Д. Б. ЮДИН и Е. Г. ГОЛЬШТЕЙН

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА ИНЖЕНЕРА

Д. Б. ЮДИН и Е. Г. ГОЛЬШТЕЙН

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

ТЕОРИЯ И КОНЕЧНЫЕ МЕТОДЫ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1963

518
Ю 16
УДК 330.115 : 62-50

АННОТАЦИЯ

Линейное программирование дает способы находить наиболее выгодные варианты при планировании производства, перевозок и снабжения и при управлении сложными процессами. Внедрение методов линейного программирования в практику позволяет достичь значительной экономии средств и времени.

В настоящей книге подробно излагаются математическая теория линейного программирования и вычислительные методы, позволяющие находить точное решение задачи за конечное число шагов.

Книга рассчитана на инженеров, экономистов и математиков, работающих в области приложений. Она может быть также использована студентами математических, экономических и инженерно-экономических вузов и факультетов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Управление и планирование являются наиболее сложными функциями администрации предприятий, руководителей хозяйственных органов и штабов различного уровня. Характер управления и планирования определяет путь достижения цели и оказывает существенное влияние на качество решения поставленной задачи.

Долгое время управление техникой и технологическими процессами, планирование развития отраслей хозяйства и боевых операций являлись монополией человека с соответствующей подготовкой, опытом и интуицией. Совершенствование техники и структуры производства, разделение труда и кооперирование в широких масштабах чрезвычайно усложнили задачи управления и планирования.

Для того чтобы принять обоснованное решение, необходимо получить и обработать огромное количество информации. Ответственные решения зачастую связаны с судьбами людей и с большими материальными ценностями. Сейчас недостаточно указать путь, ведущий к достижению цели. Необходимо из всех возможных путей выбрать наиболее экономный, учитывающий особенности течения и развития управляемого процесса и наилучшим образом соответствующий поставленной задаче.

Прежние методы решения задач управления и планирования, сводившиеся к расширению управленческого аппарата, грозят при современном состоянии техники потерей управления.

Появление быстродействующих вычислительных машин создало мощные предпосылки для автоматизации многочисленных задач управления. Однако реализация этих предпосылок стала возможной лишь после разработки специальных математических методов, позволяющих сводить решение задач управления и планирования к последовательности автоматически выполняемых операций в соответствии с исходной информацией.

Новая математическая дисциплина — теоретическая основа решения задач управления и планирования — названа математическим программированием.

Для постановки задачи математического программирования необходимо сформулировать цель управления и указать ограничения на выбор параметров управления, обусловленные особенностями управляемого процесса. Задача математического программирования сводится к выбору системы параметров, обеспечивающей оптимальное (в заданном смысле) качество процесса управления в рамках сформулированных ограничений.

Наиболее разработанным разделом математического программирования является линейное программирование — теория и методы решения условных экстремальных задач, в которых показатель качества линейно зависит от параметров управления, а ограничения — линейные равенства или неравенства.

Первые публикации по линейному программированию принадлежат советским ученым ([61]—[63], [66]). За последние годы издан ряд сборников ([96]—[99]), оригинальных и переводных статей, посвященных отдельным методам и различным приложениям линейного программирования. Однако все эти статьи и даже весьма строгое и компактное изложение основ линейного программирования в книге Л. В. Канторовича [65] вряд ли могут служить руководством для систематического изучения этой дисциплины. Краткие монографии А. С. Барсова [3], Чарнеса, Купера и Хендерсона [118] и Вайды [15] охватывают относительно узкий круг вопросов, относящихся к проблематике линейного программирования. Работы Я. Габра [17], Я. П. Герчука [21], Креко [69], Рейнфельда и Фогеля [88] рассчитаны на неподготовленного читателя, заинтересованного главным образом в экономических приложениях линейного программирования. Строгость и полнота освещения важных вопросов приносятся здесь в жертву доступности изложения.

К наиболее полным и в то же время достаточно строгим современным руководствам по линейному программированию следует отнести книгу [129] и перевод монографии С. Гасса [18]. Однако попытки уложить в рамки одной книги общие и специальные вопросы, теорию и методы, математические основы и приложения не позволили уделить каждому из этих разделов требуемое внимание.

В настоящей книге авторы поставили перед собой задачу изложить центральный пункт линейного программирования — теорию и конечные методы, — учитывая интересы математиков, экономистов и инженеров, и содействовать, таким образом, сближению точек зрения специалистов, непосредственно участвующих в постановке и решении задач управления и планирования. В книге, гораздо подробнее, чем в других известных нам изданиях, изложена общая теория линейного программирования и гораздо тщательнее описаны конечные методы и реализующие их алгоритмы. Здесь много внимания уделяется различным модификациям методов и алгоритмов, позволяющим экономным образом использовать структуру и особенности современных вычислительных машин. Геометрические и экономическая интерпретации задачи и методов линейного программирования, подробно описанные в книге, должны способствовать более глубокому уяснению теории и могут служить интуитивной основой для совершенствования вычислительных методов и алгоритмов.

Книга содержит некоторые новые результаты, публикуемые впервые. Подбор и изложение материала позволяет рассматривать линейное программирование не как самостоятельную дисциплину, а как раздел математического программирования. В частности, классификация конечных методов линейного программирования предусматривает возможность аналогичного подхода к методам решения нелинейных экстремальных задач.

Структура глав, принятая в книге, позволяет специалистам разного профиля и различной математической подготовки выбрать удобный для себя порядок изучения линейного программирования. Для удобства читателя в Дополнении, помещенном в конце книги, дано краткое изложение элементов линейной алгебры и понятий многомерного пространства, используемых в математическом аппарате линейного программирования. Следует подчеркнуть, что для эффективного использования приведенных в книге методов необходимо уяснить не только вычислительные, но и теоретические аспекты линейного программирования.

В главе 1 излагаются основные понятия линейного программирования, указывается место этой дисциплины среди других разделов математического программирования, и рассматриваются различные методологические вопросы, важные для постановки задач и усвоения методов.

В главе 2 устанавливается связь линейного программирования и теории выпуклых многогранных множеств. Интерпретация задачи в терминах теории выпуклых многогранных множеств позволяет обосновать ряд важных результатов линейного программирования и помогает усвоению геометрической сущности задачи и методов ее решения.

Глава 3 посвящена наиболее важному теоретическому вопросу линейного программирования — теории двойственности. Теория двойственности играет существенную роль при построении методов линейного программирования. В главе выясняется связь между решением двойственной задачи и так называемыми разрешающими множителями — аналогами множителей Лагранжа. Полученные результаты позволяют рассматривать с единой точки зрения различные подходы к построению методов линейного программирования.

Методы линейного программирования, как и методы линейной алгебры, делятся на конечные и итеративные. Накопленный опыт решения практических задач позволяет отдать предпочтение конечным методам, как более эффективным. Главы 4—8 монографии посвящены подробному изложению теории и вычислительных алгоритмов основных конечных методов линейного программирования. При описании методов уделялось внимание как вопросам, представляющим интерес для совершенствования методов, так и особенностям вычислительных схем, определяющим выбор метода и алгоритма для решения конкретной задачи.

Изложение методов и описание алгоритмов ведется применительно к общей задаче линейного программирования, записанной в так называемой канонической форме с переменными, ограниченными с одной и с обеих сторон. В заключительной главе указаны пути построения вычислительных схем для других форм записи задачи линейного программирования. Там же приводятся и модификации конечных методов, обеспечивающие более рациональное использование оперативной памяти *ЦВМ*.

Классификация методов по различным признакам, проведенная в гл. 8, позволяет заключить, что рассмотренные в монографии методы можно считать типичными представителями всех существенно различных групп конечных методов линейного программирования.

Читатель, заинтересованный только в приложениях линейного программирования, может после ознакомления с гл. 1 (и §§ 1 и 2 Дополнения) перейти к изучению методов и вычислительных схем. При первом чтении могут быть опущены §§ 4, 6 и 8 гл. 4, § 9 гл. 5, §§ 2 и 4 гл. 6 и § 3 гл. 7.

Для освоения приемов численного решения формализованных задач линейного программирования достаточно изучить §§ 2, 3, 5, 6 и 8 главы 5, §§ 6—8 главы 6 и §§ 5—6 главы 7. Изложенные здесь сведения вместе с материалом § 2 главы 8 позволяют составить библиотеку программ конечных методов решения задач линейного программирования на *ЦВМ*.

Читатели, работающие над развитием теории и совершенствованием методов линейного программирования, должны, помимо глав 2 и 3, обратить особое внимание на параграфы глав 4—7, в которых содержится геометрическая трактовка методов, обсуждаются явления вырожденности и зацикливания и изучаются особенности задач с двухсторонними ограничениями.

В упражнениях, приведенных в конце каждой главы, помимо численных примеров, способствующих усвоению материала, предлагаются вопросы и задачи, которые по разным соображениям не могли быть включены в текст.

В книге принята автономная нумерация формул для каждого параграфа. Номер формулы состоит из двух чисел: первое число указывает номер параграфа, второе — порядковый номер формулы в параграфе. При ссылках на формулы из других глав в тексте дополнительно указывается номер главы.

Авторы будут искренне благодарны читателям, которые найдут время и возможность прислать свои замечания по материалам этой книги.

Октябрь 1961 г. *Авторы*

ГЛАВА 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

§ 1. Предмет математического программирования

1.1. Развитие математики в конце XIX и начале XX века складывалось главным образом под влиянием запросов физики. Именно теоретической физике обязаны своими успехами дифференциальная геометрия, векторный и тензорный анализ, дифференциальные и интегральные уравнения, теория вероятностей и математическая статистика и ряд других математических дисциплин. Основным понятием математических наук этого периода являлась непрерывность. Естествознание и техника не ставили перед математикой в широких масштабах комбинаторные задачи, а состояние вычислительной техники не давало оснований рассчитывать на эффективные методы решения этих задач.

В последние десятилетия жизнь выдвинула на первый план проблемы организации производства, планирования народного хозяйства, автоматизации промышленности и управления военной техникой. Естественной реакцией на это явилось бурное развитие кибернетических наук. Вопросы управления энергией и техникой стали столь же актуальными, как и вопросы получения энергии и создания техники. Стало ясно, что экономический эффект от рациональных методов управления и планирования, применяемых в широких масштабах и на высоком уровне, способен в ряде случаев превысить эффект от существенного увеличения мощностей. Возникла потребность в новых математических методах, позволяющих анализировать ритм производства, работу нервной системы живого организма, взаимоотношения между людьми и между коллективами, качество военной техники.

И хотя по-прежнему центральным понятием современной математики остается непрерывность, все большее внимание приходится уделять дискретным задачам комбинаторного типа.

Получение точного числового результата в обозримый срок в трудоемких математических задачах стало оцениваться наравне с доказательствами трудных абстрактных утверждений и выводом изящных формул. Кстати, о формулах. Сложные современные задачи, выдвигаемые жизнью перед математикой, как правило, не позволяют рассчитывать на получение формул, связывающих заданные и искомые величины. В тех случаях, когда качественные оценки не удовлетворяют потребителя, можно скорее надеяться на разработку алгоритмов, позволяющих для каждой конкретной системы исходных данных вычислить результат.

Таким образом, роль физики — поставщика новых направлений и новых задач в математике — переходит в последние годы к кибернетике. Появление и развитие цифровой вычислительной техники форсировало создание новых математических методов, которые в свою очередь расширили возможности математических машин.

1.2. Математические машины, внедряемые в производство и управление и используемые в научно-исследовательской работе, создают огромные возможности для развития различных отраслей науки, для совершенствования методов планирования и автоматизации производства. Однако без строгих формулировок задач, без формально-математического описания процессов не может быть достигнут необходимый уровень использования техники. Зачастую узким местом оказываются не столько вопросы, связанные с проектированием машин, сколько вопросы, возникающие в связи с формализацией физических, экономических, технических и других процессов. Формализация задачи — необходимый этап для перевода каждой прикладной задачи на язык математических машин.

Общая схема формализации задач управления и планирования может быть описана следующим образом.

Задачи управления и планирования обычно сводятся к выбору некоторой системы параметров и некоторой системы функций. Будем называть эти параметры и функции характеристиками управления. Чтобы иметь основание отдавать предпочтение тем или иным значениям параметров планирования и тем или иным управляющим функциям, необходимо прежде всего четко уяснить себе следующие два обстоятельства. Во-первых, нужно разобраться в том, что следует называть хорошей и наилучшей системой управления и планирования. Иными словами, следует сформулировать и выразить через искомые характеристики показатель качества — критерий, определяющий соответствие разрабатываемых устройств и планов цели, ради которой эта разработка ведется. Во-вторых, необходимо выяснить условия работы системы и вытекающие отсюда ограничения, которым должны удовлетворять искомые характеристики.

В настоящее время изучаются главным образом задачи, в которых под характеристиками управления подразумеваются не функции, а система параметров.

Таким образом, проблемы управления и планирования сводятся к экстремальным задачам следующего вида.

Требуется вычислить максимум функции

$$f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \tag{1.1}$$

при условиях

$$g_i(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \leqslant 0, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m, \tag{1.2}$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ t \leqslant n. \tag{1.3}$$

Функция $f(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ называется показателем качества решения задачи. Условия (1.2)—(1.3) представляют собой ограничения задачи. Условия (1.3), естественные для многих задач, в которых переменные x_j — параметры управления — по своему физическому смыслу не могут быть отрицательными, целесообразно для упрощения анализа выделить из числа ограничений вида (1.2).

Среди ограничений задачи могут быть и равенства. В системе (1.2) равенство $g_k(x_1,\ \ldots,\ x_n)=0$ представляется двумя неравенствами:

$$g_k(x_1,\ \ldots,\ x_n) \leqslant 0,$$

$$-g_k(x_1,\ \ldots,\ x_n) \leqslant 0.$$

К решению экстремальных задач вида (1.1)—(1.3) приводит анализ разнообразных задач управления народным хозяйством и автоматизации производственных процессов. К таким же задачам приводит и исследование проблем планирования экономики и военных операций.

Математическая дисциплина, занимающаяся изучением задач вида (1.1)—(1.3) и разработкой методов их решения при различных допущениях относительно функций f и g_i, называется *математическим программированием.*

Термин математическое программирование нельзя признать удачным, поскольку под словом *программирование* обычно понимают составление вычислительных схем—программ для математических машин. Возможно, более удачным названием совокупности вопросов, оформляющейся в настоящее время в самостоятельный раздел прикладной математики, было бы *математическое планирование.* Еще более соответствовал бы сути дела термин *методы решения условных экстремальных задач.* Однако термин *математическое программирование* уже установился и является общепринятым в литературе, поэтому мы его будем придерживаться.

Основная особенность задач математического программирования, отличающая их от условных экстремальных задач классического анализа, состоит в наличии неравенств среди ограничений (1.2) и (1.3). Известные методы решения задач на условный экстремум с помощью так называемых множителей Лагранжа здесь непосредственно неприменимы. Классические методы дифференциального исчисления разработаны для отыскания экстремальных точек внутри области определения функции. Поэтому метод Лагранжа можно было бы непосредственно применить к решению задач (1.1)—(1.3) только в том случае, если бы заранее было известно, какие из условий (1.2), (1.3) обращаются в равенства при значениях аргументов, определяемых решением задачи. Однако подобных сведений, вообще говоря, нет. Если ограничиваться рекомендациями классического анализа, можно было бы указать следующий путь решения задач математического программирования.

Пусть функции f и g_i удовлетворяют всем условиям, требуемым для решения условных экстремальных задач по методу Лагранжа.

Вычислим вначале абсолютный экстремум (максимум) функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, не обращая внимания на условия, ограничивающие область изменения переменных, и проверим, удовлетворяют ли координаты точки, на которой достигается экстремум, условиям (1.2), (1.3). Найденная точка оказывается решением задачи, если эти условия выполняются. Если по крайней мере одно из условий (1.2), (1.3) не удовлетворяется, следует, пользуясь правилом Лагранжа, вычислить относительный экстремум функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ при одном условии-равенстве и проверить, удовлетворяют ли значения аргументов, при которых достигается условный экстремум, остальным условиям задачи. Проведем аналогичные вычисления, предполагая, что решение задачи обращает в равенства любое другое условие из системы (1.2), (1.3), любую пару условий, любую тройку условий и т. д. Во всех случаях, когда точка, на которой достигается экстремум, попадает в область, определяемую условиями (1.2), (1.3), вычислим соответствующие значения показателя качества решения задачи — функции $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Легко видеть, что намеченный путь решения задач математического программирования требует (даже при относительно малом числе ограничений) исследования огромного количества условных экстремальных задач. В общем случае решение каждой такой задачи сводится к достаточно трудоемким расчетам. Существующие вычислительные методы и современные вычислительные машины заставляют признать, что решение задач вида (1.1)—(1.3) методами классического анализа практически нереализуемо. Отсюда необходимость в разработке специальных методов решения задач математического программирования.

1.3. В зависимости от свойств функций f и g_i математическое программирование разделяется на ряд частных, в различной мере разработанных дисциплин. Наиболее простые разделы математического программирования являются уже завершенными математическими дисциплинами с четко отработанными методами решения задач, доведенными до вычислительных схем. В более сложных случаях методы решения задач только намечаются. Имеются и такие классы задач математического программирования, исследование которых до сих пор привело лишь к некоторым качественным результатам.

Задачи и методы математического программирования можно классифицировать по различным признакам.

В зависимости от вида показателя качества решения задачи и ограничений математическое программирование делится на *линейное* и *нелинейное программирование*. В задачах линейного программирования функции f и g_i линейно зависят от переменных x_j.

Из нелинейных условных экстремальных задач выделяются задачи *выпуклого программирования*. В задачах выпуклого программирования требуется вычислить максимум вогнутой функции на выпуклом множестве *). Любой локальный максимум вогнутой функции, заданной на выпуклом множестве, является ее глобальным максимумом на том же множестве. На этом положении основаны все методы решения задач выпуклого программирования.

Решение задач выпуклого программирования упрощается, если ограничения (1.2) могут быть представлены в виде линейных равенств или неравенств.

Среди задач выпуклого программирования подробнее других исследованы задачи *квадратичного программирования*, в которых требуется вычислить вектор $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий линейным равенствам и неравенствам и обращающий в максимум сумму квадратичной и линейной форм:

$$Q(x_1, \ldots, x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_ix_j+\sum_{j=1}^{n} c_jx_j.$$

При этом предполагается, что квадратичная форма неположительно определена (т. е. Q — вогнутая функция).

Естественно, что во всех предыдущих постановках можно заменить требование максимизации функции требованием минимизации. Однако в этом случае предположение о вогнутости показателя качества следует заменить допущением о его выпуклости.

Невыпуклые задачи нелинейного программирования изучены весьма слабо.

В зависимости от того, являются ли исходные параметры задачи вполне определенными числами или случайными величинами, можно разделить математическое программирование на разделы, изучающие оптимальные методы планирования и управления в условиях *полной информации* и в условиях *неопределенности*. Анализ некоторых классов задач математического программирования в условиях неопределенности (так называемое *стохастическое программирование*) сводится к использованию выпуклого программирования.

В задачах управления и планирования решения, принятые на одном этапе, часто существенно ограничивают свободу

*) Определение выпуклой и вогнутой функций и выпуклого множества приведены в § 3 Дополнения.

выбора на последующих этапах. В соответствии с этим целесообразно делить задачи и методы математического программирования на *одноэтапные* и *многоэтапные* или на *статические* и *динамические*.

Возможны и другие принципы классификации разделов математического программирования. В каждом из разделов в свою очередь по разным признакам выделяются классы задач, требующие специальных методов решения. Так, например, широкий класс задач связан с использованием некоторых стандартов. Искомые параметры управления в таких задачах по своему физическому смыслу могут принимать лишь ограниченное число дискретных значений. Исследование подобных задач, связанное с определенными трудностями, вызвало к жизни так называемое *целочисленное программирование*. Целочисленное программирование приобретает особый интерес, потому что многие нелинейные невыпуклые задачи математического программирования могут быть сведены к задачам линейного программирования с дополнительным требованием целочисленности решения.

В ряде случаев исходные параметры задачи могут изменяться в некоторых пределах. В связи с актуальностью исследования влияния вариации параметров показателя качества и ограничений на решение задачи появились работы по так называемому *параметрическому программированию*.

Практические задачи математического программирования с весьма большим числом переменных и ограничений часто не умещаются в оперативной памяти современных цифровых вычислительных машин. Возникла необходимость в развитии нового направления — *блочного программирования*, изучающего возможности получения точного или приближенного решения задачи большого размера по решениям ряда частных задач с меньшим числом переменных и ограничений.

Изучение особенностей специальных классов задач, важных для приложений, привело к ряду интересных результатов как качественного, так и количественного характера. Однако бо́льшая часть этих результатов разрознена и не объединена до сих пор единой методологией.

1.4. В заключение параграфа целесообразно привести некоторые замечания по постановке задач математического программирования.

Математический анализ применяется не к реальным явлениям, а к некоторым математическим моделям этих явлений. Такие абстрактные модели, естественно, охватывают не все, а лишь важнейшие для данной задачи стороны явления. Наиболее квалифицированная и ответственная работа при постановке задачи заключается в выборе характеристик явления, наиболее существенных для данной задачи и подлежащих формализации и включению в математическую модель.

Изучаемые явления не изолированы. Они связаны и взаимодействуют с другими явлениями природы и жизни, возможно, не представляющими интереса для рассматриваемой задачи. При постановке задачи следует решить, какими связями можно пренебречь и какие связи следует заменить теми или иными ограничениями на выбор искомых параметров. В зависимости от того, насколько тщательно проведена эта часть работы, определяется целесообразность применения сложного математического аппарата для анализа задачи и практическая польза от ее решения.

При формализации задачи управления и планирования следует уделить особое внимание выбору показателя качества решения соответствующей задачи математического программирования. Обычно к искомому методу управления или плану предъявляют самые разнообразные, порою противоречивые, требования. Как правило, нельзя указать план (или метод управления), на котором достигались бы экстремумы различных показателей. Анализ целей, для достижения которых проводится планирование, должен выявить важнейший показатель, подлежащий оптимизации, и допустимые границы изменения остальных показателей. Оптимизируемая характеристика — это показатель качества решения. Допустимые границы изменения других характеристик решения определяют дополнительные ограничения задачи.

Важным этапом в постановке задачи является выбор переменных, которые следует принять в качестве параметров управления. При выборе переменных желательно обеспечить возможно более простой вид условий и показателя качества. От удачного выбора параметров управления существенно зависит трудоемкость решения задачи.

Задачи математического программирования и, в частности, задачи линейного программирования, к которым сводятся практические проблемы планирования и управления, как правило, имеют дело с большим числом переменных и ограничений. При построении математических моделей исследуемых явлений, особенно в тех случаях, когда эти явления изучаются впервые, не всегда удается сразу сформулировать и записать все условия, которые должны ограничивать область изменения переменных задачи. Некоторые факторы и ограничения, представляющиеся естественными, предполагаются само собой подразумевающимися и специально не оговариваются. Если решение задачи производится не формально, то рассуждения в терминах конкретного приложения обычно приводят к тому, что задача в процессе решения обрастает дополнительными ограничениями, вытекающими из ее физической сущности. Однако неформальное решение задачи возможно лишь при весьма малом числе переменных и ограничений. Практически задачи математического программирования, встречающиеся при планировании производства и отраслей народного хозяйства или при управлении техникой и боевыми операциями, сложны и далеко не всегда допускают умозрительный анализ. В таких случаях необходима тщательная формализация задачи и включение в математическую модель всех сколько-нибудь существенных ограничений, какими бы тривиальными они ни представлялись. Известны, например, случаи, когда при решении задачи о наиболее дешевой диете, обеспечивающей необходимые питательные вещества в требуемых количествах, были получены совершенно несъедобные рационы. Такой результат явился следствием того, что при составлении математической модели задачи не были учтены вкусовые характеристики диеты. Иногда встречаются случаи, когда при анализе задач математического программирования получают практически нереализуемые решения: при формализации задачи не были зафиксированы все лимитирующие фактóры, от которых зависит выбор искомых переменных. Часто необходимость учета дополнительных ограничений выясняется только после анализа причин нереализуемости решения задачи.

Процесс постановки и решения практических задач не всегда удается провести в один этап. Обычно количественный анализ решения указывает направление, в котором следует уточнить модель, чтобы она полнее отражала реальное явление. После предварительной постановки задачи целесообразно получить ее формальное решение для простейших случаев, для которых оптимальный план может быть получен (точно или приближенно) из физических соображений. Анализ отклонения формального решения от ожидаемого результата позволяет скорректировать постановку задачи или (это тоже иногда встречается) меняет наши представления о том, что следует считать естественным. При сравнении формальных решений с предполагаемыми результатами следует, однако, иметь в виду, что факторы, существенные в одном диапазоне изменения исходных параметров задачи, могут не играть сколько-нибудь заметной роли в другой области их изменения.

Учет дополнительных факторов, выявленных в процессе постановки задачи, может заставить изменить выбор параметров управления, подлежащих определению. Сколь угодно подробный учет ограничений на искомые переменные не приближает решения проблемы, если построенная математическая модель не может быть исследована существующими методами. Поэтому постановку серьезных задач математического программирования целесообразно проводить специалистам прикладных наук совместно с математиками.

§ 2. Предмет линейного программирования

2.1. Линейное программирование является наиболее разработанным разделом математического программирования. Круг вопросов и принципы решения задач линейного программирования достаточно четко сформулированы. Можно сказать, что в настоящее время линейное программирование представляет собой вполне оформившуюся дисциплину прикладной математики.

Предметом линейного программирования является вычисление экстремума (максимума или минимума) линейных показателей качества при условии, что переменные, подлежащие определению, удовлетворяют линейным равенствам или неравенствам. В терминах линейного программирования формулируется большое количество народнохозяйственных, технических, военных и других задач управления и планирования. Актуальность подобных задач определила усилия, направленные на развитие методов их решения.

Термин *линейное программирование* столь же неудачен, как и термин *математическое программирование*. Тем не менее мы будем пользоваться этим названием, поскольку его можно уже считать установившимся.

Подчеркнем только, что слово «программирование» употребляется здесь в смысле разработки методов решения экстремальных задач, а определение «линейное» указывает на линейность показателя качества и ограничений, наложенных на искомые переменные.

Общая задача линейного программирования формулируется следующим образом:

Требуется вычислить максимум линейной функции n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$L = L(x_1, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{2.1}$$

при ограничениях, наложенных на переменные $x_1, \ldots, x_n$, вида

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \ldots + a_{ln}x_n = b_l, \end{array}\right\} \tag{2.2}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{l+1,1}x_1 + a_{l+1,2}x_2 + \ldots + a_{l+1,n}x_n \leqslant b_{l+1}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n \leqslant b_r, \end{array}\right\} \tag{2.3}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, t \quad (t \leqslant n). \tag{2.4}$$

Линейную функцию (2.1) — показатель качества выбранных переменных — принято называть *линейной формой* задачи, а множество наборов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих условиям (2.2) — (2.4), — *областью определения* задачи или областью определения ее линейной формы.

Введем еще некоторые определения, которые будут далее уточнены применительно к различным формам записи задач линейного программирования *).

Матрицу коэффициентов

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rn} \end{array} \right\|$$

будем называть *матрицей условий* задачи.

*) Читатель, незнакомый с используемыми ниже понятиями линейной алгебры, найдет их изложение в Дополнении.

Столбцы матрицы условий — векторы коэффициентов при переменных x_j — назовем *векторами условий*

$$A_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{rj})^T.$$

(Символ T, знак транспонирования, указывает, что вектор A_j, компоненты которого выписаны в строку, является вектором-столбцом.)

Вектор, составляющие которого — правые части условий задачи, будем называть *вектором ограничений*

$$B = (b_1, b_2, \ldots, b_r)^T.$$

Введем обозначения

$$A'_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{lj})^T, \quad A''_j = (a_{l+1, j}, a_{l+2, j}, \ldots, a_{rj})^T,$$

и соответственно

$$B' = (b_1, b_2, \ldots, b_l)^T, \quad B'' = (b_{l+1}, b_{l+2}, \ldots, b_r)^T.$$

Тогда

$$A_j = (A'_j, A''_j),$$
$$B = (B', B''),$$

и задача (2.1)—(2.4) может быть переписана в следующем более компактном виде:

Требуется вычислить максимум линейной формы

$$L(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.5}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} A'_j x_j = B', \tag{2.6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} A''_j x_j \leqslant B'', \tag{2.7}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, t \leqslant n. \tag{2.8}$$

Вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий условиям (2.2)—(2.4) или, что то же самое, (2.6)—(2.8), будем называть *планом задачи*.

План $X^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$, обращающий в максимум линейную форму (2.1), называется *оптимальным планом* или *решением* задачи.

Термины *план* и *оптимальный план*, естественные для экономических приложений, сохранены для общей задачи линейного программирования.

В дальнейшем нам будет полезна матричная форма записи задач линейного программирования.

Введем матрицы

$$A' = (A_1', A_2', \ldots, A_n'),$$
$$A'' = (A_1'', A_2'', \ldots, A_n')$$

и векторы

$$C = (c_1, c_2, \ldots, c_n),$$
$$X' = (x_1, x_2, \ldots, x_t),$$
$$X'' = (x_{t+1}, \ldots, x_n),$$
$$X = (X', X'')^T.$$

Общая задача линейного программирования в новых обозначениях формулируется следующим образом:

Требуется вычислить вектор $X = (X', X'')^T$, обращающий в максимум линейную форму

$$L(X) = CX \tag{2.9}$$

при условиях

$$A'X = B', \tag{2.10}$$
$$A''X \leqslant B'', \tag{2.11}$$
$$X' \geqslant 0. \tag{2.12}$$

Изложение методов и алгоритмов линейного программирования будет производиться в дальнейшем главным образом для задач, в которых требуется вычислить максимум линейной формы. Ясно, что это допущение не ограничивает общности изложения. Задача, в которой следует вычислить минимум линейной формы, сводится к определению максимума линейной формы, если изменить знаки всех коэффициентов c_j на противоположные.

При анализе системы условий (2.2)—(2.4) могут представиться три случая:

а) условия (2.2)—(2.4) противоречивы, т. е. не существует набора чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющих всем условиям задачи;

б) условия (2.2)—(2.4) совместны, но область, определяемая ими, неограничена, т. е. существуют наборы чисел

$x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющие системе (2.2)—(2.4) и содержащие отдельные переменные со сколь угодно большими значениями;

в) система условий (2.2)—(2.4) совместна и область, определяемая ею, ограничена.

Введем понятие разрешимости задачи, важное для последующего изложения.

Задача линейного программирования называется *разрешимой*, если существует набор чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(x_j < \infty)$, удовлетворяющий всем ограничениям (2.2)—(2.4) и обращающий линейную форму (2.1) в максимум или минимум (в зависимости от постановки задачи).

Неразрешимость задачи может быть обусловлена либо противоречивостью условий задачи (случай *а*), либо неограниченностью области определения линейной формы (случай *б*). В последнем случае неразрешимость задачи связана с неограниченностью линейной формы в области ее определения. Заметим, что случай *б* не обязательно приводит к неразрешимой задаче. Линейная форма может быть ограничена и в неограниченной области.

2.2. Дальше (гл. 2) будет показано, что область определения линейной формы задачи линейного программирования представляет собой выпуклое многогранное множество в n-мерном пространстве переменных x_j, и экстремум линейной формы достигается в его вершинах, число которых конечно. Координаты вершин многогранного множества условий задачи удовлетворяют линейно независимым ограничениям вида (2.3)—(2.4) как равенствам. Поэтому теоретически возможный путь решения задачи математического программирования, намеченный в п. 1.2, значительно упрощается в линейном случае. Отпадает необходимость в отыскании экстремумов задачи при $1, 2, \ldots, n-1$ ограничениях-равенствах. Координаты экстремальной точки в задачах линейного программирования всегда удовлетворяют n независимым условиям-равенствам. Однако и в задачах линейного программирования теоретически возможный путь практически нереализуем. Уже при относительно небольших n, r и t (случаи, к которым сводятся сравнительно простые практические задачи) количество вершин соответствующего многогранного множества исчисляется многими миллиардами. Это значит, что неупорядоченный перебор вершин с целью выявления точки, в которой линейная форма достигает своего наибольшего или наименьшего значения, является практически невыполнимой задачей, даже для самых быстродействующих современных вычислительных машин.

Чтобы оценить трудоемкость вычислений, связанных с неупорядоченным перебором вершин, сошлемся на одну из классических задач линейного программирования — на проблему выбора, для которой легко подсчитывается число вершин соответствующего многогранного множества. Суть проблемы выбора в следующем. Задана квадратная таблица с n строками и n столбцами. Требуется выбрать по одному элементу в каждой строке и в каждом столбце так, чтобы сумма их оказалась максимальной. Эта задача, имеющая самые разнообразные практические приложения, оказывается задачей линейного программирования. Количество вершин соответствующего многогранного множества (в проблеме выбора оно ограничено и является, следовательно, многогранником) равно $n!$

Таким образом, непосредственное решение проблемы выбора связано со сравнением $n!$ величин. Для вычисления значения линейной формы в каждой из вершин многогранника задачи необходимо произвести n сложений. При $n > 15$ количество операций, необходимое для решения задачи, нельзя провести за обозримый срок ни на современных, ни на перспективных вычислительных машинах.

По формуле Стирлинга

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

При $n = 20$ число вершин многогранника условий задачи $n!$ превысит $2 \cdot 10^{18}$. Машине, выполняющей 10 миллионов операций в секунду (таких машин пока еще нет), потребуется более 5000 лет, чтобы перебрать вершины многогранника, определяемого этой относительно простой задачей.

При $n = 30$ число вершин области определения проблемы выбора превысит 10^{31}. По-видимому, легче пересчитать все песчинки на земном шаре, чем перебрать вершины многогранника условий этой задачи.

Практика требует решения задач типа проблемы выбора для значений n, значительно превышающих 20 и 30. Приведенные примеры дают ясное представление о необходимости специальных методов решения задач линейного программирования.

Как мы увидим далее, различные методы решения задач линейного программирования представляют собой те или иные рекомендации по упорядочению перебора вершин многогранного множества, определяемого условиями данной задачи или некоторой другой задачи, связанной с исходной. Каждому методу линейного программирования соответствует признак оптимальности вершины. Признак оптимальности позволяет установить, достигается ли в данной вершине экстремум линейной формы, не сравнивая между собой значения L во всех вершинах многогранного множества. Наличие признаков оптимальности является следствием того, что в задачах линейного программирования не существует локальных экстремумов, не являющихся в то же время глобальными.

Если рассматриваемая вершина не соответствует экстремуму линейной формы, следует перейти к новой вершине. Методы линейного программирования обеспечивают переход к вершине, более близкой к экстремальной, чем предыдущая. Методы линейного программирования позволяют также установить неразрешимость задачи, если она имеет место.

Интересно отметить, что при упорядоченном переборе вершин решение проблемы выбора требует порядка n^3 элементарных операций. Существующие вычислительные машины потратят менее минуты для решения проблемы выбора при $n=20$ и 30.

§ 3. Задачи линейного программирования

В этом параграфе будут кратко разобраны некоторые практические задачи, укладывающиеся в модель (2.1)—(2.4).

В п. 3.1 в задаче об *организации снабжения* выделены характерные случаи, в которых решение задачи линейного программирования не требует специальных методов и громоздких вычислений.

В п. 3.2 описана важная частная задача линейного программирования, так называемая *транспортная задача*. Транспортная задача представляет собой естественное обобщение задачи организации снабжения центра однородным продуктом.

В п. 3.3 приведена постановка задачи о *рациональном выборе системы вооружения*. Перевод критерия качества и ограничений на формальный язык здесь сразу приводит к задаче вида (2.1)—(2.4). В отличие от этого, задача *о планировании производства сложного оборудования*, описанная в п. 3.4, сводится к задаче линейного программирования только после некоторых (правда, несложных) искусственных построений.

3.1. Рассмотрим задачу о рациональной организации снабжения промышленного центра однородным продуктом, например, картофелем или углем. Продукт может привозиться в центр из n пунктов.

Пусть x_i — количество продукта, поставляемое в центр из i-го пункта, а c_i — суммарная стоимость производства и перевозки единицы продукта из i-го пункта. Тогда стоимость продукта, доставленного из i-го пункта в центр, равна $c_i x_i$, а стоимость продукта, привезенного в центр из всех пунктов производства, равна

$$L = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n. \tag{3.1}$$

Требуется организовать снабжение (выбрать x_i) таким образом, чтобы обеспечить минимальную стоимость продукта в центре. При этом необходимо учесть следующие условия: потребность центра в продукте определяется величиной b; она должна быть удовлетворена; излишков не должно быть. Следовательно, искомые переменные должны подчиняться условию

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = b. \tag{3.2}$$

Производство продукта в i-м пункте ограничено величиной b_i, а пропускная способность транспорта, который может быть использован для перевозки продукта из i-го пункта, ограничена величиной d_i.

Обозначим через β_i меньшее из двух чисел b_i и d_i:

$$\beta_i = \min(b_i,\ d_i), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Искомые переменные x_i должны, таким образом, удовлетворять ограничениям

$$x_i \leqslant \beta_i, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{3.3}$$

Кроме того, значения x_i должны быть неотрицательны, так как перевозки продукта из центра в пункты производства этого продукта исключены:

$$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.4}$$

Если перевозки из i-го пункта могут быть обеспечены двумя видами транспорта, то i-й пункт целесообразно рассматривать как два пункта с разной стоимостью продукта.

Таким образом, мы пришли к задаче линейного программирования. Необходимо обратить в минимум линейную форму L (3.1) при линейных условиях (3.2)—(3.4).

Сформулированная задача обладает особенностью, позволяющей без труда вычислить значения x_i, при которых будет обеспечена минимальная стоимость продукта в центре.

Очевидно, выгодно получать возможно больше продукта из тех пунктов, для которых величина c_i (стоимость производства и перевозки единицы продукта) мала. Перенумеруем пункты производства в порядке возрастания коэффициентов c_i. Предположим, что это уже сделано и

$$c_1 \leqslant c_2 \leqslant \ldots \leqslant c_n.$$

По условию из первого пункта (откуда поставляется наиболее дешевый продукт) центр может получить не более β_1 единиц продукта. Если общая потребность центра, измеряемая величиной b, не превышает возможностей первого пункта, т. е. если $b \leqslant \beta_1$, то рациональнее всего удовлетворить весь спрос только за счет первого пункта. В этом случае

$$x_1 = b, \quad x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0.$$

Если же $b > \beta_1$, то целесообразно обеспечить максимально возможную поставку из первого пункта ($x_1 = \beta_1$), а оставшуюся часть потребностей ($b - \beta_1$) удовлетворить за счет других пунктов производства.

Мы пришли, таким образом, к задаче организации снабжения, аналогичной предыдущей, с тем лишь различием, что потребность центра определяется теперь величиной $b - \beta_1$, а число пунктов производства равно $n-1$. Здесь снова могут представиться два случая. В первом случае $b - \beta_1 \leqslant \beta_2$. Тогда рациональная система снабжения определяется величинами

$$x_2 = b - \beta_1, \quad x_3 = x_4 = \ldots = x_n = 0$$

($x_1 = \beta_1$ определено ранее).

Во втором случае, когда $b - \beta_1 > \beta_2$, целесообразно положить $x_2 = \beta_2$ и перейти к новой задаче снабжения с меньшим числом пунктов производства $(n-2)$ и меньшими потребностями центра $(b_1 - \beta_1 - \beta_2)$.

Приведенные рассуждения подсказывают следующий путь решения задачи.

Из величины b последовательно вычитаются числа β_1, β_2, ... Могут встретиться два случая:

$$а)\ b - \beta_1 - \beta_2 - \ldots - \beta_n > 0;$$
$$б)\ b - \beta_1 - \beta_2 - \ldots - \beta_n \leqslant 0.$$

В первом случае невозможно полностью удовлетворить потребности центра. Спрос превышает суммарную возможность поставок продукта из всех пунктов производства.

Во втором случае спрос может быть полностью удовлетворен.

Определим индекс k из условия

$$b - \beta_1 - \ldots - \beta_k \geqslant 0,$$
$$b - \beta_1 - \ldots - \beta_k - \beta_{k+1} < 0.$$

Тогда рациональная система снабжения определяется следующими соотношениями:

$$x_1 = \beta_1, \quad x_2 = \beta_2, \quad \ldots, \quad x_k = \beta_k;$$
$$x_{k+1} = b - \beta_1 - \beta_2 - \ldots - \beta_k; \quad x_{k+2} = \ldots = x_n = 0.$$

Таким образом, в оптимальном плане снабжения возможности первых k пунктов используются полностью, а последние $n - (k+1)$ пунктов в план поставок не включаются вовсе.

Как видим, для решения рассмотренной задачи потребовались лишь элементарные соображения. К сожалению, это не правило, а скорее исключение в задачах линейного программирования. Простота решения здесь является следствием того, что условия задачи содержат только одно ограничение, связывающее все переменные. Все остальные условия ограничивают только область изменения каждой из переменных в отдельности.

Усложним теперь задачу о снабжении промышленного центра однородным продуктом, включив в нее дополнительное ограничение.

Пусть, например, время, в течение которого транспорт, предназначенный для перевозки продукта, может находиться под погрузкой, ограничено, а механизация погрузочных работ в разных пунктах производства различна. Обозначим через a_i время, затрачиваемое в i-м пункте на погрузку одной транспортной единицы, а через T — ограничение по сумме времен, затрачиваемых всем транспортом на погрузочные работы. Естественно считать, что количество транспортных единиц y_i, потребное для перевозки продукта из i-го пункта, пропорционально объему перевозимого продукта. Простой транспорта в i-м пункте производства измеряется величиной $a_i y_i = \alpha a_i x_i$, а суммарный простой транспорта равен $\alpha(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n)$.

Задача об организации снабжения формулируется теперь следующим образом. Необходимо обратить в минимум линейную форму L (3.1) при условиях (3.2) — (3.4) и дополнительном ограничении

$$\alpha(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n) \leqslant T.$$

Рассуждения, подобные предыдущим, уже не приводят к решению. В этом случае, и тем более при необходимости учета новых ограничений, планирование снабжения требует специальных методов, совокупность которых составляет содержание линейного программирования.

Рассмотрим, например, задачу об организации снабжения неоднородными продуктами, скажем, овощами или топливом. В этом случае могут быть указаны минимальные и предельные потребности в каждом отдельном продукте, например, отдельно по картофелю и капусте (или углю и нефти) и условия взаимозаменяемости. Взаимозаменяемость должна быть охарактеризована коэффициентом, указывающим, сколько единиц одного продукта эквивалентно единице другого. Понятие эквивалентности в разных конкретных задачах может определяться по-разному. В рассматриваемой задаче при оценке взаимозаменяемости продуктов можно исходить, например, из калорийности овощей (или топлива).

Сохраняя обозначения, принятые для случая однородного продукта, приведем математическую формулировку задачи.

Требуется обратить в минимум линейную форму

$$L = c_1^{(1)} x_1^{(1)} + \ldots + c_n^{(1)} x_n^{(1)} + c_1^{(2)} x_1^{(2)} + \ldots + c_n^{(2)} x_n^{(2)}$$

при условиях:

$$b_{\min}^{(1)} \leqslant x_1^{(1)} + \ldots + x_n^{(1)} \leqslant b_{\max}^{(1)},$$

$$b_{\min}^{(2)} \leqslant x_1^{(2)} + \ldots + x_n^{(2)} \leqslant b_{\max}^{(2)},$$

$$0 \leqslant x_i^{(1)} \leqslant \beta_i^{(1)},$$

$$0 \leqslant x_i^{(2)} \leqslant \beta_i^{(2)},$$

$$\mu_1 (x_1^{(1)} + \ldots + x_n^{(1)}) + \mu_2 (x_1^{(2)} + \ldots + x_n^{(2)}) = \mu.$$

Верхний индекс здесь означает номер продукта. Если некоторые из n пунктов являются пунктами производства только одного из рассматриваемых продуктов, то соответствующие значения $x_i^{(s)}$ заранее полагаются равными нулю. Последнее равенство в системе условий представляет собой условие взаимозаменяемости. Оно может быть истолковано, например, следующим образом: $\mu_1 (x_1^{(1)} + \ldots + x_n^{(1)})$ — количество калорий, которое можно получить, сжигая $x_1 + \ldots + x_n$ тонн угля, $\mu_2 (x_1^{(2)} + \ldots + x_n^{(2)})$ — теплотворность доставленной нефти, а μ — требуемое количество теплоты. Конечно, не представляет никакого труда обобщение постановки задачи на случай снабжения нескольких центров произвольным количеством неоднородных продуктов.

3.2. Задача снабжения n пунктов потребления однородным продуктом из m пунктов производства, известная в литературе под названием *транспортной задачи*, представляет собой одно из первых приложений линейного программирования. К формальной схеме транспортной задачи сводится большое количество экономических и военных задач. Сущность транспортной задачи состоит в следующем.

Имеется m пунктов производства однородного продукта $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Объем производства пункта A_i равен a_i единиц продукта. Весь произведенный продукт потребляется в n пунктах потребления $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Объем потребления пункта B_j равен b_j единиц продукта.

Требуется организовать снабжение пунктов B_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) из пунктов A_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) так, чтобы суммарные транспортные издержки были минимальными. Предполагается, что могут быть организованы перевозки из любого пункта производства в любой пункт потребления, а транспортные издержки пропорциональны объему перевозки. План перевозок должен предусматривать удовлетворение потребностей всех пунктов спроса и не допускать затоваривания пунктов производства. При этом производство и потребление, естественно, предполагаются сбалансированными, т. е. суммарный объем производства совпадает с суммарным объемом потребления.

Формальное описание задачи требует следующих обозначений. Пусть x_{ij} — количество единиц продукта, подлежащих перевозке из i-го пункта производства в j-й пункт потребления, а c_{ij} — расходы, связанные с перевозкой одной единицы продукта из A_i в B_j.

В транспортной задаче требуется выбрать такие значения переменных x_{ij}, чтобы суммарные расходы на перевозку

$$L=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

обратились в минимум при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m, \tag{3.5}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{3.6}$$

$$x_{ij}\geqslant 0. \tag{3.7}$$

Система условий (3.5) означает, что из пункта производства A_i ($i=1,\ 2,\ \ldots,\ m$) вывозится во все пункты потребления a_i единиц продукта — величина, равная объему производства пункта A_i.

Условия (3.6) означают, что в пункт потребления B_j ($j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$) поставляется из всех пунктов производства b_j единиц продукта — величина, равная объему потребления в пункте B_j.

Система неравенств (3.7) означает, что перевозки осуществляются только из пунктов производства в пункты потребления; обратных перевозок нет.

В приведенной постановке содержится требование баланса производства и потребления. Суммируя систему равенств

(3.5) по i и систему (3.6) по j, получаем

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Транспортная задача является одной из наиболее важных задач линейного программирования. Специфика условий транспортной задачи позволила существенно упростить применительно к ней общие методы решения линейных экстремальных задач.

3.3. Приведенная ниже постановка задачи о выборе системы вооружения представляет собой некоторое видоизменение рассуждений, изложенных в статье [80].

Для выполнения однотипных задач (например, для уничтожения однотипных целей) может быть использовано оружие различных классов. Требуется вычислить, в каком количестве следует производить комплексы оружия разных классов, чтобы обеспечить максимальную эффективность оружия при заданных ресурсах и ограниченных затратах. К такой постановке приводит, например, задача о распределении средств между заказами на производство тактической авиации разных типов, самолетов-снарядов и неуправляемых ракет оперативно-тактического назначения. Эту же задачу легко формулировать в терминах, связанных с выбором системы противотанкового вооружения или средств противовоздушной обороны.

Одно из основных допущений, принимаемых в настоящей постановке задачи, заключается в том, что каждый комплекс действует только по своей группе целей.

Обозначим через x_j число комплексов оружия j-го типа, а через p_j — среднее число целей, поражаемых одним средством j-го типа. При принятом допущении показатель качества системы вооружения — математическое ожидание числа уничтоженных целей — может быть записан в виде

$$M = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n. \tag{3.8}$$

Обозначим стоимость одного комплекса j-го типа через r_j. Тогда ограничение количества комплексов, определяемое допустимыми расходами (b) на систему вооружения, может быть представлено следующим образом:

$$r_1x_1 + r_2x_2 + \ldots + r_nx_n \leqslant b. \tag{3.9}$$

Комплекс вооружения — сложная система, производство которой ограничено не только возможными капиталовложениями, но и необходимостью использовать специальную аппаратуру и материалы, количество которых лимитировано.

Необходимость в тех или иных факторах (сырье, станочный парк, рабочая сила и т. д.) для комплексов различных типов различна. Пусть a_{ij} — количество единиц i-го фактора, необходимое для производства одного комплекса вооружения j-го типа, а b_i — ограничение по этому фактору. Тогда дополнительные условия, которым следует подчинить выбор x_j, записываются в виде

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n \leqslant b_s. \end{array}\right\} \tag{3.10}$$

Здесь s — количество лимитирующих факторов.

Кроме перечисленных условий, ограничения по производству вооружения различного типа устанавливаются условиями хранения и эксплуатации, наличием или возможностью подготовки того или иного количества квалифицированного обслуживающего персонала и т. д. Таким образом, некоторые из искомых переменных (пусть это будут первые k из них) ограничены еще одной системой условий вида

$$x_j \leqslant \alpha_j, \quad j = 1, 2, \ldots, k \leqslant n. \tag{3.11}$$

Ну и, конечно, все переменные (количество комплексов вооружения того или иного типа) должны принимать неотрицательные значения, т. е.

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.12}$$

Вообще говоря, физический смысл искомых переменных требует выполнения еще одного условия — величины x_j должны быть целыми числами. Однако нарушение этого требования в задачах подобного рода при немалых значениях x_j не приводит, как правило, к существенным отклонениям от оптимума. При дробных x_j в качестве решения задачи следует принимать ближайшие к ним целые числа.

Как видим, выбор рациональной системы вооружения сводится к обращению в максимум значения линейной формы

(3.8) при линейных условиях (3.9)—(3.12). Это — задача линейного программирования.

Если выбор системы вооружения был бы ограничен только условиями (3.9), (3.11) и (3.12), то решение задачи можно было бы получить из тех же простых соображений, что и в предыдущем пункте. В общем же случае требуются более трудоемкие методы.

3.4. Рассмотрим задачу о *планировании производства сложного оборудования*, состоящего из n элементов. Это может быть, например, система, состоящая из n приборов, или прибор из n деталей и т. д.

Заказы могут быть размещены на m различных предприятиях с различным станочным парком и разными возможностями. Требуется выяснить, какое распределение заказов между предприятиями обеспечит производство наибольшего количества комплектных систем в установленный срок. К аналогичным задачам приходим и тогда, когда речь идет о производстве одного прибора, изготовление деталей которого может быть распределено между различными станками предприятия или цеха. Рациональная загрузка оборудования должна обеспечить максимальный выпуск приборов.

Примем за единицу времени время, на которое рассчитана вся программа работы. Пусть в единицу времени на i-м предприятии (на i-м станке) можно изготовить a_{ij} элементов оборудования j-го типа. Допустим, что все $a_{ij} > 0$, т. е. что каждую деталь можно обрабатывать на любом станке. Обозначим через x_{ij} время, в течение которого i-й исполнитель (предприятие или станок) загружен изготовлением элементов j-го типа. Число j-х деталей, выпускаемых всеми исполнителями в единицу времени, равно

$$a_{1j}x_{1j} + a_{2j}x_{2j} + \ldots + a_{mj}x_{mj}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.13}$$

Сдаче подлежат только готовые комплекты продукции. Количество комплектов оборудования, которое можно собрать из изготовленных деталей, лимитируется элементами того типа, которых произведено меньше всего. Иными словами, число комплектов L, собранных в единицу времени, равно наименьшему из чисел (3.13), вычисленных для различных j:

$$L = \min_j \left[a_{1j}x_{1j} + a_{2j}x_{2j} + \ldots + a_{mj}x_{mj}\right].$$

Заказы будут размещены рационально и оборудование будет наилучшим образом загружено, если промежутки времени x_{ij} будут подобраны так, что ни одно предприятие (ни один станок) не будет простаивать, а величина L достигнет максимума. На формальном языке это значит, что необходимо обратить в максимум L при условиях

$$\left.\begin{array}{c} x_{i1}+x_{i2}+\ldots+x_{in}=1, \\ x_{ij}\geqslant 0, \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m, \quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \end{array}\right\} \qquad (3.14)$$

Первая группа условий требует, чтобы сумма времен, потраченных каждым исполнителем на изготовление элементов оборудования, равнялась единице, т. е. времени, на которое рассчитана вся программа работы. Это означает, что предприятия (станки) не должны иметь холостого времени.

Вторая группа условий означает, что время загрузки любого исполнителя любым изделием не может быть отрицательным.

Задача на максимум минимума, к которой мы пришли, легко сводится к обычной задаче линейного программирования. Действительно, нетрудно заметить, что максимальное количество комплектов оборудования может быть произведено только в том случае, если загрузка исполнителей обеспечивает производство одинакового количества деталей (элементов оборудования) всех типов, т. е. решение задачи обязательно удовлетворяет условиям

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_{i1}=\sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_{i2}=\ldots=\sum_{i=1}^{m} a_{in}x_{in}.$$

Действительно, если бы это было не так и хотя бы одна из этих сумм оказалась больше других, то при $a_{ij}>0$ за счет ее небольшого уменьшения можно было бы, не нарушая ограничения (3.14), увеличить минимальную сумму и повысить таким образом количество комплектов. Но это означало бы, что выбрана не лучшая система размещения заказов и загрузки оборудования.

Следовательно, изложенная задача может быть сформулирована еще и так:

Требуется обратить в максимум линейную форму

$$L=a_{11}x_{11}+a_{21}x_{21}+\ldots+a_{m1}x_{m1}$$

при условиях

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} + \ldots + a_{m1}x_{m1} &= \\
&= a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} + \ldots + a_{m2}x_{m2} = \\
&= a_{13}x_{13} + a_{23}x_{23} + \ldots + a_{m3}x_{m3} = \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= a_{1n}x_{1n} + a_{2n}x_{2n} + \ldots + a_{mn}x_{mn},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = 1, \\
x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = 1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = 1, \\
x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n.
\end{gathered}
$$

Мы пришли к задаче линейного программирования.

§ 4. Краткая историческая справка

Математическое программирование возникло из практических потребностей несколько более двух десятков лет назад.

Наиболее развитой и законченной областью математического программирования является линейное программирование. Отдельные работы, касающиеся частных вопросов линейного программирования, относятся еще к началу 30-х годов. Например, в 1931 г. в Венгрии была опубликована статья Эгервари [123], посвященная проблеме выбора — частному случаю транспортной задачи. Интересно заметить, что в дальнейшем на основе результатов этой статьи рядом авторов был разработан весьма эффективный метод решения транспортной задачи (см. [70], [71], [111], [112]). В литературе этот метод получил название *венгерского*.

Термин *линейное программирование* появился в Америке в середине 40-х годов (первая американская работа по частной задаче линейного программирования опубликована в 1941 г. [116]). В Советском Союзе исследования в этой области начались ранее. В конце 30-х годов целый ряд существенных результатов по линейному программированию был установлен Л. В. Канторовичем ([61], [62], [66] *)). В частности, в работе [61] была высказана и применена к ряду частных задач чрезвычайно плодотворная идея — идея разрешающих множителей, тесно связанная с проблемой двойственности в линейном программировании.

В терминах разрешающих множителей весьма удобно формулировать условия (критерии) оптимальности линейных задач. Сово-

*) Работа [66], опубликованная в 1949 г., была выполнена Л. В. Канторовичем и М. К. Гавуриным в 1940 г. Ее выходу в свет помешала война. В статье [63], относящейся к 1942 г., имеется ссылка на эту работу.

купность алгоритмов, использующих разрешающие множители, иногда объединяют одним названием — *метод разрешающих множителей*. В работе [61] была намечена одна из реализаций метода разрешающих множителей, связанная с движением по границе конуса исследуемой задачи (*метод последовательного сокращения невязок*). В той же работе указана геометрическая интерпретация задач линейного программирования. Геометрическое описание метода сокращения невязок было дано в работах Г. Ш. Рубинштейна ([94], [95]).

В 1956 г. Данциг, Форд и Фулкерсон ([52]) на основе упомянутого выше венгерского метода разработали общий метод линейного программирования, который лишь в незначительных деталях отличается от метода, предложенного Л. В. Канторовичем в [61]. В совместной работе Л. В. Канторовича и М. К. Гавурина [66] была предложена применительно к транспортной задаче еще одна реализация метода разрешающих множителей, связанная с движением изнутри конуса задачи (*метод потенциалов*).

Первая американская работа по общим вопросам линейного программирования [40] опубликована Данцигом в 1949 г. В ней изложены основные идеи *метода последовательного улучшения плана* (первый алгоритм) применительно к невырожденным задачам линейного программирования. Метод Данцига фигурирует часто в литературе под названием *симплексный метод* (или *симплекс-метод*). Метод, близкий к симплексному, применительно к задачам наилучшего чебышевского приближения, был предложен С. И. Зуховицким (см. [58], [59] и [60]).

Чарнес в [117] указал прием, позволяющий применять метод улучшения плана и в вырожденных случаях (см. также Данциг, Орден и Вулф [50]).

Метод улучшения плана, связанные с ним вычислительные схемы и различные модификации метода рассматривались в дальнейшем Данцигом и рядом других авторов ([41], [50], [51], [78], [85] и [14]).

В 1954 г. Лемке ([73]) был предложен еще один общий метод линейного программирования — *метод последовательного уточнения оценок*. В методе Лемке решение двойственной задачи симплексным методом излагается в терминах исходной задачи. В зарубежной литературе этот метод называется *двойственным симплексным методом*.

К методу Лемке примыкает *метод ведущих переменных*, предложенный Билом в [5]. Известны также такие общие методы линейного программирования, как *градиентный* ([124]) и близкий к нему *метод логарифмического потенциала Фриша* ([113]), *метод двойного описания* [83], *релаксационный метод* Моцкина ([82]), *проекционный метод* Томкинса ([105]) и др. Эти методы менее эффективны, чем отмеченные выше три общих метода линейного программирования и их модификации.

Следует отметить также группу *итерационных методов*, заимствованных из численных методов решения прямоугольных игр. Замечательная связь между линейным программированием и теорией игр, установленная в [43], позволяет использовать для решения задач линейного программирования *метод Брауна* ([9], [91]), *метод Неймана* [84] и *метод дифференциальных уравнений*, предложенный Брауном и Нейманом [10]. Несколько в стороне от этих методов находится итеративный метод, разработанный Булавским [11].

Накопленный до сих пор опыт решения задач линейного программирования заставляет в большинстве случаев отдавать предпочтение конечным методам по сравнению с итерационными.

Качественным результатам и связи линейного программирования с теорией игр посвящены работы [43], [44], [49], [38], [104], [25] и [107].

Параллельно с общими методами линейного программирования создавались методы решения различных частных задач, таких, как транспортная задача, проблема выбора, задача коммивояжера, проблема расписаний, задача об оптимальном управлении ресурсами и др. Наиболее важные результаты по методам решения транспортной задачи и различным ее обобщениям опубликованы в работах [42], [66], [22], [76], [1] и [31], [132].

Известный интерес для приложений представляет обобщение общих и частных методов линейного программирования на задачи, переменные которых ограничены с обеих сторон и показатели качества решения которых представляют собой выпуклые кусочно-линейные функции ([119], [26], [130]). Разработанные для таких задач вычислительные схемы весьма близки к алгоритмам решения соответствующих линейных задач с односторонними ограничениями.

В последние годы опубликован ряд работ, посвященных задачам линейного программирования, переменные которых по своему физическому смыслу должны быть целыми числами. Наметилась даже тенденция выделения подобных задач в отдельное направление математического программирования, в так называемое *целочисленное программирование*. Основные результаты в этой области опубликованы в работах [46], [32], [79], [33], [34], [35].

Практические задачи линейного программирования содержат большое число переменных и ограничений. Объем вычислений, связанных с решением таких задач, может быть выполнен только на современных вычислительных машинах. Методика и техника вычислений на цифровых электронных машинах рассмотрена в работах [56] и [37]. Опыт решения задач линейного программирования на аналоговых моделях описан в [122].

В связи с ограниченной оперативной памятью современных машин возникла необходимость в так называемом *блочном программировании*. Здесь следует отметить работы [45] и [48].

При формализации задач управления и планирования далеко не всегда удается получить достаточную информацию, необходимую для однозначного определения параметров показателя качества и ограничений. Возникающие при этом трудности обходятся с трех направлений. Во-первых, исследуется влияние вариаций коэффициентов линейной формы и ограничений на оптимальность плана задачи линейного программирования ([81]). Во-вторых, в работах по так называемому параметрическому программированию ([18], [19]) разрабатываются методы, позволяющие без существенного увеличения трудоемкости вычислений указывать решение задачи для целого диапазона изменения одного или нескольких параметров, от которых определенным образом зависят коэффициенты линейной формы или ограничений. Наконец, в-третьих, создается новое направление математического программирования — *стохастическое программирование* или *программирование в условиях неопределенности*, в котором разрабатываются рациональные методы планирования при заданных статистических характеристиках параметров, определяющих условия задачи ([87], [47], [75]).

Линейное программирование — раздел прикладной математики. Однако работы по непрерывным аналогам линейного программирования ([53], [85], [68]) делают возможным применение идей линейного программирования в целом ряде разделов математики (теория наилучших приближений, теория моментов и др.). Приложению теории двойственности к теории наилучших приближений посвящены работы [114], [27], [28], [29], [30].

В Советском Союзе накопился достаточный опыт по применению линейного программирования к решению практических задач ([67], [55], [101], [99], [100] и [106]). Внедрению линейного программирования в экономические исследования в значительной мере способствовали книга Л. В. Канторовича [65] и сборники [97] и [98], изданные под редакцией В. С. Немчинова. Большое количество разнообразных приложений линейного программирования к задачам планирования производства и народного хозяйства было доложено на конференции по приложению математики к экономике, состоявшейся в Москве в апреле 1960 г. ([106]). За рубежом линейное программирование находит широкое применение в различных областях военного дела ([131], [77] и [80]) и экономики, в частности, в задачах цехового, заводского, внутрифирменного и торгового планирования. Обзор областей применения линейного программирования в США приведен в книге Гасса [18]. Здесь же приведен подробный перечень литературы по приложению линейного программирования к хозяйственным и военным задачам.

Значительно слабее развиты методы анализа нелинейных задач математического программирования.

Начало работам по нелинейному программированию положено исследованием Куна и Таккера ([72]), распространившим на нелинейные экстремальные задачи с условиями-неравенствами идеи множителей Лагранжа. Качественным вопросам нелинейного программирования посвящены также работы [102], [108], [103] и [127].

Численные методы нелинейного программирования развивались главным образом для отыскания локальных экстремумов. Естественно, что подобные методы представляют интерес в первую очередь для задач, в которых гарантируется совпадение локального и абсолютного экстремума.

Наиболее широкий класс задач максимизации на условный максимум, обладающий отмеченным свойством, это — задачи выпуклого программирования (задачи, в которых показатель качества — выпуклая кверху функция, а ограничения высекают в пространстве переменных задачи выпуклое множество). Такие задачи могут быть с любой заданной степенью точности аппроксимированы линейными задачами. Общим методам выпуклого программирования посвящены работы [125], [109], [126], [93], [57] и [7]. Подробнее других задач выпуклого программирования исследованы задачи квадратичного программирования, в которых максимизируется сумма неположительно определенной квадратичной и линейной форм, а ограничениями являются линейные равенства и неравенства ([8], [115], [16]). Имеется также ряд работ, в которых излагаются методы решения специальных задач выпуклого программирования. К таким задачам относятся, например, транспортная задача с нелинейной зависимостью затрат на перевозку от объема перевозимой продукции ([4], [120]). Алгоритмы, реализующие методы выпуклого программирования, существенно упрощаются, если показатель качества решения задачи оказывается суммой выпуклых функций от отдельных переменных ([119] и [26]).

Решение задач математического программирования с большим числом локальных экстремумов представляет большие трудности. До сих пор нет достаточно эффективных методов решения подобных задач. Известным продвижением в этой области является так называемый *овражный метод*, предложенный И. М. Гельфандом и М. Л. Цетлиным ([20]). Имеются также соображения по использованию методов Монте-Карло для решения задач математического программирования с большим количеством локальных экстремумов.

Нелинейные задачи с относительно небольшим числом переменных и ограничений могут быть исследованы с помощью электрических моделей ([54]).

Математическое программирование является новой быстро развивающейся дисциплиной. Результаты, методы и алгоритмы математического программирования зачастую разбросаны по различным журнальным статьям. Нередко новые направления в этой науке намечаются не в математических работах, а в прикладных изданиях. Поэтому приведенную здесь историческую справку нельзя считать достаточно полной. Читателю, желающему получить более полное представление об иностранной литературе по математическому программированию, следует обратиться к библиографии Роде [92], а также к аннотированным библиографиям в [90], [12]. Достаточно полная библиография содержится в [96].

§ 5. Каноническая форма задач линейного программирования

5.1. Все примеры, рассмотренные в § 3, укладываются в общий класс задач линейного программирования. Однако запись линейной формы и главным образом ограничений в разных задачах заметно различается. Можно указать много примеров, еще более увеличивающих разнообразие форм записи задач линейного программирования. В одних случаях искомые переменные зависят от одного индекса, в других примерах — от двух. В одних задачах ограничения имеют вид равенств, в других случаях условия являются неравенствами. Ряд практических задач сводится также к смешанным условиям: часть ограничений — линейные уравнения, другие — линейные неравенства. Не во всех задачах требуется неотрицательность всех переменных. Такое разнообразие форм записи условий задач требует разработки специальных методов для решения отдельных классов задач и затрудняет исследование общих особенностей линейного программирования и создание общих методов и вычислительных алгоритмов. Поэтому естественно рассмотреть способ сведéния любой задачи линейного программирования к единой, удобной для исследования форме.

Будем говорить, что задача линейного программирования записана в *канонической форме*, если она формулируется следующим образом.

Найти максимум (минимум) линейной формы

$$L=\bar{c}_1x_1+\ldots+\bar{c}_{\bar{n}}x_{\bar{n}}$$

при условиях

$$\begin{gathered}\bar{a}_{11}x_1+\ldots+\bar{a}_{1\bar{n}}x_{\bar{n}}=\bar{b}_1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \bar{a}_{m1}x_1+\ldots+\bar{a}_{m\bar{n}}x_{\bar{n}}=\bar{b}_m,\\ x_1\geqslant 0,\quad\ldots,\quad x_{\bar{n}}\geqslant 0.\end{gathered}$$

Задача линейного программирования, записанная в общем виде (2.1)—(2.4), может быть сведенá к канонической форме.

Введем в задачу (2.1)—(2.4) дополнительные неотрицательные переменные

$$\begin{gathered}x_{n+1},\ x_{n+2},\ \ldots,\ x_{n+(r-l)},\\ x_i\geqslant 0\quad\text{для}\quad i=n+1,\ \ldots,\ n+(r-l).\end{gathered}$$

Тогда ограничения (2.2), (2.3) эквивалентны следующим:

$$\begin{array}{llr}a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}\ \ x_n & & =b_1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\\ a_{l1}x_1+\ldots+a_{ln}\ \ x_n & & =b_l,\\ a_{l+1,1}x_1+\ldots+a_{l+1,n}x_n+x_{n+1} & & =b_{l+1},\\ a_{l+2}\ \ x_1+\ldots+a_{l+2,n}x_n & +x_{n+2} & =b_{l+2},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\\ a_{r1}x_1+\ldots+a_{rn}\ \ x_n & +x_{n+(r-l)} & =b_r.\end{array}$$

В линейную форму дополнительные переменные входят с нулевыми коэффициентами.

Если $t = n$, то общая задача линейного программирования уже сведена к каноническому виду. В этом случае $\bar{n} = n + (r - l)$; $m = r$. (Напомним, что t — число неотрицательных переменных в задаче (2.1)—(2.4).)

Пусть теперь смешанные условия сведены к системе линейных равенств, но $t < n$, т. е. требование неотрицательности относится не ко всем искомым переменным. В этом случае простейший путь перехода к канонической форме — это замена переменных x_j, не связанных условием неотрицательности, разностью переменных $x_j = x_j' - x_j''$, где $x_j' \geqslant 0$, $x_j'' \geqslant 0$.

Однако при этом число переменных задачи увеличивается. Можно перейти к канонической форме задачи и иным путем, при котором число переменных и ограничений, вообще говоря, сокращается.

Воспользуемся линейными уравнениями, ограничивающими выбор переменных, и выразим x_j, не связанные требованием неотрицательности, через все остальные переменные. Подставим затем полученные выражения в линейную форму и в условия, не использованные при вычислениях.

В зависимости от вида линейной формы, характера линейных условий и соотношения между числом ограничений и количеством неотрицательных переменных вычисления приводят к одному из следующих случаев:

1. Задача линейного программирования неразрешима.

2. Общее число переменных и ограничений сокращается. Задача линейного программирования принимает каноническую форму (разрешимость ее при этом не гарантируется).

5.2. Приведем пример сведения задачи линейного программирования к канонической форме.

Пусть требуется найти максимум линейной формы

$$L = x_1 + x_2 + cx_3 + x_4$$

при условиях:

$$\begin{aligned}
ax_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 4x_5 &= 4,\\
x_1 + ax_2 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 &= 3,\\
x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 &\leqslant 2,\\
x_1 + x_2 + ax_3 - 4x_4 - 4x_5 &\leqslant 1,\\
x_4 \geqslant 0, \quad x_5 &\geqslant 0.
\end{aligned}$$

Для приведения условий задачи к однородной системе ограничений добавим две дополнительные неотрицательные переменные

$$x_6 \geqslant 0, \quad x_7 \geqslant 0.$$

Система условий принимает такой вид:

$$\begin{aligned}
ax_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 4x_5 \qquad &= 4,\\
x_1 + ax_2 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 \qquad &= 3,\\
x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 + x_6 &= 2,\\
x_1 + x_2 + ax_3 - 4x_4 - 4x_5 + x_7 &= 1,\\
x_4 \geqslant 0, \quad x_5 \geqslant 0, \quad x_6 \geqslant 0, \quad x_7 &\geqslant 0.
\end{aligned}$$

Теперь следует переменные, не связанные условиями неотрицательности, выразить через остальные. Возможны два случая: 1) найдутся три уравнения из четырех, которые могут быть разрешены относительно x_1, x_2, x_3, 2) таких уравнений подобрать нельзя.

Определитель, составленный из коэффициентов при x_1, x_2 и x_3 в первом, втором и четвертом уравнениях, равен $\Delta = (a-1)^2(a+2)$. При $a \neq 1$ и $a \neq -2$ можно выразить из этих уравнений x_1, x_2 и x_3 через неотрицательные переменные. Пусть, например, $a=0$. Вычислим x_1, x_2 и x_3 и подставим их выражения в линейную форму и третье условие, не использованное в расчетах.

Получим

$$\begin{aligned}
x_1 &= \qquad \frac{5}{2}x_4 + \frac{11}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_7,\\
x_2 &= 1 + \frac{3}{2}x_4 - \frac{3}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_7,\\
x_3 &= 3 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{5}{2}x_5 + \frac{1}{2}x_7,
\end{aligned}$$

$$L = (1+3c) + \frac{1}{2}x_4(10-c) + \frac{1}{2}x_5(8-5c) - \frac{1}{2}x_7(2-c),$$

$$2x_4 + 11x_5 + x_6 - 2x_7 = 7,$$

$$x_4 \geqslant 0, \quad x_5 \geqslant 0, \quad x_6 \geqslant 0, \quad x_7 \geqslant 0.$$

Мы пришли к канонической форме задачи *).

*) Постоянное слагаемое $(1+3c)$ в линейной форме можно отбросить, поскольку оно не влияет на выбор экстремума L.

Рассмотрим теперь другой случай, когда нельзя выбрать трех уравнений из четырех условий так, чтобы можно было, пользуясь ими, выразить не связанные требованием неотрицательности переменные через другие. Такой случай имеет место в рассматриваемом примере, если положить $a=-2$. Задача при этом формулируется следующим образом.

Требуется найти максимум линейной формы

$$L=x_1+x_2+cx_3+x_4$$

при условиях

$$\begin{gathered}
-2x_1+x_2+x_3-x_4+4x_5=4,\\
x_1-2x_2+x_3-2x_4-3x_5=3,\\
x_1+x_2-2x_3-3x_4+2x_5+x_6=2,\\
x_1+x_2-2x_3-4x_4-4x_5+x_7=1,\\
x_4\geqslant 0,\quad x_5\geqslant 0,\quad x_6\geqslant 0,\quad x_7\geqslant 0.
\end{gathered}$$

Здесь нельзя выразить x_1, x_2 и x_3 через неотрицательные переменные, но можно из первого и второго равенства выразить x_1 и x_2 через остальные переменные. Сделаем это и подставим полученные выражения в остальные условия задачи и в линейную форму. Получим

$$\left.\begin{gathered}
L=-7+(2+c)x_3-2x_4+x_5,\\
-6x_4+3x_5+x_6=9,\\
-7x_4-3x_5+x_7=8,\\
x_4\geqslant 0,\quad x_5\geqslant 0,\quad x_6\geqslant 0,\quad x_7\geqslant 0.
\end{gathered}\right\}\tag{5.1}$$

Переменное x_3 в условиях отсутствует и, следовательно, не связано никакими ограничениями. Поэтому если коэффициент при x_3 в линейной форме отличен от нуля, задача линейного программирования не будет иметь ограниченного решения. Если же $c=-2$, то система (5.1) представляет собой каноническую форму разрешимой задачи.

Указанный порядок вычислений не связан с особенностями приведенных примеров и может быть использован во всех случаях, когда требуется свести задачу линейного программирования к ее канонической форме.

§ 6. Геометрическая интерпретация простейших задач линейного программирования

6.1 Задачи линейного программирования, в которых число переменных превышает число ограничений на 2 или на 3, могут быть наглядно геометрически истолкованы на плоскости или в трехмерном пространстве. (Говоря о превышении числа переменных над количеством ограничений на 2 или на 3, мы подразумеваем каноническую форму задачи.) Введение элементов геометрии пространства произвольного числа измерений позволит далее распространить приведенную в этом параграфе геометрическую интерпретацию (мы ее будем называть *первой геометрической интерпретацией*) на задачи с любым числом переменных и ограничений.

Первая геометрическая интерпретация может быть использована для задач линейного программирования, записанных в произвольной форме.

Геометрическая интерпретация задачи дает возможность изложить далее в геометрических терминах и различные методы ее решения.

Рассмотрим следующую частную задачу линейного программирования.

Требуется обратить в максимум линейную форму

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 \tag{6.1}$$

при условиях

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leqslant b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leqslant b_m, \end{array}\right\} \tag{6.2}$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0. \tag{6.3}$$

Неравенства (6.3) определяют положительный квадрант плоскости x_1Ox_2. Уравнение

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i, \tag{6.4}$$

соответствующее i-му условию, определяет на плоскости x_1Ox_2 прямую, а неравенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leqslant b_i \tag{6.5}$$

определяет полуплоскость, расположенную по ту же сторону от прямой (6.4), что и вектор $(-a_{i1}, -a_{i2})$, проведенный из какой-либо точки этой прямой.

Таким образом, область определения линейной формы задачи (6.1)—(6.3) представляет собой общую часть полуплоскостей (6.5) ($i=1, 2, \ldots, m$) и положительного квадранта плоскости x_1Ox_2.

Равенство

$$L = c_1x_1 + c_2x_2,$$

где $L=\text{const}$, представляет собой уравнение семейства параллельных прямых.

Параметр L семейства пропорционален расстоянию от начала координат до соответствующей прямой семейства.

На рисунке 1.1 изображен случай, когда область изменения линейной формы представляет собой многоугольник. Прямые, высекающие многоугольник $OABCD$ на плоскости x_1Ox_2, соответствуют условиям (6.2) и (6.3), в которых неравенства заменены равенствами. Штриховка указывает ту сторону прямой, по которую располагаются точки плоскости, удовлетворяющие неравенствам (6.2) и (6.3). Направление прямой MN определяется вектором (c_1, c_2) (вектор (c_1, c_2) перпендикулярен к прямой MN). Вектор (c_1, c_2) указывает также направление, в котором увеличивается линейная форма. Задача линейного программирования — вычисление координат точки, дающей экстремум линейной форме (6.1) при условиях (6.2) и (6.3),— может быть геометрически (при $n=2$) истолкована следующим образом.

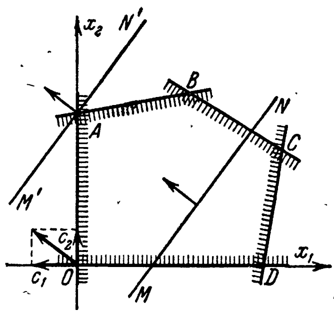


Рис. 1.1.

Пересечем многоугольник условий — область определения линейной формы — прямой $L=c_1x_1+c_2x_2$ и будем перемещать параллельно самой себе в направлении увеличения L (если требуется вычислить максимум линейной формы) или в направлении уменьшения L (если требуется вычислить минимум линейной формы). При этом возможны два случая. В случае, изображенном на рис. 1.1, параллельный сдвиг приведет прямую в такое положение $M'N'$, когда у нее окажется только одна общая точка с многоугольником —

вершина A. Эта точка определяет единственное решение задачи линейного программирования (на рис. 1.1 — максимум линейной формы). Может оказаться (такой случай изображен на рис. 1.2), что прямая MN параллельна одной или двум сторонам многоугольника. В таком случае экстремум достигается во всех точках соответствующей стороны многоугольника. На рис. 1.2 во всех точках стороны AB многоугольника $ABCDE$, параллельной прямой MN, достигается максимум, а во всех точках стороны $ED \parallel MN$ достигается минимум линейной формы. Таким образом, задача линейного программирования может иметь либо одно, либо бесконечное количество решений. Если две вершины дают экстремум линейной формы, то и все точки отрезка, соединяющего эти вершины, определяют решение задачи линейного программирования.

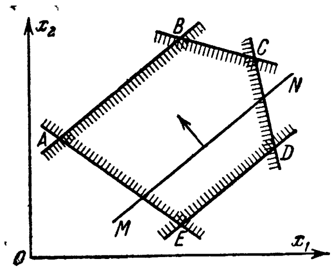


Рис. 1.2.

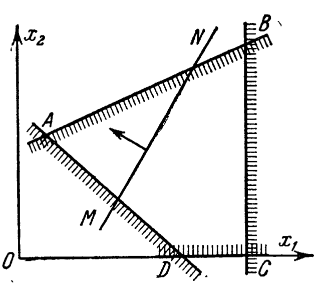


Рис. 1.3.

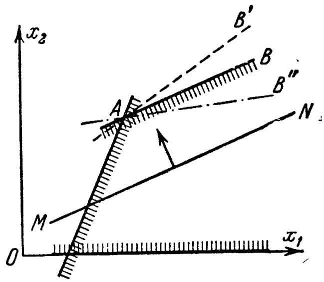


Рис. 1.4.

Рис. 1.3 соответствует случаю, когда задача линейного программирования неразрешима, поскольку определяющие ее условия оказались противоречивыми.

На рис. 1.4 область определения линейной формы неограничена. В том случае, когда прямая $AB \parallel MN$, линейная форма достигает конечного экстремума во всех точках луча AB. Если изменять область определения линейной формы, поворачивая луч AB относительно точки A, можно получить два случая: либо линейная форма может стать неограниченной при допустимых значениях переменных, либо может достигнуть максимума в единственной точке. Первый случай соответствует лучу AB', изображенному на рис. 1.4 пунктиром. Второй случай соответствует штрихпунктирному лучу AB'' (рис. 1.4)

6.2. До сих пор мы рассматривали геометрическое истолкование задачи линейного программирования с двумя переменными и m условиями-неравенствами вида (6.2). Если привести эту задачу к канонической форме, то число переменных новой задачи n станет равным $m+2$, а число условий (равенств) будет m. Таким, образом, здесь $n-m=2$.

Легко видеть, что приведенное в предыдущем пункте геометрическое истолкование задачи линейного программирования остается справедливым в любом случае, когда n и m произвольны, но $n-m=2$. Действительно, выразим все переменные через два из них, например, через x_1 и x_2, и перепишем линейную форму и условия задачи в следующем виде:

$$L=c_1'x_1+c_2'x_2,$$
$$x_s=a_{1s}'x_1+a_{2s}'x_2-a_s', \qquad s=3,\ 4,\ \ldots,\ n,$$
$$x_j\geqslant 0, \quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Прямые $x_s=0$ $(a_{1s}'x_1+a_{2s}'x_2=a_s')$ и оси координат высекают на плоскости $x_1\,O\,x_2$ выпуклый многоугольник (выпуклое многоугольное множество). Условия $x_s\geqslant 0$ задают направление штриховки сторон многоугольника. Так определяется область возможных значений пар чисел (x_1, x_2), среди которых следует выбрать точки, обращающие линейную форму в максимум (или минимум). Коэффициенты линейной формы определяют семейство параллельных прямых и направление, в котором увеличивается L. Выберем из семейства любую прямую, пересекающую многоугольник, и будем смещать ее в сторону увеличения (уменьшения) линейной формы до тех пор, пока она еще будет содержать точки многоугольника. Предельное положение прямой определит максимальное (минимальное) значение линейной формы.

Такое же наглядное геометрическое истолкование задачи линейного программирования имеет место как для трех переменных, если условия имеют вид неравенств, так и в случае, когда число переменных превышает на 3 число условий ($n-m=3$), а задача записана в канонической форме. Условия задачи высекают в пространстве выпуклый многогранник (выпуклое многогранное множество). Коэффициенты линейной формы определяют семейство параллельных плоскостей H и направление, в котором увеличивается L. Для решения задачи линейного программирования следует перемещать плоскость H, пересекающую многогранник, в сторону увеличения линейной формы (если решается задача на максимум) или в сторону уменьшения L (если решается задача на минимум) до тех пор, пока она еще содержит точки многогранника. Предельное положение плоскости определяет решение задачи.

Геометрические соображения подсказывают здесь, как и прежде, что экстремум достигается в крайних точках — в вершинах многогранника. Если экстремум достигается более чем в одной точке, то он достигается на всем ребре или на всей грани многогранника, параллельной плоскости, определяемой коэффициентами линейной формы задачи.

Дальше мы увидим, что все особенности задач линейного программирования и методов их решения приобретают геометрическую наглядность в приведенной интерпретации.

6.3. Приведем еще одно геометрическое истолкование задач линейного программирования. *Вторая геометрическая интерпретация* иллюстрирует методы решения задач, записанных в канонической форме. Мы здесь рассмотрим задачи с двумя условиями и произвольным числом переменных. Такие задачи могут быть наглядно истолкованы в трехмерном пространстве. Пусть требуется обратить в максимум линейную форму

$$L=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \tag{6.6}$$

при условиях:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\end{aligned}\right\} \tag{6.7}$$

$$x_j\geqslant 0,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Введем новые переменные

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ u_2 &= a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ u_3 &= c_1x_1 + \ldots + c_nx_n. \end{aligned}\right\} \tag{6.8}$$

Соотношения (6.8) определяют преобразование n-мерного пространства переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в трехмерное пространство переменных u_1, u_2, u_3. При этом преобразовании положительные полуоси $Ox_1, Ox_2, \ldots, Ox_n$ n-мерного пространства переходят в лучи, исходящие из начала координат. Действительно, координаты положительной полуоси Ox_1 удовлетворяют условиям $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$. Поэтому образ оси Ox_1 в пространстве u_1, u_2, u_3 определяется соотношениями

$$u_1 = a_{11}x_1, \quad u_2 = a_{21}x_1, \quad u_3 = c_1x_1, \quad 0 \leqslant x_1 < \infty. \tag{6.9}$$

Следовательно, образ полуоси Ox_1 совпадает с лучом в трехмерном пространстве u_1, u_2, u_3. Точно так же положительная полуось Ox_k

$$x_1 = \ldots = x_{k-1} = \\ = x_{k+1} = \ldots = x_n = 0, \\ 0 \leqslant x_k < \infty,$$

переходит в луч

$$u_1 = a_{1k}x_k, \\ u_2 = a_{2k}x_k, \quad u_3 = c_kx_k, \\ 0 \leqslant x_k < \infty.$$

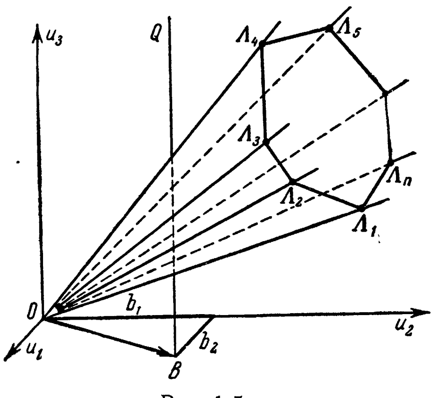


Рис. 1.5.

На рис. 1.5 в осях u_1, u_2, u_3 изображены лучи Λ_j, соответствующие положительным полуосям координат в пространстве $x_1, \ldots, x_n$. Совокупность лучей Λ_j определяет выпуклый многогранный конус K — образ ортанта *) $x_j \geqslant 0$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) пространства x-ов. Ортант $x_j \geqslant 0$ —

*) *Положительным ортантом* принято называть n-мерный аналог положительного октанта, т. е. совокупность векторов X с неотрицательными координатами.

выпуклое множество. Нетрудно показать, что линейное преобразование переводит выпуклое множество в выпуклое. Отсюда вытекает выпуклость многогранного конуса.

Обозначим через $\overline{A}_j$ трехмерный (в общем случае $(m+1)$-мерный) вектор с компонентами a_{1j}, a_{2j}, c_j (в общем случае с компонентами a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj}, c_j)

$$\overline{A}_j = (a_{1j},\ a_{2j},\ c_j)^T \quad (\overline{A}_j = (a_{1j},\ a_{2j},\ \ldots,\ a_{mj},\ c_j)^T).$$

Первые две (m) компоненты вектора $\overline{A}_j$ совпадают с составляющими вектора условий, а третья [$(m+1)$-я] компонента равна соответствующему коэффициенту линейной формы. Будем в дальнейшем называть вектор $\overline{A}_j$ *расширенным вектором условий*. Расширенные векторы условий определяют направления лучей Λ_j — образов положительных полуосей пространства переменных x_1, x_2, ..., x_n. Из соотношений (6.8) следует, что положительный ортант пространства x-в переходит в выпуклый многогранный конус трехмерного пространства, порожденный расширенными векторами условий

$$\overline{A}_1,\ \overline{A}_2,\ \ldots,\ \overline{A}_n.$$

6.4. Для исследования особенностей задачи линейного программирования представляет интерес не образ положительного ортанта, а образ той его части, которая является областью определения рассматриваемой задачи. Поэтому целесообразно наряду с лучами Λ_j (образами положительных полуосей) рассмотреть еще прямую Q, определяемую соотношениями

$$\begin{aligned} u_1 &= b_1, \\ u_2 &= b_2, \\ u_3 &= q \quad (-\infty < q < \infty), \end{aligned}$$

где b_i — составляющие вектора ограничений B.

Прямая Q параллельна оси Ou_3, а ее проекцией на плоскость $(u_1,\ u_2)$ является вектор ограничений B. На рис. 1.5 прямая Q вертикальна. Ее проекция на плоскость u_1Ou_2 имеет компоненты $(b_1,\ b_2)$.

Покажем, что в пространстве u_1, u_2, u_3 образом области определения задачи линейного программирования является общая часть Q_K прямой Q и выпуклого многогранного конуса K. В самом деле, для любой точки $u=(u_1, u_2, u_3) \in Q_K$ справедливы равенства

$$u_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,$$
$$u_2 = a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2,$$

поскольку множество Q_K принадлежит прямой Q. Кроме того, для всех точек $X \in Q_X$, являющихся прообразами точек $u \in Q_K$,

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad \ldots, \quad x_n \geqslant 0,$$

поскольку соответствующие точки u принадлежат многогранному конусу — образу положительного ортанта пространства x-в. Таким образом, каждой точке общей части прямой Q и конуса K соответствуют некоторые точки области определения линейной формы задачи. Очевидно, что справедливо и обратное: каждая точка области определения задачи переходит в точку множества Q_K, являющегося пересечением многогранного конуса и прямой Q.

Множество Q_K представляет собой отрезок, луч или прямую.

Каждой точке $X \in Q_X$ соответствует некоторое значение $u_3 = q$. Но

$$u_3 = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$$

определяет значение линейной формы L. Следовательно, параметр q прямой Q соответствует величине линейной формы. Если прямая Q содержит внутренние точки выпуклого многогранного конуса, то граница конуса имеет с этой прямой не более двух точек пересечения. Одна из них соответствует максимальному значению линейной формы, другая — минимальному. Если прямая Q касается конуса, т. е. принадлежит одной из его граней, то верхняя точка касания определяет максимум линейной формы, а нижняя — минимум.

Таким образом, задача линейного программирования — задача определения экстремума линейной формы (6.6) при условиях (6.7) — сводится к определению крайней (верхней в случае максимума и нижней в случае минимума) точки пересечения прямой Q с выпуклым многогранным конусом.

Если прямая Q не пересекает выпуклый многогранный конус, порожденный расширенными векторами условий $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, ..., $\overline{A}_n$, то область определения задачи линейного программирования не содержит ни одной точки. В этом случае задача, естественно, неразрешима. Если общая часть прямой Q и выпуклого многогранного конуса неограничена (сверху для задачи на максимум, снизу для задачи на минимум), то рассматриваемая задача неразрешима вследствие неограниченности линейной формы в области ее определения.

В главе 4 обе геометрические интерпретации обобщаются на случай задач линейного программирования с произвольным числом переменных и ограничений.

§ 7. Экономическая интерпретация задачи линейного программирования

7.1. Основную массу приложений линейного программирования составляют экономические задачи. Собственно, линейное программирование и возникло из потребностей экономики. Поэтому целесообразно наряду с геометрическим истолкованием задачи линейного программирования ввести также ее экономическую интерпретацию.

Рассмотрим вопросы планирования работы предприятия или группы предприятий, производящих некоторый однородный продукт. Производство продукта требует ряда категорий сырья, определенного станочного парка, рабочей силы различной квалификации, энергии, топлива, транспорта и т. д. Будем называть перечисленные факторы производственными. Пусть число факторов, определяющих технологию производства, равно m. Как правило, каждый из них имеется на предприятиях в ограниченном количестве.

Каждый реализуемый набор производственных факторов обеспечивает определенный выход продукции в единицу времени.

Будем называть способом производства систему $m+1$ чисел ($(m+1)$-мерный вектор), определяющих затраты каждого производственного фактора в единицу времени и выпуск продукции за то же время.

В каждой конкретной задаче можно указать много способов производства, различным образом использующих производственные факторы для производства продукции. Можно себе мыслить следующий порядок составления плана работы предприятия.

Заранее отрабатывается (или предполагается заданным) ряд способов производства — ряд наборов затрат каждого из производственных факторов в единицу времени и обеспечиваемый ими выпуск продукции. В зависимости от того, сколько времени предприятие работает по тому или иному из исходных способов производства, будет затрачиваться различное количество производственных факторов разных категорий и производиться различное количество продукции.

Задача планирования производства состоит, таким образом, в определении продолжительности работы по отдельным способам производства.

Наилучшим планом нужно будет признать тот план, при котором затраты по каждому производственному фактору не превысят допустимых, а продукция предприятия достигнет наибольшего возможного значения. Естественно, чем больше проанализировано и отработано исходных способов производства, тем лучшим будет оптимальный план.

Формализация задачи планирования предприятия в указанном выше смысле требует следующих, вполне естественных в широком круге вопросов, предположений.

Если первый набор затрат производственных факторов обеспечивает в единицу времени c_1 единиц продукции, а другой — c_2, то работа предприятия в течение x_1 единиц времени в соответствии с первым набором затрат, а x_2 — по второму набору, обеспечит $c_1x_1 + c_2x_2$ единиц продукции. Конечно, нет никакой необходимости предполагать, что промежутки времени x_1 и x_2 следуют один за другим. Предприятие может одновременно использовать различные способы производства, заменяя в определенные моменты времени отдельные способы производства на другие. Промежутки времени x_1 и x_2, таким образом, играют здесь роль удельных весов, с которыми исходные способы производства участвуют в выбранном для предприятия способе производства.

Время перехода с одного способа производства на другой — время холостого хода — в рассматриваемой постановке задачи не учитывается.

7.2. Переведем задачу о планировании работы предприятия на математический язык.

Обозначим через c_j количество единиц продукции, выпущенной предприятием при работе в течение единицы времени по j-му способу производства, когда затраты 1-го производственного фактора составляют a_{1j}, 2-го — a_{2j}, ..., i-го — a_{ij}, ..., m-го — a_{mj}. Пусть, кроме того, числа $b_1, b_2, \ldots, b_m$ определяют наличные ресурсы разных производственных факторов. Величины b_i ограничивают размеры допустимых затрат.

Будем предполагать, что, приступая к планированию, мы располагаем n отработанными способами производства. Обозначим через x_j промежуток времени, в течение которого предприятие работает по j-му способу производства. Суммарная продукция, выпущенная предприятием, определяется при этом выражением

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n. \tag{7.1}$$

Ограничения по расходам отдельных производственных факторов записываются в виде следующих условий:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leqslant b_m. \end{array}\right\} \tag{7.2}$$

Естественно, что промежутки времени неотрицательны, т. е.

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{7.3}$$

Как видим, задача планирования производства свелась к задаче линейного программирования. Выбор плана в рассмотренной задаче — это выбор системы чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при которой удовлетворяются условия (7.2) и (7.3), а форма (7.1) достигает своего наибольшего значения.

Удобно терминологию задачи линейного программирования, естественную для производственной задачи, сохранить и для других задач, описываемых таким же формальным аппаратом. Экономическая интерпретация задачи линейного программирования окажется в последующем полезной для интуитивного обоснования различных понятий, вводимых при построении алгоритмов решения задачи. Векторы

$$A_j = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})^T, \; B = (b_1, \ldots, b_m)^T$$

раньше были названы соответственно векторами условий и вектором ограничений. В экономической интерпретации компоненты вектора условий определяют затраты отдельных производственных факторов в единицу времени для соответствующего исходного способа производства, а компоненты вектора ограничений — запасы отдельных факторов, ограничивающие их расход.

В терминах производственной задачи векторы A_j ($j=1, 2, \ldots, n$) и вектор B естественнее называть соответственно ***векторами затрат*** и ***вектором запасов***.

j-й способ производства определяется вектором $\bar{A}_j$, первые m компонент которого совпадают с составляющими вектора условий A_j, а последняя составляющая равна c_j — соответствующему объему продукции в единицу времени. В соответствии с введенным в § 6 определением будем называть $\bar{A}_j$ расширением вектора A_j. Расширенные векторы полностью характеризуют способы производства, определяя как затраты, так и продукцию.

Набор чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющий ограничениям задачи линейного программирования, мы назвали (см. § 2) ***планом***. Этот термин, естественный для рассматриваемых здесь вопросов производственного планирования, сохраняется для всех задач линейного программирования независимо от их конкретного содержания. То же относится к термину ***оптимальный план*** и к некоторым другим терминам, которые будут введены дальше.

7.3. Задача, записанная здесь в терминах производственного планирования, может быть переформулирована в терминах статической модели народнохозяйственного планирования.

Рассмотрим модель межотраслевых связей экономического района. Пусть экономика района определяется n отраслями производства. Для простоты будем предполагать, что экономика района развивается за счет собственных ресурсов. План производства конечной продукции*) каждой отрасли предполагается заданным. Часть конечной продукции

---

*) Напомним, что конечная продукция — это продукция, непосредственно не возвращающаяся в производство (продукция для личного потребления, товары для внешней торговли, военная продукция и т. д.).

вывозится в другие районы, часть потребляется на месте. Все отрасли производства взаимосвязаны и нормальное функционирование любой из них возможно лишь в том случае, если обеспечены необходимые поставки средств производства из других отраслей. План производства в отдельных отраслях экономики и межотраслевые связи должны обеспечить минимум затрат труда (живого и овеществленного) на производство конечных продуктов в заданном количестве к установленному сроку.

Переведем на формальный язык задачу планирования межотраслевых связей экономического района указанного типа. Примем для определенности, что разрабатывается годовой план. Введем следующие обозначения.

Пусть x_i — общая продукция i-й отрасли хозяйства за рассматриваемый промежуток времени, x_{ij} — общая поставка товаров i-й отраслью j-й отрасли за год, y_i — общий объем выпуска конечной продукции, заданный i-й отрасли на год. Величины x_{ij} и y_i, так же как и x_i, измеряются в натуральных единицах; y_i определяются государственными народнохозяйственными планами, учитывающими, в частности, потребности района.

Задача планирования экономики района в условиях статической модели заключается в составлении заданий предприятиям различных отраслей, при которых будут обеспечены требуемые поставки из одной отрасли в другую и заданный объем конечной продукции каждой отрасли.

Пользуясь введенными обозначениями, запишем условия задачи в виде следующей системы неравенств:

$$x_i \geqslant \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i. \tag{7.4}$$

Отношение $\frac{x_{ij}}{x_j} = a_{ij}$ определяет количество продукции i-й отрасли, необходимое для производства единицы продукции j-й отрасли. В новых обозначениях система условий (7.4) запишется в виде

$$x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant y_i, \tag{7.5}$$

или в матричной форме

$$(I - A) X \geqslant Y, \tag{7.6}$$

где I — единичная матрица порядка n; $A = \| a_{ij} \|_n$ — матрица межотраслевых связей; X и Y — n-мерные векторы с компонентами x_j и y_i соответственно. Вектор X — вектор производства, вектор Y — вектор конечной продукции.

Матрица $I - A$ в экономической литературе известна под названием *матрицы Леонтьева*. В. Леонтьев предложил использовать для вычисления вектора X по заданному вектору Y на будущий промежуток времени величины a_{ij}, систематизированные за прошедший промежуток.

До сих пор мы предполагали, что имеется единый технологический способ использования продукций разных отраслей экономики района для производства продукции каждой фиксированной отрасли. По-видимому, целесообразные межотраслевые связи могут разрабатываться и другими путями [65].

Обычно производство продукции каждой отрасли может быть обеспечено при различных связях с другими отраслями экономического района. Единица продукции каждой отрасли может быть произведена при разных вариантах потребления продукции из других отраслей. Естественно, что при этом будут различными и затраты труда на производство единицы продукции.

Пусть в каждой отрасли отработано по l способов производства. Каждый технологический способ производства продукции j-й отрасли характеризуется набором чисел $a_{ij}^{(s)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и $c_j^{(s)}$. Матрица $A^{(s)} = \| a_{ij}^{(s)} \|_n$ определяет межотраслевые связи при s-м способе производства. Вектор $C^{(s)} = (c_1^{(s)}, \ldots, c_n^{(s)})$ характеризует затраты труда на единицу продукции каждой отрасли экономики при s-м способе производства.

Чем больше имеется технологических способов производства в каждой отрасли (т. е. чем больше значений может принимать индекс s), тем шире область возможных планов и тем больше оснований ожидать, что оптимальный план будет соответствовать меньшим затратам труда.

Наиболее экономный план определяется векторами X_s, которые обращают в минимум линейную форму

$$L = \sum_{s=1}^{l} C^{(s)} X_s \tag{7.7}$$

при условиях

$$\sum_{s=1}^{l} (I - A^{(s)}) X_s \geqslant Y, \tag{7.8}$$

$$X_s \geqslant 0. \tag{7.9}$$

В приведенной постановке задачи предполагается, что все отрасли экономики располагают одним и тем же числом технологических способов производства.

Если j-я отрасль имеет l_j технологических способов производства, задача планирования формулируется следующим образом.

Требуется вычислить значения переменных x_{sj}, обращающих в минимум линейную форму

$$L = \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{l_j} c_j^{(s)} x_{sj} \tag{7.10}$$

при условиях

$$\sum_{s=1}^{l_i} x_{si} - \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{l_j} a_{ij}^{(s)} x_{sj} \geqslant y_i, \tag{7.11}$$

$$x_{sj} \geqslant 0, \tag{7.12}$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, n; \quad s = 1, 2, \ldots, l_j.$$

Здесь $a_{ij}^{(s)} x_{sj}$ — количество продукции i-й отрасли, необходимое для производства x_{sj} единиц продукции j-й отрасли по s-му технологическому способу; $\sum_{s=1}^{l_j} a_{ij}^{(s)} x_{sj}$ — количество продукции i-й отрасли, необходимое для производства всей продукции j-й отрасли; $\sum_{s=1}^{l_i} x_{si}$ — общий объем производства i-й отрасли; $c_j^{(s)} x_{sj}$ затраты труда на производство x_{sj} единиц продукции j-й отрасли по s-му технологическому способу; $\sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{l_j} c_j^{(s)} x_{sj}$ — суммарные затраты труда на производство всей продукции экономического района по всем используемым технологическим способам производства.

Можно доказать (см. упражнение 4), что при одном технологическом способе производства ($s = 1$) оптимальный план обращает неравенство (7.8) в равенство. План, обеспечивающий баланс затрат и выпуска (т. е. план X, удовлетворяющий уравнению $(I-A)X=Y$), является в этом случае оптимальным планом при любом векторе затрат $C \geqslant 0$ [83]. В общем случае оптимальный план, вообще говоря, не обращает неравенства (7.8) или (7.11) в равенства.

Как видим, задача народнохозяйственного планирования, как и задача производственного планирования, является общей задачей линейного программирования. Мы уже отмечали, что ряд понятий теории и некоторые принципы построения методов линейного программирования имеют явно выраженный экономический смысл. Формулировки общих положений линейного программирования в экономических терминах в ряде случаев дают интуитивные основания для оценки новых направлений в развитии этой дисциплины.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 1

1. Отправляясь от рассуждений п. 3.1, сформулировать и записать показатель качества и ограничения задачи о рациональной организации снабжения неоднородным продуктом n центров потребления из m пунктов производства.

2. Формализовать и свести к задаче линейного программирования следующую задачу о распределении посевной площади.

Посевные площади колхозов, входящих в состав района, равны соответственно $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Согласно плану в районе культуры должны производиться в соответствии $p_1:p_2:\ldots:p_m$. Ожидаемый урожай i-й культуры на землях j-го колхоза равен a_{ij} единиц с 1 *га*. Вычислить, какую часть посевных площадей должен отвести каждый колхоз под ту или иную культуру, чтобы обеспечить максимальный урожай при предписанном соотношении культур.

3. Решить графически задачу о планировании производства (см. п. 7.2) для случая, когда вектор запасов $B=(50, 20, 60, 90)^T$, а расширенные векторы затрат двух отработанных способов производства равны соответственно

$$\bar{A}_1=(2,\ 2,\ 5,\ 1,\ 1)^T,$$

$$\bar{A}_2=(5,\ 1,6,\ 10,\ 1)^T.$$

4. Доказать, что в модели народнохозяйственного планирования (см. п. 7.3), ограниченной одним технологическим способом ($s=1$), оптимальный план обращает неравенство (7.8) в равенство.

5. Свести к канонической форме задачу максимизации линейной формы

$$L=x_1-x_2$$

при условиях:

$$\begin{aligned} -2x_1+ax_2&\leqslant 2,\\ x_1-bx_2&\leqslant 3,\\ x_1+x_2\ &\geqslant c,\\ dx_1+\frac{x_2}{2}&\leqslant 1,\\ x_1&\geqslant 0. \end{aligned}$$

Проанализировать возможные случаи в зависимости от значений постоянных a, b, c и d.

6. Пользуясь первой геометрической интерпретацией задачи линейного программирования, указать значения постоянных в упражнении 5, при которых

а) решение задачи единственно,

б) условия задачи несовместны,

в) область определения линейной формы неограничена, но задача разрешима,

г) линейная форма неограничена в области своего определения,

д) задача имеет бесчисленное множество решений.

7. Отправляясь от геометрической интерпретации задачи линейного программирования, определить диапазон изменения линейной формы

$$L=x_1-x_2,$$

если переменные ограничены условиями

$$\begin{aligned} x_1+3x_2+x_3+x_4+2x_5&=6,\\ -2x_1+x_2+3x_3-4x_4+x_5&=2,\\ 5x_1-2x_2+x_3+2x_4-3x_5&=-4,\\ x_j\geqslant 0,\quad j=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.& \end{aligned}$$

8. Используя вторую геометрическую интерпретацию задачи линейного программирования, указать, в каком диапазоне значений параметров a, b и c существует решение следующей задачи:

Требуется обратить в максимум линейную форму

$$L=x_1+3x_2+cx_3-x_4$$

при условиях:

$$\begin{aligned} ax_1-2x_2+x_3-3x_4&=5,\\ x_2+2x_3+x_4&=b,\\ x_j\geqslant 0,\quad j=1,\ 2,\ 3,\ 4.& \end{aligned}$$

ГЛАВА 2

ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННЫЕ МНОЖЕСТВА И ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Общая задача линейного программирования состоит в исследовании на экстремум (максимум или минимум) линейной функции, переменные которой ограничены рядом линейных соотношений (равенств и неравенств). Множество точек, высекаемое в пространстве переменных задачи этими ограничениями, является многомерным аналогом двумерной выпуклой многоугольной области, ограниченной ломаной линией с конечным числом звеньев. Подобные множества принято называть *выпуклыми многогранными множествами.*

Задача линейного программирования заключается, таким образом, в анализе линейной функции, заданной на некотором выпуклом множестве. Отсюда — тесная связь линейного программирования и теории выпуклых многогранных множеств.

В настоящей главе излагаются элементы этой теории, необходимые для обоснования большинства результатов линейного программирования (§§ 1—3). Принятый здесь путь описания теории выпуклых многогранных множеств заметно отличается от известных способов изложения этой теории (см. [23], [24], а также [107]) и представляется нам более естественным и наглядным.

В § 4 на основе результатов предыдущих трех параграфов устанавливается ряд важных теорем линейного программирования. Глава завершается § 5, в котором приводятся две различные геометрические интерпретации задачи линейного программирования, помогающие более полному уяснению сущности задачи.

§ 1. Выпуклые многогранные множества

1.1. Рассмотрим совокупность планов произвольной задачи линейного программирования с n переменными. Другими словами, введем в рассмотрение множество точек (векторов) $X=(x_1, \ldots, x_n)$, определяемое произвольной системой линейных ограничений (равенств и неравенств):

$$(D_i, X)=\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_j \leqslant d_i, \qquad i=1, 2, \ldots, s; \qquad (1.1)$$

$$(D_i, X)=\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_j = d_i, \qquad i=s+1, s+2, \ldots, s+t. \quad (1.2)$$

Мы не выделяем особо условий вида $x_j \geqslant 0$, как это обычно делается при записи ограничений задачи линейного программирования. Эти условия (если они имеются) включаются в общую систему неравенств (1.1). Обозначим через M множество точек X, удовлетворяющих соотношениям (1.1), (1.2).

Будем предполагать, что система ограничений (1.1), (1.2) непротиворечива, т. е. множество M не является пустым множеством. В этом параграфе устанавливается ряд простых и вместе с тем важных свойств множества M — совокупности планов общей задачи линейного программирования.

Теорема 1.1. *Множество M является выпуклым замкнутым множеством* *).

Доказательство.

1. Пусть X_1, X_2 — произвольные точки M; пусть $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. В таком случае точка $X=\alpha X_1+(1-\alpha) X_2 \in M$. Действительно, $(D_i, X)=\alpha (D_i, X_1)+(1-\alpha)(D_i, X_2)$. Следовательно,

$$(D_i, X) \leqslant \alpha d_i+(1-\alpha) d_i=d_i, \qquad i=1, 2, \ldots, s;$$

$$(D_i, X)=\alpha d_i+(1-\alpha) d_i=d_i, \qquad i=s+1, s+2, \ldots, s+t,$$

т. е. $X \in M$.

Согласно определению это означает, что M — выпуклое множество.

2. Пусть X_k, $k=1, 2, \ldots$ — произвольная последовательность точек из M, сходящаяся к точке X. Учитывая свой-

*) Определения выпуклого и замкнутого множеств см. в § 3 Дополнения.

ство непрерывности скалярного произведения векторов, получаем

$$\lim_{k \to \infty} (D_i, X_k) = (D_i, X) \tag{1.3}$$

при любом i. По условию,

$$(D_i, X_k) \leqslant d_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, s,$$
$$(D_i, X_k) = d_i, \qquad i = s+1, \ s+2, \ldots, s+t, \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Переходя в этих соотношениях к пределу при $k \to \infty$ и учитывая (1.3), получаем, что точка X удовлетворяет системе условий (1.1), (1.2), т. е. принадлежит множеству M. Таким образом, множество M содержит все свои предельные точки и, следовательно, является замкнутым множеством. Теорема доказана.

Структура ограничений (1.1), (1.2) показывает, что множество M является общей частью полупространств $(D_i, X) \leqslant d_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$ и гиперплоскостей $(D_i, X) = d_i$, $i = s+1$, $s+2, \ldots, s+t$, n-мерного пространства точек (векторов) $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Определение понятий гиперплоскости и полупространства для пространства любого конечного числа измерений можно посмотреть в п. 1.7 Дополнения (в конце книги).

Множество, образованное пересечением конечного числа полупространств и гиперплоскостей (если это пересечение не пусто), будем называть *выпуклым многогранным множеством*. Таким образом, M — выпуклое многогранное множество.

Приведенное определение означает, что любое выпуклое многогранное множество может быть задано совместной системой ограничений вида (1.1), (1.2).

Поскольку в дальнейшем речь будет идти только о выпуклых многогранных множествах, слово *выпуклое* в тех местах, где это не может привести к недоразумению, будет опускаться. Систему ограничений (1.1), (1.2), порождающую выпуклое многогранное множество M, будем называть иногда *системой условий* этого множества.

Выпуклым многогранником называется ограниченное выпуклое многогранное множество. Таким образом, система соотношений (1.1), (1.2) в случае ограниченности множества M определяет выпуклый многогранник n-мерного пространства.

В соответствии с введенными определениями, совокупность планов задачи линейного программирования естественно называть *многогранным множеством* (*многогранником*) *условий* задачи.

1.2. Выясним связь между размерностью многогранного множества M (см. п. 3.4 Дополнения) и свойствами условий (1.1), (1.2), определяющих это множество. Предварительно приведем несколько определений.

Условие с номером i системы (1.1), (1.2) назовем *жестким ограничением* многогранного множества M, если любая точка M удовлетворяет ему, как точному равенству, например, при $X \in M$ $(D_i, X) = d_i$.

Очевидно, любое из условий (1.2) является жестким ограничением M. Жесткими ограничениями могут оказаться также и некоторые из условий системы (1.1).

Для примера рассмотрим многогранное множество M', определяемое системой неравенств

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leqslant 1, \\ 2x_1 + x_2 &\leqslant 2, \\ -3x_1 - 2x_2 &\leqslant -3, \\ x_3 &\leqslant 1. \end{aligned}\right\} \qquad (1.4)$$

Пусть точка $X = (x_1, x_2, x_3) \in M'$. Складывая первые два условия системы (1.4) и сравнивая результат с третьим неравенством этой системы, получаем

$$-3x_1 - 2x_2 = -3.$$

Таким образом, третье неравенство системы (1.4) является жестким ограничением многогранного множества M'.

Условие с номером i системы, определяющей многогранное множество M, назовем *нежестким ограничением* этого множества, если существует такая точка $X \in M$, что

$$(D_i, X) < d_i.$$

Итак, система условий, определяющая многогранное множество, может быть разделена на две подсистемы, из которых первая состоит из жестких, а вторая — из нежестких ограничений данного множества. Очевидно, нежесткими ограничениями могут оказаться лишь условия-неравенства. В приведенном выше примере четвертое неравенство — нежесткое ограничение M', так как точка $(x_1', x_2', x_3') = (1, 0, 0) \in M'$ и $x_3' = 0 < 1$. Нетрудно проверить, что первые два неравенства системы (1.4) являются жесткими ограничениями множества M'.

Систему линейных ограничений, состоящую из условий типа (1.1) и (1.2), будем называть *линейно независимой*, если соответствующая система векторов D_i линейно независима. *Рангом* системы линейных ограничений назовем ранг матрицы, составленной из векторов D_i, отвечающих данной системе.

Переходим к формулировке и доказательству теоремы о размерности многогранного множества.

Теорема 1.2. *Размерность ϱ многогранного множества M определяется формулой*

$$\varrho = n - \sigma, \tag{1.5}$$

где σ — ранг системы жестких ограничений этого множества.

Доказательство. Обозначим совокупности номеров жестких и нежестких ограничений множества M через E_1 и E_2 соответственно. По условию, выпуклое множество M расположено в общей части гиперплоскостей

$$(D_i, X) = d_i, \quad i \in E_1, \tag{1.6}$$

среди которых имеются σ линейно независимых. (Система гиперплоскостей называется *линейно независимой*, если направляющие векторы этих гиперплоскостей линейно независимы.) Следовательно, в соответствии с определением размерности выпуклого множества,

$$\varrho \leqslant n - \sigma. \tag{1.7}$$

Рассмотрим систему линейных однородных уравнений

$$(D_i, X) = 0, \quad i \in E_1. \tag{1.8}$$

Поскольку ранг системы векторов D_i, $i \in E_1$ равен σ, то существует $n - \sigma$ линейно независимых векторов X_i, $i = 1, 2, \ldots, n - \sigma$, удовлетворяющих системе уравнений (1.8). Кроме того, для любого $i \in E_2$ найдется вектор Y_i, удовлетворяющий системе (1.6), для которого

$$(D_i, Y_i) < d_i.$$

Полагая

$$Y_0=\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q} Y_i,$$

где q — число нежестких ограничений M, имеем

$$(D_i, Y_0)<d_i \qquad (1.9)$$

для всех $i \in E_2$. В силу выпуклости множества M вектор $Y_0 \in M$. Из неравенства (1.9) вытекает, что при любом $i=1, 2, \ldots, n-\sigma$ и достаточно малом ε

$$Y_0+\varepsilon X_i \in M.$$

Допустим теперь, что многогранное множество M содержится в пересечении некоторых гиперплоскостей

$$(\Lambda_\alpha, X)=\lambda_\alpha, \qquad \alpha=1, 2, \ldots, l.$$

Поскольку

$$Y_0 \in M \quad \text{и} \quad Y_0+\varepsilon X_i \in M,$$

$$(\Lambda_\alpha, X_i)=\frac{1}{\varepsilon}[(\Lambda_\alpha, Y_0+\varepsilon X_i)-(\Lambda_\alpha, Y_0)]=\frac{1}{\varepsilon}(\lambda_\alpha-\lambda_\alpha)=0.$$

Итак, система однородных уравнений

$$(\Lambda_\alpha, X)=0, \qquad \alpha=1, 2, \ldots, l$$

имеет $n-\sigma$ линейно независимых решений X_i. Следовательно, среди векторов Λ_α, $\alpha=1, 2, \ldots, l$ имеется не более чем σ линейно независимых векторов. Мы получили, что любая совокупность гиперплоскостей, содержащая в своей общей части многогранное множество M, включает не более чем σ линейно независимых гиперплоскостей. Поэтому

$$\varrho \geqslant n-\sigma.$$

Сравнивая полученное условие с неравенством (1.6), приходим к искомому равенству (1.4). Теорема доказана.

Обратимся к многогранному множеству M', задаваемому системой ограничений (1.4). Жесткими ограничениями M' являются первые три неравенства системы (1.4).

Первые два ограничения линейно независимы, третье — их линейная комбинация. Следовательно, в данном случае $\sigma=2$. Поэтому размерность многогранного множества M'

равна

$$\varrho = n - \sigma = 3 - 2 = 1.$$

Система условий, определяющая многогранное множество, может быть приведена к эквивалентному виду, в котором каждое неравенство является нежестким ограничением, а все условия-равенства линейно независимы. Для этого достаточно заменить в каждом жестком ограничении-неравенстве знак неравенства на знак равенства, а затем исключить из полученной системы равенств те уравнения, которые являются следствиями остальных. Полученная система условий эквивалентна исходной системе в том смысле, что каждая из них определяет одно и то же многогранное множество. Если предположить, что указанные преобразования уже проведены и условия (1.1), (1.2) — полученная таким образом система ограничений, то в соответствии с теоремой 1.2 размерность ϱ множества M определяется формулой

$$\varrho = n - t. \tag{1.10}$$

1.3. Для дальнейшего нам понадобится понятие грани произвольного многогранного множества. Подмножество G многогранного множества M будем называть *q-мерной гранью* M, если

а) размерность G равна q;

б) из условий $X = \alpha X' + (1 - \alpha) X'' \in G$, $0 < \alpha < 1$ и X', $X'' \in M$ следует, что X', $X'' \in G$.

Как нетрудно видеть, при $q = 0$ приведенное определение превращается в определение крайней точки множества M. Крайние точки многогранного множества естественно называть *вершинами* этого множества. Таким образом, 0-мерная грань M и вершина M — понятия эквивалентные.

Под *ребром* многогранного множества будем понимать произвольную одномерную грань этого множества.

Определение грани многогранного множества M может быть также дано в терминах, связанных с системой условий (1.1), (1.2). Именно, *q-мерной гранью* множества M является произвольное q-мерное многогранное множество, система условий которого образуется из (1.1), (1.2) путем замены некоторых знаков неравенства знаками равенства. Отметим, что в силу теоремы 1.2 число линейно независимых жестких ограничений q-мерной грани равно $n - q$.

Теорема 1.3. *Оба приведенных выше определения q-мерной грани многогранного множества эквивалентны.*

Доказательство. 1. Пусть G—q-мерная грань многогранного множества M в смысле первого определения. Обозначим через E_G совокупность таких индексов i, что

$$(D_i, X) = d_i$$

для всех $X \in G$. Очевидно, $E_G \supseteq E_1$, где E_1—множество номеров жестких ограничений M. Пусть G'—многогранное множество, система условий которого образуется из (1.1), (1.2) путем замены знаков неравенства знаками равенства для $i \in E_G$ (естественно, речь идет лишь о тех $i \in E_G$, которым отвечают ограничения вида (1.1)). Покажем, что $G = G'$. Пусть X—произвольная точка G'. Через X_0 обозначим точку G, для которой

$$(D_i, X_0) < d_i, \quad i \notin E_G, \tag{1.11}$$

$$(D_i, X_0) = d_i, \quad i \in E_G. \tag{1.12}$$

Существование такой точки следует из определения множества E_G.

Пусть $X' = X_0 + \varepsilon (X_0 - X)$, $\varepsilon > 0$. Очевидно, X' удовлетворяет равенствам (1.12) при любом ε и неравенствам (1.11) при достаточно малом ε. Следовательно, при достаточно малом ε $X' \in G'$. Итак, $X, X' \in G \subseteq M, X_0 \in G$, причем

$$X_0 = \frac{1}{1+\varepsilon} X' + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} X.$$

В таком случае из определения грани многогранного множества (условие *б*) следует, что

$$X', X \in G.$$

Таким образом, произвольная точка $X \in G'$ содержится в G, т. е. $G' \subseteq G$. Противоположное включение $G \subseteq G'$ вытекает непосредственно из определения множества G'. Это означает, что G совпадает с G', и следовательно, удовлетворяет условиям второго определения q-мерной грани многогранного множества.

2. Допустим теперь, что G—q-мерная грань M в смысле второго определения.

Пусть система условий, определяющая многогранное множество G, имеет вид

$$(D_i,\ X) \leqslant d_i, \quad i \notin E_G,$$
$$(D_i,\ X) = d_i, \quad i \in E_G.$$

Рассмотрим произвольную точку $X \in G$, представимую в виде

$$X = \alpha X' + (1-\alpha) X'', \quad 0 < \alpha < 1, \quad X', X'' \in M.$$

Очевидно, для любого i

$$(D_i,\ X') \leqslant d_i, \tag{1.13}$$
$$(D_i,\ X'') \leqslant d_i. \tag{1.14}$$

Пусть $i \in E_G$. В таком случае

$$(D_i,\ X) = \alpha (D_i,\ X') + (1-\alpha)(D_i,\ X'') = d_i,$$

или

$$(D_i,\ X') = \frac{1}{\alpha}\left[d_i - (1-\alpha)(D_i,\ X'')\right].$$

Учитывая далее i-е неравенство системы (1.14), имеем

$$(D_i,\ X') \geqslant \frac{1}{\alpha}\left[d_i - (1-\alpha)\, d_i\right] = d_i.$$

Сравнивая полученное соотношение с i-м неравенством (1.13), приходим к выводу, что

$$(D_i,\ X') = d_i.$$

Аналогично устанавливается равенство

$$(D_i,\ X'') = d_i.$$

Таким образом, точки $X', X'' \in G$. Следовательно, G — q-мерное подмножество множества M, удовлетворяющее требованию b, т. е. G — q-мерная грань M, в смысле первого определения. Теорема 1.3 полностью доказана.

1.4. В качестве непосредственного следствия теоремы 1.3 укажем важное для дальнейшего характеристическое свойство вершин произвольного многогранного множества.

Теорема 1.4. *Точка $X \in M$ является вершиной многогранного множества в том и только в том случае, если среди условий* (1.1), (1.2) *найдутся n линейно независимых ограничений, которым эта точка удовлетворяет, как точным равенствам.*

Для доказательства теоремы достаточно вспомнить, что вершина многогранного множества и его грань нулевой размерности — понятия эквивалентные, а затем использовать второе определение грани многогранного множества.

Из теоремы 1.4, в частности, вытекает, что любое многогранное множество имеет не более чем конечное число вершин.

Действительно, каждой вершине многогранного множества M отвечает свой набор из n линейно независимых ограничений системы (1.1), (1.2), причем разным вершинам соответствуют разные наборы. Следовательно, число вершин M не превышает C_{s+t}^{n}.

Займемся теперь анализом ребер многогранного множества (его одномерных граней).

Пусть Γ — некоторое ребро многогранного множества M. Выделим все жесткие ограничения Γ. По условию, среди них имеется ровно $n-1$ линейно независимых. Следовательно, ребро Γ расположено на прямой, образованной пересечением $n-1$ линейно независимых гиперплоскостей вида

$$(D_i, X) = d_i, \quad i \in E_\Gamma. \tag{1.15}$$

Пусть $X_0 \in M$ лежит на прямой (1.15), ненулевой вектор e направлен вдоль этой прямой (его компоненты удовлетворяют однородной системе, соответствующей системе (1.15)). В таком случае уравнение рассматриваемой прямой может быть представлено в виде

$$X = X_0 + \lambda e, \quad -\infty < \lambda < \infty. \tag{1.15$'$}$$

Отметим, что это представление является записью общего решения системы уравнений (1.15).

Поскольку система (1.15) — полная совокупность линейно независимых жестких ограничений ребра Γ, можно считать, что X_0 удовлетворяет остальным ограничениям системы (1.1), (1.2), как строгим неравенствам, т. е.

$$(D_i, X_0) < d_i, \quad i \notin E_\Gamma \tag{1.16}$$

(жесткие ограничения, являющиеся линейными комбинациями уравнений (1.15), могут быть отброшены).

Ребро Γ представляет собой общую часть прямой (1.15$'$) и многогранного множества M.

Следовательно, Γ — множество точек X вида (1.15′), где λ определяется из условий

$$(D_i, X_0) + \lambda (D_i, e) \leqslant d_i, \quad i \notin E_\Gamma. \tag{1.17}$$

При анализе системы неравенств (1.17) могут представиться четыре случая:

1. $(D_i, e) = 0$ для всех $i \notin E_{\Gamma_\tau}$.

2. Числа $(D_i, e) \geqslant 0$ для всех $i \notin E_\Gamma$, причем $(D_{i0}, e) > 0$ при некотором i_0.

3. Числа $(D_i, e) \leqslant 0$ для всех $i \notin E_\Gamma$, причем $(D_{i_0}, e) < 0$ при некотором i_0.

4. Среди чисел (D_i, e) имеются как положительные, так и отрицательные.

Разберем каждый из этих случаев в отдельности.

1. В этом случае система неравенств (1.17) никак не ограничивает параметр λ. Следовательно, λ может принимать любое значение между $-\infty$ и ∞, т. е. ребро Γ совпадает с прямой (1.15′). Отметим, что в случае 1 все векторы D_i при $i \notin E_\Gamma$ являются линейными комбинациями векторов D_i при $i \in E_\Gamma$ (см. теорему 2.6 Дополнения), так как, по условию, векторы D_i, $i \notin E_\Gamma$, ортогональны ненулевому вектору e, являющемуся решением системы

$$(D_i, e) = 0, \quad i \in E_\Gamma,$$

ранг которой равен $n-1$.

Таким образом, в рассматриваемом случае ранг системы ограничений многогранного множества равен $n-1$. В дальнейшем мы убедимся, что для существования ребра-прямой отмеченное условие является не только необходимым, но и достаточным.

2. Если $\lambda \leqslant 0$, то

$$(D_i, X_0) + \lambda (D_i, e) \leqslant (D_i, X_0) < d_i,$$

т. е. параметр λ не ограничен снизу.

Верхней границей для λ, очевидно, является

$$\lambda_0 = \min_{(D_i, e) > 0} \frac{d_i - (D_i, X_0)}{(D_i, e)} > 0, \tag{1.18}$$

где минимум берется по тем $i \notin E_\Gamma$, для которых $(D_i, e) > 0$ (множество таких индексов i, по предположению, непусто).

Итак, условия, ограничивающие изменение λ, в данном случае имеют вид

$$-\infty < \lambda \leqslant \lambda_0 < \infty, \tag{1.19}$$

т. е. ребро Γ является полупрямой (лучом) вида (1.15′) при λ, подчиняющемся ограничениям (1.19).

Рассмотрим конец $\overline{X} = X_0 + \lambda_0 e$ луча Γ. Из определения λ_0 вытекает, что для некоторого индекса $i' \notin E_\Gamma$

$$(D_{i'}, \overline{X}) = d_{i'},$$

причем

$$(D_{i'}, e) > 0.$$

Из последнего неравенства следует, что вектор $D_{i'}$ не является линейной комбинацией векторов D_i при $i \in E_\Gamma$. Таким образом, точка $\overline{X}$ удовлетворяет как равенствам n линейно независимым ограничениям многогранного множества M (при $i = i'$ и $i \in E_\Gamma$), т. е. является вершиной M. Очевидно, уравнение, определяющее ребро Γ, в данном случае может быть записано в виде

$$X = \overline{X} + \lambda e, \quad \lambda \leqslant 0,$$

где $\overline{X}$ — вершина M. Если положить $e' = -e$, то уравнение ребра Γ может быть переписано в эквивалентном виде:

$$X = \overline{X} + \lambda' e', \quad \lambda' \geqslant 0.$$

Ненулевой вектор e', направленный вдоль Γ, принято называть *направляющим вектором ребра* Γ.

Итак в случае 2 ребро Γ совпадает с лучом, исходящим из некоторой вершины многогранного множества M.

3. Анализ этого случая проводится точно так же, как и предыдущего.

Ребро Γ представляет собой луч, уравнение которого имеет вид

$$X = \overline{X} + \lambda e, \quad \lambda \geqslant 0,$$

где $\overline{X} = X_0 + \lambda_0 e$ — вершина M, e — направляющий вектор ребра Γ.

Здесь

$$\lambda_0 = \max_{(D_i, e) < 0} \frac{d_i - (D_i, X_0)}{(D_i, e)}.$$

4. В этом случае значения параметра λ, при которых точка $X_0+\lambda e \in M$, ограничены как сверху, так и снизу:

$$\lambda'' \leqslant \lambda \leqslant \lambda'.$$

Здесь

$$\lambda' = \min_{(D_i,\, e)>0} \frac{d_i-(D_i,\, X_0)}{(D_i,\, e)} > 0,$$

$$\lambda'' = \max_{(D_i,\, e)<0} \frac{d_i-(D_i,\, X_0)}{(D_i,\, e)} < 0.$$

Таким образом, ребро Γ совпадает с отрезком, концами которого являются точки

$$\overline{X} = X_0 + \lambda' e, \quad \overline{\overline{X}} = X_0 + \lambda'' e,$$

и, следовательно, имеет уравнение

$$X = \lambda \overline{X} + (1-\lambda)\overline{\overline{X}}, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

Рассуждая так же, как и в случае 2, нетрудно проверить, что $\overline{X}$, $\overline{\overline{X}}$ — вершины многогранного множества M.

Ребро многогранного множества, являющееся прямой или полупрямой, будем называть *неограниченным ребром*. Ребро, представляющее собой отрезок, назовем *ограниченным ребром*.

Очевидно, неограниченные ребра могут быть лишь у неограниченного многогранного множества. Все ребра произвольного многогранника — отрезки с концами в вершинах многогранника. Резюмируя все сказанное относительно ребер многогранного множества, приходим к следующему утверждению:

Теорема 1. 5. *Подмножество Γ многогранного множества M является ребром M в том и только в том случае, если*

а) Γ расположено на прямой, образованной пересечением $n-1$ линейно независимых гиперплоскостей вида (1.15);

б) Γ совпадает либо с прямой, либо с лучом, либо с отрезком;

в) концы Γ (если они имеются) — вершины многогранного множества M.

Доказательство. Необходимость условий теоремы уже установлена. Обратимся к доказательству достаточности этих условий. Пусть Γ удовлетворяет требованиям теоремы. Рассмотрим многогранное множество M_1, система ограничений которого образуется из (1. 1), (1. 2) заменой знаков неравенства знаками равенства при $i \in E_\Gamma$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$.

Покажем, что $\Gamma = M_1$. Многогранное множество M_1 является пересечением M и прямой (1. 15). Очевидно, $\Gamma \subset M_1$. Проверим, что $\Gamma = M_1$. Действительно, в противном случае существует точка $X' \in M_1$, расположенная вне Γ. Поскольку X' лежит на прямой (1. 15), множество Γ является либо лучом, либо отрезком. Пусть X'' — ближайшая к X' вершина Γ. Тогда для достаточно малого $\varepsilon > 0$ точка

$$\overline{X} = X'' + \varepsilon (X'' - X') \in \Gamma.$$

Итак,

$$X'' = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} X' + \frac{1}{1+\varepsilon} \overline{X},$$

причем X', $\overline{X} \in M$. Следовательно, X'' не является вершиной M, что противоречит условию *в* теоремы.

Таким образом, $\Gamma = M_1$, причем размерность $\Gamma = M_1$ равна по условию 1. Поэтому в соответствии со вторым определением грани многогранного множества Γ — ребро M.

§ 2. Теорема о представлении выпуклого многогранного множества

2.1. В п.3.5. гл. 2 было доказано, что произвольная точка выпуклого ограниченного замкнутого множества является выпуклой линейной комбинацией некоторых крайних точек этого множества (теорема о представлении). Применяя этот результат к ограниченному многогранному множеству (выпуклому многограннику) и учитывая, что число его крайних точек-вершин конечно, приходим к следующему утверждению:

Теорема 2.1. *Произвольный выпуклый многогранник, определяемый системой условий* (1.1), (1.2), *совпадает с совокупностью точек X вида*

$$X = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i X_i, \tag{2.1}$$

где X_i, $i = 1, 2, \ldots, N$ — *вершины многогранника,*

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geqslant 0.$$

Таким образом, теорема о представлении полностью определяет структуру выпуклого многогранника. Однако для всякого неограниченного множества утверждение теоремы о представлении заведомо неверно. Действительно, пусть M — неограниченное многогранное множество. Поскольку M обладает конечным числом вершин, то множество точек, представимых в виде (2.1), является ограниченным. Следовательно, оно не может совпадать с M. Таким образом, формула (2.1) не может служить для представления неограниченного многогранного множества. В этом параграфе мы установим теорему о представлении для произвольного выпуклого многогранного множества.

2.2. Предположим вначале, что ранг системы ограничений (1.1), (1.2), определяющей многогранное множество M, равен n — числу компонент вектора X. Этот случай особенно важен, поскольку, как будет показано в § 4, любая задача линейного программирования может быть приведена к эквивалентной задаче, многогранное множество условий которой обладает отмеченным свойством.

Теорема 2.2. *Пусть ранг совместной системы* (1.1), (1.2) *равен* n. *В таком случае выпуклое многогранное множество* M *совпадает с совокупностью точек* X *вида*

$$X = \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i X_i + \sum_{i=1}^{N_2} \beta_i R_i. \tag{2.2}$$

Здесь X_i, $i = 1, 2, \ldots, N_1$, — *вершины* M; R_i, $i = 1, 2, \ldots, N_2$ — *направляющие векторы неограниченных ребер* M; *все числа* α_i, β_i *неотрицательны*; $\sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i = 1$.

Доказательство. Доказательство теоремы будет проведено в два этапа. На первом этапе мы установим возможность представления (2.2) для любой точки $X \in M$. Эта часть доказательства осуществляется методом индукции по размерности ϱ многогранного множества M. На втором этапе будет показано, что любая точка X, представимая в виде (2.2), содержится в M.

I. 1. Допустим, что $\varrho = 1$. Многогранное множество M можно считать собственной гранью максимальной размерности. Следовательно, M, являясь в данном случае одномерной гранью, совпадает либо с прямой, либо с лучом, либо с отрезком (теорема 1.5). Очевидно, первая возможность нереализуема, так как предположение противного означало бы, что ранг системы ограничений, определяющей M, равен $n-1$. Итак, M — либо луч, либо отрезок. В первом случае многогранное множество M может быть представлено в виде

$$X = X_1 + \beta_1 R_1, \quad \beta_1 \geqslant 0,$$

где X_1 — конец луча M, R_1 — направляющий вектор этого луча. Во втором случае представление M имеет вид

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, \quad \alpha_1 \geqslant 0, \quad \alpha_2 \geqslant 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1,$$

где X_1, X_2 — концы отрезка M. Таким образом, при $\varrho = 1$ утверждение теоремы 2.2 доказано.

2. Предположив теперь, что первая часть теоремы 2.2 (утверждающая представимость любой точки $X \in M$ в виде (2.2)) имеет место для $\varrho \leqslant k-1$, докажем ее справедливость для $\varrho = k$. Итак, пусть M — произвольное выпуклое многогранное множество размерности $\varrho = k$. Поскольку при $\varrho = 1$ теорема уже доказана, будем считать $k \geqslant 2$. Без уменьшения общности можно полагать все неравенства (1.1) нежесткими ограничениями M, а векторы D_i, $i = s+1, \ldots; s+t$, линейно независимыми. Тогда, в соответствии с теоремой 1.2, $k + t = n$.

По условию, среди векторов D_i, $i = 1, \ldots, s+t$, имеется n линейно независимых. Следовательно, существуют такие k векторов, отвечающих нежестким ограничениям M, которые вместе с векторами $D_{s+1}, \ldots, D_{s+t}$, соответствующими жестким ограничениям M, составляют линейно независимую систему. Поскольку $k \geqslant 2$, то во всяком случае найдется пара векторов D_{i_1} и D_{i_2} $(1 \leqslant i_1, i_2 \leqslant s)$ таких, что система D_{i_1}, D_{i_2}, $D_{s+1}, \ldots, D_{s+t}$ — линейно независима.

3. Рассмотрим произвольную точку $X_0 \in M$. Допустим вначале, что эта точка удовлетворяет всем нежестким ограничениям M, как строгим неравенствам, т. е.

$$(D_i, X_0) < d_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, s. \tag{2.3}$$

Пусть $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — некоторое решение системы линейных уравнений

$$\left.\begin{array}{ll}(D_{i_\lambda},\ Y)=(-1)^\lambda, & \lambda=1,2,\\ (D_i,\ Y)=0, & i=s+1,\dots,\ s+t.\end{array}\right\} \qquad (2.4)$$

Заметим, что разрешимость системы (2.4) следует из линейной независимости векторов D_{i_1}, D_{i_2}, $D_{s+1},\dots,$ D_{s+t}.

Положим

$$X(\theta)=X_0+\theta Y.$$

По построению вектор $X(\theta)$ удовлетворяет условиям (1.2) при любом θ. Покажем, что условиям (1.1) этот вектор удовлетворяет лишь при

$$\theta'\leqslant\theta\leqslant\theta'', \qquad (2.5)$$

где $-\infty<\theta<0$, $0<\theta''<\infty$. В самом деле,

$$(D_i,\ X(\theta))=(D_i,\ X_0)+\theta(D_i,\ Y).$$

Поэтому неравенство $(D_i,\ X(\theta))\leqslant d_i$ возможно только при

$$\theta=\begin{cases}\leqslant\dfrac{d_i-(D_i,\ X_0)}{(D_i,\ Y)}, & \text{если } (D_i,\ Y)>0,\\[2mm] \geqslant\dfrac{d_i-(D_i,\ X_0)}{(D_i,\ Y)}, & \text{если } (D_i,\ Y)<0.\end{cases}$$

Следовательно, $X(\theta)$ удовлетворяет всем условиям (1.1) в том и только в том случае, если имеет место (2.5) при

$$\theta'=\max_{(D_i,\ Y)<0}\frac{d_i-(D_i,\ X_0)}{(D_i,\ Y)},$$

$$\theta''=\min_{(D_i,\ Y)>0}\frac{d_i-(D_i,\ X_0)}{(D_i,\ Y)}$$

$$(i=1,2,\dots,\ s).$$

В соответствии с построением вектора Y,

$$(D_{i_1},\ Y)<0,\quad (D_{i_2},\ Y)>0.$$

Поэтому $-\infty<\theta'$, $\theta''<\infty$.

Из (2.3) следует, что $\theta'<0$, $\theta''>0$. Рассмотрим точки $X'=X(\theta')$, $X''=X(\theta'')$. Очевидно,

$$X_0=\delta_1X'+\delta_2X'', \qquad (2.6)$$

где $\delta_1 = \frac{\theta''}{\theta'' - \theta'}$, $\delta_2 = \frac{\theta'}{\theta' - \theta''}$. Выражения для δ_1 и δ_2 показывают, что $\delta_1 \geqslant 0$, $\delta_2 \geqslant 0$, $\delta_1 + \delta_2 = 1$, т. е. точка X_0 является выпуклой линейной комбинацией точек X' и X''.

В соответствии с выбором чисел θ' и θ'' найдутся нежесткие ограничения M с индексами i' и i'' такие, что

$$(D_{i'}, X') = d_{i'}, \quad (D_{i''}, X'') = d_{i''}.$$

Отсюда следует, что X' (X'') принадлежит грани M' (M'') многогранного множества M, система условий которой образуется из (1.1), (1.2) заменой неравенства с номером i' (i'') на точное равенство. Поскольку $(D_{i'}, Y) \neq 0$, $(D_{i''}, Y) \neq 0$, то системы векторов

$$D_{i'}, D_{s+1}, \ldots, D_{s+t},$$
$$D_{i''}, D_{s+1}, \ldots, D_{s+t}$$

линейно независимы. Поэтому размерности граней M' и M'' не превосходят

$$n - (t + 1) = k - 1.$$

Учитывая предположение индукции, можно утверждать, что точки $X' \in M'$ и $X'' \in M''$ могут быть представлены в виде

$$X' = \sum_{i=1}^{N_1'} \alpha_i' X_i' + \sum_{i=1}^{N_2'} \beta_i' R_i', \tag{2.7}$$

$$X'' = \sum_{i=1}^{N_1''} \alpha_i'' X_i'' + \sum_{i=1}^{N_2''} \beta_i'' R_i''. \tag{2.8}$$

Здесь X_i' (X_i'') — вершины многогранного множества M' (M''); R_i' (R_i'') — направляющие векторы неограниченных ребер M' $(M'')_{N_1'}$. Все числа α_i', α_i'', β_i', β_i'' неотрицательны;

$$\sum_{i=1}^{N_1'} \alpha_i' = 1, \quad \sum_{i=1}^{N_i''} \alpha_i'' = 1.$$

4. Покажем, что точки X_i', X_i'' являются вершинами многогранного множества M, а R_i'' и R_i' — направляющие векторы неограниченных ребер рассматриваемого множества. Для

этого заметим, что если M_2 — грань многогранного множества M_1, которое в свою очередь является гранью многогранного множества M, то M_2 — грань M. В самом деле, пусть

$$X = \gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2, \tag{2.9}$$

где $X \in M_2$; $X_1, X_2 \in M$; $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$; γ_1, $\gamma_2 \geqslant 0$. Поскольку $M_2 \subset M_1$, то $X \in M_1$. Отсюда, в соответствии с первым определением грани, вытекает, что X_1, $X_2 \in M_1$. Применяя теперь это определение к грани M_2 многогранного множества M_1, получаем искомое включение X_1, $X_2 \in M_2$.

Итак, для произвольной точки $X \in M_2$ представление (2.9) возможно лишь в случае, когда участвующие в этом представлении точки X_1, X_2 также содержатся в M_2.

Используя снова первое определение грани, приходим к выводу о том, что M_2 является гранью M. Отсюда, в частности, следует приведенное выше утверждение относительно точек X_i', X_i'' и векторов R_i', R_i''.

Подставляя в равенство (2.6) вместо X' и X'' их выражения из (2.7) и (2.8) соответственно, получаем представление точки X_0 в виде суммы выпуклой линейной комбинации точек X_i' и X_i'' и неотрицательной линейной комбинации векторов R_i' и R_i''. Поскольку X_i', X_i'' — вершины M, а R_i', R_i'' — направляющие векторы неограниченных ребер M, приходим к выводу, что для любой точки X_0, удовлетворяющей неравенствам (2.3), представление (2.2) действительно имеет место.

5. Допустим теперь, что точка $X_0 \in M$ не удовлетворяет условиям (2.3), т. е. существует нежесткое ограничение M с номером r $(1 \leqslant r \leqslant s)$, для которого

$$(D_r, X) = d_r. \tag{2.10}$$

В таком случае точка X_0 принадлежит многогранному множеству M_0, определяемому условиями (1.1) при $i \neq r$, (1.2) и равенством (2.10).

Отметим, что система векторов

$$D_r, D_{s+1}, D_{s+2}, \ldots, D_{s+t} \tag{2.11}$$

линейно независима. В самом деле, по предположению, r-е неравенство системы (1.1) — нежесткое ограничение M.

Следовательно, найдется такая точка $X' \in M$, что

$$(D_r, X') = d < d_r.$$

Положим

$$Y = X_0 - X'.$$

Вектор Y удовлетворяет системе равенств

$$\left.\begin{aligned} &(D_i, Y) = 0, \qquad i = s+1, \ldots, s+t, \\ &(D_r, Y) = d_r - d > 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

Соотношения (2.12) означают, что вектор D_r не может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $D_{s+1}, \ldots, D_{s+t}$. Учитывая, далее, линейную независимость векторов, отвечающих жестким ограничениям M, приходим к выводу о линейной независимости системы векторов (2.11). Таким образом, ранг системы жестких ограничений многогранного множества M_0 не может быть меньшим, чем $t+1$, и, следовательно, размерность этого множества не превосходит

$$n - (t+1) = k - 1.$$

Применяя далее, как и в пункте 3 доказательства, предположение индукции, убеждаемся в возможности представления точки X в виде (2.2).

Итак, опираясь на предположение индукции, мы доказали, что представление (2.2) имеет место для любой точки многогранного множества M, размерность ϱ которого равна $k \geqslant 2$. Учитывая, что при $\varrho = 1$ справедливость теоремы уже установлена, получаем доказательство первой части теоремы.

II.6. Осталось показать, что любая точка X, представимая в виде (2.2), содержится в многогранном множестве M.

Прежде всего заметим, что $N_1 \geqslant 1$. Действительно, если это не так, то представление (2.2) содержит лишь векторы R_i. Множество этих векторов непусто, так как, по предположению, существует точка $X \in M$, которую в соответствии с первой частью теоремы можно представить в виде (2.2). Следовательно, M обладает неограниченными ребрами, каждое из которых в данном случае — луч (по условию ранг системы (1.1)—(1.2) равен n). Конец любого такого луча — вершина M. Поэтому, вопреки допущению, у множества M имеются вершины. Итак, многогранное множество M всегда обладает крайними точками.

7. Пусть R — направляющий вектор произвольного неограниченного ребра многогранного множества M.

При анализе неограниченных ребер многогранного множества (§ 1) было показано, что

$$(D_i, R) \leqslant 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, s, \tag{2.13}$$

$$(D_i, R) = 0, \qquad i = s+1, \ldots, s+t. \tag{2.14}$$

Рассмотрим теперь любую точку X_0 вида

$$X_0 = \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i X_i + \sum_{i=1}^{N_2} \beta_i R_i,$$

где все числа α_i, β_i неотрицательны и $\sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i = 1$. Покажем, что $X_0 \in M$. Действительно,

$$(D_i, X_0) = \sum_{k=1}^{N_1} \alpha_k (D_i, X_k) + \sum_{k=1}^{N_2} \beta_k (D_i, R_k).$$

Учитывая неравенства (1.1), которым удовлетворяют точки X_k, и неравенства (2.13), справедливые для каждого вектора R_k, имеем для $1 \leqslant i \leqslant s$

$$(D_i, X_0) \leqslant d_i \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i = d_i.$$

При $s+1 \leqslant i \leqslant s+t$ с помощью равенств (1.2) и (2.14) получаем

$$(D_i, X_0) = d_i \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i = d_i.$$

Итак, точка X_0 удовлетворяет всем условиям (1.1), (1.2), т. е. принадлежит многогранному множеству M. Тем самым вторая часть теоремы также доказана.

Теорема 2.2 содержит в качестве частного случая результат теоремы 2.1. Действительно, если M — выпуклый многогранник, то M не имеет неограниченных ребер, т. е. $N_2 = 0$. В этом случае представление (2.2) переходит в представление (2.1), фигурирующее в теореме 2.1.

В процессе доказательства теоремы 2.2 (п. 6) было установлено одно важное предложение, сформулированное ниже в виде теоремы.

Теорема 2.3. *Если ранг системы ограничений* (1.1), (1.2), *определяющей многогранное множество M, равен n, то M обладает хотя бы одной вершиной.*

Согласно теореме 1.4 каждой вершине многогранного множества M отвечает n линейно независимых ограничений системы (1.1), (1.2), которым эта точка удовлетворяет как равенствам. Поэтому наличие у M хотя бы одной вершины означает, что ранг системы (1.1), (1.2) равен n. Объединяя этот вывод с теоремой 2.3, приходим к следующему результату:

Теорема 2.4. *Для того чтобы непустое многогранное множество M имело хотя бы одну вершину, необходимо и достаточно, чтобы ранг системы ограничений* (1.1), (1.2) *был равен n.*

2.3. Теорема 2.2 устанавливает структуру многогранного множества M для случая, когда ранг системы условий (1.1), (1.2) в точности равен n — размерности пространства точек X. Исследуем теперь общий случай, в котором ранг системы ограничений (1.1), (1.2) равен $r \leqslant n$.

Итак, пусть ранг системы векторов D_i, $i=1, 2, \ldots, s+t$, равен $r<n$. Это означает, что в матрице $\|d_{ij}\|_{s+t,\,n}$ имеется r линейно независимых столбцов, причем остальные $n-r$ столбцов матрицы являются их линейными комбинациями.

Обозначим j-й столбец матрицы $\|d_{ij}\|_{s+t,\,n}$ через

$$D^{(j)}=(d_{1j},\ d_{2j},\ \ldots,\ d_{s+t,\,j})^T, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{2.15}$$

Тогда система условий (1.1), (1.2) может быть записана в виде

$$\sum_{j=1}^{n} x_j D^{(j)} \leqq D. \tag{2.16}$$

Здесь $D=(d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_{s+t})^T$; знак $\leqq$ указывает, что первые s составляющих векторного соотношения (2.16) являются неравенствами, а последующие t составляющих — равенствами.

По условию максимальная линейно независимая подсистема системы векторов $D^{(j)}$, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, состоит из

r векторов. Без ограничения общности можно принять, что этими векторами являются первые r векторов системы (2.15)

$$D^{(1)},\ D^{(2)},\ \ldots,\ D^{(r)}. \tag{2.17}$$

Выразим векторы $D^{(j)}$ при $j > r$ в виде линейных комбинаций векторов (2.17)

$$D^{(j)} = \sum_{i=1}^{r} \delta_{ij} D^{(i)}. \tag{2.18}$$

С помощью равенства (2.18) система ограничений (2.16) легко приводится к эквивалентной форме

$$\sum_{i=1}^{r} \Big(x_i + \sum_{j=r+1}^{n} x_j \delta_{ij}\Big) D^{(i)} \leqq D. \tag{2.19}$$

Рассмотрим многогранное множество M_0, система условий которого состоит из (2.16) (или (2.19)) и уравнений

$$x_{r+1} = x_{r+2} = \ldots = x_n = 0. \tag{2.20}$$

Как нетрудно видеть, ранг системы ограничений многогранного множества M_0 равен в точности n.

Установим связь между многогранными множествами M и M_0, которая позволит использовать для анализа структуры M результаты, полученные ранее.

Обозначим через Π_{n-r} $(n-r)$-мерное подпространство, которое образовано пересечением r $(n-1)$-мерных подпространств (гиперплоскостей), задаваемых линейно независимыми однородными уравнениями

$$L_i(X) = x_i + \sum_{j=r+1}^{n} \delta_{ij} x_j = 0, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r. \tag{2.21}$$

Лемма 2.1. *Многогранное множество M является суммой*) многогранного множества M_0 и подпространства Π_{n-r}:*

$$M = M_0 + \Pi_{n-r}.$$

---

*) По определению, множество A является суммой множеств B и C $(A = B + C)$, если условие $X \in A$ эквивалентно представлению $X = Y + Z$, где $Y \in B$, $Z \in C$.

Доказательство. 1. Пусть $X' \in M_0$, $X'' \in \Pi_{n-r}$. Покажем, что в этом случае

$$X = X' + X'' \in M.$$

Используя представление условий, определяющих M, в виде (2.19), имеем

$$\sum_{j=1}^{n} x_j D^{(j)} = \sum_{i=1}^{r} \left(x_i + \sum_{j=r+1}^{n} \delta_{ij} x_j\right) D^{(i)} = \sum_{i=1}^{r} L_i(X) D^{(i)} =$$
$$= \sum_{i=1}^{r} L_i(X') D^{(i)} + \sum_{i=1}^{r} L_i(X'') D^{(i)}.$$

По условию,

$$\sum_{i=1}^{r} L_i(X') D^{(i)} \leqq D \qquad (X' \in M_0);$$
$$L_1(X'') = \ldots = L_r(X'') = 0 \quad (X'' \in \Pi_{n-r}),$$

откуда

$$\sum_{j=1}^{n} x_j D^{(j)} \leqq D,$$

т. е. $X \in M$.

2. Допустим теперь, что X — произвольная точка, принадлежащая M. Положим

$$x'_j = \begin{cases} L_j(X) & \text{для } j = 1, 2, \ldots, r, \\ 0 & \text{для } j = r+1, \ldots, n, \end{cases}$$
$$x''_j = x_j - x'_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Учитывая соотношения (2.19), нетрудно проверить, что

$$X' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \in M_0.$$

Из определения точек X' и $X'' = (x''_1, x''_2, \ldots, x''_n)$ имеем

$$L_i(X'') = L_i(X) - L_i(X') = L_i(X) - x'_i =$$
$$= L_i(X) - L_i(X) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Следовательно,

$$X'' \in \Pi_{n-r}.$$

Итак, любая точка $X \in M$ может быть представлена как сумма точек $X' \in M_0$ и $X'' \in \Pi_{n-r}$.

Лемма доказана.

Из леммы 2.1, в частности, следует, что равенство $r=n$ является необходимым условием ограниченности многогранного множества M.

