 47, *в*.



Черт. 47, *г*.

Следовательно, при увеличении аргумента x от $\frac{\pi}{2}$ до π функция $\sin x$ убывает от 1 до 0. При увеличении угла между вектором и осью $\vec{m}$ от π до $\frac{3\pi}{2}$ (см. черт. 47, *в*) $|R_n|$ увеличивается от 0 до R; но так как проекция отрицательна, то, возрастая по абсолютному значению, R_n убывает от 0 до $-R$ так, что каждое ее последующее значение меньше предыдущего:

$$|AB_0| < |AB_1| < |AB_2| < |AB_3|$$

и

$$AB_0 > AB_1 > AB_2 > AB_3.$$

Следовательно, *при увеличении аргумента* x *от* π *до* $\frac{3\pi}{2}$ *функция* $\sin x$ *убывает от* 0 *до* -1.

При увеличении угла между вектором и осью $\vec{m}$ от $\frac{3\pi}{2}$ до 2π (см. черт. 47, *г*) $|R_n|$ убывает от R до 0; но так как проекция отрицательна, то, убывая по абсолютному значению, R_n возрастает от $-R$ до 0 так, что каждое ее последующее значение больше предыдущего:

$$|AB_0| > |AB_1| > |AB_2| > |AB_3|$$

и

$$AB_0 < AB_1 < AB_2 < AB_3.$$

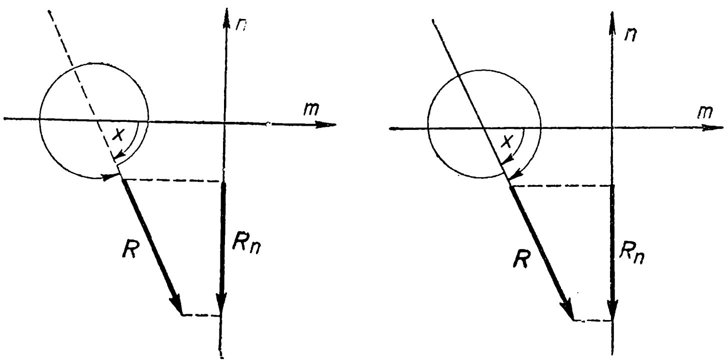
Следовательно, *при увеличении аргумента* x *от* $\frac{3\pi}{2}$ *до* 2π *функция* $\sin x$ *возрастает от* -1 *до* 0.

Полученные результаты представим в виде нижеследующей таблицы

x	$x=0$	$0<x<\frac{\pi}{2}$	$x=\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}<x<\pi$	$x=\pi$	$\pi<x<\frac{3\pi}{2}$	$x=\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$	$x=2\pi$
R_n	0	возрастает >0	R	убывает >0	0	убывает <0	$-R$	возрастает <0	0
$\sin x$	0	возрастает >0	1	убывает >0	0	убывает <0	-1	возрастает <0	0

Основные свойства функции $\sin x$.

1. Свойство периодичности функции $\sin x$. При изменении угла x между вектором и данной осью на $2\pi k$, где k — любое целое число, вектор занимает первоначальное положение, и проекция вектора на любую ось не меняется, а следовательно, не изменится и проекция вектора на ось, образующую с данной осью угол, равный $\frac{\pi}{2}$ (см. черт. 48).



Черт. 48.

Значит, не изменится и значение функции $\sin x$. Таким образом, $\sin x$ является периодической функцией аргумента x. Докажем, что периодом функции $\sin x$ является 2π.

Обозначим период функции $\sin x$ буквой λ. Это значит, что равенство

$$\sin(x + \lambda) = \sin x$$

должно быть справедливым при любом допустимом значении x. Пусть $x = \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \lambda\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Но $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \lambda\right) = 1$ лишь при $\lambda = 0$; $\lambda = \pm 2\pi$; $\lambda = \pm 4\pi$ и т. д. Наименьшим положительным значением λ является 2π. Следовательно, $\sin x$ *есть периодическая функция аргумента* x *с периодом, равным* 2π.

$$\sin(x + 2\pi k) = \sin x, \text{ где } k \text{ любое целое число.} \qquad \text{(I)}$$

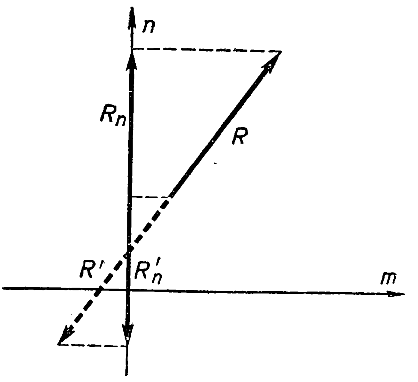
2. Свойство половины периода. Если вектор $\vec{R}$, образующий с данной осью $\vec{m}$ некоторый угол x, повернуть на угол π или $-\pi$, то вектор примет противоположное направление, и его проекция на любую ось, а следовательно, и на ось $\vec{n}$, расположенную под углом $\frac{\pi}{2}$ к данной оси $\vec{m}$, изменится только по знаку (гл. 1, теорема 7-я), т. е. $R'_n = -R_n$ (см. черт. 49).

Следовательно, $\sin(\widehat{m, R'}) = -\sin(\widehat{m, R})$

или

$$\sin(x \pm \pi) = -\sin x. \qquad \text{(II)}$$

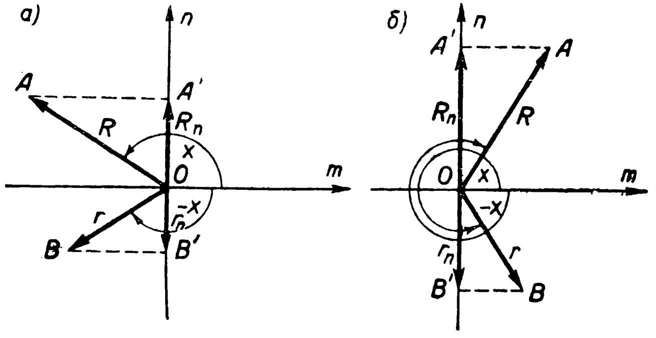
Значение функции $\sin x$ *изменяется только по знаку при изменении аргумента на половину периода.*



Черт. 49.

3. Свойство нечетности функции $\sin x$. Выберем произвольную ось $\vec{m}$ и построим ось $\vec{n}$, образующую с осью $\vec{m}$ угол, равный $\frac{\pi}{2}$. Рассмотрим два вектора $\vec{R}$ и $\vec{r}$, составляющие с осью $\vec{m}$ углы, равные по абсолютной величине и противоположные по знаку. Для упрощения чертежа поместим начало обоих векторов в точку пересечения осей, что как было ранее выяснено, не нарушает общности доказательства. Спроектируем эти векторы на ось $\vec{n}$ (см. черт. 50 *а*, *б*).

В получившихся при этом на чертеже прямоугольных треугольниках $AA'O$ и $BB'O$ острые углы AOA' и BOB' равны, так как оба вектора образуют с осью $\vec{m}$ равные по абсолютной величине



Черт. 50.

углы. Следовательно, $\triangle AOA' \backsim \triangle BOB'$. Из подобия этих треугольников следует, что

$$\frac{OB'}{OB} = \frac{OA'}{OA}.$$

Но $OA = R$; $OB = r$; $OA' = |R_n|$; $OB' = |r_n|$, значит,

$$\frac{|r_n|}{r} = \frac{|R_n|}{R}.$$

Так как R_n и r_n противоположны по знаку, то

$$\frac{r_n}{r} = -\frac{R_n}{R}.$$

Следовательно, $$\sin(-x) = -\sin x. \qquad \text{(III)}$$

Функция $\sin x$ является нечетной функцией аргумента, так как при *изменении аргумента только по знаку абсолютное значение* $\sin x$ *остается неизменным, а знак меняется на противоположный.*

Сопоставляя основные свойства функций $\cos x$ и $\sin x$, мы видим, что обе эти функции периодические с одинаковым периодом, равным 2π, и для обеих функций имеет место свойство половины периода; но $\cos x$ — функция четная, а $\sin x$ — функция нечетная.

Установленные три основные свойства функции $\sin x$ позволяют, не пользуясь чертежом, свести определение синуса любого угла к определению синуса острого положительного угла.

Примеры.

1. $\sin 12{,}3\pi = \sin 0{,}3\pi$ (свойство I).
2. $\sin 4 = -\sin(4-\pi)$ (свойство II).
3. $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$ (свойство III).

4. $\sin(-700°) = \sin 20°$ [свойство I; прибавляем два периода (720°)].

5. $\sin 0{,}9\pi = -\sin(-0{,}1\pi) = \sin 0{,}1\pi$ (свойства II и III).

6. $\sin 500° = \sin 140° = -\sin(-40°) = \sin 40°$ (свойства I, II и III).

Упражнения.

1. Определить знак функции $\sin x$ при

$$x = 2;\ 3;\ 5;\ \sqrt{10};\ -3{,}2\pi.$$

2. Определить знаки выражений:

$$\text{а) } \sin 2 \cdot \cos 3; \quad \text{б) } \frac{\sin 130°}{\sin 140°}.$$

3. Определить, какое из двух чисел больше:

а) $\sin 20°$, $\sin 30°$; б) $\sin 200°$, $\sin 250°$;

в) $\sin 300°$, $\sin 400°$; г) $\sin 1000°$, $(\sin 1000°)^2$.

4. Привести к синусу острого положительного угла

$$\sin\frac{2\pi}{3};\ \sin 100°;\ \sin 200°;\ \sin 1000°;\ \sin 8;\ \sin(-2);\ \sin(-130°);$$

$$\sin 7{,}7\pi;\ \sin\frac{111}{18}\pi;\ \sin\left(-\frac{11}{8}\pi\right).$$

5. Доказать тождество:

$$\sin(400° + \alpha - \beta) = \sin(500° + \beta - \alpha).$$

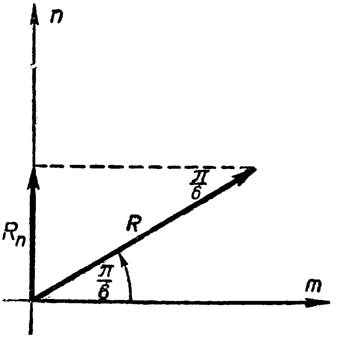
6. Доказать, что $\sin(\alpha + \pi k) = (-1)^k \sin\alpha$ при k целом.

7. Найти сумму 169 членов ряда

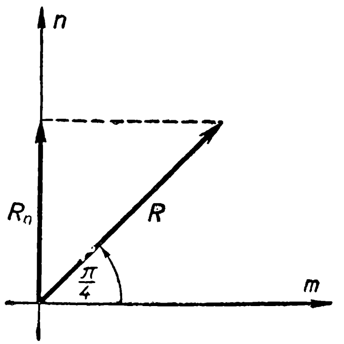
$$\sin\alpha + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\alpha + \pi) + \ldots + \sin\left(\alpha + \frac{\pi k}{2}\right).$$

Ответ. $\sin\alpha$

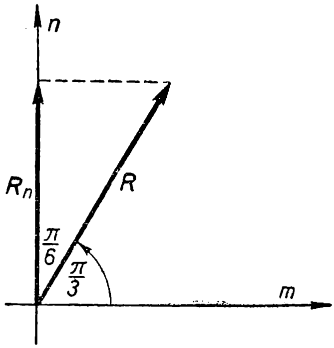
Вычисление значений функции $\sin x$ при значениях аргумента, равных $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{3}$, произведем так же, как и для функции $\cos x$ (см. черт. 51, 52, 53).



Черт. 51.



Черт. 52.



Черт. 53.

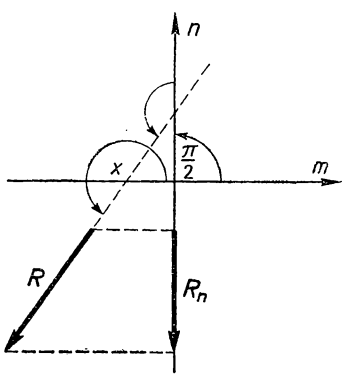
$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2};$$
$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$
$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

§ 3. Зависимость между косинусом и синусом дополнительных углов.

Определение. *Два угла называются дополнительными, если их сумма равна* $\frac{\pi}{2}$.

Например, дополнительными являются нижеследующие пары углов: $40°$ и $50°$; $\frac{\pi}{5}$ и $\frac{3\pi}{10}$; $100°$ и $-10°$; $\frac{\pi}{2}-\alpha$ и α; $-\frac{\pi}{2}$ и π; $\frac{\pi}{6}-\alpha$ и $\frac{\pi}{3}+\alpha$. Сумма каждой пары этих углов равна $\frac{\pi}{2}$. Действительно, $\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)+\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{\pi}{2}$; $100°+(-10°)=90°$ и т. д. Найдем теперь зависимость между синусом и косинусом дополнительных углов.

Пусть вектор $\vec{R}$ образует с данной осью $\vec{m}$ произвольный угол x. Построим ось $\vec{n}$, образующую с данной осью $\vec{m}$ угол, равный $\frac{\pi}{2}$ (см. черт. 54).



Черт. 54.

На основании правила цепи углы, составленные осями $\vec{m}$ $\vec{n}$ и осью вектора, подчиняются следующей зависимости:

$$(\widehat{m, n}) + (\widehat{n, R}) = (\widehat{m, R}).$$

Другими словами любое числовое значение угла $(\widehat{m, R})$ равно заданному значению угла $(\widehat{m, n})$, сложенному с вполне определенным значением угла $(\widehat{n, R})$

$$x = \frac{\pi}{2} + (\widehat{n, R}),$$

где через x обозначен угол между вектором $\vec{R}$ и осью $\vec{m}$.

Следовательно, при любом определенном, хотя и произвольном, значении угла $(\widehat{m, R})$ угол $(\widehat{n, R})$ получает вполне определенное значение:

$$(\widehat{n, R}) = x - \frac{\pi}{2}.$$

По определению синуса угла

$$\sin(\widehat{m, R}) = \frac{R_n}{R}.$$

По определению косинуса угла

$$\cos(\widehat{n, R}) = \frac{R_n}{R}.$$

Следовательно,

$$\sin(\widehat{m, R}) = \cos(\widehat{n, R})$$

или

$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

На основании четности косинуса

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Поэтому

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Но углы x и $\frac{\pi}{2} - x$ дополнительные, так как их сумма равна $\frac{\pi}{2}$. Отсюда получаем вывод: *синус любого угла равен косинусу дополнительного угла.*

Из тождественности равенства

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

следует $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]$,

т. е.

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Следовательно, *косинус любого угла равен синусу угла дополнительного.*

Примеры.

1. $\sin 70° = \cos 20°$. 2. $\cos\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3}$. 3. $\cos\frac{2}{3}\pi = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6}$. 4. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos(-x) = \cos x$. 5. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \sin(-x) = -\sin x$. 6. $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$, так как $\frac{\pi}{4}+x+\frac{\pi}{4}-x=\frac{\pi}{2}$.

Зависимость между косинусом и синусом дополнительных углов позволяет свести вычисление синуса и косинуса любого угла не только к вычислению синуса и косинуса острого угла, но и угла меньшего (или равного) $\frac{\pi}{4}$.

Например:

1. $\sin 260° = -\sin 80° = -\cos 10°$.

2. $\cos\frac{13}{5}\pi = -\cos\frac{2}{5}\pi = -\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{5}\pi\right) = -\sin\frac{\pi}{10}$.

Зависимость между косинусом и синусом дополнительных углов позволяет заменить рассмотрение одной из этих тригонометрических функций рассмотрением другой.

Если, например, нам известны значения функции $\cos x$ при $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{\pi}{4}$ и $x=\frac{\pi}{3}$ $\left(\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2};\ \cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}};\ \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\right)$, то значения функции $\sin x$ для этих значений аргумента могут быть определены без помощи чертежа.

$$\sin\frac{\pi}{6}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2};$$

$$\sin\frac{\pi}{4}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\sin\frac{\pi}{3}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Если известны значения функции $\cos x$ для каждого значения аргумента, то можно определить и значения функции $\sin x$ для каждого значения аргумента, так как $\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

Упражнения.

1 Доказать справедливость равенства:

$$\cos\frac{8}{7}\pi-\cos\frac{\pi}{7}=\frac{\sin\frac{5}{14}\pi}{\cos\frac{4}{3}\pi}.$$

2. Доказать тождества:

а) $\sin(100^\circ - x) = \cos(x - 10^\circ)$;

б) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{7}{6}\pi - x\right) = 0.$

3. Вычислить $f(5)$, если $f(x) = \dfrac{\cos\frac{\pi x}{14}}{\sin\frac{10\pi x}{7}}$.

Ответ. -1

4. Заменить синусы нижеуказанных углов косинусами дополнительных углов:

а) $\sin 117^\circ$; б) $\sin -\frac{3\pi}{7}$; в) $\sin\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)$;

г) $\sin 0{,}8$; д) $\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \alpha\right)$.

5. Упростить:

а) $\dfrac{\sin 0{,}8\pi \cdot \cos\frac{9}{8}\pi}{\cos 1{,}7\pi \cdot \sin\frac{5}{8}\pi}$; б) $\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \sin(\alpha - \pi)}{\sin\left(-\frac{11\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(\alpha - \pi)}$;

в) $\dfrac{\cos\left(-\alpha - \frac{5\pi}{2}\right) - 3\sin(\alpha - 9\pi) + 2\cos\left(\alpha - \frac{7\pi}{2}\right)}{2\sin 17{,}5\pi - 3\cos 11\pi + 5\cos 2{,}5\pi}$;

г) $\dfrac{\sin 1{,}6\pi - \cos 0{,}9\pi - \cos 1{,}4\pi}{3\sin 1{,}9\pi}$.

Ответ. а) -1; б) $-\frac{1}{2}$; в) 0; г) $-\frac{1}{3}$.

§ 4. Понятие о четвертях.

Если угол $(\widehat{m, n}) = \frac{\pi}{2}$, то оси $\vec{m}$ и $\vec{n}$ делят плоскость на 4 части, которые называются четвертями или квадрантами. Примером таких осей могут служить координатные оси. Нумерация четвертей производится от начальной оси в направлении против движения часовой стрелки (см. черт. 55).

Рассмотрим некоторый вектор $\vec{R}$, начало которого совпадает с точкой пересечения осей. Если этот вектор не лежит ни на одной из осей, мы всегда можем сказать, какой четверти принадлежит угол между вектором и осью $\vec{m}$ (см. черт. 56).

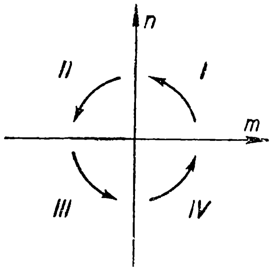
$(\widehat{m, R})$ — угол I четверти

$(\widehat{m, R'})$ — » II »

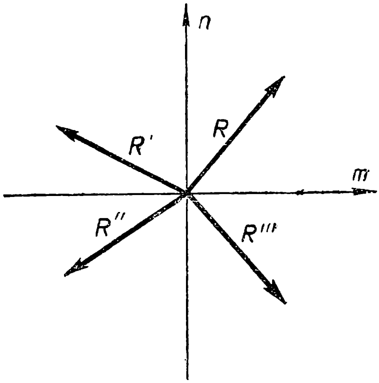
$(\widehat{m, R''})$ — » III »

$(\widehat{m, R'''})$ — » IV »

Если вектор $\vec{R}$ расположен на плоскости так, что его начало не находится в точке пересечения осей, то мы можем, оставляя вектор $\vec{R}$ неподвижным, провести через начало вектора две оси $\vec{m}_1$ и $\vec{n}_1$, параллельные осям $\vec{m}$ и $\vec{n}$ и одинаково с ними направ-

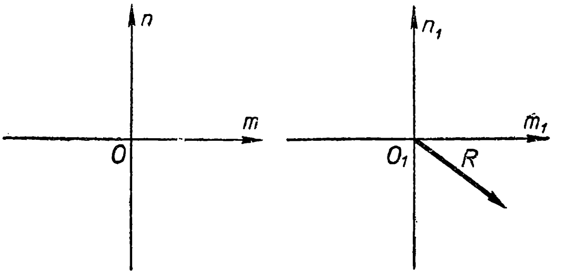


Черт 55



Черт. 56

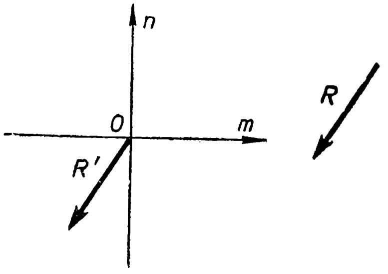
ленные (см. черт. 57), угол между вектором $\vec{R}$ и осью $\vec{m}_1$ будет равен углу между вектором $\vec{R}$ и осью $\vec{m}$ или будет отличаться от него на $2\pi k$. Можно поступить и иначе: с помощью параллельного переноса можно построить вектор $\vec{R}'$, равный вектору $\vec{R}$, с началом в точке O пересечения осей $\vec{m}$ и $\vec{n}$ (см. черт. 58).



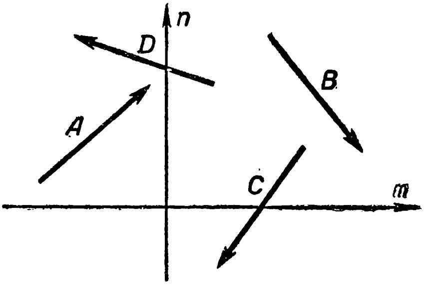
Черт. 57

Угол между вектором $\vec{R}'$ и осью $\vec{m}$ будет равен углу между вектором $\vec{R}$ и осью $\vec{m}$, или будет отличаться от него на $2\pi k$.

Следовательно, как бы ни был расположен вектор на плоскости, угол между ним и начальной осью $\vec{m}$ всегда принадлежит одной из четырех четвертей, если только направление вектора не параллельно одной из осей $\vec{m}$ и $\vec{n}$, расположенных так, что $(\widehat{m, n}) = \frac{\pi}{2}$ (см. черт. 59).



Черт. 58



Черт. 59

$(\widehat{m, A})$ — угол I четверти

$(\widehat{m, B})$ — » IV »

$(\widehat{m, C})$ — » III »

$(\widehat{m, D})$ — » II »

Чаще всего задачу определения четверти, которой принадлежит угол, приходится решать на числовом примере. Если числовое значение угла не превосходит 2π по абсолютной величине, то при определении угла руководствуются представляемым в уме чертежом и правилом для отсчета четвертей.

Примеры.

1. $\frac{2\pi}{3}$ угол II четверти;
2. $-\frac{2\pi}{3}$ угол III четверти;
3. -20° угол IV четверти;
4. -130° угол III четверти;
5. $\frac{5\pi}{4}$ угол II четверти;
6. $-\sqrt{2} \approx -1{,}41$ угол IV четверти;
7. $-\sqrt{3} \approx -1{,}73$ угол III четверти.

Если числовое значение угла превосходит 2π по абсолютной величине, то определяют наименьший положительный угол между вектором и осью, для чего достаточно заданное значение угла x

представить в виде суммы: $x = x_0 + 2\pi n$, где $0 < x_0 < 2\pi$, а n любое целое число.

Если $0 < x_0 < \frac{\pi}{2}$, то угол x — угол I четверти.

Если $\frac{\pi}{2} < x_0 < \pi$, то угол x — угол II четверти.

Если $\pi < x_0 < \frac{3\pi}{2}$, то угол x — угол III четверти.

Если $\frac{3\pi}{2} < x_0 < 2\pi$, то угол x — угол IV четверти.

Примеры.

1. Угол в $1200° = 360° \cdot 3 + 120°$, следовательно, принадлежит II четверти.

2. Угол $-1000° = 360° \cdot (-3) + 80°$, следовательно, принадлежит I четверти.

3. Угол $\frac{10\pi}{3} = 3\frac{1}{3}\pi$ и принадлежит III четверти.

4. Угол $-17\frac{2}{5}\pi = 2\pi \cdot (-9) + \frac{3}{5}\pi$ и принадлежит II четверти.

5. Угол $20 \approx 2\pi \cdot 3 + 1{,}16$ и принадлежит I четверти.

6. Угол $-17 \approx 2\pi(-3) + 1{,}84$ и принадлежит II четверти.

Упражнения.

1. Какой четверти принадлежит каждый из углов: а) $800°$; б) $3{,}3\pi$; в) $8{,}3\pi$; г) 10; д) -12; е) $-\sqrt{5}$.

2. Какой четверти принадлежит угол $\alpha + \frac{2}{3}\pi$, если угол α принадлежит I четверти?

Ответ. II или III четверти.

3. Какой четверти принадлежат углы:

а) $\alpha - \pi$, б) $\alpha + \pi$, в) $\alpha - \frac{\pi}{2}$, г) $\alpha + \frac{\pi}{2}$, д) $\alpha + 2\pi$, е) $\alpha + \frac{\pi}{3}$, если α принадлежит III четверти.

Ответ. а) I; б) I; в) II; г) IV; д) III; е) III или IV.

4. Какой четверти принадлежит угол $\alpha - 3\pi$, если

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Ответ. III четверти.

5. Какой четверти принадлежит угол $\alpha - \beta$, если углы α и β принадлежат первой четверти?

Ответ. I или IV четверти.

6. Какой четверти принадлежит угол 2α, если α угол I четверти?

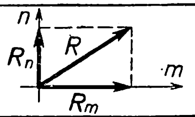
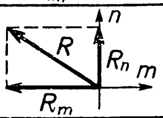
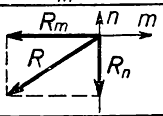
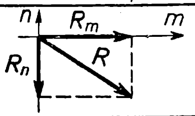
Ответ. I или II четверти.

7. Какой четверти принадлежит угол $\frac{\alpha}{2}$, если α принадлежит:

а) I четверти (*ответ.* I или III);
б) II четверти (*ответ.* I или III);
в) III четверти (*ответ.* II или IV);
г) IV четверти (*ответ.* II или IV).

Решение задачи 7, а). Угол $\alpha = \alpha_0 + 2\pi k$, где $0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$ Тогда $\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha_0}{2} + \pi k$. При k четном $\frac{\alpha}{2}$ принадлежит I четверти, так как $0 < \frac{\alpha_0}{2} < \frac{\pi}{2}$. При k нечетном $\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha_0}{2} + \pi(2k+1) = \frac{\alpha_0}{2} + \pi + 2\pi k$. Наименьший положительный угол $\frac{\alpha_0}{2} + \pi$ угол III четверти.

Определим знаки проекций вектора, а следовательно, и знаки функций $\sin x$ и $\cos x$ для углов каждой четверти и результаты запишем в следующей таблице:

Четверть			R_m	$\cos x$	R_n	$\sin x$
I		$R_m > 0$ $R_n > 0$	+	+	+	+
II		$R_m < 0$ $R_n > 0$	−	−	+	+
III		$R_m < 0$ $R_n < 0$	−	−	−	−
IV		$R_m > 0$ $R_n < 0$	+	+	−	−

Упражнения.

1. Какой четверти принадлежит угол x, если

$$\sin x = 4\cos x.$$

Ответ. I или III четверти.

2. Какой четверти принадлежит угол x, если

$$\sin x = (\cos x)^2.$$

Ответ. I или II четверти.

3. Какой четверти принадлежит угол x, если

$$\cos x = 3(\cos x)^3.$$

Ответ. Любой четверти.

4. Какой четверти принадлежит угол x, если

$$\sin x = (\cos x)^3$$

Ответ. I или III четверти.

5. Какой четверти принадлежит угол x, если

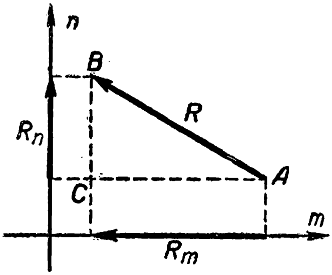
$$\sin x - \cos x = 1{,}3.$$

Ответ. II четверти.

§ 5. Зависимость между синусом и косинусом одного и того же аргумента.

Пусть мы имеем вектор R, образующий с произвольной осью $\vec{m}$ угол x. Построим проекции этого вектора на ось $\vec{m}$ и ось $\vec{n}$, образующую с данной осью $\vec{m}$ угол, равный $\frac{\pi}{2}$ (см. черт. 60).

Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC равна длине вектора $\vec{R}$; катет AC равен длине проекции вектора $\vec{R}$ на ось $\vec{m}$; катет BC равен длине проекции вектора $\vec{R}$ на ось $\vec{n}$. По теореме Пифагора



Черт. 60

$$|R_m|^2 + |R_n|^2 = R^2.$$

Это равенство можно переписать и так:

$$(R_m)^2 + (R_n)^2 = R^2,$$

так как в левую часть равенства входят квадраты проекций, и знаки проекций не влияют на их величину. Следовательно, написанное равенство справедливо **при любом положении вектора** $\vec{R}$. Разделив обе части этого равенства на R^2, заведомо неравное нулю, получим:

$$\frac{(R_m)^2}{R^2} + \frac{(R_n)^2}{R^2} = 1.$$

Но по определению $\frac{R_m}{R} = \cos(\widehat{m, R})$ и $\frac{R_n}{R} = \sin(\widehat{m, R})$.

Следовательно,

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1,$$

где буквой x обозначен угол $(\widehat{m, R})$.

Обыкновенно вместо $(\cos x)^m$ пишут $\cos^m x$ и вместо $(\sin x)^m$ пишут $\sin^m x$. Следовательно, наше равенство можно переписать так:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1. \qquad (1)$$

Полученное равенство справедливо для любого значения x (при любом положении вектора); следовательно, оно является **тригонометрическим тождеством** по отношению к x.

Выражение $\cos^2 x + \sin^2 x$, равное тождественно единице, называется иногда тригонометрической единицей. Тождество (1) выражает зависимость между косинусом и синусом одного и того же аргумента и дает возможность вычислить значение одной из этих функций по заданному значению другой для того же аргумента. Действительно, полагая известным значение $\sin x$, найдем, что

$$\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}, \qquad (2)$$

а полагая известным значение $\cos x$, получим, что

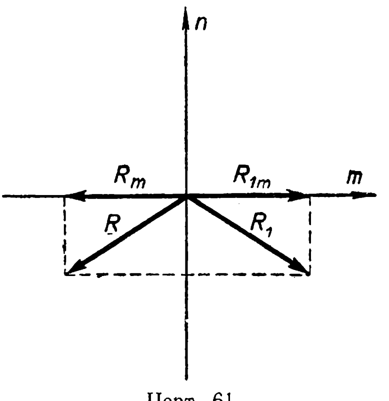
$$\sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x}. \qquad (3)$$

Двойной знак в формулах (2) и (3) показывает, что задача определения косинуса аргумента x по заданному значению его синуса и синуса аргумента x по заданному значению его косинуса допускает два решения, так как каждому значению одной из этих тригонометрических функций соответствуют, вообще говоря, два равных по абсолютной величине, но различных по знаку значения другой.

Для краткости речи будем называть задачу, допускающую одно решение, однозначной, задачу, допускающую два решения, двузначной, а задачу, допускающую множество решений, многозначной. Задача определения $\cos x$ по заданному значению $\sin x$ или определения $\sin x$ по заданному значению $\cos x$ является з а д а ч е й д в у з н а ч н о й.

Двузначность этой задачи объясняется свойствами тригонометрических функций $\sin x$ и $\cos x$. Действительно, пусть $\sin x < 0$, тогда x может быть углом III или IV четверти (см. черт. 61).

Рассмотрим векторы R и R_1, которые равны по модулю и имеют общую проекцию на ось $\vec{n}$; проекции же этих векторов на ось $\vec{m}$ различны по знаку, хотя и равны по абсолютной величине. Поэтому $\cos x$ принимает два значения, равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку.



Черт. 61

Но если, кроме задания значения $\sin x$ или $\cos x$, указана еще и четверть, которой принадлежит угол, тогда из двух корней квадратного уравнения условию задачи удовлетворяет только один, и перед корнем надо ставить только один знак.

Примеры.

1. Вычислить $\sin x$, если $\cos x = \frac{2}{3}$

$$\sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \pm \frac{1}{3}\sqrt{5}.$$

2. Вычислить $\cos x$, если $\sin x = -0{,}4$ и $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$;

$$\cos x = -\sqrt{1-(0{,}4)^2} = -\sqrt{0{,}84} = -0{,}2\sqrt{21}.$$

Упражнения.

1. Вычислить $\dfrac{\sin^2\frac{5}{7}\pi + \sin^2\frac{3}{14}\pi}{\cos\frac{5}{6}\pi + \sin 3\pi}$.

Ответ. $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

2. Вычислить $\dfrac{\sin 110^\circ\cdot\sin 250^\circ + \cos 540^\circ\cdot\cos 290^\circ\cdot\cos 430^\circ}{\cos^2 1260^\circ}$.

Ответ. -1.

3. Вычислить $\sin x$, если $\cos x = \dfrac{1-m}{1+m}$ и $m > 0$.

Ответ. $\sin x = \pm\dfrac{2\sqrt{m}}{1+m}$.

4. Вычислить $\cos x$, если $\sin x = -\dfrac{a^2}{\sqrt{a^4+b^4}}$.

Ответ. $\cos x = \pm\dfrac{b^2}{\sqrt{a^4+b^4}}$.

5. Вычислить $\cos x$, если $\sin x = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ и $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

Ответ. $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

6. Вычислить $\cos x$, если $\sin x = 0{,}352$ и $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$.

Ответ. $-0{,}936$.

7. Вычислить $\sin x$, если $\cos x = \dfrac{8}{17}$ и $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$.

Ответ. $\sin x = \pm\dfrac{15}{17}$.

8. Найти $\sin x$, если $\cos x = \sqrt{1-a^2}$ и $2\pi < x < 3\pi$.

Ответ. $\sin x = |a|$

9. Какой четверти принадлежит угол α, если

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}?$$

Ответ. I или II четверти.

10. Дано $f(x) = \dfrac{\sin x + 6\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sin x + 2\sqrt{1-\cos^2 x}}$,

определить $f(3)$ и $f(4)$

Ответ $f(3) = \dfrac{7}{3}$; $f(4) = 5$.

11. Дано: $f(x)=\frac{\cos 7x-\sqrt{1-\sin^2 7x}}{\cos 2x+2\sqrt{1-\sin^2 2x}}$;

определить: $f\left(\frac{\pi}{9}\right)$ и $f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Ответ. $f\left(\frac{\pi}{9}\right)=-\frac{2}{3}$; $f\left(\frac{2\pi}{5}\right)=-2$.

12. Доказать, что сумма квадратов косинусов углов прямоугольного треугольника равна единице, а сумма квадратов синусов этих углов равна двум.

13. Доказать тождество:

$\sin^2(\pi-\alpha)\cdot\sin(\alpha-3\pi)-\cos(4\pi-\alpha)\cdot\cos(\alpha-\pi)\cdot\sin(\alpha-5\pi)=-\sin\alpha$.

14. $\sin\alpha+\cos\alpha=0{,}2$;

определить $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если α угол второй четверти.

Ответ. $\sin\alpha=0{,}8$.

§ 6. Определение тангенса и его свойства.

Тангенсом угла между произвольным вектором и данной осью называется *отношение синуса этого угла к его косинусу.*

$$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x},$$

где через x обозначен угол, образуемый произвольным вектором $\vec{R}$ с данной осью $\vec{m}$, т. е.

$$x=(\widehat{m, R}).$$

Так как косинус и синус угла между вектором и данной осью сохраняют одно и то же значение при любой длине вектора и являются функцией только угла между вектором и осью, то и дробь $\frac{\sin x}{\cos x}$ не зависит от длины вектора и является функцией аргумента x.

$$\operatorname{tg} x=f(x).$$

Пользуясь определением тангенса, можно установить все свойства функции $\operatorname{tg} x$, исследуя свойства дроби $\frac{\sin x}{\cos x}$ по свойствам ее числителя $\sin x$ и знаменателя $\cos x$.

Определим знаки функции $\operatorname{tg} x$ по четвертям и результаты запишем в нижеследующей таблице.

Четверть	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$
I	+	+	+
II	+	—	—
III	—	—	+
IV	—	+	—

Определим значения функции $\operatorname{tg} x$ для значений

$$x=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}\ \text{и}\ 2\pi.$$

1. $\operatorname{tg} 0=\frac{\sin 0}{\cos 0}=\frac{0}{1}=0;\quad \operatorname{tg} 0=0.$

2. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}=\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{0};\quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ не существует, так как дробь, знаменатель которой равен нулю, не имеет смысла.

3. $\operatorname{tg}\pi=\frac{\sin\pi}{\cos\pi}=\frac{0}{-1}=0;\quad \operatorname{tg}\pi=0.$

4. $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{2}=\dfrac{\sin\frac{3\pi}{2}}{\cos\frac{3\pi}{2}}=\frac{-1}{0};\quad \operatorname{tg}\frac{3\pi}{2}$ не существует.