Установим соответствие между гранями многогранных множеств M и M_0.

Назовем грани $\Gamma \in M$ и $\Gamma_0 \in M_0$ *соответствующими*, если ограничения, определяющие Γ_0, отличаются от системы условий грани Γ только дополнительными равенствами (2.20).

В соответствии с леммой 2.1 грань Γ является суммой грани Γ_0 и $(n-r)$-мерного подпространства Π_{n-r}. Как нетрудно проверить (см. упражнение 4), размерности $\varrho(\Gamma)$ и $\varrho(\Gamma_0)$ граней Γ и Γ_0 соответственно связаны соотношением

$$\varrho(\Gamma)=\varrho(\Gamma_0)+n-r, \tag{2.22}$$

где r — ранг системы условий, определяющей многогранное множество M. Используя теорему 2.4 для многогранного множества M_0 и учитывая равенство (2.22), приходим к следующему утверждению:

Теорема 2.5 (обобщение теоремы 2.4). *Минимальная размерность граней многогранного множества M равна $n-r$, где r — ранг системы ограничений* (1.1), (1.2).

Отметим, что в соответствии с леммой 2.1 произвольная грань M минимальной размерности совпадает с пересечением гиперплоскостей

$$x_i+\sum_{j=r+1}^{n}\delta_{ij}x_j=\bar{x}_i+\sum_{j=r+1}^{n}\delta_{ij}\bar{x}_j, \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ r, \tag{2.23}$$

где $\bar{X}=(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \ldots,\ \bar{x}_n)$ — некоторая вершина множества M_0.

Утверждение леммы 2.1 позволяет перенести основную теорему этого параграфа — теорему 2.2 — на случай произвольного многогранного множества.

Теорема 2.6 (теорема о представлении многогранного множества). *Произвольное многогранное множество M совпадает с совокупностью точек X вида*

$$X=\sum_{i=1}^{N_1}\alpha_iX_i+\sum_{i=1}^{N_2}\beta_iR_i+\sum_{i=1}^{n-r}\gamma_iR_i', \tag{2.24}$$

где $\sum_{i=1}^{N_1}\alpha_i=1;\ \alpha_i\geqslant 0,\ \beta_i\geqslant 0;$

X_i — вершины M_0; R_i — направляющие векторы неограниченных ребер M_0; R'_l, $l = 1, 2, \ldots, n-r$ — любая полная система линейно независимых векторов, содержащихся в подпространстве Π_{n-r}; r — ранг системы ограничений, определяющей M.

Теорема 2.6 является очевидным следствием теоремы 2.2 и леммы 2.1.

2.4. Для иллюстрации результатов настоящего параграфа приведем два численных примера.

Пример 1. Рассмотрим многогранное множество M_1, определяемое системой условий

$$\left.\begin{aligned} -x_1 - x_2 &\leqslant 0, \\ -x_1 + x_2 &\leqslant 0, \\ -x_2 &\leqslant 2, \\ -x_1 + 2x_2 &\leqslant 2. \end{aligned}\right\} \qquad (2.25)$$

Изображение M_1 в плоскости x_1Ox_2 приведено на рис. 2.1. Из рис. 2.1 видно, что гранями M_1 минимальной размерности являются точки $X_1 = (2, -2)$, $X_2 = (2, 2)$, $X_3 = (0, 0)$. Это обстоятельство находится в соответствии с теоремой 2.4, поскольку ранг системы (2.25) равен $n = 2$ (векторы $D_1 = (-1, -1)$, $D_2 = (-1, 1)$ — линейно независимы). Многогранное множество M_1 неограничено и, следовательно, должно иметь неограниченные ребра. Из рис. 2.1 видно, что у этого множества два неограниченных ребра, которые исходят из точек X_1 и X_2 и имеют в качестве направляющих векторов $R_1 = (1, 0)$ и $R_2 = (2, 1)$.

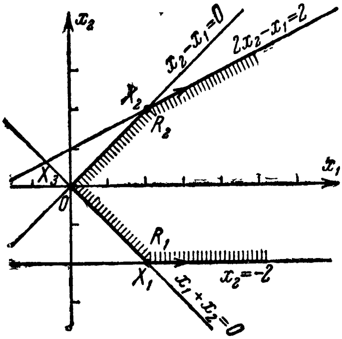


Рис. 2.1.

Согласно теореме 2.2 многогранное множество M_1 может быть представлено в виде суммы произвольной выпуклой комбинации точек X_1, X_2, X_3 и произвольной неотрицательной комбинации векторов R_1 и R_2, т. е. M_1 совпадает с совокупностью точек

$$X = \alpha_1(2, -2) + \alpha_2(2, 2) + \alpha_3(0, 0) + \beta_1(1, 0) + \beta_2(2, 1),$$

где $\alpha_i \geqslant 0$, $\beta_i \geqslant 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, или

$$X = (2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \beta_1 + 2\beta_2, \ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \beta_2),$$

где

$$\alpha_1 \geqslant 0, \quad \alpha_2 \geqslant 0, \quad \beta_1 \geqslant 0, \quad \beta_2 \geqslant 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 \leqslant 1.$$

Пример 2. Рассмотрим многогранное множество M, определяемое системой ограничений

$$\begin{aligned} -x_1-x_2-2x_3 &\leqslant 0,\\ -x_1+x_2 \qquad &\leqslant 0,\\ -x_2 \qquad -x_3 &\leqslant 2,\\ -x_1+2x_2+x_3 &\leqslant 2. \end{aligned} \tag{2.26}$$

В данном случае $n=3$, однако, как легко заметить, ранг системы (2.26) равен 2. Положим

$$D^{(1)}=(-1,\ -1,\ 0,\ -1)^T,$$
$$D^{(2)}=(-1,\ 1,\ -1,\ 2)^T,$$
$$D^{(3)}=(-2,\ 0,\ -1,\ 1)^T.$$

Очевидно, векторы $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$ линейно независимы, а $D^{(3)}=D^{(1)}+D^{(2)}$.

Многогранное множество M_0 в соответствии с общим правилом определяется условиями (2.26) и дополнительным равенством

$$x_3=0.$$

Мы видим, что M_0 совпадает с многогранным множеством M_1, рассмотренным в предыдущем примере. Поскольку в данном случае $n-r=1$, подпространство $\Pi_{n-r}=\Pi_1$ является прямой. Преобразовав условия (2.26) к виду

$$\begin{aligned} -(x_1+x_3)-(x_2+x_3) &\leqslant 0,\\ -(x_1+x_3)+(x_2+x_3) &\leqslant 0,\\ -(x_2+x_3) &\leqslant 2,\\ -(x_1+x_3)+2(x_2+x_3) &\leqslant 2, \end{aligned}$$

получаем, что эта прямая определяется соотношениями

$$x_1+x_3=0, \quad x_2+x_3=0. \tag{2.27}$$

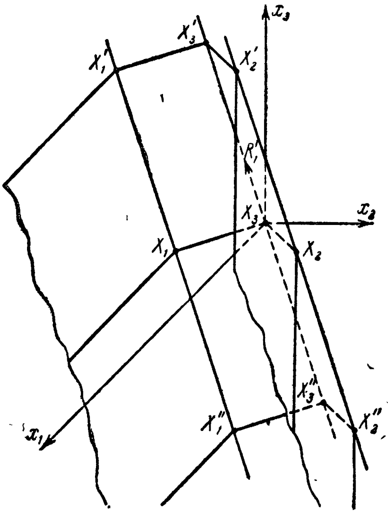


Рис. 2.2.

В соответствии с леммой 2.1 многогранное множество M может рассматриваться как совокупность прямых, параллельных (2.27) и проходящих через точки M_0. Изображение M дано на рис. 2.2.

Поскольку $n-r=1$, минимальная размерность граней M равна 1. Многогранное множество M имеет три грани минимальной размерности: прямые $X_1'X_1''$, $X_2'X_2''$, $X_3'X_3''$. Каждая из этих прямых соответствует определенной вершине M_0. Выпишем, основываясь на формуле (2.24), общее представление точек $X \in M$.

В данном случае $M_0 = M_1$. Поэтому $X_1 = (2, -2, 0)$, $X_2 = (2, 2, 0)$, $X_3 = (0, 0, 0)$, $R_1 = (1, 0, 0)$, $R_2 = (2, 1, 0)$. Вектор R_1' (единственный, так как $n - r = 1$) является направляющим вектором прямой (2.27):

$$R_1' = (-1, -1, 1).$$

Таким образом, многогранное множество M представляет собой совокупность точек X вида

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \beta_1 R_1 + \beta_2 R_2 + \gamma_1 R_1'$$

или

$$X = (2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \beta_1 + 2\beta_2 - \gamma_1, \ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \beta_2 - \gamma_1, \ \gamma_1),$$

где

$$\alpha_1 \geqslant 0, \quad \alpha_2 \geqslant 0, \quad \beta_1 \geqslant 0, \quad \beta_2 \geqslant 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 \leqslant 1.$$

§ 3. Эквивалентность двух определений выпуклого многогранного множества

3.1. Теорему 2.2, устанавливающую представление (2.2) для произвольного многогранного множества при $r = n$, можно переформулировать следующим образом:

Любое многогранное множество M при $r = n$ может быть представлено как сумма выпуклой комбинации одной группы точек (вершин M) и неотрицательной линейной комбинации другой группы точек (направляющих векторов неограниченных ребер M).

Нетрудно заметить, что любое s-мерное подпространство является неотрицательной линейной комбинацией конечного числа точек. Действительно, если $X_1, X_2, \ldots, X_s$ — произвольная линейно независимая система векторов этого подпространства, то в качестве искомой системы может быть принята совокупность точек вида

$$X_1, X_2, \ldots, X_s; \ -X_1, -X_2, \ldots, -X_s.$$

Выбранная система точек состоит из $2s$ элементов. Можно показать, что минимальная система, обладающая теми же свойствами, содержит всего $s+1$ точку (упражнение 5). Теперь мы в состоянии переформулировать общую теорему о представлении многогранного множества (теорема 2.6), подобно тому как это было сделано для теоремы 2.2.

Произвольное многогранное множество может быть представлено как сумма выпуклой и неотрицательной линейных комбинаций некоторых систем точек. В этом параграфе мы установим обратное утверждение, которое позволит ввести новое определение многогранного множества, полезное в ряде теоретических вопросов линейного программирования.

3.2. Выделим один важный для последующего изложения класс выпуклых многогранных множеств (определение выпуклого конуса, расположенного в произвольном конечномерном пространстве, см. в п. 3.2 Дополнения).

Многогранным выпуклым конусом назовем выпуклое многогранное множество, обладающее свойствами конуса.

Другими словами, многогранное множество M, определяемое ограничениями (1.1), (1.2), является многогранным конусом с вершиной в точке X_0 (слово выпуклый мы для краткости опускаем), если из условия $X \in M$ вытекает, что

$$X_0 + \lambda (X - X_0) \in M$$

при любом $\lambda \geqslant 0$.

Пусть M — многогранный конус с вершиной в точке X_0 и $X \in M$. Тогда при любом i, $1 \leqslant i \leqslant s$,

$$(D_i,\ X - X_0) \leqslant 0.$$

Действительно, в противном случае нашлось бы такое $\lambda > 0$, что для некоторого i

$$(D_i,\ X_0 + \lambda (X - X_0)) > d_i.$$

Полученное неравенство противоречит свойству конуса M, согласно которому

$$X_0 + \lambda (X - X_0) \in M \quad \text{при любом} \quad \lambda \geqslant 0.$$

Поскольку $X_0 \in M$,

$$(D_i,\ X - X_0) = 0$$

при $s \leqslant i \leqslant s + t$. Итак, любая точка $X \in M$ удовлетворяет системе ограничений

$$(D_i,\ X) \leqslant (D_i,\ X_0), \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ s, \tag{3.1}$$

$$(D_i,\ X) = (D_i,\ X_0), \qquad i = s + 1,\ \ldots,\ s + t. \tag{3.2}$$

Очевидно, произвольная точка, подчиняющаяся условиям (3.1), (3.2), удовлетворяет ограничениям (1.1), (1.2) и, следовательно, содержится в многогранном конусе M.

Таким образом, система условий произвольного многогранного конуса может быть приведена к виду (3.1), (3.2). Легко видеть, что любое множество, определяемое условиями (3.1), (3.2), является многогранным конусом.

Обозначим многогранный конус, задаваемый системой ограничений (3.1), (3.2), через K. Поскольку вершина X_0 конуса K удовлетворяет системе уравнений

$$(D_i, X) = d_i = (D_i, X_0), \qquad i = 1, 2, \ldots, s+t,$$

вектор $D = (d_1, d_2, \ldots, d_{s+t})^T$ является линейной комбинацией векторов

$$D^{(j)}, \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Таким образом, ранг системы векторов

$$D, \ D^{(j)}, \ j = 1, 2, \ldots, n,$$

равен рангу подсистемы

$$D^{(j)}, \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Учитывая, далее, что ранги систем векторов

$$D_i, \ i = 1, 2, \ldots, s+t; \quad \tilde{D}_i = (d_{i1}, \ldots, d_{in}, d_i), \\ i = 1, 2, \ldots, s+t,$$

равны соответственно рангам систем

$$D^{(j)}, \ j = 1,2, \ldots, n; \quad D, \ D^{(j)}, \ j = 1, 2, \ldots, n,$$

приходим к выводу о совпадении рангов систем векторов

$$D_i, \ i = 1,2, \ldots, n \ \text{ и } \tilde{D}_i, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Поэтому если $D_{i_1}, \ldots, D_{i_r}$ — максимальная линейно независимая подсистема системы векторов D_i, $i = 1,2, \ldots, s+t$, то векторы $\tilde{D}_{i_1}, \ldots, \tilde{D}_{i_r}$ составляют максимальную линейно независимую подсистему для системы векторов

$$\tilde{D}_i, \ i = 1, 2, \ldots, s+t.$$

Отсюда вытекает, что точка X, удовлетворяющая системе уравнений

$$(D_{i_\alpha}, X) = d_{i_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, r, \tag{3.3}$$

где D_{i_α}, $\alpha=1, 2, \ldots, r$ — максимальная линейно независимая подсистема системы векторов D_i, $i=1, 2, \ldots, s+t$, обращает все условия (3.1), (3.2) в точные равенства.

Теперь нетрудно установить единственность минимальной грани многогранного конуса K. В самом деле, если X — точка некоторой минимальной грани конуса K, совокупность условий которого имеет ранг r, то она должна удовлетворять системе уравнений вида (3.3) (теорема 2.5) и, следовательно, обращать все ограничения (3.1), (3.2) в точные равенства. Отсюда следует, что любая минимальная грань конуса K совпадает с множеством решений системы уравнений

$$(D_i, X)=d_i, \quad i=1, 2, \ldots, s+t.$$

Поэтому многогранный конус K имеет только одну грань минимальной размерности. В соответствии с теоремой 2.5 размерность минимальной грани конуса K равна $n-r$, где r — ранг системы ограничений (3.1), (3.2). В частности, при $r=n$ точка X_0 — вершина конуса K — является единственной крайней точкой K. В этом случае точку X_0 принято называть *острием* конуса K.

Заметим, что понятия вершины многогранного конуса и вершины многогранного множества, вообще говоря, не эквивалентны. Они совпадают только в том случае, если вершина конуса является его острием. В противном случае в качестве вершины конуса может быть принята любая точка, принадлежащая его грани минимальной размерности. Ни одна из этих точек, естественно, не является вершиной конуса, рассматриваемого как многогранное множество.

Отмеченное несоответствие понятий связано с тем, что сложившаяся к настоящему времени терминология для конусов и многогранных множеств создавалась независимо.

Впрочем, это несоответствие не сможет привести к недоразумениям.

Говоря о вершине конуса, мы всегда будем иметь в виду произвольную точку, принадлежащую его грани минимальной размерности.

Используя теорему 2.6, можно утверждать, что произвольный выпуклый многогранный конус K совпадает с совокупностью точек X вида

$$X=X_0+\sum_{i=1}^{N}\beta_i R_i, \qquad (3.4)$$

где $\beta_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, N_1$; X_0 — вершина K; R_i — некоторый набор векторов.

3.3. Рассмотрим множество T, состоящее из точек X, представимых в виде

$$X = \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i X_i + \sum_{i=1}^{N_2} \beta_i R_i, \tag{3.5}$$

где $\alpha_i \geqslant 0$, $\beta_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i = 1$. Основная цель этого параграфа — доказать, что T — выпуклое многогранное множество. Для этого установим предварительно три леммы.

Лемма 3.1. *Пусть векторы* $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *линейно независимы и*

$$\left| \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A_i \right| \leqslant c_1.$$

Тогда существует такое число c_2*, не зависящее от коэффициентов* α_i, что

$$\sum_{i=1}^{k} |\alpha_i| < c_2.$$

Доказательство. Предположим противное, т. е. пусть существует последовательность векторов

$$\alpha^{(s)} = (\alpha_1^{(s)}, \alpha_2^{(s)}, \ldots, \alpha_k^{(s)}),$$

такая, что

$$\left| \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^{(s)} A_i \right| \leqslant c_1 \tag{3.6}$$

и при этом

$$\lim_{s \to \infty} \sum_{i=1}^{k} \left| \alpha_i^{(s)} \right| = \infty. \tag{3.7}$$

Положим

$$\bar{\alpha}^{(s)} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{k} |\alpha_i^{(s)}|} \alpha^{(s)}.$$

В таком случае из (3.6) и (3.7) получаем

$$\lim_{s \to \infty} \left| \sum_{i=1}^{k} \bar{\alpha}_i^{(s)} A_i \right| = 0. \tag{3.8}$$

В соответствии с определением $\bar{\alpha}^{(s)}$

$$\sum_{i=1}^{k} |\bar{\alpha}_i^{(s)}| = 1 \tag{3.9}$$

для любого s. Поэтому из последовательности векторов $\{\bar{\alpha}^{(s)}\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{\bar{\alpha}^{(s_t)}\}_t$

$$\lim_{t\to\infty} \bar{\alpha}_i^{(s_t)} = \bar{\alpha}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Отсюда, учитывая (3.8), имеем

$$\sum_{i=1}^{k} \bar{\alpha}_i A_i = 0.$$

Поскольку векторы $A_1, A_2, \ldots, A_k$ линейно независимы, то

$$\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2 = \ldots = \bar{\alpha}_k = 0.$$

Но из (3.9) вытекает, что

$$\sum_{i=1}^{k} |\bar{\alpha}_i| = 1.$$

Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения леммы.

Лемма 3.2. *Для любой точки X, представимой в виде* (3.5), *найдутся такие линейно независимые векторы R_{i_1}, $R_{i_2}, \ldots, R_{i_l}$ из системы R_i, $i = 1, 2, \ldots, N_2$, что*

$$X = \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i X_i + \sum_{\lambda=1}^{l} \bar{\beta}_\lambda R_{i_\lambda}, \tag{3.10}$$

где $\alpha_i \geqslant 0$, $\bar{\beta}_{i_\lambda} > 0$, $\sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i = 1$.

Доказательство. Рассмотрим представление точки X в виде (3.5) с минимальным числом положительных коэффициентов β_i. Пусть (3.10) является одним из таких представлений. Покажем, что в таком случае векторы R_{i_1}, $R_{i_2}, \ldots, R_{i_l}$ линейно независимы.

Действительно, допуская противное, получаем равенство

$$\sum_{\lambda=1}^{l} t_\lambda R_{i_\lambda} = 0, \tag{3.11}$$

в котором не все числа t_λ равны нулю. Без ограничения общности можно считать, что одно из чисел $t_\lambda > 0$ (в случае, если это условие не выполняется, можно умножить обе части равенства (3.11) на -1). Умножая (3.11) на $\theta > 0$ и вычитая результат из (3.10), получим

$$X = \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i X_i + \sum_{\lambda=1}^{l} (\bar{\beta}_\lambda - \theta t_\lambda) R_{i_\lambda}.$$

Если теперь положить

$$\theta = \min_{t_\lambda > 0} \frac{\bar{\beta}_\lambda}{t_\lambda},$$

то приходим к новому представлению точки X, в котором число положительных коэффициентов β_i не превышает

$$l - 1 < l.$$

Полученное противоречие убеждает нас в невозможности равенства (3.11) и, следовательно, в линейной независимости системы векторов

$$R_{i_1}, R_{i_2}, \ldots, R_{i_l}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Множество* Т *точек* X, представимых в виде (3.5), является замкнутым.

Доказательство. Рассмотрим произвольную сходящуюся последовательность точек $X^{(t)} \in \mathrm{T}$. Для доказательства леммы необходимо показать, что

$$\lim_{t \to \infty} X^{(t)} = X^{(0)} \in \mathrm{T}. \tag{3.12}$$

Поскольку $X^{(t)}$ при любом t содержится в Т,

$$X^{(t)} = \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i^{(t)} X_i + \sum_{\lambda=1}^{l_t} \beta_{\lambda, t} R_{i_{\lambda, t}},$$

где $\alpha_i^{(t)} \geqslant 0$, $\beta_{\lambda, t} > 0$, $\sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i^{(t)} = 1$.

В соответствии с леммой 3.2 систему векторов $R_{i_{\lambda,t}}$, $\lambda = 1, 2, \ldots, l_t$, составленную из части векторов системы R_i, $i = 1, 2, \ldots, N_2$, можно считать линейно независимой для любого t.

Число точек $X^{(t)}$ бесконечно, а количество всевозможных систем, которые могут быть составлены из векторов R_1, $R_2, \ldots, R_{N_2}$, заведомо конечно. Поэтому из последовательности $\{X^{(t)}\}$ можно выделить такую бесконечную подпоследовательность $\{X^{(t_r)}\}_r$, что

$$X^{(t_r)} = \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i^{(r)} X_i + \sum_{\lambda=1}^{l} \beta_\lambda^{(r)} R_{i_\lambda}, \tag{3.13}$$

где $R_{i_1}, R_{i_2}, \ldots, R_{i_l}$ — линейно независимая система векторов, одна и та же для всех точек $X^{(t_r)}$, $\alpha_i^{(r)} \geqslant 0$, $\beta_\lambda^{(r)} > 0$, $\sum\limits_{i=1}^{N_1} \alpha_i^{(r)} = 1$.

Из сходимости последовательности $\{X^{(t_r)}\}_r$ следует существование такого числа c_1, что

$$|X^{(t_r)}| \leqslant c_1$$

для любого r. Поэтому, учитывая основные свойства норм (длин) векторов, получаем при любом r

$$\left| \sum_{\lambda=1}^{l} \beta_\lambda^{(r)} R_{i_\lambda} \right| = \left| X^{(t_r)} - \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i^{(r)} X_i \right| \leqslant \left| X^{(t_r)} \right| + \\ + \left| \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i^{(r)} X_i \right| \leqslant c_1 + \left(\sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i^{(r)} \right) c_2 = c_1 + c_2 = c_3, \tag{3.14}$$

где

$$c_2 = \max_{1 \leqslant i \leqslant N_1} |X_i|.$$

В соответствии с леммой 3.1 из неравенства (3.14) следует существование такой постоянной c_4, не зависящей от r, что

$$\left| \sum_{\lambda=1}^{l} \beta_\lambda^{(r)} \right| \leqslant c_4.$$

Итак, в формуле (3.13) ограниченными являются не только числа $\alpha_i^{(r)}$ $(0 \leqslant \alpha_i^{(r)} \leqslant 1)$, но и коэффициенты $\beta_\lambda^{(r)}$ $(0 \leqslant \beta_\lambda^{(r)} \leqslant c_4)$. Это позволяет выделить из последовательностей $\left\{\alpha_\lambda^{(r)}\right\}_r$, $i = 1, 2, \ldots, N_1$; $\left\{\beta_\lambda^{(r)}\right\}_r$, $\lambda = 1, 2, \ldots, l$, сходящиеся подпоследовательности.

Следовательно, существует такая подпоследовательность индексов $r_1, r_2, \ldots, r_\gamma, \ldots$, что

$$\lim_{\gamma \to \infty} \alpha_i^{(r_\gamma)} = \alpha_i^{(0)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N_1,$$
$$\lim_{\gamma \to \infty} \beta_\lambda^{(r_\gamma)} = \beta_\lambda^{(0)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, l.$$

Очевидно,

$$\alpha_i^{(0)} \geqslant 0, \ i = 1, 2, \ldots, N_1; \quad \beta_\lambda^{(0)} \geqslant 0, \quad \lambda = 1, 2, \ldots, l;$$
$$\sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i^{(0)} = 1.$$

Устремляя теперь r из соотношения (3.13) к бесконечности по подпоследовательности r_γ, получаем

$$\sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i^{(0)} X_i + \sum_{\lambda=1}^{l} \beta_\lambda^{(0)} R_{i_\lambda} = X^{(0)}.$$

Отсюда, учитывая отмеченные выше свойства коэффициентов $\alpha_i^{(0)}$, $\beta_\lambda^{(0)}$, приходим к искомому включению (3.12), которое и доказывает нашу лемму.

3.4. Переходим к формулировке и доказательству теоремы, обратной теореме о представлении выпуклого многогранного множества.

Теорема 3.1. *Множество* T, *состоящее из точек* X, *представимых в виде* (3.5), *является выпуклым многогранным множеством.*

Доказательство. 1. Рассмотрим многогранное множество K точек

$$\bar{Y} = (Y, V) = (y_1, y_2, \ldots, y_n, V),$$

определяемое системой ограничений

$$\begin{aligned} (Y, X_i) - V &\leqslant 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, N_1, \\ (Y, R_i) &\leqslant 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, N_2. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Из условий (3.15) следует, что K — многогранный конус с вершиной в точке $0 = (0, 0, \ldots, 0)$. Поэтому (см. формулу

(3.4)) существуют такие точки $\overline{Y}_1, \overline{Y}_2, \ldots, \overline{Y}_N$, с помощью которых конус K представим в виде

$$\overline{Y}=(Y,\ V)=\sum_{i=1}^{N}\gamma_i\overline{Y}_i=\sum_{i=1}^{N}\gamma_i(Y_i,\ V_i),\qquad \gamma_i\geqslant 0. \quad (3.16)$$

Используя точки $\overline{Y}_1, \overline{Y}_2, \ldots, \overline{Y}_N$, образуем многогранное множество T_1 точек X, система ограничений которого имеет вид

$$(Y_i,\ X)\leqslant V_i,\qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ N. \quad (3.17)$$

2. Мы покажем, что многогранное множество T_1 в точности совпадает с исследуемым множеством T. Рассмотрим произвольную точку $X\in\mathrm{T}$. По условию,

$$X=\sum_{i=1}^{N_1}\alpha_iX_i+\sum_{i=1}^{N_2}\beta_iR_i,$$

где $\alpha_i\geqslant 0$, $\beta_i\geqslant 0$, $\sum_{t=1}^{N_1}\alpha_t=1$. Следовательно, для любого i $(1\leqslant i\leqslant N)$ получаем

$$(Y_i,\ X)=\sum_{t=1}^{N_1}\alpha_t(Y_i,\ X_t)+\sum_{t=1}^{N_2}\beta_t(Y_i,\ R_t)\leqslant$$
$$\leqslant V_i\sum_{t=1}^{N_1}\alpha_t=V_i. \quad (3.18)$$

Здесь мы воспользовались неравенствами (3.15), которым, естественно, удовлетворяют точки $\overline{Y}_i$, и свойствами коэффициентов α_t, β_t.

Неравенства (3.18) означают, что $X\in\mathrm{T}_1$. Таким образом, мы доказали справедливость включения

$$\mathrm{T}\subset\mathrm{T}_1.$$

3. Установим теперь противоположное включение. Для этого рассмотрим произвольную точку $X_0\in\mathrm{T}_1$ и допустим, что

$$X_0\notin\mathrm{T}.$$

Согласно лемме 3.3 множество T замкнуто. Выпуклость множества T очевидна. Следовательно, к этому множеству и точке $X_0 \notin \mathrm{T}$ можно применить теорему о разделяющей гиперплоскости (см. теорему 3.1 в Дополнении). В соответствии с указанной теоремой найдется такой вектор Λ_0 и число c_0, что

$$(\Lambda_0,\ X_0) > c_0, \quad (\Lambda_0,\ X) \leqslant c_0 \tag{3.19}$$

для всех $X \in \mathrm{T}$. Поскольку неравенство (3.20), в частности, имеет место для всех X_i, то точка $\overline{\Lambda}_0 = (\Lambda_0,\ c_0)$ удовлетворяет первым N_1 условиям системы (3.15).

Пусть X' — некоторая точка из T. В таком случае при любом i и $\beta \geqslant 0$ точка

$$X_\beta = X' + \beta R_i \in \mathrm{T}.$$

Следовательно,

$$(\Lambda_0,\ X_\beta) = (\Lambda_0,\ X') + \beta\,(\Lambda_0,\ R_i) \leqslant c_0$$

при любом $\beta \geqslant 0$. Это возможно лишь в том случае, если

$$(\Lambda_0,\ R_i) \leqslant 0.$$

Поэтому точка $\overline{\Lambda}_0 = (\Lambda_0,\ c_0)$ удовлетворяет последним N_2 условиям системы (3.15).

Итак, точка $\overline{\Lambda}_0 \in K$. Отсюда, учитывая представление (3.16), получаем

$$\Lambda_0 = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i^{(0)} Y_i,$$

$$c_0 = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i^{(0)} V_i, \quad \gamma_i^{(0)} \geqslant 0.$$

По условию, точка X_0 удовлетворяет системе неравенства (3.17) ($X_0 \in \mathrm{T}_1$). Следовательно,

$$(\Lambda_0,\ X_0) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i^{(0)} (Y_i,\ X_0) \leqslant \sum_{i=1}^{N} \gamma_i^{(0)} V_i = c_0.$$

Полученное неравенство противоречит соотношению (3.19). Поэтому допущение о том, что $X_0 \notin \mathrm{T}$, ошибочно. Итак, любая точка X_0 из T_1 содержится в T, т. е.

$$\mathrm{T}_1 \subset \mathrm{T}.$$

Сравнив это соотношение с тем, которое было получено в предыдущем разделе доказательства, приходим к искомому равенству

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_1,$$

доказывающему справедливость утверждения теоремы 3.1,

3.5. Будем для краткости говорить, что множество T, состоящее из точек X вида (3.5), образовано (или порождается) точками $X_1, X_2, \ldots, X_{N_1}$ и векторами $R_1, R_2, \ldots, R_{N_2}$.

Напомним, что понятия точки и вектора эквивалентны. Называя $X_1, \ldots, X_{N_1}$ точками, а $R_1, R_2, \ldots, R_{N_2}$ векторами, мы подчеркиваем лишь различную роль, которую эти элементы играют в образовании множества T: T совпадает с суммой *выпуклых* комбинаций точек $X_1, X_2, \ldots, X_{N_1}$ и *неотрицательных* линейных комбинаций векторов $R_1, R_2, \ldots, R_{N_2}$. Как уже отмечалось, любое многогранное множество порождается конечным числом точек и векторов. С другой стороны, в соответствии с только что доказанной теоремой 3.1, произвольное множество, образованное конечным числом точек и векторов, является многогранным. Это позволяет ввести еще одно определение выпуклого многогранного множества.

Выпуклым многогранным множеством называется множество, порожденное конечным числом точек и векторов (являющееся суммой выпуклых комбинаций данных точек и неотрицательных линейных комбинаций данных векторов). Сформулированное определение назовем *вторым определением* многогранного множества. Определение, приведенное в § 1, согласно которому многогранное множество является пересечением конечного числа полупространств и гиперплоскостей, будем в дальнейшем именовать *первым определением* многогранного множества. Эквивалентность этих двух определений, установленная теоремами 2.6 и 3.1, является центральным пунктом теории выпуклых многогранных множеств.

Выше были выделены два важных класса выпуклых многогранных множеств: класс выпуклых многогранников и класс выпуклых многогранных конусов. В соответствии с первым определением выпуклый многогранник — это ограниченное множество, являющееся пересечением конечного числа полупространств и гиперплоскостей. Поскольку ограниченное множество не может содержать лучей, то второе определение выпуклого многогранника формулируется так: *выпуклым многогранником* называется множество, состоящее из всех выпуклых комбинаций конечного числа точек.

Мы видели, что многогранное множество является выпуклым многогранным конусом в том и только в том случае, если система ограничений этого множества может быть приведена к виду (3.1), (3.2). Поэтому в соответствии с первым определением многогранного множества выпуклый многогранный конус можно определить как пересечение конечного числа гиперплоскостей и полупространств, граничные гиперплоскости которых пересекаются в одной точке, называемой вершиной конуса. (Заметим, что граничной гиперплоскостью для гиперплоскости является она сама.)

Если воспользоваться вторым определением многогранного множества, то выпуклому многогранному конусу можно дать другое определение: *выпуклым многогранным конусом* с вершиной в точке X_0 называется совокупность всех неотрицательных линейных комбинаций конечного числа векторов, сдвинутая в точку X_0.

§ 4. Основные свойства задачи линейного программирования

4.1. Рассмотрим общую задачу линейного программирования, заданную в произвольной форме записи.

Требуется обратить в максимум линейную форму

$$(C, X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{4.1}$$

при условиях

$$(D_i, X) = \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j \leqslant d_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, s; \tag{4.2}$$

$$(D_i, X) = \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j = d_i, \qquad i = s+1, \ldots, s+t. \tag{4.3}$$

Будем предполагать, что система условий (4.2), (4.3) непротиворечива. В таком случае совокупность точек X, удовлетворяющих соотношениям (4.2), (4.3), является выпуклым многогранным множеством. Обозначим его через M.

Таким образом, задача (4.1)—(4.3) состоит в максимизации линейной функции (4.1), заданной на многогранном множестве M. Это множество иногда называют *областью определения (задания)* линейной формы задачи или *многогранным множеством* условий данной задачи.

В настоящем параграфе мы укажем несколько важных свойств задачи (4.1)—(4.3); при этом будет существенно использован ряд фактов теории многогранных множеств, изложенной в предыдущих параграфах.

Прежде всего заметим, что ранг системы ограничений (4.2), (4.3) (ранг системы векторов D_i, $i=1, 2, \ldots, s+t$) можно всегда считать равным размерности пространства точек X, т. е. равным n. Для того чтобы убедиться в этом, допустим, что ранг системы ограничений (4.2), (4.3) равен $r<n$. Тогда, используя лемму 2.1, приходим к представлению

$$M=M_0+\Pi_{n-r}, \tag{4.4}$$

где M_0 — многогранное множество, система ограничений которого имеет ранг, равный n, Π_{n-r} — $(n-r)$-мерное подпространство. Возможны два случая:

а) существует точка $Y \in \Pi_{n-r}$, для которой

$$(C, Y)=\sum_{i=1}^{n} c_i y_i = \zeta \neq 0;$$

б) $(C, Y)=0$ для любой точки $Y \in \Pi_{n-r}$.

Нетрудно заметить, что в случае *а* линейная форма (4.1) неограничена сверху на множестве M (на множестве планов задачи): Действительно, поскольку Π_{n-r} — подпространство, то $\lambda Y \in \Pi_{n-r}$ при любом λ.

Пусть $X_\lambda = X+\lambda Y$, где X — произвольная точка M_0. В соответствии с представлением (4.4) $X_\lambda \in M$ при любом λ. Рассмотрим

$$(C, X_\lambda)=(C, X)+\lambda(C, Y)=(C, X)+\lambda\xi.$$

Очевидно, $\sup(C, X_\lambda)=\infty$ при $\zeta \neq 0$, т. е. линейная форма задачи не ограничена в области своего определения.

Пусть теперь имеет место случай *б*. Рассмотрим задачу максимизации линейной формы (4.1) при условиях, определяющих многогранное множество M_0. Если эта задача неразрешима, то согласно (4.4) задача (4.1) — (4.3) также не имеет решения. Обозначим через M^* и M_0^* совокупности оптимальных планов задач линейного программирования с линейной формой (4.1) и многогранными множествами условий M и M_0 соответственно. Из формулы (4.4), учитывая условие *б*, получаем, что

$$M^* = M_0^* + \Pi_{n-r}.$$

Таким образом, при решении задачи (4.1) — (4.3) многогранное множество M можно заменить на M_0. Если вновь полученная задача окажется разрешимой и будет выполнено условие *б*, то, решив эту задачу, мы получим оптимальный план исходной задачи. В противном случае исходная задача не имеет решения.

Переход от M к M_0 сводится к выделению максимального числа линейно независимых векторов системы D_i, $i = 1, 2, \ldots, s+t$. Построение подпространства Π_{n-r} осуществляется с помощью разложения остальных векторов D_i по выделенной линейно независимой подсистеме (см. п. 2.3).

В этом параграфе мы будем предполагать, что отмеченные преобразования уже проведены (если, конечно, в них была необходимость) и ранг системы ограничений многогранного множества условий рассматриваемой задачи равен n. Вопрос о необходимости этих преобразований решается обычно на этапе предварительного анализа задачи (в процессе отыскания первого приближения). На том же этапе проводятся и сами преобразования.

4.2. При анализе задач линейного программирования планы, соответствующие вершинам многогранного множества условий, играют особую роль. В дальнейшем читатель не раз будет иметь возможность убедиться в этом. Поэтому совокупность таких планов следует выделить.

План $X = (x_1, \ldots, x_n)$ задачи (4.1) — (4.3) будем называть ***опорным***, если среди соотношений (4.2), (4.3), которым он удовлетворяет как точным равенствам, имеется n линейно независимых.

Из приведенного определения следует, что понятие опорного плана эквивалентно понятию вершины многогранного множества, определяемого условиями (4.2), (4.3) (см. теорему 1.4). Поэтому число опорных планов задачи линейного программирования всегда конечно. В случае, когда область определения линейной формы задачи оказывается ограниченной, т. е. представляет собой выпуклый многогранник, любой план задачи является выпуклой линейной комбинацией ее опорных планов.

Поскольку ранг системы ограничений (4.2), (4.3) равен n, то в соответствии с теоремой 2.4 приходим к следующему результату.

Теорема 4.1 (теорема о существовании опорного плана). *Если множество планов задачи* (4.1)—(4.3) *непусто, то среди ее планов имеется хотя бы один опорный план.*

Напомним, что решением задачи линейного программирования называется такой ее план, на котором линейная форма задачи достигает условного максимума или минимума (в зависимости от постановки задачи).

Задача, обладающая хотя бы одним решением, называется разрешимой.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_{N_1}$ — полная совокупность опорных планов задачи (4.1) — (4.3); $R_1, R_2, \ldots, R_{N_2}$ — направляющие векторы всех неограниченных ребер многогранного множества M. В таком случае согласно теореме 2.2 многогранное множество условий задачи (4.1) — (4.3) совпадает с совокупностью точек X вида

$$X = \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i X_i + \sum_{i=1}^{N_2} \beta_i R_i, \tag{4.5}$$

где $\alpha_i \geqslant 0$, $\beta_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i = 1$.

Предположим, что задача (4.1) — (4.3) разрешима. Тогда, как нетрудно проверить, при любом i, $1 \leqslant i \leqslant N_2$

$$(C, R_i) \leqslant 0. \tag{4.6}$$

Действительно, если при некотором $i = i'$

$$(C, R_{i'}) = \delta > 0,$$

то, положив $X(\beta) = X_1 + \beta R_{i'}$, получим

$$\lim_{\beta \to \infty} (C, X(\beta)) = \infty. \tag{4.7}$$

Но при любом $\beta \geqslant 0$ вектор $X(\beta)$ — план задачи (4.1)—(4.3). Следовательно, равенство (4.7) означает неразрешимость этой задачи (неограниченность сверху линейной формы задачи на множестве ее планов). Итак, для разрешимых задач неравенство (4.6) выполняется для любого вектора R_i.

Допустим теперь, что X^* — некоторое решение задачи (4.1) — (4.3). Учитывая представление (4.5), справедливое для любого плана задачи, имеем

$$X^* = \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i^* X_i + \sum_{i=1}^{N_2} \beta_i^* R_i, \tag{4.8}$$
$$\alpha_i^* \geqslant 0, \quad \beta_i^* \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i^* = 1.$$

Выберем любой индекс $i = i'$, для которого $\alpha_{i'}^* > 0$. Выразим $X_{i'}$ из (4.8):

$$X_{i'} = \frac{1}{\alpha_{i'}^*}\left[X^* - \sum_{i \neq i'} \alpha_i^* X_i - \sum_{i=1}^{N_2} \beta_i^* R_i\right].$$

Умножая обе части последнего равенства скалярно на вектор C, получаем

$$(C, X_{i'}) = \frac{1}{\alpha_{i'}^*}\left[(C, X^*) - \sum_{i \neq i'} \alpha_i^* (C, X_i) - \sum_{i=1}^{N_2} \beta_i^* (C, R_i)\right] \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{\alpha_{i'}^*}\left[(C, X^*) - (C, X^*) \sum_{i \neq i'} \alpha_i^* - \sum_{i=1}^{N_2} \beta_i^* (C, R_i)\right] \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{\alpha_{i'}^*}\left[(C, X^*) - (C, X^*) \sum_{i \neq i'} \alpha_i^*\right] =$$
$$= (C, X^*) \frac{1}{\alpha_{i'}^*}\left(1 - \sum_{i \neq i'} \alpha_i^*\right) = (C, X^*).$$

Первое неравенство следует из того, что X^* — решение задачи; второе неравенство вытекает из (4.6); последнее равенство — следствие условия

$$\sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i^* = 1.$$

Итак,

$$(C, X_{l'}) \geqslant (C, X^*).$$

С другой стороны, так как X^* — решение задачи, то

$$(C, X_{l'}) \leqslant (C, X^*).$$

Сравнивая два последних неравенства, получаем

$$(C, X_{l'}) = (C, X^*), \tag{4.9}$$

где по условию $X_{l'}$ — некоторый опорный план задачи (4.1) — (4.3).

Назовем решение задачи линейного программирования *опорным*, если оно является опорным планом данной задачи. Соотношение (4.9) эквивалентно следующему утверждению, весьма важному для линейного программирования.

Теорема 4.2 (теорема о существовании опорного решения). *Всякая разрешимая задача линейного программирования, система условий которой имеет ранг n, обладает хотя бы одним опорным решением.*

4.3. Теорема 4.2 подсказывает следующий путь решения задач линейного программирования. Вычислим все опорные планы задачи. Это можно сделать путем исследования C_s^{n-t} систем линейных уравнений, каждая из которых содержит t уравнений (4.3) и какие-то $n-t$ уравнений, отвечающих условиям (4.2). Затем подсчитаем значение линейной формы (4.1) на каждом из полученных опорных планов, число которых конечно. В силу теоремы 4.2 опорный план, соответствующий наибольшему из этих значений, является решением рассматриваемой задачи (если, конечно, она разрешима). Однако при сколь-нибудь значительных величинах $n-t$ и $s \gg n-t$ (практические задачи обычно удовлетворяют этим условиям) намеченный путь следует признать нереализуемым. Пусть, например, $t=0$, $s=2n$. Пользуясь формулой Стирлинга, нетрудно подсчитать, что

$$C_{2n}^n \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}} 2^{2n}.$$

Исследование системы n линейных уравнений с n неизвестными (отыскание ее решения или установление линейной зависимости соответствующей системы векторов), занимает порядка n^3 операций.

Следовательно, определение всех опорных планов задачи в данном случае потребует порядка $\frac{n^3}{\sqrt{n}} 2^{2n}$ операций. Если допустить, что решение задачи осуществляется машиной с быстродействием 10^5 операций в секунду, то при $n=25$ для определения оптимального плана понадобится примерно 10^6 лет.

Естественно, что способ, приводящий к такому астрономическому объему вычислений даже в сравнительно небольших задачах ($n=25$), не имеет никакой практической ценности. Однако, несмотря на несостоятельность метода, основанного на переборе всех вершин многогранного множества условий задачи, сама идея просмотра вершин оказывается весьма полезной. Все конечные методы линейного программирования в той или иной мере связаны с перебором вершин некоторого многогранного множества (не обязательно многогранного множества условий исследуемой задачи). Но этот перебор осуществляется таким образом, что для решения задачи оказывается необходимым просмотреть лишь очень небольшую часть всех имеющихся вершин. Существенное уменьшение сравниваемых вариантов достигается за счет следующих двух свойств, которыми должен обладать любой практически приемлемый процесс перебора:

а) упорядоченность перебора, т. е. невозможность перехода от «лучшей» вершины к «худшей» (понятие «хуже» и «лучше» связано с сущностью метода):

б) наличие критерия, позволяющего без просмотра всех вершин обнаружить, что получена самая «лучшая» вершина (вершина, связанная с решением задачи). Каждому конечному методу линейного программирования соответствует свой метод упорядочивания перебора и свой критерий окончания перебора.

4.4. Если задача линейного программирования имеет единственное решение, то оно в силу теоремы 4.2 является опорным. Допустим, что исследуемая задача имеет более одного решения. Рассмотрим одно из решений, скажем, X^*. Для вектора X^* имеет место разложение (4.8). При выводе формулы (4.9) было показано, что если $\alpha_i^* > 0$, то X_i — решение задачи (4.1) — (4.3). Поступая аналогичным образом, нетрудно убедиться в равенстве $(C, R_i)=0$, справедливом при $\beta_i^* > 0$. Таким образом, любое решение X^* задачи (4.1)—(4.3) представимо в виде

$$X^* = \sum_{\lambda=1}^{n_1^*} \alpha_{i_\lambda}^* X_{i_\lambda} + \sum_{\lambda=1}^{n_2^*} \beta_{i_\lambda}^* R_{i_\lambda}, \tag{4.10}$$

где $\alpha_{i_\lambda}^* > 0$, $\lambda = 1, 2, \ldots, n_1^*$, $\beta_{i_\lambda}^* > 0$, $\lambda = 1, 2, \ldots, n_2^*$, $\sum_{\lambda=1}^{n_1^*} \alpha_{i_\lambda} = 1$. При этом

$$(C, X^*) = (C, X_{i_\lambda}), \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, n_1^*; \tag{4.11}$$

$$(C, R_{i_\lambda}) = 0, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, n_2^*. \tag{4.12}$$

Выделим все опорные решения задачи X_{i_λ}, $\lambda = 1, 2, \ldots, n_1$, и все векторы R_{i_λ}, $\lambda = 1, 2, \ldots, n_2$, удовлетворяющие условию (4.12). Рассмотрим многогранное множество M^*, порождаемое точками X_{i_λ} и векторами R_{i_λ}, т. е. множество точек X вида

$$X = \sum_{\lambda=1}^{n_1} \alpha_{i_\lambda} X_{i_\lambda} + \sum_{\lambda=1}^{n_2} \beta_{i_\lambda} R_{i_\lambda}, \tag{4.13}$$

$$\alpha_{i_\lambda} \geqslant 0, \quad \lambda = 1, 2, \ldots, n_1, \qquad \beta_{i_\lambda} \geqslant 0, \quad \lambda = 1, 2, \ldots, n_2,$$

$$\sum_{\lambda=1}^{n_1} \alpha_{i_\lambda} = 1.$$

Из соотношений (4.10)—(4.12) вытекает, что любое решение X^* задачи (4.1)—(4.3) содержится в M^*. Поскольку опорные планы X_{i_λ} и векторы R_{i_λ} удовлетворяют условиям (4.11) и (4.12) соответственно, то любая точка M^* является решением рассматриваемой задачи. Итак, совокупность всех решений задачи (4.1)—(4.3) является многогранным множеством M^*, состоящим из точек, представимых в виде (4.13). Тем самым мы доказали следующее утверждение:

Теорема 4.3. *Совокупность всех решений задачи линейного программирования является многогранным множеством, порожденным опорными решениями задачи и теми из направляющих векторов R_i неограниченных ребер M, которые удовлетворяют равенству* (4.12).

Из теоремы 4.3, в частности, следует, что задача линейного программирования имеет либо единственное решение, либо бесчисленное множество решений. Однако в последнем случае вся совокупность решений определяется конечным числом векторов X_{i_λ} и R_{i_λ}.

4.5. Как уже отмечалось в гл. 1, неразрешимость задачи линейного программирования может быть обусловлена либо несовместностью системы условий задачи (множество планов задачи — пустое множество), либо неограниченностью (сверху или снизу, в зависимости от постановки задачи) линейной формы задачи на множестве ее планов. Приводимая ниже теорема показывает, что других причин, определяющих неразрешимость задачи линейного программирования, не существует.

Теорема 4.4 (теорема о разрешимости задачи линейного программирования). *Если множество планов задачи линейного программирования непусто и линейная форма задачи ограничена сверху на этом множестве (речь идет о задаче максимизации), то рассматриваемая задача разрешима, т. е. обладает хотя бы одним решением.*

Доказательство. Поскольку множество планов задачи непусто, то оно является многогранным множеством и, следовательно, представляет собой совокупность точек X вида

$$X = \sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i X_i + \sum_{i=1}^{k_2} \beta_i R_i, \tag{4.14}$$

где все $\alpha_i \geqslant 0, \beta_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i = 1$, X_i, $i = 1, 2, \ldots, k_1$, — некоторые планы задачи; R_i, $i = 1, 2, \ldots, k_2$, — некоторая система векторов.

Отметим, что здесь мы воспользовались общей теоремой о представлении многогранного множества (теорема 2.6), которая не предполагает совпадения ранга системы ограничений, определяющей это множество, с размерностью n пространства точек X. Линейная форма задачи, по предположению, ограничена сверху. Поэтому для любого вектора R_i справедливо неравенство

$$(C, R_i) \leqslant 0 \tag{4.15}$$

(см. соотношение (4.6)).

Пусть X — произвольный план данной задачи. В силу соотношения (4.14) эта точка может быть представлена в виде суммы

$$X = X' + X'',$$

где $X' = \sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i X_i$; $X'' = \sum_{i=1}^{k_2} \beta_i R_i$. Учитывая неравенство (4.15) и неотрицательность чисел β_i, получаем

$$(C, X) = (C, X') + (C, X'') \leqslant (C, X'). \tag{4.16}$$

Выберем точку $X_{i'}$ из условия

$$(C, X_{i'}) = \max_{1 \leqslant i \leqslant k_1} (C, X_i).$$

В таком случае, пользуясь свойствами коэффициентов α_i, имеем

$$(C, X') \leqslant (C, X_{i'}). \tag{4.17}$$

Сравнивая теперь неравенства (4.16) и (4.17), приходим к соотношению

$$(C, X) \leqslant (C, X_{i'}),$$

справедливому для любого плана X рассматриваемой задачи.

Полученное неравенство означает, что план $X_{i'}$ является решением задачи.

Теорема доказана.

Интересно заметить, что утверждение теоремы 4.4, вообще говоря, справедливо лишь для задач линейного программирования. Если рассмотреть задачу о максимизации линейной функции, заданной на некотором выпуклом замкнутом множестве D, не являющемся многогранным множеством, то теорема 4.4, вообще говоря, перестает быть верной.

Пусть, например, требуется разыскать максимум формы

$$x_2 \tag{4.18}$$

при условиях

$$x_1 x_2 \leqslant -1, \quad x_1 \geqslant 0. \tag{4.19}$$

Ограничения (4.19) высекают в плоскости точек (x_1, x_2) выпуклую замкнутую область D, ограниченную ветвью гиперболы $x_1 x_2 = -1$, расположенной в четвертом квадранте.

Как нетрудно видеть (рис. 2.3),

$$\sup_{(x_1,\, x_2) \in D} x_2 = 0.$$

Здесь $x_2 \leqslant 0$, и точка $\left(\frac{1}{\varepsilon}, -\varepsilon\right) \in D$ при любом $\varepsilon > 0$. С другой стороны, не существует точки $(x_1, 0) \in D$. Поэтому верхняя грань функции (4.18), определенной на D, не достигается ни в одной точке D.

Итак, для рассматриваемой задачи выполнены все условия теоремы 4.4. Тем не менее эта задача не имеет ни одного решения. Можно привести примеры некоторых непрерывных нелинейных функций, заданных в выпуклых многогранных областях, для которых теорема 4.4 также не имеет места.

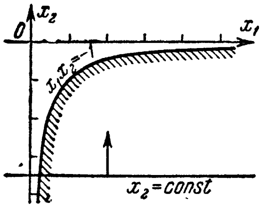


Рис. 2.3.

Таким образом, предположения о линейности оптимизируемой функции и многогранности ее области определения, фигурирующие в теореме 4.4, являются существенными.

4.6. До сих пор мы рассматривали задачу линейного программирования, заданную в произвольной форме записи. При описании методов линейного программирования чаще всего имеют дело с канонической формой задачи (см. § 5 гл. 1). Обратимся к общей задаче линейного программирования, заданной в канонической форме.

Требуется максимизировать линейную форму

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{4.20}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m; \tag{4.21}$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.22}$$

$$m < n$$

Напомним, что векторы $A_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})^T$, $j = 1, 2, \ldots, n$, и вектор $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$ принято называть векторами условий и вектором ограничений соответственно. Систему равенств (4.21) иногда бывает более удобно записывать в векторной форме:

$$\sum_{j=1}^{n} A_j x_j = B. \tag{4.21'}$$

Задача (4.20)—(4.22) является частным случаем задачи (4.1)—(4.3) при $t=m$, $s=n$,

$$D_i = \begin{cases} (\underbrace{0, 0, \ldots, 0, -1}_{i}, 0, \ldots, 0), & i=1, 2, \ldots, n, \\ (a_{i-n,1}, a_{i-n,2}, \ldots, a_{i-n,n}), & i=n+1, n+2, \ldots \\ & \ldots, n+m, \end{cases}$$

$$d_i = \begin{cases} 0, & i=1, 2, \ldots, n, \\ b_{i-n}, & i=n+1, n+2, \ldots, n+m. \end{cases}$$

Поскольку определитель, составленный из векторов $D_1, D_2, \ldots, D_n$, отличен от нуля (равен $(-1)^n$), то ранг системы ограничений (4.21), (4.22) всегда равен n. Будем предполагать, что все уравнения системы (4.21) линейно независимы. Это предположение не является ограничительным, так как в противном случае часть уравнений системы (4.21) можно было бы отбросить, не изменив многогранное множество условий задачи.

Посмотрим, какую форму примет понятие опорного плана для задачи (4.20)—(4.22).

Пусть $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — план задачи (4.20)—(4.22). В соответствии с определением условие опорности плана состоит в том, что среди векторов D_i, для которых

$$(D_i, X) = d_i, \tag{4.23}$$

имеется n линейно независимых. Векторы D_{i+n}, $i=1, 2, \ldots, m$, линейно независимы и удовлетворяют условию (4.23).

Поэтому в случае, если план X опорный (и только в этом случае), среди векторов D_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ найдутся такие $n-m$ векторов D_{i_λ}, $1 \leqslant \lambda \leqslant n-m$, которые удовлетворяют равенству (4.23) и составляют вместе с векторами D_{i+n}, $1 \leqslant i \leqslant m$ линейно независимую систему. Это значит, что определитель матрицы, строками которой являются векторы

$$D_{i_\lambda} = -e_{i_\lambda}^T, \quad 1 \leqslant \lambda \leqslant n-m, \quad D_{i+n} = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}), \quad 1 \leqslant i \leqslant m,$$

отличен от нуля. Раскладывая этот определитель по элементам первых $n-m$ строк, приходим к условию

$$|(A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_m})| \neq 0. \tag{4.24}$$

Здесь через $(A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_m})$ обозначена матрица, составленная из векторов условий A_{j_μ}. Система индексов $I_X = \{j_1, j_2, \ldots, j_m\}$ образуется из полной системы $1, 2, \ldots, n$ вычеркиванием индексов i_λ, $1 \leqslant \lambda \leqslant n-m$. Поскольку $x_{i_\lambda} = 0$, $1 \leqslant \lambda \leqslant n-m$, то при $x_j > 0$ $j \in I_X$.

Следовательно, условие (4.24) может быть сформулировано следующим образом:

Существует линейно независимая система m векторов-условий A_j, $j \in I_X = (j_1, j_2, \ldots, j_m)$, содержащая все те A_j, для которых $x_j > 0$.

Очевидно, это требование эквивалентно предположению линейной независимости системы векторов A_j, отвечающих положительным компонентам плана X.

Итак, определение опорного плана для задачи линейного программирования, записанной в канонической форме, может быть сформулировано следующим образом:

План $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задачи (4.20) — (4.22) называется *опорным*, если векторы условий, отвечающие его положительным составляющим, линейно независимы.

Систему m линейно независимых векторов условий, включающую все те A_j, для которых $x_j > 0$, принято называть *базисом* опорного плана $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Составляющие опорного плана, связанные с векторами базиса, иногда называют *базисными компонентами* этого плана.

При решении задач линейного программирования имеют дело не только с вершинами соответствующих многогранных множеств, но и с ребрами этих множеств. Свойства ребер многогранного множества были исследованы в п. 1.4 (см. теорему 1.5) применительно к задаче линейного программирования, заданной в произвольной форме записи. Уточним эти свойства применительно к задаче (4.20)—(4.22). Поскольку ранг системы условий (4.21), (4.22) равен n, любое ребро многогранного множества задачи (4.20)—(4.22) является либо лучом, либо отрезком. Как мы знаем, концы ребра многогранного множества являются вершинами этого множества (опорными планами соответствующей задачи линейного программирования).

Уравнение любого ребра Г многогранного множества условий задачи (4.20) — (4.22) может быть записано в виде

$$\overline{X}=X+\lambda e_0, \tag{4.25}$$

где X — опорный план задачи, e_0 — направляющий вектор ребра. Параметр λ изменяется от 0 до $\lambda_0<\infty$, если Г отрезок, и от 0 до ∞, если Г — луч.

Пусть E_X — совокупность индексов i, для которых выполняется равенство (4.23). Очевидно, $n+i\in E_X$ при $1\leqslant i\leqslant m$. Поскольку X — опорный план, ранг системы векторов D_i, $i\in E_X$ равен n. В соответствии с определением ребра многогранного множества ненулевой вектор e_0 (направляющий вектор ребра Г) должен удовлетворять следующей системе однородных уравнений:

$$(D_i, e_0)=0, \quad i=i_1, i_2, \ldots, i_{n-m-1}, \quad n+1, n+2, \ldots, n+m,$$
$$1\leqslant i_\lambda\leqslant n, \quad i_\lambda\in E_X, \quad \lambda=1, 2, \ldots, n-m-1.$$

При этом векторы $D_{i_1}, \ldots, D_{i_{n-m-1}}, D_{n+1}, \ldots, D_{n+m}$ линейно независимы.

Пусть $I_e=\{j_1, j_2, \ldots, j_m, j_{m+1}\}$ — совокупность индексов, образующаяся из системы $1, 2, \ldots, n$ вычеркиванием индексов i_λ, $1\leqslant\lambda\leqslant n-m-1$. Учитывая специфику векторов D_i для $i=1, 2, \ldots, n$, можно сформулировать следующим образом приведенные выше условия, которым удовлетворяет вектор e_0:

а) вектор $e_0=(e_{01}, e_{02}, \ldots, e_{0n})$ удовлетворяет равенствам

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_{0j}=0, \quad i=1, 2, \ldots, m;$$

б) при $j\notin I_e$ компонента $e_{0j}=0$;

в) среди векторов-условий A_j, $j\in I_e$ имеется m линейно независимых векторов.

Поскольку индексы $i_\lambda\in E_X$, $\lambda=1, 2, \ldots, n-m-1$, то $I_X\subset I_e$.

Таким образом, базис опорного плана X — конца ребра Γ — образуется из системы векторов A_j, $j \in I_e$ путем исключения одного из векторов этой системы. Допустим, что исключению подлежит вектор $A_{j_{m+1}}$. В таком случае $I_X = \{j_1, j_2, \ldots, j_m\}$. Если базис опорного плана X фиксирован, то ребро Γ, исходящее из вершины X, однозначно определяется вектором условий $A_{j_{m+1}}$. Разложим вектор $A_{j_{m+1}}$ по векторам базиса плана X:

$$A_{j_{m+1}} = \sum_{\alpha=1}^{m} A_{j_\alpha} x_\alpha^{(\Gamma)}.$$

С помощью коэффициентов $x_\alpha^{(\Gamma)}$ можно выяснить, ограничено ли ребро Γ. Из условий, определяющих вектор e_0, очевидным образом следует, что

$$e_{0j_\alpha} = -e_{0j_{m+1}} x_\alpha^{(\Gamma)}, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, m.$$

Подставляя полученные выражения для e_{0j_α} в формулу (4.25) и учитывая, что $e_{0j} = 0$ при $j \notin I_e$, $x_j = 0$ при $j \notin I_X$, имеем

$$x_j(\lambda) = \begin{cases} x_{j_\alpha} - \lambda x_\alpha^{(\Gamma)}, & j = j_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, m, \\ \lambda, & j = j_{m+1}, \\ 0, & j \notin I_e. \end{cases} \tag{4.26}$$

Здесь $X(\lambda) = (x_1(\lambda), \ldots, x_n(\lambda))$ — произвольная точка ребра Γ. Поскольку вектор $X(\lambda)$ удовлетворяет условиям (4.21) при любом значении λ, то для того, чтобы он был планом задачи, необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$x_{j_\alpha}(\lambda) = x_{j_\alpha} - \lambda x_\alpha^{(\Gamma)} \geqslant 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, m.$$

Если $x_\alpha^{(\Gamma)} \leqslant 0$ при $\alpha = 1, 2, \ldots, m$, то эти неравенства выполняются для любого значения параметра $\lambda \geqslant 0$, и, следовательно, Γ является неограниченным ребром (лучом, исходящим из точки X). В случае же, если при некотором α', $x_{\alpha'}^{(\Gamma)} > 0$, ребро Γ представляет собой отрезок, поскольку значение параметра λ не может превысить величины λ_0, где

$$\lambda_0 = \min_{x_\alpha^{(\Gamma)} > 0} \frac{x_{j_\alpha}}{x_\alpha^{(\Gamma)}} < \infty.$$

План $X(\lambda_0)$ является вторым концом ребра Г. Как было показано ранее, $X(\lambda_0)$ — опорный план задачи. Из формулы (4.26) следует, что базис плана $X(\lambda_0)$ образуется из базиса плана X заменой одного из векторов A_j, $j \in I_X$, на вектор $A_{j_{m+1}}$. Вершины многогранного множества, являющиеся концами одного и того же ребра, естественно называть *соседними вершинами*. Поэтому отвечающие им опорные планы иногда называют соседними опорными планами. Один из наиболее эффективных приемов линейного программирования — метод последовательного улучшения плана — приводит к некоторому движению по соседним опорным планам задачи.

4.7. При описании многих методов линейного программирования оказывается полезным выделение некоторого класса задач, состоящего из так называемых невырожденных задач линейного программирования. Приведем соответствующие определения.

Опорный план задачи линейного программирования (4.1) — (4.3) называется *невырожденным*, если число соотношений системы (4.2), (4.3), которым он удовлетворяет как равенствам, равно n. Естественно, что все эти соотношения должны быть линейно независимыми. Если опорный план не удовлетворяет условию невырожденности, т. е. обращает в равенство более чем n соотношений из системы (4.2), (4.3), то его называют *вырожденным планом*.

Задача линейного программирования называется *невырожденной*, если все ее опорные планы являются невырожденными планами. Задачу, имеющую хотя бы один вырожденный опорный план, будем называть *вырожденной задачей*.

Приведенные определения, конечно, имеют смысл лишь при условии, что у рассматриваемой задачи есть опорные планы, т. е. если ранг системы ограничений (4.2), (4.3) равен n.

Если опорный план X задачи (4.1) — (4.3) невырожденный, то можно легко указать число ребер, выходящих из вершины X многогранного множества условий.

Допустим, что

$$(D_i\, X) = d_i$$

для $i = i_1, i_2, \ldots, i_{n-t}, s+1, s+2, \ldots, s+t, 1 \leqslant i_\lambda \leqslant s$. Обозначим множество этих индексов через E_X. По условию,

$$(D_i, X) < d_i, \quad \text{если} \quad i \notin E_X \tag{4.27}$$

(X — невырожденный план). Обозначим через $e^{(\alpha)}=(e_{\alpha 1}, \ldots, e_{\alpha n})$, $1 \leqslant \alpha \leqslant n-t$ вектор, компоненты которого являются решением системы уравнений

$$(D_i, e^{(\alpha)})=\begin{cases} 0, & i \in E_X, \quad i \neq i_\alpha, \\ -1, & i=i_\alpha. \end{cases} \tag{4.28}$$

Рассмотрим множество Γ_α точек многогранного множества M, представимых в виде

$$X+\lambda e^{(\alpha)}, \quad \lambda \geqslant 0.$$

Из уравнений (4.28) и неравенств (4.27) вытекает, что Γ_α содержит некоторый отрезок, т. е. является одномерным множеством. Учитывая, далее, первые $n-1$ уравнений системы (4.28), приходим к выводу, что Γ_α — ребро M с направляющим вектором $e^{(\alpha)}$.

С другой стороны, направляющий вектор e произвольного ребра Γ, выходящего из точки X, обязан удовлетворять системе уравнений

$$(D_i, e)=0, \quad i \in E_X, \quad i \neq i_\alpha,$$

при некотором α, $1 \leqslant \alpha \leqslant n-t$. Поэтому вектор e должен быть параллелен одному из векторов $e^{(\alpha)}$, который, следовательно, можно принять в качестве направляющего для ребра Γ. Итак, ребро Γ совпадает с одним из ребер Γ_α.

Таким образом, из каждой вершины X, являющейся невырожденным планом задачи (4.1)—(4.3), выходит ровно $n-t$ ребер многогранного множества M. Направляющий вектор любого такого ребра может быть определен из системы уравнений (4.28) при некотором значении α, $1 \leqslant \alpha \leqslant n-t$. Если опорный план X является вырожденным, то число ребер M, выходящих из точки X, не обязано равняться $n-t$. Это число может оказаться как меньшим, так и большим $n-t$ (см. упражнение 12).

Геометрический смысл невырожденности опорного плана X состоит в том, что через вершину X проходит ровно n граничных гиперплоскостей многогранного множества M. В случае невырожденности задачи (4.1)—(4.3) аналогичным свойством обладают все грани M (а не только 0-мерные).

Теорема 4.5. *Если задача* (4.1)—(4.3) *невырожденная, то через любую q-мерную грань многогранного мно-*

жества M проходит ровно $n-q$ граничных гиперплоскостей M (все они, естественно, линейно независимы).

Доказательство. Пусть M_q — произвольная q-мерная грань M. Грань M_q является выпуклым многогранным множеством, система ограничений которого образуется из (4.2), (4.3) заменой в некоторых из условий (4.2) знаков неравенства знаками равенства. Все неравенства, входящие в систему ограничений M_q, можно считать нежесткими условиями M_q. Поэтому согласно теореме 1.2 ранг условий-равенств, входящих в систему ограничений M_q, равен $n-q$.

Пусть X_q — произвольная вершина многогранного множества M_q. Существование этой вершины следует из того, что ранг системы условий, определяющей M_q, равен n — рангу системы ограничений многогранного множества M. Нетрудно проверить, что X_q является вершиной многогранного множества M (см. пункт 2 доказательства теоремы 2.2). По предположению теоремы, X_q — невырожденный план. Следовательно, все условия (4.2), (4.3), которым он удовлетворяет как равенствам, должны быть линейно независимы. В частности, это относится и к условиям-равенствам многогранного множества M_q. Ранг этих условий $n-q$. Значит, их число в точности равно $n-q$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь задачу линейного программирования (4.20)—(4.22), записанную в канонической форме. Пусть X — произвольный опорный план этой задачи. Если векторы условий A_j, $j \in I_X$ составляют базис плана X, то $x_j = 0$ при $j \notin I_X$. Это значит, что план X удовлетворяет как равенствам n линейно независимым условиям из системы ограничений, определяющих многогранное множество M:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$
$$x_j = 0, \quad j \notin I_X = \{j_1, j_2, \ldots, j_m\}.$$

Условие невырожденности плана X состоит в том, чтобы остальным ограничениям задачи он удовлетворял как строгим неравенствам. Следовательно, для невырожденности плана X необходимо и достаточно, чтобы

$$x_j > 0 \quad \text{при} \quad j \notin I_X.$$

Таким образом, определение невырожденного опорного плана задачи линейного программирования, записанной в канонической форме, можно сформулировать следующим образом:

Опорный план X задачи (4.20)—(4.22) называется *невырожденным,* если все его компоненты, отвечающие векторам базиса (базисные компоненты), положительны ($x_j > 0$ при $j \in I_X$). Заметим, что базис невырожденного опорного плана определяется однозначно, как система векторов, отвечающих положительным составляющим плана. Вырожденный опорный план может иметь несколько базисов.

§ 5. Геометрия задачи линейного программирования

5.1. Как мы уже видели в гл. 1, геометрические соображения оказываются весьма полезными при анализе задач линейного программирования. В дальнейшем читатель будет иметь возможность убедиться в том, что геометрические аналогии делают более прозрачными методы линейного программирования. Эти аналогии являются основой эвристических доказательств в линейном программировании. Часто новые подходы к решению задач линейного программирования возникают из элементарных геометрических соображений, которые подсказывают пути строгого обоснования высказанных догадок. В этом параграфе мы опишем две геометрические интепретации общей задачи линейного программирования, имеющей произвольное число переменных и ограничений. При чтении настоящего параграфа читателю будет полезно обратиться к § 6 гл. 1, где обе эти интерпретации рассматривались применительно к двумерному и трехмерному случаям. Там же были приведены соответствующие рисунки (рис. 1.1—1.5), которые могут послужить хорошей иллюстрацией к последующему изложению.

5.2. Начнем с описания первой геометрической интерпретации задачи линейного программирования. Рассмотрим общую задачу линейного программирования (4.1)—(4.3), заданную в произвольной форме записи. Система условий задачи (4.2), (4.3) высекает в n-мерном пространстве точек $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выпуклое многогранное множество M (в предположении совместности этой системы). Многогранное множество M может рассматриваться как пересечение (общая часть) полупространств

$$(D_i, X) \leqslant d_i, \quad i = 1, 2, \ldots, s$$

и гиперплоскостей

$$(D_i, X) = d_i, \quad i = s+1, s+2, \ldots, s+t.$$

Граница M складывается из частей граничных гиперплоскостей: $(D_i, X) = d_i$, $i = 1, 2, \ldots, s+t$. Заметим, что в образовании границы M, вообще говоря, участвуют не все граничные гиперплоскости. Некоторые из них могут не иметь общих точек с M. Естественно, это относится лишь к гиперплоскостям, связанным с условиями-неравенствами (4.2). Ограничения (4.2), определяющие подобные гиперплоскости, можно было бы отбросить, не изменив при этом многогранное множество M. Однако аналитический поиск таких ограничений весьма затруднителен.

Размерность ϱ многогранного множества M не превосходит $n-t$, где t — число условий-равенств (4.3), которые предполагаются линейно независимыми. Если все условия (4.2) — нежесткие ограничения M, то $\varrho = n-t$. Поэтому, перенеся начало координат в некоторую точку общей части гиперплоскостей

$$(D_i, X) = d_i, \qquad i = s+1, \ldots, s+t,$$

можно рассматривать M в $(n-t)$-мерном подпространстве основного пространства. Аналитически это может быть осуществлено путем выражения из уравнений (4.3) каких-то t переменных (через остальные $n-t$) с последующим исключением их из неравенств (4.2). Таким образом, размерность пространства, содержащего M, понижается до $n-t$. Этим приемом мы уже пользовались в § 6 гл. 1. Линейная форма (4.1) задачи определяет в n-мерном пространстве семейство параллельных гиперплоскостей

$$(C, X) = \lambda, \quad -\infty < \lambda < \infty.$$

Каждую из этих гиперплоскостей будем называть *гиперплоскостью линейной формы* задачи. Коэффициенты линейной формы c_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, составляют вектор $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, ортогональный семейству гиперплоскостей. Вектор C указывает направление возрастания линейной формы задачи. При фиксированном значении параметра λ гиперплоскость линейной формы определяет два полупространства. То из них, которое содержит точку $X+C$ (точка X

принадлежит гиперплоскости), назовем *верхним полупространством*. Другое полупространство будем называть *нижним полупространством*. Уравнение верхнего полупространства имеет вид

$$(C, X) \geqslant \lambda.$$

Нижнее полупространство определяется уравнением

$$(C, X) \leqslant \lambda.$$

Пусть при $\lambda = \lambda_0$ гиперплоскость линейной формы имеет общие точки с многогранным множеством условий задачи M. Значения линейной формы во всех этих точках совпадают. Передвигая эту гиперплоскость параллельно самой себе в сторону, определяемую вектором C (в сторону возрастания линейной формы (4.1)), можно прийти к такому ее положению, когда при дальнейшем смещении гиперплоскость уже не будет иметь общих точек с M.

Пусть полученное предельное положение гиперплоскости отвечает значению параметра λ, равному λ_1, т. е. соответствующая гиперплоскость имеет уравнение

$$(C, X) = \lambda_1. \tag{5.1}$$

В этом случае многогранное множество условий M расположено в нижнем полупространстве гиперплоскости (5.1). В каждой из точек, принадлежащих как M, так и гиперплоскости (5.1) (множество таких точек заведомо непусто), линейная форма принимает экстремальное значение λ_1. Общая часть M и гиперплоскости (5.1) определяет многогранное множество M^* решений данной задачи.

Если задача имеет единственное решение, то M^* состоит из единственной точки — вершины M. В общем случае M^* — некоторое выпуклое многогранное множество, размерность ϱ^* которого удовлетворяет неравенствам

$$0 \leqslant \varrho^* \leqslant \varrho.$$

Отметим, что равенство $\varrho^* = \varrho$ имеет место лишь в том случае, когда M содержится в одной из гиперплоскостей семейства (4.29).

До сих пор мы предполагали, что существует предельное положение гиперплоскости линейной формы, определяемое уравнением (5.1). Очевидно, это предположение оправдано при ограниченности M (если M — выпуклый многогранник). Если же M представляет собой неограниченное выпуклое многогранное множество, то может случиться, что при сколь угодно большом смещении гиперплоскости линейной формы в сторону, определяемую вектором C, она будет иметь общие точки с M. Это означает, что линейная форма задачи неограничена на множестве M, т. е. данная задача неразрешима. Следует иметь в виду, что неограниченность M не является достаточным условием неразрешимости задачи. При одних значениях вектора C задача с неограниченным многогранным множеством условий будет разрешима (гиперплоскость линейной формы имеет конечное предельное положение), при других — неразрешима (конечного предельного положения гиперплоскости линейной формы не существует).

Иногда некорректная постановка задачи приводит к несовместимости условий (4.2), (4.3). Геометрически этот случай соответствует тому, что область определения линейной формы задачи вырождается в пустое множество.

5.3. Первая геометрическая интерпретация задачи линейного программирования одинаково применима к любой форме записи задачи. Вторая геометрическая интерпретация, к описанию которой мы переходим, приспособлена только к канонической форме задачи.

Итак, рассмотрим общую задачу линейного программирования в канонической форме (задача (4.20)—(4.22)).

Введем новые переменные $u_1, u_2, \ldots, u_m, u_{m+1}$:

$$\left.\begin{aligned} u_i &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m; \\ u_{m+1} &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j. \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

Соотношения (5.2) определяют преобразование n-мерного пространства точек $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в $(m+1)$-мерное пространство точек $U=(u_1, u_2, \ldots, u_{m+1})$. Через $\overline{A}_j$ обозначим $(m+1)$-мерный вектор-столбец с компонентами $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}, c_j$, т. е.

$$\overline{A}_j=(a_{1j},\ a_{2j},\ \ldots,\ a_{mj},\ c_j)^T.$$

Вектор $\overline{A}_j$, первые m компонент которого совпадают с компонентами вектора условий A_j, был назван в гл. 1 *расширенным вектором условий.*

Теперь соотношения (5.2) можно переписать в векторной форме:

$$U=\sum_{j=1}^{n} \overline{A}_j x_j. \tag{5.3}$$

По определению, множество точек U, представимых в виде (5.3) при $x_j \geqslant 0$, $j=1, 2, \ldots, n$, является выпуклым многогранным конусом (см. второе определение многогранного конуса в п. 3.5). Обозначим этот конус через K. Конус K порожден расширенными векторами условий $\overline{A}_j$, вершина K расположена в начале координат. Из соотношения (5.3) следует, что K является образом положительного ортанта пространства точек X в $(m+1)$-мерном пространстве точек U.

Пусть точка X удовлетворяет системе равенств (4.21). Тогда в соответствии с (5.3) образом этой точки в рассматриваемом $(m+1)$-мерном пространстве является точка

$$U_X=(b_1, b_2, \ldots, b_m, L(X)),$$

где $L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$. С другой стороны, при любом λ среди решений системы (4.21) найдется такое решение X, что $\lambda = L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$. (Здесь мы предполагаем, что векторы C и $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$, $i=1, 2, \ldots, m$, линейно независимы, причем $m<n$.)

Следовательно, преобразование (5.3) переводит совокупность решений системы (4.21) в прямую Q, уравнение которой имеет вид

$$U=\overline{B}+\lambda e_{m+1}, \quad -\infty<\lambda<\infty, \tag{5.4}$$

где $\overline{B}=(b_1, b_2, \ldots, b_n, 0)$, $e_{m+1}=(0, 0, \ldots, 0, 1)$. Прямая Q проходит через точку $\overline{B}$ и параллельна оси Ou_{m+1}.

Поскольку планы задачи (4.20) — (4.22) обязаны удовлетворять как равенствам (4.21), так и неравенствам (4.22), преобразование (5.3) переводит многогранное множество условий задачи M в общую часть конуса K и прямой Q.

Допустим, что M не является пустым множеством. Тогда конус K и прямая Q имеют общие точки. Обозначим пересечение прямой Q и конуса K через Q_k. Пересечение выпуклых множеств выпукло. Множество Q_k имеет размерность, не превосходящую 1. Следовательно, Q_k — прямая либо полупрямая (луч), либо отрезок, который может выродиться в точку.

Каждой точке $U=(b_1, b_2, \ldots, b_m, \lambda) \in Q_k$ соответствует совокупность точек $X \in M$, для которых $(C, X)=\lambda$. Изучаемая задача линейного программирования состоит в определении такой точки $X^* \in M$, на которой (C, X) достигает своего максимума. В рассматриваемом $(m+1)$-мерном пространстве решение задачи эквивалентно отысканию точки $U^* \in Q_k$ с максимально возможной $(m+1)$-й координатой λ^*.

Здесь следует различать два случая:

1. Существует такое $\bar{\lambda}$, что для любой точки $(b_1, b_2, \ldots, b_m, \lambda) \in Q_k$

$$\lambda \leqslant \bar{\lambda}.$$

2. Множество Q_k содержит точки со сколь угодно большими значениями $(m+1)$-й координаты.

В первом случае Q_k представляет собой либо отрезок, либо луч с направляющим вектором $-e_{m+1}$ (луч, идущий вдоль отрицательного направления оси Ou_{m+1}). При этом исследуемая задача оказывается разрешимой, и ее оптимальному многогранному множеству M^* (совокупности решений) соответствует верхний (в смысле оси Ou_{m+1}) конец Q_k — верхняя точка пересечения конуса K и прямой Q.

Если множество Q_k является прямой или лучом с направляющим вектором e_{m+1}, то мы приходим ко второму случаю. Наличие этого случая, очевидно, означает, что линейная форма задачи неограничена на множестве планов задачи.

Может оказаться, что прямая Q проходит вне конуса K, и, следовательно, общая часть Q и K — пустое множество. В этом случае задача не имеет ни одного плана, т. е. система условий (4.21), (4.22) противоречива.

Итак, решение задачи (4.20) — (4.22) в терминах второй геометрической интерпретации состоит в отыскании верхней точки пересечения прямой Q и конуса K. При отсутствии общих точек у Q и K задача оказывается неразрешимой из-за несовместности ее условий (4.21), (4.22). Если же общая часть Q и K — непустое множество, не имеющее самой верхней точки, то задача неразрешима вследствие неограниченности линейной формы (4.20) на многогранном множестве условий M.

При описании геометрической сущности задачи линейного программирования мы ограничились задачами максимизации. Все сказанное выше с точностью до совершенно естественных изменений справедливо и для задач минимизации. При желании читатель может произвести эти изменения самостоятельно.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 2

1. M_1 — n-мерный куб, т. е. выпуклый многогранник, определяемый в пространстве точек $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ условиями

$$0 \leqslant x_j \leqslant a, \quad a > 0, \qquad j=1, 2, \ldots, n.$$

Определить число граней M_1 размерности ϱ, где $0 \leqslant \varrho \leqslant n$.

2. M_2 — n-мерный симплекс, т. е. выпуклый многогранник, определяемый в пространстве точек $X=(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ условиями

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_j = 1;$$
$$x_j \geqslant 0, \qquad j=1, 2, \ldots, n+1.$$

Определить число граней M_2 размерности ϱ, где $0 \leqslant \varrho \leqslant n$.

3. Решить систему линейных неравенств:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &\leqslant 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &\leqslant 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &\leqslant 3, \\ x_1 - x_2 - x_3 &\leqslant 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\leqslant 2, \end{aligned}$$

выписав ее общее решение.

Указание: воспользоваться теоремой о представлении многогранного множества.

4. Пусть грани Γ_0 и Γ многогранных множеств M_0 и M являются соответствующими в смысле, определяемом в п. 2.3. Доказать, что их размерности $\varrho(\Gamma_0)$ и $\varrho(\Gamma)$ связаны соотношением

$$\varrho(\Gamma) = \varrho(\Gamma_0) + n - r,$$

где n — размерность пространства, r — ранг системы условий, определяющей многогранное множество M.

5. Доказать, что в n-мерном векторном пространстве можно выделить такие $n+1$ векторов, совокупность неотрицательных линейных комбинаций которых совпадает с данным пространством.

Показать, что любые l векторов при $l \leqslant n$ указанным свойством не обладают.

6. Доказать, что выпуклый многогранник может быть определен как замкнутое ограниченное выпуклое множество, содержащее конечное число крайних точек.

7. Доказать, что произвольное выпуклое многогранное множество может быть представлено в виде суммы некоторого выпуклого многогранника и некоторого выпуклого многогранного конуса с вершиной в начале координат.

8. Доказать, что выпуклое многогранное множество, имеющее вершины, является выпуклой оболочкой своих вершин и неограниченных ребер.

9. Доказать, что выпуклое многогранное множество M является выпуклой оболочкой своих граней размерности $n-r$ и $n-r+1$. Здесь n — размерность пространства точек X; r — ранг системы ограничений (1.1), (1.2), определяющей M. Показать, что в полученном представлении могут быть оставлены только такие грани размерности $n-r+1$, которые содержат по одной грани размерности $n-r$.

10. Доказать, что выпуклый многогранный конус, не являющийся общей частью нескольких гиперплоскостей, совпадает с выпуклой оболочкой своих граней размерности $n-r+1$, где n и r определяются так же, как и в предыдущем упражнении.

11. Привести пример непрерывной функции, определенной на выпуклом многогранном множестве, для которой теорема 4.4 неверна.

12. Если опорный план X задачи (4.1)—(4.3) вырожденный, то число ребер многогранного множества M, выходящих из вершины X, может быть как меньше, так и больше $n-t$. Построить соответствующие примеры.

13. Показать, что произвольное линейное преобразование

$$Y = AX,$$

где A — матрица размеров $n_1 \times n_2$, переводит любое выпуклое многогранное множество n_2-мерного пространства точек X в выпуклое многогранное множество n_1-мерного пространства точек Y.

ГЛАВА 3

ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ

Настоящая глава посвящена изложению основных идей одного из центральных пунктов линейного программирования — теории двойственности.

Произвольной задаче линейного программирования можно определенным образом сопоставить некоторую другую задачу (опять-таки линейного программирования), называемую обычно *двойственной*, или *сопряженной*. Теория двойственности обнаруживает тесную связь между обеими задачами, составляющими единую *двойственную пару*. Совместное рассмотрение пары двойственных задач оказывается полезным как при построении численных методов линейного программирования, так и при проведении качественных исследований в линейном программировании и в примыкающих к нему разделах математики.

Порядок изложения материала этой главы следующий. В § 1 дается общая постановка вопроса и выясняются некоторые элементарные двойственные соотношения. Затем в § 2 устанавливается ряд свойств выпуклых многогранных конусов, необходимых для доказательства теорем двойственности. Доказательства этих теорем, приведенные в § 3 для задач с однотипными условиями, отличаются от общепринятых (см., например, [25]) прозрачным геометрическим смыслом. В § 4 теоремы двойственности переносятся на задачи линейного программирования со смешанными условиями. § 5 посвящен выяснению связи между решениями двойственной задачи и так называемыми *разрешающими множителями*. В терминах разрешающих множителей формулируются критерии оптимальности планов задачи линейного программирования. Здесь же приводятся две важные интерпретации разрешающих множителей. В соответствии с первой из них разрешающие множители могут рассматриваться как аналоги множителей Лагранжа. Согласно второй интерпретации разрешающие множители являются оценками влияния правых частей условий задачи линейного программирования на максимально достижимую величину ее линейной формы.

В последнем параграфе (§ 6) теоремы двойственности используются для установления ряда условий, обеспечивающих единственность решения задачи линейного программирования, и доказательства некоторых утверждений теории линейных неравенств.

§ 1. Постановка вопроса

1.1. Рассмотрим общую задачу линейного программирования, заданную в канонической форме.

Требуется обратить в максимум линейную форму

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i=1, 2, \ldots, m; \tag{1.2}$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j=1, 2, \ldots, n. \tag{1.3}$$

Одновременно с задачей (1.1)—(1.3) введем в рассмотрение еще одну задачу линейного программирования.

Требуется обратить в минимум линейную форму

$$\tilde{L}(Y)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \tag{1.4}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i > c_j, \qquad j=1, 2, \ldots, n. \tag{1.5}$$

Задачу (1.4)—(1.5) принято называть *двойственной* по отношению к задаче (1.1)—(1.3), или *сопряженной* с ней. Задачу (1.1)—(1.3) при этом называют *прямой задачей.*

Перепишем условия задач (1.1)—(1.3) и (1.4)—(1.5) в матричной форме. Обозначим через

$$A=\| a_{ij} \|=(A_1, A_2, \ldots, A_n)$$

матрицу условий задачи (1.1)—(1.3), составленную из векторов условий A_j этой задачи. Положим, как обычно,

$$B=(b_1, b_2, \ldots, b_m)^T, \quad C=(c_1, c_2, \ldots, c_n).$$

В этих обозначениях сформулированные задачи принимают следующий вид:

Прямая задача. Требуется определить n-мерный вектор $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, обращающий в максимум

$$L(X)=(C, X) \tag{1.1'}$$

при условиях

$$AX=B, \tag{1.2'}$$

$$X \geqslant 0. \tag{1.3'}$$

Двойственная задача. Требуется определить m-мерный вектор $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)^T$, обращающий в минимум

$$\tilde{L}(Y)=(B, Y) \tag{1.4'}$$

при условиях

$$A^T Y \geqslant C. \tag{1.5'}$$

Таким образом, для образования двойственной задачи из прямой необходимо сделать следующее:

а) поменять ролями векторы B и C;

б) транспонировать матрицу A;

в) заменить знаки равенства в условиях (1.2′) знаками неравенства;

г) исключить условия типа (1.3′);

д) заменить требование максимизации требованием минимизации.

Проиллюстрируем сказанное числовым примером.

Рассмотрим задачу линейного программирования, состоящую в максимизации линейной формы

$$L(X)=x_1+3x_2+2x_3-3x_5-x_6 \tag{1.6}$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+2x_2+x_3+x_4+2x_5+x_6&=1,\\ 4x_1+3x_2-x_3-2x_4-x_5+2x_6&=1. \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j=1, 2, \ldots, 6. \tag{1.8}$$

Для этой задачи

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1\\ 4 & 3 & -1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B=(1, 1)^T; \quad C=(1, 3, 2, 0, -3, -1).$$

В соответствии с общими правилами задача, двойственная по отношению к задаче (1.6)—(1.8), формулируется следующим образом.

Требуется обратить в минимум линейную форму

$$\tilde{L}(Y)=y_1+y_2 \tag{1.9}$$

при условиях:

$$\left.\begin{aligned} 2y_1+4y_2&\geqslant 1,\\ 2y_1+3y_2&\geqslant 3,\\ y_1-\ y_2&\geqslant 2,\\ y_1-2y_2&\geqslant 0,\\ 2y_1-\ y_2&\geqslant -3\\ y_1+2y_2&\geqslant -1. \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

1.2. Приведем геометрическое истолкование двойственной задачи. Для этого предварительно напомним геометрический смысл задачи (1.1)—(1.3) в терминах второй геометрической интерпретации (см. п.5.3 гл. 2). Условия задачи (1.1)—(1.3) задают линейное преобразование n-мерного пространства точек $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в $(m+1)$-мерное пространство точек $U=(u_1, u_2, \ldots, u_{m+1})$:

$$u_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \qquad i=1, 2, \ldots, m;$$

$$u_{m+1}=\sum_{j=1}^{n} c_jx_j.$$

Образом положительного ортанта пространства точек X является выпуклый многогранный конус K с вершиной в начале координат, порожденный расширенными векторами условий $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_n$. Напомним, что

$$\bar{A}_j=(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}, c_j)^T.$$

Образом совокупности решений системы (1.2) оказывается прямая Q, проходящая через точку $\bar{B}=(b_1, b_2, \ldots, b_m, 0)$ параллельно координатной оси Ou_{m+1}. Уравнение прямой Q имеет вид

$$U=\bar{B}+\lambda e_{m+1}, \qquad -\infty<\lambda<\infty, \tag{1.11}$$

где

$$e_{m+1}=(\underbrace{0, 0, \ldots, 0,}_{m} 1).$$

Задача (1.1)—(1.3) состоит в отыскании «верхней» точки пересечения прямой Q и конуса K.

Рассмотрим совокупность гиперплоскостей $(m+1)$-мерного пространства точек U, проходящих через начало координат. Уравнение любой такой гиперплоскости имеет вид

$$\sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k u_k = 0. \tag{1.12}$$

Гиперплоскость (1.12) и ее направляющий вектор $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \lambda_{m+1})$ связаны условием ортогональности. Направляющий вектор определяется с точностью до произвольного множителя (отличного от нуля). Для наших целей удобно доопределить направляющий вектор Λ условием

$$\lambda_{m+1} = -1. \tag{1.13}$$

Тем самым гиперплоскости, параллельные координатной оси Ou_{m+1}, исключаются из рассмотрения. При дополнительном условии (1.13) между гиперплоскостями, проходящими через начало координат и не содержащими координатную ось Ou_{m+1}, и их направляющими векторами устанавливается взаимооднозначное соответствие.

Пусть $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ — произвольный план задачи (1.4)—(1.5), т. е. вектор, удовлетворяющий условиям (1.5). Рассмотрим гиперплоскость Π_Y, определяемую уравнением

$$\sum_{i=1}^{m} y_i u_i - u_{m+1} = 0. \tag{1.14}$$

Проверим, что конус K лежит в одном из полупространств, порождаемых Π_Y.

Действительно, в соответствии с условиями (1.5), которым удовлетворяет вектор Y, результат подстановки в левую часть (1.14) координат любого вектора $\bar{A}_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) представляет собой неотрицательное число. Поэтому конус K, порожденный векторами $\bar{A}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, лежит по ту же сторону от гиперплоскости Π_Y, что и вектор $-e_{m+1} = (0, 0, \ldots, 0, -1)$, соответствующий отрицательному направлению оси Ou_{m+1}. Таким образом, конус K расположен «под» гиперплоскостью Π_Y (в смысле координатной оси Ou_{m+1}).

Рассмотрим теперь произвольную гиперплоскость, проходящую через начало координат и не содержащую координатную ось Ou_{m+1}. Пусть ее уравнение имеет вид (1.14).

Если конус K расположен «под» гиперплоскостью (1.14), то вектор $Y=(y_1, \ldots, y_m)$, определяющий эту гиперплоскость, удовлетворяет условиям (1.5) и, следовательно, является планом двойственной задачи (1.4)—(1.5). Для того чтобы убедиться в этом, достаточно подставить в левую часть (1.14) координаты расширенного вектора условий

$$\bar{A}_j\,(j=1, 2, \ldots, n),$$

который, по предположению, расположен под рассматриваемой гиперплоскостью.

Итак, геометрическим образом множества планов двойственной задачи является совокупность гиперплоскостей, содержащих начало координат и расположенных над конусом K. При этом между планами Y двойственной задачи и гиперплоскостями Π_Y указанной совокупности устанавливается взаимооднозначное соответствие, определяемое уравнением (1.14).

Найдем значение $(m+1)$-й координаты u^Y_{m+1} точки пересечения прямой Q и гиперплоскости Π_Y. Используя уравнения (1.11) и (1.14), получаем

$$u^{(Y)}_{m+1}=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i=\tilde{L}(Y). \tag{1.15}$$

Соотношение (1.15) показывает, что значение линейной формы двойственной задачи на плане Y равно «расстоянию» точки пересечения прямой Q и гиперплоскости Π_Y до гиперплоскости: $u_{m+1}=0$ (слово «расстояние» взято в кавычки, потому что u^Y_{m+1} может быть как положительным, так и отрицательным числом).

Теперь мы можем указать геометрический смысл двойственной задачи.

С геометрической точки зрения двойственная задача (1.4)—(1.5) заключается в отыскании такой гиперплоскости, содержащей начало координат и расположенной «над» конусом K, которая пересекает прямую Q в «наинизшей» точке (в смысле оси Ou_{m+1}).

1.3. При $m=2$ все сказанное в предыдущем пункте приобретает геометрическую наглядность.

Обратимся к задаче (1.6) — (1.8), у которой число условий-равенств (1.7) равно 2. В данном случае расширенные векторы условий имеют вид

$$\bar{A}_1=\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix},\quad \bar{A}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix},\quad \bar{A}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\quad \bar{A}_4=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},$$

$$\bar{A}_5=\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix},\quad \bar{A}_6=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

Конус K образован векторами $\bar{A}_j$, $j=1, 2, 3, 4, 5, 6$, и расположен в трехмерном пространстве точек $U=(u_1, u_2, u_3)$. Ребрами конуса K являются лучи

$$U=\bar{A}_j\lambda,\quad \lambda\geqslant 0,\qquad j=1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Прямая Q согласно соотношениям (1.11) имеет уравнение

$$\left.\begin{aligned} u_1&=1,\\ u_2&=1,\\ u_3&=\lambda, \end{aligned}\right\}\tag{1.16}$$

где $-\infty<\lambda<\infty$.

Пересечем конус K плоскостью, проходящей через точку (1, 0, 0) и перпендикулярной к координатной оси Ou_1. Уравнение этой плоскости имеет вид $u_1=1$. Общая часть плоскости $u_1=1$ и конуса K представляет собой многоугольник $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$. Вершины многоугольника $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ являются точками пересечения плоскости $u_1=1$ с соответствующими ребрами $U=\bar{A}_j\lambda$, $\lambda\geqslant 0$, многогранного конуса K.

Многоугольник $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ изображен на рис. 3.1. На этом рисунке намечена также прямая Q, содержащаяся в плоскости $u_1=1$.

Каждая плоскость, проходящая через начало координат и не содержащая координатную ось Ou_3, пересекает плоскость $u_1=1$ по прямой, не параллельной Q. Будем называть такие прямые *следами* соответствующих плоскостей. На рис. 3.1 изображены четыре подобных следа:

$$SR;\quad S'R';\quad S''R'';\quad S^*R^*.$$

Как нетрудно заметить, произвольная прямая на рис. 3.1 оказывается следом плоскости, соответствующей плану двойственной задачи (1.9) — (1.10), в том и только в том случае, если многоугольник $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ расположен под этой прямой. В частности, прямые RS, R^*S^* соответствуют планам двойственной задачи. Две другие прямые не определяют планов двойственной задачи: прямая $R'S'$ проходит ниже многоугольника $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$, прямая $R''S''$ делит этот многоугольник на две части. Геометрическим образом решения прямой задачи является точка a — верхняя точка пересечения прямой Q и многоугольника $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$.

Процесс решения двойственной задачи состоит в выборе такой прямой, которая расположена над многоугольником $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ и пересекает ось Q возможно ниже. Геометрически очевидно, что этим свойством обладает прямая R^*S^*, являющаяся опорной для многоугольника $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ в точке a. Отсюда следует совпадение значений линейных форм задач (1.6) — (1.8) и (1.9) — (1.10) на их оптимальных планах. Оптимальная величина обеих линейных форм равна длине отрезка aa' (см. рис. 3.1).

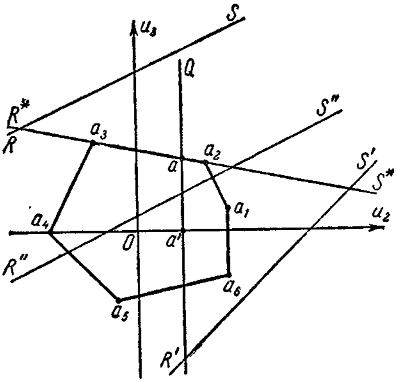


Рис. 3.1

В дальнейшем мы убедимся, что отмеченные здесь свойства задач (1.6) — (1.8) и (1.9) — (1.10) справедливы для произвольных задач линейного программирования.

При выяснении геометрического смысла задачи (1.9) — (1.10) мы, естественно, могли бы оперировать с самим конусом K, а не с сечением этого конуса плоскостью $u_1 = 1$, содержащей ось Q. Переход к многоугольнику $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ был осуществлен здесь лишь для того, чтобы сделать изложение более наглядным.

Отметим, что вместо плоскости $u_1 = 1$ можно было бы взять любую плоскость, содержащую прямую Q.

1.4. В § 7 гл. 1, где описывался экономический смысл задачи линейного программирования, был рассмотрен класс задач, все ограничения которых имеют вид неравенств и все переменные предполагаются неотрицательными. Задачи этого класса получили название задач с *однотипными условиями*. Экономическая интерпретация двойственной задачи, излагаемая в п.1.5, также применима только к задачам с однотипными условиями. Произвольная задача линейного программирования с однотипными условиями формулируется следующим образом.

Требуется обратить в максимум линейную форму

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.17}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m; \tag{1.18}$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.19}$$

Задачу (1.17)—(1.19) нетрудно привести к канонической форме. Для этого достаточно ввести дополнительные неотрицательные переменные x_{n+i}, $i = 1, 2, \ldots, m$, и переписать условия задачи (1.17)—(1.19) в эквивалентном виде

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m; \tag{1,18$'$}$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n+m. \tag{1.19$'$}$$

Эквивалентная задача имеет $n+m$ неотрицательных переменных и m условий-равенств.

Сформулируем, руководствуясь общими правилами, задачу, двойственную к задаче (1.17), (1.18$'$), (1.19$'$).

Расширенные векторы условий прямой задачи имеют такой вид:

$$\bar{A}_j = \begin{cases} (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}, c_j)^T, & \text{если } 1 \leqslant j \leqslant n, \\ (\underbrace{0, 0, \ldots, 0, 1}_{j-n}, 0, \ldots 0)^T, & \text{если } n+1 \leqslant j \leqslant n+m. \end{cases}$$

Поэтому двойственная задача формулируется следующим образом.

Требуется обратить в минимум линейную форму

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \tag{1.20}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j, \qquad j=1, 2, \ldots, n; \tag{1.21}$$

$$y_i \geqslant 0, \qquad i=1, 2, \ldots, m. \tag{1.22}$$

Важно отметить, что двойственная задача (1.20)—(1.22) является задачей с однотипными условиями.

Если ввести новые параметры $a'_{ij} = -a_{ij}$, $b'_i = -b_i$, $c'_j = -c_j$, то задача (1.20)—(1.22) превращается в задачу максимизации линейной формы

$$\sum_{i=1}^{m} b'_i y_i \tag{1.20$'$}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} a'_{ij} y_i \leqslant c'_j, \qquad j=1, 2, \ldots, n; \tag{1.21$'$}$$

$$y_i \geqslant 0, \qquad i=1, 2, \ldots, m. \tag{1.22$'$}$$

Полученная задача имеет точно такой же вид, как и задача (1.17)—(1.19). Следовательно, двойственной по отношению к ней является задача минимизации линейной формы

$$\sum_{j=1}^{n} c'_j x_j \tag{1.23}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a'_{ij} x_j \geqslant b'_i, \qquad i=1, 2, \ldots, m; \tag{1.24}$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j=1, 2, \ldots, n. \tag{1.25}$$

Если теперь в задаче (1.23)—(1.25) перейти к старым параметрам a_{ij}, b_i, c_j, то получим прямую задачу (1.17)—(1.19).

Таким образом, прямая задача (1.17)—(1.19) является сопряженной к двойственной задаче (1.20)—(1.22). В связи с этим задачи (1.17)—(1.19) и (1.20)—(1.22) естественно называть *двойственной*, или *взаимосопряженной, парой*. Каждая из задач этой пары двойственна по отношению к другой задаче. Поэтому выделение прямой задачи из взаимосопряженной пары носит чисто условный характер.

В дальнейшем (§ 3) мы убедимся, что задачи (1.1)—(1.3) и (1.4)—(1.5) также составляют двойственную пару.

1.5. Приведем экономическое истолкование задачи (1.20)—(1.22), двойственной по отношению к задаче (1.17)—(1.19). Прежде всего напомним экономическую интерпретацию прямой задачи (1.17)—(1.19), которая была изложена в п. 7.2 гл. 1.

Имеется n способов производства некоторого однородного продукта. Количество продукта, вырабатываемое с помощью j-го способа производства в единицу времени, составляет c_j единиц. Использование j-го способа производства в течение единицы времени связано с расходом i-го фактора производства ($i=1, 2, \ldots, m$), равным a_{ij}.

Допустим, что запасы факторов производства составляют соответственно $b_1, b_2, \ldots, b_m$ единиц. Время, в течение которого производство ведется по j-му способу, обозначим через x_j.

Задача (1.17)—(1.19) является математической формулировкой проблемы составления такого плана использования различных способов производства, который позволяет получить максимальное количество однородного продукта при имеющихся в наличии ресурсах $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

Допустим теперь, что необходимо, оставаясь в рамках рассматриваемого производства, оценить каждый из его факторов. Мы здесь будем рассматривать лишь идеализированную замкнутую модель производства, в которой связи с внешним миром строго фиксированы условиями задачи.

Условия задачи (ограниченные ресурсы и отработанные способы производства) определяют оценку каждого фактора, внутреннюю для данного производства. Следует иметь в виду, что эта оценка является относительной. Одни и те же производственные факторы в условиях разных предприятий и районов представляют различную ценность. Ниже (п. 5.5) мы увидим, что оценка фактора является мерой полезности этого фактора для д а н н о г о производства при с т р о г о ф и к с и р о в а н н ы х условиях.

Изменение условий производства, в частности, изменение запасов различных факторов приводит к необходимости переоценки этих факторов. Относительность оценок факторов производства связана также и с тем, что эти оценки измеряются в единицах ценности выпускаемой продукции. Ценность продукции определяется условиями, внешними по отношению к данному производству.

Примем оценку единицы производимого продукта за единицу. Оценка единицы производимого продукта (ценность продукции) является здесь исходным понятием, отправляясь от которого можно установить оценки различных факторов производства. Обозначим через y_i $(i=1, 2, \ldots, m)$ оценку единицы i-го фактора производства (оценку i-го фактора).

Исследуем j-й способ производства с точки зрения расходов и доходов.

Если использовать этот способ производства в течение единицы времени, то оценка всех затрат составит

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i,$$

а оценка полученной продукции окажется равной c_j. При правильно выбранных оценках факторов производства оценка суммарных расходов не может быть меньше оценки полученной продукции, ибо в противном случае часть продукции была бы создана из «ничего». Следовательно, для любого $j=1, 2, \ldots, n$

$$z_j \geqslant c_j.$$

Другими словами, вектор оценок $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ должен подчиняться условиям (1.21).

Кроме того, оценки $y_1, y_2, \ldots, y_m$ естественно считать неотрицательными числами. Поэтому вектор $Y=(y_1, y_2, \ldots \ldots, y_m)$ удовлетворяет также условиям (1.22).

Итак, вектор оценок факторов производства является планом двойственной задачи (1.20)—(1.22).

Однако условия (1.21), (1.22) не могут полностью определить вектор оценок Y. В рассматриваемой экономической интерпретации задачи (1.17)—(1.19) параметры a_{ij} естественно считать неотрицательными числами, причем при любом j хотя бы одна из величин a_{ij} должна быть отлична от нуля. Поэтому любой вектор с достаточно большими значениями компонент является планом двойственной задачи (1.20)—(1.22).

Возникает необходимость в условии, не допускающем необоснованного завышения оценок факторов производства.

Естественным ограничением подобного типа является следующее. Вектор оценок Y должен быть таким, чтобы суммарная оценка ресурсов

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i,$$

которыми располагает анализируемое производство, достигла возможно меньшего значения.

В дальнейшем мы увидим, что если это условие не выполняется, то при любом плане использования способов производства оценка полученной продукции оказывается меньше суммарной оценки всех ресурсов. Наоборот, при учете указанного условия существуют планы производства, обеспечивающие равенство оценок произведенной продукции и имеющихся ресурсов. Это обстоятельство также оправдывает введение последнего ограничения.

Таким образом, двойственная задача (1.20)—(1.22) является математической формулировкой проблемы правильной оценки всех факторов производства. Вектор оценок факторов производства совпадает с решением двойственной задачи. В дальнейшем мы будем иногда называть планы двойственной задачи векторами *предварительных оценок* факторов производства.

Пару двойственных задач (1.17)—(1.19) и (1.20)—(1.22) удобно задавать в виде наглядной таблицы (табл. 3.1).

Таблица 3.1

		Производительность							
		c_1	c_2	$\ldots$	c_j	$\ldots$	c_n		
Вектор оценок	y_1	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1j}	$\ldots$	a_{1n}	b_1	Ресурсы
	y_2	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2j}	$\ldots$	a_{2n}	b_2	
	$\vdots$	.	.	.	.	.	.	$\vdots$	
	y_i	a_{i1}	a_{i2}	$\ldots$	a_{ij}	$\ldots$	a_{in}	b_i	
	$\vdots$	.	.	.	.	.	.	$\vdots$	
	y_m	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mj}	$\ldots$	a_{mn}	b_m	
		x_1	x_2	$\ldots$	x_j	$\ldots$	x_n		
		План производства							

1.6. В заключение параграфа приведем несколько простых, но весьма полезных утверждений относительно планов прямой и двойственной задач. Эти утверждения будут неоднократно использоваться в последующем изложении.

Лемма 1.1. *Если* $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *и* $Y=(y_1, y_2, \ldots$ $\ldots, y_m)$ — *произвольные планы задач* (1.1)—(1.3) *и* (1.4)—(1.5) *соответственно, то*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leqslant \sum_{i=1}^{m} b_i y_i. \tag{1.26}$$

Доказательство. По условию

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j, \qquad j=1, 2, \ldots, n.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = \sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j.$$

Вектор X является планом задачи (1.1)—(1.3), поэтому

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad \text{для} \quad i=1, 2, \ldots, m.$$

Преобразуя с помощью этих равенств правую часть предыдущего соотношения, имеем

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leqslant \sum_{i=1}^{m} b_i y_i.$$

Лемма доказана.

Из леммы 1.1, в частности, следует, что, приняв в качестве вектора оценок план двойственной задачи, не являющийся ее решением, мы не сможем получить совпадения оценок произведенной продукции и имеющихся ресурсов.

Действительно, если Y — неоптимальный план двойственной задачи, а Y^* — решение этой задачи, то при любом плане X прямой задачи

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leqslant \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* < \sum_{i=1}^{m} b_i y_i.$$

Лемма 1.2. *Если для некоторых планов* $X^*=(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ *и* $Y^*=(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*)$ *задач* (1.1)—(1.3) *и* (1.4)—(1.5) *соответственно выполняется равенство*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*, \tag{1.27}$$

то векторы X^*, Y^* *являются решениями соответствующих задач.*

Доказательство. Согласно лемме 1.1 для любого плана $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задачи (1.1)—(1.3) справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leqslant \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*.$$

Отсюда, учитывая условия леммы 1.2, получаем

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*. \tag{1.28}$$

Неравенство (1.28), справедливое для любого плана X задачи (1.1)—(1.3), указывает на оптимальность плана X^*.

Оптимальность плана Y^* двойственной задачи (1.4)—(1.5) устанавливается аналогично.

Лемма 1.2 доказана.

Экономический смысл утверждения леммы 1.2 состоит в следующем.

Если при некотором плане использования способов производства X^* и некотором векторе предварительных оценок факторов производства Y^* оценка произведенной продукции оказывается равной суммарной оценке имеющихся ресурсов, то X^* и Y^* являются соответственно оптимальным планом производства и вектором оценок факторов производства.

Лемма 1.2 устанавливает достаточность условия (1.27) для оптимальности планов X^* и Y^*. В дальнейшем мы убедимся в том, что равенство (1.27) является также и необходимым условием оптимальности планов X^* и Y^*.

Лемма 1.3. *Если линейная форма* (1.4) *двойственной задачи* (1.4)—(1.5) *не ограничена снизу на множестве своих планов, то прямая задача* (1.1)—(1.3) *не имеет ни одного плана.*

Доказательство. По условию, существует последовательность планов $\{Y_k\}$ двойственной задачи (1.4)—(1.5) такая, что

$$\lim_{k \to \infty} (B, Y_k) = -\infty. \tag{1.29}$$

Если предположить, что прямая задача (1.1)—(1.3) имеет план X, то согласно лемме 1.1.

$$(C, X) \leqslant (B, Y_k)$$

для любого натурального k. Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$ и учитывая (1.29), получаем

$$(C, X) = -\infty. \tag{1.30}$$

Если все составляющие вектора X конечные величины, то равенство (1.30) невозможно.

Следовательно, предположение о наличии у задачи (1.1)—(1.3) хотя бы одного плана ошибочно.

Лемма 1.3 доказана.

Поясним геометрический смысл утверждения леммы 1.3 в $(m+1)$-мерном пространстве точек

$$U = (u_1, u_2, \ldots, u_{m+1}).$$

Если существует последовательность гиперплоскостей, содержащих начало координат, расположенных над конусом K и пересекающих ось Q в точках, $(m+1)$-я координата которых стремится к $-\infty$, то прямая Q и конус K не имеют ни одной общей точки.

Лемма 1.3 оказывается полезной при установлении неразрешимости задачи линейного программирования.

Все три леммы этого пункта формулировались для задачи линейного программирования, записанной в канонической форме. Естественно, что эти утверждения имеют место и для задач с однотипными условиями, поскольку при построении задачи, двойственной по отношению к задаче (1.17)—(1.19), мы приводили последнюю к канонической форме. Впрочем, отмеченным обстоятельством мы уже пользовались при пояснении экономической сущности приведенных здесь предложений.

§ 2. О некоторых свойствах выпуклых многогранных конусов

2.1. Доказательства теорем двойственности, которым посвящен следующий параграф, существенно опираются на некоторые свойства выпуклых многогранных конусов. Эти свойства будут установлены в настоящем параграфе. В дальнейшем, говоря о точках или векторах, мы будем иметь в виду элементы n-мерного векторного пространства при произвольном значении n.

В главе 2 было дано два эквивалентных определения выпуклого многогранного конуса, расположенного в n-мерном пространстве (см. п. 3.5).

Здесь удобнее пользоваться вторым определением. Напомним его.

Множество K_{P_0}, состоящее из точек

$$P=\sum_{i=1}^{N}\beta_i R_i+P_0,$$

где $\beta_i \geqslant 0$, $i=1, 2, \ldots, N$, а $R_1, R_2, \ldots, R_N$, P_0 — некоторые точки (векторы) n-мерного пространства, называется выпуклым многогранным конусом с вершиной в точке P_0, образованным (порожденным) векторами $R_1, R_2, \ldots, R_N$.

Отметим одно простое свойство выпуклых конусов (соответствующее определение см. в п. 3.2 Дополнения).

Лемма 2.1. *Пусть* Π — *гиперплоскость, опорная для конуса* T *в точке* P. *В таком случае эта гиперплоскость содержит любую точку* P' *вида*

$$P'=P_0+\mu(P-P_0), \tag{2.1}$$

где P_0 — *вершина* T, *а* $\mu \geqslant 0$.

Доказательство. Положим, что уравнение гиперплоскости Π

$$(\Lambda, X)=c. \tag{2.2}$$

Допустим для определенности, что величина μ в соотношении (2.1) больше 1 (другая возможность, $\mu<1$, может быть рассмотрена аналогично).

Если P'' — произвольная точка конуса T, имеющая представление (2.1) при $\mu<1$, то найдется такое число S, $0<S<1$, что

$$P = SP' + (1 - S)P''.$$

По условию,

$$(\Lambda, P) = c.$$

Следовательно,

$$(\Lambda, SP' + (1 - S)P'') = c,$$

или, после очевидных преобразований,

$$S[(\Lambda, P') - c] + (1 - S)[(\Lambda, P'') - c] = 0. \qquad (2.3)$$

Поскольку П — опорная гиперплоскость конуса **Т**, то каждая из величин, стоящих в квадратных скобках выражения (2.3), неположительна (или неотрицательна). Поэтому для справедливости равенства (2.3) при $0 < S < 1$ необходимо, чтобы обе они равнялись нулю, т. е.

$$(\Lambda, P') = (\Lambda, P'') = c.$$

Итак, произвольная точка P', лежащая на луче, исходящем из P_0 в сторону P, принадлежит опорной гиперплоскости П.

Лемма доказана.

Применяя лемму 2.1 при $\mu = 0$, получаем

Следствие 2.1. *Любая опорная гиперплоскость выпуклого конуса содержит его вершину.*

Лемма 2.1 и ее следствие справедливы для произвольных выпуклых конусов. В частности, они имеют место и для выпуклых многогранных конусов.

2.2. Утверждения, приводимые в этом пункте, верны лишь для выпуклых многогранных конусов.

Рассмотрим выпуклый многогранный конус K, образованный векторами $R_1, R_2, \ldots, R_N$ и имеющий вершину в начале координат. Гиперплоскость, опорную для конуса K в точке $Q \in K$, обозначим через Π_Q.

Лемма 2.2. *Для произвольной граничной точки P конуса K найдется такое число $\varepsilon > 0$, что любая опорная гиперплоскость Π_Q, где $|P - Q| < \varepsilon$ *), содержит точку P.*

---

*) Напомним, что символ $|A|$ обозначает длину вектора A:

$$|A| = \sqrt{(A, A)}.$$

Доказательство. Допустим противное, т. е. существует такая последовательность $\{Q_\alpha\}$ граничных точек конуса K, что

$$\lim_{\alpha \to \infty} |P - Q_\alpha| = 0,$$

однако ни одна из гиперплоскостей Π_{Q_α} не содержит точку P.

Пусть

$$Q_\alpha = \sum_{k=1}^{s_\alpha} \beta_{i_k}^{(\alpha)} R_{i_{k,\alpha}},$$

где $\beta_{i_k}^{(\alpha)} > 0$, $k = 1, 2, \ldots, s_\alpha$. Число точек Q_α бесконечно. Количество различных систем, которые могут быть составлены из векторов $R_1, R_2, \ldots, R_N$, заведомо конечно. Поэтому из последовательности $\{Q_\alpha\}$ может быть выделена такая бесконечная подпоследовательность $\{Q_{\alpha_t}\} = \{\overline{Q}_t\}$, что

$$\overline{Q}_t = \sum_{k=1}^{s} \beta_k^{(t)} R_{i_k},$$

где система векторов $R_{i_1}, R_{i_2}, \ldots, R_{i_s}$ одна и та же для всех точек $Q_{\alpha_t} = \overline{Q}_t$, $\beta_k^{(t)} > 0$, $k = 1, 2, \ldots, s$, $t = 1, 2 \ldots$ Итак, получена последовательность $\{\overline{Q}_t\}$ граничных точек конуса K, обладающая следующими свойствами:

а) для любого t

$$\overline{Q}_t = \sum_{k=1}^{s} \beta_k^{(t)} R_{i_k}, \tag{2.4}$$

где система векторов $R_{i_1}, R_{i_2}, \ldots, R_{i_s}$ не зависит от точки $\overline{Q}_t$, а

$$\beta_k^{(t)} > 0 \text{ для } k = 1, 2, \ldots, s; \qquad t = 1, 2, \ldots;$$

б) $\lim\limits_{t \to \infty} |\overline{Q}_t - P| = 0$;

в) $P \notin \Pi_{\overline{Q}_t}$ для любого $t = 1, 2, \ldots$

Покажем, что существование такой последовательности невозможно.

Обозначим через $\overline{K}$ многогранный конус, порожденный векторами $R_{i_1}, R_{i_2}, \ldots, R_{i_s}$ и имеющий вершину в начале координат. В соответствии с условием *а*

$$\overline{Q}_t \in \overline{K}, \qquad t = 1, 2, \ldots$$

Условие *б* означает, что P — предельная точка последовательности $\{\overline{Q}_t\}$. В силу замкнутости выпуклого многогранного конуса $\overline{K}$ (см. лемму 3.3 гл. 2) точка $P \in \overline{K}$. Следовательно,

$$P = \sum_{k=1}^{s} \beta_k R_{i_k}, \tag{2.5}$$

где $\beta_k \geqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots, s$.

Рассмотрим произвольную точку $\overline{Q}_t$ последовательности $\{\overline{Q}_t\}$. Пусть уравнение опорной гиперплоскости $\Pi_{\overline{Q}_t}$ имеет вид

$$(\Lambda_t, X) = 0. \tag{2.6}$$

При составлении уравнения (2.6) мы воспользовались следствием 2.1, согласно которому гиперплоскость $\Pi_{\overline{Q}_t}$ содержит точку O, являющуюся вершиной конуса $\overline{K}$.

Учитывая представление (2.4) точки $\overline{Q}_t \in \Pi_{\overline{Q}_t}$, имеем

$$(\Lambda_t, \overline{Q}_t) = \sum_{k=1}^{s} \beta_k^{(t)} (\Lambda_t, R_{i_k}) = 0. \tag{2.7}$$

Поскольку $(\Lambda_t, R_{i_k}) \leqslant 0$ ($\Pi_{\overline{Q}_t}$ — опорная гиперплоскость конуса K), а $\beta_k > 0$, то равенство (2.7) возможно только в том случае, если

$$(\Lambda_t, R_{i_k}) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, s. \tag{2.8}$$

Соотношения (2.5) и (2.8) приводят к равенству

$$(\Lambda_t, P) = 0,$$

означающему, что $P \in \Pi_{\overline{Q}_t}$.

Итак, ни одна из точек последовательности $\{\overline{Q}_t\}$, удовлетворяющей условиям *а* и *б*, не может подчиняться требованию *в*.

Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения леммы 2.2.

2.3. Обозначим через T_P произвольный многогранный конус с вершиной в точке P, образованной ненулевыми векторами $T_1, T_2, \ldots, T_{N_1}$.

Будем предполагать, что многогранный конус T_P удовлетворяет следующему условию:

При любых величинах $y_i \geqslant 0$ *равенство*

$$\sum_{i=1}^{N_1} y_i \mathrm{T}_i = 0$$

возможно лишь в случае, если

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_{N_1} = 0.$$

Можно показать (см. упражнение 3), что приведенное условие эквивалентно требованию, чтобы вершина P конуса T_P была его крайней точкой (острием).

Лемма 2.3. *Если общая часть выпуклых многогранных конусов* K *и* T_P *содержит лишь точку* P, *то существует гиперплоскость* Π *с уравнением*

$$(\Lambda,\ X) = 0,$$

опорная для K *в точке* P $((\Lambda,\ X) \leqslant 0$, *если* $X \in K$; $(\Lambda, P) = 0)$ *и такая, что*

$$(\Lambda,\ Q) > 0 \tag{2.9}$$

для всех точек Q *конуса* T_P, *отличных от его вершины* P.

Доказательство. Введем в рассмотрение множество $\mathrm{T}_P^{(\delta)}$ $(0 < \delta < 1)$, состоящее из точек

$$Q = \sum_{k=1}^{N_1} \beta_k \mathrm{T}_k + P \in \mathrm{T}_P,$$

для которых

$$\delta \leqslant \sum_{k=1}^{N_1} \beta_k \leqslant 1.$$

Как нетрудно проверить, $T_P^{(\delta)}$ — выпуклое замкнутое ограниченное множество.

Проведение соответствующих рассуждений предоставляется читателю (см. упражнение 4).

Точка $P \notin T_P^{(\delta)}$. Действительно, если $0 < \delta \leqslant \sum_{k=1}^{N_1} \beta_k$, то в соответствии с указанным ранее свойством конуса T_P

$$\sum_{k=1}^{N_1} \beta_k T_k \neq 0,$$

и следовательно, любая точка P' множества $T_P^{(\delta)}$ имеет вид

$$P' = P + P'',$$

где $P'' \neq 0$, т. е. $P' \neq P$.

Таким образом, множества K и $T_P^{(\delta)}$ не имеют общих точек. Обозначим через P_δ точку конуса K, наименее удаленную от множества $T_P^{(\delta)}$. Существование такой точки вытекает из замкнутости множества K и ограниченности множества $T_P^{(\delta)}$ (см. п. 3. 3 Дополнения).

Очевидно, P_δ является граничной точкой конуса K. Пусть Π_δ — гиперплоскость, опорная для K в точке P_δ и такая, что множество $T_P^{(\delta)}$ лежит внутри подпространства, которое порождается Π_δ и не содержит K (ее существование гарантируется следствием 3.2 Дополнения).

Убедимся, что

$$\lim_{\delta \to 0} | P_\delta - P | = 0. \qquad (2.10)$$

Действительно, предположив противное, мы смогли бы образовать последовательность $\{P_{\delta_k}\}$, сходящуюся к точке $\overline{P} \neq P$ (здесь мы воспользовались ограниченностью совокупности точек P_δ, $0 < \delta < 1$).

Очевидно, точка $P'_\delta = P + \delta T_1 \in T_P^{(\delta)}$, причем

$$| P'_\delta - P | = \delta | T_1 |.$$

Следовательно, согласно определению точки P_δ найдется такая точка $\overline{P}_\delta \in T_p^{(\delta)}$, что

$$| \overline{P}_\delta - P_\delta | \leqslant \delta | T_1 |.$$

Переходя в этом равенстве к пределу по последовательности $\delta_k \to 0$, $k = 1, 2, \ldots$, имеем

$$\lim_{k \to \infty} \overline{P}_{\delta_k} = \lim_{k \to \infty} P_{\delta_k} = \overline{P}.$$

Из этого соотношения и замкнутости множеств K и T_P получаем, что точка $\overline{P}$ содержится в общей части конусов K и T_P (по условию, $\overline{P}_\delta \in T_P$, $P_\delta \in K$). Но по предположению общая часть K и T_P содержит лишь точку P. Полученное противоречие указывает на справедливость соотношения (2.10).

Выберем теперь значение $\delta=\delta^*>0$ настолько малым, чтобы

$$|P-P_{\delta^*}|<\varepsilon,$$

где ε — величина, фигурирующая в условии леммы 2.2. Согласно этой лемме гиперплоскость Π_{δ^*} является опорной для конуса K в точке P.

Положим, что уравнение гиперплоскости Π_{δ^*} имеет вид

$$(\Lambda,\ X)=0.$$

В таком случае из определения гиперплоскости Π_{δ^*} вытекает справедливость следующих соотношений:

$$(\Lambda,\ X)\leqslant 0 \text{ для } X\in K, \tag{2.11}$$

$$(\Lambda,\ P)=0, \tag{2.12}$$

$$(\Lambda,\ X)>0 \text{ для } X\in T_P^{(\delta^*)}. \tag{2.13}$$

Пусть Q — произвольная точка конуса T_P, не совпадающая с P.

Тогда, очевидно, найдется такое число $\mu>0$, при котором

$$Q_\mu=P+\mu(Q-P)\in T_P^{(\delta^*)}.$$

Отсюда, учитывая (2.12) и (2.13), имеем

$$(\Lambda,\ Q_\mu)=(\Lambda,(1-\mu)P)+(\Lambda,\ \mu Q)=\mu(\Lambda,\ Q)>0.$$

Итак,

$$(\Lambda,\ Q)>0 \tag{2.14}$$

для всех точек $Q\in T_P$, отличных от P. Соотношения (2.11), (2.12) и (2.14) означают, что гиперплоскость Π_{δ^*} удовлетворяет всем условиям леммы. Лемма 2.3 доказана.

Лемма 2.3 послужит основой для доказательства теорем двойственности, которым посвящен следующий параграф. При доказательстве этой леммы предполагалось, что выпуклые конусы K и T_P многогранные, а точка P — острие (крайняя точка) конуса T_P. Нетрудно привести примеры, показывающие, что нарушение указанных предположений относительно конуса K и точки P делает утверждение леммы, вообще говоря, неверным. Что касается конуса T_P, то допущение о его многогранности может быть отброшено без ущерба для справедливости леммы 2.3.

Обоснование сформулированных только что утверждений предоставляется читателю (см. упражнения 5 и 6).

§ 3. Теоремы двойственности

3.1. Как было показано в § 1, каждая из задач линейного программирования с однотипными условиями (1.17)—(1.19) и (1.20)—(1.22) является двойственной по отношению к другой задаче. Таким образом, обе они составляют двойственную (взаимосопряженную) пару задач линейного программирования. Взаимосопряженные задачи линейного программирования обладают рядом интересных и важных для приложений свойств, связывающих их воедино. Некоторые простейшие свойства двойственных задач были уже рассмотрены в конце § 1.

В настоящем параграфе мы сформулируем и докажем две основные теоремы двойственности и выведем из них несколько полезных следствий. Доказательства обеих теорем основываются на свойствах выпуклых многогранных конусов, выяснению которых был посвящен предыдущий параграф. Теоремы двойственности устанавливаются здесь для задач линейного программирования с однотипными условиями и в канонической форме.

Общий случай рассматривается в следующем параграфе, где понятие двойственности распространяется на задачи линейного программирования, заданные в произвольной форме записи.

3.2. Рассмотрим общую задачу линейного программирования, записанную в канонической форме (задачу (1.1)—(1.3)). Задача (1.1)—(1.3) и двойственная по отношению к ней задача (1.4)—(1.5) обладают следующим важным свойством:

Теорема 3.1. *Если задача* (1.1)—(1.3) *имеет оптимальный план, то задача* (1.4)—(1.5) *также разрешима. При этом для любых оптимальных планов* $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ *задач* (1.1)—(1.3) *и* (1.4)—(1.5) *соответственно выполняется* *равенство*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i. \qquad (3.1)$$

Доказательство. 1. Идея доказательства теоремы основывается на следующих геометрических соображениях (см. п. 1.2). Рассмотрим выпуклый многогранный конус K, порожденный расширенными векторами условий прямой задачи. Геометрическим образом оптимального плана задачи (1.1)—(1.3) является «верхняя» точка пересечения оси Q и конуса K (точка $\bar{B}$). Применяя к конусу K и лучу, исходящему из точки $\bar{B}$ вверх по прямой Q, лемму 2.3, построим гиперплоскость Π^*, опорную для K в точке $\bar{B}$ и такую, что вектор e_{m+1}, проведенный из точки $\bar{B}$, расположен над Π^*. Полученная гиперплоскость соответствует оптимальному плану двойственной задачи.

2. Переходим к строгому доказательству теоремы. Как обычно, через $\bar{A}_j$ обозначим j-й расширенный вектор условий задачи (1.1)—(1.3):

$$\bar{A}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}, c_j)^T.$$

Положим далее

$$\bar{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_m, \Delta)^T,$$

где $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$ — вектор ограничений задачи (1.1) —(1.3), а Δ — максимальное значение ее линейной формы (по условию теоремы задача (1.1)—(1.3) разрешима).

Пусть $X^* = (\overset{*}{x}_1, \overset{*}{x}_2, \ldots, \overset{*}{x}_n)$ — оптимальный план задачи (1.1)—(1.3). В таком случае согласно определению векторов $\bar{A}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, и $\bar{B}$

$$\bar{B} = \sum_{j=1}^{n} \bar{A}_j \overset{*}{x}_j. \qquad (3.2)$$

Обозначим через K выпуклый многогранный конус с вершиной в начале координат, образованный векторами $\bar{A}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Соотношение (3.2) означает, что $\bar{B} \in K$.

Рассмотрим луч S, исходящий из точки $\bar{B}$ и имеющий в качестве направляющего вектор $e_{m+1}=(0, 0, \ldots, 0, 1)^T$.

Нетрудно заметить, что любая точка луча S, не совпадающая с его концом $\bar{B}$, расположена вне конуса K. Действительно, если бы при некотором $\mu>0$ точка $\bar{B}+\mu e_{m+1}$ принадлежала конусу K, то нашлись бы такие неотрицательные числа $\bar{x}_j$, $j=1, 2, \ldots, n$, что

$$\bar{B}+\mu e_{m+1}=\sum_{j=1}^{n} \bar{A}_j \bar{x}_j. \tag{3.3}$$

Из векторного равенства (3.3) вытекает, что $\bar{X}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \ldots, \bar{x}_n)$ является планом задачи (1.1)—(1.3), причем

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \bar{x}_j=\Delta+\lambda>\Delta. \tag{3.4}$$

Соотношение (3.4) противоречит предположению, согласно которому Δ — максимальное значение линейной формы (1.1) при условиях (1.2), (1.3). Следовательно, равенство (3.3) невозможно, т. е. при $\lambda>0$

$$\bar{B}+\lambda e_{m+1} \notin K.$$

Таким образом, луч S всеми своими точками, кроме конца $\bar{B}$, расположен вне K.

Луч S может рассматриваться как выпуклый многогранный конус с вершиной в точке $\bar{B}$, образованный единственным вектором e_{m+1}. Очевидно, вершина $\bar{B}$ конуса S является его острием.

Итак, к конусу K и лучу S может быть применена лемма 2.3. В данном случае $N_1=1$; $P=\bar{B}$; $T_1=e_{m+1}$; $T_P=S$. В соответствии с леммой 2.3 найдется гиперплоскость Π^* с уравнением

$$(\Lambda, U)=0,$$

обладающая следующими свойствами:

$$(\Lambda, \bar{A}_j)\leqslant 0, \quad j=1, 2, \ldots, n; \tag{3.5}$$

$$(\Lambda, \bar{B})=0; \tag{3.6}$$

$$(\Lambda, \bar{B}+e_{m+1})=(\Lambda, e_{m+1})>0. \tag{3.7}$$

Условие (3.5) является следствием опорности гиперплоскости Π^* по отношению к конусу K. Равенство (3.6) означает, что гиперплоскость Π^* содержит точку $\bar{B}$ — вершину конуса S. Соотношение (3.7) вытекает из условия (2.9), фигурирующего в формулировке леммы 2.3.

3. Теперь уже нетрудно определить оптимальный план двойственной задачи (1.4)—(1.5). В силу условия (3.7) $(m+1)$-я составляющая вектора $\Lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \lambda_{m+1})$ положительна:

$$(\Lambda, e_{m+1})=\lambda_{m+1}>0.$$

Учитывая этот факт, определим m-мерный вектор $Y^*=(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*)$, положив

$$y_i^* = -\frac{\lambda_i}{\lambda_{m+1}}, \qquad i=1, 2, \ldots, m.$$

Преобразуя очевидным образом условие (3.5), имеем

$$(\Lambda, \bar{A}_j)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{ij}+\lambda_{m+1}c_j\leqslant 0,$$

или

$$\sum_{i=1}^{m}\left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_{m+1}}\right)a_{ij}=\sum_{i=1}^{m}y_i^* a_{ij}\geqslant c_j, \qquad j=1, 2, \ldots, n.$$

Таким образом, вектор Y^* удовлетворяет условиям (1.5) и, следовательно, является планом двойственной задачи (1.4)—(1.5).

Установим оптимальность плана Y^*. Выражая скалярное произведение, стоящее в левой части равенства (3.6), через координаты векторов Λ и $\bar{B}$, получаем

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i b_i+\lambda_{m+1}\Delta=0,$$

или

$$\sum_{i=1}^{m}y_i^* b_i=\Delta.$$

В соответствии с $(m+1)$-й составляющей векторного равенства (3.2)

$$\sum_{j=1}^{n}x_j^* c_j=\Delta.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^* c_j = \sum_{i=1}^{m} y_i^* b_i = \Delta. \tag{3.8}$$

Согласно лемме 1.2 равенство (3.8) указывает на оптимальность плана Y^* задачи (1.4)—(1.5).

Итак, двойственная задача разрешима и ее оптимальный план Y^* удовлетворяет равенству (3.8).

Если теперь X и Y — произвольные решения задач (1.1)—(1.3) и (1.4)—(1.5) соответственно, то

$$\sum_{j=1}^{n} x_j c_j = \sum_{j=1}^{n} x_j^* c_j = \Delta,$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i b_i = \sum_{i=1}^{m} y_i^* b_i = \Delta,$$

следовательно,

$$\sum_{j=1}^{n} x_j c_j = \sum_{i=1}^{m} y_i b_i.$$

Теорема 3.1 полностью доказана.

Из доказанной теоремы вытекает так называемая *первая теорема двойственности* применительно к задачам с однотипными условиями.

Теорема 3.2 (первая теорема двойственности). *Если одна из задач двойственной пары* (1.17)—(1.19) и (1.20)—(1.22) *имеет решение, то другая задача также разрешима. При этом для любых оптимальных планов X и Y этих задач имеет место равенство* (3.1).

Доказательство. Рассмотрим произвольную задачу данной двойственной пары. В § 1 было показано, что если ее привести к канонической форме, а затем сформулировать задачу, двойственную по отношению к ней, то получим другую задачу двойственной пары. Поэтому для доказательства утверждения теоремы 3.2 достаточно сослаться на теорему 3.1.

Следует заметить, что доказательство первой теоремы двойственности можно осуществить и без использования сравнительно сложной леммы 2.3 (см. упражнение 9).

3.3. Приведем несколько следствий из первой теоремы двойственности.

Следствие 3.1. *Для разрешимости одной из задач двойственной пары* (1.17)—(1.19) *и* (1.20)—(1.22) *необходимо и достаточно, чтобы каждая из этих задач имела хотя бы один план.*

Доказательство. 1. Достаточность сформулированного утверждения устанавливается без применения первой теоремы двойственности.

Пусть $Y'=(y_1', y_2', \ldots, y_m')$ — произвольный план задачи (1.20)—(1.22). В таком случае согласно лемме 1.1 для любого плана $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задачи (1.17)—(1.19) справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leqslant \sum_{i=1}^{m} b_i y_i' .$$

Итак, множество планов задачи (1.17)—(1.19) непусто, и линейная форма (1.17) ограничена на нем сверху. Поэтому в соответствии с теоремой 4.4 гл. 2 задача (1.17)—(1.19) разрешима.

Разрешимость задачи (1.20)—(1.22) устанавливается аналогично.

2. Необходимость указанных условий следует из первой теоремы двойственности. Действительно, если одна из задач двойственной пары разрешима, то разрешима и другая задача. Следовательно, каждая из задач двойственной пары имеет по крайней мере один план.

Следствие 3.2. *Для того чтобы одна из задач двойственной пары имела планы, а множество планов другой задачи было пусто, необходима и достаточна неограниченность линейной формы первой задачи на множестве ее планов.*

Доказательство. 1. Достаточность условий следствия 3.2 составляет содержание леммы 1.3.

2. Для установления необходимости указанных условий обратимся к первой теореме двойственности. Если множество планов одной из задач двойственной пары пусто, то эта задача неразрешима и, следовательно, другая задача также не имеет решения. Но, по условию, последняя задача имеет планы. Следовательно, ее неразрешимость обусловлена неограниченностью линейной формы на множестве планов (см. теорему 4.4 гл. 2).

При исследовании задач двойственной пары можно столкнуться с одной из трех взаимоисключающих возможностей:

а) обе задачи имеют планы;

б) планы имеются только у одной задачи;

в) для каждой задачи двойственной пары множество планов пусто.

Приведем соответствующие примеры.

Пример 1. Задача I′:

$$\begin{gathered} 5x_1+x_2-\max; \\ x_1+2x_2\leqslant 4, \\ 2x_1+3x_2\leqslant 3, \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0. \end{gathered}$$

Задача II′, двойственная по отношению к задаче I′, имеет вид

$$\begin{gathered} 4y_1+3y_2-\min; \\ y_1+2y_2\geqslant 5, \\ 2y_1+3y_2\geqslant 1, \\ y_1\geqslant 0,\ y_2\geqslant 0. \end{gathered}$$

Очевидно, каждая из этих задач имеет планы:

вектор (0, 0) — план задачи I′,

вектор (1, 2) — план задачи II′.

Пример 2. Прямая задача I″ имеет вид

$$\begin{gathered} 5x_1+x_2-\max; \\ x_1-2x_2\leqslant 2, \\ x_1-3x_2\leqslant 3, \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0. \end{gathered}$$

Двойственная задача II″ выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered} 2y_1+3y_2-\min; \\ y_1+y_2\geqslant 5, \\ -2y_1-3y_2\geqslant 1, \\ y_1\geqslant 0,\ y_2\geqslant 0. \end{gathered}$$

Вектор (0, 0) является планом задачи I″. Задача II″ не имеет ни одного плана. В самом деле, умножая первое условие задачи II″ на 2 и складывая со вторым, имеем

$$-y_2\geqslant 11,$$

или

$$y_2\leqslant -11,$$

что противоречит последнему условию задачи: $y_2\geqslant 0$.

Пример 3. Прямая задача I''':

$$\begin{gathered}5x_1+x_2-\max;\\ x_1-x_2\leqslant 1,\\ -x_1+x_2\leqslant -2,\\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0.\end{gathered}$$

Двойственная задача II''':

$$\begin{gathered}y_1-2y_2-\min;\\ y_1-y_2\geqslant 5,\\ -y_1+y_2\geqslant 1,\\ y_1\geqslant 0,\ y_2\geqslant 0.\end{gathered}$$

Сложим два первых условия задачи I''':

$$0\leqslant -1.$$

Полученное противоречие указывает на отсутствие планов у задачи I'''. Проделав ту же самую операцию над условиями задачи II''', получаем $0\geqslant 6$. Следовательно, задача II''' также не имеет ни одного плана.

Итак, каждая из отмеченных возможностей *а*, *б* и *в* действительно реализуема.

Из следствия 3.1 вытекает, что условия случая *а* эквивалентны предположению о разрешимости обеих задач двойственной пары. Обратившись к следствию 3.2, видим, что случай *б* равносилен требованию неограниченности линейной формы одной из задач на множестве ее планов.

Приведем еще одно следствие из первой теоремы двойственности, содержащее необходимое и достаточное условие оптимальности планов взаимосопряженных задач.

Следствие 3.3. *Для оптимальности планов* $X^*=(\overset{*}{x}_1, \overset{*}{x}_2, \ldots, \overset{*}{x}_n)$ и $Y^*=(\overset{*}{y}_1, \overset{*}{y}_2, \ldots, \overset{*}{y}_m)$ *задач* (1.17) — (1.19) *и* (1.20)—(1.22) *соответственно необходимо и достаточно выполнение равенства*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\overset{*}{x}_j=\sum_{i=1}^{m} b_i\overset{*}{y}_i.$$

Доказательство. Достаточность этого условия следует из леммы 1.2. Необходимость составляет содержание второй части первой теоремы двойственности.

3.4. Для дальнейшего нам понадобится несколько новых определений.

Рассмотрим условия задач (1.1)—(1.3) и (1.4)—(1.5), имеющие вид неравенств. Этими условиями являются неравенства (1.3) для прямой задачи и соотношения (1.5) для двойственной задачи.

Условие с номером j системы (1.5) $\left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \geqslant c_j\right)$ назовем *двойственным* по отношению к условию с номером j системы (1.3) $(x_j \geqslant 0)$.

Условие с номером j системы (1.3) (системы (1.5)) назовем *закрепленным*, если для любого оптимального плана X^* (Y^*) задачи (1.1)—(1.3) (задачи (1.4)—(1.5)) имеет место соотношение

$$x_j^* = 0 \quad \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* = c_j\right),$$

т. е. если это условие выполняется как равенство на любом оптимальном плане соответствующей задачи.

Условие с номером j системы (1.3) (системы (1.5)) назовем *свободным*, если хотя бы для одного оптимального плана X^* (Y^*) задачи (1.1)—(1.3) (задачи (1.4)—(1.5)) имеет место соотношение

$$x_j^* > 0 \quad \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* > c_j\right),$$

т. е. если это условие выполняется как строгое неравенство хотя бы для одного оптимального плана соответствующей задачи.

Приводимая ниже теорема устанавливает связь между условиями системы (1.3) и двойственными по отношению к ним условиями системы (1.5).

Допустим, что задача (1.1)—(1.3), а следовательно, и двойственная по отношению к ней задача (1.4)—(1.5) разрешимы.

Теорема 3.3. *Если некоторое условие системы* (1.3) *свободное (закрепленное), то двойственное по отношению к нему условие системы* (1.5) *является закрепленным (свободным).*

Доказательство. Будем придерживаться обозначений, принятых в процессе доказательства теоремы 3.1.

1. Покажем вначале, что если j_0-е условие системы (1.3) свободное, то j_0-е условие системы (1.5) закрепленное.

Геометрический смысл приводимых ниже рассуждений состоит в следующем.

Оптимальному плану двойственной задачи соответствует гиперплоскость П*, содержащая верхнюю точку пересечения конуса K и оси Q (точку $\overline{B}$) и расположенная над конусом K.

Поскольку j_0-е условие системы (1.3) свободное, то вектор $\overline{B}$ может быть представлен в виде неотрицательной линейной комбинации векторов $\overline{A}_j$, содержащей вектор $\overline{A}_{j_0}$ с положительным коэффициентом. Поэтому вектор A_{j_0} принадлежит гиперплоскости П*, что геометрически означает закрепленность j_0-го условия системы (1.5).

2. Переходим к аналитическому доказательству первой части теоремы. Рассмотрим произвольное решение

$$Y^* = (\overset{*}{y}_1, \overset{*}{y}_2, \ldots, \overset{*}{y}_m)$$

двойственной задачи (1.4)—(1.5). Если положить

$$\Lambda = (-\overset{*}{y}_1, -\overset{*}{y}_2, \ldots, -\overset{*}{y}_m, 1),$$

то

$$(\Lambda, \overline{A}_j) \leqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.9}$$

так как Y^*—план задачи (1.4)—(1.5).

По условию, существует такое решение

$$X^* = (\overset{*}{x}_1, \overset{*}{x}_2, \ldots, \overset{*}{x}_n)$$

задачи (1.1)—(1.3), для которого $\overset{*}{x}_{j_0} > 0$. В силу оптимальности планов Y^* и X^* имеет место равенство (следствие 3.3)

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} c_j \overset{*}{x}_j = \sum_{i=1}^{m} b_i \overset{*}{y}_i,$$

или, что то же самое,

$$(\Lambda, \overline{B}) = 0. \tag{3.10}$$

Подставляя в равенство (3.10) выражение для вектора $\overline{B}$, определяемое соотношением (3.2), имеем

$$\sum_{j=1}^{n} \overset{*}{x}_j (\Lambda, \overline{A}_j) = 0. \tag{3.11}$$

В соответствии с неравенствами (3.9) каждое слагаемое левой части (3.11) неположительно, поэтому для выполнения равенства (3.11) необходимо, чтобы все слагаемые равнялись нулю. В частности,

$$x^*_{j_0}(\Lambda, \bar{A}_{j_0}) = 0.$$

Но по условию, $x^*_{j_0} > 0$. Следовательно,

$$(\Lambda, \bar{A}_{j_0}) = -\sum_{i=1}^{m} y^*_i a_{ij_0} + c_{j_0} = 0. \tag{3.12}$$

Поскольку равенство (3.12) имеет место для любого оптимального плана Y^* задачи (1.4)—(1.5), то закрепленность j_0-го условия системы (1.5) доказана.

3. Обратимся теперь к доказательству второй части теоремы, согласно которой из закрепленности j_0-го условия системы (1.3) следует, что j_0-е условие системы (1.5) свободное.

Прежде всего поясним геометрически идею доказательства. Из точки $\bar{B}$ — геометрического образа решения задачи (1.1)—(1.3) — проводится два вектора: вектор e_{m+1}, направленный вверх по прямой Q, и вектор $\bar{B}-\bar{A}_{j_0}$, идущий от точки $\bar{A}_{j_0}$ к точке $\bar{B}$. В соответствии с условиями теоремы конус, порожденный векторами e_{m+1} и $\bar{B}-\bar{A}_{j_0}$ и имеющий вершину в точке $\bar{B}$, удовлетворяет всем требованиям леммы 2.3. Поэтому через точку $\bar{B}$ может быть проведена гиперплоскость Π^*, опорная для K и такая, что все точки построенного конуса, кроме его вершины $\bar{B}$, расположены над Π^*. Гиперплоскость Π^* является геометрическим образом оптимального плана задачи (1.4)—(1.5), обращающего j_0-е условие системы (1.5) в строгое неравенство.

4. Переходим к строгому доказательству второй части теоремы. Пусть j_0-е условие системы (1.3) — закрепленное. Согласно определению это значит, что в любом оптимальном плане задачи (1.1)—(1.3) j_0-я компонента равна нулю. Другими словами, в произвольном представлении вида (3.2) вектора $\bar{B}$ вектор $\bar{A}_{j_0}$ отсутствует.

Рассмотрим выпуклый многогранный конус $T_{\bar{B}}$ с вершиной в точке $\bar{B}$, образованный векторами e_{m+1} и $\bar{B}-\bar{A}_{j_0}$. Пусть

$$R = \bar{B} + \mu_1(\bar{B}-\bar{A}_{j_0}) + \mu_2 e_{m+1}, \tag{3.13}$$

$\mu_1 \geqslant 0$, $\mu_2 \geqslant 0$ — произвольная точка $T_{\overline{B}}$. Покажем, что при $\mu_1 + \mu_2 > 0$ точка $R \notin K$. Для $\mu_1 = 0$ это было установлено при доказательстве теоремы 3.1.

Пусть теперь $\mu_1 > 0$. Допустим противное:

$$R = \overline{B} + \mu_1 (\overline{B} - \overline{A}_{j_0}) + \mu_2 e_{m+1} \in K,$$

т. е.

$$R = \sum_{j=1}^{n} x'_j \overline{A}_j, \tag{3.14}$$

где $x'_j \geqslant 0$ для $j = 1, 2, \ldots, n$. Образуем вектор

$$R' = \frac{\mu_1}{1+\mu_1} \overline{A}_{j_0} + \frac{1}{1+\mu_1} R. \tag{3.15}$$

Поскольку конус K — выпуклое множество, то точка $R' \in K$.

Подставляя в (3.15) вместо вектора R его выражение из (3.13), имеем

$$R' = \overline{B} + \frac{\mu_2}{1+\mu_1} e_{m+1} \in K.$$

Если $\mu_2 > 0$, то полученное соотношение противоречит тому, что Δ ($(m+1)$-я компонента вектора $\overline{B}$) является максимумом линейной формы (1.1) при условиях (1.2) и (1.3) (см. доказательство теоремы 3.1).

Если же $\mu_2 = 0$, то

$$\overline{B} = R' = \frac{\mu_1}{1+\mu_1} \overline{A}_{j_0} + \frac{1}{1+\mu_1} R,$$

откуда, используя равенство (3.14), получаем представление вида (3.2) для $\overline{B}$, содержащее вектор A_{j_0} с положительным коэффициентом, что невозможно по условию.

Итак, предположение (3.14) оказалось ошибочным. Следовательно, точка $R \notin K$, если коэффициенты $\mu_1 \geqslant 0$ и $\mu_2 \geqslant 0$, участвующие в ее представлении (3.13), подчиняются условию

$$\mu_1 + \mu_2 > 0.$$

Таким образом, все точки конуса $T_{\overline{B}}$, кроме его вершины $\overline{B}$, расположены вне конуса K.

Заметим, что точка $\overline{B}$ является острием конуса $T_{\overline{B}}$. Действительно, при любых $\mu_1 \geqslant 0$, $\mu_2 \geqslant 0$ из условия

$\mu_1+\mu_2>0$ следует, что

$$R=\bar{B}+\mu_1(\bar{B}-\bar{A}_{j_0})+\mu_2 e_{m+1}\neq\bar{B}\in K.$$

Поэтому

$$\mu_1(\bar{B}-A_{j_0})+\mu_2 e_{m+1}\neq 0.$$

5. Проведенные рассуждения дают основание применить к конусам K и $T_{\bar{B}}$ лемму 2.3. В данном случае

$$P=\bar{B};\quad N_2=2;\quad T_1=\bar{B}-\bar{A}_{j_0},\quad T_2=e_{m+1}.$$

В соответствии с леммой 2.3 найдется гиперплоскость Π^* с уравнением

$$(\Lambda,\ U)=0,$$

удовлетворяющая условиям:

$$(\Lambda,\ \bar{A}_j)\leqslant 0,\qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n; \tag{3.16}$$

$$(\Lambda,\ \bar{B})=0; \tag{3.17}$$

$$(\Lambda,\ \bar{B}+e_{m+1})=(\Lambda,\ e_{m+1})>0; \tag{3.18}$$

$$(\Lambda,\ \bar{B}+(\bar{B}-\bar{A}_{j_0}))=-(\Lambda,\ \bar{A}_{j_0})>0. \tag{3.19}$$

Неравенства (3.16) и равенство (3.17) указывают на то, что гиперплоскость Π^* является опорной по отношению к конусу K в точке $\bar{B}$. Соотношения (3.18) и (3.19) следуют из свойства гиперплоскости Π^*, согласно которому все точки конуса $T_{\bar{B}}$, кроме его вершины, расположены над Π^*.

В соответствии с условием (3.18) $(m+1)$-я компонента вектора $\Lambda=(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_m,\ \lambda_{m+1})$ положительна. Следовательно, можно ввести вектор $Y^*=(\overset{*}{y}_1,\ \overset{*}{y}_2,\ \ldots,\ \overset{*}{y}_m)$, положив

$$\overset{*}{y}_i=-\frac{\lambda_i}{\lambda_{m+1}},\qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Используя условия (3.16) и (3.17), подобно тому как это было сделано при доказательстве теоремы 3.1, заключаем, что вектор Y^* является решением двойственной задачи (1.4)—(1.5). Согласно неравенству (3.19)

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{ij_0}+\lambda_{m+1}c_{j_0}<0,$$

или, что то же самое,

$$\sum_{i=1}^{m}\left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_{m+1}}\right)a_{ij_0}=\sum_{i=1}^{m}y_i^*a_{ij_0}>c_{j_0}. \qquad (3.20)$$

Итак, получен оптимальный план Y^* задачи (1.4)—(1.5), удовлетворяющий неравенству (3.20). По определению, это означает, что j_0-е условие системы (1.5) является свободным.

Теорема 3.3 доказана полностью.

Рассмотрим задачу линейного программирования с однотипными условиями (1.17)—(1.19) и двойственную по отношению к ней задачу (1.20)—(1.22).

Приведем задачу (1.17)—(1.19) к канонической форме, введя дополнительные переменные

$$x_{n+i}=b_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\geqslant 0, \qquad i=1, 2, \ldots, m.$$

Теперь мы можем распространить определения, введенные в начале параграфа, на задачи с однотипными условиями. В данном случае векторы условий A_j имеют вид

$$A_j=\begin{cases}(a_{1j},\ a_{2j},\ \ldots,\ a_{mj})^T, & \text{если } 1\leqslant j\leqslant n;\\ (\underbrace{0,\ \ldots,\ 0,}_{n-j}\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0)^T, & \text{если } n+1\leqslant j\leqslant n+m.\end{cases}$$

Поэтому условие

$$(A_j,\ Y)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i\geqslant c_j \qquad (j=1, 2, \ldots, n)$$

задачи (1.20)—(1.22) является двойственным по отношению к условию $x_j\geqslant 0$ задачи (1.17)—(1.19). Аналогично, условие

$$(A_{n+i},\ Y)=y_i\geqslant 0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

задачи (1.20)—(1.22) является двойственным по отношению к условию

$$x_{n+i}=b_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\geqslant 0$$

задачи (1.17)—(1.19).

Итак, j-е условие системы (1.21) является двойственным по отношению к j-му условию системы (1.19); i-е условие системы (1.22) оказывается двойственным по отношению к i-му условию системы (1.18).

Если принять задачу (1.20)—(1.22) за прямую, то, как было показано в § 1, задача (1.17)—(1.19) окажется двойственной по отношению к ней. Отсюда вытекает, что j-е условие системы (1.19) (i-е условие системы (1.18)) является двойственным по отношению к j-му условию системы (1.21) (i-му условию системы (1.22)). Таким образом, j-е условия систем (1.19), (1.21)

$$x_j \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j \tag{3.21}$$

и i-е условия систем (1.18), (1.22)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \quad y_i \geqslant 0 \tag{3.22}$$

естественно называть ***парами двойственных условий*** взаимосопряженных задач (1.17)—(1.19) и (1.20)—(1.22). Отметим, что двойственная пара (3.21) отвечает j-му столбцу табл. 3.1 и поэтому составляющие ее условия называются *столбцовыми.*

По той же причине условия двойственной пары (3.22) называются *строчными* (они соответствуют i-й строке табл. 3.1).

Определения свободного и закрепленного условия, данные в начале параграфа для канонической формы задачи линейного программирования, естественным образом переносятся на задачи с однотипными условиями.

Именно, условие задачи считается свободным, если существует решение, на котором условие удовлетворяется как строгое неравенство; условие задачи считается закрепленным, если на всех решениях данной задачи оно удовлетворяется как равенство.

После этих предварительных замечаний можно сформулировать вторую теорему двойственности для задач с однотипными условиями.

Теорема 3.4 (вторая теорема двойственности). *Если взаимосопряженные задачи* (1.17)—(1.19) *и* (1.20)—(1.22) *разрешимы, то в каждой паре их двойственных условий (столбцовых или строчных) одно условие свободное, а другое—закрепленное.*

Вторая теорема двойственности является очевидным следствием теоремы 3.3 и приведенных выше определений для задач с однотипными условиями.

3.5. Как первая, так и вторая теоремы двойственности будут неоднократно использоваться в дальнейшем изложении. Поэтому весьма существенно отчетливо представлять себе их содержание. Утверждения теорем двойственности становятся особенно прозрачными, если переформулировать их в терминах производства однородного продукта. Эти термины уже использовались для экономической интерпретации пары двойственных задач с однотипными условиями.

Согласно первой теореме двойственности оптимальный план производства существует в том и только в том случае, если все факторы производства имеют оценки. Допустим, что производство обладает оптимальным планом и, следовательно, все его факторы могут быть оценены. Следует заметить, что в реальных случаях это всегда так. Вообще говоря, как оптимальный план производства, так и система оценок факторов производства определяются неоднозначно.

Согласно второй части первой теоремы двойственности при любых оценках производственных факторов (составляющих решение двойственной задачи) оценка продукта, полученного реализацией любого оптимального плана производства, совпадает с суммарной оценкой имеющихся ресурсов. Таким образом, характеристическое свойство оптимального плана состоит в совпадении с точки зрения принятых оценок результата производства и его затрат. При любом другом плане использования технологических способов (отличном от оптимального) производство будет убыточным: оценка произведенной продукции окажется меньше, чем суммарная оценка имеющихся ресурсов. Это объясняется тем, что при неоптимальном плане возможности производства используются неполностью.

Напомним, что в качестве вектора оценок факторов производства выбирается такой набор предварительных оценок производственных факторов (план двойственной задачи), который обращает суммарную оценку имеющихся ресурсов (значение линейной формы двойственной задачи) в минимум. Смысл этого условия становится теперь совершенно ясным. При его соблюдении выполняется характеристическое свойство оптимального плана. Если же в качестве вектора оценок принять некоторый набор предварительных оценок, не обращающий в минимум суммарную оценку имеющихся ресурсов, то характеристическое свойство оптимального плана нарушается.

В этом случае оценка результата производства, работающего по любому плану, в том числе и по оптимальному, оказывается меньше суммарной оценки имеющихся в наличии ресурсов. Естественно, что оценки, при которых имеет место подобное положение, нельзя считать целесообразными.

Перейдем к экономической интерпретации второй теоремы двойственности.

Вначале обратимся к строчным условиям двойственной пары задач, определяющих данное производство.

Пусть при одном из оптимальных планов использования способов производства i-й производственный фактор используется неполностью. Тогда по второй теореме двойственности его оценка равна нулю. Наоборот, если оценка i-го производственного фактора (при любом векторе оценок) равна нулю, то существует такой оптимальный план производства, при котором ресурсы i-го фактора используются не в полном объеме.

Такое положение следует признать естественным.

В самом деле, фактор, запасы которого превышают потребности в нем (с точки зрения некоторого оптимального плана производства), не представляет ценности для производства: некоторое сокращение запасов по такому фактору не уменьшит возможностей производства. Поэтому оценку данного фактора с точки зрения рассматриваемого производства естественно принять равной нулю. Допустим теперь, что излишек указанного фактора изъят. В этом случае он приобретает известную ценность: дальнейшее уменьшение его запасов ведет к сокращению конечной продукции. Оценка фактора становится положительной.

Приведем теперь экономическое истолкование столбцовых условий рассматриваемой пары двойственных задач.

Согласно второй теореме двойственности данный способ производства используется в некотором оптимальном плане в том и только в том случае, если при его реализации оценки полученной продукции и затраченных ресурсов совпадают (с точки зрения любого вектора оценок). Интуитивно это утверждение представляется вполне естественным: если некоторый способ производства связан с превышением расходов над доходами, то его использование не имеет смысла.

§ 4. Задачи линейного программирования в произвольной форме записи

4.1. В предыдущем параграфе были установлены соотношения двойственности для задач линейного программирования с однотипными условиями. В настоящем параграфе эти результаты будут перенесены на задачи линейного программирования, заданные в произвольной форме.

Сформулируем общую задачу такого типа.

Требуется обратить в максимум линейную форму

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{4.1}$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \begin{cases} \leqslant b_i, & i=1,\ 2,\ \ldots,\ m_1\leqslant m, \\ =b_i, & i=m_1+1,\ m_1+2,\ \ldots,\ m; \end{cases} \tag{4.2}$$

$$x_j\geqslant 0, \quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n_1\leqslant n. \tag{4.3}$$

Таким образом, одна группа условий (4.2), связывающих все переменные задачи, состоит из неравенств (число их m_1), а другая представляет собой равенства (количество равенств $m-m_1$). При этом часть переменных x_j задачи предполагаются неотрицательными (n_1 переменных). То, что именно первые m_1 условий (4.2) имеют вид неравенств и ограничения (4.3) относятся к первым n_1 переменным, нисколько не уменьшает общности постановки задачи. К этому случаю можно всегда прийти с помощью соответствующей перенумерации переменных и условий задачи. Условия задачи (4.1) — (4.3) естественно называть смешанными (в противоположность однотипным условиям задачи (1.17)—(1.19)). Поэтому задачи типа (4.1)—(4.3) иногда называются задачами *со смешанными условиями.*

По определению, задача, двойственная по отношению к задаче (4.1)—(4.3) (или сопряженная с ней), состоит в минимизации линейной формы

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \tag{4.4}$$

при условиях:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \begin{cases} \geqslant c_j, & j=1, 2, \ldots, n_1 \leqslant n, \\ = c_j, & j=n_1+1, n_1+2, \ldots, n; \end{cases} \tag{4.5}$$

$$y_i \geqslant 0, \quad i=1, 2, \ldots, m_1 \leqslant m. \tag{4.6}$$

Таким образом, задача, сопряженная с задачей со смешанными условиями (4.1)—(4.3), составляется согласно следующим правилам.

Если переменная x_j задачи (4.1)—(4.3) предполагается неотрицательной, то j-е условие системы (4.5) является неравенством. Если же на x_j подобное ограничение не накладывается, то j-е соотношение (4.5) представляет собой равенство. Аналогичные связи имеются между условиями (4.2) задачи (4.1)—(4.3) и ограничениями (4.6) задачи (4.4)—(4.6). Если i-е условие системы (4.2)—неравенство, то $y_i \geqslant 0$. В противном случае переменная y_i может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Как нетрудно проверить (см. упражнение 10), задача (4.1)—(4.3) является двойственной по отношению к задаче (4.4)—(4.5).

Поэтому обе эти задачи имеет смысл называть *парой двойственных* (или *взаимосопряженных*) *задач*.

Заметим, что приведенное только что определение двойственной задачи не противоречит понятию двойственности, данному ранее для задач с однотипными условиями и задач в канонической форме.

Если положить $m_1=m$, $n_1=n$, то задача (4.1)—(4.3) превращается в задачу с однотипными условиями (1.17)—(1.19), а двойственная задача (4.4)—(4.6) переходит в задачу (1.20)—(1.22). При $m_1=0$, $n_1=n$ задачи (4.1)—(4.3) и (4.4)—(4.6) превращаются в задачи (1.1)—(1.3) и (1.4)—(1.5) соответственно.

4.2. С каждой задачей линейного программирования вида (4.1)—(4.3) свяжем следующую задачу с однотипными условиями:

Требуется обратить в максимум линейную форму

$$\sum_{j=1}^{n_1} c_j x_j' + \sum_{j=n_1+1}^{n} c_j (x_j' - x_{j+n_2}') \tag{4.7}$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n_1} a_{ij}x_j' + \sum_{j=n_1+1}^{n} a_{ij}(x_j' - x_{j+n_2}') \leqslant b_i, \\ &\qquad i = 1, 2, \ldots, m, \\ -&\sum_{j=1}^{n_1} a_{ij}x_j' - \sum_{j=n_1+1}^{n} a_{ij}(x_j' - x_{j+n_2}') \leqslant -b_i, \\ &\qquad i = m_1+1, m_1+2, \ldots, m; \end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

$$x_j' \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots, n+n_2, \tag{4.9}$$

где $n_2 = n - n_1$ — число переменных задачи (4.1)—(4.3), неотрицательность которых не предполагается.

Установим соответствие между переменными задач (4.1)—(4.3) и (4.7)—(4.9).

n-мерный вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(n+n_2)$-мерный вектор $X' = (x_1', x_2', \ldots, x_{n+n_2}')$ назовем *соответствующими*, если их компоненты связаны соотношениями

$$x_j = \begin{cases} x_j', & j = 1, 2, \ldots, n_1, \\ x_j' - x_{j+n_2}', & j = n_1+1, n_1+2, \ldots, n. \end{cases} \tag{4.10}$$

Очевидно, каждому $(n+n_2)$-мерному вектору X' соответствует единственный n-мерный вектор X. Вместе с тем любому n-мерному вектору X соответствует целое семейство $(n+n_2)$-мерных векторов X'.

Таким образом, соответствие, устанавливаемое формулой (4.10), является однозначным только в одну сторону.

Пусть $X' = (x_1', x_2', \ldots, x_{n+n_2}')$ — план задачи (4.7)—(4.9). Используя соотношение (4.10), легко получить, что соответствующий вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является планом задачи (4.1)—(4.3).

Действительно,

$$\sum_{j=1}^{n_1} a_{ij}x_j' + \sum_{j=n_1+1}^{n} a_{ij}(x_j' - x_{j+n_2}') = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j. \tag{4.11}$$

Учитывая, далее, условия (4.8), имеем

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \begin{cases} \leqslant b_i, & i=1, 2, \ldots, m, \\ \geqslant b_i, & i=m_1+1, \ldots, m, \end{cases}$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \begin{cases} \leqslant b_i, & i=1, 2, \ldots, m_1, \\ = b_i, & i=m_1+1, m_1+2, \ldots, m. \end{cases}$$

Кроме того, при $j=1, 2, \ldots, n_1$ $x_j=x_j' \geqslant 0$.

Итак, вектор $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ удовлетворяет условиям (4.2), (4.3) задачи (4.1)—(4.3) и, следовательно, является ее планом.

Пусть теперь $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$—произвольный план задачи (4.1)—(4.3).

Среди $(n+n_2)$-мерных векторов X', соответствующих X, заведомо существуют векторы с неотрицательными компонентами. Одним из них является вектор $\overline{X}'=(\overline{x}_1', \overline{x}_2', \ldots, \overline{x}_{n+n_2}')$, где

$$\overline{x}_j'=\begin{cases} x_j, & j=1, 2, \ldots, n_1, \\ \max(0, x_j), & j=n_1+1, n_2+2, \ldots, n, \\ \max(0, -x_j), & j=n+1, n+2, \ldots, n+n_2. \end{cases} \tag{4.12}$$

Неотрицательность всех составляющих вектора $\overline{X}'$ очевидна. Соответствие векторов X и $\overline{X}'$ следует из равенств

$$\overline{x}_j'-\overline{x}_{j+n_2}'=\max(0, x_j)-\max(0, -x_j)=$$
$$=\begin{cases} x_j-0 \quad\;\; =x_j, & \text{если } x_j\geqslant 0, \\ 0-(-x_j)=x_j, & \text{если } x_j<0, \end{cases}$$

справедливых для $j=n_1+1, n_1+2, \ldots, n$.

Из равенства (4.11) и условий (4.2), (4.3) вытекает, что любой вектор X' с неотрицательными компонентами, соответствующий плану X задачи (4.1)—(4.3), является планом задачи (4.7)—(4.9).

Итак, каждому плану задачи (4.7)—(4.9) соответствует некоторый план задачи (4.1)—(4.3). Обратно, каждому плану задачи (4.1)—(4.3) соответствует некоторое семейство планов задачи (4.7)—(4.9). Соответствие устанавливается формулой (4.10).

Покажем, что значения линейных форм задач (4.1)—(4.3) и (4.7)—(4.9) на соответствующих друг другу планах X и X' этих задач совпадают.

Действительно, учитывая соотношения (4.10), получаем

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{j=1}^{n_1} c_j x_j' + \sum_{j=n_1+1}^{n} c_j (x_j' - x_{j+n_2}').$$

Отсюда следует, что между решениями задач (4.1)—(4.3) и (4.7)—(4.9) имеет место соответствие, определяемое формулой (4.10).

Задача (4.4)—(4.6), двойственная по отношению к задаче (4.1)—(4.3), легко приводится к виду (4.1)—(4.3). Для этого достаточно положить $\bar{c}_j = -c_j$, $\bar{a}_{ij} = -a_{ij}$, $\bar{b}_i = -b_i$. При этом задача (4.4)—(4.6) переходит в задачу максимизации линейной формы

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{b}_i y_i$$

при условиях:

$$\sum \bar{a}_{ij} y_i \begin{cases} \leqslant \bar{c}_j, & j = 1, 2, \ldots, n_1, \\ = \bar{c}_j, & j = n_1 + 1, \ldots, n, \end{cases}$$

$$y_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m_1.$$

Поэтому задаче (4.4)—(4.6) соответствует следующая задача с однотипными условиями:

Требуется обратить в минимум линейную форму

$$\sum_{i=1}^{m_1} b_i y_i' + \sum_{i=m_1+1}^{m} b_i (y_i' - y_{i+m_2}') \tag{4.13}$$

при условиях:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m_1} a_{ij} y_i' + \sum_{i=m_1+1}^{m} a_{ij} (y_i' - y_{i+m_2}') \geqslant c_j, \\ &\qquad j = 1, 2, \ldots, n, \\ &-\sum_{i=1}^{m_1} a_{ij} y_i' - \sum_{i=m_1+1}^{m} a_{ij} (y_i' - y_{i+m_2}') \geqslant -c_j, \\ &\qquad j = n_1 + 1, \ldots, n, \end{aligned}\right\} \tag{4.14}$$

$$y_i' \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, m+1, \ldots, m+m_2, \tag{4.15}$$

где $m_2 = m - m_1$ — число переменных задачи (4.4)—(4.6), не ограничиваемых условием неотрицательности.

Согласно условию (4.10) m-мерный вектор $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ и $(m+m_2)$-мерный вектор $Y' = (y'_1, y'_2, \ldots \ldots, y'_{m+m_2})$ считаются соответствующими, если

$$y_i = \begin{cases} y'_i, & i = 1, 2, \ldots, m_1, \\ y'_i - y'_{i+m_2}, & i = m_1 + 1, \ldots, m. \end{cases} \qquad (4.16)$$

По доказанному, каждому плану Y' задачи (4.13)—(4.15) соответствует план Y задачи (4.4)—(4.6). Наоборот, любой вектор Y' с неотрицательными компонентами, соответствующий плану Y задачи (4.4)—(4.6), является планом задачи (4.13)—(4.15). При этом, если Y и Y' — два соответствующих друг другу плана задач (4.4)—(4.6) и (4.13)—(4.15), то оптимальность одного из планов влечет за собой оптимальность другого плана.

Из записи задач (4.7)—(4.9) и (4.13)—(4.15) непосредственно следует, что они составляют пару двойственных задач с однотипными условиями.

4.3. Теперь мы подготовлены к тому, чтобы перенести утверждения теорем двойственности на задачи со смешанными условиями.

Теорема 4.1 (первая теорема двойственности; общий случай). *Если одна из задач двойственной пары* (4.1)—(4.3) *и* (4.4)—(4.6) *имеет решение, то другая задача также разрешима. При этом для любых оптимальных планов* $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *и* $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ *этих задач справедливо равенство*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i. \qquad (4.17)$$

Доказательство. Допустим, что задача (4.1)—(4.3) разрешима и пусть X — ее оптимальный план. Введем в рассмотрение вектор $X' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+n_2})$, связанный с X соотношениями (4.10) и имеющий неотрицательные компоненты. По доказанному, X' является решением задачи (4.7)—(4.9).

Воспользуемся первой теоремой двойственности для задач с однотипными условиями (теорема 3.2). Согласно этой теореме задача (4.13)—(4.15), сопряженная с задачей (4.7)—(4.9), разрешима, и для любого ее оптимального плана $Y' = (y_1', y_2', \ldots, y_{m+m_2}')$ имеет место равенство

$$\sum_{j=1}^{n_1} c_j x_j' + \sum_{j=n_1+1}^{n} c_j (x_j' - x_{j+n_2}') = \\ = \sum_{i=1}^{m_1} b_i y_i' + \sum_{i=m_1+1}^{m} b_i (y_i' - y_{i+m_2}'). \quad (4.18)$$

По доказанному вектор Y, соответствующий согласно формулам (4.16) оптимальному плану Y' задачи (4.13)—(4.15), является решением задачи (4.4)—(4.6).

Пользуясь, далее, равенствами

$$\sum_{j=1}^{n_1} c_j x_j' + \sum_{j=n_1+1}^{n} c_j (x_j' - x_{j+n_2}') = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

$$\sum_{i=1}^{m_1} b_i y_i' + \sum_{i=m_1+1}^{m} b_i (y_i' - y_{i+m_2}') = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

и (4.18), приходим к соотношению (4.17), справедливому для любых решений X и Y рассматриваемой пары двойственных задач.

При доказательстве мы отправлялись от задачи (4.1)—(4.3). В предположении разрешимости задачи (4.4)—(4.6) теорема может быть доказана аналогично. Однако в этом нет необходимости, поскольку задача (4.1)—(4.3) является двойственной по отношению к задаче (4.4)—(4.6). Первая теорема двойственности доказана.

Утверждения второй теоремы двойственности для общего случая относятся только к условиям типа неравенств. Пару ограничений двойственных задач (4.1)—(4.3) и (4.4)—(4.6) с одним и тем же номером $j\,(1 \leqslant j \leqslant n_1)$ или с одним и тем же номером $i\,(1 \leqslant i \leqslant m_1)$ назовем *двойственной*. В первом случае (фиксирован номер j) двойственные условия естественно называть *столбцовыми*, во втором случае (фиксирован номер i) — *строчными*.

Определения свободного и закрепленного условия для рассматриваемых задач ничем не отличаются от соответствующих определений для задач с однотипными условиями. Поэтому мы не будем их повторять.

Теорема 4.2 (вторая теорема двойственности; общий случай). *Если взаимосопряженные задачи* (4.1)—(4.3) *и* (4.4)—(4.6) *разрешимы, то в каждой паре их двойственных условий (столбцовых для* $j=1, 2, \ldots, n_1$ *и строчных для* $i=1, 2, \ldots, m_1$*) одно условие свободное, а другое — закрепленное.*

Доказательство. Рассмотрим задачи (4.7)—(4.9) и (4.13)—(4.15), связанные с задачами (4.1)—(4.3) и (4.4)—(4.6). Допустим, что i-е условие системы (4.2) задачи (4.1)—(4.3) свободное ($i=1, 2, \ldots, m_1$). В таком случае i-е условие системы (4.8) задачи (4.7)—(4.9) также обладает этим свойством.

Действительно, пусть X — оптимальный план задачи (4.1)—(4.3), обращающий i-е условие системы (4.2) в неравенство. Если X' — вектор с неотрицательными компонентами, соответствующий плану X согласно формулам (4.10), то по доказанному он является решением задачи (4.7)—(4.9). При этом, учитывая соотношение (4.11), можно утверждать, что X' обращает i-е условие системы (4.8) в неравенство. Следовательно, это условие является свободным.

Предположим теперь, что i-е условие системы (4.2) закрепленное. Рассмотрим произвольное решение X' задачи (4.7)—(4.9).

По доказанному, вектор X, соответствующий X' согласно формулам (4.10), является оптимальным планом задачи (4.1)—(4.3). Следовательно, i-е условие системы (4.2) обращается вектором X в точное равенство. Принимая во внимание формулу (4.11), получаем, что вектор X' обращает в равенство i-е условие системы (4.8). В приведенных рассуждениях ничего не изменится, если вместо строчных условий рассматривать столбцовые.

Итак, свободному (закрепленному) условию задачи (4.1)—(4.3) отвечает свободное (закрепленное) условие задачи (4.7)—(4.9).

Очевидно, та же связь между условиями существует для задач (4.4)—(4.6) и (4.13)—(4.15).

После этих предварительных рассуждений доказательство теоремы осуществляется следующим образом.

Пусть некоторое условие — неравенство задачи (4.1) — (4.3) свободное (закрепленное). Тогда соответствующее условие задачи (4.7)—(4.9) также обладает этим свойством. Применяя вторую теорему двойственности для задач с однотипными условиями (теорема 3.4), получаем, что условие задачи (4.13)—(4.15), двойственное по отношению к рассматриваемому условию задачи (4.7)—(4.9), является закрепленным (свободным).

Учитывая, далее, установленную выше связь между условиями задач (4.4)—(4.6) и (4.13)—(4.15), делаем вывод о том, что условие задачи (4.4)—(4.6), двойственное по отношению к свободному (закрепленному) условию задачи (4.1)—(4.3), является закрепленным (свободным).

Теорема доказана.

Итак, утверждения обеих теорем двойственности имеют место для задач линейного программирования, имеющих произвольную форму записи.

Естественно, что все следствия из теорем двойственности, которые были приведены в предыдущем параграфе для задач с однотипными условиями и задач, записанных в канонической форме, распространяются теперь на общий случай. Отметим также, что все три леммы § 1 без всяких изменений переносятся на задачи линейного программирования со смешанными условиями. Доказательства этих утверждений являются точными копиями соответствующих рассуждений § 1. В дальнейшем мы будем использовать указанные леммы для произвольных задач линейного программирования.

§ 5. Критерии оптимальности и разрешающие множители

5.1. При решении задач линейного программирования чрезвычайно важно иметь способы, позволяющие проверять планы задачи на оптимальность. Другими словами, необходимо уметь ответить на вопрос, является ли данный план оптимальным или нет.

Условия, необходимые и достаточные для оптимальности плана задачи линейного программирования, впервые были найдены Л. В. Канторовичем [61]. В дальнейшем выяснилось, что эти условия (их принято называть критерием оптимальности плана соответствующей задачи) весьма тесно связаны с теорией двойственности и, по существу, являются следствием теорем двойственности. Изложение настоящего параграфа во многом основано на этой связи. Такой подход позволяет использовать результаты предшествующих параграфов главы и, как нам представляется, делает изложение более естественным.

Рассмотрим произвольную задачу со смешанными условиями (задача (4.1)—(4.3)). Назовем, следуя Л. В. Канторовичу [61], величины $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ *разрешающими множителями* *), если

$$a)\quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i \geqslant c_j, \qquad j=1, 2, \ldots, n_1; \tag{5.1}$$

$$б)\quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i = c_j, \qquad j=n_1+1, n_1+2, \ldots, n; \tag{5.2}$$

$$в)\quad \lambda_i \geqslant 0, \qquad i=1, 2, \ldots, m_1; \tag{5.3}$$

г) для некоторого плана $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задачи (4.1)—(4.3) выполняются условия

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i = c_j \quad \text{при} \quad x_j>0 \quad (1 \leqslant j \leqslant n_1); \tag{5.4}$$

$$\lambda_i = 0 \quad \text{при} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j < b_i \quad (1 \leqslant i \leqslant m_1). \tag{5.5}$$

Вектор $\Lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$, компонентами которого являются разрешающие множители λ_i, назовем *разрешающим вектором задачи* (4.1)—(4.3) (*разрешающим вектором плана* X). Приводимое ниже утверждение показывает, что отыскание разрешающего вектора эквивалентно решению задачи (4.4)—(4.6), двойственной по отношению к задаче (4.1)—(4.3).

Теорема 5.1. *Совокупность разрешающих векторов задачи* (4.1)—(4.3) *совпадает с множеством оптимальных планов задачи* (4.4)—(4.6).

Доказательство. 1. Пусть $\Lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ — произвольный разрешающий вектор задачи (4.1)—(4.3),

*) В последней книге Л. В. Канторовича [65] разрешающие множители именуются объективно обусловленными оценками. Этот термин связан с экономической интерпретацией решения сопряженной задачи.

связанный соотношениями (5.4) и (5.5) с планом $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ этой задачи.

Условия (5.1)—(5.3), которым удовлетворяет вектор Λ, показывают, что Λ — план задачи (4.4)—(4.6). Для установления оптимальности плана Λ проведем несложные выкладки.

Обозначим через E совокупность всех индексов j ($j = 1, 2, \ldots, n_1$), для которых $x_j > 0$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{j \in E} c_j x_j + \sum_{j=n_1+1}^{n} c_j x_j. \tag{5.6}$$

Учитывая равенство (5.6), условия (5.2) при $j = n_1 + 1, \ldots, n$ и (5.4) при $j \in E$, получаем

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{j \in E} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i\right) x_j + \sum_{j=n_1+1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i\right) x_j.$$

Но, по предположению, $x_j = 0$, если $j \notin E$. Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i\right) x_j = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j. \tag{5.7}$$

Принимая, далее, во внимание равенство

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad m_1 + 1 \leqslant i \leqslant m$$

и условие (5.5), имеем

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i.$$

Сравнение последнего равенства с равенством (5.7) приводит к соотношению

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i \lambda_i. \tag{5.8}$$

Согласно лемме 1.2 равенство (5.8) указывает на оптимальность планов X и Λ.

Итак, $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ — решение задачи (4.4)—(4.6).

2. Пусть теперь $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ — произвольное решение задачи (4.4)—(4.6).

Поскольку вектор Λ — план задачи (4.4) — (4.6), то для него выполнены условия (5.1) — (5.3).

Обозначим через E_1 совокупность номеров свободных условий системы (4.2), а через E_2 — аналогичное множество индексов системы (4.3).

В соответствии со второй теоремой двойственности i-е условие системы (4.6) (j-е условие системы (4.5)) является закрепленным, если $i \in E_1$ ($j \in E_2$). Следовательно,

$$\lambda_i = 0 \quad \text{при} \quad i \in E_1; \tag{5.9}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i = c_j \quad \text{при} \quad j \in E_2. \tag{5.10}$$

Рассмотрим произвольное решение $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задачи (4.1) — (4.3). Если $x_j > 0$, то, по определению, $j \in E_2$, и имеет место соотношение (5.10). Если $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j < b_i$, то $i \in E_1$, и выполняется равенство (5.9). Таким образом, вектор Λ удовлетворяет условиям (5.1) — (5.3) и связан соотношениями (5.4), (5.5) с некоторым планом задачи (4.1) — (4.3) (в качестве этого плана можно принять любое решение задачи). Следовательно, $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ — разрешающий вектор задачи (4.1) — (4.3). Теорема доказана.

5.2. В терминах разрешающих множителей удобно формулировать условия оптимальности планов задач линейного программирования.

Теорема 5.2 (критерий оптимальности плана задачи (4.1) — (4.3)). *Для оптимальности плана $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задачи (4.1) — (4.3) необходимо и достаточно существование разрешающего вектора $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$, связанного с этим планом условиями (5.4), (5.5).*

Доказательство. 1. Необходимость. Предположим, что $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — решение задачи (4.1) — (4.3). В силу первой теоремы двойственности сопряженная задача (4.4) — (4.6) разрешима.

Пусть $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ — один из оптимальных планов этой задачи. В таком случае согласно теореме 5.1 вектор Λ является разрешающим вектором задачи (4.1) — (4.3), причем, как было показано при доказательстве второй части теоремы 5.1, вектор Λ связан соотношениями (5.4), (5.5) с любым решением задачи (4.1) — (4.3), а следовательно, и с рассматриваемым решением X.

2. Достаточность. Допустим, что существует разрешающий вектор $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$, связанный с данным планом X задачи (4.1) — (4.3) условиями (5.4), (5.5).

В процессе доказательства первой части теоремы 5.1 было установлено равенство (5.8). Из этого равенства (если учесть, что X и Λ являются планами задач (4.1) — (4.3) и (4.4) — (4.6) соответственно) вытекает оптимальность плана X (см. лемму 1.2). Теорема доказана.

Установленный критерий позволяет сравнительно просто выяснить, является ли данный план решением задачи или нет. Общая схема проверки оптимальности плана состоит в следующем.

Пользуясь системой, составленной из уравнений (5.2), (5.4), (5.5), определяют вектор $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$. Затем непосредственной подстановкой проверяют, удовлетворяет этот вектор условиям (5.1), (5.3) или нет. В первом случае вектор X — решение задачи; во втором — план, не являющийся оптимальным.

Обычно критерий оптимальности используется при анализе опорных планов задачи. Остановимся на этом подробнее.

Рассмотрим некоторый опорный план X задачи (4.1) — (4.3). Допустим, что

$$x_j \begin{cases} = 0 & \text{при } j = 1, 2, \ldots, n_2 \leqslant n_1, \\ > 0 & \text{при } j = n_2 + 1, \ldots, n_1, \end{cases} \tag{5.11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{cases} < b_i & \text{при } i = 1, 2, \ldots, m_2 \leqslant m_1, \\ = b_i & \text{при } i = m_2 + 1, \ldots, m_1. \end{cases} \tag{5.12}$$

Выпишем матрицу, составленную из коэффициентов условий задачи, которые обращаются планом X в точные равенства:

$$A_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ a_{m_2+1,1} & a_{m_2+1,2} & \ldots & a_{m_2+1,n_2} & \ldots & a_{m_2+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn_2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\ \cdot\\ 0\end{matrix}}\right\} n_2 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\ \cdot\\ a\end{matrix}}\right\} m - m_2 \end{matrix}$$

Поскольку план X по условию — опорный, то среди строк матрицы A_X (их общее число $m+n_2-m_2$) имеется n линейно независимых. Единичные векторы, составляющие первые n_2 строк матрицы A_X, линейно независимы. Поэтому из числа остальных $m-m_2$ строк можно выделить такие $n-n_2$ строк, которые вместе с первыми n_2 строками матрицы A_X составят линейно независимую систему.

Образуем из полученной линейно независимой системы строк определитель порядка n и разложим его по первым n_2 строкам. В результате получим отличный от нуля определитель порядка $n-n_2$, строками которых являются некоторые из векторов системы

$$(a_{i,\,n_2+1},\quad a_{i,\,n_2+2},\;\ldots,\;a_{i,\,n}),\qquad i=m_2+1,\;\ldots,\;m. \tag{5.13}$$

Следовательно, система $(n-n_2)$-мерных векторов (5.13) имеет ранг, равный $n-n_2$.

Если допустить, что план X является невырожденным, то число строк матрицы A_X равняется числу ее столбцов, т. е.

$$m-m_2+n_2=n.$$

В этом случае число векторов системы (5.13), равное $m-m_2$, совпадает с ее рангом $n-n_2$.

Итак, если план X невырожденный, то связанная с ним система (5.13) состоит из $n-n_2$ линейно независимых $(n-n_2)$-мерных векторов. Если же план X оказывается вырожденным, то число векторов системы (5.13) превышает их размерность.

После этих предварительных замечаний приступим к исследованию плана X на оптимальность. Для этого попытаемся подобрать разрешающий вектор $\Lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)$, связанный с данным планом условиями (5.4), (5.5). Учитывая условие (5.4) и предположение (5.11), получаем

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{ij}=c_j \quad \text{для} \quad j=n_2+1,\;n_2+2,\;\ldots,\;n.$$

С другой стороны, согласно условию (5.5) и предположению (5.12)

$$\lambda_i=0 \quad \text{для} \quad i=1,\;2,\;\ldots,\;m_2.$$

Следовательно, остальные $m-m_2$ компонент разрешающего вектора Λ (если такой существует) обязаны удовлетворять системе уравнений

$$\sum_{i=m_2+1}^{m} \lambda_i a_{ij} = c_j, \quad j = n_2+1, \ldots, n. \tag{5.14}$$

Столбцами матрицы коэффициентов системы (5.14) являются векторы (5.13). Поэтому ранг системы (5.14) равен $n-n_2$ — числу уравнений этой системы.

Анализ плана X оказывается особенно простым, если этот план оказывается невырожденным. В этом случае число неизвестных системы (5.14) равно числу ее уравнений, и система имеет единственное решение. Разрешив систему, получаем единственный вектор Λ, удовлетворяющий условиям (5.2), (5.4), (5.5). Подставим вектор Λ в левую часть соотношений (5.1), (5.3), которые в данном случае имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=m_2+1}^{m} a_{ij}\lambda_i \geqslant c_j, \quad & j=1, 2, \ldots, n_2, \\ \lambda_i \geqslant 0, \quad & i=m_2+1, \ldots, m_1. \end{aligned}\right\} \tag{5.15}$$

Если все условия (5.15) удовлетворятся, то Λ является разрешающим вектором. Согласно критерию оптимальности это означает, что план X, связанный с Λ условиями (5.4), (5.5),— решение рассматриваемой задачи.

Если же хотя бы одно из соотношений (5.15) окажется нарушенным, то это будет означать, что разрешающего вектора для плана X не существует и, следовательно, этот план не является оптимальным. Заметим, что последнее утверждение является следствием единственности решения системы (5.14).

Дело обстоит сложнее, если план X оказывается вырожденным. В этом случае число неизвестных системы (5.14) превышает число ее уравнений, и система имеет бесчисленное множество решений. Согласно критерию для оптимальности плана X необходимо и достаточно, чтобы хотя бы одно решение системы (5.14) удовлетворяло условиям (5.15).

Разрешим систему (5.14) относительно некоторых $n-n_2$ неизвестных и полученные выражения подставим в условия (5.1), (5.3). В результате образуется система T, состоящая из

$$t = m_1 - m_2 + n_2$$

неравенств, связывающих

$$s = m - m_2 + n_2 - n$$

переменных. Оптимальность плана X эквивалентна разрешимости полученной системы неравенств. Очевидно, ранг системы T равен s. В случае разрешимости системы неравенств T совокупность ее решений образует многогранное множество, имеющее вершины.

Следовательно, для выяснения разрешимости T достаточно найти решения всех систем уравнений, составленных из s линейно независимых условий, входящих в T. Число таких систем, очевидно, не превышает C_l^s. Если хотя бы одно из полученных решений удовлетворяет остальным соотношениям системы T, то данная система неравенств разрешима и, следовательно, исследуемый план X является оптимальным. В противном случае система неравенств T не имеет ни одного решения, что указывает на неоптимальность плана X.

При небольших значениях s и C_l^s предложенный способ выяснения разрешимости системы T можно считать приемлемым. Однако при достаточно больших величинах этих параметров его реализация связана с огромной вычислительной работой. В связи с этим в методах линейного программирования указанный способ применяется в несколько усовершенствованном виде:

а) процесс перехода от одной системы s уравнений с s неизвестными к другой системе упорядочивается, так что анализ всех таких систем обычно оказывается излишним;

б) каждый переход осуществляется по простым рекуррентным формулам.

Резюмируя все сказанное, можно сделать следующие выводы:

1. Практическое применение критерия оптимальности в случае невырожденности исследуемого опорного плана сводится к решению одной системы линейных уравнений.

2. В вырожденном случае применение критерия оптимальности связано с исследованием системы неравенств, что эквивалентно решению нескольких систем линейных уравнений.

5.3. Из теоремы 5.2 следует, что разрешающий вектор может быть связан условиями (5.4), (5.5) только с оптимальным планом задачи (4.1) — (4.3). Вместе с тем для каждого оптимального плана X рассматриваемой задачи существует свой разрешающий вектор, связанный с ним соотношениями (5.4), (5.5). Возникает вопрос, существует ли зависимость между разрешающим вектором некоторого оптимального плана задачи (4.1) — (4.3) и произвольным решением этой задачи? Ответом на этот вопрос служит следующее утверждение:

Теорема 5.3 (теорема о разрешающих векторах). *Разрешающий вектор некоторого оптимального плана задачи* (4.1) — (4.3) *является разрешающим и для любого другого решения этой задачи.*

Доказательство. Пусть $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ — разрешающий вектор плана X, т. е. разрешающий вектор задачи (4.1) — (4.3), связанный с X условиями (5.4), (5.5). В соответствии с теоремой 5.1 вектор Λ является решением двойственной задачи (4.4) — (4.6). При доказательстве второй части теоремы 5.1 было установлено, что любое решение двойственной задачи связано условиями (5.4), (5.5) с произвольным решением прямой задачи. Следовательно, Λ является разрешающим вектором для любого оптимального плана задачи (4.1) — (4.3).

Теорема доказана.

Доказанное утверждение дает основание связывать понятие разрешающего вектора с полным множеством оптимальных планов данной задачи. Поэтому можно говорить о разрешающем векторе задачи линейного программирования, не указывая, с каким планом этот вектор связан.

Подчеркнем еще раз, что вычисление разрешающего вектора задачи (разрешающих множителей) в общем случае нисколько не проще, чем решение самой задачи. Как мы видели, определение разрешающего вектора задачи эквивалентно решению задачи, двойственной по отношению к данной. Основная роль разрешающих множителей состоит в том, что в терминах этих множителей удобно формулировать критерии оптимальности, широко используемые в вычислительных методах и теоретических приложениях линейного программирования.

При описании методов линейного программирования мы обычно будем иметь дело с канонической формой задач. Поэтому целесообразно сформулировать критерий оптимальности для этого класса задач линейного программирования.

Итак, рассмотрим задачу (1.1)—(1.3), которая, очевидно, является частным случаем задачи (4.1)—(4.3) при $m_1=0$, $n_1=n$. Определение разрешающего вектора для этой задачи принимает следующий вид:

вектор $\Lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ называется *разрешающим вектором* задачи (1.1)—(1.3), если

а) $$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i \geqslant c_j, \quad j=1, 2, \ldots, n;$$

б) для некоторого плана $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задачи (1.1)—(1.3) выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i = c_j, \quad \text{если} \quad x_j > 0. \tag{5.16}$$

Теорема 5.4 (критерий оптимальности плана задачи (1.1)—(1.3)). *Для оптимальности плана X задачи* (1.1.)—(1.3) *необходимо и достаточно существование разрешающего вектора Λ, связанного с X условием* (5.16).

Сформулированная теорема является частным случаем общего критерия оптимальности (теорема 5.2). При ее практическом использовании следует учитывать замечания предыдущего пункта.

5.4. При решении условных экстремальных задач классического анализа обычно используется метод Лагранжа. Напомним вкратце содержание этого метода.

Пусть требуется максимизировать или минимизировать функцию

$$F(X)=F(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{5.17}$$

переменные которой связаны условиями

$$G_i(X)=G_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0, \quad i=1, 2, \ldots, m \quad (m<n). \tag{5.18}$$

Предположим, что функции $F(X)$ и $G_i(X)$, $i=1, 2, \ldots, m$, непрерывны и обладают непрерывными частными производными первого порядка по всем переменным.

Будем говорить, что система уравнений (5.18) *регулярна в точке* $\overline{X}=(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$, если определитель матрицы

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial G_1(\overline{X})}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial G_1(\overline{X})}{\partial x_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial G_1(\overline{X})}{\partial x_{i_m}} \\ \frac{\partial G_2(\overline{X})}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial G_2(\overline{X})}{\partial x_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial G_2(\overline{X})}{\partial x_{i_m}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial G_m(\overline{X})}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial G_m(\overline{X})}{\partial x_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial G_m(\overline{X})}{\partial x_{i_m}} \end{Vmatrix}$$

не равен нулю. Здесь $i_1, i_2, \ldots, i_m$ — произвольные m индексов из системы индексов $(1, 2, \ldots, n)$.

Метод Лагранжа основывается на следующем утверждении:

Если функция (5.17) *достигает своего максимума или минимума при условиях* (5.18) *в точке* $\overline{X}$ *и система* (5.18) *регулярна в этой точке, то существуют такие числа* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, *что для функции*

$$F_\Lambda(X)=F(X)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i G_i(X) \tag{5.19}$$

в точке $\overline{X}$ *выполняются необходимые условия безусловного экстремума, т. е.*

$$\frac{\partial F_\Lambda(\overline{X})}{\partial x_i}=0 \quad \text{при} \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ принято называть *множителями Лагранжа*, функция $F_\Lambda(X)$ — *функцией Лагранжа.*

Таким образом, вычисление условного экстремума (5.17), (5.18) сводится к отысканию безусловного экстремума функции Лагранжа (5.19).

Общая схема метода Лагранжа состоит в следующем.

Составляется функция Лагранжа с неопределенными множителями λ_i. Затем решается система уравнений

$$\frac{\partial F_\Lambda(X)}{\partial x_i}=0, \qquad i=1, 2, \ldots, n.$$

Решение этой системы зависит от значений неизвестных параметров λ_i, $i=1, 2, \ldots, m$, которые определяются с помощью системы (5.18).

Задача математического программирования отличается от классической задачи на условный экстремум наличием условий, имеющих вид неравенств. Поэтому приведенный здесь метод Лагранжа к ней неприменим. Однако после некоторого видоизменения этот метод может быть распространен также и на достаточно широкий класс задач математического программирования. Здесь мы рассмотрим лишь случай линейного программирования.

Пусть задача линейного программирования (1.1)—(1.3) записана в канонической форме. Положим

$$F(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j;$$

$$G_i(X)=-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j+b_i, \qquad i=1, 2, \ldots, m.$$

Теорема 5.5. *Для оптимальности плана* $\overline{X}$ *задачи* (1.1)—(1.3) *необходимо и достаточно, чтобы функция Лагранжа*

$$F_\Lambda(X)=F(X)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i G_i$$

при некоторых значениях множителей λ_i $(i=1, 2, \ldots, m)$ *достигала в точке* $\overline{X}$ *максимума при условии*

$$x_j \geqslant 0, \qquad i=1, 2, \ldots, n.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\overline{X}=(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ — оптимальный план задачи (1.1)—(1.3). Примем в качестве вектора $\Lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ произвольный разрешающий вектор задачи. Введем

$$F_\Lambda(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left(-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j+b_i\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n} x_j\left(c_j-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{ij}\right)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i b_i.$$

В соответствии с определением разрешающего вектора

$$c_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} \leqslant 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.20}$$

причем

$$c_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} = 0, \tag{5.21}$$

если $\bar{x}_j > 0$. Учитывая (5.21), можно переписать выражение для $F_\Lambda(X)$ в виде

$$F_\Lambda(X) = \sum_{i \in E} x_j \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} \right) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i,$$

где E — множество индексов j, для которых $\bar{x}_j = 0$. Поэтому

$$F_\Lambda(\bar{X}) - F_\Lambda(X) = \sum_{j \in E} (\bar{x}_j - x_j) \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \lambda_i \right) =$$
$$= - \sum_{j \in E} x_j \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \lambda_i \right).$$

По условию, $x_j \geqslant 0$ и множители λ_i удовлетворяют неравенствам (5.20). Следовательно,

$$F_\Lambda(\bar{X}) - F_\Lambda(X) \geqslant 0$$

для любых векторов X с неотрицательными составляющими.

Достаточность. Предположим, что план $\bar{X}$ задачи (1.1)—(1.3) удовлетворяет условию

$$F_\Lambda(\bar{X}) = \max_{X \geqslant 0} F(X) \tag{5.22}$$

при некотором векторе $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$. Рассмотрим

$$F_\Lambda(\bar{X}) = \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \lambda_i \right) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i.$$

Если при некотором j

$$c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \lambda_i > 0,$$

то, увеличивая безгранично компоненту $\bar{x}_j$ вектора $\bar{X}$, мы получим

$$\sup_{X \geqslant 0} F(X) = \infty,$$

что противоречит условию (5.22). Следовательно,

$$c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i \leqslant 0 \quad \text{для} \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.23}$$

С помощью аналогичных рассуждений приходим к выводу, что

$$c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i = 0 \quad \text{при} \quad \bar{x}_j > 0. \tag{5.24}$$

Действительно, если это соотношение оказывается нарушенным, то за счет некоторого изменения j-й компоненты вектора $\bar{X}$ можно построить вектор X, для которого

$$F_\Lambda(X) > F_\Lambda(\bar{X}),$$

что невозможно в силу (5.22).

В соответствии с теоремой 5.4 соотношения (5.23) и (5.24) указывают на оптимальность плана $\bar{X}$. При этом вектор Λ, участвующий в построении функции F_Λ, является разрешающим вектором задачи.

Теорема доказана.

Доказанное утверждение дает основание называть компоненты вектора $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$, участвующего в образовании функции $F_\Lambda(X)$ для задачи (1.1)—(1.3), *множителями Лагранжа* этой задачи. В процессе доказательства теоремы 5.5 было, в частности, установлено, что совокупность разрешающих векторов задачи линейного программирования совпадает с системой векторов, составленных из множителей Лагранжа данной задачи. Итак, разрешающие множители и множители Лагранжа задачи линейного программирования — понятия эквивалентные.

В формулировке теоремы 5.5 вектор $\bar{X}$ предполагался планом рассматриваемой задачи. Поэтому эта теорема еще не освобождает нас полностью от необходимости учитывать условия (1.2), связывающие переменные задачи (1.1)—(1.3).

Для того чтобы освободиться от ограничений (1.2), необходимо рассмотреть задачу об отыскании седловой точки для функции Лагранжа.

Дадим соответствующее определение.

Пусть $R(X, Y)$ — функция, зависящая от вектора X, принадлежащего множеству T_X, и вектора Y, изменяющегося в пределах множества T_Y.

Точку $(X_0, Y_0) \in T_X \times T_Y$ *) назовем *седловой точкой* функции $R(X, Y)$ при условии $(X, Y) \in T_X \times T_Y$, если соотношения

$$R(X, Y_0) \leqslant R(X_0, Y_0) \leqslant R(X_0, Y) \tag{5.25}$$

имеют место для всех точек $(X, Y) \in T_X \times T_Y$. Неравенства (5.25) показывают, что наибольшее значение функции $R(X, Y_0)$ на множестве T_X достигается в точке X_0, а наименьшее значение функции $R(X_0, Y)$ на T_Y достигается в точке Y_0.

Обратимся к задаче линейного программирования (4.1) — (4.3). Ограничения (4.2) задачи составлены из равенств и неравенств. Условие неотрицательности наложено лишь на часть переменных задач. Пусть по-прежнему

$$F_\Lambda(X) = F(X, \Lambda) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(b_i - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j \right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i x_j a_{ij}.$$

Теорема 5.6. *Векторы* $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ и $\Lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_m^*)$ *являются соответственно решением задачи* (4.1)—(4.3) *и ее разрешающим вектором в том и только в том случае, если* (X^*, Λ^*) — *седловая точка функции* $F(X, \Lambda)$ *при условиях*

$$\left.\begin{aligned} x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n_1, \\ \lambda_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m_1. \end{aligned}\right\} \tag{5.26}$$

Доказательство этой теоремы основывается на соображениях, близких к тем, которые были использованы при установлении предыдущей теоремы. Проведение соответствующих рассуждений предоставляется читателю (см. упражнение 13).

---

*) По определению, $W = (u, v) \in T_X \times T_Y$, если $u \in T_X$, $v \in T_Y$.

Согласно теореме 5.6 пара взаимосопряженных задач (4.1)—(4.3) и (4.4)—(4.6) эквивалентна задаче об отыскании седловой точки функции Лагранжа $F(X, \Lambda)$ при условиях (5.26).

Теорема 5.6, сформулированная для задач линейного программирования, может быть перенесена на широкий класс задач нелинейного программирования.

Указанное обобщение теоремы 5.6 служит теоретической основой для построения некоторых численных методов нелинейного программирования.

5.5 В заключение параграфа укажем на возможность еще одной интерпретации разрешающих множителей задачи линейного программирования. Ограничимся рассмотрением задачи (1.1)—(1.3), записанной в канонической форме.

Пусть $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ — разрешающий вектор задачи (1.1)—(1.3) или, что то же самое, решение двойственной задачи (1.4)—(1.5). Мы покажем сейчас, что компоненты λ_i вектора Λ могут интерпретироваться как оценка влияния различных условий системы (1.2) на величину максимума задачи (1.1)—(1.3). Сформулируем это утверждение точнее.

Теорема 5.7. *Пусть задача* (1.1—1.3) *невырождена и* $M(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ *обозначает максимум ее линейной формы при условиях* (1.2), (1.3). *В таком случае*

$$\lambda_i = \frac{\partial M(b_1, b_2, \ldots, b_m)}{\partial b_i}, \qquad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{5.27}$$

Доказательство. Обозначим задачу (1.1)—(1.3) через (A_B). Пусть $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ — опорное решение задачи (A_B). Без ограничения общности можно считать, что отличными от нуля являются первые m компонент вектора X^*. Тогда векторы условий A_j, $j = 1, 2, \ldots, m$ линейно независимы и любой m-мерный вектор $B' = (b_1', b_2', \ldots, b_m')$ представим в виде их линейной комбинации:

$$B' = \sum_{i=1}^{m} x_i' A_i. \tag{5.28}$$

Если через $\|e_{ij}\|_m$ обозначить матрицу, обратную невырожденной матрице $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$, то из системы (5.28) получаем

$$x_i' = \sum_{j=1}^{m} e_{ij} b_j', \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{5.29}$$

Положим

$$e=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{j=1}^{m}|e_{ij}|;\qquad x=\min_{1\leqslant i\leqslant m}x_i^*. \tag{5.30}$$

Рассмотрим задачу линейного программирования ($A_{B'}$), образующуюся из задачи (A_B) заменой вектора ограничений B на B'. Проверим, что при

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m}|b_i-b_i'|\leqslant\frac{x}{e} \tag{5.31}$$

n-мерный вектор $X'=(x_1', x_2', \ldots, x_m', 0, 0, \ldots, 0)$, где компоненты x_i' определяются формулой (5.29), является решением задачи ($A_{B'}$).

Покажем вначале, что X' — план задачи ($A_{B'}$). В соответствии с соотношениями (5.29),

$$x_i'-x_i^*=\sum_{j=1}^{m}e_{ij}(b_j'-b_j),\qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Отсюда, учитывая обозначения (5.30) и условие (5.31), имеем

$$|x_i'-x_i^*|\leqslant e\max|b_j'-b_j|\leqslant x,$$

и, следовательно,

$$x_i'\geqslant x_i^*-x\geqslant 0.$$

Итак, вектор X' удовлетворяет условиям (1.3) задачи ($A_{B'}$). Что касается условий (1.2), в которых вектор B заменен на B', то они удовлетворяются вектором X' в соответствии с определением величин $x_1', x_2', \ldots, x_m'$ (см. соотношения (5.28)). Таким образом, X' является планом задачи ($A_{B'}$).

Пусть $\Lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ — оптимальный план задачи (1.4)—(1.5) (разрешающий вектор задачи (A_B)). Согласно критерию оптимальности плана задачи (A_B) (см. теорему 5.4) имеют место соотношения

$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\lambda_i\begin{cases}=c_j, & j=1,\ 2,\ \ldots,\ m,\\ \geqslant c_j, & j=m+1,\ m+2,\ \ldots,\ n.\end{cases} \tag{5.32}$$

Соотношения (5.32) показывают, что вектор Λ является также разрешающим вектором задачи ($A_{B'}$), связанным условиями (5.16) с ее планом X'. Следовательно, вектор X' является решением задачи ($A_{B'}$).

Итак, при выполнении требований (5.31) вектор X' является решением задачи ($A_{B'}$), а вектор Λ (не зависящий от выбора вектора B') составляет решение задачи, двойственной по отношению к задаче ($A_{B'}$).

Согласно первой теореме двойственности

$$M(b'_1, b'_2, \ldots, b'_m) = \sum_{i=1}^{m} b'_i \lambda_i, \tag{5.33}$$

где вектор B' ограничен лишь условиями (5.31).

Учитывая положительность величины

$$x = \min_{1 \leqslant i \leqslant m} x_i^*$$

(план X^*, по предположению, невырожденный), приходим к выводу, что формула (5.33) имеет место для любого вектора B', расположенного в некоторой фиксированной окрестности вектора B. Искомые равенства (5.27) можно получить теперь непосредственным дифференцированием соотношения (5.33).

Теорема доказана.

Итак, в невырожденном случае компоненты разрешающего вектора задачи (1.1)—(1.3) оказываются оценками влияния правых частей условий (1.2) на величину максимально достижимого значения линейной формы (1.1).

При доказательстве теоремы 5.7 мы не использовали допущения о невырожденности всех опорных планов задачи. Предполагалось, что этому условию удовлетворяет только один из ее оптимальных планов. Следует отметить, что последнее условие является существенным. Нарушение этого условия обычно влечет за собой неединственность решения двойственной задачи (см. п. 6.2). Поэтому формула (5.27), вообще говоря, перестает быть верной: функция $M(b_1, \ldots, b_m)$ может и не иметь частных производных. Однако и в вырожденном случае приведенная здесь интерпретация разрешающих множителей сохраняется (правда, в несколько модифицированной форме).

Формула (5.27) была выведена для канонической формы задачи линейного программирования. Однако, как нетрудно видеть, эта формула справедлива для любой задачи, имеющей невырожденное опорное решение. Предлагаем читателю в качестве упражнения доказать теорему 5.7 для задачи (4.1)—(4.3) (см. упражнение 14).

§ 6. Некоторые приложения принципа двойственности

Двойственные связи взаимосопряженных задач линейного программирования, установленные в этой главе, оказываются весьма полезными как для самого линейного программирования, так и для смежных с ним математических направлений. Принцип двойственности используется для построения ряда численных методов линейного программирования. Этому вопросу посвящены две главы книги (гл. 6 и 7). Вместе с тем, идея двойственности находит широкое применение при качественных исследованиях различных математических задач. Эта идея становится особенно эффективной после перенесения принципа двойственности на бесконечномерные пространства. Однако и в конечномерном случае, который здесь рассматривался, соотношения двойственности упрощают анализ некоторых математических вопросов. Проиллюстрируем это обстоятельство на ряде примеров.

6.1. Рассмотрим задачу линейного программирования, состоящую в максимизации линейной формы

$$\sum_{i=1}^{m} c_i y_i \tag{6.1}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} d_{ij} y_i \leqslant d_j, \qquad j=1, 2, \ldots, n. \tag{6.2}$$

Будем предполагать, что задача (6.1)—(6.2) разрешима. В этом случае совокупность ее решений (оптимальное множество задачи) является выпуклым, многогранным множеством M^*. Определим размерность оптимального множества M^* и, в частности, выясним условия, при которых она оказывается равной нулю (условия единственности решения задачи). Для этой цели сформулируем задачу, двойственную по отношению к задаче (6.1), (6.2).

Требуется обратить в минимум линейную форму

$$\sum_{j=1}^{n} d_j x_j \tag{6.3}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j = c_i, \qquad i=1, 2, \ldots, m; \tag{6.4}$$

$$x_j \geqslant 0, \; j = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.5}$$

Назовем вектор условий $D_j=(d_{1j}, d_{2j}, \ldots, d_{mj})^T$ задачи (6.3)—(6.5) *свободным*, если j-е условие системы (6.5) — свободное (см. п. 3.4).

Теорема 6.1 *Размерность* ϱ^* *оптимального множества* M^* *задачи* (6.1)—(6.2) *определяется формулой*

$$\varrho^*=m-r, \tag{6.6}$$

где r — *ранг матрицы, составленной из свободных векторов условий задачи* (6.3)—(6.5).

Доказательство. Пусть E — совокупность индексов свободных векторов задачи (6.3)—(6.5). В таком случае согласно второй теореме двойственности j-е условие системы (6.2) для $j\in E$ является закрепленным, т. е. при любом векторе $Y\in M^*$

$$\sum_{i=1}^{m} d_{ij}y_i=d_j.$$

Следовательно, оптимальное множество M^* содержится в многогранном множестве M', определяемом соотношениями

$$\sum_{i=1}^{m} d_{ij}y_i \begin{cases} \leqslant d_j, & j\notin E, \quad j=1, 2, \ldots, n; & (6.7)\\ =d_j, & j\in E, \quad j=1, 2, \ldots, n. & (6.8)\end{cases}$$

Покажем, что любой вектор Y из M' является решением задачи (6.1)—(6.2), т. е. принадлежит M^*.

Пусть $X^*=(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ — некоторое решение задачи (6.3)—(6.5). По определению множества E

$$x_j^*=0 \quad \text{при} \quad j\notin E. \tag{6.9}$$

Рассмотрим произвольный вектор $Y\in M'$. Имеем цепочку равенств:

$$\sum_{i=1}^{m} c_iy_i=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j\in E} d_{ij}x_j^*\right)y_i=$$
$$=\sum_{j\in E} x_j^*\sum_{i=1}^{m} d_{ij}y_i=$$
$$=\sum_{j\in E} x_j^*d_j=$$
$$=\sum_{j=1}^{n} x_j^*d_j.$$

Первое равенство следует из (6.9) и (6.4), третье и четвертое равенства вытекают из (6.8) и (6.9) соответственно. Второе равенство получено изменением порядка суммирования.

Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{m} c_i y_i = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j^*. \qquad (6.10)$$

Согласно лемме 1.2 равенство (6.10) указывает на то, что план Y является решением задачи (6.1)—(6.2).

Итак, M^* совпадает с множеством M', и следовательно, определяется системой условий (6.7), (6.8).

По определению множества E любое j-е условие системы (6.5) при $j \notin E$ является закрепленным. Следовательно, согласно второй теореме двойственности j-е условие системы (6.7) ($j \notin E$) оказывается свободным. Другими словами, при любом $j \notin E$ найдется такой вектор $Y^{(j)} \in M^*$, что

$$\sum_{i=1}^{m} d_{ij} y_i^{(j)} < d_j.$$

Таким образом, все условия системы (6.7) являются нежесткими ограничениями многогранного множества M^* (см. п. 1.2 гл. 2).

Для завершения доказательства осталось воспользоваться теоремой 1.2 гл. 2, из которой и следует искомая формула (6.6).

В качестве следствия из теоремы 6.1 нетрудно получить необходимые и достаточные условия единственности решения задачи (6.1)—(6.2).

Теорема 6.2. *Для единственности решения задачи* (6.1)—(6.2) *необходимо и достаточно, чтобы среди свободных векторов условий задачи* (6.3)—(6.5) *имелось m линейно независимых.*

Для доказательства теоремы 6.2 достаточно обратиться к формуле (6.6), положив $r = m$.

Приведем одно достаточное условие единственности решения задачи (6.1)—(6.2).

Теорема 6.3. *Если среди опорных оптимальных планов задачи* (6.3)—(6.5) *хотя бы один обладает свойством невырожденности, то задача* (6.1)—(6.2) *имеет единственное решение.*

Доказательство теоремы 6.3 непосредственно вытекает из достаточности условий теоремы 6.2.

Если предположить, что задача (6.3)—(6.5) имеет единственное решение, то условия теоремы 6.3 являются не только достаточными, но и необходимыми. Действительно, пусть $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ — единственное решение задачи (6.3)—(6.5). В таком случае вектор условий D_j является свободным тогда и только тогда, когда $x_j^* > 0$. Если опорный план X^* вырожденный, то число компонент $x_j^* > 0$ оказывается меньшим m. Следовательно, по теореме 6.1 размерность оптимального множества M^* больше нуля, что эквивалентно неединственности решения (6.1)—(6.2).

Если же задача (6.3)—(6.5) имеет много решений, то условия теоремы 6.3, вообще говоря, являются лишь достаточными. В этом можно убедиться с помощью соответствующего примера, построение которого предоставляется читателю (см. упражнение 15).

6.2. До сих пор мы исследовали задачу (6.1), (6.2) с фиксированными параметрами c_i, d_{ij} и d_j. Изменим несколько постановку вопроса и рассмотрим совокупность разрешимых задач (6.1)—(6.2), имеющих одни и те же значения параметров c_i, d_{ij} и произвольные значения параметров d_j. Полученное таким образом множество задач линейного программирования назовем классом $H(c_i, d_{ij})$. Нас будут интересовать необходимые и достаточные условия единственности решения всех задач этого класса.

Теорема 6.4. *Невырожденность задачи* (6.3)—(6.5) *является необходимым и достаточным условием для того, чтобы каждая из задач класса* $H(c_i, d_{ij})$ *имела единственное решение.*

Доказательство. Достаточность условий теоремы является очевидным следствием теоремы 6.3. Обратимся к установлению необходимости этих условий.

Пусть задача (6.3)—(6.5) является вырожденной задачей. Это означает, что у нее имеется по крайней мере один вырожденный опорный план

$$X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*).$$

Пусть, для определенности,

$$x_j^* \begin{cases} >0, & j=1, 2, \ldots, r<m, \\ =0, & j=r+1, \ldots, n. \end{cases}$$

Обозначим через $\bar{Y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m)$ некоторое решение системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} d_{ij} y_i = \bar{d}_j, \qquad j=1, 2, \ldots, r, \tag{6.11}$$

где $\bar{d}_j$, $j=1, 2, \ldots, r$ — произвольные числа. В качестве параметров d_j для $j>r$ примем любые величины d_j, удовлетворяющие условию

$$\sum_{i=1}^{m} d_{ij} \bar{y}_i < d_j, \qquad j=r+1, r+2, \ldots, n. \tag{6.12}$$

Покажем, что задача из класса $H(c_i, d_{ij})$, для которой $d_j = \bar{d}_j$, имеет несколько решений.

Пусть $Y^{(0)} = (y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)}) \neq 0$ — решение однородной системы уравнений, отвечающей системе (6.11). Существование такого вектора следует из того, что $r<m$. Образуем систему G, состоящую из векторов $Y_\varepsilon = \bar{Y} + \varepsilon Y^{(0)}$, где параметр ε выбирается так, чтобы вектор Y_ε являлся планом задачи (6.1)—(6.2). Очевидно, существует такое число $\alpha>0$, что Y_ε при $|\varepsilon| \leqslant \alpha$ удовлетворяет условиям (6.2). Поэтому система G состоит из бесчисленного множества векторов, причем каждый из них является решением системы (6.11). Пусть Y — произвольный вектор системы G. Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве равенства (6.10), получаем

$$\sum_{i=1}^{m} c_i y_i = \sum_{j=1}^{n} \overline{d_j} x_j^*.$$

Следовательно, вектор Y является решением задачи (6.1), (6.2).

Итак, допустив вырожденность задачи (6.3) — (6.5), мы обнаружили задачу из класса $H(c_i, d_{ij})$, обладающую несколькими решениями. Необходимость условий теоремы 6.4 доказана.

Положим

$$\Delta(j_1, j_2, \ldots, j_{m-1}) = \begin{vmatrix} d_{1j_1} & d_{1j_2} & \ldots & d_{1j_{m-1}} & c_1 \\ d_{2j_1} & d_{2j_2} & \ldots & d_{2j_{m-1}} & c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{mj_1} & d_{mj_2} & \ldots & d_{mj_{m-1}} & c_m \end{vmatrix}.$$

В качестве следствия из теоремы 6.4 установим одно достаточное условие для единственности решения задач класса $H(c_i, d_{ij})$.

Теорема 6.5. *Если для любой системы линейно независимых векторов-условий $D_{j_1}, D_{j_2}, \ldots, D_{j_{m-1}}$ задачи* (6.3) — (6.5) *определитель $\Delta(j_1, j_2, \ldots, j_{m-1})$ отличен от нуля и ранг матрицы $(D_1, D_2, \ldots, D_n)$ равен m, то все задачи класса $H(c_i, d_{ij})$ имеют единственное решение.*

Доказательство. Пусть система векторов $D_{s_1}, D_{s_2}, \ldots, D_{s_m}$, составляет базис некоторого опорного плана $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задачи (6.3) — (6.5). В таком случае $x_j = 0$ при $j \neq s_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Составляющие плана X, отвечающие векторам базиса, могут быть найдены из системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{m} d_{is_k} x_{s_k} = c_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Отсюда, используя правило Крамера, получаем

$$x_{s_k} = \frac{(-1)^{m-k} \Delta(s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}, s_{k+1}, \ldots, s_m)}{\Delta}, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

где Δ — определитель, составленный из компонент векторов $D_{s_1}, D_{s_2}, \ldots, D_{s_m}$. Но по условию

$$\Delta(s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}, s_{k+1}, \ldots, s_m) \neq 0.$$

Поэтому $x_{s_k} \neq 0$ для $k = 1, 2, \ldots, m$. Таким образом, вектор X является невырожденным планом задачи.

Поскольку X — произвольный опорный план задачи (6.3) — (6.5), то эта задача является невырожденной. Следовательно, по теореме 6.4 любая задача из класса $H(c_i, d_{ij})$ имеет единственное решение.

6.3. В качестве еще одного приложения принципа двойственности, докажем две основные теоремы теории линейных неравенств. Рассмотрим произвольную систему линейных неравенств

$$\sum_{i=1}^{m} d_{ij}y_i \leqslant d_j, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{6.13}$$

Теорема 6.6 (теорема о совместности системы (6.13)). *Для совместности системы неравенств* (6.13) *необходимо и достаточно, чтобы для любого неотрицательного решения* $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *однородной системы уравнений*

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_j = 0, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m, \tag{6.14}$$

выполнялось условие

$$\sum_{j=1}^{n} d_j x_j \geqslant 0. \tag{6.15}$$

Доказательство. Необходимость условий теоремы устанавливается без труда. Действительно, пусть система (6.13) совместна и $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ — одно из ее решений. Умножая j-е неравенство системы (6.13) на неотрицательное число x_j и суммируя результаты, получаем

$$\sum_{i=1}^{m} y_i\left(\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{n} d_j x_j. \tag{6.16}$$

Если вектор $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ удовлетворяет системе уравнений (6. 14), то из соотношения (6.16) следует справедливость неравенства (6.15)

Обратимся к доказательству достаточности условий теоремы. Рассмотрим задачу линейного программирования (6.1), (6.2), где $c_i=0$ для $i=1,\ 2,\ \ldots,\ m$. Назовем ее задачей (A). Очевидно, любое решение системы (6.13) является решением задачи (A) и, наоборот, любое решение задачи ($\tilde{A}$) удовлетворяет системе (6. 13). Поэтому совместность системы (6.13) эквивалентна разрешимости задачи (A).

Обозначим через ($\tilde{A}$) задачу, двойственную по отношению к задаче (A). Задача ($\tilde{A}$) имеет вид (6.3)—(6.5) при $c_i=0$ для $i=1,\ 2,\ \ldots,\ m$. Предположим, что условия теоремы выполнены. В терминах задачи ($\tilde{A}$) это означает ограниченность снизу (нулем) линейной формы задачи ($\tilde{A}$) на множестве ее планов. Поскольку множество планов задачи ($\tilde{A}$) заведомо непусто (одним из ее планов является нулевой вектор), то в соответствии с теоремой 4.4 гл. 2 задача ($\tilde{A}$) разрешима. Но в таком случае первая теорема двойственности гарантирует разрешимость задачи (A), что эквивалентно совместности системы неравенств (6.13). Теорема доказана.

Отметим, что доказанная теорема является естественным аналогом хорошо известного условия совместности системы линейных уравнений (см. теорему 2.6 Дополнения), которое формулируется следующим образом:

Для совместности системы линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} d_{ij}y_i = d_j, \qquad j=1, 2, \ldots, n,$$

необходимо и достаточно, чтоды для любого решения

$$X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

сопряженной однородной системы

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_j = 0, \qquad i=1, 2, \ldots, m,$$

выполнялось соотношение

$$\sum_{j=1}^{n} d_j x_j = 0.$$

Одновременно с системой неравенств (6.13) рассмотрим произвольное неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} c_i y_i \leqslant c. \tag{6.17}$$

Спрашивается, при каких условиях неравенство (6.17) является следствием неравенств системы (6.13)?

Ответ на этот вопрос дает следующее предложение.

Теорема 6.7. *Неравенство* (6.17) *является следствием совместной системы* (6.13) *в том и только в том случае, если найдутся такие неотрицательные числа* $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$, *для которых выполняются соотношения*

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_j^* = c_i, \qquad i=1, 2, \ldots, m, \tag{6.18}$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_j x_j^* \leqslant c. \tag{6.19}$$

Доказательство. Достаточность условий теоремы почти очевидна. В самом деле, пусть условия теоремы выполнены и $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ — произвольное решение системы (6.13). Умножая j-е неравенство (6.13) на x_j^* и складывая результаты, получаем, учитывая (6.18),

$$\sum_{i=1}^{m} c_i y_i \leqslant \sum_{j=1}^{n} d_j x_j^*.$$

Используя далее неравенство (6.19), приходим к выводу, что Y удовлетворяет неравенству (6.17).

Для доказательства необходимости условий теоремы рассмотрим задачу линейного программирования (6.1)—(6.2). Значение линейной формы (6.1) на любом плане задачи (6.1)—(6.2) не превосходит числа c (любое решение системы (6.13) удовлетворяет (6.17)). Множество планов данной задачи непусто (система неравенств (6.13) совместна). Поэтому согласно теореме 4.4 гл. 2 задача (6.1)—(6.2) разрешима.

Пусть $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*)$ — решение задачи (6.1)—(6.2). Поскольку вектор Y^* удовлетворяет системе неравенств (6.13),

$$\sum_{i=1}^{m} c_i y_i^* \leqslant c. \tag{6.20}$$

В соответствии с первой теоремой двойственности задача (6.3)—(6.5), сопряженная с разрешимой задачей (6.1)—(6.2), имеет решение $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, для которого справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{m} c_i y_i^* = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j^*. \tag{6.21}$$

Вектор X^* — план задачи (6.3)—(6.5). Поэтому его компоненты удовлетворяют условиям (6.18). Что касается неравенства (6.19), то оно выполняется в силу соотношений (6.20) и (6.21). Необходимость условий теоремы доказана.

Подобно предшествующей теореме, доказанное утверждение может рассматриваться в качестве аналога известного предложения, относящегося к линейным уравнениям. Сформулируем это предложение:

Уравнение

$$\sum_{i=1}^{m} c_i y_i = c$$

является следствием системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} d_{ij} y_i = d_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

в том и только в том случае, если найдутся такие числа $x_1^*, x_2^*, \ldots$ $\ldots, x_n^*$, что

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^* d_{ij} = c_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^* d_j = c.$$

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 3

1. Сформулировать задачу, двойственную по отношению к транспортной задаче (см. п. 3.2 гл. 1).

2. Сформулировать задачу, двойственную по отношению к задаче народнохозяйственного планирования, которая была рассмотрена в п. 7.3 гл. 1. Привести экономическую интерпретацию этой задачи.

3. Пусть векторы $T_i \neq 0$, $i=1, 2, \ldots, N$; T_P — выпуклый многогранный конус, порожденный векторами T_i и имеющий вершину в точке P.

Для того чтобы точка P была острием конуса T_P, необходимо и достаточно выполнение следующего условия:

При любых величинах $y_i \geqslant 0$ соотношение

$$\sum_{i=1}^{N} y_i T_i = 0$$

влечет за собой равенства

$$y_1 = y_2 = \cdots = y_N = 0.$$

Доказать.

4. Доказать, что множество $T_P^{(\delta)}$, введенное при доказательстве леммы 2.3, является выпуклым многогранником (см. упражнение 13 к гл. 2).

5. Доказать, что утверждение леммы 2.3 остается верным, если T_P — произвольный выпуклый конус с острием в точке P.

6. Привести примеры, показывающие, что нарушение предположений леммы 2.3 относительно конуса K или точки P делает ее утверждение, вообще говоря, неверным.

7. Доказать, что не существует пары двойственных задач линейного программирования, линейные формы которых не ограничены на множествах соответствующих планов.

8. Показать, что задача с однотипными условиями (1.17) — (1.19) разрешима, если компоненты ее вектора ограничений неотрицательны и выполняется одно из следующих условий:

а) при некотором i все величины $a_{ij} > 0$,

б) параметры $a_{ij} \geqslant 0$ для всех i и j, причем для любого j имеется хотя бы одно положительное значение a_{ij}.

9. Доказать первую теорему двойственности для задачи максимизации линейной формы

$$L(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{2}$$

установив, что если X^* — решение задачи (1) — (2), то точка

$$\overline{C}=(c_1, c_2, \ldots, c_n, L(X^*))$$

принадлежит выпуклому многогранному конусу K, порожденному векторами

$$\overline{A}^{(i)}=(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}, b_i), \qquad i=1, 2, \ldots, N,$$

и

$$e_{n+1}=(0, 0, \ldots, 0, 1).$$

Указание. Последнее утверждение доказать «от противного», применив следствие 3.2 гл. 2 к точке $\overline{C}$ и конусу K.

10. Проверить, что задача (4.1) — (4.3) является двойственной по отношению к задаче (4.4) — (4.6) (см. п. 4.1)

11. Вывести из теоремы 5.2 критерий оптимальности плана для задач, указанных в упражнении 1.

12. Исследовать на оптимальность планы (1, 0, 0, 0) и (0, 0, 1, 1) задачи максимизации линейной формы

$$x_1-3x_3+x_4$$

при условиях

$$x_1-x_3+2x_4=1,$$
$$2x_1+x_2+4x_3-2x_4=2,$$
$$x_1\geqslant 0, \quad x_2\geqslant 0, \; x_3\geqslant 0, \quad x_4\geqslant 0.$$

13. Доказать теорему 5.6.

14. Доказать справедливость формулы (5.27) для задачи (4.1) — (4.3), обладающей хотя бы одним невырожденным опорным решением.

15. Показать, что существует задача типа (6.1), (6.2), имеющая единственное решение, хотя у сопряженной с ней задачи нет ни одного невырожденного опорного решения.

ГЛАВА 4

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО УЛУЧШЕНИЯ ПЛАНА

В практике линейного программирования чаще других используется *метод последовательного улучшения плана.* Основы этого метода были сформулированы Данцигом в 1949 г. [40], [41]. В иностранной литературе по линейному программированию метод Данцига известен под названием *симплексного метода.* Такое название возникло из геометрического истолкования первых частных задач, к которым он был применен*), и не соответствует существу метода.

Идея метода содержит три существенных момента. Во-первых, указывается способ вычисления опорного плана. Во-вторых, устанавливается признак, который позволяет проверить, является ли выбранный опорный план оптимальным (или, в принятой терминологии, является ли выбранный план решением). В-третьих, приводится способ, позволяющий по выбранному неоптимальному плану построить другой опорный план, более близкий к оптимальному. Доказывается, что таким путем можно через конечное число шагов получить оптимальный план — решение задачи линейного программирования. Таким образом, метод заключается в после-

*) Ограничения вида

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \quad x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

определяют в n-мерном пространстве симплекс. Подобные ограничения входили в условия одной из первых задач линейного программирования, для которой Данциг разработал вычислительный метод.

довательном улучшении плана, что и целесообразно отразить в его названии.

Следует заметить, что алгоритмы метода позволяют также в процессе вычислений установить, является ли задача линейного программирования разрешимой. Это значит, что в ходе расчетов можно определить, не оказываются ли условия задачи противоречивыми и обеспечивают ли они ограниченность ее линейной формы.

В этой главе излагаются лишь теоретические основы метода. Описание вычислительных схем метода откладывается до следующей главы.

Описание метода последовательного улучшения плана проводится здесь по следующей схеме. Вначале приводятся две формы признака оптимальности опорного плана задачи линейного программирования. Затем излагаются основы метода применительно к так называемому невырожденному случаю. При этом предполагается известным некоторый опорный план исследуемой задачи. Формальное изложение метода дополняется двумя геометрическими интерпретациями.

В § 5 метод последовательного улучшения плана обобщается и излагается применительно к задачам линейного программирования, у которых искомые переменные ограничены не только снизу, но и сверху. После этого мы освобождаемся от ограничительного предположения о невырожденности рассматриваемой задачи.

В § 7 описывается способ построения исходного опорного плана и так называемый M-метод. В конце главы приводятся теоретические приложения метода последовательного улучшения плана.

§ 1. Признак оптимальности опорного плана

1.1. В гл. 3 был получен критерий оптимальности плана — необходимое и достаточное условие того, что исследуемый план является решением задачи линейного программирования. При методе последовательного улучшения плана приходится оперировать не с произвольными планами, а только с опорными планами. В этом параграфе будет сформулирован признак оптимальности опорного плана. Признак оптимальности может быть выражен через те или иные параметры, характеризующие задачу. В соответствии с этим будем говорить о двух разных формах признака оптимальности. Каждая из форм признака будет далее положена в основу одного из алгоритмов решения задачи линейного программирования по методу последовательного улучшения плана. Термин *признак* (в отличие от термина *критерий*) оптимальности принят для того, чтобы подчеркнуть, что здесь речь идет не о произвольном плане, а об опорном, и что приведенное условие является, вообще говоря, только достаточным.

Запишем задачу линейного программирования в канонической форме.

Требуется вычислить максимум линейной формы

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} A_j x_j = B; \tag{1.2}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{1.3}$$

Более компактно задача записывается в следующем виде.

Требуется вычислить неотрицательный вектор (вектор-строку) $X \geqslant 0$, обращающий в максимум $L(X)=CX^T$ при условиях $AX^T=B$.

Здесь $A=(A_1, \ldots, A_n)=\|a_{ij}\|_{mn}$ — матрица условий, A_j и B — соответственно векторы условий и вектор ограничений данной задачи; $A_j=(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})^T$, $j=1, 2, \ldots, n$; $B=(b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$; $C=(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ — заданный вектор коэффициентов линейной формы (1.1). Будем предполагать, что ранг матрицы A равен m.

Напомним определения опорного плана и его базиса — основных понятий настоящей главы. План $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задачи линейного программирования (записанной в канонической форме (1.1) — (1.3)) называется *опорным*, если система векторов условий A_j, соответствующая его положительным компонентам ($x_j > 0$), линейно независима. *Базисом* опорного плана мы называли систему m линейно независимых векторов условий, которая включает в с е векторы A_j, отвечающие положительным составляющим опорного плана. Компоненты опорного плана, отвечающие векторам его базиса, будем называть *базисными*, а остальные составляющие — *внебазисными* переменными.

Допустим, что нам известен некоторый опорный план X с базисом A_{s_1}, A_{s_2}, ..., A_{s_i}, ..., A_{s_m}. В дальнейшем будет удобно характеризовать вектор базиса, помимо его номера s_i, позицией i, которую он занимает в рассматриваемом базисе (ясно, что при любом базисе $i=1, 2, \ldots, m$).

Зафиксируем произвольный вектор условий A_j и выпишем его разложение по векторам базиса $A_{s_1}, \ldots, A_{s_m}$:

$$A_j=\sum_{i=1}^{m} A_{s_i}x_{ij}, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{1.4}$$

Здесь x_{ij} — составляющая разложения вектора A_j по векторам базиса при векторе A_{s_i}, расположенном в i-й позиции базиса.

Введем множество индексов I_X векторов базиса опорного плана X (I_X — множество номеров базисных переменных). Очевидно,

$$B=\sum_{i=1}^{n} x_jA_j=\sum_{j\in I_X} x_jA_j$$

(внебазисные переменные равны нулю). Разложение вектора ограничений B по векторам базиса можно также записать в виде

$$B=\sum_{i=1}^{m} A_{s_i}x_{i0},$$

где $x_{i0}=x_{s_i}$ — базисная переменная, отвечающая вектору A_{s_i}, расположенному в i-й позиции базиса.

Обозначая вектор ограничений B через A_0, получим общую формулу

$$A_j=\sum_{i=1}^{m} A_{s_i}x_{ij}, \qquad j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m, \tag{1,4'}$$

определяющую составляющие разложения всех векторов условий и вектора ограничений по векторам базиса.

Составим наборы параметров z_j и $\Delta_j (j=1, 2, \ldots, n)$ по следующим формулам:

$$z_j=\sum_{i=1}^{m} c_{s_i}x_{ij}, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n; \tag{1.5}$$

$$\Delta_j=z_j-c_j, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{1.6}$$

Величины z_j и Δ_j определяются опорным планом X, соответствующим базису $A_{s_1}, \ldots, A_{s_m}$. Чтобы подчеркнуть это, целесообразно было бы обозначать эти параметры соответственно через $z_j^{(X)}$ и $\Delta_j^{(X)}$. Однако, не желая усложнять записи, будем всюду, где это не вызовет недоразумений, опускать индекс X при z_j и Δ_j.

В методе последовательного улучшения плана параметры Δ_j играют очень важную роль: знаки этих параметров позволяют определить, является ли выбранный опорный план оптимальным. Имеет место следующее предложение:

Признак оптимальности. *Опорный план X^* является решением задачи* (1.1)—(1.3), *если* $\Delta_j \geqslant 0$ *для* $j = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный план $X = (x_1, \ldots, x_n) \neq X^*$. Составляющие вектора X, как и компоненты всякого плана, должны удовлетворять условиям задачи, т. е.

$$B = \sum_{j=1}^{n} x_j A_j;$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Разложим вектор A_j согласно формуле (1.4) по векторам базиса опорного плана X^*. Получим

$$B = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} A_{s_i}\right),$$

или, меняя порядок суммирования,

$$B = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j x_{ij}\right) A_{s_i}. \tag{1.7}$$

С другой стороны, поскольку X^* является планом задачи (1.1)—(1.3),

$$B = \sum_{i=1}^{m} x_{i0}^* A_{s_i}. \tag{1.8}$$

Векторы $A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m}$ составляют линейно независимую систему. Следовательно, вектор ограничений B может быть единственным образом представлен в виде их линейной комбинации. Сравнивая (1.7) и (1.8), заключаем, что

$$\sum_{j=1}^{n} x_j x_{ij} = x_{i0}^{*}. \tag{1.9}$$

Справедливость сформулированного утверждения следует теперь из следующей цепочки равенств и неравенств:

$$\begin{aligned} L(X) &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leqslant \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{n} z_j x_j = \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} c_{s_i} x_{ij}\right) x_j = \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j x_{ij}\right) c_{s_i} = \\ &= \sum_{i=1}^{m} c_{s_i} x_{i0}^{*} = \\ &= L(X^{*}). \end{aligned}$$

Здесь первое и последнее равенства определяют значение линейной формы L для планов X и X^{*} соответственно. Неравенство следует из условия $\Delta_j = z_j - c_j \geqslant 0$. Равенства в третьей и пятой строках вытекают из формул (1.5) и (1.9) соответственно, а равенство в четвертой строке получено изменением порядка суммирования.

Таким образом, если $\Delta_j \geqslant 0$ для всех j, то опорный план X определяет максимальное значение линейной формы $L(X)$ и является решением задачи линейного программирования. Подчеркнем, что это условие ($\Delta_j \geqslant 0$ для всех j) является, вообще говоря, только достаточным условием оптимальности опорного плана (см. упражнение 1).

Как уже отмечалось, Δ_j можно выразить через различные параметры, характеризующие задачу линейного программирования. В зависимости от того, как вычисляется z_j в выражении (1.6) для Δ_j, мы имеем ту или иную форму признака оптимальности.

Будем говорить, что признак оптимальности записывается в первой форме, если z_j вычисляются из соотношений (1.5).

Таким образом, *первая форма признака оптимальности опорного плана* формулируется следующим образом:

Опорный план X^* *является решением задачи* (1.1)—(1.3), *если*

$$\sum_{i=1}^{m} c_{s_i} x_{ij} \geqslant c_j$$

для всех j $(j=1, 2, \ldots, n)$.

1.2. Приведем еще одну форму признака оптимальности опорного плана.

Пусть по-прежнему векторы условий $A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m}$ образуют базис опорного плана X^*. Определим вектор $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ из системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i = c_j, \qquad j \in I_X. \tag{1.10}$$

Вторая форма признака оптимальности опорного плана может быть сформулирована следующим образом:

Признак оптимальности. *Опорный план* X^* *задачи* (1.1)—(1.3) *оптимален, если*

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i \geqslant c_j \tag{1.11}$$

для $j=1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Справедливость этого достаточного условия оптимальности опорного плана легко доказывается, если исходить из критерия оптимальности плана, установленного в гл. 3 (см. теорему 5.4). Обоснование приведенного признака вытекает также из следующей цепочки равенств:

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_{s_i} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{\mu=1}^{m} a_{\mu s_i}\lambda_\mu \right) x_{ij} =$$
$$= \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu \sum_{i=1}^{m} a_{\mu s_i} x_{ij} = \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu a_{\mu j}.$$

Здесь первое равенство совпадает с определением (1.5) величин z_j. Второе равенство вытекает из (1.10). Третье равенство получено изменением порядка суммирования. Четвертое равенство следует из разложения (1.4), если его записать для компонент векторов условий.

Теперь видно, что соотношение

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i \geqslant c_j$$

для всех j эквивалентно условию

$$\Delta_j \geqslant 0 \quad \text{для} \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Таким образом, доказана не только справедливость второй формы признака оптимальности, но и **эквивалентность обеих форм**.

Как уже отмечалось, каждой форме признака оптимальности соответствует своя вычислительная схема решения задач линейного программирования.

§ 2. Общая схема метода

2.1. Приведем общую схему решения задачи линейного программирования по методу последовательного улучшения плана применительно к невырожденному случаю.

Напомним, что *опорный план* задачи (1.1)—(1.3) называется *невырожденным*, если число его положительных компонент в точности равно m. *Задача линейного программирования* называется *невырожденной*, если все ее опорные планы невырождены.

Пусть известен некоторый опорный план X задачи с базисом $A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m}$. Анализ плана начинается с проверки его на оптимальность. Проверка может производиться в соответствии с первой или второй формой признака оптимальности. И в том и в другом случае необходимо вычислить значения Δ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$. В первом случае Δ_j вычисляется по формуле

$$\Delta_j = z_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_{s_i} x_{ij} - c_j, \tag{2.1}$$

где x_{ij} определяется разложением (1.4). При использовании второй формы признака Δ_j определяется соотношением

$$\Delta_j = z_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i - c_j, \tag{2.2}$$

где $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ — решение системы (1.10).

При проверке опорного плана на оптимальность может встретиться один из следующих трех случаев:

1° $\Delta_j \geqslant 0$ для $j \notin I_X$ (при $j \in I_X$ $z_j = c_j$; поэтому в первом случае $\Delta_j \geqslant 0$ для всех j от 1 до n).

2° $\Delta_j < 0$ для некоторого j, и все соответствующие этому индексу величины $x_{ij} \leqslant 0$ ($i = 1, 2, \ldots, m$).

3° $\Delta_j < 0$ для некоторых индексов j, и для каждого такого j по крайней мере одно из чисел x_{ij} положительно.

В первом случае, как это следует из признака оптимальности опорного плана, план X является решением задачи линейного программирования.

Мы сейчас покажем, что в случае 2° задача линейного программирования неразрешима, а в случае 3° можно указать способ перехода от опорного плана X к новому опорному плану, более близкому к решению задачи.

2.2. Проследим, как изменяется линейная форма (1.1) в результате перехода к некоторому новому плану $X(\theta)$, который образуется из плана X в соответствии со следующим правилом:

1) j-я компонента плана $X(\theta)$ полагается равной некоторому положительному числу θ (j — фиксированный индекс внебазисной переменной плана X): $x_j(\theta) = \theta$;

2) остальные внебазисные переменные плана X остаются равными нулю ($x_s(\theta) = x_s = 0$ при $s \notin I_X$, $s \neq j$);

3) базисные составляющие $X(\theta)$ выбираются так, чтобы вектор $X(\theta) = (x_1(\theta), \ldots, x_n(\theta))$ определял план задачи, т. е. чтобы числа $x_j(\theta)$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) удовлетворяли условиям (1.2)—(1.3).

Будем в дальнейшем указанный переход от плана X к плану $X(\theta)$ называть *элементарным преобразованием*, связанным с вектором A_j.

Выпишем соотношения, определяющие элементарное преобразование. В силу определения опорного плана X и предположений о структуре плана $X(\theta)$ имеем

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i0} A_{s_i} = B, \tag{2.3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i0}(\theta) A_{s_i} + \theta A_j = B. \tag{2.4}$$

Согласно формуле (1.4) разложение произвольного вектора условий по векторам базиса записывается в виде

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} A_{s_i}. \tag{1.4}$$

Из формул (1.4) и (2.3) получаем

$$\sum_{i=1}^{m} (x_{i0} - \theta x_{ij}) A_{s_i} + \theta A_j = B. \tag{2.5}$$

Сравнивая полученное соотношение с системой (2.4) и учитывая единственность ее решения (векторы $A_{s_1}, \ldots, A_{s_m}$, составляющие базис опорного плана X, линейно независимы), приходим к равенствам, определяющим элементарное преобразование:

$$x_{i0}(\theta) = x_{i0} - \theta x_{ij}. \tag{2.6}$$

Здесь i — номера позиций векторов A_{s_i} в базисе опорного плана X ($x_{i0} = x_{s_i}$, $x_{i0}(\theta) = x_{s_i}(\theta)$). Напомним, что в соответствии с определением элементарного преобразования, связанного с вектором A_j,

$$x_t(\theta) = x_t = 0 \quad \text{при} \quad t \notin I_X, \quad t \neq j; \qquad x_j(\theta) = \theta.$$

Таким образом, элементарное преобразование полностью определено.

Все x_{i0} — базисные компоненты плана X — положительны. Следовательно, до тех пор, пока θ настолько мало́, что все величины $x_{i0}(\theta)$ из (2.6) неотрицательны, вектор $X(\theta)$ удовлетворяет условиям (1.2), (1.3) и является планом задачи линейного программирования.

По составляющим плана $X(\theta)$ нетрудно вычислить соответствующее ему значение линейной формы (1.1):

$$L[X(\theta)] = \sum_{i=1}^{m} c_{s_i} x_{i0}(\theta) + c_j\theta = \sum_{i=1}^{m} c_{s_i} x_{i0} - \theta \left(\sum_{i=1}^{m} c_{s_i} x_{ij} - c_j \right).$$

Используя соотношения (1.5) и (1.6), получаем

$$L[X(\theta)] = L(X) - \theta\Delta_j. \tag{2.7}$$

Равенство (2.7) показывает, что влияние элементарного преобразования плана X на величину линейной формы определяется знаком Δ_j. Если $\Delta_j < 0$, значение линейной формы увеличивается, если $\Delta_j > 0$ — уменьшается. Если $\Delta_j = 0$, линейная форма сохраняет свое прежнее значение.

2.3. Введем некоторые термины, удобные для последующего изложения.

Параметры Δ_j, знаки которых определяют направление изменения линейной формы при элементарном преобразовании, связанном с вектором A_j, естественно называть *оценками векторов условий A_j относительно данного базиса* (поскольку в формировании Δ_j участвуют и коэффициенты c_j линейной формы, более точным наименованием параметров Δ_j было бы *оценки расширенных векторов условий $\bar{A}_j$ относительно рассматриваемого базиса*). Целесообразность введенного термина определяется следующими соображениями. Элементарные преобразования, связанные с векторами, отвечающими $\Delta_j < 0$ и $\Delta_j > 0$, соответственно увеличивают и уменьшают значение линейной формы. При этом величина изменения линейной формы при $\theta = 1$ в точности совпадает со значением Δ_j. Таким образом, параметры Δ_j оценивают изменение линейной формы, которое произойдет, если ввести вектор A_j в рассматриваемый базис. Этот факт и предлагается отразить в названии параметров Δ_j. Из приведенных рассуждений следует, что определение $\Delta_j = c_j - z_j$ больше соответствует понятию оценки вектора базиса, чем принятое здесь определение $\Delta_j = z_j - c_j$. Тем не менее, чтобы избежать возможных недоразумений, мы сохраняем здесь уже установившееся в литературе по линейному программированию понятие $\Delta_j = z_j - c_j$. Это позволит также сделать вычислительные схемы более однообразными.

При использовании второй формы признака оптимальности величины Δ_j вычисляются по формуле

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i - c_j.$$

Фигурирующие здесь параметры λ_i будем в дальнейшем называть *оценками условий задачи относительно данного базиса.*

Чтобы обосновать целесообразность введенного термина, вспомним определение двойственной задачи: задача минимизации линейной формы $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ при условиях $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j$

двойственна по отношению к задаче (1.1)—(1.3). Из второй формы признака оптимальности опорного плана следует, что параметры λ_i^*, отвечающие базису опорного решения X^*, удовлетворяют условиям двойственной задачи

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i - c_j \geqslant 0.$$

С другой стороны, для оптимального опорного плана X^*

$$L(X^*) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{\mu=1}^{m} c_{s_\mu} x_{\mu 0}^* = \sum_{\mu=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* a_{is_\mu}\right) x_{\mu 0}^* =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \left(\sum_{\mu=1}^{m} a_{is_\mu} x_{\mu 0}^*\right) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* b_i.$$

Отсюда вытекает (см. лемму 1.2 гл. 3), что вектор $\Lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$ является решением двойственной задачи.

В предыдущей главе (п. 5.5) было признано целесообразным называть составляющие оптимального плана двойственной задачи оценками условий исходной задачи (оценками влияния правых частей условий (1.2) на максимально достижимое значение линейной формы (1.1)). Выбор λ_i^* обеспечивает равенство нулю всех Δ_j^*, отвечающих векторам базиса решения. Параметры λ_i, соответствующие произвольному опорному плану, играют по отношению к базису этого плана ту же роль, что и λ_i^* по отношению к базису оптимального опорного плана. Как видно из определения λ_i, выбор этих параметров обеспечивает равенство нулю чисел Δ_j—оценок векторов условий базиса.

Приведенные рассуждения служат основанием для того, чтобы называть параметры λ_i оценками условий задачи относительно выбранного базиса.

2.4. Формулы (2.6) и (2.7) позволяют проанализировать все случаи, возникающие в процессе проверки опорного плана на оптимальность.

В случае 1°, как мы уже видели, в соответствии с признаком оптимальности, план X является решением задачи линейного программирования.

В случае 2° имеется индекс $j=k$, для которого $\Delta_k < 0$ и все соответствующие компоненты $x_{ik} \leqslant 0$ $(i=1, 2, \ldots, m)$.

Формула (2.6) показывает ($j=k$), что в этом случае $X(\theta)$ является планом задачи (1.1)—(1.3) при любом $\theta>0$ ($x_j(\theta)\geqslant 0$ при любом $\theta\geqslant 0$). Это означает, как видно из формулы (2.7), что линейная форма $L(X)$ неограничена сверху на множестве планов задачи.

Таким образом, в случае 2° задача линейного программирования неразрешима.

Чаще всего приходится сталкиваться с третьей возможностью. В этом случае $\Delta_j<0$ для некоторых j, и для каждого такого j по крайней мере одно из чисел x_{ij} положительно. Покажем, что при этих условиях можно с помощью элементарного преобразования, связанного с вектором A_k ($\Delta_k<0$), перейти от опорного плана X к новому опорному плану X' и увеличить при этом значение линейной формы задачи.

Проведем элементарное преобразование плана X при значении θ, равном минимуму отношения x_{i0}/x_{ik} по всем i из множества $1, 2, \ldots, m$, для которых $x_{ik}>0$ (по условию такие x_{ik} имеются).

Итак, пусть

$$\theta_0=\min_{\substack{i\\ x_{ik}>0}} x_{i0}/x_{ik},$$

По условию, $x_{i0}>0$ для $i=1, 2, \ldots, m$. Поэтому θ_0 положительно. Здесь мы существенно используем невырожденность опорного плана X.

Положим $X'=X(\theta_0)$. По построению $X(\theta_0)$ является планом задачи. Более того, мы сейчас установим, что X' является опорным планом задачи.

Пусть минимум отношения x_{i0}/x_{ik}, определяющий число θ_0, достигается при $i=r$. Очевидно, $x'_{s_r}=x_{s_r}(\theta)=0$. Мы будем иногда говорить, что θ_0 достигается на r-й позиции базиса или, что то же самое, на векторе условий A_{s_r}.

В силу (2.4) при выбранном $\theta=\theta_0$ вектор ограничений B оказывается линейной комбинацией векторов $A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots$ $\ldots, A_{s_{r-1}}, A_k, A_{s_{r+1}}, \ldots, A_{s_m}$ с неотрицательными коэффициентами. Нетрудно убедиться в том, что эта система векторов линейно независима. Справедливость этого утверждения вытекает из следующей простой теоремы, которой мы будем неоднократно пользоваться и в дальнейшем, Теорема 2.1. *Если* $P_1, P_2, \ldots, P_m$ — *линейно независимая система векторов и вектор* $Q=\sum_{i=1}^{m}\zeta_i P_i$, *причем* $\zeta_r \neq 0$, *то система* $P_1, P_2, \ldots, P_{r-1}, Q, P_{r+1}, \ldots, P_m$ *также линейно независима.*

Доказательство. Пусть сформулированное утверждение неверно. Тогда можно указать числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \alpha$, среди которых имеются и ненулевые, такие, что

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq r}}^{m} \alpha_i P_i + \alpha Q = 0.$$

Подставляя в эту формулу разложение Q по векторам системы $P_1, P_2, \ldots, P_m$, получим

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq r}}^{m} (\alpha_i + \alpha\zeta_i) P_i + \alpha\zeta_r P_r = 0.$$

Система векторов $P_1, \ldots, P_r, \ldots, P_m$ по условию линейно независима, а $\zeta_r \neq 0$. Это значит, что последнее соотношение выполняется лишь при $\alpha=\alpha_1=\ldots=\alpha_{r-1}=\alpha_{r+1}=\ldots$ $\ldots=\alpha_m=0$. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует линейная независимость системы $A_{s_1}, \ldots, A_{s_{r-1}}, A_k, A_{s_{r+1}}, \ldots, A_{s_m}$ (здесь система $P_1, \ldots, P_m$ — векторы базиса, $Q=A_k$, $\zeta_r=x_{rk}>0$). Это значит, что план $X'=X(\theta_0)$ действительно является опорным планом задачи и его базис состоит из векторов $A_{s_1}, \ldots$ $\ldots, A_{s_{r-1}}, A_k, A_{s_{r+1}}, \ldots, A_{s_m}$.

Таким образом, базис нового опорного плана образуется из базиса предыдущего опорного плана заменой вектора A_{s_r}, расположенного в r-й позиции базиса (на которой достигается θ_0), на вектор A_k с отрицательной относительной оценкой. Вектор A_k занимает в новом базисе позицию r. В соответствии с этим

$$x'_{i0}=\begin{cases} x_{i0}\ (\theta_0) & \text{при } i\neq r,\\ \theta_0 & \text{при } i=r.\end{cases}$$

Используя формулу (2.6), получаем выражения для базисных переменных нового опорного плана:

$$x'_{i0}=\begin{cases} x_{i0}-\theta_0 x_{ik}, & i\neq r,\\ \theta_0, & i=r. \end{cases} \tag{2.8}$$

Заметим, что в невырожденной задаче величина θ_0 может достигаться только при одном значении i, т. е. только на одной позиции базиса. В противном случае опорный план X' оказался бы вырожденным, поскольку он имел бы менее, чем m положительных компонент.

В соответствии с соотношением (2.7)

$$L(X')=L(X)-\theta_0\Delta_k.$$

По условию $\Delta_k<0$. Кроме того, как мы видели, θ_0 — положительное число. Поэтому

$$L(X')>L(X).$$

Таким образом, в случае 3° можно перейти от исходного опорного плана X к новому опорному плану X', более близкому к решению задачи. Переход к новому плану приводит к увеличению линейной формы на $-\theta_0\Delta_k$. Последовательные переходы от одного опорного плана к другому производятся до тех пор, пока либо будет получено решение задачи, либо будет установлена ее неразрешимость.

Каждый переход от одного опорного плана к другому составляет *итерацию (шаг)* метода последовательного улучшения плана. Количество итераций, в результате которых мы приходим к решению невырожденной задачи или доказываем ее неразрешимость, конечно. Действительно, каждому опорному плану невырожденной задачи соответствует своя система из m линейно независимых векторов условий, составляющих его базис. Общее количество векторов условий равно n. Поэтому существует не более C_n^m различных базисов. Таким образом, и число различных опорных планов задачи конечно. Для каждого опорного плана однозначно определяется величина линейной формы. В невырожденном случае каждый следующий шаг увеличивает значение линейной формы, и, значит, не может быть возвращения к ранее пройденному базису. Это значит, что через конечное число итераций (шагов) метода последовательного улучшения плана будет получено решение (случай 1°) или установлена неограниченность линейной формы на множестве планов задачи (случай 2°).

Элементарное преобразование опорного плана носит достаточно частный характер. Тем не менее, как мы видели, с помощью элементарных преобразований всегда может быть осуществлено построение оптимального плана исследуемой задачи. Решение задачи линейного программирования методом последовательного улучшения плана как раз и складывается из определенных последовательностей этих преобразований.

2.5. Повторим кратко порядок операций, связанных с каждым отдельным шагом метода последовательного улучшения плана.

Каждая итерация метода содержит два этапа. Первый этап состоит в проверке исследуемого опорного плана на оптимальность. Первый этап приводит к одной из трех возможностей (случаи 1°, 2°, 3°). Если имеет место случай 1° или случай 2°, процесс решения заканчивается. В случае 1° исследуемый план оптимален. В случае 2° установлена неразрешимость задачи. Если имеет место случай 3°, переходим ко второму этапу итерации. Второй этап заключается в определении элементарного преобразования, приводящего к новому опорному плану с бо́льшим значением линейной формы. На втором этапе выбирается вектор A_k с отрицательной оценкой ($\Delta_k<0$) и определяется позиция r, которую он должен занять в базисе. Вектор A_{s_r} исключается из базиса. Новый базис образуется, таким образом, из векторов старого базиса заменой вектора условий A_{s_r} на вектор A_k. На втором этапе вычисляются все параметры, необходимые для получения и проверки на оптимальность нового опорного плана. Проверка полученного опорного плана на оптимальность производится на первом этапе следующей итерации.

Все рассуждения настоящего параграфа проводились для задачи линейного программирования, в которой требовалось обратить в максимум линейную форму (1.1) при условиях (1.2)—(1.3). Нет необходимости проводить специальные рассуждения для задачи минимизации линейной формы. Всякая задача, в которой требуется определить минимум линейной формы

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при тех или иных условиях, сводится к задаче максимизации формы

$$\tilde{L}(X) = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при тех же ограничениях.

§ 3. Примеры

3.1. Рассмотрим два простых примера, иллюстрирующих порядок вычислений при решении задач линейного программирования методом последовательного улучшения плана. При этом мы будем пользоваться только формулами и указаниями настоящей главы. Более компактные схемы счета будут приведены в следующей главе. Здесь мы рассматриваем лишь принципы определения оптимального плана, а не технику решения задачи. Поэтому изложение процесса решения ведется только применительно к первой форме признака оптимальности.

Пример 1. Пусть требуется обратить в максимум линейную форму

$$L(X) = 5x_1 - x_2 - 2x_3 + 5x_4 + 5x_5 - x_6$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned} -2x_1 + 5x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 10\\ x_1 - x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 1\\ x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 6\\ 10x_1 - 3x_2 \qquad\qquad + x_6 &= 15 \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, 6.$$

Решение. Здесь векторы условий и вектор ограничений равны соответственно

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2\\ 1\\ 1\\ 10 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 5\\ -1\\ 2\\ -3 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}; \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix};$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}; \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 10\\ 1\\ 6\\ 15 \end{pmatrix}.$$

Как легко видеть, в качестве исходного опорного плана можно принять следующий план:

$$X = (0,\ 0,\ 10,\ 1,\ 6,\ 15).$$

Этому плану соответствует значение линейной формы $L(X) = 0$.

В соответствии с рекомендациями метода разложим векторы A_1 и A_2 по векторам A_3, A_4, A_5 и A_6, составляющим базис $Б$ исходного опорного плана. Эти векторы занимают соответственно позиции 1, 2, 3 и 4 в базисе. Для того чтобы воспользоваться общими формулами, следует, согласно введенным в § 1 обозначениям, положить $A_3=A_{s_1}$, $A_4=A_{s_2}$, $A_5=A_{s_3}$, $A_6=A_{s_4}$. Коэффициенты разложения векторов A_1 и A_2 по векторам базиса x_{i1} и x_{i2} удовлетворяют системе уравнений

$$A_1=\sum_{i=1}^{4} x_{i1}A_{s_i},$$

$$A_2=\sum_{i=1}^{4} x_{i2}A_{s_i}.$$

Векторы базиса A_{s_i} — единичные векторы. Поэтому компоненты x_{i1} и x_{i2} равны соответствующим составляющим векторов A_1 и A_2. Коэффициенты x_{ij} для $j\in I_X$, естественно, равны единице при $j=s_i$ и нулю при $j\neq s_i$. Следовательно, матрица $\|x_{ij}\|$ совпадает с матрицей условий $\|a_{ij}\|$ (при другом расположении векторов по позициям базиса матрицы $\|x_{ij}\|$ и $\|a_{ij}\|$ различались бы порядком строк):

$$\|x_{ij}\|=\begin{Vmatrix} -2 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 10 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}=\|a_{ij}\|.$$

Расположим компоненты опорного плана X, являющиеся базисными переменными x_{i0}, в соответствии с позициями, занимаемыми векторами A_{s_i} в базисе:

$$x_{10}=10,\quad x_{20}=1,\quad x_{30}=6,\quad x_{40}=15.$$

Параметры z_j и Δ_j вычисляются по формулам (1.5) и (1.6). Имеем

$$z=(z_1,\ \ldots,\ z_6)=(4,\ -2,\ -2,\ 5,\ 5,\ -1),$$
$$\Delta=(\Delta_1,\ \ldots,\ \Delta_6)=(-1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0).$$

Как видим, Δ_1 и Δ_2 отрицательны и каждому из них соответствуют по нескольку положительных значений x_{ij}. Следовательно, имеет место случай 3°, т. е. имеется возможность перейти посредством элементарного преобразования от опорного плана X к новому опорному плану X' и увеличить при этом значение линейной формы.

В новый базис $Б_1$ можно ввести A_1 или A_2 ($\Delta_1=\Delta_2=-1$). Примем для определенности, что в базис вводится A_1. Для выявления вектора, подлежащего исключению из базиса, составим отношения x_{i0}/x_{i1} для $x_{i1}>0$. В нашем случае $x_{11}<0$, а при $i=2$, 3, 4 значения отношений равны соответственно 1; 6; $^3/_2$. Наименьшее отношение соответствует $i=2$ и равно 1. Следовательно, $\theta_0=1$ и в позицию 2 базиса, на которой достигается θ_0, вводится вектор A_1 вместо вектора $A_{s_2}=A_4$. Базисные компоненты $x'_{i0}=x_{i0}(\theta_0)$ нового плана, перенумерованные в соответствии с позициями базиса, вычисляются из соотношений (см. формулу (2.8))

$$x'_{i0}=\begin{cases} x_{i0}-1x_{i1} & \text{для} \quad i\neq 2, \\ \theta_0=1 & \text{для} \quad i=2. \end{cases}$$

Составляющая $x'_2=x_2$ по-прежнему равна нулю. Таким образом, в результате элементарного преобразования мы переходим к новому опорному плану:

$$X'=(1,\ 0,\ 12,\ 0,\ 5,\ 5).$$

При этом значение линейной формы возросло от $L(X)=0$ до $L(X')=1$.

Разложим теперь A_2 и A_4 (векторы, не входящие в базис $Б_1$) по векторам базиса $Б_1$. Как и прежде, для этого необходимо решить две системы уравнений:

$$A_2=\sum_{i=1}^{4} x'_{i2}A_{s_i},$$

$$A_4=\sum_{i=1}^{4} x'_{i4}A_{s_i}.$$

В новом базисе вектор A_1 занимает позицию 2. Остальные векторы $Б_1$ остаются на тех же позициях, что и в предыдущем базисе

$$A_{s_1}=A_3, \quad A_{s_2}=A_1, \quad A_{s_3}=A_5, \quad A_{s_4}=A_6.$$

Решая обе системы и учитывая, что $x'_{ij}=\delta_j^{s_i}$ при $j\in I_{X'}$, получаем (δ_j^t — символ Кронекера, равный 1 при $j=t$ и 0 при $j\neq t$)

$$\|x'_{ij}\|=\begin{Vmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -10 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Для контроля вычислений можно определить базисные компоненты плана X' из системы

$$B=\sum_{j\in I_{X'}} x'_jA_j=\sum_{i=1}^{m} x'_{i0}A_{s_i}.$$

Новому опорному плану X' соответствуют векторы Z' и Δ'. Их составляющие вычисляются так же, как и компоненты векторов Z и Δ:

$$Z'=(5,\ -3,\ -2,\ 6,\ 5\ -1),$$

$$\Delta'=(0,\ -2,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0).$$

Здесь Δ'_2 отрицательно. Кроме того, величине Δ'_2 соответствует несколько положительных значений x'_{i2}. Следовательно, имеется возможность посредством нового элементарного преобразования увеличить значение линейной формы. Последующие шаги проводятся по тем же правилам, что и предыдущие. Приведем значения компонент векторов $X^{(s)}$, $Z^{(s)}$ и $\Delta^{(s)}$ и соответствующие величины линейной формы L без промежуточных вычислений. Получаем табл. 4.1.

Таблица 4.1

s / j	2			3		
	$X^{(2)}$	$Z^{(2)}$	$\Delta^{(2)}$	$X^{(3)}$	$Z^{(3)}$	$\Delta^{(3)}$
1	12/7	5	0	48/23	5	0
2	5/7	−1	0	45/23	−1	0
3	69/7	−2	0	101/23	−2	0
4	0	22/7	−13/7	20/23	5	0
5	20/7	5	0	0	128/23	13/23
6	0	−5/7	2/7	0	−22/23	1/23
$L(X^{(s)})$	17/7			93/23		

Как видим, все составляющие вектора $\Delta^{(3)}$ неотрицательны. В соответствии с признаком оптимальности это означает, что мы пришли к оптимальному плану X^* — решению задачи линейного программирования.

3.2. Рассмотрим теперь пример, в котором процесс решения задачи по методу последовательного улучшения плана завершается случаем 2°.

Пример 2. Обратить в максимум линейную форму

$$L(X) = 3x_3 + 4x_4$$

при условиях

$$\begin{aligned} 2x_1-3x_2+x_3 \qquad &=1, \\ -5x_1+2x_2 \qquad +x_4&=1, \\ x_i\geqslant 0, \quad i=1, \ldots, 4. \end{aligned}$$

Решение. Как легко видеть, вектор

$$X=(0,\ 0,\ 1,\ 1)$$

может быть принят в качестве исходного опорного плана. Плану X соответствует значение линейной формы, равное $L(X)=7$. Векторы условий и вектор ограничений задачи равны соответственно

$$A_1=\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}; \quad A_2=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}; \quad A_3=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}; \quad A_4=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Исходный базис $Б$ состоит из единичных векторов $A_3=A_{s_1}$ и $A_4=A_{s_2}$. Поэтому

$$\|x_{ij}\|=\|a_{ij}\|=\begin{Vmatrix}2 & -3 & 1 & 0\\ -5 & 2 & 0 & 1\end{Vmatrix}.$$

Нумеруя базисные компоненты опорного плана X в соответствии с позициями, занимаемыми соответствующими векторами условий в базисе, получаем

$$x_3=x_{10}=1, \quad x_4=x_{20}=1.$$

Пользуясь формулами (1.5) и (1.6), вычисляем составляющие векторов Z и Δ

$$\begin{aligned} Z&=(-14,\ -1,\ 3,\ 4), \\ \Delta&=(-14,\ -1,\ 0,\ 0). \end{aligned}$$

Отрицательной оценке $\Delta_1=-14$ соответствует единственное положительное значение x_{i1}, равное $x_{11}=2$. Следовательно, в базис вводится A_1. Вектор A_1 вводится в первую позицию базиса, поскольку минимум отношения

$$\frac{x_{i0}}{x_{ik}}=\frac{x_{i0}}{x_{i1}}$$

достигается только на одном значении i, равном единице. Из базиса исключается вектор A_3, занимавший в нем первую позицию. Значение компоненты x_1 нового опорного плана равно

$$\theta_0=\frac{x_{10}}{x_{11}}=\frac{1}{2}.$$

Остальные составляющие X' вычисляются по формуле (2.8). При этом $x_2'=x_2$ остается равным нулю, поскольку A_2 по-прежнему не входит в базис.

Таким образом, мы приходим к новому опорному плану

$$X'=\left\{\frac{1}{2},\ 0,\ 0,\ \frac{7}{2}\right\}.$$

Значение линейной формы, соответствующее опорному плану X', равно $L(X')=14$.

Базис $Б_1$ опорного плана X' состоит из векторов A_1 и A_4. В соответствии с позициями, занимаемыми этими векторами в базисе $Б_1$, имеем $A_1=A_{s_1}$, $A_4=A_{s_2}$ и $x'_1=x'_{10}$, $x'_4=x'_{20}$. Разложим векторы A_2 и A_3, не входящие в $Б_1$, по векторам нового базиса. Составляющие x'_{i2} и x'_{i3} определяются из систем уравнений

$$A_2=\sum_{i=1}^{2} x'_{i2}A_{s_i},$$

$$A_3=\sum_{i=1}^{2} x'_{i3}A_{s_i}.$$

Решая обе системы и учитывая, что для $j \in I_{X'}$ $x'_{ij}=\delta_j^{s_i}$, получаем

$$\|x'_{ij}\|=\left\|\begin{matrix} 1 & -{}^3/_2 & {}^1/_2 & 0 \\ 0 & -{}^{11}/_2 & {}^5/_2 & 1 \end{matrix}\right\|.$$

Следовательно,

$$Z'=(0,\ -22,\ 10,\ 4),$$
$$\Delta'=(0,\ -22,\ 7,\ 0).$$

Как видим, $\Delta'_2<0$, и все составляющие $x'_{i2}<0$. Такое соотношение параметров Δ'_j и x'_{ij} соответствует случаю 2°, когда линейная форма неограничена сверху на множестве планов задачи. Следовательно, рассматриваемая задача неразрешима. Действительно, точка

$$X=(t,\ t,\ 1+t,\ 1+3t)$$

удовлетворяет условиям задачи при любом $t\geqslant 0$. При этом

$$L(X)=7+15t$$

неограниченно растет с увеличением t.

§ 4. Геометрические интерпретации метода последовательного улучшения плана

4.1. Все элементы метода последовательного улучшения плана находят простое геометрическое истолкование. В § 5 гл. 2 были приведены две геометрические интерпретации задачи линейного программирования. Читателю полезно будет вернуться к ним и связать изложенное в настоящей главе алгебраическое описание метода с соответствующими геометрическими образами. Геометрические описания метода будут проводиться в терминах многомерных пространств.

При желании читатель может ограничиться двух- или трехмерным случаем, где все сказанное ниже приобретает геометрическую наглядность. Для этого могут быть использованы конкретные примеры, описанные в п. 4.2, 4.4.

Различные геометрические интерпретации задачи приводят к разным геометрическим истолкованиям метода.

В соответствии с первой геометрической интерпретацией задачи линейного программирования условия (1.2)—(1.3) высекают в пространстве переменных $x_1, \ldots, x_n$ выпуклый многогранник (или неограниченное выпуклое многогранное множество), размерность которого не превышает $n-m$. Это многогранное множество содержится в общей части гиперплоскостей, определяемых условиями (1.2) задачи.

Опорному плану X соответствует вершина многогранного множества. Будем ее обозначать, как и опорный план, буквой X. Вершина X образуется пересечением гиперплоскостей, отвечающих условиям (1.2) и гиперплоскостей, соответствующих нулевым компонентам опорного плана. В невырожденном случае все базисные переменные отличны от нуля. Опорный план содержит $n-m$ внебазисных компонент. Таким образом, в невырожденном случае в вершине X пересекаются

$$m+(n-m)=n$$

независимых гиперплоскостей.

Выберем одну из внебазисных переменных x_j и заменим условие $x_j=0$ ограничением $x_j \geqslant 0$. Если все остальные внебазисные переменные сохраняют нулевое значение, то полученное таким образом геометрическое место точек является лучом, направленным «внутрь» многогранного множества (где $x_j>0$). Будем говорить, что этот луч отвечает вектору условий A_j.

Геометрическое место точек, в которых линейная форма

$$L=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

сохраняет постоянное значение, представляет собой гиперплоскость. Будем называть ее *гиперплоскостью линейной формы*. Вектор

$$C=(c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

определяет направление, в котором следует смещать гиперплоскость, чтобы увеличить значение L. Гиперплоскость линейной формы делит пространство $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на два полупространства. Полупространство, в котором расположен вектор C, будем называть *верхним полупространством*, а противоположное — *нижним*.

Элементарное преобразование опорного плана X, связанное с вектором A_j, в геометрических терминах означает перемещение из вершины X вдоль луча, отвечающего вектору A_j. Каждое ребро выпуклого многогранного множества, исходящее из вершины X, расположено на пересечении некоторых $n-1$ независимых граничных гиперплоскостей, содержащих точку X. Поэтому в невырожденном случае любому такому ребру соответствует луч, определяемый одним из векторов A_j, $j \notin I_X$. С другой стороны, в рассматриваемом случае общая часть луча, отвечающего любому вектору A_j, $j \in I_X$, и многогранного множества содержит отрезок ($\theta_0 > 0$) и, следовательно, составляет ребро данного множества.

Итак, при невырожденном плане X между векторами A_j, $j \notin I_X$, и ребрами многогранного множества, исходящими из точки X, устанавливается взаимно однозначное соответствие. Напомним, что ребра выпуклого многогранного множества могут быть ограниченными и неограниченными. В первом случае ребро — отрезок, соединяющий две вершины множества, во втором — луч, исходящий из некоторой вершины.

Мы можем теперь говорить, что каждое семейство элементарных преобразований при $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$ геометрически эквивалентно движению вдоль ребра многогранного множества. Если число $\theta_0 < \infty$, то соответствующее ребро ограниченное. Величина $\theta_0 = \infty$ отвечает неограниченному ребру.

При фиксированном значении θ мы переходим в точку $X(\theta)$, что приводит к изменению линейной формы на $\Delta_j\theta$.

Сформулируем в геометрических терминах все элементы отдельной итерации метода последовательного улучшения плана.

Первый этап итерации — это исследование опорного плана X на оптимальность. Проведем через вершину X гиперплоскость линейной формы и отберем все ребра многогранного множества, исходящие из точки X и расположенные в верхнем полупространстве. Если таких ребер нет, т. е. все ребра, содержащие вершину X, расположены под гиперплоскостью линейной формы, то опорный план X является оптимальным планом (случай 1°). Геометрически ясно, что если все ребра, исходящие из вершины X многогранного множества, лежат ниже гиперплоскости линейной формы, то и все множество лежит под гиперплоскостью. Этот факт и устанавливает признак оптимальности.

Допустим, что в верхнем полупространстве имеются ребра многогранного множества. При этом могут встретиться две возможности. Если среди ребер в верхнем полупространстве имеется неограниченное ребро (луч), то линейная форма, очевидно, неограничена сверху (случай 2°). В том случае, когда все ребра многогранного множества в верхнем полупространстве ограничены (все ребра — отрезки), можно перейти ко второму этапу итерации, сдвинуться вдоль одного из этих ребер и увеличить при этом значение линейной формы (случай 3°). Перемещение гиперплоскости линейной формы параллельно самой себе производится вдоль ребра до тех пор, пока она не пересечет другой конец ребра — соседнюю вершину X'. В точке X' одна из базисных переменных старого базиса обращается в нуль. Вершина X' — образ нового опорного плана X' — является, таким образом, пересечением гиперплоскостей, образующих ребро, и гиперплоскости, отвечающей старой базисной переменной, которая обратилась в нуль. Ясно, что

$$L(X') > L(X).$$

Перемещая таким образом гиперплоскость $L(X) = \text{const}$ параллельно самой себе от одной вершины многогранника условий к другой (соседней), мы увеличиваем от шага к шагу значение линейной формы. Конечное число вершин многогранника условий (многогранного множества) гарантирует достижение максимума линейной формы за конечное число шагов. Из геометрических соображений ясно также, что неразрешимость задачи (неограниченность линейной формы в области ее определения), если она имеет место, обнаруживается опять-таки через конечное число шагов.

4.2. Проиллюстрируем приведенные рассуждения на примерах предыдущего параграфа.

Мы уже отмечали, что многогранник условий расположен в общей части D гиперплоскостей, отвечающих условиям-равенствам задачи. Устанавливая в D систему координат, приходим к эквивалентной задаче линейного программирования, в которой все ограничения имеют вид неравенств. Эквивалентную задачу можно получить, например, выражая базисные переменные какого-либо опорного плана через его внебазисные переменные и исключая базисные переменные из условий и линейной формы задачи. Поступая таким образом с условиями примера 1, получаем

$$\begin{aligned} x_3 &= 10+2x_1-5x_2, \\ x_4 &= 1-x_1+x_2, \\ x_5 &= 6-x_1-2x_2, \\ x_6 &= 15-10x_1+3x_2. \end{aligned}$$

Сформулируем эквивалентную задачу.

Требуется обратить в максимум линейную форму

$$L(X)=x_1+x_2$$

при условиях:

$$\begin{aligned} 10+2x_1-5x_2 &\geqslant 0, \\ 1-x_1+x_2 &\geqslant 0, \\ 6-x_1-2x_2 &\geqslant 0, \\ 15-10x_1+3x_2 &\geqslant 0, \\ x_1\geqslant 0,\quad x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Эквивалентной задаче (а следовательно, и примеру 1) соответствует область определения линейной формы, изображенная на рис. 4.1. Стороны многоугольника условий являются отрезками прямых

$$\begin{aligned} x_1=0;\quad x_2&=0; \\ x_3=10+2x_1-5x_2&=0; \\ x_4=1-x_1+x_2&=0; \\ x_5=6-x_1-2x_2&=0; \\ x_6=15-10x_1+3x_2&=0. \end{aligned}$$

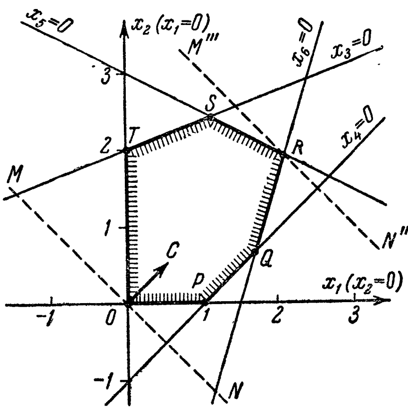


Рис. 4.1.

Штриховка вдоль прямой указывает полуплоскость, в которой соответствующая переменная положительна. Прямые $L(X)=\text{const}$ $(x_1+x_2=\text{const})$ параллельны прямой MN на рис. 4.1. Стрелкой OC указано направление, в котором следует смещать прямую MN, чтобы увеличивать значение линейной формы. Исходный опорный план соответствует вершине O многоугольника условий. Точка O является пересечением прямых $x_1=0$ и $x_2=0$, соответствующих внебазисным переменным. Значение линейной формы в этой вершине равно нулю.

Как видно из рис. 4.1, все стороны (ребра) многоугольника, исходящие из вершины O, лежат в верхней полуплоскости. Следовательно, перемещение в любую из соседних вершин приводит к увеличению L. Элементарное преобразование опорного плана X в план X' соответствует перемещению из вершины O в вершину P многоугольника условий. Перемещение производится вдоль луча, уравнение которого $x_2=0$, $x_1 \geqslant 0$. Таким образом, луч OP отвечает вектору условий A_1. В вершине P обращается в нуль базисная переменная x_4. Следовательно, точка P является пересечением прямых $x_2=0$, $x_4=0$. Вершина P — образ опорного плана X'.

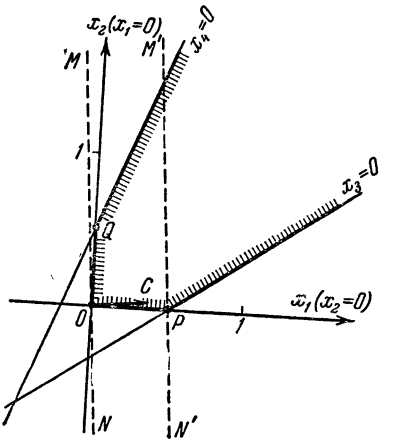


Рис. 4.2.

Переход от плана X' к плану X'' и от плана X'' к плану X''' соответствует перемещению из вершины P ($x_2=0$, $x_4=0$) в вершину Q ($x_4=0$, $x_6=0$) и из этой вершины Q в вершину R ($x_6=0$, $x_5=0$). Перемещение производится вдоль лучей, отвечающих векторам условий $A_2(x_2 \geqslant 0,\ x_4=0)$ и A_4 ($x_4 \geqslant 0$, $x_6=0$) соответственно. Переход в каждую новую вершину увеличивает значение линейной формы.

Все стороны (ребра) многоугольника, исходящие из вершины R, лежат ниже прямой $M'''N'''$. В соответствии с геометрической интерпретацией признака оптимальности это означает, что максимум линейной формы достигается в вершине R. Из рис. 4.1 видно, что любое перемещение прямой $M'''N'''$ параллельно самой себе, при котором прямая сохраняет общие точки с многоугольником условий, приводит к уменьшению линейной формы $L(X)$. Итак, координаты точки R определяют оптимальный план задачи.

На рис. 4.2 изображена область определения линейной формы примера 2 предыдущего параграфа. Как видим, область представляет собой неограниченную выпуклую многоугольную фигуру. Прямые $L(X)=\mathrm{const}$ параллельны прямой MN. Вектор C указывает направление, в котором увеличивается линейная форма. Исходный опорный план X соответствует вершине O многоугольной фигуры. Значение линейной формы $L(X)$ в вершине O равно 7. Перемещение в любую соседнюю вершину увеличивает значение L. План X' соответствует вершине P. $L(X')=14$. Уравнение прямой $M'N'$ —

$$L(X')=14,$$

или

$$14x_1+x_2=7.$$

Луч $x_2 \geqslant 0$, $x_3 = 0$, исходящий из вершины P, является неограниченным ребром многоугольного множества — области определения линейной формы. Этот луч расположен выше прямой $M'N'$. В соответствии с геометрической интерпретацией метода последовательного улучшения плана это означает, что задача неразрешима. Как видно из рис. 4.2, при перемещении $M'N'$ параллельно самой себе в направлении, указанном вектором C, прямая будет все время пересекать область определения линейной формы. При этом $L(X)$ будет неограниченно увеличиваться. Следовательно, линейная форма неограничена сверху на множестве планов.

4.3. Приведем теперь геометрическое истолкование метода последовательного улучшения плана, соответствующее второй геометрической интерпретации задачи линейного программирования.

Напомним, что расширенные векторы условий $\bar{A}_j$ порождают выпуклый многогранный конус K в $(m+1)$-мерном пространстве точек $U = (u_1, u_2, \ldots, u_{m+1})$. Векторам условий A_j и вектору ограничений B в пространстве U соответствуют точки, у которых $u_{m+1} = 0$. Прямая Q проходит через точку, определяемую вектором ограничений B, параллельно координатной оси Ou_{m+1}. Если прямая Q не пересекает конус K, множество планов задачи пусто — условия задачи противоречивы.

Нас будут интересовать только случаи, когда множество планов задачи не пусто, т. е. когда прямая Q и конус K имеют общую часть. Часть прямой Q, принадлежащая конусу K, является образом области определения линейной формы в $(m+1)$-мерном пространстве точек U. Самая верхняя точка общей части K и Q (точка отрезка, отвечающая максимальному значению $(m+1)$-й координаты) определяет максимум линейной формы, а самая нижняя точка отрезка — минимум L (естественно, речь идет о случае, когда такие точки существуют).

Может оказаться, что общей частью прямой Q и конуса K является луч, направленный вверх или вниз. В этом случае линейная форма неограничена сверху или снизу на множестве планов задачи. Если вся прямая Q принадлежит конусу K, линейная форма неограничена с обеих сторон в области своего определения.

Укажем геометрические построения, к которым приводит реализация каждой итерации метода последовательного улучшения плана.

Пусть векторы условий $A_1, A_2, \ldots, A_m$ образуют базис некоторого опорного плана X. Соответствующие расширенные векторы $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_m$ также линейно независимы. Обозначим через Π гиперплоскость, натянутую на векторы $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_m$ и проходящую через начало координат. Эта гиперплоскость однозначно определяется опорным планом X и является его образом в пространстве точек U. Гиперплоскость Π делит расширенные векторы $\bar{A}_{m+1}, \ldots, \bar{A}_n$ на две группы. Векторы условий первой группы расположены по ту же сторону от Π, что и положительная полуось Ou_{m+1}. Мы будем говорить, что эти векторы лежат выше гиперплоскости Π. Другая группа содержит все векторы $\bar{A}_j$, лежащие ниже Π.

Будем, как обычно, одним и тем же символом обозначать как вектор, так и определяемую им точку. Пусть прямые, проходящие через точки A_j и $\bar{A}_j$ (параллельно Ou_{m+1}), пересекают гиперплоскость Π в точках A_j^0, а прямая Q — в точке B^0.

Выразим длины отрезков $A_j^0 A_j$, $\bar{A}_j A_j^0$ и $B^0 B$ через параметры метода последовательного улучшения плана. Это позволит нам связать геометрические построения с приведенным ранее алгебраическим описанием метода.

Точка A_j^0 по построению принадлежит гиперплоскости Π. Запишем разложение вектора A_j^0 по системе m линейно независимых расширенных векторов условий $\bar{A}_i$, порождающих гиперплоскость Π:

$$A_j^0 = \sum_{i=1}^{m} \tilde{x}_{ij} \bar{A}_i. \tag{4.1}$$

Первые m компонент векторов A_j^0 и $\bar{A}_i$ определяют векторы условий A_j и A_i соответственно. Для них имеем (см. (1.4))

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} A_i.$$

Поэтому

$$\tilde{x}_{ij} = x_{ij}. \tag{4.2}$$

Длина направленного отрезка $A_j^0 A_j$ представляет собой $(m+1)$-ю компоненту вектора A_j^0 *).

*) Здесь под «длиной» $\|AB\|$ направленного отрезка AB подразумевается длина отрезка AB с учетом знака. $|AB|>0$ ($|AB|<0$), если A выше (ниже) B в смысле оси Ou_{m+1}.

Последняя компонента расширенного вектора условий $\overline{A}_i$ равна c_i. Поэтому из формул (4.1), (4.2) и (1.5) получаем

$$|A_j^0 A_j| = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} c_i = z_j \tag{4.3}$$

и

$$|\overline{A}_j A_j^0| = |\overline{A}_j A_j| - |A_j^0 A_j| = c_j - z_j = -\Delta_j. \tag{4.4}$$

Отрезок $B^0 B$ определяет значение линейной формы для рассматриваемого опорного плана

$$|B^0 B| = L(X). \tag{4.5}$$

Таким образом, для расширенных векторов первой группы, проходящих «выше» гиперплоскости П, $\Delta_j < 0$. Для векторов $\overline{A}_j$ другой группы $\Delta_j > 0$.

Пусть $\overline{A}_j$ — произвольный расширенный вектор условий, не принадлежащий гиперплоскости П. Рассмотрим $(m+1)$-мерный конус, образованный векторами $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_m, \overline{A}_j$. Обозначим его через K_j (индекс j — номер вектора $\overline{A}_j \notin$ П). Точки общей части прямой Q и конуса K_j являются геометрическими образами планов, которые образуются из X путем элементарного преобразования, связанного с вектором A_j $(0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0)$. В невырожденном случае точка X лежит внутри грани, образованной векторами $\overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_m$. Поэтому общая часть Q и K_j при любом $\overline{A}_j \notin$ П содержит некоторый отрезок. В вырожденном случае общая часть Q и K_j может содержать лишь точку X (Q касается конуса K_j).

Первый этап итерации состоит в проверке опорного плана на оптимальность. Геометрически проверка сводится к решению вопроса, имеются ли расширенные векторы, расположенные «над» гиперплоскостью П. Если первая группа расширенных векторов — пустое множество, опорный план X является оптимальным (случай 1°). В этом случае весь конус K расположен «под» гиперплоскостью П. Максимальное значение линейной формы определяется длиной отрезка $B^0 B$.

Пусть теперь первая группа векторов $\overline{A}_j$ не пуста, т. е. имеются расширенные векторы условий, расположенные над гиперплоскостью П. Здесь представляются две возможности, которые приводят к случаям 2° и 3° соответственно.

Случай 2° геометрически означает существование такого вектора A_j, расположенного над гиперплоскостью П, что общая часть K_j и Q является лучом, исходящим из точки X. Заметим, что это возможно в том и только в том случае, когда конус K_j содержит полуось Ou_{m+1} (см. упражнение 3). Если первая группа расширенных векторов условий не пуста, и любой конус K_j не содержит Ou_{m+1}, то имеем дело со случаем 3°. В случае 3° можно перейти от гиперплоскости П к гиперплоскости П$'$, соответствующей очередному опорному плану X'.

Гиперплоскость П$'$ пересекает прямую Q в точке B', расположенной выше B^0.

Переход от П к П$'$ осуществляется следующим образом. Пусть вектор A_k лежит «выше» гиперплоскости П. Образуем конус K_k. Как отмечалось, в невырожденном случае общая часть K_k и Q содержит некоторый отрезок. В случае 3° общая часть K_k и Q не может оказаться лучом. Поэтому она совпадает с отрезком, концами которого являются «нижняя» и «верхняя» точки пересечения K_k и Q. Точка B^0 — «нижняя» точка отрезка. Верхнюю точку отрезка обозначим через B'. Заметим, что $(m+1)$-мерный конус K_k имеет $m+1$ граней размерности m. Каждая из них является конусом, образованным некоторыми m векторами системы $\overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_m, \overline{A}_k$. Обозначим грань конуса K_k, не содержащую вектор A_j $(j=1, 2, \ldots, m, k)$, через Γ_{jk}. В невырожденном случае точка B' расположена внутри некоторой грани конуса K_k, скажем Γ_{rk}.

Пусть П$'$ — гиперплоскость, содержащая грань Γ_{rk}. Гиперплоскость П$'$ является геометрическим образом нового опорного плана X'. Очевидно, базис плана X' состоит из векторов $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_{r-1}, \overline{A}_{r+1}, \ldots, \overline{A}_m, \overline{A}_k$, участвующих в образовании грани Γ_{rk}. Прямая Q пересекает гиперплоскость П$'$ в точке B'. Точка B' лежит выше B^0, следовательно, план X' соответствует большему значению линейной формы задачи по сравнению с планом X. На этом заканчивается итерация метода. Следующая итерация ведется по тем же правилам. Снова проверяем, лежит ли гиперплоскость П$'$ выше конуса K или нет. В первом случае гиперплоскость П$'$ определяет оптимальный план, а точка B' — максимальное значение линейной формы. Во втором случае следует перейти от гиперплоскости П$'$ к гиперплоскости П″ по тем же правилам, по которым был совершен переход от П к П′. В невырожденной задаче мы, таким образом, всегда придем к гиперплоскости П*, расположенной над конусом K, либо убедимся в неразрешимости задачи.

4.3. Проиллюстрируем геометрическими построениями решение следующей задачи.

Требуется обратить в максимум линейную форму

$$L = 10x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 16x_4 + 21x_5$$

при условиях

$$\begin{gathered} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 10x_4 + 5x_5 = 6, \\ 9x_1 + 10x_2 + 12{,}5x_3 + 18x_4 + 16{,}5x_5 = 14, \\ x_j \geqslant 0, \ j = 1, 2, \ldots, 5. \end{gathered}$$

На рис. 4.3 изображены векторы условий A_j, вектор ограничений B, соответствующие расширенные векторы и прямая Q,

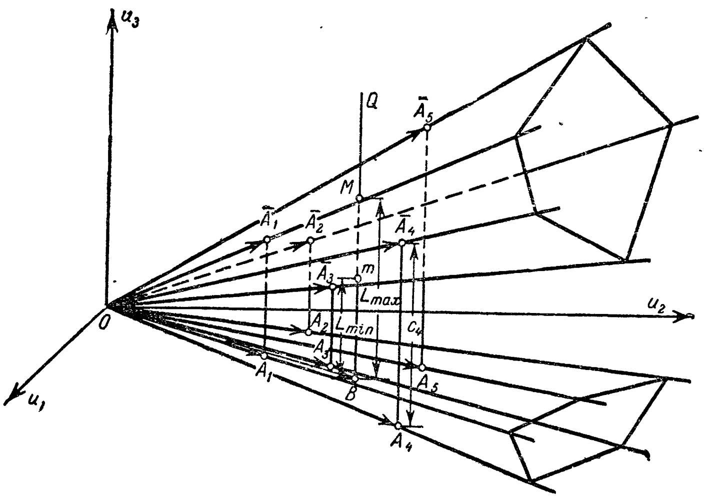


Рис. 4.3.

проходящая через точку B параллельно оси Ou_3. Как видим, прямая Q пересекает выпуклый многогранный конус, порождаемый расширенными векторами условий. Следовательно, множество планов задачи непусто.

Векторы A_3 и A_4 линейно независимы, а вектор B лежит внутри конуса (здесь плоского угла), образованного ими. Это значит, что вектор ограничений можно представить в виде линейной комбинации векторов A_3 и A_4 с положительными коэффициентами. Мы имеем, таким образом, основание выбрать векторы условий A_3 и A_4 в качестве базиса исходного опорного плана X. Двумерный конус, образованный векторами A_3 и A_4, заштрихован на рис. 4.4. Гиперплоскость П (в рассматриваемом примере обычная плоскость) определяется двумерным конусом, порожденным расширенными векторами условий $\overline{A}_3$ и $\overline{A}_4$. На рис. 4.4 этот конус также заштрихован.

По построению точки $\overline{A}_j$ отстоят от плоскости u_1Ou_2 на величину c_j. В нашей задаче

$$C=\{c_j\}=(10,\ 8,\ 7,\ 16,\ 21).$$

Перпендикуляры, опущенные из точек $\overline{A}_j$ на плоскость u_1Ou_2, пересекают П соответственно в точках $\overset{0}{A_j}$. Как мы видели, «длины» отрезков $\overset{0}{A_j}\ A_j$ равны соответственно $\overline{z}_j$, а

$$|B^0B|=L\ (X).$$

В нашем случае

$$Z=\{z_j\}=\left(\frac{206}{35},\ \frac{48}{35},\ 7,\ 16,\ \frac{41}{7}\right),$$

$$L\ (X)=\frac{304}{35}.$$

«Длина» отрезка $\overline{A}_j\ \overset{0}{A_j}$ равна $c_j-z_j=-\Delta_j$. В рассматриваемом примере

$$\Delta=\left\{\Delta_j\right\}=\left(-\frac{144}{35},\ -\frac{232}{35},\ 0,\ 0,\ -\frac{106}{7}\right),$$

Δ_1, Δ_2 и Δ_5 отрицательны.

Следовательно, точки $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$ и $\overline{A}_5$ лежат выше плоскости П. Точка $\overline{A}_5$ лежит выше других ($\Delta_5<\Delta_j$, $j=1,\ 2,\ 3,\ 4$). Следовательно, в базис целесообразно ввести вектор условий A_5.

Из рис. 4.4 видно, что вектор ограничений B лежит внутри конуса (плоского угла), образованного векторами A_4 и A_5, но вне конуса, порожденного векторами A_3 и A_5. Это значит, что разложение вектора ограничений B по векторам A_4 и A_5 будет иметь положительные коэффициенты, а в разложении B по A_3 и A_5 будут и отрицательные составляющие. Отсюда вывод — исключить из базиса следует A_3.

К этому же выводу приходим, естественно, из следующих рассуждений, приведенных выше для общего случая. Прямая Q пересекает трехмерный конус K_5, порожденный векторами $\overline{A}_3$ и $\overline{A}_4$ (соответствующими базису опорного плана X) и вектором A_5 (отвечающим вводимому в базис вектору условий), в двух точках — в точке B^0 двумерной грани Γ_{55}, определяемой векторами $\overline{A}_3$ и $\overline{A}_4$, и в точке B' грани Γ_{35}, образованной векторами $\overline{A}_4$ и $\overline{A}_5$. Точка

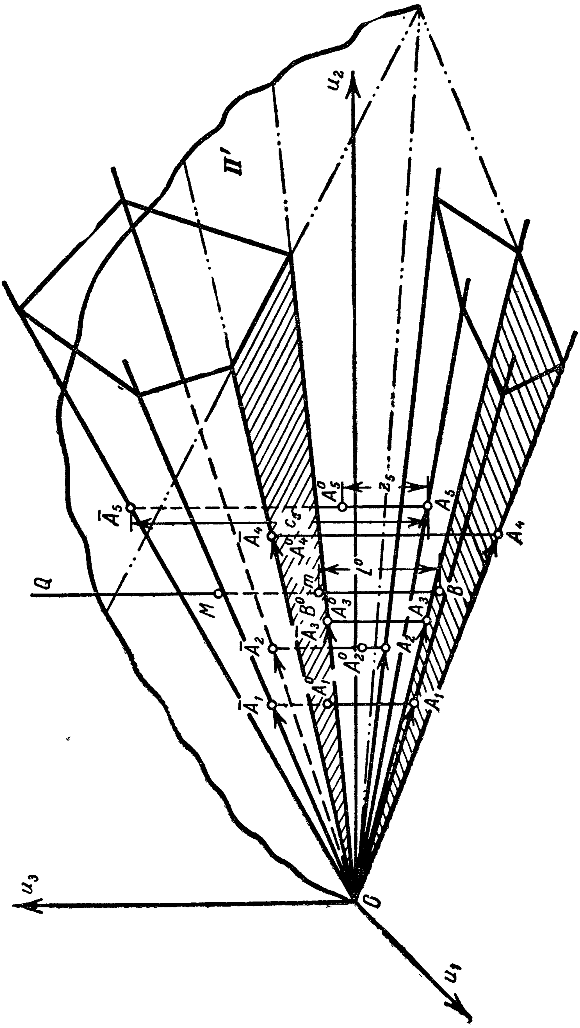
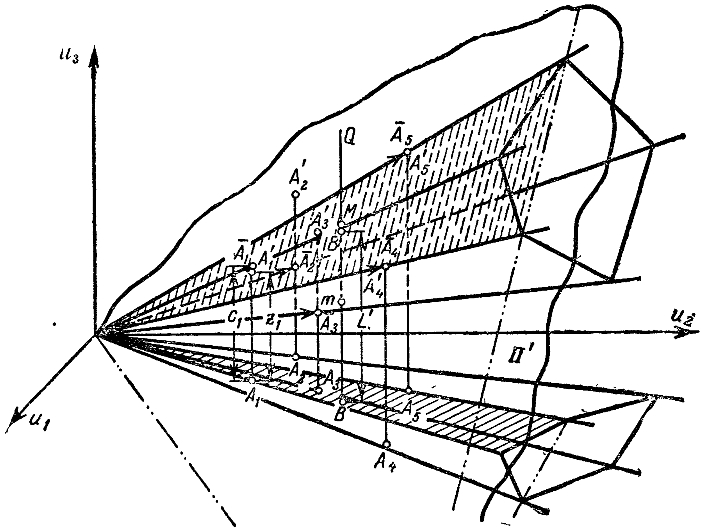
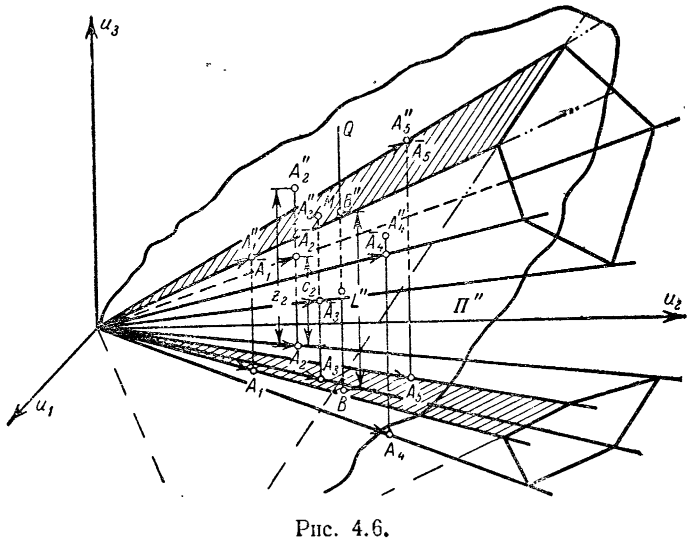

u_2
u_3
u_1
O
Q
M
Π'
L^0
z_5
B
B^0
m
c_5
$\bar{A}_1$
$\bar{A}_2$
$\bar{A}_3$
$\bar{A}_4$
$\bar{A}_5$
A_1^0
A_2^0
A_3^0
A_4^0
A_5^0
A_1
A_2
A_3
A_4
A_5

Рис. 4.4.



u_3
Q
$\bar{A}_5$
A'_5
A'_2
A'_3
M
$\bar{A}_1$
A'_1
$\bar{A}_2$
$\bar{A}_4$
A'_4
m
c_1
z_1
$\bar{A}_3$
L'
u_2
Π'
A_2
A_3
A_1
B
A_5
A_4
u_1

Рис. 4.5.



u_3
Q
A''_5
$\bar{A}_5$
A''_2
A''_3
M
B''
A''_4
A''_1
$\bar{A}_2$
$\bar{A}_4$
$\bar{A}_1$
z_2
c_2
$\bar{A}_3$
L''
Π''
u_2
A_2
A_3
A_1
B
A_5
A_4
u_1

Рис. 4.6.

B^0 принадлежит плоскости П, порожденной векторами, соответствующими исходному базису. Точка B' лежит в плоскости П', определяемой векторами, отвечающими новому базису. Мы снова приходим к выводу, что исключению из исходного базиса подлежит вектор A_3.

Построения, подобные проведенным, приводят к точкам A'_j и B'. Для них

$$-\Delta' = C - Z' = \{c_j - z'_j\} = \{|\overline{A}_j A_j| - |A'_j A_j|\} =$$
$$= \left\{\left|\overline{A}_j A'_j\right|\right\} = \left(\frac{12}{75}, \ -\frac{472}{75}, \ -\frac{106}{15}, \ 0, 0\right);$$
$$L(X') = \frac{1136}{75}.$$

Как видим из рис. 4.5, на этом шаге только одна точка $\overline{A}_j$, а именно $\overline{A}_1$ расположена выше плоскости П' ($\Delta_1 < 0$). Следовательно, чтобы увеличить значение линейной формы, необходимо в базис ввести вектор A_1. Рассуждая, как и прежде, приходим к выводу, что исключению из базиса подлежит вектор A_4 (вектор ограничений B лежит вне угла, образованного векторами A_1 и A_4). Векторы $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_5$ определяют плоскость П'' (рис. 4.6), расположенную выше конуса K. Следовательно, опорный план X'', отвечающий базису (A_1, A_5), является решением задачи.

Разлагая вектор ограничений B по векторам базиса, получаем оптимальный план

$$X'' = \left(\frac{29}{21}, \ 0, \ 0, \ 0, \ \frac{2}{21}\right).$$

Прямая Q пересекает плоскость П'' в точке, для которой

$$u_3 = L(X'') = \frac{332}{21}.$$

Это и есть максимальное значение линейной формы.

§ 5. Случай двухсторонних ограничений

5.1. Рассмотрим следующую задачу линейного программирования.

Требуется обратить в максимум линейную форму

$$L(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{5.1}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} A_j x_j = B, \tag{5.2}$$

$$\alpha_j \leq x_j \leq \beta_j; \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.3}$$

Ранг матрицы $\|a_{ij}\|_{mn}=(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ предполагается равным m.

Задача (5.1)—(5.3) отличается от общей задачи линейного программирования (1.1)—(1.3), записанной в канонической форме, лишь условиями (5.3), которые ограничивают ее переменные, вообще говоря, с двух сторон. Задачи с двухсторонними ограничениями часто встречаются на практике и поэтому заслуживают особого рассмотрения.

Мы не будем предполагать, что все переменные задачи ограничены условиями (5.3) с двух сторон; некоторые из них могут иметь только по одной границе. Если переменная x_j ограничена лишь сверху, то $\alpha_j=-\infty$; если x_j ограничена только снизу, то $\beta_j=\infty$. В частности, если $\alpha_j=0$, $\beta_j=\infty$, задача (5.1)—(5.3) превращается в общую задачу линейного программирования, записанную в канонической форме.

Очевидно, задача (5.1)—(5.3) легко приводится к канонической форме. Для этого достаточно заменить переменные x_j на $x'_j=x_j-\alpha_j$, $j=1, 2, \ldots, n$, и ввести дополнительные неотрицательные переменные x'_j для $j=n+1, \ldots, 2n$. (Здесь мы предполагаем все числа α_j и β_j конечными.)

Таким образом, решение задачи с двухсторонними ограничениями можно было бы провести в два этапа. Вначале задача (5.1)—(5.3) приводится к канонической форме, а затем решается методом, изложенным в предыдущих параграфах для задачи (1.1)—(1.3). Однако такой путь вряд ли можно признать целесообразным. Каноническая форма задачи с двухсторонними ограничениями содержит $2n$ переменных и $n+m$ условий-равенств. Следовательно, в процессе решения придется иметь дело с $(n+m)$-мерными векторами условий. Трудоемкость каждой итерации при этом существенно возрастает.

В случае, когда каждая переменная задачи (5.1)—(5.3) ограничена лишь с одной стороны (сверху или снизу), задача легко приводится к каноническому виду следующей заменой переменных:

$$x'_j=\begin{cases} x_j-\alpha_j, & \text{если} \quad x_j\geqslant\alpha_j, \\ \beta_j-x_j, & \text{если} \quad x_j\leqslant\beta_j. \end{cases}$$

Дополнительные ограничения, отличающие исследуемую задачу от задачи (1.1)—(1.3), имеют, таким образом, чрезвычайно простую структуру:

$$x_j \leqslant \beta_j,$$

где x_j — произвольная переменная задачи (5.1)—(5.3), ограниченная с двух сторон. Простота дополнительных условий позволяет предположить, что метод последовательного улучшения плана без существенных усложнений может быть перенесен на задачи с двухсторонними ограничениями. Ниже мы убедимся, что это действительно так.