5. $\operatorname{tg} 2\pi=\frac{\sin 2\pi}{\cos 2\pi}=\frac{0}{1}=0;\quad \operatorname{tg} 2\pi=0.$

Найденные значения $\operatorname{tg} x$ для $x=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi$ присоединим к таблицам значений $\sin x$ и $\cos x$ для тех же значений аргумента.

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{2}$	1	0	не существует
π	0	-1	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	не существует
2π	0	1	0

Установим для каких значений аргумента x $\operatorname{tg} x$ **не существует**. $\cos x=0$, когда проекция вектора $\vec{R}$ на данную ось $\vec{m}$ равна 0. Это возможно в тех случаях, когда вектор перпендикулярен данной оси, т. е. наименьший по абсолютной величине угол, образованный вектором с данной осью, равен либо $\frac{\pi}{2}$, либо $-\frac{\pi}{2}$. По свойству периодичности косинуса $\cos x = 0$ для всех значений x, получаемых из формул

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \text{и} \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

Объединим эти формулы в одну, для чего преобразуем их следующим образом:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n = \frac{\pi}{2}(4n + 1).$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n = \frac{\pi}{2}(4n - 1).$$

Выражения $4n + 1$ и $4n - 1$ охватывают всю совокупность нечетных чисел и могут быть заменены выражением: $2k + 1$. Следовательно, $\cos x = 0$ для всех значений аргумента, получаемых из формулы

$$x = \frac{\pi}{2}(2k + 1).$$

Для тех же значений аргумента $\operatorname{tg} x$ не существует. Таким образом, получаем вывод.

Функция $\operatorname{tg} x$ *определена для всех действительных значений аргумента, кроме* $x = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$, *где* k *целое число.*

Основные свойства функции $\operatorname{tg} x$.

1. Свойство периодичности. Функции $\cos x$ и $\sin x$ являются периодическими функциями с периодом, равным 2π. Следовательно, свойством периодичности обладает и $\operatorname{tg} x$. Действительно,

$$\operatorname{tg}(x + 2\pi k) = \frac{\sin(x + 2\pi k)}{\cos(x + 2\pi k)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x,$$

но

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x.$$

Следовательно, от прибавления к аргументу числа π значение функции $\operatorname{tg} x$ не меняется. Докажем, что π является периодом функции $\operatorname{tg} x$.

Обозначим период функции $\operatorname{tg} x$ буквой λ. На основании определения периода равенство

$$\operatorname{tg}(x + \lambda) = \operatorname{tg} x$$

должно быть справедливо при любых действительных значениях x, не равных $\frac{\pi}{2}(2k + 1)$.

Пусть $x = 0$. Тогда $\operatorname{tg}\lambda = \operatorname{tg} 0 = 0$. Но наименьшим положительным значением аргумента, тангенс которого равен 0, является π. Поэтому периодом функции $\operatorname{tg} x$ является число π.

Итак, *функция* $\operatorname{tg} x$ *является периодической функцией* x *с периодом, равным* π.

$$\operatorname{tg}(x + \pi k) = \operatorname{tg} x,$$

где k любое целое число.

2. Свойство нечетности. Рассмотрим теперь изменение функции $\operatorname{tg} x$ при изменении знака аргумента x.

$$\operatorname{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x.$$

При изменении знака аргумента значение функции $\operatorname{tg} x$ *меняется только по знаку, следовательно,* $\operatorname{tg} x$ *является нечетной функцией аргумента.*

Пользуясь двумя основными свойствами тангенса, его периодичностью и нечетностью, можно вычисление тангенса любого угла свести к вычислению тангенса угла положительного и острого.

Примеры.

1. $\operatorname{tg} 200^\circ = \operatorname{tg} 20^\circ$ (свойство I; вычли один период).
2. $\operatorname{tg} 21{,}1\pi = \operatorname{tg} 0{,}1\pi$ (свойство I; вычли 21 период).
3. $\operatorname{tg}(-300^\circ) = \operatorname{tg} 60^\circ$ (свойство I; прибавили 2 периода).
4. $\operatorname{tg} 5\pi = \operatorname{tg} 0 = 0$ (свойство I; вычли 5 периодов).
5. $\operatorname{tg} 3{,}6\pi = \operatorname{tg}(-0{,}4\pi) = -\operatorname{tg} 0{,}4\pi$ (свойство I; вычли два периода и свойство II).
6. $\operatorname{tg} 2 = \operatorname{tg}(2 - \pi) = -\operatorname{tg}(\pi - 2)$ (свойство I и II).

Вычислим $\operatorname{tg} x$ для значений аргумента x, равных $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{4}$.

Исходя из определения тангенса, имеем:

1. $$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1.$$

2. $$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

3. $$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Итак, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$; $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

Вычислим приближенные значения $\operatorname{tg} x$ для этих значений аргумента с точностью до 0,001.

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1{,}000;\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0{,}577;\ \operatorname{tg} = \frac{\pi}{3}\sqrt{3} \approx 1{,}732.$$

Докажем еще следующую теорему: *тангенс угла между вектором и данной осью равен отношению проекции вектора на ось, составляющую с данной осью угол, равный* $\frac{\pi}{2}$, *к проекции вектора на данную ось, т. е.*

$$\operatorname{tg}(\widehat{m, R}) = \frac{R_n}{R_m}.$$

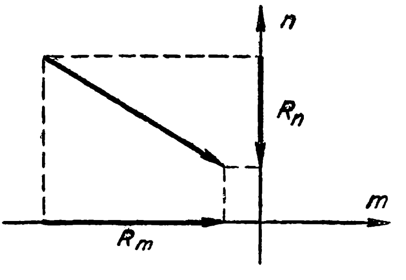
Действительно,

$$\operatorname{tg}(\widehat{m, R}) = \frac{\sin(\widehat{m, R})}{\cos(\widehat{m, R})} \text{ (по определению).}$$

Но $\sin(\widehat{m, R}) = \frac{R_n}{R}$ и $\cos(\widehat{m, R}) = \frac{R_m}{R}$
и, следовательно,

$$\operatorname{tg}(\widehat{m, R}) = \frac{\frac{R_n}{R}}{\frac{R_m}{R}} = \frac{R_n}{R_m}. \text{ (см. черт. 62).}$$

Рассмотрим изменение функции $\operatorname{tg} x$ при изменении аргумента x в пределах одного периода. Для этого выберем такой промежуток изменения аргумента, который равнялся бы по величине одному периоду, и функция $\operatorname{tg} x$ была бы определена для любого значения x в этом промежутке (кроме крайних значений), например промежуток от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$.



Черт. 62.

Проследим сначала изменение функции $\operatorname{tg} x$ при изменении аргумента x от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

При увеличении x от 0 до $\frac{\pi}{2}$, как известно, $\sin x$ возрастает от 0 до 1, $\cos x$ убывает от 1 до 0. Следовательно, дробь $\frac{\sin x}{\cos x}$, равная $\operatorname{tg} x$, возрастает, так как возрастает ее числитель и убывает знаменатель. Так как числитель дроби $\frac{\sin x}{\cos x}$ приближается к единице, а знаменатель этой дроби неограниченно убывает, приближаясь к нулю, то дробь $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$ возрастает неограниченно, т. е. может стать больше любого наперед заданного положительного числа.

Такой характер изменения, при котором переменная величина возрастает так, что ее значение может стать больше любого наперед заданного числа, выражают обычно для краткости словами:

«переменная величина возрастает до бесконечности». Термин «бесконечность» изображается символом ∞.

Отсюда вывод: *если аргумент возрастает от* 0 *до* $\frac{\pi}{2}$, *оставаясь меньше* $\frac{\pi}{2}$, *функция* $\operatorname{tg} x$ *возрастает от нуля до бесконечности* (от 0 до ∞).

При $x = \frac{\pi}{2}$ $\operatorname{tg} x$, как было установлено выше, теряет смысл — не существует.

Проследим теперь изменение функции $\operatorname{tg} x$ при изменении аргумента от 0 до $-\frac{\pi}{2}$. В силу нечетности тангенса значения $\operatorname{tg} x$ на этом промежутке отличаются только по знаку от значений $\operatorname{tg} x$ на промежутке от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Следовательно, при изменении аргумента x от 0 до $-\frac{\pi}{2}$ функция $\operatorname{tg} x$, будучи отрицательной, неограниченно возрастает по абсолютной величине. Такой характер изменения, при котором переменная неограниченно возрастает по абсолютной величине, оставаясь отрицательной, для краткости выражают словами: «переменная величина убывает до минус бесконечности». Термин «минус бесконечность» изображается символом $-\infty$. Таким образом, если аргумент уменьшается от 0 до $-\frac{\pi}{2}$, оставаясь больше $-\frac{\pi}{2}$, функция $\operatorname{tg} x$ убывает от 0 до $-\infty$.

При $x = -\frac{\pi}{2}$ функция $\operatorname{tg} x$, как было установлено выше, не существует.

Следовательно, при возрастании аргумента от $-\frac{\pi}{2}$ до 0 функция $\operatorname{tg} x$ возрастает от минус бесконечности до 0 (от $-\infty$ до 0).

При возрастании аргумента от $-\frac{\pi}{2}$ *до* $+\frac{\pi}{2}$ *функция* $\operatorname{tg} x$ *возрастает от* $-\infty$ *до* $+\infty$. При этом $\operatorname{tg} x$ существует для любого значения x в этом промежутке и не существует для крайних значений x: $\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}$.

Так как $\operatorname{tg} x$ является периодической функцией с периодом, равным π, то в дальнейшем изменение функции будет повторяться, т. е. $\operatorname{tg} x$ будет возрастать от $-\infty$ до $+\infty$ в любом из промежутков:

$$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right); \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right) \dots \text{ и т. д.},$$

вообще в любом из промежутков, получаемых из формулы

$$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \ \frac{\pi}{2} + \pi k\right).$$

Таким образом, *функция* $\operatorname{tg} x$ *может принимать любые действительные значения* (от $-\infty$ до $+\infty$).

Рассмотрим зависимость между тангенсами дополнительных углов x и $\frac{\pi}{2}-x$.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\frac{\cos x}{\sin x}=1:\ \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Следовательно, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\operatorname{tg} x}$.

Тангенсы дополнительных углов обратны по величине.

Вычислим $\sin x$ и $\cos x$ по заданному значению $\operatorname{tg} x$. Разделив обе части тождества

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1$$

на $\cos^2 x$ (если $\cos x\neq 0$) или на $\sin^2 x$ (если $\sin x\neq 0$), получим равенства:

$$1+\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Эти равенства дают возможность выразить $\cos x$ и $\sin x$ через $\operatorname{tg} x$.

$$\cos x=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}};\qquad \sin x=\pm\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}.$$

Задача определения синуса и косинуса угла по заданному значению его тангенса имеет два решения, отличающихся друг от друга только знаком. Действительно, если $\operatorname{tg} x>0$, то угол принадлежит I или III четверти, т. е. $\sin x$ и $\cos x$ или оба положительны или оба отрицательны; если $\operatorname{tg} x<0$, то угол принадлежит либо II, либо IV четверти, и знак $\sin x$ и $\cos x$ снова является неопределенным.

Исходя из определения тангенса, можно выразить $\operatorname{tg} x$ через одну из функций $\sin x$ или $\cos x$.

$$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}=\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x};\qquad \operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}=\pm\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}.$$

Получаем следующие формулы соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла.

$$\sin x=\pm\sqrt{1-\cos^2 x};\qquad \sin x=\pm\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}};$$

$$\cos x=\pm\sqrt{1-\sin^2 x};\qquad \cos x=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}};$$

$$\operatorname{tg} x=\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x};\qquad \operatorname{tg} x=\pm\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}};$$

Определение каждой тригонометрической функции по заданному значению одной из них является задачей **двузначной**, что объясняется вышеизложенными соображениями.

Примеры.

а) Вычислить $\cos x$, если $\operatorname{tg} x = 2\sqrt{2}$.

Решение: $\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \pm \frac{1}{\sqrt{1+(2\sqrt{2})^2}} = \pm \frac{1}{3}$.

б) Вычислить $\operatorname{tg} x$, если $\sin x = -\frac{2}{3}$.

Решение: $\operatorname{tg} x = \pm \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \pm \frac{-\frac{2}{3}}{\sqrt{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2}} = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$.

в) Вычислить $\sin x$, если $\operatorname{tg} x = -\frac{24}{7}$ и $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

Решение: $\sin x = \pm \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \pm \frac{-\frac{24}{7}}{\sqrt{1+\left(-\frac{24}{7}\right)^2}} = \pm \frac{24}{25}$.

Приняв во внимание, что $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, получим окончательно:

$$\sin x = \frac{24}{25}.$$

Упражнения.

1. Упростить:

$$\frac{\operatorname{tg}(3\pi - x) + \operatorname{tg}(10\pi - x) - \operatorname{tg}(11\pi + x)}{\sin 6{,}5\pi - \cos 17\pi + \cos 20\pi}.$$

Ответ. $-\operatorname{tg} x$.

2. Вычислить:

а) $$\frac{\operatorname{tg}\frac{2}{3}\pi \cdot \cos\frac{5}{6}\pi + \operatorname{tg}(-1{,}25\pi)}{\sin^2\frac{7\pi}{4} \cdot \cos 7\pi}.$$

Ответ. -1.

б) $$\frac{\operatorname{tg}^2\frac{5}{6}\pi + \sin^2\frac{7\pi}{2}}{\cos^2\frac{7\pi}{6}} + \operatorname{tg} 2{,}25\pi.$$

Ответ. $\frac{25}{9}$.

3. Доказать тождества:

а) $$\frac{\cos(\pi - \alpha) + \sin(\pi + \alpha)}{1 + \operatorname{tg}(2\pi + \alpha)} = -\cos\alpha.$$

б) $$\frac{\operatorname{tg}^2(7\pi - \alpha) \cdot \sin^2\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right)}{\sin(19\pi - \alpha) \cdot \sin(-\alpha - 5\pi)} = 1.$$

4. Вычислить $\sin x$ и $\cos x$, если $\operatorname{tg} x = -\sqrt{5}$.

Ответ. $\sin x = \pm\sqrt{\frac{5}{6}}$, $\cos x = \pm\sqrt{\frac{1}{6}}$.

5. Вычислить $\sin x$ и $\cos x$, если $\operatorname{tg} x = \frac{2a}{1-a^2}$.

Ответ. $\sin x = \pm\frac{2a}{1+a^2}$; $\cos x = \pm\frac{1-a^2}{1+a^2}$

6. Вычислить $\operatorname{tg} x$, если $\cos x = \sqrt{\frac{10}{19}}$ и $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

Ответ. $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{\sqrt{10}}$

7. Вычислить $\operatorname{tg} x$, если $\sin x + \cos x = 1{,}4$.

Ответ. $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$ или $\operatorname{tg} x = \frac{4}{3}$.

8. Вычислить $\cos x$, если $\sin x \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$.

Ответ. $\cos x = \frac{\sqrt{17}-1}{4}$.

9. Доказать, что если $\sin x \cdot \operatorname{tg} x = a$, то при любом значении a $\cos x$ определяется однозначно.

10. Вычислить $\operatorname{tg} x$, если $\sin^4 x + \cos^4 x = a$ и указать при каких значениях a задача имеет решение.

Ответ. $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{\frac{a \pm \sqrt{2a-1}}{1-a}}$ при $\frac{1}{2} \leqslant a < 1$.

§ 7. Вспомогательные тригонометрические функции.

Кроме трех функций $\cos x$, $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$, которые мы назовем основными тригонометрическими функциями, рассматривают еще три вспомогательные тригонометрические функции $\operatorname{ctg} x$ (котангенс), $\sec x$ (секанс) и $\operatorname{cosec} x$ (косеканс), определяемые равенствами:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x};\quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x};\quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Из определения этих функций следует, что $\operatorname{ctg} x$ не существует, если $\sin x = 0$, т. е, если $x = \pi k$ при k целом; $\sec x$ не существует, если $\cos x = 0$, т. е. если $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$ при k целом; $\operatorname{cosec} x$ не существует, если $\sin x = 0$, т. е. если $x = \pi k$ при k целом.

Следовательно, функция $\operatorname{ctg} x$ определена для всех действительных значений x, кроме $x = \pi k$, где k целое число; функция $\sec x$ определена для всех действительных значений x, кроме $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, где k целое число; функция $\operatorname{cosec} x$ определена для всех действительных значений x, кроме $x = \pi \cdot k$, где k целое число.

Сравнивая равенства

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ и } \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

получаем, что $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$.

Таким образом, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ для любого значения аргумента числа взаимно обратные.

Примечание. Соотношение

$$\operatorname{ctg} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

теряет смысл, если $x = \frac{\pi}{2} k$ (k целое число), так как при k четном знаменатель дроби обращается в нуль, а при k нечетном знаменатель дроби не существует.

Свойство тангенсов дополнительных углов можно теперь дать в иной формулировке: *тангенс любого угла равен котангенсу дополнительного угла; котангенс любого угла равен тангенсу дополнительного угла*

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg} \alpha.$$

Знаки вспомогательных тригонометрических функций в четвертях совпадают со знаками соответствующих основных тригонометрических функций, для которых они являются обратными величинами: знаки $\operatorname{ctg} x$ по четвертям совпадают со знаками $\operatorname{tg} x$; знаки $\sec x$ — со знаками $\cos x$; знаки $\operatorname{cosec} x$ — со знаками $\sin x$.

Основные свойства функции $\operatorname{tg} x$ — периодичность с периодом, равным π, и нечетность являются, очевидно, и свойствами функции $\operatorname{ctg} x$, так как

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

следовательно:

1. $\operatorname{ctg} x$ *является периодической функцией аргумента* x *с периодом, равным* π.

$$\operatorname{ctg}(x + \pi k) = \operatorname{ctg} x.$$

2. $\operatorname{ctg} x$ *является нечетной функцией аргумента* x.

$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x.$$

Чтобы проследить изменение функции $\operatorname{ctg} x$ в пределах одного периода, выберем такой промежуток изменения аргумента, который равнялся бы по величине одному периоду, и функция $\operatorname{ctg} x$ была бы определена для любого значения x в пределах этого промежутка (кроме крайних значений x), например, промежуток от 0 до π.

При изменении аргумента от 0 до $\frac{\pi}{2}$ функция $\operatorname{tg} x$, как известно, возрастает от 0 до ∞; следовательно, функция $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ должна убывать от ∞ до 0.

$$\text{При } x = \frac{\pi}{2} \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

При возрастании аргумента от $\frac{\pi}{2}$ до π $\cos x$ становится отрицательным, но по абсолютной величине возрастает от 0 до 1, а $\sin x$ убывает неограниченно, приближаясь к нулю. Следовательно, дробь $\frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x$, будучи отрицательной, неограниченно возрастает по абсолютной величине, т. е. изменяется от 0 до $-\infty$. Следовательно, при изменении аргумента от $\frac{\pi}{2}$ до π функция $\operatorname{ctg} x$ убывает от 0 до $-\infty$.

Таким образом, *при возрастании аргумента от* 0 *до* π *функция* $\operatorname{ctg} x$ *убывает от* $+\infty$ *до* $-\infty$.

Аналогичные рассуждения могут быть проведены для остальных двух вспомогательных тригонометрических функций $\sec x$ и $\operatorname{cosec} x$.

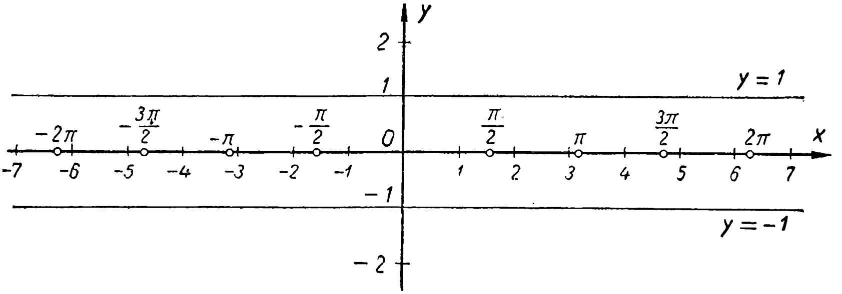
При дальнейшем изучении тригонометрии мы, как правило, будем ограничиваться рассмотрением трех основных тригонометрических функций, не рассматривая $y = \operatorname{ctg} x$, как самостоятельную функцию, а вводя лишь иногда это обозначение для задач вычислительного характера.

Обозначений $\sec x$ и $\operatorname{cosec} x$ мы будем избегать, так как они крайне редко употребляются в современной математической литературе, и введение их не вызывается принципиальной необходимостью.

§ 8. Графики тригонометрических функций.

Пользуясь свойствами тригонометрических функций, построим графики тригонометрических функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$.

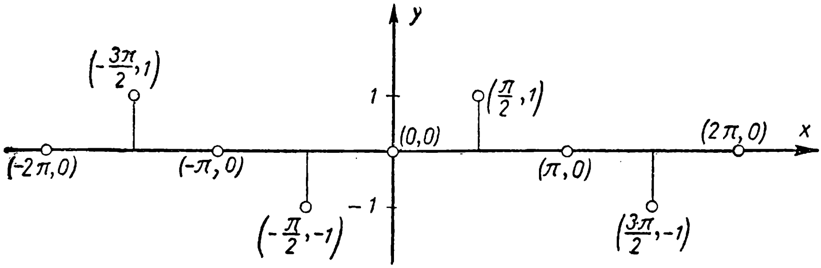
1. Построение графика функции $y = \sin x$. Выбрав определен-



Черт 63.

ный масштаб, наносим его на координатные оси. Так как синус любого числа по абсолютной величине не превосходит единицы, то график функции $y = \sin x$ не должен выходить за пределы полосы, ограниченной прямыми $y = 1$ и $y = -1$ (см. черт. 63).

Значение, равное единице, функция принимает при значениях аргумента, равных $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \frac{13\pi}{2}, \ldots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}, \ldots$ Получаем точки $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right), \left(\frac{5\pi}{2}, 1\right), \ldots, \left(-\frac{3\pi}{2}, 1\right), \left(-\frac{7\pi}{2}, 1\right)$ и т. д., принадлежащие графику данной функции, и наносим эти точки на чертеж 64.



Черт. 64.

Значение, равное -1, функция принимает при значениях аргумента, равных $-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$ и т. д. Наносим на чертеж 64 точки $\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right), \left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$ и т. д., принадлежащие графику функции.

При значениях аргумента, равных $0, \pi, 2\pi, \ldots, -\pi, -2\pi \ldots$ функция $y = \sin x$ принимает значения, равные нулю, т. е. в этих точках график функции пересекает ось абсцисс. Наносим на чертеж 64 точки $(0,0)$, $(\pi, 0)$, $(2\pi, 0), \ldots, (-\pi, 0)$, $(-2\pi, 0), \ldots$, принадлежащие графику функции.

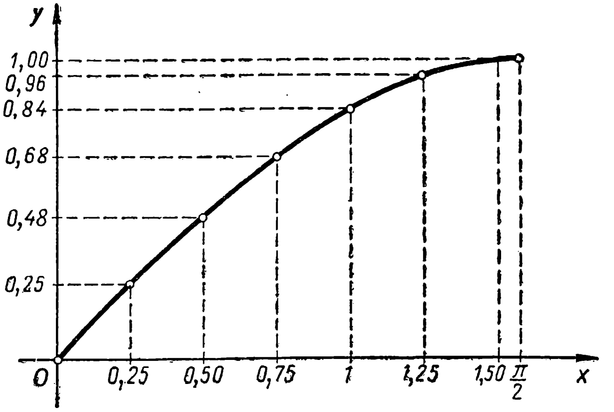
При возрастании аргумента x от 0 до $\frac{\pi}{2}$ функция $\sin x$, как известно, возрастает от 0 до 1.

Для уточнения вида этой кривой построим несколько точек графика для значений аргумента, взятых в промежутке от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Берем из таблиц тригонометрических функций[1] значения функции $y = \sin x$, округленные до двух десятичных знаков, для нижеследующих значений аргумента, и нанесем эти точки на чертеж 65. Для большей наглядности увеличиваем масштаб на этом чертеже по сравнению с предыдущим чертежом.

x	y
0,25	0,25
0,50	0,48
0,75	0,68
1,00	0,84
1,25	0,96
1,50	1,00

[1] Таблицы значений тригонометрических функций помещены в конце книги.

При возрастании аргумента x от $\frac{\pi}{2}$ до π функция $\sin x$, как известно, убывает от 1 до 0. Для построения графика функции

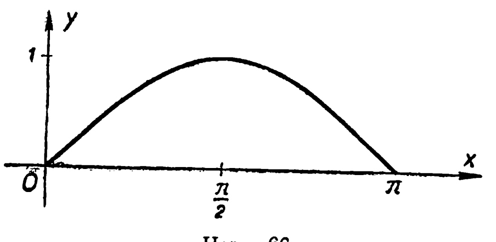


Черт. 65.

в этом промежутке изменения аргумента мы пользуемся соотношением

$$\sin(\pi - x) = \sin x,$$

вытекающим из свойства половины периода и нечетности синуса. Из этого соотношения следует, что каждой точке (x, y) в промежутке от 0 до $\frac{\pi}{2}$ соответствует точка $(\pi - x, y)$ в промежутке от $\frac{\pi}{2}$ до π. Таким образом, при изменении аргумента от $\frac{\pi}{2}$ до π функция $\sin x$ принимает те же значения, что и при изменении аргумента от 0 до $\frac{\pi}{2}$, но расположенные в обратном порядке. Это определяет вид графика функции $y = \sin x$ в промежутке от $\frac{\pi}{2}$ до π (см. черт. 66)



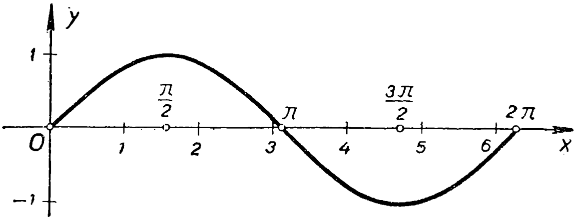
Черт. 66.

Чтобы построить график функции $y = \sin x$ при изменении аргумента от π до 2π, воспользуемся свойством половины периода. Известно, что

$$\sin(\pi + x) = -\sin x.$$

Значит, $\sin(\pi+0{,}25)=-\sin 0{,}25$; $\sin(\pi+0{,}50)=-\sin 0{,}50$; $\sin(\pi+0{,}75)=-\sin 0{,}75$; $\sin(\pi+1)=-\sin 1$ и т. д.

Следовательно, при изменении аргумента от π до 2π $\sin x$ принимает отрицательные значения; но по абсолютной величине значения функции повторяются в том же порядке, как и при изменении аргумента от 0 до π. Поэтому вид кривой такой же, как и в промежутке от 0 до π. Только кривая располагается в сторону отрицательных значений y, «под осью абсцисс». Минимальное значение $\sin x$ в этом промежутке равно -1 и соответствует абсциссе $\frac{3}{2}\pi$ (см. черт. 67).



Черт. 67

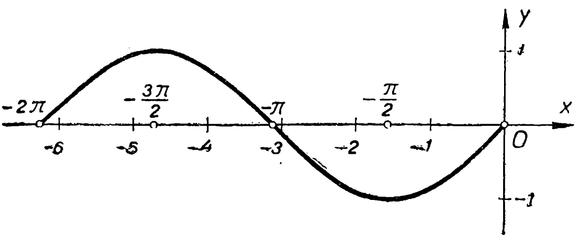
Нами построен график функции $y=\sin x$ на отрезке $0\leqslant x\leqslant 2\pi$.

Так как функция $y=\sin x$ является периодической и период функции равен 2π, то график функции имеет тот же вид на отрезках $2\pi\leqslant x\leqslant 4\pi$, $4\pi\leqslant x\leqslant 6\pi$ и на любом из отрезков $2\pi k\leqslant x\leqslant 2\pi k+2\pi$.

На чертеже 68 изображен график функции $y=\sin x$ на отрезке $-2\pi\leqslant x\leqslant 0$.

Чертеж 68 может быть выполнен и на основании тождества $\sin(-x)=-\sin x$ (свойство нечетности).

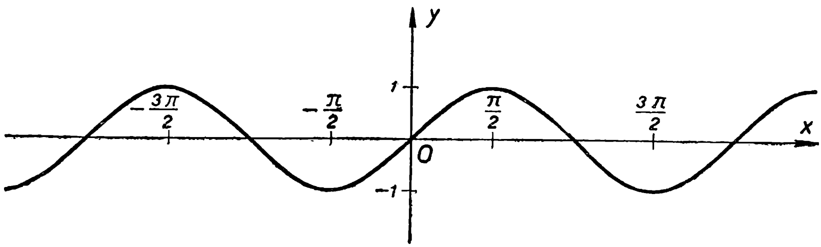
Заметим, что график любой нечетной функции в том числе функции $\sin x$ симметричен относительно начала координат («центральная симметрия»).



Черт 68

Действительно, из равенства $f(-x)=-f(x)$ следует, что каждой точке $A(x_1, y_1)$ соответствует точка $A'(-x_1, -y_1)$, симметричная точке A относительно начала координат.

Таким образом, график функции $y=\sin x$, построенный для любых действительных значений аргумента, представляет собой волнообразную кривую. Кривая эта называется синусоидой. Та часть синусоиды, которая соответствует изменению аргумента в промежутках от 0 до 2π, от 2π до 4π и т. д., от -2π до 0 и т. д. называется волной синусоиды. Синусоида состоит из бесчисленного множества одинаковых волн (см. черт. 69).



Черт. 69.

2. Построение графика функции $y = \cos x$. Чтобы построить график функции $y = \cos x$, можно повторить те же рассуждения: построить точки графика, соответствующие максимальным и минимальным значениям косинуса, найти точки пересечения графика с осью абсцисс, рассмотреть изменение функции в промежутке от 0 до $\frac{\pi}{2}$, использовать свойство половины периода, свойства периодичности и четности косинуса. Но можно поступить и проще.

Из свойств функции $y = \cos x$ и $y = \sin x$ следует:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(-x) = \cos x.$$

Значит, $\cos 0 = \sin\frac{\pi}{2}$; $\cos 0{,}25 = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 0{,}25\right)$; $\cos 0{,}50 = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 0{,}50\right)$; $\cos 0{,}75 = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 0{,}75\right)$; $\cos 1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)$ и т. д.

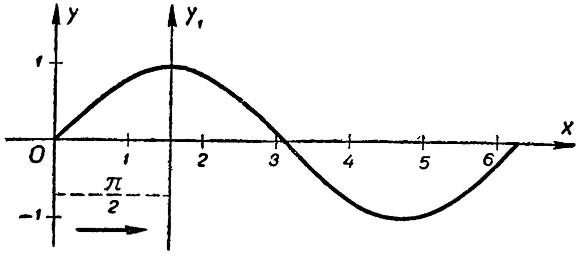
Следовательно, при возрастании x, начиная от 0, $\cos x$ изменяется так, как изменяется $\sin x$ при изменении x, начиная от $\frac{\pi}{2}$. График функции $y = \cos x$ есть та же синусоида, только смещенная влево по оси абсцисс на отрезок, равный $\frac{\pi}{2}$. Другими словами, для получения графика функции $y = \cos x$ из графика функции $y = \sin x$ достаточно перенести начало координат вдоль оси абсцисс вправо на отрезок, равный $\frac{\pi}{2}$ (см. черт. 70).

Заметим, что график любой четной функции и в том числе функции $\cos x$ симметричен относительно оси ординат («осевая симметрия»).

Действительно, из равенства $f(-x) = f(x)$ следует, что каждой точке $A(x_1, y_1)$ соответствует точка $A'(-x_1, y_1)$, симметричная точке A относительно оси ординат.

Графики функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$ являются наглядной иллюстрацией изменения этих функций при изменении аргумента.

При возрастании аргумента функции $y=\sin x$ и $y=\cos x$ то возрастают, то убывают. Однако для каждой из этих функций



Черт. 70.

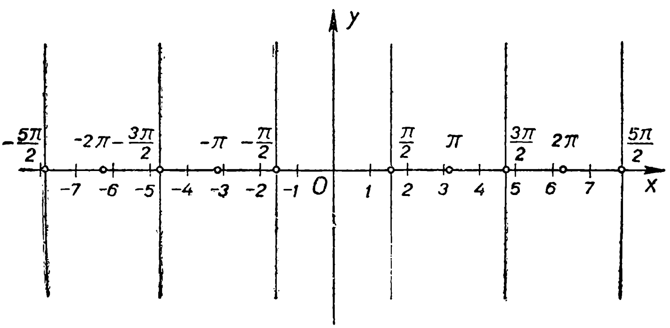
можно указать промежутки, на которых функция либо только возрастает, либо только убывает. Функция, возрастающая или убывающая на некотором промежутке, называется монотонной функцией на этом промежутке. Такими промежутками монотонного изменения будут

а) для синуса: от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$; от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3}{2}\pi$; от $\frac{3}{2}\pi$ до $\frac{5}{2}\pi$ и т. д.;

б) для косинуса: от $-\pi$ до 0; от 0 до π; от π до 2π и т. д.

3. Построение графика функции $y=\operatorname{tg} x$. Выбрав определенный масштаб, наносим его на координатные оси. Так как $\operatorname{tg} x$ не существует для x вида $\frac{\pi}{2}(2k+1)$, при k целом, то график этой функции не является сплошной линией, а имеет разрывы в точках с абсциссами вида $\frac{\pi}{2}(2k+1)$, т. е. с абсциссами $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$, $-\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$ и т. д. Строим прямые $x=\frac{\pi}{2}$, $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3}{2}\pi$, $x=-\frac{3}{2}\pi$ и т. д. (см. черт. 71).

Отмечаем на оси абсцисс значения аргумента вида $k\pi$, т. е. точки 0, π, $-\pi$, 2π, -2π, 3π, -3π и т. д. (см. черт. 71). Для



Черт. 71.

этих значений аргумента $\operatorname{tg} x = 0$, т. е. в этих точках график функции пересекает ось абсцисс.

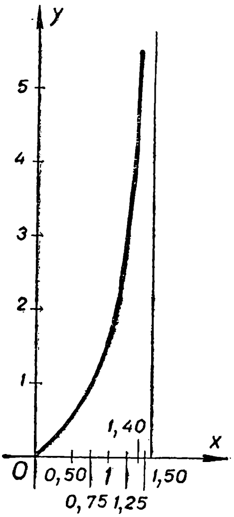
При возрастании аргумента от 0 до $\frac{\pi}{2}$ функция $\operatorname{tg} x$, как известно, возрастает неограниченно от 0 до ∞.

Для уточнения вида кривой нанесем на чертеже 72 точки для некоторых значений аргумента, взятых из промежутка $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Из таблиц тригонометрических функций найдем с точностью до 0,01:

$\operatorname{tg} 0{,}50 = 0{,}55;$	$\operatorname{tg} 1{,}25 = 3{,}01;$
$\operatorname{tg} 0{,}75 = 0{,}93;$	$\operatorname{tg} 1{,}40 = 5{,}80;$
$\operatorname{tg} 1{,}00 = 1{,}56;$	$\operatorname{tg} 1{,}50 = 14{,}10.$

Для большей наглядности чертеж 72 выполнен в увеличенном масштабе по сравнению с предыдущим чертежом. Так как $\operatorname{tg} x$ существует для любого значения x между 0 и $\frac{\pi}{2}$, то нанесенные на чертеже 72 точки соединяем плавной кривой.

При $x = \frac{\pi}{2}$ график функции $\operatorname{tg} x$ претерпевает разрыв. По мере приближения аргумента к $\frac{\pi}{2}$ график функции $\operatorname{tg} x$ приближается к прямой $x = \frac{\pi}{2}$, никогда ее не достигая. Такое приближение называется асимптотическим, и прямая $x = \frac{\pi}{2}$ называется асимптотой графика функции $y = \operatorname{tg} x$.

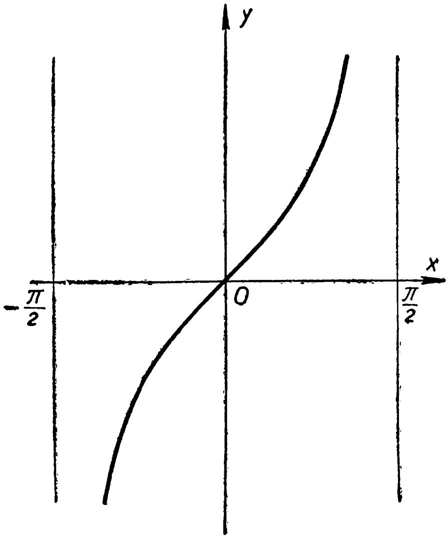


Черт. 72.

Построим график функции $y = \operatorname{tg} x$ при изменении аргумента от 0 до $-\frac{\pi}{2}$. Вследствие нечетности тангенса изменение функции $\operatorname{tg} x$ при изменении аргумента от 0 до $-\frac{\pi}{2}$ только по знаку отличается от ее изменения при изменении аргумента от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Следовательно, в промежутке от 0 до $-\frac{\pi}{2}$ график функции $\operatorname{tg} x$ будет представлять собой кривую такого же вида, как и в промежутке от 0 до $\frac{\pi}{2}$, но только расположенную в сторону отрицательных значений ординаты «под осью абцисс» (см. черт. 73).