Следует отметить, что учет специфики задачи и приспособление методов линейного программирования к естественной форме задачи, как правило, существенно снижает трудоемкость вычислений, связанных с определением оптимального плана. В дальнейшем мы не раз будем уточнять численные методы линейного программирования применительно к тем или иным классам задач. Обычно такое уточнение проще всего сделать, описывая метод заново с учетом его общей схемы и особенностей задачи. Этот путь мы и выберем.

5.2. Введем несколько определений. Векторы $A_j = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})^T$, $j = 1, \ldots, n$ назовем *векторами условий* задачи (5.1)—(5.3), а вектор $B = (b_1, \ldots, b_m)^T$ — *вектором ограничений* этой задачи.

План $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задачи (5.1)—(5.3) назовем *опорным*, если система векторов условий A_j, соответствующих компонентам x_j, для которых

$$\alpha_j < x_j < \beta_j, \tag{5.4}$$

линейно независима.

Отметим, что такое определение опорного плана полностью отвечает понятию опорности, введенному в п.4.2 гл. 2 для произвольной задачи линейного программирования. Доказательство этого факта предоставляем читателю (см. упражнение 4).

Пусть X — произвольный опорный план задачи (5.1)—(5.3). Рассмотрим совокупность всех векторов условий, которым соответствуют компоненты x_j плана X, удовлетворяющие неравенству (5.4). Система m линейно независимых векторов, содержащая указанную совокупность векторов, называется *базисом* опорного плана X. Составляющие опорного плана, отвечающие векторам базиса, будем называть *базисными переменными*, остальные компоненты плана назовем *внебазисными*. Очевидно, внебазисная переменная x_j равна одному из граничных значений соответствующей компоненты плана (α_j или β_j).

5.3. Сформулируем признак оптимальности — основу метода решения задачи с двухсторонними ограничениями.

Пусть $X=(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольный опорный план задачи (5.1)—(5.3), с базисом, состоящим из векторов $A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m}$. Обозначим, как и прежде, множество индексов векторов базиса через I_X. Используя обозначения § 1, имеем

$$A_j=\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\; A_{s_i}, \qquad j=1,\ 2, \ldots,\ n; \tag{5.5}$$

$$z_j=\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\; c_{s_i}, \qquad j=1,\ 2, \ldots,\ n. \tag{5.6}$$

Положим, как и в § 2,

$$x_{i0}=x_{s_i}, \qquad i=1,\ 2, \ldots, m,$$

и введем вектор A_0, удовлетворяющий равенству

$$A_0=B-\sum_{j\notin I_X} x_j A_j=\sum_{i=1}^{m} x_{i0} A_{s_i}.$$

Объединяя последнее соотношение с (5.5), получаем

$$A_j=\sum_{i=1}^{m} x_{ij} A_{s_i}, \qquad j=0,\ 1,\ 2, \ldots, n. \tag{5.5$'$}$$

Напомним, что первый индекс коэффициента разложения x_{ij} (индекс i) указывает номер позиции базиса, в которой расположен вектор A_{s_i}.

Введем теперь параметры Δ_j, положив

$$\Delta_j=\begin{cases} z_j-c_j, & \text{если} \quad \alpha_j \leqslant x_j<\beta_j, \\ c_j-z_j, & \text{если} \quad x_j=\beta_j. \end{cases} \tag{5.7}$$

Очевидно, при $j\in I_X$, в частности, при $\alpha_j<x_j<\beta_j$,

$$\Delta_j=0.$$

В дальнейшем мы убедимся, что величины Δ_j являются аналогами относительных оценок векторов условий задачи (1.1)—(1.3).

Определение (5.7) параметров Δ_j позволяет сформулировать признак оптимальности опорного плана задачи (5.1)—(5.3) в той же форме, что и для задачи (1.1)—(1.3).

Признак оптимальности. *Опорный план X является решением задачи* (5.1)—(5.3), *если* $\Delta_j \geqslant 0$ *для всех* $j \notin I_X$.

Доказательство. Пусть $X' = (x_1', \ldots, x_n')$—произвольный опорный план задачи (5.1)—(5.3). Имеем

$$L(X') = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j' = \sum_{j \in I_X} c_j x_j' + \sum_{\alpha} c_j x_j' + \sum_{\beta} c_j x_j',$$

где под $\sum_{\alpha}$ $(\sum_{\beta})$ следует понимать суммирование по индексам $j \notin I_X$, для которых $x_j = \alpha_j$ $(x_j = \beta_j)$.

Учитывая ограничения (5.3) и условия признака оптимальности, получаем

$$\sum_{\alpha} c_j (x_j' - \alpha_j) \leqslant \sum_{\alpha} z_j (x_j' - \alpha_j),$$

$$\sum_{\beta} c_j (x_j' - \beta_j) \leqslant \sum_{\beta} z_j (x_j' - \beta_j).$$

Поэтому

$$\sum_{j \notin I_X} c_j (x_j' - x_j) \leqslant \sum_{j \notin I_X} z_j (x_j' - x_j).$$

Полученное неравенство позволяет следующим образом оценить значение линейной формы в точке X':

$$L(X') \leqslant \sum_{j \in I_X} c_j x_j' + \sum_{j \notin I_X} z_j (x_j' - x_j) + \sum_{j \notin I_X} c_j x_j.$$

Учитывая, далее, формулу (5.6), имеем

$$L(X') \leqslant \sum_{i=1}^{m} c_{s_i} \left[x_{s_i}' + \sum_{j \notin I_X} x_{ij} (x_j' - x_j)\right] + \sum_{j \notin I_X} c_j x_j. \quad (5.8)$$

Покажем, что

$$x_{s_i}' + \sum_{j \notin I_X} x_{ij} (x_j' - x_j) = x_{s_i} = x_{i0}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \quad (5.9)$$

Действительно, X' — план задачи. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{m} A_{s_i} x'_{s_i} = B - \sum_{j \notin I_X} A_j x'_j. \tag{5.10}$$

Умножая обе части равенства (5.5) на $x'_j - x_j$ и складывая результаты для $j \notin I_X$ с соотношением (5.10), получаем

$$\sum_{i=1}^{m} A_{s_i} [x'_{s_i} + \sum_{j \notin I_X} x_{ij} (x'_j - x_j)] = B - \sum_{j \notin I_X} A_j x_j = A_0.$$

Сравним полученное равенство с соотношением (5.5′) для $j=0$. Векторы A_{s_i} $(i=1, 2, \ldots, m)$ составляют базис опорного плана X. Линейная независимость этой системы векторов убеждает нас в справедливости равенства (5.9).

Из формул (5.8) и (5.9) вытекает, что

$$L(X') \leqslant \sum_{i=1}^{m} c_{s_i} x_{i0} + \sum_{j \notin I_X} c_j x_j = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = L(X). \tag{5.11}$$

Формула (5.11) имеет место для произвольного плана X'. Это означает, что X — оптимальный план задачи (5.1) — (5.3). Справедливость признака оптимальности доказана.

В § 1 было установлено следующее соотношение:

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.12}$$

где вектор $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ определяется из системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \lambda_i = c_j \quad \text{для} \quad j \in I_X. \tag{5.13}$$

Таким образом, параметры z_j можно вычислять как по формулам (5.6), так и из соотношений (5.12). В зависимости от способа вычислений параметров z_j, необходимых для получения оценок Δ_j, будем, как и в § 1, различать две формы признака оптимальности. В первой форме признака величины z_j подсчитываются по формулам (5.6), во второй — из соотношений (5.12). Вторую форму признака оптимальности можно сформулировать следующим образом.

П р и з н а к о п т и м а л ь н о с т и. *Для оптимальности опорного плана* $X=(x_1, \ldots, x_n)$ *достаточно, чтобы вектор* Λ, *определенный из системы* (5.13), *удовлетворял неравенствам*

$$(\Lambda,\ A_j)=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i \geqslant c_j, \quad \text{если} \quad x_j=\alpha_j,$$

$$(\Lambda,\ A_j)=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i \leqslant c_j, \quad \text{если} \quad x_j=\beta_j.$$

5.4. Для описания общей схемы решения задачи (5.1) — (5.3) целесообразно перенести введенное в § 2 понятие элементарного преобразования на случай, когда переменные ограничены с обеих сторон. В задаче с двухсторонними ограничениями элементарное преобразование, связанное с вектором A_j ($j \notin I_X$), вводится по-разному, в зависимости от того, с какой из границ (α_j или β_j) совпадает внебазисная переменная x_j.

Рассмотрим отдельно оба случая:

1) $x_j=\alpha_j$, $j \notin I_X$,

2) $x_j=\beta_j$, $j \notin I_X$.

1. В первом случае с вектором A_j связывается семейство преобразований опорного плана X в план $X(\theta)=(x_1(\theta), \ldots, x_n(\theta))$ вида

$$x_\mu(\theta)=\begin{cases} x_{s_i}-\theta x_{ij}, & \text{если} \quad \mu=s_i,\ i=1, 2, \ldots, m, \\ x_j+\theta, & \text{если} \quad \mu=j, \\ x_\mu, & \text{если} \quad \mu \notin I_X,\ \mu \neq j. \end{cases} \tag{5.14}$$

Запишем условия, при которых вектор $X(\theta)$ является планом задачи (5.1) — (5.3).

Учитывая формулы (5.5), имеем

$$\sum_{j=1}^{n} x_j(\theta) A_j = \sum_{j=1}^{n} x_j A_j + \theta\,[A_j - \sum_{i=1}^{m} x_{ij} A_{s_i}] = \sum_{j=1}^{n} x_j A_j = B$$

при любом θ. Следовательно, вектор $X(\theta)$ удовлетворяет условиям (5.2) при любом значении θ.

Определим теперь совокупность значений θ, при которых все компоненты вектора $X(\theta)$ удовлетворяют условиям (5.3).

Поскольку

$$x_j(\theta)=x_j+\theta=\alpha_j+\theta,$$

то для выполнения неравенств

$$\alpha_j \leqslant x_j(\theta) \leqslant \beta_j$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$0 \leqslant \theta \leqslant \beta_j - \alpha_j = \beta_j - x_j. \tag{5.15}$$

Остальные ограничения на θ определяются условиями

$$\alpha_{s_i} \leqslant x_{s_i}(\theta) \leqslant \beta_{s_i} \quad \text{для} \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{5.16}$$

Очевидно, нарушение этих неравенств может наступить лишь при $x_{ij} \neq 0$.

Если $x_{ij} > 0$, то

$$x_{s_i}(\theta) = x_{s_i} - \theta x_{ij} \leqslant x_{s_i} \qquad (\theta \geqslant 0).$$

Следовательно, при $x_{ij} > 0$ для выполнения i-го неравенства системы (5.16) необходимо и достаточно, чтобы

$$\theta \leqslant \frac{x_{s_i} - \alpha_{s_i}}{x_{ij}}. \tag{5.17}$$

Если $x_{ij} < 0$, то при $\theta > 0$

$$x_{s_i}(\theta) = x_{s_i} - \theta x_{ij} \geqslant x_{s_i}.$$

Следовательно, при $x_{ij} < 0$ i-е неравенство системы (5.16) будет выполняться, если

$$\theta \leqslant \frac{\beta_{s_i} - x_{s_i}}{-x_{ij}} = \frac{x_{s_i} - \beta_{s_i}}{x_{ij}}. \tag{5.18}$$

Собирая вместе неравенства (5.15), (5.17) и (5.18), получаем, что вектор $X(\theta)$ удовлетворяет всем условиям (5.3) в том и только в том случае, если

$$0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0, \tag{5.19}$$

где θ_0 — наименьшее из трех чисел:

$$\theta_0^{(1)} = \min_{x_{ij} > 0} \frac{x_{s_i} - \alpha_{s_i}}{x_{ij}},$$

$$\theta_0^{(2)} = \min_{x_{ij} < 0} \frac{x_{s_i} - \beta_{s_i}}{x_{ij}},$$

$$\theta_0^{(3)} = \beta_j - x_j = \beta_j - \alpha_j.$$

До сих пор мы рассматривали m позиций базиса. В каждой позиции расположен один из векторов базиса. Для упрощения записи удобно ввести $(m+1)$-ю позицию базиса, поместив в нее вектор $A_j = A_{s_{m+1}}$, определяющий данное элементарное преобразование. Введение дополнительной позиции будет полезно и в дальнейшем изложении.

Пусть

$$x_{m+1,j} = -1; \quad x_{m+1,0} = x_j = x_{s_{m+1}}.$$

Если положить

$$\gamma_i = \begin{cases} \alpha_{s_i} \text{ при } x_{ij} > 0, & i = 1, 2, \ldots, m+1, \\ \beta_{s_i} \text{ при } x_{ij} < 0, & i = 1, 2, \ldots, m+1, \end{cases} \tag{5.20}$$

то формула для вычисления θ_0 может быть записана в следующей компактной форме:

$$\theta_0 = \min_{\substack{x_{ij} \neq 0 \\ 1 \leqslant i \leqslant m+1}} \frac{x_{i0} - \gamma_i}{x_{ij}}. \tag{5.21}$$

Здесь, как обычно, $x_{i0} = x_{s_i}$ — базисная переменная, отвечающая i-й позиции базиса.

Итак, под элементарным преобразованием, связанным с вектором A_j, для которого $x_j = \alpha_j$ $(j \notin I_X)$, будем понимать преобразование (5.14) при θ, удовлетворяющем условию (5.19). Величина θ_0 в неравенстве (5.19) определяется по формуле (5.21).

2. Введем теперь понятие элементарного преобразования для второго случая.

В этом случае вектору A_j, с которым связано элементарное преобразование, отвечает внебазисная переменная $x_j = \beta_j$.

Семейство элементарных преобразований плана X в план $X(\theta)$, связанное с вектором A_j, определяется формулой

$$x_\mu(\theta) = \begin{cases} x_{s_i} + \theta x_{ij}, & \text{если } \mu = s_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \\ x_j - \theta, & \text{если } \mu = j, \\ x_\mu, & \text{если } \mu \notin I_X, \quad \mu \neq j. \end{cases} \tag{5.22}$$

Вектор $X(\theta)$ является планом задачи (5.1)—(5.3) в том и только в том случае, если

$$0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0,$$

где θ_0 — наименьшее из трех чисел:

$$\theta_0^{(1)} = \min_{x_{ij}<0} \frac{\alpha_{s_i} - x_{s_i}}{x_{ij}},$$

$$\theta_0^{(2)} = \min_{x_{ij}>0} \frac{\beta_{s_i} - x_{s_i}}{x_{ij}},$$

$$\theta_0^{(3)} = x_j - \alpha_j = \beta_j - \alpha_j.$$

Положим

$$\gamma_i = \begin{cases} \alpha_{s_i}, & \text{если } x_{ij} < 0, \\ \beta_{s_i}, & \text{если } x_{ij} > 0. \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m+1) \qquad (5.23)$$

В принятых обозначениях получаем следующую компактную запись формулы для вычисления θ_0:

$$\theta_0 = \min_{\substack{x_{ij} \neq 0 \\ 1 \leqslant i \leqslant m+1}} \frac{\gamma_i - x_{i0}}{x_{ij}}. \qquad (5.24)$$

Здесь, как и прежде, $x_{m+1,j} = -1$, $x_{m+1,0} = x_j = x_{s_{m+1}}$. При всех неотрицательных θ, не превышающих θ_0 из (5.24), элементарное преобразование относительно вектора A_j, для которого $x_j = \beta_j$ ($j \notin I_X$), переводит опорный план X в план $X(\theta)$ задачи (5.1) — (5.3). Доказательство этого утверждения полностью совпадает с доказательством аналогичного условия для первого случая, когда $x_j = \alpha_j$, и поэтому может быть опущено.

Число θ_0 будем в дальнейшем называть *параметром элементарного преобразования*.

Итак, формулы (5.14) и (5.22) при $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$, где θ_0 вычисляется соответственно из соотношений (5.21) и (5.24), полностью определяют элементарное преобразование, связанное с произвольным вектором условий A_j, $j \notin I_X$.

Проследим теперь за изменением линейной формы в результате элементарного преобразования, связанного с вектором A_j, $j \notin I_X$.

Учитывая соотношения (5.14) (для первого случая) и (5.22) (для второго случая), получаем

$$L[X(\theta)] - L(X) = \begin{cases} \theta \left(c_j - \sum\limits_{i=1}^{m} c_{s_i} x_{ij}\right) & \text{при} \quad x_j = \alpha_j, \\ \theta \left(\sum\limits_{i=1}^{m} c_{s_i} x_{ij} - c_j\right) & \text{при} \quad x_j = \beta_j. \end{cases}$$

В соответствии с определением оценок Δ_j (см. формулы (5.6) и (5.7)) приходим к следующему результату:

$$L[X(\theta)] - L(X) = -\theta\Delta_j. \qquad (5.25)$$

Формула (5.25) показывает, что параметр Δ_j естественно называть оценкой вектора A_j относительно плана X с данным базисом

$$A_{s_1}, \quad A_{s_2}, \ldots, A_{s_m}$$

или, короче, *относительной оценкой* A_j.

5.5. Перейдем к описанию общей схемы метода решения задачи линейного программирования с двухсторонними ограничениями.

В этом параграфе задача (5.1)—(5.3) предполагается невырожденной. В п. 4.7 гл. 2 определение невырожденности было дано применительно к задаче линейного программирования, записанной в произвольной форме. Нетрудно проверить (см. упражнение 5), что для задачи с двухсторонними ограничениями это определение может быть сформулировано следующим образом:

Опорный план задачи (5.1)—(5.3) называется *невырожденным*, если все его базисные компоненты удовлетворяют неравенствам (5.4).

Другими словами, опорный план задачи с двухсторонними ограничениями считается невырожденным, если m его компонент удовлетворяют условиям (5.4). Как обычно, под *невырожденной задачей* понимается задача, все опорные планы которой обладают свойством невырожденности. Процесс решения задачи (5.1)—(5.3) начинается с некоторого опорного плана и укладывается в конечное число однотипных итераций.

Опишем отдельную итерацию метода. Пусть $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — опорный план задачи (5.1)—(5.3) с базисом $A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m}$. План X задан или получен в результате предыдущих итераций. Каждая итерация может быть разбита на два этапа. На первом этапе план X проверяется на оптимальность. Для этого вычисляются относительные оценки Δ_j всех векторов A_j, не входящих в базис ($j \notin I_X$). В зависимости от принятого способа получения z_j следует воспользоваться первой или второй формой признака оптимальности.

Существуют три возможности:

1° Если все оценки Δ_j (см. формулу (5.7)) окажутся неотрицательными, план X является оптимальным, и процесс решения задачи на этом заканчивается.

Допустим теперь, что относительные оценки Δ_j некоторых векторов условий $A_j (j \notin I_X)$ отрицательны. Рассмотрим элементарные преобразования, связанные с каждым из таких векторов. Возможны еще два случая.

2° Среди указанных элементарных преобразований найдется по крайней мере одно, параметр θ_0 которого равен ∞.

3° Все рассматриваемые элементарные преобразования обладают конечным параметром θ_0.

Исследуем каждый из этих случаев.

Из формул (5.21) и (5.24) видно, что в случае 2° существует вектор A_k с отрицательной оценкой Δ_k, для которого

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{s_i} &= -\infty \text{ для всех } x_{ik}>0, \\ \beta_{s_i} &= \ \ \infty \text{ для всех } x_{ik}<0, \end{aligned}\right\} \quad i=1,2,\ldots,m+1,$$

если $x_k = \alpha_k$, и

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{s_i} &= -\infty \text{ для всех } x_{ik}<0, \\ \beta_{s_i} &= \ \ \infty \text{ для всех } x_{ik}>0, \end{aligned}\right\} \quad i=1,2,\ldots,m+1,$$

если $x_k = \beta_k$.

Очевидно, вектор $X(\theta)$, полученный в результате элементарного преобразования, связанного с вектором A_k, является планом задачи (5.1)—(5.3) при любом $\theta>0$. Поэтому формула (5.25) (при $j=k$) приводит к выводу о неограниченности линейной формы (5.1) на множестве планов задачи. Процесс решения задачи в этом случае заканчивается установлением ее неразрешимости. Отметим, что случай 2° невозможен, если все числа α_j и β_j конечны.

Если имеет место случай 3°, необходимо перейти ко второму этапу итерации. На втором этапе строится новый опорный план задачи (5.1)—(5.3), более близкий к оптимальному. Переход к новому плану производится посредством элементарного преобразования плана X, связанного с произвольным вектором A_k, имеющим отрицательную оценку Δ_k. Положим

$$X' = X(\theta_0),$$

где θ_0 — параметр выбранного элементарного преобразования. Компоненты вектора X' определяются по формулам (5.14), если $x_k = \alpha_k$, и по формулам (5.22), если $x_k = \beta_k$. Параметр θ_0 вычисляется по формулам (5.21) или (5.24) в зависимости от того, с какой из своих границ совпадает компонента x_k. Индекс j во всех этих соотношениях полагается равным k.

Условимся говорить, что θ_0 достигается на i-й позиции базиса (или на векторе A_{s_i}), если

$$\theta_0 = \begin{cases} \dfrac{x_{i0} - \gamma_i}{x_{ik}} & \text{при} \quad x_k = \alpha_k, \\ \dfrac{\gamma_i - x_{i0}}{x_{ik}} & \text{при} \quad x_k = \beta_k. \end{cases}$$

Здесь $i = 1, 2, \ldots, m, m+1$.

Напомним, что в $(m+1)$-й позиции базиса помещается вектор $A_k = A_{s_{m+1}}$, выбранный для введения в базис нового плана.

Допустим, что θ_0 достигается на r-й позиции базиса. Тогда, очевидно, компонента $x'_{s_r} = x_{s_r}(\theta_0)$ равна одному из своих граничных значений (α_r или β_r). Таким образом, составляющие плана X' с номерами $j \notin I_X$, $j \neq k$ и $j = s_r$ равны своим граничным значениям. Легко проверить, что векторы условий, отвечающие остальным переменным, линейно независимы. Действительно, при $r \neq m+1$ это следует из теоремы 2.1 настоящей главы. Если же $r = m+1$ (такой случай вполне возможен), то рассматриваемая система векторов является базисом опорного плана X и, следовательно, линейно независима.

Мы пришли к выводу, что новый план X' является опорным планом задачи. При $s_r = k$ базис плана X' совпадает с базисом плана X; при $s_r \neq k$ базис X' образуется из базиса X заменой вектора A_{s_r} на вектор A_k. Вектор A_k вводится в этом случае в r-ю позицию базиса.

Заметим, что в силу допущения о невырожденности задачи (5.1) — (5.3) величина θ_0 может достигаться только на одной позиции базиса. В противном случае опорный план X' оказался бы вырожденным. Следовательно, индекс r определяется в данном случае однозначно.

Из равенства (5.25) видно, что при переходе от опорного плана X к опорному плану X' линейная форма получает приращение

$$L(X')-L(X)=-\theta_0\Delta_k. \qquad (5.26)$$

Параметр элементарного преобразования θ_0 невырожденного плана положителен. Следовательно,

$$L(X')>L(X).$$

Второй этап итерации, а вместе с ней и вся итерация, завершается, таким образом, построением опорного плана X' с бо́льшим значением линейной формы.

5.6. Последовательные итерации проводятся до тех пор, пока будет получено искомое решение, либо будет установлена неразрешимость исследуемой задачи. В невырожденном случае каждая итерация приводит к увеличению линейной формы (5.1). Поэтому в процессе решения задачи мы все время движемся по различным опорным планам. Нетрудно видеть, что задача содержит не более $N=C_n^m\cdot 2^{n-m}$ опорных планов. Действительно, число базисов задачи (5.1)—(5.3) не превышает C_n^m, а каждому базису отвечает не больше 2^{n-m} опорных планов (внебазисные переменные могут равняться либо α_j, либо β_j). Поэтому процесс решения невырожденной задачи не может состоять более чем из N итераций. В § 6 будет показано, что и в вырожденном случае метод последовательного улучшения плана за конечное число шагов приводит к решению задачи или к установлению ее неразрешимости.

В заключение параграфа повторим кратко последовательность действий, связанных с отдельной итерацией метода. На первом этапе итерации опорный план X исследуется на оптимальность. Признак оптимальности опорного плана состоит в неотрицательности параметров Δ_j для всех j. Относительные оценки Δ_j выражаются либо через коэффициенты разложения векторов условий по векторам базиса, либо через составляющие вектора Λ.

Первый этап приводит к одной из трех возможностей (случаи 1°, 2°, 3°). Если имеет место случай 1°, опорный план X является решением задачи. Случай 2° указывает на неограниченность сверху линейной формы задачи на множестве ее планов. В обоих случаях процесс решения задачи заканчивается. В случае 3° следует перейти ко второму этапу итерации. На этом этапе строится новый опорный план, увеличивающий значение линейной формы задачи. Построение нового плана производится посредством элементарного преобразования, связанного с некоторым вектором A_k, имеющим отрицательную оценку Δ_k относительно старого плана. Мы видим, таким образом, что наличие двухсторонних ограничений почти не сказывается на трудоемкости отдельной итерации метода последовательного улучшения плана.

§ 6. Вырожденность

6.1. До сих пор изложение метода последовательного улучшения плана проводилось в предположении о невырожденности исследуемой задачи. В настоящем параграфе метод улучшения плана распространяется на общий случай. Это сделает его применимым как к невырожденным, так и к вырожденным задачам линейного программирования. Поскольку каноническая форма общей задачи линейного программирования является частным случаем задачи с двухсторонними ограничениями, все рассуждения (если не оговорено противное) будут проводиться применительно к задаче (5.1)—(5.3).

Вырожденный опорный план задачи (5.1)—(5.3) характеризуется тем, что некоторые его базисные компоненты равны своим граничным значениям (α_j или β_j). Любой невырожденный опорный план обладает единственным базисом, состоящим из векторов условий, при которых стоят компоненты, удовлетворяющие неравенствам (5.4). В вырожденном случае один и тот же опорный план может иметь несколько базисов. Например, если опорный план задачи линейного программирования (1.1)—(1.3) имеет $\nu<m$ положительных составляющих, то его базис образуется из ν векторов условий, отвечающих этим составляющим, и $m-\nu$ векторов условий, связанных с нулевыми компонентами плана. При этом единственное требование, предъявленное дополнительным $m-\nu$ векторам, состоит в том, чтобы полученная система m векторов условий была линейно независима. Очевидно, количество различных базисов рассматриваемого опорного плана задачи (1.1)—(1.3) ограничено числом $C_{n-\nu}^{m-\nu}$, причем существуют такие задачи, для которых указанная оценка достигается. Аналогичное утверждение имеет место и для задач с двухсторонними ограничениями (см. упражнение 6).

Проследим за всеми этапами отдельной итерации метода последовательного улучшения плана и выявим места, в которых использовалось предположение о невырожденности задачи.

Итак, пусть

$$X=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$$

— опорный план задачи (5.1)—(5.3) с базисом $A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m}$. При проведении первого этапа итерации предположение о невырожденности плана X не было использовано. На втором этапе итерации мы дважды воспользовались невырожденностью исследуемой задачи:

1) при вычислении значения θ_0;

2) при выборе вектора, подлежащего исключению из базиса (или, что то же самое, при выборе позиции базиса, в которую следует поместить вводимый вектор).

Рассмотрим каждый из этих случаев:

1. При вырожденности плана X величина θ_0 может оказаться равной нулю. Если компонента при вводимом векторе A_k равна α_k, то это имеет место, когда для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant m$,

$$x_{i0} = x_{s_i} = \alpha_{s_i}, \quad x_{ik} > 0,$$

либо

$$x_{i0} = x_{s_i} = \beta_{s_i}, \quad x_{ik} < 0$$

(см. формулу (5.21)).

При $x_k = \beta_k$ $\theta_0 = 0$, если для некоторого i

$$x_{i0} = x_{s_i} = \alpha_{s_i}, \quad x_{ik} < 0,$$

либо

$$x_{i0} = x_{s_i} = \beta_{s_i}, \quad x_{ik} > 0$$

(см. формулу (5.24)).

Если $\theta_0 = 0$, то новый опорный план X' совпадает со старым планом X. В результате итерации изменяется лишь базис этого плана.

2. Опорный план X' невырожденной задачи (5.1)—(5.3), который образуется в результате улучшения плана X, является невырожденным планом.

Отсюда вытекает, что величина θ_0 достигается только на одном векторе условий A_{s_r} (на одной позиции r базиса). Однозначно определяемый вектор A_{s_r} исключается из базиса. В общем случае величина θ_0 может достигаться на нескольких векторах. Один из этих векторов должен быть исключен из базиса.

Если в течение ряда последовательных итераций $\theta_0 = 0$, то процесс решения задачи в пределах этих итераций состоит в движении по базисам одного и того же опорного плана. Поскольку значение линейной формы задачи, естественно, остается неизменным, нет основания утверждать, что движение осуществляется по различным базисам задачи.

В § 9 гл. 5 будет приведена задача линейного программирования, при решении которой возможно образование так называемого *цикла*, т. е. периодического возвращения через несколько итераций к одному и тому же базису. Очевидно, процесс решения такой задачи может никогда не закончиться. Однако, как будет показано, небольшое уточнение метода позволяет полностью исключить возможность зацикливания (образования цикла). Оказывается, если выбор исключаемого вектора из числа векторов, на которых достигается θ_0, осуществлять особым образом, то в процессе решения мы всегда будем двигаться по различным базисам задачи и, следовательно, через конечное число итераций получим ее оптимальный план.

6.2. Прежде чем перейти к построению правила исключения вектора из базиса, приведем геометрическую иллюстрацию явления вырожденности.

Обратимся вначале к первой геометрической интерпретации задачи. Рассмотрим произвольный опорный план $\overline{X}=(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ задачи с двухсторонними ограничениями (5.1)—(5.3). Будем для определенности предполагать, что первые ν компонент, $\nu \leqslant m$, этого плана удовлетворяют условию (5.4). Опорному плану $\overline{X}$ соответствует вершина $\overline{X}$ многогранного множества условий. Вершина $\overline{X}$ является пересечением $m+n-\nu$ гиперплоскостей, из которых первые m определяются условиями (5.2), а остальные $n-\nu$ уравнениями

$$x_j=\overline{x}_j=\overline{\gamma}_j, \qquad j=\nu+1, \ldots, n, \tag{6.1}$$

где $\overline{\gamma}_j$ равно α_j либо β_j.

Если $\nu=m$, то вершина $\overline{X}$ принадлежит ровно n гиперплоскостям. Если же $\nu<m$, то число гиперплоскостей, пересекающихся в вершине, превышает размерность n пространства.

Итак, геометрически вырожденность опорного плана состоит в том, что в соответствующей ему вершине пересекается более, чем n гиперплоскостей (n — число переменных задачи).

Рассмотрим произвольный базис плана $\overline{X}$

$$A_1, A_2, \ldots, A_\nu, A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_{m-\nu}},$$

где $\nu+1 \leqslant j_s \leqslant n$, $s=1, 2, \ldots, m-\nu$. Выбор этого базиса геометрически означает, что вершина, отвечающая плану $\overline{X}$, рассматривается как пересечение ровно n независимых гиперплоскостей, из которых первые m, как обычно, определяются условиями (5.2), а остальные $n-m$ являются гиперплоскостями вида (6.1) при $j \neq j_s$, $s=1, 2, \ldots, m-\nu$. При $\nu<m$ может существовать несколько таких систем гиперплоскостей, а следовательно, и несколько базисов плана $\overline{X}$.

Пусть A_j — произвольный вектор условий, не принадлежащий рассматриваемому базису плана $\overline{X}$. Исключим из системы гиперплоскостей, отвечающей базису, гиперплоскость $x_j=\overline{\gamma}_j$. Общая часть оставшихся гиперплоскостей образует прямую, проходящую через точку $\overline{X}$. Будем говорить, что луч, проведенный из точки $\overline{X}$ вдоль этой прямой в сторону многогранного множества задачи, *соответствует* вектору A_j. Подобное определение применительно к канонической форме задачи линейного программирования было дано в § 4.

Элементарное преобразование плана $\overline{X}$, отвечающее вектору A_j, геометрически эквивалентно движению по этому лучу. Если в невырожденном случае пересечение любого такого луча с многогранным множеством условий обязательно содержит некоторый отрезок, то в вырожденном случае оно может состоять лишь из одной точки $\overline{X}$. Тогда любой сколь угодно малый сдвиг вдоль выбранного луча приводит к точке, не принадлежащей области определения задачи.

Допустим, что в результате проведения первого этапа итерации мы выбрали для включения в базис вектор A_k. Линейная форма задачи возрастает вдоль луча, соответствующего этому вектору. Если по этому лучу возможен сдвиг, не выводящий из многогранного множества условий ($\theta_0>0$), то в результате второго этапа получим новый опорный план, связанный с бо́льшим значением линейной формы задачи. Если же такой сдвиг невозможен ($\theta_0=0$), то остаемся в той же вершине $\overline{X}$. При этом в результате проведения второго этапа итерации изменится лишь базис плана $\overline{X}$. В множестве гиперплоскостей, отвечающих старому базису, гиперплоскость $x_k=\overline{x}_k$ заменится одной из гиперплоскостей вида (6.1) при $j=j_s$, $s=1, 2, \ldots, m-\nu$. Если не уточнять, какая из этих гиперплоскостей должна войти в систему, отвечающую новому базису, то через несколько итераций можно прийти к уже раз пройденной системе гиперплоскостей, т. е. получить цикл.

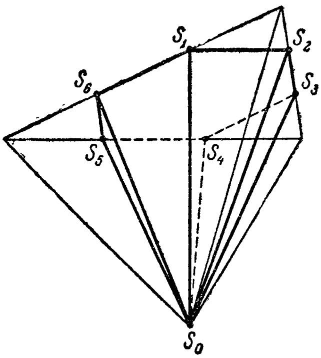


Рис. 4.7.

Для лучшего уяснения геометрического смысла явления вырожденности рассмотрим задачу линейного программирования, многогранником условий которой является правильная шестигранная пирамида (рис. 4.7) (предполагается, что условия задачи приведены к форме неравенств).

Вершина S_0 многогранника условий соответствует вырожденному опорному плану задачи. Рассмотрим шесть плоскостей, содержащих грани, которые пересекаются в точке S_0. Любые три из них отвечают некоторому базису опорного плана, определяемого вершиной S_0. Таким образом, данный опорный план имеет $C_6^3=20$ различных базисов.

Рассмотрим, например, базис, соответствующий граням $S_1S_0S_2$, $S_3S_0S_4$, $S_5S_0S_6$. Линии пересечения любой пары плоскостей, содержащих эти грани, имеют лишь одну общую точку с многогранником условий (точка S_0). Поэтому в результате одной итерации мы обязательно останемся в точке S_0, т. е. перейдем от одного базиса данного плана к другому базису того же плана. То же самое справедливо для базиса, соответствующего граням $S_2S_0S_3$, $S_4S_0S_5$, $S_6S_0S_1$.

Очевидно, любая другая тройка из шести рассматриваемых плоскостей определяет хотя бы одно направление, имеющее общий отрезок с многогранником условий. С другой стороны, в любой такой тройке имеется пара плоскостей, которая пересекается по прямой, обладающей единственной общей точкой с многогранником. Таким образом, от любого другого базиса рассматриваемого плана за одну итерацию можно перейти как к базису того же плана, так и к базису нового опорного плана задачи.

6.3. Поясним теперь смысл вырожденности в терминах второй геометрической интерпретации задачи (см. § 5 гл. 2 и § 4 настоящей главы). Поскольку вторая геометрическая интерпретация вводилась лишь для задач линейного программирования, записанных в канонической форме, ограничимся рассмотрением задачи (1.1)—(1.3).

Итак, пусть
$$\overline{X}=(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$$
— некоторый опорный план задачи (1.1)—(1.3). Предположим, для определенности, что его базис состоит из первых m векторов условий. В таком случае
$$\overline{x}_{m+1}=\ldots=\overline{x}_n=0.$$
Допустим, что первые ν базисных компонент плана $\overline{X}$ положительны, а остальные — нули.

При $\nu<m$ опорный план $\overline{X}$ оказывается вырожденным. Плану $\overline{X}$ отвечает некоторая точка P, лежащая на пересечении оси Q и конуса K данной задачи. Эта точка расположена также в конусе $K_{\overline{X}}$ размерности m, порожденном расширенными векторами базиса плана $\overline{X}$. Если $\nu<m$, то точка P лежит на границе конуса $K_{\overline{X}}$ (точнее, внутри его грани размерности ν, которая является конусом, порожденным первыми ν расширенными векторами условий).

Допустим, что вектор A_k выбран для включения в базис. Тогда, как мы видели (§ 4), новый опорный план соответствует верхней точке пересечения оси Q с конусом K_k, порожденным векторами $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_m, \overline{A}_k$. В случае невырожденности плана $\overline{X}$ ($\nu=m$) общая часть оси Q и конуса K_k является отрезком (задача предполагается разрешимой). Поэтому верхняя точка пересечения Q и K_k отличается от нижней точки P. Если же план $\overline{X}$ — вырожденный, то может оказаться, что ось Q и конус K_k имеют лишь одну общую точку (точку P), которая лежит на границе конуса $K_{\overline{X}}$ — одной из граней конуса K_k. В этом случае верхняя точка пересечения сливается с нижней точкой P, и мы получаем тот же самый опорный план $\overline{X}$.

При $m=2$ все сказанное приобретает геометрическую наглядность. Рассмотрим задачу линейного программирования, геометрический эквивалент которой изображен на рис. 4.8. Опорный план этой задачи с базисом A_1, A_5, очевидно, вырожденный, так как ось Q проходит через сторону $O\overline{A}_5$ угла $\overline{A}_1O\overline{A}_5$. Включение в базис вектора A_4 не приводит к увеличению линейной формы задачи, поскольку ось Q и конус, образованный векторами $\overline{A}_1$, $\overline{A}_5$, $\overline{A}_4$, имеют единственную общую точку (точку P). Что касается вектора A_3, то его включение в базис увеличивает линейную форму (общая часть конуса, составленного векторами $\overline{A}_1$, $\overline{A}_5$, $\overline{A}_3$, и оси Q является отрезком PP').

Приведенное геометрическое истолкование явления вырожденности указывает пути устранения опасности зацикливания. Вырожденность задачи означает, что ось Q пересекает хотя бы один из многогранных конусов, порожденных не более чем $m-1$ расширенными векторами условий. Геометрически очевидно, что некоторое малое смещение прямой Q параллельно самой себе позволяет избавиться от всех таких пересечений, т. е. позволяет превратить задачу в невырожденную, в которой цикл, естественно, невозможен. Смещение прямой Q связано с изменением вектора ограничений B, однозначно определяющего ее положение. Поэтому устранить опасность зацикливания можно с помощью соответствующим образом подобранного небольшого изменения вектора B. На этой идее основан способ получения правила вывода векторов из базиса, гарантирующего от возможности возникновения цикла.

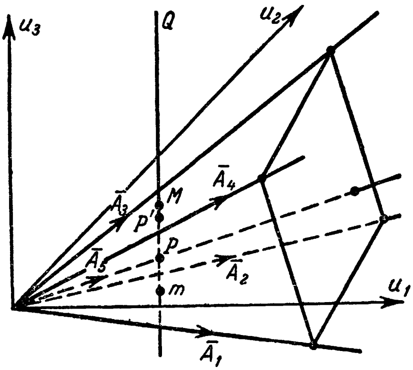


Рис. 4.8.

6.4. Правило, к установлению которого мы переходим, было получено в работе Чарнеса [117] для задачи линейного программирования, записанной в канонической форме.

Пусть $\varepsilon>0$ и $R_1, R_2, \ldots, R_m$ — произвольная линейно независимая система m-мерных векторов. Введем в рассмотрение следующую задачу линейного программирования:

Требуется обратить в максимум линейную форму

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{6.2}$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j A_j = B(\varepsilon), \tag{6.3}$$

$$\alpha_j \leqslant x_j \leqslant \beta_j, \qquad j=1, 2, \ldots, n. \tag{6.4}$$

Здесь

$$B(\varepsilon) = B + \sum_{j=1}^{m} \varepsilon^j R_j. \tag{6.5}$$

Задача (6.2)—(6.4) отличается от задачи (5.1)—(5.3) лишь вектором ограничений, который образуется из вектора B с помощью системы $R_1, R_2, \ldots, R_m$ и числа ε.

Таким образом, с каждой задачей линейного программирования (5.1)—(5.3) связывается целое семейство задач вида (6.2)—(6.4). Представителей этого семейства будем называть ε-задачами.

Дальнейшие рассмотрения будут основываться на двух утверждениях относительно ε-задач.

Теорема 6.1. *Существует такое $\varepsilon_1>0$, что ε-задача* (6.2)—(6.4) *при $0<\varepsilon<\varepsilon_1$ является невырожденной.*

Доказательство. Пусть $A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m}$ — произвольная линейно независимая система векторов условий. Множество индексов этих векторов обозначим через I. Свяжем с системой векторов A_j, $j \in I$ набор n-мерных векторов $X(\varepsilon)$, удовлетворяющих условиям (6.3) и таких, что $x_j(\varepsilon)$ при $j \notin I$ равно либо α_j, либо β_j.

В соответствии с условиями (6.3) и (6.5)

$$\sum_{j\in I} x_j(\varepsilon) A_j = B + \sum_{j=1}^{m} \varepsilon^j R_j - \sum_{j \notin I} \gamma_j A_j,$$

где $\gamma_j = x_j(\varepsilon)$ равно либо α_j, либо β_j. Отсюда получаем

$$x_{s_i}(\varepsilon) = \bar{b}_i - \sum_{j\notin I} \gamma_j \bar{a}_{ij} + \sum_{j=1}^{m} \varepsilon^j \bar{r}_{ij}. \tag{6.6}$$

Здесь через $\bar{b}_i$, $\bar{a}_{ij}$, $\bar{r}_{ij}$ обозначены коэффициенты при A_{s_i} разложения векторов B, A_j, R_j соответственно по системе A_j, $j \in I$. Заметим, что ни один из многочленов $x_{s_i}(\varepsilon)$ не является тождественной постоянной. Действительно, квадратная матрица $\|\bar{r}_{ij}\|_m$ образована в результате перемножения матриц $(A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m})^{-1}$ и $\|r_{ij}\|_m = (R_1, R_2, \ldots, R_m)$, каждая из которых имеет отличный от нуля определитель. Поэтому определитель матрицы $\|\bar{r}_{ij}\|_m$ также отличен от нуля, и, следовательно, ни одна из строк этой матрицы не может состоять сплошь из нулей.

Итак, при любом i среди чисел $\bar{r}_{ij}$, $j=1, 2, \ldots, m$, имеются ненулевые, т. е. многочлен $x_{s_i}(\varepsilon) \not\equiv \mathrm{const}$. Отсюда вытекает, что многочлены $x_{s_i}(\varepsilon) - \alpha_{s_i}$ и $\beta_{s_i} - x_{s_i}(\varepsilon)$ не равны тождественно нулю. Всякий (отличный от тождественного нуля) многочлен степени, не большей m, имеет не более чем m положительных корней.

Обозначим минимальный из положительных корней многочленов $x_{s_i}(\varepsilon) - \alpha_{s_i}$ и $\beta_{s_i} - x_{s_i}(\varepsilon)$ через $\eta_i(I, \gamma_j)$. Если они не имеют положительных корней, полагаем $\eta_i = \infty$. Пусть наименьшее из $\eta_i(I, \gamma_j)$, $i=1, 2, \ldots, m$, равно $\eta(I, \gamma_j)$. Величина $\eta(I, \gamma_j)$ определяется системой линейно независимых векторов A_j, $j \in I$, и числами γ_j, $j \notin I$. Из n векторов условий можно составить конечное число различных систем по m векторов. При фиксированном I существует не более чем 2^{n-m} различных наборов γ_j, $j \notin I$. Поэтому величина

$$\varepsilon_1 = \min \eta(I, \gamma_j),$$

где минимум берется по всевозможным системам линейно независимых векторов A_j, $j \in I$ и наборам чисел γ_j, равных α_j или β_j, $j \notin I$, положительна.

Пусть теперь $0<\varepsilon<\varepsilon_1$. Рассмотрим произвольный опорный план ε-задачи с базисом $A_{s_1}, \ldots, A_{s_m}$. Легко видеть, что он является невырожденным. В самом деле, если бы при некотором i базисная компонента $x_{s_i}(\varepsilon)$ равнялась α_{s_i} либо β_{s_i}, то один из многочленов

$$x_{s_i}(\varepsilon)-\alpha_{s_i}, \quad \beta_{s_i}-x_{s_i}(\varepsilon)$$

имел бы корнем ε.

С другой стороны, согласно определению ε_1 положительные корни этих многочленов не могут быть меньшими $\varepsilon_1>\varepsilon$.

Итак, базисные компоненты произвольного опорного плана ε-задачи при $0<\varepsilon<\varepsilon_1$ лежат строго между своими граничными значениями, что, по определению, означает невырожденность задачи (6.2)—(6.4).

Теорема доказана.

Теорема 6.2. *Существует такое $\varepsilon_2>0$, что если*

$$0<\varepsilon<\varepsilon_2$$

и $X(\varepsilon)=(x_1(\varepsilon), \ldots, x_n(\varepsilon))$ — произвольный опорный план ε-задачи с базисом $A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m}$, то вектор $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_j=x_j(\varepsilon)$ при $j \neq s_i$, $i=1, 2, \ldots, m$, а остальные m компонент определяются из системы уравнений (5.2), *является опорным планом задачи* (5.1)—(5.3). *При этом если $X(\varepsilon)$ — оптимальный план ε-задачи, то план X оказывается решением задачи* (5.1)—(5.3).

Доказательство. Рассмотрим произвольную систему m линейно независимых векторов условий A_j, $j \in I=(s_1, s_2, \ldots, s_m)$. Пусть n-мерный вектор X удовлетворяет условиям (5.2). Пусть, кроме того, при $j \notin I$ $x_j=\gamma_j$ равняется α_j либо β_j. Тогда в соответствии с равенством (6.6)

$$x_{s_i}=\bar{b}_i-\sum_{j \notin I}\gamma_j\bar{a}_{ij}, \qquad i=1, 2, \ldots, m. \tag{6.7}$$

Обозначим наименьшее из положительных чисел $x_{s_i}-\beta_{s_i}$, $\alpha_{s_i}-x_{s_i}$ через $\xi_i(I, \gamma_j)$. Если $\alpha_{s_i} \leqslant x_{s_i} \leqslant \beta_{s_i}$, полагаем $\xi_i(I, \gamma_j)=\infty$. Пусть

$$\xi(I, \gamma_j)=\min_{1 \leqslant i \leqslant m} \xi_i(I, \gamma_j).$$

Величина $\xi(I, \gamma_j)$ определяется системой векторов A_j, $j \in I$, и набором чисел γ_j, $j \notin I$, каждое из которых может принимать не более двух значений (α_j, β_j). Поэтому

$$\xi=\min_{I, \gamma_j} \xi(I, \gamma_j),$$

как наименьшее из конечного числа положительных чисел, является также положительным числом.

Введем число $r(I)$, равное модулю наибольшего по абсолютной величине элемента матрицы $\|\overline{r}_{ij}\|_m$ коэффициентов разложения векторов $R_1, R_2, \ldots, R_m$ по системе $\overline{A}_j$, $j \in I$.

Пусть

$$r = \max_I r(I).$$

Очевидно, $r > 0$. Положим

$$\varepsilon_2' = \min\left(\frac{\xi}{rm},\ 1\right) > 0.$$

Покажем, что при любом ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon_2'$, каждому опорному плану ε-задачи отвечает опорный план задачи (5.1)—(5.3), имеющий тот же базис и те же значения внебазисных переменных.

Пусть базисом опорного плана ε-задачи $X(\varepsilon) = (x_1(\varepsilon), \ldots, x_n(\varepsilon))$ является система векторов $A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m}$. Вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ удовлетворяет системе равенств (5.2), причем $x_j = x_j(\varepsilon) = \gamma_j$ для $j \notin I$. Базисные компоненты плана $X(\varepsilon)$, определяемые согласно (6.6) равенствами

$$x_{s_i}(\varepsilon) = \overline{b}_i - \sum_{j \notin I} \gamma_j \overline{a}_{ij} + \sum_{j=1}^{m} \varepsilon^j \overline{r}_{ij} = x_{s_i} + \sum_{j=1}^{m} \varepsilon^j \overline{r}_{ij}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \quad (6.8)$$

удовлетворяют условиям

$$\alpha_{s_i} \leqslant x_{s_i}(\varepsilon) \leqslant \beta_{s_i}.$$

Проверим, что

$$\alpha_{s_i} \leqslant x_{s_i} = \overline{b}_i - \sum_{j \notin I} \gamma_j \overline{a}_{ij} \leqslant \beta_{s_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \quad (6.9)$$

Действительно, если это не так и при некотором $i = k$ компонента x_{s_k} расположена, например, левее α_{s_k}, то имеем

$$x_{s_k}(\varepsilon) = x_{s_k} + \sum_{j=1}^{m} \varepsilon^j \overline{r}_{kj} \leqslant \alpha_{s_k} - \xi + \sum_{j=1}^{m} \varepsilon^j \overline{r}_{kj} \leqslant \alpha_{s_k} - \xi + r \sum_{j=1}^{m} \varepsilon^j \leqslant$$
$$\leqslant \alpha_{s_k} - \xi + mr\varepsilon < \alpha_{s_k}.$$

Первое и второе неравенства следуют из определения чисел ξ и r соответственно. Третье и четвертое неравенства вытекают из определения $\varepsilon_2' > \varepsilon$.

Полученная цепочка соотношений приводит к неравенству

$$x_{s_k}(\varepsilon) < \alpha_{s_k},$$

противоречащему тому, что $x_{l_k}(\varepsilon)$ — компонента плана ε-задачи. Итак,

$$x_{s_i} \geqslant \alpha_{s_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Аналогично проверяется справедливость правых ограничений системы неравенств (6.9).

Таким образом, вектор X удовлетворяет как условиям (5.2), так и условиям (5.3) и, следовательно, является планом задачи (5.1)—(5.3). По определению вектора X его компоненты x_j при $j \notin I$ равны своим граничным значениям. Поэтому X—опорный план задачи (5.1)—(5.3) с базисом $A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m}$.

Допустим теперь, что $X(\varepsilon)$—оптимальный план ε-задачи. Будем предполагать, что $0<\varepsilon<\varepsilon_1$. По теореме 6.1 ε-задача—невырожденная. Следовательно, вектор $\Lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$, определяемый из условий

$$(\Lambda, A_j)=c_j, \quad j \in I, \tag{6.10}$$

удовлетворяет неравенству

$$(\Lambda, A_j) \geqslant c_j, \tag{6.11}$$

если $j \notin I$ и $x_j(\varepsilon)=x_j=\alpha_j$, или неравенству

$$(\Lambda, A_j) \leqslant c_j, \tag{6.11'}$$

если $j \notin I$ и $x_j(\varepsilon)=x_j=\beta_j$.

Действительно, в случае нарушения неравенств (6.11) и (6.11′) мы могли бы в результате одной итерации метода улучшения плана увеличить значение линейной формы невырожденной ε-задачи.

Поскольку опорные планы X и $X(\varepsilon)$ имеют один и тот же базис, соотношения (6.10), (6.11) и (6.11′) могут рассматриваться применительно к плану X как условия второй формы признака оптимальности. Поэтому план X—решение задачи (5.1)—(5.3).

Таким образом, в качестве числа ε_2, фигурирующего в условии теоремы 6.2, можно принять

$$\varepsilon_2=\min\left\{\varepsilon_2', \varepsilon_1\right\}>0.$$

Теорема доказана полностью.

6.5. Установленные свойства семейства ε-задач, связанного с задачей (5.1)—(5.2), позволяют предложить следующий путь решения такой задачи, не оговаривая ее невырожденности. Вместо исходной задачи (5.1)—(5.3) рассматривается связанная с ней ε-задача при $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, где

$$\varepsilon_0=\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}=\varepsilon_2.$$

Будем предполагать, что множество планов этой ε-задачи непусто. В силу теоремы 6.1 ($0<\varepsilon<\varepsilon_1$) рассматриваемая ε-задача невырожденная. Поэтому метод последовательного улучшения плана позволяет за конечное число итераций получить ее опорное решение.

В силу теоремы 6.2 ($0<\varepsilon<\varepsilon_2$) базис построенного решения является вместе с тем базисом оптимального плана задачи (5.1)—(5.3). Внебазисные компоненты этого плана равны соответствующим составляющим решения ε-задачи. Следовательно, для получения базисных компонент искомого оптимального плана достаточно разложить вектор

$$B-\sum_{j \notin I^*} x_j^*(\varepsilon) A_j$$

по системе A_j, $j \in I^*$. Здесь I^*—совокупность индексов векторов условий, составляющих базис решения ε-задачи

$$X^*(\varepsilon)=(x_1^*(\varepsilon),\ x_2^*(\varepsilon),\ \ldots,\ x_n^*(\varepsilon)).$$

Мы предполагали рассматриваемую ε-задачу разрешимой. Отметим, что если процесс решения ε-задачи завершится случаем 2°, указывающим на ее неразрешимость, то это будет означать неразрешимость исследуемой задачи (5.1)—(5.3). Доказательство указанного факта вытекает из утверждения, сформулированного в упражнении 7. Для использования ε-приема вовсе не обязательно определять число ε_0. Важно было лишь установить существование этого числа.

Процесс решения ε-задачи можно проводить при произвольном достаточно малом ε. Для определения решения задачи (5.1)—(5.3) достаточно в оптимальном плане ε-задачи положить $\varepsilon=0$.

Поскольку каждому опорному плану ε-задачи при $0<\varepsilon<\varepsilon_2$ соответствует опорный план задачи (5.1)—(5.3) с тем же базисом (теорема 6.2), то процесс решения ε-задачи индуцирует движение по опорным планам задачи (5.1)—(5.3), приводящее за конечное число итераций к ее решению. Установим правила, позволяющие осуществить это движение, не рассматривая семейства ε-задач.

Пусть $X=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$—некоторый опорный план задачи (5.1)—(5.3) с базисом $A_{s_1},\ A_{s_2},\ \ldots,\ A_{s_m}$. Допустим, что вектор $X(\varepsilon)$, где $x_j(\varepsilon)=x_j$ для $j\notin I_X$, является планом ε-задачи при $0<\varepsilon<\varepsilon_0$. Если применить к ε-задаче метод последовательного улучшения плана, отправляясь от опорного плана $X(\varepsilon)$, то за конечное число итераций, пройдя через планы $X^{(1)}(\varepsilon),\ X^{(2)}(\varepsilon),\ \ldots,\ X^{(N)}(\varepsilon)$, мы построим ее решение $X^*(\varepsilon)$. Тот же процесс можно реализовать движением по опорным планам $X^{(t)}(0)=X^{(t)}$, $t=1,\ 2,\ \ldots,\ N$ задачи (5.1)—(5.3), приводящим к ее решению $X^*(0)=X^*$.

Проследим за этим движением на примере перехода от плана X к плану $X^{(1)}$. По условию, базисы планов X и $X(\varepsilon)$ и их внебазисные компоненты совпадают. Поэтому первый этап итерации можно проводить, отправляясь от плана X. При анализе второго этапа будем, как и при описании метода решения задач с двухсторонними ограничениями, различать две возможности.

1. Компонента при векторе A_k, выбранном для включения в новый базис, равна своему левому граничному значению α_k. Для определения вектора, подлежащего удалению из базиса, вычисляется в соответствии с формулой (5.21)

$$\theta_0(\varepsilon)=\min_{\substack{x_{ik}\neq 0\\ 1\leqslant i\leqslant m+1}}\frac{x_{i0}(\varepsilon)-\gamma_i}{x_{ik}}. \tag{6.12}$$

Подставляя в (6.12) вместо $x_{i0}(\varepsilon)=x_{s_i}(\varepsilon)$, $i=1,\ \ldots,\ m+1$, его выражение из (6.8), имеем

$$\theta_0(\varepsilon)=\min_{\substack{x_{ik}\neq 0\\ 1\leqslant i\leqslant m+1}}\frac{x_{i0}+\sum\limits_{j=1}^{m}\varepsilon^j\bar{r}_{ij}-\gamma_i}{x_{ik}}. \tag{6.13}$$

Здесь, как и ранее, через $\bar{r}_{ij}$, $i=1, 2, \ldots, m$, обозначены коэффициенты разложения вектора R_j, $j=1, 2, \ldots, m$, по системе A_{s_1}, A_{s_2}, ..., A_{s_m}, образующей базис планов X и $X(\varepsilon)$. Заметим, что $\bar{r}_{m+1,j}=0$, $j=1, 2, \ldots, m$, так как $x_{m+1,0}(\varepsilon)=x_k(\varepsilon)=x_k$.

Поскольку ε-задача — невырожденная, существует единственный индекс r, на котором достигается $\theta_0(\varepsilon)$. Вектор A_k вводится в r-ю позицию базиса вместо вектора A_{s_r}, расположенного там прежде.

Соотношение (6.13) показывает, что индекс r при достаточно малом ε может быть найден следующим образом. Определим рекуррентно последовательность множеств индексов i:

$$E_0 \supseteq E_1 \supseteq \ldots \supseteq E_t.$$

Положим E_0 равным совокупности индексов i, на которых достигается

$$\theta_0 = \min_{\substack{x_{ik}\neq 0\\ 1\leq i\leq m+1}} \frac{x_{i0}-\gamma_i}{x_{ik}}. \tag{6.14}$$

Если множество E_d состоит более чем из одного элемента, то введем множество E_{d+1}, включив в него те индексы $i\in E_d$, на которых достигается

$$\min_{i\in E_d} \frac{\bar{r}_{i,d+1}}{x_{ik}}. \tag{6.15}$$

В противном случае обрываем процесс построения множеств. Таким образом, процесс образования множеств E_d заканчивается получением множества E_t, состоящего из одного элемента. Из формулы (6.13) следует, что при достаточно малом $\varepsilon>0$ указанная последовательность действий приводит к отысканию индекса r, на котором достигается $\theta_0(\varepsilon)$. В силу невырожденности ε-задачи $\theta_0(\varepsilon)$ достигается на единственном индексе и поэтому, образовав не более чем $m+1$ множеств E_d, мы получим множество E_t, содержащее единственный элемент r — номер позиции базиса, в которую следует поместить вектор A_k.

2. Компонента при векторе A_k, выбранном для введения в новый базис, равна своему правому граничному значению β_k. Для выявлений вектора, удаляемого из базиса, следует подсчитать (см. (5.24))

$$\theta_0(\varepsilon) = \min_{\substack{x_{ik}\neq 0\\ 1\leq i\leq m+1}} \frac{\gamma_i - x_{i0}(\varepsilon)}{x_{ik}}. \tag{6.16}$$

Соотношение (6.16) может быть переписано в виде

$$\theta_0(\varepsilon) = \min_{\substack{x_{ik}\neq 0\\ 1\leq i\leq m+1}} \frac{\gamma_i - x_{i0} - \sum_{j=1}^{m} \varepsilon^j \bar{r}_{ij}}{x_{ik}}. \tag{6.17}$$

Отсюда, как и в первом случае, непосредственно вытекает, что номер r позиции базиса, в которую следует поместить вектор A_k, может быть определен следующим образом. Составляем множество E_0 из индексов i, на которых достигается

$$\theta_0 = \min_{\substack{x_{ik} \neq 0 \\ 1 \leqslant i \leqslant m+1}} \frac{\gamma_i - x_{i0}}{x_{ik}}. \tag{6.18}$$

Затем рекуррентно определяем последовательность множеств $\{E_d\}$:

$$E_0 \supseteq E_1 \supseteq \ldots \supseteq E_t.$$

Если E_d уже определено и содержит более одного элемента, то E_{d+1} состоит из индексов $i \in E_d$, на которых достигается

$$\max_{i \in E_d} \frac{\bar{r}_{i,\,d+1}}{x_{ik}}. \tag{6.19}$$

Если E_d состоит из единственного элемента, то процесс образования множеств заканчивается ($E_d = E_t$). Последовательность множеств E_d, состоящая не более чем из $m+1$ множеств, обязательно оканчивается множеством E_t, содержащим единственный элемент r—номер искомой позиции базиса.

Приведенное правило для отыскания удаляемого из базиса вектора гарантирует от образования цикла в процессе решения задачи (5.1)—(5.3). Таким образом, это правило позволяет во всех случаях получить решение задачи (5.1)—(5.3) методом последовательного улучшения плана за конечное число итераций.

Подчеркнем еще раз, что для реализации правила необходимо:

1) выделить такую линейно независимую систему векторов $R_1, R_2, \ldots, R_m$, чтобы для достаточно малого $\varepsilon > 0$ вектор $X(\varepsilon)$, соответствующий исходному плану X, являлся планом ε-задачи;

2) иметь коэффициенты разложения векторов $R_1, R_2, \ldots, R_m$ по любому текущему базису.

При описании алгоритмов, реализующих метод последовательного улучшения плана, мы всякий раз будем указывать наиболее целесообразный (с вычислительной точки зрения) вид системы векторов $R_1, R_2, \ldots, R_m$.

6.6. Каноническая форма задачи линейного программирования является частным случаем задачи с двухсторонними ограничениями ($\alpha_j = 0$, $\beta_j = \infty$). Поэтому для задачи (1.1)—(1.3) правило выбора вектора, исключаемого из базиса, является частным случаем общего правила. Сформулируем это правило.

Определяется совокупность E_0 индексов i, на которых достигается

$$\theta_0 = \min_{\substack{x_{ik} > 0 \\ 1 \leqslant i \leqslant m}} \frac{x_{i0}}{x_{ik}}.$$

Если E_0 содержит единственный элемент r, то вектор A_k вводится в r-ю позицию базиса. В противном случае составляется множество E_1, содержащее индексы $i \in E_0$, на которых достигается

$$\min_{i \in E_0} \frac{\bar{r}_{i1}}{x_{ik}}.$$

Если E_1 состоит из одного элемента (r), то исключаемый из базиса вектор A_{s_r} уже выделен. В противном случае строится множество E_2, и т. д. В конце концов мы обязательно получим множество E_t, $0 \leqslant t \leqslant m$, состоящее из одного элемента, который определит вектор, подлежащий исключению из базиса.

§ 7. Способы построения начального опорного плана

7.1. В рассуждениях предыдущих параграфов мы отправлялись от некоторого начального опорного плана, не оговаривая, каким образом можно такой опорный план построить. Можно указать различные классы задач, в которых определение исходного опорного плана не представляет труда.

Пусть, например, условия задачи линейного программирования заданы в форме

$$\sum_{j=1}^{n} A_j x_j \leqslant B, \quad x_j \geqslant 0,$$

и составляющие вектора B неотрицательны. В этом случае задача сводится к канонической форме, если ввести m дополнительных неотрицательных переменных $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ и соответствующие им единичные векторы условий $A_{n+1}, \ldots$ $\ldots, A_{n+m}$:

$$A_{n+i} = (\underbrace{\overbrace{0, \ldots, 0, 1}^{i}, 0, \ldots, 0}_{m})^T.$$

В линейной форме задачи коэффициенты при дополнительных переменных предполагаются равными нулю.

Исходный опорный план рассматриваемой задачи, условия которой приведены к канонической форме, очевиден:

$$X = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, b_1, \ldots, b_m).$$

Базис исходного опорного плана состоит из единичных векторов A_{n+i} $(i = 1, \ldots, m)$. Компоненты x_{ij} разложения A_j

по векторам базиса A_{n+i}, $i=1, \ldots, m$ равны соответствующим составляющим вектора условий A_j.

Отсутствие необходимости в решении систем линейных уравнений для определения x_{ij} на исходном этапе существенно упрощает вычисления в методе последовательного улучшения плана. Однако следует иметь в виду, что, выбирая дополнительные векторы в качестве векторов начального базиса, мы исходим обычно из худшего первого приближения, чем в тех случаях, когда в базис с самого начала вводятся векторы, соответствующие основным переменным. Количество итераций, требуемых для вычисления оптимального плана при этом, как правило, увеличивается. Тем не менее, при использовании современных вычислительных машин введение базиса, соответствующего дополнительным переменным, оправдывает себя. Увеличение объема вычислений, которое может иметь место в этом случае, связано только с дополнительными однообразными весьма простыми операциями (см. § 2,5 гл. 5).

Можно указать и другие классы задач, в которых определение исходного опорного плана требует значительно меньше вычислений, чем решение задачи при заданном начальном плане. К сожалению, этого нельзя сказать об общей задаче линейного программирования. В общем случае вычисление начального опорного плана представляет собой работу, вообще говоря, не менее трудоемкую, чем определение решения при наличии исходного опорного плана.

Рассмотрим несколько общих приемов вычисления исходного опорного плана. В дальнейшем (§ 8 гл. 5) мы еще раз вернемся к этому вопросу и укажем ряд случаев, когда эти приемы могут быть упрощены.

7.2. Запишем задачу линейного программирования в канонической форме:

Требуется обратить в максимум линейную форму

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{7.1}$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i=1, 2, \ldots, m, \tag{7.2}$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j=1, 2, \ldots, n. \tag{7.3}$$

Здесь можно считать все $b_i \geqslant 0$. В противном случае следовало бы в соответствующей строке поменять в обеих частях равенства все знаки на обратные.

Рассмотрим наряду с задачей (7.1)—(7.3) следующую вспомогательную задачу:

Требуется обратить в максимум линейную форму

$$\tilde{L}(X) = -\sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \tag{7.4}$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{7.5}$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n+m. \tag{7.6}$$

Решим вспомогательную задачу методом последовательного улучшения плана. Начальный план вспомогательной задачи составляется из компонент

$$x_j = 0 \quad \text{при} \quad j \leqslant n,$$
$$x_{n+i} = b_i \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Составляющим начального плана x_j при $j \geqslant n+1$ отвечают m различных единичных векторов условий. Это значит, что выбранный начальный план является опорным планом вспомогательной задачи. Линейная форма $\tilde{L}$ ограничена сверху на множестве планов вспомогательной задачи ($\tilde{L} \leqslant 0$). Поэтому процесс последовательного улучшения плана приведет через конечное число шагов к оптимальному опорному плану задачи. Возможны два случая:

1° Оптимальное значение $\tilde{L}^*$ равно нулю.

2° Оптимальное значение $\tilde{L}^*$ отрицательно.

В случае 1° оптимальный план вспомогательной задачи оказывается опорным планом исходной задачи (7.1)—(7.3). Действительно, при $\tilde{L}^* = 0$ все $x^*_{n+i} = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, m$). Следовательно, решение X^* (его первые n составляющих) вспомогательной задачи удовлетворяет условиям исходной задачи. Оптимальный план вспомогательной задачи совпадает, таким образом, с некоторым планом задачи (7.1)—(7.3). По построению этот план является опорным.

Базис начального опорного плана задачи (7.1)—(7.3), полученный указанным способом, может содержать не только векторы условий, соответствующие основным переменным, но и единичные векторы, отвечающие дополнительным переменным. Естественно, что единичным векторам, входящим в базис, соответствуют нулевые компоненты плана. Начальный опорный план, базис которого содержит единичные векторы, отвечающие дополнительным переменным, является вырожденным опорным планом задачи.

Очевидно, ранг r матрицы условий (7.2) равен m, если базис начального опорного плана содержит только векторы условий, отвечающие переменным задачи (7.1)—(7.3).

Если в базис начального опорного плана входят дополнительные единичные векторы, то ранг r матрицы $\|a_{ij}\|$ может быть и ниже m. Естественно, что r не может быть меньше числа векторов условий задачи (7.1)—(7.3), вошедших в базис начального опорного плана. В следующей главе (§ 8) мы покажем, как дополнить эту совокупность линейно независимых векторов условий A_j до максимальной системы линейно независимых векторов матрицы

$$A=(A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n)=\|a_{ij}\|_{mn}.$$

Вновь введенным в базис векторам условий соответствуют нулевые компоненты плана. Если ранг r матрицы $\|a_{ij}\|$ равен m, то построенный таким образом базис будет состоять из m векторов. Если ранг $r<m$, то и базис начального опорного плана будет состоять из r векторов. В этом случае можно в процессе построения начального опорного плана исключить $m-r$ условий, линейно зависящих от других уравнений системы (7.2), и свести, таким образом, задачу (7.1)—(7.3) к задаче линейного программирования такого же вида с n переменными и r условиями-равенствами.

Перейдем к рассмотрению случая 2°. При $\tilde{L}^*<0$ задача (7.1)—(7.3) не имеет ни одного плана, т. е. система условий исходной задачи несовместна. В этом нетрудно убедиться, если допустить противное, т. е. принять, что исходная задача имеет хотя бы один план. При таком допущении вспомогательная задача будет иметь план, у которого первые n составляющих совпадают с соответствующими компонентами исходного плана, а последующие m компонент равны нулю. Значение линейной формы для этого плана равно нулю, что противоречит условию, согласно которому максимальное значение $\tilde{L}^*(X)$ отрицательно.

Итак, начальный опорный план любой задачи линейного программирования может быть вычислен в результате решения вспомогательной задачи с очевидным начальным опорным планом. При этом несовместность условий задачи, если она имеет место, будет обнаружена в процессе вычислений.

7.3. Далеко не во всех случаях имеет смысл разделять решение задачи линейного программирования на два этапа — вычисление начального опорного плана и определение оптимального плана. Рассмотрим прием, позволяющий объединить оба этапа. Сущность приема заключается в том, что вместо исходной задачи линейного программирования решается расширенная задача, имеющая более широкое множество опорных планов (один из них всегда легко указать), но те же решения, т. е. те же оптимальные планы, что и исходная задача.

Рассмотрим наряду с исходной задачей линейного программирования следующую расширенную задачу:

Требуется обратить в максимум линейную форму

$$L_M(\tilde{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - M \sum_{i=1}^{m} x_{n+i},$$

где $M > 0$ — достаточно большое число, а

$$\tilde{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+m})$$

удовлетворяет условиям (7.5), (7.6).

Назовем расширенную задачу *М-задачей*. Докажем три утверждения, необходимые для обоснования предлагаемого ниже приема.

Теорема 7.1. *Если в оптимальном плане $\tilde{X}^*$ М-задачи $x^*_{n+i} = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, т. е. если $\tilde{X}^* = (x^*_1, \ldots, x^*_n, 0, \ldots, 0)$, то план $X^* = (x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_n)$ является решением исходной задачи.*

Доказательство. Если $\tilde{X}^*$ удовлетворяет условиям расширенной задачи, то X^* удовлетворяет условиям исходной задачи. Следовательно, X^* является планом исходной задачи.

Установим его оптимальность. Для этого допустим существование такого плана $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задачи (7.1)—(7.3), что

$$L(X) > L(X^*).$$

$\tilde{X}=(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$ — план M-задачи. Следовательно,

$$L_M(\tilde{X}) = L(X) > L(X^*) = L_M(\tilde{X}^*).$$

Полученное неравенство противоречит тому, что $\tilde{X}^*$ является решением M-задачи.

Итак, если в оптимальном плане M-задачи $x^*_{n+i}=0$ для $i=1, 2, \ldots, m$, то первые n компонент этого плана определяют решение исходной задачи.

Теорема 7.2. *Всегда можно указать такое число $M_1>0$, что для любого $M>M_1$ из существования хотя бы одного плана исходной задачи вытекает соотношение*

$$x^*_{n+i}=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, m),$$

справедливое для любого опорного решения M-задачи (если последняя разрешима).

Доказательство. Допустим, что утверждение неверно, т. е. существует опорный план $X=(x_1, \ldots, x_n)$ исходной задачи и в то же время нельзя указать такое число M_1, что при всех $M>M_1$ для опорного решения $\tilde{X}^*$ M-задачи $x^*_{n+i}=0$ при $i=1, 2, \ldots, m$.

Введем числа $\underline{m}$ и $\overline{m}$ следующим образом. Пусть $\underline{m}$ равно минимуму суммы $\sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$ по всем опорным планам M-задачи, которые не обращают эту сумму в нуль. Указанный минимум $\underline{m}>0$ существует, поскольку число опорных планов M-задачи конечно, и не зависит от M. Пусть $\overline{m}$ равно максимальному значению линейной формы $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ на множестве опорных планов M-задачи. Ясно, что

$$\overline{m} \geqslant L(X).$$

Положим

$$M_1 = \frac{\overline{m} - L(X)}{\underline{m}}$$

и выберем $M > M_1$. Согласно допущению по крайней мере одна из компонент x^*_{n+i} $(i=1, \ldots, m)$ оптимального плана $\tilde{X}^* = (x^*_1, \ldots, x^*_{n+m})$ M-задачи положительна. Поэтому в соответствии с определением $\underline{m}$ и $\overline{m}$

$$\sum_{i=1}^{m} x^*_{n+i} \geqslant \underline{m}, \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x^*_j \leqslant \overline{m}.$$

Следовательно,

$$L_M(X^*) = \sum_{j=1}^{n} c_j x^*_j - M \sum_{i=1}^{m} x^*_{n+i} \leqslant \overline{m} - M\underline{m}.$$

С другой стороны, дополнив нулями план X исходной задачи, получим план $\tilde{X} = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$ M-задачи. При этом

$$L_M(\tilde{X}) = L(X), \quad L_M(\tilde{X}) \leqslant L_M(X^*),$$

поскольку X^* — решение M-задачи.

Используя последние три соотношения, получаем

$$L(X) \geqslant \overline{m} - M\underline{m},$$

или (так как $\underline{m} > 0$)

$$M \leqslant \frac{\overline{m} - L(X)}{\underline{m}} = M_1.$$

Полученное неравенство противоречит условию $M > M_1$.

Теорема 7.2 доказана.

Теорема 7.3 *Существует такое число M_2, что при $M > M_2$ из разрешимости исходной задачи* (7.1)—(7.3) *вытекает разрешимость связанной с ней M-задачи.*

Доказательство теоремы основывается на некоторых фактах теории двойственности, изложенной в гл. 3. Рассмотрим две задачи линейного программирования, сопряженные соответственно с исходной задачей и M-задачей:

1. Минимизировать линейную форму

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \tag{7.7}$$

при соблюдении условий

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \geqslant c_j, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{7.8}$$

2. Минимизировать линейную форму (7.7) при условиях (7.8) и

$$y_i \geqslant -M, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m. \tag{7.9}$$

Пусть $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_m}$ — произвольная система линейно независимых векторов условий. Определим вектор $Y_I=(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)_I$ из системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij_s}y_i = c_{j_s}, \qquad j_s \in I=(j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_m). \tag{7.10}$$

Положим y_I равным минимальной компоненте вектора Y_I и

$$M_2 = \max_I (-y_I),$$

где максимум берется по всевозможным системам из m линейно независимых векторов условий.

Допустим теперь, что $M > M_2$, и задача (7.1) — (7.3) разрешима. В таком случае по первой теореме двойственности разрешима также и сопряженная с ней задача (7.7), (7.8).

Пусть $Y=(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)$ — произвольный опорный план этой задачи. В таком случае его компоненты удовлетворяют системе уравнений (7.10) при некотором множестве $I=(j_1,$ $j_2,\ \ldots,\ j_m)$.

Согласно определению числа M_2

$$y_i \geqslant -M_2 > -M, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Следовательно, система условий (7.8), (7.9) совместна, и задача (7.7) — (7.9), отличающаяся от разрешимой задачи (7.7), (7.8) дополнительными условиями (7.9), также разрешима.

Применяя теперь снова первую теорему двойственности, приходим к выводу о разрешимости M-задачи, сопряженной с задачей (7.7) — (7.9).

Теорема доказана.

Установленные результаты обеспечивают возможность решения задачи линейного программирования с неизвестным заранее начальным опорным планом. Вместо того, чтобы решать исходную задачу (7.1)—(7.3), применим метод последовательного улучшения плана к соответствующей M-задаче, где

$$M \geqslant \max(M_1, M_2). \tag{7.11}$$

Начальный опорный план M-задачи очевиден:

$$\tilde{X}_0 = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n}, b_1, b_2, \ldots, b_m).$$

Отметим, что базис, составленный из единичных векторов при искусственных переменных x_{n+i}, $i = 1, \ldots, m$, обычно называют *искусственным базисом*.

Метод последовательного улучшения плана, отправляющийся от опорного плана с искусственным базисом, через конечное число итераций приведет либо к случаю 1° (план оптимален), либо к случаю 2° (задача неразрешима).

Допустим, что $\tilde{X}^* = (\overset{*}{x}_1, \ldots, \overset{*}{x}_{n+m})$ — последний опорный план, построенный в процессе решения M-задачи. Если имеет место случай 1°, то $\tilde{X}^*$ — решение M-задачи. Здесь следует рассмотреть две возможности:

а) $\overset{*}{x}_{n+1} = \ldots = \overset{*}{x}_{n+m} = 0$; тогда по теореме 7.1 $X^* = (\overset{*}{x}_1, \overset{*}{x}_2, \ldots, \overset{*}{x}_n)$ является оптимальным планом исходной задачи (7.1) — (7.3);

б) $\sum\limits_{i=n+1}^{n+m} \overset{*}{x}_i > 0$; в соответствии с теоремой 7.2 и условием (7.11) это означает, что задача (7.1)—(7.3) не имеет ни одного плана, т. е. неразрешима.

Если же процесс решения M-задачи заканчивается случаем 2°, то согласно теореме 7.3 и неравенству (7.11) задача (7.1)—(7.3) заведомо неразрешима. Отметим, что в данном случае неразрешимость исходной задачи может быть связана как с неограниченностью линейной формы (7.1) на множестве планов задачи, так и с пустотой этого множества. Построение соответствующих примеров предоставляется читателю (см. упражнение 9).

Итак, метод последовательного улучшения плана, примененный к M-задаче при M, удовлетворяющем условию (7.11), позволяет за конечное число шагов либо получить решение исходной задачи, либо убедиться в ее неразрешимости. При этом нет необходимости знать заранее начальный опорный план исследуемой задачи (7.1)—(7.3). Изложенный метод решения задач линейного программирования принято называть M-методом.

Подчеркнем, что для решения задачи M-методом нет необходимости вычислять величину $M_0 = \max(M_1, M_2)$. При определении оценок Δ_j в процессе решения M-задачи следует полагать M больше любого сравниваемого с ним числа. Если в результате решения M-задачи будет получен оптимальный план, для которого $x_{n+i} = 0$ при $i = 1, 2, \ldots, m$, то первые m его компонент определят решение исходной задачи. Если по крайней мере одна из составляющих x_{n+i} оптимального плана положительна при любом достаточно большом M, то исходная задача неразрешима. Неразрешимость M-задачи указывает на неразрешимость исходной задачи.

Пример использования M-метода будет приведен в § 8 следующей главы. Там же будут изложены некоторые вычислительные приемы, связанные с реализацией M-метода.

Рассуждения настоящего параграфа проводились для задач линейного программирования, записанных в канонической форме. Очевидно, все изложенные здесь приемы применимы и к задачам с двухсторонними ограничениями. В этом случае решение вспомогательной и расширенной задач следует, естественно, проводить в соответствии с рекомендациями § 5. Отметим, что дополнительные (искусственные) переменные вспомогательной (расширенной) задачи ограничены лишь снизу ($\alpha_j = 0$, $\beta_j = \infty$).

§ 8. Теоретические приложения метода последовательного улучшения плана

Метод последовательного улучшения плана, подробно описанный в предыдущих параграфах настоящей главы, следует рассматривать не только как вычислительный прием для решения конкретных задач линейного программирования. С его помощью можно чрезвычайно просто устанавливать многие качественные результаты теории линейного программирования. В этом параграфе мы проиллюстрируем силу метода улучшения плана, применив его для доказательства ряда важных теорем линейного программирования, которые были установлены в главах 2 и 3 на основе иных соображений. Все результаты будут формулироваться и доказываться применительно к канонической форме задачи линейного программирования (задача (1.1)—(1.3)). При этом ранг матрицы $A=(A_1, A_2 \ldots \ldots, A_n)$ предполагается равным m.

Теорема 8.1 (о существовании опорного плана). *Если множество планов задачи* (1.1)—(1.3) *непусто, то она обладает хотя бы одним опорным планом.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать все компоненты вектора ограничений $B=(b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$ неотрицательными. Свяжем с задачей (1.1)—(1.3) следующую вспомогательную задачу линейного программирования:

Обратить в максимум линейную форму

$$L=-\sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \tag{8.1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j+x_{n+i}=b_i, \qquad i=1, 2. \ldots, m; \tag{8.2}$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j=1, 2, \ldots, n+m. \tag{8.3}$$

Очевидно, $(m+n)$-мерный вектор

$$\overline{X}_0=(0, 0, \ldots, 0, b_1, b_2, \ldots, b_m)$$

является опорным планом задачи (8.1)—(8.3). Поэтому при решении вспомогательной задачи методом последовательного улучшения плана его можно принять за исходный план. Если при наличии вырожденной ситуации пользоваться правилом, изложенным в § 6 (в данном случае в качестве векторов $R_1, R_2, \ldots, R_m$ можно принять единичные векторы $e_1, e_2, \ldots, e_m$, составляющие базис плана $\overline{X}_0$), то процесс решения задачи (8.1)—(8.3) методом последовательного улучшения плана складывается из конечного числа шагов (итераций).

Очевидно, линейная форма (8.1) ограничена сверху на множестве планов вспомогательной задачи числом 0. Следовательно, процесс решения не может закончиться случаем 2° (см. § 2) и обязательно завершится построением опорного решения задачи (случай 1°). Допустим, что этим решением является

$$\overline{X}_1=(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, x_{n+1}^{(1)}, \ldots, x_{n+m}^{(1)}).$$

По условию, задача (1.1)—(1.3) обладает некоторым планом

$$X=(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Поэтому вектор

$$\overline{X}=(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots, 0)$$

—план задачи (8.1)—(8.3). Очевидно, этот план связан с нулевым значением линейной формы (8. 1) и, следовательно, является решением вспомогательной задачи. Но тогда $\overline{X}_1$ также обращает (8.1) в нуль, т. е.

$$\sum_{i=n+1}^{n+m} x_i^{(1)}=0.$$

Отсюда, учитывая неотрицательность компонент $x_i^{(1)}$, получаем

$$x_i^{(1)}=0 \quad \text{для} \quad i=m+1, \ \ldots, \ m+n,$$

значит, вектор

$$X_1=(x_1^{(1)}, \ x_2^{(1)}, \ \ldots, \ x_n^{(1)})$$

является планом задачи (1.1)—(1.3).

По построению $\overline{X}_1$—опорный план задачи (8.1)—(8.3). Следовательно, система векторов A_j, отвечающая $x_j^{(1)}>0$ $(j=1, 2, \ldots, n)$, линейно независима. Поэтому X_1—опорный план задачи (1.1)—(1.3).

Теорема доказана.

Теорема 8.2 (о существовании опорного решения). *Если задача линейного программирования* (1.1)—(1.3) *разрешима, то среди ее решений имеется опорное.*

Доказательство. Поскольку множество планов задачи (1.1)—(1.3) непусто, то согласно теореме о существовании опорного плана задача обладает опорным планом

$$X=(x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_n).$$

Приняв план X за исходный, применим к задаче (1.1)—(1.3) метод последовательного улучшения плана.

В силу разрешимости задачи через конечное число итераций будет получено ее опорное решение. Теорема доказана.

Теорема 8.3 (о разрешимости задачи линейного программирования). *Для разрешимости задачи линейного программирования необходимо и достаточно, чтобы*

а) множество ее планов не было пустым;

б) линейная форма задачи была ограничена на этом множестве.

Доказательство. Необходимость условий теоремы очевидна. Обратимся к доказательству достаточности.

Из условия *а* и теоремы о существовании опорного плана следует, что задача обладает опорным планом. Как и при доказательстве предыдущей теоремы, примем его за исходный и воспользуемся методом последовательного улучшения плана. Очевидно, процесс решения задачи должен завершиться случаем 1° (случай 2° невозможен в силу условия *б*). Следовательно, план, построенный на предпоследней итерации метода, является решением задачи.

Теорема доказана.

В заключение приведем простое доказательство первой теоремы двойственности. Предварительно напомним формулировку задачи, сопряженной с задачей (1.1)—(1.3):

Требуется обратить в минимум линейную форму

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \tag{8.4}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j, \qquad j=1, 2, \ldots, n. \tag{8.5}$$

Первая теорема двойственности. *Из разрешимости задачи* (1.1)—(1.3) *следует разрешимость сопряженной с ней задачи* (8.4), (8.5). *При этом максимум линейной формы* (1.1) *при условиях* (1.2), (1.3) *совпадает с минимумом линейной формы* (8.4) *при условиях* (8,5).

Доказательство. Приняв некоторый опорный план задачи (1.1)—(1.3) за исходный, применим к ней метод последовательного улучшения плана.

В силу разрешимости задачи процесс решения приведет через конечное число шагов к ее опорному оптимальному плану

$$X=(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

удовлетворяющему условиям признака оптимальности (случай 1°). Это означает, что вектор $\Lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$, определяемый из системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\lambda_i=c_j, \quad j \in I_X, \tag{8.6}$$

обладает свойством

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i \geqslant c_j, \quad j \notin I_X \tag{8.7}$$

(здесь используется вторая форма признака; векторы A_j, $j \in I_X$, составляют базис плана X). Соотношения (8.6) и (8.7) показывают, что вектор Λ удовлетворяет условиям (8.5), т. е. является планом задачи (8.4), (8.5).

Покажем, что

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j=\sum_{i=1}^{m} b_i\lambda_i. \tag{8.8}$$

В самом деле,

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j=\sum_{j \in I_X} c_j x_j=\sum_{j \in I_X} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i=\sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=\sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i.$$

Первое и третье равенства в этой цепочке имеют место, так как $x_j=0$ для $j \notin I_X$. Второе и пятое равенства вытекают соответственно из (8.6) и (1.2). Что касается четвертого, то оно — результат изменения порядка суммирования.

Пусть теперь $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ — произвольный план задачи (8.4) — (8.5). В таком случае

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = \sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{i=1}^{m} y_i b_i.$$

Здесь первое неравенство является следствием условий (8.5), которым удовлетворяет вектор Y. Остальные соотношения справедливы по тем же причинам, что и четвертое и пятое в предыдущей цепочке равенств. Итак,

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leqslant \sum_{i=1}^{m} y_i b_i, \tag{8.9}$$

где Y—произвольный план задачи (8.4), (8.5).

Соотношения (8.8) и (8.9) показывают, что Λ—оптимальный план задачи (8.4), (8.5). Таким образом, задача, сопряженная с задачей (1.1) — (1.3), разрешима, и оптимальные планы обеих задач связаны равенством (8.8).

Теорема доказана.

Приведенные здесь примеры доказательств ряда важных теорем линейного программирования показывают, что метод последовательного улучшения плана является весьма эффективным инструментом качественных исследований в теории линейного программирования. Важно подчеркнуть, что использование этого метода всегда приводит к конструктивному доказательству, позволяющему установить не только сам факт, но и приемлемые пути расчета.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 4

1. Доказать необходимость признака оптимальности (в первой или второй форме) для случая, когда исследуемый опорный план невырожденный.

2. Привести пример задачи, в которой условия признака оптимальности не являются необходимыми.

3. Показать, что линейная форма задачи (1.1) — (1.3) с непустым множеством планов неограничена в том и только в том случае, когда положительная полуось Ou_{m+1} принадлежит конусу, образованному расширенными векторами условий.

4. Доказать, что введенное в § 5 понятие опорного плана для задачи с двухсторонними ограничениями соответствует определению опорного плана для задачи линейного программирования в произвольной форме записи, указанному в § 4 гл. 2.

5. Доказать, что введенное в § 5 понятие невырожденности для задачи с двухсторонними ограничениями соответствует общему определению невырожденности, указанному в § 4 гл. 2.

6. Доказать, что

а) каждая система из m линейно независимых векторов условий задачи (5.1)—(5.3) может служить базисом не более чем для 2^{n-m} опорных планов этой задачи;

б) опорный план задачи (5.1)—(5.3), степень вырожденности которого равна μ, обладает не более чем $C^{\mu}_{n-m+\mu}$ различными базисами.

Привести примеры, в которых обе оценки достигаются. (Степень вырожденности опорного плана $\mu = m - \nu$, где ν — число базисных компонент, отличных от граничных значений соответствующих переменных.)

7. Доказать, что две задачи, обладающие планами и различающиеся только векторами ограничений, одновременно разрешимы или неразрешимы.

8. Доказать, что в задаче, все опорные планы которой имеют степень вырожденности, не превышающую единицы, цикл невозможен.

9. Показать на примерах, что при решении задачи линейного программирования M-методом случай 2° может быть следствием как неограниченности линейной формы, так и несовместимости условий задачи.

10. Доказать, используя метод последовательного улучшения плана, что из невырожденности задачи линейного программирования следует единственность решения сопряженной с ней задачи.

ГЛАВА 5

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СХЕМЫ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО УЛУЧШЕНИЯ ПЛАНА

В настоящей главе излагаются вычислительные схемы решения задач линейного программирования по методу последовательного улучшения плана.

В главе принят следующий порядок изложения материала. В § 1 устанавливаются соотношения между параметрами опорных планов, связанных элементарным преобразованием. Здесь получены рекуррентные формулы для параметров соседних итераций. В § 2—6 подробно описаны схемы вычислений, соответствующие обоим алгоритмам метода последовательного улучшения плана. Все вычислительные схемы иллюстрируются численными примерами.

Метод последовательного улучшения плана отработан лучше других методов и ему посвящена достаточно обширная литература. В различных источниках предлагаются разные подходы к изложению метода и анализу соответствующих алгоритмов. Рассуждения, которые приводятся в § 4, посвященном векторной и координатной форме метода, устанавливают эквивалентность разных подходов к последовательному улучшению плана и разъясняют смысл преобразований в алгоритмах метода.

В § 7 излагаются особенности решения задач линейного программирования, переменные которых ограничены с обеих сторон. В § 8 описан порядок расчетов, связанных с определением исходного опорного плана. Последний параграф (§ 9) посвящен относительно специальному вопросу. Здесь исследуется возможность зацикливания в вырожденных задачах и строится пример, в котором это явление имеет место.

§ 1. Связь между параметрами последовательных итераций

1.1. Метод последовательного улучшения плана состоит из серии последовательных элементарных преобразований одного опорного плана задачи в другой, более близкий к оптимальному плану. Для исследования опорного плана на оптимальность и для последовательного улучшения плана необходимо на каждом шаге метода вычислять ряд параметров, позволяющих охарактеризовать и оценить этот план.

В предыдущей главе были получены системы уравнений, связывающие параметры метода с условиями задачи (с векторами условий, вектором ограничений и коэффициентами линейной формы). Как уже указывалось, решение этих систем уравнений — наиболее трудоемкий этап расчетов. Особенности элементарных преобразований позволяют, однако, ограничиться решением систем уравнений только в процессе подготовки исходных данных для первой итерации. При использовании методов, изложенных в § 7 гл. 4, можно не связывать определение исходного опорного плана и всех параметров, характеризующих его, с решением систем уравнений. Тем не менее определение параметров исходного опорного плана значительно более трудоемкая работа, чем вычисление параметров всех последующих итераций. Параметры последовательных итераций оказываются связанными весьма простыми рекуррентными формулами.

Связи между параметрами метода для разных алгоритмов устанавливаются по одному и тому же принципу. Ниже доказывается достаточно общее утверждение, из которого будут далее получены в качестве следствий все рекуррентные формулы, необходимые для решения задачи по различным вычислительным схемам метода последовательного улучшения плана.

Рассмотрим две системы линейно независимых векторов $\{P_i\}_{i \in I}$ и $\{P_i\}_{i \in I'}$. Множества индексов I и I' различаются только одним элементом. Множество I' образуется из I заменой индекса r на индекс k, так что

$$\left\{ \begin{matrix} I \\ i \neq r \end{matrix} \right\} \equiv \left\{ \begin{matrix} I' \\ i \neq k \end{matrix} \right\}. \tag{1.1}$$

Обозначим коэффициенты разложения некоторой системы векторов Q_j по векторам двух систем линейно независимых векторов $\{P_i\}_{i\in I}$ и $\{P_i\}_{i\in I'}$ соответственно через ζ_{ij} и ζ'_{ij}, т. е.

$$Q_j=\sum_{i\in I}\zeta_{ij}P_i, \tag{1.2}$$

$$Q_j=\sum_{i\in I'}\zeta'_{ij}P_i. \tag{1.3}$$

Будем считать известными коэффициентами η_{ik} разложения вектора P_k по векторам системы $\{P_i\}_{i\in I}$

$$P_k=\sum_{i\in I}\eta_{ik}P_i. \tag{1.4}$$

Здесь $\eta_{rk}\neq 0$, так как обе системы $\{P_i\}_{i\in I}$ и $\{P_i\}_{i\in I'}$ состоят из линейно независимых векторов и различаются только одним вектором P_r (P_k).

Установим связь между ζ'_{ij} с одной стороны и ζ_{ij} и η_{ik} с другой.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Коэффициенты ζ_{ij} и ζ'_{ij} разложения произвольных векторов Q_j по векторам систем $\{P_i\}_{i\in I}$ и $\{P_i\}_{i\in I'}$, для которых имеют место соотношения* (1.1) *и* (1.4), *связаны между собой формулами*

$$\zeta'_{ij}=\begin{cases}\zeta_{ij}-\dfrac{\zeta_{rj}}{\eta_{rk}}\eta_{ik} & \text{при} \quad i\neq k,\\[2mm] \dfrac{\zeta_{rj}}{\eta_{rk}} & \text{при} \quad i=k.\end{cases} \tag{1.5}$$

Доказательство. Из равенства (1.4) имеем

$$P_k=\sum_{\substack{i\in I\\ i\neq r}}\eta_{ik}P_i+\eta_{rk}P_r.$$

По условию $\eta_{rk}\neq 0$. Поэтому, используя формулы (1.1) и (1.2), приходим к соотношению

$$Q_j=\sum_{\substack{i\in I\\ i\neq r}}\zeta_{ij}P_i+\frac{\zeta_{rj}}{\eta_{rk}}\left(P_k-\sum_{\substack{i\in I\\ i\neq r}}\eta_{ik}P_i\right)=$$

$$=\sum_{\substack{i\in I'\\ i\neq k}}\left(\zeta_{ik}-\frac{\zeta_{rj}}{\eta_{rk}}\eta_{ik}\right)P_i+\frac{\zeta_{rj}}{\eta_{rk}}P_k.$$

Система векторов $\{P_i\}_{i \in I'}$ линейно независима. Поэтому коэффициенты разложения вектора Q_j по векторам этой системы определяются однозначно. Сравнивая последнее соотношение с формулой (1.3), убеждаемся в справедливости утверждения теоремы.

Вектор P_k в системе $\{P_i\}_{i \in I'}$ занимает то же место, что и вектор P_r в системе $\{P_i\}_{i \in I}$. Мы уже видели, что в ряде случаев индексы компонент удобно связывать не с номерами соответствующих векторов, а с позициями, занимаемыми векторами в системе. В этих предположениях целесообразно переписать рекуррентные формулы (1.5) в виде

$$\zeta'_{ij} = \begin{cases} \zeta_{ij} - \dfrac{\zeta_{rj}}{\eta_{rk}} \eta_{ik} & \text{при } i \neq r, \\ \dfrac{\zeta_{rj}}{\eta_{rk}} & \text{при } i = r. \end{cases} \tag{1.6}$$

Здесь мы предполагаем, что вектор P_r занимает r-ю позицию в системе $\{P_i\}_{i \in I}$.

1.2. Воспользуемся формулами (1.6) для вывода рекуррентных соотношений, связывающих параметры соседних итераций в первом алгоритме метода последовательного улучшения плана.

В первом алгоритме, связанном с первой формой признака оптимальности опорного плана, необходимо на каждом шаге метода вычислять следующие параметры;

а) x_{ij} — составляющие разложения произвольного вектора условий A_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) по векторам базиса;

б) x_{i0} — базисные компоненты опорного плана ($i = 1, 2, \ldots, m$);

в) Δ_j — оценки векторов условий A_j относительно рассматриваемого базиса ($j = 1, 2, \ldots, n$);

г) $L(X)$ — значение линейной формы на плане X.

Введем обозначение

$$V = -\bar{e}_{m+1},$$

где $\bar{e}_{m+1} = (0, \ldots, 0, 1)$ — $(m+1)$-мерный единичный вектор. Примем

$$\{P_i\}_{i \in I} = \{(\bar{A}_i)_{i \in I_X}, V\}, \tag{1.7}$$

$$\{P_i\}_{i \in I'} = \{(\bar{A}_i)_{i \in I_{X'}}, V\}. \tag{1.8}$$

Приведенная запись означает, что в первую систему включены m расширенных векторов условий, определяемых базисом опорного плана X, и $(m+1)$-мерный вектор V. Вторая система векторов состоит из расширенных векторов, отвечающих опорному плану X', и вектора V. Опорный план X' получен из опорного плана X элементарным преобразованием, связанным с вектором A_k. Обе системы различаются только одним вектором. Вектор $\bar{A}_k$ во второй системе занимает r-ю позицию базиса. В первой системе на этом месте расположен вектор $\bar{A}_{s_r}$. Ясно, что как векторы первой системы, так и векторы второй системы линейно независимы.

Примем в качестве вектора Q_j произвольный расширенный вектор условий $\bar{A}_j$, $j=0, 1, 2, \ldots, n$. (Под расширенным вектором $\bar{A}_0$ здесь подразумевается $(m+1)$-мерный вектор, первые m компонент которого совпадают с соответствующими составляющими вектора ограничений, а $(m+1)$-я компонента c_0 равна нулю.)

Разложение вектора $\bar{A}_j$ по векторам первой системы может быть записано в следующем виде:

$$\bar{A}_j = \sum_{i=1}^{m} \zeta_{ij}\bar{A}_{s_i} + \zeta_{m+1,\, j} V, \quad j=0, 1, \ldots, n. \tag{1.9}$$

Аналогично записывается разложение вектора $\bar{A}_k$ (играющего роль вектора P_k в теореме 1.1):

$$\bar{A}_k = \sum_{i=1}^{m} \eta_{ik}\bar{A}_{s_i} + \eta_{m+1,\, k} V. \tag{1.10}$$

Первые m компонент расширенных векторов определяют векторы условий и связаны соотношениями

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} A_{s_i}, \qquad j=0, 1, 2, \ldots, n,$$

и соответственно

$$A_k = \sum_{i=1}^{m} x_{ik} A_{s_i}.$$

Учитывая, что первые m компонент вектора V равны нулю, получаем

$$\zeta_{ij}=x_{ij}, \quad i=1, 2, \ldots, m, \quad j=0, 1, \ldots, n,$$
$$\eta_{ik}=x_{ik}, \quad i=1, 2, \ldots, m.$$

Аналогичные рассуждения приводят к равенствам

$$\zeta'_{ij}=x'_{ij}, \quad i=1, 2, \ldots, m, \quad j=0, 1, \ldots, n.$$

Чтобы вычислить $\zeta_{m+1, j}$ и $\eta_{m+1, k}$ для $j=0, 1, \ldots, n$, спроектируем обе части равенств (1.9) и (1.10) на ось $\overline{e}_{m+1}$ или, что то же самое, вычислим $(m+1)$-е составляющие векторов из левой и правой частей каждого из этих равенств:

$$c_j=\sum_{i=1}^{m} x_{ij}c_{s_i}-\zeta_{m+1, j},$$
$$c_k=\sum_{i=1}^{m} x_{ik}c_{s_i}-\eta_{m+1, k}.$$

Сравнивая полученные формулы с формулой (2.1) предыдущей главы и учитывая, что $c_0=0$, приходим к соотношениям

$$\zeta_{m+1, j}=\Delta_j, \quad j=1, 2, \ldots, n, \quad \eta_{m+1, k}=\Delta_k;$$
$$\zeta_{m+1, 0}=\Delta_0=L(X).$$

Точно так же

$$\zeta'_{m+1, j}=\Delta'_j, \quad j=1, 2, \ldots, n;$$
$$\zeta'_{m+1, 0}=\Delta'_0=L(X').$$

Естественно ввести следующие обозначения:

$$V=\overline{A}_{s_{m+1}}; \quad \Delta_j=x_{m+1, j}, \quad j=1, 2, \ldots, n; \quad \Delta_0=L(X)=x_{m+1, 0}$$

и соответственно

$$\Delta'_j=x'_{m+1, j}, \quad j=1, 2, \ldots, n; \quad \Delta'_0=L(X')=x'_{m+1, 0}.$$

В новых обозначениях формулы (1.9) и (1.10) принимают вид

$$\left.\begin{aligned}\overline{A}_j&=\sum_{i=1}^{m+1} x_{ij}\overline{A}_{s_i}, \quad j=0, 1, \ldots, n,\\ \overline{A}_k&=\sum_{i=1}^{m+1} x_{ik}\overline{A}_{s_i}.\end{aligned}\right\} \qquad (1.11)$$

Из определения элементарного преобразования следует, что $\eta_{rk}=x_{rk}\neq 0$ $\left(\text{индекс } r\text{ — номер позиции базиса, на которой достигается минимум отношения } \frac{x_{i0}}{x_{ik}} \text{ при } x_{ik}>0\right)$.

Таким образом, выполняются все условия теоремы 1.1. Применяя утверждения этой теоремы к составляющим разложения расширенных векторов условий по векторам систем (1.7) и (1.8), получаем следующий результат.

Параметры двух последовательных итераций связаны рекуррентными формулами:

$$x'_{ij}=\begin{cases} x_{ij}-\frac{x_{rj}}{x_{rk}}x_{ik} & \text{при} \quad i\neq r, \\ \frac{x_{rj}}{x_{rk}} & \text{при} \quad i=r, \\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ m+1, & j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \end{cases} \tag{1.12}$$

Соотношения (1.12) полностью обеспечивают переход от одного шага метода последовательного улучшения плана к следующему. Рекуррентные формулы (1.12) позволяют вычислять следующие параметры каждой итерации (если известны параметры предыдущего приближения):

а) составляющие разложения всех векторов условий по векторам базиса ($i=1,\ 2,\ \ldots,\ m$; $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$),

б) базисные компоненты опорного плана ($i=1,\ 2,\ \ldots,\ m$; $j=0$),

в) относительные оценки векторов условий ($i=m+1$; $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$);

г) значение линейной формы ($i=m+1$; $j=0$).

Формулы (1.12) являются основой первого алгоритма метода последовательного улучшения плана.

1.3. Используем теперь формулы (1.6) для вывода рекуррентных соотношений, связывающих параметры последовательных итераций во втором алгоритме метода последовательного улучшения плана.

Второй алгоритм основан на втором признаке оптимальности опорного плана, в котором оценки векторов условий Δ_j вычисляются на каждом шаге с помощью вектора $\Lambda=(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_m)$. Параметры λ_i в свою очередь удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i = c_j, \quad j \in I_X. \tag{1.13}$$

Как видим, вычисление λ_i связано с обращением матрицы A_X.

Для решения задач вторым алгоритмом необходимо вычислять на каждом шаге следующие параметры:

а) e_{ij} — элементы обратной матрицы A_X^{-1},

б) λ_i — оценки условий задачи относительно базиса опорного плана X,

в) x_{i0} — базисные компоненты опорного плана,

г) $L(X)$ — значение линейной формы на плане X.

Заметим, что параметры e_{ij} — элементы матрицы A_X^{-1} — удобно рассматривать как коэффициенты разложения m-мерных единичных векторов

$$e_j = \Big(\overbrace{\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{j}, 0, \ldots, 0}^{m}\Big)$$

по векторам базиса.

Примем, как и в предыдущем пункте, в качестве систем векторов $\{P_i\}_{i\in I}$ и $\{P_i\}_{i\in I'}$ системы (1.7) и (1.8). Под векторами Q_j будем здесь подразумевать $(m+1)$-мерные единичные векторы

$$\overline{e}_j = \Big(\overbrace{\underbrace{0, \ldots, 0, 1,}_{j} \ 0, \ldots, 0}^{m+1}\Big), \qquad j = 1, 2, \ldots, m,$$

и

$$\overline{e}_0 = \overline{A}_0 = (b_1, \ldots, b_m, 0).$$

Запишем разложение вектора $\overline{e}_j$ по векторам первой системы:

$$\overline{e}_j = \sum_{i=1}^{m} \xi_{ij}\overline{A}_{s_i} + \xi_{m+1,\,j}V; \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, m. \tag{1.14}$$

Разложение m-мерных векторов e_j по векторам базиса (A_{s_i}), по определению, представляется в виде

$$e_j = \sum_{i=1}^{m} e_{ij}A_{s_i}, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

Следовательно,

$$\zeta_{ij}=e_{ij}, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m, \quad j=0,\ 1,\ \ldots,\ m$$

($e_{i_0}=x_{i_0}$ — базисные компоненты опорного плана). Точно так же

$$\zeta'_{ij}=e'_{ij}, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m; \quad j=0,\ 1,\ \ldots,\ m.$$

Чтобы вычислить $e_{m+1,\,j}$ $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, спроектируем обе части равенства (1.17) на вектор $\bar{e}_{m+1}$. Получим

$$0=\sum_{i=1}^{m} e_{ij}c_{s_i}-\zeta_{m+1,\,j}.$$

Умножим обе части последнего равенства на a_{js_t} и просуммируем по j от 1 до m. Учитывая, что a_{ij} и e_{ij} $(i=1,\ \ldots,\ m;\ j=1,\ \ldots,\ m)$ — элементы взаимно обратных матриц, приходим к соотношению

$$0=c_{s_t}-\sum_{j=1}^{m} a_{js_t}\zeta_{m+1,\,j}, \qquad t=1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Заменим индекс суммирования j на i. Принимая во внимание, что индексы s_t $(t=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ составляют множество I_X, получим

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\zeta_{m+1,\,i}=c_j, \quad j\in I_X.$$

Таким образом, вектор $\{\zeta_{m+1,\,i}\}_i$ является решением системы (1.13). Следовательно,

$$\zeta_{m+1,\,j}=\lambda_j^*, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ m. \tag{1.15}$$

Положим в формуле (1.14) $j=0$ и перепишем это равенство для $(m+1)$-х компонент векторов $\bar{A}_{s_i}$ и V. Получим

$$0=\sum_{i=1}^{m}\zeta_{i0}c_{s_i}-\zeta_{m+1,\,0}.$$

Но $\zeta_{i0}=e_{i0}=x_{i0}$, поэтому

$$\zeta_{m+1,\,0}=\sum_{i=1}^{m} x_{i0}c_{s_i}=L(X)=\lambda_0.$$

Естественно ввести такие обозначения:

$$V=\bar{A}_{s_{m+1}};\quad \lambda_j=e_{m+1,\,j},\quad j=1,\ \ldots,\ m;$$
$$\lambda_0=L(X)=e_{m+1,\,0},\tag{1.16}$$

и соответственно,

$$\lambda_j'=e_{m+1,\,j}',\quad j=1,\ \ldots,\ m;\quad \lambda_0'=L(X')=e_{m+1,\,0}'.$$

Кроме того, мы приняли, что

$$x_{i0}=e_{i0},\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m,\tag{1.17}$$

и соответственно

$$x_{i0}'=e_{i0}'.$$

В новых обозначениях формула (1.14) принимает вид

$$\bar{e}_j=\sum_{i=1}^{m+1} e_{ij}\bar{A}_{s_i},\qquad j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m.\tag{1.18}$$

Разложение векторов $\bar{e}_j=Q_j$ по векторам системы (1.8) может быть представлено аналогичной формулой:

$$\bar{e}_j=\sum_{i=1}^{m+1} e_{ij}'\bar{A}_{s_i'},\qquad j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m.\tag{1.19}$$

Пусть $I=(s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_r,\ \ldots,\ s_m)$; $I'=(s_1',\ s_2',\ \ldots$ $\ldots,\ s_r',\ \ldots,\ s_m')$;

$$s_i'=\begin{cases} s_i & \text{при}\quad i\neq r,\\ k & \text{при}\quad i=r.\end{cases}$$

Разложение вектора $\bar{A}_k=P_k$ по векторам первой системы записывается в соответствии с формулами (1.11) в виде

$$\bar{A}_k=\sum_{i=1}^{m+1} x_{ik}\bar{A}_{s_i}.\tag{1.20}$$

Применяя теперь теорему 1.1 к составляющим разложения векторов $\bar{e}_j$ по векторам систем (1.7) и (1.8) и учитывая формулы (1.18) — (1.20), получаем следующие рекуррентные формулы, связывающие параметры двух соседних итераций:

$$e'_{ij}=\begin{cases} e_{ij}-\frac{e_{rj}}{x_{rk}}x_{ik} & \text{при} \quad i\neq r, \\ \frac{e_{rj}}{x_{rk}} & \text{при} \quad i=r, \end{cases} \tag{1.21}$$

$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ m+1, \quad j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Формулы (1.21) позволяют вычислять следующие значения параметров каждой итерации, если известны аналогичные параметры предыдущего приближения:

а) элементы e_{ij} обратной матрицы A_X^{-1} векторов базиса ($i=1,\ 2,\ \ldots,\ m$; $j=1,\ 2,\ \ldots,\ m$);

б) базисные компоненты опорного плана $x_{i_0}=e_{i_0}$ ($i=1,\ \ldots$ $\ldots,\ m$; $j=0$);

в) относительные оценки условий задачи $\lambda_j=e_{m+1,\ j}$ ($i=m+1$; $j=1,\ 2,\ \ldots,\ m$);

г) значение линейной формы $L(X)=e_{m+1,\ 0}$ ($i=m+1$; $j=0$).

Рекуррентные формулы (1.21) являются основой второго алгоритма метода последовательного улучшения плана.

§ 2. Первый алгоритм метода последовательного улучшения плана

2.1. Теоретические основы первого алгоритма были изложены в § 2 предыдущей главы. Здесь будет описан порядок вычислений при использовании этого алгоритма для решения задач линейного программирования, заданных в канонической форме.

Как уже отмечалось, метод последовательного улучшения плана позволяет, отправляясь от некоторого исходного опорного плана и постепенно улучшая его, получить через конечное число итераций оптимальный план или убедиться в неразрешимости задачи. Каждой итерации соответствует переход от одной таблицы алгоритма к следующей.

Введем некоторые термины, упрощающие изложение. Под произведением строки на строку или строки на столбец будем понимать скалярное произведение соответствующих строк или строки и столбца таблицы. Будем говорить, что строка (столбец) делится или умножается на число, если каждый элемент строки (столбца) таблицы делится или умножается на это число. Говоря, что две строки (два столбца) складываются или одна строка вычитается из другой, будем подразумевать, что указанные операции производятся над соответствующими элементами строк или столбцов.

Каждая итерация метода состоит из двух этапов. Первый этап заключается в проверке исследуемого опорного плана на оптимальность. Второй этап проводится, если рассматриваемый план не оказался оптимальным и при этом не выявлена неразрешимость задачи. Второй этап заключается в определении элементарного преобразования, приводящего к новому опорному плану с бо́льшим значением линейной формы. На втором этапе определяется вектор, который должен быть введен в базис, и вектор, который должен быть исключен из базиса. После этого вычисляются базисные компоненты нового опорного плана и все параметры, необходимые для продолжения процесса решения задачи.

В новый базис может быть включен любой вектор, оценка которого относительно предшествующего базиса отрицательна. Линейная форма получает на каждом шаге максимальное приращение, если в базис вводится вектор A_j, для которого $\theta_0^{(j)}\Delta_j$ принимает наименьшее значение. Опыт показывает, что при этом, как правило, уменьшается и число итераций, необходимое для решения задачи. Однако выявление вектора, обращающего в минимум произведение $\theta_0^{(j)}\Delta_j$, связано с достаточно громоздкими вычислениями. Вначале должны быть вычислены значения

$$\theta_0^{(j)} = \min_{x_{ij}>0} \frac{x_{i0}}{x_{ij}}$$

для всех j, для которых $\Delta_j<0$. Затем следует сравнить произведения $\theta_0^{(j)}\Delta_j$. Индекс j, отвечающий минимальному произведению, определяет вектор, подлежащий включению в базис. Многочисленные расчеты показывают, что обычно к решению задачи быстрее приводит более простой путь, когда в базис вводится вектор A_k с наименьшей оценкой Δ_k. При этом θ_0 в каждой итерации определяется только один раз и количество вычислений на каждом шаге заметно уменьшается. В настоящем параграфе вычислительная схема описывается применительно к указанному простому способу выбора вектора, включаемого в базис.

Выводу из базиса подлежит вектор, расположенный в позиции базиса, на которой достигается

$$\theta_0 = \min_{x_{ik} > 0} \frac{x_{i0}}{x_{ik}}$$

(k — номер вектора, включаемого в базис). Если θ_0 достигается на нескольких векторах, то из базиса исключается любой из них; для определенности можно исключать, например, вектор, отвечающий меньшему номеру позиции в базисе. Это простое правило не исключает возможности цикла. Однако зацикливание в задачах линейного программирования крайне редкое явление, и переход к более громоздкому правилу, гарантирующему от зацикливания (см. п. 2.3), следует рекомендовать лишь в случае, если цикл будет обнаружен. После устранения цикла целесообразно снова вернуться к упрощенному правилу определения вектора, подлежащего исключению из базиса.

После того как определен номер вектора, который должен быть включен в базис, и позиция базиса, в которой его следует расположить (позиция вектора, исключаемого из базиса), можно приступить к вычислению параметров очередного опорного плана. Определение базисных переменных нового опорного плана, коэффициентов разложения векторов условий по векторам нового базиса, оценок векторов условий относительности нового базиса и значения линейной формы на новом плане производится по рекуррентным формулам (1.12). Проведенные таким образом расчеты полностью подготавливают следующую итерацию.

2.2. Опишем теперь порядок вычислений в отдельной итерации.

Пусть l-я итерация закончена. В результате заполнена таблица l (см. табл. 5.1) за исключением ее последнего столбца.

При заполнении таблиц мы придерживаемся следующих правил. Позиция таблицы, которая не должна заполняться, прочеркивается. Позиции таблицы, которые должны заполняться нулями, оставляют незаполненными.

В первом столбце (№) таблицы указываются номера строк. Номера первых m строк совпадают с номерами позиций базиса. Во втором столбце (C_X) указаны коэффициенты c_{s_i} линейной формы при базисных переменных.

Таблица 5.1

Таблица l

№	C_X	$Б_X$	A_0	A_1	A_2	...	A_k	...	A_n	θ
1	c_{s_1}	A_{s_1}	$x_{10}^{(l)}$	$x_{11}^{(l)}$	$x_{12}^{(l)}$	...	$x_{1k}^{(l)}$	...	$x_{1n}^{(l)}$	
2	c_{s_2}	A_{s_2}	$x_{20}^{(l)}$	$x_{21}^{(l)}$	$x_{22}^{(l)}$	...	$x_{2k}^{(l)}$	...	$x_{2n}^{(l)}$	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	...	⋮	⋮
r	c_{s_r}	A_{s_r}	$x_{r0}^{(l)}$	$x_{r1}^{(l)}$	$x_{r2}^{(l)}$	...	$x_{rk}^{(l)}$	...	$x_{rn}^{(l)}$	θ_0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	...	⋮	⋮
m	c_{s_m}	A_{s_m}	$x_{m0}^{(l)}$	$x_{m1}^{(l)}$	$x_{m2}^{(l)}$	...	$x_{mk}^{(l)}$	...	$x_{mn}^{(l)}$	
$m+1$	—	—	$L^{(l)}$	$\Delta_1^{(l)}$	$\Delta_2^{(l)}$	...	$\Delta_k^{(l)}$	...	$\Delta_n^{(l)}$	

Столбец ($Б_X$) содержит векторы базиса A_{s_i}. В следующем столбце ($A_0 = B$) выписаны базисные компоненты x_{i0} опорного плана (коэффициенты разложения вектора ограничений B по векторам базиса). Столбцы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ содержат коэффициенты x_{ij} разложения соответствующих векторов условий A_j по векторам базиса. Говоря об элементах столбцов, мы здесь имели в виду только элементы первых m строк таблицы. Последняя $(m+1)$-я строка таблицы заполняется оценками $\Delta_j^{(l)}$ векторов условий A_j относительно базиса. В $(m+1)$-й позиции столбца $A_0 = B$ указывается значение линейной формы $L(X^{(l)})$. Напомним, что в предыдущем параграфе мы обозначили

$$\Delta_j^{(l)} = x_{m+1,\,j}^{(l)}; \qquad L(X^{(l)}) = x_{m+1,\,0}.$$

Индекс l, указывающий номер итерации, мы будем опускать каждый раз, когда это не может вызвать недоразумений.

Столбцы A_0, A_1, ..., A_n (все $m+1$ позиций) будем называть *главной частью* таблицы. Главная часть таблицы представляет, таким образом, матрицу $\| x_{ij}^{(l)} \|$, где $i=1, 2, \ldots$ $\ldots, m+1$; $j=0, 1, 2, \ldots, n$.

Вычисления в $(l+1)$-й итерации приводят к заполнению столбца θ таблицы l и главной части $(l+1)$-й таблицы.

Первый этап $(l+1)$-й итерации начинается с просмотра $(m+1)$-й строки таблицы l. Чтобы установить, имеет ли место случай 1° (оптимальность плана), необходимо выделить векторы с отрицательными оценками. Если все $\Delta_j = x_{m+1,\, j} \geqslant 0$ $(j=1, 2, \ldots, n)$, то опорный план, полученный после l-й итерации, является оптимальным планом задачи. Установление этого факта завершает решение задачи. Пусть теперь в последней строке таблицы l имеются отрицательные оценки. Чтобы установить, имеет ли место случай 2° (неразрешимость задачи), следует просмотреть столбцы A_j с $\Delta_j < 0$ и проверить знаки их элементов. Наличие по крайней мере одного столбца A_j, для которого $\Delta_j < 0$ и все $x_{ij} \leqslant 0$ $(i=1, 2, \ldots, m)$, свидетельствует о неразрешимости задачи (случай 2°). Установив этот факт, прекращаем вычисления.

Случай 3° имеет место, если в каждом столбце A_j, для которого $\Delta_j < 0$, содержится по крайней мере один положительный коэффициент x_{ij}. В этом случае следует перейти ко второму этапу итерации.

В базис вводится вектор A_k с наименьшей оценкой

$$\Delta_k = \min_i \Delta_j.$$

После выбора A_k заполняется последний столбец таблицы l — столбец θ. В столбец θ записываются отношения базисных переменных x_{i0} (элементы столбца $A_0 = B$) к соответствующим составляющим x_{ik} (элементы столбца A_k). При этом заполняются только те позиции столбца θ, которым соответствуют положительные x_{ik}. Наименьший элемент столбца θ обозначается через θ_0. Вектор базиса A_{s_r}, на котором достигается θ_0, подлежит исключению из базиса. Если опорный план $X^{(l+1)}$ оказывается вырожденным и θ_0 достигается вследствие этого на нескольких позициях базиса, следует, как уже указывалось, исключить из базиса вектор, отвечающий любой из этих позиций. При установлении цикла используется правило, приведенное в п. 2.3.

Столбец A_k, отвечающий вектору, вводимому в базис, и r-я строка, соответствующая вектору, исключаемому из базиса, выделяются (обводятся рамкой). Столбец A_k и r-я строка называются соответственно *направляющим столбцом* и *направляющей строкой* преобразования. Элемент x_{rk}, расположенный на пересечении направляющего столбца и направляющей строки, называется *направляющим элементом.*

После выделения направляющего элемента можно перейти к заполнению $(l+1)$-й таблицы. В r-ю позицию столбца $Б_X$ вносится вектор A_k, который, в соответствии с занимаемой позицией, обозначается в $(l+1)$-й таблице как A_{s_r}. В остальные позиции столбца $Б_X$ вносятся те же векторы, что и в таблице l. Строки, отвечающие вектору, введенному в базис на предыдущей итерации, и вектору, подлежащему исключению из базиса (направляющие строки предыдущей и данной итераций), отмечаются стрелками.

Заполнение главной части $(l+1)$-й таблицы производится по рекуррентным формулам (1.12). Прежде всего заполняется r-я строка $(l+1)$-й таблицы. В соответствии с рекуррентной формулой для получения r-й строки $(l+1)$-й таблицы необходимо разделить r-ю строку таблицы l на направляющий элемент x_{rk}:

$$x_{rj}^{(l+1)} = \frac{x_{rj}^{(l)}}{x_{rk}^{(l)}}; \qquad j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{2.1}$$

Чтобы заполнить i-ю строку $(l+1)$-й таблицы ($i = 1,\ 2,\ \ldots$ $\ldots,\ m,\ m+1;\ i \neq r$), следует в соответствии с рекуррентными формулами вычесть из i-й строки таблицы l r-ю строку $(l+1)$-й таблицы, умноженную на $x_{ik}^{(l)}$:

$$x_{ij}^{(l+1)} = x_{ij}^{(l)} - \frac{x_{rj}^{(l)}}{x_{rk}^{(l)}}\, x_{ik}^{(l)} = x_{ij}^{(l)} - x_{rj}^{(l+1)}\, x_{ik}^{(l)}, \tag{2.2}$$

$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m,\ m+1;\ i \neq r;\ j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Заполнение главной части $(l+1)$-й таблицы завершает $(l+1)$-ю итерацию. Отправляясь от главной части $(l+1)$-й таблицы, проводят $(l+2)$-ю итерацию по тем же правилам, по которым проводилась $(l+1)$-я итерация, исходя из таблицы l. Рассуждения § 2 предыдущей главы гарантируют завершение итеративного процесса определением оптимального плана или установлением неразрешимости задачи.

Все таблицы алгоритма заполняются по одним и тем же правилам. Некоторую особенность представляет только заполнение таблицы 0, с которой начинаются вычисления. Таблица 0 содержит дополнительную строку C, в которую вносятся коэффициенты c_j линейной формы. Исходный базис и базисные компоненты исходного опорного плана предполагаются заданными. Они заполняют соответствующие позиции столбцов $Б_X$ и $A_0 = B$. Элементы x_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m;$ $j = 1, 2, \ldots, n)$ предполагаются также известными. Когда исходный базис состоит из единичных векторов, то $x_{ij} = a_{ij}$, $x_{i0} = b_i$. В ряде более сложных случаев можно указать некоторые искусственные приемы вычисления x_{ij}. В отдельных случаях приходится вычислять коэффициенты x_{ij} из систем линейных уравнений.

Если исходный план не задается заранее, то, используя методы, описанные в § 8, можно одновременно с начальным планом определить все связанные с ним параметры, необходимые для заполнения таблицы 0.

Элементы $(m+1)$-й строки таблицы 0 вычисляются по формулам

$$x_{m+1,\,j} = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} c_{si} - c_j, \qquad j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{2.3}$$

(Напомним, что $c_0 = 0$ и

$$x_{m+1,\,0} = \sum_{i=1}^{m} x_{i0} c_{si} = L(X).)$$

Таким образом, для получения $(m+1)$-й строки таблицы 0 следует вычесть из строки произведений столбцов A_j на столбец C_X, окаймляющий таблицу слева, строку C, окаймляющую таблицу сверху.

Главная часть таблицы 0 содержит все исходные данные, необходимые для проведения первой итерации. Формулы (2.3) могут быть, конечно, использованы для непосредственного подсчета элементов последней строки любой таблицы первого алгоритма.

Возможность определения $x_{m+1, j}$ двумя способами обеспечивает контроль вычислений на любом шаге метода. Через определенное количество итераций целесообразно сравнивать элементы $m+1$-й строки таблицы, полученные по рекуррентным формулам, со значениями линейной формы и оценок Δ_j,

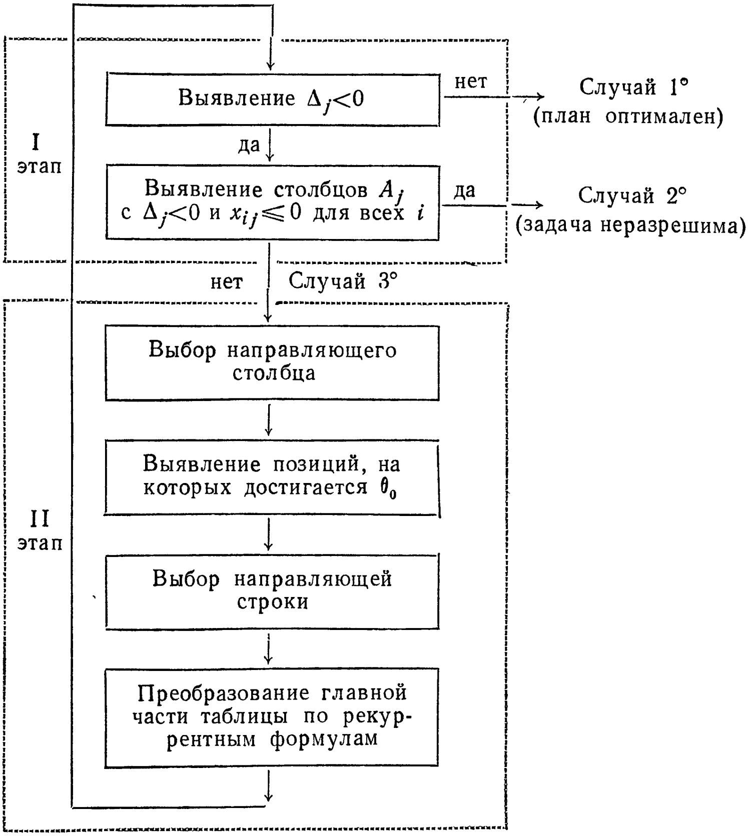


Рис. 5.1.

вычисленными непосредственно по формулам (2.3). Если значения линейной формы, полученные двумя способами, не совпадут между собой, необходимо в первую очередь проверить, являются ли элементы столбца A_0 планом задачи.

Если x_{i0} не удовлетворяют условиям задачи, целесообразно повторить все вычисления, начиная с итерации, на которой проводился предшествующий контроль. Пусть теперь значения линейной формы, полученные двумя способами, совпадают между собой, но для некоторых j оба способа привели к разным значениям оценок Δ_j. В этом случае следует заново разложить соответствующие векторы условий A_j по векторам базиса. Решение нескольких систем линейных уравнений, различающихся только правыми частями, удобно производить по методу Гаусса (см. п. 2.7 Дополнения и [110]).

На рис. 5.1 изображена блок-схема отдельной итерации решения задачи линейного программирования по первому алгоритму метода последовательного улучшения плана.

2.3. Чтобы завершить описание первого алгоритма, необходимо еще рассмотреть схему использования правила, гарантирующего от зацикливания в вырожденных задачах линейного программирования. В качестве векторов R_1, R_2, ..., R_m (см. § 6 предыдущей главы) при вычислениях по первому алгоритму естественно принять векторы A_{s_i} базиса опорного плана (предполагается, что нумерация векторов условий сохраняется в процессе вычислений). Векторы базиса удовлетворяют обоим требованиям, предъявляемым системе $(R_1, \ldots, R_m)$. Во-первых, векторы A_{s_i} линейно независимы. Во-вторых, базис опорного плана X является также базисом некоторого плана ε-задачи, у которой

$$B(\varepsilon) = B + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon^i A_{s_i}.$$

Составляющие опорного плана ε-задачи — компоненты разложения $B(\varepsilon)$ по векторам базиса плана X — равны

$$x_{i0}(\varepsilon) = x_{i0} + \varepsilon^i.$$

Следовательно, предложенное в § 6 гл. 5 правило, исключающее возможность зацикливания, может быть использовано при $R_i = A_{s_i}$. Выбор векторов базиса опорного плана X в качестве системы $\{R_i\}$ обусловлен тем, что в процессе решения задачи по первому алгоритму всегда имеются разложения этих векторов по текущему базису.

Применение правила, позволяющего избежать зацикливания, требует окаймления справа таблиц итераций, отвечающих вырожденным планам, столбцами θ', θ'', ...

В вырожденном случае

$$\theta_0 = \min_{x_{ik} > 0} \frac{x_{i0}}{x_{ik}}$$

достигается одновременно на ряде позиций. Зафиксируем $R_1 = A_{s_1}$ и поместим в столбец θ' отношения $\frac{x_{is_1}}{x_{ik}}$ для значений i, на которых достигается θ_0. Выберем θ_0' — наименьшее из этих числел. Вектор, на котором достигается θ_0', подлежит исключению из базиса. Если таких векторов несколько, то описанная процедура повторяется. В столбец θ'' помещаются отношения $\frac{x_{is_2}}{x_{ik}}$ для значений i, на которых достигается θ_0'. Вычисления продолжаются до тех пор, пока позиция вектора, подлежащего исключению из базиса, не определится однозначно.

2.4. Приведем оценку трудоемкости вычислений по первому алгоритму метода последовательного улучшения плана. Машинное время, потребное для решения задачи, определяется главным образом числом умножений и делений, с которым связан процесс определения оптимального плана. Операции сравнения, сложения и вычитания проводятся на универсальных вычислительных машинах значительно быстрее, чем умножение и деление. Время обращения к памяти мы здесь не учитываем. В первом алгоритме операция деления встречается дважды в каждой итерации: при заполнении строки таблицы, отвечающей вновь введенному в базис вектору $\left(x_{rj}' = \frac{x_{rj}}{x_{rk}},\ j = 0, 1, \ldots, n\right)$, и при вычислении столбца θ $\left(\theta = \frac{x_{i0}}{x_{ik}} \text{ при } x_{ik} > 0\right)$. Заполнение строки x_{rj}' требует $n - m + 1$ деление, а для вычисления элементов столбца θ необходимо не более m делений. Таким образом, общее количество делений в каждой итерации первого алгоритма не превышает $n + 1$. Операции умножения встречаются в первом алгоритме только при преобразовании таблиц по рекуррентным формулам (2.2):

$$x_{ij}^{(l+1)} = x_{ij}^{(l)} - x_{rj}^{(l+1)} x_{ik}^{(l)}; \qquad i = 1, 2, \ldots, m, m+1;$$
$$i \neq r; \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

При этом коэффициенты $x_{ij}^{(l+1)}$, соответствующие векторам базиса, не вычисляются (они равны нулю или единице). Каждая итерация требует, таким образом, $(n-m+1)m$ умножений.

Количество итераций, необходимое для решения задачи линейного программирования, зависит от конкретных особенностей задачи и от начального опорного плана. Приемлемых теоретических оценок числа итераций для общей задачи линейного программирования не существует. Опыт показывает, что, как правило, число итераций в различных задачах линейного программирования находится в пределах от m до $2m$.

Заметим, что для контрольных расчетов по первому алгоритму рекомендуется через определенное число итераций вычислять оценки Δ_j не только по рекуррентным формулам, но и непосредственно из соотношений (2.3). Для этого требуется $m(n+1)$ умножений. Если не проверять оценки векторов базиса ($\Delta_j=0$ для $i \in I_x$), то дополнительное число умножений, с которым связан контроль, равно $m(n-m+1)$, т. е. столько же, сколько необходимо для проведения отдельной итерации. Контроль вычислений при первом алгоритме представляет, таким образом, достаточно трудоемкую работу. Нам не известны оценки, позволяющие указать число итераций, после которого рационально производить контроль. Исследование этого вопроса, по крайней мере для отдельных классов задач, представляет практический интерес.

§ 3. Примеры

Проиллюстрируем порядок вычислений по первому алгоритму двумя примерами.

Пример 1. Требуется обратить в максимум линейную форму

$$L(X)=3x_1-x_2+8x_3+2x_4-x_5+9x_6$$

при условиях:

$$\begin{aligned}
-6x_1+9x_2+3x_3 \qquad\qquad -2x_5-\ x_6 &\leqslant 12,\\
-4x_2+3x_3-3x_4+\ x_5-\ x_6 &\leqslant 5,\\
2x_1+8x_2-5x_3+6x_4-8x_5+4x_6 &\leqslant 20,\\
-\ x_1-3x_2-4x_3-8x_4 \qquad\qquad +4x_6 &\leqslant 10,\\
5x_1+\ x_2+2x_3+4x_4+9x_5+5x_6 &\leqslant 24,\\
x_j \geqslant 0, \quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ 6.
\end{aligned}$$

Чтобы привести задачу к канонической форме, введем пять дополнительных неотрицательных переменных $x_7, \ldots, x_{11}$. Им соответствуют единичные векторы условий. Естественно выбрать единичные векторы $A_7, \ldots, A_{11}$ в качестве исходного базиса. Весь процесс решения задачи приведен в таблицах 5.2. Таблицы состоят из частей, отвечающих отдельным итерациям метода и пронумерованных в соответствии с номерами итераций.

Главную часть таблицы 0 (исключая ее верхнюю и последнюю строки) заполняют составляющие вектора ограничений (A_0) и векторов условий ($A_1, A_2, \ldots, A_{11}$). Компоненты вектора ограничений входят в таблицу как базисные составляющие начального опорного плана, а компоненты векторов условий — как коэффициенты разложения векторов A_j по векторам единичного базиса.

Столбец C_X не заполняется, поскольку дополнительным переменным соответствуют нулевые коэффициенты линейной формы.

Последняя строка таблицы 0 содержит значения оценок Δ_j векторов условий. Параметры $\Delta_j = x_{m+1,\, j}$ вычисляются по формулам (2.3). В нашем случае $c_{s_i} = 0$. Поэтому в строку Δ_j переносятся элементы верхней строки (C) с обратным знаком. Значение линейной формы L на начальном плане равно нулю.

Среди оценок Δ_j векторов условий имеются отрицательные величины. Следовательно, исходный опорный план не является оптимальным. В разложении каждого из векторов условий с отрицательными оценками содержатся положительные коэффициенты x_{ij}. Следовательно, нет оснований считать задачу неразрешимой. Мы имеем, таким образом, дело со случаем 3°.

Наименьшая оценка $\Delta_j = -9$ соответствует вектору условий A_6. Вектор A_6 подлежит вводу в базис. Последние три элемента (x_{36}, x_{46}, x_{56}) направляющего столбца A_6 положительны. Поэтому значения θ вычисляются и записываются только для третьей, четвертой и пятой позиций столбца θ. Наименьший элемент последнего столбца соответствует четвертой позиции базиса и равен

$$\theta_0 = \frac{x_{40}}{x_{46}} = \frac{10}{4} = 2{,}5.$$

Это значит, что четвертая строка является направляющей строкой преобразования и помещенный в ней вектор A_{10} подлежит исключению из базиса.

Переходим к составлению табл. 1, отвечающей первой итерации. В столбце $Б_X$ в четвертой позиции базиса место вектора A_{10} занимает вектор условий A_6. Соответствующий ему коэффициент линейной формы c_6 помещается в столбец C_X. Главная часть табл. 1 заполняется по данным предыдущей таблицы (0) в соответствии с рекуррентными формулами

$$x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{4j}}{x_{46}} x_{i6}, \qquad i = 0, 1, 2, 3, 5, 6; \quad j = 0, 1, 2, \ldots, 11; \qquad (3.1)$$

$$x'_{4j} = \frac{x_{4j}}{x_{46}}; \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, 11. \qquad (3.2)$$

Направляющий элемент равен $x_{46} = 4$. Следовательно, четвертая строка табл. 1 получается из четвертой строки таблицы 0 делением

Таблица 5.2 (0—7)

C	—	—	—	—	3	−1	8	2	−1	9						—	
	№	C_X	$Б_X$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	θ	Номер таблицы
	1		A_7	12	−6	9	3		−2	−1	1					—	
	2		A_8	5		−4	3	−3	1	−1		1				—	
	3		A_9	20	2	8	−5	6	−8	4			1			5	0
←	4		A_{10}	10	−1	−3	−4	−8		4				1		2,5	
	5		A_{11}	24	5	1	2	4	9	5					1	4,8	
	6	—	—		−3	1	−8	−2	1	−9						—	
	1		A_7	14,5	−6,25	8,25	2	−2	−2		1			0,25		—	
	2		A_8	7,5	−0,25	−4,75	2	−5	1			1		0,25		—	
←	3		A_9	10,0	3,00	11,00	−1	14	−8				1	−1,00		0,714	1
→	4	9	A_6	2,5	−0,25	−0,75	−1	−2		1				0,25		—	
	5		A_{11}	11,5	6,25	4,75	7	14	9					−1,25	1	0,822	
	6	—	—	22,5	−5,25	−5,75	−17	−20	1					2,25		—	
	1		A_7	15,929	−5,821	9,821	1,857		−3,143		1		0,143	0,107		8,577	
	2		A_8	11,071	0,821	−0,821	1,643		−1,857			1	0,357	−0,107		6,739	
→	3	2	A_4	0,714	0,214	0,786	−0,071	1	−0,571				0,071	−0,071		—	2
	4	9	A_6	3,929	0,179	0,821	−1,143		−1,143	1			0,143	0,107		—	
←	5		A_{11}	1,500	3,250	−6,250	8,000		17,000				−1,000	−0,250	1	0,188	
	6	—	—	36,786	−0,964	9,964	−18,429		−10,429				1,429	0,821		—	

Продолжение

C	—	—	—	—	3	−1	8	2	−1	9						—	Номер таблицы
	№	C_X	$Б_X$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	θ	
	1		A_7	15,580	−6,576	11,272			−7,089		1		0,375	0,165	−0,232	1,382	
	2		A_8	10,736	0,154	0,462			−5,348				0,562	−0,056	−0,205	23,295	
←	3	2	A_4	0,728	0,243	0,730		1	−0,420				0,062	−0,074	0,009	0,997	3
	4	9	A_6	4,143	0,643	−0,071			1,286	1				0,071	0,143	—	
→	5	8	A_3	0,188	0,406	−0,781	1		2,125				−0,125	−0,031	0,125	—	
	6	—	—	40,241	6,522	−4,433			28,732				−0,875	0,246	2,304	—	
	1		A_7	4,343	−10,333			−15,443	−0,609		1		−0,590	1,303	0,370		
	2		A_8	10,303				−0,633	−5,803			1	0,523	−0,009	−0,211	19,702	
⇄	3	−1	A_2	0,997	0,333	1		1,370	−0,575				0,086	−0,101	0,012	11,643	4
	4	9	A_6	4,214	0,667			0,098	1,245	1			0,006	0,064	0,144	689,0	
	5	8	A_3	0,966	0,667		1	1,070	1,676				−0,058	−0,110	0,135	—	
	6	—	—	44,661	8,000			6,073	26,183				−0,495	−0,202	2,358	—	
	1		A_7	11,214	−8,036	6,893		−6	−4,571		1			0,607	−0,286	18,471	
←	2		A_8	4,214	−2,036	−6,107		−9	−1,571			1		0,607	−0,286	6,941	
→	3		A_9	11,643	3,893	11,697		16	−6,714				1	−1,179	0,143	—	5
	4	9	A_6	4,143	0,643	−0,071			1,286	1				0,071	0,143	58,000	
	5	8	A_3	1,643	0,893	0,679	1	2	1,286					−0,179	0,143	—	
	6	—	—	50.429	9,929	5,786		14	22,857					−0,786	2,429	—	

Продолжение

C	—	—	—	—	3	−1	8	2	−1	9						—	Номер таблицы
	№	C_X	$Б_X$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	θ	
←	1		A_7	7,000	−6,000	13,000		3,000	−3,000		1	−1				0,538	6
→	2		A_{10}	6,941	−3,353	−10,059		−14,824	−2,588			1,647		1	−0,471	—	
	3		A_9	19,824	−0,059	−0,176		−1,471	−9,765			1,941	1		−0,412	—	
	4	9	A_6	3,647	0,882	0,647		1,059	1,471	1		−0,118			0,176	5,636	
	5	8	A_3	2,882	0,294	−1,118	1	−0,647	0,824			0,294			0,059	—	
	6	—	—	55,882	7,294	−2,118		2,353	20,824			1,294			2,059	—	
→	1	−1	A_2	0,538	−0,462	1		0,231	−0,231		0,077	−0,077					7
	2		A_{10}	12,357	−7,995			−12,502	−4,910		0,774	0,873		1	−0,471		
	3		A_9	19,919	−0,140			−1,430	−9,805		0,014	1,928	1		−0,412		
	4	9	A_6	3,299	1,181			0,910	1,620	1	−0,050	−0,068			0,176		
	5	8	A_3	3,484	−0,223		1	−0,389	0,566		0,086	0,208			0,059		
	6	—	—	57,023	0,632			2,842	20,335		0,163	1,131			2,059	—	

C	—	—	—	—	9		−8		5	−3
	№	C_X	$Б_X$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
←	1		A_{10}	24	6		2		2	
	2		A_{11}	30		2		3		
	3		A_{12}	40	9	1			5	1
	4		A_{13}	36			6			
	5		A_{14}	20				4		
	6		A_{15}	48	3		1			8
	7	—	—		−9		8		−5	3
→	1	9	A_1	4	1		0,333		0,333	
	2		A_{11}	30		2		3		
	3		A_{12}	4		1	−3		2	1
	4		A_{13}	36			6			
	5		A_{14}	20				4		
←	6		A_{15}	36					−1	8
	7	—	—	36			11		−2	3
	1	9	A_1	4	1		0,333		0,333	
	2		A_{11}	30		2		3		
	3		A_{12}	4		1	−3		2	1
	4		A_{13}	27			6		0,25	−2
←	5		A_{14}	20				4		
→	6	8	A_9	9					−0,25	2
	7	—	—	108			11		−4	19

Таблицы 5.3 (0—5)

	8	8							—	Номер таблицы
A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}	b	
	3		1						4	
5	9			1					—	
					1				4,444	
2		1				1			—	0
	8						1		—	
4		4						1	16	
	—8	—8							—	
	0,5		0,167						—	
5	9			1					—	
	—4,5		—1,5		1				—	
2		1				1			36	1
	8						1		—	
4	—1,5	4	—0,5					1	9	
	—3,5	—8	1,5						—	
	0,5		0,167						8	
5	9			1					3,333	
	—4,5		—1,5		1				—	
1	0,375		0,125			1		—0,25	72	2
	8						1		2,5	
1	—0,375	1	—0,125					0,25	—	
8	—6,5		0,5					2	—	

C	—	—	—	—	9		−8		5
	№	C_X	$Б_X$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
	1	9	A_1	2,75	1		0,333	−0,25	0,333
	2		A_{11}	7,5		2		−1,5	
←	3		A_{12}	15,25		1	−3	2,25	2
	4		A_{13}	26,062			6	−0,188	0,25
→	5	8	A_8	2,50				0,5	
	6	8	A_9	9,938				0,188	−0,25
	7	—	—	124,25			11	3,25	−4
←	1	9	A_1	0,208	1	−0,167	0,833	−0,625	
	2		A_{11}	7,5		2		−1,5	
→	3	5	A_5	7,625		0,5	−1,5	1,125	1
	4		A_{13}	24,156		−0,125	6,375	−0,469	
	5	8	A_8	2,5				0,5	
	6	8	A_9	11,844		0,125	−0,375	0,469	
	7	—	—	154,75		2	5	7,75	
→	1		A_{10}	0,5	2,4	−0,4	2	−1,5	
	2		A_{11}	7,5		2		−1,5	
	3	5	A_5	8	1,8	0,2			1
	4		A_{13}	24	−0,75		5,75		
	5	8	A_8	2,5				0,5	
	6	8	A_9	12	0,75		0,25		
	7	—	—	156	6	1	10	4	

Продолжение

−3		8	8							—	
A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}	θ	Номер таблицы
				0,167				−0,062		8,25	3
	5				1			−1,125		—	3
1				−1,5		1		0,562		7,625	3
−2	1			0,125			1	−0,047	−0,25	104,25	3
		1						0,125		—	3
2	1		1	−0,125				0,047	0,25	—	3
19	8			0,5				0,812	2	—	3
−0,167				0,417		−0,167		−0,156		0,5	4
	5				1			−1,125		—	4
0,5				−0,75		0,5		0,281		—	4
−2,125	1			0,312		−0,125	1	−0,117	−0,25	77,3	4
		1						0,125		—	4
2,125	1		1	−0,312		0,125		0,117	0,25	—	4
21	8			−2,5		2		1,938	2	—	4
−0,4				1		−0,4		−0,375			5
	5				1			−1,125			5
0,2						0,2					5
−2	1						1		−0,25		5
		1						0,125			5
2	1		1						0,25		5
20	8					1		1	2	—	5

на 4. Остальные элементы главной части табл. 1, в том числе составляющие опорного плана и оценки векторов условий, вычисляются по рекуррентным формулам (3.1). Например,

$$x'_{23} = x_{23} - \frac{x_{43}}{x_{46}} x_{26} = 3 - \frac{-4(-1)}{4} = 2,$$

$$x'_8 = x'_{20} = x_{20} - \frac{x_{40}}{x_{46}} x_{26} = 5 - \frac{10(-1)}{4} = 7{,}5,$$

$$\Delta'_2 = x'_{02} = x_{02} - \frac{x_{42}}{x_{46}} x_{06} = 1 - \frac{-3(-9)}{4} = -5{,}75.$$

Итерация заканчивается заполнением главной части таблицы. Следующая итерация ведется по тем же правилам. Стрелками в каждой таблице отмечены векторы, введенные в базис на предыдущем шаге, и векторы, подлежащие исключению из базиса. В табл. 7 все значения оценок Δ_j неотрицательны. Это значит, что план $X^{(7)}$ является решением задачи.

Для контроля вычислений целесообразно на некоторых этапах расчета определять оценки Δ_j не только по рекуррентным формулам (2.2), но и непосредственно по формуле (2.3). Вычислим, например, значение Δ'_2 в табл. 1:

$$\Delta'_2 = \sum_{i=1}^{5} x'_{i2} c_{s_i} - c_2 =$$
$$= 8{,}25.0 - 4{,}75.0 + 11.0 - 0{,}75.9 + 4{,}75.0 - (-1) = -5{,}75.$$

Тот же результат мы получили выше по рекуррентной формуле (3.1).

Пример 2. В таблицах 5.3 приведена последовательность решения примера, в котором требуется вычислить минимум линейной формы,

$$\tilde{L}(X) = -9x_1 + 8x_3 - 5x_5 + 3x_6 - 8x_8 - 8x_9,$$

при условиях:

$$\begin{array}{l}
6x_1 + 2x_3 + 2x_5 + 3x_8 \leqslant 24,\\
2x_2 + 3x_4 + 5x_7 + 9x_8 \leqslant 30,\\
9x_1 + x_2 + 5x_5 + x_6 \leqslant 40,\\
6x_3 + 2x_7 + x_9 \leqslant 36,\\
+4x_4 + 8x_8 \leqslant 20,\\
3x_1 + x_3 + 8x_6 + 4x_7 + 4x_9 \leqslant 48,\\
x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 9.
\end{array}$$

Эта задача эквивалентна задаче максимизации линейной формы

$$L(X) = 9x_1 - 8x_3 + 5x_5 - 3x_6 + 8x_8 + 8x_9$$

при тех же условиях.

Таблицы 5.3 не требуют специальных пояснений. Решение задачи получается за пять итераций (итерация 0 не считается при этом самостоятельным шагом; главная часть таблицы 0 содержит данные, подготавливающие первую итерацию).

§ 4. Координатная форма метода последовательного улучшения плана

4.1. В предыдущей главе при описании метода последовательного улучшения плана мы отправлялись от таких понятий, как вектор условий, вектор ограничений, базис опорного плана. Переход от одного опорного плана к следующему связывался с заменой одного из векторов базиса другим, а параметры метода в каждой итерации определялись разложением векторов условий и вектора ограничений по векторам базиса. Приведенное изложение метода естественно называть векторной формой метода последовательного улучшения плана.

Возможны и иные подходы к описанию метода и построению соответствующих алгоритмов. В частности, структура таблиц первого алгоритма непосредственно определяется так называемой координатной формой метода последовательного улучшения плана. Рассмотрение координатной формы, конечно, не вносит ничего нового в существо метода. Тем не менее, описание новой формы метода, подчеркивая отдельные его детали, привлекает другие аналогии и, таким образом, содействует усвоению как теоретических основ метода, так и его вычислительной схемы.

Запишем задачу линейного программирования в канонической форме.

Требуется обратить в максимум линейную форму

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{4.1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} A_j x_j = B, \tag{4.2}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j=1, 2, \ldots, n. \tag{4.3}$$

Рассмотрим некоторый опорный план $X^0=(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ задачи (4.1)—(4.3) с базисом $A_{s_1}, \ldots, A_{s_m}$. Обозначим множество индексов $s_1, \ldots, s_m$ через I_0, а матрицу векторов базиса $A_j (j \in I_0)$ через A_{X^0}. Таким образом,

$$A_{X^0} = (A_{s_1}, \ \ldots, \ A_{s_m}).$$

Пусть $X_j^0 = (x_{1j}^0, \ \ldots, \ x_{mj}^0)^T$ — вектор, составленный из коэффициентов разложения векторов $A_j (j = 0, 1, \ldots, n)$ по базису плана X^0:

$$A_j = A_{X^0} X_j^0,$$

или, что то же самое,

$$X_j^0 = A_{X^0}^{-1} A_j.$$

Умножим слева условия (4.2) на $A_{X^0}^{-1}$. Получим

$$\sum_{j=1}^{n} X_j^0 x_j = X_0^0. \qquad (4.4)$$

Векторы $X_{s_i}^0$, отвечающие базисным компонентам опорного плана X, являются единичными векторами. Поэтому можно переписать соотношение (4.4) в виде следующей системы равенств:

$$x_{s_i} + \sum_{j \notin I_0} x_{ij}^0 x_j = x_{s_i}^0, \qquad i = 1, 2, \ \ldots, \ m.$$

Свяжем, как обычно, обозначения базисных переменных опорного плана с номерами позиций, занимаемых соответствующими векторами в базисе. Тогда

$$x_{s_i} = x_{i0}^0 - \sum_{j \notin I_0} x_{ij}^0 x_j, \qquad i = 1, \ 2, \ \ldots, \ m. \qquad (4.5)$$

Учитывая полученные соотношения, перепишем выражение для линейной формы (4.1)

$$\begin{aligned} L(X) &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} c_{s_i} x_{s_i} + \sum_{j \notin I_0} c_j x_j = \\ &= \sum_{i=1}^{m} c_{s_i} \Big(x_{i0}^0 - \sum_{j \notin I_0} x_{ij}^0 x_j\Big) + \sum_{j \notin I_0} c_j x_j = \\ &= \sum_{i=1}^{m} c_{s_i} x_{i0}^0 + \sum_{j \notin I_0} x_j \Big(c_j - \sum_{i=1}^{m} c_{s_i} x_{ij}^0\Big), \end{aligned}$$

откуда

$$L(X) = L(X^0) - \sum_{j \notin I_0} \Delta_j^0 x_j. \tag{4.6}$$

Введем обозначения

$$\left.\begin{aligned} L(X) = x_{s_{m+1}}; \quad L(X^0) = x^0_{s_{m+1}} = x^0_{m+1,\,0}; \\ \Delta_j^0 = x^0_{m+1,\,j}. \end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

В новых обозначениях соотношения (4.5) и (4.6) записываются в виде единой системы

$$x_{s_i} = x^0_{i0} - \sum_{j \notin I_0} x^0_{ij} x_j, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m,\ m+1. \tag{4.8}$$

Формулы (4.8) — это другая запись линейной формы (4.1) и условий (4.2) задачи, в которой матрица условий и коэффициенты линейной формы заменены параметрами известного опорного плана.

Сравним формулы (4.8) с таблицей 0 первого алгоритма. Как видим, в $(m+1)$ строках таблицы в той же последовательности, что и в равенствах (4.8), записаны параметры, характеризующие исходный опорный план. Последнее $(m+1)$-е соотношение системы (4.8) (в прежних обозначениях формула (4.6)) показывает, что если все $\Delta_j^0 \geqslant 0$, то при $x_j \geqslant 0$ $(j \notin I_0)$ линейная форма $L(X)$ не может превзойти $L(X^0)$; опорный план X^0 оказывается оптимальным планом задачи (случай 1°). Если по крайней мере для одного $\Delta_j^0 < 0$ все $x^0_{ij} < 0$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$, то, как видно из (4.8), неограниченное увеличение x_j приводит к планам X, для которых $L(X)$ беспредельно растет. Следовательно, условие

$$x^0_{m+1,\,j} = \Delta_j^0 < 0$$

и

$$x^0_{ij} < 0$$

соответствует неразрешимости задачи (случай 2°).