Объединяя промежутки от 0 до $\frac{\pi}{2}$ и от 0 до $-\frac{\pi}{2}$ в один промежуток от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, мы видим, что $\operatorname{tg} x$ при возрастании x

от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$ возрастает от неограниченно больших по абсолютной величине отрицательных значений до неограниченно больших положительных значений. Применяя принятые символические записи, можно записать, что при возрастании аргумента от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg} x$ возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Аргумент x может принимать



Черт. 73.

любое значение из промежутка от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$ за исключением крайних значений $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$. Промежуток вида $a < x < b$ называется интервалом.

В интервале $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ $\operatorname{tg} x$ представляет собой возрастающую функцию, т. е. изменение $\operatorname{tg} x$ в этом интервале является монотонным.

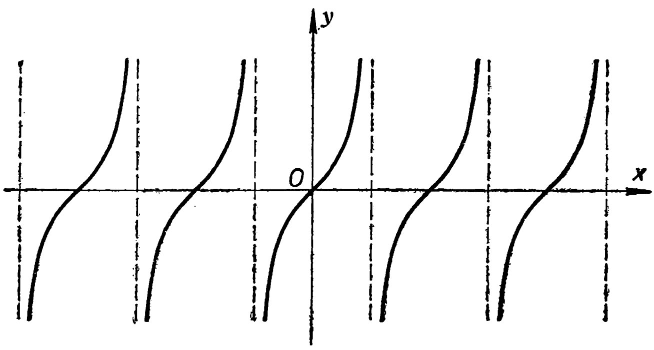
Промежутки, на которых мы рассматривали изменение функций $\sin x$ и $\cos x$, охватывают и крайние значения аргумента. Промежуток вида $a \leqslant x \leqslant b$ называется отрезком (или сегментом).

Отрезок $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ является отрезком монотонного изменения синуса; отрезок $0 \leqslant x \leqslant \pi$ является отрезком монотонного изменения косинуса. На отрезке $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ изменение и синуса и косинуса не является монотонным.

Множество всех действительных чисел обозначается как интервал $-\infty < x < \infty$, ибо символы $+\infty$ и $-\infty$ не рассматриваются как числа.

Интервал $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ изменения функции $\operatorname{tg} x$ состоит из двух промежутков: от 0 до $\frac{\pi}{2}$ и от 0 до $-\frac{\pi}{2}$. В каждый из этих промежутков входит только одно из крайних значений аргумента (0). Такой промежуток называется полуинтервалом и обозначается так: $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2} < x \leqslant 0$. Таким образом, интервал $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ состоит из двух полуинтервалов. В точках $\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}$ график функции $\operatorname{tg} x$ имеет разрыв. Прямые $x = \frac{\pi}{2}$ и $x = -\frac{\pi}{2}$ являются асимптотами этого графика.

Так как $\operatorname{tg} x$ периодическая функция с периодом, равным π, то изменение $\operatorname{tg} x$ в интервалах $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi < x < \frac{5}{2}\pi$, $-\frac{3}{2}\pi < x < -\frac{\pi}{2}$ и т. д. будет такое же, как и в интервале $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Следовательно, и график функции в этих интервалах будет иметь такой же вид, как и в интервале $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ (см. черт. 74).



Черт. 74.

Таким образом, график функции $\operatorname{tg} x$, построенный для любых действительных значений аргумента, т. е. на интервале $-\infty < x < \infty$ состоит из бесчисленного множества отдельных ветвей, соответствующих интервалам $k\pi - \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \frac{\pi}{2}$ и имеет разрывы на концах этих интервалов. Каждый из интервалов $\pi k - \frac{\pi}{2} < x < \pi k + \frac{\pi}{2}$ является интервалом возрастания функции $\operatorname{tg} x$. Каждая из прямых $x=\frac{\pi}{2}$, $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3}{2}\pi$, $x=\frac{5}{2}\pi$ и т. д., т. е. из прямых вида $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$ является асимптотой графика функции $\operatorname{tg} x$. График функции $\operatorname{tg} x$ называется **тангенсоидой**.

Так как $\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x$, тангенсоида $y=\operatorname{tg} x$ симметрична относительно начала координат (центральная симметрия).

ГЛАВА IV

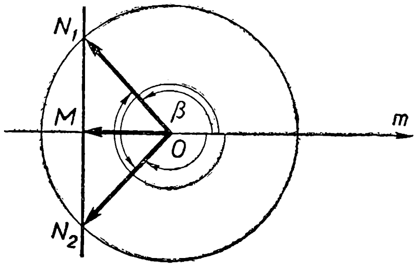
ОПРЕДЕЛЕНИЕ АРГУМЕНТА ПО ЗАДАННОМУ ЗНАЧЕНИЮ ЕГО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ.

§ 1. Построение угла по заданному значению его косинуса.

Пусть $\cos\alpha = a$.

Проведем произвольную ось $\vec{m}$ (черт. 75) и выберем вектор, длина которого равна произвольному постоянному числу R.

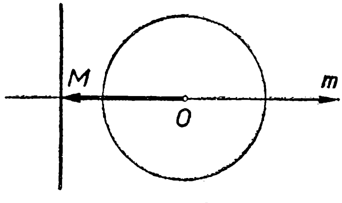
На оси $\vec{m}$ от точки O отложим отрезок OM, равный $|a| \cdot R$, вдоль оси, если $a > 0$, и в противоположном направлении, если $a < 0$. Из точки O, как из центра, проводим окружность радиусом, равным длине вектора. Из точки M восставим перпендикуляр к оси $\vec{m}$, пересекающий окружность радиуса R в точках N_1 и N_2. Соединив точки N_1 и N_2 с точкой O, получаем два различных вектора ON_1 и ON_2, имеющих общую проекцию на ось $\vec{m}$. Согласно построению косинус угла между каждым из построенных двух векторов и осью $\vec{m}$ равен $\frac{aR}{R} = a$. Но каждый вектор образует с данной осью бесчисленное множество углов. Следовательно, задача построения угла по заданному значению его косинуса, равному a, имеет бесчисленное множество решений.



Черт. 75.

Исследуем решение этой задачи:

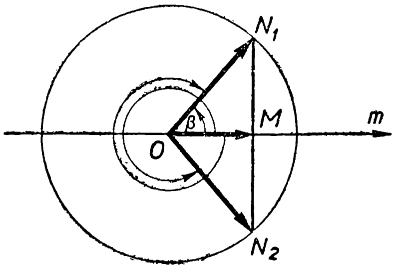
1. Задача не имеет решения, если $|a| > 1$. Действительно, если $|a| > 1$, то длина проекции вектора на ось $\vec{m}$ больше длины вектора, и перпендикуляр, восставленный из точки M к оси $\vec{m}$, не пересекает окружности радиуса R (черт. 76, a).



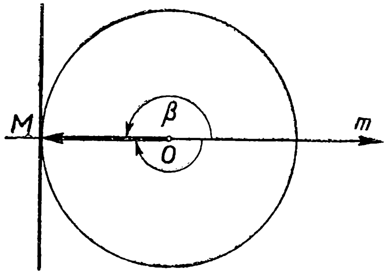
Черт. 76, *а*.

Впрочем, этот факт следует непосредственно из неравенства $|\cos\alpha| \leqslant 1$ (глава III, § 1).

2. Задача имеет бесчисленное множество решений, если $|a| \leqslant 1$. Перпендикуляр, восставленный из точки M к оси $\vec{m}$, имеет две общие точки с окружностью при $|a| < 1$ (черт. 76, *б*), а каждый из векторов образует бесчисленное множество углов с данной осью $\vec{m}$.



Черт. 76, *б*.



Черт. 76. *в*.

При $|a| = 1$ построение дает одну точку касания (см. черт. 76, *в*), т. е. единственный вектор на плоскости, которому также соответствует бесчисленное множество углов между вектором и осью $\vec{m}$.

§ 2. Общий вид углов, соответствующих заданному значению косинуса угла.

Пусть дано: $\cos\alpha = a$ и $|a| \leqslant 1$. Поставим себе задачей получить такую формулу, из которой мы можем определить каждое значение искомого угла α, если нам известно одно из его значений. Обозначим это известное нам значение угла α через α_0; тогда условию задачи удовлетворяет и угол $-\alpha_0$, так как, вследствие четности косинуса, $\cos(-\alpha_0) = \cos\alpha_0$. Вследствие периодичности косинуса условию задачи удовлетворяют, кроме углов α_0 и $-\alpha_0$, и каждый из углов:

$$\alpha_0 + 2\pi;\ \alpha_0 - 2\pi;\ \alpha_0 + 4\pi;\ \alpha_0 - 4\pi;\ \alpha_0 + 6\pi,\ \ldots$$

$$-\alpha_0 + 2\pi;\ -\alpha_0 - 2\pi;\ -\alpha_0 + 4\pi;\ -\alpha_0 - 4\pi;\ -\alpha_0 + 6\pi,\ \ldots .$$

Совокупность всех углов, удовлетворяющих заданному значению косинуса, может быть записана в форме:

$$\alpha = \pm\,\alpha_0 + 2\pi k,$$

где k любое целое число (положительное, отрицательное или нуль) и α_0 один из углов, косинус которого равен a.

Формула $\alpha = \pm\,\alpha_0 + 2\pi k$

называется *общим видом углов, косинус которых равен a.*

Формула эта охватывает все решения задачи определения угла по данному значению его косинуса и т о л ь к о э т и р е ш е н и я.

Возьмем одно из значений угла, косинус которого равен a, на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$. На этом отрезке косинус угла принимает все значения от 1 до -1. Так как этот отрезок является отрезком монотонного изменения косинуса — убывания от 1 до -1, — то каждому значению косинуса соответствует единственное значение угла. Значение угла, принадлежащее этому отрезку, является *наименьшим положительным значением угла*, соответствующим заданному значению косинуса, равному a. Условимся это *наименьшее положительное значение угла, косинус которого равен a, обозначать символом* $\arccos a$ (арккосинус a); arc — первые три буквы латинского слова arcus, что означает дуга.

На чертежах 75, 76, *б*, *в* это наименьшее положительное значение угла обозначено буквой β, причем на чертеже 75 β — тупой угол $\left(\frac{\pi}{2} < \beta < \pi\right)$, на чертеже 76, *б* β — острый угол $\left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$, на чертеже 76, *в* $\beta = \pi$.

Из определения следует, что

$$0 \leqslant \arccos a \leqslant \pi.$$

Отрезок $0 \leqslant \arccos a \leqslant \pi$ можно разбить на два отрезка:

$$0 \leqslant \arccos a \leqslant \frac{\pi}{2}, \text{ при } 0 \leqslant a \leqslant 1$$

и

$$\frac{\pi}{2} \leqslant \arccos a \leqslant \pi, \text{ при } -1 \leqslant a \leqslant 0.$$

При $a=1$ $\arccos a = 0$; при $a=0$ $\arccos a = \frac{\pi}{2}$; при $a=-1$ $\arccos a=\pi$.

Из определения $\arccos a$ следует также, что

$$\cos(\arccos a) = a.$$

Для нахождения $\arccos a$ при различных значениях a можно воспользоваться либо построением (построить угол, косинус которого равен a), либо графиком функции $y = \cos x$ (по данному значению функции найти соответствующее значение аргумента), либо тригонометрическими таблицами.

При некоторых отдельных значениях a $\arccos a$ можно вычислить непосредственно:

$$\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}, \quad \arccos\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}, \quad \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Вычислим $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)$.

Так как $-1 < -\frac{3}{4} < 0$, то искомое число $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)$ принадлежит промежутку $\frac{\pi}{2} < \arccos\left(-\frac{3}{4}\right) < \pi$.

С другой стороны, на основании свойства половины периода и свойства четности:

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

и, следовательно, $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) = \pi - \arccos\frac{3}{4}$.

При помощи таблиц найдем:

$$\arccos\frac{3}{4} = \arccos 0{,}75 \approx 0{,}723$$

и

$$\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) = \pi - \arccos\ 0{,}75 \approx 3{,}142 - 0{,}723 = 2{,}419.$$

Вообще при отрицательном значении a:

$$\arccos a = \pi - \arccos|a|.$$

Например,

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi;$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi;$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi;$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{3} \approx 3{,}142 - 1{,}231 = 1{,}911$$

и т. д.

С помощью символа $\arccos a$ общий вид углов, соответствующих заданному значению косинуса угла, может быть записан в следующем виде:

$$\text{если } \cos\alpha = a, \text{ то } \alpha = \pm\arccos a + 2\pi k.$$

Примеры.

1. Найти α, если $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Решение: $\alpha = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\pi k$, но $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$,

следовательно, $\alpha = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$.

2. Найти α, если $\cos\alpha = 0{,}875$.

Решение: $\alpha = \pm\arccos 0{,}875 + 2\pi k$.

Пользуясь таблицами тригонометрических функций, находим, что $\arccos 0{,}875 \approx 0{,}5053$.

Следовательно, $\alpha \approx \pm 0{,}5053 + 2\pi k$.

3. Найти α, если $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$.

Решение: $\alpha = \pm \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi k$,

но $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) = \pi - \arccos\frac{2}{3}$,

следовательно, $\alpha = \pm\left(\pi - \arccos\frac{2}{3}\right) + 2\pi k$.

С помощью таблиц вычисляем приближенно (с точностью до 0,0001) $\arccos\frac{2}{3}$.

$$\arccos\frac{2}{3} = 0{,}8411;$$

$$\pi - \arccos\frac{2}{3} = 3{,}1416 - 0{,}8411 = 2{,}3005;$$

$$\alpha = \pm 2{,}3005 + 2\pi k.$$

4. Найти градусную меру угла α, если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.

Решение: $\alpha = \pm \arccos\left(-\frac{3}{5}\right) + 360^\circ \cdot k$,

но $\arccos\left(-\frac{3}{5}\right) = 180^\circ - \arccos\frac{3}{5}$,

следовательно, $\alpha = \pm\left(180^\circ - \arccos\frac{3}{5}\right) + 360^\circ \cdot k$.

Для нахождения $\arccos\frac{3}{5}$ пользуемся таблицей тригонометрических функций, где аргумент задан в градусной мере.

$$\arccos\frac{3}{5} \approx 53^\circ\,08';$$

$$180^\circ - \arccos\frac{3}{5} \approx 180^\circ - 53^\circ\,08' = 126^\circ\,52';$$

$$\alpha = \pm 126^\circ\,52' + 360^\circ k.$$

Упражнения.

1. Определить общий вид углов, соответствующих следующим значениям их косинуса:

а) $\frac{1}{5}$; б) 0,398; в) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $+\frac{2}{5}$; д) $-\frac{2}{5}$; е) 0.

Ответ. а) $\pm \arccos\frac{1}{5} + 2\pi k$; б) $\pm \arccos 0{,}398 + 2\pi k$; в) $\pm\frac{5}{6}\pi + 2\pi k$; г) $\pm \arccos\frac{2}{5} + 2\pi k$; д) $\pm\left(\pi - \arccos\frac{2}{5}\right) + 2\pi k$; е) $\pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

2. $\cos\alpha = \frac{3}{4}$. Вычислить с точностью до 0,001 все значения α, удовлетворяющие неравенствам

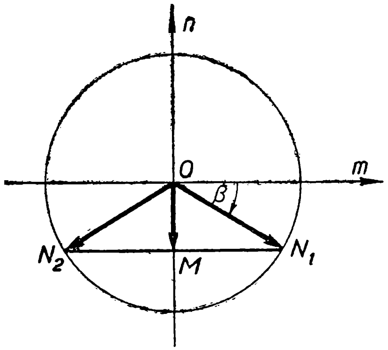
$$-3 < \alpha < 12.$$

Указание. Сначала составить формулу общего вида углов.

Ответ. $-0{,}723$; $+0{,}723$; $5{,}560$; $7{,}006$; $11{,}843$.

§ 3. Построение угла по заданному значению его синуса.

Пусть $\sin\alpha = a$. Проведем произвольную ось $\vec{m}$ и ось $\vec{n}$, составляющую с осью $\vec{m}$ угол, равный $\frac{\pi}{2}$ (чертеж 77).



Черт. 77.

Выберем вектор $\vec{R}$ с началом в точке пересечения осей $\vec{m}$ и $\vec{n}$ (точка O) и от точки O отложим на оси $\vec{n}$ отрезок OM, равный $|a|\cdot R$, вдоль оси, если $a>0$ и в противоположном направлении, если $a<0$.

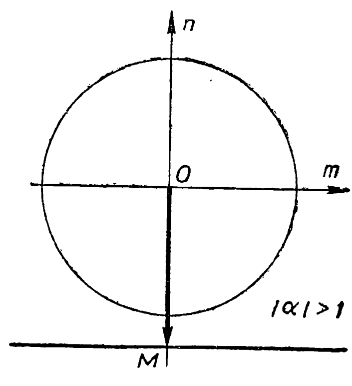
Из точки O, как из центра, проводим окружность радиусом, равным длине вектора. Из точки M восставим к оси $\vec{n}$ перпендикуляр, пересекающий окружность радиуса R в точках N_1 и N_2. Соединяя точки N_1 и N_2 с точкой O, получим два различных вектора $\overrightarrow{ON_1}$ и $\overrightarrow{ON_2}$, имеющих общую проекцию на ось $\vec{n}$.

Согласно построению синус угла между каждым из построенных векторов и осью $\vec{m}$ равен $\frac{aR}{R} = a$. Условию задачи удовлетворяет множество углов, образуемых векторами $\overrightarrow{ON_1}$ и $\overrightarrow{ON_2}$ с осью $\vec{m}$.

Исследуем решение этой задачи.

1. Задача не имеет решения, если $|a|>1$. Действительно, если $|a|>1$, то длина проекции вектора на ось $\vec{n}$ больше длины вектора, и прямая, проведенная через точку M параллельно оси $\vec{m}$, не пересекает окружности радиуса R (см. черт. 78, *а*).

2. Задача имеет бесконечное множество решений при $|a|\leqslant 1$, так как прямая N_1N_2 параллельная оси $\vec{m}$, имеет две общие точки с окружностью при $|a|<1$ (черт. 78, *б*) и одну общую точку (точку касания) при $|a|=1$ (черт. 78, *в*), в последнем случае построение дает один вектор, а каждый из векторов образует бесконечное множество углов с данной осью $\vec{m}$.

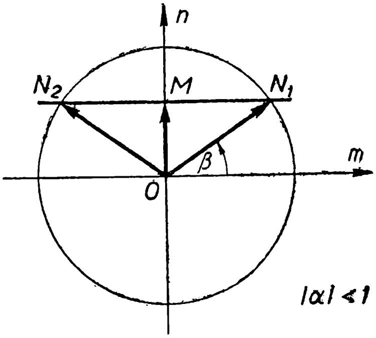


Черт. 78, *а*.

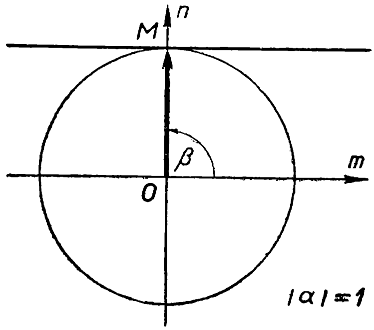
§ 4. Общий вид углов, соответствующих заданному значению синуса угла.

Пусть дано: $\sin\alpha = a$ и $|a| \leqslant 1$.

Нашей задачей является нахождение такой формулы для угла, при помощи которой может быть определено каждое значение искомого угла α, если нам известно одно из искомых его значений.



Черт. 78, *б*.



Черт. 78, *в*.

Обозначим это известное нам значение угла α через α_0. Тогда условию задачи удовлетворяет и угол $-\alpha_0 + \pi$, так как $\sin(-\alpha_0 + \pi) = \sin\alpha_0$ на основании свойства половины периода и свойства нечетности синуса.

Вследствие периодичности синуса угла условию задачи, кроме углов α_0 и $-\alpha_0 + \pi$, удовлетворяет и каждый из углов:

$$\alpha_0 + 2\pi,\ \alpha_0 - 2\pi,\ \alpha_0 + 4\pi,\ \alpha_0 - 4\pi,\ \alpha_0 + 6\pi,\ \ldots,$$

$$-\alpha_0 + \pi + 2\pi,\ -\alpha_0 + \pi - 2\pi,\ -\alpha_0 + \pi + 4\pi,\ -\alpha_0 + \pi - 4\pi, \ldots$$

Совокупность углов первой строки может быть записана в форме:

$$\alpha_0 + 2\pi k.$$

Совокупность углов второй строки может быть записана в форме

$$-\alpha_0 + \pi + 2\pi k = -\alpha_0 + \pi(2k + 1).$$

Совокупность всех углов, соответствующих заданному значению синуса угла, может быть, следовательно, задана двумя формулами:

$$\alpha = \alpha_0 + 2\pi k,$$

$$\alpha = -\alpha_0 + \pi(2k + 1),$$

где k — любое целое число (положительное, отрицательное или нуль) и α_0 один из углов, синус которого равен a.

Для краткости записи обе эти формулы иногда объединяют в одну:

$\alpha = (-1)^k \alpha_0 + \pi k$ при k целом.

Покажем, что совокупность

$$(-1)^k \alpha_0 + \pi k$$

эквивалентна совокупности

$$\alpha_0 + 2\pi k,$$
$$-\alpha_0 + \pi(2k+1),$$

т. е. что каждое значение одной из совокупностей является одним из значений другой совокупности.

Рассмотрим два возможных случая:

а) k четное число и б) k нечетное число.

При k четном можно положить $k = 2k_1$.

$$\alpha = (-1)^{2k_1}\alpha_0 + 2\pi k_1 = \alpha_0 + 2\pi k_1.$$

При k нечетном можно положить $k = 2k_1 + 1$.

$$\alpha = (-1)^{2k_1+1}\alpha_0 + \pi(2k_1+1) = -\alpha_0 + \pi(2k_1+1).$$

Формулы:

$$\alpha = \alpha_0 + 2\pi k,$$
$$\alpha = -\alpha_0 + \pi(2k+1),$$

или эквивалентная им формула

$$\alpha = (-1)^k \alpha_0 + \pi k$$

называется *общим видом углов, синус которых равен* a.

Формула общего вида углов, соответствующих данному значению синуса, охватывает все решения задачи определения угла по данному значению его синуса и только эти решения.

Возьмем одно из значений угла, синус которого равен a, на отрезке $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. В этом промежутке синус угла принимает все значения от -1 до $+1$. Так как этот промежуток является промежутком монотонного изменения синуса — возрастания от -1 до $+1$, то каждому значению синуса соответствует единственное значение угла. Значение угла, принадлежащее этому промежутку, является наименьшим по абсолютной величине значением угла, соответствующим значению синуса, равному a.

Условимся это наименьшее по абсолютной величине значение угла, синус которого равен a, обозначать символом $\arcsin a$ (арксинус a). На чертежах 77, 78, *б*, 78, *в* это наименьшее по абсолютной величине значение угла обозначено буквой β, причем на чертеже 78, *б* β — острый угол $\left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$, на чертеже 77 $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$, а на чертеже 78, *в* β — прямой угол $\left(\beta = \frac{\pi}{2}\right)$.

Из определения следует, что

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin a \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Отрезок $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin a \leqslant \frac{\pi}{2}$ можно разбить на два отрезка:

$$0 \leqslant \arcsin a \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad \text{при } 0 \leqslant a \leqslant 1$$

и

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin a \leqslant 0, \quad \text{при } -1 \leqslant a \leqslant 0.$$

$$\text{При } a = 0 \ \arcsin a = 0, \ \text{при } a = 1 \ \arcsin a = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{при } a = -1 \ \arcsin a = -\frac{\pi}{2}.$$

Из определения $\arcsin a$ следует также, что

$$\sin(\arcsin a) = a.$$

С помощью символа $\arcsin a$ общий вид углов, соответствующих заданному значению синуса угла, равному a, может быть записан в форме:

Если $\sin\alpha = a$, то

$$\alpha = \arcsin a + 2\pi k,$$

$$\alpha = -\arcsin a + \pi(2k+1)$$

или

$$\alpha = (-1)^k \arcsin a + \pi k.$$

Для нахождения значения $\arcsin a$ можно воспользоваться так же, как и для вычисления $\arccos a$, построением, графиком функции $y = \sin x$ или таблицами тригонометрических функций.

Примеры.

1. Найти α, если $\sin\alpha = \frac{1}{2}$.

Решение: $\alpha = \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k, \ \alpha = -\arcsin\frac{1}{2} + \pi(2k+1)$,

$$\text{но } \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Поэтому можно записать решение так:

$$\alpha = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{6} + \pi(2k+1),$$

или в одной строке

$$\alpha = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k.$$

2. Найти α, если $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$.

Решение:

$$\alpha = \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi k;$$

$$\alpha = -\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) + \pi(2k+1),$$

или в одной строке $\alpha = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) + \pi k.$

Вследствие нечетности синуса

$$\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) = -\arcsin\frac{2}{3},$$

поэтому решение можно переписать так:

$$\alpha = -\arcsin\frac{2}{3} + 2\pi k;$$

$$\alpha = \arcsin\frac{2}{3} + \pi(2k+1),$$

или в одной строке $\alpha = -(-1)^k \arcsin\frac{2}{3} + \pi k.$

Вычисление $\arcsin\frac{2}{3}$ произведем по таблицам:

$$\arcsin\frac{2}{3} \approx \arcsin 0{,}6667 \approx 0{,}729;$$

$$\alpha = -0{,}729 + 2\pi k;$$

$$\alpha = 0{,}729 + \pi(2k+1),$$

или в одной строке $\alpha = -(-1)^k 0{,}729 + \pi k.$

3. Найти градусную меру угла α,

если $\sin\alpha = 0{,}66.$

Решение:

$$\alpha = \arcsin 0{,}66 + 2\pi k;$$

$$\alpha = -\arcsin 0{,}66 + \pi(2k+1),$$

или в одной строке $\alpha = (-1)^k \arcsin 0{,}66 + \pi k.$

Пользуясь таблицами тригонометрических функций, где аргумент задан в градусной мере, находим, что $\arcsin 0{,}66 \approx 41°18'$.

Тогда решение можно записать так:

$$\alpha = 41°18' + 360° \cdot k;$$

$$\alpha = -41°18' + 180°(2k+1),$$

или в одной строке $\alpha = (-1)^k 41°18' + 180° \cdot k.$

Упражнения.

1. Определить с точностью до $1'$ градусную меру углов, соответствующих следующим значениям их синуса:

$$\text{а) } 0{,}245; \quad \text{б) } \frac{\pi}{4}; \quad \text{в) } -\frac{\sqrt{2}}{5}.$$

Ответ.

а) $(-1)^k\, 14^\circ\, 11' + 180^\circ \cdot k$;

б) $(-1)^k\, 51^\circ\, 44' + 180^\circ \cdot k$;

в) $-(-1)^k\, 16^\circ\, 34' + 180^\circ \cdot k$.

2. $\sin\alpha = 0{,}9$. Вычислить с точностью до 0,001 все значения α, удовлетворяющие неравенствам

$$-6 < \alpha < 2.$$

Ответ. $-5{,}163$; $-4{,}261$; $1{,}120$.

3. $\sin\alpha = 0{,}1$. Вычислить градусную меру α, если α является внутренним углом треугольника.

Ответ. $5^\circ\, 43'$ или $174^\circ\, 17'$.

4. Не пользуясь таблицами, определить, какая из двух величин больше:

а) $\arcsin\frac{\pi}{5}$; $\arcsin\sqrt{\frac{\pi}{5}}$; б) $\arcsin 0{,}8$; $\arccos 0{,}8$; в) $\arcsin(-0{,}95)$; $\arccos(-0{,}95)$.

Ответ.

а) $\arcsin\sqrt{\frac{\pi}{5}} > \arcsin\frac{\pi}{5}$;

б) $\arcsin 0{,}8 > \arccos 0{,}8$;

в) $\arccos(-0{,}95) > \arcsin(-0{,}95)$.

5. При каких условиях, связывающих числа a и b,

$$\arcsin\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ существует?}$$

Ответ. При $ab \leqslant 0$ (исключается случай, когда a и b равны нулю одновременно).

6. При каком значении a имеет место равенство: $\arcsin a = \arccos a$.

Ответ. При $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

7. При каких значениях a справедливо неравенство:

$$\arccos a - \arcsin a < 0.$$

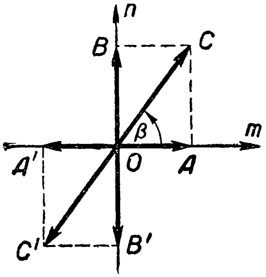
Ответ. При $\frac{1}{\sqrt{2}} < a \leqslant 1$.

§ 5. Построение угла по заданному его тангенсу.

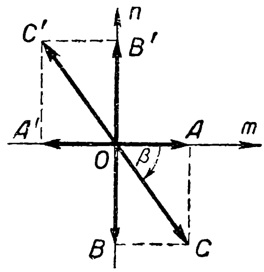
Построим произвольную ось $\vec{m}$ и ось $\vec{n}$, образующую с осью $\vec{m}$ угол, равный $\frac{\pi}{2}$.

Пусть $\operatorname{tg}\alpha = a$. Выберем отрезок произвольной длины λ и отложим этот отрезок вдоль оси $\vec{m}$ от точки пересечения осей $\vec{m}$ и $\vec{n}$ ($OA = \lambda$).

От точки O отложим отрезок OB, длина которого равна $|a| \cdot \lambda$, вдоль оси $\vec{n}$, если $a > 0$, и в противоположном направлении, если $a < 0$ (см. черт. 79). Из точек A и B проведем параллельные осям



Черт. 79.



Черт. 80.

прямые, которые пересекутся в некоторой точке C. Вектор $\vec{OC} = \vec{R}$ составляет с осью $\vec{m}$ угол α, удовлетворяющий условию $\operatorname{tg} \alpha = a$, так как

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R_n}{R_m} = \frac{a\lambda}{\lambda} = a.$$

Тому же условию удовлетворяет и вектор $\vec{OC'}$, равный по модулю вектору $\vec{OC}$ и противоположный ему по направлению (свойство периодичности $\operatorname{tg} x$). Условию задачи удовлетворяет множество углов, образуемых каждым из векторов ($\vec{OC}$ и $\vec{OC'}$) с осью $\vec{m}$.

На чертеже 80 указано построение при $a < 0$.

Положительному значению a соответствует множество углов, принадлежащих I и III четверти.

Отрицательному a соответствует множество углов II и IV четверти.

На каждом из чертежей 79 и 80 буквой β обозначен наименьший по абсолютному значению угол, удовлетворяющий условию $\operatorname{tg} \alpha = a$.

Так как тангенс любого угла может принимать любые значения от $-\infty$ до $+\infty$, то угол α, удовлетворяющий условию $\operatorname{tg} \alpha = a$, может иметь бесчисленное множество значений при любом a.

§ 6. Общий вид углов, соответствующих заданному значению тангенса угла.

Пусть дано: $\operatorname{tg} \alpha = a$.

Как в § 2 и 4, нашей задачей является нахождение такой формулы для угла, при помощи которой может быть определено каждое значение искомого угла α, если нам известно одно из его значений.

Обозначим это известное нам значение угла через α_0. Тогда на основании свойства периодичности тангенса условию задачи должны удовлетворять и углы:

$$\alpha_0+\pi,\ \alpha_0-\pi,\ \alpha_0+2\pi,\ \alpha_0-2\pi,\ \alpha_0+3\pi,\ \dots\ .$$

Совокупность всех углов, соответствующих заданному значению тангенса угла ($\operatorname{tg}\alpha=a$), может быть записана в виде формулы

$$\alpha=\alpha_0+\pi k,$$

где k — любое целое число (положительное, отрицательное или нуль) и α_0 — один из углов, тангенс которого равен a.

Формула эта охватывает все решения задачи определения угла по данному значению его тангенса и т о л ь к о э т и р е ш е н и я.

Возьмем одно из значений угла, тангенс которого равен a, в промежутке от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. В этом промежутке тангенс угла принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$, причем на концах промежутка тангенс теряет смысл. Так как этот промежуток является промежутком монотонного изменения тангенса — возрастания от $-\infty$ до $+\infty$, то каждому значению тангенса соответствует единственное значение угла. Значение угла, принадлежащее этому промежутку, является *наименьшим по абсолютной величине значением угла*, соответствующим заданному значению тангенса, равному a.

Условимся это наименьшее по абсолютной величине значение угла, тангенс которого равен a, обозначать символом $\operatorname{arc\,tg} a$ (арктангенса). На чертежах 79 и 80 это наименьшее по абсолютной величине значение угла обозначено буквой β, причем на чертеже 79 β — острый угол $\left(0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$, а на чертеже 80 β — отрицательный угол $\left(-\frac{\pi}{2}<\beta<0\right)$.

Из определения следует, что

$$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arc\,tg} a<\frac{\pi}{2}.$$

Интервал $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arc\,tg} a<\frac{\pi}{2}$ можно разбить на два полуинтервала:

$$0\leqslant\operatorname{arc\,tg} a<\frac{\pi}{2},\qquad \text{при } a\geqslant 0$$

и

$$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arc\,tg} a\leqslant 0,\qquad \text{при } a\leqslant 0.$$

$$\text{При } a=0\ \operatorname{arc\,tg} a=0.$$

Из определения следует также, что $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} a)=0$.

С помощью символа $\operatorname{arc\,tg} a$ общий вид углов, соответствующих заданному значению тангенса угла, может быть записан в такой форме:

Если $\operatorname{tg}\alpha = a$, то $\alpha = \operatorname{arc\,tg} a + \pi k$.

Для вычисления значения $\operatorname{arc\,tg} a$ можно воспользоваться так же, как и для вычисления $\arccos a$ и $\arcsin a$, построением, графиком функции или таблицами тригонометрических функций.

Примеры.

1. Найти α, если $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$.

Решение: $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{3} + \pi k$,

но $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, следовательно, $\alpha = \frac{\pi}{3} + \pi k$.

2. Найти α, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{8}{9}$.

Решение: $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{8}{9}\right) + \pi k$,

но $\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{8}{9}\right) = -\operatorname{arc\,tg}\frac{8}{9}$, вследствие нечетности тангенса, следовательно, $\alpha = -\operatorname{arc\,tg}\frac{8}{9} + \pi k$.

Вычисляем $\operatorname{arc\,tg}\frac{8}{9}$, пользуясь таблицами тригонометрических функций.

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{8}{9} \approx \operatorname{arc\,tg} 0{,}8889 \approx 0{,}727,$$

$$\alpha = -0{,}727 + \pi k.$$

3. Найти градусную меру угла α, если $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}618$.

Решение: $\alpha = \operatorname{arc\,tg}(-0{,}618) + 180^\circ \cdot k$,

но $\operatorname{arc\,tg}(-0{,}618) = -\operatorname{arc\,tg} 0{,}618$, следовательно,

$\alpha = -\operatorname{arc\,tg} 0{,}618 + 180^\circ \cdot k$.

Для вычисления $\operatorname{arc\,tg} 0{,}618$ пользуемся таблицами, где аргумент задан в градусной мере

$$\operatorname{arc\,tg} 0{,}618 \approx 31^\circ 43'.$$

Окончательно имеем: $\alpha = -31^\circ 43' + 180^\circ \cdot k$.

Упражнения.

1. $f(x) = \operatorname{arc\,tg}\sin x$. Вычислить с точностью до 0,001 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ и $f(3)$.

Ответ. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$;

$f(3) \approx 0{,}140$.

2. $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$. Вычислить все значения α, удовлетворяющие неравенству: $|\alpha| < 3$.

Ответ. $\alpha_1 \approx 0{,}9553$;

$\alpha_2 \approx -2{,}1863$.

3. При каком a справедливо равенство

$$\operatorname{arc\,tg} a = \frac{1}{\operatorname{arc\,tg} a}.$$

Ответ. $a = \pm \operatorname{tg} 1 \approx \pm 1{,}5574$.

§ 7. Решение тригонометрических уравнений.

Определяя аргумент по данному значению a его тригонометрической функции, мы отвечали на вопрос, существуют ли такие значения аргумента, при которых значение функции равно заданному числу, и если существуют, то какие и сколько их. Другими словами, мы решали уравнения:

$$\cos x = a; \quad \sin x = a; \quad \operatorname{tg} x = a.$$

Эти уравнения принято называть *основными тригонометрическими уравнениями*.

Решением каждого из основных тригонометрических уравнений являются уже найденные нами формулы общего вида углов, соответствующих данному значению тригонометрической функции. Выпишем их вновь.

1. $\cos x = a$.

Если $-1 \leqslant a \leqslant 1$, то $x = \pm \arccos a + 2\pi k$.

При $|a| > 1$ это уравнение решений не имеет. Рассмотрим наиболее часто встречающиеся на практике частные случаи, когда запись решения допускает упрощение

а) $\cos x = 1$.

$$x = \pm \arccos 1 + 2\pi k,$$

но $\arccos 1 = 0$; поэтому решение уравнения $\cos x = 1$ записывается так:

$$x = 2\pi k.$$

б) $\cos x = -1$.

$$x = \pm \arccos(-1) + 2\pi k,$$

но $\arccos(-1) = \pi$; поэтому решение уравнения

$$\cos x = -1$$

может быть записано так:

$$x = \pm \pi + 2\pi k = (2k \pm 1)\pi.$$

Но каждое из выражений $2k + 1$ и $2k - 1$ обозначает совокупность всех нечетных чисел. Поэтому в записи решения этого уравнения опускают знак «—».

Итак, решением уравнения

$$\cos x = -1$$

является множество чисел:

$$x = \pi(2k + 1).$$

в) $\cos x = 0$.

$$x = \pm \arccos 0 + 2\pi k,$$

но $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$; получаем

$$x = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k = \frac{\pi}{2}(4k \pm 1).$$

Выражение $4k+1$ обозначает совокупность чисел, которые при делении на 4 дают в остатке 1, а выражение $4k-1$ обозначает совокупность чисел, которые при делении на 4 дают остаток 3. Следовательно, оба эти выражения дают совокупность всех нечетных чисел и поэтому могут быть заменены выражением $2k+1$, обозначающим совокупность всех нечетных чисел.

Поэтому, решение уравнения

$$\cos x = 0$$

записывают так:

$$x = \frac{\pi}{2}(2k+1).$$

2. $\sin x = a$.

Если $-1 \leqslant a \leqslant 1$, то $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$.

Если $|a| > 1$, уравнение решений не имеет.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся на практике частные случаи, когда запись решения допускает упрощение.

а) $\sin x = 0$.

$$x = (-1)^k \arcsin 0 + \pi k,$$

но $\arcsin 0 = 0$, следовательно, решение этого уравнения должно быть записано так:

$$x = \pi k.$$

б) $\sin x = 1$.

$$x = (-1)^k \arcsin 1 + \pi k,$$

но $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$; получаем

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{2} + \pi k$$

при k четном $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$,

при k нечетном $x = -\frac{\pi}{2} + \pi(2k+1) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Оба случая дают одну и ту же формулу:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$

которая и является записью решения этого уравнения.

в) $\sin x = -1$.

$$x = (-1)^k \arcsin(-1) + \pi k,$$

но $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$; поэтому

$x = -(-1)^k \frac{\pi}{2} + \pi k$,

при k четном $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$,

при k нечетном $x = \frac{\pi}{2} + \pi(2k - 1) = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Оба случая дают одну и ту же формулу:

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$

которая и является записью решения этого уравнения.

3. $\operatorname{tg} x = a$.

$x = \operatorname{arc\,tg} a + \pi k$, где a — любое число (действительное).

Рассмотрим частный случай, когда $a = 0$.

$$\operatorname{tg} x = 0.$$

$$x = \operatorname{arc\,tg} 0 + \pi k,$$

но $\operatorname{arc\,tg} 0 = 0$, следовательно,

$$x = \pi k.$$

Рассмотрим решение таких тригонометрических уравнений, в которых под знаком тригонометрической функции находится не непосредственно аргумент x, а некоторая функция от аргумента, т. е. уравнения такого вида:

а) $\cos f(x) = a$; б) $\sin f(x) = a$; в) $\operatorname{tg} f(x) = a$.

Решение таких уравнений состоит из двух этапов:
1-й этап: находят $f(x)$, для чего пользуются формулами общего вида углов, соответствующих данному значению тригонометрической функции.
Получаем:

а) $f(x) = \pm \arccos a + 2\pi k$; б) $f(x) = (-1)^k \arcsin a + 2\pi k$;

в) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} a + \pi k$.

2-й этап: решаем каждое из уравнений а), б) и в) относительно x.

Примеры.

1. $\cos 5x = \frac{1}{2}$.

Решение: $5x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $x = \pm \frac{\pi}{15} + \frac{2}{3}\pi k$.

2. $\operatorname{tg}(2-3x) = -1$.

Решение: $2 - 3x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$; $-3x = -\frac{\pi}{4} + \pi k - 2$;

$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3} - \frac{\pi k}{3}$.

Примечание. Знак слагаемого, содержащего число k множителем, произволен, так как k может принимать и все целые положительные и все целые отрицательные значения. Поэтому условимся это слагаемое писать всегда с положительным знаком: $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3} + \frac{\pi k}{3}$.

3. $\sin \pi x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Найти все значения x на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$, удовлетворяющие этому уравнению.

Решение: $\pi x = -(-1)^m \frac{\pi}{3} + \pi m$; $x = -(-1)^m \cdot \frac{1}{3} + m$;

$$m = 1;\ x_1 = \frac{4}{3};\ m = 2;\ x_2 = \frac{5}{3}.$$

4. $\sin x^2 = 0$.

Решение: $x^2 = \pi m$.

По условию о допустимых значениях аргумента для тригонометрических функций x не может быть мнимым числом; поэтому $m \geqslant 0$

$$x^2 = \pi |m|;\ x = \pm \sqrt{\pi |m|}.$$

5. $\cos(\sin x) = \frac{1}{2}$.

Решение: $\sin x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$,

но $|\sin x| \leqslant 1$, следовательно, $\sin x$ не может равняться по абсолютной величине $\frac{\pi}{3}$.

Уравнение корней не имеет.

Упражнения.

Решить уравнения:

1. $\sin(2x - 1) = 1$. *Ответ.* $x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} + \pi k$.

2. $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$. *Ответ.* $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$.

3. $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$. *Ответ.* $x = \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + \pi k$.

4. $\cos(\alpha - \beta x) = c$, при $|c| \leqslant 1$, $\beta \neq 0$. *Ответ.* $x = \pm \frac{1}{\beta} \arccos c + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{2\pi k}{\beta}$

5. $\operatorname{tg} x^2 = 0$. *Ответ.* $x = \pm \sqrt{\pi \cdot |k|}$.

6. $\cos x^2 = \frac{1}{2}$. *Ответ.* $x = \pm \sqrt{\frac{\pi}{3}}$;

$$x = \pm \sqrt{\frac{\pi}{3} + 2\pi(|k| + 1)}.$$

7. $\cos(\cos x) = \frac{1}{2}$. *Ответ.* Не имеет корней.

8. $\cos(\cos x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. *Ответ.* $x = \pm \arccos\frac{\pi}{6} + \pi k$.

9. $\cos(5\cos 5x) = 0$. *Ответ.* $x = \pm\frac{1}{5}\arccos\frac{\pi}{10} + \frac{1}{5}\pi k$.

$$x = \pm\frac{1}{5}\arccos\frac{3\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}.$$

10. $3\cos x = 5|\cos x| - 2$. *Ответ.* $x = 2\pi k$.

$$x = \pm\arccos\frac{1}{4} + \pi(2k+1).$$

Рассмотрим уравнения, которые являются алгебраическими относительно одной из тригонометрических функций.

Такие уравнения решаются тоже в два этапа: 1. Сначала определяются значения тригонометрической функции, как корни алгебраического уравнения. 2. Затем решаются полученные основные тригонометрические уравнения.

Примеры.

1. $3\sin 2x = 2$.

Решение: Решаем уравнение относительно $\sin 2x$.

$$\sin 2x = \frac{2}{3}.$$

Решаем уравнение $\sin 2x = \frac{2}{3}$.

$$2x = (-1)^k \arcsin\frac{2}{3} + \pi k;\quad x = (-1)^k\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\pi k.$$

2. $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$.

Решаем это уравнение относительно $\cos x$.

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4};$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad \cos x = -1.$$

Получаем два основных тригонометрических уравнения. Решаем каждое из них.

1. $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$.

2. $\cos x = -1$, $x = \pi(2k+1)$.

Данному уравнению удовлетворяют две совокупности корней.

Всякую совокупность корней тригонометрического уравнения, заданную формулой, содержащей целочисленный параметр (в нашем случае таким параметром является k) принято называть серией корней.

Данному уравнению, следовательно, удовлетворяют две серии корней:

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \quad x = \pi(2k+1).$$

3. $3\sin^2 x - 7\sin x + 2 = 0.$

Решаем это уравнение относительно $\sin x$.

$$\sin x = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{6} = \frac{7 \pm 5}{6},$$

$$\sin x = 2 \quad \text{или} \quad \sin x = \frac{1}{3}.$$

Получаем два основных тригонометрических уравнения и решаем каждое из них.

1. $\sin x = 2.$ Это уравнение корней не имеет.

2. $\sin x = \frac{1}{3}\cdot \quad x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + \pi k.$

Таким образом, данному уравнению удовлетворяет одна серия корней

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + \pi k.$$

Упражнения.

	Ответы.
1. $\sin^2 x - 6\sin x + 5 = 0.$	1. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$
2. $\cos^2 x + \cos x - 2 = 0.$	2. $x = 2\pi k.$
3. $6\sin^2 x - 11\sin x + 4 = 0.$	3. $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k.$
4. $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2 x + (\sqrt{3}-1)\,\mathrm{tg}\, x - 1 = 0.$	4. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k;\ x = \frac{\pi}{6} + \pi k.$
5. $4\sin^2 x - 2(1+\sqrt{3})\sin x + \sqrt{3} = 0.$	5. $\left.\begin{aligned} x &= (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k; \\ x &= (-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + \pi k. \end{aligned}\right\}$

Если в уравнении фигурирует не одна тригонометрическая функция, то с помощью формул, выражающих зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента, можно заменить его уравнением, содержащим одну тригонометрическую функцию.

Примеры.

1. $2\cos^2 x + 3\sin x = 0.$

На основании соотношения $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ заменяем в этом уравнении $\cos^2 x$ через $1 - \sin^2 x$.

Получаем уравнение

$$2(1 - \sin^2 x) + 3\sin x = 0,$$

или

$$2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0.$$

Применяя к этому уравнению уже известные нам способы решения, получаем:

$$\sin x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4};$$

$$\sin x = 2 \quad \text{или} \quad \sin x = -\frac{1}{2}.$$

Уравнение $\sin x = 2$ корней не имеет.

Решением уравнения

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{будет } x = -(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k.$$

2. $a\sin x = b\cos x$ $(a \neq 0)$.

Решать данное уравнение с помощью соотношения $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ нецелесообразно, так как такой прием привел бы к иррациональному уравнению относительно $\sin x$ или $\cos x$, а возведение обеих частей уравнения в квадрат может дать посторонние корни. В этом случае применяется другой прием.

Делим обе части уравнения на $\cos x$; при этом не происходит потери корней, так как корни уравнения $\cos x = 0$ данному уравнению не удовлетворяют.

Действительно: те значения аргумента, которые обращают $\cos x$ в 0, обращают $\sin x$ в ± 1. Так как по нашему условию $a \neq 0$, $a\sin x$ не может равняться $b\cos x$.

$$\frac{a\sin x}{\cos x} = b; \qquad a\operatorname{tg} x = b;$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{b}{a}; \qquad x = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + \pi k.$$

3. $a\sin^2 x + b\sin x \cdot \cos x + c\cos^2 x = d$.

а) Предположим, что $a \neq d$.

Делим обе части уравнения на $\cos^2 x$; при этом мы получаем уравнение, равносильное данному, так как корни уравнения $\cos x = 0$ данному уравнению не удовлетворяют.

Действительно: те значения аргумента, при которых $\cos x = 0$, дают для левой части уравнения: $a + b \cdot 0 + c \cdot 0 = d$, но по условию $a \neq d$.

$$a\operatorname{tg}^2 x + b\operatorname{tg} x + c = \frac{d}{\cos^2 x},$$

но

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

Получаем уравнение: $a\,\mathrm{tg}^2 x + b\,\mathrm{tg}\,x + c = d(1 + \mathrm{tg}^2 x)$;
$(a - d)\,\mathrm{tg}^2 x + b\,\mathrm{tg}\,x + c - d = 0$.

Так как $a \neq d$, то полученное уравнение является квадратным относительно $\mathrm{tg}\,x$.

Решая его, получим:

$$\mathrm{tg}\,x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4(a-d)(c-d)}}{2(a-d)};$$

$$x = \mathrm{arctg}\,\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4(a-d)(c-d)}}{2(a-d)} + \pi k.$$

Если $b^2 - 4(a-d)(c-d) < 0$, то заданное уравнение не имеет корней.

б) Если $a = d$, то заданное уравнение может быть записано в виде:

$$a\sin^2 x + b\sin x \cdot \cos x + c\cos^2 x = a;$$

$$b\sin x\cos x + c\cos^2 x = a(1 - \sin^2 x);$$

$$b\sin x\cos x + c\cos^2 x = a\cos^2 x;$$

$$b\sin x\cos x + (c - a)\cos^2 x = 0;$$

$$\cos x\,[b\sin x + (c - a)\cos x] = 0.$$

Разбиваем полученное уравнение на два уравнения

$$\cos x = 0; \quad b\sin x + (c - a)\cos x = 0$$

и решаем каждое из них.

$$x = \frac{\pi}{2}(2k + 1) \text{ и } x = \mathrm{arctg}\,\frac{a - c}{b} + k\pi \text{ (если } b \neq 0).$$

Если $b = 0$, то уравнение $b\sin x + (c - a)\cos x = 0$ принимает вид: $(c - a)\cos x = 0$
и $x = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$, если $a \neq c$.

Если, наконец, $a = d$, $b = 0$ и $a = c$, то данное уравнение обращается в тождество

$$a\sin^2 x + a\cos^2 x = a,$$

т. е. уравнению удовлетворяют все значения x.

Упражнения.

Решить уравнения:

1. $1 - \cos x = \frac{13}{18}\sin^2 x$. *Ответ.* $x = 2\pi k$; $x = \pm\arccos\frac{5}{13} + 2\pi k$.

2. $\sin^2 x + \cos x = 1{,}25$. *Ответ.* $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$.

3. $\sin^2 x + \cos x = 1{,}3$. *Ответ.* Уравнение корней не имеет.

4. Дано уравнение: $a\sin^2 x = b\cos x$.

Показать, что при любых положительных значениях a и b существует один и только один острый угол $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$, удовлетворяющий данному уравнению.

5. Найти градусную меру острых углов, удовлетворяющих уравнению

$$\sin 5x = \frac{2}{3} \cos^2 5x.$$

Ответ. 6°; 30°; 78°.

6. При каких значениях a уравнение $\sin^2 x + 2\cos x = a$ имеет корни?

Ответ. При $-2 \leqslant a \leqslant 2$.

7. Найти острый угол, синус которого в три раза больше его косинуса.

Ответ. $\operatorname{arc\,tg} 3$.

8. Решить уравнение:

$$\sin^2 x + 2\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 3{,}24.$$

Ответ. $x = \operatorname{arc\,tg} \frac{3}{4} + \pi k;$

$x = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{7} + \pi k.$

9. Решить уравнение:

$$3\sin^2 x + 2\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 5.$$

Ответ. Уравнение корней не имеет.

10. Решить уравнение:

$$2\sin^2 x + 3\sin x \cos x + 7\cos^2 x = 2.$$

Ответ. $x = \pi k - \operatorname{arc\,tg} \frac{5}{3};$

$x = \frac{\pi}{2}(2k + 1).$

11. Решить уравнение:

$$2\sin^2 x + 3\sin x \cos x + 7\cos^2 x = 7.$$

Ответ. $x = \pi k$; $x = \operatorname{arc\,tg} \frac{3}{5} + \pi k$.

Многие тригонометрические уравнения могут быть приведены к такому виду, что одна из частей уравнения равна 0, а другая его часть представляет собой произведение или частное тригонометрических функций.

Такое уравнение удовлетворяется лишь теми значениями аргумента, которые обращают в нуль по крайней мере один из сомножителей и не лишают смысла ни один из остальных.

Примеры.

1. $\cos 3x (3\sin 2x + 2) = 0.$

Так как оба множителя существуют при любом значении x, то данное уравнение р а в н о с и л ь н о совокупности уравнений:

$$\cos 3x = 0; \quad 3\sin 2x + 2 = 0.$$

Решая каждое из них, получим все решения данного уравнения:

а) $\cos 3x = 0$; $3x = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$; $x = \frac{\pi}{6}(2k + 1)$.

б) $3 \sin 2x + 2 = 0$; $\sin 2x = -\frac{2}{3}$; $2x = -(-1)^k \arcsin \frac{2}{3} + \pi k$;

$x = -\frac{1}{2}(-1)^k \arcsin \frac{2}{3} + \frac{\pi}{2}k$.

2. $\cos x \cdot \operatorname{tg} 3x = 0$.

Приравниваем нулю каждый из сомножителей и решаем соответствующие уравнения.

а) $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$.

Необходимо проверить, существует ли второй сомножитель при значениях аргумента из этой серии корней; $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} \frac{3\pi}{2}(2k + 1)$ не существует ни при одном целом k.

Поэтому ни одно значение аргумента из совокупности $x = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$ не является корнем данного уравнения.

б) $\operatorname{tg} 3x = 0$, $3x = \pi k$, $x = \frac{\pi k}{3}$.

Все значения x, содержащиеся в совокупности $\frac{\pi k}{3}$, являются корнями данного уравнения, так как первый множитель $\cos x$ существует при любых значениях x.

Таким образом, данное уравнение имеет серию корней

$$x = \frac{\pi k}{3}.$$

3. $\operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{tg} 4x = 0$.

Приравниваем нулю каждый из сомножителей и решаем соответствующее уравнение.

а) $\operatorname{tg} 3x = 0$, $3x = \pi k$, $x = \frac{\pi k}{3}$.

Каждое значение x из этой совокупности является корнем данного уравнения, так как $\operatorname{tg} \frac{4\pi k}{3}$ существует при любом k.

б) $\operatorname{tg} 4x = 0$, $4x = \pi k$, $x = \frac{\pi k}{4}$.

Проверим, при каждом ли значении x из совокупности $x = \frac{\pi k}{4}$ первый множитель $\operatorname{tg} 3x$ имеет смысл; $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} \frac{3\pi k}{4}$ существует при всех k, кратных четырем, и при всех нечетных k, и не существует при четных k, не кратных четырем. Таким образом, из совокупности $x = \frac{\pi k}{4}$ надо исключить значения x, получающиеся при $k = 2(2m + 1)$, и оставить значения x, получающиеся при $k = 4m$ и $k = 2m + 1$.

Получаем две серии корней:

$$x = \pi m \quad \text{и} \quad x = \frac{\pi}{4}(2m + 1).$$

Но числа $x = \pi m$ содержатся в совокупности корней $x = \frac{\pi k}{3}$ при значениях k, кратных трем.

Таким образом, данному уравнению удовлетворяют две серии корней:

$$1)\ x = \frac{\pi k}{3} \quad \text{и} \quad 2)\ x = \frac{\pi}{4}(2k + 1)$$

(буква «m» в формуле 2) заменена буквой «k»).

Упражнения.

Решить уравнения:

1. $\operatorname{tg} 5x \cdot \cos x = 0$. *Ответ.* $x = \frac{\pi k}{5}$.

2. $\cos x(\operatorname{tg} x + 1) = 0$. *Ответ.* $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$.

3. $\operatorname{tg}\frac{x}{2} \cdot \cos x = 0$. *Ответ.* $x = 2\pi k$; $x = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$.

4. $\operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{tg} 6x = 0$. *Ответ.* $x = \frac{\pi k}{3}$.

5. $\operatorname{ctg} x \cdot \sin 3x = 0$. *Ответ.* $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$;

$x = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$.

Рассмотрим тригонометрические уравнения, одна из частей которых равна нулю, а другая представляет собой частное тригонометрических функций. Известно, что дробь равна нулю лишь в том случае, если числитель ее равен нулю, а знаменатель не равен нулю.

Примеры.

1. $\frac{1 + 2\cos x}{2 + \cos x} = 0$.

Уравнению удовлетворяют все значения x, при которых

$$1 + 2\cos x = 0;$$

$$2 + \cos x \neq 0.$$

Но второе условие выполнено при любых значениях x, так как $\cos x \neq -2$.

Следовательно, решение данного уравнения сводится к решению уравнения, равносильного данному:

$$1 + 2\cos x = 0,$$

$$\cos x = -\frac{1}{2}, \qquad x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi k.$$

2. $\frac{\operatorname{tg} x}{\sin 3x} = 0.$

Корнями уравнения являются все значения x, при которых

$$\operatorname{tg} x = 0, \qquad \sin 3x \neq 0.$$

Решая уравнение

$$\operatorname{tg} x = 0,$$

получаем $x = \pi k$.
Но при каждом значении x из совокупности $x = \pi k$ $\sin 3x = \sin 3\pi k = 0$. Следовательно, ни одно из значений x совокупности $x = \pi k$ не является корнем данного уравнения.

Уравнение $\frac{\operatorname{tg} x}{\sin 3x} = 0$ корней не имеет.

3. $\frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin x} = 0.$

Находим значения x, при которых

$$\operatorname{tg} 3x = 0, \qquad \sin x \neq 0.$$

Решая уравнение

$$\operatorname{tg} 3x = 0,$$

получаем $3x = \pi k, \qquad x = \frac{\pi k}{3}$,

но $\sin x = \sin \frac{\pi k}{3}$ может обращаться в нуль только при k, кратном трем.

Исключив из совокупности $x = \frac{\pi k}{3}$ все значения x, получающиеся при k, кратном трем, получаем решение данного уравнения: $x = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$.

4. $\frac{\sin^2 x}{\operatorname{tg} x} = 0.$

Находим значения x, при которых

$$\sin^2 x = 0, \qquad \operatorname{tg} x \neq 0.$$

Решая уравнение

$$\sin x = 0,$$

получим $x = \pi k$,
но $\operatorname{tg} \pi k = 0$ и, следовательно, ни одно из значений x совокупности $x = \pi k$ не является корнем данного уравнения.

Таким образом, данное уравнение **не имеет корней**.

Примечание.

Преобразовав данное уравнение на основании соотношения $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, получим уравнение

$$\sin x \cdot \cos x = 0,$$

неравносильное данному, так как дробь $\frac{\sin x}{\cos x}$ не существует, если $\cos x = 0$, а сокращение дроби $\frac{\sin^2 x}{\operatorname{tg} x}$ на $\sin x$ возможно только в том случае, если $\sin x \neq 0$.

Упражнения.

Решить уравнения:

1. $\frac{\cos 3x}{\cos x} = 0$. *Ответ.* $x = \frac{\pi}{6}(6m \pm 1)$.

2. $\frac{\cos x}{1 + \operatorname{tg} x} = 0$. *Ответ.* Уравнение корней не имеет.

3. $\frac{\sin 3x}{\sin 10x} = 0$. *Ответ.* $x = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$.

4. $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2 - \frac{\cos x}{\sin x}$. *Ответ.* $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$.

Многие тригонометрические уравнения могут быть приведены к равенству тригонометрических функций. Такие уравнения решаются на основании условий равенства одноименных тригонометрических функций, т. е. тех условий, которым должны удовлетворять два угла α и β, если

а) $\cos \alpha = \cos \beta$;

б) $\sin \alpha = \sin \beta$;

в) $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$.

Выведем эти условия.

а) Пусть $\cos \alpha = \cos \beta$.

В свое время мы установили, что все углы, имеющие один и тот же косинус, получаются из формулы общего вида углов, соответствующих данному значению косинуса. Если β является одним из углов, косинус которого равен $\cos \alpha$, то угол α получается из формулы:

$$\alpha = \pm \beta + 2\pi k.$$

Из этой формулы вытекает нижеследующая зависимость, связывающая углы α и β, косинусы которых равны

$$\alpha \pm \beta = 2\pi k.$$

Следовательно, необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять два угла, косинусы которых равны, могут быть сформулированы следующим образом:

Для того чтобы косинусы двух углов были равны, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий:

1. Сумма этих углов должна равняться произведению π на четное число.

2. Разность этих углов должна равняться произведению π на четное число.

Значит, если $\cos\alpha = \cos\beta$,

то $\alpha + \beta = 2\pi k$, или $\alpha - \beta = 2\pi k$.

Примеры.

1. $\cos 3{,}7\pi = \cos 2{,}3\pi$, так как $3{,}7\pi + 2{,}3\pi = 6\pi$.
2. $\cos 13{,}2\pi = \cos 1{,}2\pi$, так как $13{,}2\pi - 1{,}2\pi = 12\pi$.
3. $\cos 500° = \cos(-140°)$, так как $500° + (-140°) = 360°$.
4. $\cos(\pi - \alpha) = \cos(3\pi + \alpha)$, так как $3\pi + \alpha + \pi - \alpha = 4\pi$.
5. $\cos 5{,}3\pi \neq \cos 3{,}7\pi$, так как не выполнено ни одно из условий равенства косинусов:

   $5{,}3\pi + 3{,}7\pi = 9\pi \neq 2\pi k$; $5{,}3\pi - 3{,}7\pi = 1{,}6\pi \neq 2\pi k$.

б) Пусть $\sin\alpha = \sin\beta$.

Если β один из углов, синус которых равен $\sin\alpha$, то углы α и β связаны формулой общего вида углов, соответствующих данному значению синуса

$$\alpha = (-1)^k \cdot \beta + \pi k.$$

Заменив ее двумя формулами:

$$\alpha = \beta + 2\pi k,$$
$$\alpha = -\beta + \pi(2k + 1),$$

получаем нижеследующие зависимости между углами α и β:

$$\alpha - \beta = 2\pi k,$$
$$\alpha + \beta = \pi(2k + 1).$$

Эти зависимости и выражают необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять два угла, синусы которых равны.

Формулируем эти условия:

Для того чтобы синусы двух углов были равны, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий:

1. Разность этих углов должна равняться π, умноженному на четное число.

2. Сумма этих углов должна равняться π, умноженному на нечетное число.

Примеры.

1. $\sin 5{,}8\pi = \sin 1{,}2\pi$, так как $5{,}8\pi + 1{,}2\pi = 7\pi$.
2. $\sin 6{,}1\pi = \sin(-1{,}9\pi)$, так как $6{,}1\pi - (-1{,}9\pi) = 8\pi$.
3. $\sin 400° = \sin 500°$, так как $400° + 500° = 900° = 180° \cdot 5$.
4. $\sin(\alpha - 3\pi) = \sin(2\pi - \alpha)$, так как $\alpha - 3\pi + 2\pi - \alpha = -\pi$.

5. $\sin 3{,}2\pi \neq \sin 0{,}8\pi$, так как не выполнено ни одно из условий равенства синусов:

$$3{,}2\pi + 0{,}8\pi = 4\pi \neq (2k+1)\pi;$$
$$3{,}2\pi - 0{,}8\pi = 2{,}4\pi \neq 2\pi k.$$

в) Пусть $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$.

Прежде всего надо сказать, что равенство тангенсов двух углов теряет смысл, если тангенсы этих углов не существуют, т. е. если углы α и β имеют вид $(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}$.

Если углы α и β отличны от углов вида $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, и β один из углов, тангенс которых равен $\operatorname{tg}\alpha$, то углы α и β связаны формулой общего вида углов, соответствующих данному значению тангенса

$$\alpha = \beta + \pi k.$$

Из этой формулы получаем нижеследующую зависимость между α и β:

$$\alpha - \beta = \pi k.$$

Отсюда вывод:

Для того чтобы тангенсы двух углов были равны, необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих двух условий:

1. *Тангенс каждого из данных углов существует.*

2. *Разность этих углов равна π, умноженному на целое число.*

Примечание. Разумеется, безразлично, какой из углов (α или β) брать за вычитаемое и какой за уменьшаемое в условиях равенства тригонометрических функций, так как k — любое целое число произвольного знака.

Примеры.

1. $\operatorname{tg} 8{,}7\pi = \operatorname{tg} 0{,}7\pi$, так как $8{,}7\pi - 0{,}7\pi = 8\pi$.
2. $\operatorname{tg} 8{,}7\pi = \operatorname{tg}(-0{,}3\pi)$, так как $8{,}7\pi - (-0{,}3\pi) = 9\pi$.
3. $\operatorname{tg} 100^\circ = \operatorname{tg} 1360^\circ$, так как $1360^\circ - 100^\circ = 1260^\circ = 180^\circ \cdot 7$.
4. Нельзя утверждать, что $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = \operatorname{tg}\frac{3\pi}{2}$, так как не выполнено первое условие (тангенсы этих углов не существуют), хотя выполнено второе $\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$.
5. $\operatorname{tg} 3{,}6\pi \neq \operatorname{tg}(-1{,}2\pi)$, так как не выполнено второе условие, хотя выполнено первое:

$$3{,}6\pi - (-1{,}2\pi) = 3{,}6\pi + 1{,}2\pi = 4{,}8\pi \neq \pi k.$$

Рассмотрим применение условий равенства одноименных тригонометрических функций к решению тригонометрических уравнений, которые либо представляют собой равенство тригонометрических функций, либо могут быть к такому равенству приведены.

1. $\cos 5x = \cos 4x$.

Воспользуемся условиями равенства косинусов двух углов.

$$5x+4x=2\pi k, \text{ откуда } x=\frac{2\pi k}{9};$$

$$5x-4x=2\pi k, \text{ откуда } x=2\pi k.$$

Решение данного уравнения может быть записано в виде:

$$x=\frac{2\pi k}{9},$$

так как каждый из корней совокупности $x=2\pi k$ входит в состав совокупности $\frac{2\pi k}{9}$ при k, кратном девяти.

2. $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$.

На основании условия равенства синусов двух углов имеем

$$\text{а) } \frac{\pi}{3}+x+\frac{\pi}{6}-x=\pi(2k+1);$$

$$\text{б) } \frac{\pi}{3}+x-\frac{\pi}{6}+x=2\pi k.$$

Первое условие приводит к противоречивому равенству

$$\frac{\pi}{2}=\pi(2k+1)$$

и не дает корней.

Из второго условия получаем

$$2x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k; \quad x=-\frac{\pi}{12}+\pi k.$$

3. $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} 7x$.

На основании условий равенства тангенсов имеем

$$7x-x=\pi k$$

$$6x=\pi k; \quad x=\frac{\pi k}{6}.$$

Для получения решений данного уравнения из совокупности $x=\frac{\pi k}{6}$ надо исключить те значения x, при которых левая и правая части уравнения не существуют, т. е. значения x вида $\frac{\pi}{2}(2k+1)$. Такие значения аргумента x могут получиться в совокупности $x=\frac{\pi k}{6}$, если k является нечетным числом, кратным трем, т. е. числом вида $6m\pm 3$. Следовательно, данному уравнению удовлетворяют числа вида $x=\frac{\pi k}{6}$, где $k\neq 6m+3$, т. е. k не является нечетным числом, кратным трем. Число k может принимать значения: $\ldots -5, -4, -2, -1, 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11 \ldots$. При $k=-9$, $k=-3$, $k=3$, $k=9$, $k=15$ и т. д. мы не получим корня данного уравнения.

4. $\cos x=-\cos 3x$.

Чтобы привести уравнение к равенству косинусов, воспользуемся свойством половины периода

$$-\cos 3x = \cos (3x + \pi).$$

Данное уравнение заменяется равносильным ему

$$\cos x = \cos (3x + \pi).$$

Тогда

$$x + 3x + \pi = 2\pi k$$

и

$$3x + \pi - x = 2\pi k.$$

Первое уравнение дает серию корней

$$x = \frac{\pi}{4}(2k + 1),$$

а второе уравнение — серию корней

$$x = \frac{\pi}{2}(2k + 1).$$

В этих формулах множитель $(2k - 1)$ заменен множителем $(2k + 1)$; это не меняет корней, так как каждое из этих выражений представляет собой совокупность всех нечетных чисел.

При решении этого уравнения можно было воспользоваться свойством половины периода и в форме

$$-\cos 3x = \cos (3x - \pi).$$

5. $\sin 5x = -\sin x$.

Как и в предыдущем случае, мы можем привести уравнение к равенству синусов с помощью свойства половины периода, так как

$$-\sin x = \sin (x + \pi).$$

Но еще проще применить свойство нечетности синуса:

$$-\sin x = \sin (-x).$$

Тогда данное уравнение может быть заменено равносильным ему

$$\sin 5x = \sin (-x).$$

На основании условий равенства двух синусов имеем:

$$5x + (-x) = \pi(2k + 1);$$
$$5x - (-x) = 2\pi k.$$

Первое уравнение дает серию корней

$$x = \frac{\pi}{4}(2k + 1),$$

а второе уравнение — серию корней

$$x = \frac{\pi k}{3}.$$

6. $\cos x = \sin 9x$.

На основании зависимости между синусом и косинусом дополнительных углов

$$\sin 9x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 9x\right),$$

или

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Следовательно, уравнение может быть приведено к равенству косинусов или синусов двух углов.

Приведем уравнение к равенству косинусов двух углов.

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 9x\right).$$

На основании условий равенства косинусов имеем

$$x + \frac{\pi}{2} - 9x = 2\pi k;$$

$$x - \frac{\pi}{2} + 9x = 2\pi k.$$

Первое уравнение дает серию корней

$$x = \frac{\pi}{16}(4k + 1),$$

а второе уравнение — серию корней

$$x = \frac{\pi}{20}(4k + 1).$$

7. $\operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{tg}\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = 1.$

Делим обе части уравнения на $\operatorname{tg} 3x$. Это преобразование законное, так как в наших условиях $\operatorname{tg} 3x$ не может равняться нулю.

$$\operatorname{tg}\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\operatorname{tg} 3x},$$

но

$$\frac{1}{\operatorname{tg} 3x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right).$$

Тогда наше уравнение принимает вид:

$$\operatorname{tg}\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right).$$

На основании условий равенства тангенсов двух углов имеем:

$$5x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + 3x = \pi k;$$

$$8x = \frac{\pi}{6} + \pi k;$$

$$x = \frac{\pi}{48} + \frac{\pi k}{8}.$$

При каждом значении x из этой совокупности каждая из частей уравнения

$$\operatorname{tg}\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$$

существует.

Следовательно,

$$x=\frac{\pi}{48}+\frac{\pi k}{8}$$

является решением данного уравнения.

В процессе дальнейшего изучения свойств тригонометрических функций мы познакомимся с решением других видов тригонометрических уравнений.

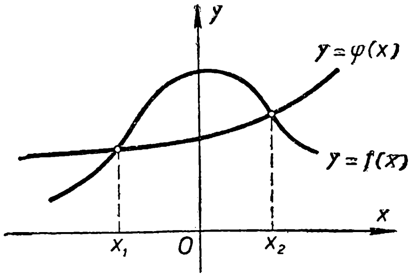
Отметим, что не всегда возможно составить общую формулу для решения данного уравнения или точно определить корни уравнения.

Приближенно значения корней уравнения можно определить графическим методом, сущность которого заключается в следующем:

если необходимо решить уравнение вида $f(x)=\varphi(x)$, то можно в одной системе координат построить графики функций

$$y=f(x) \quad \text{и} \quad y=\varphi(x).$$

Абсциссы точек пересечения полученных двух кривых дадут нам значения корней данного уравнения (черт. 80, *а*), которые будут найдены тем точнее, чем более тщательно будут построены графики функций.



Черт. 80, *а*.

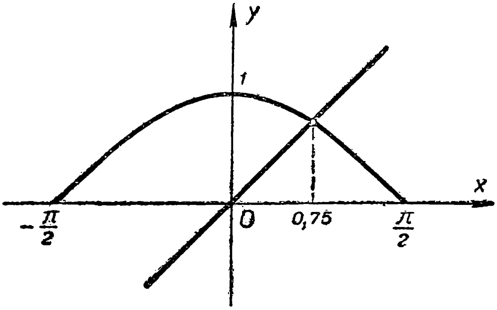
Рассмотрим графический метод решения уравнений на примере уравнения: $\cos x = x$.

Построим графики функций $y=\cos x$ (синусоида) и $y=x$ (прямая, проходящая через начало координат) (см. черт. 80, *б*).

Измерив абсциссу точек пересечения кривых, определим приближенно корень уравнения: $x \approx 0{,}75$.

Чтобы определить более точно корень уравнения, обратимся к таблицам тригонометрических функций. В таблицах находим, что $\cos 0{,}75 \approx 0{,}7317$, т. е. $\cos 0{,}75 < 0{,}75$. Так как функция $y=\cos x$

убывает при $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $x < 0{,}75$. Находим, что $\cos 0{,}74 \approx 0{,}7385$, $\cos 0{,}73 \approx 0{,}7452$.
Следовательно, $0{,}73 < x < 0{,}74$.



Черт. 80, *б*.

Пользуясь методом интерполяции, можем более точно определить, что

$$x \approx 0{,}739.$$

Упражнения.

Решить уравнения:

1. $\sin 3x = \sin 4x$. *Ответ.* $x = 2\pi k$; $x = \frac{\pi}{7}(2k + 1)$.