Пусть теперь для всех индексов j, для которых $\Delta_j^0 < 0$, имеется по крайней мере одно $x^0_{ij} > 0$ (случай 3°). Покажем, каким образом можно перейти к плану X' и увеличить при этом значение линейной формы.

Выберем индекс $k \notin I_0$, для которого

$$x^0_{m+1,\,k} = \Delta^0_k < 0.$$

Выразим x_k из одного уравнения системы (4.8) через другие переменные. Пусть номер i уравнения, из которого вычисляется x_k, равен r. Решая это уравнение относительно x_k, получим

$$x_k = x''_k - \sum_{j \notin I_1} x'_{rj} x_j,$$

где

$$x'_k = \frac{x^0_{r0}}{x^0_{rk}}, \quad x'_{kj} = \frac{x^0_{rj}}{x^0_{rk}},$$

а множество индексов I_1 образуется из I_0, если заменить в нем индекс s_r на k. Введем обозначение $I_1 = \{s'_1, s'_2, \ldots, s'_m\}$, где $s'_i = s_i$ при $i \neq r$, а $s'_r = k$. Пусть, кроме того,

$$x'_k = x'_{s'_r} = x'_{r0}.$$

Тогда

$$x_{s'_r} = x'_{r0} - \sum_{j \notin I_1} x'_{rj} x_j. \tag{4.9}$$

Целесообразность введенных обозначений определяется тем, что переменные x_k и x'_k выделены из r-го уравнения системы (4.8).

Подставим выражение для $x_k = x_{s'_r}$ в другие уравнения системы (4.8). Получим

$$x_{s'_i} = x'_{i0} - \sum_{j \notin I_1} x'_{ij} x_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, m+1;$$
$$i \neq r, \tag{4.10}$$

где

$$x'_{ij} = x^0_{ij} - \frac{x^0_{rj}}{x^0_{rk}} x^0_{ik}.$$

Объединяя (4.9) и (4.10), запишем преобразованную систему условий (4.8) в виде

$$x_{s'_i} = x'_{i0} - \sum_{j \notin I_1} x'_{ij} x_j, \tag{4.11}$$

где

$$x'_{ij}=\begin{cases} x^0_{ij}-\dfrac{x^0_{rj}}{x^0_{rk}}x^0_{ik} & \text{при} \quad i\neq r,\\[2ex] \dfrac{x^0_{rj}}{x^0_{rk}} & \text{при} \quad i=r,\end{cases} \tag{4.12}$$

$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ m+1;\ j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

До сих пор индекс r предполагался произвольным. Чтобы гарантировать неотрицательность компонент x'_{i0} $(i=1,\ \ldots,\ m)$, необходимо подчинить выбор r условиям

$$x'_{i0}\geqslant 0, \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Как следует из (4.12), x'_{i0} при $x^0_{ik}\leqslant 0$ всегда положительны. При $x^0_{ik}>0$ для положительности x'_{i0} должно соблюдаться соотношение

$$\frac{x^0_{r0}}{x^0_{rk}}\leqslant\frac{x^0_{i0}}{x^0_{ik}}.$$

Следовательно, выбор r должен удовлетворять условию

$$\frac{x^0_{r0}}{x^0_{rk}}=\min_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ x_{ik}>0}}\frac{x^0_{i0}}{x^0_{ik}}. \tag{4.13}$$

Запишем равенство (4.12) для $i=m+1$ и $j=0$ в прежних обозначениях:

$$L(X')=L(X^0)-\frac{x^0_{r0}}{x^0_{rk}}\Delta^0_k,$$

где X^0 и X' — опорные планы задачи (4.1) — (4.3) с базисными компонентами $x^0_{s_i}$ и $x'_{s'_i}$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ соответственно.

При выбранных k и r и $\dfrac{x^0_{r0}}{x^0_{rk}}=\theta_0>0$

$$L(X')>L(X^0).$$

Таким образом, выбрав соответствующим образом индексы k и r, мы после тождественного преобразования системы (4.8) в систему (4.11) перешли от плана $X^0 \geqslant 0$ к плану $X' \geqslant 0$ и при этом получили, что $L(X') > L(X^0)$.

Структура системы (4.11), как и системы (4.8), такова, что если положить переменные x_j, стоящие под знаком суммы (внебазисные переменные), равными нулю, то получим опорный план и значение линейной формы задачи (4.1)—(4.3).

Сравним систему (4.11) с таблицей l (табл. 5.1) при $l=1$ вычислительной схемы первого алгоритма. Как видим, в таблице в той же последовательности, что и в правых частях системы (4.11), выписаны параметры опорного плана. Таким образом, таблицы первого алгоритма отражают не что иное, как последовательные преобразования, связанные с решением системы линейных уравнений методом полного исключения (методом Гаусса). Единственная особенность, которая превращает метод Гаусса решения системы уравнений в метод решения соответствующей задачи линейного программирования, это — специальный выбор направляющего элемента x_{rk} (выбор индексов r и k).

Можно сказать, что метод последовательного улучшения плана представляет собой процесс решения системы линейных уравнений — условий задачи по схеме полного исключения с особым правилом выбора направляющего элемента, обеспечивающим движение по планам (правило выбора строки r) и монотонный рост линейной формы (правило выбора столбца k). Как мы увидим далее, другие конечные методы линейного программирования также сводятся к схеме полного исключения, но с другими правилами выбора направляющего элемента.

§ 5. Второй алгоритм метода последовательного улучшения плана

5.1. Вторая форма показателя оптимальности приводит к еще одной реализации метода последовательного улучшения плана к так называемому *второму алгоритму*, или *методу обратной матрицы*.

Метод последовательного улучшения плана в форме, близкой к излагаемой в настоящем параграфе, был впервые применен Л. В. Канторовичем к одной из частных задач линейного программирования [66], [63]. Позже (в 1951 г.) этот алгоритм, как одна из реализаций так называемого метода разрешающих множителей, был использован для решения общей задачи линейного программирования [67].

Будем рассматривать задачу линейного программирования в канонической форме (4.1)—(4.3). Пусть X—опорный план задачи с базисом $A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m}$. Обозначим множество индексов векторов базиса (номера базисных переменных) через I_X.

Составим квадратную матрицу A_X порядка m. Столбцами A_X являются векторы условий базиса. Поэтому определитель матрицы A_X отличен от нуля, и существует обратная матрица A_X^{-1}. Покажем, что с помощью матрицы A_X^{-1} и условий задачи можно составить достаточно компактную схему вычисления параметров, необходимых для последовательного улучшения плана.

Для реализации метода последовательного улучшения плана необходимо, имея начальный опорный план и его базис, уметь на каждом шаге выбирать вектор условий A_k, подлежащий включению в базис, и вектор A_{s_r}, подлежащий удалению из базиса. Вектор A_k—это вектор условий с отрицательной относительной оценкой Δ_k (обычно $\Delta_k = \min\limits_j \Delta_j$). Вектор A_{s_r}—это вектор, на котором достигается минимум отношения $\frac{x_{i0}}{x_{ik}}$ при $x_{ik} > 0$. Таким образом, для перехода от одного плана к другому с бо́льшим значением линейной формы необходимо уметь вычислять на каждом шаге базисные компоненты x_{i0} опорного плана, оценки Δ_j векторов условий относительно базиса опорного плана и коэффициенты x_{ik} разложения вектора A_k, подлежащего вводу в базис, по текущему базису.

В первом алгоритме для определения перечисленных параметров на каждой итерации вычислялись коэффициенты разложения x_{ij} всех векторов условий A_j по векторам базиса. Как мы сейчас увидим, все параметры, необходимые для оценки плана и перехода к лучшему плану, можно получить, преобразовывая от шага к шагу элементы матрицы A_X^{-1}.

Действительно, базисные составляющие опорного плана получаются как элементы произведения матрицы A_X^{-1} на вектор ограничений B. Оценки Δ_j векторов условий можно, как видно из § 2 гл. 4, вычислять по формулам

$$\Delta_j = z_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i - c_j = (\Lambda, A_j) - c_j,$$

$$j = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.1}$$

где параметры λ_i удовлетворяют при $j \in I_X$ уравнениям

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_j = c_j,$$

или, что то же самое,

$$\Lambda A_X = C_X, \tag{5.2}$$

где C_X — вектор-строка из коэффициентов линейной формы, отвечающих базисным переменным. Следовательно,

$$\Lambda = C_X A_X^{-1}. \tag{5.3}$$

Формулы (5.1) и (5.3) позволяют, зная элементы обратной матрицы A_X^{-1} и условия задачи, вычислить оценки Δ_j векторов условий.

Коэффициенты x_{ik} разложения вектора A_k по текущему базису вычисляются как элементы произведения матрицы A_X^{-1} на вектор условий A_k. Коэффициенты x_{ik} вместе с базисными составляющими опорного плана определяют вектор, подлежащий исключению из базиса. Кроме того, знаки коэффициентов x_{ik} позволяют судить о неразрешимости задачи. Естественно, что неразрешимость задачи, если она имеет место, при втором алгоритме обнаруживается, вообще говоря, позже, чем при первом алгоритме, где есть возможность оценить знаки x_{ij} при всех векторах A_j с отрицательными оценками.

Таким образом, для реализации метода последовательного улучшения плана достаточно уметь вычислять на каждом шаге матрицу A_X^{-1}, обратную матрице, составленной из векторов текущего базиса.

Элементы столбцов обратной матрицы A_X^{-1} удобно рассматривать как коэффициенты e_{ij} разложения единичных векторов e_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ по векторам базиса. В § 1 были получены рекуррентные формулы (1.21), связывающие параметры e_{ij} двух последовательных итераций. Напомним, что e_{ij} при $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, m$ — коэффициенты разложения единичных векторов по векторам базиса;

$e_{i0} = x_{i0}$ — базисные переменные опорного плана; $e_{m+1,\,j} = \lambda_j$ — оценки условий задачи относительно данного плана; $e_{m+1,\,0} = \lambda_0 = L(X)$ — значение линейной формы.

Рекуррентные формулы (1.21) — основа второго алгоритма метода последовательного улучшения плана. Роль, которую играет в вычислительной схеме обратная матрица A_X^{-1}, оправдывает название *метод обратной матрицы*, которое иногда присваивают второму алгоритму.

5.2. Опишем порядок вычислений при втором алгоритме. Решение задачи линейного программирования по второму алгоритму метода последовательного улучшения плана сводится к последовательному заполнению системы основных таблиц и вспомогательной таблицы.

Основные таблицы имеют следующую структуру (см. табл. 5.4).

Таблица 5.4

Основная таблица l

№	C_X	$Б_X$	e_0	e_1	e_2	...	e_m	A_k	θ
1	c_{s_1}	A_{s_1}	$e_{10}^{(l)}$	$e_{11}^{(l)}$	$e_{12}^{(l)}$	...	$e_{1m}^{(l)}$	$x_{1k}^{(l)}$	
2	c_{s_2}	A_{s_2}	$e_{20}^{(l)}$	$e_{21}^{(l)}$	$e_{22}^{(l)}$	...	$e_{2m}^{(l)}$	$x_{2k}^{(l)}$	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮
r	c_{s_r}	A_{s_r}	$e_{r0}^{(l)}$	$e_{r1}^{(l)}$	$e_{r2}^{(l)}$	...	$e_{rm}^{(l)}$	$x_{rk}^{(l)}$	θ_0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮
m	c_{s_m}	A_{s_m}	$e_{m0}^{(l)}$	$e_{m1}^{(l)}$	$e_{m2}^{(l)}$	...	$e_{mm}^{(l)}$	$x_{mk}^{(l)}$	
$m+1$	—	—	$L^{(l)}$	$\lambda_1^{(l)}$	$\lambda_2^{(l)}$	...	$\lambda_m^{(l)}$	$\Delta_k^{(l)}$	

В первом столбце (№) указывается номер позиции-строки таблицы. Во втором столбце C_X помещаются коэффициенты линейной формы c_{s_i}, отвечающие базисным переменным. В столбце $Б_X$ перечисляются векторы базиса A_{s_i}. Следующие $(m+1)$ столбцов составляют так называемую главную часть таблицы и содержат коэффициенты $e_{ij}^{(l)}$ разложения векторов e_j $(j=0, 1, \ldots, m)$ по векторам базиса. Здесь $e_0=B$ — вектор ограничений, а e_j — m-мерный единичный вектор с единицей на j-м месте. В $(m+1)$-й позиции каждого из столбцов главной части таблицы содержатся значения $e_{m+1,\,j}^{(l)}$:

$$e_{m+1,\,j}^{(l)}=\begin{cases} L(X^{(l)}) & \text{при } j=0, \\ \lambda_j^{(l)} & \text{при } j=1, 2, \ldots, m. \end{cases}$$

Справа от главной части основной таблицы расположен столбец A_k коэффициентов $x_{ik}^{(l)}$ разложения вектора, вводимого в базис, по векторам базиса. В $(m+1)$-й позиции столбца A_k помещается оценка $\Delta_k^{(l)}$ вектора A_k относительно базиса. Последний столбец основной таблицы θ служит для выявления вектора, подлежащего исключению из базиса. Столбец θ заполняется, как и в первом алгоритме, отношениями базисных компонент $e_{i0}^{(l)}$ плана к соответствующим элементам $x_{ik}^{(l)}$ столбца A_k. Позиции столбца θ, соответствующие $x_{ik}^{(l)}\leqslant 0$, прочеркиваются.

Верхняя часть вспомогательной таблицы (см. табл. 5.5) содержит расширенные векторы условий (матрицу условий и коэффициенты линейной формы) и вектор ограничений B.

Нижняя часть вспомогательной таблицы состоит из строк, содержащих оценки векторов условий относительно базисов каждого из опорных планов, полученных в процессе решения задачи. Нумерация строк в нижней части вспомогательной таблицы определяется номерами итераций (точнее, номерами основных таблиц). В строке 0 помещаются оценки векторов условий Δ_j относительно базиса начального опорного плана. В последующем после каждой итерации вспомогательная таблица дополняется новой строкой $\Delta_j^{(l)}$. Заполнение таблиц и решение задачи завершается после получения строки вспомогательной таблицы, в которой все элементы неотрицательны, или после получения столбца A_k основной таблицы с неположительными $x_{ik}^{(l)}$.

Таблица 5.5

Вспомогательная таблица

№	B	A_1	A_2	...	A_k	...	A_n
1	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1k}	...	a_{1n}
2	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2k}	...	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$
m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mk}	...	a_{mn}
$m+1$	—	c_1	c_2	...	c_k	...	c_n
0	—	Δ_1	Δ_2	...	Δ_k	...	Δ_n
1	—	Δ_1'	Δ_2'	...	Δ_k'	...	Δ_n'
2	—	Δ_1''	Δ_2''	...	Δ_k''	...	Δ_n''
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$

Рассмотрим теперь порядок вычислений, связанных с отдельной итерацией.

Пусть l-я итерация закончена. В результате заполнены l-я основная таблица (за исключением двух последних столбцов A_k и θ) и строка $\Delta^{(l)}$ вспомогательной таблицы. Первый этап $(l+1)$-й итерации начинается с просмотра строки $\Delta^{(l)}$ вспомогательной таблицы. Если все $\Delta_j^{(l)} \geqslant 0$, то опорный план, полученный при l-й итерации, оптимален (случай 1°). Пусть имеются векторы с отрицательными оценками. Вектор A_k с наименьшей оценкой $\Delta_k^{(l)}$ вводится в базис, и коэффициенты $x_{ik}^{(l)}$ разложения A_k по векторам базиса помещаются в столбец A_k l-й основной таблицы. Каждый коэффициент $x_{ik}^{(l)}$ получается как произведение столбца A_k верхней части вспомогательной таблицы (позиции $1, 2, \ldots, m$) на i-ю строку l-й основной таблицы ($j = 1, 2, \ldots, m$):

$$x_{ik}^{(l)} = \sum_{j=1}^{m} e_{ij}^{(l)} a_{jk}. \tag{5.4}$$

В $(m+1)$-ю позицию столбца A_k записывается оценка $\Delta_k^{(l)}$ этого вектора.

Просматриваем столбец A_k. Если все $x_{ik}^{(l)} \leqslant 0$ ($i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m$), задача неразрешима (случай 2°).

Второй этап итерации начинается, если имеется по крайней мере один положительный коэффициент $x_{ik}^{(l)}$. (Заметим, что в первом алгоритме мы относили выбор вектора A_k, подлежащего включению в базис, ко второму этапу итерации.)

На втором этапе определяется вектор, подлежащий исключению из базиса, вычисляются новый опорный план и исходные данные для следующей итерации. Столбец θ заполняется, как и в первом алгоритме, отношениями базисных составляющих опорного плана (элементы столбца e_0) к соответствующим компонентам $x_{ik}^{(l)}$ столбца A_k. Позиции столбца θ, отвечающие $x_{ik}^{(l)} \leqslant 0$, прочеркиваются. Наименьший элемент столбца θ обозначается через θ_0. Вектор базиса A_{s_r}, на котором достигается θ_0, подлежит исключению из базиса. Если план $X^{(l)}$ оказался вырожденным и θ_0 достигается на нескольких векторах, то из базиса можно исключить любой из них, например, вектор с наименьшим номером. При обнаружении цикла используется правило, приведенное в п. 5.5.

Строка r основной таблицы l выделяется. Элемент $x_{rk}^{(l)}$, расположенный на пересечении r-й строки (*направляющей строки*) и столбца A_k (*направляющего столбца*) основной таблицы, является *направляющим элементом* преобразования l-й основной таблицы в $(l+1)$-ю.

В r-ю позицию столбца $Б_X$ $(l+1)$-й основной таблицы вносится вектор A_k. В соответствии с занятой позицией в базисе вектор A_k в $(l+1)$-й таблице обозначается как A_{s_r}. В остальных позициях столбца $Б_X$ сохраняются те же векторы, что и в таблице l.

Главная часть $(l+1)$-й основной таблицы заполняется по данным l-й таблицы в соответствии с рекуррентными формулами (1.21). Для получения r-й строки главной части $(l+1)$-й таблицы необходимо разделить r-ю строку l-й таблицы на направляющий элемент $x_{rk}^{(l)}$:

$$e_{rj}^{(l+1)}=\frac{e_{rj}^{(l)}}{x_{rk}^{(l)}}, \qquad j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m. \tag{5.5}$$

Чтобы заполнить i-ю строку главной части $(l+1)$-й таблицы $(i=1, 2, \ldots, m+1;\ i\neq r)$, следует в соответствии с рекуррентными формулами вычесть из i-й строки l-й таблицы r-ю строку таблицы $(l+1)$, умноженную на $x_{ik}^{(l)}$,

$$\begin{gathered} e_{ij}^{(l+1)}=e_{ij}^{(l)}-\frac{e_{rj}^{(l)}}{x_{rk}^{(l)}}x_{ik}^{(l)}=e_{ij}^{(l)}-e_{rj}^{(l+1)}x_{ik}^{(l)}, \\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ m,\ m+1;\ j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m. \end{gathered} \tag{5.6}$$

Чтобы завершить $(l+1)$-ю итерацию, остается заполнить строку $\Delta^{(l+1)}$ вспомогательной таблицы значениями оценок векторов условий относительно базиса нового опорного плана.

Строка $\Delta^{(l+1)}$ заполняется в соответствии с формулой (5.1). Коэффициенты линейной формы c_j помещены в $(m+1)$-й строке вспомогательной таблицы. Составляющие a_{ij} вектора A_j занимают первые m позиций столбца A_j вспомогательной таблицы, а компоненты λ_j $(j=1, 2, \ldots, m)$ вектора Λ заполняют последнюю строку $(l+1)$-й основной таблицы. Таким образом, для получения строки $\Delta^{(l+1)}$ необходимо вычесть строку (C) вспомогательной таблицы из произведения матрицы A (верхней части вспомогательной таблицы) и последней строки $(l+1)$-й основной таблицы.

Строка $\Delta^{(l+1)}$ вспомогательной таблицы и главная часть $(l+1)$-й основной таблицы содержат все исходные данные для $(l+2)$-й итерации. Последующие итерации производятся по тем же рекомендациям. При изложении теоретических основ метода было показано, что через конечное число итераций будет получен оптимальный план или установлена неразрешимость задачи.

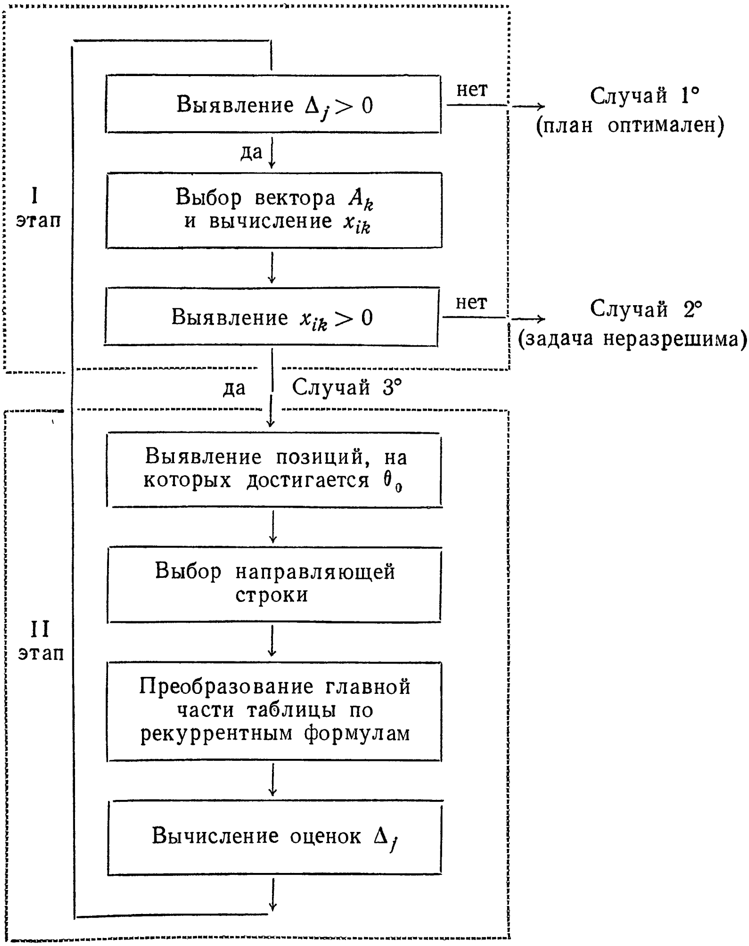


Рис. 5.2.

Все таблицы алгоритма заполняются по одним и тем же правилам. Некоторые особенности возникают лишь при составлении основной таблицы 0. В столбец e_0 записываются базисные компоненты исходного опорного плана. Первые m позиций столбцов e_1, e_2, ..., e_m получаются непосредственным обращением матрицы векторов базиса исходного опорного плана. Последние позиции столбцов e_1, ..., e_m вычисляются по формуле (5.3). (Напомним, что столбцы матрицы A_X^{-1} представляют собой столбцы e_j таблицы 0.) Последняя строка главной части таблицы 0 заполняется, таким образом, произведениями столбца C_X и столбцов e_j ($j=0, 1, \ldots, m$) этой таблицы.

На рис. 5.2 изображена блок-схема отдельной итерации второго алгоритма метода последовательного улучшения плана.

Для контроля вычислений при втором алгоритме естественно использовать две возможности для определения величин λ_j. В любой итерации параметры λ_j могут быть вычислены непосредственно (как в таблице 0) или по рекуррентным формулам (1.21). Замечания о порядке контроля, сделанные при описании первого алгоритма, относятся и к этому случаю.

5.3. Оценим трудоемкость вычислений в отдельной итерации второго алгоритма метода последовательного улучшения плана. Мы уже отмечали, что трудоемкость вычислений целесообразно оценивать по количеству делений и умножений, необходимых для проведения каждой итерации.

Во втором алгоритме операция деления встречается в каждой итерации дважды: при вычислении строки новой основной таблицы, отвечающей вновь введенному в базис вектору (см. (5.5)), и при вычислении столбца θ. В первом случае число делений равно $m+1$, а во втором не превышает m. Операция умножения встречается во втором алгоритме трижды: при преобразовании основной таблицы по формулам (5.6), при вычислении оценок Δ_j по формуле (5.1) и при определении коэффициентов разложения x_{ik} вектора A_k, вводимого в базис, по векторам базиса. Для преобразования главной части основной таблицы требуется $m(m+1)$ умножений (в формулах (5.6) $i=1, 2, \ldots, m, m+1$; $i \neq r$; $j=0, 1, \ldots, m$). Для вычисления оценки Δ_j каждого вектора условий A_j необходимо m умножений. Всего подлежат вычислению $n-m$ оценок векторов условий (по числу внебазисных переменных; оценки векторов базиса не вычисляются — они равны нулю). Следовательно, для вычисления всех оценок необходимо при каждой итерации произвести $m(n-m)$ умножений. Наконец, для вычисления всех x_{ik} $(j=1, 2, \ldots, m)$ по формулам (5.4) требуется еще m^2 умножений. Таким образом, проведение каждой итерации во втором алгоритме связано с числом делений, не превышающим $2m+1$, и числом умножений, равным

$$m(m+1)+m(n-m)+m^2=m(n+m+1).$$

Для контроля расчетов целесообразно через определенное количество шагов вычислять параметры λ_j не только по рекуррентным формулам, но и непосредственно по формулам (5.3). Каждый этап контроля требует, таким образом, m^2 дополнительных операций умножения.

Сравнивая трудоемкость отдельных этапов каждой итерации, необходимо сделать следующие замечания по поводу выбора направляющего элемента.

При $n \gg m$ вычисление оценок становится наиболее трудоемкой операцией во втором алгоритме. Вычисление всех оценок производится для того, чтобы сравнить Δ_j между собой и выбрать наименьшее из них. Вектор A_k с оценкой

$$\Delta_k=\min_j \Delta_j$$

вводится в базис. По-видимому, общее количество операций существенно сократится, если вычислять оценки Δ_j до первой отрицательной величины и вводить в базис вектор, отвечающий этой оценке. Число шагов при этом может увеличиться. Однако возможное увеличение числа итераций, как правило, окупается уменьшением трудоемкости вычислений в каждой итерации. В каждой новой итерации порядок, в котором вычисляются оценки, вообще говоря, произволен. Интуитивно, однако, представляется наиболее целесообразным следующий порядок. Для исходного опорного плана вычисляются оценки $\Delta_1, \ldots, \Delta_{p_1}$, где Δ_{p_1} — первая отрицательная оценка. Для следующего опорного плана вычисляются оценки $\Delta'_{p_1+1}, \ldots, \Delta'_{p_2}$, где Δ'_{p_2} — первое отрицательное число в последовательности $\Delta'_{p_1+1}, \Delta'_{p_1+2}, \ldots$ Если все $\Delta'_q \leqslant 0$ при $q=p_1+1, \; p_1+2, \ldots, n$, следует перейти к вычислению $\Delta'_1, \Delta'_2, \ldots$

5.4. Узким местом современных вычислительных машин является оперативная память. Здесь будет намечена модификация второго алгоритма, позволяющая экономнее использовать память машины [51].

В приведенной вычислительной схеме необходимо в каждой итерации запоминать всю обратную матрицу $A_X^{-1} = \| e_{ij} \|$. В так называемой *мультипликативной форме второго алгоритма* регистрации подлежит значительно меньшее число данных.

Мультипликативная форма основана на следующих соображениях. Пусть X и X' — два последовательных опорных плана задачи. Обозначим соответствующие матрицы вектора базиса через A_X и $A_{X'}$:

$$A_X = (A_{s_1}, \ldots, A_{s_r}, \ldots, A_{s_m}), \quad A_{X'} = (A_{s_1}, \ldots, A_k, \ldots, A_{s_m}).$$

Как легко непосредственно проверить, обратные матрицы связаны соотношениями

$$A_{X'}^{-1} = E^r A_X^{-1}, \tag{5.7}$$

где

$$E^r = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & y_{1k} & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & y_{2k} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & y_{rk} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & y_{mk} & \ldots & 1 \end{matrix} \right\|,$$

$$y_{ik} = -\frac{x_{ik}}{x_{rk}}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad i \neq k; \quad y_{rk} = \frac{1}{x_{rk}}.$$

Соотношение (5.7) эквивалентно применению рекуррентных формул (1.21) при $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, m$.

Обычно решение задачи линейного программирования начинается с единичного базиса. Ему соответствует единичная матрица E. Поэтому после первой итерации, когда в базис вместо вектора $A_{s_{r_1}}$ вводится вектор A_{k_1}, обратная матрица базиса полученного опорного плана X' может вычисляться по формуле

$$A_{X'}^{-1} = E^{r_1} E,$$

а после l-й итерации

$$A_{X^{(l)}}^{-1} = E^{r_l} E^{r_{l-1}} \ldots E^{r_1} E. \tag{5.8}$$

Матрица E^r определяется $m+1$ числом $(r, y_{1k}, \ldots, y_{mk})$. Следовательно, при $l < m$ запись обратной матрицы в форме (5.8) меньше загружает память машины, чем обычная запись, требующая запоминания при каждой итерации $m \times m$ чисел $e_{ij}^{(l)}$.

Как уже отмечалось, опыт показывает, что число итераций, необходимых для решения задачи линейного программирования, обычно представляет собой величину порядка m. Поэтому следует ожидать, что мультипликативная форма почти всегда будет компактнее, чем обычная запись второго алгоритма. В тех случаях, когда число итераций превысит m и по тем или иным причинам нецелесообразно преобразовывать обратную матрицу базиса опорного плана X^m к единичной *), следует, начиная с $(m+1)$-й итерации, перейти к обычной форме регистрации обратной матрицы.

Наметим схему вычислений в отдельной итерации мультипликативной формы второго алгоритма.

Пусть проведено l итераций, в результате которых установлено, что $X^{(l)}$ не является оптимальным планом и нет оснований говорить о неразрешимости задачи. Определение вектора, подлежащего вводу в базис, и вектора, подлежащего исключению из базиса, производится, естественно, по общим правилам метода последовательного улучшения плана. Компоненты очередного опорного плана вычисляются, как и в обычной форме второго алгоритма, по рекуррентным формулам (1.21).

Вектор оценок условий задачи (Λ) в $(l+1)$-й итерации вычисляется как произведение:

$$\Lambda_{l+1} = C_X E^{r_l} E^{r_{l-1}} \ldots E^{r_1} E.$$

Вектор оценок Δ векторов условий определяется как обычно во втором алгоритме по формуле

$$\Delta = \Lambda A_X - C.$$

Наконец, коэффициенты x_{ik} разложения вектора A_k, подлежащего включению в базис, по векторам базиса,

*) Преобразование обратной матрицы A_X^{-1} к единичной на каком-либо шаге процесса решения задачи соответствует переходу к эквивалентной задаче, векторы условий и вектор ограничений которой получены из векторов условий и вектора ограничений исходной задачи умножением слева на A_X^{-1}.

определяются из соотношения

$$A_k^{(l+1)} = E^{r_l} E^{r_{l-1}} \ldots E^{r_1} A_k.$$

Здесь

$$A_k^{(l+1)} = (x_{1k}^{(l+1)}, \ldots, x_{mk}^{(l+1)}); \quad A_k = A_k^{(0)} = (a_{1k}, \ldots, a_{mk})^T.$$

Как видим, мультипликативная форма второго алгоритма позволяет не только экономно использовать память машины, но и в ряде случаев, по крайней мере в начальных итерациях, приводит к существенному уменьшению трудоемкости вычислений.

5.5. Рассмотрим особенности второго алгоритма при решении вырожденных задач. Уже указывалось, что до обнаружения цикла целесообразно пользоваться упрощенным правилом определения вектора, подлежащего исключению из базиса. При возникновении цикла следует вычислять индекс r, пользуясь правилом, сформулированным в § 6 предыдущей главы. В качестве векторов R_i естественно в данном случае выбрать единичные векторы e_j, поскольку на каждой итерации вычисляются коэффициенты разложения e_j по векторам базиса. Система векторов линейно независима. Однако векторы e_j не всегда удовлетворяют второму требованию, предъявляемому системе R_i. Коэффициенты разложения вектора $e_0 + \sum_{j=1}^{m} \varepsilon^j e_j$ по векторам базиса могут оказаться отрицательными. В главной части какой-либо из основных таблиц может быть строка, в которой первым отличным от нуля элементом окажется отрицательный коэффициент e_{ij} $(0 \leqslant i \leqslant m)$. Чтобы исключить подобную возможность, целесообразно после возникновения цикла включить в основные таблицы дополнительный столбец W, состоящий из одних положительных чисел, например, $w_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$, и положить $R_1 = A_X W$, $R_2 = e_1, \ldots, R_t = e_{t-1}$, $R_{t+1} = e_{t+1}, \ldots$ $\ldots, R_m = e_m$. Здесь A_X — матрица базиса; индекс t выбран так, чтобы t-й коэффициент вектора $A_X W$ был не равен нулю. Очевидно, что выбранная таким образом система векторов удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к R_i. Следует только помнить, что, переходя от таблицы к таблице, следует преобразовывать по общим правилам и столбец W.

Необходимость в дополнительном столбце отпадает, если с самого начала решения задачи по второму алгоритму пользоваться правилом, исключающим возможность цикла. Векторы e_j $(j=1, \ldots, m)$ могут быть использованы в качестве системы R_i $(i=1, 2, \ldots, m)$ и в том случае, когда при обнаружении цикла обратная матрица преобразовывается к единичной. Следует, однако, полагать, что преобразование дополнительного столбца W на протяжении ряда итераций связано с менее трудоемкими вычислениями, чем применение на протяжении всего процесса решения задачи сложного правила выбора вектора, подлежащего исключению из базиса. Преобразование таблицы, позволяющее перейти к единичному базису, также трудоемкая работа.

Определение позиции исключаемого из базиса вектора производится следующим образом. Пусть $\theta_0 = \min\limits_i \frac{e_{i0}}{x_{ik}}$ достигается на нескольких позициях. Вычислим минимум отношений $\theta_i' = \frac{u_i}{x_{ik}}$ по индексам i, на которых достигается θ_0 $\left(\text{или } \min \frac{e_{i1}}{x_{ik}}, \text{ если нет необходимости в столбце } W\right)$. Если и в этом случае θ_0 не определяется однозначно, составим отношения $\theta_i'' = \frac{e_{i1}}{x_{ik}}$ $\left(\text{соответственно } \theta_i'' = \frac{e_{i2}}{x_{ik}}, \text{ если столбец } W \text{ не вводится}\right)$ и т. д. до тех пор, пока минимум отношения не будет достигнут на единственном векторе. Этот вектор исключается из базиса.

§ 6. Примеры и сравнительная оценка алгоритмов

6.1. Проиллюстрируем порядок решения задачи по второму алгоритму метода последовательного улучшения плана на двух примерах, рассмотренных в § 3 в связи с первым алгоритмом.

В основных таблицах 5.6 и вспомогательной табл. 5.7 записан процесс решения примера 1 (см. § 3). Таблицы 5.6 разбиты на 8 частей (таблиц). Главная часть основной таблицы 0 содержит исходные данные для первой итерации. Последние два столбца и последняя строка основной и вспомогательной таблиц вместе с главной частью последующей основной и строка Δ таблицы соответствуют очередной итерации алгоритма. В верхней части вспомогательной таблицы перечислены компоненты вектора ограничений и всех векторов условий. В $(m+1)$-й (шестой) строке указаны соответствующие значения коэффициентов линейной формы. Строки $\Delta^{(l)}$ для каждой итерации заполняются по формулам (5.1). Исходный базис составлен из единичных векторов, отвечающих дополнительным переменным $x_7, x_8, \ldots, x_{11}$. Соответствующие коэффициенты линейной формы равны нулю. Поэтому

Таблицы 5.6 (0—7)

	№	C_X	$Б_X$	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	A_k	θ	Номер таблицы
	1		A_7	12	1					−1	—	0
	2		A_8	5		1				−1	—	
	3		A_9	20			1			4	5	
←	4		A_{10}	10				1		4	2,5	
	5		A_{11}	24					1	5	4,8	
	6	—	—							−9	—	
	1		A_7	14,5	1			0,25		−2	—	1
	2		A_8	7,5		1		0,25		−5	—	
←	3		A_9	10,0			1	−1,00		14	0,714	
→	4	9	A_6	2,5				0,25		−2	—	
	5		A_{11}	11,5				−1,25	1	14	0,822	
	6	—	—	22,5				2,25		−20	—	
	1		A_7	15,929	1		0,143	0,107		1,857	8,577	2
	2		A_8	11,071		1	0,357	−0,107		1,643	6,799	
→	3	2	A_4	0,714			0,071	−0,71		−0,071	—	
	4	9	A_6	3,929			0,143	0,107		−1,143	—	
←	5		A_{11}	1,500			−1,000	−0,250	1	8,000	0,188	
	6	—	—	36,786			1,429	0,821		−18,429	—	

Продолжение

	№	C_X	$Б_X$	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	A_k	θ	Номер таблицы
	1		A_7	15,580	1		0,375	0,165	—0,232	11,272	1,382	3
	2		A_8	10,763		1	0,562	—0,056	—0,205	0,462	23,295	
←	3	2	A_1	0,728			0,062	—0,074	0,009	0,730	0,997	
	4	9	A_6	4,143				0,071	0,143	—0,071	—	
→	5	8	A_3	0,188			—0,125	—0,031	0,125	—0,781	—	
	6	—	—	40,241			—0,875	0,246	2,304	—4,333	—	
	1		A_7	4,343	1		—0,590	1,303	—0,370	—0,590	—	4
	2		A_8	10,303		1	0,523	—0,009	—0,211	0,523	19,702	
⇆	3	—1	A_2	0,997			0,086	—0,101	0,012	0,086	11,643	
	4	9	A_6	4,214			0,006	0,064	0,144	0,006	689,0	
	5	8	A_3	0,966			—0,058	—0,110	0,135	—0,058	—	
	6	—	—	44,661			—0,495	—0,202	2,358	—0,495	—	
	1		A_7	11,214	1			0,607	—0,286	0,607	18,471	5
←	2		A_8	4,214		1		0,607	—0,286	0,607	6,941	
→	3		A_{0}	11,643			1	—1,179	0,143	—1,179	—	
	4	9	A_6	4,143				0,071	0,143	0,071	58,00	
	5	8	A_3	1,643				—0,179	0,143	—0,179	—	
	6	—	—	50,429				—0,786	2,429	—0,786	—	

Продолжение

	№	C_X	$Б_X$	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	A_k	θ	Номер таблицы
←	1		A_7	7,000	1	—1,000				13,000	0,538	6
→	2		A_{10}	6,941		1,647		1	—0,471	—10,059	—	
	3		A_9	19,824		1,941	1		—0,412	—0,176	—	
	4	9	A_6	3,647		—0,118			0,176	0,647	5,636	
	5	8	A_3	2,882		0,294			0,059	—1,118	—	
	6	—	—	55,882		1,294			2,059	—2,118	—	
→	1	—1	A_2	0,538	0,077	—0,077						7
	2		A_{10}	12,357	0,774	0,873		1	—0,471			
	3		A_9	19,919	0,014	1,928	1		—0,412			
	4	9	A_6	3,299	—0,050	—0,068			0,176			
	5	8	A_3	3,484	0,086	0,208			0,059			
	6	—	—	57,023	0,163	1,131			2,059		—	

Таблица 5.7

№	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}
1	12	−6	9	3		−2	−1	1				
2	5		−4	3	−3	1	−1		1			
3	20	2	8	−5	6	−8	4			1		
4	10	−1	−3	−4	−8		4				1	
5	24	5	1	2	4	9	5					1
6	C	3	−1	8	2	−1	9					
0	Δ	−3	1	−8	−2	1	**−9**					
1	Δ'	−5,25	−5,75	−17	**−20**	1					2,25	
2	Δ''	−0,964	9,964	**−18,429**		−10,429				1,429	0,821	
3	Δ'''	6,522	**−4,433**			28,732				−0,875	0,246	2,304
4	Δ^{IV}	8,000			6,073	26,183				**−0,495**	−0,202	2,358
5	Δ^{V}	9,929	5,786		14,000	22,857					**−0,786**	2,429
6	Δ^{VI}	7,294	**−2,118**		2,353	20,824			1,294			2,059
7	Δ^{VII}	0,632			2,842	20,335		0,163	1,131			2,059

в основной таблице 0 все $\lambda_j=0$ и в строке 0 вспомогательной таблицы $\Delta_j=-c_j$. Вектор A_6 с наименьшей оценкой ($\Delta_6=-9$) подлежит вводу в базис.

Столбец A_k основной таблицы 0 заполняется компонентами x_{i6} разложения A_6 по векторам базиса. Поскольку начальный базис составлен из единичных векторов, $x_{i6}=a_{i6}$. В $(m+1)$-ю позицию столбца A_k помещается оценка Δ_6 вектора A_6. В столбце A_3 имеются положительные составляющие. Следовательно, мы имеем дело со случаем 3°.

Переходим к определению вектора, подлежащего исключению из базиса. В столбце θ заполняются позиции, для которых $x_{ik}>0$ (позиции 3, 4 и 5). Наименьшее значение $\theta=\theta_0=2{,}5$ соответствует вектору базиса A_{10}, расположенному в четвертой позиции базиса. Четвертая строка является, таким образом, направляющей строкой преобразования, и вектор A_{10} базиса должен быть заменен вектором A_6. Направляющим элементом преобразования является компонента $x_{46}=4$, находящаяся на пересечении четвертой строки и столбца A_6.

Главная часть основной табл. 1 вычисляется по элементам главной части таблицы 0 в соответствии с рекуррентными формулами. Элементы четвертой строки табл. 1 равны соответствующим элементам четвертой строки таблицы 0, поделенным на направляющий элемент $x_{46}=4$. Все остальные элементы главной части таблицы (в том числе и составляющие столбца e_0 и строки λ) вычисляются по формуле (5.6). Например,

$$x'_{30}=e'_{30}=e_{30}-\frac{e_{40}}{x_{46}}x_{36}=20-\frac{10\cdot 4}{4}=10,$$

$$e'_{54}=e_{54}-\frac{e_{44}}{x_{46}}x_{56}=0-\frac{1\cdot 5}{4}=-1{,}25,$$

$$L(X')=e'_{m+1,0}=\lambda'_0=e'_{60}=e_{60}-\frac{e_{40}}{x_{46}}x_{66}=0-\frac{10(-9)}{4}=22{,}5.$$

Здесь $x_{66}=\Delta_6$ — оценка вектора A_6, введенного в базис.

Теперь следует вычислить по формуле (5.1) строку 1 (Δ') вспомогательной таблицы 5.7. Имеем, например,

$$\Delta'_4=(0\cdot 0-3\cdot 0+6\cdot 0-8\cdot 2{,}25+4\cdot 0)-2=-20.$$

Δ'_4 — наименьший элемент строки Δ'. В очередной базис вводится A_4. Следующие итерации проводятся по тем же правилам. Для контроля следует в отдельных итерациях вычислять оценки условий λ_i не только по рекуррентным формулам (5.5), но и непосредственно по формуле (5.3).

В таблицах 5.8 и 5.9 приводится последовательность вычислений, связанных с определением в соответствии с правилами второго алгоритма оптимального плана примера 2 (см. § 3). Таблицы не требуют специальных пояснений.

В таблицах 5.10—5.11 приведено решение примера 1 (см. таблицы 5.2), где в каждой итерации вводимый в базис вектор определялся в соответствии с правилом, сформулированным в п. 5.3.

Таблицы 5.8 (0—5)

	№	C_X	$Б_X$	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	A_k	θ	Номер таблицы
←	1		A_{10}	24	1						6	4	0
	2		A_{11}	30		1						—	
	3		A_{12}	40			1				9	4,444	
	4		A_{13}	36				1				—	
	5		A_{14}	20					1			—	
	6		A_{15}	48						1	3	16	
	7	—	—								—9	—	
→	1	9	A_1	4	0,167							—	1
	2		A_{11}	30		1						—	
	3		A_{12}	4	—1,5		1					—	
	4		A_{13}	36				1			1	36	
	5		A_{14}	20					1			—	
←	6		A_{15}	36	—0,5					1	4	9	
	7	—	—	36	1,5						—8	—	
	1	9	A_1	4	0,167						0,5	8	2
	2		A_{11}	30		1					9	3,333	
	3		A_{12}	4	—1,5		1				—4,5	—	
	4		A_{13}	27	0,125			1		—0,25	0,375	72	
←	5		A_{14}	20					1		8	2,5	
→	6	8	A_6	9	—0,125					0,25	—0,375		
	7	—	—	108	0,5					2	—6,5	—	

Продолжение

	№	C_X	$Б_X$	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	A_k	θ	Номер таблицы
	1	9	A_1	2,75	0,167				−0,062		0,333	8,25	3
	2		A_{11}	7,5		1			−1,125			—	
←	3		A_{12}	15,25	−1,5		1		0,562		2	7,625	
	4		A_{13}	26,062	0,125			1	−0,047	−0,25	0,25	104,25	
→	5	8	A_8	2,5					0,125			—	
	6	8	A_9	9,938	−0,125				0,047	0,25	−0,25	—	
	7	—	—	124,25	0,5				0,812	2	−4	—	
←	1	9	A_1	0,208	0,417		−0,167		−0,156		0,417	0,5	4
	2		A_{11}	7,5		1			−1,125			—	
→	3	5	A_5	7,625	−0,75		0,5		0,281		−0,75	—	
	4		A_{13}	24,156	0,312		−0,125	1	−0,117	−0,25	0,312	77,3	
	5	8	A_8	2,5					0,125			—	
	6	8	A_9	11,844	−0,312		0,125		0,117	0,25	−0,312	—	
	7	—	—	154,75	−2,5		2		1,938	2	−2,5	—	
→	1		A_{10}	0,5	1		−0,4		−0,375				5
	2		A_{11}	7,5		1			−1,125				
	3	5	A_5	8			0,2						
	4		A_{13}	24				1		−0,25			
	5	8	A_8	2,5					0,125				
	6	8	A_9	12						0,25			
	7	—	—	156			1		1	2		—	

Таблица 5.9

№	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}
1	24	6		2		2			3		1					
2	30		2		3			5	9			1				
3	40	9	1			5	1						1			
4	36			6				2		1				1		
5	20				4				8						1	
6	48	3		1			8	4		4						1
7	C	9		—8		5	—3		8	8						
0	Δ	**—9**		8		—5	3		—8	—8						
1	Δ'			11		—2	3		—3,5	**—8**	1,5					
2	Δ''			11		—4	19	8	**—6,5**		0,5					
3	Δ'''			11	3,25	**—4**	19	8			0,5				—0,812	2
4	Δ^{IV}		2	5	7,75		21	8			**—2,5**		2		1,938	2
5	Δ^{V}	6	1	10	4		20	8					1		1	2

Таблицы 5.10 (0—6)

	№	C_X	$Б_X$	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	A_k	θ	Номер таблицы
	1		A_7	12	1					−6	—	0
	2		A_8	5		1					—	
	3		A_9	20			1			2	10	
	4		A_{10}	10				1		−1	—	
←	5		A_{11}	24					1	5	**4,8**	
	6	—	—							3	—	
	1		A_7	40,8	1				1,2	5,4	7,556	1
←	2		$A_\cdot$	5		1				3	**1,667**	
	3		A_9	10,4			1		−0,4	−5,8	—	
	4		A_{10}	14,8				1	0,2	−3,6	—	
→	5	3	A_1	4,8					0,2	0,4	12	
	6	—	—	14,4					0,6	−6,8	—	

Продолжение

	№	C_X	$Б_X$	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	A_k	θ	Номер таблицы
←	1		A_7	31,8	1	−1,8			1,2	10,2	**3,118**	2
→	2	8	A_3	1,667		0,333				−1	—	
	3		A_9	20,067		1,933	1		−0,4	−1,4	—	
	4		A_{10}	20,8		1,2		1	0,2	−10,8	—	
	5	3	A_1	4,133		−0,133			0,2	1,2	3,444	
	6	—	—	25,733		2,267			0,6	−6,4	—	
→	1	2	A_4	3,118	0,098	−0,176			0,118	0,667	4,676	3
	2	8	A_3	4,784	0,098	0,157			0,118	0,333	14,353	
	3		A_9	24,431	0,137	1,686	1		−0,235	1	24,431	
	4		A_{10}	54,471	1,059	−0,706		1	1,471	11	4,952	
←	5	3	A_1	0,392	−0,118	0,078			0,059	0,333	**1,176**	
	6	—	—	45,686	0,627	1,137			1,353	−4	—	
←	1	2	A_4	2,333	0,333	−0,333				0,333	7	4
	2	8	A_3	4,392	0,216	0,078			0,059	0,216	20,364	
	3		A_9	23,255	0,490	1,451	1		−0,412	0,490	47,440	
	4		A_{10}	41,529	4,941	−3,294		1	−0,471	4,941	8,405	
→	5	9	A_6	1,176	−0,353	0,235			0,176	−0,353	—	
	6	—	—	50,392	−0,784	2,078			2,059	−0,784	—	

Продолжение

	№	C_X	$Б_X$	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	A_k	θ	Номер таблицы
$\rightleftarrows$	1		A_7	7	1	—1				13	**0,538**	5
	2	8	A_3	2,882		0,294			0,059	—1,118	—	
	3		A_9	19,824		1,941	1		—0,412	—0,176	—	
	4		A_{10}	6,941		1,647		1	—0,471	—10,059	—	
	5	9	A_6	3,647		—0,118			0,176	0,647	5,636	
	6	—	—	55,882		1,294			2,059	—2,118	—	
$\longrightarrow$	1	—1	A_2	0.538	0,077	—0,077						6
	2	8	A_3	3,484	0,086	0,208			0,059			
	3		A_9	19,919	0,014	1,928	1		—0,412			
	4		A_{10}	12,357	0,774	0,873		1	—0,471			
	5	9	A_6	3,299	—0,050	—0,068			0,176			
	6	—	—	57,023	0,163	1,131			2,059			

Таблица 5.11

№	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}
1	12	−6	9	3		−2	−1	1				
2	5		−4	3	−3	1	−1		1			
3	20	2	8	−5	6	−8	4			1		
4	10	−1	−3	−4	−8		4				1	
5	24	5	1	2	4	9	5					1
6	C	3	−1	8	2	−1	9					
0	Δ	**−3**										
1	Δ'		1,6	**−6,8**								
2	Δ''				**−6,4**							
3	Δ'''					13,059	**−4**					
4	Δ^{IV}							**−0,784**				
5	Δ^{V}	7,294	**−2,118**						1,294			2,059
6	Δ^{VI}	6,317			2,842	20,335		0,163	1,131			2,059

Как видим, число итераций в новой реализации второго алгоритма сократилось на одну. Однако сокращение числа итераций, вообще говоря, не характерно для приведенного правила выбора вектора, подлежащего включению в базис. Сокращение трудоемкости расчетов проявляется при сравнении вспомогательных таблиц 5.7 и 5.11. Во втором случае вычислялось значительно меньшее число оценок Δ_j.

6.2. Приведем теперь сравнительную оценку обоих алгоритмов метода последовательного улучшения плана. Расчеты по первому алгоритму связаны только с одним типом таблиц и более единообразны, чем вычисления по второму алгоритму. При ручном счете это является большим преимуществом. Первый алгоритм позволяет также быстрее обнаружить неразрешимость задачи. Как мы увидим из § 8, первый алгоритм удобнее использовать при решении вспомогательной задачи, в которой определяется начальный опорный план исходной задачи. Наконец, первый алгоритм дает возможность включения в базис вектора A_k, при котором достигается максимально возможное увеличение линейной формы за итерацию:

$$-\Delta_k\theta_0^{(k)} = \max_j (-\Delta_j\theta_0^{(j)}).$$

Вычисления по второму алгоритму предъявляют менее жесткие требования к емкости оперативной памяти, чем расчеты по первому алгоритму. При первом алгоритме запоминается таблица, отвечающая всем векторам условий. Объем информации, запоминаемой при втором алгоритме, определяется только векторами базиса. В мультипликативной форме второго алгоритма на каждом шаге регистрируется еще меньше данных.

В практических задачах процент нулей в матрице условий обычно весьма велик. В первом алгоритме после элементарного преобразования нулевые компоненты векторов условий превращаются, вообще говоря, в ненулевые. Во втором алгоритме, в котором вся матрица условий не преобразовывается от таблицы к таблице, преимущество векторов условий с большим количеством нулей сохраняется на всем протяжении вычислений. В частности, во втором алгоритме весьма просто вычисляются оценки единичных векторов условий:

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i - c_j = \sum_{i=1}^{m} \delta_i^j\lambda_i - c_j = \lambda_j - c_j.$$

При решении задачи по второму алгоритму вместе с оптимальным планом исходной задачи получается оптимальный план двойственной задачи (вектор $\Lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$, расположенный в $(m+1)$-й строке последней основной таблицы) и обратная матрица оптимального базиса. Эта особенность второго алгоритма весьма полезна для ряда приложений.

При решении задач по второму алгоритму приходится чаще обращаться к исходным данным, чем при использовании первого алгоритма. Поэтому естественно, что накопление ошибок вычислений во втором алгоритме происходит медленнее, чем в первом.

Сравним теперь оба алгоритма по числу операций умножения и деления на каждую итерацию.

В п. 2.4 было показано, что при решении задачи линейного программирования по первому алгоритму в каждой итерации производится не более $n+1$ деления и $m(n-m+1)$ умножений. В п. 5.3 было установлено, что каждая итерация при втором алгоритме метода требует не более $2m+1$ операций деления и $m(n+m+1)$ умножений. Как видим, второй алгоритм, связанный с преобразованием обратной матрицы и выбором вектора, вводимого в базис по наименьшей оценке Δ_j, требует, вообще говоря, бо́льшего числа операций, чем первый алгоритм.

Число умножений в каждой итерации второго алгоритма сокращается, если, как это указано в п. 5.3, не связывать выбор вектора, подлежащего включению в базис, с вычислением оценок Δ_j всех векторов условий. Однако в этом случае нельзя сравнивать трудоемкость обоих алгоритмов по числу операций на итерацию, поскольку решение задачи по разным алгоритмам потребует, вообще говоря, различного числа итераций.

В ряде случаев известное сокращение трудоемкости вычислений обеспечивает мультипликативная форма второго алгоритма.

Заметим, что сравнительная оценка трудоемкости первого и второго алгоритмов в статье Вагнера [13], на которую ссылаются в ряде работ, не может быть признана объективной. В этой статье указывается, что при $n > 3m$ первый алгоритм всегда связан с более трудоемкими вычислениями, чем второй. Определяя число операций умножения, используемых в первом алгоритме, Вагнер предполагает, что оценки

Δ_j вычисляются при первом алгоритме не по рекуррентным соотношениям (2.2), а непосредственно по формуле (5.1). Вывод, полученный Вагнером, был бы справедлив, если бы было признано рациональным производить контроль вычислений после каждой итерации. В табл. 5.12 указано количество умножений, необходимое для проведения отдельной итерации и для контроля в первом и втором алгоритмах метода последовательного улучшения плана. Из таблицы видно, что при $n > 3m$ первый алгоритм оказывается более трудоемким, чем второй. Однако, как уже отмечалось, вряд ли целесообразно контролировать вычисления на каждом шаге метода.

Таблица 5.12

	I алгоритм	II алгоритм
Проведение итерации	$m(n-m+1)$	$m(n+m+1)$
Контроль	$m(n+1)$	$m(m+1)$
Итого	$m(2n-m+2)$	$m(2m+n+2)$

Приведенная сравнительная оценка трудоемкости алгоритмов не учитывает специфических особенностей отдельных классов задач линейного программирования. В задачах с матрицами условий, в которых высок процент нулей (на практике встречается большое количество таких задач), число операций на один шаг метода во втором алгоритме меньше, чем в первом. Мы уже видели, что наиболее трудоемкий этап вычислений при втором алгоритме — вычисление оценок Δ_j — существенно сокращается для векторов условий, содержащих большое число нулей.

Пусть каждый столбец матрицы условий содержит не более αm отличных от нуля элементов. Вычисление оценок Δ_j требует при этом $\alpha m(n-m)$ умножений. Для преобразования главной части основной таблицы необходимо, как и прежде, $m(m+1)$ умножений, а для вычисления элементов направляющего столбца $A_k^{(l)}$ — m^2 умножений. Общее количество операций умножения на каждом шаге второго алгоритма не превышает, таким образом, числа

$$\alpha m(n-m)+m(m+1)+m^2=m[\alpha n+(2-\alpha)m+1].$$

Трудоемкость вычислений по первому алгоритму не зависит от числа нулей в исходной матрице условий. Общее число умножений на каждом шаге первого алгоритма равно $m(n-m+1)$.

Таким образом, при

$$m[\alpha n+(2-\alpha)m+1]<m(n-m+1),$$

т. е. при

$$n>\frac{3-\alpha}{1-\alpha}m,$$

второй алгоритм требует меньше операций умножения, чем первый.

Аналогичные оценки могут быть проведены для других частных классов задач линейного программирования.

Перечисленные в настоящем параграфе сравнительные характеристики обоих алгоритмов позволяют в каждой конкретной задаче отдавать предпочтение тому или другому из них.

§ 7. Случай двухсторонних ограничений

7.1. В § 5 гл. 4 было показано, что учет двухсторонних ограничений при решении задач линейного программирования методом последовательного улучшения плана не приводит к существенным изменениям вычислительной схемы и связан лишь с некоторым усложнением отдельных элементов каждой итерации. Изменения в алгоритме касаются в первую очередь способа определения вектора, подлежащего исключению из базиса, формул преобразования базисных переменных (коэффициентов разложения вектора

$$A_0=B-\sum_{j\in I_X}x_jA_j)$$

и оценок Δ_j векторов условий.

Рассмотрим изменения в структуре таблиц, которые следует ввести при решении задачи с двухсторонними ограничениями по первому алгоритму. Таблица l, отвечающая l-й итерации в задаче, где переменные ограничены с обеих сторон, отличается от таблицы l, составленной в процессе решения задачи в канонической форме, тремя дополнительными строками и двумя дополнительными столбцами (см. табл. 5.13). В строке (α, β) такой таблицы над каждым вектором условий, не вошедшим в базис, указывается значение соответствующей внебазисной переменной. Рядом с численным значением x_j удобно ставить букву α, если это левая граница, и β, если указана правая граница интервала изменения переменной x_j. Позиции строки (α, β), отвечающие векторам базиса, прочеркиваются.

Величины оценок $\Delta_j^{(l)}$, которые в случае односторонних ограничений (см. § 3) вносились в $(m+1)$-ю строку, в случае двухсторонних ограничений удобнее записывать в $(m+3)$-й строке таблицы. Таким образом, в этом случае

$$\Delta_j^{\cdot(l)} = x_{m+3,\, j}^{(l)}; \quad x_{m+3,\, 0}^{(l)} = L(X^{(l)}).$$

Элементы, заполняющие $(m+1)$-ю и $(m+2)$-ю строки, будут указаны ниже.

Справа от столбцов, отвечающих векторам условий, помещаются два новых столбца, $\tilde{A}_k$ и γ. Столбец $\tilde{A}_k$ содержит коэффициенты разложения по векторам базиса вектора A_k со своим знаком, если $x_k = \alpha_k$, и с противоположным знаком, если $x_k = \beta_k$ (A_k — вектор, включаемый в базис). Другими словами, элементы столбца $\tilde{A}_k$ равны

$$\tilde{x}_{ik}^{(l)} = (-1)^{\nu} x_{ik}^{(l)},$$

где $\nu = 0$ при $x_k = \alpha_k$ и $\nu = 1$ при $x_k = \beta_k$.

В следующем столбце γ записывается α_i, если в соответствующей позиции столбца $\tilde{A}_k$ стоит положительное число, и β_i, если $\tilde{x}_{ik}^{(l)} < 0$, т. е.

$$\gamma_i^{(l)} = \begin{cases} \alpha_i, & \text{если } \tilde{x}_{ik}^{(l)} > 0, \\ \beta_i, & \text{если } \tilde{x}_{ik}^{(l)} < 0. \end{cases} \qquad (7.1)$$

Позиции столбца γ, для которых $\gamma_i^{(l)} = -\infty$ или $\gamma_i^{(l)} = \infty$,

Таблица 5.13

Таблица l

№	C_X	$Б_X$	A_0	A_1	A_2	$\cdots$	A_k	$\cdots$	A_n	$\tilde{A}_k$	γ	θ
			$(\alpha,\ \beta)$			$\cdots$		$\cdots$				
1	c_{s_1}	A_{s_1}	$x_{10}^{(l)}$	$x_{11}^{(l)}$	$x_{12}^{(l)}$	$\cdots$	$x_{1k}^{(l)}$	$\cdots$	$x_{1n}^{(l)}$	$\tilde{x}_{1k}^{(l)}$	$\gamma_1^{(l)}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
r	c_{s_r}	A_{s_r}	$x_{r0}^{(l)}$	$x_{r1}^{(l)}$	$x_{r2}^{(l)}$	$\cdots$	$x_{rk}^{(l)}$	$\cdots$	$x_{rn}^{(l)}$	$\tilde{x}_{rk}^{(l)}$	$\gamma_r^{(l)}$	$\theta_0^{(l)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	c_{s_m}	A_{s_m}	$x_{m0}^{(l)}$	$x_{m1}^{(l)}$	$x_{m2}^{(l)}$	$\cdots$	$x_{mk}^{(l)}$	$\cdots$	$x_{mn}^{(l)}$	$\tilde{x}_{mk}^{(l)}$	$\gamma_m^{(l)}$	
$m+1$	—	A_k	$x_k^{(l)}$	—	—	$\cdots$	-1	$\cdots$	—	$(-1)^{\nu+1}$	$\gamma_{m+1}^{(l)}$	$\theta_{m+1}^{(l)}$
$m+2$	—	—	$x_{m+2,0}^{(l)}$	$x_{m+2,1}^{(l)}$	$x_{m+2,2}^{(l)}$	$\cdots$	$x_{m+2,k}^{(l)}$	$\cdots$	$x_{m+2,k}^{(l)}$	$\Delta_k^{(l)}$	—	—
$m+3$	—	—	$L^{(l)}$	$\Delta_1^{(l)}$	$\Delta_2^{(l)}$	$\cdots$	$\Delta_k^{(l)}$	$\cdots$	$\Delta_n^{(l)}$	—	—	—

так же как и позиции, соответствующие $x_{ik}^{(l)}=0$, не заполняются и прочеркиваются.

Каждый элемент последнего столбца θ вычисляется как разность соответствующих элементов столбцов A_0 и γ, деленная на элемент столбца $\tilde{A}_k$ из той же строки:

$$\theta_i^{(l)}=\frac{x_{i0}^{(l)}-\gamma_i^{(l)}}{\tilde{x}_{ik}^{(l)}}. \tag{7.2}$$

В $(m+1)$-й строке таблицы заполняются только пять позиций, отвечающие столбцам A_0, A_k, $\tilde{A}_k$, γ и θ. В $(m+1)$-ю позицию столбца A_0 записывается величина $x_{m+1,0}^{(l)}=x_k^{(l)}$ (α_k или β_k) — значение внебазисной переменной, отвечающей вводимому в базис вектору A_k. Позиция $(m+1)$-го столбца A_k всегда заполняется числом $x_{m+1,k}^{(l)}=-1$. Значения $\tilde{x}_{m+1,k}^{(l)}$, γ_{m+1} и θ_{m+1} вычисляются по общим правилам формирования элементов столбцов $\tilde{A}_k^{(l)}$, γ и θ:

$$\tilde{x}_{m+1,k}^{(l)}=x_{m+1,k}^{(l)}(-1)^{\nu}=(-1)^{\nu+1},$$

$$\gamma_{m+1}^{(\alpha)}=\begin{cases}\alpha_k, & \text{если } x_k^{(l)}=\beta_k,\\ \beta_k, & \text{если } x_k^{(l)}=\alpha_k,\end{cases}$$

$$\theta_{m+1}=\frac{x_{m+1,0}^{(l)}-\gamma_{m+1}^{(l)}}{\tilde{x}_{m+1,k}^{(l)}}=\beta_k-\alpha_k.$$

В $(m+2)$-ю строку помещают величины $x_{m+2,j}^{(l)}$ $(j=0, 1, \ldots, m)$, необходимые для вычисления оценок $\Delta_j^{(l)}$. Формулы (7.4) для вычисления $x_{m+2,j}^{(l)}$ приводятся в п. 7.2.

При решении задачи с двухсторонними ограничениями по первому алгоритму будем называть главной частью таблицы l часть таблицы, содержащую все позиции столбцов A_0, $A_1, \ldots, A_n$, за исключением $(m+1)$-й и $(m+3)$-й строк.

Так же как и в общем случае, форма исходной таблицы 0 отличается от формы таблицы l дополнительной строкой C, содержащей коэффициенты c_j линейной формы задачи. Заполнение таблицы 0 производится не по рекуррентным формулам. Величины x_{ij} вычисляются из систем уравнений (см. (5.5) гл. 4), а оценки Δ_j из соотношений (5.6)—(5.7) гл. 4.

При использовании какого-либо из методов определения исходного опорного плана можно одновременно получить соответствующие значения коэффициентов x_{ij} и оценок Δ_j.

7.2. Наметим теперь порядок вычислений при решении задачи линейного программирования с двухсторонними ограничениями по первому алгоритму метода последовательного улучшения плана.

Пусть l-я итерация закончена. В результате заполнена главная часть l-й таблицы и строка $(m+3)$. Вычисления в $(l+1)$-й итерации приводят к заполнению $(m+1)$-й строки, столбцов $\tilde{A}_k$, γ и θ таблицы l и главной части $(l+1)$-й таблицы. Первый этап $(l+1)$-й итерации начинается с просмотра $(m+3)$-й строки таблицы l. Если все $\Delta_j^{(l)} \geqslant 0$, имеет место случай 1°, и опорный план, полученный после l-й итерации, является решением задачи. При наличии векторов с отрицательными оценками $(\Delta_j < 0)$ могут иметь место случаи 2° или 3°. Случай 2° может возникнуть, если для некоторого j имеет место:

а) при $x_j = \alpha_j$ для $x_{ij} > 0$ $\alpha_{s_i} = -\infty$, а для $x_{ij} < 0$ $\beta_{s_i} = \infty$, либо

б) при $x_j = \beta_j$ для $x_{ij} > 0$ $\beta_{s_i} = \infty$, а для $x_{ij} < 0$ $\alpha_{s_i} = -\infty$. Будем называть условия *а*) и *б*) ***признаками неразрешимости*** задачи с двухсторонними ограничениями.

Случай 2° свидетельствует о неограниченности линейной формы на множестве планов задачи.

Если неразрешимость задачи не установлена (т. е. если имеет место случай 3°), следует перейти ко второму этапу итерации. На втором этапе производятся следующие операции:

1) определяется вектор, подлежащий включению в базис,

2) определяется вектор, подлежащий исключению из базиса,

3) преобразуются коэффициенты $x_{ij}^{(l)}$ разложения векторов условий по векторам базиса ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$),

4) преобразуются базисные переменные $x_{i0}^{(l)}$ и значение $x_{m+2,\,0}^{(l)}$ линейной формы задачи,

5) преобразуется строка (α, β),

6) преобразуются оценки $\Delta_j^{(l)}$ векторов условий.

Рассмотрим каждую из перечисленных операций.

1. В базис вводится вектор A_k с наименьшей оценкой $\Delta_k^{(l)}$. Выбрав A_k, заполняют столбцы $\tilde{A}_k$, γ и θ и $(m+1)$-ю строку таблицы l.

2. Исключению из базиса подлежит вектор A_{s_r}, на котором достигается

$$\theta_0^{(l)} = \min_j \theta_j^{(l)}.$$

Если план вырожденный и $\theta_0^{(l)}$ достигается на нескольких векторах, из базиса выводится вектор с наименьшим номером позиции. После обнаружения цикла используется более сложное правило, реализация которого описана в п. 7.4.

3. Коэффициенты $x_{ij}^{(l)}$ $(i=1, \ldots, m;\ j=1, \ldots, n)$ разложения векторов условий по векторам базиса преобразуются по рекуррентным формулам (1.12), если $\theta_0^{(l)}$ достигается на одной из первых m позиций базиса. Если $\theta_0^{(l)}$ достигается на $(m+1)$-й позиции таблицы, базис не меняется и коэффициенты x_{ij} сохраняют свое значение, т. е. $x_{ij}^{(l+1)} = x_{ij}^{(l)}$ при $r=m+1$ $(i=1, 2, \ldots, m;\ j=1, 2, \ldots, n)$.

4. Базисные переменные преобразуются по рекуррентным формулам

$$x_{i0}^{(l+1)} = \begin{cases} x_{i0}^{(l)} - \theta_0^{(l)} \tilde{x}_{ik}^{(l)} & \text{при } i \neq r, \\ x_{m+1,0} - \theta_0^{(l)} (-1)^{\nu+1} & \text{при } i = r, \end{cases} \qquad (7.3)$$
$$1 \leqslant i \leqslant m.$$

Формулы (7.3) справедливы независимо от того, достигается ли $\theta_0^{(l)}$ на первых m или на $(m+1)$-й позиции базиса. По этим же рекуррентным формулам (7.3) преобразуется значение $x_{m+2,0}^{(l)}$ линейной формы задачи. Для этого следует в $(m+2)$-ю позицию столбца $\tilde{A}_k$ поместить величину $\Delta_k^{(l)}$ оценки вектора, вводимого в базис $(\tilde{x}_{m+2,k}^{(l)} = \Delta_k^{(l)})$.

5. В строке (α, β) изменяется не более двух позиций. При $r \leqslant m$ вектор A_k вводится в базис, и, следовательно, позиция строки (α, β), отвечающая этому вектору, прочеркивается. В позицию, отвечающую вектору A_{s_r}, исключенному из базиса, помещается граничное значение, которое приняла компонента x_{s_r},

$$x_{s_r}^{(l+1)} = x_{r0}^{(l)} - \theta_0^{(l)} \tilde{x}_{rk}^{(l)} = \gamma_r^{(l)}.$$

При $r=m+1$ базис не меняется. Поэтому позиция строки (α, β), отвечающая вектору A_{s_r}, по-прежнему остается прочеркнутой, а граничное значение компоненты x_k в строке (α, β) меняется на противоположное.

6. Связь между оценками $\Delta_j^{(l+1)}$ и $\Delta_j^{(l)}$ также определяется тем, изменяется базис при переходе к новому плану или нет.

Пусть вначале $r \leqslant m$. Введем обозначение

$$x_{m+2,\,j}^{(l)} = z_j^{(l)} - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_{s_i} x_{ij}^{(l)} - c_j, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{7.4}$$

Ясно, что

$$\Delta_j^{(l)} = (-1)^{\nu_j} x_{m+2,\,j}^{(l)} = \tilde{x}_{m+2,\,j}^{(l)}, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{7.5}$$

где

$$\nu_j = 0, \quad \text{если} \quad x_j = \alpha_j, \quad \text{и} \quad \nu_j = 1 \quad \text{при} \quad x_j = \beta_j.$$

Параметры $x_{m+2,\,j}^{(l)}$ заполняют $(m+2)$-ю строку таблицы и преобразуются по тем же рекуррентным формулам (1.12), что и коэффициенты $x_{ij}^{(l)}$ разложения векторов условий по векторам базиса. После преобразования параметров $x_{m+2,\,j}^{(l)}$ по формуле (7.5) вычисляются преобразованные значения оценок.

Если $r=m+1$, то $(m+2)$-я строка, за исключением позиции, в которой записывается значение линейной формы, не меняется. При $r=m+1$ базис не изменяется и оценки всех векторов условий, за исключением A_k, сохраняются. Оценка вектора A_k меняет знак. Таким образом, при $r=m+1$

$$\Delta_j^{(l+1)} = \begin{cases} \Delta_j^{(l)} & \text{при } j \neq k, \\ -\Delta_j^{(l)} & \text{при } j = k. \end{cases} \tag{7.6}$$

Вычисление перечисленных параметров завершает $(l+1)$-ю итерацию и позволяет заполнить всю главную часть $(l+1)$-й таблицы. Последующие итерации проводятся по тем же правилам.

На рис. 5.3 приведена блок-схема отдельной итерации решения задачи линейного программирования с двухсторонними ограничениями по первому алгоритму метода последовательного улучшения плана.

7.3. Наметим порядок вычислений при решении задачи с двухсторонними ограничениями по второму алгоритму.

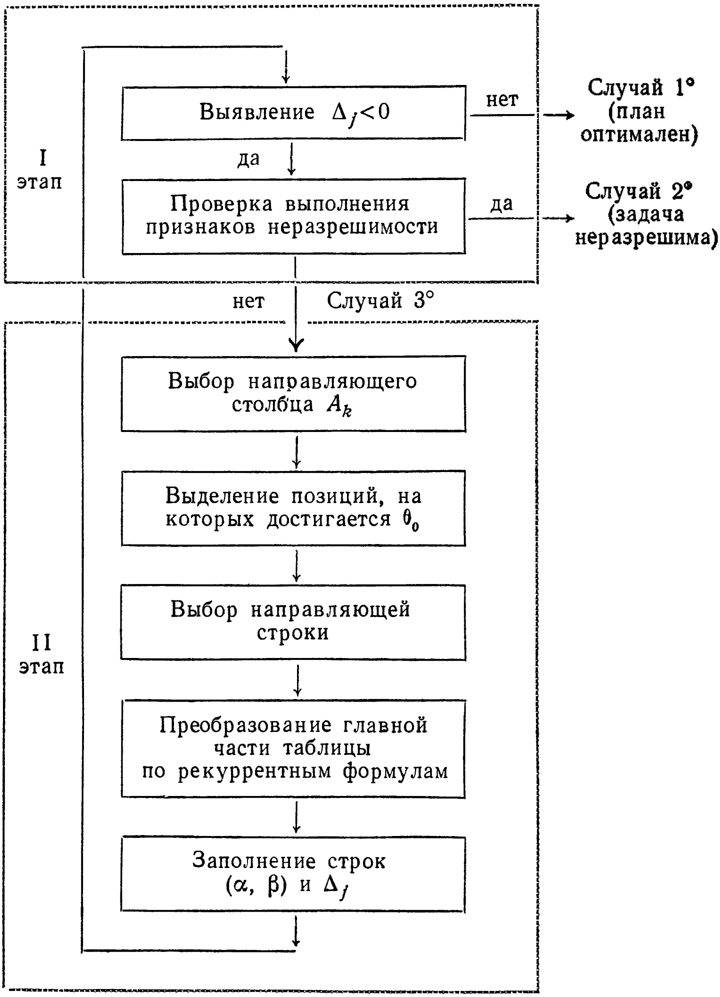


Рис. 5.3.

Учет двухсторонних ограничений заставляет внести небольшие изменения в структуру основных и вспомогательной таблиц, составленных в § 5 для канонической формы задачи линейного программирования.

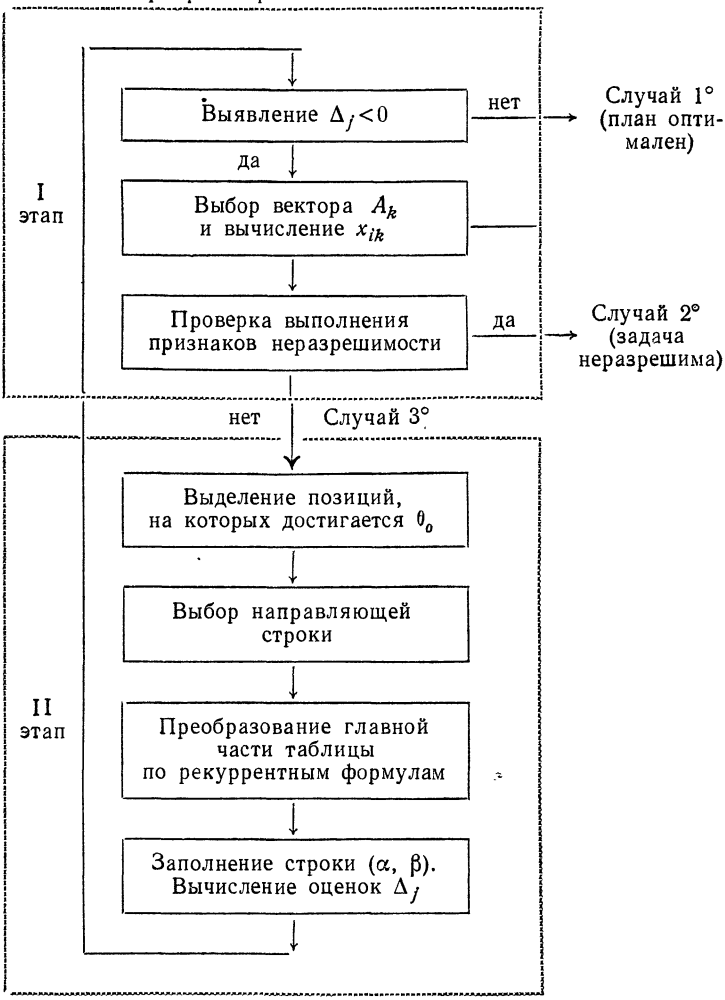


Рис. 5.4.

В основные таблицы вводятся (как и при первом алгоритме) два дополнительных столбца $\tilde{A}_k$ и γ. Столбцы заполняются по тем же правилам, что и в первом алгоритме.

Оценки условий задачи $\lambda_j^{(l)}$ ($j=1, 2, \ldots, m$) и $\lambda_0 = L(X)$ помещаются не в $(m+1)$-ю строку, как в задачах, заданных в канонической форме, а в $(m+2)$-ю строку. Строка $(m+1)$ заполняется теми же параметрами, что и $(m+1)$-я строка в таблице для первого алгоритма. В $(m+1)$-й строке заполняются пять позиций:

$$e_{m+1,\,0}^{(l)} = x_k, \quad x_{m+1,\,k}^{(l)} = -1, \quad \tilde{x}_{m+1,\,k}^{(l)} = (-1)^{\nu+1},$$

$$\gamma_{m+1}^{(l)} \quad \text{и} \quad \theta_{m+1}^{(l)} = \beta_k - \alpha_k.$$

Во вспомогательную таблицу после каждой итерации добавляется не одна строка, как в § 5, а две: $(\alpha, \beta)^{(l)}$ и $\Delta^{(l)}$. В верхней части вспомогательной таблицы целесообразно поместить строку α_j/β_j, в которой указываются величины левой и правой границ соответствующих переменных. По завершении l-й итерации заполняется главная часть l-й основной таблицы и l-я пара строк в нижней части вспомогательной таблицы.

Определение вектора A_k, подлежащего вводу в базис, проводится так же, как и в первом алгоритме. Вычисление коэффициентов разложения вектора A_k по векторам базиса и выбор вектора A_{s_r}, исключаемого из базиса, не отличаются от аналогичных операций во втором алгоритме при решении задачи в канонической форме. Однако, в отличие от приложения второго алгоритма к задачам в канонической форме, здесь возможен случай $r = m+1$.

Коэффициенты $e_{ij}^{(l)}$ разложения единичных векторов по векторам базиса ($i=1, 2, \ldots, m$; $j=1, 2, \ldots, m$) преобразуются по рекуррентным формулам (1.21), если $\theta_0^{(l)}$ достигается при $r \leqslant m$, и сохраняют свои значения при $r=m+1$.

Базисные компоненты плана — элементы столбца $e_0 = B - \sum\limits_{j \notin I_X} x_j A_j$ — преобразуются так же, как и элементы столбца A_0 в первом алгоритме:

$$e_{i0}^{(l+1)} = \begin{cases} e_{i0}^{(l)} - \theta_0^{(l)} \tilde{x}_{ik} & \text{при } i \neq r, \\ e_{m+1,\,0}^{(l)} - \theta_0^{(l)} (-1)^{\nu+1} & \text{при } i = r, \end{cases} \tag{7.7}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m.$$

Формулы (7.7) справедливы независимо от того, изменяется базис при переходе к новому плану или нет. По этим же рекуррентным формулам преобразуется значение $e^{(l)}_{m+2,0}$ линейной формы. Для этого следует поместить в позицию $m+2$ столбца $\tilde{A}_k$ значение оценки

$$\tilde{x}^{(l)}_{m+2,k}=\Delta^{(l)}_k$$

вектора, вводимого в базис.

Строки (α, β) вспомогательной таблицы преобразуются по тем же правилам, что и в первом алгоритме. Параметры $\lambda^{(l)}_j$ вычисляются по рекуррентным формулам (1.21) при $i=m+1$, $j=1, 2, \ldots, n$.

Параметры $\Delta^{(l)}_j$ вычисляются по формулам

$$\Delta^{(l)}_j=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda^{(l)}_i-c_j & \text{при } x_j=\alpha_j,\\ c_j-\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda^{(l)}_i & \text{при } x_j=\beta_j.\end{cases} \qquad (7.8)$$

Удобнее, конечно, всегда вычислять разности $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda^{(l)}_i-c_j$, не задумываясь над значениями внебазисных переменных, а затем, пользуясь строкой (α, β), изменить знаки в позициях, для которых $x_j=\beta_j$.

На рис. 5.4 приведена блок-схема второго алгоритма для задачи с двухсторонними ограничениями.

7.4. Отметим особенности реализации правила выбора вектора, подлежащего исключению из базиса, в вырожденных задачах с двухсторонними ограничениями.

При решении задачи по первому алгоритму целесообразно в качестве системы векторов R_i принять следующую совокупность векторов:

$$R_i=\begin{cases}A_{s_i} & \text{при } x_{i0}<\beta_{s_i},\\ -A_{s_i} & \text{при } x_{i0}=\beta_{s_i}.\end{cases} \qquad (7.9)$$

При решении задачи вторым алгоритмом удобно использовать следующую систему векторов R_i:

$$R_1=A_XW;\quad R_2=e_1,\quad \ldots,\quad R_t=e_{t-1},$$
$$R_{t+1}=e_t,\quad \ldots,\quad R_m=e_m. \qquad (7.10)$$

Здесь e_i — m-мерные единичные векторы; компоненты вектора W определяются формулой

$$w_i = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x_{i0} < \beta_{s_i}, \\ -1 & \text{при} \quad x_{i0} = \beta_{s_i}. \end{cases}$$

A_X — матрица базиса, индекс t выбран так, чтобы t-й коэффициент вектора $A_X W$ был отличен от нуля.

Нетрудно убедиться в том, что как система (7.9), так и система (7.10) удовлетворяют обоим требованиям, предъявленным к системе R_i в § 6 предыдущей главы.

7.5. Проиллюстрируем порядок вычислений, связанных с определением оптимального плана задачи линейного программирования с двухсторонними ограничениями.

Пусть требуется обратить в максимум линейную форму

$$L(X) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 + x_7 - x_8 - x_9 - x_{10} - x_{11}$$

при условиях:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 3x_6 + x_7 + x_8 \qquad\qquad &= 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 + 2x_7 \qquad + x_9 \qquad &= 8, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 0{,}5x_5 + x_6 + x_7 \qquad\qquad + x_{10} &= 6, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 + x_7 \qquad\qquad + x_{11} &= 7, \\ 0 \leqslant x_j \leqslant 1, \quad j = 1, 2, \ldots, 7, & \\ x_j \geqslant 0, \quad j = 8, \ldots, 11. & \end{aligned}$$

Весь процесс решения задачи вторым алгоритмом метода последовательного улучшения плана содержится в основных таблицах 5.14 и вспомогательной таблице 5.15.

В качестве исходного базиса естественно выбрать единичный базис (A_8, A_9, A_{10}, A_{11}). Ему соответствует опорный план, у которого базисные компоненты равны составляющим вектора ограничений, а внебазисные равны нулю. Поэтому столбец e_0 основной таблицы 0, заполняемый составляющими вектора

$$A_0 = B - \sum_{j \notin I_X} A_j x_j,$$

содержит только компоненты вектора B.

Первые $m = 4$ позиции столбцов $e_1, \ldots, e_4$ таблицы 0 образуют единичную матрицу. $(m+1)$-я (5-я) строка заполняется после определения вектора, подлежащего вводу в базис. $(m+2)$-я (6-я) строка содержит значения оценок λ_j условий задачи и значение линейной формы. Так, значение линейной формы

$$L(X) = \lambda_0 = -1 \cdot 7 - 1 \cdot 8 - 1 \cdot 6 - 1 \cdot 7 = -28.$$

Остальные величины λ_j ($j = 1, \ldots, 4$) равны коэффициентам линейной формы при соответствующих базисных переменных.

Таблица 5.14 (0—7)

	№	C_X	$БX$	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	A_k	$\tilde{A}_k$	γ	θ	Номер таблицы
	1	−1	A_8	7	1				2	2	0	3,5	0
	2	−1	A_9	8		1			1	1	0	8	
	3	−1	A_{10}	6			1		3	3	0	2	
	4	−1	A_{11}	7				1	3	3	0	2,333	
←	5	3	A_3	0	—	—	—	—	−1	−1	1	**1**	
	6	—	—	−28	−1	−1	−1	−1	−12	—	—	—	
	1	−1	A_8	5	1				3	3	0	1,667	1
	2	−1	A_9	7		1			2	2	0	3,5	
	3	−1	A_{10}	3			1		1	1	0	3	
	4	−1	A_{11}	4				1	3	3	0	1,333	
←	5	3	A_6	0	—	—	—	—	−1	−1	1	**1**	
	6	—	—	−16	−1	−1	−1	−1	−12	—	—	—	
	1	−1	A_8	2	1				2	2	0	1	2
	2	−1	A_9	5		1			3	3	0	1,667	
	3	−1	A_{10}	2			1		0,5	0,5	0	4	
←	4	−1	A_{11}	1				1	2	2	0	**0,5**	
	5	2	A_5	0	—	—	—	—	−1	−1	1	1	
	6	—	—	−4	−1	−1	−1	−1	−9,5	—	—	—	

Продолжение

	№	C_X	$Б_X$	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	A_k	$\tilde{A}_k$	γ	θ	Номер таблицы
	1	−1	A_8	1	1			−1			—	—	3
	2	−1	A_9	3,5		1		−1,5	1,5	1,5	0	2,333	
	3	−1	A_{10}	1,75			1	−0,25	1,75	1,75	0	1	
→	4	2	A_5	0,5				0,5	0,5	0,5	0	2	
←	5	2	A_2	0	—	—	—	—	−1	−1	1	**1**	
	6	—	—	0,75	−1	−1	−1	3,75	−4,25	—	—	—	
	1	−1	A_8	1	1			−1	2	2	0	0,5	4
	2	−1	A_9	2		1		−1,5	−0,5	−0,5	—	—	
←	3	−1	A_{10}				1	−0,25	1,75	1,75	0	**0**	
	4	2	A_5					0,5	0,5	0,5	0	0	
	5	1	A_4	0	—	—	—	—	−1	−1	1	1	
	6	—	—	5	−1	−1	−1	3,75	−3,25	—	—	—	
←	1	−1	A_8	1	1		−1,143	−0,714	−3,571	3,571	0	**0,28**	5
	2	−1	A_9	2		1	0,286	−1,571	−2,857	2,857	0	0,700	
→	3	1	A_4				0,571	−0,143	1,286	−1,286	1	0,778	
	4	2	A_5				−0,286	0,571	0,857	−0,857	1	1,167	
	5	3	A_3	1	—	—	—	—	−1	1	0	1	
	6	—	—	5	—	—	0,857	3,286	−6,429	—	—	—	

Продолжение

	№	C_X	$Б_X$	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	A_k	$\tilde{A}_k$	γ	θ	Номер таблицы
→	1	3	A_3	0,72	−0,28		0,32	0,2	0,08	−0,08	1	3,5	6
←	2	−1	A_9	1,20	−0,80	1	1,20	−1	−2,20	2,20	0	**0,545**	
	3	1	A_4	0,36	0,36		0,16	−0,4	0,04	−0,04	1	16	
	4	2	A_5	0,24	0,24		−0,56	0,4	1,36	−1,36	1	0,559	
	5	3	A_6	1	—	—	—	—	−1	1	0	1	
	6	—	—	6,8	0,80	−1	−1,20	2	−2,2	—	—	—	
	1	3	A_3	0,764	−0,309	0,036	0,364	0,164					7
→	2	3	A_6	0,455	0,364	−0,455	−0,545	0,455					
	3	1	A_4	0,382	0,345	0,018	0,182	−0,418					
	4	2	A_5	0,982	−0,255	0,618	0,182	−0,218					
	5				—	—	—	—					
	6	—	—	8				1		—	—	—	

Таблица 5.15

№	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}
1	7	1	1	2	3	2	3	1	1			
2	8	2	3	1	1	3	2	2		1		
3	6	1	2	3	2	0,5	1	1			1	
4	7	2	1	3	1	2	3	1				1
5	C	1	2	3	1	2	3	1	—1	—1	—1	—1
0	(α, β)	α	α	α	α	α	α	α	—	—	—	—
	Δ	—7	—9	**—12**	—8	—9,5	—12	—6	—	—	—	—
1	$(\alpha, \beta)'$	α	α	β	α	α	α	α	—	—	—	—
	Δ'	—7	—9	12	—8	—9,5	**—12**	—6	—	—	—	—

Продолжение

№	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}
2	$(\alpha, \beta)''$	α	α	β	α	α	β	α	—	—	—	—
	Δ''	−7	−9	12	−8	**−9,5**	12	−6	—	—	—	—
3	$(\alpha, \beta)'''$	α	α	β	α	—	β	α	—	—	—	α
	Δ'''	2,5	−4,25	−2,25	−3,25	—	−2,25	−1,25	—	—	—	4,75
4	$(\alpha, \beta)^{IV}$	α	β	β	α	—	β	α	—	—	—	α
	Δ^{IV}	2,5	4,25	−2,25	**−3,25**	—	−2,25	−1,25	—	—	—	4,75
5	$(\alpha, \beta)^{V}$	α	β	β	—	—	β	α	—	—	α	α
	Δ^{V}	3,429	1	**6,429**	—	—	−2,714	0,143	—	—	1,857	4,286
6	$(\alpha, \beta)^{VI}$	α	β	—	—	—	β	α	α	—	α	α
	Δ^{VI}	0,6	4,6	—	—	—	−2,2	−1,4	1,8	—	−0,2	3
7	$(\alpha, \beta)^{VII}$	α	β	—	—	—	—	α	α	α	α	α
	Δ^{VII}	1	1	—	—	—	—	0	1	1	1	2

В строке (α, β) нижней части вспомогательной таблицы, отвечающей основной таблице 0, показано, что в начальном опорном плане все внебазисные переменные совпадают с левой границей (α_j) интервала своего изменения (при заполнении вспомогательной таблицы следует лишь указывать, с какой из своих границ совпадает внебазисная переменная; величина граничного значения не используется при установлении знака Δ_j). В нашем случае все внебазисные переменные равны нулю (левой границе), и оценки Δ_j вычисляются по верхней формуле (7.8). Наименьшее значение Δ_j, равное -12, достигается на векторах A_3 и A_6. В базис может быть введен любой из этих векторов.

Введем для определенности A_3. В столбце A_k основной таблицы 0 вносятся коэффициенты разложения A_3 по векторам базиса,

$$x_{m+1,\,3}=x_{5,\,3}=-1,\quad x_{m+2,\,3}=\Delta_3=-12.$$

Столбец $\tilde{A}_k$ совпадает со столбцом A_k, поскольку все внебазисные переменные равны своим левым границам. Первые $m=4$ позиции столбца γ заполняются нулями. Величина

$$\gamma_{m+1}=\gamma_5=\beta_3=1,$$

так как $x_3=\alpha_3$. Значения θ вычисляются по формуле (7.2). Например,

$$\theta_2=\frac{x_{20}-\gamma_{20}}{\tilde{x}_{23}}=\frac{8-0}{1}=8,$$

$$\theta_{m+1}=\theta_5=\frac{x_{50}-\gamma_{50}}{\tilde{x}_{25}}=\frac{0-1}{-1}=1.$$

В нашем случае $\theta_{m+1}=\theta_5$ оказывается наименьшим числом в столбце θ. Поэтому при переходе к следующей основной таблице 1 базис не меняется.

Переменная x_3, отвечающая вектору A_3, в новом плане будет уже совпадать не с левой, а с правой границей интервала своего определения. Соответственно изменится и знак Δ_3. Все остальные внебазисные переменные сохраняют свои значения, а соответствующие им векторы сохраняют свои относительные оценки. Из вспомогательной таблицы видно, что теперь наименьшая оценка отвечает вектору A_6 $(\Delta_6'=-12)$. Вектор A_6 вводится в базис.

Столбец e_0 основной таблицы 1 содержит компоненты вектора

$$A_0=B-\sum_{j\notin I_X} x_j' A_j.$$

В нашем случае

$$e_0=B-\beta_3 A_3=B-A_3.$$

Таким образом, при переходе от основной табл. 0 к табл. 1 вся главная часть таблицы, за исключением столбца A_0 (позиции $1, 2, \ldots$ $\ldots, m, m+2$), остается неизменной. Столбцы A_k, $\tilde{A}_k$, γ и θ и строка $(m+1)$ заполняются, как и в предыдущей основной таблице. Минимальное значение снова достигается в $(m+1)$-й позиции. Следовательно, и на этой итерации переход к новому опорному плану не вызывает изменения базиса.

На следующем шаге (табл. 2) вектор A_5 вводится в базис взамен единичного вектора A_{11}. В этом случае главная часть основной таблицы преобразуется по рекуррентным формулам (базисные компоненты опорного плана и значение линейной формы задачи вычисляются по формулам (7.7), а элементы e_{ij} обратной матрицы и относительные оценки λ_j условий задачи по формулам (1.21)).

После шести итераций все оценки Δ_j векторов условий становятся неотрицательными. Оптимальный базис состоит из векторов A_3, A_4, A_5, A_6. Базисные компоненты решения

$$x_3 = 0{,}764, \quad x_4 = 0{,}382, \quad x_5 = 0{,}982, \quad x_6 = 0{,}455.$$

Из внебазисных переменных отлична от нуля только $x_2 = 1$.

§ 8. Вычислительные схемы определения исходного опорного плана

8.1. При изложении алгоритмов метода последовательного улучшения плана исходный опорный план предполагался заданным.

В § 7 предыдущей главы приведены теоретические соображения, обосновывающие возможность построения начального плана, и приемы, позволяющие объединить два этапа — вычисление исходного плана и решение задачи. В настоящем параграфе приведены замечания о реализации соответствующих вычислительных схем.

Рассмотрим вначале способ вычисления исходного опорного плана, сводящийся к решению так называемой вспомогательной задачи (см. п. 7 гл. 4). Для решения вспомогательной задачи можно, вообще говоря, воспользоваться как первым, так и вторым алгоритмом. Однако во многих случаях применение первого алгоритма к решению вспомогательной задачи связано с меньшим количеством вычислений. Дело в том, что в оптимальный базис вспомогательной задачи часто помимо векторов условий исходной задачи входят дополнительные единичные векторы e_i (искусственные векторы). Для замены единичных векторов на векторы условий задачи необходимо иметь коэффициенты разложения всех векторов A_j по соответствующим векторам базиса. Коэффициенты x_{ij} для всех j вычисляются при первом алгоритме и не вычисляются при втором.

При решении вспомогательной задачи нет необходимости в вычислении коэффициентов разложения искусственных векторов по векторам базиса. Единичные векторы составляют начальный базис вспомогательной задачи. Однако в процессе решения задачи нецелесообразно включать в базис искусственные векторы. Поэтому можно исключить из таблиц алгоритма столбцы, отвечающие дополнительным единичным векторам условий вспомогательной задачи.

Процесс решения вспомогательной задачи, для которой исходный план очевиден, приводит через конечное число шагов к случаю 1° (случай 2° здесь невозможен, поскольку линейная форма вспомогательной задачи ограничена сверху нулем). При этом могут представиться две возможности. Если максимальное значение линейной формы равно нулю, то базисные переменные вспомогательной задачи определяют начальный опорный план исходной задачи. Если в решении вспомогательной задачи не все искусственные переменные оказались равными нулю, то исходная задача неразрешима.

Пусть оптимальное значение линейной формы вспомогательной задачи равно нулю. Как уже указывалось, оптимальный базис может содержать дополнительные единичные векторы. Соответствующие базисные переменные, естественно, равны нулю. Покажем, как можно, не меняя плана, заменить единичные векторы базиса векторами условий и дополнить, таким образом, базис до максимальной системы линейно независимых векторов условий исходной задачи. Если в максимальной системе окажется m векторов, то и ранг системы условий задачи равен m. Если же максимальная система содержит $r<m$ векторов, то в процессе преобразования базиса будут выделены r линейно независимых равенств—условий задачи.

Рассмотрим таблицу, соответствующую последней итерации процесса решения вспомогательной задачи. Возможны два случая:

а) все элементы x_{ij} главной части таблицы во всех строках, отвечающих дополнительным единичным векторам, равны нулю;

б) оптимальный базис вспомогательной задачи содержит дополнительный вектор e_i, для которого по крайней мере один из коэффициентов x_{ij} отличен от нуля.

В случае *а* векторы условий исходной задачи, вошедшие в оптимальный базис вспомогательной задачи, образуют максимальную систему линейно независимых векторов матрицы $A=\|a_{ij}\|_{mxn}$. Действительно, эти векторы принадлежат базису и потому линейно независимы. Кроме того, любой вектор условий разлагается по векторам базиса так, что коэффициенты разложения при дополнительных единичных векторах базиса равны нулю. Следовательно, все векторы A_j разлагаются по векторам условий исходной задачи, включенным в оптимальный базис вспомогательной задачи.

Рассмотрим теперь случай *б*. Пусть в i-й позиции базиса вспомогательной задачи содержится дополнительный единичный вектор e_i и при этом $x_{ip} \neq 0$. Заменим в базисе вектор e_i на вектор условий A_p. Полученная система векторов останется при этом линейно независимой и, как видно из рекуррентных формул (1.12), элементы столбца A_0 сохранят свои значения. Число дополнительных единичных векторов базиса оптимального плана вспомогательной задачи уменьшается, таким образом, на единицу, а план при этом преобразовании не меняется. Точно так же можно последовательно заменить векторами условий исходной задачи все дополнительные единичные векторы, которым соответствуют по крайней мере по одному отличному от нуля коэффициенту x_{ij}. Максимальная система векторов условий будет содержать m векторов, если из базиса оптимального плана вспомогательной задачи будут удалены все дополнительные единичные векторы. Максимальная система содержит $r<m$ векторов, если процедура замены дополнительных единичных векторов векторами условий исходной задачи приведет к таблице, в которой все элементы главной части, соответствующие $m-r$ единичным векторам базиса, равны нулю. В последнем случае следует отбросить строки таблицы, отвечающие единичным искусственным векторам. Дальнейший анализ (построение оптимального плана исходной задачи) производится с матрицей условий размером $r \times n$. Таким образом, в процессе решения вспомогательной задачи определяется начальный опорный план и выделяются независимые условия исходной задачи линейного программирования.

8.2. Проиллюстрируем приведенные рассуждения простым примером.

Пусть требуется определить исходный опорный план для задачи максимизации некоторой линейной формы $L(X)$ при условиях:

$$\begin{aligned}
2x_1+3x_2-x_3+4x_4+x_5&=8,\\
3x_1+2x_2+2x_3-2x_4-2x_5&=7,\\
5x_1+5x_2+x_3+x_4-x_5&=15,\\
x_1+4x_2-4x_3+11x_4+4x_5&=9,\\
x_j\geqslant 0,\quad j=1,\,2,\,\ldots,\,5.&
\end{aligned}$$

Вспомогательная задача требует определения максимума линейной формы

$$\tilde{L}(X) = -(x_6 + x_7 + x_8 + x_9)$$

при условиях:

$$\begin{aligned} &L_1(X) + x_6 &&= 8,\\ &L_2(X) \quad + x_7 &&= 7,\\ &L_3(X) \qquad + x_8 &&= 15,\\ &L_4(X) \qquad\quad + x_9 &&= 9,\\ &x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 9. \end{aligned}$$

Здесь $L_i(X)$ — левые части условий исходной задачи. Решим вспомогательную задачу, пользуясь первым алгоритмом метода

Таблицы 5,16 (0—2)

	C_X	Б	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	θ	Номер таблицы
	−1	A_6	8	2	3	−1	4	−1	$^8/_3$	
	−1	A_7	7	3	2	2	−2	−2	$^7/_2$	
	−1	A_8	15	5	5	1	1	−1	3	0
←	−1	A_9	9	1	4	−4	11	4	$^9/_4$	
	—	—	−39	−11	−14	2	−13	−2	—	
←	−1	A_6	$^5/_4$	$^5/_4$		2	$-^{17}/_4$	−2	$^5/_8$	
	−1	A_7	$^5/_2$	$^5/_2$		4	$-^{15}/_2$	−4	$^5/_8$	
	−1	A_8	$^{15}/_4$	$^{15}/_4$		6	$-^{51}/_4$	−6	$^5/_8$	1
→		A_2	$^9/_4$	$^1/_4$	1	−1	$^{11}/_4$	1	—	
	—	—	$-^{15}/_2$	$-^{15}/_2$		−12	$^{51}/_2$	12	—	
→		A_3	$^5/_8$	$^5/_8$		1	$-^{17}/_8$	−1		
←	−1	A_7					1			
	−1	A_8								2
		A_2	$^{23}/_8$	$^7/_8$	1		$^5/_8$			
	—	—					−1		—	

последовательного улучшения плана. Ход решения ясен из приведенных таблиц (5.16). Как уже указывалось, искусственным векторам нецелесообразно отводить отдельные столбцы таблиц.

Оптимальный базис вспомогательной задачи содержит два искусственных вектора, A_7 и A_8. Как видно из табл. 2, коэффициент $x_{24}^{(2)}$ разложения вектора A_4 по векторам последнего базиса отличен от нуля. Поэтому можно заменить в базисе искусственный вектор A_7 на вектор условий A_4. После преобразования последней таблицы получим табл. 5.17. Все элементы строки A_8 равны нулю. Следовательно, векторы A_3, A_4 и A_2 образуют максимальную систему линейно независимых векторов матрицы условий.

Таблица 5.17

	Б	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
	A_3	$^5/_8$	$^5/_8$		1		−1
→	A_4					1	
	A_8						
	A_2	$^{23}/_8$	$^7/_8$	1			

Оптимальное значение линейной формы вспомогательной задачи равно нулю. Поэтому решение вспомогательной задачи определяет начальный опорный план исходной задачи. Кроме того, как видно из последней таблицы, линейно независимые условия исходной задачи могут быть переписаны в виде

$$\begin{aligned} \frac{5}{8}x_1 \qquad + x_3 \quad - x_5 &= \frac{5}{8}, \\ x_4 \qquad &= 0, \\ \frac{7}{8}x_1 + x_2 \qquad\qquad &= \frac{23}{8}. \end{aligned}$$

Таким образом, в результате решения вспомогательной задачи не только найден начальный план задачи $X_0 = \left(0, \frac{23}{8}, \frac{5}{8}, 0, 0\right)$, но и упрощена запись условий задачи.

8.3. Рассмотрим теперь реализацию M-метода, позволяющего совместить определение исходного опорного плана и решение задачи линейного программирования. Оптимальный план M-задачи, исходный опорный план которой очевиден, может быть вычислен либо по первому, либо по второму алгоритму метода последовательного улучшения плана.

Коэффициенты c_j линейной формы M-задачи — линейные функции величины M:

$$c_j = \overline{c}_j M + \overline{\overline{c}}_j.$$

Поэтому и параметры Δ_j и λ_i будут линейными функциями M:

$$\Delta_j = \overline{\Delta}_j M + \overline{\overline{\Delta}}_j, \quad \overline{\lambda}_i = \overline{\lambda}_i M + \overline{\overline{\lambda}}_i.$$

Отсюда и особенности таблиц в вычислительной схеме M-метода. Вместо одной строки Δ при решении M-задачи в таблицах первого и второго алгоритмов заполняются две строки — строка $\overline{\Delta}$ коэффициентов при M и строка $\overline{\overline{\Delta}}$ свободных членов. Сравнение оценок Δ_j векторов A_j производится в соответствии со следующим правилом:

$$\Delta_{j_1} > \Delta_{j_2}, \quad \text{если} \quad \begin{cases} \overline{\Delta}_{j_1} > \overline{\Delta}_{j_2}, \\ \overline{\Delta}_{j_1} = \overline{\Delta}_{j_2}, \quad \text{но} \quad \overline{\overline{\Delta}}_{j_1} > \overline{\overline{\Delta}}_{j_2}. \end{cases}$$

В соответствии с этим оценка Δ_j считается положительной, если $\overline{\Delta}_j > 0$ либо $\overline{\Delta}_j = 0$, но $\overline{\overline{\Delta}}_j > 0$.

При вычислениях по второму алгоритму последняя строка основных таблиц (строка λ-оценок условий задачи относительно базиса) также заменяется на две строки — строки $\overline{\lambda}$ и $\overline{\overline{\lambda}}$.

Искусственные векторы, выведенные из базиса, исключаются из рассмотрения при решении M-задачи. Поэтому дополнительные единичные векторы не включаются в столбцы векторов условий в таблицах, реализующих решение M-задачи. Нетрудно видеть, что приведенное правило, сокращая объем вычислений, не меняет сущности M-метода.

Процесс решения M-задачи через конечное число итераций приводит к случаю 1° или 2°. В случае 1° решение M-задачи определяет оптимальный план исходной задачи, если дополнительные переменные не вошли в решение. Все другие возможности приводят к неразрешимости исходной задачи (линейная форма неограничена на множестве планов задачи или условия задачи несовместны).

Исключая отмеченные особенности, процесс решения M-задачи по первому или второму алгоритму метода последовательного улучшения плана проводится в соответствии с правилами, изложенными в §§ 2 и 5.

8.4. Приведем пример использования M-метода для решения задачи линейного программирования, в которой исходный план неочевиден. Вычисления будут проведены в соответствии со вторым алгоритмом метода последовательного улучшения плана.

Пусть требуется обратить в максимум линейную форму

$$L(X)=x_1+2x_2+3x_3+x_4+2x_5+3x_6+x_7 \tag{8.1}$$

при условиях:

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2+2x_3+3x_4+2x_5+3x_6+x_7&=7,\\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4+3x_5+2x_6+2x_7&=8,\\ x_1+2x_2+3x_3+2x_4+0{,}5x_5+x_6+2x_7&=6,\\ 2x_1+x_2+3x_3+x_4+2x_5+3x_6+2x_7&=7,\end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

$$x_j\geqslant 0,\quad j=1, 2, \ldots, 7.$$

Начальный опорный план заранее не задан. Введем искусственные неотрицательные переменные x_8, x_9, x_{10} и x_{11} и рассмотрим соответствующую M-задачу.

Требуется обратить в максимум линейную форму

$$\tilde{L}=L(X)-M(x_8+x_9+x_{10}+x_{11})$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} &L_1(X)+x_8 &&=7,\\ &L_2(X)+x_9 &&=8,\\ &L_3(X)+x_{10} &&=6,\\ &L_4(X)+x_{11}&&=7,\\ &x_j\geqslant 0,\quad j=1, 2, \ldots, 11.\end{aligned}$$

Здесь $L(X)$ — линейная форма (8.1), а $L_i(X)$ — левые части условий (8.2) исходной задачи.

Ниже приведены основная и вспомогательная таблицы (табл. 5.18 и 5.19), фиксирующие последовательное улучшение плана по второму алгоритму.

Таблицы не требуют специальных пояснений. Решение задачи получено за четыре шага. Оптимальный план задачи равен

$$X=\left\{0, \frac{25}{16}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, 0, \frac{11}{8}, 0\right\}.$$

Максимальное значение линейной формы равно 137/16.

В рассматриваемом примере оказалось, что после исключения всех искусственных векторов из базиса план сразу оказался оптимальным. В общем случае это может быть не так. После удаления из базиса искусственных векторов обычно получается опорный план, который в процессе последующего улучшения должен быть преобразован в оптимальный план.

Таблицы 5.18 (0—4)

	№	C_X	$Б_X$	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	A_k	θ	Номер таблицы
	1	$-M$	A_8	7	1				2	7/2	0
	2	$-M$	A_9	8		1			1	8	
←	3	$-M$	A_{10}	6			1		3	2	
	4	$-M$	A_{11}	7				1	3	7/3	
	5	—	—	−28	−1	−1	−1	−1	−9	—	
									−3		
	1	$-M$	A_8	3	1		−2/3		7/3	9/7	1
	2	$-M$	A_9	6		1	−1/3		5/3	18/5	
→	3	3	A_3	2			1/3		1/3	6	
←	4	$-M$	A_{11}	1			−1	1	2	1/2	
	5	—	—	−10	−1	−1	2	−1	−6	—	
				6			1		−2		
	1	$-M$	A_8	11/6	1		1/2	−7/6	5/6	11/5	2
←	2	$-M$	A_9	31/6		1	1/2	−5/6	19/6	31/19	
	3	3	A_3	11/6			1/2	−1/6	5/6	11/5	
→	4	3	A_6	1/2			−1/2	1/2	−1/2	—	
	5	—	—	−7	−1	−1	−1	2	−4	—	
				7				1	−1		
←	1	$-M$	A_8	9/19	1	−5/19	7/19	−18/19	48/19	9/48	3
→	2	2	A_2	31/19		6/19	3/19	−5/19	7/19	31/7	
	3	3	A_3	9/19		−5/19	7/19	1/19	10/19	9/10	
	4	3	A_6	25/19		3/19	−8/19	7/19	−6/19	—	
	5	—	—	−9/19	−1	5/19	−7/19	18/19	−48/19	—	
				164/19		6/19	3/19	14/19	7/19		
→	1	1	A_4	3/16	19/48	−5/48	7/48	−3/8			4
	2	2	A_2	25/16	−7/48	17/48	5/48	−1/8			
	3	3	A_3	3/8	−5/24	−5/24	7/24	1/4			
	4	3	A_6	11/8	1/8	1/8	−3/8	1/4			
	5	—	—							—	
				137/16	−7/48	17/48	5/48	7/8			

Таблица 5.19

№	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
1	7	1	1	2	3	2	3	1
2	8	2	3	1	1	3	2	2
3	6	1	2	3	2	0,5	1	2
4	7	2	1	3	1	2	3	2
5	C	1	2	3	1	2	3	1
0	Δ	−6	−7	$\boxed{-9}$	−7	−7,5	−9	−7
		−1	−2	$\boxed{-3}$	−1	−2	−3	−1
1	Δ'	−3	−1		−1	−6	$\boxed{-6}$	−1
					1	−1,5	$\boxed{-2}$	1
2	Δ''		$\boxed{-4}$		−4	−1,5		−1
		1	$\boxed{-1}$					1
3	Δ'''	$^{20}/_{19}$			$\boxed{-^{48}/_{19}}$	$^{1}/_{2}$		$^{13}/_{19}$
		$^{24}/_{19}$			$\boxed{^{7}/_{19}}$	$^{1}/_{2}$		$^{27}/_{19}$
4	Δ^{IV}							
		$^{17}/_{12}$				$^{55}/_{96}$		$^{73}/_{48}$

8.5. Приведем некоторые замечания, позволяющие в ряде случаев упростить вычисление исходного опорного плана.

До сих пор мы связывали вспомогательную задачу и M-задачу с полным искусственным базисом — с m дополнительными единичными векторами. Трудоемкость вычислений заметно сокращается, если исходная задача содержит некоторое количество единичных векторов условий. В ряде случаев несложные преобразования позволяют уменьшить число искусственных переменных вспомогательной задачи или M-задачи.

Пусть условия задачи записаны в виде

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i,$$

$$i=1, 2, \ldots, m; \quad x_j \geqslant 0, \quad j=1, 2, \ldots, n; \quad b_i \geqslant 0.$$

Как уже указывалось (§ 7 гл. 5), дополнительные неотрицательные переменные x_{n+i} $(i=1, 2, \ldots, m)$ позволяют свести задачу к каноническому виду. При этом значения дополнительных переменных $x_{n+i}=b_i$ определяют исходный опорный план задачи.

Пусть теперь условия задачи имеют вид

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i,$$

$$i=1, 2, \ldots, m; \quad x_j \geqslant 0, \quad j=1, 2, \ldots, n; \quad b_i \geqslant 0.$$

Дополнительные переменные x_{n+i} $(i=1, 2, \ldots, m)$ позволяют и в этом случае свести задачу к канонической форме. Однако для получения исходного опорного плана здесь необходимо решить вспомогательную задачу (или M-задачу) с одним искусственным вектором. Имеем

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i,$$

$$i=1, 2, \ldots, m, \quad x_j \geqslant 0, \quad j=1, 2, \ldots, n+m.$$

Пусть $b_s = \max_i b_i$. Преобразуем систему условий задачи к виду

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{si}-a_{ij})\, x_j - x_{n+s} + x_{n+i} = b_s - b_i, \qquad i \neq s,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{sj}x_j - x_{n+s} = b_s, \quad x_j \geqslant 0, \quad j=1, 2, \ldots, n+m.$$

Мы получили задачу, в которой при неотрицательных компонентах вектора ограничений имеется $m-1$ положительных единичных векторов условий. Определение исходного опорного плана связано, таким образом, лишь с одним искусственным вектором.

Пусть, наконец, условия задачи записаны в канонической форме:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i=1, 2, \ldots, m, \quad x_j \geqslant 0, \quad j=1, 2, \ldots, n.$$

Допустим, что все $b_i \geqslant 0$ и по крайней мере одна из компонент вектора ограничений положительна.

Могут встретиться три случая:

а) среди векторов условий нет единичных векторов; в этом случае M-задача (или вспомогательная задача) содержит m искусственных переменных;

б) матрица $\|a_{ij}\|$ содержит r различных единичных векторов условий; в этом случае M-задача содержит $m-r$ искусственных векторов;

в) матрица условий $\|a_{ij}\|$ содержит единичную подматрицу порядка m; здесь начальный план очевиден, и необходимость в M-методе или в решении вспомогательной задачи отпадает.

В ряде задач линейного программирования имеются те или иные основания выделить из векторов условий систему из линейно независимых векторов. В таких случаях существенно упрощается определение исходного опорного плана. Пусть векторы $A_1, A_2, \ldots, A_m$ линейно независимы. Разрешим систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i=1, 2, \ldots, m,$$

относительно переменных $x_1, \ldots, x_m$. Получим

$$x_i = x_i^0 + \sum_{j=m+1}^{n} x_{ij}^0 x_j,$$

где x_i^0 и x_{ij}^0 ($i=1, \ldots, m$; $j=1, \ldots, n$) — постоянные. Если все $x_i^0 \geqslant 0$, то, полагая $x_j=0$ при $j=m+1, \ldots, n$, получим опорный план задачи $X=(x_1^0, \ldots, x_m^0, 0, \ldots, 0)$.

Пусть теперь среди x_i^0 имеются отрицательные и пусть x_s^0 наименьшее из них. Вычтем почленно s-е уравнение из всех уравнений системы. Получим

$$x_i = (x_i^0 - x_s^0) + x_s + \sum_{j=m+1}^{n} (x_{ij}^0 - x_{sj}^0)\, x_j, \qquad x_s = x_s^0 + \sum_{j=m+1}^{n} x_{sj}^0 x_j.$$

Такое преобразование приводит к базису, составленному из $m-1$ положительных единичных векторов условий задачи и одного искусственного вектора.

§ 9. Зацикливание в задачах линейного программирования

9.1. В § 6 предыдущей главы были указаны правила для отыскания вектора, выводимого из базиса, которые полностью гарантируют от возможности возникновения цикла в процессе решения задачи линейного программирования. Реализация предложенных правил, описанная в §§ 2, 5, как мы видели, связана с относительно трудоемкой дополнительной вычислительной работой.

Поэтому совершенно естественным является вопрос о том, возможно ли в принципе образование цикла при решении задач линейного программирования методом последовательного улучшения плана и, если возможно, то насколько часто это может случаться. Настоящий параграф посвящен изучению условий возникновения цикла, которое приведет нас к ответам на поставленные вопросы. Все исследования будут проводиться применительно к канонической форме задачи.

В дальнейшем нам понадобятся рекуррентные соотношения, которые связывают параметры задачи, относящиеся к двум различным шагам (итерациям) метода улучшения плана. Для двух соседних шагов эти соотношения были получены в § 1. Выпишем их, предполагая, что на последующем шаге вектор A_k вводится в r-ю позицию базиса:

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} - \dfrac{x_{ik}}{x_{rk}}\, x_{rj}, & \text{если} \quad i \neq r, \\ \dfrac{x_{rj}}{x_{rk}}, & \text{если} \quad i = r, \end{cases} \tag{9.1}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

$$\Delta'_j = \Delta_j - \frac{\Delta_k}{x_{rk}}\, x_{rj}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{9.2}$$

Здесь, как обычно, параметры, снабженные штрихом, относятся к последующему шагу.

Применяя дважды формулы (9.1), (9.2), нетрудно установить зависимость между параметрами задачи для любой пары шагов, разделенных одной итерацией. Допустим, что во второй итерации в r-ю позицию базиса вводится вектор A_k, в третьей итерации в r_1-ю позицию базиса вводится вектор A_{k_1}. В таком случае справедливы соотношения

$$x''_{ij}=\frac{x_{r_1k_1}x_{rj}-x_{rk_1}x_{r_1j}}{x_{r_1k_1}x_{rk}-x_{r_1k}x_{rk_1}},\qquad i=r\neq r_1,\quad i=r=1,\ 2,\ \ldots,\ m;$$

$$j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\tag{9.3}$$

$$\Delta''_j=\Delta_j-\Delta_k\frac{x_{r_1k_1}x_{rj}-x_{rk_1}x_{r_1j}}{x_{r_1k_1}x_{rk}-x_{r_1k}x_{rk_1}}-$$

$$-\Delta_{k_1}\frac{x_{rk}x_{r_1j}-x_{r_1k}x_{rj}}{x_{r_1k_1}x_{rk}-x_{r_1k}x_{rk_1}},\quad r\neq r_1.\tag{9.4}$$

Параметры, помеченные двумя штрихами, относятся к последнему шагу (в пределах трех рассматриваемых итераций).

Формулы (9.3) и (9.4) справедливы для случая, когда векторы A_k и A_{k_1} вводятся в различные позиции базиса, причем в (9.3) позиция i предполагается совпадающей с одной из них. В этом параграфе нам понадобится только такой случай. Мы не будем здесь приводить вывод формул (9.3) и (9.4), а предоставим сделать это читателю (см. упражнение 11). Очевидно, соотношение (9.3) может быть легко приспособлено к случаю, когда $i=r_1\neq r$. Для этого достаточно заменить в нем индексы k и r соответственно на k_1 и r_1.

9.2. Допустим, что при определении вектора, подлежащего удалению из базиса, мы не будем пользоваться дополнительным правилом, изложенным в § 6 гл. 4. Тогда выбор позиции базиса, в которую следует поместить вводимый вектор, осуществляется одинаково просто как в невырожденном, так и в вырожденном случае. Именно, в качестве такой позиции принимается позиция r, для которой

$$\frac{x_{r0}}{x_{rk}}=\theta_0=\min_{x_{ik}>0}\frac{x_{i0}}{x_{ik}}.\tag{9.5}$$

Здесь k — индекс вводимого в базис вектора условий A_k. Напомним, что условие целесообразности ввода вектора A_k в базис состоит в отрицательности его оценки Δ_k относительно старого базиса. В вырожденном случае условию (9.5) могут удовлетворять несколько позиций базиса; в качестве r выбирается любая из них. Условимся говорить, что вектор A_k — *подходящий* для включения в r-ю позицию базиса, если $\Delta_k < 0$ и удовлетворяется условие (9.5).

Нашей задачей является исследование возможности образования *цикла*, т. е. получения в процессе решения задачи методом улучшения плана последовательности базисов вида

$$Б \longrightarrow Б_1 \longrightarrow Б_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow Б_{t-1} \longrightarrow Б. \tag{9.6}$$

Стрелки между базисами соответствуют отдельным итерациям метода.

Будем говорить, что цикл имеет *длину* d, если он образован в результате d итераций. Таким образом, длина цикла (9.6) равна t.

Очевидно, движение по базисам цепочки (9.6) не должно приводить к возрастанию линейной формы задачи, так как в противном случае переход от $Б_{t-1}$ к $Б$ был бы невозможен (значение линейной формы убывать не может!). Поэтому для всех итераций, в результате которых образуется цикл (9.6), величины θ_0 должны быть равны нулю.

Отсюда, в частности, следует, что все элементы последовательности (9.6) являются базисами одного и того же опорного плана.

Допустим, что базис $Б_{l+1}$ образуется из $Б_l$ путем введения в r-ю позицию вектора A_k. Тогда условия перехода от $Б_l$ к $Б_{l+1}$ состоят в том, чтобы вектор A_k был подходящим для включения в r-ю позицию базиса. В данном случае $\theta_0 = 0$.

Поэтому эти условия имеют вид

$$\Delta_k^{(l)} < 0, \tag{9.7}$$

$$x_{r0}^{(l)} = 0, \quad x_{rk}^{(l)} > 0. \tag{9.8}$$

Неравенство (9.7) указывает на отрицательность оценки вектора A_k относительно $Б_l$; условия (9.8) эквивалентны соотношению (9.5). Индекс (l) свидетельствует о том, что отмеченные им параметры относятся к l-му базису $Б_l$ цепочки (9.6) (параметры, связанные с базисом $Б$, верхнего индекса не имеют).

Для дальнейшего нам понадобится также другая форма условий (9.7), (9.8), в которой фигурируют параметры, относящиеся к последующему базису $Б_{l+1}$.

Для того чтобы вектор A_k был подходящим для включения в r-ю позицию базиса при переходе от $Б_l$ к $Б_{l+1}$, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\Delta_{s_r}^{(l+1)} > 0, \tag{9.9}$$

$$x_{r0}^{(l+1)} = 0, \quad x_{rs_r}^{(l+1)} > 0. \tag{9.10}$$

Здесь s_r — индекс вектора A_{s_r}, который помещается в r-й позиции базиса $Б_l$. Для доказательства этого утверждения воспользуемся рекуррентными соотношениями (9.1) и (9.2). Учитывая, что $x_{rs_r}^{(l)} = 1$ и $\Delta_{s_r}^{(l)} = 0$, получаем

$$x_{r0}^{(l+1)} = \frac{x_{r0}^{(l)}}{x_{rk}^{(l)}}, \tag{9.11}$$

$$x_{rs_r}^{(l+1)} = \frac{1}{x_{rk}^{(l)}}, \tag{9.12}$$

$$\Delta_{s_r}^{(l+1)} = -\frac{\Delta_k}{x_{rk}^{(l)}}. \tag{9.13}$$

Из равенств (9.11), (9.12) вытекает эквивалентность условий (9.8) и (9.10). Из равенства (9.13) следует эквивалентность (9.7) и (9.9).

9.3. Исследование возможности образования в процессе решения задачи цепочки базисов вида (9.6) начнем с простейшего случая. Именно, допустим, что на протяжении всех итераций, образующих эту цепочку, новые векторы вводятся в одну и ту же позицию базиса. Прежде всего установим следующее вспомогательное утверждение:

Лемма 9.1. *Пусть $Б_{l+1}$ образуется из $Б_l$ путем включения вектора условий A_k в r-ю позицию базиса. Если вектор A_q оказывается подходящим для включения в r-ю позицию базиса $Б_{l+1}$, то он — подходящий для включения в r-ю позицию базиса $Б_l$.*

Доказательство. По условию леммы

$$\Delta_q^{(l+1)} < 0, \quad x_{r0}^{(l+1)} = 0, \quad x_{rq}^{(l+1)} > 0. \tag{9.14}$$

В соответствии с рекуррентными соотношениями (9.1) и (9.2),

$$\Delta_q^{(l+1)} = \Delta_q^{(l)} - \frac{\Delta_k^{(l)}}{x_{rk}^{(l)}} x_{rq}^{(l)}, \tag{9.15}$$

$$x_{rj}^{(l+1)} = \frac{x_{rj}^{(l)}}{x_{rk}^{(l)}}. \tag{9.16}$$

Из (9.16) для $j=0, q$ и последних двух соотношений условий (9.14) получаем

$$x_{r0}^{(l)} = x_{rk}^{(l)} x_{r0}^{(l+1)} = 0,$$
$$x_{rq}^{(l)} = x_{rk}^{(l)} x_{rq}^{(l+1)} > 0 \quad (x_{rk}^{(l)} > 0).$$

Учитывая, далее, что $\Delta_k^{(l)} < 0$, $x_{rk}^{(l)} > 0$ и $x_{rq}^{(l)} > 0$, имеем

$$\Delta_q^{(l)} = \Delta_q^{(l+1)} + \frac{\Delta_k^{(l)}}{x_{rk}^{(l)}} x_{rq}^{(l)} < \Delta_q^{(l+1)} < 0.$$

Итак, вектор A_q удовлетворяет условиям (9.7) и (9.8). Лемма доказана.

Пусть теперь при любом l, $0 \leqslant l \leqslant t$,

$$Б_l = (A_{j_l}, A_2, \ldots, A_{m-1}, A_m), \tag{9.17}$$

где $A_{j_0} = A_{j_t} = A_1$, $Б_0 = Б$.

Теорема 9.1. *Цикл* (9.6), *состоящий из базисов вида* (9.17), *невозможен.*

Доказательство теоремы легко следует из леммы 9.1. Действительно, предположим противное. В таком случае вектор $A_1 = A_{j_t}$ является подходящим для включения в r-ю позицию базиса при переходе от $Б_{t-1}$ к $Б_t = Б$. Следовательно, по лемме 9.1 вектор $A_1 = A_{j_t}$ — подходящий для включения в r-ю позицию базиса при переходе от $Б_{t-2}$ к $Б_{t-1}$. Используя лемму 9.1 аналогичным образом в t раз, приходим к выводу, что вектор A_1 является подходящим для включения в r-ю позицию базиса при переходе от $Б$ к $Б_1$. Согласно условию (9.7) это, в частности, означает, что оценка Δ_1 вектора A_1 относительно базиса $Б = (A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}, A_m)$ отрицательна.

Но, с другой стороны, $\Delta_1 = 0$, так как вектор A_1 входит в базис $Б$. Полученное противоречие убеждает нас в справедливости теоремы.

Назовем число нулевых компонент опорного плана *степенью вырожденности* этого плана. Из теоремы 9.1 следует, что для образования цикла (9.6) необходимо, чтобы степень вырожденности опорного плана, отвечающего базисам цепочки (9.6), была больше 1. Тот же вывод можно было бы сделать из результатов § 6 гл. 4 (см. упражнение 8 гл. 4).

9.4. Теорема 9.1 показывает, что цикл (9.6) может возникнуть лишь в том случае, когда в процессе его образования обновляется не менее двух позиций базиса. Рассмотрим простейший случай из числа *a priori* возможных — в пределах цепочки (9.6) обновляются ровно две позиции базиса.

Примем для определенности номера этих позиций равными 1 и 2. В данном случае базис $Б_l$ полностью определяется двумя векторами условий, расположенными в его первых двух позициях (содержимое остальных позиций остается неизменным). Поэтому, записывая любой из базисов (9.6), будем указывать лишь векторы, находящиеся в позициях 1 и 2.

Рассмотрим цепочку базисов вида

$$Б(A_1, A_2) \longrightarrow Б_1(A_3, A_2) \longrightarrow Б_2(A_3, A_4) \longrightarrow Б_3(A_1, A_4) \longrightarrow \longrightarrow Б(A_1, A_2). \tag{9.18}$$

Выпишем условия, при которых эта цепочка может образоваться. Поскольку A_3 вводится в 1-ю позицию базиса при переходе от $Б$ к $Б_1$, то согласно (9.7) и (9.8)

$$x_{13} > 0, \quad \Delta_3 < 0. \tag{9.19}$$

На следующем шаге вектор A_4 вводится в позицию 2 базиса. Следовательно,

$$x_{24}^{(1)} > 0, \quad \Delta_4^{(1)} < 0.$$

Выражая $x_{24}^{(1)}$ и $\Delta_4^{(1)}$ через параметры $Б$ по рекуррентным формулам (9.1) и (9.2) ($k = 3$, $r = 1$), имеем

$$\begin{aligned} x_{24}^{(1)} &= x_{24} - \frac{x_{23}}{x_{13}} x_{14} > 0, \\ \Delta_4^{(1)} &= \Delta_4 - \frac{\Delta_3}{x_{13}} x_{14} < 0. \end{aligned} \tag{9.20}$$

Обратимся теперь к четвертому шагу цепочки. На этом шаге в позицию 2 базиса помещается вектор A_2 вместо A_4. В результате образуется исходный базис $Б$. Воспользуемся условиями (9.9) и (9.10). В данном случае $Б_l = Б_3$, $Б_{l+1} = Б$, $r = 2$, $s_r = 4$. Следовательно,

$$x_{24} > 0, \quad \Delta_4 > 0. \tag{9.21}$$

Наконец, на третьем шаге цепочки (9.18) вектор A_3, расположенный в позиции 1, заменяется вектором A_1. Используя снова соотношения (9.9) и (9.10), получаем

$$x_{13}^{(3)} > 0, \ \Delta_3^{(3)} > 0.$$

Выразим эти параметры базиса $Б_3$ через соответствующие параметры базиса $Б$. Базис $Б_3$ образуется из $Б$ путем включения во вторую позицию вектора A_4. Следовательно, согласно рекуррентным формулам (9.1) и (9.2)

$$x_{13}^{(3)} = x_{13} - \frac{x_{14}}{x_{24}} x_{23} > 0, \quad \Delta_3^{(3)} = \Delta_3 - \frac{\Delta_4}{x_{24}} x_{23} > 0. \tag{9.22}$$

Итак, если цепочка (9.18) возможна, то должна выполняться система неравенств (9.19)—(9.22).

Исследуем эту систему. Учитывая второе неравенство (9.21), условия (9.19) и второе неравенство (9.20), получаем

$$x_{14} < 0. \tag{9.23}$$

Поэтому второе неравенство (9.20) может быть переписано в эквивалентной форме

$$\Delta_3 < \Delta_4 \frac{x_{13}}{x_{14}}. \tag{9.24}$$

Сравнивая (9.24) со вторым неравенством (9.22), имеем

$$\Delta_4 \frac{x_{23}}{x_{24}} < \Delta_4 \frac{x_{13}}{x_{14}}.$$

Но в соответствии со вторым неравенством (9.21) $\Delta_4 > 0$. Следовательно,

$$\frac{x_{23}}{x_{24}} < \frac{x_{13}}{x_{14}}. \tag{9.25}$$

Учитывая (9.23), можно переписать неравенство (9.25) в эквивалентной форме

$$x_{13} < \frac{x_{14} x_{23}}{x_{24}}. \tag{9.26}$$

Полученное неравенство (9.26) противоречит первому неравенству (9.22). Это обстоятельство приводит к выводу о несовместности системы неравенств (9.19)—(9.22). Таким образом, возникновение цепочки вида (9.18) невозможно.

9.5. Увеличим теперь длину цепочки (9.18) на единицу. Приходим к новой последовательности базисов вида

$$\begin{aligned} Б(A_1,\ A_2) &\to Б_1(A_3,\ A_2) \to Б_2(A_3,\ A_4) \to \\ &\to Б_3(A_5,\ A_4) \to Б_4(A_5,\ A_2) \to Б(A_1,\ A_2). \end{aligned} \tag{9.27}$$

Выпишем условия перехода от $Б$ к $Б_1$ и от $Б_1$ к $Б_2$, используя соотношения (9.7) и (9.8). Действуя так же, как и в предыдущем случае, приходим к неравенствам (9.19), (9.20).

Условия перехода от $Б_3$ к $Б_4$ и от $Б_4$ к $Б_1$ могут быть получены с помощью соотношений (9.9) и (9.10) аналогично тому, как это делалось в случае цепочки (9.18). Опуская подробности, выпишем соответствующие неравенства:

$$x_{15} > 0, \ \Delta_5 > 0, \tag{9.28}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{24}^{(4)} &= x_{24} - \frac{x_{25}}{x_{15}} x_{14} > 0, \\ \Delta_4^{(4)} &= \Delta_4 - \frac{\Delta_5}{x_{15}} x_{14} > 0. \end{aligned}\right\} \tag{9.29}$$

Остается выразить условия перехода от $Б_2$ к $Б_3$ через параметры базиса $Б$. В соответствии с соотношениями (9.7) и (9.8), примененными к третьему шагу цепочки (9.27),

$$x_{15}^{(2)} > 0, \ \Delta_5^{(2)} < 0.$$

Воспользуемся рекуррентными формулами (9.3) и (9.4) при $i = r = 1$, $r_1 = 2$, $j = 5$, $k = 3$, $k_1 = 4$. Получаем

$$x_{15}^{(2)} = \frac{x_{24} x_{15} - x_{14} x_{25}}{x_{24} x_{13} - x_{23} x_{14}} > 0, \tag{9.30}$$

$$\Delta_5^{(2)} = \Delta_5 - \frac{x_{24} x_{15} - x_{14} x_{25}}{x_{24} x_{13} - x_{23} x_{14}} \Delta_3 - \frac{x_{25} x_{13} - x_{15} x_{23}}{x_{24} x_{13} - x_{23} x_{14}} \Delta_4 < 0. \tag{9.31}$$

Таким образом, цикл (9.27) может возникнуть лишь при условии совместности системы неравенств (9.19), (9.20), (9.28)—(9.31).

Покажем, что эта система неравенств противоречива. Из первых неравенств (9.19) и (9.20) получаем

$$x_{24}x_{13}-x_{23}x_{14}>0. \tag{9.32}$$

Аналогично из первых неравенств (9.28) и (9.29) вытекает

$$x_{24}x_{15}-x_{25}x_{14}>0. \tag{9.33}$$

Будем различать три возможности в зависимости от знака величины

$$\Delta=x_{25}x_{13}-x_{15}x_{23}. \tag{9.34}$$

1. Допустим, что $\Delta=0$. Тогда из (9.31), учитывая неравенства (9.19) (второе), (9.32) и (9.33), получаем

$$\Delta_5<0.$$

С другой стороны, согласно (9.28)

$$\Delta_5>0.$$

Следовательно, первый случай невозможен.

2. Пусть теперь $\Delta>0$. В этом случае неравенство (9.31) может быть преобразовано к эквивалентному виду:

$$\Delta_4>\frac{x_{24}x_{13}-x_{23}x_{14}}{x_{25}x_{13}-x_{15}x_{23}}\Delta_5-\frac{x_{24}x_{15}-x_{25}x_{14}}{x_{25}x_{13}-x_{15}x_{23}}\Delta_3. \tag{9.35}$$

Объединяя (9.35) и второе неравенство (9.20), имеем

$$\Delta_3\frac{x_{14}}{x_{13}}>\Delta_4>\frac{x_{24}x_{13}-x_{23}x_{14}}{x_{25}x_{13}-x_{15}x_{23}}\Delta_5-\frac{x_{24}x_{15}-x_{25}x_{14}}{x_{25}x_{13}-x_{15}x_{23}}\Delta_3. \tag{9.36}$$

Учитывая неравенства (9.36), (9.32), (9.33) и второе из неравенств (9.28), получаем при принятом допущении ($\Delta>0$)

$$\Delta_3\frac{x_{14}}{x_{13}}>\frac{x_{25}x_{14}-x_{15}x_{24}}{x_{25}x_{13}-x_{15}x_{23}}\Delta_3. \tag{9.37}$$

Поскольку $\Delta_3<0$ (второе неравенство (9.19)), то очевидные преобразования (9.37) приводят к условию

$$\frac{x_{15}(x_{14}x_{23}-x_{13}x_{24})}{x_{13}(x_{25}x_{13}-x_{15}x_{23})}>0. \tag{9.38}$$

Отсюда, учитывая первые неравенства (9.19), (9.28) и условие (9.32), приходим к выводу об отрицательности Δ.

Поэтому и второй случай не может иметь места.

3. Остается проанализировать третью возможность, когда $\Delta < 0$. В этом случае неравенство (9.31) эквивалентно условию

$$\Delta_4 < \frac{x_{24}x_{13} - x_{23}x_{14}}{x_{25}x_{13} - x_{15}x_{23}}\Delta_5 - \frac{x_{15}x_{24} - x_{25}x_{14}}{x_{25}x_{13} - x_{15}x_{23}}\Delta_3. \tag{9.39}$$

Поскольку $\Delta_3 < 0$ (второе неравенство (9.19)), $\Delta<0$ и имеет место неравенство (9.33), то

$$\frac{x_{15}x_{24} - x_{25}x_{14}}{x_{25}x_{13} - x_{15}x_{23}}\Delta_3 > 0.$$

Следовательно, неравенства (9.29) (второе) и (9.39) приводят к условию

$$\frac{x_{24}x_{13} - x_{23}x_{14}}{x_{25}x_{13} - x_{15}x_{23}}\Delta_5 > \Delta_4 > \frac{x_{14}}{x_{15}}\Delta_5. \tag{9.40}$$

Из неравенства (9.40) и второго неравенства (9.28) легко следует

$$\frac{x_{13}(x_{15}x_{24} - x_{14}x_{25})}{x_{15}(x_{25}x_{13} - x_{15}x_{23})} > 0. \tag{9.41}$$

Условие (9.41) совместно с первыми неравенствами (9.19), (9.28) и неравенством (9.33) показывает, что

$$\Delta = x_{25}x_{13} - x_{15}x_{23} > 0.$$

Мы снова пришли к противоречию.

Следовательно, третья возможность также не может быть реализована.

Таким образом, доказана несовместность системы неравенств (9.19), (9.20), (9.28)—(9.31), связанной с последовательностью базисов (9.27). Это означает, что образование цикла вида (9.27) невозможно. Проведенный анализ позволяет сформулировать и доказать следующее общее утверждение:

Теорема 9.2. *Метод последовательного улучшения плана не может привести к циклу, длина которого меньше шести шагов.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный цикл задачи линейного программирования. Пусть на протяжении этого цикла обновляется ζ позиций базиса. В таком случае, очевидно, длина цикла не может быть меньше чем 2ζ. Поэтому если существует цикл, длина которого не превосходит

5, то число $\zeta < \frac{5}{2}$. Следовательно, необходимо рассмотреть лишь такие циклы, в пределах которых обновляется одна или две позиции базиса. В соответствии с теоремой 9.1 цикл, в котором обновляется единственная позиция базиса, возникнуть не может. Поэтому остается проанализировать случай $\zeta = 2$. Минимальная длина цикла при $\zeta = 2$ не может быть меньше четырех шагов. Следовательно, достаточно рассмотреть лишь циклы длины 4 и 5 при $\zeta = 2$.

Если в двух соседних итерациях некоторого цикла обновляется одна и та же позиция базиса, то длина цикла может быть уменьшена на единицу. В самом деле, согласно лемме 9.1 вектор, вводимый в базис во второй итерации, является подходящим для включения в ту же позицию базиса на предыдущей итерации. Следовательно, вторая итерация может быть опущена, что уменьшит длину цикла на один шаг. Отмеченное обстоятельство показывает, что при анализе циклов длины 4 и 5 можно ограничиться цепочками вида (9.18) и (9.27) соответственно. Что же касается этих цепочек, то, как мы видели, возникновение их невозможно.

Теорема 9.2. доказана.

9.6. В соответствии с теоремой 9.2 попытки построения циклов, длина которых меньше шести шагов, заведомо обречены на неудачу.

Рассмотрим теперь цикл из шести базисов вида

$$Б(A_1, A_2) \to Б_1(A_3, A_2) \to Б_2(A_3, A_4) \to Б_3(A_5, A_4) \to \\ \to Б_4(A_5, A_6) \to Б_5(A_1, A_6) \to Б(A_1, A_3). \qquad (9.42)$$

Как обычно, в круглых скобках указываются векторы, расположенные в первых двух позициях базиса. Остальные позиции базиса в пределах данного цикла не обновляются ($\zeta = 2$).

Выпишем условия, необходимые и достаточные для образования цепочки (9.42).

Прежде всего, первые две базисные переменные x_{10}, x_{20} опорного плана X, отвечающего циклу (9.42), должны быть равны нулю. Первые три шага цепочки (9.42) совпадают с первыми тремя шагами цепочки (9.27). Поэтому условия перехода от $Б$ к $Б_1$, от $Б_1$ к $Б_2$ и от $Б_2$ к $Б_3$ имеют вид (9.19), (9.20) и (9.30)—(9.31) соответственно.

Условия перехода от $Б_5$ к $Б$, от $Б_4$ к $Б_5$ и от $Б_3$ к $Б_4$ проще всего получить, используя соотношения (9.9) и (9.10). Опуская преобразования, которые ничем не отличаются от соответствующих преобразований для цепочек (9.18) и (9.27), выпишем окончательные результаты

$$x_{26} > 0, \quad \Delta_6 > 0 \tag{9.43}$$

(условия перехода от $Б_5$ к $Б$);

$$\begin{gathered} x_{15}^{(5)} = x_{15} - \frac{x_{16}}{x_{26}} x_{25} > 0, \\ \Delta_5^{(5)} = \Delta_5 - \frac{\Delta_6}{x_{26}} x_{25} > 0 \end{gathered} \tag{9.44}$$

(условия перехода от $Б_4$ к $Б_5$);

$$x_{24}^{(4)} = \frac{x_{15} x_{24} - x_{25} x_{14}}{x_{15} x_{26} - x_{16} x_{25}} > 0, \tag{9.45}$$

$$\Delta_4^{(4)} = \Delta_4 - \frac{x_{24} x_{15} - x_{14} x_{25}}{x_{15} x_{26} - x_{16} x_{25}} \Delta_6 - \frac{x_{14} x_{26} - x_{24} x_{16}}{x_{15} x_{26} - x_{16} x_{25}} \Delta_5 > 0 \tag{9.46}$$

(условия перехода от $Б_3$ к $Б_4$).

Для вывода последних двух формул использованы равенства (9.3) и (9.4) для $i = r = 2$, $r_1 = 1$, $k = 6$, $k_1 = 5$, $j = 4$.

Очевидно, неравенства (9.20), (9.44) (первые), (9.30) и (9.45) равносильны условиям

$$\left.\begin{aligned} x_{15} x_{24} - x_{25} x_{14} > 0, \\ x_{15} x_{26} - x_{16} x_{25} > 0, \\ x_{24} x_{13} - x_{23} x_{14} > 0. \end{aligned}\right\} \tag{9.47}$$

Итак, условия, необходимые и достаточные для возникновения цикла (9.42), имеют такой вид:

I.
$$x_{13} > 0, \tag{9.48}$$
$$x_{26} > 0, \tag{9.49}$$
$$x_{15} x_{24} - x_{25} x_{14} > 0, \tag{9.50}$$
$$x_{15} x_{26} - x_{16} x_{25} > 0, \tag{9.51}$$
$$x_{24} x_{13} - x_{23} x_{14} > 0. \tag{9.52}$$

II.
$$\Delta_3 < 0, \tag{9.53}$$
$$\Delta_6 > 0, \tag{9.54}$$

$$\Delta_4 - \frac{x_{14}}{x_{13}} \Delta_3 < 0, \tag{9.55}$$

$$\Delta_5 - \frac{x_{25}}{x_{26}} \Delta_6 > 0, \tag{9.56}$$

$$\Delta_5 - \frac{x_{24}x_{15} - x_{14}x_{25}}{x_{13}x_{24} - x_{14}x_{23}} \Delta_3 - \frac{x_{25}x_{13} - x_{15}x_{23}}{x_{13}x_{24} - x_{14}x_{23}} \Delta_4 < 0, \tag{9.57}$$

$$\Delta_4 - \frac{x_{24}x_{15} - x_{14}x_{25}}{x_{15}x_{26} - x_{16}x_{25}} \Delta_6 - \frac{x_{14}x_{26} - x_{24}x_{16}}{x_{15}x_{26} - x_{16}x_{25}} \Delta_5 > 0, \tag{9.58}$$

$$x_{10} = x_{20} = 0.$$

В полученной системе неравенств (9.48) — (9.58) первые пять условий гарантируют положительность соответствующей компоненты разложения вводимого вектора по базису. Последние шесть неравенств системы указывают на отрицательность оценок вводимых векторов относительно текущего базиса.

Установим совместность системы (9.48) — (9.58), выделив некоторый класс ее решений. Для этого примем

$$\Delta_4 = \Delta_6 = -\Delta_3 = -\Delta_5 = a > 0, \tag{9.59}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{14} &= x_{25} = \alpha, \\ x_{13} &= x_{26} = \beta, \\ x_{24} &= x_{15} = \gamma, \\ x_{23} &= x_{16} = \delta. \end{aligned}\right\} \tag{9.60}$$

При этих условиях неравенства (9.53), (9.54) выполняются автоматически. Неравенства (9.48), (9.49) эквивалентны требованию

$$\beta > 0. \tag{9.61}$$

Неравенства (9.50) — (9.52) равносильны соотношениям

$$\gamma^2 - \alpha^2 > 0, \tag{9.62}$$

$$\gamma\beta - \alpha\delta > 0. \tag{9.63}$$

Учитывая (9.59), нетрудно убедиться в том, что условия (9.55) — (9.58) эквивалентны соответственно неравенствам

$$\alpha + \beta < 0, \tag{9.64}$$

$$(\gamma + \alpha)(\beta + \alpha - \gamma - \delta) > 0. \tag{9.65}$$

Итак, система неравенств (9.48)—(9.58) при дополнительных предположениях (9.59), (9.60) равносильна системе неравенств (9.61)—(9.65). Займемся исследованием полученной системы, состоящей из пяти неравенств.

1. Допустим, что $\gamma > 0$. Тогда согласно (9.62)

$$(\gamma+\alpha) > 0. \tag{9.66}$$

Учитывая (9.66) и (9.65), получаем

$$\delta < \beta+\alpha-\gamma. \tag{9.67}$$

В силу (9.61) и (9.64) $\alpha < 0$. Следовательно, (9.63) может быть переписано в виде

$$\delta > \frac{\gamma\beta}{\alpha}. \tag{9.68}$$

Сравнивая (9.67) и (9.68), имеем

$$-\frac{\gamma\beta}{|\alpha|} < -|\beta+\alpha|-\gamma. \tag{9.69}$$

С другой стороны, согласно (9.64) $\frac{\beta}{|\alpha|} < 1$. Поэтому.

$$-\gamma < -\frac{\gamma\beta}{|\alpha|}. \tag{9.70}$$

Сравнение (9.69) и (9.70) приводит к невозможному соотношению:

$$|\beta+\alpha| < 0.$$

Следовательно, если $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ — решение системы (9.61)—(9.65), то $\gamma = 0$ (при $\gamma = 0$ не удовлетворяется неравенство (9.62)).

2. Примем $\gamma < 0$. В таком случае неравенства (9.63), (9.65) переписываются соответственно в виде

$$\delta > \frac{|\gamma|}{|\alpha|}\beta, \quad \delta > |\gamma|-|\beta+\alpha|.$$

Поэтому при $\delta > |\gamma|$ оба эти неравенства выполняются (согласно (9.64) $\frac{\beta}{|\alpha|} < 1$). Остальные три неравенства эквивалентны соотношению

$$0 < \beta < -\alpha < -\gamma.$$

Следовательно, любой набор чисел $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, удовлетворяющий условиям

$$0 < \beta < -\alpha < -\gamma < \delta, \tag{9.71}$$

является решением системы неравенств (9.61)—(9.65).

Выберем теперь произвольные числа α, β, γ, δ, связанные условием (9.71).

Определим с их помощью, руководствуясь формулами (9.60), параметры x_{ij}. Затем подберем такие коэффициенты c_j линейной формы задачи, чтобы оценки соответствующих векторов условий удовлетворяли равенствам (9.59). Тогда полученные параметры x_{ij} и $\Delta_j (i=1, 2;\ j=3,\ 4,\ 5,\ 6)$ являются решением системы неравенств (9.58)—(9.68), отвечающей циклу (9.42). Итак, построен целый класс задач линейного программирования, в каждой из которых возможен цикл, состоящий из шести базисов.

Установленный результат и теорема 9.2 приводят к следующему утверждению:

Теорема 9.3. *Минимальная длина цикла в задачах линейного программирования равна 6 шагам.*

9.7. Приведем пример, являющийся численной иллюстрацией рассуждений предыдущего пункта.

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования с семью неотрицательными переменными и тремя условиями-равенствами.

Требуется обратить в максимум линейную форму

$$L(X) = x_3 - x_4 + x_5 - x_6$$

при условиях:

$$\begin{aligned} x_1 \quad + x_3 - 2x_4 - 3x_5 + 4x_6 \qquad &= 0,\\ x_2 + 4x_3 - 3x_4 - 2x_5 + x_6 \qquad &= 0,\\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &= 1. \end{aligned}$$

Исходная таблица для этой задачи составляется очевидным образом (табл. 5.20). Из этой таблицы видно, что рассматриваемая задача принадлежит классу задач, построенному в предыдущем пункте. Для нее

$$\begin{aligned} \alpha &= x_{14} = x_{25} = -2,\\ \beta &= x_{13} = x_{26} = 1,\\ \gamma &= x_{24} = x_{15} = -3,\\ \delta &= x_{23} = x_{16} = 4,\\ x_{10} &= x_{20} = 0,\\ a = -\Delta_3 &= \Delta_4 = -\Delta_5 = \Delta_6 = 1. \end{aligned}$$

Очевидно, условия (9.71) выполняются. Поэтому при решении этой задачи методом последовательного улучшения плана может образоваться цикл. Ниже приводится последовательность таблиц (она сведена в табл. 5.21), соответствующая искомому циклу.

На первом шаге в базис вводятся вектор A_3 ($\Delta_3 = -1$). Величина $\theta_0 = 0$ достигается на первых двух позициях базиса. Вектор условий A_3 помещается в первую позицию базиса. Далее, в базис включается вектор A_4 ($\Delta'_4 = -1$). Поскольку $\theta_0 = 0$ достигается лишь

Таблица 5.20

№	C_X	Б	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	θ	Номер таблицы
		c_j				1	-1	1	-1			
← 1		A_1		1		1	-2	-3	4			0
2		A_2			1	4	-3	-2	1			
3		A_7	1			1	1	1	1	1	1	
4	—	—				-1	1	-1	1			

на одной позиции (2), вектор A_4 помещается во вторую позицию базиса. В последующих итерациях в базис включаются векторы A_5, A_6, A_1, A_2 и помещаются соответственно в 1-ю, 2-ю, 1-ю, 2-ю позиции базиса.

Из табл. 5.21 видно, что при выборе позиции базиса, в которую следует поместить включаемый в базис вектор, неоднозначность имела место на 1-м, 3-м и 5-м шагах. В этих случаях выбор позиции осуществлялся произвольно. Естественно, если бы мы при этом руководствовались точным правилом выбора позиции, описанным в п. 2.3, то возникновение цикла было бы невозможно.