2. $\cos 5x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. *Ответ.* $x = \frac{\pi}{18}(6k + 1)$; $x = \frac{\pi}{12}(6k - 1)$.

3. $\sin 2x + \sin 3x = 0$. *Ответ.* $x = \pi(2k + 1)$; $x = \frac{2}{5}\pi k$.

4. $\cos x + \sin(x - \alpha) = 0$. *Ответ.* $x = \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} + \pi k$.

5. $\cos^2 x = \cos x \sin 3x$. *Ответ.* $x = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$; $x = \frac{\pi}{4}(4k + 1)$;
$x = \frac{\pi}{8}(4k + 1)$.

6. $\cos^2 x = \cos^2 5x$. *Ответ.* $x = \frac{\pi k}{4}$; $x = \frac{\pi k}{6}$.

7. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 5x = 0$. *Ответ.* $x = \pi k$; $x = \pi k \pm \frac{\pi}{6}$; $x = \pi k \pm \frac{\pi}{3}$.

8. $\operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{tg} 7x = 1$. *Ответ.* $x = \frac{\pi}{20}(2k + 1)$.

9. $\frac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{tg} x} = 1$. *Ответ.* $x = \pi k \pm \frac{\pi}{3}$

10. $\frac{\sin 6x}{\sin x} = 1$. *Ответ.* $x = \frac{\pi}{7}(2k + 1)$, где $k \neq 3 + 7n$
$x = \frac{2\pi}{5}(5k \pm 1)$; $x = \frac{2\pi}{5}(5k \pm 2)$.

11. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. *Ответ.* Корней нет.

12. $\frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x} = 1$. *Ответ.* Корней нет.

13. $\sin x + \cos 2x = 0$. *Ответ.* $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$.

14. $\cos x(\cos x + \cos 5x - \cos 3x) = \cos 3x \cdot \cos 5x$.

Ответ. $x = \frac{\pi k}{4}$; $x = \frac{\pi}{6}(2k + 1)$.

15. Найти градусную меру острых углов, удовлетворяющих уравнению

$$\sin 5x = -\sin 13x.$$

Ответ. 20°; 40°; 60°; 80°; 22°30′; 67°30′.

16. Найти острые углы, удовлетворяющие уравнению

$$\cos 5\pi x = \cos 7\pi x.$$

Ответ. $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{6}$; 1; $\frac{7}{6}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{3}{2}$.

17. Показать, что не существует угла треугольника, удовлетворяющего уравнению:

$$\cos\frac{x}{3} = \cos\frac{x}{2}.$$

18. Определить те корни уравнения

$$\cos 3x = \cos\frac{x}{3},$$

которые удовлетворяют условию

$$5 < x < 10.$$

Ответ. $\frac{9}{5}\pi$; $\frac{9}{4}\pi$; $\frac{12}{5}\pi$; 3π.

19. Из концов данного диаметра окружности, радиус которой равен R, одновременно начинают двигаться по окружности в направлении движения часовой стрелки две точки с линейными скоростями v_1 и v_2. Определить моменты времени, в которые обе точки будут иметь общую проекцию на данный диаметр.

Ответ. $t = \frac{\pi(2|k| + 1)}{v_1 + v_2} \cdot R$; $t = \frac{\pi(2|k| + 1)}{|v_1 - v_2|} \cdot R$ (если $v_1 \neq v_2$).

20. Решить уравнение:

$$\cos\sqrt{50 - x^2} = 1.$$

Ответ. $x_{1,2} = \pm\sqrt{50} \approx \pm 7{,}07$;

$x_{3,4} = \pm\sqrt{50 - 4\pi^2} \approx \pm 3{,}25$.

21. Дальность полета l тела, брошенного под углом α к горизонтальной плоскости с начальной скоростью, равной v, определяется соотношением:

$$l = \frac{v^2}{g}\sin 2\alpha, \text{ где } g \approx 9{,}8\ \frac{м}{сек^2}.$$

При каком угле вылета дальность полета тела равна 25 *м* при начальной скорости, равной 20 $\frac{м}{сек}$?

Ответ. 19° или 71°.

22. Определить графическим методом корни уравнений:

а) $\cos x = 2x$;

б) $\sin x = x + \frac{1}{2}$;

в) $\cos x = x^2$.

Ответ. а) $x \approx 0{,}45$; б) $x \approx -1{,}50$; в) $x_{1,2} \approx \pm 0{,}824$.

23. Определить графическим методом наименьший положительный корень уравнения:

$$\operatorname{tg} x = x - 2.$$

Ответ. $x \approx 4{,}30$.

§ 8. Обратные тригонометрические функции.

Как известно из курса алгебры, величина y называется функцией величины x, т. е. $y = f(x)$, если каждому из допустимых значений величины x, называемой аргументом, соответствует одно определенное значение величины y.

В целом ряде случаев функция получает одно и то же значение при различных допустимых значениях аргумента, иногда даже при всех допустимых значениях аргумента; в последнем случае функция называется постоянной величиной, или константой.

Примеры.

1) Функция $y = x^2$ принимает одно и то же значение при противоположных значениях аргумента.

2) Тригонометрические функции принимают одно и то же значение при всех значениях аргумента, отличающихся друг от друга на целое число периодов.

3) Функция $\sin^2 x + \cos^2 x$ имеет одно и то же значение, равное 1, при любых значениях аргумента.

Если исключить эти случаи и рассматривать такие функции, в которых *различным значениям аргумента соответствуют различные значения функции*, то для таких функций *каждому значению функции соответствует одно определенное значение аргумента.*

Такое соответствие определяет x как функцию y

$$x = \varphi(y).$$

Эта функция называется обратной по отношению к функции

$$y = f(x).$$

Таким образом, существование обратной функции обуславливается тем обстоятельством, что каждому значению аргумента соответствует одно определенное значение функции, и каждому значению функции — одно определенное значение аргумента; в этом случае говорят, что между значениями аргумента и значениями функции существует взаимно однозначное соответствие.

Функция $y = f(x)$ является в свою очередь обратной по отношению к функции $x = \varphi(y)$. Функции

$$y = f(x) \quad \text{и} \quad x = \varphi(y)$$

называются взаимно обратными. Из определения взаимно обратных функций следует, что

$$\varphi[f(x)] = x \quad \text{и} \quad f[\varphi(y)] = y.$$

Приведем примеры взаимно обратных функций из курса алгебры.

1. Линейная функция

$$y = 2x + 1$$

имеет обратную функцию

$$x = \frac{y-1}{2},$$

где y — аргумент, а x — функция.

Если аргумент обозначить буквой x, а функцию буквой y, то функция, обратная данной, выражается следующей формулой:

$$y = \frac{x-1}{2}.$$

Таким образом, функции

$$y = 2x + 1 \quad \text{и} \quad y = \frac{x-1}{2}$$

являются взаимно обратными.

2. Показательная функция

$$y = 2^x$$

имеет обратную функцию

$$x = \log_2 y,$$

где y — аргумент, а x — функция.

Возвращаясь к прежним обозначениям, получим

$$y = \log_2 x.$$

Функции

$$y = 2^x \quad \text{и} \quad y = \log_2 x$$

являются взаимно обратными.

Покажем, что всякая возрастающая или убывающая, т. е. всякая монотонная функция имеет обратную. Пусть $f(x)$ есть функция возрастающая. Возьмем два различных значения аргумента x_1 и x_2 и пусть $x_1 < x_2$. По определению возрастающей функции

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Следовательно, различным значениям аргумента соответствуют различные значения функции. А это обстоятельство является достаточным для существования обратной функции. Аналогичными рассуждениями можно установить, что и всякая убывающая функция имеет обратную.

Из изложенного вытекает, что тригонометрические функции, рассматриваемые для любого допустимого значения аргумента, не допускают обращения, т. е. для них не существует обратной функции, так как в тригонометрических функциях между значениями аргумента и значениями функции нет взаимно однозначного соответствия. Но если выбрать из всей области определения тригонометрической функции промежуток ее монотонного изменения, то для каждого из этих промежутков можно составить обратную функцию.

I. Для функции $y = \cos x$ отрезками монотонного изменения являются, как известно,

$-2\pi \leqslant x \leqslant -\pi$, $-\pi \leqslant x \leqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$, ... и т. д. На отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$, а следовательно, и на отрезках $2\pi k \leqslant x \leqslant 2\pi k + \pi$, функция $y = \cos x$ убывает от 1 до -1; на отрезке $-\pi \leqslant x \leqslant 0$, а следовательно, и на отрезках $2\pi k - \pi \leqslant x \leqslant 2\pi k$ эта функция возрастает от -1 до $+1$.

Остановимся на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$. В этом промежутке, как это было установлено в § 2 настоящей главы, равенству $\cos x = y$, где y — заданное число на отрезке $-1 \leqslant y \leqslant 1$, удовлетворяет единственное значение x, которое мы в свое время обозначили $\arccos y$. Следовательно, на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$ функция $y = \cos x$ имеет обратную функцию $x = \arccos y$, где y — аргумент, а x — функция.

Обозначая аргумент буквой x, а функцию буквой y, получим для обратной функции запись

$$y = \arccos x.$$

Исследуем функцию $y = \arccos x$.

1. Функция $y = \arccos x$ определена только для значений аргумента, принадлежащих отрезку

$$-1 \leqslant x \leqslant 1.$$

2. Так как $y = \arccos x$ и $x = \cos y$ являются взаимно обратными функциями, то имеет место тождество

$$\cos(\arccos x) = x,$$

справедливое, конечно, только на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$, ибо для всех значений x, выходящих за пределы этого отрезка, $\arccos x$, а следовательно, и $\cos \arccos x$ теряет смысл.

3. При возрастании аргумента от -1 до $+1$ функция $y = \arccos x$ убывает от π до 0. Следовательно, функция $y = \arccos x$ есть функция убывающая.

4. Докажем, что

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$

По определению арккосинуса

$$0 \leqslant \arccos(-x) \leqslant \pi$$

$\pi - \arccos x$ принадлежит тому же промежутку, так как

$$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi.$$

Находим косинусы этих углов:

$\cos[\arccos(-x)] = -x$; $\cos(\pi - \arccos x) = -\cos(\arccos x) = -x$.

Так как оба угла принадлежат одному и тому же промежутку монотонности, и косинусы этих углов равны, следовательно, и углы равны.

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$

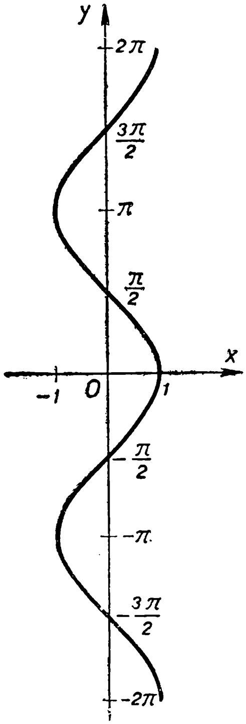
Для построения графика функции $y = \arccos x$ поступаем следующим образом. Строим график функции $x = \cos y$, т. е. на оси y откладываем значения угла, а на оси x значения косинуса. Получаем синусоиду, волны которой располагаются вдоль оси y (см. черт. 81).

Выделяем часть синусоиды, соответствующую ординатам, содержащимся на отрезке от 0 до π. Получим график функции $y = \arccos x$ (см. черт. 82).

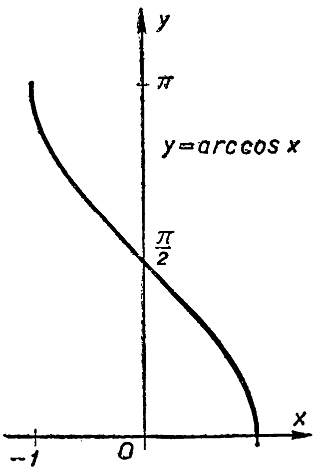
II. Для функции $y = \sin x$ отрезками монотонности, как известно, являются

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}; \quad \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi; \quad \frac{3}{2}\pi \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}\pi; \ \dots \text{ и т. д.}$$

Остановимся на отрезке $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$. В этом промежутке, как это было установлено в § 4 настоящей главы, равенству $\sin x = y$, где y заданное число на отрезке $-1 \leqslant y \leqslant 1$, удовлетворяет единственное значение x, которое мы в свое время обозначили $\arcsin y$. Следовательно, на отрезке



Черт. 81.



Черт. 82.

$-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ функция $y = \sin x$ имеет обратную функцию $x = \arcsin y$, где y — аргумент, а x — функция.

Обозначая аргумент буквой x, а функцию буквой y, получим для обратной функции запись

$$y = \arcsin x.$$

Исследуем эту функцию.

1. Функция $y = \arcsin x$ определена для значений аргумента на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

2. Так как $y = \arcsin x$ и $x = \sin y$ являются взаимно обратными функциями, то имеет место тождество

$$\sin(\arcsin x) = x,$$

справедливое, конечно, только на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$, ибо при x, выходящем за пределы этого отрезка, $\arcsin x$, а следовательно, и $\sin(\arcsin x)$ теряет смысл.

3. При возрастании аргумента от -1 до $+1$ функция $y = \arcsin x$ возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Следовательно, эта функция является возрастающей.

4. Функция $y = \arcsin x$ является нечетной функцией x, т. е.

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x.$$

Для доказательства установим прежде всего, что углы $\arcsin(-x)$ и $-\arcsin x$ принадлежат одному и тому же отрезку от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$.

Так как значения арксинуса заключены между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$ при любом значении аргумента, то

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin(-x) \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Так как

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

то, поменяв знаки в обеих частях этих неравенств, получим

$$\frac{\pi}{2} \geqslant -\arcsin x \geqslant -\frac{\pi}{2},$$

т. е. тот же отрезок от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, что и для угла $\arcsin(-x)$.

Найдем теперь синусы этих углов.

$$\sin[\arcsin(-x)] = -x; \quad \sin(-\arcsin x) = -\sin(\arcsin x) = -x.$$

Так как оба угла принадлежат одному и тому же промежутку монотонного изменения функции, и синусы их равны, то эти углы равны.

Значит,

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x.$$

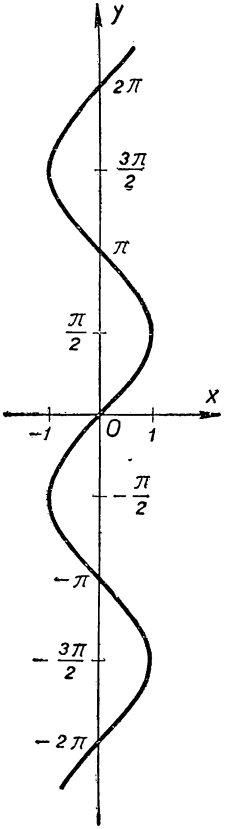
Для построения графика функции $y = \arcsin x$ строим график функции $x = \sin y$. Получаем синусоиду, волны которой располагаются вдоль оси y (см. черт. 83). Выделяем часть синусоиды, соответствующую ординатам, заключенным на отрезке $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$. Получаем график функции $y = \arcsin x$ (см. черт. 84).

III. Как было установлено в § 9 главы III, функция $y = \operatorname{tg} x$ непрерывно возрастает в каждом из интервалов вида

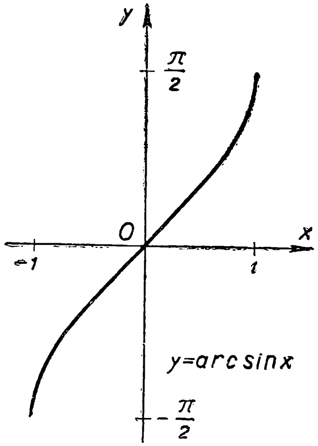
$$\pi k - \frac{\pi}{2} < x < \pi k + \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, в каждом из этих интервалов она имеет обратную функцию.

Остановимся на интервале $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. В этом интервале (§ 6 настоящей главы) равенству $\operatorname{tg} x = y$, где y — заданное число в интервале $-\infty < y < \infty$, удовлетворяет единственное значение x, которое мы в свое



Черт 83.



Черт. 84.

время обозначили $\operatorname{arc\,tg} y$. Следовательно, в интервале $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ функция $y = \operatorname{tg} x$ имеет обратную функцию $x = \operatorname{arc\,tg} y$, где y — аргумент, а x — функция.

Обозначая аргумент буквой x, а функцию буквой y, получим для обратной функции запись

$$y = \operatorname{arc\,tg} x.$$

Установим свойства этой функции.

1. Функция $y = \operatorname{arc\,tg} x$ определена для любого действительного значения аргумента, так как тангенс угла может быть любым действительным числом.

2. Так как $y = \operatorname{arc\,tg} x$ и $x = \operatorname{arc\,tg} y$ являются взаимно обратными функциями, то имеет место тождество

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x) = x,$$

справедливое для любого действительного значения аргумента.

3. Функция $y = \operatorname{arc\,tg} x$ есть возрастающая функция, ибо при возрастании аргумента x от $-\infty$ до $+\infty$ функция $y = \operatorname{arc\,tg} x$ возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$.

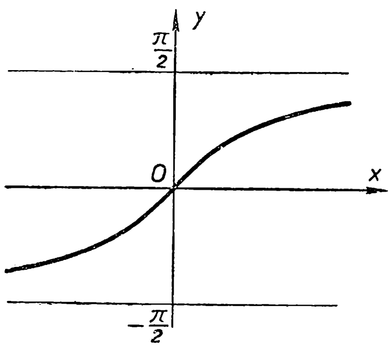
4. Функция $y = \operatorname{arc\,tg} x$ есть нечетная функция, т. е.

$$\operatorname{arc\,tg}(-x) = -\operatorname{arc\,tg} x.$$

Доказательство такое же, как доказательство нечетности функции $y = \arcsin x$. Читателю рекомендуется провести его самостоятельно.

Для построения графика функций $y = \operatorname{arc\,tg} x$ строим график функции $x = \operatorname{tg} y$ и выделяем ту ветвь, которая соответствует интервалу $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ (см. черт. 85).

Обратные функции для вспомогательных тригонометрических функций $\operatorname{arc\,ctg} x$, $\operatorname{arc\,sec} x$ и $\operatorname{arc\,cosec} x$ практически редко встречаются и мы их рассматривать не будем.



Черт. 85.

Рассмотренные в настоящем параграфе функции $y = \arccos x$, $y = \arcsin x$ и $y = \operatorname{arc\,tg} x$ называются *обратными тригонометрическими функциями,* или кратко *аркфункциями.*

В силу определения аркфункций всякая тригонометрическая операция над любой аркфункцией приводит к единственному ответу. Мы знаем, что

$$\cos(\arccos x) = x; \quad \sin(\arcsin x) = x; \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x) = x.$$

1. Вычислим $\sin(\arccos x)$.

На основании зависимости между синусом и косинусом одного и того же угла имеем

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Перед корнем берем положительный знак, так как $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$, а при этом условии синус угла положителен или равен 0 (при $x = \pm 1$).

2. Вычислим $\operatorname{tg}(\arccos x)$

$$\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sin(\arccos x)}{\cos(\arccos x)} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}.$$

3. С помощью тех же приемов получим, что

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \text{ и } \operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

4. Вычислим $\sin(\operatorname{arc\,tg} x)$.

Для этого в формуле

$$\sin\alpha = \pm\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}},$$

выражающей зависимость между синусом и тангенсом одного и того же угла, заменим обозначение угла α символом $\operatorname{arc\,tg} x$.

$$\sin(\operatorname{arc\,tg} x) = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arc\,tg} x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

В полученной формуле двойной знак перед корнем опускается, так как обе части равенства имеют один и тот же знак. В этом можно убедиться, приняв во внимание, что

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tg} x < \frac{\pi}{2}.$$

Если $x > 0$, то $\sin(\operatorname{arc\,tg} x) > 0$;

если $x < 0$, то $\sin(\operatorname{arc\,tg} x) < 0$;

если $x = 0$, то $\sin(\operatorname{arc\,tg} x) = 0$.

Следовательно, при любом x знак $\sin(\operatorname{arc\,tg} x)$ совпадает со знаком x и

$$\sin(\operatorname{arc\,tg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

5. Вычислим $\cos(\operatorname{arc\,tg} x)$.

Для этого в формуле

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}},$$

выражающей зависимость между косинусом и тангенсом одного и того же угла, заменим обозначение угла α символом $\operatorname{arc\,tg} x$

$$\cos(\operatorname{arc\,tg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Перед корнем опускаем двойной знак, так как $\operatorname{arc\,tg} x$ принадлежит I или IV четверти и $\cos(\operatorname{arc\,tg} x) > 0$ при любом x.

Проделанные вычисления дают возможность разрешить другой вопрос — вопрос о возможности выражения одной аркфункции через другую.

1. Мы нашли, что

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Отсюда можно сделать вывод, что

$$\arcsin x = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Действительно, $\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ представляет собой угол в промежутке от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, тангенс которого равен $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $\arcsin x$ угол, принадлежащий тому же промежутку, и тангенс этого угла также равен $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Следовательно, эти углы равны, т. е.

$$\arcsin x = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. Мы нашли, что

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2},$$

чтобы сделать вывод, что

$$\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2},$$

надо прежде всего установить, что оба угла принадлежат одному и тому же промежутку. Для всех значений x, удовлетворяющих условию $0 \leqslant x \leqslant 1$, углы $\arcsin x$ и $\arccos\sqrt{1-x^2}$ принадлежат одному и тому же отрезку:

$$0 \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2} \text{ и } 0 \leqslant \arccos\sqrt{1-x^2} \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

А так как косинусы этих углов равны, то и сами углы равны, т. е. равенство

$$\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2}$$

выполняется.

Если же $-1 \leqslant x \leqslant 0$, то это равенство не имеет места, так как

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant 0, \quad 0 \leqslant \arccos\sqrt{1-x^2} \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Для того чтобы выразить арксинус через арккосинус и для случая $x < 0$, рассуждаем так:

$$\text{если } x < 0, \text{ то } -x > 0;$$

$$\arcsin x = -\arcsin(-x) = -\arccos\sqrt{1-x^2}.$$

Итак,

$$\text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \text{ то } \arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2};$$

$$\text{если } -1 \leqslant x \leqslant 0, \text{ то } \arcsin x = -\arccos\sqrt{1-x^2}.$$

Как нам уже известно,

$$\sin(\arcsin x) = x.$$

Зададимся теперь вопросом, чему равняется

$$\arcsin(\sin x).$$

Так как синус любого угла не превосходит 1 по абсолютной величине, то $\arcsin(\sin x)$ существует при любом действительном значении x.

Но по определению арксинуса

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin(\sin x) \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, $\arcsin(\sin x)$ не может равняться любому значению аргумента x, а только тому значению, которое принадлежит отрезку $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Итак, $\arcsin(\sin x) = x$, если $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Если же x принадлежит, например, отрезку $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi$, то в этом случае $\pi - x$ принадлежит отрезку

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \pi - x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, в этом случае

$$\arcsin(\sin x) = \pi - x.$$

Докажем еще тождество

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Для доказательства перепишем заданное тождество так:

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x.$$

Тогда задача сводится к доказательству равенства двух углов. Оба угла принадлежат одному и тому же отрезку от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$. Действительно, по определению

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}, \tag{1}$$

$$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi. \tag{2}$$

Из записи (2) имеем, что

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arccos x - \frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$$

или

$$\frac{\pi}{2} \geqslant \frac{\pi}{2} - \arccos x \geqslant -\frac{\pi}{2}.$$

Оба угла имеют один и тот же синус.

$$\sin(\arcsin x) = x; \ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x.$$

Следовательно, эти углы равны, т. е.

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x,$$

или

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Упражнения.

1. При каких значениях x определена функция

а) $y = \arcsin \sqrt{1-x}$. *Ответ.* $0 \leqslant x \leqslant 1$.

б) $y = \arccos \sqrt{1+x}$. *Ответ.* $-1 \leqslant x \leqslant 0$.

в) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{1+x^2}$. *Ответ* При любых.

г) $y = \arcsin \frac{1}{1+\sqrt{x}}$. *Ответ.* $x \geqslant 0$.

д) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{1-x^2}$. *Ответ.* $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

е) $y = \arccos \frac{2}{1-x}$. *Ответ.* $x \geqslant 3$; $x \leqslant -1$.

ж) $y = \arcsin (1 + \operatorname{tg}^2 \pi x)$. *Ответ.* При x целом.

з) $y = \arcsin (2x^2 + x)$. *Ответ.* $-1 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$.

2. Не пользуясь таблицами, определить четверть, которой принадлежит угол

а) $3 \operatorname{arctg} 1{,}7$; б) $4 \operatorname{arctg} 1{,}7$; в) $3 \arcsin 0{,}8$; г) $3 \arcsin (-0{,}8)$.

Ответ. а) II; б) III; в) II; г) III.

3. Вычислить:

а) $\sin\left(\arccos \frac{3}{5}\right)$; б) $\sin\left[\arccos\left(-\frac{13}{14}\right)\right]$; в) $\cos (\arcsin 0{,}28)$;

г) $\operatorname{tg} (\arccos \sqrt{a})$; д) $\cos (\operatorname{arctg} 2\sqrt{2})$.

Ответ. а) $\frac{4}{5}$; б) $\frac{3\sqrt{3}}{14}$; в) $0{,}96$; г) $\sqrt{\frac{1}{a} - 1}$; д) $\frac{1}{3}$.

4. При каких значениях a уравнение

$\arcsin x \cdot \arccos x = a$ имеет корни?

Решить это уравнение при а) $a = 0$, б) $a = \frac{\pi^2}{16}$, в) $a = -\frac{\pi^2}{2}$, г) $a = \frac{\pi^2}{25}$.

Ответ. При $-\frac{\pi^2}{2} \leqslant a \leqslant \frac{\pi^2}{16}$; а) 0 и 1, б) $\frac{1}{\sqrt{2}}$, в) -1, г) $\cos \frac{\pi}{10}$ и $\sin \frac{\pi}{10}$.

5. Дано: $f(x) = \arcsin (\sin x) - \arccos (\cos x)$.

Вычислить (не пользуясь таблицами) $f\left(\frac{1}{3}\right)$, $f\left(\frac{5}{3}\right)$, $f\left(\frac{10}{3}\right)$.

Ответ $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$; $f\left(\frac{5}{3}\right) = \pi - \frac{10}{3}$; $f\left(\frac{10}{3}\right) = -\pi$.

Глава V

ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ И ЕЕ СЛЕДСТВИЯ

§ 1. Тригонометрические функции алгебраической суммы двух углов.

Поставим себе задачей выразить тригонометрическую функцию алгебраической суммы двух углов через тригонометрические функции слагаемых углов.

Возьмем две оси $\vec{m}$ и $\vec{n}$, расположенные так, что $(\widehat{m, n}) = \frac{\pi}{2}$ и два произвольных вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$ с общим началом в точке O пересечения осей $\vec{m}$ и $\vec{n}$ (см. черт. 86).

Пусть вектор $\vec{A}$ образует с осью $\vec{m}$ угол α, а вектор $\vec{B}$ угол β:

$$(\widehat{m, A}) = \alpha; \ (\widehat{m, B}) = \beta.$$

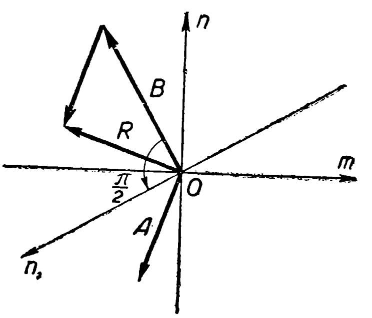
Каковы бы ни были углы α и β, на основании правила цепи для углов имеем:

$$(\widehat{m, B}) + (\widehat{B, A}) = (\widehat{m, A}).$$

Следовательно,

$$(\widehat{B, A}) = (\widehat{m, A}) - (\widehat{m, B}),$$

т. е.



Черт. 86.

$$(\widehat{B, A}) = \alpha - \beta.$$

Построим вектор $\vec{R}$ с началом в точке O пересечения осей $\vec{m}$ и $\vec{n}$ являющийся геометрической суммой векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ (см. черт. 86). Между длиной вектора $\vec{R}$ и его проекциями на оси $\vec{m}$ и $\vec{n}$ существует, как мы это видели в главе III § 5, нижеследующая зависимость

$$R^2 = R_m{}^2 + R_n{}^2.$$

Но проекция геометрической суммы векторов на некоторую ось равна сумме проекций слагаемых векторов на эту ось.

$$R_m = A_m + B_m; \quad R_n = A_n + B_n.$$

Следовательно,

$$R^2 = (A_m + B_m)^2 + (A_n + B_n)^2.$$

По определению косинуса

$$A_m = A \cdot \cos\alpha \text{ и } B_m = B \cdot \cos\beta.$$

По определению синуса

$$A_n = A \cdot \sin\alpha \text{ и } B_n = B \cdot \sin\beta.$$

Значит,

$$R^2 = (A\cos\alpha + B\cos\beta)^2 + (A\sin\alpha + B\sin\beta)^2 = A^2\cos^2\alpha +$$
$$+ B^2\cos^2\beta + 2AB\cos\alpha\cos\beta + A^2\sin^2\alpha + B^2\sin^2\beta + 2AB\sin\alpha\sin\beta =$$
$$= A^2 + B^2 + 2AB(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta).$$

Итак,

$$R^2 = A^2 + B^2 + 2AB(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta). \qquad (1)$$

Будем теперь проектировать вектор $\vec{R}$ на ось вектора $\vec{B}$ и на ось $\vec{n}_1$, образующую с осью вектора $\vec{B}$ угол, равный $\frac{\pi}{2}$ (см. черт. 86). Тогда между длиной вектора $\vec{R}$ и его проекциями на оси $\vec{B}$ и $\vec{n}_1$ существует нижеследующая зависимость:

$$R^2 = R_B{}^2 + R_{n_1}^2.$$

Проекция вектора $\vec{R}$ на ось вектора $\vec{B}$ равна сумме проекций слагаемых векторов на эту ось. Проекция вектора $\vec{A}$ на ось вектора $\vec{B}$ равна длине вектора $\vec{A}$, умноженной на косинус угла между вектором $\vec{A}$ и вектором $\vec{B}$, а проекция вектора $\vec{B}$ на его ось равна длине вектора. Таким образом,

$$R_B = A \cdot \cos(\widehat{B,A}) + B = A \cdot \cos(\alpha - \beta) + B.$$

Проекция вектора $\vec{R}$ на ось $\vec{n}_1$ равна сумме проекций векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ на эту ось. Так как $(\widehat{B, n_1}) = \frac{\pi}{2}$, то проекция вектора $\vec{B}$ на ось $\vec{n}_1$ равна 0, а проекция вектора $\vec{A}$ на ось $\vec{n}_1$ равна $A \cdot \sin(\alpha - \beta)$.

Следовательно,

$$R_{n_1} = A \cdot \sin(\alpha - \beta).$$

$$R^2 = [A\cos(\alpha - \beta) + B]^2 + A^2\sin^2(\alpha - \beta) = A^2\cos^2(\alpha - \beta) +$$
$$+ 2AB\cos(\alpha - \beta) + B^2 + A^2\sin^2(\alpha - \beta) = A^2 + B^2 + 2AB\cos(\alpha - \beta).$$

Итак,

$$R^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos(\alpha - \beta). \qquad (2)$$

В равенствах (1) и (2) левые части равны, следовательно, равны и правые части.

$$A^2 + B^2 + 2AB(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = A^2 + B^2 + 2AB\cos(\alpha - \beta).$$

Отсюда

$$2AB(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = 2AB\cos(\alpha - \beta).$$

Деля обе части этого равенства на $2AB$, получаем

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \qquad \text{(I)}$$

Формула (I) выражает косинус разности двух углов через тригонометрические функции этих углов. Эта формула справедлива для любых значений α и β, так как вывод ее носит общий характер, т. е. не зависит от взаимного расположения векторов. Формула для косинуса суммы двух углов получается уже без чертежа из формулы (I).

Представим сумму $\alpha + \beta$ как разность:

$$\alpha + \beta = \alpha - (-\beta).$$

Тогда $\cos(\alpha + \beta) = \cos[\alpha - (-\beta)] = \cos\alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin\alpha \cdot \sin(-\beta)$.

Пользуясь четностью косинуса и нечетностью синуса, получаем:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \qquad \text{(II)}$$

Для определения синуса суммы двух углов заменим синус суммы двух углов косинусом угла дополнительного и воспользуемся формулой для косинуса разности двух углов

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right] =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \sin\beta = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta.$$

Получаем формулу:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \qquad \text{(III)}$$

Синус разности двух углов получим, представив $\sin(\alpha - \beta)$ как $\sin[\alpha + (-\beta)]$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin[\alpha + (-\beta)] = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) =$$

$$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Таким образом,

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta. \qquad \text{(IV)}$$

Формулы I, II, III и IV справедливые при любых значениях α и β объединяют общим названием **теоремы сложения**.

Выведем формулы, выражающие $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ и $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ через тригонометрические функции аргументов α и β.

На основании соотношения

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

которое, как известно, имеет место лишь в случае $\cos x \neq 0$, можно написать, что

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta} \quad \text{(а)}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta} \quad \text{(б)}$$

Разделим числитель и знаменатель каждой из полученных дробей на $\cos\alpha\cos\beta$ при условии, что $\cos\alpha \neq 0$ и $\cos\beta \neq 0$:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Аналогично получим, что

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Равенства

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \quad \text{(V)}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \quad \text{(VI)}$$

справедливы при всех значениях α и β, кроме $\alpha=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, когда $\cos\alpha=0$ и $\beta=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, когда $\cos\beta=0$. В этом случае деление числителя и знаменателя на $\cos\alpha\cos\beta$ невозможно, и необходимо пользоваться соотношениями а) и б).

Например,

$$\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin\alpha\cos\frac{\pi}{2}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\alpha\cos\frac{\pi}{2}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Этот результат мог быть получен и без теоремы сложения по свойству тангенсов дополнительных углов

$$\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2}-(-\alpha)\right]=\frac{1}{\operatorname{tg}(-\alpha)}=-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Формулы V и VI также включают обычно в теорему сложения.

Таким образом, теорема сложения (формулы I — VI) дает возможность выразить тригонометрические функции алгебраической суммы углов через тригонометрические функции слагаемых углов.

Примеры.

1. Вычислить $\sin(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ и $\sin\beta=-\frac{5}{13}$.

Решение. Вычислим предварительно $\cos\alpha$ и $\cos\beta$.

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\sqrt{1-\frac{9}{25}} = \pm\frac{4}{5};$$

$$\cos\beta = \pm\sqrt{1-\sin^2\beta} = \pm\sqrt{1-\frac{25}{169}} = \pm\frac{12}{13};$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \pm\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}\pm\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}.$$

Рассматривая четыре возможные комбинации знаков, получим четыре разных ответа.

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{36}{65}+\frac{20}{65}=\frac{56}{65};\quad \sin(\alpha+\beta)=-\frac{36}{65}+\frac{20}{65}=-\frac{16}{65};$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{36}{65}-\frac{20}{65}=\frac{16}{65};\quad \sin(\alpha+\beta)=-\frac{36}{65}-\frac{20}{65}=-\frac{56}{65}.$$

2. Вычислить $\cos(\alpha+\beta)$, если $\cos\alpha=-\sqrt{\frac{2}{3}}$ и $\cos\beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ при условии, что $0<\alpha<\pi$ и $0<\beta<\pi$.

Решение: Определяем предварительно $\sin\alpha$ и $\sin\beta$. Согласно условию об аргументах α и β, $\sin\alpha>0$ и $\sin\beta>0$; поэтому, $\sin\alpha$ и $\sin\beta$ определяются однозначно.

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{1}{3}};$$

$$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\frac{8}{9}}=\frac{1}{3}.$$

По формуле для $\cos(\alpha+\beta)$ находим:

$$\cos(\alpha+\beta)=-\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{5}{3\sqrt{3}}.$$

3. Вычислить $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha=3$ и $\operatorname{tg}\beta=2$.

Решение: $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{3-2}{1+2\cdot 3}=\dfrac{1}{7}.$

4. Вычислить $\sin\frac{\pi}{12}$, $\cos\frac{\pi}{12}$ и $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$.

Так как $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$, то

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},$$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} =$$

$$= \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} = 2 - \sqrt{3}.$$

5. Вычислить $\operatorname{tg}(\alpha + \beta - \gamma)$, если $\operatorname{tg}\alpha = 5$, $\operatorname{tg}\beta = 6$ и $\cos\gamma = -\frac{11}{\sqrt{122}}$

Решение: Для определения значения тригонометрической функции суммы больше чем двух слагаемых пользуются сочетательным законом сложения.

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta - \gamma) = \operatorname{tg}[(\alpha + \beta) - \gamma] = \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg}\gamma}{1 + \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \cdot \operatorname{tg}\gamma}.$$

Вычислим $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$.

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = \frac{5+6}{1 - 5 \cdot 6} = -\frac{11}{29}.$$

Вычислим $\operatorname{tg}\gamma$.