Воспользуемся, например, точным правилом на первом шаге:

$$\frac{x_{10}}{x_{13}} = \frac{x_{20}}{x_{23}} = \theta_0 = 0.$$

В соответствии с правилом сравним отношения

$$\frac{x_{11}}{x_{13}} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x_{21}}{x_{23}} = 0.$$

Таблица 5.21 (1—6)

	№	c_X	$Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	ϑ	Номер таблиц
→	1	1	A_3		1		1	−2	−3	4		—	1
←	2		A_2		−4	1		5	10	−15			
	3		A_7	1	−1			3	4	−3	1	$^1/_3$	
	4	—	—		1			−1	−4	5			
←	1	1	A_3		$-^3/_5$	$^2/_5$	1		1	−2			2
→	2	−1	A_4		$-^4/_5$	$^1/_5$		1	2	−3			
	3		A_7	1	$^7/_5$	$-^3/_5$			−2	6	1	—	
	4	—	—		$^1/_5$	$^1/_5$			−2	2			
→	1	1	A_5		$-^3/_5$	$^2/_5$	1		1	−2		—	3
←	2	−1	A_4		$^2/_5$	$-^3/_5$	−2	1		1			
	3		A_7	1	$^1/_5$	$^1/_5$	2			2	1	$^1/_2$	
	4	—	—		−1	1	2			−2			
←	1	1	A_5		$^1/_5$	$-^4/_5$	−3	2	1				4
→	2	−1	A_6		$^2/_5$	$-^3/_5$	−2	1		1			
	3		A_7	1	$-^3/_5$	$^7/_5$	6	−2			1	—	
	4	—	—		$-^1/_5$	$-^1/_5$	−2	2					
→	1		A_1		1	−4	−15	10	5			—	5
←	2	−1	A_6			1	4	−3	−2	1			
	3		A_7	1		−1	−3	4	3		1	—	
	4	—	—			−1	−5	4	1				
	1		A_1		1		1	−2	−3	4			6
→	2		A_2			1	4	−3	−2	1			
	3		A_7	1			1	1	1	1	1		
	4	—	—				−1	1	−1	1			

Поскольку $\frac{x_{11}}{x_{13}} > \frac{x_{21}}{x_{23}}$, то вектор A_3 следует поместить во вторую позицию базиса. Читатель может проверить, что, поступив таким образом, мы уже на следующей итерации увеличим линейную форму задачи.

9.8. Результаты настоящего параграфа показывают, что произвольный выбор позиции, в которую следует поместить включаемый в базис вектор, может привести к возникновению цикла. Однако, как мы видели, параметры задачи должны при этом подчиняться достаточно жестким ограничениям. Поэтому следует ожидать, что возникновение цикла — явление редкое.

И в самом деле, до сих пор ни одна практическая задача линейного программирования не привела к циклу, хотя при решении подавляющего большинства из них не использовалось точное правило выбора вектора, исключаемого из базиса. Первый опубликованный пример цикла принадлежит Билу [6]. В литературе встречаются также ссылки на неопубликованный пример цикла, построенный ранее Гофманом [36].

Таким образом, можно сделать следующие выводы.

1. Хотя принципиальная возможность зацикливания и существует, при решении практических задач линейного программирования следует использовать упрощенные правила выбора вектора, подлежащего удалению из базиса. Одно из таких правил указывалось в § 2.

2. При теоретических применениях метода последовательного улучшения плана учет точных правил, разработанных в § 6 гл. 4, обязателен. В противном случае класс рассматриваемых задач был бы заведомо сýжен.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 5

1. Рассмотрим семейство задач линейного программирования, зависящее от двух параметров (a и b).

Требуется обратить в максимум линейную форму

$$L(X)=\sum_{j=1}^{6} x_j$$

при условиях

$$\begin{gathered} x_1+2x_2-x_3+ax_4+bx_5+x_6=2,\\ x_1-3x_2+4x_3+bx_4+ax_5+bx_6=7,\\ x_1+5x_2-2x_3+x_4+bx_5+ax_6=5,\\ x_j\geqslant 0,\qquad j=1,\ 2,\ \dots,\ 6. \end{gathered}$$

Указать диапазоны изменения параметров a и b, отвечающие случаю 1° (план оптимален), случаю 2° (задача неразрешима) и случаю 3° (имеется возможность улучшения плана), применительно к опорному плану задачи

$$X=(1,\ 2,\ 3,\ 0,\ 0,\ 0).$$

Изобразить графически на плоскости $(a,\ b)$ соответствующие области.

2. Пользуясь первым алгоритмом метода улучшения плана, обратить в максимум линейную форму

$$L(X)=x_1+2x_2-x_3+4x_4-3x_5$$

при условиях

$$\begin{aligned} x_1-x_2+3x_3-x_4+2x_5&\leqslant 10,\\ 2x_2+3x_4-x_5&\leqslant 6,\\ 3x_1+4x_2+x_3+2x_4+x_5&\leqslant 25,\end{aligned}$$

$$x_j\geqslant 0,\quad j=1,\ \ldots,\ 5.$$

3. Решить упражнение 2, пользуясь вторым алгоритмом метода.

4. Использовать для решения упражнения 2 мультипликативную форму второго алгоритма.

5. Решить упражнение 2, используя замечания п. 5.3 по определению вектора, вводимого в базис.

6. Составить блок-схему мультипликативной формы второго алгоритма.

7. Решить упражнение 2 при дополнительных ограничениях

$$x_j\leqslant 1,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ 5,$$

рассматривая полученную задачу как задачу с двухсторонними ограничениями.

8. Определить опорный план задачи линейного программирования со следующей системой условий:

$$\begin{aligned} 3x_1-2x_2+x_3-3x_4+4x_5&=2,\\ 5x_1+3x_2-2x_3+x_4+x_5&=6,\\ x_1-2x_2+4x_3-2x_4&=3,\end{aligned}$$

$$x_j\geqslant 0,\quad j=1,\ \ldots,\ 5.$$

9. Определить опорный план задачи со следующей системой ограничений:

$$\begin{aligned} 5x_1+2x_2-x_3+3x_4-x_5+2x_6&=6,\\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4+2x_5+x_6&=1,\\ 16x_1-5x_2+4x_3+9x_4+4x_5+7x_6&=15,\end{aligned}$$

$$x_j\geqslant 0,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ 6.$$

Выделить максимальное число линейно независимых уравнений системы и выписать эквивалентную задачу.

Указание. Воспользоваться замечаниями п. 8.1.

10. Обратить в максимум линейную форму

$$L(X)=x_1+x_2-3x_3+x_4+x_5$$

при ограничениях упражнения 8:

а) используя опорный план, найденный в упражнении 8, как исходный план,

б) применяя M-метод.

11. Доказать справедливость формул (9.3) и (9.4)

12. Дана следующая задача линейного программирования: Обратить в максимум линейную форму

$$L(X)=x_3-x_4+x_5-x_6$$

при условиях:

$$\begin{aligned} x_1 \quad +2x_3-3x_4-5x_5+6x_6 \qquad &=0,\\ x_2+6x_3-5x_4-3x_5+2x_6 \qquad &=0,\\ 3x_3+\ x_4+2x_5+4x_6+x_7&=1,\\ x_j\geqslant 0, \quad j=1,\ 2, \ldots, 7.& \end{aligned}$$

Приняв в качестве исходного базиса векторы (A_1, A_2, A_7), убедиться в том, что процесс решения задачи без учета правила, гарантирующего от зацикливания, может привести к циклу.

ГЛАВА 6

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО УТОЧНЕНИЯ ОЦЕНОК

Из теории двойственности, изложенной в гл. 3, вытекает ряд методов решения задач линейного программирования. Синтез метода последовательного улучшения плана и основных идей двойственности приводит к *методу последовательного уточнения оценок*. Впервые этот метод был описан Лемке [73] в 1954 г.

Решение задачи линейного программирования по методу последовательного уточнения оценок сводится к определению оптимального плана сопряженной задачи. Двойственная связь обеих задач позволяет получить при этом и оптимальный план прямой задачи.

В п. 5.5 гл. 3 было показано, что компоненты оптимального плана сопряженной задачи являются оценками влияния различных условий задачи линейного программирования на величину максимума линейной формы. Рассматриваемый здесь метод позволяет, исходя из приближенных (предварительных) оценок условий прямой задачи (из начального плана сопряженной задачи), последовательно уточняя их, получить вектор точных оценок условий задачи (оптимальный план сопряженной задачи). С системой предварительных оценок условий, получаемой при каждой итерации метода, может быть связан n-мерный вектор X, который удовлетворяет условиям-равенствам прямой задачи, но может иметь отрицательные компоненты. Системе оценок условий, определяемой в последней итерации, соответствует вектор X^* с неотрицательными составляющими. Вектор X^* является решением прямой задачи. Таким образом, оптимальный опорный план получается в результате последовательного уточнения оценок условий задачи, что и целесообразно отразить в названии метода. Наименование метода, принятое здесь, больше соответствует его существу, чем название *двойственный симплексный метод*, используемое в ряде работ.

Следует заметить, что при переходе от одной итерации к следующей значение линейной формы задачи монотонно убывает. Таким образом, в отличие от метода последовательного улучшения плана, где приближение к максимуму линейной формы происходит снизу, в методе последовательного уточнения оценок приближение к оптимуму осуществляется сверху.

Описание метода последовательного уточнения оценок производится по следующей схеме. Вначале (§ 1) формулируется признак оптимальности и излагаются теоретические основы метода применительно к невырожденному случаю. В § 2 формальное описание метода дополняется двумя геометрическими интерпретациями.

§ 3 посвящен приложению метода последовательного уточнения оценок к решению задач линейного программирования с переменными, ограниченными с обеих сторон.

В первых трех параграфах сопряженная задача предполагается невырожденной. В § 4 устанавливаются правила, следуя которым можно использовать метод уточнения оценок для решения вырожденных задач с гарантией от зацикливания.

В § 5 и 6 излагаются две вычислительные схемы — два алгоритма, реализующих метод последовательного уточнения оценок. Каждый из алгоритмов предполагает заданным начальный опорный план сопряженной задачи. В § 7 рассматриваются различные методы определения исходного опорного плана сопряженной задачи. В последнем параграфе сравниваются методы улучшения плана и уточнения оценок и рассматривается вопрос об их совместном применении.

§ 1. Основы метода

1.1. Запишем задачу линейного программирования в канонической форме:

Требуется вычислить максимум линейной формы

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.1}$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m; \tag{1.2}$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j = 1, 2 \ldots, n. \tag{1.3}$$

Как обычно, будем предполагать ранг матрицы $\|a_{ij}\|_{m,n}$ условий (1.2) равным m. Задача, двойственная по отношению к задаче (1.1)—(1.3) (или сопряженная с ней), состоит в определении минимума линейной формы

$$\tilde{L}(Y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \tag{1.4}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.5}$$

Более компактно прямая и двойственная задачи записываются в следующем виде:

$$L(X) = (C, X) \to \max \text{ при условиях } AX^T = B, \quad X \geqslant 0;$$

$$\tilde{L}(Y) = (B, Y) \to \min \text{ при условии } YA \geqslant C.$$

Введем некоторые понятия, связанные с сопряженной задачей.

План Y сопряженной задачи называется *опорным*, если среди условий (1.5), которые он обращает в равенства, имеется m линейно независимых условий (см. § 5 гл. 2).

Базисом опорного плана Y сопряженной задачи (1.4)—(1.5) назовем произвольную систему из m линейно независимых векторов условий A_{s_i} прямой задачи, для которых

$$(Y, A_{s_\mu}) = c_{s_\mu}, \qquad \mu = 1, 2, \ldots, m,$$

или, что то же самое,

$$\sum_{i=1}^{m} a_{is_\mu} y_i = c_{s_\mu}, \qquad \mu = 1, 2, \ldots, m. \tag{1.6}$$

Обозначим множество индексов $(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ базиса опорного плана Y через I_Y. Систему векторов $A_{s_1}, \ldots, A_{s_m}$, являющуюся базисом некоторого опорного плана сопряженной задачи, будем для краткости называть *сопряженным базисом*.

Опорный план Y сопряженной задачи называется *невырожденным*, если для любого вектора A_j, не входящего в его базис,

$$(Y, A_j) > c_j \tag{1.7}$$

(см. § 5 гл. 2).

Сопряженная задача (1.4), (1.5), все опорные планы которой являются невырожденными, называется *невырожденной задачей*. Геометрически невырожденность задачи означает, что в каждой вершине многогранника (многогранного множества) условий пересекается ровно m граничных гиперплоскостей.

В ближайших параграфах сопряженная задача будет предполагаться невырожденной.

С каждым опорным планом Y сопряженной задачи (точнее, с его базисом) удобно связывать некоторый n-мерный вектор X, удовлетворяющий условиям (1.2) прямой задачи. Такое соответствие позволит в дальнейшем формулировать в терминах прямой задачи все построения, относящиеся к опорным планам сопряженной задачи.

Разложим вектор ограничений B по сопряженному базису $(A_{s_1}, \ldots, A_{s_m})$. Обозначим соответствующие коэффициенты разложения через x_{s_i}. n-мерный вектор X, s_i-е компоненты которого $(i = 1, 2, \ldots, m)$ совпадают с x_{s_i}, а остальные равны нулю, будем называть *псевдопланом* прямой задачи. Компоненты x_{s_i} назовем *базисными* составляющими псевдоплана, а остальные компоненты *внебазисными* переменными. Векторы сопряженного базиса, так же как и векторы базиса прямой задачи, помимо своих индексов характеризуются номерами позиций, занимаемыми ими в базисе.

Будем обозначать базисную составляющую псевдоплана x_{s_i} через x_{i0} в соответствии с позицией i, занимаемой вектором A_{s_i} в сопряженном базисе. Ясно, что компоненты псевдоплана удовлетворяют условиям (1.2) прямой задачи:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \sum_{\mu=1}^{m} a_{is_\mu}x_{s_\mu} = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{1.8}$$

Следует иметь в виду, что некоторые из x_{s_μ} могут быть отрицательными, так что X не является, вообще говоря, планом прямой задачи. Будем в дальнейшем пользоваться терминами сопряженный базис и базис псевдоплана как синонимами.

Псевдоплан можно определить и независимо от сопряженной задачи. Пусть $S=(A_{s_1}, \ldots, A_{s_m})$ — произвольная система линейно независимых векторов условий. Обозначим систему индексов $s_1, \ldots, s_m$ через I и разложим векторы условий A_j ($j=1, 2, \ldots, n$) и вектор ограничений $B=A_0$ по векторам системы S:

$$A_j=\sum_{i=1}^{m} x_{ij}A_{s_i}, \tag{1.9}$$

$$B=A_0=\sum_{i=1}^{m} x_{i0}A_{s_i}. \tag{1.10}$$

Введем такое обозначение:

$$\Delta_j=\sum_{i=1}^{m} c_{s_i}x_{ij}-c_j, \qquad j=1, 2, \ldots, n. \tag{1.11}$$

Теорема 6.1. *n-мерный вектор X, для которого $x_{s_i}=x_{i0}$, а $x_j=0$ при $j\notin I$, является псевдопланом в том и только в том случае, если все $\Delta_j\geqslant 0$ ($j=1, 2, \ldots, n$).*

Доказательство. Действительно, векторы $A_{s_1}, \ldots$ $\ldots, A_{s_m}$ линейно независимы. Поэтому можно вычислить вектор $Y=(y_1, \ldots, y_m)$, составляющие которого удовлетворяют условиям

$$\sum_{\mu=1}^{m} a_{\mu s_i}y_\mu=c_{s_i}.$$

Имеют место следующие соотношения:

$$\Delta_j=\sum_{i=1}^{m} c_{s_i}x_{ij}-c_j=\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{\mu=1}^{m} a_{\mu s_i}y_\mu\Big)x_{ij}-c_j=$$
$$=\sum_{\mu=1}^{m} y_\mu\Big(\sum_{i=1}^{m} a_{\mu s_i}x_{ij}\Big)-c_j.$$

Из формул (1.9) следует, что

$$a_{\mu j}=\sum_{i=1}^{m} a_{\mu s_i}x_{ij}, \tag{1.12}$$

поэтому

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_{s_i} x_{ij} - c_j = \sum_{\mu=1}^{m} a_{\mu j} y_\mu - c_j. \tag{1.13}$$

Из полученного соотношения вытекает эквивалентность обоих определений псевдоплана.

Следует подчеркнуть, что если план задачи определяется только условиями задачи, то псевдоплан определяется как условиями, так и линейной формой задачи.

Метод последовательного уточнения оценок основывается на применении метода последовательного улучшения плана к сопряженной задаче. Такой подход приводит к новому методу решения прямой задачи.

Рассмотрим некоторый опорный план $Y = (y_1, \ldots, y_m)$ сопряженной задачи. Базис опорного плана Y состоит из векторов $A_{s_1}, \ldots, A_{s_m}$. Ему соответствует псевдоплан X с базисными компонентами x_{s_i} $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Признак оптимальности. *Если среди базисных компонент псевдоплана X нет отрицательных, то псевдоплан X оказывается оптимальным планом прямой задачи, а опорный план Y — решением сопряженной задачи.*

Доказательство. Имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}\tilde{L}(Y) &= \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{\mu=1}^{m} a_{is_\mu} x_{s_\mu}\Big) y_i = \\ &= \sum_{\mu=1}^{m} x_{s_\mu} \Big(\sum_{i=1}^{m} a_{is_\mu} y_i\Big) = \sum_{\mu=1}^{m} c_{s_\mu} x_{s_\mu} = \\ &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = L(X).\end{aligned}$$

Здесь второе равенство следует из соотношения (1.8) для составляющих псевдоплана. Третье равенство получено изменением порядка суммирования. Четвертое соотношение следует из формулы (1.6). Пятое равенство справедливо потому, что внебазисные компоненты псевдоплана равны нулю.

При неотрицательных x_j псевдоплан X является планом прямой задачи. Согласно лемме 1.2 гл. 3 планы взаимосопряженных задач, связанные соотношением

$$\tilde{L}(Y) = L(X),$$

являются оптимальными планами соответствующих задач. Справедливость признака оптимальности установлена.

Заметим, что справедливость сформулированного признака непосредственно следует из второй формы признака оптимальности для метода последовательного улучшения плана, поскольку условия второй формы признака выполняются для псевдоплана X. В общем случае приведенный признак является только достаточным условием оптимальности плана. Предлагаем читателю доказать, что этот признак оказывается необходимым и достаточным условием оптимальности плана, если исследуемый план Y сопряженной задачи — невырожденный план (см. упражнение 1).

1.2. Пусть известен некоторый опорный план Y сопряженной задачи с базисом $A_{s_1}, \ldots, A_{s_m}$. Ему соответствует псевдоплан X прямой задачи. Компоненты разложения вектора ограничений $B = A_0$ и векторов условий A_j прямой задачи по векторам сопряженного базиса могут быть вычислены непосредственно из уравнений

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} A_{s_i}, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{1.14}$$

Параметр x_{ij} в формулах (1.14) — это коэффициент разложения вектора условий A_j по векторам сопряженного базиса при векторе A_{s_i}, занимающем i-ю позицию в сопряженном базисе.

В дальнейшем нам понадобится еще один способ вычисления коэффициентов x_{ij}:

$$x_{ij} = \sum_{\mu=1}^{m} a_{\mu j} e_{i\mu}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n, \tag{1.15}$$

где $e_{i\mu}$ — коэффициенты разложения m-мерных единичных векторов e_μ ($\mu = 1, 2, \ldots, m$) по векторам сопряженного базиса, т. е.

$$\| e_{ij} \|_m = (A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m})^{-1}. \tag{1.16}$$

Формула (1.15) является следствием матричных соотношений

$$A_j = A_Y X_j$$

или

$$X_j = A_Y^{-1} A_j,$$

где

$$X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{mj})^T, \quad A_Y = (A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m}).$$

В зависимости от знаков базисных составляющих псевдоплана и коэффициентов разложения векторов условий A_j по сопряженному базису следует различать три случая.

1° Базисные компоненты x_{i_0} неотрицательны для всех i ($i = 1, 2, \ldots, m$).

2° Среди x_{i_0} имеются отрицательные величины и по крайней мере для одной из них все $x_{ij} \geqslant 0$ для $j = 1, 2, \ldots, n$.

3° Псевдоплан содержит отрицательные базисные компоненты x_{i_0}, но для каждой из них среди коэффициентов x_{ij} ($j = 1, 2, \ldots, n$) имеются отрицательные величины.

В случае 1°, как это следует из признака оптимальности, псевдоплан оказывается оптимальным опорным планом прямой задачи. Ниже мы покажем, что в случае 2° задача линейного программирования неразрешима (условия прямой задачи несовместны), а в случае 3° можно перейти к новому опорному плану сопряженной задачи и, следовательно, к новому псевдоплану с меньшим значением линейной формы.

1.3. Чтобы упростить анализ случаев 2° и 3°, целесообразно проследить за изменением линейной формы (1.4) сопряженной задачи при переходе от опорного плана Y к новому плану,

$$Y(\theta) = Y + \theta e^{(i)}. \tag{1.17}$$

Здесь $e^{(i)} = (e_{i1}, \ldots, e_{im})$; e_{ij} — определенные выше коэффициенты разложения единичных векторов

$$e_j = \overbrace{(\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{j}, 0, \ldots, 0)}^{m}$$

по векторам базиса плана Y. Чтобы не загромождать запись в обозначении вектора $e^{(i)}$, номер базиса, которому соответствуют составляющие этого вектора, не указывается.

Будем называть переход от плана Y к плану $Y(\theta)$ ***элементарным преобразованием*** плана Y, связанным с вектором A_{s_i} сопряженного базиса.

Подставим компоненты вектора $Y(\theta)=\{y_1(\theta), \ldots, y_m(\theta)\}$ в левую часть условий (1.5) сопряженной задачи. Имеем

$$\sum_{\mu=1}^{m} a_{\mu j} y_\mu(\theta)=\sum_{i=1}^{m} a_{\mu j} y_\mu+\theta \sum_{\mu=1}^{m} a_{\mu j} e_{i\mu}.$$

Согласно формулам (1.15)

$$\sum_{\mu=1}^{m} a_{\mu j} e_{i\mu}=x_{ij}, \qquad j=0,\ 1,\ \ldots,\ n.$$

В частности, при $j \in I_Y=(s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_m)$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{\mu j} e_{i\mu}=\begin{cases} 0 & \text{для } j \in I_Y,\ j \neq s_i, \\ 1 & \text{для } j=s_i. \end{cases}$$

В соответствии с этими формулами имеем

$$\sum_{\mu=1}^{m} a_{\mu j} y_\mu(\theta)=\begin{cases} \sum\limits_{\mu=1}^{m} a_{\mu j} y_\mu, & j \in I_Y,\ i \neq s_i, \\ \sum\limits_{\mu=1}^{m} a_{\mu j} y_\mu+\theta, & j=s_i, \\ \sum\limits_{\mu=1}^{m} a_{\mu j} y_\mu+\theta x_{ij}, & j \notin I_Y. \end{cases} \tag{1.18}$$

Выше было введено обозначение (1.11):

$$\Delta_j=\sum_{\mu=1}^{m} a_{\mu j} y_\mu-c_j, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Поскольку $Y=(y_1,\ \ldots,\ y_m)$ — план сопряженной задачи, то

$$\Delta_j \geqslant 0 \quad \text{для} \quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{1.19}$$

Вектор $Y(\theta)$ будет планом сопряженной задачи в том и только в том случае, если

$$\Delta_j(\theta)=\sum_{\mu=1}^{m} a_{\mu j} y_\mu(\theta)-c_j \geqslant 0, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{1.20}$$

Определим условия, при которых все соотношения (1.20) выполняются. Учитывая формулы (1.11), (1.18) и (1.20), получаем

$$\Delta_j(\theta)=\begin{cases}\Delta_j=0, & \text{если } j\in I_Y,\ j\neq s_i,\\ \Delta_j+\theta=\theta, & \text{если } j=s_i,\\ \Delta_j+\theta x_{ij}, & \text{если } j\notin I_Y.\end{cases} \tag{1.21}$$

Из (1.21) при $j=s_i$ следует, что $\theta\geqslant 0$. Если $x_{ij}\geqslant 0$, то $\Delta_j(\theta)\geqslant\Delta_j\geqslant 0$. Если $x_{ij}<0$, то для соблюдения условий (1.20) необходимо, чтобы

$$\Delta_j(\theta)=\Delta_j+\theta x_{ij}\geqslant 0,$$

т. е.

$$\theta\leqslant-\frac{\Delta_j}{x_{ij}}.$$

Итак, $Y(\theta)$ является планом сопряженной задачи (1.4), (1.5) при всех θ в интервале

$$0\leqslant\theta\leqslant\theta_0, \tag{1.22}$$

где

$$\theta_0=\min_{x_{ij}<0}\left(-\frac{\Delta_j}{x_{ij}}\right). \tag{1.23}$$

Если $x_{ij}\geqslant 0$ для $j=1, 2, \ldots, n$, то θ неограниченно сверху, т. е. $\theta_0=\infty$. Для невырожденного плана все $\Delta_j>0$, $j\neq I_Y$, поэтому $\theta_0>0$.

Значение линейной формы $\tilde{L}(Y)$ сопряженной задачи на плане $Y(\theta)$ равно

$$\tilde{L}[Y(\theta)]=\sum_{\mu=1}^{m}b_\mu y_\mu(\theta)=\sum_{\mu=1}^{m}b_\mu(y_\mu+\theta e_{i\mu}).$$

В соответствии с формулой (1.15) для $j=0$ имеем

$$x_{i0}=\sum_{\mu=1}^{m}a_{\mu 0}e_{i\mu}=\sum_{\mu=1}^{m}b_\mu e_{i\mu},$$

поэтому

$$\tilde{L}[Y(\theta)]=\tilde{L}(Y)+\theta x_{i0}. \tag{1.24}$$

1.4. Приступим к анализу случаев 2° и 3°, выделенных в п. 1.2.

Пусть имеет место случай 2°: среди отрицательных компонент x_{i0} псевдоплана X имеется составляющая x_{r0}, для которой $x_{rj} \geqslant 0$, $j=1, 2, \ldots, n$. В этом случае $Y(\theta)$ — результат элементарного преобразования (связанного с вектором A_{s_r}) плана Y — является планом сопряженной задачи при любом θ. Следовательно, как видно из соотношения (1.24) (при $i=r$), линейная форма $\tilde{L}(Y)$ неограничена снизу на множестве планов сопряженной задачи. Согласно лемме 1.3 гл. 3 это возможно лишь в случае несовместности условий прямой задачи.

Заметим, что при исследовании метода последовательного улучшения плана неразрешимость задачи связывалась с неограниченностью линейной формы на множестве планов задачи. Случай несовместности условий задачи не встречался при анализе метода, поскольку мы с самого начала предполагали существование начального плана прямой задачи. При исследовании метода последовательного уточнения оценок мы отправляемся от начального плана сопряженной задачи. Это обеспечивает ограниченность линейной формы прямой задачи, но вовсе не гарантирует совместность ее условий.

Рассмотрим случай 3°. Пусть псевдоплан содержит отрицательные базисные компоненты, но для каждой из них имеются отрицательные коэффициенты x_{ij}. В этом случае вектор $Y(\theta)$ будет планом сопряженной задачи при любом $\theta \geqslant 0$, не превышающем θ_0 из (1.23). Выберем отрицательную базисную компоненту $x_{r0}<0$ псевдоплана X. По условию, среди x_{rj} имеются отрицательные величины. Пусть значение индекса j, на котором достигается θ_0, равно k:

$$\theta_0 = -\frac{\Delta_k}{x_{rk}}.$$

Очевидно,

$$\Delta_k(\theta_0) = \Delta_k + \theta_0 x_{rk} = 0.$$

В соответствии с теоремой 2.1. гл. 4 система векторов, полученная из сопряженного базиса плана Y заменой вектора A_{s_r} на вектор условий A_k, является линейно независимой системой, так как по условию $x_{rk} \neq 0$ $(x_{rk}<0)$. Следовательно, $Y' = Y(\theta_0)$ является не только планом, но и опорным планом сопряженной задачи. Базис опорного плана Y' получается из системы $A_{s_1}, \ldots, A_{s_m}$ заменой A_{s_r} на A_k.

В силу предположения о невырожденности задачи, Y' — невырожденный план, т. е. $\Delta_j(\theta_0)>0$ при $j \notin I_{Y'}$. Отсюда следует, что θ_0 достигается только на одном векторе A_k. Таким образом, в невырожденных случаях вектор, подлежащий включению в базис, определяется однозначно.

Из формулы (1.24) видно, что при переходе от плана Y к $Y'=Y(\theta_0)$ значение линейной формы сопряженной задачи уменьшится на

$$|\theta_0 x_{r0}|>0 \quad (\theta_0>0,\ x_{r0}<0).$$

Заметим, что элементарному преобразованию опорного плана Y в план $Y'=Y(\theta_0)$ соответствует переход от псевдоплана X к псевдоплану X' в прямой задаче.

Значение линейной формы $L(X)$ прямой задачи на псевдоплане равно значению линейной формы $\tilde{L}(Y)$ на соответствующем опорном плане сопряженной задачи.

Действительно,

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j=\sum_{j\in I_Y} c_j x_j=\sum_{i=1}^{m} c_{s_i} x_{i0}=\sum_{i=1}^{m} x_{i0}\sum_{\mu=1}^{m} a_{\mu s_i} y_\mu=$$
$$=\sum_{\mu=1}^{m} y_\mu \sum_{i=1}^{m} a_{\mu s_i} x_{i0}=\sum_{\mu=1}^{m} y_\mu b_\mu=\tilde{L}(Y). \qquad (1.25)$$

Таким образом, в случае 3° элементарное преобразование опорного плана Y сопряженной задачи, связанное с вектором A_{s_r}, приводит к уменьшению линейной формы $\tilde{L}(Y)$. В терминах прямой задачи это значит, что в случае 3° можно перейти от псевдоплана X к псевдоплану X' с меньшим значением линейной формы $L(X)$.

Последовательные переходы от одного опорного плана Y сопряженной задачи к другому (или, в терминах прямой задачи, последовательные преобразования одного псевдоплана в другой) производятся до тех пор, пока будет получено решение задачи или установлена ее неразрешимость.

Каждый переход от одного псевдоплана к следующему составляет *итерацию* (*шаг*) метода последовательного уточнения оценок. При использовании этого метода для решения задач с невырожденной сопряженной задачей мы не можем вернуться к уже пройденному раз базису. В противном случае опорные планы сопряженной задачи, полученные при различных итерациях, совпадали бы между собой. Но этого не может быть из-за монотонного убывания линейной формы сопряженной задачи. Таким образом, количество итераций, необходимых для решения невырожденной задачи (или установления ее неразрешимости) заведомо ограничено общим числом базисов сопряженной задачи, не превышающим C_n^m.

1.5. Наметим кратко порядок операций, связанных с отдельным шагом метода последовательного уточнения оценок. Каждая итерация содержит два этапа. На первом этапе следует выяснить, не является ли псевдоплан планом прямой задачи, и если нет, то разрешима ли задача. Для этого необходимо вычислить базисные составляющие псевдоплана (разложить вектор ограничений по векторам сопряженного базиса) и установить их знаки.

Псевдоплан оказывается планом и, следовательно, решением задачи (случай 1°), если все его компоненты неотрицательны. Если признак оптимальности не удовлетворяется, следует проверить, нет ли оснований утверждать, что условия прямой задачи несовместимы.

Случай 2° (неограниченность снизу линейной формы сопряженной задачи и, следовательно, противоречивость условий прямой задачи) имеет место, если для некоторой отрицательной базисной переменной псевдоплана $x_{r0}<0$ все коэффициенты x_{rj} неотрицательны.

И, наконец, случай 3° встречается, если при любом i, для которого $x_{i0}<0$, среди коэффициентов x_{ij} имеются отрицательные.

Таким образом, первый этап итерации приводит к одной из трех возможностей (случай 1°, 2°, 3°). Если имеет место случай 1° или 2°, процесс решения заканчивается. В случае 3° переходят ко второму этапу итерации. Второй этап заключается в определении элементарного преобразования, приводящего к новому опорному плану сопряженной задачи и, следовательно, к новому псевдоплану прямой задачи с меньшим значением линейной формы. На втором этапе итерации выбирается позиция r сопряженного базиса с отрицательной компонентой псевдоплана и определяется вектор A_k, который должен заменить в сопряженном базисе исключаемый из него вектор A_{s_r}. Новый сопряженный базис образуется, таким образом, из векторов старого базиса заменой вектора условий A_{s_r} на вектор A_k. На втором этапе вычисляются, кроме того, все параметры, необходимые для получения и исследования нового псевдоплана. Анализ очередного псевдоплана производится на первом этапе следующей итерации.

§ 2. Геометрические интерпретации метода последовательного уточнения оценок

2.1. В соответствии с двумя геометрическими интерпретациями задачи линейного программирования рассмотрим два геометрических истолкования метода последовательного уточнения оценок.

Начнем с первой геометрической интерпретации метода. Многогранное множество M условий задачи (1.1)—(1.3) содержится в общей части гиперплоскостей, определяемых равенствами (1.2). Опорные планы задачи соответствуют вершинам многогранного множества. Каждая вершина образуется пересечением n независимых гиперплоскостей (m гиперплоскостей отвечают условиям (1.2) и $n-m$ соответствуют нулевым компонентам опорного плана).

Выясним геометрический смысл псевдоплана. Компоненты псевдоплана X удовлетворяют условиям (1.2) задачи, при этом внебазисные компоненты x_j ($j \notin I_Y$) равны нулю. Кроме того, с сопряженным базисом, определяющим псевдоплан, связаны неотрицательные значения параметров

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_{s_i} x_{ij} - c_j \geqslant 0$$

для $j = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно, в первой геометрической интерпретации псевдоплану соответствует точка X пересечения n независимых гиперплоскостей (m гиперплоскостей отвечают условиям (1.2) и $n-m$ соответствуют внебазисным составляющим $x_j = 0$ псевдоплана). Но в общем случае точка X, отвечающая псевдоплану X, лежит вне многогранного множества M. Чтобы уточнить геометрическое определение псевдоплана, необходимо выяснить геометрический смысл условий

$$\Delta_j \geqslant 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Определим многогранный конус K_X следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{2.1}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j \notin I_Y = (s_1, s_2, \ldots, s_m).$$

Конус K_X порождается некоторыми из гиперплоскостей многогранного множества M, проходящими через точку X. Следовательно, конус K_X имеет вершину в точке X.

Дополнительное условие, которому следует подчинить геометрический аналог псевдоплана, заключается в том, что соответствующий ему многогранный конус K_X должен быть расположен в нижнем полупространстве, определяемом гиперплоскостью линейной формы, проведенной через точку X. Другими словами, вектор C, указывающий направление возрастания линейной формы, и конус K_X должны лежать по разные стороны гиперплоскости линейной формы, проходящей через точку X. Мы сейчас покажем, что это условие соответствует неравенствам

$$\Delta_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Последнее же условие вместе с условиями

$$\sum_{\mu=1}^{m} a_{is_\mu} x_{s_\mu} = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

$$x_j = 0, \quad j \notin I_Y$$

определяет псевдоплан задачи.

Итак, пусть $S = \{A_{s_1}, \ldots, A_{s_m}\}$ — линейно независимая система векторов условий, а x_{s_i} и x_{ij} — коэффициенты разложения вектора ограничений B и векторов условий A_j по векторам системы S. Пусть, кроме того, s_i-я компонента n-мерного вектора X совпадает с x_{s_i} ($i = 1, \ldots, m$), а все остальные составляющие X равны нулю. Тогда для любого n-мерного вектора X' имеет место соотношение

$$L(X') = L(X) - \sum_{j \notin I_Y} \Delta_j x'_j, \tag{2.2}$$

где $I_Y = (s_1, \ldots, s_m)$. Справедливость соотношения (2.2) устанавливается так же, как и формулы (4.6) в § 4 гл. 5.

Пусть теперь точка X является псевдопланом задачи, а X' принадлежит конусу K_X. Тогда

$$\Delta_j \geqslant 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

(X — псевдоплан), и

$$x'_j \geqslant 0, \quad j \notin I_Y \qquad (X' \in K_X).$$

Как видно из формулы (2.2), в этом случае

$$L(X') \leqslant L(X), \tag{2.3}$$

т. е. произвольная точка конуса K_X и вектор C лежат по разные стороны гиперплоскости линейной формы, проведенной через точку X.

Пусть, наоборот, задано, что конус K_X лежит в «нижнем» полупространстве, т. е. для любой его точки имеет место неравенство (2.3). Выберем точку $X' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ конуса K_X, для которой

$$x'_\mu = \begin{cases} x_\mu - \theta x_{ij} & \text{при} \quad \mu = s_i, \ i = 1, 2, \ldots, m, \\ 0 & \text{при} \quad \mu \notin I_Y, \ \mu \neq j, \\ \theta > 0 & \text{при} \quad \mu = j. \end{cases} \tag{2.4}$$

Условия (2.4) при $0 \leqslant \theta < \infty$ определяют лучи, порождающие конус K_X. Легко непосредственно убедиться в том, что для выбранной точки X'

$$L(X') = L(X) - \theta \Delta_j. \tag{2.5}$$

Сопоставляя соотношения (2.3) и (2.5), получаем

$$\Delta_j \geqslant 0.$$

Таким образом, соответствие между геометрическим изображением псевдоплана и его аналитическим определением установлено.

Будем называть точку X — геометрический аналог псевдоплана — *псевдовершиной* многогранного множества M условий задачи.

Следует подчеркнуть, что псевдовершина, так же как и псевдоплан, определяется не только многогранным множеством условий, но и линейной формой задачи. Заметим, кроме того, что некоторые из гиперплоскостей, образующих псевдоплан, могут и не быть граничными гиперплоскостями многогранного множества M. Это относится к гиперплоскостям, которые соответствуют условиям-неравенствам, являющимся следствиями остальных условий.

2.2. Изложим теперь в терминах прямой задачи геометрическое истолкование результата элементарного преобразования опорного плана Y сопряженной задачи в $Y' = Y(\theta_0)$. Другими словами, приведем геометрическую интерпретацию преобразования псевдоплана X в псевдоплан $X' = X(\theta_0)$.

Выберем гиперплоскость $x_{s_r} = 0$, отвечающую отрицательной базисной компоненте x_{s_r} псевдоплана X.

Гиперплоскость $x_{s_r} = 0$ может иметь или не иметь общие точки с многогранным конусом K_X. Если пересечение гиперплоскости и конуса — пустое множество, задача неразрешима — ее условия несовместны. Действительно, в этом случае весь конус K_X находится по ту же сторону от гиперплоскости $x_{s_r} = 0$, что и псевдовершина X, для которой $x_{s_r} < 0$. С другой стороны, конус K_X содержит многогранное множество условий. Помимо соотношений (2.1) координаты точек области определения линейной формы задачи (1.1)—(1.3) удовлетворяют еще условию $x_j \geqslant 0$ для $j \in I_Y$ и, в частности, $x_{s_r} \geqslant 0$. Полученное противоречие снимается только в том случае, если многогранное множество условий — пустое множество.

Пусть теперь гиперплоскость $x_{s_r} = 0$ пересекает конус K_X. Общая часть полупространства $x_{s_r} \leqslant 0$ и многогранного конуса K_X образует выпуклое многогранное множество M_X. Псевдовершина X — одна из его вершин. Каждая из вновь образованных вершин является соседней с точкой X. Будем перемещать гиперплоскость линейной формы, проходящую через псевдовершину X, параллельно самой себе в сторону убывания линейной формы, пока она не достигнет ближайшей вершины X' многогранного множества M_X. Первая вершина M_X, которую достигнет гиперплоскость линейной формы, является псевдовершиной многогранного множества M — геометрическим изображением псевдоплана, отвечающего опорному плану Y'. План $Y' = Y(\theta_0)$ получен из опорного плана Y сопряженной задачи в результате элементарного преобразования, связанного с вектором A_{s_r}.

Докажем справедливость приведенной геометрической интерпретации преобразования псевдоплана X в псевдоплан X'.

Рассмотрим произвольную вершину многогранного множества M_X. Эта вершина является пересечением m гиперплоскостей, отвечающих условиям-равенствам (1.2) задачи, с гиперплоскостью $x_{s_r}=0$ и $n-m-1$ гиперплоскостями $x_j=0\,(j\notin I_Y)$, соответствующими внебазисным переменным псевдоплана X. Так как всего внебазисных переменных $n-m$, то M_X может содержать не более $n-m$ вершин, соседних с X. Обозначим вершину M_X, для которой $x_t>0$ $(t\notin I_Y)$ через X_t. Чтобы получить компоненты точки X_t из составляющих точки X, необходимо в соответствии с формулами (2.4) при $j=t$ увеличивать θ до тех пор, пока x'_{s_r} не обратится в нуль. Разным вершинам X_t множества M_X соответствуют значения параметра θ, определяемые из условия

$$x'_{s_r}=x_{s_r}-\theta x_{rt}=0.$$

Но $x_{s_r}<0$, $\theta>0$. Это значит, что вершина X_t существует лишь при $x_{rt}<0$. Следовательно, значения параметра θ, отвечающие вершинам X_t, вычисляются из условия

$$\theta=x_t=\frac{x_{s_r}}{x_{rt}} \quad \text{при} \quad x_{rt}<0.$$

Величина $x_t\Delta_t$ с точностью до нормирующего множителя соответствует расстоянию точки X_t до гиперплоскости линейной формы, проходящей через точку X (см. упражнение 2). Таким образом, ближе всего к гиперплоскости линейной формы находится вершина X_k, для которой

$$x_k\Delta_k=\min_{x_{rt}<0} x_t\Delta_t=\min_{x_{rt}<0}\frac{x_{s_r}}{x_{rt}}\Delta_t.$$

Базисная компонента x_{s_r} псевдоплана X отрицательна. Поэтому

$$x_k\Delta_k=|x_{s_r}|\min_{x_{rt}<0}\left(-\frac{\Delta_t}{x_{rt}}\right). \tag{2.6}$$

Таким образом, индекс k, на котором достигается минимум отношения $-\frac{\Delta_t}{x_{rt}}$ при $x_{rt}<0$, определяет вершину $X'=X_k$ многогранного множества M_X, в которую переходит псевдоплан X. Из этих же соображений выбирается индекс

k вектора, вводимого в сопряженный базис при элементарном преобразовании опорного плана Y в $Y(\theta_0)$. С базисами опорных планов Y и $Y' = Y(\theta_0)$ связаны псевдопланы X и X' соответственно.

Таким образом, установлено, что псевдоплан X', соответствующий опорному плану Y', изображается в приведенной геометрической интерпретации ближайшей к X вершиной X' многогранного множества M_X. Точка X', так же как и X, является псевдовершиной многогранного множества M условий задачи.

2.3. Сформулируем теперь в геометрических терминах все элементы отдельной итерации.

Первый этап интерации — это исследование псевдоплана на оптимальность. Если псевдовершина X принадлежит многогранному множеству M, то гиперплоскость линейной формы, содержащая X, оказывается опорной гиперплоскостью многогранного множества M в точке X, и псевдоплан X, будучи планом задачи, составит ее решение (случай 1°).

Пусть теперь псевдоплан X не является планом задачи. Тогда среди его базисных компонент имеется $x_{s_r} < 0$. Для того, чтобы гиперплоскость $x_{s_r} = 0$ пересекала конус K_X, необходимо, чтобы она пересекала по крайней мере один из лучей (2.4), порождающих этот конус. Другими словами, должны быть выполнены при некоторых t условия

$$x'_{s_r} = x_{s_r} - \theta x_{rt} = 0.$$

Но $x_{s_r} < 0$, $\theta > 0$. Поэтому равенство $x'_{s_r} = 0$ не может быть достигнуто, если все x_{rt} неотрицательны. В этом случае гиперплоскость $x_{s_r} = 0$ не пересекает конус K_X. Мы уже видели, что отсутствие общих точек у гиперплоскости $x_{s_r} = 0$ и конуса K_X означает, что задача линейного программирования неразрешима — условия задачи несовместны (случай 2°).

Если гиперплоскость $x_{s_r} = 0$ пересекает K_X, то следует перейти ко второму этапу итерации. Переход от псевдоплана X к псевдоплану X' с меньшим значением линейной формы $L(X)$ соответствует перемещению из точки X в ближайшую вершину X' многогранного множества M_X (случай 3°). При переходе из точки X в X' переменная x'_{s_r}

обращается в нуль, а переменная x_k (см. (2.6)) становится базисной составляющей псевдоплана.

Перемещая таким образом гиперплоскость линейной формы параллельно самой себе, мы уменьшаем от шага к шагу значение линейной формы. Конечность числа псевдопланов гарантирует достижение максимума линейной формы за конечное число шагов. Из геометрических соображений ясно также, что неразрешимость задачи (отсутствие планов), если она имеет место, обнаружится опять-таки за конечное число шагов.

2.4. Проиллюстрируем приведенные рассуждения на примере 1 § 3 гл. 4.

Пример 1. Требуется обратить в максимум линейную форму

$$L(X)=5x_1-x_2-2x_3+5x_4+5x_5-x_6$$

при условиях:

$$\begin{aligned} -2x_1+5x_2+x_3 \qquad &=10,\\ x_1-x_2+x_4 \qquad &=1,\\ x_1+2x_2+x_5 \qquad &=6,\\ 10x_1-3x_2+x_6 &=15,\\ x_j\geqslant 0,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ 6. \end{aligned}$$

Решение. Соответствующая сопряженная задача формулируется следующим образом:

Требуется обратить в минимум линейную форму

$$\tilde{L}(Y)=10y_1+y_2+6y_3+15y_4$$

при условиях:

$$-2y_1+y_2+y_3+10y_4\geqslant 5, \tag{2.7}$$
$$5y_1-y_2+2y_3-3y_4\geqslant -1, \tag{2.8}$$
$$y_1\geqslant -2, \tag{2.9}$$
$$y_2\geqslant 5, \tag{2.10}$$
$$y_3\geqslant 5, \tag{2.11}$$
$$y_4\geqslant -1. \tag{2.12}$$

Легко видеть, что замена неравенств (2.7); (2.8), (2.11), (2.12) на равенства приводит к системе четырех независимых уравнений, решение которых удовлетворяет условиям (2.9) и (2.10) как строгим неравенствам. Следовательно, начальный сопряженный базис состоит из векторов условий A_1, A_2, A_5 и A_6*).

Вычислим базисные компоненты начального псевдоплана и коэффициенты разложения векторов условий по векторам начального сопряженного базиса.

---

*) Методы определения начального опорного плана сопряженной задачи будут изложены в § 7.

Базисные составляющие псевдоплана удовлетворяют системе уравнений

$$B=\sum_{i=1}^{4} x_{i0}A_{s_i},$$

где $A_{s_1}=A_1$, $A_{s_2}=A_2$, $A_{s_3}=A_5$ и $A_{s_4}=A_6$. Таким образом, x_{i0} ($i=1, 2, 3, 4$) определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned}10&=-2x_{10}+5x_{20},\\ 1&=x_{10}-x_{20},\\ 6&=x_{10}+2x_{20}+x_{30},\\ 15&=10x_{10}-3x_{20}+x_{40}.\end{aligned}$$

Отсюда $x_{10}=5$, $x_{20}=4$, $x_{30}=-7$, $x_{40}=-23$ и, следовательно,

$$X=(5,\ 4,\ 0,\ 0,\ -7,\ -23).$$

Значение линейной формы на псевдоплане X равно $L(X)=9$. Среди компонент псевдоплана имеются отрицательные величины. Поэтому X не является планом и, следовательно, не определяет решения задачи.

Разложим векторы условий по векторам базиса псевдоплана X. Имеем

$$A_j=\sum_{i=1}^{4} x_{ij}A_{s_i}.$$

Решая соответствующие системы уравнений, получим матрицу

$$\|x_{ij}\|=\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & 0 & 0,\\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0,\\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 0,\\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{44}{3} & 0 & 1\end{matrix}\right\|.$$

Среди коэффициентов x_{3j} и x_{4j}, соответствующих отрицательным базисным компонентам псевдоплана, имеются отрицательные величины. Поэтому нет оснований предполагать неразрешимость задачи.

Таким образом, выбранный сопряженный базис привел нас к случаю 3°, когда имеется возможность перейти к очередному псевдоплану и уменьшить при этом значение линейной формы. Из сопряженного базиса исключается вектор $A_{s_4}=A_6$, отвечающий наибольшей по абсолютной величине отрицательной базисной компоненте псевдоплана. Вектор A_k, подлежащий включению в базис, отвечает минимуму θ_0 отношения $-\frac{\Delta_j}{x_{4j}}$ для отрицательных x_{4j}.

Параметры Δ_j вычисляются по формуле (1.13):

$$\Delta_j=\sum_{i=1}^{m} c_{s_i}x_{ij}-c_j.$$

В нашем случае

$$c_{s_1}=c_1=5,\quad c_{s_2}=c_2=-1,\quad c_{s_3}=c_5=5,\quad c_{s_4}=c_6=-1.$$

Поэтому

$$\Delta_3=5\cdot\frac{1}{3}+(-1)\frac{1}{3}+5(-1)+(-1)\left(-\frac{7}{3}\right)-(-2)=\frac{2}{3},$$

$$\Delta_4=5\cdot\frac{5}{3}+(-1)\frac{2}{3}+5(-3)+(-1)\left(-\frac{44}{3}\right)-5=\frac{7}{3}.$$

Вычислим θ_0:

$$\theta_0=\min\left(-\frac{\Delta_3}{x_{43}},\ -\frac{\Delta_4}{x_{44}}\right)=\min\left(\frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{3}},\ \frac{\frac{7}{3}}{\frac{44}{3}}\right)=\frac{7}{44}.$$

Итак, θ_0 достигается на векторе A_4. Следовательно, вектор A_4 должен быть введен в сопряженный базис вместо $A_6=A_{s_4}$. В новом базисе вектор A_4 займет четвертую позицию и в соответствии с этим будет обозначен как A_{s_4}.

Для вычисления нового псевдоплана и коэффициентов разложения векторов условий по векторам нового сопряженного базиса нужно решить системы уравнений, аналогичные предыдущим.

Получим

$$X'=\left(\frac{105}{44},\ \frac{65}{22},\ 0,\ \frac{69}{44},\ -\frac{101}{44},\ 0\right),$$

$$\|x'_{ij}\|=\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & \frac{3}{44} & 0 & 0 & \frac{5}{44}, \\ 0 & 1 & \frac{5}{22} & 0 & 0 & \frac{1}{22}, \\ 0 & 0 & -\frac{23}{44} & 0 & 1 & -\frac{9}{44}, \\ 0 & 0 & \frac{7}{44} & 1 & 0 & -\frac{3}{44} \end{matrix}\right\|$$

Значение линейной формы на псевдоплане X' равно $L(X')=\frac{235}{44}$. Знаки компоненты x_{30} псевдоплана и коэффициентов x_{3j} свидетельствуют о том, что мы снова имеем дело со случаем 3°. Исключению из базиса подлежит вектор $A_5=A_{s_3}$ с отрицательной составляющей псевдоплана. Вместо него в очередной базис вводится вектор A_3, на котором достигается

$$\theta_0=\min_{x_{3j}<0}\left(-\frac{\Delta_j}{x_{3j}}\right)=\min\left(\frac{\frac{13}{44}}{\frac{23}{44}},\ \frac{\frac{7}{44}}{\frac{9}{44}}\right)=\frac{13}{23}.$$

Все коэффициенты x''_{i0} разложения вектора ограничений B по векторам нового базиса положительны. Мы получили оптимальный план задачи:

$$X''=\left(\frac{48}{23},\ \frac{45}{23},\ \frac{101}{23},\ \frac{20}{23},\ 0,\ 0\right),$$

$$L(X'')=\frac{93}{23}.$$

2.5. Проиллюстрируем теперь на рассмотренном примере геометрическую интерпретацию решения задачи линейного программирования по методу последовательного уточнения оценок.

Построим, так же как и в п. 4.2 гл. 4, задачу, эквивалентную примеру 1, которая позволит интерпретировать основные этапы итераций в плоскости (x_1, x_2).

Эквивалентная задача формулируется следующим образом:

Требуется обратить в максимум линейную форму

$$L(X)=x_1+x_2$$

при условиях:

$$\begin{aligned}-2x_1+5x_2&\leqslant 10,\\ x_1-\ x_2&\leqslant 1,\\ x_1+2x_2&\leqslant 6,\\ 10x_1-3x_2&\leqslant 15,\\ x_1\geqslant 0,\quad x_2&\geqslant 0.\end{aligned}$$

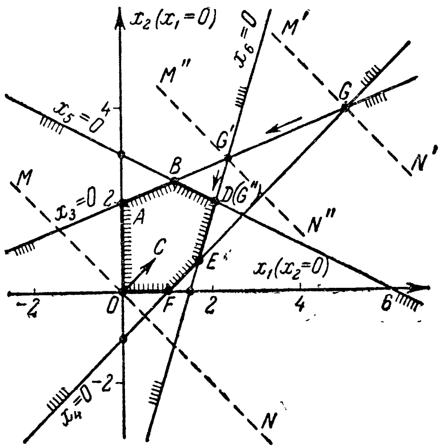


Рис. 6.1.

Эквивалентной задаче (а следовательно, и примеру 1) соответствует область определения линейной формы, изображенная на рис. 6.1. Стороны многоугольника являются отрезками прямых

$$\begin{aligned}x_1&=0,\quad x_2=0,\\ x_3&=10+2x_1-5x_2=0,\\ x_4&=\ 1-\ x_1+\ x_2=0,\\ x_5&=\ 6-\ x_1-2x_2=0,\\ x_6&=15-10x_1+3x_2=0.\end{aligned}$$

Штриховка вдоль прямой показывает полуплоскость, в которой соответствующая переменная неотрицательна. Стрелка OC определяет направление, в котором следует смещать прямую (гиперплоскость) линейной формы, чтобы увеличить значение $L(X)$.

Начальный псевдоплан $X=(5, 4, 0, 0, -7, -23)$, как легко непосредственно проверить, соответствует точке $G(5,4)$ пересечения прямых $x_3=0$ и $x_4=0$. Точка G является псевдовершиной многогранного множества M условий задачи (многоугольника $OABDEF$). Действительно, многогранный конус K_X с вершиной в точке X (в нашем случае плоский угол AGF) находится в нижней полуплоскости прямой (гиперплоскости) линейной формы $M'N'$, проведенной через точку G.

Проиллюстрируем геометрически переход к очередному псевдоплану. Прямая $x_6=0\,(x_{s_4}=0)$ разделяет псевдовершину G и многоугольник условий M. В точке G компонента $x_6=x_{s_4}=-23<0$.

Прямая $x_6=0$ пересекает конус K_X. Пересечение полуплоскости $x_6\leqslant 0$ и конуса K_X образует треугольник $GG'E$ (многогранное множество M_X). Первая вершина треугольника, которая достигается при перемещении прямой $M'N'$ параллельно самой себе в сторону убывания линейной формы, это — вершина G'. Точка $G'=\left(\frac{105}{44}, \frac{65}{22}\right)$ является псевдовершиной многоугольника M — геометрическим образом псевдоплана

$$X'=\left(\frac{105}{44}, \frac{65}{22}, 0, \frac{69}{44}, -\frac{101}{44}, 0\right).$$

Аналогичные построения позволяют, отправляясь от псевдовершины G', перейти в точку $D\,(G'')$, соответствующую псевдоплану X''. Псевдовершина D является в то же время и вершиной многоугольника условий. Поэтому псевдоплан X'' является планом, а следовательно, и решением задачи.

2.6. Рассмотрим пример, приводящий к случаю 2°, когда задача линейного программирования неразрешима.

Пример 2. Требуется обратить в максимум линейную форму

$$L(X)=5x_1+4x_2+x_3$$

при условиях:

$$\begin{aligned} x_1+2x_2-x_3 \qquad\qquad &= 2,\\ 4x_1+3x_2 \qquad +x_4 \qquad &=12,\\ 4x_1+4x_2+x_3+x_4+x_5 &=10,\\ x_j\geqslant 0,\ j=1,\ \ldots,\ 5. & \end{aligned}$$

Решение. В сопряженной задаче требуется обратить в минимум линейную форму $\tilde{L}(Y)=2y_1+12y_2+10y_3$ при условиях

$$y_1+4y_2+4y_3\geqslant 5, \tag{2.13}$$
$$2y_1+3y_2+4y_3\geqslant 4, \tag{2.14}$$
$$-y_1 \qquad + y_3\geqslant 0, \tag{2.15}$$
$$y_2+ y_3\geqslant 0, \tag{2.16}$$
$$y_3\geqslant 1. \tag{2.17}$$

Нетрудно видеть, что если в условиях (2.13), (2.14), (2.17) заменить неравенства на равенства, то решение полученной системы из трех линейно независимых уравнений будет удовлетворять условиям (2.15) и (2.16), как строгим неравенствам. Следовательно, начальный сопряженный базис можно составить из векторов условий A_1, A_2 и A_5.

Чтобы получить соответствующий псевдоплан исходной задачи и связанные с ним параметры, решим системы уравнений

$$B=\sum_{i=1}^{3} x_{i0}A_{s_i},$$

$$A_3=\sum_{i=1}^{3} x_{i3}A_{s_i},$$

$$A_4=\sum_{i=1}^{3} x_{i4}A_{s_i}.$$

Здесь $A_{s_1}=A_1$, $A_{s_2}=A_2$, $A_{s_3}=A_5$. Имеем

$$X=\left(\frac{18}{5},\ -\frac{4}{5},\ 0,\ 0,\ -\frac{6}{5}\right),$$

$$\|x_{ij}\|=\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{8}{5} & 0, \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & 0, \\ 0 & 0 & \frac{9}{5} & \frac{1}{5} & 1 \end{matrix}\right\|.$$

Базисные компоненты x_{20} и x_{30} псевдоплана X отрицательны, а коэффициенты x_{3j} разложения всех векторов условий по сопряженному базису при векторе A_3 неотрицательны.

Следовательно, имеет место случай 2°. Задача неразрешима — ее условия несовместны.

Чтобы пояснить геометрически случай 2°, заменим, как и в примере 1, рассматриваемую задачу эквивалентной задачей, из которой исключены неотрицательные переменные x_3, x_4, x_5, а условия-равенства заменены на неравенства.

Эквивалентная задача формулируется следующим образом:

Требуется обратить в максимум линейную форму

$$L(X)=4x_1+x_2$$

при условиях:

$$x_1+2x_2 \geqslant 2,$$

$$4x_1+3x_2 \leqslant 12,$$

$$x_1+3x_2 \leqslant 0,$$

$$x_1 \geqslant 0,\quad x_2 \geqslant 0.$$

Стороны многоугольника условий M, ограничивающие область изменения линейной формы задачи, определяются прямыми (рис. 6.2)

$$\begin{aligned} x_1=0,\quad x_2&=0,\\ x_3=-2+x_1+2x_2&=0,\\ x_4=12-4x_1-3x_2&=0,\\ x_5=-x_1-3x_2&=0. \end{aligned}$$

Назначение штриховки вдоль прямых и стрелки OC то же, что и в предыдущем примере.

Как легко непосредственно проверить, начальный псевдоплан $X=\left(\frac{18}{5}, -\frac{4}{5}, 0, 0, -\frac{6}{5}\right)$ соответствует точке $F\left(\frac{18}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ пересечения прямых $x_3=0$ и $x_4=0$. Конус K_X в нашем случае совпадает с плоским углом AFD. Конус K_X находится в нижней полуплоскости прямой линейной формы $M'N'$, проведенной через точку F. Следовательно, точка F — псевдовершина.

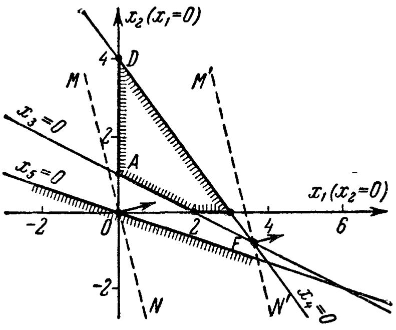


Рис. 6.2.

Прямая $x_5=0$, отвечающая отрицательной компоненте псевдоплана $\left(x_5=x_{30}=-\frac{6}{5}\right)$, не имеет общих точек с конусом K_X (с плоским углом AFD). Это возможно, как мы видели, только в том случае, если многоугольник условий — область определения задачи линейного программирования — пустое множество.

Последние рассуждения приведены только для того, чтобы проиллюстрировать случай 2° в методе последовательного уточнения оценок и его геометрическую интерпретацию. Вообще же неразрешимость примера 2° — противоречивость условий задачи — непосредственно видна как из условий эквивалентной задачи, так и из рис. 6.2.

2.7. Приведем геометрическое истолкование метода последовательного уточнения оценок, соответствующее второй геометрической интерпретации задачи линейного программирования.

В п. 1.2. гл. 3 описана геометрия пары взаимосопряженных задач линейного программирования в $(m+1)$-мерном пространстве точек $U=(u_1, \ldots, u_{m+1})$. Напомним, что расширенные векторы условий $\overline{A}_j$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ порождают в

$(m+1)$-мерном пространстве точек U выпуклый многогранный конус K, соответствующий множеству n-мерных векторов с неотрицательными компонентами. В пространстве U рассматривается, кроме того, прямая Q, для которой

$$u_i = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$
$$u_{m+1} = t, \qquad -\infty < t < \infty.$$

Планам X прямой задачи соответствуют те и только те точки U, которые принадлежат как конусу K, так и прямой Q. Оптимальному плану прямой задачи соответствует верхняя (в смысле оси Ou_{m+1}) точка пересечения прямой Q и конуса K.

Геометрическим образом множества планов сопряженной задачи в $(m+1)$-мерном пространстве точек U является совокупность гиперплоскостей, содержащих начало координат и расположенных над конусом K. (Конус K и вектор $(0, \ldots, 0, 1)$ лежат по разные стороны гиперплоскостей.) Оптимальный план сопряженной задачи соответствует гиперплоскости, проходящей через начало координат и «верхнюю» точку пересечения прямой Q с конусом K и расположенной «над» конусом K.

Поясним теперь геометрический смысл метода последовательного уточнения оценок. Расширенные векторы базиса начального опорного плана сопряженной задачи определяют гиперплоскость Π, проходящую через начало координат и расположенную над конусом K. Гиперплоскость Π содержит m расширенных векторов $\overline{A}_j$ и, следовательно, содержит некоторую m-мерную грань конуса K. Если вектор, соответствующий верхней точке пересечения прямой Q и конуса K, принадлежит указанной грани, то гиперплоскость Π определяет оптимальный план сопряженной задачи (случай 1°).

Пусть теперь прямая Q пересекает гиперплоскость Π в точке X, выше верхней точки пересечения прямой Q и конуса K. Точка X соответствует некоторому псевдоплану прямой задачи. Пусть некоторая базисная компонента x_{s_r} псевдоплана отрицательна, а все коэффициенты x_{rj} разложения векторов условий по сопряженному базису при векторе A_{s_r} неотрицательны. Это значит, что в подпространстве $u_{m+1} = 0$ можно построить гиперплоскость H_{m-1} размерности $(m-1)$, разделяющую точку B (определяемую вектором ограничений) и все точки A_j (определяемые векторами условий). Гиперплоскость H_{m-1} m-мерного пространства $u_{m+1}=0$ натянута на базисные векторы $A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_{r-1}}, A_{s_{r+1}}, \ldots, A_{s_m}$. Уравнение гиперплоскости H_{m-1} может быть записано в виде $(A, \tilde{U})=0$, где $\tilde{U}$ — произвольная точка [подпространства $u_{m+1}=0$, а вектор A ортогонален векторам $A_{s_1}, \ldots, A_{s_{r-1}}$, $A_{s_{r+1}}, \ldots, A_{s_m}$, т. е. $(A, A_{s_i})=0$ при $i=1, \ldots, r-1$, $r+1, \ldots, m$. Пусть для определенности $(A, A_{s_r})=1$. Вычислим скалярные произведения (A, A_j) и (A, B). Имеем

$$(A, A_j)=\sum_{i=1}^{m} x_{ij}(A, A_{s_i})=x_{rj}(A, A_{s_r})=x_{rj},$$

$$(A, B)=\sum_{i=1}^{m} x_{i0}(A, A_{s_i})=x_{r0}.$$

Но $x_{r0}<0$, $x_{rj}>0$. Следовательно, точки A_j и точка B лежат по разные стороны гиперплоскости $(A, \tilde{U})=0$.

Рассмотрим в $(m+1)$-мерном пространстве U гиперплоскость H_m, натянутую на векторы $A_{s_1}, \ldots, A_{s_{r-1}}, A_{s_{r+1}}, \ldots$ $\ldots, A_{s_m}$ и вектор e_{m+1}. Гиперплоскость H_m разделяет прямую Q и конус K, порождаемый расширенными векторами $\bar{A}_j$. Это следует из того, что H_{m-1} разделяет в подпространстве $u_{m+1}=0$ вектор ограничений и векторы условий задачи. Следовательно, в рассматриваемом случае прямая Q и конус K не пересекаются. Прямая задача не имеет ни одного плана (случай 2°).

Предположим теперь, что прямая Q пересекает конус. Обозначим через $\bar{A}_{s_r}$ расширенный вектор условий, отвечающий отрицательной компоненте псевдоплана. Будем поворачивать гиперплоскость П вокруг векторов $\bar{A}_{s_1}, \ldots, \bar{A}_{s_{r-1}}$, $\bar{A}_{s_{r+1}}, \ldots, \bar{A}_{s_m}$ таким образом, чтобы точка пересечения гиперплоскости и прямой Q опускалась (в смысле оси Ou_{m+1}). Поворот осуществляется до тех пор, пока гиперплоскость П в процессе вращения не захватит один из расширенных векторов $\bar{A}_j$, например $\bar{A}_k$. Векторы $\bar{A}_{s_1}, \ldots, \bar{A}_{s_{r-1}}, \bar{A}_k$, $\bar{A}_{s_{r+1}}, \ldots, \bar{A}_{s_m}$ образуют очередной сопряженный базис. Гиперплоскость $П_1$, определяемая этими векторами, соответствует новому опорному плану сопряженной задачи. Точка пересечения гиперплоскости Π_1 с прямой Q является изображением очередного псевдоплана X'. Значение линейной формы $L(X)$ на псевдоплане X' меньше, чем на псевдоплане X (точка X' расположена ниже точки X). Если проверка псевдоплана X' на оптимальность и задачи на неразрешимость не приводит к случаям 1° и 2°, следует применить к гиперплоскости Π_1 процедуру, аналогичную той, которая была применена к гиперплоскости Π на предыдущем шаге. Последовательные повороты гиперплоскостей, отвечающих очередным опорным планам сопряженной задачи, проводятся до получения гиперплоскости Π^*, пересекающей прямую Q в точке X^*, расположенной на границе конуса K. Гиперплоскость Π^* соответствует оптимальному опорному плану сопряженной задачи, а псевдоплан X^* оказывается планом и, следовательно, решением прямой задачи.

Таким образом, в методе последовательного уточнения оценок приближение к оптимальному плану прямой задачи (к крайней верхней точке пересечения прямой Q и конуса K) осуществляется не изнутри конуса, как в методе последовательного улучшения плана, а извне.

2.8. Проиллюстрируем геометрическими построениями применение метода последовательного уточнения оценок к определению оптимального плана задачи, решенной в п. 4. 3 гл. 4 методом последовательного улучшения плана.

Напомним условия задачи.

Требуется обратить в максимум линейную форму

$$L(X) = 10x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 16x_4 + 21x_5$$

при соблюдении ограничений

$$\begin{gathered} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 10x_4 + 5x_5 = 6, \\ 9x_1 + 10x_2 + 12{,}5x_3 + 18x_4 + 16{,}5x_5 = 14, \\ x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 5. \end{gathered}$$

На рис. 4.3 гл. 4 изображены векторы A_j и вектор ограничений B, соответствующие расширенные векторы задачи и прямая Q, проходящая через точку B параллельно оси Ou_3.

Плоскость Π, определяемая расширенными векторами $\overline{A}_2$ и $\overline{A}_5$, проходит через начало координат и расположена над конусом K, порожденным расширенными векторами условий задачи. Следовательно, плоскость Π является образом опорного плана сопряженной задачи, а точка B_0 пересечения плоскости Π с прямой Q соответствует псевдоплану X с базисом (A_2, A_5).

На рис. 6.3 плоскость Π, образованная расширенными векторами условий $\overline{A}_2$ и $\overline{A}_5$, выделена. Двумерные конусы (плоские углы), порожденные расширенными векторами $\overline{A}_2$ и $\overline{A}_5$ и векторами условий A_2 и A_5, заштрихованы.

Точка B_0 лежит вне заштрихованного конуса (угла) — составляющая x_2 псевдоплана X отрицательна. Поэтому вектор A_2 должен быть исключен из базиса. Поворачиваем плоскость П вокруг вектора $\overline{A}_5$ так, чтобы точка пересечения плоскости и прямой Q

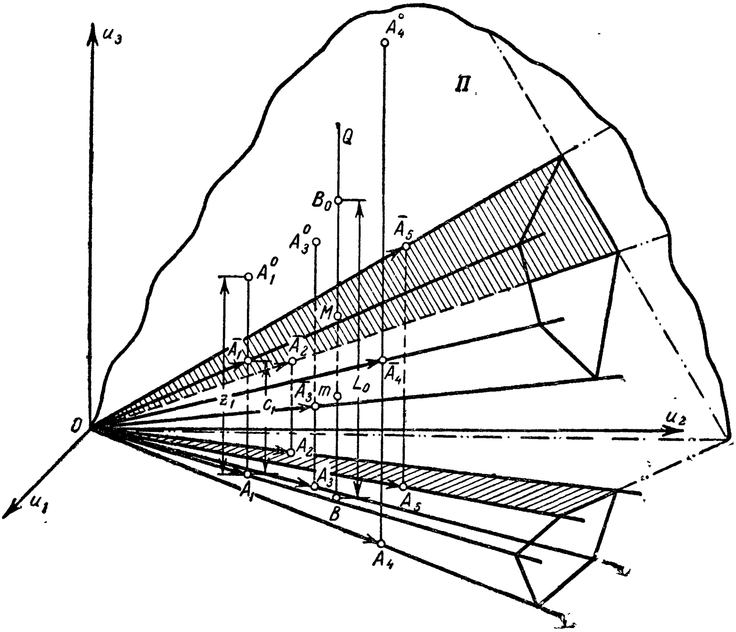


Рис. 6.3.

опускалась. Первый вектор, который будет захвачен при повороте — это вектор $\overline{A}_1$. Плоскость $П_1$, образованная векторами $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_5$, является образом очередного опорного плана задачи (рис. 6.4).

Плоскость $П_1$ пересекает прямую Q в точке B', расположенной на границе конуса K. Следовательно, точка B' является образом оптимального плана задачи. Базисные компоненты опорного решения задачи — это составляющие разложения вектора ограничений B по векторам условий A_1 и A_5. Имеем $x'_{10}=\frac{29}{21}$, $x'_{50}=\frac{2}{21}$. Следовательно, оптимальный план задачи равен

$$X'=\left(\frac{29}{21},\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{2}{21}\right).$$

Максимально достижимое значение линейной формы

$$L(X') = B'B = \frac{332}{21}.$$

Компоненты y_1, y_2 оптимального плана Y сопряженной задачи совпадают с первыми $m=2$ компонентами направляющего вектора

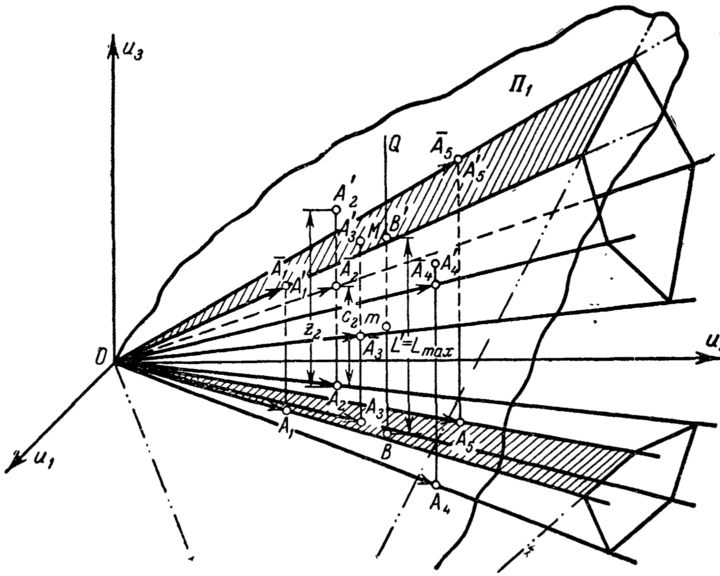


Рис. 6.4.

плоскости Π_1 (вектора $\overline{Y}=(y_1, y_2, \ldots, y_m, y_{m+1})$, ортогонального Π_1 и нормированного условием $y_{m+1}=-1$).

Уравнение плоскости Π_1 —

$$y_1u_1+y_2u_2=u_3.$$

Точки $\overline{A}_1(a_{11}, a_{21}, c_1)$ и $\overline{A}_5(a_{15}, a_{25}, c_5)$ принадлежат плоскости Π_1. Поэтому

$$y_1a_{11}+y_2a_{21}=c_1, \quad y_1a_{15}+y_2a_{25}=c_5.$$

Из этих уравнений вычисляются составляющие y_1 и y_2 решения сопряженной задачи. В нашем случае

$$\overline{A}_1=(4;\ 9;\ 10), \quad \overline{A}_5=(5;\ 16{,}5;\ 21),$$

поэтому оптимальный план сопряженной задачи совпадает с вектором $Y=\left(-\frac{24}{21}, \frac{34}{21}\right)$.

§ 3. Случай двухсторонних ограничений

3.1. Рассмотрим задачу линейного программирования с двухсторонними ограничениями, состоящую в отыскании максимума линейной формы

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{3.1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{m} A_j x_j = B, \tag{3.2}$$

$$\alpha_j \leqslant x_j \leqslant \beta_j. \tag{3.3}$$

Здесь $A_j=(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})^T$, $B=(b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$. Как обычно, ранг матрицы $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ предполагается равным m.

Задача (3.1)—(3.3) исследовалась в § 5 гл. 4, где для ее решения был использован метод последовательного улучшения плана. Как и ранее, мы не будем предполагать, что все переменные задачи ограничены с двух сторон. Некоторые из них могут иметь лишь по одной границе. В этом случае соответствующая граница (α_j или β_j) полагается бесконечной ($\alpha_j=-\infty$ или $\beta_j=\infty$).

В этом параграфе дается описание метода последовательного уточнения оценок, приспособленного к задачам с двухсторонними ограничениями.

3.2. Сформулируем задачу линейного программирования, двойственную по отношению к задаче (3.1)—(3.3). В соответствии с общими правилами составления двойственных задач (см. п. 4.1 гл. 3), эта задача заключается в минимизации линейной формы

$$\tilde{L}(Y, Z', Z'')=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i - \sum_{j\in I'} \alpha_j z_j' + \sum_{j\in I''} \beta_j z_j'' \tag{3.4}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - \delta_j' z_j' + \delta_j'' z_j'' = c_j, \qquad j=1, 2, \ldots, n; \tag{3.5}$$

$$z_j' \geqslant 0, \quad j\in I'; \quad z_j'' \geqslant 0, \quad j\in I''. \tag{3.6}$$

Здесь I' (I'') обозначает совокупность индексов j, для которых $\alpha_j > -\infty$ $(\beta_j < \infty)$,

$$\delta'_j = \begin{cases} 1, & \text{если } j \in I', \\ 0, & \text{если } j \notin I'; \end{cases}$$

$$\delta''_j = \begin{cases} 1, & \text{если } j \in I'', \\ 0, & \text{если } j \notin I''. \end{cases}$$

Проверка того, что задача (3.4)—(3.6) является двойственной по отношению к задаче (3.1)—(3.3), предоставляется читателю (см. упражнение 3).

Пусть вектор $(Y;\ Z';\ Z'')$, где

$$Y = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m), \qquad Z' = \{z'_i\}_{i \in I'}, \qquad Z'' = \{z''_i\}_{i \in I},$$

является произвольным планом двойственной задачи. Положим

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j, \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{3.7'}$$

В таком случае

$$(A_j,\ Y) - c_j = \begin{cases} \Delta_j \geqslant 0, & \text{если } j \notin I''\ (\beta_j = \infty,\ \alpha_j > -\infty), \\ \Delta_j \leqslant 0, & \text{если } j \notin I'\ (\alpha_j = -\infty,\ \beta_j < \infty). \end{cases} \tag{3.7}$$

Действительно, при $j \notin I''$ из (3.5) имеем

$$\Delta_j = \delta'_j z'_j - \delta''_j z''_j = \delta'_j z'_j \geqslant 0.$$

Второе условие системы (3.7) проверяется аналогично.

Допустим теперь, что $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ — произвольный m-мерный вектор, удовлетворяющий условиям (3.7). Тогда найдутся такие z'_j, $j \in I'$ и z''_j, $j \in I''$, что вектор $(Y,\ Z',\ Z'')$ окажется планом задачи (3.4)—(3.6). В самом деле, для этого достаточно положить

$$z'_j = \begin{cases} \Delta_j, & \text{если } \Delta_j \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } \Delta_j < 0 \end{cases} \qquad (j \in I'), \tag{3.8}$$

$$z''_j = \begin{cases} -\Delta_j, & \text{если } \Delta_j \leqslant 0, \\ 0, & \text{если } \Delta_j > 0 \end{cases} \qquad (j \in I''). \tag{3.9}$$

Если $j \notin I'$, $j \in I''$, то в соответствии с (3.7) $\Delta_j \leqslant 0$, следовательно,

$$(A_j,\ Y) - \delta'_j z'_j + \delta''_j z''_j = (A_j,\ Y) + z''_j = (A_j,\ Y) - \Delta_j = c_j.$$

Аналогично проверяется случай $j \in I'$, $j \notin I''$. При $j \in I'$, $j \in I''$ (переменная x_j прямой задачи имеет две конечные границы)

$$(A_j,\ Y) - \delta'_j z'_j + \delta''_j z''_j = (A_j,\ Y) - z'_j + z''_j.$$

Согласно определению чисел z'_j и z''_j ($j \in I'$, $j \in I''$)

$$z'_j - z''_j = \Delta_j.$$

Отсюда следует, что вектор $(Y,\ Z',\ Z'')$ удовлетворяет j-му равенству системы (3.5). Заметим, что случай $j \notin I'$, $j \notin I''$ невозможен, так как каждая переменная прямой задачи предполагается ограниченной хотя бы с одной стороны. По определению, $z'_j \geqslant 0$, $z''_j \geqslant 0$. Таким образом, вектор $(Y,\ Z',\ Z'')$ действительно является планом двойственной задачи.

При фиксированном векторе Y, удовлетворяющем условию (3.7), z'_j при $j \notin I''$ и z''_j при $j \notin I'$ определяются однозначно:

$$z'_j = \Delta_j; \quad z''_j = -\Delta_j.$$

Если же $j \in I'$, $j \in I''$, то, как мы видели, для удовлетворения j-го равенства системы (3.5) достаточно потребовать, чтобы

$$z'_j - z''_j = \Delta_j. \tag{3.10}$$

Следовательно, при наличии переменных x_j, ограниченных с двух сторон, каждому вектору Y, подчиняющемуся условиям (3.7), соответствуют несколько планов двойственной задачи.

Выберем из этих планов такой, который связан с наименьшим значением линейной формы (3.4). Для этого при любом $j \in I'$, I'' найдем неотрицательные значения z'_j и z''_j, удовлетворяющие равенству (3.10) и такие, что $-\alpha_j z'_j + \beta_j z''_j$ достигает своего условного минимума. Легко видеть, что искомые z'_j и z''_j определяются в соответствии с (3.8) и (3.9):

$$z'_j = \begin{cases} \Delta_j, & \text{если } \Delta_j \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } \Delta_j < 0; \end{cases}$$

$$z''_j = \begin{cases} -\Delta_j, & \text{если } \Delta_j \leqslant 0, \\ 0, & \text{если } \Delta_j > 0. \end{cases}$$

Итак, величины z'_j, $j \in I'$, z''_j, $j \in I''$, которые определяют вместе с фиксированным вектором Y план задачи (3.4) — (3.6), соответствующий наименьшему значению $\tilde{L}(Y, Z', Z'')$, вычисляются по формулам (3.8) и (3.9).

Подставляя найденные величины z'_j и z''_j в линейную форму двойственной задачи, имеем

$$\tilde{L}(Y) = \tilde{L}(Y, Z', Z'') = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \Delta_j, \tag{3.11}$$

где

$$\gamma_j = \begin{cases} \alpha_j, & \text{если } \Delta_j \geqslant 0, \\ \beta_j, & \text{если } \Delta_j < 0. \end{cases}$$

Поскольку нас интересуют планы сопряженной задачи, отвечающие как можно меньшему значению линейной формы (3.4), будем рассматривать лишь те из них, компоненты z'_j и z''_j которых определяются однозначно по формулам (3.8), (3.9). Учитывая это, можно вместо планов сопряженной задачи рассматривать векторы

$$Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m),$$

подчиняющиеся условиям (3.7).

3.3. Введем несколько определений.

Вектор $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, удовлетворяющий условиям (3.7), будем называть *ядром плана* задачи (3.4) — (3.6).

Учитывая определение опорного плана, данное в § 5 гл. 2, можно проверить, что вектор Y является ядром опорного плана задачи (3.4) — (3.6) в том и только в том случае, если выполняются условия (3.7) и среди векторов A_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ имеются такие m линейно независимых векторов $A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m}$, для которых

$$\Delta_{s_i} = (A_{s_i}, Y) - c_{s_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m \tag{3.12}$$

(см. упражнение 4).

Система линейно независимых векторов условий A_{s_i}, $i = 1, 2, \ldots, m$, для которых имеет место соотношение (3.12), называется *базисом* ядра Y опорного плана двойственной задачи.

Совокупность индексов векторов A_j, составляющих базис ядра Y, обозначим через I_Y. В данном случае $I_Y=(s_1, s_2, \ldots, s_m)$.

Нетрудно показать, что для невырожденности опорного плана (Y, Z', Z'') задачи (3.4) — (3.6) необходимо и достаточно, чтобы его ядро Y удовлетворяло условию

$$\Delta_j=(A_j, Y)-c_j\neq 0 \quad \text{при} \quad j\notin I_Y \tag{3.13}$$

(см. упражнение 5).

В этом параграфе двойственная задача (3.4) — (3.6) предполагается невырожденной. Поэтому ядра всех опорных планов задачи должны подчиняться требованию (3.13).

Как и в случае канонической формы задачи линейного программирования, с каждым опорным планом двойственной задачи целесообразно связать некоторый n-мерный вектор X, удовлетворяющий уравнениям (3.2).

Пусть $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ — ядро опорного плана задачи (3.4) — (3.6). Определим вектор $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, руководствуясь следующим правилом:

а) если $j\notin I_Y$, то

$$x_j=\begin{cases} \alpha_j & \text{при } \Delta_j>0, \\ \beta_j & \text{при } \Delta_j<0; \end{cases} \tag{3.14}$$

б) остальные составляющие вектора X вычисляются из соотношения

$$\sum_{j\in I_Y} x_jA_j=B-\sum_{j\notin I_Y} x_jA_j. \tag{3.15}$$

Очевидно, вектор X удовлетворяет условиям (3.2) прямой задачи.

Вектор X, связанный с ядром Y опорного плана двойственной задачи (или, точнее, с базисом этого ядра) соотношениями (3.14) и (3.15), будем называть *псевдопланом* прямой задачи (3.1) — (3.3).

Пусть X — псевдоплан, отвечающий ядру Y. Систему векторов A_j, $j\in I_Y$, составляющую базис ядра Y, будем иногда называть *базисом псевдоплана* X.

Компоненты x_j псевдоплана X при $j\in I_Y$ называются *базисными*, а остальные его составляющие — *внебазисными*.

В невырожденном случае каждому ядру опорного плана отвечает единственный базис и, следовательно, единственный псевдоплан. В вырожденном случае некоторые ядра могут иметь несколько базисов и, следовательно, соответствовать нескольким псевдопланам. Применение метода последовательного уточнения оценок к задаче с двухсторонними ограничениями сводится к движению от одного ядра опорного плана двойственной задачи к другому (или, что то же самое, от одного псевдоплана прямой задачи к другому), монотонно сокращающему значение линейной формы (3.4).

3.4. Основой описываемого метода является, как обычно, условие, позволяющее фиксировать получение решения задачи.

Признак оптимальности. *Если псевдоплан X оказывается планом прямой задачи, т. е. если все его базисные компоненты подчиняются ограничениям* (3.3), *то он является решением этой задачи. При этом соответствующий вектор Y представляет собой ядро оптимального плана двойственной задачи.*

Доказательство первой части сформулированного предложения непосредственно следует из второй формы признака оптимальности, установленного в § 5 гл. 4, поскольку согласно формулам (3.14), (3.15) план X удовлетворяет всем условиям этого признака. Нам понадобится только первая часть признака оптимальности. Что касается второй части признака, относящейся к ядру Y, то ее доказательство читатель сможет провести самостоятельно (см. упражнение 6).

Рассмотрим ядро $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ некоторого опорного плана двойственной задачи.

Пусть векторы условий $A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m}$ составляют базис этого ядра, так что $I_Y=(s_1, s_2, \ldots, s_m)$. Свяжем с ядром Y и его базисом A_j, $j\in I_Y$, псевдоплан $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в соответствии с формулами (3.14) и (3.15). Система векторов A_j, $j\in I_Y$ составляет базис псевдоплана X.

Разложим по векторам базиса псевдоплана X все векторы условий A_j и вектор

$$A_0=B-\sum_{j\notin I_Y} x_jA_j.$$

Имеем

$$A_j=\sum_{i=1}^{n} x_{ij}A_{s_i}, \qquad j=0,\ 1,\ \ldots,n. \tag{3.16}$$

Как обычно, через x_{ij} обозначен коэффициент разложения вектора A_j по базису, относящийся к вектору A_{s_i}, который занимает i-ю позицию данного базиса. В частности, при $j=0$

коэффициенты разложения (3.16) совпадают с базисными компонентами псевдоплана, т. е. $x_{s_i} = x_{i0}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. В соответствии с обозначением (3.7′)

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j,$$

где $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ — рассматриваемое ядро опорного плана двойственной задачи. По условию $\Delta_j = 0$ при $j \in I_Y$.

В § 1 было показано (см. соотношение (1.13)), что параметры Δ_j могут вычисляться также и через величины x_{ij}:

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_{s_i} x_{ij} - c_j. \tag{3.17}$$

Имея параметры x_{ij} и Δ_j, вычисляемые по данному ядру Y (или, что то же самое, по соответствующему псевдоплану X), можно установить оптимальность X (если она имеет место) или построить новый псевдоплан X', отвечающий ядру Y', которое связано с меньшим по сравнению с Y значением линейной формы (3.4). Указанные параметры позволяют также устанавливать неразрешимость прямой задачи. Как и для канонической формы задачи линейного программирования, в зависимости от соотношения знаков параметров x_{ij} и Δ_j следует различать три взаимно исключающих друг друга случая:

1° Все базисные компоненты псевдоплана X удовлетворяют ограничениям (3.3), т. е.

$$\alpha_{s_i} \leqslant x_{s_i} = x_{i0} \leqslant \beta_{s_i} \quad \text{для} \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{3.18}$$

2° Некоторые из базисных компонент не удовлетворяют условиям (3.18). При этом среди них имеется такая составляющая $x_{i0} = x_{s_i}$, что

$$x_{i0} < \alpha_{s_i},$$
$$x_{ij} \begin{cases} \geqslant 0 & \text{при } \Delta_j > 0, \\ \leqslant 0 & \text{при } \Delta_j < 0 \end{cases} \quad (j \notin I_Y) \tag{3.19}$$

либо

$$x_{i0} > \beta_{s_i},$$
$$x_{ij} \begin{cases} \leqslant 0 & \text{при } \Delta_j > 0, \\ \geqslant 0 & \text{при } \Delta_j < 0 \end{cases} \quad (j \notin I_Y). \tag{3.20}$$

3° Среди базисных компонент псевдоплана X имеются такие, которые не удовлетворяют ограничениям (3.18). Однако при $x_{i_0}<\alpha_{s_i}$ не выполняются условия (3.19), а при $x_{i_0}>\beta_{s_i}$ нарушаются требования (3.20).

Если выполняются условия (3.18), показывающие, что имеет место случай 1°, то псевдоплан X удовлетворяет требованиям признака оптимальности. Следовательно, вектор X является решением исследуемой задачи.

Для анализа двух других случаев целесообразно ввести аналог элементарного преобразования плана двойственной задачи, рассмотренного в § 1.

3.5. Как и в § 1, через $\|e_{ij}\|_m$ обозначим матрицу, составленную из коэффициентов разложения единичных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_m$ по векторам базиса ядра Y (базиса псевдоплана X). Таким образом,

$$\|e_{ij}\|_m=(A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m})^{-1}.$$

С каждым вектором условий A_{s_i}, $1\leqslant i\leqslant m$, свяжем преобразование ядра Y опорного плана двойственной задачи, определяемое соотношением

$$Y(\theta)=(y_1(\theta), y_2(\theta), \ldots, y_m(\theta))=Y+\theta e^{(i)}, \tag{3.21}$$

где $e^{(i)}=(e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{im})$ — m-мерный вектор, составленный из элементов i-й строки матрицы $\|e_{ij}\|_m$. Введенное преобразование будем называть *элементарным преобразованием, связанным с вектором* A_{s_i}.

Проследим за интересующими нас свойствами вектора $Y(\theta)$ при различных значениях θ. Для этого рассмотрим

$$\Delta_j(\theta)=\sum_{\lambda=1}^{m} a_{\lambda j}y_\lambda(\theta)-c_j.$$

В соответствии с соотношением (3.21)

$$\Delta_j(\theta)=\sum_{\lambda=1}^{m} a_{\lambda j}y_\lambda+\theta\sum_{\lambda=1}^{m} a_{\lambda j}e_{i\lambda}-c_j=\Delta_j+\theta\sum_{\lambda=1}^{m} a_{\lambda j}e_{i\lambda}. \tag{3.22}$$

Учитывая, что вектор $X_j=(x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{mj})^T$ является решением системы линейных уравнений

$$(A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m})X_j=A_j$$

(см. соотношения (3.16)), получаем

$$X_j=(A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m})^{-1}A_j=\|e_{i\lambda}\|_m A_j.$$

Отсюда

$$x_{ij}=\sum_{\lambda=1}^{m} a_{\lambda j} e_{i\lambda}, \tag{3.23}$$

$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ m; \quad j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Используя формулы (3.22) и (3.23), имеем

$$\Delta_j(\theta)=\Delta_j+\theta x_{ij}. \tag{3.24}$$

В дальнейшем нам придется различать два случая:

$$а)\ \theta \geqslant 0, \quad б)\ \theta \leqslant 0.$$

Рассмотрим случай *а*. Будем увеличивать θ от 0 до тех пор, пока все величины $\Delta_j(\theta)$ сохраняют свои знаки неизменными. Другими словами, число θ должно удовлетворять условиям

$$\Delta_j(\theta)=\Delta_j+\theta x_{ij}\begin{cases} \geqslant 0, & \text{если } \Delta_j>0, \\ \leqslant 0, & \text{если } \Delta_j<0. \end{cases}$$

(По предположению о невырожденности $\Delta_j \neq 0$ при $j \notin I_Y$.) Очевидно, первое из выписанных условий может нарушиться лишь при $x_{ij}<0$; второе — только при $x_{ij}>0$. Поэтому оба эти условия эквивалентны неравенству

$$\theta \leqslant \theta_0=\min_j\left(-\frac{\Delta_j}{x_{ij}}\right), \tag{3.25}$$

где минимум берется по всем тем j, для которых $\frac{\Delta_j}{x_{ij}}<0$, $x_{ij} \neq 0$. Если при любом $j \notin I_Y$ величины Δ_j и x_{ij} ($x_{ij} \neq 0$) имеют один и тот же знак, то $\theta_0=\infty$. Следует отметить, что в силу предположения о невырожденности плана двойственной задачи с ядром Y число $\theta_0>0$.

Итак, в первом случае

$$0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0,$$

где θ_0 определяется формулой (3.25) и полагается $\theta_0=\infty$, если совокупность индексов j, по которым берется минимум в (3.25), не содержит ни одного элемента.

Рассмотрим случай *б*. В этом случае значения θ должны быть неположительными. Здесь мы также определим предел изменения θ, гарантирующий совпадение знаков параметров

$\Delta_j(\theta)$ и Δ_j для всех $j \notin I_Y$. Рассуждения, тождественные с только что проведенными, приводят к условию

$$-\theta \leqslant \theta_0 = \min_i \frac{\Delta_j}{x_{ij}}, \tag{3.26}$$

где минимум берется по тем $j \notin I_Y$, для которых $\frac{\Delta_j}{x_{ij}} > 0$, $x_{ij} \neq 0$. При отсутствии индексов j с отмеченным свойством θ_0 полагается равным ∞.

Итак, в случае *б*

$$0 \leqslant -\theta \leqslant \theta_0,$$

где θ_0 определяется в соответствии с приведенными выше правилами. В невырожденном случае $\theta_0 > 0$.

Элементарное преобразование, связанное с вектором A_{s_i}, будет применяться при $\theta \geqslant 0$ только в случае $\alpha_{s_i} > -\infty$ и при $\theta \leqslant 0$ лишь в предположении $\beta_{s_i} < \infty$.

Из формулы (3.24) вытекает, что

$$\Delta_{s_\lambda}(\theta) = \begin{cases} 0, & \lambda \neq i \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, m), \\ \theta, & \lambda = i. \end{cases} \tag{3.27}$$

Поэтому вектор $Y(\theta)$ при θ, удовлетворяющем условию (3.25) ($\theta \geqslant 0$) либо условию (3.26) ($\theta \leqslant 0$), подчиняется требованиям неравенств (3.7). Для $j \in I_Y$ это следует из (3.27) и приведенных выше предположений о границах переменной x_{s_i}. При $j \notin I_Y$ данное утверждение вытекает из условия выбора θ_0 и справедливости соотношения (3.7) для ядра Y.

Таким образом, вектор $Y(\theta)$ является ядром некоторого плана двойственной задачи.

Вычислим значение линейной формы (3.4), отвечающее ядру $Y(\theta)$.

Применяя формулу (3.11), имеем

$$\tilde{L}(\theta) = \tilde{L}(Y(\theta)) = \sum_{\lambda=1}^{m} b_\lambda y_\lambda(\theta) - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j(\theta)\Delta_j(\theta),$$

где

$$\gamma_j(\theta) = \begin{cases} \alpha_j & \text{при } \Delta_j(\theta) \geqslant 0, \\ \beta_j & \text{при } \Delta_j(\theta) < 0. \end{cases}$$

Поскольку $\Delta_j(\theta)\Delta_j \geqslant 0$ при $j \notin I_Y$, $\Delta_{s_\lambda}(\theta) = \Delta_{s_\lambda} = 0$ для $\lambda \neq i$

и $\Delta_{s_i}(\theta)=\theta$, то

$$\gamma_j(\theta)=\begin{cases} \gamma_j, & \text{если } j\neq s_i,\\ \alpha_{s_i}(\beta_{s_i}), & \text{если } j=s_i \text{ и } \theta\geqslant 0\ (\theta<0). \end{cases} \tag{3.28}$$

Здесь величины γ_j относятся к ядру Y.

Преобразуем выражения для $\tilde{L}(\theta)$, используя соотношения (3.21), (3.23), (3.24) и (3.28):

$$\tilde{L}(\theta)=\sum_{\lambda=1}^{m} b_\lambda y_\lambda+\theta\sum_{\lambda=1}^{m} b_\lambda e_{i\lambda}-\sum_{j\notin I_Y}\gamma_j\Delta_j(\theta)-\theta\gamma_{s_i}=$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{m} b_\lambda y_\lambda-\sum_{j\notin I_Y}\gamma_j\Delta_j+\theta\left[\sum_{\lambda=1}^{m}\Big(b_\lambda-\sum_{j\notin I_Y}\gamma_j a_{\lambda j}\Big)e_{i\lambda}\right]-\gamma_{s_i}\theta.$$

В соответствии с принятыми обозначениями,

$$b_\lambda-\sum_{j\notin I_Y}\gamma_j a_{\lambda j}=b_\lambda-\sum_{j\notin I_Y}x_j a_{\lambda j}=a_{\lambda 0},$$

поэтому

$$\tilde{L}(0)=\sum_{\lambda=1}^{m} b_\lambda y_\lambda-\sum_{j\notin I_Y}\gamma_j\Delta_j+\theta\Big[\sum_{i=1}^{m} a_{\lambda_0}e_{i\lambda}-\gamma_{s_i}\Big]=$$

$$=\tilde{L}(0)+\theta(x_{i_0}-\gamma_{s_i}).$$

Итак,

$$\tilde{L}(Y(\theta))=\tilde{L}(Y)+\theta(x_{i_0}-\gamma_{s_i}). \tag{3.29}$$

Напомним, что в соответствии с формулой (3.28)

$$\gamma_{s_i}=\begin{cases} \alpha_{s_i}, & \text{если } \theta>0 \text{ (случай } a),\\ \beta_{s_i}, & \text{если } \theta<0 \text{ (случай } б). \end{cases}$$

3.6. Переходим к исследованию случаев 2° и 3°, сформулированных в п. 3.4.

1. Рассмотрим обе возможности, приводящие к случаю 2°. При некотором $i=r$ $x_{r0}<\alpha_{s_i}$, и параметры x_{rj} удовлетворяют условиям (3.19). Применим к ядру Y элементарное преобразование, связанное с вектором A_{s_r} и величиной $\theta>0$ (случай a). Поскольку $\alpha_{s_r}>x_{r0}>-\infty$, результат этого преобразования приводит к ядру $Y(\theta)$ для любого θ, $0\leqslant\theta<\theta_0$. Условия (3.19) означают, что при произвольном $j\notin I_Y$ либо $x_{rj}=0$, либо $\frac{\Delta_j}{x_{rj}}\geqslant 0$. Следовательно, $\theta_0=\infty$. Таким образом,

$Y(\theta)$ — ядро некоторого плана двойственной задачи при любом неотрицательном θ.

Применяя формулу (3.29) (при $i=r$) и учитывая, что $\gamma_{s_r}=\alpha_{s_r}$, имеем

$$\tilde{L}(Y(\theta))=\tilde{L}(Y)+\theta(x_{r0}-\alpha_{s_r}).$$

По условию, $x_{r0}-\alpha_{s_r}<0$. Следовательно,

$$\lim_{\theta\to\infty}\tilde{L}(Y(\theta))=-\infty,$$

т. е. линейная форма двойственной задачи неограничена снизу на множестве планов этой задачи. В соответствии с леммой 1.3 гл. 3 отсюда следует несовместность условий прямой задачи.

Анализ второй возможности, приводящей к случаю 2°, когда при некотором $i=r$ $x_{r0}>\beta_{s_r}$ и выполняются условия (3.20), проводится аналогично. Здесь следует обратиться к элементарному преобразованию, связанному с вектором A_{s_r} и $\theta<0$. Нетрудно видеть, что в данном случае $\theta_0=\infty$ и, следовательно, система условий прямой задачи противоречива.

Итак, наличие случая 2° указывает на неразрешимость задачи (3.1) — (3.3), что является следствием несовместности ее условий (3.2), (3.3).

2. Рассмотрим случай 3°. Выберем индекс r (номер позиции базиса ядра Y), при котором

$$а)\ x_{r0}<\alpha_{s_r},$$

либо

$$б)\ x_{r0}>\beta_{s_r}.$$

Рассмотрим случай *а*. Применим к ядру Y элементарное преобразование, связанное с вектором A_{s_r} при $\theta>0$. Поскольку случай 2° не имеет места, $\theta_0<\infty$. Пусть $Y'=Y(\theta_0)$, где величина θ_0 определяется согласно формуле (3.25), в которой индекс i заменен на r.

Допустим, что число θ_0, определяемое по формуле (3.25), достигается при $j=k$, т. е.

$$\theta_0=-\frac{\Delta_k}{x_{rk}}. \qquad (3.30)$$

Тогда $\Delta_k(\theta_0)=0$.

Из определения элементарного преобразования вытекает, что при $\lambda = 1, 2, \ldots, r-1, r+1, \ldots, m$ $\Delta_{s_\lambda}(\theta_0) = \Delta_{s_\lambda} = 0$. Следовательно,

$$\Delta_j(\theta_0) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i(\theta_0) - c_j = 0 \tag{3.31}$$

для $j = s_1, s_2, \ldots, s_{r-1}, k, s_{r+1}, \ldots, s_m$.

Рассмотрим систему векторов условий

$$A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_{r-1}}, A_k, A_{s_{r+1}}, \ldots, A_{s_m}. \tag{3.32}$$

Поскольку $x_{rk} \neq 0$ и система векторов $A_{s_1}, \ldots, A_{s_{r-1}}, A_{s_r}, A_{s_{r+1}}, \ldots, A_{s_m}$, составляющая базис псевдоплана X, линейно независима, то, согласно теореме 2.1 гл. 4, система (3.32) также линейно независима. Отсюда, учитывая равенства (3.31), получаем, что Y' — ядро опорного плана двойственной задачи. Базис ядра Y' образуется из базиса ядра Y путем замены вектора A_{s_r} на вектор A_k, где k определяется из соотношения (3.30).

В силу предположения о невырожденности задачи

$$\Delta_j(\theta_0) \neq 0 \quad \text{при} \quad j \notin I_{Y'}.$$

Следовательно, равенство (3.30) возможно только при единственном значении $j = k$. Поэтому в невырожденном случае условие (3.30) определяет номер k вводимого в базис вектора однозначно.

Согласно формуле (3.29)

$$\tilde{L}(Y') = \tilde{L}(Y) + \theta_0 (x_{r0} - \alpha_{s_r}). \tag{3.33}$$

Как уже отмечалось, в невырожденном случае $\theta_0 > 0$. Следовательно,

$$\tilde{L}(Y') < \tilde{L}(Y).$$

Итак, при наличии возможности *а* случая 3° элементарное преобразование, связанное с вектором A_{s_r} $(x_{r0} < \alpha_{s_r})$ и $\theta > 0$, приводит к ядру Y' опорного плана двойственной задачи, отвечающего меньшему значению линейной формы (3.4).

Рассмотрим вторую возможность (случай *б*), когда $x_{r0} > \beta_{s_r}$. В этом случае используется элементарное преобразование, связанное с вектором A_{s_r} при $\theta < 0$. Рассуждения, полностью совпадающие с уже проведенными, показывают, что вектор

$$Y' = Y(-\theta_0)$$

является ядром опорного плана двойственной задачи. Базис ядра Y' образуется из системы векторов A_j, $j \in I_Y$, путем замены вектора A_{s_r} на вектор A_k. В данном случае индекс k вектора A_k, подлежащего вводу в базис, разыскивается из условия

$$\frac{\Delta_k}{x_{rk}} = \theta_0, \tag{3.34}$$

где θ_0 вычисляется по формуле (3.26).

Изменение линейной формы двойственной задачи, связанное с переходом от Y к Y', определяется равенством

$$\tilde{L}(Y') = \tilde{L}(Y) - \theta_0 (x_{r0} - \beta_{s_r}), \tag{3.35}$$

откуда, учитывая неравенства $\theta_0 > 0$ и $x_{r0} - \beta_{s_r} > 0$, получаем

$$\tilde{L}(Y') < \tilde{L}(Y).$$

Таким образом, выполнение условий случая 3° обеспечивает возможность перехода от имеющегося ядра опорного плана двойственной задачи к ядру другого опорного плана этой задачи, связанного с меньшим значением линейной формы (3.4).

Пусть X' — псевдоплан прямой задачи, связанный с ядром Y' и базисом $I_{Y'}$. Можно говорить о переходе от псевдоплана X к псевдоплану X'. Базис псевдоплана X' $(A_j, j \in I_{Y'})$ образуется из базиса псевдоплана X $(A_j, j \in I_Y)$ заменой вектора A_{s_r} на вектор A_k. Индекс k вводимого вектора определяется в случае *а* формулой (3.30), а в случае *б* соотношением (3.34). Внебазисные компоненты x_j псевдоплана X' при $j \neq s_r$ совпадают с соответствующими составляющими псевдоплана X, а

$$x_{s_r} = \begin{cases} \alpha_{s_r} \text{ (в случае } a), \\ \beta_{s_r} \text{ (в случае } б). \end{cases}$$

Базисные компоненты X' могут быть определены из соотношения (3.15), в котором I_Y заменено на $I_{Y'}$. Заметим, что

$$\tilde{L}(Y) = L(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \tag{3.36}$$

где X — псевдоплан прямой задачи, связанный с ядром Y опорного плана задачи (3.4) — (3.6). Доказательство равенства (3.36) предоставляется читателю (см. упражнение 7).

3.7. Метод последовательного уточнения оценок применительно к задаче с двухсторонними ограничениями состоит в последовательном движении по псевдопланам прямой задачи.

Метод складывается из однотипных итераций (шагов). Каждая итерация разбивается на два этапа. На первом этапе производится проверка условий, определяющих случай 1° или 2°. Если имеет место один из этих случаев, процесс решения заканчивается. Если же имеет место случай 3°, то переходят ко второму этапу итерации, на котором строится новый псевдоплан, связанный с меньшим значением линейной формы (3.1).

Последовательные итерации проводятся до тех пор, пока не будет получено искомое решение (случай 1°), либо установлена неразрешимость задачи (случай 2°).

В невырожденном случае каждая итерация приводит к уменьшению линейной формы (3.1) или, что то же самое, в силу равенства (3.36), к уменьшению линейной формы (3.4). Поэтому возвращение к уже раз пройденному псевдоплану исключено. Учитывая, далее, конечность числа различных псевдопланов прямой задачи, приходим к выводу о конечности метода. В следующем параграфе тот же вывод будет сделан и для вырожденного случая.

Из приведенного описания метода видно, что наличие двухсторонних ограничений почти не отражается на трудоемкости отдельной итерации. Это обстоятельство станет еще более очевидным после ознакомления с алгоритмами, реализующими метод, изложению которых посвящены пп. 5.5 и 6.5.

Отметим одно существенное достоинство метода последовательного уточнения оценок. Оно связано с определением исходного псевдоплана прямой задачи (или ядра опорного плана двойственной задачи). Допустим, что все переменные x_j прямой задачи ограничены с обеих сторон конечными числами. В таком случае $I' = I'' = (1, 2, \ldots, n)$. Поэтому условия (3.7), выполнение которых необходимо и достаточно для того, чтобы вектор $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ был ядром некоторого плана двойственной задачи, перестают служить ограничениями для выбора Y.

При сформулированных предположениях любой m-мерный вектор $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ является ядром плана задачи

(3.4) — (3.6). Таким образом, в данном случае произвольная линейно независимая система m векторов условий может быть принята в качестве базиса ядра опорного плана двойственной задачи или псевдоплана прямой задачи.

Итак, при наличии конечных двухсторонних ограничений для каждой переменной выбор исходного псевдоплана сводится к отысканию произвольной линейно независимой системы, состоящей из m векторов условий A_j.

Если при использовании метода последовательного улучшения плана наличие двухсторонних ограничений усложняло процесс отыскания первого приближения, то в методе уточнения оценок это обстоятельство, наоборот, существенно облегчает определение данных, необходимых для начала процесса решения.

Сделаем еще одно замечание. При определении элементарного преобразования мы выбирали число θ_0 из условия первого обращения в нуль параметров $\Delta_j(\theta)$ для $j \notin I_Y$. Такое правило приводит к движению по соседним вершинам многогранного множества, определяемого условиями двойственной задачи. Однако может оказаться, что при дальнейшем увеличении θ вектор $Y(\theta)$ остается ядром плана задачи (3.4) — (3.6), а линейная форма (3.4) продолжает уменьшаться. В таком случае целесообразно превзойти предел θ_0. При реализации этой идеи трудоемкость отдельной итерации несколько увеличится. Однако число итераций при этом обычно сокращается. Дело в том, что в данном случае мы проходим сразу несколько вершин многогранного множества условий двойственной задачи. Такой подход тесно связан с так называемыми кусочно-линейными задачами [130], [31].

3.8. В заключение повторим вкратце последовательность действий, связанных с проведением отдельной итерации метода.

Перед началом очередной итерации имеется псевдоплан X с базисом $(A_{s_1}, \ldots, A_{s_m})$ и отвечающие ему параметры x_{ij} и Δ_j. Первый этап итерации начинается с проверки псевдоплана X на оптимальность. Если все базисные компоненты X удовлетворяют условиям (3.3), имеем случай 1°, и процесс заканчивается отысканием оптимального плана прямой задачи (план X).

При наличии базисных компонент, выходящих за свои границы, следует с помощью параметров x_{ij} и Δ_j проверить условия, соответствующие случаю 2° (см формулы (3.19) и (3.20). Если эти условия оказываются выполненными, процесс решения заканчивается установлением неразрешимости задачи. В противном случае переходят ко второму этапу итерации.

Среди векторов базиса псевдоплана X, соответствующих базисным компонентам, расположенным вне своих границ, выбирается произвольный вектор A_{s_r}. Этот вектор подлежит исключению из базиса. Выбор вектора A_k, заменяющего в новом базисе вектор A_{s_r}, производится по различным правилам, в зависимости от того, за какую из своих границ вышла базисная компонента x_{r0}. Если $x_{r0} < \alpha_{s_r}$, то индекс k определяется формулой (3.30), причем θ_0 вычисляется из соотношения (3.25). Если $x_{r0} > \beta_{s_r}$, то искомый индекс отыскивается из условий (3.34), где θ_0 определяется соотношением (3.26).

Новый псевдоплан X' и отвечающие ему параметры x'_{ij} и Δ'_j могут быть вычислены по старым данным с помощью простых рекуррентных соотношений (см. п. 5.5).

Две различные численные реализации описанного здесь метода приводятся в пп. 5.5 и 6.5.

§ 4. Вырожденность

4.1. Описание метода последовательного уточнения оценок проводилось до сих пор в предположении о невырожденности сопряженной задачи. В настоящем параграфе мы освободимся от этого ограничительного допущения. Отметим затруднения, которые могут возникнуть в вырожденном случае при реализации метода уточнения оценок. Для простоты ограничимся задачей линейного программирования, записанной в канонической форме (1.1)—(1.3).

Пусть $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ — произвольный опорный план двойственной задачи (1.4), (1.5) с базисом $A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m}$. Базис невырожденного плана Y, составленный из векторов A_j, $j \in I_Y = (s_1, s_2, \ldots, s_m)$, определяется однозначно. Если же план Y оказывается вырожденным, т. е. некоторые из

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j$$

при $j \notin I_Y$ равны нулю, то он может иметь несколько базисов. Нетрудно проверить, что число таких базисов ограничено величиной $C_{m+\nu}^{\nu}$, где ν — количество индексов $j \notin I_Y$, для которых $\Delta_j = 0$. При этом существуют задачи, в которых приведенная оценка достигается (см. упражнение 8). В соответствии с определением псевдоплана каждому базису опорного плана Y двойственной задачи отвечает псевдоплан прямой задачи с тем же базисом. Таким образом, вырожденному опорному плану двойственной задачи соответствуют, вообще говоря, несколько псевдопланов прямой задачи.

Проследим за выполнением отдельной итерации метода уточнения оценок и отметим те места, в которых было использовано предположение о невырожденности сопряженной задачи.

На первом этапе итерации в таком предположении не было необходимости. На втором этапе мы дважды воспользовались невырожденностью сопряженной задачи:

1) при вычислении значения θ_0,

2) при выборе вектора A_k, подлежащего вводу в базис.

Остановимся вкратце на каждом из этих моментов.

1. Величина θ_0 вычисляется по формуле (1.23):

$$\theta_0 = \min_{x_{rj}<0} \left(-\frac{\Delta_j}{x_{ij}} \right).$$

При вырожденном опорном плане Y может случиться, что для некоторых $j \notin I_Y$

$$x_{rj} < 0, \quad \text{а} \quad \Delta_j = 0,$$

и, следовательно, число θ_0 окажется равным нулю. Если $\theta_0 = 0$, то новый опорный план Y' совпадает со старым планом Y. В результате итерации мы лишь переходим к другому базису плана Y. Естественно, что линейная форма двойственной задачи сохранит при этом свое прежнее значение.

В терминах прямой задачи результатом данной итерации является переход от псевдоплана X к псевдоплану X'. Псевдопланы X и X' связаны с двумя различными базисами одного и того же опорного плана Y двойственной задачи. Поэтому значения линейной формы прямой задачи на этих планах одинаковы.

Если в течение нескольких итераций значение θ_0 остается равным нулю, то процесс решения в пределах этих итераций состоит в движении по псевдопланам прямой задачи, отвечающим одному и тому же опорному плану двойственной задачи. Величина линейной формы остается при этом неизменной, поэтому не исключена возможность возвращения к уже раз пройденному псевдоплану, т. е. возможность образования цикла.

Пример задачи линейного программирования, при решении которой методом уточнения оценок возникает цикл, был впервые построен Билом. Мы не будем проводить специальное исследование, устанавливающее возможность и характер зацикливания в методе уточнения оценок, подобно тому как это было сделано для метода улучшения плана в § 9 гл. 5.

Как уже отмечалось, решение прямой задачи методом последовательного уточнения оценок эквивалентно применению метода последовательного улучшения плана к двойственной задаче (подробнее об этом см. в § 8). Поэтому каждому примеру цикла метода улучшения плана соответствует пример цикла метода уточнения оценок, и наоборот.

Действительно, предположим, что при решении некоторой задачи (задача A) методом улучшения плана образовался цикл. Рассмотрим задачу линейного программирования (задача B), сопряженную с задачей A. Приведем задачу B к канонической форме и применим к ней метод уточнения оценок.

Псевдопланы задачи B, которые соответствуют опорным планам задачи A, составляющим указанный цикл, образуют цикл метода уточнения оценок в задаче B.

Таким образом, все результаты, установленные в § 9 гл. 5 для метода улучшения плана, переносятся на метод уточнения оценок. Следовательно, образование цикла при решении задачи линейного программирования методом уточнения оценок вполне возможно; минимальная длина такого цикла составляет шесть итераций.

Итак, в вырожденном случае величины θ_0 иногда обращаются в нуль, что может привести к возникновению цикла.

2. Выбор вектора A_k, подлежащего включению в базис, осуществляется в соответствии с формулой

$$-\frac{\Delta_k}{x_{rk}} = \theta_0 = \min_{x_{rj}<0}\left(-\frac{\Delta_j}{x_{rj}}\right). \tag{4.1}$$

Как уже отмечалось, в случае невырожденности плана Y' двойственной задачи — результата элементарного преобразования плана Y при $\theta=\theta_0$ — индекс k определяется условием (4.1) однозначно. Если же план Y' вырожденный, т. е.

$$\Delta'_j=\Delta_j(\theta_0)=\Delta_j+\theta_0 x_{rj}=0$$

для нескольких значений $j\in I_Y$, то соотношение (4.1) оказывается, вообще говоря, недостаточным для однозначного выбора вектора, подлежащего вводу в базис.

Выбирая в качестве A_k произвольный вектор условий из числа векторов, удовлетворяющих соотношению (4.1), можно получить цикл. Однако при некотором усовершенствовании (дополнении) правила отыскания вводимого вектора этот вектор определяется однозначно, и опасность зацикливания полностью исключается.

4.2. Прежде чем перейти к установлению дополненного правила, выявим геометрический смысл явления вырожденности в методе уточнения оценок. Как обычно, начнем с первой геометрической интерпретации.

Рассмотрим псевдоплан X, отвечающий опорному плану двойственной задачи. Пусть система векторов условий A_j при $j\in I_Y = (s_1, s_2, \ldots, s_m)$ образует базис плана Y, который является также базисом псевдоплана X. В соответствии с формулой (2.2) многогранный конус K_X, введенный в п. 2.1, расположен в нижнем полупространстве гиперплоскости линейной формы (1.1) (гиперплоскости Π_X), проходящей через точку X. Согласно той же формуле (2.2) условие $\Delta_l=0\,(l\notin I_Y)$ геометрически означает, что ребро конуса K_X, образованное пересечением гиперплоскостей (1.2) и $x_j=0$ при $j\notin I_Y$, $j\neq l$, принадлежит гиперплоскости Π_X. Поэтому геометрический смысл невырожденности опорного плана Y двойственной задачи состоит в том, что конус K_X и гиперплоскость Π_X имеют единственную общую точку — точку X.

Допустим теперь, что опорный план Y вырожденный. Рассмотрим многогранное множество M_X, являющееся общей частью конуса K_X и полупространства $x_{s_r} \leqslant 0$ (вектор A_{s_r} подлежит удалению из базиса). Поскольку в вырожденном случае часть ребер конуса K_X расположена в гиперплоскости Π_X, может случиться, что некоторые из вершин многогранного множества M_X (исключая вершину X, которая всегда содержится в Π_X) попадут на гиперплоскость Π_X. Очевидно, все эти вершины являются псевдопланами прямой задачи, связанными с одним и тем же значением линейной формы (1.1).

В п. 2.2 было выяснено, что геометрическим образом псевдоплана X' — результата итерации, улучшающей псевдоплан X, — является вершина многогранного множества M_X, наименее удаленная от гиперплоскости Π_X. В данном случае многогранное множество M_X имеет вершины (отличные от X), которые расположены на гиперплоскости Π_X. Очередная итерация приведет нас к одной из этих вершин. Естественно, что такое преобразование нисколько не повлияет на величину линейной формы (1.1). Если при выборе вершины X', расположенной в гиперплоскости Π_X, не придерживаться определенных правил, то может случиться, что через несколько итераций мы возвратимся в исходную точку X, т. е. получим цикл.

Обратимся ко второй геометрической интерпретации метода уточнения оценок (см. п. 2.7). Здесь образом опорного плана Y двойственной задачи является гиперплоскость Π, натянутая на расширенные векторы базиса этого плана: $\overline{A}_{s_1}, \overline{A}_{s_2}, \ldots, \overline{A}_{s_m}$. Условие невырожденности плана Y означает, что при любом $j \notin I_Y$ расширенный вектор условий $\overline{A}_j$ расположен строго под гиперплоскостью Π. В вырожденном случае некоторые из векторов $\overline{A}_j$, $j \notin I_Y$, могут принадлежать гиперплоскости Π. Как указывалось в п. 2.7, геометрический смысл итерации метода состоит в повороте гиперплоскости Π относительно векторов $\overline{A}_{s_1}, \overline{A}_{s_2}, \ldots, \overline{A}_{s_{r-1}}, \overline{A}_{s_{r+1}}, \ldots, \overline{A}_{s_{m-1}}, \overline{A}_{s_m}$ до первой встречи с одним из векторов $\overline{A}_j$, где $j \notin I_Y = (s_1, s_2, \ldots, s_m)$. Поворот должен производиться так, чтобы вектор $\overline{A}_{s_r}$ оказался под гиперплоскостью. Вектор $\overline{A}_k$, оказавшийся во вновь полученной гиперплоскости Π', заменяет в расширенном базисе нового опорного плана Y' вектор $\overline{A}_{s_r}$. Гиперплоскость Π' является геометрическим образом нового опорного плана Y'. Геометрически очевидно, что в случае невырожденности плана Y гиперплоскость Π' не совпадает с гиперплоскостью Π, т. е. $Y' \neq Y$. При наличии вырожденной ситуации может случиться, что в результате сколь угодно малого поворота, отвечающего данной итерации, вектор $\overline{A}_k$ ($k \notin I_Y$) оказывается над полученной гиперплоскостью. В этом случае новый опорный план Y' совпадает с исходным планом Y. Результат итерации состоит лишь в изменении базиса плана Y.

Геометрический смысл вырожденности позволяет не только уяснить более полно сущность этого явления, но и подсказывает пути устранения основной опасности, связанной с вырожденностью, —

возможности возникновения цикла. Наиболее отчетливо это следует из первой геометрической интерпретации. Как мы видели, невырожденность двойственной задачи (1.4), (1.5) в терминах первой геометрической интерпретации означает, что любая гиперплоскость вида

$$(C,\ X)=\text{const}$$

пересекает не более одной псевдовершины многогранного множества условий задачи (1.1)—(1.3). Геометрически очевидно, что этому условию можно удовлетворить за счет некоторого достаточно малого изменения коэффициентов c_j линейной формы (1.1). Эта мысль является основой для построения и обоснования правила выбора вектора, вводимого в базис, которое полностью исключает опасность зацикливания.

4.3. Перейдем к установлению правила выбора вектора, вводимого в базис. Учитывая, что каноническая форма задачи линейного программирования является частным случаем задачи с двухсторонними ограничениями, будем проводить все рассуждения применительно к задаче (3.1)—(3.3).

Пусть ε — произвольное положительное число.

Рассмотрим следующую задачу с двухсторонними ограничениями: Требуется обратить в максимум линейную форму

$$\sum_{j=1}^{n} c_j(\varepsilon)\,x_j \tag{4.2}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} A_j x_j = B, \tag{4.3}$$

$$\alpha_j \leqslant x_j \leqslant \beta_j. \tag{4.4}$$

Здесь

$$c_j(\varepsilon)=c_j+(-1)^{\nu_j}\varepsilon^{n+1-j},\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{4.5}$$

$$\nu_j=\begin{cases} 1, \text{ если } 1\leqslant j\leqslant m, \text{ либо } x_j^{(0)}=\alpha_j, \\ 0, \text{ если } x_j^{(0)}=\beta_j,\ j\geqslant m+1. \end{cases} \tag{4.6}$$

Величины $x_j^{(0)}$, фигурирующие в формуле (4.6), составляют псевдоплан $X_0=(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ \ldots,\ x_n^{(0)})$ задачи (3.1)—(3.3) с базисом A_1, $A_2,\ \ldots,\ A_m$.

Сформулированная задача отличается от задачи (3.1)—(3.3) только коэффициентами линейной формы, которые образуются из соответствующих коэффициентов c_j по формуле (4.5) с помощью параметра ε. Будем в дальнейшем задачи вида (4.2)—(4.4) называть ε-задачами, отвечающими задаче (3.1)—(3.3). Обоснование правила для определения вектора, подлежащего вводу в базис, опирается на три утверждения относительно ε-задач.

Теорема 4.1. *Существует такое* $\varepsilon_1>0$, *что если вектор* $X_0=(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ \ldots,\ x_n^{(0)})$ — *псевдоплан задачи* (3.1)—(3.3) *с базисом*

$A_1, A_2, \ldots, A_m$, *то этот вектор является также псевдопланом* ε*-задачи* (4.2)—(4.4) *при любом положительном* $\varepsilon < \varepsilon_1$.

Доказательство. Пусть

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^{(0)} A_i, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

В таком случае параметры $\Delta_j(\varepsilon)$, отвечающие ε-задаче (4.2)—(4.4) и системе векторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$, имеют вид

$$\Delta_j(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{m} c_i(\varepsilon)\, x_{ij}^{(0)} - c_j(\varepsilon) =$$

$$= \Delta_j - (-1)^{\nu_j} \varepsilon^{n+1-j} + \sum_{i=1}^{m} (-1)^{\nu_i} \varepsilon^{n+1-i} x_{ij}^{(0)}. \tag{4.7}$$

Пусть

$$\zeta = \max_{m+1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{m} | x_{ij}^{(0)} |.$$

Выберем число ε_1 из условия

$$\varepsilon_1 = \min \left\{ 1, \frac{1}{\zeta} \right\}. \tag{4.8}$$

В таком случае при $\varepsilon < \varepsilon_1$

$$\left| \sum_{i=1}^{m} (-1)^{\nu_j} \varepsilon^{n+1-i} x_{ij}^{(0)} \right| \leqslant \varepsilon^{n+1-m} \sum_{i=1}^{m} \varepsilon^{m-i} |x_{ij}^{(0)}| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^{n+1-m} \zeta < \varepsilon^{n-m}. \tag{4.9}$$

Приведенные неравенства являются прямым следствием соотношения (4.8), определяющего число ε_1.

Учитывая равенство (4.7) (при $j \geqslant m+1$) и неравенство (4.9), имеем

$$\Delta_j(\varepsilon) \begin{cases} > \Delta_j, & \text{если } \nu_j = 1, \\ < \Delta_j, & \text{если } \nu_j = 0. \end{cases} \tag{4.10}$$

Поскольку вектор X_0 является псевдопланом задачи (3.1)—(3.3) с базисом $A_1, A_2, \ldots, A_m$, то

$$\Delta_j \begin{cases} \geqslant 0, & \text{если } x_j^0 = \alpha_j, \\ \leqslant 0, & \text{если } x_j^{(0)} = \beta_j \end{cases}$$

(см. соотношение (3.14)).

Отсюда, используя условия (4.6) и (4.10), получаем

$$\Delta_j(\varepsilon) \begin{cases} > \Delta_j \geqslant 0, & \text{если } x_j^{(0)} = \alpha_j, \\ < \Delta_j \leqslant 0, & \text{если } x_j^{(0)} = \beta_j, \end{cases} \tag{4.11}$$

$$m+1 \leqslant j \leqslant n.$$

В соответствии с соотношением (3.14), неравенства (4.11) означают, что вектор X_0 является псевдопланом ε-задачи (4.2)—(4.4). Теорема 4.1 доказана.

Теорема 4.2. *Существует такое число $\varepsilon_2 > 0$, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ задача, сопряженная с задачей (4.2) — (4.4), является невырожденной.*

Доказательство. Пусть $A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m}$ — произвольная линейно независимая система векторов условий. Совокупность индексов этих векторов обозначим через I. Разложим остальные векторы условий A_j по данной системе

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^{(I)} A_{s_i} \tag{4.12}$$

и положим

$$\Delta_j^{(I)}(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{m} c_{s_i}(\varepsilon)\, x_{ij}^{(I)} - c_j(\varepsilon). \tag{4.13}$$

Учитывая соотношение (4.5), делаем вывод о том, что $\Delta_i^{(I)}(\varepsilon)$ при любом $j \notin I$ является полиномом степени не выше чем n. Полином $\Delta_j^{(I)}(\varepsilon) \neq \text{const}$, так как содержит ε^{n+1-j}. Следовательно, число корней этого полинома не превышает n.

Пусть наименьшим положительным корнем полинома $\Delta_j^{(I)}(\varepsilon)$ является число $\eta_j^{(I)} > 0$. Положим

$$\eta^{(I)} = \min_{j \notin I} \eta_j^{(I)} > 0.$$

Величина $\eta^{(I)} > 0$ определяется системой линейно независимых векторов A_j, $j \in I$. Число таких систем конечно. Поэтому величина

$$\varepsilon_2 = \min_{I} \eta^{(I)} > 0.$$

Предположим, что $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$. Рассмотрим произвольный псевдоплан X задачи (4.2)—(4.4) с базисом, составленным из векторов A_j, $j \in I_X$. В соответствии с формулами (4.12) и (4.13), в которых I заменено на I_X, вычислим параметры $\Delta_j^{(I_X)}(\varepsilon)$ этого плана.

По условию, наименьший положительный корень полинома $\Delta_j^{(I_X)}(\varepsilon)$, $j \notin I_X$ расположен правее ε_2. Следовательно,

$$\Delta_j^{(I_X)}(\varepsilon) \neq 0 \text{ при } 0 < \varepsilon < \varepsilon_2.$$

Итак, параметры $\Delta_j^{(I_X)}(\varepsilon)$ $(j \notin I_X)$ произвольного псевдоплана X задачи (4.2)—(4.4) отличны от нуля. По определению, это означает, что задача, двойственная по отношению к задаче (4.2)—(4.4), является невырожденной.

Теорема 4.2 доказана.

Теорема 4.3. *Существует такое* $\varepsilon_3 > 0$, *что если*

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_3$$

и X — произвольный псевдоплан ε-задачи, то этот вектор является также псевдопланом задачи (3.1)—(3.3) *с тем же самым базисом. При этом, если X — оптимальный план задачи* (4.2)—(4.4), *он оказывается решением исходной задачи* (3.1)—(3.3).

Доказательство. Рассмотрим произвольную линейно независимую систему из m векторов A_j, $j \in I$. В соответствии с формулами (4.12), (4.13), вычислим параметры

$$\Delta_j^{(I)} = \Delta_j^{(I)}(0), \quad j \notin I.$$

Пусть

$$\Delta^{(I)} = \min_{\Delta_j^{(I)} \neq 0} |\Delta_j^{(I)}|$$

(если все $\Delta_j^{(I)} = 0$, то $\Delta^{(I)} = \infty$). Положим

$$\Delta = \min_I \Delta^{(I)} > 0, \tag{4.14}$$

где минимум берется по всевозможным линейно независимым системам A_j, $j \in I$. Введем, далее, величину

$$\sigma = \max_I \left[1 + \sum_{i=1}^{m} |x_{ij}^{(I)}|\right] < \infty, \tag{4.15}$$

где параметры $x_{ij}^{(I)}$ определяются формулой (4.12), а максимум берется опять-таки по всевозможным системам A_j, $j \in I$.

Число ε_3, фигурирующее в условии теоремы, может быть теперь вычислено по формуле

$$\varepsilon_3 = \min\left\{1, \frac{\Delta}{\sigma}\right\} > 0, \tag{4.16}$$

где Δ и σ определяются соотношениями (4.14) и (4.15) соответственно.

Покажем, что величина ε_3, определяемая формулой (4.16), действительно удовлетворяет условиям теоремы 4.3. Для этого, положив $0 < \varepsilon < \varepsilon_3$, рассмотрим произвольный псевдоплан X задачи (4.2)—(4.4).

Пусть базис псевдоплана X состоит из векторов A_j, $j \in I_X = (s_1, s_2, \ldots, s_m)$. По условию,

$$\Delta_j^{(I_X)}(\varepsilon) \begin{cases} \geqslant 0 \text{ при } x_j = \alpha_j, \\ \leqslant 0 \text{ при } x_j = \beta_j, \end{cases} \quad j \notin I_X. \tag{4.17}$$

В соответствии с формулой (4.7),

$$\Delta_j^{(I_X)}(\varepsilon) = \Delta_j^{(I_X)} - (-1)^{\nu_j} \varepsilon^{n+1-j} + \sum_{i=1}^{m} (-1)^{\nu_{s_i}} \varepsilon^{n+1-s_i} x_{ij}^{(I_X)}. \tag{4.18}$$

Из соотношений (4.18) и (4.15) вытекает, что

$$\left|\Delta_j^{(^I X)}(\varepsilon)-\Delta_j^{(^I X)}\right|\leqslant\varepsilon\sigma.$$

Пусть $\Delta_j<0$. В таком случае

$$\Delta_j(\varepsilon)\leqslant\Delta_j+\varepsilon\sigma\leqslant-\Delta+\varepsilon\sigma<-\Delta+\varepsilon_3\sigma\leqslant 0.$$

В приведенной цепочке соотношений второе неравенство следует из формулы (4.14), третье неравенство — из предположения относительно ε, четвертое неравенство вытекает из определения ε_3 (см. формулу (4.16)).

Итак, при $\Delta_j<0$ величина $\Delta_j(\varepsilon)<0$. Аналогично проверяется, что при $\Delta_j>0$ параметр $\Delta_j(\varepsilon)$ также положителен.

Теперь уже не представляет труда показать, что вектор X является псевдопланом задачи (3.1)—(3.3) с базисом A_{s_1}, A_{s_2}, ..., A_{s_m}.

Действительно,

$$\Delta_j\geqslant 0 \quad \text{при} \quad x_j=\alpha_j,$$

поскольку противное повлекло бы за собой неравенство $\Delta_j(\varepsilon)<0$, которое противоречит условиям (4.17). По тем же причинам при $x_j=\beta_j$

$$\Delta_j\leqslant 0.$$

Следовательно, вектор X, удовлетворяя условиям (3.2) и (3.14), является псевдопланом задачи (3.1)—(3.3).

Для завершения доказательства теоремы нам осталось показать, что псевдоплан X, являющийся планом задачи (4.2)—(4.4) (а значит, и оптимальным планом этой задачи), оказывается решением задачи (3.1)—(3.3).

По доказанному, X — псевдоплан задачи (3.1)—(3.3). По условию, вектор X является также планом этой задачи. Следовательно, в соответствии с признаком оптимальности вектор X — решение задачи (3.1)—(3.3).

Теорема доказана.

4.4. Теперь мы в состоянии перенести метод последовательного уточнения оценок на произвольную задачу с двухсторонними ограничениями, не связывая себя предположением о невырожденности соответствующей двойственной задачи.

Вместо задачи (3.1)—(3.3) рассмотрим связанную с ней ε-задачу (4.2)—(4.4) при

$$0<\varepsilon<\varepsilon_0=\min\{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3\}.$$

Положительные числа ε_1, ε_2, ε_3 фигурируют в условиях теорем 4.1, 4.2, 4.3 соответственно.

Предположим, что X_0 — псевдоплан задачи (3.1)—(3.3) с базисом A_1, A_2, ..., A_m. Согласно теореме 4.1 ($\varepsilon<\varepsilon_1$) вектор X_0 является также псевдопланом ε-задачи с тем же самым базисом.

Отправляясь от псевдоплана X_0 как от исходного, приступим к решению ε-задачи (4.2)—(4.4). В силу теоремы 4.2 эта задача является невырожденной ($\varepsilon<\varepsilon_2$). Поэтому в результате конечного числа итераций, пройдя через псевдопланы $X_1, \ldots, X_{N-1}$, мы получим решение X_N задачи (4.2)—(4.4).

В соответствии с теоремой 4.3 ($\varepsilon < \varepsilon_3$), векторы X_i, $1 \leqslant i \leqslant N$ являются псевдопланами задачи (3.1)—(3.3), причем последний вектор X_N цепочки представляет собой решение этой задачи.

Таким образом, процесс решения задачи (4.2)—(4.4) методом уточнения оценок при достаточно малом положительном ε приводит к движению по псевдопланам исходной задачи (3.1)—(3.3), которое завершается построением искомого оптимального плана.

Проследим за этим движением на примере отдельной итерации, состоящей в переходе от псевдоплана X к псевдоплану X'. Вектор X является псевдопланом как исходной задачи (3.1)—(3.3), так и ε-задачи (4.2)—(4.4). Очевидно, вектор X необходимо рассматривать в качестве псевдоплана ε-задачи только в процессе выбора вектора A_k, подлежащего включению в новый базис.

Как и при описании метода уточнения оценок для задач с двухсторонними ограничениями, здесь целесообразно различать две возможности.

1. Из базиса выводится вектор A_{s_r}, причем

$$x_{r0} < \alpha_{s_r}.$$

В этом случае индекс k вектора A_k, подлежащего включению в новый базис, определяется соотношением

$$-\frac{\Delta_k(\varepsilon)}{x_{rk}} = \min_{j \in E}\left(-\frac{\Delta_j(\varepsilon)}{x_{rj}}\right). \tag{4.19}$$

Здесь через E обозначена совокупность индексов j, для которых

$$-\frac{\Delta_j(\varepsilon)}{x_{rj}} > 0, \quad x_{rj} \neq 0,$$

или, что то же самое, для которых

$$x_{rj}\begin{cases} < 0 & \text{при } x_j = \alpha_j, \quad j \notin I_X, \\ > 0 & \text{при } x_j = \beta_j, \quad j \notin I_X. \end{cases}$$

Базис псевдоплана X состоит из векторов $A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m}$. Поэтому в соответствии с формулой (4.7) соотношение (4.19) может быть преобразовано к виду

$$-\frac{\Delta_k}{x_{rk}} + \frac{(-1)^{\nu_k}}{x_{rk}}\varepsilon^{n+1-k} - \sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^{\nu_{s_i}}x_{ik}}{x_{rk}}\varepsilon^{n+1-s_i} =$$
$$= \min_{j \in E}\left(-\frac{\Delta_j}{x_{rj}} + \frac{(-1)^{\nu_j}}{x_{rj}}\varepsilon^{n+1-j} - \sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^{\nu_{s_i}}x_{ij}}{x_{rj}}\varepsilon^{n+1-s_i}\right). \tag{4.20}$$

Поскольку ε предполагается сколь угодно малым положительным числом, то отыскание искомого минимума в соотношении (4.20) и индекса, на котором он достигается, сводится к последовательному сравнению коэффициентов при различных степенях ε: при

$\varepsilon^0=1$, ε, ε^2, $\ldots$, ε^n. Этот путь приводит нас к следующему правилу определения индекса k.

Объединим в множество E_1 те индексы j, на которых достигается

$$\theta_0=\min_{j\in E}\left(-\frac{\Delta_j}{x_{rj}}\right)$$

(сравнение коэффициентов при $\varepsilon^0=1$). Если E_1 состоит из единственного индекса, то он принимается в качестве искомого индекса k. В противном случае процесс поиска индекса k продолжается. Чтобы избежать сложных обозначений, предположим, что

$$s_1<s_2<\ldots<s_m.$$

Этого всегда можно добиться за счет соответствующей перенумерации позиций базиса.

Обозначим через ε_1 совокупность индексов $j\in E_1$, которые превосходят s_m. В множестве ε_1 выделим подмножество $\bar{\varepsilon}_1$, состоящее из таких индексов $j\in\varepsilon_1$, для которых

$$\frac{(-1)^{\nu_j}}{x_{rj}}<0.$$

Если $\bar{\varepsilon}_1$ содержит хотя бы один индекс, то

$$k=\max_{j\in\varepsilon_1} j.$$

Если $\bar{\varepsilon}_1$ — пустое множество, причем $E_1=\varepsilon_1$, то

$$k=\min_{j\in\varepsilon_1=E_1} j.$$

Если же оба эти условия не выполняются, т. е. $\bar{\varepsilon}_1$ — пустое множество и $E_1\neq\varepsilon_1$, то образуется множество E_2. Это множество составляется из таких индексов $j\in E_1$, на которых достигается

$$\min_{j\in E_1-\varepsilon_1}\frac{(-1)^{\nu_{s_m}+1}x_{mj}}{x_{rj}}.$$

Естественно, что в случае, если ε_1 — пустое множество, никаких промежуточных операций между построением E_1 и E_2 не производится.

Заметим, что правило перехода от E_1 к E_2 основывается на сравнении коэффициентов при ε^{n+1-j} для $j\geqslant s_m$ ($j\in E_1$). Если множество E_2 содержит единственный индекс, то он принимается в качестве k. В противном случае осуществляется следующий шаг процесса, состоящий в переходе от E_2 к E_3. При этом руководствуются теми же правилами, что и при переходе от E_1 к E_2. Отличие состоит лишь в том, что индекс s_m заменяется на s_{m-1}. Если в процессе построения множества E_3 индекс k все еще не найден, то производится переход от E_3 к E_4. Последовательные переходы осуществляются до выделения индекса k или исчерпания всех множеств E_i, число которых, очевидно, равно $m+1$.

Если последнее множество E_{m+1} содержит несколько элементов, то индекс k определяется следующим образом.

Выделяется множество $\bar{\varepsilon}_1$, состоящее из таких индексов $j \in E_{m+1}$, для которых

$$\frac{(-1)^{\nu_j}}{x_{rj}} < 0.$$

Если $\bar{\varepsilon}_1$ содержит хотя бы один элемент, то

$$k = \max_{j \in \bar{\varepsilon}_1} j.$$

В противном случае

$$k = \min_{j \in E_{m+1}} j.$$

Этот последний шаг процесса поиска индекса k связан со сравнением коэффициентов при ε^{n+1-j} для $j < s_1$.

Итак, индекс вводимого в базис вектора A_k определяется не более чем за $m+2$ шагов.

2. Обратимся ко второму случаю, когда

$$x_{r0} > \beta_{s_r}.$$

В этом случае индекс k вектора A_k, подлежащего вводу в новый базис, определяется из соотношения

$$\frac{\Delta_k(\varepsilon)}{x_{rk}} = \min_{j \notin E} \frac{\Delta_j(\varepsilon)}{x_{rj}}, \tag{4.21}$$

где E состоит из таких индексов j, для которых

$$x_{rj} \begin{cases} > 0 & \text{при} \quad x_j = \alpha_j, \quad j \notin I_X, \\ < 0 & \text{при} \quad x_j = \beta_j, \quad j \notin I_X. \end{cases}$$

Из соотношения (4.21) и формулы (4.7) получаем, что при достаточно малых положительных значениях ε на индексе k достигается

$$\theta_0(\varepsilon) = \min\left(\frac{\Delta_j}{x_{rj}} - \frac{(-1)^{\nu_j}}{x_{rj}}\varepsilon^{n+1-j} + \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^{\nu_{s_i}} x_{ij}}{x_{rj}} \varepsilon^{n+1-s_i}\right). \tag{4.22}$$

Из соотношения (4.22) легко выводится правило определения индекса k, аналогичное тому, которое было описано для первого случая. Поскольку минимизируемые выражения в формулах (4.20) и (4.22) отличаются только знаком, то для отыскания индекса k можно воспользоваться уже описанным правилом, если x_{rj} заменить на

$$\bar{x}_{rj} = -x_{rj}.$$

Проведенный анализ показывает, что процесс решения ε-задачи (4.2)—(4.4) при достаточно малом ε эквивалентен процессу решения задачи (3.1)—(3.3), в котором используется описанное выше правило отыскания вектора, подлежащего вводу в новый базис. Следовательно, применение этого правила гарантирует конечность метода последовательного уточнения оценок независимо от свойств решаемой задачи.

4.5. В заключение параграфа вернемся к задаче (1.1)—(1.3), записанной в канонической форме. В данном случае $\alpha_j=0$, $\beta_j=\infty$ для всех $j=1, 2, \ldots, n$. Поэтому вторая возможность здесь нереализуема, а множество E состоит из индексов j, для которых $x_{rj}<0$. Отметим также, что в рассматриваемом случае $\nu_j=1$ для всех $j=1, 2, \ldots, n$. В силу этих особенностей задачи (1.1)—(1.3) правило выбора индекса k принимает следующий вид.

Обозначим через E_1 совокупность индексов j, на которых достигается

$$\theta_0=\min_{x_{rj}<0}\left(-\frac{\Delta_j}{x_{rj}}\right).$$

Если индекс k еще не определен (E_1 содержит несколько элементов), то приступаем к следующему шагу. Если все индексы $j\in E_1$ превосходят s_m, то

$$k=\min_{j\in E_1} j.$$

В противном случае строим множество E_2, объединяя в него те индексы j, на которых достигается

$$\min_{\substack{j\in E_1\\ j<s_m}}\frac{x_{mj}}{x_{rj}}.$$

Для пояснения этой части правила достаточно заметить, что при решении задачи (1.1)—(1.3) множества $\bar{\varepsilon}_i$ всегда оказываются пустыми.

Если множество E_2 содержит только один элемент, то он принимается в качестве искомого индекса k. Если же это условие не выполняется, то приступаем к осуществлению следующего шага, который завершается определением k, либо построением множества индексов E_3, содержащего более одного элемента. Правило проведения данного шага совпадает с уже описанным правилом, с тем лишь отличием, что индекс s_m заменяется на s_{m-1}, а x_{mj} на $x_{m-1,j}$. Напомним, что согласно предположению, сделанному выше, $s_1<s_2<\ldots<s_{m-1}<s_m$. Последовательные шаги осуществляются либо до определения индекса k, либо до построения множества E_{m+1}. В последнем случае индекс k определяется как наименьший из $j\in E_{m+1}$:

$$k=\min_{j\in E_{m+1}} j.$$

Сформулированное правило отыскания индекса k вектора A_k, подлежащего вводу в базис, исключает возможность возвращения к пройденному ранее псевдоплану. Таким образом, использование этого правила дает полную гарантию от зацикливания.

§ 5. Первый алгоритм метода последовательного уточнения оценок

5.1. Метод последовательного уточнения оценок может быть, так же как и метод последовательного улучшения плана, реализован в виде двух различных вычислительных схем. Различие между вычислительными схемами (алгоритмами метода) основано на разных способах вычисления параметров Δ_j.

В настоящем параграфе излагается вычислительная схема первого алгоритма применительно к канонической форме задачи линейного программирования и к задаче с двусторонними ограничениями. Использование алгоритма иллюстрируется примерами.

При решении задачи линейного программирования по методу последовательного уточнения оценок начальный опорный план сопряженной задачи (точнее, начальный сопряженный базис) предполагается известным.

При использовании первого алгоритма вычисление оптимального плана невырожденной задачи линейного программирования производится по следующей схеме. Базис начального опорного плана сопряженной задачи принимается в качестве базиса псевдоплана X прямой задачи. Разлагая вектор ограничений по векторам сопряженного базиса, получают базисные компоненты x_{i0} псевдоплана X. Знаки x_{i0} позволяют установить, является ли полученный псевдоплан планом задачи. Если имеет место случай 1°, то начальный опорный план сопряженной задачи оказывается ее решением, а начальный псевдоплан — оптимальным планом прямой задачи. При наличии отрицательных компонент x_{i0} следует вычислить коэффициенты x_{ij} разложения векторов условий по сопряженному базису. Если для некоторого $x_{r0}<0$ все $x_{rj}\geqslant 0$, задача неразрешима (случай 2°). Процесс решения задачи заканчивается в этом случае установлением противоречивости ее условий.

Если имеет место случай 3°, то переходят ко второму этапу итерации. По формулам (1.11) вычисляются параметры Δ_j. Затем устанавливается номер вектора, который должен быть исключен из сопряженного базиса, и вектор условий, который должен занять его место в базисе. С вновь полученным сопряженным базисом на следующей итерации производятся те же операции и проводится тот же анализ, что и на предыдущем шаге. Параметры x_{i_0}, x_{ij} и Δ_j вычисляются по соответствующим параметрам предыдущего шага по тем же рекуррентным формулам (1.12) гл. 5, что и в первом алгоритме метода последовательного улучшения плана. Вычисления продолжаются до получения оптимального плана или до установления неразрешимости задачи. Процесс решения укладывается в конечное число шагов.

Как видим, вычислительная схема первого алгоритма метода последовательного уточнения оценок весьма схожа с вычислительной схемой первого алгоритма метода последовательного улучшения плана. Близки друг другу и формы записи параметров итераций в таблицах.

Различие между методами, по существу, заключается в том, что в одном случае производится последовательный переход от исследуемого опорного плана задачи к соседнему, а в другом случае от одного псевдоплана к очередному псевдоплану. В первом случае мы перемещаемся по базисам прямой задачи, а во втором случае по базисам сопряженной задачи. Формальное различие между вычислительными схемами проявляется только в правилах перехода от рассматриваемого базиса к следующему и в признаках оптимальности плана и неразрешимости задачи. В методе улучшения плана вначале определяется вектор, подлежащий вводу в базис, а затем — вектор, исключаемый из базиса. В методе уточнения оценок, наоборот, выбор вводимого в базис вектора производится после определения вектора, удаляемого из базиса. Отсюда и некоторое различие в таблицах первых алгоритмов обоих методов.

Сравнивая таблицу l первого алгоритма метода последовательного уточнения оценок (табл. 6.1) с соответствующей таблицей § 2 гл. 5, замечаем, что единственное отличие в структуре таблиц заключается в том, что вместо столбца θ здесь появляется строка θ. Столбец θ в таблицах метода улучшения плана служил для выбора вектора, исключаемого из базиса. Строка θ в таблицах метода уточнения оценок предназначена для определения вектора, подлежащего включению в сопряженный базис.

Столбец $Б_X$ таблицы l содержит векторы A_{s_i} базиса псевдоплана $X^{(l)}$. В столбец C_X помещаются коэффициенты линейной формы при базисных компонентах псевдоплана $X^{(l)}$. В столбцах A_0 и A_j ($j=1, 2, \ldots, n$) записываются соответ-

Таблица 6.1

Таблица l

№	C_X	$Б_X$	A_0	A_1	A_2	...	A_k	...	A_n
1	c_{s_1}	A_{s_1}	$x_{10}^{(l)}$	$x_{11}^{(l)}$	$x_{12}^{(l)}$	...	$x_{1k}^{(l)}$	...	$x_{1n}^{(l)}$
2	c_{s_2}	A_{s_2}	$x_{20}^{(l)}$	$x_{21}^{(l)}$	$x_{22}^{(l)}$	...	$x_{2k}^{(l)}$	...	$x_{2n}^{(l)}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	...	⋮
r	c_{s_r}	A_{s_r}	$x_{r0}^{(l)}$	$x_{r1}^{(l)}$	$x_{r2}^{(l)}$	...	$x_{rk}^{(l)}$	...	$x_{rn}^{(l)}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	...	⋮
m	c_{s_m}	A_{s_m}	$x_{m0}^{(l)}$	$x_{m1}^{(l)}$	$x_{m2}^{(l)}$	...	$x_{mk}^{(l)}$	...	$x_{mn}^{(l)}$
$m+1$	—	Δ	$L^{(l)}$	$\Delta_1^{(l)}$	$\Delta_2^{(l)}$	...	$\Delta_k^{(l)}$		$\Delta_n^{(l)}$
$m+2$	—	θ	—			...	$\theta_0^{(l)}$	...	

ственно коэффициенты разложения вектора ограничений и векторов условий по базису псевдоплана $X^{(l)}$. Элементы $x_{i0}^{(l)}$ столбца $A_0 = B$ — это базисные компоненты псевдоплана $X^{(l)}$.

Строка $m+1$ таблицы l заполняется параметрами $\Delta_j^{(l)}$, связанными с коэффициентами $x_{ij}^{(l)}$ и c_j формулами (1.11). В соответствии с занимаемой позицией в таблице l параметры $\Delta_j^{(l)}$ целесообразно обозначать, как и в методе улучшения плана, через $x_{m+1,\,j}^{(l)}$. Как и прежде,

$$x_{m+1,\,0}^{(l)} = L\,(X^{(l)}) = L^{(l)}.$$

Столбцы $A_0, A_1, \ldots, A_n$ (позиции 1, 2, ..., $m+1$) называются главной частью таблицы l. Элементы $\theta^{(l)}$ строки $m+2$

вычисляются по формуле

$$\theta_j^{(l)} = -\frac{\Delta_j^{(l)}}{x_{rj}^{(l)}}.$$

Здесь r — позиция вектора, подлежащего исключению из базиса ($x_{r0}<0$). В строке $\theta^{(l)}$ заполняются лишь позиции j, для которых $x_{rj}<0$. Остальные позиции строки прочеркиваются.

Итерация l завершается заполнением главной части таблицы l. На первом этапе $(l+1)$-й итерации выясняется, какой из трех случаев имеет место. В случае 3° переходят ко второму этапу итерации. На втором этапе устанавливается позиция r вектора, исключаемого из базиса, вычисляется строка $\theta^{(l)}$, определяется вектор A_k, подлежащий вводу в базис, и заполняется главная часть таблицы $(l+1)$. Элементы главной части таблицы $(l+1)$ вычисляются по главной части предыдущей таблицы при помощи рекуррентных формул

$$x_{ij}^{(l+1)} = \begin{cases} x_{ij}^{(l)} - \dfrac{x_{rj}^{(l)}}{x_{rk}^{(l)}}\, x_{ik}^{(l)} & \text{при} \quad i \neq r, \\[2ex] \dfrac{x_{rj}^{(l)}}{x_{rk}^{(l)}} & \text{при} \quad i = r, \end{cases} \tag{5.1}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m, m+1; \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Исключению из базиса псевдоплана подлежит вектор A_{s_r} с максимальной по абсолютной величине отрицательной базисной компонентой x_{s_r}. В базис должен быть введен вектор A_k, на котором достигается

$$\theta_0^{(l)} = \min_{x_{rj}^{(l)} < 0} \theta_j^{(l)} = \min \left(-\frac{\Delta_j^{(l)}}{x_{rj}^{(l)}} \right).$$

В невырожденных задачах вектор A_k, подлежащий включению в очередной сопряженный базис, определяется этим условием однозначно. Правило выбора вектора A_k в вырожденных задачах будет изложено в п. 5.2. Позиции базиса, в которых расположены вектор, введенный в базис на предыдущем шаге, и вектор, подлежащий замене, отмечаются стрелками. Элемент θ_0 строки θ обводится рамкой. Направляющая строка (r) и направляющий столбец (k) таблицы выделяются.