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = \frac{\pm\sqrt{1 - \cos^2\gamma}}{\cos\gamma} = \frac{\pm\sqrt{1 - \frac{121}{122}}}{-\frac{11}{\sqrt{122}}} = \pm\frac{1}{11}.$$

При $\operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{11}$.

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta - \gamma) = \frac{-\frac{11}{29} - \frac{1}{11}}{1 - \frac{11}{29} \cdot \frac{1}{11}} = \frac{-\frac{150}{29 \cdot 11}}{\frac{28}{29}} = \frac{-150 \cdot 29}{29 \cdot 11 \cdot 28} = -\frac{75}{11 \cdot 14} = -\frac{75}{154}.$$

При $\operatorname{tg}\gamma = -\frac{1}{11}$.

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta - \gamma) = \frac{-\frac{11}{29} + \frac{1}{11}}{1 + \frac{11}{29} \cdot \frac{1}{11}} = \frac{\frac{-121 + 29}{29 \cdot 11}}{1 + \frac{1}{29}} = -\frac{92 \cdot 29}{29 \cdot 11 \cdot 30} = -\frac{46}{165}.$$

Таким образом, для определения значения тригонометрической функции суммы больше чем двух слагаемых пользуются сочетательным законом сложения и применяют несколько раз теорему сложения.

6. Покажем применение теоремы сложения при решении тригонометрических уравнений.

а) $\sin 6x = \sin x \cdot \cos 5x$;

$\sin(5x + x) = \sin x \cdot \cos 5x$;

$\sin 5x \cdot \cos x + \cos 5x \sin x = \sin x \cos 5x$;

$\sin 5x \cdot \cos x = 0$;

$\sin 5x = 0$; $5x = \pi k$; $x = \frac{\pi k}{5}$;

$\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$.

б) $\cos 10x = \sin 11x \cdot \sin x$;

$\cos(11x - x) = \sin 11x \cdot \sin x$;

$\cos 11x \cos x + \sin 11x \sin x = \sin 11x \sin x$;

$\cos 11x \cos x = 0$;

$\cos 11x = 0$; $11x = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$; $x = \frac{\pi}{22}(2k + 1)$;

$\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$.

Корни из серии $x = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$ получаются из формулы $x = \frac{\pi}{22}(2k + 1)$ в случаях, когда $2k + 1$ число кратное 11. Поэтому совокупность всех корней уравнения можно записать в виде

$$x = \frac{\pi}{22}(2k + 1).$$

7. Применим теорему сложения для определения

$$\cos(\arccos a + \arccos b).$$

По формуле для косинуса суммы двух углов имеем:

$\cos(\arccos a + \arccos b) = \cos(\arccos a)\cos(\arccos b) -$
$- \sin(\arccos a)\sin(\arccos b)$,

но $\cos(\arccos a) = a$; $\cos(\arccos b) = b$;

$$\sin(\arccos a) = \sqrt{1 - a^2}; \ \sin(\arccos b) = \sqrt{1 - b^2}.$$

Следовательно,

$$\cos(\arccos a + \arccos b) = ab - \sqrt{(1 - a^2)(1 - b^2)}.$$

8. Проверить равенство $\arccos\frac{5}{13} - \arccos\frac{56}{65} = \arccos\frac{4}{5}$.

Равным значениям аргумента соответствуют и равные значения тригонометрической функции этого аргумента. Следовательно, справедливость этого равенства влечет за собой и справедливость равенства:

$$\cos\left(\arccos\frac{5}{13}-\arccos\frac{56}{65}\right)=\cos\arccos\frac{4}{5}.$$

Вычислим левую часть равенства, пользуясь теоремой сложения: $\cos\left(\arccos\frac{5}{13}-\arccos\frac{56}{65}\right)=\cos\arccos\frac{5}{13}\cdot\cos\arccos\frac{56}{65}+$ $+\sin\arccos\frac{5}{13}\sin\arccos\frac{56}{65}=\frac{5}{13}\cdot\frac{56}{65}+\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{56}{65}\right)^2}=$ $=\frac{4}{5}$.

Так как $\cos\arccos\frac{4}{5}=\frac{4}{5}$, то равенство

$\cos\left(\arccos\frac{5}{13}-\arccos\frac{56}{65}\right)=\cos\arccos\frac{4}{5}$ справедливо.

Чтобы установить, что из доказанного равенства следует справедливость равенства $\arccos\frac{5}{13}-\arccos\frac{56}{65}=\arccos\frac{4}{5}$, необходимо еще показать, что $0<\arccos\frac{5}{13}-\arccos\frac{56}{65}<\frac{\pi}{2}$.

Так как $\frac{5}{13}<\frac{56}{65}$ и функция $\arccos x$ является убывающей, то $\arccos\frac{5}{13}>\arccos\frac{56}{65}$ и, следовательно, $0<\arccos\frac{5}{13}-\arccos\frac{56}{65}<\frac{\pi}{2}$. Поэтому $\arccos\frac{5}{13}-\arccos\frac{56}{65}=\arccos\frac{4}{5}$.

9. Решить уравнение: $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}(x+1)=\frac{\pi}{4}$.

Так как равным значениям аргумента соответствуют равные значения функции, то корни данного уравнения содержатся среди корней уравнения

$$\operatorname{tg}[\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}(x+1)]=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}.$$

Применяем формулу для тангенса суммы двух углов

$$\frac{x+x+1}{1-x(x+1)}=1;$$

$$2x+1=1-x^2-x;$$

$$x^2+3x=0,\ x_1=0, x_2=-3.$$

Каждый из полученных корней должен быть проверен подстановкой в заданное уравнение, так как равным значениям тригонометрической функции могут соответствовать различные значения аргумента.

Проверим первый корень $x_1=0$

$$\operatorname{arctg}0+\operatorname{arctg}1=0+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, $x_1 = 0$ является корнем данного уравнения.

Проверим второй корень $x_2 = -3$. Подстановка этого корня в левую часть уравнения дает

$$\operatorname{arc\,tg}(-3) + \operatorname{arc\,tg}(-2).$$

Так как $\operatorname{arc\,tg}(-3) < 0$ и $\operatorname{arc\,tg}(-2) < 0$, то сумма этих двух слагаемых не может равняться $\frac{\pi}{4}$. Следовательно, $x_2 = -3$ данному уравнению не удовлетворяет, т. е. является посторонним корнем.

Упражнения.

1. Вычислить $\sin(\alpha - \beta)$, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $\cos\beta = \frac{3}{4}$.

Ответ. $\frac{3\sqrt{2} \pm 7}{12}$.

2. Доказать, что если α и β углы треугольника и $\operatorname{tg}\alpha = 3$, $\operatorname{tg}\beta = 2$, то третий угол треугольника $= 45°$.

3. Синусы двух углов треугольника равны 0,6 и 0,96. Определить синус третьего угла треугольника.

Ответ. 0, 936 или 0,6.

4. Косинусы двух углов треугольника 0,8 и $-0{,}9$.
Определить косинус третьего угла треугольника.

Ответ. Треугольник не существует.

5. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = a$; $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = a + b$. Определить $\operatorname{tg}\beta$.

Ответ. $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a^2 + ab + 1}$.

Решить уравнения:

6. $\sin 6x = 2\sin x \cdot \cos 5x$. *Ответ.* $x = \frac{\pi k}{4}$.

7. $\cos 10x = \cos 3x \cdot \cos 7x$. *Ответ.* $x = \frac{\pi k}{3}$; $x = \frac{\pi k}{7}$.

8. $\sin(x + \alpha) + \sin(x - \alpha) = \cos\alpha$. *Ответ.* $x = (-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m$.

9. $\cos(\alpha - x) - \cos(\alpha + x) = \sin x$. *Ответ.* $x = \pi k$.

10. $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{2}{3}\operatorname{tg} x = 0$. *Ответ.* $x = \operatorname{arc\,tg} 3 + \pi k$;

$x = -\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \pi k$.

11. $\sin(x + 1) + \cos(x - 1) = \sin x + \cos x$. *Ответ.* $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$.

12. $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}(\sin x + \cos x + 1)$.

Ответ. Уравнение корней не имеет.

13. Вычислить $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} 3 + \operatorname{arc\,tg} 2 + \operatorname{arc\,tg} 1)$. *Ответ.* 0.

14. $\operatorname{tg}\alpha = -2$; $\operatorname{tg}\beta = -3$; $\operatorname{tg}\gamma = -4$, где α, β и γ — углы четырехугольника. Определить четвертый угол четырехугольника.

Ответ. $\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{5}$.

15. Вычислить $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5} - \frac{\pi}{4}\right)$.

Ответ. $-\frac{1}{5\sqrt{2}}$.

16. Доказать справедливость равенств:

а) $\operatorname{arc\,tg} 3 - \operatorname{arc\,tg} 2 = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}$;

б) $\arccos\frac{2}{3} - \arccos\frac{1}{3} = \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{9} - \frac{4}{9}\sqrt{2}\right)$.

17. Проверить равенство:

$$\arccos 0{,}6 + \arccos 0{,}8 = \arcsin 0{,}8.$$

Ответ. Равенство не имеет места.

18. Проверить равенство:

$$\operatorname{arc\,tg} a + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a+1} = \operatorname{arc\,tg}(a^2 + a + 1).$$

Ответ. Равенство справедливо при $a > -1$.

19. Решить уравнение:

$$\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg}\left(x - \frac{5}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Ответ. $x_1 = 3$; $x_2 = -\frac{1}{2}$.

20. Решить уравнение:

$$\operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,tg}(1 + x) - \frac{\pi}{4}.$$

Ответ. $x_1 = 0$; $x_2 = -1$.

21. Решить уравнение:

$$\operatorname{arc\,tg} x = \arccos x.$$

Ответ. $x = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}$.

22. Решить уравнение:

$$\cos 5x \cdot \cos 6x \cdot (\operatorname{tg} 5x + \operatorname{tg} 6x) = 0.$$

Ответ. $x = \frac{\pi k}{11}$.

23. Решить уравнение:

$$\cos 6x(\operatorname{tg} 5x + \operatorname{tg} 6x) = 1.$$

Ответ. $x = \frac{\pi}{32} + \frac{\pi k}{8}$.

24. Решить уравнение:

$$\sin(40^\circ + x) + \sin(20^\circ + x) = \cos 10^\circ.$$

Ответ. $x = 360^\circ \cdot k$; $x = 120^\circ(3k + 1)$.

Указание. Ввести новую неизвестную $y = 30^\circ + x$.

25. Определить $\operatorname{tg} \alpha$, если $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = a$.

Ответ. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a-1}{a+1}$.

26. Определить $\operatorname{tg} x$, если $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 7\sin x = 0$.

Ответ. $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{15}$.

27. Определить $\cos 33^\circ$, если $\sin 12^\circ = a$.

Ответ. $\cos 33^\circ = \frac{a + \sqrt{1-a^2}}{\sqrt{2}}$.

28. Решить уравнение:

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg}(x+1) + \operatorname{arc\,tg}(x+2) = 0.$$

Ответ. $x = -1$.

29. Решить уравнение:

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg}(x+1) + \operatorname{arc\,tg} 3 = 0.$$

Ответ. $x = -\frac{4}{3}$.

§ 2. Тригонометрические функции кратных углов.

Для определения тригонометрических функций двойного угла (в два раза большего, чем данный угол) достаточно рассмотреть теорему сложения в частном случае, когда слагаемые углы равны.

1. $\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.
2. $\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.
3. $\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$.

Получаем, таким образом, следующие формулы тригонометрических функций двойного угла.

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \tag{1}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \tag{2}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}. \tag{3}$$

Равенства (1) и (2) являются тождествами, так как они справедливы для любых значений угла α. Равенство (3) справедливо для всех значений угла α, кроме $\alpha = \frac{\pi}{2}(2k+1)$ и $\alpha = \frac{\pi}{4}(2k+1)$. В этих случаях формула (3) не может быть применена, так как $\alpha = \frac{\pi}{2}(2k+1)$ лишают смысла числитель и знаменатель правой части равенства, а $\alpha = \frac{\pi}{4}(2k+1)$ обращают в нуль знаменатель правой части равенства и лишают смысла левую часть равенства.

Формулу для косинуса двойного угла полезно запомнить еще в таких видах:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha.$$

Получаем еще две формулы для $\cos 2\alpha$:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1, \qquad (2 - а)$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha. \qquad (2 - б)$$

Так как каждое число в два раза больше своей половины, то любой угол можно рассматривать как двойной. Поэтому тригонометрические функции любого угла можно выражать, пользуясь выведенными формулами, через тригонометрические функции половины этого угла.

Так, например, пользуясь формулой

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

можно записать:

$$\sin 40^\circ = 2\sin 20^\circ \cos 20^\circ; \quad \sin 1 = 2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2};$$

$$\sin 200^\circ = 2\sin 100^\circ \cos 100^\circ; \ \sin 3 = 2\sin\frac{3}{2}\cos\frac{3}{2};$$

$$\sin 3{,}2\pi = 2\sin 1{,}6\pi\cos 1{,}6\pi;$$

$$\sin(\alpha+\beta) = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

и т. д.

Для выражения тригонометрических функций углов 3α, 4α, 5α и т. д. через тригонометрические функции угла α необходимо многократное применение теоремы сложения.

Например,

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg}(2\alpha+\alpha) = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha} = \frac{\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\operatorname{tg}\alpha} =$$

$$= \frac{2\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Чтобы получить формулу для выражения $\operatorname{tg} 5\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$, следует рассматривать $\operatorname{tg} 5\alpha$, как $\operatorname{tg}(3\alpha + 2\alpha)$ и т. д.

Примеры.

1. Определить $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}6$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\cdot 0{,}6}{1-0{,}36} = \frac{1{,}2}{0{,}64} = \frac{15}{8};$$

2. Определить $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}9$,

воспользуемся формулой (2 — б)

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2\cdot 0{,}81 = 1 - 1{,}62 = -0{,}62.$$

3. Определить $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\cos\alpha.$$

Определим $\cos\alpha$.

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{3}} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Получаем, что $\sin 2\alpha = 2\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

4. Определить $\operatorname{tg}\left(6\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3}{2}$.

Определяем предварительно $\operatorname{tg} 6\alpha$ как тангенс двойного угла

$$\operatorname{tg} 6\alpha = \frac{2\operatorname{tg} 3\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 3\alpha} = \frac{2\cdot\frac{3}{2}}{1-\frac{9}{4}} = \frac{3}{-\frac{5}{4}} = -\frac{12}{5}.$$

$\operatorname{tg}\left(6\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ определяем как тангенс суммы двух углов

$$\operatorname{tg}\left(6\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} 6\alpha + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1-\operatorname{tg} 6\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{-\frac{12}{5}+1}{1+\frac{12}{5}} = -\frac{7}{17}.$$

5. Вычислить с точностью до 0,001, не пользуясь таблицами, $\sin 0{,}9$, если $\sin 0{,}45 = 0{,}435$.

$$\sin 0{,}9 = 2\sin 0{,}45\cdot\cos 0{,}45 = 2\cdot 0{,}435\cdot\cos 0{,}45.$$

Определяем $\cos 0{,}45$.

$$\cos 0{,}45 = \sqrt{1-0{,}435^2} \approx 0{,}900;$$

$$\sin 0{,}9 = 2\cdot 0{,}435\cdot 0{,}900 \approx 0{,}783.$$

6. Вычислить $\cos(2\arccos 0{,}2)$.

Воспользуемся формулой (2 — а) для косинуса двойного угла.

$$\cos(2\arccos 0{,}2) = 2\cos^2(\arccos 0{,}2) - 1,$$

но

$$\cos(\arccos 0{,}2) = 0{,}2,$$

следовательно, $\cos(2\arccos 0{,}2) = 2\cdot 0{,}04 - 1 = 0{,}08 - 1 = -0{,}92$.

7. Решить уравнение:

$$2\operatorname{arctg} x = \arcsin\frac{x}{2}.$$

Корни этого уравнения содержатся среди корней уравнения

$$\operatorname{tg}(2\operatorname{arc\,tg} x) = \operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{x}{2}\right).$$

По формуле тангенса двойного угла

$$\operatorname{tg}(2\operatorname{arc\,tg} x) = \frac{2x}{1-x^2}.$$

По формулам зависимости между тригонометрическими функциями одного угла

$$\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) = \frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}},$$

уравнение получает вид

$$\frac{2x}{1-x^2} = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Решаем это уравнение

$$x\left(\frac{2}{1-x^2} - \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right) = 0.$$

Это уравнение разбивается на два уравнения:

$$x = 0; \quad \frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Первое дает корень $x_1 = 0$, удовлетворяющий данному уравнению, так как обращает обе части уравнения в 0. Второе уравнение приводится посредством возведения обеих частей уравнения в квадрат к виду

$$x^4 + 2x^2 - 15 = 0.$$

Тогда $x^2 = 3$ и $x^2 = -5$.

Мнимые корни мы не принимаем во внимание.

Корни $x_2 = \sqrt{3}$ и $x_3 = -\sqrt{3}$ при проверке оказываются посторонними, следовательно, уравнение не имеет корней, отличных от $x = 0$.

Упражнения.

1. Вычислить $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{3}$. *Ответ.* $\frac{15}{8}$.

2. Вычислить $\sin 2x$, если $\cos x = \sqrt{\frac{3}{5}}$. *Ответ.* $\pm\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

3. Вычислить $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{6}$, если $\cos\frac{\alpha}{12} = -\frac{7}{8}$. *Ответ.* $\pm\frac{7\sqrt{15}}{17}$.

4. Вычислить без таблиц с точностью до 0,0001 $\sin 7°$, если $\sin 3°30' = 0{,}06105$. *Ответ.* 0,1219.

5. Вычислить $\operatorname{tg}\left(3\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}$. *Ответ.* $-5\frac{1}{2}$.

6. Выразить $\cos 3\alpha$ через $\cos\alpha$. *Ответ.* $4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$.

7. Выразить $\sin 3\alpha$ через $\sin\alpha$. *Ответ.* $3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$.

8. Доказать тождество:

$$\cos 4\alpha=\cos^4\alpha+\sin^4\alpha-6\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$$

9. Выразить $\cos\frac{11}{13}\pi$ через $\sin\frac{\pi}{13}$. *Ответ.* $2\sin^2\frac{\pi}{13}-1$.

Решить уравнения:

10. $\cos 2x=2\cos x$. *Ответ.* $x=\pm\arccos\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\pi(2k+1)$.

11. $\operatorname{tg}2x=3\operatorname{tg}x$. *Ответ.* $x=\pi k$; $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$.

12. $\sin 10x=\sqrt{2}\sin 5x$. *Ответ.* $x=\frac{\pi k}{5}$; $x=\pm\frac{\pi}{20}+\frac{2}{5}\pi k$.

13. $3\cos 5x+\cos 10x=1$. *Ответ.* $x=\pm\frac{\pi}{15}+\frac{2}{5}\pi k$.

14. $\cos 10x+\cos 5x+\frac{5}{8}=0$. *Ответ.* $x=\pm\frac{1}{5}\arccos\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\pi k$;

$$x=\pm\frac{1}{5}\arccos\frac{3}{4}+\frac{\pi}{5}(2k+1).$$

15. $\cos 2x+3\cos x+3=0$. *Ответ.* Уравнение корней не имеет.

16. $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=5\cos 2x$. *Ответ.* $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$; $x=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{1}{10}+2\pi k$

17. $\cos 4x=a\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$. *Ответ.* $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\cdot k$;

$$x=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}(-1)^k\arcsin\frac{a}{2}+\frac{\pi}{2}\cdot k$$

при $|a|\leqslant 2$.

18. При каких значениях a уравнение

$\cos 2x+3\cos x+a=0$ имеет корни? *Ответ.* $-4\leqslant a\leqslant\frac{17}{8}$.

19. Доказать тождество

$$\operatorname{tg}3\alpha-\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}3\alpha.$$

20. Вычислить $\sin\left(2\arccos\frac{2}{3}\right)$. *Ответ.* $\frac{4\sqrt{5}}{9}$.

21. Вычислить $\cos\left(2\arccos\frac{2}{5}\right)$. *Ответ.* $-0{,}68$.

22. Вычислить $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2\operatorname{arctg}\frac{1}{4}\right)$. *Ответ.* $\frac{7}{23}$.

23. Вычислить $\operatorname{tg}\left(2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{3}\right)$. *Ответ.* 3.

24. Доказать справедливость равенства:

а) $\pi - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} 3 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{3}{4}$;

б) $3 \arcsin \frac{1}{6} = \arcsin \frac{13}{27}$;

в) $3 \arcsin \frac{4}{7} = \arcsin \frac{332}{343}$. *Ответ.* Равенство в) не справедливо.

Решить уравнения:

25. $\arccos x = 2 \arccos (x + 1)$. *Ответ.* $x_1 = -1$; $x_2 = -\frac{1}{2}$.

26. $\arccos 2x = 2 \arccos (x + 1)$. *Ответ.* Уравнение корней не имеет.

27. По двум концентрическим окружностям, радиусы которых относятся как 1:2, равномерно движутся две точки с одинаковыми линейными скоростями v. В начальный момент времени (при $t = 0$) обе точки лежат на одной оси с центром окружности и расположены по одну сторону от центра. Радиус меньшей окружности равен r. Определить моменты времени, в которые обе точки будут иметь общую проекцию на данную ось, и произвести вычисления для ближайшего момента времени, если $r = 10$ *см*, $v = 2$ *см/сек*.

Ответ. $t = \pm \frac{2r}{v} \arccos \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + \frac{2\pi r}{v}(2k + 1) \approx 19{,}5$ сек.

§ 3. Тригонометрические функции половинного угла.

Угол, в два раза меньший данного, будем называть *половинным углом*. В предыдущем параграфе мы выразили тригонометрические функции двойного угла через функции данного угла. Выражение тригонометрических функций половинного угла через функции данного является обратной задачей.

Для решения этой задачи мы пользуемся формулами, выражающими тригонометрические функции данного угла через *одну* тригонометрическую функцию половинного угла. Таких формул две:

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2};$$

$$\cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1.$$

Определяя из первого равенства $\sin \frac{\alpha}{2}$, а из второго $\cos \frac{\alpha}{2}$, получаем:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}; \tag{1}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}. \tag{2}$$

Двойной знак в формулах (1) и (2) свидетельствует о том, что задача определения синуса и косинуса половинного угла по заданному значению косинуса данного угла имеет два решения, отличающихся друг от друга только знаком. Это обстоятельство можно иллюстрировать следующим образом.

Пусть $\cos\alpha > 0$. Тогда угол α принадлежит первой или четвертой четверти. Если угол α принадлежит первой четверти, то он может быть представлен в виде

$$\alpha = \alpha_0 + 2\pi k,$$

где $0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha_0}{2} + \pi k$, где $0 < \frac{\alpha_0}{2} < \frac{\pi}{4}$. При k четном угол $\frac{\alpha}{2}$ принадлежит I четверти; следовательно, $\sin\frac{\alpha}{2} > 0$ и $\cos\frac{\alpha}{2} > 0$. При k нечетном угол $\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha_0}{2} + \pi(2n+1)$ принадлежит III четверти; следовательно, $\sin\frac{\alpha}{2} < 0$ и $\cos\frac{\alpha}{2} < 0$.

Если угол α принадлежит IV четверти, то он может быть представлен в виде $\alpha = \alpha_0 + 2\pi k$, где $\frac{3\pi}{2} < \alpha_0 < 2\pi$.

Тогда $\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha_0}{2} + \pi k$, где $\frac{3}{4}\pi < \frac{\alpha_0}{2} < \pi$.

При k четном $\frac{\alpha}{2}$ угол II четверти и $\sin\frac{\alpha}{2} > 0$, а $\cos\frac{\alpha}{2} < 0$.

При k нечетном $\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha_0}{2} + \pi(2n+1) = \frac{\alpha_0}{2} + \pi + 2\pi n$ принадлежит IV четверти, т. е. $\sin\frac{\alpha}{2} < 0$, а $\cos\frac{\alpha}{2} > 0$.

Аналогичными рассуждениями можно убедиться, что и при $\cos\alpha < 0$ $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$ могут быть и положительными и отрицательными числами. Рекомендуем читателю провести эти рассуждения.

Для вывода формулы, выражающей тангенс половинного угла через тригонометрические функции данного угла, мы пользуемся соотношением

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Подставив в эту формулу выведенные уже выражения для $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$, получаем

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},$$

следовательно,

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}. \qquad (3)$$

Тангенс половинного угла можно выразить через тангенс данного угла, если воспользоваться формулой

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Рассматриваем эту формулу как уравнение относительно $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, умножаем обе части уравнения на $1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$

$$\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Если $\operatorname{tg}\alpha$ существует, то $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \neq \pm 1$, и полученное квадратное уравнение равносильно данному.

Дальнейшие преобразования дают уравнение

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\alpha = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}. \tag{4}$$

Вместо формулы (3) и (4) для $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, можно получить формулу, дающую рациональное выражение $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ через тригонометрические функции данного угла.

Будем исходить из соотношения

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Как известно, это соотношение имеет место лишь в том случае, если $\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0$.

При этом условии умножаем числитель и знаменатель правой части этого соотношения на $2\cos\frac{\alpha}{2}$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Так как $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$, то

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}. \tag{5}$$

Формула эта, как и соотношение

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}},$$

из которого мы исходили, неприменима, если $\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{2}(2k+1)$; тогда $\alpha=\pi(2k+1)$, $\cos\alpha=-1$ и дробь $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ теряет смысл.

Можно получить рациональное выражение для $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ и в другой форме, умножив числитель и знаменатель дроби $\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ на $2\sin\frac{\alpha}{2}$.

Это преобразование законно, конечно, при том условии, что $\sin\frac{\alpha}{2}\neq 0$, т. е. $\frac{\alpha}{2}\neq\pi k$.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{6}$$

так как $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha$, а $2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha$.

Формула (6) неприменима, если $\alpha=\pi k$, так как знаменатель ее правой части при этих значениях α обращается в 0.

Формулы (5) и (6) дают рациональное выражение $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, но заданное значение одной из этих функций не определяет $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ однозначно, так как $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ определяют друг друга двузначно.

В формулах (5) и (6) знак $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ совпадает со знаком $\sin\alpha$; действительно, так как $|\cos\alpha|\leqslant 1$, то $1+\cos\alpha\geqslant 0$ и $1-\cos\alpha\geqslant 0$.

При решении задач мы можем ограничиться употреблением следующих основных формул для тригонометрических функций половинного угла:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\ \text{ и }\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Выразим еще все тригонометрические функции через тангенс половинного угла.

$\operatorname{tg}\alpha$ выражается через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ непосредственно по формуле для тангенса двойного угла

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Для выражения $\cos\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ воспользуемся формулой для косинуса двойного угла в форме:

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Полагая $\cos^2\frac{\alpha}{2} \neq 0$, в правой части этого равенства вынесем за скобки $\cos^2\frac{\alpha}{2}$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2}\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right).$$

По формуле зависимости между косинусом и тангенсом одного и того же угла

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Тогда $\cos\alpha = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$

Получаем формулу, выражающую $\cos\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.}$$

Для выражения $\sin\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ воспользуемся соотношением

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

откуда $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha$

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Получаем формулу, выражающую $\sin\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.}$$

Таким образом, все тригонометрические функции однозначно и рационально выражаются через тангенс половинного угла.

Примеры.

1. Вычислить $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=3$.

Решение: $\sin\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{2\cdot 3}{1+9}=\dfrac{3}{5}$.

Задача имеет одно решение.

2. Вычислить $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha=\frac{3}{5}$.

Решение: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$, вычисляем $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\pm\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\pm\frac{4}{5};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{3}{5}}{1\pm\frac{4}{5}};\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{3}{5}}{1+\frac{4}{5}}=\frac{1}{3};\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{4}{5}}=3.$$

Задача имеет два решения.

3. Вычислить $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=2$.

Решение: $\cos\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{1-4}{1+4}=-\dfrac{3}{5}$.

Задача имеет одно решение.

4. Вычислить $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$.

Решение: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$, вычисляем $\sin\alpha$:

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\pm\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\pm\frac{4}{5};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\pm\frac{4}{5}}{1-\frac{3}{5}};\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{3}{5}}=2;\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{-\frac{4}{5}}{1-\frac{3}{5}}=-2.$$

Задача имеет два решения.

5. Вычислить $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{2}$.

Решение: $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{1-2}=-2\sqrt{2}$.

Задача имеет одно решение.

6. Вычислить $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -2\sqrt{2}$.

По формуле для тангенса двойного угла

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \quad -2\sqrt{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$2\sqrt{2}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - 2\sqrt{2} = 0;$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2\sqrt{2}} = \frac{1\pm 3}{2\sqrt{2}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2}; \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Задача имеет два решения.

Упражнения.

1. Вычислить без таблиц с точностью до 0,001 $\cos 14°$, если $\cos 28° = 0{,}883$.

Ответ 0,970.

2. Вычислить $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha = 0{,}96$.

Ответ. $\frac{3}{4}$ и $\frac{4}{3}$.

3. Вычислить без таблиц с точностью до 0,001 $\sin 0{,}35$, если $\sin 0{,}70 = 0{,}6442$.

Ответ. 0,343.

4. Вычислить без таблиц с точностью до 0,001 $\sin 46°$, если $\cos 32° = 0{,}848$.

Ответ. 0,719.

У к а з а н и е. $\sin 46° = \sin(30° + 16°)$.

5. Вычислить $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}2\alpha = -\frac{5}{12}$.

Ответ. 5 и $-\frac{1}{5}$.

6. Вычислить $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, если $\sin 2\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Ответ. $-3-2\sqrt{2}$ и $3+2\sqrt{2}$.

7. $\operatorname{tg}(\alpha + \operatorname{arc\,tg} 3)$, если $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{3}{4}$.

Ответ. 0 или не существует.

8. Доказать, что любому заданному значению тангенса угла соответствуют два обратных по абсолютному значению и противоположных по знаку значения тангенса половинного угла

9. Вычислить $\cos\left[\frac{1}{2}\arccos(-0{,}7)\right]$.

Ответ. $0{,}1\sqrt{15}$.

10. Вычислить $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)$.

Ответ. $\frac{1}{3}$.

11. Вычислить $\sin(2\operatorname{arctg} 3)$.

Ответ. 0,6.

12. Решить уравнение:

$$2\operatorname{arctg} x = \arcsin\frac{2x+1}{x^2}.$$

Ответ. $x = -1$.

§ 4. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму.

Весьма нередки случаи, например, в тригонометрических вычислениях, при решении тригонометрических уравнений и т. д., когда полезно преобразование произведения тригонометрических функций ($\sin\alpha\cos\beta$, $\cos\alpha\cos\beta$, $\sin\alpha\sin\beta$) в алгебраическую сумму. Для вывода соответствующих формул воспользуемся теоремой сложения.

По формуле синуса суммы и разности двух углов

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Сложив почленно оба равенства, получим:

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta.$$

Откуда

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]. \quad (1)$$

По формуле для косинуса суммы и разности двух углов

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Складывая почленно оба равенства и вычитая первое равенство из второго, получим:

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta;$$

$$\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\sin\beta.$$

Откуда

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]; \quad (2)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]. \quad (3)$$

Формулы (1), (2) и (3) служат для преобразования произведения тригонометрических функций в алгебраическую сумму.

Примеры.

1. $\sin 5x \cdot \sin x = \frac{1}{2}[\cos(5x - x) - \cos(5x + x)] =$

$= \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 6x.$

2. Вычислить по таблицам $\cos 0{,}76 \cdot 0{,}36$ с точностью до 0,001.

Решение: Для упрощения вычислений преобразуем произведение $\cos 0{,}76 \cdot \cos 0{,}36$ в сумму

$\cos 0{,}76 \cdot \cos 0{,}36 = \frac{1}{2}(\cos 1{,}12 + \cos 0{,}40).$

Дальнейшие вычисления произведем, определив по таблицам.

$\cos 1{,}12 = 0{,}4357$; $\cos 0{,}40 = 0{,}9211$; $\cos 0{,}76 \cdot \cos 0{,}36 =$

$= \frac{1}{2}(0{,}4357 + 0{,}9211) = 0{,}678.$

3. Решить уравнение:

$$\cos x \cdot \cos 3x = \cos 8x \cdot \cos 10x.$$

Решение: Преобразуя в обеих частях произведение в сумму и умножая на 2, получим:

$$\cos 4x + \cos 2x = \cos 18x + \cos 2x,$$

или

$$\cos 4x = \cos 18x.$$

По условиям равенства косинусов

$$22x = 2\pi k; \quad x = \frac{\pi k}{11};$$

$$14x = 2\pi k; \quad x = \frac{\pi k}{7}.$$

4. Преобразовать в сумму

$$\cos\frac{x}{3} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdot \cos\frac{x}{6}.$$

Решение: $\cos\frac{x}{3} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdot \cos\frac{x}{6} = \left(\cos\frac{x}{3} \cdot \cos\frac{x}{4}\right) \cdot \cos\frac{x}{6} =$

$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{7}{12}x + \cos\frac{1}{12}x\right)\cos\frac{x}{6} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{7x}{12}\cos\frac{x}{6} + \cos\frac{x}{12} \cdot \cos\frac{x}{6}\right) =$

$= \frac{1}{4}\left(\cos\frac{3}{4}x + \cos\frac{5}{12}x + \cos\frac{x}{4} + \cos\frac{x}{12}\right).$

5. Представить в виде суммы первых степеней тригонометрических функций:

а) $\cos^3 x$.

Решение: $\cos^3 x = \cos^2 x \cdot \cos x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \cdot \cos x = \frac{1}{2}\cos x +$

$+ \frac{1}{2}\cos 2x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x) = \frac{1}{2}\cos x +$

$+ \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x.$

б) $\cos^5 x$.

Решение: $\cos^5 x = \cos^3 x \cdot \cos^2 x$.

Пользуясь результатами предшествующей задачи, мы можем записать, что

$$\cos^5 x = \left(\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x\right)\cos^2 x = \left(\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x\right)\frac{1+\cos 2x}{2} =$$

$$= \left(\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right) = \frac{3}{8}\cos x + \frac{1}{8}\cos 3x +$$

$$+ \frac{3}{8}\cos x \cos 2x + \frac{1}{8}\cos 3x \cos 2x = \frac{3}{8}\cos x + \frac{1}{8}\cos 3x +$$

$$+ \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x) + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}(\cos 5x + \cos x) = \frac{3}{8}\cos x +$$

$$+ \frac{1}{8}\cos 3x + \frac{3}{16}\cos 3x + \frac{3}{16}\cos x + \frac{1}{16}\cos 5x + \frac{1}{16}\cos x = \frac{5}{8}\cos x +$$

$$+ \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{1}{16}\cos 5x.$$

Упражнения.

Преобразовать произведения в сумму:

1. $\sin\frac{\pi}{10}\cdot\sin\frac{\pi}{6}$.
2. $\cos(x+\alpha)\sin(x-\alpha)$.
3. $\cos(x+\alpha)\cos(2x+\alpha)$.
4. $\cos 1\cdot\cos 2\cdot\cos 3$.

Ответ. $\frac{1}{4}(1+\cos 2+\cos 4+\cos 6)$.

5. $\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$.

Ответ. $\frac{1}{4}[\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)]$.

6. Вычислить без таблиц с точностью до 0,001

$$\cos 13^\circ \cos 17^\circ - \sin 28^\circ \sin 32^\circ.$$

Ответ. 0,683.

7. Представить в виде суммы первых степеней тригонометрических функций

$$\cos^3 x\cdot\sin^2 3x.$$

Ответ. $\frac{3}{8}\cos x+\frac{1}{16}\cos 3x-\frac{3}{16}\cos 5x-\frac{3}{16}\cos 7x-\frac{1}{16}\cos 9x$.

Решить уравнения:

8. $\cos 5x\cdot\cos 7x=\cos^2 6x$. *Ответ.* $x=\pi k$.
9. $\sin x\cdot\sin 11x=\sin 3x\cdot\sin 9x$. *Ответ.* $x=\frac{\pi k}{8}$.
10. $\sin x\cdot\sin 7x=\sin^2 4x-\frac{1}{3}$. *Ответ.* $x=\pm\frac{1}{6}\arccos\frac{1}{3}+\frac{\pi k}{3}$.
11. $\sin(\omega x+\varphi)\cdot\sin(\omega x-\varphi)=\cos 2\varphi$.

Ответ. $x=\pm\frac{\varphi}{\omega}+\frac{\pi(2k+1)}{2\omega}$.

12. При каких значениях a уравнение

$$\sin bx \cdot \sin cx = \sin^2\left(\frac{b+c}{2} \cdot x\right) + a$$

имеет корни? *Ответ.* $-1 \leqslant a \leqslant 0$.

13. При каких значениях a уравнение

$$\cos\left(mx - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(mx + \frac{\pi}{6}\right) = a$$

имеет корни? *Ответ.* $-\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant \frac{3}{4}$.

14. Доказать, что

$$\cos(m+n) \cdot \cos(m-n) \leqslant \cos^2 m.$$

15. Решить уравнение:

$$16 \sin^5 x = \sin 5x + 5 \sin x.$$

Ответ. $x = \pi k$; $x = \frac{\pi}{4}(2k+1)$.

16. Решить уравнение:

$$8\cos^4 2x - 8\cos^2 2x - \cos 2x + 1 = 0.$$

Ответ. $x = \frac{\pi k}{5}$; $x = \frac{\pi k}{3}$

§ 5. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение.

Решим теперь обратную задачу: представим сумму тригонометрических функций в виде произведения. Такое преобразование, в частности, целесообразно при вычислениях с помощью таблиц логарифмов, так как произведение может быть логарифмируемо. Поэтому преобразование алгебраической суммы в произведение называют часто приведением данного выражения к виду, удобному для логарифмирования или, для краткости, приведением к логарифмическому виду.

Представим в виде произведения сумму

$$\sin\alpha + \sin\beta.$$

Найдем такие два числа A и B, чтобы

$$\left.\begin{aligned} A + B &= \alpha \\ A - B &= \beta \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

Так как система уравнений (*) относительно A и B всегда имеет одно определенное решение, то для каждых двух углов α и β можно найти соответствующие значения A и B. Поэтому сумму $\sin\alpha + \sin\beta$ можно переписать так:

$$\sin\alpha + \sin\beta = \sin(A+B) + \sin(A-B).$$

Преобразовав $\sin(A+B) + \sin(A-B)$ по теореме сложения, получим:

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = \sin A\cos B + \cos A \sin B + \sin A \cos B - \cos A \sin B = 2\sin A \cos B.$$

Следовательно,

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin A\cos B.$$

Числа A и B можно выразить через α и β, решив систему уравнений (*)

$$A=\frac{\alpha+\beta}{2};\quad B=\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Тогда получаем, что

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{1}$$

Сумма синусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полусуммы этих углов на косинус их полуразности.

Примечание. На основании свойства четности косинуса

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$$

и поэтому безразлично, какой из углов — α или β принимать за вычитаемое и какой за уменьшаемое.

Для преобразования разности синусов в произведение можно, разумеется, повторить вывод, сделанный для суммы синусов, но мы воспользуемся уже полученной формулой, представив разность синусов как сумму

$$\sin\alpha-\sin\beta=\sin\alpha+\sin(-\beta)=2\sin\frac{\alpha+(-\beta)}{2}\cos\frac{\alpha-(-\beta)}{2}.$$

Следовательно,

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}. \tag{2}$$

Разность синусов двух углов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы этих углов на синус их полуразности.

Примечание. Так как в формуле (2) разность углов находится под знаком синуса, а синус — функция нечетная, то необходимо строго соблюдать порядок вычитания углов.

Для преобразования в произведение суммы или разности косинусов двух углов мы пользуемся уже выведенными формулами (1) и (2), заменив предварительно косинус каждого угла синусом дополнительного угла.

$$\cos\alpha+\cos\beta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=2\sin\frac{\pi-\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\alpha}{2}=$$

$$=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\frac{\beta-\alpha}{2}=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Получаем формулу для преобразования в произведение суммы косинусов

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{3}$$

Сумма косинусов двух углов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы этих углов на косинус их полуразности.

$$\cos\alpha - \cos\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) =$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \sin\frac{\beta-\alpha}{2} = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Получаем формулу для преобразования в произведение разности косинусов двух углов

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (4)$$

Разность косинусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полусуммы двух углов на синус их полуразности, взятому с противоположным знаком.

Формулы (1), (2), (3) и (4) можно было получить значительно короче из тождеств предыдущего параграфа:

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)];$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)];$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)],$$

полагая в них $\alpha = \frac{x+y}{2}$ и $\beta = \frac{x-y}{2}$ и умножая обе части равенства на два.

Сумма и разность тангенсов приводится к логарифмическому виду следующим образом:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Получаем формулы

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}; \qquad (5)$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}. \qquad (6)$$

Разумеется, формулы (5) и (6) справедливы для α и β, отличных от $\frac{\pi}{2}(2k+1)$.

Весьма часто приходится приводить к логарифмическому виду выражения $1+\cos\alpha$; $1-\cos\alpha$; $1+\sin\alpha$ и $1-\sin\alpha$.

Для приведения к логарифмическому виду выражений $1+\cos\alpha$ и $1-\cos\alpha$ пользуются формулами для косинуса двойного угла. Так как

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 \quad \text{и} \quad \cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

то

$$1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \quad \text{и} \quad 1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (7)$$

Для приведения к логарифмическому виду $1+\sin\alpha$ и $1-\sin\alpha$ заменяем в этих выражениях $\sin\alpha$ через косинус дополнительного угла и пользуемся формулами (7)

$$1+\sin\alpha = 1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right);$$

$$1-\sin\alpha = 1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

При приведении к логарифмическому виду суммы более чем двух слагаемых пользуются сочетательным законом сложения.

Примеры.

1. Привести к логарифмическому виду

$$1+\sin\alpha+\cos\alpha.$$

Решение: Приводим к логарифмическому виду сумму двух слагаемых $1+\cos\alpha$, воспользовавшись для этого формулой (7), а третье слагаемое $\sin\alpha$ преобразуем по формуле синуса двойного угла:

$$1+\sin\alpha+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \right.$$

$$\left.+\sin\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right) = 2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Таким образом, $1+\sin\alpha+\cos\alpha = 2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$

2. Привести к логарифмическому виду

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha.$$

Решение: Приводим к логарифмическому виду сумму двух слагаемых, безразлично каких, а третье слагаемое преобразуем по формуле для синуса двойного угла.

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha = 2\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{3\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{3\alpha}{2}\right) = 2\sin\frac{3\alpha}{2}\cdot 2\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2} =$$

$$= 4\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Таким образом, $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\frac{3\alpha}{2}$.

Рассмотрим еще один весьма полезный прием приведения к логарифмическому виду суммы трех слагаемых. Пусть требуется привести к логарифмическому виду $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$, если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Так как $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$, то $\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta)$.

Поэтому в заданном выражении заменяем $\sin\gamma$ через $\sin(\alpha+\beta)$ и проводим дальнейшие преобразования как в предшествующих примерах

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+$$

$$+2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2},$$

но

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\frac{\pi-\gamma}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)=\cos\frac{\gamma}{2},$$

следовательно,

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}, \tag{8}$$

если

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi.$$

Если сумма трех углов равна π, *то сумма синусов этих углов равна учетверенному произведению косинусов половинных углов.*

Формула (8) справедлива, например, для углов треугольника, которые, как известно, связаны зависимостью

$$A+B+C=\pi.$$

При помощи формулы (8) рассмотренные выше примеры 1-й и 2-й могут быть решены значительно проще.

Решение примера 1-го при помощи формулы (8).

Представим выражение $1+\sin\alpha+\cos\alpha$ как сумму синусов: для этого заменим 1 через $\sin\frac{\pi}{2}$ и $\cos\alpha$ через $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

$$1+\sin\alpha+\cos\alpha=\sin\frac{\pi}{2}+\sin\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

Так как $\frac{\pi}{2}+\alpha+\frac{\pi}{2}-\alpha=\pi$, то

$$\sin\frac{\pi}{2}+\sin\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=4\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\alpha\right)=$$

$$=2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Решение примера 2-го при помощи формулы (8).

В выражении $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha$ заменим слагаемое $\sin 3\alpha$ равным ему $\sin(\pi-3\alpha)$

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha=\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin(\pi-3\alpha).$$

Тогда $\alpha+2\alpha+\pi-3\alpha=\pi$.

Поэтому $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin(\pi-3\alpha)=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\alpha}{2}\right)=$
$=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\frac{3\alpha}{2}$.

Решим еще при помощи формулы (8) нижеследующие примеры.

3. Привести к логарифмическому виду

$$\cos\alpha-\cos\beta-\sin(\alpha-\beta).$$

Преобразуем это выражение так, чтобы получить сумму синусов трех углов, сумма которых равна π.

$$\cos\alpha-\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)+\sin(\pi+\alpha-\beta)=$$
$$=4\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=$$
$$=-4\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

4. Привести к логарифмическому виду

$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$, если $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$.

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\sin(\pi-\alpha)+\sin(\pi-\beta)+\sin(\pi-\gamma).$$

Так как $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$, то $\pi-\alpha+\pi-\beta+\pi-\gamma=\pi$.

Поэтому

$$\sin(\pi-\alpha)+\sin(\pi-\beta)+\sin(\pi-\gamma)=$$
$$=4\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Применим формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение к решению тригонометрических уравнений.

Решить уравнение:

$$\sin x+\sin 8x=\sin 9x.$$

Перепишем уравнение так

$$\sin x+\sin 8x-\sin 9x=0.$$

Преобразуя сумму первых двух слагаемых в произведение, а третье слагаемое по формуле синуса двойного угла, получаем:

$$2\sin\frac{9x}{2}\cos\frac{7x}{2}-2\sin\frac{9x}{2}\cos\frac{9x}{2}=0,$$

или

$$\sin\frac{9x}{2}\left(\cos\frac{7x}{2}-\cos\frac{9x}{2}\right)=0.$$

Уравнение распадается на два уравнения:

$$\text{а) } \sin\frac{9x}{2} = 0; \quad \text{б) } \cos\frac{7x}{2} - \cos\frac{9x}{2} = 0.$$

Решаем первое уравнение.

$$\frac{9x}{2} = \pi k; \quad 9x = 2\pi k; \quad x = \frac{2\pi k}{9}.$$

Для решения второго уравнения воспользуемся условиями равенства косинусов двух углов

$$\cos\frac{7x}{2} = \cos\frac{9x}{2};$$

$$\frac{7x}{2} + \frac{9x}{2} = 2\pi k; \quad 8x = 2\pi k; \quad x = \frac{\pi k}{4};$$

$$\frac{9x}{2} - \frac{7x}{2} = 2\pi k; \quad x = 2\pi k.$$

Корни из серии $x = 2\pi k$ могут быть получены из серии $x = \frac{\pi k}{4}$ при k кратном 8. Таким образом, данному уравнению удовлетворяют две серии корней:

$$x = \frac{2\pi k}{9} \text{ и } x = \frac{\pi k}{4}.$$

Упражнения.

Привести к логарифмическому виду:

1. $\cos 20° - \sin 10°$. *Ответ.* $\cos 40°$.
2. $\sin 1 - \sin 0{,}8$. *Ответ.* $2\sin 0{,}1 \cdot \cos 0{,}9$.
3. $\cos^2\alpha - \cos^2\beta$. *Ответ.* $\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)$.
4. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta$. *Ответ.* $\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$.
5. $\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha$. *Ответ.* $2\operatorname{tg}\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}$.
6. Вычислить с точностью до 0,001:

$$\sqrt{1+\cos 6\alpha} - \sqrt{1-\cos 6\alpha}, \quad \text{при} \quad \alpha = 32°.$$

Ответ. $-2\cos 51° \approx -1{,}258$.

7. Привести к логарифмическому виду:

$$\sqrt{1-\cos 200°} + \sqrt{1+\cos 200°}.$$

Ответ. $2\cos 35°$.

8. Привести к логарифмическому виду:

$$\sqrt{1+\cos 4\alpha} + \sqrt{1-\cos 4\alpha}, \quad \text{если } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Ответ. При $0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{4}$, $\quad 2\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$;

при $\frac{\pi}{4} \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\quad 2\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

9. При каких значениях α справедливо равенство

$$\sqrt{1+\sin 2\alpha} - \sqrt{1-\sin 2\alpha} = 2\sin\alpha.$$

Ответ. Если $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{4} + 2\pi k.$

10. Доказать тождество

$$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} - \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = 2\operatorname{ctg}\alpha, \text{ если } \pi < \alpha < 2\pi.$$

Привести к логарифмическому виду:

11. $\cos 70° + \cos 50° + \cos 48°.$

Ответ. $2\cos 19° \cos 29°.$

12. $\sin^2\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right).$

Ответ. $2\sin\alpha\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right).$

13. $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha + \sin 5\alpha + \sin 6\alpha.$

Ответ. $8\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{7\alpha}{2}.$

14. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}(\alpha+\beta).$

Ответ. $-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}(\alpha+\beta).$

Привести к логарифмическому виду с помощью тождества (8).

15. $\sin 1 + \sin 2 + \sin 3.$

Ответ. $4\cos\frac{1}{2}\cos 1\sin\frac{3}{2}.$

16. $\frac{1}{2} + \sin 20° + \sin 10°.$

Ответ. $4\sin 15°\cos 10°\cos 5°.$

17. $\sin x + \sin 6x - \sin 5x.$

Ответ. $4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}\cos 3x.$

18. $1 - \cos 1 + \sin 1.$

Ответ. $2\sqrt{2}\sin\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right).$

19. $\cos\alpha + \cos\beta - \sin(\alpha+\beta).$

Ответ. $4\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right)\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$

Решить уравнения:

20. $\sin 3x = \cos x - \sin x.$

Ответ. $x = \frac{\pi}{2}(2k+1);\quad x = (-1)^k\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}.$

21. $\sin 5x + \sin 7x = \sin 6x.$

Ответ. $x = \frac{\pi k}{6};\quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k.$

22. $\sin ax + \sin bx = \sin(ax + bx)$.

Ответ. $x = \frac{2\pi k}{a}$; $x = \frac{2\pi k}{b}$; $x = \frac{2\pi k}{a+b}$.

23. $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$

Ответ. $x = \frac{\pi}{3}(2k+1)$; $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$.

24. $\sin 5x + \sin x + 1 = \cos 6x$.

Ответ. $x = \frac{\pi k}{3}$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $x = -\frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}\pi k$.

25. $\cos^2 2x(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 5x) = \sin 6x$.

Ответ. $x = \frac{\pi k}{3}$; $x = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1)$.

§ 6. Приведение к логарифмическому виду методом введения вспомогательного угла.

Так как при любом значении a имеет место равенство

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} a) = a,$$

а при $|a| \leqslant 1$ — равенства

$$\sin(\arcsin a) = a$$

$$\cos(\arccos a) = a,$$

то любое данное число можно рассматривать как значение тригонометрической функции от некоторого аргумента, называемого вспомогательным углом. Это дает возможность представлять алгебраическую сумму любых двух чисел как алгебраическую сумму двух значений тригонометрических функций и применять к ней методы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение.

Примеры.

1. Чтобы преобразовать в произведение $1 + \operatorname{tg}\alpha$, напишем вместо единицы $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$.

$$1 + \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\cos\alpha}.$$

2. Привести к логарифмическому виду

$$\sqrt{2}\cdot\sin\alpha - 1.$$

Выносим за скобки $\sqrt{2}$ и заменяем $\frac{1}{\sqrt{2}}$ через $\sin\frac{\pi}{4}$.

$$\sqrt{2}\sin\alpha - 1 = \sqrt{2}\left(\sin\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\sin\alpha - \sin\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{8}\right).$$

3. Привести к логарифмическому виду

$$4\sin^2\alpha - 1.$$

$$4\sin^2\alpha - 1 = 4\left(\sin^2\alpha - \frac{1}{4}\right) = 4\left(\sin^2\alpha - \sin^2\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= 4\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2} - \frac{1-\cos\frac{\pi}{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos 2\alpha\right) =$$

$$= 4\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right).$$

Рассмотренный метод (понижение степени тригонометрической функции на основании соотношений $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ и $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$) имеет широкое применение в математике и часто ведет к значительным упрощениям.

Например, рекомендуем читателю воспользоваться этим методом для решения примеров 4, 5, 7 (на стр. 152) и 3 (на стр. 148).

4. Приведем к логарифмическому виду

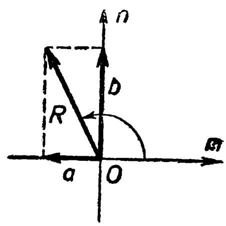
$$a^2 + b^2.$$

Вынесем за скобки a^2 и, выбрав вспомогательный угол φ так чтобы $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$, получим:

$$a^2 + b^2 = a^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) = a^2(1 + \operatorname{tg}^2\varphi) = \frac{a^2}{\cos^2\varphi},$$

$$\text{где } \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}.$$

Полученный результат можно иллюстрировать геометрически. Числа a и b можно рассматривать как проекции некоторого вектора $\vec{R}$ на оси $\vec{m}$ и $\vec{n}$, расположенные так, что $(\widehat{m, n}) = \frac{\pi}{2}$ (см. черт. 87).



Черт. 87.

Тогда $a^2 + b^2 = R^2$. Обозначим $(\widehat{m, R})$ буквой φ. По определению косинуса имеем:

$$\cos\varphi = \frac{a}{R}.$$

Отсюда

$$R = \frac{a}{\cos\varphi} \text{ и } R^2 = \frac{a^2}{\cos^2\varphi},$$

т. е.

$$a^2 + b^2 = \frac{a^2}{\cos^2\varphi} = \frac{a^2}{\cos^2 \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}}.$$

Упражнения.

Привести к логарифмическому виду:

1. $2\cos\alpha+1$ *Ответ.* $4\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$.

2. $2\cos^2\alpha-\cos\alpha$. *Ответ.* $4\cos\alpha\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

3. $\operatorname{tg}^2\alpha-1$. *Ответ.* $-\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}$.

4. $3\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$. *Ответ.* $4\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$.

5. $4\sin^2\alpha-3$. *Ответ.* $4\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$.

6. $3\cos\alpha-1$. *Ответ.* $6\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

7. $3\cos^4\alpha+5\sin^4\alpha-2$. *Ответ.* $4\cos 2\alpha\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$.

Рассмотрим применение способа введения вспомогательного угла для приведения к логарифмическому виду выражения

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha,$$

в котором a и b — любые действительные числа, отличные от нуля.

Вынесем за скобки положительный множитель R, который выберем так, чтобы в скобках получить синус алгебраической суммы двух углов.

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=R\left(\frac{a}{R}\sin\alpha+\frac{b}{R}\cos\alpha\right).$$

Положим $\frac{a}{R}=\cos\varphi$ и $\frac{b}{R}=\sin\varphi$.

Тогда

$$\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=\frac{a^2}{R^2}+\frac{b^2}{R^2}=\frac{a^2+b^2}{R^2}.$$

Так как $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$, то $\frac{a^2+b^2}{R^2}=1$ и $a^2+b^2=R^2$,

т. е. R должно равняться $\sqrt{a^2+b^2}$.

Таким образом,

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right).$$

Так как $\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|<1$ и $\left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|<1$, то $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ можно принять за $\cos\varphi$, а $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ за $\sin\varphi$.

Тогда $\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\sin\alpha+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\cos\alpha\right)=$

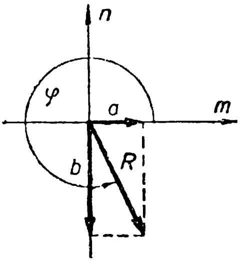
$=\sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\varphi\sin\alpha+\sin\varphi\cos\alpha)=\sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\alpha+\varphi)$,

где φ определяется д в у м я равенствами

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\quad\text{и}\quad\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Каждому из этих равенств в отдельности соответствуют на отрезке $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$ не одно, а два значения угла φ. Угол φ должен быть выбран так, чтобы знак $\cos\varphi$ совпадал со знаком a, а знак $\sin\varphi$ — со знаком b.

Целесообразность вынесения за скобки множителя $\sqrt{a^2+b^2}$ можно иллюстрировать геометрически. Любые числа a и b можно рассматривать как проекции некоторого вектора на оси $\vec{m}$ и $\vec{n}$, расположенные так, что $(\widehat{m,\ n})=\frac{\pi}{2}$ (см. черт. 88).



Черт. 88.

Тогда $\sqrt{a^2+b^2}$ определяет длину вектора и $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ представляет собой косинус угла, образованного этим вектором с осью $\vec{m}$, а $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ является синусом того же угла.

Каковы бы ни были знаки a и b, в качестве вспомогательного угла φ выбираем острый угол. Тогда в скобках получается синус алгебраической суммы двух углов. Рассмотрим все случаи, которые могут представиться.

1. Если $a>0$ и $b>0$, то $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ числа положительные. В качестве вспомогательного угла берем $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$, т. е. острый угол, который определяется о д н и м из равенств $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ или $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. В скобках получается $\sin(\alpha+\varphi)$.

2. Если $a<0$ и $b>0$, то $a=-|a|$ и $b=|b|$

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\left(-\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha+\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right).$$

В качестве вспомогательного выбираем о с т р ы й угол φ, определяемый равенством $\varphi=\arcsin\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, или равенством

$$\varphi=\arccos\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Тогда $a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\,(-\cos\varphi\sin\alpha + \sin\varphi\cos\alpha) =$
$= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\varphi-\alpha)$.

3. Если $a>0$ и $b<0$, то $a=|a|$ и $b=-|b|$

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha - \frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right).$$

В качестве вспомогательного выбираем острый угол φ, определяемый равенством $\varphi = \arcsin\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, или равенством $\varphi = \arccos\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Тогда

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\varphi\sin\alpha - \sin\varphi\cos\alpha) =$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha-\varphi).$$

4. Если $a<0$ и $b<0$, то $a=-|a|$ и $b=-|b|$

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\left(-\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha - \frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right) =$$
$$= -\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha + \frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right).$$

В качестве вспомогательного выбираем острый угол φ, определяемый равенством $\varphi = \arcsin\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$,
или равенством $\varphi = \arccos\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Тогда

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = -\sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\varphi\sin\alpha + \sin\varphi\cos\alpha) =$$
$$= -\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi).$$

По свойству нечетности синуса можно написать, что

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\sin(-\alpha-\varphi).$$

Таким образом, при приведении к логарифмическому виду $a\sin\alpha + b\cos\alpha$ мы получаем одно из следующих четырех выражений:

$$\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi),\ \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha-\varphi),\ \sqrt{a^2+b^2}\sin(\varphi-\alpha),$$
$$\sqrt{a^2+b^2}\sin(-\alpha-\varphi),$$

где острый угол φ определяется равенством $\sin\varphi = \frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ или равенством $\cos\varphi = \frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Угол φ можно определить и равенством

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{b}{a}\right|,$$

так как

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}} : \frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \left|\frac{a}{b}\right|.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать φ как острый вспомогательный угол, определяемый равенством $\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{b}{a}\right|$. Следовательно, при приведении $a\sin\alpha + b\cos\alpha$ к логарифмическому виду мы получим в зависимости от знаков a и b один из следующих четырех ответов:

а) $\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(\alpha + \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right)$, при $a > 0$ и $b > 0$;

б) $\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(\alpha - \operatorname{arc\,tg}\left|\frac{b}{a}\right|\right)$, при $a > 0$ и $b < 0$;

в) $\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(\operatorname{arc\,tg}\left|\frac{b}{a}\right| - \alpha\right)$, при $a < 0$ и $b > 0$;

г) $\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(-\operatorname{arc\,tg}\left|\frac{b}{a}\right| - \alpha\right)$, при $a < 0$ и $b < 0$.

Примеры.

1. Привести к логарифмическому виду

$$3\sin\alpha + 4\cos\alpha.$$

Множитель $R = \sqrt{3^2+4^2} = 5$; $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}$;

$$3\sin\alpha + 4\cos\alpha = 5\sin\left(\alpha + \operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}\right).$$

2. Привести к логарифмическому виду

$$2\sqrt{3}\cos\alpha - \sqrt{2}\sin\alpha.$$

Определяем множитель R и угол φ

$$R = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{12+2} = \sqrt{14}.$$

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{6};$$

$$2\sqrt{3}\cos\alpha - \sqrt{2}\sin\alpha = \sqrt{14}\sin(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{6} - \alpha).$$

3. Привести к логарифмическому виду

$$-\sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha.$$

Определяем множитель R и угол φ

$$R = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1} = \sqrt{3+1} = 2;\quad \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6};$$

$$-\sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha = -2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right).$$

4. Привести к логарифмическому виду

$$8\sin x + 15\cos x + 17\cos 5x.$$

Преобразуем в произведение сумму первых двух слагаемых

$$R = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17; \qquad \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{15}{8};$$

$$8\sin x + 15\cos x + 17\cos 5x = 17\sin\left(x + \operatorname{arc\,tg}\frac{15}{8}\right) + 17\cos 5x =$$

$$= 17\left[\sin\left(x + \operatorname{arc\,tg}\frac{15}{8}\right) + \cos 5x\right] = 17\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - x - \operatorname{arc\,tg}\frac{15}{8}\right) +\right.$$

$$\left. + \cos 5x\right] = 17 \cdot 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{15}{8}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{15}{8}\right) = 34\cos\left[2x + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{15}{8}\right)\right]\cos\left[3x -\right.$$

$$\left. - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{15}{8}\right)\right].$$

Упростим выражение, стоящее под знаком косинуса

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{15}{8} = \frac{\sin\operatorname{arc\,tg}\frac{15}{8}}{1 + \cos\operatorname{arc\,tg}\frac{15}{8}} = \frac{\frac{15}{8}}{\sqrt{1 + \frac{225}{64}}} : \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{225}{64}}}\right) =$$

$$= \frac{\frac{15}{17}}{\frac{25}{17}} = \frac{3}{5}.$$

Следовательно, $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{15}{8} = \operatorname{arc\,tg}\frac{3}{5}$.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{15}{8}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arc\,tg}\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{15}{8} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4}$. Получаем окончательный ответ

$$8\sin x + 15\cos x + 17\cos 5x =$$

$$= 34\cos\left(3x - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4}\right)\cos\left(2x + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4}\right).$$

Применим преобразование выражения $a\sin\alpha + b\cos\alpha$ к логарифмическому виду методом введения вспомогательного угла для определения наибольших и наименьших значений функций.

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$y = 9\sin x + 40\cos x$$

$$y = \sqrt{9^2 + 40^2}\left(\frac{9}{\sqrt{9^2 + 40^2}}\sin x + \frac{40}{\sqrt{9^2 + 40^2}}\cos x\right) =$$

$$= 41\sin\left(x + \operatorname{arc\,tg}\frac{40}{9}\right).$$

Так как $-1 \leqslant \sin\left(x + \operatorname{arc\,tg}\frac{40}{9}\right) \leqslant 1$,

то наибольшее значение y примет при $\sin\left(x + \operatorname{arc\,tg}\frac{40}{9}\right) = 1$,

а наименьшее — при $\sin\left(x + \operatorname{arc\,tg}\frac{40}{9}\right) = -1$.

Значит, наименьшее значение y равно -41, а наибольшее равно 41.

2. Определить наибольшее и наименьшее значение функции

$$y = \sin^2 x + \sin x \cos x - 2\cos^2 x.$$

$$y = \sin^2 x + \sin x \cos x - 2\cos^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\sin 2x - 1 - \cos 2x =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x - 1 - \cos 2x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin 2x -$$

$$- \frac{3}{2}\cos 2x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2}\sin(2x - \operatorname{arc\,tg} 3).$$

$$y_{\max} = \frac{-1+\sqrt{10}}{2}, \quad \text{при } 2x - \operatorname{arc\,tg} 3 = \frac{\pi}{2}(4k+1);$$

$$y_{\min} = \frac{-1-\sqrt{10}}{2}, \quad \text{при } 2x - \operatorname{arc\,tg} 3 = \frac{\pi}{2}(4k-1).$$

Упражнения.

Привести к логарифмическому виду (1 — 8)

1. $5\sin\alpha - 12\cos\alpha$. *Ответ.* $13\sin\left(\alpha - \operatorname{arc\,tg}\frac{12}{5}\right)$.
2. $3\sin\alpha + \cos\alpha$. *Ответ.* $\sqrt{10}\sin\left(\alpha + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}\right)$.
3. $\cos\alpha - 2\sin\alpha$. *Ответ.* $\sqrt{5}\sin\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} - \alpha\right)$.
4. $\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha$. *Ответ.* $2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$.
5. $\sin\alpha + \cos\alpha$ *Ответ.* $\sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$.
6. $0{,}936\sin\alpha - 0{,}352\cos\alpha$. *Ответ.* $\sin(\alpha - \arcsin 0{,}352)$.
7. $2\sin 2x - \sqrt{3}\sin x + \cos x$. *Ответ.* $4\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{12}\right)$.
8. $7\cos\alpha - \sin\alpha + 5\sqrt{2}$. *Ответ.* $10\sqrt{2}\cos^2\left[\frac{\alpha}{2} + \operatorname{arc\,tg}(5\sqrt{2} - 7)\right]$.
9. Доказать, что при любом значении аргумента

$$-\sqrt{7} \leqslant 2\sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leqslant \sqrt{7}.$$

10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$y = 3\sin^2 x + 5\cos^2 x.$$

Ответ. $y_{\max} = 5$; $y_{\min} = 3$

Рассмотренный прием приведения к логарифмическому виду выражения $a \sin x + b \cos x$ позволяет решить наиболее рациональным образом тригонометрическое уравнение

$$a \sin x + b \cos x = c.$$

Существуют различные приемы решения этого уравнения.

1. Можно выразить $\sin x$ через $\cos x$ и решить уравнение

$$\pm a \sqrt{1 - \cos^2 x} + b \cos x = c$$

относительно $\cos x$. Этот способ решения следует считать неудачным, так как мы получили уравнение, иррациональное относительно $\cos x$.

2. Можно выразить $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ по формулам

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \quad \text{и} \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Тогда данное уравнение примет вид

$$\frac{2a \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + \frac{b\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = c.$$

Умножив обе части этого уравнения на $1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$, заведомо неравное нулю, получим уравнение, квадратное относительно $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$

$$(b + c) \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 2a \operatorname{tg} \frac{x}{2} - (b - c) = 0;$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b + c};$$

$$x = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b + c} + 2\pi k.$$

Мы принимаем во внимание только вещественные корни этого уравнения; следовательно, корни уравнения будут пригодными только в том случае, если $a^2 + b^2 \geqslant c^2$.

Этот способ применим не всегда: при некотором соотношении между параметрами он приводит к потере корней. Действительно, если $b + c = 0$, то полученное выражение для $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ теряет смысл; вместо квадратного уравнения мы получаем уравнение 1-й степени

$$-2a \operatorname{tg} \frac{x}{2} - (b - c) = 0; \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{b - c}{-2a} = \frac{2b}{-2a} = -\frac{b}{a};$$

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{b}{a}\right) + \pi k; \qquad x = 2 \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{b}{a}\right) + 2\pi k.$$

Причина потери корней кроется в том, что равенства

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \quad \text{и} \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

являются тождествами лишь при $x \neq \pi(2k+1)$, и пользование ими не всегда законно.

Если $b+c=0$, то уравнение $a\sin x + b\cos x = c$ должно быть решено нижеследующим приемом. При $b+c=0$ или при $c=-b$ уравнение принимает вид

$$a\sin x + b\cos x = -b;$$

$$a\sin x + b(1+\cos x) = 0.$$

Пользуясь формулами синуса и косинуса двойного угла, получим:

$$2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 2b\cos^2\frac{x}{2} = 0,$$

или

$$2\cos\frac{x}{2}\left(a\sin\frac{x}{2} + b\cos\frac{x}{2}\right) = 0.$$

Уравнение распадается на два уравнения:

1. $\cos\frac{x}{2} = 0; \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}(2k+1); \quad x = \pi(2k+1).$

2. $a\sin\frac{x}{2} + b\cos\frac{x}{2} = 0; \quad a\operatorname{tg}\frac{x}{2} + b = 0; \quad \operatorname{tg}\frac{x}{2} = -\frac{b}{a}.$

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{b}{a}\right) + \pi k; \qquad x = 2\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{b}{a}\right) + 2\pi k.$$

3. Решим теперь уравнение $a\sin x + b\cos x = c$ методом введения вспомогательного угла. Прежде всего исключаем случаи, когда один из параметров a и b или когда оба параметра равны нулю, ибо в первом случае уравнение является основным ($b\cos x = c$ или $a\sin x = c$), а во втором случае оно теряет смысл. Параметр a всегда можно считать положительным числом, так как при $a < 0$ обе части уравнения можно умножить на -1. Поэтому полагаем $a > 0$. Приводим левую часть уравнения к логарифмическому виду методом введения вспомогательного угла. Тогда уравнение может быть переписано так

$$\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x + \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right) = c.$$

Эта запись охватывает и случай $b < 0$, так как

$$-\operatorname{arc\,tg}\left|\frac{b}{a}\right| = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}.$$

Полученное уравнение приводится к основному

$$\sin\left(x + \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Уравнение имеет корни, если

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leqslant 1, \text{ т. е. если } a^2 + b^2 \geqslant c^2.$$

Это неравенство дает возможность определить, имеет ли уравнение корни до его решения по соотношению между его коэффициентами. Корни уравнения охватываются формулой

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a} + \pi k.$$

Мы видим, что этот последний прием решения уравнения $a\sin x + b\cos x = c$ является общим, так как при любых условиях гарантирует получение уравнения, равносильного данному, и наиболее быстро приводит к цели.

Упражнения.

Решить уравнения:

1. $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2$. *Ответ.* $x = \frac{5}{6}\pi + 2\pi k$.

2. $5\cos x - 12\sin x = 6{,}5$. *Ответ* $-(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \operatorname{arc\,tg}\frac{5}{12} + \pi k$.

3. $\sqrt{2a}\sin x + \sqrt{1 + a^2}\cos x = a$. $a > 0$.

   Ответ. $x = (-1)^k \arcsin\frac{a}{1 + a} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1 + a^2}{2a}} + \pi k$.

4. $7\cos x - 8\sin x = 11$. *Ответ.* Корней нет.

5. $\sin\omega x + 5\cos\omega x = 1$.

   Ответ. $x = (-1)^k \cdot \frac{1}{\omega}\arcsin\frac{1}{\sqrt{26}} - \frac{1}{\omega}\operatorname{arc\,tg} 5 + \pi k$.

6. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$. *Ответ.* $x = \frac{\pi}{2} + 4\pi k$; $x = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi k}{3}$.

7. $\sin x\cos x = 0{,}3\sin(3x + \alpha) + 0{,}4\cos(3x + \alpha)$.

   Ответ. $x = 2\pi k - \alpha - \operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}$;

   $x = \frac{\pi}{5}(2k + 1) - \frac{\alpha}{5} - \frac{1}{5}\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}$.

8. $11\sin x - 2\cos x = 5(\cos 5x + 2\sin 5x)$.

   Ответ. $x = \frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{11} - \frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}(2k + 1)$;

   $x = \frac{\pi k}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{11}$.

9. При каких значениях x функция $y = 3 \sin x - 2 \cos x$ принимает наибольшее значение?

Ответ. $x = \operatorname{arc\,tg} \frac{2}{3} + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

10. Сила тяги, необходимая для равномерного движения тела весом P по горизонтальной плоскости, определяется соотношением

$$F = \frac{f \cdot P}{\cos \alpha + f \cdot \sin \alpha},$$

где f — коэффициент трения, α — угол между силой тяги и горизонтальной плоскостью.

При каком значении α сила тяги является наименьшей?

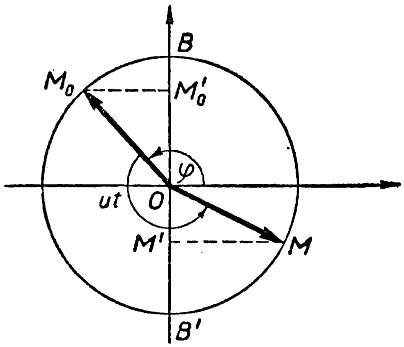
Ответ. $\alpha = \operatorname{arc\,tg} f$.

ГЛАВА VI

ФУНКЦИЯ $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ И ЕЕ ГРАФИК.

Тригонометрические функции имеют широкое применение при изучении явлений, носящих периодический характер, каковы, например, всевозможные колебательные движения, распространение волн, величина переменного электрического тока и т. д.

В технике очень часто приходится встречаться с равномерным движением точки по окружности, которое связано с прямолинейным движением проекции этой точки на диаметр данной окружности. Это простейшее периодическое движение называется простым гармоническим колебанием. Выясним закон, по которому совершается простое гармоническое колебание.



Черт. 89.

Пусть вектор $\vec{R}$, начало которого совпадает с точкой пересечения двух осей $\vec{m}$ и $\vec{n}$, расположенных так, что

$$(\widehat{m, n}) = \frac{\pi}{2}$$

вращается вокруг своего начала с постоянной угловой скоростью $\omega \frac{1}{сек}$ (см. черт. 89).

Это значит, что за каждую секунду вектор поворачивается на угол, равный ω. Тогда конец вектора — точка M — равномерно движется по окружности, радиус которой равен длине вектора; длину вектора обозначим через A.

Пусть в некоторый начальный момент $t = 0$ вектор $\vec{R}$ образует с осью $\vec{m}$ угол φ (см. черт. 89). Тогда через t секунд вектор повернется на угол ωt и, следовательно, будет составлять с осью $\vec{m}$ угол $\omega t + \varphi$.