Переход от таблицы $(l+1)$ к таблице $(l+2)$ производится по тем же правилам, по которым таблица l преобразовывалась в таблицу $(l+1)$.

Контроль вычислений осуществляется так же, как и в первом алгоритме метода последовательного улучшения плана. Через определенное количество итераций параметры $\Delta_j = x_{m+1, j}$ вычисляются не только по рекуррентным формулам, но и непосредственно из соотношений (1.11).

Трудоемкость каждой итерации в первом алгоритме метода последовательного уточнения оценок примерно такая же, как и для итераций первого алгоритма метода последовательного улучшения плана. Число умножений в обоих случаях одинаково (преобразования главных частей таблиц обоих алгоритмов проводятся по одним и тем же рекуррентным формулам). Операция деления встречается при вычислении θ и преобразовании направляющей строки. В методе улучшения плана число делений не превышает n. В методе уточнения оценок число делений не больше $2(n-m)$.

Приведенные данные, к сожалению, не дают представления о сравнительной трудоемкости решения общей задачи линейного программирования по каждому из описанных методов. В настоящее время нет статистических и тем более теоретических оснований, позволяющих сравнивать число итераций, необходимых для решения одной и той же задачи при помощи метода улучшения плана и посредством метода уточнения оценок.

На рис. 6.5 изображена блок-схема решения задачи линейного программирования по первому алгоритму метода последовательного уточнения оценок.

5.2. При описании алгоритма сопряженная задача предполагалась невырожденной. Такое допущение обеспечивает однозначный выбор вектора, вводимого в базис.

В § 4 (п. 4.3) сформулировано и обосновано правило, гарантирующее от зацикливания в процессе решения задачи методом уточнения оценок. Рассмотрим реализацию этого правила применительно к первому алгоритму.

Векторы условий нумеруются так, чтобы начальный базис состоял из векторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Принятая нумерация векторов условий A_j сохраняется на протяжении всего процесса решения задачи.

Пусть при некоторой итерации в строке θ минимальная величина θ_0 достигается сразу на нескольких векторах

$$\theta_0 = -\frac{\Delta_{k_1}}{x_{rk_1}} = -\frac{\Delta_{k_2}}{x_{rk_2}} = \ldots = -\frac{\Delta_{k_t}}{x_{rk_t}},$$
$$k_1 < k_2 < \ldots < k_t;$$

при этом $x_{rk_i} < 0$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$.

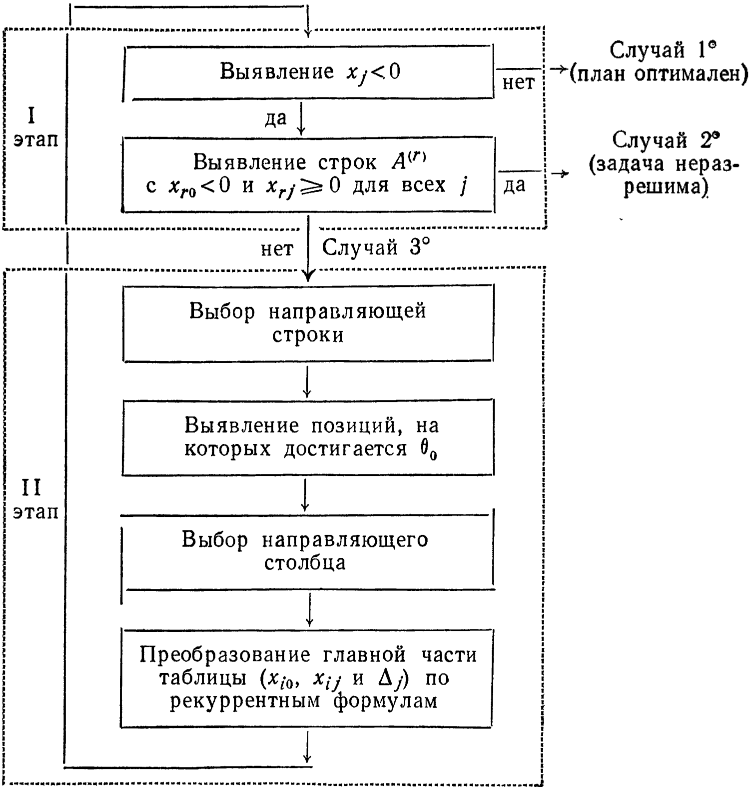


Рис. 6.5.

Будем называть векторы $A_{k_1}, \ldots, A_{k_t}$ ***подозрительными*** векторами. Один из них подлежит вводу в базис очередного псевдоплана.

Пусть s_{p_1} — наибольший среди индексов $s_1, \ldots, s_m$ векторов текущего базиса. В очередной базис вводится A_{k_1}, если $k_i > s_{p_1}$ для $i = 1, 2, \ldots, t$. Если это условие не выполняется, то совокупность подозрительных векторов суживается и дальнейшей проверке подлежат только векторы, номера которых не превышают s_{p_1}. Для этих векторов строится строка

$$\theta_1 = \left(\frac{x_{p_1 j}}{x_{rj}}\right).$$

Вектор, на котором достигается

$$\theta_{10} = \min \theta_1$$

(если он единственный), подлежит вводу в базис. Если θ_{10} также достигается на нескольких векторах, то из них образуется новое множество подозрительных векторов. Пусть s_{p_2} — второй по величине индекс вектора текущего базиса. В базис вводится вектор с наименьшим номером, если нет подозрительного вектора с номером меньшим, чем s_{p_2}. Если это условие не выполняется, то множество подозрительных векторов снова суживается и в дальнейшем проверяются лишь векторы с номерами, меньшими s_{p_2}. Для них строится строка

$$\theta_2 = \left(\frac{x_{p_2 j}}{x_{rj}}\right),$$

минимальные элементы которой определяют следующее множество подозрительных векторов. Процесс продолжается до тех пор, пока множество подозрительных векторов не окажется состоящим из единственного элемента. Ясно, что потребуется не более m шагов для однозначного выделения вектора, подлежащего вводу в базис.

Рассмотрим пример использования приведенного правила.

В таблице 6.2 зафиксированы коэффициенты разложения вектора ограничений и векторов условий по базису некоторого псевдоплана, полученному на одном из шагов решения задачи методом последовательного уточнения оценок.

Как видим, минимальное значение строки θ, равное двум ($\theta_0 = 2$), достигается сразу на пяти векторах

$$A_1,\ A_4,\ A_6,\ A_9,\ A_{12}.$$

В данном случае $r=3$, так что $\theta_j = -\frac{\Delta_j}{x_{3j}}$. Среди векторов базиса вектор $A_{s_4} = A_{11}$ обладает наибольшим номером. Поэтому вектор A_{12} исключается из числа подозрительных векторов. Вектор условий A_{11} занимает в базисе четвертую позицию. Вычислим для оставшихся подозрительных векторов элементы строки θ_1 — отношения $\frac{x_{4j}}{x_{3j}}$. Наименьшее значение в строке θ_1 достигается на векторах A_1, A_6 и A_9.

Таблица 6.3

№	$Б_X$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}
1	A_7	3	−15			7	−1	−4	−1	−8	6			−9
2	A_{10}	−1	5		−1	−4	5	2		−2	1	−1		−2
3	A_2	−5	−5	1	−3	−3	2	−2		−1	−1			−1
4	A_{11}	−2	−15			−12	3	−6		4	−3		−1	−5
Δ	–		10	–	9	6	4	4	–	5	2	–	–	2
θ	–	–	**2**	–	3	**2**	—	**2**	–	5	**2**	–	–	**2**
θ_1	–	–	**3**	–	–	4	–	**3**	–	–	**3**	–	–	–
θ_2	–	–	**−1**	–	–	–	–	**−1**	–	–	**−1**	–	–	–
θ_3	–	–	3	–	–	–	–	**2**	–	–	–	–	–	–

Второй по величине индекс вектора базиса равен $s_2 = 10$. Номера всех оставшихся подозрительных векторов меньше десяти. Вычислим элементы строки $\theta_2=\left(\frac{x_{2j}}{x_{3j}}\right)$ для $j=1$, 6, 9. Все три значения θ_2 равны между собой. Продолжая описанную процедуру, исключаем из рассмотрения вектор A_9, так как его номер превышает третий по величине индекс вектора базиса $A_{s_1}=A_7$. Остается два подозрительных вектора A_1 и A_6. Строка θ_3 позволяет, наконец, установить номер вектора, подлежащего включению в базис. Это вектор A_6, на котором достигается

$$\theta_{30}=\min\left(\frac{x_{11}}{x_{31}},\ \frac{x_{16}}{x_{36}}\right)=\min(3,\ 2)=2.$$

Таким образом, метод последовательного уточнения оценок может с одинаковым успехом применяться как в невырожденном, так и в вырожденном случаях. Вырожденность сопряженной задачи лишь усложняет выбор вектора A_k, вводимого в базис. Однако число итераций, несмотря на отсутствие, вообще говоря, монотонного убывания линейной формы, всегда остается конечным.

Следует отметить, что при решении практических задач методом уточнения оценок, так же как и при использовании метода улучшения плана, получение цикла весьма маловероятно. Более того, построение примеров зацикливания требует известной изощренности. Между тем изложенный способ выбора вектора A_k, гарантирующий от зацикливания, сравнительно сложен. Поэтому следует рекомендовать в практических расчетах пренебрегать сложным правилом и пользоваться более простыми приемами выбора вектора, подлежащего вводу в базис. Одно из таких правил состоит, например, в том, чтобы вводить в базис подозрительный вектор с наименьшим (или наибольшим) порядковым номером. В подавляющем большинстве случаев указанное элементарное правило делает невозможным возврат к уже раз пройденному базису. В тех редких случаях, когда упрощенное правило приведет к циклу, следует, начиная с пройденного дважды базиса, перейти к строгому правилу и придерживаться его до перехода к базису псевдоплана, для которого значение линейной формы уменьшится. После этого следует вновь вернуться к упрощенному правилу однозначного выбора вектора, подлежащего вводу в базис.

Необходимо иметь в виду, что каждый раз при переходе от упрощенного правила к строгому следует перенумеровывать векторы условий так, чтобы исследуемый базис состоял из векторов A_1, A_2, ..., A_m, и придерживаться этой нумерации по крайней мере до первого уменьшения линейной формы задачи.

5.3. Проиллюстрируем решение задач линейного программирования по методу последовательного уточнения оценок на двух примерах.

Пример 1. Требуется обратить в максимум линейную форму

$$L(X) = -(3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 + 2x_6 + 5x_7)$$

при условиях:

$$\begin{aligned}
2x_1 + 3x_3 + 2x_6 - x_8 &= 10,\\
4x_2 + 3x_5 + x_6 - x_9 &= 4,\\
x_2 + 5x_3 + 4x_5 + 5x_7 - x_{10} &= 2,\\
3x_1 + 2x_4 + 3x_6 - x_{11} &= 5,\\
2x_3 + 4x_4 + 3x_7 - x_{12} &= 3,
\end{aligned}$$

$$x_j \geqslant 0; \quad j = 1, 2, \ldots, 12.$$

Решение. Сопряженная задача формулируется следующим образом:

Требуется обратить в минимум линейную форму

$$\tilde{L}(Y) = 10y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 5y_4 + 3y_5$$

при условиях:

$$\begin{aligned}
2y_1 + 3y_4 &\geqslant -3,\\
4y_2 + y_3 &\geqslant -1,\\
3y_1 + 5y_3 + 2y_5 &\geqslant -2,\\
2y_4 + 4y_5 &\geqslant -3,\\
3y_2 + 4y_3 &\geqslant -1,\\
2y_1 + y_2 + 3y_4 &\geqslant -2,\\
5y_3 + 3y_5 &\geqslant -5,
\end{aligned}$$

$$y_i \leqslant 0; \quad i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Как видим, $Y = (0, 0, 0, 0, 0)$ является опорным планом сопряженной задачи. Вектор Y обращает в равенства последние $m = 5$ условий:

$$y_i = 0;$$

остальным условиям сопряженной задачи Y удовлетворяет как строгим неравенствам. Базис опорного плана Y сопряженной задачи состоит из векторов условий

$$A_8 = (-1, 0, 0, 0, 0), \quad A_9 = (0, -1, 0, 0, 0),$$
$$A_{10} = (0, 0, -1, 0, 0), \; A_{11} = (0, 0, 0, -1, 0), \; A_{12} = (0, 0, 0, 0, -1).$$

Таблицы 6.3 (0—3)

№	C_X	$Б_X$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	Номер таблицы
	C			—3	—1	—2	—3	—1	—2	—5						
← 1		A_8	—10	—2		—3			—2		1					0
2		A_9	—4		—4			—3	—1			1				
3		A_{10}	—2		—1	—5		—4		—5			1			
4		A_{11}	—5	—3			—2		—3					1		
5		A_{12}	—3			—2	—4			—3					1	
6	—	Δ		3	1	2	3	1	2	5						
7	—	θ	—	1,5	—	0,667	—	—	1	—	—	—	—	—	—	
→ 1	—2	A_3	3,333	0,667		1			0,667		—0,333					1
2		A_9	—4		—4			—3	—1			1				
3		A_{10}	14,667	3,333	—1			—4	3,333	—5	—1,667		1			
← 4		A_{11}	—5	—3			—2		—3					1		
5		A_{12}	3,667	1,333			—4		1,333	—3	—0,667				1	
6	—	Δ	—6,661	1,667	1		3	1	0,667	5	0,667					
7	—	θ	—	0,556	—	—	1,5	—	0,222	—	—	—	—	—	—	

Продолжение

		C			-3	-1	-2	-3	-1	-2	-5						
	№	C_X	$Б_X$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	Номер таблицы
	1	—2	A_3	2,222			1	—0,444				—0,333			0,222		2
←	2		A_9	—2,333	1	—4		0,667	—3				1		—0,333		
	3		A_{10}	9,111		—1		—2,222	—4		—5	—1,667		1	1,111		
→	4	—2	A_6	1,667	1			0,667		1					—0,333		
	5		A_{12}	1,444				—4,889			—3	—0,667			0,444	1	
	6	—	Δ	—7,778	1	1		2,556	1		5	0,667			0,222		
	7	—	θ	—	—	0,25	—	—	0,333	—	—	—	—	—	0,667	—	
	1	—2	A_3	2,222			1	—0,444				—0,333			0,222		3
→	2	—1	A_2	0,583	—0,25	1		—0,167	0,75				—0,25		0,833		
	3		A_{10}	9,694	—0,25			—2,389	—3,25		—5	—1,667	—0,25	1	1,194		
	4	—2	A_6	1,667	1			0,667		1					—0,333		
	5		A_{12}	1,444				—4,889			—3	—0,667			0,444	1	
	6	—	Δ	—8,361	1,25			2,722	0,25		5	0,667			0,139		
	7	—	θ	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	

Все вычисления, связанные с решением примера 1, приведены в табл. 6.3 (0—3).

Базис исходного псевдоплана состоит из единичных векторов, взятых с обратным знаком. Поэтому базисные компоненты псевдоплана X (табл. 0) совпадают с соответствующими составляющими вектора ограничений, взятыми с обратным знаком, а элементы x_{ij} столбцов A_j равны по величине и противоположны по знаку элементам соответствующих столбцов матрицы условий $\|a_{ij}\|$. В $(m+1)$-й (шестой) строке таблицы записаны значения $\Delta_j=-c_j$ (базисным компонентам исходного псевдоплана отвечают нулевые коэффициенты линейной формы).

Все базисные компоненты псевдоплана отрицательны и в каждой строке имеются отрицательные коэффициенты x_{ij} $(i=1,2,3,4,5)$. Это значит, что мы имеем дело со случаем 3°. Переходим к новому псевдоплану. Выводу из базиса теперь подлежит вектор $A_{s_1}=A_8$ $(x_8=x_{1,0}=-10<x_{i0},\ i=2,\ 3,\ 4,\ 5)$. Последняя строка таблицы 0 заполняется значениями

$$\theta_j=-\frac{\Delta_j}{x_{1j}}$$

для $x_{1j}<0$. Наименьший элемент θ_0 строки θ достигается на векторе A_3. Вектор условий A_3 подлежит вводу в базис псевдоплана вместо вектора A_8. Преобразование главной части табл. 0 в главную часть табл. 1 производится по рекуррентным формулам (5.1).

Последующий анализ табл. 1 и вычисления, связанные с переходом к табл. 2, производится по аналогичным правилам. Псевдоплан, полученный после третьей итерации, оказывается планом задачи. Таким образом, решением задачи является вектор

$$X'''=(0;\ 0{,}583;\ 2{,}222;\ 0;\ 0;\ 1{,}667;\ 0;\ 0;\ 0;\ 9{,}694;\ 0;\ 1{,}444).$$

Максимальное значение линейной формы равно

$$L(X''')=-8{,}361.$$

В таблицах 6.4 (0—2) приведена последовательность решения еще одного примера.

Пример 2. Требуется обратить в максимум линейную форму

$$L(X)=-(5x_1+3x_2+4x_3+x_4+2x_5+3x_6)$$

при условиях:

$$\begin{aligned}
&6x_1+2x_2+3x_3+8x_4+x_5+2x_6-x_7=12,\\
&4x_1+5x_2+8x_3+3x_4+x_5+7x_6-x_8=5,\\
&2x_1+x_4+4x_5+2x_6-x_9=7,\\
&5x_1+2x_2+x_3+x_4+6x_5+5x_6-x_{10}=10,\\
&x_1+3x_2+6x_4+3x_5+2x_6-x_{11}=4,\\
&x_j\geqslant 0;\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ 11.
\end{aligned}$$

Таблицы не требуют специальных пояснений.

Таблица 6.4 (0—2)

	C				—5	—3	—4	—1	—2	—3						
	№	C_X	$Б_X$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	Номер таблицы
←	1		A_7	—12	—6	—2	—3	—8	—1	—2	1					0
	2		A_8	—5	—4	—5	—8	—3	—1	—7		1				
	3		A_9	—7	—2			—1	—4	—2			1			
	4		A_{10}	—10	—5	—2	—1	—1	—6	—5				1		
	5		A_{11}	—4	—1	—3		—6	—3	—2					1	
	6	—	Δ		5	3	4	1	2	3						
	7	—	θ	—	0,833	1,5	1,333	0,125	2	1,5	—	—	—	—	—	
→	1	—1	A_4	1,5	0,75	0,25	0,375	1	0,125	0,25	—0,125					1
	2		A_8	—0,5	—1,75	—4,25	—6,875		—0,625	—6,25	—0,375	1				
	3		A_9	—5,5	—1,25	0,25	0,375		—3,875	—1,75	—0,125		1			
←	4		A_{10}	—8,5	—4,25	—1,75	—0,625		—5,875	—4,75	—0,125			1		
	5		A_{11}	5	3,5	—1,5	2,25		—2,25	—0,5	—0,75				1	
	6	—	Δ	—1,5	4,25	2,75	3,625		1,875	2,75	0,125					
	7	—	θ	—	1	1,571	5,8	—	0,319	0,579	1	—	—	—	—	
	1	—1	A_4	1,319	0,660	0,213	0,362	1		0,149	—0,128			0,021		2
	2		A_8	0,404	—1,298	—4,064	—6,809			—5,745	—0,362	1		—0,106		
	3		A_9	0,106	1,553	1,404	0,787			1,383	—0,043		1	—0,660		
→	4	—2	A_5	1,447	0,723	0,298	0,106		1	0,809	0,021			—0,170		
	5		A_{11}	8,255	5,128	—0,830	2,489			1,319	—0,702			—0,383	1	
	6	—	Δ	—4,213	2,894	2,191	3,426			1,234	0,085			0,319		
	7	—	θ	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	

5.4. Приведем самостоятельное изложение метода последовательного уточнения оценок (точнее, его первого алгоритма), не связанное с рассмотрением задачи линейного программирования в векторной форме и не требующее введения сопряженной задачи. Это — так называемая координатная форма метода последовательного уточнения оценок.

Ограничимся исследованием невырожденного случая.

Разрешим условия (1.2) задачи относительно m переменных $x_{s_1}, \ldots, x_{s_m}$, отвечающих базисным составляющим $(x_{10}, \ldots, x_{m0})$ начального псевдоплана X. Будем по-прежнему обозначать совокупность индексов векторов базиса через I.

Мы уже видели в § 4 гл. 5, что задача линейного программирования (1.1) — (1.3) может быть сформулирована в следующей эквивалентной форме.

Требуется вычислить неотрицательные величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющие условиям

$$x_{s_i} = x_{i0} - \sum_{j \notin I} x_{ij} x_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{5.2}$$

и обращающие в максимум линейную форму

$$L(x) = L(X_0) - \sum_{j \notin I} \Delta_j x_j, \tag{5.3}$$

где X_0 — вектор, у которого составляющие x_{s_i} равны x_{i0} $(i = 1, 2, \ldots, m)$, а остальные компоненты равны нулю. X_0 представляет собой псевдоплан задачи (1.1) — (1.3). Это значит, что выбор переменных $x_{s_1}, \ldots, x_{s_m}$ обеспечивает неотрицательность всех коэффициентов Δ_j в выражении (5.3) для линейной формы $L(X)$.

Введем обозначения

$$L(X) = x_{s_{m+1}}, \quad L(X_0) = x_{m+1, 0}, \quad \Delta_j = x_{m+1, j} \tag{5.4}$$

и рассмотрим систему уравнений, в которой объединены равенства (5.2) и соотношение (5.3):

$$x_{s_i} = x_{i0} - \sum_{j \notin I} x_{ij} x_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, m+1. \tag{5.5}$$

Будем решать эту систему методом Гаусса (методом полного исключения). Выразим x_k $(k \notin I)$ из r-го уравнения системы $(1 \leqslant r \leqslant m)$ и подставим полученный результат во все остальные уравнения (5.5). При этом естественно предполагается, что $x_{rk} \neq 0$. После первого шага метода полного исключения получим

$$x_{s_i'} = x_{i0}' - \sum_{j \notin I'} x_{ij}' x_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, m+1, \tag{5.6}$$

где $s_i' = s_i$ при $i \neq r$, $s_r' = k$;

$$\left\{ \begin{array}{c} I \\ j \neq s_r \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{c} I' \\ j \neq k \end{array} \right\}.$$

Параметры x_{ij}' определяются формулами

$$x_{ij}' = \begin{cases} x_{ij} - \dfrac{x_{ik}}{x_{rk}} x_{rj}, & i \neq r, \\ \dfrac{x_{rj}}{x_{rk}}, & i = r, \end{cases} \tag{5.7}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m, m+1; \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Элемент x_{rk} называется ***направляющим элементом преобразования.***

До сих пор мы не накладывали никаких ограничений на выбор номера r уравнения и индекса k переменного, определяющих направляющий элемент преобразования, за исключением естественного требования $x_{rk} \neq 0$. Подчиним теперь выбор индексов r и k следующим требованиям.

Индекс r определяется наибольшим по абсолютной величине отрицательным значением x_{i0}

$$x_{r0} = \min_i x_{i0}$$

(если все $x_{i0} \geqslant 0$, то план оптимален).

Для существования хотя бы одного плана задачи (1.1)—(1.3) необходимо, чтобы при $x_{r0} < 0$ по крайней мере один из коэффициентов x_{rj} ($j = 1, 2, \ldots, n$) был отрицателен. В противном случае, как видно из (5.6),

$$x_{s_r'} \leqslant x_{r0}' < 0$$

при любых неотрицательных значениях внебазисных переменных x_j ($j \notin I$).

Выбор индекса k должен обеспечить переход к новому псевдоплану X'. Это значит, что при выбранном индексе k удовлетворяются следующие условия:

$$\Delta_j' = x_{m+1, j}' \geqslant 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.8}$$

В соответствии с рекуррентными формулами (5.7) условие (5.8) может быть переписано в виде

$$\Delta'_j = \Delta_j - \frac{\Delta_k}{x_{rk}} x_{rj} \geqslant 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.9}$$

Вектор X_0, по условию, псевдоплан. Следовательно,

$$\Delta_j \geqslant 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

При $j = s_r$ $x_{rj} = 1$, $\Delta_j = 0$. Поэтому из (5.9) следует, что

$$-\frac{\Delta_k}{x_{rk}} \geqslant 0.$$

Но $\Delta_k > 0$ (мы рассматриваем невырожденный случай). Поэтому $x_{rk} < 0$. Если при этом

$$x_{rj} > 0,$$

то условие (5.9) автоматически выполняется.

Разрешимая задача, как мы видели, обязательно содержит по крайней мере один коэффициент $x_{rj} < 0$. Для выполнения условия (5.9) необходимо, чтобы при $x_{rj} < 0$

$$-\frac{\Delta_k}{x_{rk}} \leqslant -\frac{\Delta_j}{x_{rj}},$$

т. е. индекс k определяется переменным x_k, для которого

$$-\frac{\Delta_k}{x_{rk}} = \min_{x_{rj} < 0} \left(-\frac{\Delta_j}{x_{rj}} \right). \tag{5.10}$$

Сравним системы (5.5) и (5.6) с таблицами двух соседних итераций первого алгоритма метода последовательного уточнения оценок. Как видим, элементы правых частей уравнений расположены в том же порядке и преобразовываются по тем же рекуррентным формулам, что и соответствующие элементы таблиц.

Таким образом, метод последовательного уточнения оценок при заданном начальном псевдоплане представляет собой не что иное, как процесс решения систем уравнений по методу полного исключения со специальными правилами выбора направляющего элемента x_{rk}. Выбор r подчиняется условию

$$x_{r0} = \min_i x_{i0},$$

а выбор k должен удовлетворять требованию (5.10). Другими словами, выбор направляющей строки обеспечивает монотонное изменение линейной формы, а выбор направляющего столбца — движение по псевдопланам.

5.5. Рассмотрим особенности применения первого алгоритма метода последовательного уточнения оценок к задачам с двухсторонними ограничениями.

Изменения в вычислительной схеме, связанные с учетом двухсторонних ограничений, касаются главным образом способа определения направляющего элемента преобразования и формул для вычисления базисных составляющих псевдоплана. Отсюда и некоторые изменения в структуре таблиц первого алгоритма.

Таблица l, отвечающая l-й итерации в задаче с переменными, ограниченными с обеих сторон, отличается от таблицы l для канонической формы задачи дополнительной строкой X и тремя дополнительными столбцами $\tilde{A}_0$, $(\alpha;\ \beta)$ и δ (табл. 6.5).

В строке X под каждым вектором условий, не вошедшим в базис, указывается отметка α, если $x_j^{(l)}$ совпадает с левой границей (т. е., если $\Delta_j>0$), и β, если $x_j^{(l)}$ равен правой границе интервала изменения (т. е., если $\Delta_j<0$). Позиции строки X, отвечающие векторам базиса, прочеркиваются.

Справа от столбцов таблицы, отвечающих векторам условий, помещаются два дополнительных столбца — $(\alpha;\ \beta)_X$ и δ. В столбец $(\alpha;\ \beta)_X$ записываются границы интервалов изменения базисных переменных. Элементами столбца δ являются уклонения $\delta_i^{(l)}$ базисных компонент псевдоплана от границ допустимых интервалов изменения соответствующих переменных:

$$\delta_i^{(l)}=\begin{cases} \alpha_{s_i}-x_{i0}^{(l)}, & \text{если } x_{i0}^{(l)}<\alpha_{s_i}, \\ x_{i0}^{(l)}-\beta_{s_i}, & \text{если } x_{i0}^{(l)}>\beta_{s_i}. \end{cases} \tag{5.11}$$

Позиции столбца δ, для которых

$$\alpha_{s_i}\leqslant x_{i0}^{(l)}\leqslant \beta_{s_i},$$

прочеркиваются. Рядом с численным значением $\delta_i^{(l)}$ целесообразно помещать отметку α или β в зависимости от того, находится ли значение x_{i0} слева или справа от допустимого интервала изменения соответствующей переменной.

Таблица 6.5

Таблица l

№	C_X	$Б_X$	A_0	$\tilde{A}_0$	A_1	A_2	...	A_k	...	A_n	δ	$(\alpha;\beta)_X$
1	c_{s_1}	A_{s_1}	$x_{10}^{(l)}$	$\tilde{x}_{10}^{(l)}$	$x_{11}^{(l)}$	$x_{12}^{(l)}$	...	$x_{1k}^{(l)}$	...	$x_{1n}^{(l)}$		$\alpha_{s_1};\ \beta_{s_1}$
2	c_{s_2}	A_{s_2}	$x_{20}^{(l)}$	$\tilde{x}_{20}^{(l)}$	$x_{21}^{(l)}$	$x_{22}^{(l)}$	...	$x_{2k}^{(l)}$	...	$x_{2n}^{(l)}$		$\alpha_{s_2};\ \beta_{s_2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$
r	c_{s_r}	A_{s_r}	$x_{r0}^{(l)}$	$\tilde{x}_{r0}^{(l)}$	$x_{r1}^{(l)}$	$x_{r2}^{(l)}$	...	$x_{rk}^{(l)}$	...	$x_{rn}^{(l)}$	$\delta_r^{(l)}\ (\gamma_r)$	$\alpha_{s_r};\ \beta_{s_r}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	c_{s_m}	A_{s_m}	$x_{m0}^{(l)}$	$\tilde{x}_{m0}^{(l)}$	$x_{m1}^{(l)}$	$x_{m2}^{(l)}$	...	$x_{mk}^{(l)}$	...	$x_{mn}^{(l)}$		$\alpha_{s_m};\ \beta_{s_m}$
$m+1$	—	Δ	$L^{(l)}$	—	$\Delta_1^{(l)}$	$\Delta_2^{(l)}$	...	$\Delta_k^{(l)}$	...	$\Delta_m^{(l)}$	—	—
$m+2$	—	X	—	—			...	γ_k	...		—	—
$m+3$	—	θ	—	—			...	θ_0	...		—	—

Исключению из базиса подлежит вектор A_{s_r}, отвечающий наибольшему уклонению $\delta_r^{(l)}$.

Отметка α или β у значения $\delta_r^{(l)}$ указывает, какой из случаев (*а* или *б*) имеет место при данной итерации (см. п. 3.5).

В случае *а* элементы последней строки θ вычисляются по формуле

$$\theta_j^{(l)} = -\frac{\Delta_j^{(l)}}{x_{rj}^{(l)}}. \tag{5.12}$$

При этом заполняются только те позиции строки θ, для которых

$$\frac{\Delta_j^{(l)}}{x_{rj}^{(l)}} < 0, \quad x_{rj} \neq 0.$$

Остальные позиции строки θ, так же как и позиции, отвечающие векторам базиса, прочеркиваются. В вырожденном случае, когда $\Delta_j = 0$, для некоторых векторов A_j, не входящих в базис, следует учитывать Δ_j как положительную величину при $x_j = \alpha_j$ и как отрицательную при $x_j = \beta_j$.

В случае *б* элементы строки θ вычисляются по формуле

$$\theta_j^{(l)} = \frac{\Delta_j^{(l)}}{x_{rj}^{(l)}}. \tag{5.13}$$

При этом заполняются только позиции, для которых

$$\frac{\Delta_j^{(l)}}{x_{rj}^{(l)}} > 0, \quad x_{rj}^{(l)} \neq 0.$$

Остальные позиции строки θ прочеркиваются. Как и в случае *а*, при анализе вырожденных планов нулевые значения Δ_j для внебазисных переменных учитываются как положительные при $x_j = \alpha_j$ и как отрицательные при $x_j = \beta_j$.

Столбец A_0 содержит базисные составляющие псевдоплана (коэффициенты разложения вектора

$$A_0 = B - \sum_{j \notin I_Y} x_j A_j$$

по векторам базиса псевдоплана). Вектор A_0 меняется от базиса к базису и поэтому общие рекуррентные формулы, используемые при преобразовании таблицы, неприменимы к нему. Однако, как легко непосредственно убедиться, базисные компоненты псевдоплана на $(l+1)$-м шаге связаны рекуррентными формулами (5.1) с составляющими вектора

$$\tilde{A}_0 = A_0 + x_k^{(l)} A_k - \gamma_r^{(l)} A_{s_r}, \tag{5.14}$$

отвечающими l-му шагу. Здесь s_r — номер вектора A_{s_r}, исключаемого из базиса на l-м шаге, k — номер вектора, вводимого в базис на l-м шаге; $\gamma_r^{(l)}$ равно α_{s_r} или β_{s_r} в зависимости от отметки (α или β) при уклонении $\delta_r^{(l)}$.

Столбец $\tilde{A}_0$ помещается в таблице между столбцами A_0 и A_1. Элементы столбца $\tilde{A}_0$ вычисляются по формулам

$$\tilde{x}_{i0}^{(l)} = \begin{cases} x_{i0}^{(l)} + x_k^{(l)} x_{ik}^{(l)} & \text{при } i \neq r, \\ x_{r0}^{(l)} + x_k^{(l)} x_{rk}^{(l)} - \gamma_r^{(l)} & \text{при } i = r. \end{cases} \tag{5.15}$$

Под главной частью таблицы будем понимать столбцы $\tilde{A}_0, A_1, \ldots, A_n$ (все $(m+1)$ позиции).

Исходная таблица 0 отличается от всех последующих таблиц двумя дополнительными строками. В строке C помещены коэффициенты линейной формы задачи, а в строке $(\alpha; \beta)$ — границы интервалов изменения переменных x_j.

Наметим кратко порядок вычислений, связанных с отдельной $(l+1)$-й итерацией.

К началу $(l+1)$-й итерации таблица l (за исключением столбца $\tilde{A}_0$ и строки θ) предполагается заполненной. Итерация начинается с проверки псевдоплана $X^{(l)}$ на оптимальность. Псевдоплан $X^{(l)}$ является планом и, следовательно, решением задачи (случай 1°), если все позиции столбца δ в таблице l оказываются прочеркнутыми. Если случай 1° не имеет места, следует проверить выполнение условий неразрешимости задачи. Задача неразрешима (случай 2°), если найдется строка с уклонением $\delta_i^{(l)}(\alpha)$, для которой выполняется условие (3.19), или строка с уклонением $\delta_i^{(l)}(\beta)$, для которой выполняется условие (3.20). Другими словами, задача неразрешима, если в строке с уклонением, имеющим отметку α, элементы $x_{ij} \geqslant 0$ для $x_j = \alpha_j$ и $x_{ij} \leqslant 0$ для $x_j = \beta_j$ $(j \notin I_Y)$ или в строке с уклонением, имеющим отметку β, элементы $x_{ij} \leqslant 0$ при $x_j = \alpha_j$ и $x_{ij} \geqslant 0$ при $x_j = \beta_j (j \notin I_Y)$. Здесь x_j — элементы, определяемые строкой X таблицы l.

Если условия неразрешимости задачи не выполняются (имеет место случай 3°), следует определить направляющий элемент преобразования и построить таблицу $(l+1)$ (кроме столбца $\tilde{A}_0$ и строки θ), содержащую исходные данные для очередной итерации.

Из базиса исключается вектор A_{s_r} с наибольшим уклонением $\delta_r^{(l)}$. Если таких векторов несколько, можно выбрать любой из них. Чтобы определить вектор, подлежащий вводу в базис, следует по указанным выше правилам заполнить строку θ. Наименьший элемент θ_0 строки θ определяет вектор A_k, вводимый в базис. Если θ_0 достигается сразу на нескольких векторах, в базис вводится вектор с наименьшим номером. Строгое правило однозначного выбора A_k, гарантирующее от зацикливания, изложено в п. 4.4.

Зная номер направляющей строки r и номер направляющего столбца k, можно вычислить по формуле (5.14) или (5.15) элементы столбца $\tilde{A}_0$. Теперь имеются все данные для перехода к таблице $l+1$.

Столбцы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (позиции $1, 2, \ldots, m, m+1$) преобразовываются по рекуррентным формулам:

$$x_{ij}^{(l)} = \begin{cases} x_{ij}^{(l)} - \dfrac{x_{rj}^{(l)}}{x_{rk}^{(l)}}\, x_{ik}^{(l)}, & i \neq r, \\[2ex] \dfrac{x_{rj}^{(l)}}{x_{rk}^{(l)}}, & i = r, \end{cases} \tag{5.16}$$

$$j = 1, 2, \ldots, n.$$

Элементы столбца A_0 таблицы $l+1$ вычисляются в соответствии с теми же рекуррентными формулами по элементам столбца $\tilde{A}_0$ таблицы l:

$$x_{i0}^{(l+1)} = \begin{cases} \tilde{x}_{i0}^{(l)} - \dfrac{\tilde{x}_{r0}^{(l)}}{x_{rk}^{(l)}}\, x_{ik}, & i \neq r, \\[2ex] \dfrac{\tilde{x}_{r0}^{(l)}}{x_{rk}^{(l)}}, & i \neq r. \end{cases} \tag{5.17}$$

Значение линейной формы задачи преобразовывается от шага к шагу по рекуррентной формуле

$$L(X^{(l+1)}) = L(X^{(l)}) - \theta_0^{(l)} \delta_r^{(l)}. \tag{5.18}$$

Элементы строки X в таблице $(l+1)$ совпадают с соответствующими элементами строки X таблицы l для всех j, за исключением $j=k$ и $j=s_r$. Позиция строки X для $j=k$ прочеркивается (вектор A_k входит в базис псевдоплана $X^{(l+1)}$). В позицию s_r строки вносится отметка (α или β), указанная при величине $\delta_r^{(l)}$ в таблице l.

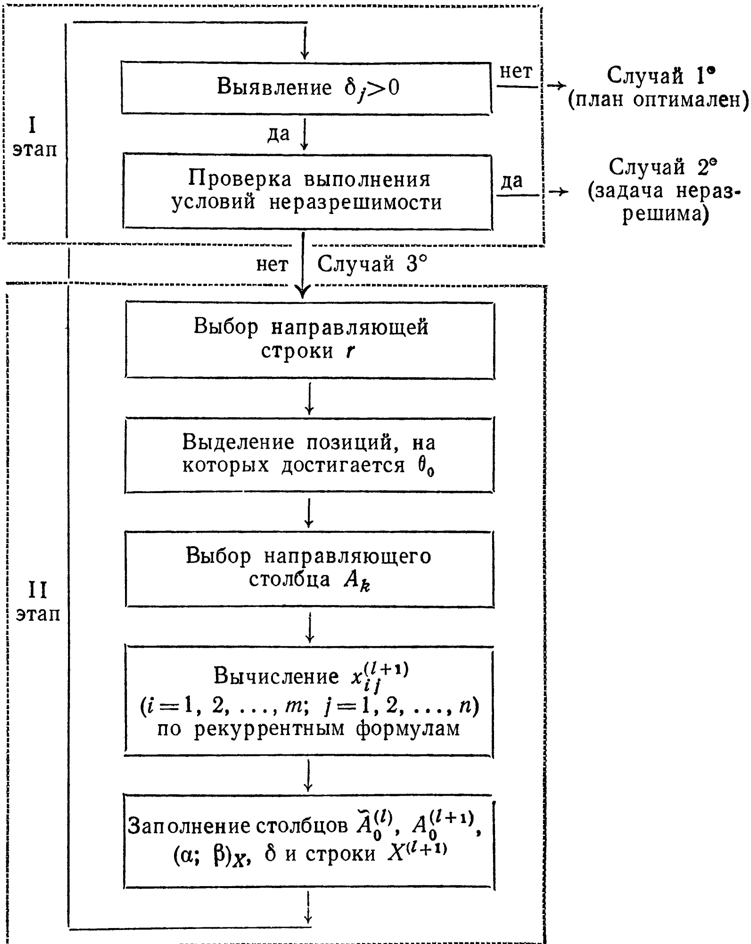


Рис. 6.6.

В столбец $(\alpha;\ \beta)_X$ таблицы $l+1$ записываются те же величины, что и в столбце $(\alpha;\ \beta)_X$ таблицы l. Исключение представляет только позиция r, куда вместо чисел $(\alpha_{s_r};\ \beta_{s_r})$ вносятся величины $(\alpha_k;\ \beta_k)$. Столбец δ заполняется по формулам вида (5.11) в соответствии с приведенными ранее замечаниями.

Определением перечисленных параметров завершается итерация $(l+1)$. Последующие итерации проводятся по тем же правилам.

Контроль расчетов может осуществляться двойным расчетом Δ_j и L (по рекуррентным формулам и непосредственно из соотношений, определяющих эти параметры).

На рис. 6.6. изображена блок-схема решения задачи линейного программирования с двухсторонними ограничениями по первому алгоритму метода последовательного уточнения оценок.

5.6. Проиллюстрируем применение описанной вычислительной схемы на следующем примере.

Требуется определить вектор X, обращающий в максимум линейную форму

$$L = 12x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 14x_4 + x_6 + 2x_7$$

при соблюдении следующих ограничений:

$$\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_5 \qquad\qquad &= 1,\\
x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 \qquad + x_6 \qquad &= 4,\\
4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 \qquad\qquad + x_7 &= 4,\\
3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 \qquad\qquad + x_8 &= 8,\\
-1 \leqslant x_j \leqslant 1, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ 8.
\end{aligned}$$

Процесс решения задачи записан в таблицах 6.6 (0—2). Все переменные задачи ограничены с обеих сторон. Поэтому любая система из $m=4$ линейно независимых векторов может быть выбрана в качестве базиса исходного псевдоплана. Естественно принять, что начальный базис составлен из единичных векторов A_5, A_6, A_7 и A_8. Столбцы A_1, A_2, …, A_8 (первые $m=4$ позиций) таблицы 0 заполнены компонентами векторов условий. Элементы строки Δ вычисляются по формулам (1.11). В строке X указываются значения внебазисных переменных. При $\Delta_j>0$ $x_j=\alpha_j$, при $\Delta_j<0$ $x_j=\beta_j$. В нашем случае

$$x_2=\alpha_2=-1, \quad x_1=\beta_1=x_3=\beta_3=x_4=\beta_4=1.$$

В столбец A_0 записываются значения базисных переменных псевдоплана

$$A_0 = B - \sum_{j \notin I_Y} x_j A_j.$$

Имеем, например,

$$x_{20} = b_2 - (\beta_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + \beta_3 a_{23} + \beta_4 a_{24}) =$$
$$= 4 - (1\cdot 1 - 1\cdot 4 + 1\cdot 2 + 1\cdot 3) = 2.$$

Значение линейной формы на псевдоплане равно, по определению,

$$L(X) = \sum_{j=1}^{8} c_j x_j = 12\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 10\cdot 1 + 14\cdot 1 + 0\cdot(-8) +$$
$$+ 12 + 2\cdot(-6) + 0\cdot 2 = 24.$$

Элементы столбца δ вычисляются по формулам (5.11). Столбец δ содержит непрочеркнутые позиции. Следовательно, исходный псевдоплан не является решением задачи. Условия неразрешимости задачи также не выполняются. Имеет место случай 3°.

Наибольшему уклонению $\delta_1 = 7$ отвечает вектор $A_{s_1} = A_5$, который следует исключить из базиса. При δ_1 указана отметка α. Поэтому строка θ вычисляется по формуле (5.12). В строке заполняются только три позиции, отвечающие векторам A_1, A_3 и A_4, для которых

$$\frac{\Delta_j}{x_{rj}} = \frac{\Delta_j}{x_{1j}} < 0.$$

Наименьшее значение θ_0 в строке θ равно 0,2 и достигается на векторе A_4. Вектор условий A_4 подлежит вводу в очередной базис. Итак, направляющей строкой преобразования является первая строка ($r=1$), а направляющим столбцом — столбец A_4 ($k=4$). Теперь можно заполнить столбец $\tilde{A}_0$ по формулам (5.15) и переходить к табл. 1. Элементы x'_{ij} ($i=1, \ldots, 5$; $j=1, \ldots, 8$) вычисляются по рекуррентным формулам (5.16). Базисные составляющие очередного псевдоплана определяются из соотношения (5.17) по элементам столбца $\tilde{A}_0$. Линейная форма на псевдоплане X' в соответствии с формулой (5.18) равна

$$L(X) = 24 - 0{,}2\cdot 7 = 22{,}6.$$

В строке X позиция, отвечающая A_4, прочеркивается, а в позиции, соответствующей вектору A_5, записывается отметка α, указанная при уклонении δ_1 в табл. 0. Все остальные позиции строки X сохраняют те же отметки, что и в табл. 0.

Анализ псевдоплана X' и определение параметров очередного псевдоплана проводится по тем же правилам. Заметим, что в первой итерации мы имеем дело со случаем *а*, а на втором шаге встречается случай *б*.

В табл. 2 все позиции столбца δ прочеркиваются. Псевдоплан X'' является решением задачи

$$X'' = (1;\ 0{,}529;\ 1;\ -0{,}706;\ -1;\ 1;\ -0{,}529;\ 0{,}647);$$
$$L(X'') = 13{,}118.$$

Таблицы 6.6 (0—2)

					C	12	2	10	14		1	2				Номер таблицы
					$\alpha;\ \beta$	$-1;\ 1$	$-1;\ 1$	$-1;\ 1$	$-1;\ 1$	$-1;\ 1$	$-1;\ 1$	$-1;\ 1$	$-1;\ 1$			
	№	C_X	$Б_X$	A_0	$\hat{A}_0$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	δ	$(\alpha;\ \beta)_X$	
←	1		A_5	-8	-2	2	1	3	5	1				$7(\alpha)$	$-1;\ 1$	0
	2	1	A_6	2	5	1	4	2	3		1			$1(\beta)$	$-1;\ 1$	
	3	2	A_7	-6	-1	4	2	3	5			1		$5(\alpha)$	$-1;\ 1$	
	4		A_8	2	3	3	2	4	1				1	$1(\beta)$	$-1;\ 1$	
	5	—	Δ	24	—	-3	6	-2	-1					—	—	
	6	—	X	—	—	β	α	β	β	—	—	—	—	—	—	
	7	—	θ	—	—	1,5	—	0,667	0,2	—	—	—	—	—	—	

Продолжение

	№	C_X	$Б_X$	A_0	$\tilde{A}_0$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	δ	$(\alpha;\beta)_X$	Номер таблицы
					C	12	2	10	14		1	2				
					$\alpha;\beta$	—1; 1	—1; 1	—1; 1	—1; 1	—1; 1	—1; 1	—1; 1	—1; 1			
→	1	14	A_4	—0,4	—0,6	0,4	0,2	0,6	1	0,2				—	—1; 1	1
←	2	1	A_6	6,2	1,8	—0,2	3,4	0,2		—0,6	1			5,2(β)	—1; 1	
	3	2	A_7	1		2	1			—1		1		—	—1; 1	
	4		A_8	3,4	1,6	2,6	1,8	3,4		—0,2			1	2,4(β)	—1; 1	
	5	—	Δ	22,6	—	—2,6	6,2	—1,4		0,2				—	—	
	6	—	X	—	—	β	α	β	—	α	—	—	—	—	—	
	7	—	θ	—	—	13	1,824	—	—	—	—	—	—	—	—	
	1	14	A_4	—0,706		0,412		0,588	1	0,235	—0,059				—1; 1	2
→	2	2	A_2	0,529		—0,059	1	0,059		—0,176	0,294				—1; 1	
	3	2	A_7	—0,529		2,099		—0,059		—0,824	—0,294	1			—1; 1	
	4		A_8	0,647		2,706		3,294		0,118	—0,529		1		—1; 1	
	5	—	Δ	13,118	—	—2,235		—1,765		1,294	—1,824			—	—	
	6	—	X	—	—	β	—	β	—	α	β	—	—	—	—	
	7	—	θ	—	—		—		—			—	—	—	—	

§ 6. Второй алгоритм метода последовательного уточнения оценок

6.1. Второй алгоритм метода последовательного уточнения оценок отличается от первого алгоритма теми же особенностями, какими второй алгоритм метода последовательного улучшения плана отличается от первого алгоритма, реализующего тот же метод.

Рассмотрим вначале второй алгоритм применительно к канонической форме задачи.

Решение задачи начинается с заданного начального опорного плана сопряженной задачи. Вычисления записываются так же, как и во втором алгоритме метода улучшения плана: в серии основных и одной вспомогательной таблице.

В основных таблицах (табл. 6.7) помещаются базисные компоненты $e_{i0}^{(l)}$ псевдоплана и коэффициенты $e_{ij}^{(l)}$ разложения m-мерных единичных векторов

$$e_j = \underbrace{(0, \ldots, 0, \overbrace{1}^{j}, 0, \ldots, 0)}_{m}$$

по векторам сопряженного базиса. Строка $(m+1)$ основной таблицы содержит значение линейной формы

$$e_{m+1,\,0}^{(l)} = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^{(l)}$$

и составляющие

$$e_{m+1,\,i}^{(l)} = y_i^{(l)}$$

опорного плана сопряженной задачи. Если задан только начальный сопряженный базис, то y_j вычисляются по формуле

$$y_j = e_{m+1,\,j} = \sum_{i=1}^{m} c_{s_i} e_{ij}, \qquad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{6.1}$$

Столбцы $e_0, e_1, \ldots, e_m$ (все $(m+1)$ позиций) составляют главную часть основной таблицы. При переходе от каждой таблицы к следующей главная часть таблицы преобразовывается по тем же рекуррентным формулам (5.5)—(5.6) гл. 5, что и элементы основных таблиц второго алгоритма метода улучшения плана.

Таблица 6.7

Основная таблица l

№	C_X	$Б_X$	e_0	e_1	e_2	...	e_m	$A_k^{(l)}$
1	c_{s_1}	A_{s_1}	$e_{10}^{(l)}$	$e_{11}^{(l)}$	$e_{12}^{(l)}$	...	$e_{1m}^{(l)}$	$x_{1k}^{(l)}$
2	c_{s_2}	A_{s_2}	$e_{20}^{(l)}$	$e_{21}^{(l)}$	$e_{22}^{(l)}$	...	$e_{2m}^{(l)}$	$x_{2k}^{(l)}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮
r	c_{s_r}	A_{s_r}	$e_{r0}^{(l)}$	$e_{r1}^{(l)}$	$e_{r2}^{(l)}$	...	$e_{rm}^{(l)}$	$x_{rk}^{(l)}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮
m	c_{s_m}	A_{s_m}	$e_{m0}^{(l)}$	$e_{m1}^{(l)}$	$e_{m2}^{(l)}$	...	$e_{mm}^{(l)}$	$x_{mk}^{(l)}$
$m+1$	—	—	$L^{(l)}$	$y_1^{(l)}$	$y_2^{(l)}$	...	$y_m^{(l)}$	$\Delta_k^{(l)}$

Заметим, что во втором алгоритме метода улучшения плана строка $(m+1)$ нужна была для последующего вычисления параметров $\Delta_j^{(l)}$ при каждой итерации. Во втором алгоритме метода уточнения оценок параметры $\Delta_j^{(l)}$, как будет показано ниже, вычисляются по рекуррентным формулам. Поэтому элементы $e_{m+1,\,i}=y_i$ необходимы только в табл. 0 для вычисления исходных значений Δ_j. Во всех остальных основных таблицах строка $(m+1)$ играет вспомогательную роль и используется только для контроля вычислений.

Последний столбец $(A_k^{(l)})$ основной таблицы содержит коэффициенты $x_{ik}^{(l)}$ разложения вектора A_k, подлежащего вводу в базис, по базису псевдоплана. Составляющие $x_{ik}^{(l)}$ вычисляются по формулам

$$x_{ik}^{(l)}=\sum_{s=1}^{m} e_{is}^{(l)}a_{sk}. \tag{6.2}$$

Элементы столбца A_k необходимы для преобразования главной части основной таблицы по рекуррентным формулам

$$e_{ij}^{(l+1)} = \begin{cases} e_{ij}^{(l)} - \dfrac{x_{ik}^{(l)}}{x_{rk}^{(l)}} e_{rj}^{(l)}, & i \neq r, \\ \dfrac{e_{rj}^{(l)}}{x_{rk}^{(l)}}, & i = r, \end{cases} \tag{6.3}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m, m+1; \; j = 0, 1, 2, \ldots, m; \; x_{m+1, k}^{(l)} = \Delta_k^{(l)}.$$

Верхняя часть вспомогательной таблицы содержит векторы условий задачи. В $(m+1)$-ю строку помещаются значения коэффициентов линейной формы.

Каждой основной таблице соответствуют три строки нижней части вспомогательной таблицы (табл. 6.8): строка $\Delta_j^{(l)}$, строка $X_r^{(l)}$ и строка $\theta^{(l)}$.

Элементы строки $\Delta_j^{(l)}$ вычисляются по формуле

$$\Delta_j^{(l)} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^{(l)} - c_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_{m+1, i}^{(l)} - c_j \tag{6.4}$$

только при $l = 0$. Параметры $\Delta_j^{(l)}$ для последующих итераций вычисляются рекуррентным образом.

В строку $X_r^{(l)}$ записываются коэффициенты $x_{rj}^{(l)}$ разложения векторов A_j по сопряженному базису при векторе A_{s_r}. Коэффициенты $x_{rj}^{(l)}$ вычисляются по формуле

$$x_{rj}^{(l)} = \sum_{i=1}^{m} e_{ri}^{(l)} a_{ij}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.5}$$

Здесь r — позиция базиса, из которой на $(l+1)$-й итерации исключается вектор.

В строке $\theta^{(l)}$ заполняются только те позиции, для которых $x_{rj}^{(l)} < 0$. Каждый элемент строки $\theta^{(l)}$ равен отношению соответствующих элементов двух предшествующих строк, взятому с обратным знаком. Наименьший элемент строки $\theta^{(l)}$, равный $-\dfrac{\Delta_k^{(l)}}{x_{rk}^{(l)}}$, обозначается через $\theta_0^{(l)}$. Вектор A_k, на котором достигается $\theta_0^{(l)}$, подлежит вводу в очередной базис.

Таблица 6.8

Вспомогательная таблица

№	B	A_1	A_2	...	A_k	...	A_n
1	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1k}	...	a_{1n}
2	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2k}	...	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$
m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mk}	...	a_{mn}
$m+1$	c_j	c_1	c_2	...	c_k	...	c_n
0	Δ	Δ_1	Δ_2	...	Δ_k	...	Δ_n
	X_r	x_{r1}	x_{r2}	...	x_{rk}	...	x_{rn}
	θ			...	θ_0	...	
1	Δ'	Δ'_1	Δ'_2	...	Δ'_k	...	Δ'_n
	X'_r	x'_{r1}	x'_{r2}	...	x'_{rk}	...	x'_{rn}
	θ'			...		...	
2	Δ''	Δ''_1	Δ''_2	...	Δ''_k	...	Δ''_n
	X''_r	x''_{r1}	x''_{r2}	...	x''_{rk}	...	x''_{rn}
	θ''			...		...	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$

Если θ_0 достигается сразу на нескольких векторах A_{k_i}, то в базис можно вводить любой из них, например, вектор с наименьшим номером. Однако такое правило выбора вектора, подлежащего вводу в базис, не гарантирует от зацикливания. При обнаружении цикла, т. е. начиная от пройденного дважды базиса, следует воспользоваться строгим правилом выбора вводимого в базис вектора, изложенным в § 4. Применение этого правила ко второму алгоритму не отличается от его использования при первом алгоритме метода уточнения оценок. Однако если в первом алгоритме коэффициенты x_{ij} (см. п. 5.2, где иллюстрируется применение правила) содержатся в таблицах вычислительной схемы, то во втором алгоритме необходимые значения x_{ij} подлежат вычислению по формулам (6.5). Это обстоятельство осложняет практическое использование правила, гарантирующего от зацикливания, при решении задач с вырожденными сопряженными планами по второму алгоритму метода последовательного уточнения оценок.

Вычисление строки $X_r^{(l)}$ является наиболее трудоемкой операцией второго алгоритма метода последовательного уточнения оценок. Определение каждого элемента $x_{rj}^{(l)}$ требует m умножений. Однако, как уже отмечалось, наличие строки $X_r^{(l)}$ исключает необходимость в вычислении параметров Δ_j по громоздким формулам (6.4). Действительно, в соответствии с рекуррентной формулой (5.1) имеем для $i=m+1$ $(x_{m+1,\,j}=\Delta_j)$

$$\Delta_j^{(l+1)}=\Delta_j^{(l)}-\frac{x_{rj}^{(l)}}{x_{rk}^{(l)}}\,\Delta_k^{(l)},\qquad j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{6.6}$$

или, в принятых обозначениях,

$$\Delta_j^{(l+1)}=\Delta_j^{(l)}+\theta_0^{(l)}x_{rj}^{(l)},\qquad j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{6.7}$$

т. е. строка $\Delta^{(l+1)}$ получается как сумма строки $\Delta^{(l)}$ и строки $X_r^{(l)}$, предварительно умноженной на выделенный элемент $\theta_0^{(l)}$ строки $\theta^{(l)}$.

6.2. Наметим кратко порядок вычислений во втором алгоритме метода уточнения оценок.

Вычислительная схема второго алгоритма состоит из последовательности итераций, реализуемых по одним и тем же правилам. Каждая итерация состоит из двух этапов. На первом этапе псевдоплан проверяется на оптимальность (случай 1°). Если псевдоплан не является планом задачи, следует выяснить, нет ли оснований считать задачу неразрешимой (случай 2°). На этом завершается первый этап итерации. Если имеет место случай 3°, следует перейти ко второму этапу — вычислить очередной псевдоплан и все характеризующие его параметры.

Рассмотрим последовательность вычислений в $(l+1)$-й итерации. Для проверки псевдоплана $X^{(l)}$ на оптимальность следует просмотреть знаки элементов столбца e_0 основной таблицы l. Если все элементы $e_{i0}^{(l)}$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ неотрицательны, псевдоплан является планом и одновременно решением задачи. Пусть теперь среди $e_{i0}^{(l)}$ имеются отрицательные элементы. Вектор A_{s_r} с наибольшей по абсолютной величине отрицательной компонентой $e_{r0}^{(l)}$ отмечается как вектор, подлежащий исключению из базиса.

После этого следует заполнить строки $\Delta^{(l)}$ и $X_r^{(l)}$ во вспомогательной таблице. Строка $\Delta^{(l)}$ заполняется в соответствии с рекуррентными формулами (6.7) по параметрам трех предшествующих строк ($\Delta^{(l-1)}$, $X_r^{(l-1)}$ и $\theta^{(l-1)}$).

Подчеркнем, что индексы r в обозначениях $X_r^{(l-1)}$ и $X_r^{(l)}$ соответствуют различным позициям сопряженного базиса. В первом случае r — номер позиции базиса, из которой выводится вектор в l-й итерации, а во втором — индекс r отвечает позиции базиса, из которой исключается вектор на $(l+1)$-м шаге. Более точные обозначения $X_{r_l}^{(l)}$ и $X_{r_{l-1}}^{(l-1)}$ загромождали бы запись.

Элементы $x_{rj}^{(l)}$ строки $X_r^{(l)}$ вычисляются по формуле (6.5), как произведения r-й строки основной таблицы l на соответствующие столбцы A_j верхней части вспомогательной таблицы. Строка $X_r^{(l)}$ позволяет проверить, нет ли оснований считать задачу неразрешимой. Задача линейного программирования (1.1), (1.2) не имеет ни одного плана, если все элементы строки $X_r^{(l)}$ неотрицательны (случай 2°).

Заметим, что установление неразрешимости задачи, если она имеет место, требует при втором алгоритме, вообще говоря, больше итераций, чем в первом. Это объясняется тем, что при втором алгоритме вычисляются и фиксируются не все коэффициенты x_{ij}, как в первом алгоритме, а только величины x_{rj}, где r — индекс, наибольшей по абсолютной величине отрицательной компоненты псевдоплана.

Случай 3° имеет место, если в строке $X_r^{(l)}$ содержится по крайней мере один отрицательный элемент. В этом случае следует перейти ко второму этапу итерации — выбрать вектор A_k, подлежащий вводу в базис, разложить его по базису псевдоплана $X^{(l)}$ и вычислить главную часть $(l+1)$-й основной таблицы.

Для выбора вектора A_k следует вычислить строку $\theta^{(l)}$ вспомогательной таблицы. Как уже отмечалось, значения

$$\theta_j^{(l)} = -\frac{\Delta_j^{(l)}}{x_{rj}^{(l)}}$$

определяются только для $x_{rj}^{(l)} < 0$. Вектор A_k, на котором достигается $\theta_0^{(l)}$ — наименьший элемент строки $\theta^{(l)}$ — вводится в базис. Для однозначного выбора A_k в вырожденных случаях используется в соответствии с приведенными выше замечаниями упрощенное или строгое правило (см. п. 6.1).

В последний столбец $A_k^{(l)}$ основной таблицы l вносятся коэффициенты $x_{ik}^{(l)}$ разложения вектора A_k по векторам базиса псевдоплана $X^{(l)}$. Параметры $x_{ik}^{(l)}$ вычисляются по формулам (6.2), как произведения i-й строки главной части основной таблицы l на k-й столбец верхней части вспомогательной таблицы.

Теперь имеются все необходимые данные для того, чтобы с помощью рекуррентных формул (6.3) перейти от главной части основной таблицы l к главной части таблицы $(l+1)$, подготовив, таким образом, исходные параметры для $(l+2)$-й итерации.

Процесс образования основных таблиц и продолжения вспомогательной таблицы приводит через конечное число шагов к построению оптимальных планов обоих взаимосопряженных задач или к установлению их неразрешимости.

Контроль вычислений по второму алгоритму метода последовательного уточнения оценок может производиться двумя способами. Первый из них основан на том, что параметры

$$e_{m+1,\ j} = y_j \quad (j = 0, 1, \ldots, m)$$

можно вычислять как по рекуррентным формулам (6.3), так и непосредственно по формулам (6.1).

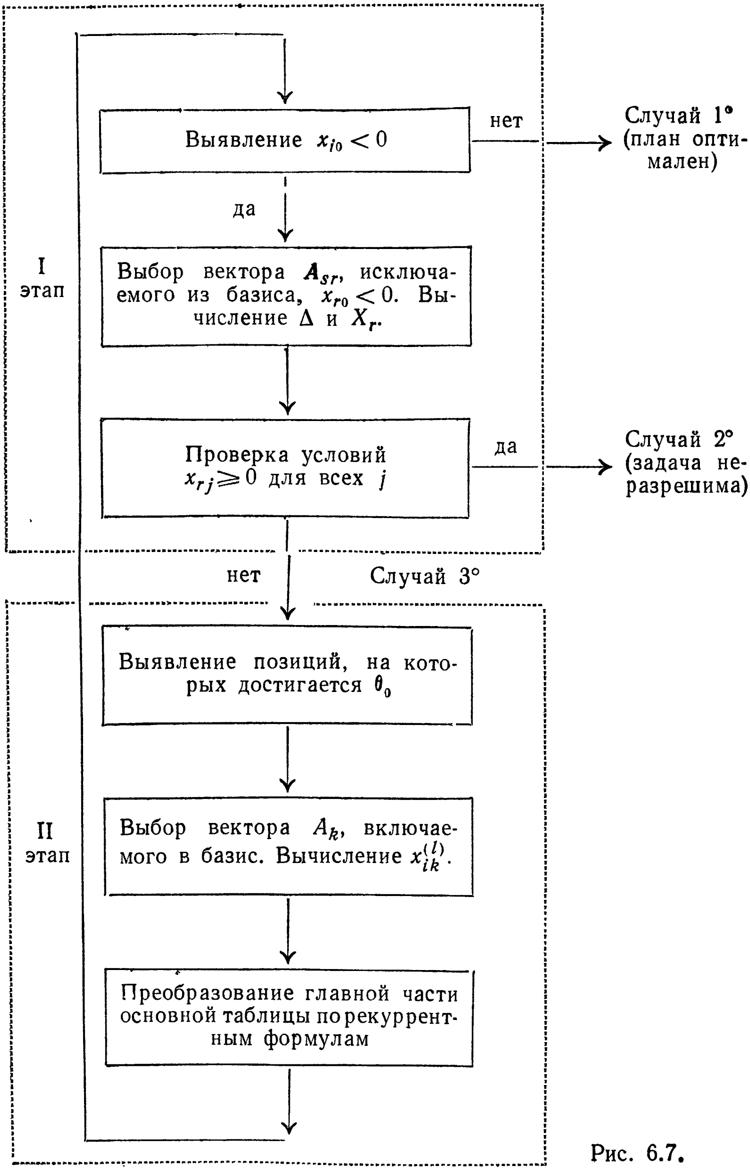
Второй способ контроля определяется двумя возможностями для вычисления Δ_j (формулы (6.4) и (6.7)).

На рис. 6.7 изображена блок-схема решения задачи линейного программирования по второму алгоритму метода последовательного уточнения оценок.

6.3. Трудоемкость отдельной итерации второго алгоритма метода уточнения оценок незначительно превышает трудоемкость отдельного шага второго алгоритма метода улучшения плана. При составлении основных таблиц в методе уточнения оценок столбец θ не вычисляется. Кроме того, можно сэкономить m умножений, не вычисляя $(m+1)$-ю строку основной таблицы. Зато каждая итерация метода уточнения оценок требует продолжения вспомогательной таблицы на три строки вместо одной во втором алгоритме метода улучшения плана. Вычисление строки $\Delta^{(l)}$ по рекуррентным формулам требует $n-m$ умножений (параметры Δ_j для векторов базиса равны нулю). Составление строки $X_r^{(l)}$ связано с $(n-m)m$ операциями умножения ($x_{rj}^{(l)}$ для векторов базиса не вычисляются: $x_{rs_r}^{(l)}=1$, а $x_{rs_i}^{(l)}=0$ при $i=1, 2, \ldots, m$; $i \neq r$). Столько же умножений требовалось при вычислении Δ_j во втором алгоритме метода улучшения плана. Наконец, вычисление строки $\theta^{(l)}$ требует менее $(n-m)$ делений.

Заметим, что в методе последовательного улучшения плана имеется известная свобода в выборе вектора A_k, вводимого в базис. В качестве вектора A_k можно, вообще говоря, выбирать любой вектор A_j с отрицательной оценкой Δ_j. Поэтому во втором алгоритме метода улучшения плана можно сэкономить некоторое число умножений, вычисляя параметры $\Delta_j^{(l)}$, до появления первой отрицательной оценки $\Delta_k^{(l)} < 0$. В методе уточнения оценок (в невырожденных задачах) вектор A_k выбирается однозначно по минимальному элементу $\theta_0^{(l)}$ строки $\theta^{(l)}$. Для построения строки $\theta^{(l)}$ необходимо вычислить все элементы строк $\Delta_j^{(l)}$ и $X_r^{(l)}$. Указанное обстоятельство дает при каждой итерации известное преимущество второму алгоритму метода улучшения плана.

Как уже отмечалось при описании первого алгоритма, до сих пор нет оценок, позволяющих сравнить количество



Выявление $x_{i0} < 0$
нет
Случай 1° (план оптимален)
да
I этап
Выбор вектора A_{sr}, исключаемого из базиса, $x_{r0} < 0$. Вычисление Δ и X_r.
Проверка условий $x_{rj} \geqslant 0$ для всех j
да
Случай 2° (задача неразрешима)
нет
Случай 3°
Выявление позиций, на которых достигается θ_0
II этап
Выбор вектора A_k, включаемого в базис. Вычисление $x_{ik}^{(l)}$.
Преобразование главной части основной таблицы по рекуррентным формулам

Рис. 6.7.

итераций, необходимых для решения задачи по обоим описанным методам.

Сравнение первого и второго алгоритмов метода последовательного уточнения оценок приводит к тем же выводам, что и сравнение обоих алгоритмов метода улучшения плана.

6.4. Проиллюстрируем решение задачи линейного программирования по второму алгоритму метода последовательного уточнения оценок на примере, рассмотренном в п. 5.3 при изложении первого алгоритма.

Весь ход вычислений зафиксирован в основных таблицах 6.9 (0—3) и вспомогательной табл. 6.10.

Примем в качестве исходного сопряженного базиса ту же систему векторов, что и при решении задачи по первому алгоритму. Базисные переменные не входят в линейную форму задачи. Поэтому элементы строки Δ вспомогательной таблицы совпадают с соответствующими коэффициентами линейной формы, взятыми с обратным знаком. Из базиса выводится вектор $A_{s_1}=A_8$, отвечающий наибольшей по абсолютной величине отрицательной компоненте псевдоплана.

Строка X_1, элементы которой вычисляются по формуле (6.5), содержит отрицательные величины. Следовательно, мы имеем дело со случаем 3°.

В строке θ заполняются лишь позиции 1, 3 и 6, которые соответствуют отрицательным элементам строки X_1. Наименьший элемент строки θ достигается на векторе A_3. Последний подлежит включению в первую позицию базиса вместо вектора A_8. Коэффициенты разложения A_3 по исходному базису вычисляются по формулам (6.1) и записываются в столбец $A_k^{(l)}$ основной табл. 0. В правый нижний угол таблицы записывается значение $\Delta_k=\Delta_3=2$. После этого главная часть табл. 0 преобразуется в главную часть основной табл. 1 по рекуррентным формулам

$$e'_{1j}=\frac{1}{x_{13}}e_{1j},$$

$$e'_{ij}=e_{ij}-e'_{1j}x_{i3},$$

$$i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\quad j=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

Например,

$$e_{11}=\frac{1}{-3}\cdot(-1)=0{,}333,$$

$$e_{51}=0-0{,}333\cdot(-2)=0{,}667.$$

Приступаем к первому этапу итерации 1.

Столбец e_0 снова содержит отрицательные элементы. Исключению из базиса подлежит $A_{s_1}=A_{11}$. Строка Δ' вспомогательной таблицы вычисляется по рекуррентной формуле (6.7). Имеем, например,

$$\Delta'_6=\Delta_6+\theta_0x_{16}=2+0{,}667\cdot(-2)=0{,}667.$$

Таблицы 6.9 (0—3)

	№	C_X	$Б_X$	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	$A_k^{(e)}$	Номер таблицы
←	1		A_8	−10	−1					−3	0
	2		A_9	−4		−1					
	3		A_{10}	−2			−1			−5	
	4		A_{11}	−5				−1			
	5		A_{12}	−3					−1	−2	
	6	—	L							2	
→	1	−2	A_3	3,333	0,333					0,667	1
	2		A_9	−4		−1				−1	
	3		A_{10}	14,667	1,667		−1			3,333	
←	4		A_{11}	−5				−1		−3	
	5		A_{12}	3,667	0,667				−1	1,333	
	6	—	L	−6;667	−0,667					0,667	
	1	−2	A_3	2,222	0,333			−0,222			2
←	2		A_9	−2,333		−1		0,333		−4	
	3		A_{10}	9,111	1,667		−1	−1,111		−1	
→	4	−2	A_6	1,667				0,333			
	5	—	A_{12}	1,444	0,667			−0,444	−1		
	6		L	−7,778	−0,667			−0,222		1	
	1	−2	A_3	2,222	0,333			−0,222			3
→	2	−1	A_2	0,583		0,25		−0,0833			
	3		A_{10}	9,694	1,667	0,25	−1	−1,194			
	4	−2	A_6	1,667				0,333			
	5		A_{12}	1,444	0,667			−0,444	−1		
	6	—	L	−8,361	−0,667	−0,25		−0,139			

Таблица 6.10

Вспомогательная таблица

№	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}
1	10	2		3			2		—1				
2	4		4			3	1			—1			
3	2		1	5		4		5			—1		
4	5	3			2		3					—1	
5	3			2	4			3					—1
6	c	—3	—1	—2	—3	—1	—2	—5					
0	Δ	3	1	2	3	1	2	5					
	X_1	—2		—3			—2		1				
	θ	1,5		**0,667**			1						
1	Δ'	1,667	1		3	1	0,667	5	0,667				
	X'_4	—3			—2		—3					1	
	θ'	0,556	—	—	1,5	—	**0,222**	—	—	—	—	—	—
2	Δ''	1	1		2,556	1		5	0,667			0,222	
	X''_2	1	—4		0,667	—3				1		—0,333	
	θ''	—	**0,25**	—	—	0,333	—	—	—	—	—	0,667	—

Строка X'_4 вспомогательной таблицы содержит отрицательные элементы. Следовательно, нет оснований для суждений о неразрешимости задачи.

Переходим ко второму этапу итерации 1. Заполняем строку θ'. Наименьший элемент этой строки $\theta'_0 = 0{,}222$ достигается на векторе A_6. Вектор условий A_6 вводится в четвертую позицию очередного базиса вместо вектора $A_{s_4} = A_{11}$. В последний столбец $A_k^{(l)}$ основной табл. 1 вносятся вычисляемые по формуле (6.2) коэффициенты x'_{i6} разложения вектора A_6 по текущему базису. В $(m+1)$-й (шестой) позиции столбца $A_k^{(l)}$ указывается значение $\Delta'_6 = 0{,}667$.

Основная табл. 1 полностью заполнена и подготовлена к преобразованию ее главной части в главную часть основной табл. 2. Продолжение той же процедуры приводит после третьей итерации к псевдоплану X''' с положительными составляющими. План X''' является решением задачи. Базисные составляющие оптимального опорного плана задачи записаны в столбце e_0 основной табл. 3. Максимальное значение линейной формы прямой задачи и составляющие решения сопряженной задачи содержатся в последней строке основной табл. 3.

В основных таблицах 6.11 (0—2) и вспомогательной табл. 6.12 записан ход решения по второму алгоритму метода уточнения оценок примера 2, рассмотренного в п. 5.3 при изложении первого алгоритма.

6.5. Рассмотрим особенности применения второго алгоритма метода последовательного уточнения оценок к задачам линейного программирования, переменные которых ограничены с обеих сторон.

Учитывая замечания, приведенные в п. 5.5, можно без труда модернизировать вычислительную схему второго алгоритма метода уточнения оценок и приспособить ее к решению задач линейного программирования с двухсторонними ограничениями.

Основные таблицы второго алгоритма для задачи с двухсторонними ограничениями отличаются от основных таблиц решения задачи, записанной в канонической форме тремя дополнительными столбцами— $(\alpha;\ \beta)_X$, δ и $\tilde{e}_0$ (табл. 6.13).

Столбцы $(\alpha;\ \beta)_X$ и δ заполняются по тем же правилам, что и в первом алгоритме (см. п. 5.5). Столбец $\tilde{e}_0$ связан с вектором $e_0 = B - \sum_{j \in I_Y} x_j A_j$ так же, как вектор $\tilde{A}_0$ связан

Таблицы 6.11 (0—2)

	№	C_X	$Б_X$	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	$A_k^{(e)}$	Номер таблицы
←	1		A_7	−12	−1					−8	0
	2		A_8	−5		−1				−3	
	3		A_9	−7			−1			−1	
	4		A_{10}	−10				−1		−1	
	5		A_{11}	−4					−1	−6	
	6	—	L							1	
→	1	−1	A_4	1,5	0,125					0,125	1
	2		A_8	−0,5	0,375	−1				−0,625	
	3		A_9	−5,5	0,125		−1			−3,875	
←	4		A_{10}	−8,5	0,125			−1		−5,875	
	5		A_{11}	5	0,75				−1	−2,25	
	6	—	L	−1,5	−0,125					1,875	
	1	−1	A_4	1,319	0,128			−0,021			2
	2		A_8	0,404	0,362	−1		0,106			
	3		A_9	0,106	0,043		−1	0,660			
→	4	−2	A_5	1,447	−0,021			0,170			
	5		A_{11}	8,255	0,702			0,383	−1		
	6	—	L	−4,213	−0,085			−0,319			

Таблица 6.12

Вспомогательная таблица

№		B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}
1		12	6	2	3	8	1	2	−1				
2		5	4	5	8	3	1	7		−1			
3		7	2			1	4	2			−1		
4		10	5	2	1	1	6	5				−1	
5		4	1	3		6	3	2					−1
6		C	−5	−3	−4	−1	−2	−3					
0	Δ		5	3	4	1	2	3					
	X_1		−6	−2	−3	−8	−1	−2	1				
	θ		0,833	1,5	1,333	**0,125**	2	1,5	—	—	—	—	—
1	Δ'		4,25	2,75	3,625		1,875	2,75	0,125				
	X_4'		−4,25	−1,75	−0,625		−5,875	4,75	−0,125			1	
	θ'		1	1,571	5,8		**0,319**	0,579	1	—	—	—	—

Таблица 6.13

Основная таблица l

№	C_X	$Б_X$	e_0	$\breve{e}_0$	e_1	e_2	...	e_m	$(\alpha;\ \beta)_X$	δ	$A_k^{(l)}$
1	c_{s_1}	A_{s_1}	$e_{10}^{(l)}$	$\breve{e}_{10}^{(l)}$	$e_{11}^{(l)}$	$e_{12}^{(l)}$	...	$e_{1m}^{(l)}$	$\alpha_{s_1};\ \beta_{s_1}$		$x_{1k}^{(l)}$
2	c_{s_2}	A_{s_2}	$e_{20}^{(l)}$	$\breve{e}_{20}^{(l)}$	$e_{21}^{(l)}$	$e_{22}^{(l)}$	...	$e_{2m}^{(l)}$	$\alpha_{s_2};\ \beta_{s_2}$		$x_{2k}^{(l)}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮	⋮
r	c_{s_r}	A_{s_r}	$e_{r0}^{(l)}$	$\breve{e}_{r0}^{(l)}$	$e_{r1}^{(l)}$	$e_{r2}^{(l)}$	...	$e_{rm}^{(l)}$	$\alpha_{s_r};\ \beta_{s_r}$	$\delta_r^{(l)}\ (\gamma_r)$	$x_{rk}^{(l)}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮	⋮
m	c_{s_m}	A_{s_m}	$e_{m0}^{(l)}$	$\breve{e}_{m0}^{(l)}$	$e_{m1}^{(l)}$	$e_{m2}^{(l)}$	...	$e_{mm}^{(l)}$	$\alpha_{s_m};\ \beta_{s_m}$		$x_{mk}^{(l)}$
$m+1$	—	—	$L^{(l)}$	—	$y_1^{(l)}$	$y_2^{(l)}$	...	$y_m^{(l)}$	—	—	$\Delta_k^{(l)}$

с вектором A_0 в первом алгоритме:

$$\tilde{e}_0 = e_0 + x_k A_k - \gamma_r A_{s_r},$$

или

$$\tilde{e}_{i0} = \begin{cases} e_{i0} + x_k x_{ik} & \text{при} \quad i \neq r, \\ e_{r0} + x_k x_{rk} - \gamma_r & \text{при} \quad i = r. \end{cases}$$

В верхней части вспомогательной таблицы добавляется $(m+2)$-я строка (α; β), содержащая границы интервала изменения переменных задачи.

При решении задачи, записанной в канонической форме, в каждой итерации к нижней части вспомогательной табл. 6.14 добавляется по три строки ($\Delta^{(l)}$, $X_r^{(l)}$ и $\theta^{(l)}$). В задаче с двухсторонними ограничениями каждый шаг требует, кроме того, заполнения строки $X^{(l)}$, содержащей отметки α, β внебазисных переменных текущего псевдоплана.

Строки $X_r^{(l)}$ и $\Delta^{(l)}$ вспомогательной таблицы вычисляются по общим правилам, сформулированным в пп. 6.1 и 6.2 при изложении второго алгоритма. Вычисление строки θ производится точно так же, как и в первом алгоритме решения задачи с двухсторонними ограничениями (см. п. 5.5).

Наметим кратко порядок вычислений, связанных с отдельной $(l+1)$-й итерацией.

К началу $(l+1)$-й итерации основная таблица (за исключением столбцов $\tilde{e}_0$ и A_k) и стрóки вспомогательной таблицы, отвечающие l-й итерации, предполагаются заполненными.

Псевдоплан $X^{(l)}$ является решением задачи, если все элементы столбца δ основной таблицы l прочеркнуты (случай 1°). Если псевдоплан не является планом задачи, следует продолжить процесс решения задачи. Вектор A_{s_r} с наибольшим уклонением $\delta_r^{(l)}$ исключается из базиса. После этого заполняются строки $X^{(l)}$, $\Delta^{(l)}$ и $X_r^{(l)}$ вспомогательной таблицы. Строка $X^{(l)}$ заполняется по тем же правилам, что и в первом алгоритме (см. п. 5.5). Параметры $\Delta_j^{(l)}$ вычисляются в соответствии с рекуррентными формулами (6.7) по элементам предшествующих строк ($\Delta^{(l-1)}$, $X_r^{(l-1)}$, $\theta^{(l-1)}$). Составляющие строки $X_r^{(l)}$ вычисляются, как и для канонической формы задачи, по формулам (6.5).

Строки $X^{(l)}$ и $X_r^{(l)}$ позволяют провести ограниченную проверку выполнения условий неразрешимости задачи. (Полная

Таблица 6.14

Вспомогательная таблица

№	B	A_1	A_2	...	A_k	...	A_n
1	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1k}	...	a_{1n}
2	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2k}	...	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$
m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mk}	...	a_{mn}
$m+1$	c_j	c_1	c_2	...	c_k	...	c_n
$m+2$	$\alpha;\ \beta$	$\alpha_1;\ \beta_1$	$\alpha_2;\ \beta_2$	...	$\alpha_k;\ \beta_k$	...	$\alpha_n;\ \beta_n$
0	Δ	Δ_1	Δ_2	...	Δ_k	...	Δ_n
	X			...	γ_k	...	
	X_r	x_{r1}	x_{r2}	...	x_{rk}	...	x_{rn}
	θ			...	θ_0	...	
1	Δ'	Δ_1'	Δ_2'	...	Δ_k'	...	Δ_n'
	X'			...	γ_k	...	
	X_r'	x_{r1}'	x_{r2}'	...	x_{rk}'	...	x_{rn}'
	θ'			...		...	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$

проверка на данной итерации требует вычисления всех $X_r^{(l)}$, для которых $x_{i_0} < 0$.) Несовместность условий задачи устанавливается в одном из следующих двух случаев:

а) $\delta_r^{(l)}$ имеет отметку α, $x_{rj} \geqslant 0$ для $x_j = \alpha_j$ и $x_{rj} \leqslant 0$ для $x_j = \beta_j$ $(j \notin I_Y)$;

б) $\delta_r^{(l)}$ имеет отметку β, $x_{rj} \leqslant 0$ для $x_j = \alpha_j$ и $x_{rj} \geqslant 0$ для $x_j = \beta_j$ $(j \notin I_Y)$.

Ясно, что неразрешимость задачи, если она имеет место, во втором алгоритме устанавливается, вообще говоря, позже, чем в первом.

Проверкой выполнения условий случая 1° и 2° завершается первый этап итерации. Ко второму этапу итерации переходят, если имеет место случай 3°. На втором этапе выбирается вектор A_k, подлежащий вводу в базис, и заполняется основная таблица $(l+1)$ (кроме столбцов $\tilde{A}_0$ и A_k).

Вычисления проводятся в следующем порядке. По правилам, изложенным при описании первого алгоритма (см. п. 5.5), заполняется строка $\theta^{(l)}$ вспомогательной таблицы. В базис вводится вектор A_k, на котором достигается

$$\theta_0^{(l)} = \min_j \theta_j^{(l)}.$$

В вырожденном случае следует до обнаружения цикла пользоваться упрощенным правилом однозначного выбора A_k (по наименьшему или наибольшему индексу). Строгое правило, гарантирующее от зацикливания, сформулировано в п. 4.4. Заметим, что для реализации этого правила необходимо иметь коэффициенты $x_{ij}^{(l)}$ разложения векторов A_j по базису псевдоплана $X^{(l)}$.

В таблицах первого алгоритма содержатся параметры x_{ij}. Во втором алгоритме вычисляются (по формуле (6.2)) только коэффициенты $x_{ik}^{(l)}$ — элементы последнего столбца $A_k^{(l)}$ основной таблицы l и $x_{rj}^{(l)}$ — элементы строки $X_r^{(l)}$ вспомогательной таблицы. При использовании строгого правила однозначного выбора вектора A_k, подлежащего вводу в базис, необходимо в вырожденных случаях по мере надобности последовательно вычислять по формулам (6.2) значения коэффициентов $x_{ij}^{(l)}$. Таким образом, применение правила, исключающего возможность цикла, во втором алгоритме связано со значительно более громоздкими вычислениями, чем в первом.

После определения элементов $x_{ik}^{(l)}$ последнего столбца основной таблицы l переходят к заполнению главной части основной таблицы $(l+1)$. Столбцы $e_j (j=1, 2, \ldots, m)$ таблицы $(l+1)$ выражаются через элементы таблицы l по рекуррентным формулам (6.3). Компоненты очередного псевдоплана — составляющие столбца e_0 таблицы $(l+1)$ — определяются в соответствии с теми же рекуррентными формулами по элементам столбца $\tilde{e}_0$ таблицы l:

$$e_{i0}^{(l+1)} = \begin{cases} \tilde{e}_{i0}^{(l)} - \dfrac{x_{ik}^{(l)}}{x_{rk}^{(l)}} \tilde{e}_{r0}^{(l)} & \text{при} \quad i \neq r, \\ \dfrac{\tilde{e}_{r0}^{(l)}}{x_{rk}^{(l)}} & \text{при} \quad i = r. \end{cases}$$

Преобразование столбцов $(\alpha; \beta)_X$ и δ производится так же, как и в первом алгоритме. Значение линейной формы преобразовывается от шага к шагу по формуле (5.17).

Строка $(m+1)$ основной таблицы необходима только для вычисления исходных значений параметров Δ. В дальнейшем компоненты ядра очередного опорного плана сопряженной задачи нужны лишь для контроля. Составляющие $y_j = e_{m+1,\,j}$ $(j=1, 2, \ldots, m)$ могут вычисляться либо непосредственно по формулам (6.1), либо из рекуррентных соотношений (6.3). Дополнительные возможности для контроля определяются двумя способами вычисления параметров Δ_j — по рекуррентным формулам (6.7) и непосредственно из соотношений (6.4).

Описанная последовательность вычислений приводит через конечное число шагов к случаю 1° или 2°.

На рис. 6.8 изображена блок-схема решения задачи линейного программирования с двухсторонними ограничениями по второму алгоритму метода последовательного уточнения оценок.

В основных таблицах 6.15 (0 — 2) и вспомогательной табл. 6.16 записан ход решения по второму алгоритму метода уточнения оценок задачи линейного программирования с двухсторонними ограничениями, рассмотренной в п. 5.5 при изложении первого алгоритма.

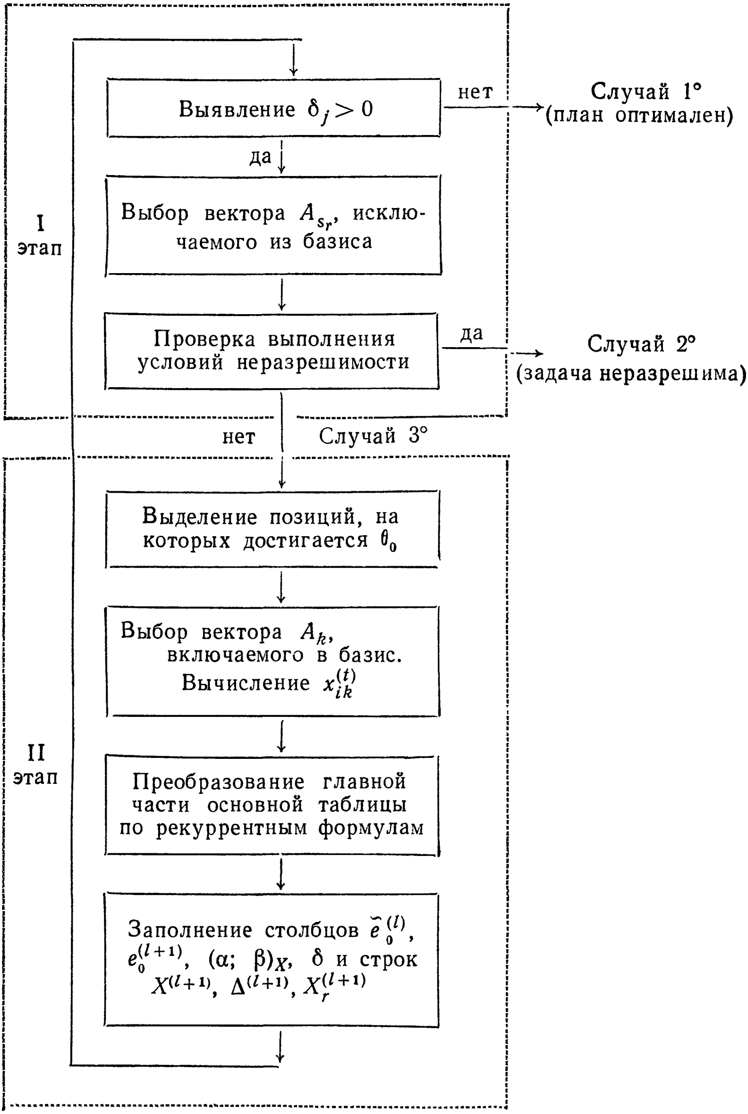

I этап
Выявление $\delta_j > 0$
нет
Случай 1° (план оптимален)
да
Выбор вектора A_{s_r}, исключаемого из базиса
Проверка выполнения условий неразрешимости
да
Случай 2° (задача неразрешима)
нет
Случай 3°
II этап
Выделение позиций, на которых достигается θ_0
Выбор вектора A_k, включаемого в базис. Вычисление $x_{ik}^{(t)}$
Преобразование главной части основной таблицы по рекуррентным формулам
Заполнение столбцов $\tilde{e}_0^{(l)}$, $e_0^{(l+1)}$, $(\alpha;\ \beta)_X$, δ и строк $X^{(l+1)}$, $\Delta^{(l+1)}$, $X_r^{(l+1)}$

Рис. 6.8.

Таблицы 6.15 (0—2)

	№	C_X	$Б_X$	e_0	$\tilde{e}_0$	e_1	e_2	e_3	e_4	$(\alpha; \beta)$	δ	$A_k^{(e)}$	Номер таблицы
←	1		A_5	—8	—2	1				—1; 1	7(α)	5	0
	2	1	A_6	2	5		1			—1; 1	1(β)	3	
	3	2	A_7	—6	—1			1		—1; 1	5(α)	5	
	4		A_8	2	3				1	—1; 1	1(β)	1	
	5	—	Δ	24	—					—	—	—1	
→	1	14	A_4	—0,4	—0,6	0,2				—1; 1	—	0,2	1
←	2	1	A_6	6,2	1,8	—0,6	1			—1; 1	5,2(β)	3,4	
	3	2	A_7	1		—1		1		—1; 1	—	1	
	4		A_8	3,4	1,6	—0,2			1	—1; 1	2,4(β)	1,8	
	5	—	Δ	22,6	—	0,2				—	—	6,2	
	1	14	A_4	—0,706		0,235	—0,059			—1; 1			2
→	2	2	A_2	0,529		—0,176	0,294			—1; 1			
	3	2	A_7	—0,529		—0,824	—0,294	1		—1; 1			
	4	—	A_8	0,647		0,118	—0,529		1	—1; 1			
	5	—	Δ	13,118	—	1,294	—1,824			—	—		

Таблицы 6.16

№		B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
1		1	2	1	3	5	1			
2		4	1	4	2	3		1		
3		4	4	2	3	5			1	
4		8	3	2	4	1				1
5		c_j	12	2	10	14		1	2	
6		$\alpha;\ \beta$	−1; 1	−1; 1	−1; 1	−1; 1	−1; 1	−1; 1	−1; 1	−1; 1
0	Δ		−3	6	−2	−1				
	X		β	α	β	β	—	—	—	—
	X_r		2	1	3	5	1			
	θ		1,5	—	0,667	**0,2**	—	—	—	—
1	Δ'		−2,6	6,2	−1,4		0,2			
	X'		β	α	β	—	α	—	—	—
	X'_r		−0,2	3,4	0,2		−0,6			
	θ'		13	**1,824**	—	—	—	—	—	—
2	Δ''		−2,235		−1,765		1,294	−1,824		
	X''		β	—	β	—	α	β	—	—
	X''_r									
	θ''			—		—			—	—

§ 7. Способы определения исходного опорного плана сопряженной задачи

7.1. Решение задачи линейного программирования по методу последовательного уточнения оценок начинается с известного сопряженного базиса.

В ряде задач конкретный вид ограничений или физический смысл условий задачи позволяет без труда построить исходный опорный план сопряженной задачи, а следовательно, и сопряженный базис. Такими задачами являются, как мы видели в п. 3.7, задачи линейного программирования, переменные которых ограничены с обеих сторон. В п. 7.2 будет рассмотрен еще один класс задач, в которых исходный сопряженный базис может быть непосредственно указан.

В других случаях не представляет труда определение исходного плана сопряженной задачи, не гарантируя его опорности. Примеры таких задач будут указаны в п. 7.2. Естественно ожидать, что построение исходного опорного плана облегчается наличием плана задачи. В п. 7.3 будет изложен метод, а в п. 7.4 алгоритм построения опорного плана задачи по ее неопорному плану. В пп. 7.5 и 7.6 описанный метод иллюстрируется примерами.

В пп. 7.7 и 7.8 рассматриваются два способа решения задачи методом последовательного уточнения оценок в случаях, когда определение начального, даже неопорного, плана представляет затруднения.

7.2. Рассмотрим класс задач линейного программирования, в которых начальный сопряженный базис может быть определен без каких бы то ни было вычислений.

Пусть задача линейного программирования задана в следующей форме:

Требуется определить максимум линейной формы

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{7.1}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m, \tag{7.2}$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{7.3}$$

Пусть при этом все коэффициенты c_j $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ линейной формы (7.1) неположительны.

Задача сводится к канонической форме, если заменить условия (7.2), (7.3) следующими:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i, \qquad i=1,\ 2,\ldots,\ m, \tag{7.4}$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j=1,\ 2,\ldots,\ n+m. \tag{7.5}$$

Задача, сопряженная с задачей (7.1), (7.4), (7.5), формулируется следующим образом:

Требуется вычислить минимум линейной формы

$$\check{L}(Y)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \tag{7.6}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j, \qquad j=1,\ 2, \ldots,\ n, \tag{7.7}$$

$$-y_i \geqslant 0, \qquad i=1,\ 2, \ldots,\ m. \tag{7.8}$$

Ясно, что вектор

$$Y=(\underbrace{0, \ldots, 0}_{m})$$

является опорным планом сопряженной задачи (7.6)—(7.8). Если все $c_j<0$, то опорный план Y является невырожденным планом. Сопряженный базис составляется в данном случае из векторов

$$A_{n+i}=(\underbrace{\overbrace{0, \ldots, 0,\ -1}^{i}, 0, \ldots, 0}_{m}).$$

Таким образом, векторы A_{n+i} $(i=1,\ 2, \ldots,\ m)$ образуют базис исходного псевдоплана. Базисные составляющие начального псевдоплана равны соответствующим компонентам вектора ограничений, взятым с обратным знаком. Точно так же коэффициенты x_{ij} разложения векторов условий A_j по начальному базису псевдоплана равны соответствующим составляющим этих векторов, взятым с обратным знаком.

Рассмотрим теперь класс задач, в которых исходный опорный план не может быть так просто указан, но определение неопорного плана не представляет труда.

Пусть в задаче (1.1)—(1.3) одна и та же компонента a_{tj} всех векторов условий A_j положительна. Рассмотрим вектор

$$Y=(\underbrace{\overbrace{0, \ldots, 0,\ y_t}^{t},\ 0, \ldots, 0}_{m}),$$

где

$$y_t \geqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \frac{c_j}{a_{tj}}.$$

Вектор Y удовлетворяет всем условиям задачи (1.4), (1.5) и, следовательно, является планом сопряженной задачи. К сожалению, вектор Y обычно не является опорным планом. В связи с этим представляет интерес изучение метода, позволяющего по произвольному неопорному плану задачи построить ее опорный план.

7.3. Метод, который будет изложен в этом пункте, естественно назвать *градиентным методом* определения опорного плана. Поясним вначале в геометрических терминах идею метода.

Система неравенств — условия сопряженной задачи — высекает в m-мерном пространстве переменных $y_1, y_2, \ldots, y_m$ многогранное множество S — множество планов сопряженной задачи. Каждый опорный план соответствует вершине множества S.

Пусть задан некоторый план Y' задачи, не совпадающий ни с одной из вершин S. Точка Y' расположена внутри некоторой грани S_1 многогранного множества S (S_1 может совпадать с S). Линейная форма сопряженной задачи порождает на S_1 некоторую линейную функцию. Направление градиента этой функции совпадает с проекцией вектора ограничений B на грань S_1. Будем передвигать точку Y' в направлении наискорейшего убывания линейной функции до пересечения с границей S'. Вновь полученный таким образом план Y'' лежит внутри грани S_2, размерность которой строго меньше размерности S_1. Проектируя направляющий вектор гиперплоскости линейной формы $\tilde{L}$ на грань S_2, получим направление наискорейшего убывания линейной функции, которую $\tilde{L}$ определяет на S_2.

Продолжая тем же путем процесс дальше и понижая от шага к шагу размерность граней, мы в конце концов попадем в грань нулевой размерности — в некоторую вершину многогранного множества S. Эта вершина соответствует опорному плану сопряженной задачи. При этом, как правило, полученный опорный план оказывается достаточно хорошим приближением к решению задачи. Это и ясно: движение от Y' к Y'' и от Y'' к Y''' и т. д. шло в направлении наискорейшего убывания линейной формы $\tilde{L}$ на соответствующих гранях множества S.

В процессе движения по градиентному методу можно попасть на грань S_p, параллельную гиперплоскости линейной формы. На этой грани значение линейной формы постоянно. Дальнейшее перемещение возможно, вообще говоря, по любому направлению, обеспечивающему выход на границу этой грани. Если грань S_p представляет собой многогранник, то прямолинейное движение в любом направлении приведет к образу плана, расположенному на грани меньшей размерности. Выбор направления перемещения точки $Y^{(p)}$ несколько ограничивается, если грань S_p—неограниченное многогранное множество. Но и в этом случае всегда можно обеспечить выход на границу рассматриваемой грани.

Облечем геометрические рассуждения в аналитическую форму.

Пусть $Y' = (y'_1, \ldots, y'_m)$—произвольный план сопряженной задачи. Без ограничения общности можно считать, что

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y'_i > c_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n_1, \tag{7.9}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y'_i = c_j, \qquad j = n_1 + 1, \ldots, n. \tag{7.10}$$

В частности, n_1 может совпадать с n.

Пусть среди равенств (7.10) имеются r линейно независимых. Если $r = m$, Y'—опорный план задачи. Будем считать $r < m$.

Рассмотрим систему равенств и неравенств, определяемых планом Y':

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n_1, \tag{7.11}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j, \qquad j = n_1 + 1, \ldots, n. \tag{7.12}$$

Соотношения (7.11), (7.12) определяют грань S_1 многогранного множества S условий сопряженной задачи; множество S_1 является гранью S минимальной размерности, содержащей точку Y'.

Выразим из системы (7.12) r переменных (пусть для определенности это $y_1, y_2, \ldots, y_r$) через остальные:

$$y_j = \sum_{i=r+1}^{m} d_{ij} y_i + d_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, r. \tag{7.13}$$

Заменим y_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ в неравенствах (7.11) их выражениями из (7.13). Получим систему неравенств относительно $y_{r+1}, y_{r+2}, \ldots, y_m$:

$$\sum_{i=r+1}^{m} a'_{ij} y_i \geqslant c'_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n_1. \tag{7.14}$$

Система (7.14) определяет, очевидно, необходимые и достаточные условия для того, чтобы вектор $Y = (y_1, \ldots, y_m)$, компоненты которого удовлетворяют равенствам (7.12) (или (7.13)), являлся планом задачи (1.4), (1.5).

Подставим в линейную форму (1.4) значения переменных $y_1, y_2, \ldots, y_r$ из (7.13). Получим линейную функцию переменных $y_{r+1}, \ldots, y_m$:

$$\tilde{L}' = \sum_{i=r+1}^{m} b'_i y_i + b_0. \tag{7.15}$$

Будем передвигать точку $Y' = (y'_1, \ldots, y'_m)$ в направлении наискорейшего убывания функции (7.15) до тех пор, пока хотя бы одно из неравенств системы (7.14) не обратится в равенство. Направление наискорейшего убывания $\tilde{L}'$ определяется ее вектором градиента, взятым с обратным знаком:

$$-B' = -(b'_{r+1}, \ldots, b'_m).$$

Здесь предполагается, что линейная форма (7.15) не постоянна на грани S_1. Это значит, что среди коэффициентов b_i, $i = r+1, \ldots, m$ имеются величины, отличные от нуля. Обозначим план, к которому мы пришли, через Y''. Точка Y'' принадлежит грани меньшей размерности, чем размерность грани, в которой расположена точка Y'.

Движение в направлении наискорейшего убывания аналитически означает переход от Y' к $Y'(\theta)$, где

$$y'_i(\theta) = y'_i - \theta b'_i, \qquad i = r+1, r+2, \ldots, m, \; \theta > 0.$$

Остальные компоненты $Y'(\theta)$ определяются из соотношений (7.12) или (7.13).

Вычислим параметры $\Delta_j(\theta)$ для вектора $Y'(\theta)$:

$$\Delta_j(\theta)=\sum_{i=r+1}^{m} a'_{ij}y'_i(\theta)-c_j=\sum_{i=r+1}^{m} a'_{ij}(y'_i-\theta b'_i)-c'_j=$$
$$=\Delta_j-\theta\sum_{i=r+1}^{m} a'_{ij}b'_i \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Обозначая

$$\sum_{i=r+1}^{m} a'_{ij}b'_i=\mu_j, \tag{7.16}$$

получим

$$\Delta_j(\theta)=\Delta_j-\theta\mu_j. \tag{7.17}$$

Точка $Y'(\theta)$ принадлежит многогранному множеству, определяемому условиями (7.11), (7.12),— грани S_1 множества S — при всех значениях θ, для которых выполняются условия вида (7.14) или, что то же самое,

$$\Delta_j(\theta)\geqslant 0, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n_1.$$

Учитывая (7.17), получим условия, ограничивающие изменение θ:

$$\Delta_j\geqslant\theta\mu_j, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{7.18}$$

Согласно (7.9) $\Delta_j>0$ для $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n_1$. Поэтому если все $\mu_j\leqslant 0$, можно выбрать θ сколь угодно большим и $Y'(\theta)$ не выйдет за область определения линейной формы $\tilde{L}'$. Это значит, что $\tilde{L}'$ при $\mu_j\leqslant 0$ $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ n_1)$ неограничена снизу на множестве переменных $y_{r+1},\ \ldots,\ y_m$, удовлетворяющих условиям (7.14). Другими словами, при $\mu_j\leqslant 0\,(j=1,\ 2,\ \ldots,\ n_1)$ сопряженная задача неразрешима.

Пусть теперь среди μ_j имеются положительные величины. Полагая

$$\theta_0=\min_{\mu_i>0}\frac{\Delta_j}{\mu_j}, \tag{7.19}$$

приходим к плану $Y''=(y''_1,\ y''_2,\ \ldots,\ y''_m)$, где $y''_i=y'_i(\theta_0)$ для $i=r+1,\ \ldots,\ m$, а составляющие $y''_1,\ \ldots,\ y''_r$ выражаются через уже определенные переменные по формулам (7.13).

По построению Y''

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i'' = c_j, \qquad j = n_1+1, \ldots, n.$$

Пусть θ_0 достигается при $j=k$,

$$\theta_0 = \min_{\mu_j>0} \frac{\Delta_j}{\mu_j} = \frac{\Delta_k}{\mu_k}.$$

Отсюда $\Delta_k(\theta_0) = 0$, или, что то же самое,

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ik}y_i'' = c_k. \tag{7.20}$$

Равенство

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ik}y_i = c_k \tag{7.21}$$

линейно независимо от системы уравнений (7.12). Действительно, система (7.12) эквивалентна (7.13). Следовательно, (7.21) может быть представлено в виде

$$\sum_{i=r+1}^{m} a'_{ik}y_i = c'_k. \tag{7.22}$$

В силу (7.16) из $\mu_k > 0$ вытекает, что по крайней мере один из a'_{ik} отличен от нуля. Пусть $a'_{sk} \neq 0$ и матрица D коэффициентов условий (7.13), (7.22) имеет вид

$$D = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & -d_{r+1,1} & \ldots & -d_{m1} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -d_{r+1,2} & \ldots & -d_{m2} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -d_{r+1,r} & \ldots & -d_{mr} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a'_{r+1,k} & \ldots & a'_{mk} \end{matrix} \right\|.$$

Определитель подматрицы, составленной из первых r столбцов матрицы D и столбца, содержащего элемент a'_{sk}, равен a'_{sk} и, следовательно, отличен от нуля. Это значит, что условие (7.22) линейно независимо от системы уравнений (7.12).

Таким образом, план Y'' обращает в равенства по крайней мере $r+1$ линейно независимых условий из системы ограничений сопряженной задачи. При этом

$$\begin{aligned}\tilde{L}(Y'') = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i'' = \sum_{i=r+1}^{m} b_i' y_i'(\theta_0) + b_0' = \\ = \sum_{i=r+1}^{m} b_i' y_i' + b_0' - \theta_0 \sum_{i=r+1}^{m} (b_i')^2 < \\ < \sum_{i=r+1}^{m} b_i' y_i' + b_0' = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i' = \tilde{L}(Y').\end{aligned}$$

Таким образом, если по крайней мере один из коэффициентов b_i' $(i = r+1, \ldots, m)$ отличен от нуля, то каждый шаг градиентного метода приводит к уменьшению линейной формы сопряженной задачи.

Пусть теперь все b_i' равны нулю. Геометрически это соответствует тому, что грань S_1, содержащая план Y' задачи, параллельна гиперплоскости линейной формы и, следовательно, L' сохраняет на S_1 постоянное значение, равное b_0'. В таком случае граница S_1 может быть достигнута, если перемещать Y' в соответствии с формулами

$$\left.\begin{aligned} y_{r+1}''(\theta) = y_{r+1}' - \theta, \\ y_i'' = y_i', \quad i = r+2, \ldots, m. \end{aligned}\right\} \qquad (7.23)$$

(Ясно, что роль переменной y_{r+1}' здесь может играть любая из y_i', где $i > r$.)

Условия, ограничивающие изменение θ, имеют в этом случае вид

$$\Delta_j(\theta) = \sum_{i=r+1}^{m} a_{ij}' y_i'(\theta) - c_j' \geqslant 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n_1,$$

или, что то же самое,

$$\Delta_j(\theta) = \Delta_j - \theta a_{r+1,\,j}' \geqslant 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n_1. \qquad (7.24)$$

Все $a_{r+1,\,j}'$ не могут одновременно обратиться в нуль. В противном случае среди неравенств (7.11) не было бы $m-r$ линейно независимых условий и система ограничений (1.5) содержала бы менее m независимых условий.

Величина θ_0 — предельное значение θ, не выводящее из грани S_1, — определяется согласно условиям (7.24) следующим образом:

$$\theta_0 = \begin{cases} \min\limits_{a'_{r+1,j}>0} \dfrac{\Delta_j}{a'_{r+1,j}}, & \text{если среди } a'_{r+1,j} \text{ имеются положительные величины,} \\ -\min\limits_{a'_{r+1,j}<0} \left(-\dfrac{\Delta_j}{a'_{r+1,j}}\right), & \text{если } a'_{r+1,j} \leqslant 0 \text{ для } j = 1, 2, \ldots, n_1. \end{cases} \tag{7.25}$$

Отметим, что при $a'_{r+1,j} \leqslant 0$ для $j = 1, 2, \ldots, n_1$ значение θ_0 оказывается отрицательным. Число линейно независимых условий, которым $Y'' = Y'(\theta_0)$ удовлетворяет как равенствам, возрастает. Однако линейная форма сохраняет при этом свое прежнее значение. Продолжая процесс, мы обязательно придем к опорному плану сопряженной задачи с тем же значением линейной формы. Ясно, что при этом будет сделано не более m шагов.

Градиентный метод построения опорного плана по известному плану задачи излагался здесь применительно к сопряженной задаче, поскольку неопорный план сопряженной задачи (1.4), (1.5) обычно проще определить, чем неопорный план прямой задачи (1.1)—(1.3). Естественно, что если известен план прямой задачи, то тот же градиентный метод приводит к опорному плану этой задачи. При этом целесообразно лишь несколько изменить схему счета, чтобы учесть особенности канонической формы задачи линейного программирования.

7.4. Вычисления по градиентному методу могут быть сведены в компактную схему. Переход от одной грани многогранного множества условий задачи к следующей грани меньшей размерности сводится к решению системы линейных уравнений методом последовательного исключения переменных. Вычислительная схема градиентного метода составляется из последовательности таблиц. Начальная таблица (табл. 0) представлена табл. 6.17. Здесь приняты следующие обозначения:

$$b_i = a_{i0}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$
$$c_j = a_{m+1,j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$
$$a_{m+1,0} = b_{m+1} = c_0 = L(X).$$

Столбцы таблицы (первые $m+1$ позиций) содержат компоненты расширенного вектора ограничений $\overline{A}_0$ и расширенных векторов условий $\overline{A}_j$:

$$\overline{A}_0 = \overline{B} = (b_1, \ldots, b_m, L(X)) = (a_{10}, \ldots, a_{m0}, a_{m+1,0}),$$
$$\overline{A}_j = (a_{1j}, \ldots, a_{mj}, c_j) = (a_{1j}, \ldots, a_{mj}, a_{m+1,j});$$
$$j = 1, 2, \ldots, n.$$

Будем называть матрицу $\|a_{ij}\|$ $(i = 1, 2, \ldots, m, m+1;$ $j = 0, 1, 2, \ldots, n)$ главной частью таблицы.

Таблица 6.17

Таблица 0

№	$\overline{B}=\overline{A}_0$	$\overline{A}_1$	$\overline{A}_2$	...	$\overline{A}_n$
1	a_{10}	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
2	a_{20}	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮
m	a_{m0}	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}
$m+1$	$L(X)$	$a_{m+1,1}$	$a_{m+1,2}$	...	$a_{m+1,n}$
$m+2$	—	Δ_1	Δ_2	...	Δ_n

В последнюю ($(m+2)$-ю) строку таблицы записываются разности (Δ) левых и правых частей условий (1.5), полученные при подстановке вместо Y некоторого плана Y' задачи. Все элементы этой строки неотрицательные величины.

Позиция Δ_0 не заполняется.

Пусть при $Y = Y'$ элементы $(m+2)$-й строки $\Delta_{t_1}, \ldots, \Delta_{t_{n-n_1}}$ обратились в нуль. План Y' обращает, таким образом, в равенства $n-n_1$ условий системы (1.5). Воспользуемся этими уравнениями для исключения части переменных из остальных условий системы (1.5) и линейной формы задачи. Удобно исключать переменные постепенно, по одному, используя для преобразования системы рекуррентные формулы метода полного исключения Гаусса.

Выразим из t_1-го уравнения одно из переменных, например y_k (единственное требование к индексу $k \leqslant m$ — соблюдение неравенства $a_{kt_1} \neq 0$) и подставим результат в остальные условия и линейную форму задачи. Таким образом, главная часть табл. 0 (матрица $\|a_{ij}\|$) перейдет в главную часть табл. 1 (матрицу $\|a'_{ij}\|$). Главные части таблиц связаны рекуррентными формулами:

$$a'_{ij}=\begin{cases} a_{ij}-\dfrac{a_{kj}}{a_{kt_1}}\,a_{it_1} & \text{при } j\neq t_1,\\ \dfrac{a_{it_1}}{a_{kt_1}} & \text{при } j=t_1,\end{cases} \tag{7.26}$$

$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ m,\ m+1;\ j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

или, что то же самое,

$$a'_{ij}=\begin{cases} a_{ij}-a'_{it_1}\cdot a_{kj} & \text{при } j\neq t_1,\\ \dfrac{a_{it_1}}{a_{kt_1}} & \text{при } j=t_1,\end{cases} \tag{7.26'}$$

$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ m,\ m+1;\ j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Как видно из формул (7.26), k-я строка табл. 1 превращается в единичную вектор-строку

$$a'_{kj}=\begin{cases} 0 & \text{при } j\neq t_1,\\ 1 & \text{при } j=t_1.\end{cases}$$

Будем называть такие единичные вектор-строки преобразованными строками.

Если $n-n_1>1$, строка $(m+2)$ табл. 0 не преобразовывается ($\Delta'=\Delta$).

Таким же путем переходят от табл. 1 к табл. 2 и т. д. до тех пор, пока все $n-n_1$ равенств не будут использованы для исключения переменных и преобразования матрицы $\|a_{ij}\|$ ($i=1,\ \ldots,\ m+1;\ j=0,\ 1,\ \ldots,\ n$). В результате мы приходим к таблице с r преобразованными строками — $(n+1)$-мерными единичными векторами. Единичные элементы этих строк расположены в столбцах, отвечающих нулевым значениям Δ_j. Процесс заканчивается, когда на пересечении столбцов, для которых $\Delta_j=0$, с еще непреобразованными строками остаются только нулевые элементы.

При $n=n_1$ необходимость в описанных преобразованиях отпадает.

Если $r=m$, задача решена — векторы A_j, соответствующие единицам преобразованных строк, образуют базис опорного плана сопряженной задачи.

Пусть теперь $r<m$. Во всех таблицах, кроме последней, $(m+2)$-я строка (Δ) не преобразовывалась, $\Delta=\Delta'=\Delta''=\ldots$ В последней таблице с r преобразованными строками следует преобразовать строку Δ в строку $\Delta^{(r)}=\Delta(\theta_0)$ по формуле (см. (7.17) и (7.24))

$$\Delta_j^{(r)}=\Delta_j(\theta_0)=\Delta_j-\theta_0^{(r)}\mu_j^{(r)}, \tag{7.27}$$

где

$$\mu_j^{(r)}=\begin{cases}\sum\limits_{i=r+1}^{m} a_{s_i j}^{(r)}a_{s_i 0}^{(r)}, & \text{если по крайней мере одно из } a_{s_i 0}^{(r)}=b_{s_i}^{(r)} \text{ отлично от нуля } (i=r+1,\ldots m),\\ a_{s_{r+1}j}, & \text{если все } b_{s_i}^{(r)} \text{ равны нулю } (i=r+1,\ldots,m).\end{cases} \tag{7.28}$$

Здесь s_i — номера непреобразованных строк, индекс j соответствует столбцам с $\Delta_j>0$,

$$\theta_0^{(r)}=\begin{cases}\min\limits_{\mu_j>0}\dfrac{\Delta_j}{\mu_j^{(r)}}, & \text{если среди } \mu_j^{(r)} \text{ имеются положительные},\\ -\min\limits_{\mu_j<0}\left(-\dfrac{\Delta_j}{\mu_j^{(r)}}\right), & \text{если все } b_{s_i}^{(r)} \text{ равны нулю и все } \mu_j^{(r)}\leqslant 0.\end{cases} \tag{7.29}$$

В выражении для $\mu_j^{(r)}$ индекс s_{r+1} — номер любой из непреобразованных строк, для которой не все элементы, соответствующие $\Delta_j>0$, равны нулю.

В таблицах, отвечающих шагам градиентного метода, на которых преобразовывается Δ, целесообразно записывать параметры $\Delta_j^{(r)}$ не в $(m+2)$-ю строку (как и в табл. 0), а в $(m+4)$-ю. В этих таблицах элементы $\mu_j^{(r)}$ помещаются в $(m+2)$-ю строку, а $(m+3)$-я строка заполняется значениями $\theta^{(r)}$ — отношениями $\frac{\Delta_j}{\mu_j^{(r)}}$. Элементы строки $\theta^{(r)}$ вычисляются только для тех позиций, для которых $\mu_j^{(r)} > 0$. В свою очередь параметры $\mu_j^{(r)}$ вычисляются только при $\Delta_j > 0$. В тех случаях, когда все $b_{si}^{(r)}$ равны нулю и все $\mu_j^{(r)} \leqslant 0$, следует заполнять позиции строки $\theta^{(r)}$, соответствующие отрицательным значениям $\mu_j^{(r)}$.

Задача неразрешима, если среди $b_{si}^{(r)}$ имеются отличные от нуля величины и при этом все $\mu_j \leqslant 0$.

Если нет оснований для вывода о неразрешимости задачи, следует продолжить градиентный процесс. В результате преобразования строки Δ в строке $\Delta^{(r)}$ таблицы r появятся один или несколько дополнительных нулей.

Главная часть таблицы r преобразуется снова по рекуррентным формулам (7.26) до тех пор, пока соответствующее количество переменных не будет исключено из условий сопряженной задачи. После этого по рекуррентной формуле вида (7.27) преобразуется строка Δ.

Процесс продолжается до тех пор, пока все m первых строк таблицы не станут единичными векторами-строками или пока не будет установлена неразрешимость задачи. Векторы условий, отвечающие единицам в преобразованных строках, образуют искомый базис сопряженной задачи.

До сих пор все строки таблицы предполагались линейно независимыми. Теперь мы откажемся от этого допущения.

Пусть в процессе вычислений в одной из таблиц (например, в таблице p) получена строка (пусть это строка l), ненулевые элементы которой расположены только в столбцах, содержащих единицы преобразованных строк. Тогда в зависимости от того, занята ли позиция l столбца A_0 нулевым или ненулевым элементом, возможен один из следующих двух случаев:

а) ранг матрицы условий $\|a_{ij}\|$ $(i=1, 2, \ldots, m;$ $j=1, 2, \ldots, n)$ меньше m, если $a_{l_0}^{(p)} = b_l^{(p)} = 0$;

б) задача неразрешима, если $a_{l_0}^{(p)} = b_l^{(p)} \neq 0$.

Действительно, при принятых условиях строка l таблицы p представляет собой линейную комбинацию преобразованных строк:

$$a_{lj}^{(p)} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^{m} \alpha_i a_{ij}^{(p)} \tag{7.30}$$

($\alpha_i = 0$ для индексов, отвечающих непреобразованным строкам).

Эквивалентная сопряженная задача, полученная после преобразований, которые привели к таблице p, записывается следующим образом:

Требуется обратить в минимум линейную форму

$$\tilde{L}^{(p)}(Y) = \sum_{i=1}^{m} b_i^{(p)} y_i$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^{(p)} y_i \geqslant c_j^{(p)}.$$

Согласно (7.30) можно переписать условия эквивалентной сопряженной задачи в виде

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^{m} a_{ij}^{(p)} (y_i + \alpha_i y_l) \geqslant c_j.$$

Пусть $y' = (y_1', \ldots, y_l', \ldots, y_m')$ — некоторый план сопряженной задачи. Положим

$$y_i^* = y_i' + \alpha_i y_l' \qquad \text{при} \quad i \neq l.$$

Очевидно, что вектор

$$y = (y_1, \ldots, y_l, \ldots, y_m),$$

для которого

$$y_i + \alpha_i y_l = y_i^*, \qquad i \neq l, \tag{7.31}$$

является планом сопряженной задачи. Ясно, что для любого значения y_l существуют такие y_i, при которых выполняются условия (7.31).

Вычислим значение линейной формы $\tilde{L}^{(p)}$ на плане Y:

$$\tilde{L}^{(p)}(Y) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{m} b_i^{(p)}(y_i^* - \alpha_i y_l) + b_l^{(p)} y_l =$$

$$= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{m} b_i^{(p)} y_i^* + y_l\left(b_l^{(p)} - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{m} \alpha_i b_i^{(p)}\right). \tag{7.32}$$

Рассмотрим вначале случай, когда

$$b_l^{(p)} = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{m} \alpha_i b_i,$$

т. е. когда $b_l^{(p)} = a_{l_0}^{(p)}$ является такой же линейной комбинацией соответствующих параметров преобразованных строк, как и остальные элементы строки l. В этом случае вся строка l таблицы p является линейной комбинацией других строк. Преобразование таблиц не меняет ранга матрицы $\|a_{ij}\|$ $(i = 1, 2, \ldots, m, m+1;\ j = 0, 1, \ldots, n)$.

Мы пришли, таким образом, к выводу, что среди условий задачи имеются зависимые ограничения и, следовательно, ранг матрицы условий ниже m (случай *а*). Строка l таблицы p в этом случае вычеркивается и не учитывается в последующих вычислениях.

Пусть теперь $b_l^{(p)} \neq \sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq l}} \alpha_i b_i^{(p)}$. Как мы уже видели, существуют планы, удовлетворяющие условию (7.31), с произвольным значением y_l. Поэтому если коэффициент при y_l в (7.32) отличен от нуля, линейная форма $\tilde{L}^{(p)}$ и, следовательно, линейная форма $\tilde{L}$ исходной сопряженной задачи неограничена на множестве своих планов (случай *б*).

Приведем еще одно замечание по алгоритму градиентного метода.

Коэффициенты $c_j = a_{m+1, j}$ нужны для вычисления Δ_j в табл. 0 (в последующих таблицах Δ_j не меняется либо преобразовывается по рекуррентным формулам) и для вычисления компонент опорного плана сопряженной задачи. Часто требуется определять не опорный план сопряженной задачи, а только соответствующий сопряженный базис.

В таких случаях можно опускать строку $(m+1)$ во всех таблицах, кроме табл. 0.

7.5. Проиллюстрируем применение градиентного метода на примере.

Пример 1. Требуется вычислить минимум линейной формы

$$\tilde{L}(Y)=2y_1+3y_2+3y_3 \tag{7.33}$$

при следующих ограничениях:

$$\left.\begin{aligned} y_1+2y_2+\ y_3&\geqslant 1,\\ 2y_1+\ y_2+2y_3&\geqslant 1,\\ y_1+\ y_2+2y_3&\geqslant 1,\\ 2y_1+2y_2+3y_3&\geqslant 2,\\ 2y_1+2y_2+2y_3&\geqslant 1. \end{aligned}\right\} \tag{7.34}$$

Решение. Здесь $m=3$, $n=5$. Легко непосредственно убедиться в том, что вектор $y=(0,\ 0{,}1)$ является планом задачи (7.33), (7.34).

Весь ход вычисления опорного плана записан в таблицах 6.18 (0—3). В табл. 0 выписаны условия задачи. В $(m+2)$-й (пятой) строке указаны значения Δ—разностей левых и правых частей условий (7.34) при $Y=(0,\ 0{,}1)$.

Как видим, план Y обращает в равенство лишь первое условие системы (7.34) $(r=1)$. Исключим из системы одну переменную, например y_3. Переход к главной части новой таблицы (табл. 1) производится по рекуррентным формулам (7.26). Направляющим элементом преобразования является $a_{31}=1$. Имеем, например,

$$a'_{21}=\frac{a_{21}}{a_{31}}=\frac{2}{1}=2,$$

$$a'_{20}=a_{20}-a'_{21}a_{30}=3-2\cdot 3=-3.$$

В нашем случае $r=1$. Поэтому на первом же шаге должна преобразовываться и строка Δ. Параметры Δ' вычисляются по формуле

$$\Delta'_j=\Delta_j-\theta'_0\mu'_j. \tag{7.35}$$

В $(m+2)$-й (пятой) строке табл. 1 помещаются значения μ'_j. Параметры μ'_j вычисляются как произведения столбцов $\overline{A}_0$ и $\overline{A}_j$ (первые m позиций) табл. 1. При этом учитываются только позиции непреобразованных строк. Так, например,

$$\mu'_2=a'_{12}a'_{10}+a'_{22}a'_{20}=0\,(-1)+(-3)\,(-3)=9.$$

В $(m+3)$-й строке табл. 1 записаны значения $\theta'_j=\dfrac{\Delta_j}{\mu'_j}$. Наименьшее

Таблица 6.18 (0—3)

		↓		↓	↓		
№	$\overline{A}_0$	$\overline{A}_1$	$\overline{A}_2$	$\overline{A}_3$	$\overline{A}_4$	$\overline{A}_5$	Номер таблицы
1	2	1	2	1	2	2	
2	3	2	1	1	2	2	
3	3	**1**	2	2	3	2	0
4	C	1	1	1	2	1	
5	Δ	×	1	1	1	1	
1	−1	1		−1	**−1**		
2	−3	2	−3	−3	−4	−2	
3		1					
4	C'	1	−1	−1	−1	−1	1
5	μ'	×	9	10	13	6	
6	θ'	×	0,111	0,1	**0,0769**	0,167	
7	Δ'	×	0,308	0,231	×	0,538	
1					1		
2	1	−2	−3	**1**	4	−2	
3		1					
4	C''		−1		1	−1	2
5	μ''	×	−3	1	×	−2	
6	θ''	×		**0,231**	×		
7	Δ''	×	1	×	×	1	
1					1		
2				1			
3		1					
4	C'''		−1		1	−1	3
5	μ'''						
6	θ'''			×			
7	Δ'''						

значение θ'_0 строки θ' равно $\frac{1}{13} \cong 0{,}0769$ и достигается на векторе A_4. Пользуясь величиной θ'_0 и параметрами μ'_j, вычислим по формуле (7.35) элементы Δ'_j $(m+4)$-й строки (Δ') табл. 1. В строке Δ' получаем еще один нуль. Выделим столбец $\overline{A}_4$, содержащий $\Delta'_4=0$, и повторив всю последовательность операций, приходим к табл. 2.

В табл. 2 выделенными оказываются три столбца. Отправляясь от последнего из выделенных столбцов, заполняем заключительную табл. 3.

Компоненты опорного плана $Y=(y_1, y_2, y_3)$ определяются из $(m+1)$-й (четвертой) строки. Для получения y_i следует двигаться вдоль i-й строки табл. 3 до позиции, в которой расположена единица. Соответствующий элемент $(m+1)$-й (четвертой) строки равен искомой компоненте. Таким образом,

$$y_1=1, \quad y_2=0, \quad y_3=0.$$

Необходимость в заполнении строк μ''', θ''', Δ''' отпадает.

Легко убедиться, что построенный опорный план $Y=(1, 0, 0)$ является решением задачи (7.33), (7.34).

Конечно, не в каждой задаче первый построенный опорный план оказывается оптимальным планом задачи. В общем случае, когда опорный план, полученный градиентным методом, не совпадает с решением задачи, следует использовать метод уточнения оценок. Для этого необходимо вместе с опорным планом получить связанную с ним матрицу $\|e_{ij}\|$ коэффициентов разложения m-мерных единичных векторов e_j $(j=1, 2, \ldots, m)$ по найденному базису. Элементы e_{ij} этой матрицы удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{\lambda=1}^{m} a_{\lambda s_j} e_{i\lambda} = \begin{cases} 1 \text{ при } i=j, \\ 0 \text{ при } i \neq j. \end{cases} \tag{7.36}$$

Здесь $I_Y=(s_1, \ldots, s_m)$ — совокупность номеров векторов базиса.

Система уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j, \quad j \in I_y,$$

определяющая компоненты y_i опорного плана Y, отличается от систем (7.36) только правой частью. Поэтому решения всех этих систем целесообразно находить одновременно.

Если бы заранее было известно, какие из векторов условий образуют искомый базис, то можно было бы, пользуясь алгоритмом градиентного метода, получить вместе с опорным планом и соответствующую матрицу $\|e_{ij}\|$. Для этого следовало бы поместить в строки $m+2$, $m+3$, ..., $2m+1$ табл. 0 единичные векторы-строки, отвечающие векторам базиса, и преобразовывать их от шага к шагу по тем же рекуррентным формулам, по которым преобразовывается главная часть таблиц градиентного метода. В итоге одновременно с построением опорного плана на пересечении добавленных строк и столбцов, отвечающих базису, образовалась бы матрица $\|e_{ij}\|$. Заметим, что преобразования градиентного метода не влияют на единичный вектор e_j до тех пор, пока составляющие вектора $\overline{A}_j$ не будут введены в систему равенств (7.12). Поэтому дополнение таблиц градиентного метода единичными вектор-строками можно производить по мере образования искомого базиса. Указанное обстоятельство позволяет совместить процесс построения матрицы $\|e_{ij}\|$ с процессом отыскания опорного плана Y.

Последняя таблица вычислительной схемы градиентного метода (назовем ее таблицей N) является отправной для заполнения главной части основной табл. 0 при решении задачи по второму алгоритму метода уточнения оценок.

Элемент e_{ij} основной табл. 0 ($i=1, 2, \ldots, m$; $j=1, 2, \ldots, m$) содержится в строке табл. N, отвечающей единичному вектору e_{s_i}. Здесь s_i — номер вектора A_{s_i}, расположенного в i-й позиции базиса. Составляющие опорного плана Y содержатся в строке $m+1$ табл. N.

Чтобы получить значение e_{ij} (элемента, расположенного в позиции j строки i основной табл. 0), необходимо в j-й строке ($j=1, 2, \ldots, m$) табл. N разыскать единицу. Элемент строки e_{s_i} табл. N, который расположен в столбце, содержащем указанную единицу, является искомым значением e_{ij}. Элемент строки $m+1$, расположенный в том же столбце, определяет значение $y_j = e_{m+1, j}$ — компоненты исходного опорного плана Y. Базисные компоненты исходного псевдоплана (элементы столбца e_0 основной табл. 0) вычисляются по общим формулам

$$x_{i0} = \sum_{\lambda=1}^{m} e_{i\lambda} b_\lambda .$$

Проиллюстрируем приведенные рассуждения примером.

Пример 2. Требуется вычислить, пользуясь методом уточнения оценок, максимум линейной формы

$$L(X) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 + x_7 \tag{7.37}$$

при условиях:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 3x_6 + x_7 &= 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 + 2x_7 &= 8, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 0{,}5x_5 + x_6 + x_7 &= 6, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 + x_7 &= 7, \end{aligned}\right\} \tag{7.38}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 7.$$

Решение. Соответствующая сопряженная задача формулируется следующим образом:

Требуется определить минимум линейной формы

$$\tilde{L}(Y) = 7y_1 + 8y_2 + 6y_3 + 7y_4$$

при условиях:

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 + y_3 + 2y_4 &\geqslant 1, \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 + y_4 &\geqslant 2, \\ 2y_1 + y_2 + 3y_3 + 3y_4 &\geqslant 3, \\ 3y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 &\geqslant 1, \\ 2y_1 + 3y_2 + 0{,}5y_3 + 2y_4 &\geqslant 2, \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 + 3y_4 &\geqslant 3, \\ y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 &\geqslant 1. \end{aligned}$$

Все составляющие векторов условий положительны. Поэтому в соответствии с рекомендациями п. 7.2 можно в качестве исходного неопорного плана выбрать любой из векторов системы:

$$Y_1 = (y_1, 0, 0, 0); \quad Y_2 = (0, y_2, 0, 0); \quad Y_3 = (0, 0, y_3, 0); \quad Y_4 = (0, 0, 0, y_4),$$

где

$$y_i \geqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant 7} \frac{c_j}{a_{ij}}.$$

Будем вычислять опорный план и соответствующие ему параметры e_{ij} по схеме градиентного метода, отправляясь от неопорного плана $Y = Y_3 = (0, 0, 4, 0)$.

Весь процесс вычислений записан в таблицах 6.19 (0—4). В табл. 1 строка Δ разностей между левыми и правыми частями условий сопряженной задачи для выбранного неопорного плана вычисляется по формуле

$$\Delta_j = 4a_{3j} - c_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, 7.$$

В строке Δ имеется один нуль, соответствующий вектору A_5.

Таблица 6.19 (С—4)

			↓	↓		↓	↓		
№	A_0	$\overline{A}_1$	$\overline{A}_2$	$\overline{A}_3$	$\overline{A}_4$	$\overline{A}_5$	$\overline{A}_6$	$\overline{A}_7$	Номер таблицы
1	7	1	1	2	3	**2**	3	1	0
2	8	2	3	1	1	3	2	2	
3	6	1	2	3	2	0,5	1	1	
4	7	2	1	3	1	2	3	1	
5	C	1	2	3	1	2	3	1	
6	e_5					1			
7	Δ	3	6	9	7	×	1	3	
1						1			1
2	−2,5	0,5	1,5	−2	−3,5	1,5	−2,5	0,5	
3	4,25	0,75	1,75	2,5	1,25	0,25	**0,25**	0,75	
4		1		1	−2	1			
5	C'		1	1	−2	1			
6	e_5	−0,5	−0,5	−1	−1,5	0,5	−1,5	−0,5	
7	e_6						1		
8	μ'	1,938	3,688	15,625	14,062	×	7,312	1,938	
9	θ'	1,548	1,627	0,576	0,498	×	**0,137**	1,548	
10	Δ'	2,735	5,496	6,863	5,077	×	×	2,735	

Продолжение

			↓	↓		↓	↓		
№	A_0	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_4$	$\bar{A}_5$	$\bar{A}_6$	$\bar{A}_7$	Номер таблицы
1						1			2
2	40	8	**19**	23	9	4	−10	8	
3							1		
4		1		1	−2	1			
5	c''		1	1	−2	1			
6	e_5	4	10	14	6	2	−6	4	
7	e_6	−3	−7	−10	5	−1	4	−3	
8	e_2		1						
9	μ''	320	760	920	360	×	×	320	
10	θ''	0,00855	**0,00723**	0,00746	0,0141	×	×	0,00855	
11	Δ''	0,421	×	0,211	2,474	×	×	0,421	
1						1			3
2		1							
3							1		
4		1		**1**	−2	1			
5	C'''	−0,421	0,0526	−0,211	−2,474	0 789	0,526	−0,421	

Продолжение

№	A_0	$\bar{A}_1$	↓ $\bar{A}_2$	↓ $\bar{A}_3$	$\bar{A}_4$	↓ $\bar{A}_5$	↓ $\bar{A}_6$	$\bar{A}_7$	Номер таблицы
6	e_5	−0,211	0,526	1,895	1,263	−0,105	−0,737	−0,211	3
7	e_6	−0,0526	−0,368	−1,526	−1,684	0,474	0,316	−0,0526	
8	e_2	−0,421	0,0526	−1,211	−0,474	−0,211	0,526	−0,421	
9	e_3			1					
10	μ'''	1	×	1	−2	×	×		
11	ϑ'''	0,421	×	0,211		×	×		
12	Δ'''	0,211	×	×	2,895	×	×	0,421	
1						1			4
2			1						
3							1		
4				1					
5	C^{IV}	−0,211	0,0526	−0,211	−2,895	1	0,526	−0,421	
6	e_5	−2,105	0,526	1,895	5,053	−2	−0,737	−0,211	
7	e_6	1,474	−0,368	−1,526	−4,737	2	0,316	−0,0526	
8	e_2	0,789	0,0526	−1,211	−2,895	1	0,526	−0,421	
9	e_3	−1		1	2	−1			
10	μ^{IV}	×							
11	θ^{IV}								
12	Δ^{IV}								

Поэтому табл. 0 дополняется строкой, содержащей компоненты единичного вектора $e_5=(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$. Строки e_j целесообразно помещать непосредственно под строками главной части таблицы, чтобы преобразовывать их по тем же рекуррентным формулам.

Столбец $\overline{A}_5$ выбирается в качестве направляющего столбца преобразования. Направляющей строкой может быть выбрана любая строка, у которой в позиции столбца $\overline{A}_5$ расположен ненулевой элемент. Выберем для определенности первую строку. Направляющий элемент преобразования a_{15} равен двум. Главная часть и строка e_5 табл. 0 преобразовываются по рекуррентным формулам (7.26). Затем вычисляются и записываются в соответствующие строки табл. 1 параметры μ', θ' и Δ'_j. Переход к табл. 2 производится по аналогичным правилам.

При заполнении табл. 3 мы сталкиваемся с особым случаем, отмеченным в п. 7.3:

$$a_{i0}'''=b_i'''=0, \qquad i=1, 2, 3, 4.$$

В соответствии с изложенным в п. 7.4 правилом, определяемым формулой (7.28), в строку μ''' следует перенести одну из непреобразованных строк. В рассматриваемом случае осталась только одна непреобразованная строка—строка 4. Поэтому $\mu_j'''=a_{4j}'''$.

В строке μ''' имеются положительные элементы. Поэтому позиции строки θ''', соответствующие значениям $\mu'''>0$, заполняются величинами

$$\theta_j'''=\frac{\Delta_j''}{\mu_j'''}.$$

Позиции строки θ''', для которых $\mu'''\leqslant 0$, прочеркиваются. Величина θ_0''' определяется из соотношений (7.29), а строка Δ''' заполняется по обычным правилам.

Заполнение табл. 4 представляет собой последний шаг градиентного метода. Табл. 4 содержит полную информацию об искомом опорном плане $\overline{Y}=(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_m)$ сопряженной задачи и связанной с ним матрице $\|e_{ij}\|$. Базис плана состоит из векторов A_2, A_3, A_5 и A_6.

В основных таблицах 6.20 (0–1) и вспомогательной табл. 6.21 записан ход решения задачи (7.37), (7.38) по второму алгоритму метода последовательного уточнения оценок. Основная табл. 0 заполнена в соответствии с данными, полученными при определении исходного опорного плана $\overline{Y}$ градиентным методом и зафиксированными в последней табл. 4 табл. 6.19. Так, например, значение e_{32}, отвечающее вектору условий $A_5=A_{s_3}$, содержится в табл. 4 (табл. 6.19) в строке $e_{s_3}=e_5$. В строке $j=2$ табл. 4 единица расположена в столбце $\overline{A}_2$. Величину e_{32} находим на пересечении строки e_5 и столбца $\overline{A}_2$: $e_{32}=0{,}526$. Элемент $e_{14}=2$ находится

Таблицы 6.20 (0—1)

				B	7	8	6	7		Номер таблицы
	№	C	$Б$	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	A_k	
	1	2	A_2	2,105	1	0,0526	0,526	—1,211	2,895	0
	2	3	A_3		—1			1	—2	
←	3	2	A_5	—0,947	—2	0,526	—0,737	1,895	5,053	
	4	3	A_6	2,263	2	—0,368	0,316	—1,526	4,737	
	5	—	L	9,105	1	0,0526	0,526	—0,211	2,895	
	1	2	A_2	1,562	—0,146	0,354	0,104	—0,125		1
	2	3	A_3	0,375	0,208	—0,208	0,292	0,25		
→	3	1	A_4	0,188	0,396	—0,104	0,146	—0,375		
	4	3	A_6	1,375	0,125	0,125	—0,375	0,25		
	5	—	L	8,562	—0,146	0,354	0,104	0,875		

Таблица 6-21

№	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	Y_0	A_5	Y_1
1	7	1	1	2	3	2	3	1	1	−2	−0,146
2	8	2	3	1	1	3	2	2	0,0526	0,526	0,354
3	6	1	2	3	2	0,5	1	1	0,526	−0,737	0,104
4	7	2	1	3	1	2	3	1	−0,211	1,895	0,875
5	c_j	1	2	3	1	2	3	1			
0	Δ	0,211			2,895			0,421	$\theta_0=0,573$		
	$Z_{(5)}$	2,105			−5,053	1		0,211			
	$-\Delta/Z_{(5)}$				**0,573**						
1	Δ'	1,417				0,573		0,542			

в табл. 4 (табл. 6.19) на пересечении строки $e_{s_4}=e_6$ и столбца A_5, в котором содержится единственная единица строки $j=1$.

Точно так же определяются компоненты исходного опорного плана Y — элементы последней строки основной таблицы 0. В этом случае роль строк e_j играет строка $(m+1)$ табл. 4. Так, например, $y_1=e_{m+1,\,1}=1$, $y_2=e_{m+1,\,2}=0{,}0526$ и т. д.

Базисные компоненты x_{i0} начального псевдоплана — элементы столбца e_0 основной таблицы 0 — вычисляются как произведения элементов $e_{i\lambda}$ i-й строки таблицы на соответствующие составляющие вектора ограничений. Так, например,

$$x_{30}=-2\cdot7+0{,}526\cdot8-0{,}737\cdot6+1{,}895\cdot7=-0{,}947.$$

Далее задача решается по обычным правилам второго алгоритма метода уточнения оценок.

Оптимальный план исходной задачи

$$X^*=(0;\ 1{,}562;\ 0{,}375;\ 0{,}188;\ 0;\ 1{,}375;\ 0).$$

Решение сопряженной задачи определяется вектором

$$Y^*=(-0{,}146;\ 0{,}354;\ 0{,}104;\ 0{,}875).$$

Оптимальное значение линейной формы равно

$$L(X^*)=\tilde{L}(Y^*)=8{,}562.$$

Для решения задачи в этом случае потребовалась всего одна итерация метода последовательного уточнения оценок. Это объясняется тем, что в результате использования градиентного метода было получено хорошее первое приближение.

Как уже отмечалось, это не случайное явление: градиентный метод приводит обычно к опорному плану, близкому к оптимальному.

7.6. При определении исходного опорного плана градиентным методом предполагалось наличие некоторого неопорного плана задачи. Как уже отмечалось, для широкого класса задач вычисление неопорного плана не представляет труда. Тем не менее можно указать и такие задачи, в которых вычисления, связанные с определением исходного плана, не менее трудоемки, чем вычисление опорного плана по неопорному. В таких случаях целесообразно воспользоваться изложенным ниже приемом.

Дополним условия (1.2) задачи линейного программирования ограничением

$$x_1+x_2+\ldots+x_n\leqslant M,$$

или

$$x_0+x_1+\ldots+x_n=M,\qquad x_0\geqslant0.$$

Будем называть вновь полученную задачу (с переменными $x_0, x_1, \ldots, x_n$) *расширенной задачей*.

Сопряженная задача состоит в отыскании минимума линейной формы

$$My_0 + \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \tag{7.39}$$

при условиях

$$y_0 + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$y_0 \geqslant 0.$$

Назовем эту задачу *расширенной сопряженной задачей*.

Очевидно, что в качестве плана расширенной сопряженной задачи можно взять

$$Y = (y_0, 0, \ldots, 0),$$

где

$$y_0 = \max_j \{c_j, 0\}.$$

Отправляясь от плана Y, можно с помощью градиентного метода получить опорный план последней задачи. Примем найденный сопряженный базис в качестве базиса исходного псевдоплана и решим расширенную задачу по методу последовательного уточнения оценок. В процессе решения величина M предполагается достаточно большой (больше любого числа, с которым ее приходится по ходу решения сравнивать).

Пусть $\overline{X}^* = (\overset{*}{x}_0, \overset{*}{x}_1, \ldots, \overset{*}{x}_n)$ и $\overline{Y}^* = (\overset{*}{y}_0, \overset{*}{y}_1, \ldots, \overset{*}{y}_m)$ — оптимальные планы прямой и сопряженной расширенных задач. Возможны два случая:

$$y_0^* = 0 \quad \text{и} \quad \overset{*}{y}_0 > 0.$$

В первом случае $Y^* = (y_1^*, \ldots, y_m)$ является, очевидно, решением сопряженной задачи (1.4), (1.5). Поэтому $X^* = (\overset{*}{x}_1, \ldots, \overset{*}{x}_n)$ — оптимальный план задачи (1.1)—(1.3):

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \overset{*}{x}_j + 0\overset{*}{x}_0 = \sum_{i=1}^{m} b_i \overset{*}{y}_i + M \cdot 0.$$

Во втором случае ($y_0^* > 0$) множество планов сопряженной задачи пусто. Действительно, предположим противное и пусть $Y = (y_1, \ldots, y_m)$ — план задачи (1.4), (1.5). Тогда $\overline{Y} = (0, y_1, \ldots, y_m)$ — план расширенной задачи. При достаточно большом M значение линейной формы (7.39) в точке $Y^* = (y_0^*, y_1^*, \ldots, y_m^*)$ превосходит ее значение в точке $\overline{Y} = (0, y_1, \ldots, y_m)$, а это противоречит оптимальности плана Y^*. Итак, при $y_0^* > 0$ задача (1.4), (1.5), а следовательно, и сопряженная с ней задача (1.1)—(1.3), неразрешимы.

Если процесс решения расширенной задачи завершился случаем 2°, означающим несовместность ее условий, то это указывает на противоречивость условий исходной задачи. В самом деле, если бы исходная задача имела хотя бы один план $X = (x_1, \ldots, x_n)$, то при $M \geqslant \sum_{j=1}^{n} x_j$ вектор X оказался бы также планом расширенной задачи.

Таким образом, рассмотренный метод позволяет найти оптимальный план разрешимой задачи без предварительного вычисления плана сопряженной задачи.

7.7. В заключение параграфа укажем еще один способ решения задачи по методу последовательного уточнения оценок, не связанный с предварительным трудоемким вычислением исходного сопряженного базиса. Способ основан на отмеченном в п.3.7 утверждении о том, что в задаче линейного программирования, переменные которой ограничены с обеих сторон, любая система из m линейно независимых векторов условий может быть принята в качестве базиса исходного псевдоплана.

Ограничим некоторые переменные задачи (1.1)—(1.3) сверху числом M, бо́льшим любого числа, с которым его приходится сравнивать в процессе решения задачи. Переменные, подлежащие ограничению сверху, будут охарактеризованы ниже. Назовем полученную таким образом задачу ограниченной задачей.

Часто физический смысл задачи или конкретные особенности матрицы условий позволяют выделить m линейно независимых векторов условий. Любую такую систему можно рассматривать как базис некоторого псевдоплана задачи.

В общем случае, когда особенности задачи не подсказывают выбора линейно независимой системы векторов, можно выделить сопряженный базис, последовательно преобразуя равенства (1.2), как это делается при решении системы линейных уравнений по методу полного исключения. Составляющие векторов условий преобразовываются при этом по рекуррентным формулам вида (5.16):

$$a_{ij}^{(l+1)}=\begin{cases} a_{ij}^{(l)}-\dfrac{a_{rj}^{(l)}}{a_{rk}^{(l)}}a_{ik}^{(l)}, & \\ & i\neq r;\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \\ \dfrac{a_{rj}^{(l)}}{a_{rk}^{(l)}},\quad i=r, & \end{cases}$$

В качестве направляющего элемента на каждом последующем шаге может быть выбран любой ненулевой элемент, не принадлежащий строке или столбцу, использованным на предыдущих шагах в качестве направляющих. Может, однако, оказаться, что на некотором шаге преобразования приведенное правило не позволяет выбрать направляющий элемент.

Вычеркнем из матрицы условий строки и столбцы, использованные на предыдущих шагах в качестве направляющих. Назовем таблицу из оставшихся элементов *суженной матрицей*. Преобразование матрицы условий и вектора ограничений следует прекратить, когда суженная матрица окажется пустой или нулевой матрицей. Суженная матрица может оказаться на некотором шаге пустой, если условия (1.2) задачи совместны и линейно независимы. В этом случае векторы условий, преобразованные на последующих шагах в единичные векторы, могут быть приняты в качестве базиса исходного псевдоплана. К нулевой суженной матрице можно прийти в двух случаях:

а) условия задачи несовместны; в этом случае по крайней мере одна из составляющих $b_i^{(l)}$ преобразованного вектора ограничений, отвечающая строке суженной матрицы, отлична от нуля;

б) условия задачи, соответствующие строкам суженной матрицы, линейно зависят от остальных условий; в этом случае $b_i^{(l)}=0$ для всех строк суженной матрицы; выделенные таким образом строки можно отбросить и понизить ранг матрицы условий.

Итак, указанные преобразования матрицы $\|a_{ij}\|$ приведут в конце концов к установлению неразрешимости задачи или к системе линейно независимых векторов условий — базису исходного псевдоплана. В процессе преобразований получаются также коэффициенты $x_{ij}^{(l)}$ разложения векторов условий по векторам начального базиса. При использовании первого алгоритма вычисленных параметров достаточно для решения задачи методом уточнения оценок.

Для работы по второму алгоритму необходимо еще получить обратную матрицу

$$\|e_{ij}\|_m = \|a_{is_j}\|_m^{-1}$$

$(s_1, s_2, \ldots, s_m) = I_y$. Матрица $\|e_{ij}\|_m$ может быть найдена в процессе выделения векторов базиса, если с самого начала приписать справа от матрицы условий m единичных (m-мерных) векторов e_j и преобразовывать расширенную таким образом матрицу по описанным правилам.

Итак, в результате серии преобразований может быть получена полная система линейно независимых векторов условий задачи $A_{s_1}, \ldots A_{s_m}$ и соответствующая матрица $\|x_{ij}\|_{m,n}$ (или $\|e_{ij}\|_m$) коэффициентов разложения векторов A_j (или e_j) по выбранной системе. После этого следует вычислить параметры

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_{s_i} x_{ij} - c_j.$$

Переменные x_j, для которых величины Δ_j отрицательны, ограничиваются сверху достаточно большим числом M. В результате получаем *ограниченную* задачу. Система векторов условий $(A_{s_1}, \ldots, A_{s_m})$ является базисом псевдоплана этой задачи.

Подчеркнем, что в рассматриваемой ограниченной задаче часть переменных, для которых $\Delta_j \geqslant 0$ (в том числе базисные составляющие псевдоплана), ограничены только условием неотрицательности, а другая часть переменных с отрицательными значениями параметров Δ_j ограничены с обеих сторон.

Ограниченная задача решается методом уточнения оценок. При этом учитываются замечания, изложенные в пп. 5.5 и 6.5 для задач с двухсторонними ограничениями. В процессе решения число M, как уже указывалось, предполагается бо́льшим любого числа, с которым его приходится сравнивать.

Из предыдущего изложения следует, что конечное число шагов должно привести к случаю 1° или 2°.

В случае 1° оптимальное значение линейной формы ограниченной задачи, как и любой задачи с двухсторонними ограничениями, может быть в соответствии с формулой (3.11) представлено в виде

$$L(X)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i-\sum_{j\notin I_y} \Delta_j\gamma_j.$$

Здесь y_i — компоненты ядра Y решения задачи, сопряженной с ограниченной задачей, I_y — множество индексов векторов базиса оптимального плана X, γ_j — значения внебазисных составляющих решения. В нашем случае

$$\gamma_j=\begin{cases} M \text{ при } j\in E,\\ 0 \text{ при } j\notin E,\end{cases}$$

где E — множество индексов внебазисных переменных решения ограниченной задачи, равных верхней границе M области своего определения.

Таким образом, в случае 1° максимальное значение линейной формы ограниченной задачи может быть всегда записано в виде

$$L(X)=L_1(X)+ML_2(X)=L_1(X)-M\sum_{j\in E}\Delta_j. \qquad (7.40)$$

При этом

$$L_2(X)=-\sum_{j\in E}\Delta_j\geqslant 0. \qquad (7.41)$$

Базисные компоненты x_{i_0} решения X ограниченной задачи являются коэффициентами разложения вектора $B-\sum_{j\notin I_Y} A_j\gamma_j$ по векторам базиса оптимального плана X,

$$x_{i_0}=b_i^{(Y)}-\sum_{j\notin I_Y} x_{ij}^{(Y)}\gamma_j,$$

или, что то же самое,

$$x_{i_0}=b_i^{(Y)}-M\sum_{j\in E} x_{ij}^{(Y)}. \qquad (7.42)$$

В случае 1° возможны два исхода:

$$а)\ L_2(X)=0,\quad б)\ L_2(X)\neq 0.$$

В случае *а*) линейная форма не зависит от M. Исходная задача разрешима, и ее оптимальный план может быть легко найден. Случай *а*) имеет место, когда множество E пусто или при $\sum\limits_{j\in E}\Delta_j=0$. Если множество E не содержит ни одного индекса, то все внебазисные переменные плана X равны нулю и решение исходной задачи совпадает с оптимальным планом X ограниченной задачи.