Каждому положению вектора $\vec{R}$ соответствует определенной величины его проекция на ось $\vec{n}$. Следовательно, каждому положению точки M, равномерно движущейся по окружности радиуса A, соответствует определенное положение ее проекции M на ось $\vec{n}$. При этом за тот промежуток времени, за который точка M опишет всю окружность, ее проекция M' на ось $\vec{n}$, выйдя из своего начального положения M_0' придет в крайнее положение B_1', затем изменит направление движения на противоположное и придет в крайнее положение B, где снова изменит направление движения на противоположное, и вернется в начальное положение M_0'. Точка M' совершает так называемое гармоническое колебательное движение вдоль отрезка BB' оси $\vec{n}$. Полному обороту вектора $\vec{R}$ соответствует одно полное колебание точки вдоль отрезка BB'.

Чтобы найти закон, по которому происходит движение, называемое гармоническим колебательным, надо вывести формулу, позволяющую находить положение точки M' на отрезке BB' в каждый данный момент времени. Это положение определяется однозначно проекцией вектора $\vec{R}$ на ось $\vec{n}$. Эту проекцию мы обычно обозначаем R_n.

По определению функции $\sin x$

$$\frac{R_n}{A} = \sin(\omega t + \varphi).$$

Следовательно,

$$R_n = A \sin(\omega t + \varphi).$$

Полученная формула и выражает закон, по которому происходит движение точки, совершающей гармоническое колебание, ибо дает возможность найти положение этой точки в каждый заданный момент времени. Введя вместо t обычное обозначение аргумента через x, и вместо R_n обычное обозначение функции через y, получим функцию

$$y = A \sin(\omega x + \varphi)$$

называемую **синусоидальной функцией** или иногда просто **гармоникой**.

Рассмотрим свойства этой функции. Будем полагать, что $A > 0$, $\omega > 0$ и φ любое действительное число.

Покажем прежде всего, что рассматриваемая функция является периодической и определим ее период. Обозначим искомый период через λ. По определению периода при **любом** значении x λ должно удовлетворять условию:

$$A \sin[\omega(x + \lambda) + \varphi] = A \sin(\omega x + \varphi),$$

так как $A \neq 0$, то

$$\sin[\omega(x + \lambda) + \varphi] = \sin(\omega x + \varphi).$$

На основании условий равенства синусов:

а) $(\omega x+\omega\lambda+\varphi)+(\omega x+\varphi)=\pi(2k+1)$;

б) $(\omega x+\omega\lambda+\varphi)-(\omega x+\varphi)=2\pi k$.

Из условия а) получим

$$\lambda=\frac{\pi(2k+1)-2\varphi-2\omega x}{\omega}.$$

Здесь λ зависит от x, т. е. является переменным числом и, следовательно, не может быть периодом.

Из условия б) получим:

$$\lambda=\frac{2\pi k}{\omega}.$$

Наименьшее положительное значение λ получим, очевидно, при $k=1$:

$$\lambda=\frac{2\pi}{\omega}.$$

Например, периодами функций $\sin 5x$, $3\sin\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)$, $A\sin\frac{x}{6}$, $A\sin(\pi x+\varphi)$, $A\sin(x-1)$ служат соответственно числа $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{5}$, 12π, 2, 2π.

Покажем теперь, что функция

$$y=A\sin(\omega x+\varphi)$$

имеет максимальное и минимальное значения и найдем их.

Так как синус любого угла по абсолютному значению не может быть больше единицы, то

$$-1\leqslant\sin(\omega x+\varphi)\leqslant 1,$$

следовательно,

$$-A\leqslant A\sin(\omega x+\varphi)\leqslant A.$$

Отсюда заключаем, что A является наибольшим значением функции

$$y=A\sin(\omega x+\varphi),$$

а $(-A)$ ее наименьшим значением.

В частном случае, когда $A=1$, $\omega=1$ и $\varphi=0$, синусоидальная функция $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ представляет собой тригонометрическую функцию

$$y=\sin x,$$

основные свойства и график которой были нами рассмотрены в главе III.

График функции $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ также называется синусоидой; синусоиду, представляющую собой график функции $y=\sin x$, мы будем теперь называть **основной синусоидой**.

Прежде чем построить график функции $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ при любых значениях параметров A, ω, φ рассмотрим роль и значение каждого из этих параметров в отдельности.

1. Параметр A.

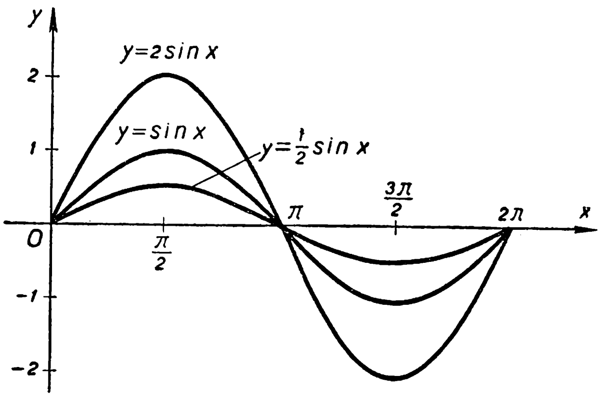
Исследуем функцию

$$y = A \sin x,$$

где A любое положительное число.

Так как $\omega = 1$, то период этой функции совпадает с периодом функции $y = \sin x$ и равен 2π. Наибольшее значение функции равно A, а наименьшее значение равно $-A$. График функции отличается от основной синусоиды только «высотой волны», т. е. наибольшей по абсолютной величине ординатой точки кривой.

Построение графика функции $y = A \sin x$ произведем при $A = 1$, $A = 2$, $A = \frac{1}{2}$, т. е. построим график функций $y = \sin x$, $y = 2 \sin x$, $y = \frac{1}{2} \sin x$. График первой из них ($y = \sin x$) представляет уже известную нам основную синусоиду. Чтобы получить графики функций $y = 2 \sin x$ и $y = \frac{1}{2} \sin x$ достаточно в первом случае ординату каждой точки основной синусоиды умножить на 2, а во втором случае разделить на 2. Графики всех трех функций изображены на чертеже 90.



Черт. 90.

Параметр A называется **амплитудой** синусоидальной функции. Амплитуда характеризует «размах» гармонического колебания, наибольшие отклонения колеблющейся точки от середины отрезка, вдоль которого эти колебания происходят. Из чертежа амплитуда синусоиды может быть определена как наибольшая ордината точки на кривой.

Как и функция $y = \sin x$, функция $y = A \sin x$ является нечетной. Действительно,

$$A \sin(-x) = A(-\sin x) = -A \sin x.$$

2. Параметр ω.

Исследуем функцию

$$y = \sin \omega x, \quad \text{где } \omega > 0.$$

Наибольшее значение этой функции равно 1, а наименьшее равно -1. Период этой функции, как мы видели выше, равен $\frac{2\pi}{\omega}$.

Построение графика функции $y = \sin \omega x$ произведем при $\omega = 1$, $\omega = 2$, $\omega = \frac{1}{2}$, т. е. построим графики функций $y=\sin x$, $y=\sin 2x$, $y = \sin \frac{1}{2} x$. График первой из них ($y = \sin x$) представляет собой основную синусоиду. Составим таблицы изменения для функций $y = \sin 2x$ и $y = \sin \frac{1}{2} x$.

$y = \sin 2x$

x	$2x$	$\sin 2x$
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{\pi}{2}$	π	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	-1
π	2π	0

$y = \sin \frac{1}{2} x$

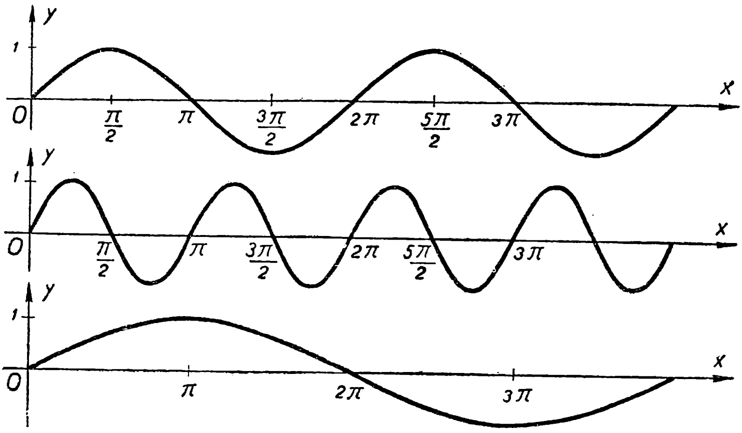
x	$\frac{1}{2} x$	$\sin \frac{1}{2} x$
0	0	0
π	$\frac{\pi}{2}$	1
2π	π	0
3π	$\frac{3\pi}{2}$	-1
4π	2π	0

Из первой таблицы видно, что функция $\sin 2x$ принимает все те и только те значения, что и функция $\sin x$; но те значения, которые функция $\sin x$ принимает в некоторой точке x_0 функция $\sin 2x$ принимает в точке $\frac{1}{2} x_0$, так что график функции $y = \sin 2x$ может быть получен путем «сжатия» основной синусоиды по направлению оси абсцисс в два раза.

Из второй таблицы видно, что функция $\sin \frac{1}{2} x$ принимает все те и только те значения, что и функция $\sin x$; но то значение, которое функция $\sin x$ принимает в некоторой точке x_0, функция $\sin \frac{1}{2} x$ принимает в точке $2x_0$, так что график $y = \sin \frac{1}{2} x$ может быть получен путем «растяжения» основной синусоиды вдоль оси абсцисс в два раза.

Графики всех трех функций изображены на чертеже 91.

Период $\frac{2\pi}{\omega}$ функции $y = \sin \omega x$ есть тот промежуток времени, в течение которого совершается одно полное колебание, т. е. промежуток времени, в течение которого вектор делает один полный оборот. Действительно, в одну секунду вектор поворачивается на



Черт. 91.

угол ω, следовательно, вектор сделает полный оборот за $\frac{2\pi}{\omega}$ секунд. Поэтому величину $\lambda = \frac{2\pi}{\omega}$, равную времени одного полного колебания, называют также периодом колебательного движения. Параметр ω называют частотой гармонического колебания или частотой синусоидальной функции.

Функция $y = \sin \omega x$ является нечетной.

Действительно:

$$\sin \omega(-x) = \sin(-\omega x) = -\sin \omega x.$$

3. Параметр φ.

Исследуем функцию $y = \sin(x + \varphi)$, так как $\omega = 1$, то период этой функции равен 2π. При $x = 0$, $y = \sin \varphi$. Это значит, что график функции $y = \sin(x + \varphi)$ пересекает ось ординат в точке $(0, \sin \varphi)$. Найдем точки пересечения графика функции с осью абсцисс, т. е. те значения аргумента, при которых

$$\sin(x + \varphi) = 0,$$

$$x + \varphi = k\pi \quad \text{или} \quad x = -\varphi + k\pi.$$

При $k = 0$, $x = -\varphi$;

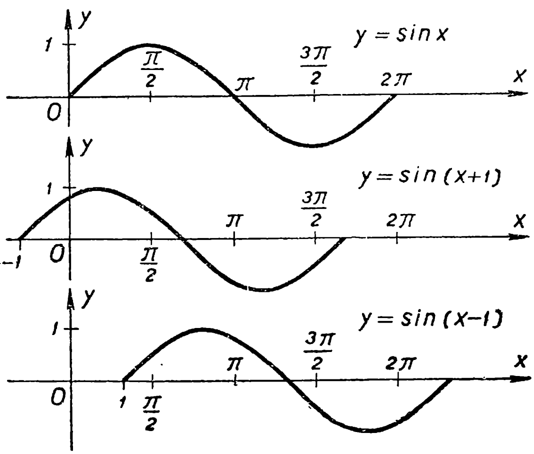
при $k = 1$, $x = -\varphi + \pi$;

при $k = 2$, $x = -\varphi + 2\pi$ и т. д.

Построим график функции $y = \sin(x + \varphi)$ при $\varphi = 0$, $\varphi = 1$, $\varphi = -1$, т. е. построим графики функций $y = \sin x$; $y = \sin(x+1)$; $y = \sin(x - 1)$. Первый из этих графиков представляет собой основную синусоиду. Составим таблицы изменения для функций $y = \sin(x + 1)$ и $y = \sin(x - 1)$.

$y = \sin(x+1)$			$y = \sin(x-1)$		
x	$x+1$	$\sin(x+1)$	x	$x-1$	$\sin(x-1)$
-1	0	0	1	0	0
$\frac{\pi}{2}-1$	$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{\pi}{2}+1$	$\frac{\pi}{2}$	1
$\pi-1$	π	0	$\pi+1$	π	0
$\frac{3}{2}\pi-1$	$\frac{3}{2}\pi$	-1	$\frac{3}{2}\pi+1$	$\frac{3}{2}\pi$	-1
$2\pi-1$	2π	0	$2\pi+1$	2π	0

Из этих таблиц мы видим, что функции $y = \sin(x + 1)$ и $y = \sin(x - 1)$ принимают все те и только те значения, что и функция $y = \sin x$. Но то значение, которое функция $y = \sin x$ принимает для некоторого значения аргумента x_0, функция $\sin(x + 1)$ принимает для значения аргумента $x_0 - 1$, т. е. все значения функции отодвигаются в направлении, противоположном оси абсцисс, на одну единицу масштаба; функция же $\sin(x - 1)$ принимает это значение для значения аргумента, равного $x_0 + 1$, т. е. все значения



Черт. 92.

функции $y = \sin(x - 1)$ отодвигаются в направлении оси абцисс на одну единицу масштаба.

Графики всех трех функций изображены на чертеже 92.

Постоянная величина φ указывает положение вектора в некоторый начальный момент $x = 0$, т. е. угол между вектором и осью $\vec{m}$ в начале его вращения, следовательно, и начальное положение на оси $\vec{n}$ точки, совершающей гармоническое колебание. Параметр φ называется **начальной фазой** гармонического колебания или начальной фазой синусоидальной функции. Начальная фаза характеризует смещение графика синусоидальной функции (синусоиды) вдоль оси абсцисс.

Как видно из чертежа, функция $y = \sin(x + \varphi)$ при $\varphi \neq 0$ не является нечетной, ибо график ее не располагается симметрично относительно начала координат. Вместе с тем чертеж показывает, что эта функция не обладает и свойством четности, так как график ее не располагается симметрично и относительно оси ординат.

Покажем, что функция $y = \sin(x + \varphi)$ является нечетной только при $\varphi = k\pi$. Действительно, если функция $y = \sin(x + \varphi)$ нечетная, то $\sin(-x + \varphi) = -\sin(x + \varphi)$, или $\sin(-x + \varphi) = \sin(-x - \varphi)$.

По условиям равенства синусов:

а) $-x + \varphi - x - \varphi = \pi(2k + 1)$: $\quad -2x = \pi(2k + 1)$,

$$x = -\frac{\pi}{2}(2k + 1).$$

Это значит, что равенство синусов осуществляется не при всех значениях аргумента.

б) $-x + \varphi + x + \varphi = 2\pi k$; $\quad 2\varphi = 2\pi k$; $\quad \varphi = \pi k$.

Нечетность функции $y = \sin(x + \varphi)$ осуществляется, следовательно, при $\varphi = \pi k$.

Подводя итоги, мы можем сказать, что график функции

$$y = A\sin(\omega x + \varphi),$$

где A — амплитуда, ω — частота, φ — начальная фаза, является синусоидой, «высота» которой равна A, и длина волны равна $\frac{2\pi}{\omega}$.

При $x = 0$, $y = A\sin\varphi$. Следовательно, синусоида пересекает ось ординат в точке $(0, A\sin\varphi)$.

При $\varphi = k\pi$, $A\sin\varphi = 0$ и синусоида проходит через начало координат. При $\varphi \neq k\pi$ синусоида смещена вдоль оси абсцисс. Чтобы найти величину смещения синусоиды, определим точки пересечения синусоиды с осью абсцисс из уравнения

$$A\sin(\omega x + \varphi) = 0.$$

Так как $A \neq 0$, то $\sin(\omega x + \varphi) = 0$ и

$$\omega x + \varphi = k\pi; \quad x = \frac{-\varphi + k\pi}{\omega}.$$

Придавая k значения

$$\ldots -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots$$

получим нижеследующие точки пересечения нашей синусоиды с осью абсцисс:

$$\left(\frac{-\varphi-2\pi}{\omega},\ 0\right);\ \left(\frac{-\varphi-\pi}{\omega},\ 0\right);\ \left(\frac{-\varphi}{\omega},\ 0\right);\ \left(\frac{-\varphi+\pi}{\omega},\ 0\right) \text{ и т. д.}$$

Следовательно, синусоида смещена вдоль оси абсцисс на $x_0 = -\frac{\varphi}{\omega}$.

Функция $y = A\sin(\omega x + \varphi)$, вообще говоря, не обладает ни свойством нечетности, ни свойством четности. Но в частных случаях, при некоторых частных значениях φ, она может быть и нечетной и четной.

1) $\varphi = k\pi$. В этом случае синусоида проходит через начало координат.

При $k = 0$, $\varphi = 0$,

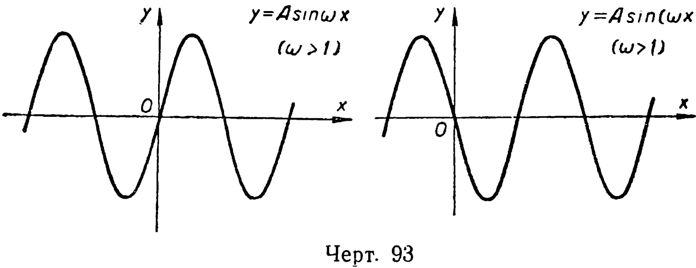
$$A\sin(-\omega x) = -A\sin\omega x.$$

Функция является нечетной
при $k = 1$, $\varphi = \pi$.

$$A\sin(\omega x + \pi) = -A\sin\omega x.$$

Так как $A\sin\omega x$ является нечетной функцией, то и функция $-A\sin\omega x$ является функцией нечетной.

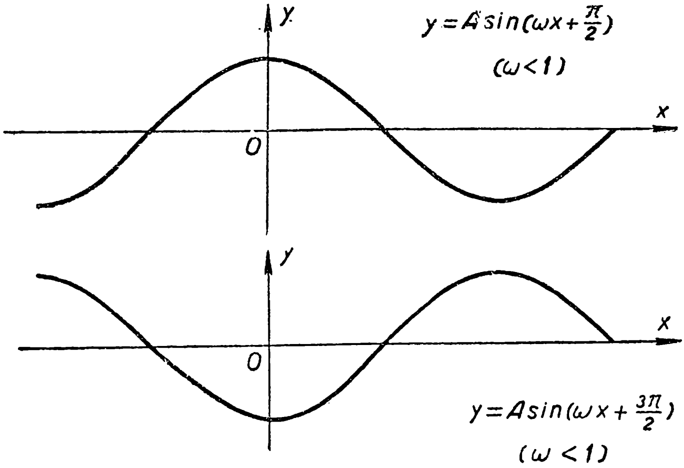
В общем случае при $\varphi = k\pi$ функция $y = A\sin(\omega x + k\pi)$ либо равна $A\sin\omega x$, либо равна $-A\sin\omega x$. В обоих случаях мы приходим к нечетной функции, и синусоида обладает центральной симметрией относительно начала координат (см. черт. 93).



Черт. 93

При $k = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $y = A\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{2}\right) = A\cos\omega x = A\cos(-\omega x)$ и, следовательно, функция является четной при $k = 1$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, $y = A\sin\left(\omega x + \frac{3\pi}{2}\right) = -A\cos\omega x$. Так как функция $y = A\cos\omega x$ является четной функцией, то и функция $y = -A\cos\omega x$ тоже является четной функцией.

В общем случае при $\varphi = \frac{\pi}{2} + \pi k$ функция $y = A\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$ либо равна $A\cos\omega x$, либо равна $-A\cos\omega x$. В обоих случаях мы получаем четную функцию, и синусоида симметрична относительно оси ординат (см. черт. 94).



Черт. 94

Мы рассматриваем функцию $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ при положительных значениях параметров A и ω. Если $A < 0$ или $\omega < 0$, то всегда можно найти начальную фазу φ_1 так, чтобы $y = A\sin(\omega x + \varphi) = A_1\sin(\omega_1 x + \varphi_1)$, где $A_1 > 0$ и $\omega_1 > 0$. Рассмотрим все случаи, которые могут представиться:

1. Если $A > 0$ и $\omega < 0$, то по свойству нечетности $y = A\sin(\omega x + \varphi) = -A\sin(-\omega x - \varphi)$ и по свойству половины периода $y = -A\sin(-\omega x - \varphi) = A\sin(-\omega x - \varphi + \pi)$, где $-\omega > 0$.

2. Если $A < 0$ и $\omega > 0$, то по свойству половины периода $y = A\sin(\omega x + \varphi) = -A\sin(\omega x + \varphi + \pi)$, где $-A > 0$.

3. Если, наконец, $A < 0$ и $\omega < 0$, то по свойству нечетности $y = A\sin(\omega x + \varphi) = -A\sin(-\omega x - \varphi)$, где $-A > 0$ и $-\omega > 0$.

Таким образом, функция $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ при помощи тождественных преобразований всегда может быть представлена в виде:

$$y = A_1\sin(\omega_1 x + \varphi_1), \text{ где } A_1 = |A| \text{ и } \omega_1 = |\omega|.$$

В этих преобразованиях условимся начальную фазу выбирать на отрезке $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Это всегда возможно сделать, пользуясь свойством периодичности синуса.

Функция $y = A\cos(\omega x + \varphi)$ также является синусоидальной. Действительно,

$$y = A\cos(\omega x + \varphi) = A\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{2} + \varphi\right) = A\sin(\omega x + \varphi_1),$$

где $\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \varphi$.

Таким образом, график функций

$$y = A\sin(\omega x + \varphi) \text{ и } y = A\cos(\omega x + \varphi)$$

при любых постоянных A, ω и φ (разумеется, $A \neq 0$ и $\omega \neq 0$) является синусоидой с амплитудой, равной $|A|$, частотой $|\omega|$ и периодом $\frac{2\pi}{|\omega|}$.

Примеры.

Определить амплитуду, период и начальную фазу функций:

1. $y = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Решение: $A = |3| = 3$; $\omega = |2| = 2$; $\lambda = \frac{2\pi}{2} = \pi$; $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.

2. $y = -2\sin\frac{x}{2}$.

Решение: $A = |-2| = 2$; $\omega = \left|\frac{1}{2}\right|$; $\lambda = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

Для определения начальной фазы произведем нижеследующее преобразование:

$$y = -2\sin\frac{x}{2} = 2\sin\left(\frac{x}{2} + \pi\right); \quad \varphi = \pi.$$

3. $y = \cos\left(\frac{\pi}{5} - 4x\right)$

Решение: $A = 1$; $\omega = |-4| = 4$; $\lambda = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Для определения начальной фазы преобразуем функцию

$$y = \cos\left(\frac{\pi}{5} - 4x\right) = \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{5} - 4x\right)\right] = \sin\left(4x + \frac{3}{10}\pi\right).$$

Следовательно, $\varphi = \frac{3}{10}\pi$.

4. $y = \cos(x + 8)$

Решение: $A = 1$; $\omega = 1$; $\lambda = 2\pi$.

Для определения начальной фазы преобразуем функцию

$$y = \cos(x + 8) = \sin\left(x + 8 + \frac{\pi}{2}\right).$$

Так как мы условились находить φ на отрезке $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$, а $8 + \frac{\pi}{2} > \pi$, то вводим нижеследующее преобразование функции

$$y = \sin\left(x + 8 + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 8 + \frac{\pi}{2} - 4\pi\right).$$

Следовательно, $\varphi = 8 - \frac{7}{2}\pi \approx -2{,}996$.

Упражнения.

1. Определить амплитуду, период и начальную фазу функций:

а) $y = B\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right)$; г) $y = 3\cos x + 7\sin x$;

б) $y = \sin^2 x - \frac{1}{2}$; д) $y = -\sin x - 2\sqrt{3}\cos x$.

в) $y = 4 - 8\cos^2 x$;

2. Доказать, что при любых A_1, A_2, φ_1, φ_2 функция

$$y = A_1 \sin(\omega x + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega x + \varphi_2)$$

является синусоидальной функцией и определить ее амплитуду.

Примечание. Эта теорема может быть сформулирована следующим образом:

Сумма двух синусоидальных функций с одинаковыми частотами является синусоидальной функцией с той же частотой.

3. Два генератора, имеющие э. д. с. соответственно равные $e_1 = E_{m_1}\sin\omega t$; $e_2 = E_{m_2}\sin(\omega t + \varphi)$, соединены последовательно. Зная, что э. д. с. на зажимах такой цепи равна сумме э. д. с. отдельных генераторов, вычислить значение амплитуды э. д. с. на зажимах цепи и ее начальную фазу.

Вычисления произвести, приняв

$$E_{m_1} = 120\,\text{в},\ E_{m_2} = 160\,\text{в},\ \varphi = 48^\circ,\ \omega = \frac{\pi}{25}\frac{1}{\text{сек}}.$$

4. Найти синусоидальную функцию с периодом, равным 1, если график функции проходит через точки (0,1) и $\left(\frac{1}{3},\ 2\right)$.

Ответ. 1. а) $A = |B|$, $\lambda = 4\pi$, $\varphi = \frac{1}{3}$, если $B > 0$ и $\varphi = \frac{1}{3} - \pi$, если $B < 0$. б) $A = \frac{1}{2}$, $\lambda = \pi$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. в) $A = 4$, $\lambda = \pi$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. г) $A = \sqrt{58}$, $\lambda = 2\pi$, $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{3}{7}$. д) $A = \sqrt{13}$, $\lambda = 2\pi$, $\varphi = \operatorname{arc\,tg} 2\sqrt{3} - \pi$.

2. $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$.

3. Приблизительно 255 вольт и 28° (не зависят от частоты).

4. $y = \sqrt{\frac{28}{3}}\sin\left(2\pi x + \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}}{5}\right)$.

Таблица тригонометрических функций для острых углов в градусной мере

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	x
0	0	1	0	—	90
1	0,017	0,9998	0,017	57,290	89
2	0,035	0,999	0,035	28,636	88
3	0,052	0,999	0,052	19,081	87
4	0,070	0,998	0,070	14,301	86
5	0,087	0,996	0,087	11,430	85
6	0,105	0,995	0,105	9,514	84
7	0,122	0,993	0,123	8,144	83
8	0,139	0,990	0,141	7,115	82
9	0,156	0,988	0,158	6,314	81
10	0,174	0,985	0,176	5,671	80
11	0,191	0,982	0,194	5,145	79
12	0,208	0,978	0,213	4,705	78
13	0,225	0,974	0,231	4,331	77
14	0,242	0,970	0,249	4,011	76
15	0,259	0,966	0,268	3,732	75
16	0,276	0,961	0,287	3,487	74
17	0,292	0,956	0,306	3,271	73
18	0,309	0,951	0,325	3,078	72
19	0,326	0,946	0,344	2,904	71
20	0,342	0,940	0,364	2,747	70
21	0,358	0,934	0,384	2,605	69
22	0,375	0,927	0,404	2,475	68
23	0,391	0,921	0,424	2,356	67
24	0,407	0,914	0,445	2,246	66
25	0,423	0,906	0,466	2,145	65
26	0,438	0,899	0,488	2,050	64
27	0,454	0,891	0,510	1,963	63
28	0,469	0,883	0,532	1,881	62
29	0,485	0,875	0,554	1,804	61
30	0,500	0,866	0,577	1,732	60
31	0,515	0,857	0,601	1,664	59
32	0,530	0,848	0,625	1,600	58
33	0,545	0,839	0,649	1,540	57
34	0,559	0,829	0,675	1,483	56
35	0,574	0,819	0,700	1,428	55
36	0,588	0,809	0,727	1,376	54
37	0,602	0,799	0,754	1,327	53
38	0,616	0,788	0,781	1,280	52
39	0,629	0,777	0,810	1,235	51
40	0,643	0,766	0,839	1,192	50
41	0,656	0,755	0,869	1,150	49
42	0,669	0,743	0,900	1,111	48
43	0,682	0,731	0,933	1,072	47
44	0,695	0,719	0,966	1,036	46
45	0,707	0,707	1,000	1,000	45
x	$\cos x$	$\sin x$	$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg} x$	x

Таблица перехода от градусного измерения к радианному

Градусы	Радианная мера угла	Минуты	Радианная мера угла
1	0,01745	1	0,00029
2	0,03491	2	0,00058
3	0,05236	3	0,00087
4	0,06981	4	0,00116
5	0,08727	5	0,00145
6	0,10472	6	0,00175
7	0,12217	7	0,00204
8	0,13963	8	0,00233
9	0,15708	9	0,00262
РАДИАН $\approx 57^\circ\, 17'\, 44{,}8''$			

Таблица тригонометрических функций для значений аргумента от 0 до $\frac{\pi}{2}$

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$
0,00	0,0000	1,0000	0,0000	0,32	0,3146	0,9492	0,3314
0,01	0,0100	1,0000	0,0100	0,33	0,3240	0,9460	0,3425
0,02	0,0200	0,9998	0,0200	0,34	0,3335	0,9428	0,3537
0,03	0,0300	0,9996	0,0300	0,35	0,3429	0,9394	0,3650
0,04	0,0400	0,9992	0,0400	0,36	0,3523	0,9359	0,3764
0,05	0,0500	0,9988	0,0500	0,37	0,3616	0,9323	0,3879
0,06	0,0600	0,9982	0,0601	0,38	0,3709	0,9287	0,3994
0,07	0,0699	0,9976	0,0701	0,39	0,3082	0,9249	0,4111
0,08	0,0799	0,9968	0,0802	0,40	0,3894	0,9212	0,4228
0,09	0,0899	0,9960	0,0902	0,41	0,3986	0,9171	0,4346
0,10	0,0998	0,9950	0,1003	0,42	0,4078	0,9131	0,4466
0,11	0,1098	0,9940	0,1104	0,43	0,4169	0,9090	0,4586
0,12	0,1197	0,9928	0,1206	0,44	0,4259	0,9048	0,4706
0,13	0,1296	0,9916	0,1307	0,45	0,4350	0,9004	0,4831
0,14	0,1395	0,9902	0,1409	0,46	0,4439	0,8961	0,4954
0,15	0,1494	0,9888	0,1511	0,47	0,4529	0,89[illegible]6	0,5080
0,16	0,1593	0,9872	0,1614	0,48	0,4618	0,8870	0,5206
0,17	0,1692	0,9856	0,1717	0,49	0,4706	0,8823	0,5334
0,18	0,1790	0,9838	0,1820	0,50	0,4794	0,8776	0,5463
0,19	0,1889	0,9820	0,1923	0,51	0,4882	0,8727	0,5594
0,20	0,1987	0,9801	0,2027	0,52	0,4969	0,8678	0,5726
0,21	0,2085	0,9780	0,2131	0,53	0,5055	0,8628	0,5859
0,22	0,2182	0,9759	0,2236	0,54	0,5141	0,8577	0,5994
0,23	0,2280	0,9737	0,2341	0,55	0,5227	0 8525	0,6131
0,24	0,2377	0,9713	0,2447	0,56	0,5312	0,8473	0,6269
0,25	0,2474	0,9689	0,2553	0,57	0,5396	0,8419	0,6410
0,26	0,2571	0,9664	0,2660	0,58	0,5480	0,8365	0,6552
0,27	0,2667	0,9638	0,2768	0,59	0,5564	0,8309	0,6696
0,28	0,2764	0,9611	0,2876	0,60	0,5646	0,8253	0,6841
0,29	0,2860	0,9582	0,2984	0,61	0,5729	0,8196	0,6989
0,30	0,2955	0,9553	0,3093	0,62	0,5810	0,8139	0,7139
0,31	0,3051	0,9523	0,3203	0,63	0,5891	0,8080	0,7291

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$
0,64	0,5972	0,8021	0,7445	1,11	0,8957	0,4447	2,0143
0,65	0.6052	0,7961	0,7602	1,12	0,9001	0,4357	2,0660
0,66	0,6131	0,7900	0,7761	1,13	0,9044	0,4267	2,1198
0,67	0.6210	0,7838	0,7923	1,14	0,9087	0,4176	2,1759
0,68	0,6288	0,7776	0,8087	1,15	0,9128	0,4085	2,2345
0,69	0,6365	0,7712	0,8253	1,16	0,9168	0,3993	2,2958
0,70	0,6442	0,7648	0,8423	1,17	0,9208	0,3902	2,3600
0,71	0,6518	0,7584	0,8595	1,18	0,9246	0,3809	2,4273
0,72	0,6594	0,7518	0,8771	1,19	0,9284	0,3717	2,4979
0,73	0,6669	0,7452	0,8949	1,20	0,9320	0,3624	2,5722
0,74	0.6743	0,7385	0,9131	1,21	0 9356	0,3530	2,6503
0,75	0,6816	0,7317	0,9316	1,22	0,9391	0,3436	2,7328
0,76	0,6889	0,7248	0,9505	1,23	0,9425	0,3342	2,8198
0,77	0,6961	0,7179	0,9697	1,24	0,9458	0,3248	2,9119
0,78	0,7033	0,7109	0,9893	1,25	0,9490	0,3153	3,0096
0,79	0,7104	0.7038	1,0092	1,26	0,9521	0,3058	3,1133
0,80	0,7174	0,6967	1.0296	1,27	0,9551	0,2963	3,2236
0,81	0,7243	0,6895	1,0505	1,28	0,9580	0,2867	3,3413
0,82	0,7311	0,6822	1,0717	1,29	0,9608	0,2771	3,4672
0,83	0.7379	0,6749	1,0934	1,30	0,9636	0,2675	3,6021
0,84	0,7446	0,6675	1,1156	1,31	0,9662	0,2579	3,7471
0,85	0,7513	0,6600	1,1383	1,32	0,9687	0,2482	3,9033
0,86	0,7578	0,6524	1,1616	1,33	0,9711	0,2385	4,0723
0,87	0,7643	0,6448	1,1853	1,34	0,9735	0,2288	4,2556
0,88	0,7707	0,6372	1,2097	1,35	0,9757	0,2190	4,4552
0,89	0,7771	0,6294	1,2346	1,36	0,9779	0,2092	4,6734
0,90	0,7833	0,6216	1,2602	1,37	0,9799	0,1994	4,9131
0,91	0,7895	0,6137	1,2864	1,38	0,9819	0,1896	5,1774
0,92	0,7956	0,6058	1,3133	1,39	0,9837	0,1798	5,4707
0,93	0,8016	0,5978	1,3409	1,40	0,9854	0,1700	5,7979
0,94	0,8076	0,5898	1,3692	1,41	0,9871	0,1601	6,1654
0,95	0,8134	0,5817	1,3984	1,42	0,9887	0,1502	6,5811
0,96	0,8192	0,5735	1,4284	1,43	0,9901	0,1403	7,0555
0,97	0,8249	0,5653	1,4592	1,44	0,9915	0,1304	7,6018
0,98	0,8305	0,5570	1,4910	1,45	0,9927	0,1205	8,2381
0,99	0,8360	0,5487	1,5237	1,46	0,9939	0,1106	8,9886
1,00	0,8415	0,5403	1,5574	1,47	0,9949	0,1006	9,8874
1,01	0,8468	0,5319	1,5922	1,48	0,9959	0,0907	10,9834
1,02	0,8521	0,5234	1,6281	1,49	0,9967	0,0807	12,3499
1,03	0,8573	0,5148	1,6652	1,50	0,9975	0,0707	14,1014
1,04	0,8624	0,5062	1,7036	1,51	0,9982	0,0608	16,4281
1,05	0,8674	0,4976	1,7433	1,52	0,9987	0,0508	19,6695
1,06	0,8724	0,4889	1,7844	1,53	0,9992	0,0408	24,4984
1,07	0,8772	0,4801	1,8270	1,54	0,9995	0,0308	32,4611
1,08	0,8820	0,4713	1,8712	1,55	0,9998	0,0208	48,0785
1,09	0,8866	0,4625	1,9171	1,56	0,9999	0,0108	96,6205
1,10	0,8912	0,4536	1,9648	1,57	1,0000	0,0008	1255,7656
				$\frac{\pi}{2}$	1	0	—

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Глава V. **Теорема сложения и ее следствия**

Сергей Владимирович Синакевич

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Редактор *Л. А. Сидорова*
Обложка художника *Г. С. Богачева*
Художественный редактор *М. Л. Фрам*
Технические редакторы *Н. В. Горбунова*
и *М С. Дранникова*
Корректор *Т. Н Смирнова*

Сдано в набор 6/V-1959 г. Подписано к печати 17/XI-1959 г.
60×92 1/16. Печ. л. 11,25. Уч-изд. л. 9,09.
Тираж 22 000 экз. А 10240

Учпедгиз. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41

*

Полиграфкомбинат им. Я. Коласа, Минск, Красная, 23

*

Заказ 239.
Цена без переплета 2 руб. 45 коп.
Переплет 80 коп