Базисные составляющие решения $x_{i_0}=b_i^{(Y)}$ (см. (7.42)) и не зависят от M. Если $\sum\limits_{j\in E}\Delta_j=0$, то в силу (7.41) $\Delta_j=0$ для $j\in E$ (оптимальный план двойственной задачи — вырожденный план). Кроме того, $\Delta_j=0$ для $j\in I_y$. Для остальных внебазисных переменных (равных нулю)

$$\Delta_j\geqslant 0.$$

Согласно критерию оптимальности (см. теорему 5.2 гл. 3), план, удовлетворяющий этим условиям, является оптимальным планом исходной задачи, но не обязательно опорным планом. В качестве величины M, фигурирующей в формуле (7.42), можно выбрать любое число $M_0\geqslant 0$, для которого

$$x_{i_0}=b_i^{(Y)}-M_0\sum_{j\in E}x_{ij}^{(Y)}\geqslant 0.$$

Получение опорного решения из неопорного (если в этом есть необходимость) не представляет труда. Вычисления проводятся по градиентному методу.

В случае *б*), когда

$$L_2(X)=-\sum_{j\in E}\Delta_j>0,$$

исходная задача не имеет решения вследствие неограниченности ее линейной формы на множестве планов задачи.

В случае 2°, когда выполняются условия неразрешимости ограниченной задачи, исходная задача также неразрешима. При этом неразрешимость задачи может быть обусловлена как несовместностью условий, так и неограниченностью сверху ее линейной формы.

Строгое обоснование изложенного метода базируется на следующих двух утверждениях:

1. Существует такое число $M_1<\infty$, что для всех $M>M_1$ при $\sum_{j\in E}\Delta_j>0$ линейная форма задачи (1.1)—(1.3) неограничена сверху на множестве ее планов.

2. Существует такое число $M_2<\infty$, что при всех $M>M_2$ выполнение условий неразрешимости ограниченной задачи приводит к неразрешимости исходной задачи (1.1)—(1.3).

Доказательство этих утверждений проводится по схеме, близкой к схеме обоснования аналогичных предложений для M-метода. Читателю нетрудно будет, следуя указаниям § 7 гл. 4, убедиться в справедливости сформулированных предложений самостоятельно (см. упражнение 9).

Проиллюстрируем применение изложенного способа на примере.

Пример. Требуется обратить в максимум линейную форму

$$L(X)=10x_1+2x_2+x_3+9x_4+2x_5+x_6+x_7$$

при условиях:

$$\begin{aligned}
3x_1+7x_2+5x_3+4x_4+x_5+x_6 &=5,\\
7x_1+15x_2+9x_3+9x_4+x_5+2x_6+x_7&=8,\\
6x_1+11x_2+7x_3+6x_4+x_5+x_6+x_7&=6,\\
x_j\geqslant 0,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ 7.&
\end{aligned}$$

Решение. Прежде всего следует выделить систему линейно независимых векторов. В таблицах 6.22 (0—3) приведена последовательность преобразований, в результате которых определяются линейно независимые векторы A_5, A_6 и A_7 и вычисляются коэффициенты разложения всех векторов условий по векторам выделенной системы. Исходная задача заменяется при этом (после шага 3) следующей задачей.

Требуется вычислить максимум линейной формы

$$L(X)=10x_1+2x_2+x_3+9x_4+2x_5+x_6+x_7 \tag{7.43}$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned}
2x_1+3x_2+3x_3+x_4+x_5 &=3,\\
x_1+4x_2+2x_3+3x_4+x_6 &=2,\\
3x_1+4x_2+2x_3+2x_4+x_7&=1,
\end{aligned}\right\} \tag{7.44}$$

$$x_j\geqslant 0,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ 7. \tag{7.45}$$

Наличие единичных векторов условий в задаче (7.43)—(7.45) и положительных правых частей в системе (7.44) указывает на целе-

Таблицы 6.22 (0—3)

№	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	Номер таблицы
1	5	3	7	5	4	1	1		
2	8	7	15	9	9	1	2	1	0
3	6	6	11	7	6	1	1	1	
1	5	3	7	5	4	1	1		
2	3	4	8	4	5		1	1	1
3	1	3	4	2	2			1	
1	2	−1	−1	1	−1	1		−1	
2	3	4	8	4	5		1	1	2
3	1	3	4	2	2			1	
1	3	2	3	3	1	1			
2	2	1	4	2	3		1		3
3	1	3	4	2	2			1	

сообразность применения метода улучшения плана. Тем не менее, чтобы проиллюстрировать описанный в этом пункте прием, используем для решения задачи первый алгоритм метода уточнения оценок.

Вычислим параметры Δ_j, отвечающие векторам условий. Имеем

$$\Delta_1 = -2, \quad \Delta_2 = 12, \quad \Delta_3 = 9, \quad \Delta_4 = -2.$$

В соответствии с рекомендациями настоящего пункта ограничим сверху числом M переменные с отрицательными значениями Δ_j. Ограниченная задача, соответствующая задаче (7.43)—(7.45), требует обращения в максимум линейной формы (7.43) при условиях (7.44), (7.45) и дополнительных ограничениях

$$x_1 \leqslant M, \quad x_4 \leqslant M. \tag{7.46}$$

В таблицах 6.23 (0—3) выписан ход решения ограниченной задачи по первому алгоритму метода последовательного уточнения оценок. Вычисления ведутся в соответствии с рекомендациями п. 5.5, где изложены особенности применения первого алгоритма к задачам с двухсторонними ограничениями.

Таблицы 6.23 (0—3)

					C	10	2	1	9	2	1	1			
					$(\alpha;\beta)$	$0;\ M$	$0;\ \infty$	$0;\ \infty$	$0;\ M$	$0;\ \infty$	$0;\ \infty$	$0;\ \infty$			Номер таблицы
	№	C_X	$Б_X$	A_0	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	δ	$(\alpha;\beta)_x$	
	1	2	A_5	$3-3M$	$3-M$	2	3	3	1	1			$3M-3(\alpha)$	$0;\ \infty$	0
	2	1	A_6	$2-4M$	$2-3M$	1	4	2	3		1		$4M-2(\alpha)$	$0;\ \infty$	
←	3	1	A_7	$1-5M$	$1-2M$	3	4	2	2			1	$5M-1(\alpha)$	$0;\ \infty$	
	4	—	Δ	$9+4M$	—	-2	12	9	-2				—	—	
	5	—	X	—	—	β	α	α	β				—	—	
	6	—	θ	—	—	**2/3**	—	—	1				—	—	
	1	2	A_5	$7/3+1/3M$	$7/3$		$1/3$	$5/3$	$-1/3$	1		$-2/3$	—	$0;\ \infty$	1
←	2	1	A_6	$5/3-7/3M$	$5/3$		$8/3$	$4/3$	$7/3$		1	$-1/3$	$7/3M-5/3(\alpha)$	$0;\ \infty$	
→	3	10	A_1	$1/3-2/3M$	$1/3$	1	$4/3$	$2/3$	$2/3$			$1/3$	$2/3M-1/3(\alpha)$	$0;\ M$	
	4	—	Δ	$29/3+2/3M$	—		$44/3$	$31/3$	$-2/3$			$2/3$	—	—	
	5	—	X	—	—		α	α	β			α	—	—	
	6	—	θ	—	—		—	—	**2/7**			2	—	—	

Продолжение

					C	10	2	1	9	2	1	1			Номер таблицы
					$(\alpha;\beta)$	0; M	0; ∞	0; ∞	0; M	0; ∞	0; ∞	0; ∞			
	№	C_X	$Б_X$	A_0	$\tilde{A}_0$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	δ	$(\alpha;\beta)_x$	
	1	2	A_5	$^{18}/_7$			$^5/_7$	$^{13}/_7$		1	$^1/_7$	$-^5/_7$			2
→	2	9	A_4	$^5/_7$			$^8/_7$	$^4/_7$	1		$^3/_7$	$-^1/_7$			
←	3	10	A_1	$-^1/_7$		1	$^4/_7$	$^2/_7$			$-^2/_7$	$^3/_7$			
	4	—	Δ	$^{71}/_7$			$^{108}/_7$	$^{75}/_7$			$^2/_7$	$^4/_7$			
	5	—	X	—											
	6	—	θ	—			—	—			1	—			
	1	2	A_5	$^5/_2$		$^1/_2$	1	2		1		$-^1/_2$			3
	2	9	A_4	$^1/_2$		$^3/_2$	2	1	1			$^1/_2$			
→	3	1	A_6	$^1/_2$		$-^7/_2$	−2	−1			1	$-^3/_2$			
	4	—	Δ	10		1	16	11				1			
	5	—	X	—											
	6	—	θ	—											

Как видно из таблиц, после первой итерации из выражений для компонент псевдоплана и коэффициентов линейной формы исключается величина M. Расчеты в последующих итерациях целесообразно вести по правилам первого алгоритма для канонической формы задачи. Необходимость в заполнении строки X и столбцов $\tilde{A}_0$, δ и $(\alpha;\ \beta)_X$ отпадает.

После трех итераций получаем решение задачи

$$X=(0,\ 0,\ 0,\ 1/2,\ 5/2,\ 1/2,\ 0).$$

§ 8. Метод улучшения плана и метод уточнения оценок

8.1. В настоящей главе метод уточнения оценок излагался независимо от метода улучшения плана. Здесь мы покажем, что метод уточнения оценок представляет собой не что иное, как приложение метода улучшения плана к решению сопряженной задачи.

Перепишем сопряженную задачу (1.4), (1.5) в следующем виде:

Требуется обратить в минимум линейную форму

$$\tilde{L}(Y)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \tag{8.1}$$

при условиях:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - y_{m+j} = c_j, \tag{8.2}$$

$$y_{m+j} \geqslant 0, \tag{8.3}$$

$$j=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Введем в рассмотрение векторы

$$A^{(i)}=(a_{i1},\ a_{i2},\ \ldots,\ a_{in})^T,$$

$$\bar{e}_j=(\underbrace{\overbrace{0,\ \ldots,\ 0,\ 1}^{j},\ 0,\ \ldots,\ 0}_{n})^T$$

$$C=(c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n)^T$$

и перепишем условия (8.2) в векторной форме:

$$\sum_{i=1}^{m} A^{(i)} y_i - \sum_{j=1}^{n} \bar{e}_j y_{m+j} = C. \tag{8.4}$$

Назовем исходную задачу (1.1)—(1.3) задачей (A), а сопряженную задачу, записанную в форме (8.1), (8.3), задачей ($\tilde{A}$). Будем решать задачу ($\tilde{A}$) методом последовательного улучшения плана.

Задача ($\tilde{A}$) содержит $m+n$ переменных $y_1, y_2, \ldots, y_{m+n}$ и n условий-равенств. Векторы условий $A^{(i)}$, отвечающие линейно независимым (по предположению) ограничениям-равенствам исходной задачи (A), линейно независимы. Переменные $y_1, y_2, \ldots, y_m$ не ограничены условием неотрицательности. Поэтому система векторов $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(m)}$ входит в базис любого опорного плана задачи ($\tilde{A}$). Базис произвольного опорного плана $Y=(y_1, \ldots, y_m, y_{m+1}, \ldots, y_n)$ этой задачи состоит из n векторов (по числу условий (8.4)) и, кроме векторов $A^{(i)}$, содержит $n-m$ единичных векторов $-e_j$. Обозначим через E_Y множество индексов единичных векторов, входящих в рассматриваемый базис, а через I_Y — совокупность индексов остальных единичных векторов. Таким образом,

$$I_Y=(s_1, s_2, \ldots, s_m).$$
$$E_Y=(s_{m+1}, s_{m+2}, \ldots, s_n),$$
$$E_Y+I_Y=\{1, 2, \ldots, n\}.$$

Рассмотрим векторы условий A_j задачи (A) для $j \in I_Y$.

Векторы $A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m}$ образуют линейно независимую систему. Действительно, определитель соответствующей им матрицы $A=(A_{s_1}, \ldots, A_{s_m})$ с точностью до знака совпадает с определителем матрицы $\bar{A}=(A^{(1)}, \ldots, A^{(m)}, -e_{s_{m+1}}, \ldots, -e_{s_n})$ векторов условий опорного плана Y задачи ($\tilde{A}$). В этом нетрудно убедиться, если разложить определитель матрицы $\tilde{A}$ по элементам столбцов, отвечающих векторам $-e_j (j \in E_Y)$.

В условиях (1.2) задачи (A) положим $x_j=0$ при $j \in E_Y$. Тогда в силу линейной независимости векторов A_j ($j \in I_Y$) условия (1.2) определят набор чисел $x_j (j \in I_Y)$.

Пусть

$$x_{s_i}=x_{i0}, \quad i=1, 2, \ldots, m.$$

Обозначим соответствующие коэффициенты разложения векторов условий A_i по векторам линейно независимой системы $A_{s_1}, \ldots, A_{s_m}$ через x_{ij}, $i=1, 2, \ldots, m$, $j=1, 2, \ldots, n$. Нетрудно убедиться в справедливости следующих формул (см., например, соотношения (1.15)):

$$x_{i0}=\sum_{\mu=1}^{m} b_{\mu} e_{i\mu} \tag{8.5}$$

$$x_{ij}=\sum_{\mu=1}^{m} a_{\mu j} e_{i\mu}, \tag{8.6}$$

$$i=1, 2, \ldots, m; \quad j=1, 2, \ldots, n.$$

Здесь

$$\| e_{i\mu} \| = \| a_{is_\mu} \|^{-1} \quad (i, \mu=1, 2, \ldots, m).$$

Таким образом, каждому базису задачи $(\tilde{A})$ соответствует m линейно независимых векторов A_{s_i}, $i=1, 2, \ldots, m$, и наборы чисел x_{i0} и x_{ij}, удовлетворяющие соотношениям (8.5), (8.6).

Вычислим коэффициенты разложения векторов условий и вектора ограничений задачи $(\tilde{A})$ по векторам базиса опорного плана Y. Векторы условий задачи $(\tilde{A})$, не входящие в базис, — это векторы e_j при $j \in I_Y$. Вектор ограничений задачи $(\tilde{A})$ — это вектор C, составляющими которого являются коэффициенты линейной формы задачи (A).

Обозначим через $Y_i=(y_{i1}, \ldots, y_{in})$ коэффициенты разложения вектора $-e_{s_i}$ $(i=1, \ldots, m)$ по векторам базиса, а через $Y_0=(y_{01}, \ldots, y_{0n})$ — базисные компоненты опорного плана Y задачи $(\tilde{A})$, коэффициенты разложения вектора C по базису.

Имеем, по определению,

$$-e_{s_i}=\bar{A} Y_i, \quad i=1, 2, \ldots, m, \tag{8.7}$$

$$C=\bar{A} Y_0, \tag{8.8}$$

где

$$\bar{A}=(A^{(1)}, \ldots, A^{(m)}, -e_{s_{m+1}}, \ldots -e_{s_n}).$$

Переставив для удобства записи строки в матрице $\overline{A}$, представим ее в виде

$$\overline{A}=\left\|\begin{matrix} a_{1s_1} & \dots & a_{ms_1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{1s_2} & \dots & a_{ms_2} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1s_m} & \dots & a_{ms_m} & 0 & \dots & 0 \\ a_{1s_{m+1}} & \dots & a_{ms_{m+1}} & -1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1s_n} & \dots & a_{ms_n} & 0 & \dots & -1 \end{matrix}\right\|.$$

Из формул (8.7) и (8.8) получаем

$$Y_i=-\overline{A}^{-1}e_{s_i},\quad i=1,\ 2,\ \dots,\ m, \tag{8.9}$$

$$Y_0=\overline{A}^{-1}C.$$

При этом, естественно, составляющие векторов e_{s_i}, $i=1$, 2, ..., m и C в формулах (8.9) и (8.10) предполагаются расположенными в том же порядке, что и строки матрицы $\overline{A}$.

Легко непосредственным перемножением матриц проверить, что

$$\overline{A}^{-1}=\left\|\begin{matrix} e_{11} & \dots & e_{m1} & 0 & \dots & 0 \\ e_{12} & \dots & e_{m2} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{1m} & \dots & e_{mm} & 0 & \dots & 0 \\ e_{1,\,m+1} & \dots & e_{m,\,m+1} & -1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{1n} & \dots & e_{mn} & 0 & \dots & -1 \end{matrix}\right\|. \tag{8.10}$$

Здесь

$$\|e_{i\mu}\|=\|a_{is_\mu}\|^{-1},\qquad i=1,\ 2,\ \dots,\ m;\qquad \mu=1,\ 2,\ \dots,\ m;$$

$$e_{i\mu}=\sum_{\lambda=1}^{m}a_{\lambda s_\mu}e_{i\lambda},\ i=1,2,\dots,m,\ \mu=m+1,m+2,\dots,n. \tag{8.11}$$

Перепишем соотношения (8.9) и (8.10), используя полученное явное выражение для матрицы $\overline{A}^{-1}$. Имеем

$$y_{ij}=-e_{ij},\quad i=1,2,\ \ldots,\ m,\quad j=1,2,\ \ldots,\ n; \tag{8.12}$$

$$y_{0j}=\begin{cases}\sum\limits_{\lambda=1}^{m} c_{s_\lambda} e_{\lambda j} & \text{для } j=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\\ \sum\limits_{\lambda=1}^{m} c_{s_\lambda} e_{\lambda j}-c_{s_j} & \text{для } j=m+1, m+2, \ldots, n.\end{cases} \tag{8.13}$$

Сравнивая (8.6) и (8.11), получаем

$$e_{i\mu}=x_{is_\mu},\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m,\quad \mu=m+1,\ m+2,\ \ldots,\ n.$$

Отсюда, учитывая (8.12) и (8.13), приходим к равенствам

$$y_{i\mu}=-x_{is_\mu},\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m,\quad \mu=m+1,\ \ldots,\ n, \tag{8.14}$$

$$y_{0\mu}=\sum_{\lambda=1}^{m} c_{s_\lambda} x_{\lambda s_\mu}-c_{s_\mu},\quad \mu=m+1,\ m+2,\ \ldots,\ n. \tag{8.15}$$

Составим выражения для относительных оценок векторов условий задач (A) и ($\tilde{A}$). Чтобы различать оценки векторов условий этих задач, снабдим параметры Δ дополнительными индексами X и Y соответственно.

Оценки векторов условий задачи выражаются через коэффициенты соответствующей линейной формы и коэффициенты разложения этих векторов по базису. Согласно общим правилам образования относительных оценок векторов условий имеем:

$$\Delta_j^{(X)}=\sum_{\mu=1}^{m} x_{\mu j} c_{s_\mu}-c_j,\quad j\in E_Y; \tag{8.16}$$

$$\Delta_{s_i}^{(Y)}=\sum_{\mu=1}^{m} y_{i\mu} b_\mu+\sum_{\mu=1}^{m} y_{i,\ m+\mu} b_{m+s_\mu}-b_{m+s_i},\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Но по условию задачи ($\tilde{A}$) $b_j=0$ при $j>m$. Поэтому, обозначая $\Delta_{s_i}^{(Y)}$ через $\Delta_i^{(Y)}$, получаем

$$\Delta_i^{(Y)}=\sum_{\mu=1}^{m} y_{i\mu} b_\mu,\qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Учитывая, далее, соотношения (8.12) и (8.5), приходим к формуле

$$'\Delta_i^{(Y)} = -x_{i0}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{8.17}$$

Из равенств (8.15) и (8.16) получаем

$$\Delta_{s_\lambda}^{(X)} = y_{0\lambda}, \qquad \lambda = m+1, \ldots, n. \tag{8.18}$$

Формулы (8.17), (8.18) и (8.14) позволяют установить полную эквивалентность всех этапов решения задачи $(\tilde{A})$ по методу улучшения плана и задачи (A) методом уточнения оценок.

Параметры $y_{0\lambda}$ в формуле (8.18) являются базисными компонентами опорного плана задачи (A), ограниченными условием неотрицательности. Поэтому согласно (8.18) $\Delta_j^{(X)} \geqslant 0$ при $j \in E_Y$ или $j \notin I_Y$. Это значит, что векторы условий A_j, $j \in I_Y$ составляют базис псевдоплана задачи (A), с базисными компонентами x_{i0}, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Таким образом, каждому базису опорного плана Y задачи $(\tilde{A})$ соответствует базис псевдоплана задачи (A). Номера векторов базиса и базисных компонент псевдоплана составляют систему индексов I_Y, определяемую базисом опорного плана Y задачи $(\tilde{A})$. Переход от одного опорного плана задачи $(\tilde{A})$ к другому соответствует переходу от одного псевдоплана задачи (A) к очередному. При этом включение вектора $-e_j\,(j \in I_Y)$ в базис опорного плана задачи $(\tilde{A})$ отвечает исключению вектора A_j из базиса псевдоплана задачи (A).

В задаче $(\tilde{A})$ требуется обратить в минимум линейную форму $\tilde{L}(Y)$. Следовательно, признак оптимальности решения задачи $(\tilde{A})$ записывается в виде

$$\Delta_j^{(Y)} \leqslant 0; \qquad j \in I_Y,$$

или, что то же самое в силу (8.17),

$$x_{i0} \geqslant 0; \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Последние соотношения составляют признак оптимальности псевдоплана задачи (A), соответствующего плану Y задачи $(\tilde{A})$, Таким образом, случай 1° метода улучшения плана, применяемого к задаче $(\tilde{A})$, эквивалентен случаю 1° метода уточнения оценок, используемого для решения задачи (A).

Пусть теперь опорный план Y задачи $(\tilde{A})$ не удовлетворяет признаку оптимальности. В этом случае среди параметров $\Delta_i^{(Y)}$ имеются положительные величины. Пусть $\Delta_r^{(Y)}>0$. Условие неразрешимости задачи $(\tilde{A})$ заключается в том, что для некоторого $\Delta_r^{(Y)}>0$ все $y_{r\mu}<0$, $\mu=m+1, \ldots, n$. Формулы (8.17) и (8.14) показывают, что в терминах задачи (A) условие неразрешимости формулируется следующим образом. Некоторой отрицательной базисной составляющей x_{r0} псевдоплана соответствуют неотрицательные коэффициенты x_{rj} для всех $j \in E_Y$.

Следовательно, случай 2° метода улучшения плана для задачи $(\tilde{A})$ совпадает со случаем 2° метода уточнения оценок для задачи (A).

Пусть, наконец, $\Delta_r^{(Y)}>0$, а условия неразрешимости задачи $(\tilde{A})$ не выполняются (случай 3°). В терминах задачи (A) это означает, что псевдоплан задачи (A), определяемый планом Y задачи $(\tilde{A})$, имеет отрицательные компоненты и каждой из них отвечают отрицательные значения x_{ij}. Другими словами, имеет место случай 3° метода уточнения оценок.

Проанализируем отдельную итерацию решения задачи $(\tilde{A})$ по методу последовательного улучшения плана. Введем в базис некоторый вектор $-e_{s_r}$, для которого $\Delta_r^{(Y)}>0$. Вектор A_{s_r} будет при этом исключен из базиса псевдоплана задачи (A). Формула (8.17) показывает, что исключаемому из базиса псевдоплана вектору A_{s_r} соответствует отрицательная базисная составляющая x_{r0}.

В соответствии с правилами метода последовательного улучшения плана из базиса опорного плана задачи $(\tilde{A})$ исключается вектор $-e_{s_t}$ $(s_t \in E_Y)$, на котором достигается

$$\theta_0=\min_{\substack{y_{ri}>0 \\ i>m}} \frac{y_{0i}}{y_{ri}}=\frac{y_{0t}}{y_{rt}}.$$

Согласно формулам (8.18) и (8.14) приведенное условие означает, что в базис псевдоплана задачи (A) вводится вектор $A_k = A_{s_t}$, на котором достигается

$$\theta_0 = \min_{x_{rj}<0} \left(-\frac{\Delta_j^{(X)}}{x_{rj}} \right) = -\frac{\Delta_k^{(X)}}{x_{rk}}.$$

Таким образом, установлено полное соответствие между применением метода улучшения плана к сопряженной задаче и метода уточнения оценок к исходной.

8.2. При изложении обоих алгоритмов метода уточнения оценок мы сравнивали трудоемкость отдельной итерации этого метода с трудоемкостью одного шага в методе улучшения плана. Как мы видели, вычислительные схемы обоих методов близки по форме, и число операций, необходимых для проведения одной итерации в том и другом методе, — величины одного и того же порядка. Было отмечено также, что в общем случае нет обоснованных соображений, позволяющих сравнить число итераций, необходимых для решения задачи каждым из описанных методов.

Особенности методов, изложенные в главах 4—6, позволяют в каждом конкретном случае, исходя из специфики задачи (или класса задач), отдать предпочтение тому или другому методу.

При выборе метода важную роль играет трудоемкость определения исходного опорного плана. Если, например, начальный опорный план сопряженной задачи очевиден, а исходный опорный план прямой задачи подлежит определению по общим правилам, то естественно решать задачу по методу уточнения оценок.

Ниже будет указана дополнительная особенность метода уточнения оценок, полезная для решения широкого класса задач.

Часто возникает необходимость решить ряд задач линейного программирования, отличающихся одним или несколькими условиями.

Корректная постановка сложных практических проблем, исследуемых методами линейного программирования, требует обычно решения целой серии задач, отличающихся небольшим числом ограничений. Дело в том, что при обсуждении новых вопросов, в постановке и решении которых нет достаточного опыта, не всегда удается сразу установить все ограничения, которым должно удовлетворять решение задачи. Обычно анализ решения задачи в предварительной постановке приводит к необходимости учета дополнительных условий. Этот процесс нередко повторяется не один раз.

Такие же трудности возникают и при решении классических задач линейного программирования. Например, при составлении экономного плана перевозок (при решении так называемой транспортной задачи) обычно вначале не учитывают ограниченных пропускных способностей коммуникаций. Кроме того, со временем пропускные способности путей сообщения меняются. Естественно потребовать, чтобы корректировка плана была связана с меньшей трудоемкостью, чем составление плана перевозок.

Необходимость в решении серии задач линейного программирования, отличающихся только одним условием, возникает при использовании методов целочисленного программирования.

Естественно, что во всех указанных случаях нецелесообразно при добавлении отдельных условий начинать решать задачу заново. Возникает необходимость в разумном учете полезной информации, заключенной в оптимальном плане первоначальной задачи. Метод последовательного уточнения оценок может быть с успехом использован для этой цели.

Пусть в результате решения исходной задачи (будем ее по-прежнему называть задачей (A)) получен опорный оптимальный план $X^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ с базисом $A_{s_1}, \ldots, A_{s_m}$. Поставим новую задачу, отличающуюся от задачи (A) дополнительным условием:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{m+1,\ j} x_j \leqslant b_{m+1}, \tag{8.19}$$

или, что то же самое,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{m+1,\ j}\, x_j + x_{n+1} = b_{m+1},$$

$$x_{n+1} \geqslant 0.$$

Назовем эту задачу задачей (C). Сформулируем задачу $(\tilde{C})$, сопряженную с (C).

Требуется обратить в минимум линейную форму

$$\tilde{L}(Y) = \sum_{i=1}^{m+1} b_i y_i$$

при условиях:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i + a_{m+1,\,j}y_{m+1} \geqslant c_j, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n;$$

$$y_{m+1} \geqslant 0.$$

Если

$$\sum_{j=1}^{n} a_{m+1,\,j}\overset{*}{x}_j \leqslant b_{m+1}, \tag{8.20}$$

то вектор X^* является, очевидно, решением задачи (C).

Пусть теперь условие (8.20) не выполняется, т. е.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{m+1,\,j}\overset{*}{x}_j > b_{m+1}.$$

Будем решать задачу (C) методом уточнения оценок.

Допустим, что задача (A) решалась вторым алгоритмом метода улучшения плана или метода уточнения оценок. И в том и в другом случае в последней основной таблице содержатся:

а) оптимальный план $X^* = (\overset{*}{x}_1, \ldots, \overset{*}{x}_n)$ исходной задачи,

б) оптимальный план $Y^* = (\overset{*}{y}_1, \ldots, \overset{*}{y}_m)$ сопряженной задачи,

в) матрица $\|\overset{*}{e}_{ij}\|_m = (A_{s_1},\ A_{s_2}, \ldots, A_{s_m})^{-1}$, обратная к матрице базиса оптимального плана.

Из условий задачи ($\tilde{C}$) следует, что вектор

$$\bar{Y}^* = (\overset{*}{y}_1, \ldots, \overset{*}{y}_m,\ 0)$$

является ее опорным планом с базисом $\bar{A}_{s_1}, \ldots, \bar{A}_{s_m},\ \bar{A}_{n+1}$. Здесь, по определению,

$$\bar{A}_j = (a_{1j}, \ldots, a_{mj},\ a_{m+1,\,j}), \qquad j = 1,\ 2, \ldots, n,$$

$$\bar{A}_{n+1} = (0,\ 0, \ldots,\ 0,\ 1).$$

Следовательно, при решении задачи ($\tilde{C}$) методом уточнения оценок вектор $\bar{Y}^*$ может быть принят в качестве ее исходного опорного плана. Соответствующая ему основная таблица без труда образуется из последней основной таблицы задачи (A). Предоставляем читателю (см. упражнение 10) проверить справедливость следующих соотношений:

$$\bar{X}^* = (\overset{*}{x}_1, \ldots, \overset{*}{x}_n,\ \overset{*}{x}_{n+1}), \tag{8.21}$$

где

$$x^*_{n+1} = -\sum_{j=1}^{n} a_{m+1,j} x^*_j + b_{m+1};$$

$$\overline{Y}^* = (y^*_1, \ldots, y^*_m, 0); \tag{8.22}$$

$$\overline{e}^*_{ij} = e^*_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, m; \tag{8.23}$$

$$\overline{e}^*_{i,m+1} = 0, \qquad 1 = 1, 2, \ldots, m; \tag{8.24}$$

$$\overline{e}^*_{m+1,j} = -\sum_{\lambda=1}^{m} e^*_{\lambda j} a_{m+1,s_\lambda}, \qquad j = 1, 2, \ldots, m; \tag{8.25}$$

$$\overline{e}^*_{m+1,\,m+1} = 1. \tag{8.26}$$

Черта, поставленная над обозначениями параметров, указывает здесь на принадлежность их к задаче (C).

Обычно для получения оптимального плана усложненной задачи требуется небольшое число итераций метода уточнения оценок. Объясняется это тем, что план $\overline{Y}^*$ почти всегда оказывается близким к решению задачи $(\tilde{C})$.

8.3. При решении задач линейного программирования часто удается существенно сократить число итераций, если можно удовлетвориться планом, на котором линейная форма отличается от своего оптимального значения не более чем на заданную величину. Поэтому важно уметь оценить проигрыш в величине линейной формы задачи, возникающий за счет замены оптимального плана некоторым промежуточным планом задачи. Такую оценку можно получить, решая одновременно прямую и сопряженную задачи или, что то же самое, решая задачу одновременно методом улучшения плана и методом уточнения оценок.

Рассмотрим пару взаимосопряженных задач линейного программирования. Пусть $X = (x_1, \ldots, x_n)$ и $Y = (y_1, \ldots, y_m)$ — некоторые опорные планы этих задач. Обозначим через V максимальное значение линейной формы прямой задачи. Как известно,

$$V \leqslant \tilde{L}(Y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i.$$

Следовательно,

$$V - L(X) \leqslant \tilde{L}(Y) - L(X). \tag{8.27}$$

Таким образом, имея некоторый план сопряженной задачи, можно оценить уклонение значения линейной формы прямой задачи на произвольном плане от ее оптимального значения. Согласно первой теореме двойственности оптимальные значения линейных форм прямой и сопряженной задач совпадают. Поэтому оценка (8.27) будет тем точнее, чем ближе Y к решению сопряженной задачи.

Допустим теперь, что к исходной задаче применяются одновременно оба метода: метод улучшения плана, начиная с плана X, и метод уточнения оценок, начиная с плана Y. В результате образуются две последовательности планов:

$$X,\ X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_k;\quad Y,\ Y_1,\ Y_2,\ \ldots,\ Y_k.$$

Согласно (8.12) имеем

$$\delta_k = V - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^{(k)} \leqslant \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^{(k)} - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^{(k)} = \tilde{\delta}_k.$$

Если величина δ_k укладывается в заранее заданные пределы, то процесс решения прекращается, а в качестве оптимального плана принимается план X_k. В противном случае следует последовательно переходить к новым парам планов до тех пор, пока число $\tilde{\delta}_k$ не станет меньше заданной величины.

Указанный *комбинированный метод* особенно эффективен в применении к задачам линейного программирования с большим числом переменных и ограничений.

Отметим еще одно достоинство комбинированного метода. Допустим, что оптимальный план задачи, вычисленный по методу улучшения плана, вырожденный. В этом случае установление оптимальности плана требует, вообще говоря, нескольких итераций. Если же решать задачу комбинированным методом, то оптимальность планов взаимосопряженных задач обнаруживается во всех случаях сразу по совпадению значений соответствующих линейных форм.

Проиллюстрируем геометрически изменение оценок плана в ходе решения задачи комбинированным методом.

Пример. Требуется обратить в максимум линейную форму

$$L(X) = 10x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 16x_4 + 21x_5$$

при соблюдении ограничений

$$\begin{gathered} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 10x_4 + 5x_5 = 6, \\ 9x_1 + 10x_2 + 12{,}5x_3 + 18x_4 + 16{,}5x_5 = 14, \\ x_j \geqslant 0, \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ 5. \end{gathered}$$

Решение. В п. 4.3 гл. 4 эта задача была решена методом улучшения плана. В п. 2.8 настоящей главы эта же задача решена методом уточнения оценок. И в том и в другом случае решение задачи иллюстрировалось геометрическими построениями в трехмерном пространстве.

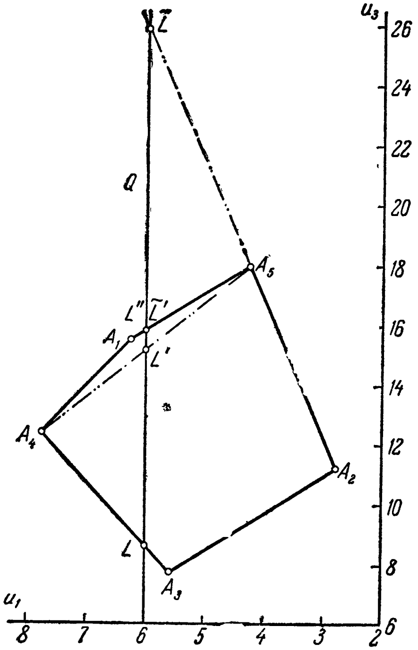


Рис. 6.9.

Не повторяя рассуждений отмеченных пунктов, используем их, чтобы изобразить на плоскости последовательно сокращающиеся границы уклонения текущих значений линейной формы от оптимально достижимой величины. При этом следует иметь в виду, что значение линейной формы сопряженной задачи на некотором плане совпадает с величиной линейной формы прямой задачи на соответствующем псевдоплане.

Пересечем выпуклый многогранный конус, образованный расширенными векторами условий задачи, плоскостью H, проходящей через прямую Q. Последующие построения будем проводить в этой плоскости (рис. 6.9).

Многоугольник $A_4A_1A_5A_2A_3$ является сечением конуса плоскостью H. Вершины A_j многоугольника принадлежат ребрам конуса, отвечающим расширенным векторам условий $\overline{A}_j$. Плоскости П, П′, П″ — образы опорных планов X, X', X'' прямой задачи — пересекают плоскость H соответственно вдоль прямых A_3A_4, A_5A_4, A_5A_1. Плоскости $\widetilde{П}$, $\widetilde{П}'$ — образы опорных планов Y, Y' сопряженной задачи — пересекают плоскость H соответственно вдоль прямых A_2A_5, A_5A_1, Ординаты точек пересечения L, L', L'', $\widetilde{L}$, $\widetilde{L}'$ перечисленных прямых с прямой Q определяют значения линейных форм прямой и сопряженной задач на соответствующих планах.

Как видим, значения линейной формы на последовательных планах прямой задачи возрастают, в то время как переход к очередному опорному плану сопряженной задачи вызывает уменьшение линейной формы. В точке $L'' \equiv \widetilde{L}'$, отвечающей оптимальным планам прямой и сопряженной задач, значения линейных форм обеих задач совпадают.

Отметим, что при $m=2$ использованный здесь m-мерный вариант второй геометрической интерпретации пары двойственных задач проще и удобнее обычно рассматриваемого $(m+1)$-мерного варианта.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 6

1. Доказать необходимость признака оптимальности, сформулированного в п. 1.1 для случая, когда опорный план сопряженной задачи — невырожденный план.

2. Доказать, что расстояние точки $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где

$$x_j = \begin{cases} x_{i0}^0 - x_t x_{it}^0, & j=s_i, \quad i=1, 2, \ldots, m, \\ x_t, & j=t, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

до гиперплоскости

$$L(X) = L(X_0)$$

(X_0 — псевдоплан задачи (1.1) — (1.3) с базисом $A_{s_1}, \ldots, A_{s_m}$) равно

$$\frac{|x_t \Delta_t|}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} c_j^2}}.$$

3. Доказать взаимосопряженность задач (3.4)—(3.6) и (3.1)—(3.3).

4. Доказать, что вектор $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ является ядром опорного плана задачи (3.4) — (3.6) в том и только в том случае, если выполняются условия (3.8) и среди векторов условий A_j, $j=1, 2, \ldots, n$ имеется m линейно независимых векторов, для которых справедливы соотношения (3.12).

5. Доказать, что для невырожденности опорного плана (Y, Z', Z'') задачи (3.4) — (3.6) необходимо и достаточно, чтобы его ядро Y удовлетворяло условию

$$\Delta_j = (A_j, Y) - c_j \neq 0, \qquad j \notin I_Y,$$

где I_Y — совокупность индексов векторов базиса ядра Y опорного плана двойственной задачи (3.4)—(3.6).

6. Псевдоплан X задачи (3.1)—(3.3) и ядро Y опорного плана задачи (3.4)—(3.6) соответствуют друг другу, если их компоненты связаны соотношениями (3.14), (3.15). Показать, что вектор Y, соответствующий в указанном смысле псевдоплану X, являющемуся планом задачи (3.1)—(3.3), представляет собой ядро оптимального плана двойственной задачи (3.4)—(3.6).

7. Пусть X — псевдоплан задачи (3.1)—(3.3), а Y — соответствующее ему ядро плана сопряженной задачи (3.4)—(3.6). Доказать справедливость равенства

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i - \sum_{j=1}^{n} \Delta_j \gamma_j,$$

где

$$\gamma_j \begin{cases} \alpha_j & \text{при } \Delta_j \geqslant 0, \\ \beta_j & \text{при } \Delta_j < 0. \end{cases}$$

8. Пусть Y — вырожденный опорный план двойственной задачи (1.4), (1.5), у которого $m+\nu$ параметров Δ_j равны нулю. Построить пример задачи, в которой число базисов опорного плана Y равно $C_{m+\nu}^{\nu}$.

9. Пусть $A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m}$ — система линейно независимых векторов условий задачи (1.1)—(1.3). Ограничим переменные x_j, для которых параметры $\Delta_j = \sum_{j=1}^{m} c_{s_i} x_{ij} - c_j$ отрицательны, числом $M>0$, и решим полученную таким образом «ограниченную» задачу по методу уточнения оценок. Обозначим через E множество индексов внебазисных переменных решения «ограниченной» задачи. Доказать следующие два утверждения:

а) существует такое число $M_1 < \infty$, что для всех $M > M_1$ при $\sum_{j \in E} \Delta_j \neq 0$ линейная форма задачи (1.1)—(1.3) неограниченна в области своего определения;

б) существует такое число $M_2 < \infty$, что при всех $M > M_2$ выполнение условий неразрешимости ограниченной задачи приводит к неразрешимости исходной задачи (1.1)—(1.3).

10. Проверить справедливость соотношений (8.21)—(8.26), введенных в п. 8.2 в связи с указанной в этом пункте возможностью решения серии задач линейного программирования, отличающихся одним условием.

11. Пользуясь приемами, изложенными в пп. 7.6, 7.7, определить исходный опорный план задачи, двойственной по отношению к задаче максимизации линейной формы

$$L(X) = 4x_1 + 3x_2 + 10x_4 - 2x_5$$

при условиях:

$$
\begin{aligned}
3x_1+2x_2-x_3+5x_4-2x_5&=8,\\
x_2+3x_3+6x_4+3x_5&=15,\\
2x_1\qquad -x_3+x_4-2x_5&=0,\\
x_j\geqslant 0,\quad j=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.&
\end{aligned}
$$

12. Решить задачу из упражнения 11 по первому и второму алгоритмам метода уточнения оценок.

13. Зная оптимальный план задачи из упражнения 11, вычислить составляющие решения сопряженной с ней задачи.

14. Решить задачу из упражнения 11 при дополнительных ограничениях

$$x_j\leqslant 2,\quad j=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

15. Составить блок-схему градиентного метода вычисления опорного плана задачи линейного программирования по ее неопорному плану.

16. Пусть необходимо вычислить максимум линейной формы

$$L(X)=-(a+1)x_1+(a-b)x_2+(a+b-c-1)x_3+ \\ +(b+c-2)x_4+cx_5+x_6+x_7+x_8$$

при условиях:

$$
\begin{aligned}
x_1+x_2+ax_3+bx_4+cx_5+x_6\qquad &=10,\\
-x_1+ax_2+bx_3+cx_4+c_5\qquad +x_7&=5,\\
ax_1+bx_2+cx_3+x_4+x_5\qquad +x_8&=20,\\
x_j\geqslant 0,\quad j=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.&
\end{aligned}
$$

Определить области изменения параметров a, b и c, при которых исследование псевдоплана $X=(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 10,\ 5,-20)$ приводит к случаям 1°, 2° и 3°.

ГЛАВА 7

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО СОКРАЩЕНИЯ НЕВЯЗОК

Метод последовательного улучшения плана оперирует лишь с исходной задачей. Метод последовательного уточнения оценок имеет дело только с сопряженной задачей. Естественно рассмотреть метод решения задач линейного программирования, использующий обе задачи двойственной пары. Таким методом является *метод последовательного сокращения невязок*. В этом методе оптимальный план достигается при движении по векторам с неотрицательными компонентами. Правила перехода от одного вектора X к другому обеспечивают сокращение от шага к шагу разностей между правыми и левыми частями, условий-равенств исходной задачи, записанной в канонической форме. Эти разности принято называть *невязками*. Доказывается, что через конечное число шагов невязки будут сведены к нулю или будет установлена неразрешимость задачи. Определяющая особенность метода, последовательное сокращение невязок, отражена в его названии.

Идея этого метода была впервые высказана в 1939 г. Л. В. Канторовичем, применившим ее к решению ряда частных задач линейного программирования [61], [67]. В работах Л. В. Канторовича не рассматривается сопряженная задача, однако введенные им разрешающие множители (см. п. 5.1 гл. 3) определяют ее оптимальный план.

Независимое описание метода сокращения невязок было дано в 1956 г. тремя американскими авторами [52]. История появления этого метода в американской литературе такова. Вначале на основе некоторых соображений, содержащихся в одной старой работе венгерского математика Эгервари [123], метод уточнения оценок был развит для транспортной задачи [70], [111] и [76]. В честь Эгервари метод был назван венгерским. В работе [52] венгерский метод решения транспортной задачи перенесен на случай общей задачи линейного программирования.

Изложение материала в этой главе ведется по следующей схеме.

В § 1 описана идея метода и приведены общие соображений по структуре вычислений. В § 2 теоретические основы метода иллюстрируются двумя простыми примерами. В § 3 приведена геометрическая интерпретация метода последовательного сокращения невязок. В § 4 метод распространяется на задачи линейного программирования с двухсторонними ограничениями. Алгоритму метода посвящен § 5. Здесь изложение вычислительной схемы метода сокращения невязок применительно к задачам, записанным в канонической форме, и к задачам с двухсторонними ограничениями сопровождается рассмотрением пояснительных примеров.

В последнем параграфе (§ 6) приводится модификация метода сокращения невязок — метод двухсторонних оценок. Метод двухсторонних оценок часто позволяет получить и оценить приближенное решение задачи линейного программирования при существенно меньшем количестве вычислений, чем другие методы.

§ 1. Общая схема метода

1.1. Запишем задачу линейного программирования в канонической форме.

Требуется вычислить максимум линейной формы

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.1}$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m, \tag{1.2}$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{1.3}$$

Прямую задачу (1.1)—(1.3) будем называть задачей (A). Задача $(\tilde{A})$, сопряженная с задачей (A), состоит в определении минимума линейной формы

$$\tilde{L}(Y)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \tag{1.4}$$

при следующих условиях:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j, \qquad j=1, 2, \ldots, n. \tag{1.5}$$

Будем предполагать все компоненты вектора ограничений $B=(b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$ неотрицательными. Ясно, что каждая задача линейного программирования может быть приведена к эквивалентной задаче, удовлетворяющей этому условию.

Изложение метода может быть упрощено, если ввести в рассмотрение так называемые *расширенную* и *вспомогательную задачи.*

Будем для краткости называть расширенную задачу задачей (B). Задача (B) состоит в определении минимума линейной формы

$$\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \tag{1.6}$$

при соблюдении ограничений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \varepsilon_i = b_i, \qquad i=1, 2, \ldots, m, \tag{1.7}$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j=1, 2, \ldots, n, \tag{1.8}$$

$$\varepsilon_i \geqslant 0, \qquad i=1, 2, \ldots, m. \tag{1.9}$$

Пусть $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ — некоторый план сопряженной задачи ($\tilde{A}$) (не обязательно опорный). Изложение способов отыскания исходного плана двойственной задачи приведено в п. 7.2 гл. 6.

Выделим векторы условий A_j, $j=1, 2, \ldots, n$, для которых

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j. \tag{1.10}$$

Обозначим множество индексов таких векторов через E_Y. С каждым планом Y сопряженной задачи ($\tilde{A}$) может быть связана вспомогательная задача (C_Y), образующаяся из расширенной задачи (B) введением дополнительных ограничений:

$$x_j = 0 \quad \text{при} \quad j \notin E_Y. \tag{1.11}$$

Таким образом, во вспомогательной задаче (C_Y) требуется обратить в минимум линейную форму

$$\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \tag{1.12}$$

при условиях:

$$\sum_{j \in E_Y} a_{ij} x_j + \varepsilon_i = b_i, \tag{1.13}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad \text{при} \quad j \in E_Y, \tag{1.14}$$

$$\varepsilon_i \geqslant 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{1.15}$$

В процессе решения задачи (A) методом последовательного сокращения невязок понадобится также задача, двойственная по отношению к вспомогательной задаче (C_Y). Назовем сопряженную вспомогательную задачу задачей ($\tilde{C}_Y$). Согласно общим правилам построения двойственных задач задача ($\tilde{C}_Y$) формулируется следующим образом:

Требуется обратить в максимум линейную форму

$$\sum_{i=1}^{m} b_i \mu_i, \tag{1.16}$$

переменные которой удовлетворяют условиям

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \mu_i \leqslant 0 \quad \text{при} \quad j \in E_Y, \tag{1.17}$$

$$\mu_i \leqslant 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{1.18}$$

Векторами условий вспомогательной задачи (C_Y) являются векторы $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_s}, e_1, e_2, \ldots, e_m$, где индексы $j_1, \ldots, j_s$ составляют множество E_Y, а векторы $e_1, e_2, \ldots, e_m$ образуют полный набор m-мерных единичных векторов.

Пусть компоненты произвольного плана вспомогательной задачи (C_Y) равны $\xi_j (j \in E_Y)$, $\varepsilon_i (i = 1, 2, \ldots, m)$. Поставим в соответствие каждому такому плану некоторый n-мерный вектор $X = (x_1, \ldots, x_n)$, где

$$\left.\begin{aligned} x_j &= \xi_j \quad \text{при} \quad j \in E_Y, \\ x_j &= 0 \quad \text{при} \quad j \notin E_Y. \end{aligned}\right\} \tag{1.19}$$

Вектор X с неотрицательными компонентами, определенный формулами (1.19), вообще говоря, не является планом исходной задачи (A). В соответствии с соотношениями (1.13), (1.15), (1.19)

$$b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \varepsilon_i \geqslant 0. \tag{1.20}$$

Компоненты ε_i плана вспомогательной задачи определяют, таким образом, невязки, возникающие в i-м условии системы (1.2) при подстановке в нее вектора $X = (x_1, \ldots, x_n)$. Оптимальный опорный план вспомогательной задачи содержит не более m положительных компонент (ξ_j, ε_i). Число положительных компонент соответствующего вектора X тем более не превышает m.

Будем называть вектор X, отвечающий оптимальному опорному плану некоторой вспомогательной задачи (C_Y), *квазипланом* исходной задачи (A). Векторы базиса решения вспомогательной задачи образуют также *базис квазиплана* задачи (A). Базис $Б_X$ квазиплана состоит из некоторого числа векторов условий задачи (A) и нескольких единичных векторов. Если в базисе квазиплана нет единичных векторов, то квазиплан оказывается планом задачи (A) и, как мы увидим далее, ее решением.

Вектор $E = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$, где $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ — последние m составляющих решения вспомогательной задачи, будем называть *вектором невязок*, соответствующим квазиплану X, а сумму $\varepsilon_0 = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i$ компонент вектора E *невязкой* квазиплана.

Признак оптимальности. *Квазиплан X задачи (A) является ее оптимальным планом, если все компоненты соответствующего вектора невязок равны нулю, или, что то же самое, квазиплан задачи с нулевой невязкой является ее решением.*

Доказательство. По построению, компоненты x_j квазиплана неотрицательны. Кроме того, по условию,

$$\varepsilon_i = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Поэтому согласно соотношениям (1.20) составляющие квазиплана удовлетворяют условиям (1.2) задачи (A). Следовательно, квазиплан является планом задачи (A). Согласно определению плана $X=(x_1, \ldots, x_n)$ при $x_j>0$ соблюдается равенство

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j.$$

Поэтому имеет место следующая цепочка соотношений:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = \sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{i=b}^{m} b_i y_i.$$

Полученный результат в силу леммы 1.2 гл. 3 доказывает оптимальность плана X задачи (A). Отсюда следует также, что план Y сопряженной задачи $(\tilde{A})$, породивший вспомогательную задачу (C_Y), является решением задачи $(\tilde{A})$. Справедливость признака оптимальности доказана.

1.2. Пусть $Y=(y_1, \ldots, y_m)$ — некоторый план сопряженной задачи (задачи $(\tilde{A})$). Свяжем с ним вспомогательную задачу (C_Y) и сопряженную вспомогательную задачу $(\tilde{C}_Y)$.

Пусть оптимальный план задачи (C_Y) имеет вид

$$(\Xi^*, E^*) = (\xi^*_{j_1}, \ldots, \xi^*_{j_s}, \varepsilon^*_1, \ldots, \varepsilon^*_m),$$

а решением задачи $(\tilde{C}_Y)$ является вектор

$$M^* = (\mu^*_1, \ldots, \mu^*_m).$$

Введем параметры Δ_j и δ^*_j, $j=1, 2, \ldots, n$:

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j, \qquad j=1, 2, \ldots, n, \tag{1.21}$$

$$\delta^*_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \mu^*_i, \qquad j=1, 2, \ldots, n. \tag{1.22}$$

Решение вспомогательной задачи (C_Y) определяет квазиплан X задачи (A). Вектор невязок E^* и параметры δ^*_j являются определяющими характеристиками квазиплана X. В зависимости от значений невязок ε^*_i и знаков параметров δ^*_j следует различать три случая:

1° Все компоненты вектора невязок равны нулю:

$$\varepsilon^*_i = 0, \quad i=1, 2, \ldots, m.$$

2° Имеются положительные невязки и при этом все значения параметров δ_j^* не положительны:

$$\varepsilon_0^* = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^* > 0, \quad \delta_j^* \leqslant 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

3° Вектор невязок содержит положительные составляющие, и среди параметров δ_j^* имеется по крайней мере одна положительная величина.

В случае 1°, как это следует из признака оптимальности, квазиплан оказывается оптимальным планом задачи (A). Ниже будет показано, что в случае 2° задача (A) неразрешима (условия задачи несовместны), а в случае 3° можно перейти к новому квазиплану с меньшей невязкой.

1.3. Чтобы упростить анализ случаев 2° и 3°, целесообразно проследить за изменением суммы невязок (линейной формы вспомогательной задачи) при переходе от плана Y сопряженной задачи к плану

$$Y' = Y(\theta) = Y - \theta M^*.$$

Будем называть переход от плана Y к плану $Y(\theta)$ *элементарным преобразованием* плана Y.

Вычислим параметры $\Delta_j(\theta)$ для плана $Y(\theta)$. В соответствии с формулами (1.21), (1.22) имеем

$$\Delta_j(\theta) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i(\theta) - c_j = \Delta_j - \theta\delta_j^*, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \quad (1.23)$$

Вектор $Y(\theta)$ будет планом сопряженной задачи $(\tilde{A})$ при всех значениях θ, для которых

$$\Delta_j(\theta) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Вычислим значение линейной формы задачи $(\tilde{A})$ на плане $Y(\theta)$. Имеем

$$\tilde{L}[Y(\theta)] = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i(\theta) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i - \theta \sum_{i=1}^{m} b_i \mu_i^*.$$

Применяя первую теорему двойственности к вспомогательной задаче (C_Y) и сопряженной с ней задаче $(\tilde{C}_Y)$, получаем

$$\sum_{i=1}^{m} b_i \mu_i^* = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^*.$$

Следовательно,

$$\tilde{L}[Y(\theta)] = \tilde{L}(Y) - \theta \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^*. \qquad (1.24)$$

Как видим, если $\theta > 0$ и $\varepsilon_0^* = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^* > 0$, значение линейной формы сопряженной задачи уменьшается при элементарном преобразовании плана Y в план $Y(\theta)$.

Исследуем теперь случай 2°, когда среди невязок ε_i^* имеются положительные, а все параметры $\delta_j^* \leqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. В этом случае, как видно из формулы (1.23), вектор $Y(\theta)$ является планом задачи $(\tilde{A})$ при любом $\theta \geqslant 0$. Равенство (1.24) показывает, что задача $(\tilde{A})$ при этом не ограничена снизу на множестве ее планов. Следовательно, согласно лемме 1.3. гл. 3 исходная задача, задача (A), неразрешима из-за несовместности ее условий. Условия, определяющие случай 2°, будем в дальнейшем называть *признаком неразрешимости задачи.*

Перейдем к анализу случая 3°, когда имеются положительные невязки ε_i^* и положительные значения параметров δ_j^*.

Наибольшее значение θ, при котором $Y(\theta)$ еще остается планом задачи $(\tilde{A})$, определяется соотношением

$$\theta_0 = \min_{\delta_j^* > 0} \left(\frac{\Delta_j}{\delta_j^*} \right). \qquad (1.25)$$

Здесь минимум берется по индексам j, для которых величины δ_j^* положительны. В случае 3° такие индексы имеются. Пользуясь определением параметров δ_j^* и условиями (1.17), которым удовлетворяют величины μ_j^*, получаем

$$\delta_j^* \leqslant 0, \quad j \in E_Y.$$

Следовательно, θ_0 достигается при $j \notin E_Y$. С другой стороны, по определению множества E_Y параметры Δ_j положительны при $j \notin E_Y$. Поэтому $\theta_0 > 0$.

Покажем, что план $Y' = Y(\theta_0)$ задачи $(\tilde{A})$ приводит к вспомогательной задаче $(C_{Y'})$ с меньшим значением минимума суммы невязок, чем для вспомогательной задачи (C_Y).

В силу второй теоремы двойственности при

$$\xi^*_{j_\lambda} > 0$$

имеет место равенство

$$\delta^*_{j_\lambda} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij_\lambda} \mu^*_i = 0.$$

Из полученных соотношений видно, что в $E_{Y'}$ входят, в частности, те индексы j, для которых $x_j = \xi^*_j > 0$. Действительно, для таких j

$$\Delta_j(\theta) = \Delta_j - \theta_0 \delta^*_j = 0 - \theta_0 \cdot 0 = 0.$$

Поэтому исходный план вспомогательной задачи ($C_{Y'}$), отвечающей $Y(\theta_0)$, можно составить из положительных компонент оптимального плана предыдущей вспомогательной задачи (C_Y). Это обстоятельство существенно сокращает число шагов, необходимых для решения очередной вспомогательной задачи.

Определим индекс j_0 соотношением

$$\theta_0 = \frac{\Delta_{j_0}}{\delta^*_{j_0}}, \quad \delta^*_{j_0} > 0.$$

Таких индексов может быть несколько. Очевидно, вектор A_{j_0} войдет в число векторов условий новой вспомогательной задачи, так как

$$\Delta_{j_0}(\theta_0) = \Delta_{j_0} - \theta_0 \delta^*_{j_0} = 0.$$

Допустим, что задача C'_Y невырожденная (для этого достаточно предположить невырожденность расширенной задачи (B)).

В § 5 приводятся соображения, указывающие на целесообразность использования для решения вспомогательной задачи второго алгоритма метода улучшения плана. В соответствии с основными положениями этого метода условие $\delta^*_{j_0} > 0$ для невырожденной задачи означает, что введение в базис исходного плана новой вспомогательной задачи вектора A_{j_0} уменьшит значение ее линейной формы. Поэтому минимум новой вспомогательной задачи строго меньше минимума предыдущей вспомогательной задачи:

$$\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^{*\prime} = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^{*}(\theta_0) < \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^{*}.$$

Таким образом, в случае 3° можно указать элементарное преобразование плана Y сопряженной задачи в план $Y' = Y(\theta_0)$, который порождает вспомогательную задачу $(C_{Y'})$ с меньшим значением минимума суммы невязок. Другими словами, в случае 3° можно перейти от квазиплана X к квазиплану X' с меньшей невязкой. Описанная последовательность действий составляет одну итерацию метода сокращения невязок. Процесс продолжается до тех пор, пока не придем к случаю 1° или 2°.

1.4. Наметим кратко порядок операций, связанных с отдельным шагом метода последовательного сокращения невязок.

В каждой итерации метода предполагается известным (полученным в конце предыдущего шага) план Y сопряженной задачи $(\tilde{A})$. Итерация начинается с формирования вспомогательной задачи (C_Y). Решение задачи (C_Y) определяет квазиплан X исходной задачи (A). Далее производится исследование квазиплана (X). По величине невязки квазиплана и знакам параметров δ_i^* выясняется, какой из случаев (1°, 2° или 3°) имеет место.

Если выполняются условия признака оптимальности, т. е. имеет место случай 1°, найденный квазиплан оказывается оптимальным планом задачи (A) и процесс решения завершается. В случае, когда условия признака оптимальности не выполняются, необходимо просмотреть знаки параметров δ_j^*. Неположительность всех δ_j^* указывает на неразрешимость задачи (случай 2°). Если же среди параметров δ_j^* находятся положительные величины, имеет место случай 3°. В этом случае указывается способ построения нового плана Y' сопряженной задачи, отправляясь от которого проводится очередная итерация, обеспечивающая сокращение невязки квазиплана.

Каждая итерация метода сокращения невязок включает несколько шагов метода улучшения плана, необходимых для решения соответствующей вспомогательной задачи. Заметим, что планы любой вспомогательной задачи являются планами расширенной задачи (задачи (B)). Процесс решения вспомогательных задач состоит, таким образом, в последовательных переходах от одного опорного плана расширенной задачи к другому.

Движение по опорным планам задачи (B) происходит по правилам метода улучшения плана. Это, однако, не значит, что решение задачи (A) методом сокращения невязок сводится к определению оптимального плана задачи (B) по методу улучшения плана. В самом деле, на протяжении каждой итерации метода сокращения невязок вектор, подлежащий вводу в базис, выбирается не из всей совокупности векторов условий задачи (B), а только из числа единичных векторов

$$e_j \ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

и тех A_j, для которых

$$\Delta_j=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i-c_j=0.$$

Здесь $Y=(y_1,\ \ldots,\ y_m)$ — план задачи ($\tilde{A}$), связанный с рассматриваемой итерацией. Перед началом каждой итерации множество допустимых векторов A_j обновляется с помощью нового плана задачи ($\tilde{A}$).

Приведенные соображения позволяют, в частности, сделать вывод о конечности метода сокращения невязок. Действительно, для невырожденной расширенной задачи переход от одного ее опорного плана к другому сопровождается монотонным убыванием линейной формы (1.6). Поэтому в процессе решения задачи не может быть возврата к уже пройденному опорному плану задачи (B). Количество различных опорных планов расширенной задачи конечно. Следовательно, получение оптимального плана разрешимой задачи (A) методом сокращения невязок укладывается в конечное число итераций. Неразрешимость задачи, если она имеет место, устанавливается также за конечное число шагов.

Если при решении вырожденных вспомогательных задач пользоваться правилами, гарантирующими от зацикливания (см. п. 5.5 гл. 5), то вывод о конечности метода сокращения невязок может быть распространен и на случай вырожденности расширенной задачи (B).

§ 2. Примеры

2.1. Проиллюстрируем общие рассуждения предыдущего параграфа на примере, исследованном в гл. 4 (§ 3) методом улучшения плана и в гл. 6 (§ 2) методом уточнения оценок.

Пример 1. Требуется обратить в максимум линейную форму

$$L(X)=5x_1-x_2-2x_3+5x_4+5x_5-x_6$$

при условиях:

$$\begin{aligned}
-2x_1+5x_2+x_3 &&&&=10,\\
x_1-x_2 &&+x_4 &&=1,\\
x_1+2x_2 &&&+x_5 &=6,\\
10x_1-3x_2 &&&&+x_6=15,
\end{aligned}$$
$$x_j\geqslant 0,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ 6.$$

Решение. Будем называть сформулированную задачу задачей (A). Сопряженная к ней задача, задача $(\tilde{A})$, записывается следующим образом:

Требуется вычислить минимум линейной формы

$$\tilde{L}(Y)=10y_1+y_2+6y_3+15y_4$$

при условиях:

$$\begin{aligned}
-2y_1+y_2+y_3+10y_4 &\geqslant 5,\\
5y_1-y_2+2y_3-3y_4 &\geqslant -1,\\
y_1 &\geqslant -2,\\
y_2 &\geqslant 5,\\
y_3 &\geqslant 5,\\
y_4 &\geqslant -1.
\end{aligned}$$

Задаче (A) соответствует следующая расширенная задача (B): Требуется обратить в минимум линейную форму

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4$$

при условиях:

$$\begin{aligned}
-2x_1+5x_2+x_3 &+\varepsilon_1 &&&&=10,\\
x_1-x_2+x_4 &&+\varepsilon_2 &&&=1,\\
x_1+2x_2+x_5 &&&+\varepsilon_3 &&=6,\\
10x_1-3x_2+x_6 &&&&+\varepsilon_4&=15,
\end{aligned}$$
$$x_j\geqslant 0,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ 6,$$
$$\varepsilon_i\geqslant 0,\quad i=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Легко непосредственно убедиться в том, что

$$Y=(0,\ 5,\ 5,\ 0)$$

является планом задачи $(\tilde{A})$. Вычислим параметры Δ_j — разности левых и правых частей условий задачи $(\tilde{A})$. Имеем

$$\Delta=(\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3,\ \Delta_4,\ \Delta_5,\ \Delta_6)=(5,\ 6,\ 2,\ 0,\ 0,\ 1).$$

Множество E_Y в нашем случае состоит из двух индексов: $j=4$ и $j=5$ $(E_Y=\{4, 5\})$.

Вспомогательная задача (C_Y), порожденная планом Y, может быть получена из задачи (B), если положить в ней $x_j=0$ для $j\notin E_Y$. Таким образом, в задаче (C_Y) требуется обратить в минимум

$$\sum_{i=1}^{4} \varepsilon_i$$

при условиях:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \qquad\qquad\qquad &= 10, \\ x_4 \qquad +\varepsilon_2 \qquad\qquad &= 1, \\ x_5 \qquad\qquad +\varepsilon_3 \quad &= 6, \\ \varepsilon_4 &= 15, \end{aligned}$$

$$x_4 \geqslant 0, \quad x_5 \geqslant 0, \quad \varepsilon_i \geqslant 0, \quad i=1, 2, 3, 4.$$

Без специальных вычислений ясно, что решение задачи (C_Y) определяется следующим набором чисел:

$$x_4=1, \quad x_5=6, \quad \varepsilon_1=10, \quad \varepsilon_2=0, \quad \varepsilon_3=0, \; \varepsilon_4=15.$$

Итак,

$$(\Xi^*, E^*)=(1, 6, 10, 0, 0, 15).$$

Исходный квазиплан представляет собой вектор $X=(0,0,0,1,6,0)$. Невязка квазиплана X отлична от нуля $\left(\sum_{i=1}^{4} \varepsilon_i^* = 10+0+0+15 = \right.$ $\left.=25\right)$. Случай 1° не имеет места: квазиплан X не является решением задачи.

В задаче $(\tilde{C}_Y)$, двойственной к задаче (C_Y), требуется обратить в максимум линейную форму

$$10\mu_1+\mu_2+6\mu_3+15\mu_4$$

при условиях

$$\mu_2 \leqslant 0, \quad \mu_3 \leqslant 0, \quad \mu_i \leqslant 1, \quad i=1, 2, 3, 4.$$

Поскольку все коэффициенты линейной формы задачи $(\tilde{C}_Y)$ положительны, решение задачи $(\tilde{C}_Y)$ достигается на векторе

$$M^*=(1, 0, 0, 1).$$

В соответствии с рекомендациями метода вычислим параметры

$$\delta_j^* = \sum_{i=1}^{4} a_{ij}\mu_i^*$$

для всех j $(j=1, 2, \ldots, 6)$. Имеем

$$\delta^* = (\delta_1^*, \delta_2^*, \delta_3^*, \delta_4^*, \delta_5^*, \delta_6^*) = (8, 2, 1, 0, 0, 1).$$

Среди компонент δ_j^* вектора δ^* имеются положительные величины. Следовательно, имеет место случай 3°.

Вычислим

$$\theta_0 = \min_{\delta_j^* > 0} \frac{\Delta_j}{\delta_j^*}.$$

Имеем

$$\theta_0 = \min\left(\frac{5}{8}, 3, 2, 1\right) = \frac{5}{8}.$$

Вектор $\Delta' = \Delta(\theta_0)$ вычисляется по формуле

$$\Delta' = \Delta - \theta_0 \delta^*.$$

В нашем случае

$$\Delta' = \left(0, \frac{19}{4}, \frac{11}{8}, 0, 0, \frac{3}{8}\right).$$

Образуем очередной план Y' задачи $(\tilde{A})$:

$$Y' = Y(\theta_0) = Y - \theta_0 \dot{M}^*,$$

$$Y' = \left(-\frac{5}{8}, 5, 5, -\frac{5}{8}\right).$$

План Y' задачи $(\tilde{A})$ порождает новую вспомогательную задачу $(C_{Y'})$, в которой требуется обратить в минимум линейную форму

$$\sum_{i=1}^{4} \varepsilon_i$$

при условиях:

$$\begin{aligned}
-2x_1 \qquad\quad +\varepsilon_1 \qquad\qquad\qquad &= 10,\\
x_1 + x_4 \qquad\quad +\varepsilon_2 \qquad\qquad &= 1,\\
x_1 \quad + x_5 \qquad\quad +\varepsilon_3 \qquad &= 6,\\
10x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad + \varepsilon_4 &= 15,
\end{aligned}$$

$$x_1 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0, \quad x_5 \geqslant 0; \quad \varepsilon_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Решим задачу $(C_{Y'})$ по второму алгоритму метода улучшения плана. Естественно использовать решение задачи (C_Y) в качестве исходного плана задачи $(C_{Y'})$. При этом после первой же итерации получим оптимальные планы задач $(C_{Y'})$ и $(\tilde{C}_{Y'})$:

$$(\Xi^{*\prime}, E^{*\prime}) = (1, 0, 5, 12, 0, 0, 5),$$
$$M^* = (1, -8, 0, 1).$$

Соответствующий квазиплан

$$X' = (1, 0, 0, 0, 5, 0).$$

Ему отвечает невязка

$$\varepsilon_0^{*\prime} = \sum_{i=1}^{4} \varepsilon_i^{*\prime} = 12 + 0 + 0 + 5 = 17.$$

Чтобы оценить, нет ли оснований считать задачу неразрешимой, следует установить знаки компонент вектора $\delta^{*\prime}$. В нашем случае

$$\delta^{*\prime} = (0,\ 10,\ 1,\ -8,\ 0,\ 1).$$

Как видим, мы снова имеем дело со случаем 3°, когда можно указать элементарное преобразование, которое приведет к новому плану Y'' задачи $(\tilde{A})$ и, следовательно, к новому квазиплану задачи (A) с меньшей невязкой. Параметр преобразования θ_0' равен

$$\theta_0' = \min\left(\frac{19}{40},\ \frac{11}{8},\ \frac{3}{8}\right) = \frac{3}{8}.$$

Вычислим векторы

$$\Delta'' = \Delta'(\theta_0'), \quad Y'' = Y'(\theta_0')$$

и построим очередную вспомогательную задачу $(C_{Y''})$.

Последующие вычисления проводятся по той же схеме. Основные результаты каждой итерации зафиксированы в табл. 7.1.

После пятой итерации получен квазиплан

$$X^{(\mathrm{V})} = (48/23,\ 45/23,\ 101/23,\ 20/23,\ 0,\ 0)$$

с нулевой невязкой. В соответствии с признаком оптимальности $X^{(\mathrm{V})}$ является решением задачи (A). Максимальное значение линейной формы $L(X)$ равно

$$L(X^{(\mathrm{V})}) = 93/23.$$

Нетрудно убедиться в том, что $Y^{(\mathrm{V})}$ является оптимальным планом задачи $(\tilde{A})$. Действительно,

$$L(Y^{(\mathrm{V})}) = L(X^{(\mathrm{V})}) = 93/23.$$

2.2. Рассмотрим еще один пример, который был описан в гл. 6 (п. 2.6) для иллюстрации случая 2° неразрешимости задачи линейного программирования.

Пример 2. Требуется обратить в максимум линейную форму

$$L(X) = 5x_1 + 4x_2 + x_5$$

при условиях

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad\qquad &= 2,\\ 4x_1 + 3x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 12,\\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 10,\\ x_j \geqslant 0 \quad j = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5. \end{aligned}$$

Таблица 7.1

Номер итерации (ν)	i	$X^{(\nu)}$	$\Delta^{(\nu)}$	$\delta^{*(\nu)}$	i	1	2	3	4
0	1		5	8	Y		5	5	
	2		6	2	E^*	10			15
	3		2	1	M^*	1			1
	4	1			$Б_X$	A_4	A_5	e_1	e_4
	5	6			$\Sigma\, \varepsilon_i^*$	25			
	6		1	1	θ_0	$^5/_8$			
1	1	1			Y'	$-\,^5/_8$	5	5	$-\,^5/_8$
	2		$^{19}/_4$	10	$E^{*\prime}$	12			5
	3		$^{11}/_8$	1	$M^{*\prime}$	1	-8		1
	4			-8	$Б_{X'}$	A_1	A_5	e_1	e_4
	5	5			$\Sigma\, \varepsilon_i^{*\prime}$	17			
	6		$^3/_8$	1	θ_0'	$^3/_8$			
2	1	1			Y''	-1	8	5	-1
	2		1	3	$E^{*\prime\prime}$	12			
	3		1	1	$M^{*\prime\prime}$	1	2		
	4		3	2	$Б_{X''}$	A_1	A_5	e_1	A_6
	5	5			$\Sigma\, \varepsilon_i^{*\prime\prime}$	12			
	6	5			θ_0''	$^1/_3$			

Продолжение

Номер итерации (ν)	j	$X^{(\nu)}$	$\Delta^{(\nu)}$	$\delta^{*(\nu)}$	i	1	2	3	4
3	1	$^{12}/_{7}$			Y'''	$-\,^{4}/_{3}$	$^{22}/_{3}$	5	-1
	2	$^{5}/_{7}$			$E^{*'''}$	$^{69}/_{7}$			
	3		$^{2}/_{3}$	1	$M^{*'''}$	1	$^{44}/_{7}$		$-\,^{3}/_{7}$
	4		$^{7}/_{3}$	$^{44}/_{7}$	$Б_{X'''}$	A_1	A_5	e_1	A_2
	5	$^{20}/_{7}$			$\Sigma\varepsilon_i^{*'''}$	$^{69}/_{7}$			
	6			$-\,^{3}/_{7}$	θ_0'''	$^{49}/_{132}$			
4	1	$^{48}/_{23}$			$Y^{(IV)}$	$-\,^{75}/_{44}$	5	5	$-\,^{37}/_{44}$
	2	$^{45}/_{23}$			$E^{*(IV)}$	$^{101}/_{23}$			
	3		$^{13}/_{44}$	1	$M^{*(IV)}$	1		$-\,^{44}/_{23}$	$^{9}/_{23}$
	4	$^{20}/_{23}$			$Б_{X(IV)}$	A_1	A_4	e_1	A_2
	5			$-\,^{44}/_{23}$	$\Sigma\varepsilon_i^{*(IV)}$	$^{101}/_{23}$			
	6		$^{7}/_{44}$	$^{9}/_{23}$	$\theta_0^{(IV)}$	$^{13}/_{44}$			
5	1	$^{48}/_{23}$			$Y^{(V)}$	-2	5	$^{129}/_{23}$	$-\,^{22}/_{23}$
	2	$^{45}/_{23}$			$E^{*(V)}$				
	3	$^{101}/_{23}$			$M^{*(V)}$				
	4	$^{20}/_{23}$			$Б_{X(V)}$	A_1	A_4	A_3	A_2
	5		$^{13}/_{23}$		$\Sigma\varepsilon_i^{*(V)}$	0			
	6		$^{1}/_{23}$						

Решение. Назовем рассматриваемую задачу задачей (A). В сопряженной задаче $(\tilde{A})$ требуется вычислить минимум линейной формы

$$\tilde{L}(Y)=2y_1+12y_2+10y_3$$

при условиях:

$$\begin{aligned} y_1+4y_2+4y_3 &\geqslant 5,\\ 2y_1+3y_2+4y_3 &\geqslant 4,\\ -y_1 \qquad\quad + y_3 &\geqslant 0,\\ y_2+y_3 &\geqslant 0,\\ y_3 &\geqslant 1. \end{aligned}$$

В качестве исходного плана задачи $\tilde{A}$ естественно принять вектор $Y=(0,\ 0,\ y_3)$, где

$$y_3=\max\{5/4,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1\}=5/4.$$

Для плана Y имеем

$$\Delta=(0,\ 1,\ 5/4,\ 5/4,\ 1/4).$$

Следовательно, вспомогательная задача (C_Y) содержит только один вектор условий задачи (A) — вектор A_1. Задача (C_Y) состоит в минимизации суммы

$$\sum_{i=1}^{3}\varepsilon_i$$

при условиях:

$$\begin{aligned} x_1+\varepsilon_1&=\ 2,\\ 4x_1+\varepsilon_2&=12,\\ 4x_1+\varepsilon_3&=10,\\ x_1\geqslant 0,\quad \varepsilon_i\geqslant 0,&\qquad i=1,\ 2,\ 3. \end{aligned}$$

Легко сообразить, не прибегая к специальным вычислениям, что решение задачи (C_Y) определяется вектором

$$(\Xi^*,\ E^*)=(2,\ 0,\ 4,\ 2).$$

Следовательно, исходный квазиплан X — вектор с единственной отличной от нуля компонентой

$$X=(2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0).$$

Невязка квазиплана X равна 6.

Решение задачи $(\tilde{C}_Y)$, сопряженной с вспомогательной задачей (C_Y), представляет собой вектор

$$M^*=(-8,\ 1,\ 1).$$

Вычислим параметры квазиплана X, необходимые для перехода к следующему квазиплану с меньшей невязкой. Имеем

$$\delta^*=(0,\ -9,\ 9,\ 2,\ 1),$$
$$\theta_0=\min\frac{\Delta_j}{\delta_j^*}=\frac{5}{36},$$
$$\Delta'=\Delta(\theta_0)=(0,\ 9/4,\ 0,\ 35/36,\ 1/9),$$
$$Y'=(10/9,\ -5/36,\ 10/9).$$

План Y' задачи $(\tilde{A})$ порождает вспомогательную задачу $(C_{Y'})$. Решение $(\Xi^*,\ E^*)$ задачи (C_Y) может быть принято в качестве исходного плана задачи $(C_{Y'})$. После первой же итерации получаем

$$(\Xi^{*\prime},\ E^{*\prime})=(12/5,\ 2/5,\ 0,\ 12/5,\ 0),$$
$$M^{*\prime}=(-4/5,\ 1,\ -4/5),$$
$$X'=(12/5,\ 0,\ 2/5,\ 0,\ 0).$$

В нашем случае

$$\sum_{i=1}^{3}\varepsilon_i^{*\prime}=12/5,$$
$$\delta^*=(0,\ -9/5,\ 0,\ 1/5,\ -4/5).$$

Поэтому и после этой итерации метода сокращения невязок заключаем, что имеет место случай 3°. Произведем очередное элементарное преобразование вектора Y' в $Y''=Y'(\theta_0')$. Имеем

$$\theta_0'=\frac{175}{36},\quad \Delta''=(0,\ 11,\ 0,\ 0,\ 4),\quad Y''=(5,\ -5,\ 5).$$

Векторами условий вспомогательной задачи $(C_{Y''})$ являются три вектора условий задачи (A) — векторы A_1, A_3 и A_4 и единичные векторы e_1, e_2, e_3. Решим задачу $(C_{Y''})$, отправляясь от плана $(\Xi^{*\prime},\ E^{*\prime})$. Получим квазиплан

$$X''=(2,\ 0,\ 0,\ 2,\ 0).$$

Для квазиплана X''

$$\sum\varepsilon_i^{*\prime\prime}=2,$$
$$\delta''^*=(0,\ -1,\ -2,\ 0,\ -1).$$

Невязка плана X'' положительна, а все составляющие вектора $\delta^{*\prime\prime}$ неположительны. В соответствии с выводами § 1 это означает, что условия задачи (A) несовместны. Действительно, вычитая из третьего условия задачи (A) второе, получаем

$$x_2+x_3+x_5=-2.$$

Это равенство не может выполняться при неотрицательных значениях переменных. Задача (A) неразрешима.

§ 3. Геометрическая интерпретация

3.1. Метод сокращения невязок допускает естественное геометрическое истолкование в $(m+1)$-мерном пространстве точек $U=(u_1, u_2, \ldots, u_m, u_{m+1})$.

Решение задачи (A) методом сокращения невязок начинается с выбора некоторого плана Y сопряженной задачи $(\tilde{A})$. Геометрическим аналогом плана Y является гиперплоскость Π, содержащая начало координат и расположенная над конусом K задачи (A). Гиперплоскость Π содержит расширенные векторы $\overline{A}_j$ для $j\in E_Y$. Пересечение гиперплоскости Π и конуса K также является многогранным конусом. Обозначим его через K_Π. Многогранный конус K_Π порожден расширенными векторами $\overline{A}_j$ при $j\in E_Y$. При $m=2$ конус K_Π может либо состоять из одной точки (из начала координат), либо совпадать с ребром конуса K или с плоским углом — двумерным конусом. Размерность K_Π в точности равна m, если Y — опорный план задачи $(\tilde{A})$.

Плану Y задачи $(\tilde{A})$ соответствует вспомогательная задача (C_Y). Конус K_Y задачи (C_Y) определяется векторами условий $A_j\,(j\in E_Y)$ и расширенными единичными векторами

$$\overline{e}_i=\Big(\underbrace{\overbrace{0, \ldots, 0, 1}^{i}, 0, \ldots, 0}_{m}, 1\Big), \qquad i=1, 2, \ldots, m.$$

Многогранный конус K_Y касается, таким образом, гиперплоскости $u_{m+1}=0$ своей гранью, содержащей векторы A_j $(j\in E_Y)$. Решение задачи (C_Y) сводится к определению нижней точки пересечения прямой Q и конуса K_Y. (Во вспомогательной задаче требуется вычислить минимум линейной формы.)

Ясно, что задача (C_Y) всегда имеет решение. Решив вспомогательную задачу, найдем оптимальные планы взаимосопряженных задач (C_Y) и $(\tilde{C}_Y)$. Решению задачи $(\tilde{C}_Y)$ соответствует гиперплоскость π_Y, расположенная под конусом K_Y. Обозначим через $M^*=(\mu_1^*, \ldots, \mu_m^*, -1)$ направляющий вектор гиперплоскости π_Y и через Q_Y — нижнюю точку пересечения конуса K_Y и прямой Q. Точка Q_Y является образом решения задачи (C_Y). Разложение вектора Q_Y по базису решения задачи (C_Y) имеет вид

$$Q_Y = \sum_{j \in E_Y} x_j A_j + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^* \bar{e}_i.$$

Рассмотрим на гиперплоскости $u_{m+1} = 0$ точку

$$P_Y = \sum_{j \in E_Y} x_j A_j \qquad \left(P_Y = Q_Y - \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^* \bar{e}_i\right).$$

Проведем через точку P_Y прямую P, параллельную оси Ou_{m+1}. Верхняя точка X пересечения прямой P и конуса K задачи (A) является образом квазиплана X.

Назовем *расстоянием* между точками $U' = (u'_1, \ldots, u'_{m+1})$ и $U'' = (u''_1, \ldots, u''_{m+1})$ величину

$$\sum_{i=1}^{m+1} |u''_i - u'_i|.$$

Точка X — образ квазиплана X — обладает следующим экстремальным свойством:

Точка X является ближайшей (в смысле введенного расстояния) к верхней точке пересечения конуса K и прямой Q из всех точек $U = (u_1, \ldots, u_m, u_{m+1})$, которые

а) принадлежат конусу $K (x_j \geqslant 0)$;

б) принадлежат гиперплоскости Π:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \begin{cases} \geqslant c_j, & j = 1, \ldots, n, \\ = c_j, & j \in E_Y; \end{cases}$$

в) удовлетворяют условиям

$$u_i \leqslant b_i \quad \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i\right).$$

В смысле введенного определения расстояния длина отрезка $Q_Y B$ (точка B отвечает вектору ограничений) измеряется невязкой

$$\varepsilon^* = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^*$$

квазиплана X.

Возможны два случая: точка Q_Y — образ решения задачи (C_Y) — принадлежит или не принадлежит гиперплоскости $u_{m+1}=0$. В первом случае квазиплан X является решением задачи (A) (случай 1°). Действительно, если точка Q_Y совпадает с точкой B, то вектор ограничений принадлежит конусу, порожденному векторами условий A_j $(j\in E_Y)$. Следовательно, вектор B является линейной комбинацией векторов A_j $(j\in E_Y)$ с неотрицательными коэффициентами. Такой же линейной комбинацией расширенных векторов $\overline{A}_j$ $(j\in E_Y)$ является верхняя точка пересечения Q и конуса K задачи (A).

План Y в этом случае — решение задачи $(\tilde{A})$, а X — оптимальный план исходной задачи.

Чтобы проанализировать случай, когда точка Q_Y не принадлежит гиперплоскости $u_{m+1}=0$, рассмотрим геометрическую интерпретацию элементарного преобразования плана Y задачи $(\tilde{A})$ в план Y'.

Обозначим через $Y^*=(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m,\ -1)$ — направляющий вектор гиперплоскости П. Направляющий вектор гиперплоскости π_Y, отвечающей решению задачи $(\tilde{C}_Y)$, был обозначен ранее через $M^*=(\mu_1^*,\ \ldots,\ \mu_m^*,\ -1)$.

Рассмотрим гиперплоскость $\overline{\pi}_Y$, содержащую общую часть гиперплоскостей π_Y и $u_{m+1}=0$ и параллельную оси Ou_{m+1}. Первые m компонент направляющих векторов $\overline{M}^*$ и M^* гиперплоскостей $\overline{\pi}_Y$ и π_Y совпадают. Последняя компонента вектора $\overline{M}^*$ равна нулю.

Вектор

$$Y^*(\theta)=Y^*-\theta\overline{M}^*$$

является направляющим вектором гиперплоскости $\Pi(\theta)$. При $\theta=0$ гиперплоскость $\Pi(\theta)$ совпадает с П. По мере увеличения θ гиперплоскость $\Pi(\theta)$ поворачивается относительно пересечения S гиперплоскостей П и $\overline{\pi}_Y$.

Поворот гиперплоскости (увеличение θ) продолжается до тех пор, пока $\Pi(\theta)$ не захватит какой-либо из расширенных векторов $\overline{A}_j$ $(j\notin E_Y)$. Пусть это произойдет при $\theta=\theta_0$. Гиперплоскость $\Pi'=\Pi(\theta_0)$ соответствует новому плану Y' сопряженной задачи $(\tilde{A})$. Это следует из того, что ни один из векторов $\overline{A}_j$ $(j\in E_Y)$ не может оказаться выше гиперплоскости Π', поскольку

$$(Y'(\theta),\ A_j) = 0 - \theta\delta_j^* \geqslant 0.$$

Заметим, что пересечение гиперплоскости π_Y с координатной гиперплоскостью $u_{m+1} = 0$ содержит все векторы A_j ($j \in E_Y$) базиса решения задачи (C_Y). Соответствующие расширенные векторы $\overline{A}_j$ принадлежат гиперплоскости S — общей части Π и $\overline{\pi}_Y$, а следовательно, и гиперплоскости $\Pi' = \Pi(\theta_0)$.

Гиперплоскость $\overline{\pi}_Y$ лежит ниже конуса K_Y. Следовательно, все векторы $\overline{A}_j$ ($j \in E_Y$) лежат по одну сторону от гиперплоскости $\overline{\pi}_Y$. Остальные векторы условий $\overline{A}_j$ ($j \notin E_Y$) не связаны этим условием. Они могут находиться по обе стороны от $\overline{\pi}_Y$.

Рассмотрим два случая.

Пусть вначале все $\overline{A}_j$ ($j \notin E_Y$) лежат по ту же сторону от $\overline{\pi}_Y$, что и векторы $\overline{A}_j$ ($j \in E_Y$). В этом случае гиперплоскость $\overline{\pi}_Y$ разделяет конус K и прямую Q. Действительно, при принятых условиях

$$(\overline{A}_j,\ \overline{M}^*) = \delta_j^* \leqslant 0, \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{3.1}$$

С другой стороны,

$$(B + \lambda e_{m+1},\ \overline{M}^*) = (B,\ \overline{M}^*) = \sum_{i=1}^{m} b_i \mu_i^* = \varepsilon^* > 0. \tag{3.2}$$

Вектор $B + \lambda e_{m+1}$ определяет прямую Q. Первое и второе равенства в цепочке (3.2) очевидны. Третье равенство вытекает из теоремы двойственности для вспомогательной задачи.

Неравенства (3.1) и (3.2) означают, что прямая Q и конус K не пересекаются. В рассматриваемом случае $\theta_0 = \infty$, т. е. ни один из векторов A_j ($j \notin E_Y$) не будет захвачен гиперплоскостью $\Pi(\theta)$ ни при каком конечном значении $\theta \geqslant 0$.

Итак, если все векторы $\overline{A}_j$ ($j \notin E_Y$) лежат по ту же сторону от гиперплоскости $\overline{\pi}_Y$, что и векторы $\overline{A}_j$ ($j \in E_Y$), то условия задачи (A) несовместны (случай 2°).

Если по крайней мере один из векторов $\overline{A}_j$ ($j \notin E_Y$) и векторы $\overline{A}_j$ ($j \in E_Y$) лежат по разные стороны от $\overline{\pi}_Y$, имеет место случай 3°. Поворот гиперплоскости Π относительно S, общей части Π и $\bar{\pi}_Y$, приводит к захвату некоторого вектора $\bar{A}_j$ ($j \notin E_Y$). Зафиксированная при этом гиперплоскость Π' отвечает новому плану Y' сопряженной задачи, с которой связаны вспомогательная задача и квазиплан X' с меньшей невязкой. Через конечное число шагов наступит случай 1° или 2°.

3.2. Проиллюстрируем геометрическими построениями применение метода последовательного сокращения невязок к определению оптимального плана задачи, решенной в п. 4.3 гл. 4 по методу улучшения плана и в п. 2.8 гл. 6 по методу уточнения оценок.

Напомним условия задачи.

Требуется определить максимум линейной формы

$$L(X) = 10x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 16x_4 + 21x_5$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{gathered} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 10x_4 + 5x_5 = 6, \\ 9x_1 + 10x_2 + 12{,}5x_3 + 18x_4 + 16{,}5x_5 = 14, \\ x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 5. \end{gathered}$$

На рис. 7.1 изображены векторы условий A_j и вектор ограничений B, соответствующие расширенные векторы задачи и прямая Q, проходящая через точку B параллельно оси Ou_3. На рисунке, кроме того, обозначен многогранный конус K, порожденный векторами $\bar{A}_j$, и расширенные единичные векторы $\bar{e}_i$, необходимые для геометрической интерпретации вспомогательной задачи.

Легко непосредственно убедиться в том, что вектор $Y = (6, -2/5)$ является планом сопряженной задачи, в которой требуется обратить в минимум линейную форму

$$\tilde{L}(Y) = 6y_1 + 14y_2$$

при условиях:

$$\begin{aligned} 4y_1 + 9y_2 &\geqslant 10, \\ 2y_1 + 10y_2 &\geqslant 8, \\ 5y_1 + 12{,}5y_2 &\geqslant 7, \\ 10y_1 + 18y_2 &\geqslant 16, \\ 5y_1 + 16{,}5y_2 &\geqslant 21. \end{aligned}$$

План Y обращает в равенство второе условие. Множество E_Y состоит в нашем случае из одного индекса $j = 2$. Следовательно, плоскость Π_Y — геометрический образ плана Y — содержит вектор $\bar{A}_2$. Уравнение плоскости Π_Y имеет вид

$$6u_1 - \frac{2}{5}u_2 = u_3.$$

Плоскость Π_Y проходит над конусом K. План Y порождает вспомогательную задачу $(\underline{C}_Y)$. Векторами условий задачи (C_Y) являются векторы A_2, $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$. Многогранный конус K_Y, отвечающий вспомогательной задаче, изображен на рис. 7.2. Здесь же показан конус K исходной задачи и плоскость Π_Y—образ плана Y вспомогательной задачи. Прямая Q пересекает конус K_Y в двух точках.

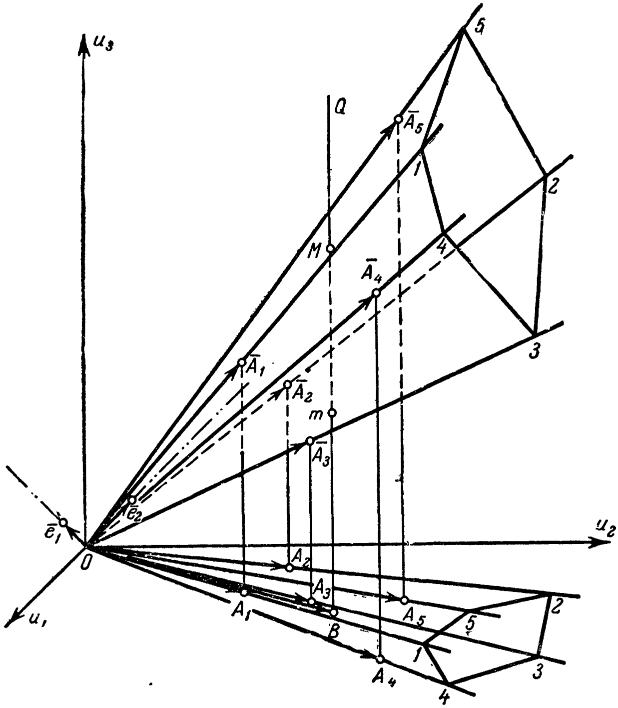


Рис. 7.1.

Нижняя точка Q_Y пересечения прямой $\underline{Q}$ и конуса K_Y принадлежит плоскости Π_Y, натянутой на векторы $\overline{e}_1$ и A_2. Плоскость Π_Y является геометрическим образом оптимального плана задачи $(\tilde{C}_Y)$, сопряженной с задачей (C_Y). Точка Q_Y соответствует решению задачи (C_Y). Разложим вектор Q_Y по осям-ребрам $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, A_2 конуса K_Y. Точка P_Y является проекцией точки Q_Y на вектор A_2. Прямая, проведенная из точки P_Y параллельно Ou_3, пересекает конус K исходной задачи в двух точках. Верхняя из этих точек, точка X, является геометрическим образом квазиплана X, определяемого решением задачи (C_Y).

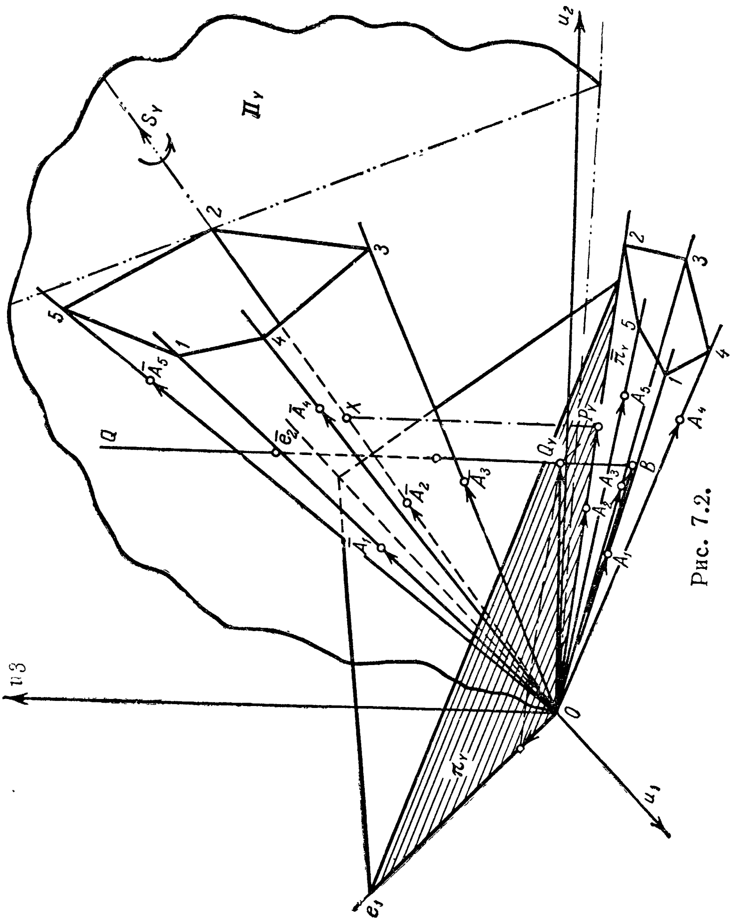


Рис. 7.2.

Длина отрезка $Q_Y B$ (в смысле введенного «расстояния») — минимальное значение линейной формы вспомогательной задачи (C_Y) — равна ε^* — невязке квазиплана X. Поскольку $\varepsilon^* = 16/5 \neq 0$, квазиплан X не является решением задачи. Длина отрезка XP_Y определяет значение линейной формы исходной задачи на квазиплане X, $L(X) = 56/5$. Плоскость π_Y пересекает координатную плоскость $u_3 = 0$ вдоль направления вектора A_2. Таким образом, плоскость $\overline{\pi}_Y$ определяется вектором A_2 и осью Ou_3 или, что то же самое, векторами A_2 и $\overline{A}_2$.

Плоскости Π_Y и $\overline{\pi}_Y$ пересекаются по прямой S_Y, направленной вдоль вектора $\overline{A}_2$. Будем поворачивать плоскость Π_Y относительно прямой S_Y в направлении, указанном стрелкой, до тех пор, пока она не захватит какой-либо из расширенных векторов $\overline{A}_j$. Первый вектор, который будет при этом захвачен, это — вектор $\overline{A}_5$. Зафиксированное таким образом положение плоскости назовем $\Pi_{Y'}$. Плоскость $\Pi_{Y'}$, натянутая на векторы $\overline{A}_2$ и $\overline{A}_5$, соответствует новому плану Y' задачи, сопряженной к исходной задаче. Вектор Y' является опорным планом задачи $(\tilde{A})$. План Y' определяет новую вспомогательную задачу. В геометрических терминах это означает, что плоскость $\Pi_{Y'}$ определяет конус $K_{Y'}$ задачи $(C_{Y'})$. Четырехгранный конус $K_{Y'}$ порождается расширенными единичными векторами $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ и векторами условий A_2 и A_5.

Построения, связанные со второй итерацией, изображены на рис. 7.3. Так же как и в первой итерации, находим точку $Q_{Y'}$, отвечающую решению вспомогательной задачи $(C_{Y'})$. Точка $Q_{Y'}$ расположена выше плоскости $u_3 = 0$. Следовательно, случай 1° не имеет места. Линия пересечения плоскости $\pi_{Y'}$ и плоскости $u_3 = 0$ проходит вдоль вектора A_5. Направление вектора A_5 и ось Ou_3 определяют плоскость $\pi_{Y'}$. Векторы условий $\overline{A}_j$ $(j \notin E_{Y'} \equiv \{5\})$ расположены по обе стороны от плоскости $\overline{\pi}_{Y'}$. Следовательно, случай 2° также не имеет места.

По тем же правилам, что и в первой итерации, строим точку X' — образ квазиплана X', определяемого планом Y' сопряженной задачи. В рассматриваемом случае $S_{Y'}$ — линия пересечения плоскостей $\Pi_{Y'}$ и $\overline{\pi}_{Y'}$ — совпадает с прямой, идущей вдоль вектора $\overline{A}_5$.

Поворачиваем плоскость $\Pi_{Y'}$ относительно прямой $S_{Y'}$ — линии пересечения плоскостей $\Pi_{Y'}$, $\overline{\pi}_{Y'}$ — до тех пор, пока не будет захвачен очередной вектор $\overline{A}_j$ $(j \notin E_{Y'})$. Таким образом, приходим к плоскости $\Pi_{Y''}$, отвечающей плану Y'' сопряженной задачи $(\tilde{A})$. Плоскость $\Pi_{Y''}$ натянута на векторы $\overline{A}_5$ и $\overline{A}_1$. Вектор Y'' — опорный план задачи $(\tilde{A})$. Конус $K_{Y''}$ вспомогательной задачи $(C_{Y''})$ порождается векторами $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, A_1 и A_5.

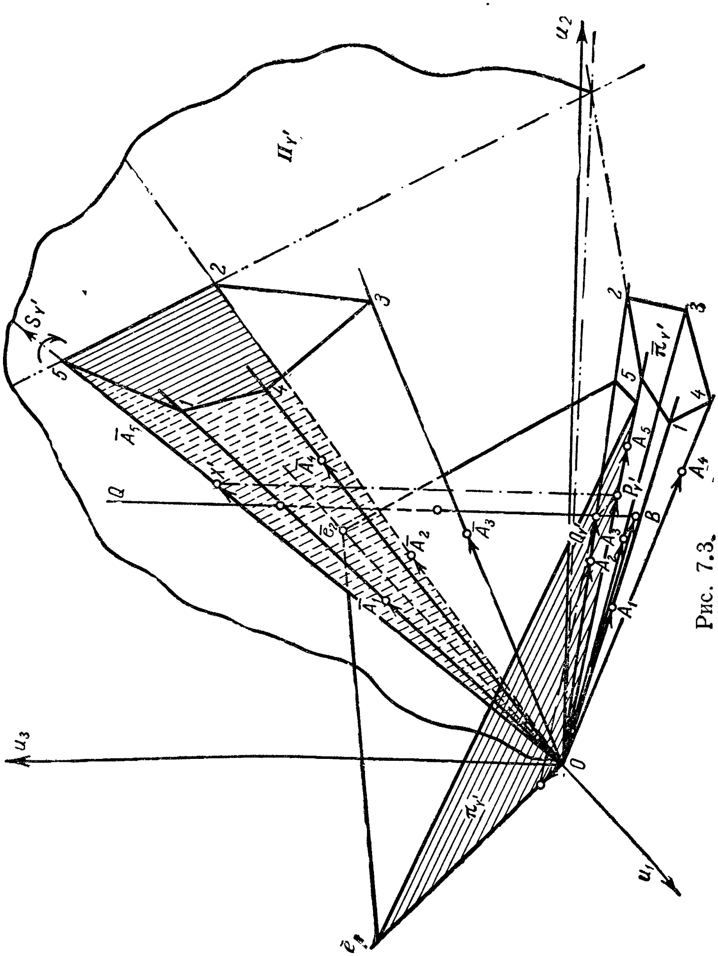


Рис. 7.3.

Точка $Q_{Y''}$ — образ решения вспомогательной задачи $(C_{Y''})$ — совпадает с точкой B. Невязка квазиплана X'' равна нулю, и

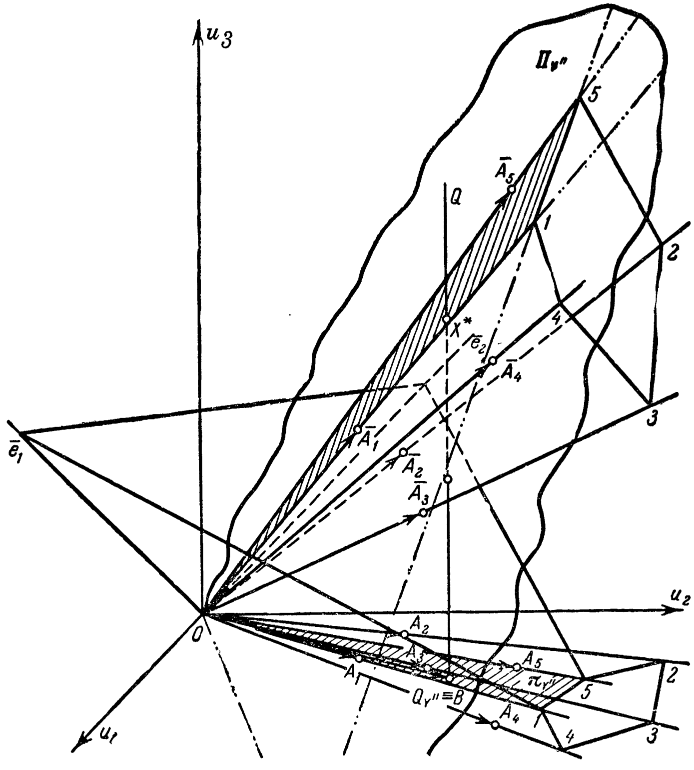


Рис. 7.4.

следовательно, квазиплан X'' является решением исходной задачи. Построения, связанные с последней итерацией, показаны на рис. 7.4.

§ 4. Случай двухсторонних ограничений

4.1. Метод последовательного сокращения невязок, подобно другим методам линейного программирования, рассмотренным в предшествующих главах, может быть распространен на задачи с двухсторонними ограничениями. Этому и посвящается настоящий параграф.

Рассмотрим общую задачу с двухсторонними ограничениями, состоящую, как известно, в максимизации линейной формы

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{4.1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} A_j x_j = B, \tag{4.2}$$

$$\alpha_j \leqslant x_j \leqslant \beta_j, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{4.3}$$

Здесь

$$A_j=(a_{1j},\ a_{2j},\ \ldots,\ a_{mj})^T, \quad B=(b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_m)^T.$$

Как обычно, ранг матрицы $(A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n)$ предполагается равным m.

Каждая переменная x_j задачи (4.1)—(4.3) может быть ограничена как с обеих сторон, так и только с одной стороны. В последнем случае соответствующая граница полагается бесконечной ($\alpha_j=-\infty$ или $\beta_j=\infty$). Исходную задачу (4.1)—(4.3) будем для краткости называть задачей (A). В дальнейшем мы будем иметь дело с ядрами планов задачи ($\tilde{A}$), двойственной по отношению к задаче (A). Не повторяя формулировки задачи ($\tilde{A}$), содержащейся в п. 3.2 гл. 6, выпишем лишь условия, которым должно удовлетворять ядро плана этой задачи.

Для того чтобы вектор $Y=(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)$ являлся ядром некоторого плана задачи ($\tilde{A}$), необходимо и достаточно выполнение соотношений

$$\Delta_j=\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_i \geqslant 0, & \text{если} \quad \beta_j=\infty, \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j \leqslant 0, & \text{если} \quad \alpha_j=-\infty. \end{cases} \tag{4.4}$$

Из условий (4.4) следует, что при ограниченности всех переменных задачи с обеих сторон ($\alpha_j \neq -\infty$, $\beta_j \neq \infty$) любой вектор Y является ядром некоторого плана задачи ($\tilde{A}$). Каждому ядру Y отвечает, вообще говоря, несколько планов задачи $(\tilde{A})$. Если выбрать из них такой, который связан с наименьшим значением линейной формы задачи $(\tilde{A})$, то между ядрами и планами задачи $(\tilde{A})$ установится взаимно однозначное соответствие.

Обозначим через $\tilde{L}(Y)$ значение линейной формы задачи $(\tilde{A})$ на плане, соответствующем ядру Y. Имеет место следующее соотношение:

$$\tilde{L}(Y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i - \sum_{j=1}^{n} \Delta_j \gamma_j, \tag{4.5}$$

где

$$\gamma_j = \begin{cases} \alpha_j, & \text{если } \Delta_j > 0, \\ \beta_j, & \text{если } \Delta_j < 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Здесь, как обычно,

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j. \tag{4.7}$$

Вывод условий (4.4) и равенства (4.5) содержится в п. 3.2 гл. 6.

4.2. Распространим понятия расширенной и вспомогательных задач, введенные в § 1, на задачу с двухсторонними ограничениями.

Под *расширенной задачей* будем понимать задачу об отыскании минимума линейной формы

$$\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \tag{4.8}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \varepsilon_i = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m; \tag{4.9}$$

$$\alpha_j \leqslant x_j \leqslant \beta_j, \quad \varepsilon_i \geqslant 0; \tag{4.10}$$

$$j = 1, 2, \ldots, n; \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Сформулированную задачу назовем задачей (B). Пусть $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ — ядро произвольного плана задачи $(\tilde{A})$. Обозначим через E_Y совокупность индексов j, для которых

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_i = 0.$$

С каждым ядром Y свяжем *вспомогательную задачу* (задачу (C_Y)), которая образуется из задачи (B) с помощью дополнительных ограничений $x_j = \gamma_j$, $j \notin E_Y$, где числа γ_j определяются по формуле (4.6).

Таким образом, задача (C_Y) заключается в отыскании минимума линейной формы

$$\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \tag{4.8}$$

при условиях

$$\sum_{j \in E_Y} a_{ij} x_j + \varepsilon_i = b_i^{(Y)}; \tag{4.11}$$

$$\alpha_j \leqslant x_j \leqslant \beta_j; \quad \varepsilon_i \geqslant 0; \tag{4.12}$$

$$j \in E_Y, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Здесь

$$b_i^{(Y)} = b_i - \sum_{j \notin E_Y} \gamma_j a_{ij}. \tag{4.13}$$

Векторами условий вспомогательной задачи (C_Y) являются некоторые из векторов условий A_j задачи (A) и единичные векторы $e_1, e_2, \ldots, e_m$. Вектор ограничений

$$B^{(Y)} = (b_1^{(Y)}, b_2^{(Y)}, \ldots, b_m^{(Y)})$$

задачи (C_Y) формируется из вектора ограничений B задачи (A) в соответствии с формулой (4.13).

Обозначим через $(\tilde{C}_Y)$ задачу, двойственную по отношению к задаче (C_Y). Каждому плану (Ξ, E),

$$\Xi = (\xi_j), \quad j \in E_Y; \quad E = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m)$$

задачи (C_Y) может быть поставлен в соответствие вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с координатами

$$x_j = \begin{cases} \xi_j, & j \in E_Y, \\ \gamma_j, & j \notin E_Y, \end{cases} \tag{4.14}$$

где γ_j определяется соотношением (4.6).

Очевидно, вектор X удовлетворяет условиям (4.3), причем

$$b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \varepsilon_i \geqslant 0. \tag{4.15}$$

Введем несколько определений.

Вектор $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, соответствующий опорному решению (Ξ^*, E^*) произвольной вспомогательной задачи (C_Y), назовем *квазипланом* исходной задачи (A). Любой квазиплан удовлетворяет условиям (4.3) задачи (A). Согласно соотношению (4.15) величина $\overset{*}{\varepsilon}_i \geqslant 0$ определяет невязку в i-м условии системы (4.2), возникающую при подстановке в это условие квазиплана X. Величину $\overset{*}{\varepsilon}_0 = \sum_{i=1}^{m} \overset{*}{\varepsilon}_i$ будем именовать *невязкой* квазиплана X.

Поскольку $\overset{*}{\varepsilon}_i \geqslant 0$, условие $\overset{*}{\varepsilon}_0 = 0$ влечет за собой обращение в нуль всех невязок $\overset{*}{\varepsilon}_i$.

Таким образом, квазиплан, имеющий нулевую невязку, удовлетворяет равенствам (4.2) и, следовательно, является планом задачи (A).

4.3. Процесс решения задачи (A) методом сокращения невязок состоит в движении по квазипланам этой задачи. Сформулируем достаточное условие того, что процесс решения закончен получением оптимального плана задачи:

Признак оптимальности. *Если невязка $\overset{*}{\varepsilon}_0$ квазиплана X оказывается равной нулю, то X является оптимальным планом рассматриваемой задачи.*

Доказательство. Как уже отмечалось, квазиплан задачи (A), имеющий нулевую невязку, является планом этой задачи. Таким образом, вектор X — план задачи (A). Допустим, что план X отвечает решению задачи (C_Y), где $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ — ядро некоторого плана задачи $(\tilde{A})$. Учитывая правило образования плана X по решению задачи (C_Y), определяемое формулой (4.14), имеем

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j = 0, \quad \text{если} \quad \alpha_j < x_j < \beta_j,$$

$$\Delta_j \geqslant 0, \quad \text{если} \quad x_j = \alpha_j,$$

$$\Delta_j \leqslant 0, \quad \text{если} \quad x_j = \beta_j.$$

В соответствии со второй формой признака оптимальности, установленного в § 5 гл. 4, эти условия указывают на оптимальность плана X. Справедливость признака оптимальности установлена.

Пусть $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ — ядро некоторого плана задачи $(\tilde{A})$. Рассмотрим вспомогательную задачу (C_Y), порожденную этим ядром. К задаче (C_Y) может быть применен метод последовательного улучшения плана, описанный для задач с двухсторонними ограничениями в § 5 гл. 4. Пусть набор чисел ξ_j^* $(j \in E_Y)$, ε_i^*, $i=1, 2, \ldots, m$, определяет опорное решение вспомогательной задачи, полученное этим методом. Тогда в соответствии со второй формой признака оптимальности (п. 5.3 гл. 4) найдется такой вектор $M^*=(\mu_1^*, \mu_2^*, \ldots, \mu_m^*)$, что

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mu_i^* \begin{cases} =0, & \text{если } \alpha_j<\xi_j^*<\beta_j, \\ \leqslant 0, & \text{если } \xi_j=\alpha_j, \\ \geqslant 0, & \text{если } \xi_j=\beta_j, \end{cases} \tag{4.16}$$

$$\mu_i^* \begin{cases} =1, & \text{если } \varepsilon_i^*>0, \\ \leqslant 1, & \text{если } \varepsilon_i^*=0. \end{cases}$$

Если использовать второй алгоритм метода улучшения плана, то вектор M^* определится одновременно с решением задачи (C_Y). Предоставляем читателю проверить (см. упражнение 6), что M^* является ядром решения задачи $(\tilde{C}_Y)$.

Пусть $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — квазиплан задачи (A), соответствующий рассматриваемому решению задачи (C_Y).

В соответствии с формулой (4.14) получаем

$$x_j=\begin{cases} \xi_j^*, & j \in E_Y, \\ \gamma_j, & j \notin E_Y, \end{cases} \tag{4.17}$$

где числа γ_j, равные α_j или β_j, определяются соотношением (4.6). Положим

$$\delta_j^*=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mu_i^*, \qquad j=1, 2, \ldots, n. \tag{4.18}$$

При анализе квазиплана X следует различать три случая в зависимости от значения его невязки $\varepsilon_0^*=\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i^*$ и соотношений знаков величин Δ_j и δ_j^* (см. формулы (4.7) и (4.18)).

1° Невязка $\overset{*}{\varepsilon}_0$ квазиплана X равна нулю.

2° Невязка $\overset{*}{\varepsilon}_0 > 0$, причем

$$\delta_j^* \begin{cases} \geqslant 0, & \text{если } \Delta_j < 0, \\ \leqslant 0, & \text{если } \Delta_j > 0. \end{cases} \tag{4.19}$$

3° Невязка $\overset{*}{\varepsilon}_0 > 0$, однако условие (4.19) оказывается нарушенным.

Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

Если $\overset{*}{\varepsilon}_0 = 0$ (случай 1°), то в соответствии с признаком оптимальности квазиплан X оказывается оптимальным планом задачи (A). Исследование остальных двух случаев удобно проводить после введения аналога элементарного преобразования, рассмотренного в § 1.

4.4. Определим элементарное преобразование ядра Y, руководствуясь формулой

$$Y(\theta) = Y - \theta M^*, \tag{4.20}$$

или, что то же самое, соотношениями

$$y_i(\theta) = y_i - \theta \overset{*}{\mu}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{4.20$'$}$$

Положим

$$\Delta_j(\theta) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i(\theta) - c_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Пользуясь равенствами (4.20′) и определением величин Δ_j и δ_j^*, имеем

$$\Delta_j(\theta) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - \theta \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \overset{*}{\mu}_i - c_j = \Delta_j - \theta \delta_j^*,$$
$$j = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.21}$$

В соответствии с соотношениями (4.16) и обозначением (4.18) получаем для $j \in E_Y$:

$$\delta_j^* \begin{cases} = 0 & \text{при } \alpha_j < x_j < \beta_j, \\ \leqslant 0 & \text{при } \alpha_j = x_j, \\ \geqslant 0 & \text{при } x_j = \beta_j. \end{cases}$$

Следовательно, при любых значениях $\theta \geqslant 0$ и $j \in E_Y$ выполняются условия

$$\Delta_j(\theta) = \Delta_j - \theta \delta_j^* = -\theta \delta_j^* \begin{cases} = 0, & \text{если } \alpha_j < x_j < \beta_j, \\ \geqslant 0, & \text{если } \alpha_j = x_j, \\ \leqslant 0, & \text{если } x_j = \beta_j. \end{cases} \tag{4.22}$$

Из совокупности элементарных преобразований (4.20) выделим преобразования, параметр $\theta \geqslant 0$ которых удовлетворяет условиям

$$\Delta_j \Delta_j(\theta) \geqslant 0, \quad j \notin E_Y. \tag{4.23}$$

Другими словами, определим совокупность неотрицательных значений θ, при которых знаки величин Δ_j и $\Delta_j(\theta)$ совпадают для всех $j \notin E_Y$. Если $\Delta_j > 0$, то j-е условие системы неравенств (4.23) может нарушиться лишь при $\delta_j^* > 0$, причем это произойдет при

$$\theta = \frac{\Delta_j}{\delta_j^*} > 0. \tag{4.24}$$

Аналогично при $\Delta_j < 0$ соответствующее условие системы (4.23) может не соблюдаться только для $\delta_j^* < 0$. Значение θ, при котором происходит нарушение j-го условия, и в этом случае определяется равенством (4.24). Отсюда вытекает, что для соблюдения всех неравенств системы (4.24) необходимо и достаточно, чтобы имело место условие

$$\theta \leqslant \theta_0 = \min_{\frac{\Delta_j}{\delta_j^*} > 0} \frac{\Delta_j}{\delta_j^*}, \tag{4.25}$$

где минимум берется по тем индексам j, для которых

$$\frac{\Delta_j}{\delta_j^*} > 0, \qquad \delta_j^* \neq 0.$$

Если для любого $j \notin E_Y$ отношение $\dfrac{\Delta_j}{\delta_j^*} < 0$ или $\delta_j^* = 0$, то, по определению, $\theta_0 = \infty$, т. е. значения параметра θ оказываются неограниченными сверху.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением элементарных преобразований с неотрицательными значениями параметра θ, подчиняющимися условию (4.25).

Отметим, что согласно соотношениям (4.22) и (4.23) при $\alpha_j = -\infty$ $(\beta_j = \infty)$

$$\Delta_j(\theta) \leqslant 0 \quad (\Delta_j(\theta) \geqslant 0).$$

Поэтому для рассматриваемых значений параметра θ вектор

$Y(\theta)$ является ядром плана задачи $(\tilde{A})$ (условия (4.4) оказываются выполненными).

Проследим за изменением линейной формы задачи $(\tilde{A})$ в результате элементарного преобразования (4.20) с параметром $(\theta \geqslant 0)$, удовлетворяющим неравенству (4.25). Согласно формуле (4.5) значение линейной формы задачи $(\tilde{A})$ на плане, соответствующем ядру $Y(\theta)$, определяется равенством

$$\tilde{L}(Y(\theta)) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i(\theta) - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j(\theta)\, \Delta_j(\theta), \tag{4.26}$$

где

$$\gamma_j(\theta) = \begin{cases} \alpha_j, & \text{если} \quad \Delta_j(\theta) > 0, \\ \beta_j, & \text{если} \quad \Delta_j(\theta) < 0. \end{cases}$$

Займемся преобразованием равенства (4.26). Если $j \in E_Y$ и $\Delta_j(\theta) \neq 0$, то в соответствии с (4.22)

$$\gamma_j(\theta) = x_j.$$

Если же $j \notin E_Y$, то, по предположению, $\Delta_j(\theta)\, \Delta_j \geqslant 0$. Следовательно, согласно определению (4.17) квазиплана X и в этом случае $\gamma_j(\theta) = x_j$.

Итак, можно считать, что

$$\gamma_j(\theta) = x_j \quad \text{для} \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.27}$$

Учитывая (4.27), а также соотношения (4.20′) и (4.21), получаем

$$\tilde{L}(Y(\theta)) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i - \sum_{j=1}^{n} x_j \Delta_j - \theta \left[\sum_{i=1}^{m} b_i \mu_i^* - \sum_{j=1}^{n} x_j \delta_j^* \right]. \tag{4.28}$$

Поскольку $Y = Y(0)$, то

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i - \sum_{j=1}^{n} x_j \Delta_j = \tilde{L}(Y). \tag{4.29}$$

Значение L_C линейной формы задачи (C_Y) на плане, определяемом системой чисел $\xi_j^* = x_j$, $j \in E_Y$, ε_i^*, $i = 1, 2, \ldots, m$, равно

$$L_C = \varepsilon_0^* = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^*. \tag{4.30}$$

Значение $\tilde{L}_C$ линейной формы задачи ($\tilde{C}_Y$) на плане, соответствующем ядру M^*, выражается формулой

$$\tilde{L}_C = \sum_{i=1}^{m} b_i^{(Y)} \mu_i^* - \sum_{j \in E_Y} x_j \delta_j^*. \tag{4.31}$$

Здесь мы воспользовались формулировкой вспомогательной задачи (4.8), (4.11), (4.12), равенством (4.5), а также соотношениями (4.22).

При выводе равенства (4.5) прямая задача предполагалась задачей на максимум. Как нетрудно проверить (см. упражнение 7), формула (4.5) имеет место и в случае, когда прямая задача является задачей минимизации. Однако в этом случае величины γ_j вычисляются по формуле

$$\gamma_j = \begin{cases} \alpha_j, & \text{если } \Delta_j < 0, \\ \beta_j, & \text{если } \Delta_j > 0. \end{cases}$$

Соотношение (4.22) показывает, что в данном случае $\gamma_j = x_j$. Преобразуем равенство (4.31), пользуясь выражением (4.13) для чисел $b_i^{(Y)}$:

$$\tilde{L}_C = \sum_{i=1}^{m} b_i \mu_i^* - \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j \notin E_Y} a_{ij} x_j \Big) \mu_i^* - \sum_{j \in E_Y} x_j \delta_j^* =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} b_i \mu_i^* - \sum_{j \notin E_Y} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \mu_i^* - \sum_{j \in E_Y} x_j \delta_j^*.$$

Учитывая, далее, обозначение (4.18), получаем

$$\tilde{L}_C = \sum_{i=1}^{m} b_i \mu_i^* - \sum_{j=1}^{n} x_j \delta_j^*. \tag{4.32}$$

Вспомним теперь, что L_C и $\tilde{L}_C$ являются оптимальными значениями линейных форм задач (C_Y) и ($\tilde{C}_Y$) соответственно. Поэтому по первой теореме двойственности (теорема 4.1 гл. 3)

$$L_C = \tilde{L}_C.$$

Отсюда, учитывая равенства (4.30) и (4.32), приходим к соотношению

$$\varepsilon_0^* = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^* = \sum_{i=1}^{m} b_i \mu_i^* - \sum_{j=1}^{n} x_j \delta_j^*. \tag{4.33}$$

Формулы (4.29) и (4.33) позволяют переписать равенство (4.28) в следующем виде:

$$\tilde{L}(Y(\theta)) = \tilde{L}(Y) - \theta \varepsilon_0^*, \tag{4.34}$$

где ε_0^* — невязка квазиплана X, соответствующего решению вспомогательной задачи (C_Y).

Подчеркнем, что равенство (4.34) выведено в предположении $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$.

4.5. Теперь уже нетрудно дать полное исследование случаев 2° и 3°, сформулированных в п. 4.3.

Рассмотрим случай 2°. В соответствии с условиями (4.19) величины $\delta_j^* \neq 0$ и Δ_j имеют разные знаки для всех индексов $j \notin E_Y$. Следовательно, в данном случае $\theta_0 = \infty$. Поэтому вектор $Y(\theta)$ является ядром плана задачи $(\tilde{A})$ при любом $\theta \geqslant 0$. Учитывая, далее, что невязка ε_0^* квазиплана X положительна и равенство (4.34) справедливо при всех $\theta \geqslant 0$, приходим к выводу о неограниченности линейной формы задачи $(\tilde{A})$ на множестве ее планов. Отсюда вытекает неразрешимость исходной задачи (A), связанная с несовместностью ее условий. Итак, наличие случая 2° указывает на неразрешимость исследуемой задачи (A).

Условия случая 2° иногда называют *признаком неразрешимости задачи.*

Случай 3° характеризуется тем, что невязка ε_0^* квазиплана X положительна и среди индексов $j \notin E_Y$ имеются такие, для которых

$$\frac{\Delta_j}{\delta_j^*} > 0, \quad \delta_j^* \neq 0.$$

Из соотношения (4.25) получаем

$$0 < \theta_0 = \frac{\Delta_{j_0}}{\delta_{j_0}^*} < \infty, \tag{4.35}$$

где j_0 — один из тех индексов j, на которых достигается величина θ_0. Положим $Y'=Y(\theta_0)$. По доказанному, в предыдущем пункте вектор Y' является ядром плана задачи $(\tilde{A})$, причем согласно равенству (4.33)

$$\tilde{L}(Y')=\tilde{L}(Y)-\theta_0\varepsilon_0^*.$$

Отсюда, учитывая положительность величин θ_0 и ε_0^*, получаем

$$\tilde{L}(Y')<\tilde{L}(Y).$$

Таким образом, переход к ядру Y' приводит к уменьшению значения линейной формы задачи $(\tilde{A})$.

Ядро Y' порождает новую вспомогательную задачу $(C_{Y'})$, в результате решения которой образуется новый квазиплан X' с невязкой $\varepsilon_0^{*'}$.

Покажем, что набор чисел x_j, $j\in E_{Y'}$, ε_i^*, $i=1, 2, \ldots, m$, составляет опорный план задачи $(C_{Y'})$. Пусть $j\notin E_Y$, т. е. $\Delta_j'=\Delta_j(\theta_0)\neq 0$. Из формулы (4.22) (для $j\in E_Y$) и соотношения (4.23) (для $j\notin E_Y$) получаем

$$x_j=\begin{cases}\alpha_j, & \text{если } \Delta_j'>0,\\ \beta_j, & \text{если } \Delta_j'<0.\end{cases}$$

Следовательно,

$$b_i^{(Y')}=b_i-\sum_{j\notin E_{Y'}}\gamma_j a_{ij}=b_i-\sum_{j\notin E_{Y'}}x_j a_{ij}.$$

Поэтому система чисел x_j, $j\in E_{Y'}$, ε_i^*, $i=1, 2, \ldots, m$, удовлетворяет не только условиям (4.12), но и условиям (4.11) и составляет план задачи $C_{Y'}$ (в условиях (4.11), (4.12) индекс Y заменяется на Y').

Если вектор условий A_j задачи (A) содержится в базисе оптимального опорного плана x_j, $j\in E_Y$, ε_i^*, $i=1, 2, \ldots, m$, задачи (C_Y), то $\delta_j^*=0$. Поэтому

$$\Delta_j'=\Delta_j-\theta_0\delta_j^*=0,$$

т. е. $j\in E_{Y'}$. Следовательно, план x_j, $j\in E_{Y'}$, ε_i^*, $i=1, \ldots m$, задачи $(C_{Y'})$ является ее опорным планом. Его базис совпадает с базисом опорного решения задачи (C_Y). Обычно этот план оказывается достаточно близким к оптимальному плану вспомогательной задачи $(C_{Y'})$. Приняв его за исходный, мы существенно сокращаем число итераций, необходимых для решения задачи $(C_{Y'})$.

При решении невырожденной задачи $(C_{Y'})$ переход к квазиплану X' приводит к уменьшению невязки:

$$\varepsilon_0^{*'} < \varepsilon_0^*.$$

В самом деле, согласно (4.35)

$$\Delta'_{j_0} = \Delta_{j_0} - \theta_0 \delta^*_{j_0} = 0.$$

Поэтому $j_0 \in E_{Y'}$, т. е. A_{j_0} является вектором условий задачи $(C_{Y'})$. В силу того же соотношения (4.35)

$$\Delta_{j_0} \delta^*_{j_0} > 0. \tag{4.36}$$

Из определения квазиплана X следует, что

$$x_{j_0} = \begin{cases} \alpha_{j_0}, & \text{если} \quad \Delta_{j_0} > 0, \\ \beta_{j_0}, & \text{если} \quad \Delta_{j_0} < 0. \end{cases}$$

Учитывая (4.36), можно переписать последнее равенство в виде

$$x_{j_0} = \begin{cases} \alpha_{j_0}, & \text{если} \quad \delta^*_{j_0} > 0, \\ \beta_{j_0}, & \text{если} \quad \delta^*_{j_0} < 0. \end{cases} \tag{4.37}$$

Соотношение (4.37) означает, что для опорного плана x_j, $j \in E_{Y'}$, ε_i^*, $i = 1, 2, \ldots, m$, задачи $(C_{Y'})$ имеет место случай 3° метода улучшения плана (см. п. 5.5 гл. 4), и вектор A_{j_0} может быть введен в базис. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно вспомнить, что задача $(C_{Y'})$ является задачей минимизации и в процессе ее решения случай 2° возникнуть не может:

$$\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \geqslant 0.$$

Введя в базис вектор A_{j_0}, получим новый опорный план задачи $(C_{Y'})$, для которого значение линейной формы $\sum\limits_{i=1}^{m} \varepsilon_i$ окажется меньшим, чем

$$\varepsilon_0^* = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^*$$

(по условию, задача $(C_{Y'})$ — невырожденная). Следовательно, минимальное значение $\varepsilon_0^{*'}$ линейной формы задачи $(C_{Y'})$ и подавно меньше невязки ε_0^* плана X.

Итак, в случае 3° можно перейти к новому квазиплану X', имеющему меньшую невязку (последнее справедливо при невырожденности задачи $(C_{Y'})$).

4.6. Решение задачи с двухсторонними ограничениями методом последовательного сокращения невязок состоит в движении по ее квазипланам.

Процесс решения складывается из однотипных итераций. Опишем одну из них, например, первую.

Пусть Y — ядро произвольного плана задачи $(\tilde{A})$. Как уже отмечалось, если все переменные задачи (A) ограничены с обеих сторон, можно в качестве Y принять произвольный m-мерный вектор.

Ядро Y порождает вспомогательную задачу (C_Y). Без уменьшения общности можно считать все компоненты $b_i^{(Y)}$ вектора ограничений $B^{(Y)}$ задачи (C_Y) неотрицательными числами. Поэтому вектор с компонентами $\xi_j = 0$ для $j \in E_Y$, $\varepsilon_i = b_i^{(Y)}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, является опорным планом задачи (C_Y) с базисом, составленным из единичных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_m$. Приняв этот план за исходный, применим к вспомогательной задаче (C_Y) метод последовательного улучшения плана (второй алгоритм) для задач с двухсторонними ограничениями (см. § 5 гл. 4 и п. 7.3 гл. 5).

Через конечное число шагов будет получено опорное решение

$$\xi_j^*, \ j \in E_Y, \ \varepsilon_i^*, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

задачи (C_Y) и ядро $M^* = (\mu_1^*, \ldots, \mu_m^*)$ оптимального плана задачи $(\tilde{C}_Y)$. Пользуясь формулой (4.17), образуем квазиплан X и займемся его исследованием.

Если невязка ε_0^* квазиплана X равна нулю (случай 1°), то полученный квазиплан X является решением задачи (A). В противном случае составляются параметры δ_j^* (числа Δ_j были вычислены еще при образовании множества E_Y) и проверяются условия (4.19). Если эти условия оказываются выполненными (случай 2°), делается заключение о неразрешимости задачи (A). Естественно, что как в первом, так и во втором случае, процесс решения заканчивается.

Допустим теперь, что $\varepsilon_0^* > 0$ и для некоторых $j \in E_Y$ знаки величин Δ_j и δ_j^* одинаковы, т. е. $\Delta_j \delta_j^* > 0$ (случай 3°). В этом случае следует образовать новое ядро плана задачи $(\tilde{A})$ и приступить к следующей итерации. В качестве нового ядра принимается вектор

$$Y' = Y - \theta_0 M^*,$$

где число θ_0 определяется формулой (4.25).

По ядру Y' составляется новая вспомогательная задача $(C_{Y'})$. Следующая итерация начинается с решения этой задачи. В качестве базиса исходного плана задачи $(C_{Y'})$ берется базис опорного решения задачи (C_Y).

Итерация проводится по тем же правилам, что и предыдущая, и заканчивается построением решения задачи (A) (случай 1°) либо установлением ее неразрешимости (случай 2°), либо, наконец, образованием вспомогательной задачи $(C_{Y''})$ — исходным пунктом новой итерации (случай 3°). В невырожденном случае каждая итерация уменьшает значение невязки квазиплана.

Заметим, что для невырожденности всех вспомогательных задач достаточно предположить невырожденность расширенной задачи (B). В этом случае любые два квазиплана задачи (A), полученные в процессе ее решения, имеют различные значения невязок.

Каждый квазиплан задачи (A) находится во взаимно однозначном соответствии с некоторым опорным планом расширенной задачи (B), причем значение линейной формы (4.8) на этом плане равно невязке квазиплана. В процессе решения мы движемся по различным опорным планам задачи (B).

Следовательно, исследование задачи (A) методом сокращения невязок укладывается в конечное число итераций. Тот же вывод справедлив и для вырожденного случая, если при решении вспомогательных задач пользоваться правилами, исключающими возможность появления цикла (§ 6 гл. 4).

Итак, процесс решения задачи с двухсторонними ограничениями методом сокращения невязок состоит из конечного числа итераций, каждая из которых включает несколько шагов метода улучшения плана.

§ 5. Алгоритм метода

5.1. Мы уже видели, что каждой итерации метода сокращения невязок отвечает некоторый план Y двойственной задачи $(\tilde{A})$. План Y в свою очередь определяет вспомогательную задачу (C_Y) данной итерации. Решению вспомогательной задачи соответствует квазиплан X исходной задачи (A). Признак оптимальности — основа метода — позволяет проверить, является ли квазиплан X решением задачи (A). Признак неразрешимости является достаточным условием для отсутствия планов у задачи (A). Если квазиплан X не является оптимальным планом задачи и нет оснований утверждать, что задача неразрешима, следует при помощи элементарного преобразования, определяемого решениями пары двойственных вспомогательных задач (C_Y) и $(\tilde{C}_Y)$, перейти к новому плану Y' сопряженной задачи $(\tilde{A})$. Отправляясь от плана Y', повторяют весь процесс — проводят очередную итерацию.

Таким образом, каждый шаг метода сокращения невязок требует решения вспомогательной задачи (C_Y). Вообще говоря, для решения задачи (C_Y) может быть использован как метод улучшения плана, так и метод уточнения оценок. При этом в каждом методе решение задачи может быть получено как по первому, так и по второму алгоритму. Однако имеются соображения, заставляющие рекомендовать для решения вспомогательной задачи второй алгоритм метода улучшения плана. Выбор метода улучшения плана обусловлен тем, что определение исходного плана каждой вспомогательной задачи не требует специальных вычислений. В качестве базиса начального плана первой вспомогательной задачи можно принять систему единичных векторов $e_1, \ldots, e_m$. При этом базисные компоненты начального опорного плана задачи (C_Y) совпадают с соответствующими составляющими b_i вектора ограничений B (величины b_i всегда можно считать неотрицательными). В качестве исходного плана каждой последующей вспомогательной задачи можно принимать решение предыдущей.

Для перехода к очередной итерации метода сокращения невязок необходимо иметь не только решение вспомогательной задачи (C_Y), но и оптимальный план сопряженной с ней задачи $(\tilde{C}_Y)$. Поэтому для решения вспомогательной задачи предпочтительнее второй алгоритм метода улучшения плана, в котором наряду с оптимальным планом задачи вычисляется решение сопряженной задачи. Нижняя строка заключительной основной таблицы второго алгоритма заполняется компонентами оптимального плана сопряженной задачи.

Использование первого алгоритма затрудняется еще и тем, что для формирования очередной вспомогательной задачи необходимо получить разложение всех ее векторов условий, которые не входили в предыдущую вспомогательную задачу, по векторам текущего безиса. Во втором алгоритме эта операция не нужна.

Приведенные соображения позволяют положить в основу построения вычислительной схемы метода сокращения невязок второй алгоритм метода улучшения плана.

Решение задачи по методу сокращения невязок сводится, таким образом, к последовательному заполнению ряда основных таблиц и одной вспомогательной таблицы.

Начнем с описания структуры вспомогательной таблицы (табл. 7.2).

В верхнюю часть вспомогательной таблицы (первые $m+1$ строк) помещаются составляющие расширенных векторов условий исходной задачи (A). При решении каждой вспомогательной задачи (C_Y) используются только столбцы A_j табл. 7.2, для которых $j \in E_Y$. При этом следует помнить, что для вспомогательных задач коэффициенты линейной формы при переменных x_j равны нулю.

При решении вспомогательных задач целесообразно придерживаться следующего правила. Произвольный единичный вектор e_s, вышедший на некотором шаге из базиса, не подлежит включению в последующие базисы. Такое ограничение может иногда приводить к некоторому завышению минимума линейной формы отдельной вспомогательной задачи. Другими словами, указанное ограничение может приводить к квазипланам с завышенной невязкой. Тем не менее это ограничение в общем случае сокращает трудоемкость вычислений, избавляя от необходимости рассматривать в процессе решения единичные векторы $e_1, e_2, \ldots, e_m$. Поэтому единичные векторы $e_1, \ldots, e_m$, принадлежащие системе векторов условий любой вспомогательной задачи, не следует включать в табл. 7.2. Предоставляем читателю проверить,

Таблица 7.2

№	B	A_1	A_2	...	A_j	...	A_n	Y
1	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}	y_1
2	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}	y_2
⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	...	⋮	⋮
i	b_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}	y_i
⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	...	⋮	⋮
m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}	y_m
$m+1$	c	c_1	c_2	...	c_j	...	c_n	
1	Δ	$\times$	Δ_2	...	Δ_j	...	$\times$	
	δ	δ_1	—	...	—	...	δ_n	
	δ'	δ_1'	—	...	—	...	δ_n'	
	⋮	⋮	⋮	...	⋮	...	⋮	
	δ^*	δ_1^*	δ_2^*	...	δ_j^*	...	δ_n^*	
	θ	—	θ_2	...	θ_j	...	—	$\theta_0^{(1)}$
2	Δ	$\times$	Δ_1	...	$\times$	...	$\times$	
	δ	δ_1	—	...	δ_j	...	δ_n	
	δ'	δ_1'	—	...	δ_j'	...	δ_n'	
	⋮	⋮	⋮	...	⋮	...	⋮	
	δ^*	δ_1^*	δ_2^*	...	δ_j^*	...	δ_n^*	
	θ	—	θ_2	...	—	...	—	$\theta_0^{(2)}$
3	Δ	Δ_1	$\times$	...	$\times$	...	$\times$	
	⋮	⋮	⋮	...	⋮	...	⋮	

что принятое ограничение в выборе векторов, вводимых в базис, не сказывается на сходимости метода сокращения невязок (см. упражнение 5).

При каждой итерации метода в нижней части вспомогательной таблицы заполняются строки Δ, δ, δ', ..., δ^*, θ. Будем называть часть вспомогательной таблицы, составленную из строк Δ, δ, δ', ..., δ^*, θ — вспомогательной *субтаблицей*, отвечающей данной итерации.

В начальной итерации метода сокращения невязок элементы строки Δ вычисляются по формуле

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.1}$$

где $Y = (y_1, \ldots, y_m)$ — исходный план сопряженной задачи $(\tilde{A})$. В последующих итерациях метода элементы строки Δ вычисляются в соответствии с рекуррентной формулой (1.23). Позиции j, отвечающие нулевым элементам строки Δ (они отмечаются косым крестом), определяют множество индексов E_Y векторов A_j, включаемых в систему векторов условий вспомогательной задачи (C_Y). Строки δ, δ', ..., δ^* представляют собой оценки векторов условий A_j $(j \in E_Y)$ вспомогательной задачи (C_Y) относительно соответствующего базиса,

$$\delta_j^{(l)} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \mu_i^{(l)} \quad \text{для} \quad j \in E_Y \tag{5.2}$$

(коэффициенты линейной формы вспомогательной задачи при переменных x_j равны нулю). Здесь параметры $\mu_i^{(l)}$ — оценки условий вспомогательной задачи относительно ее плана $(\Xi^{(l)}, E^{(l)})$. В процессе решения вспомогательной задачи элементы $\delta_j^{(l)}$ строк $\delta^{(l)}$ вычисляются только для $j \in E_Y$. Остальные позиции строк $\delta^{(l)}$ прочеркиваются. Исключение представляет только строка δ^*, отвечающая оптимальному плану вспомогательной задачи. Элементы δ_j^* вычисляются по формулам (1.22) для всех j $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

В последней строке вспомогательной субтаблицы, отвечающей каждой итерации метода сокращения невязок, заполняются только позиции j, для которых $\delta_j^* > 0$. Элементы строки θ вычисляются как отношения соответствующих элементов строк Δ и δ^*. Минимальный элемент θ_0 строки θ является параметром элементарного преобразования плана Y задачи $(\tilde{A})$ в план Y'.

В приведенной в этом пункте вспомогательной таблице предполагается для определенности, что в первой итерации в строке Δ обращаются в нуль только Δ_1 и Δ_n, а во второй итерации, кроме того, $\Delta_j=0$. В строке θ прочеркиваются позиции, отвечающие неположительным значениям δ_j^*.

Обозначения элементов субтаблиц должны содержать три индекса: номер итерации метода сокращения невязок, номер шага процесса решения вспомогательной задачи и номер вектора. Чтобы не усложнять запись, будем опускать те или иные индексы там, где это не может вызвать недоразумений.

Как видим, структура вспомогательной таблицы метода сокращения невязок несколько отличается от структуры соответствующей таблицы второго алгоритма метода улучшения плана. Каждая итерация метода улучшения плана расширяет вспомогательную таблицу на одну строку, а каждая итерация метода сокращения невязок добавляет во вспомогательную таблицу субтаблицу, состоящую, вообще говоря, из нескольких строк.

Основные таблицы метода сокращения невязок (см. табл. 7.3) составляются по тем же правилам, что и таблицы второго алгоритма метода улучшения плана.

Строка Δ вспомогательной таблицы, отвечающая начальному плану Y сопряженной задачи $(\tilde{A})$, определяет множество индексов E_Y и позволяет сформулировать первую вспомогательную задачу (C_Y).

Задача (C_Y) решается по обычным правилам второго алгоритма метода улучшения плана. Последовательно заполняются основные таблицы, и после каждого шага процесса решения задачи (C_Y) добавляется строка $\delta^{(l)}$ к вспомогательной субтаблице l. При этом, естественно, заполняются только позиции строк $\delta_j^{(l)}$, для которых $j \in E_Y$.

Заполнение главной части начальной основной таблицы не требует специальных вычислений. Единичные векторы e_1, e_2, ..., e_m, принадлежащие системе векторов условий первой вспомогательной задачи, целесообразно принять в качестве

Таблица 7.3

	№	σ	Б	e_0	e_1	e_2	...	e_i	...	e_m	A_k	θ	Номер таблицы
	1	1	e_1	b_1	1		...		...		a_{1k}	θ_1	1
	2	1	e_2	b_2		1	...		...		a_{2k}	θ_2	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
$\leftarrow$	r	1	e_r	b_r			...		...		a_{rk}	θ_r	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
	m	1	e_m	b_m			...		...	1	a_{mk}	θ_m	
	$m+1$	—	—	$e_{m+1,0}$	1	1	...	1	...	1	$\overset{*}{\delta}_k$	—	
	1	1	e_1	e'_{10}	e'_{11}	e'_{12}	...	e'_{1i}	...	e'_{1m}	$z'_{1k'}$	θ'_1	1′
	2	1	e_2	e'_{20}	e'_{21}	e'_{22}	...	e'_{2i}	...	e'_{2m}	$z'_{2k'}$	θ'_2	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
	$r-1$	1	e_{k-1}	$e'_{r-1,0}$	$e'_{r-1,1}$	$e'_{r-1,2}$	...	$e'_{r-1,i}$	...	$e'_{r-1,m}$	$z'_{r-1,k'}$	θ'_{k-1}	
$\rightarrow$	r		A_k	e'_{r0}	e'_{r1}	e'_{r2}	...	e'_{ri}	...	e'_{rm}	$z'_{rk'}$	θ'_r	
	$r+1$	1	e_{r+1}	$e'_{r+1,0}$	$e'_{r+1,1}$	$e'_{r+1,2}$	...	$e'_{r+1,i}$	...	$e'_{r+1,m}$	$z'_{r+1,k'}$	θ'_{r+1}	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
	m	1	e_m	e'_{m0}	e'_{m1}	e'_{m2}	...	e'_{mi}	...	e'_{mm}	$z'_{mk'}$	θ'_m	
	$m+1$	—	—	$e'_{m+1,0}$	$e'_{m+1,1}$	$e'_{m+1,2}$	...	$e'_{m+1,i}$	...	$e'_{m+1,m}$	$\overset{*}{\delta}_{k'}$	—	

Продолжение

	№	σ	Б	e_0	e_1	e_2	...	e_i	...	e_m	A_k	θ	Номер таблицы
	1	1	e_1	e''_{10}	e''_{11}	e''_{12}	...	e''_{1i}	...	e''_{1m}	$z''_{1k''}$	θ''_1	1″
	2	1	e_2	e''_{20}	e''_{21}	e''_{22}	...	e''_{2i}	...	e''_{2m}	$z''_{2k''}$	θ''_2	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	...	⋮	⋮	⋮	
	m	1	e_m	e''_{m0}	e''_{m1}	e''_{m2}	...	e''_{mi}	...	e''_{mm}	$z''_{mk''}$	θ''_m	
	$m+1$	—	—	$e''_{m+1,0}$	$e''_{m+1,1}$	$e''_{m+1,2}$	...	$e''_{m+1,i}$	...	$e''_{m+1,m}$	$\delta^*_{k''}$	—	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	...	⋮	⋮	⋮	⋮
	1	1	e_1	e_{10}	e_{11}	e_{12}	...	e_{1i}	...	e_{1m}	$z_{1\bar{k}}$	θ_1	2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	...	⋮	⋮	⋮	
	m	1	e_m	e_{m0}	e_{m1}	e_{m2}	...	e_{mi}	...	e_{mm}	$z_{m\bar{k}}$	θ_m	
	$m+1$	—	—	$e_{m+1,0}$	$e_{m+1,1}$	$e_{m+1,2}$	...	$e_{m+1,i}$	...	$e_{m+1,m}$	$\delta^*_{\bar{k}}$	—	
	1	1	e_1	e'_{10}	e'_{11}	e'_{12}	...	e'_{1i}	...	e'_{1m}	$z'_{1\bar{k}'}$		2′
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	...	⋮	⋮	⋮	
	m	1	e_m	e'_{m0}	e'_{m1}	e'_{m2}	...	e'_{mi}	...	e'_{mm}	$z'_{m\bar{k}'}$		
	$m+1$	—	—	$e'_{m+1,0}$	$e'_{m+1,1}$	$e'_{m+1,2}$	...	$e'_{m+1,i}$	...	$e'_{m+1,m}$	$\delta^*_{\bar{k}'}$	—	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	...	⋮	⋮	⋮	⋮

ее исходного базиса. Поэтому

$$e_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq j, \\ 1 \text{ при } i = j, \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, \ldots, m,$$

$$e_{i0} = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$e_{m+1,\,0} = \sum_{i=1}^{m} e_{i0} = \sum_{i=1}^{m} b_i,$$

$$e_{m+1,\,j} = \mu_j = \sum_{i=1}^{m} \sigma_i e_{ij} = 1, \qquad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Здесь $\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_m = 1$ — коэффициенты линейной формы вспомогательной задачи при переменных $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$.

Заполнение столбцов A_k и θ основной табл. 0 и переход к следующим основным таблицам производится по общим правилам второго алгоритма метода последовательного улучшения плана. (Не следует смешивать обозначения θ и θ_0 последнего столбца основной таблицы и его минимального элемента с такими же обозначениями, используемыми при построении вспомогательной таблицы.) В столбец σ основной таблицы записываются коэффициенты линейной формы при базисных переменных соответствующей итерации вспомогательной задачи. Коэффициенты σ_i, отвечающие векторам e_i, равны единице. Коэффициенты, которые отвечают векторам A_j $(j \in E_Y)$, входящим в базис опорного плана задачи (C_Y), равны нулю.

Вектор A_k, подлежащий вводу в базис, определяется максимальным положительным элементом строки δ вспомогательной таблицы. Выбор максимального положительного δ (а не минимального отрицательного) обусловлен тем, что во вспомогательной задаче требуется определить минимум, а не максимум линейной формы.

Читателю целесообразно будет вернуться к § 5 гл. 5 и сформулировать в терминах и обозначениях вспомогательной задачи описание процесса ее решения по второму алгоритму метода улучшения плана.

После некоторого числа шагов метода улучшения плана во вспомогательной таблице будет обязательно получена строка $\delta^{(\nu)}$, составленная из неположительных элементов (здесь имеются в виду только те позиции строки, которые соответствуют векторам условий вспомогательной задачи). В табл. 7.2 эта строка обозначена через δ^*.

Элементы e^*_{i0} столбца e_0 последней основной таблицы, отвечающие векторам базиса A_{s_i} ($s_i \in E_Y$), определяют квазиплан X задачи (A). Если элемент $e^*_{m+1,\,0}$ (невязка квазиплана X), расположенный в левом нижнем углу этой таблицы, равен нулю, квазиплан X оказывается оптимальным планом задачи (A). Процесс решения задачи заканчивается (случай 1°).

Пусть теперь $e^*_{m+1,\,0} \neq 0$. В этом случае следует по формуле (1.22) заполнить свободные позиции строки δ^*. Если все вновь вычисленные элементы δ^*_j также окажутся неположительными, то, в соответствии с признаком неразрешимости (случай 2°), процесс заканчивается установлением несовместности условий задачи (A). Если же среди элементов δ^*_j имеются положительные (случай 3°), необходимо подготовить переход к следующей итерации. Для этого следует заполнить позиции строки θ, отвечающие $\delta^*_j > 0$ значениями отношений Δ_j/δ^*_j и выделить минимальный элемент θ_0 этой строки. Далее, по формуле

$$Y' = Y - \theta_0 M^*$$

вычисляется очередной план задачи $\tilde{A}$ — исходный пункт следующей итерации. Однако для продолжения процесса сокращения невязок нет необходимости получать на каждом шаге метода план задачи ($\tilde{A}$). Вместо этого целесообразно по формуле

$$\Delta' = \Delta(\theta_0) = \Delta - \theta_0\delta^* \tag{5.3}$$

вычислить первую строку субтаблицы, относящейся к очередной итерации метода сокращения невязок. Нулевые элементы строки Δ' определяют новое множество индексов $E_{Y'}$ и, следовательно, очередную вспомогательную задачу ($C_{Y'}$).

Дальнейшее течение процесса ведется по тем же правилам, что и в первой итерации.

Важно подчеркнуть, что в качестве главной части исходной основной таблицы в каждой последующей итерации принимается главная часть последней основной таблицы предыдущей итерации.

Итерации метода сокращения невязок проводятся до тех пор, пока одна из них не завершится случаем 1° или 2°.

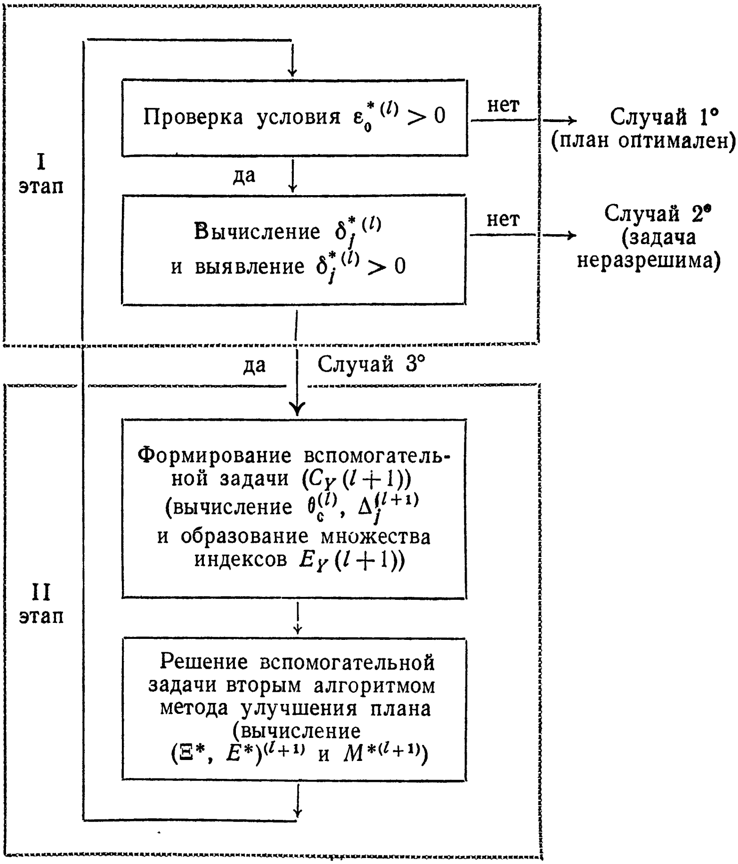


Рис. 7.5.

В случае 1° процесс заканчивается получением искомого решения, а в случае 2° — установлением неразрешимости исследуемой задачи.

Здесь уместно сделать следующее замечание. Решение каждой вспомогательной задачи, как правило, не требует большого числа шагов. Это связано с тем, что решение предыдущей вспомогательной задачи (C_Y), принимаемое в качестве исходного опорного плана последующей задачи $(C_{Y'})$, обычно достаточно близко к оптимальному плану задачи $(C_{Y'})$. В решении первой вспомогательной задачи отправляются от единичного базиса. Вычисление оптимального плана первой вспомогательной задачи — работа относительно нетрудоемкая, если число элементов множества индексов E_Y значительно меньше m. Если множество E_Y состоит из большого числа индексов (порядка m), то решение вспомогательной задачи связано с более громоздкими вычислениями. Однако в этом случае обычно существенно уменьшается число итераций, необходимых для решения задачи методом сокращения невязок.

На рис. 7.5 изображена блок-схема решения задачи по методу сокращения невязок.

5.2. Проиллюстрируем применение описанного алгоритма следующим примером.

Требуется обратить в максимум линейную форму

$$L(X)=x_1+x_2+x_3+3x_4+x_5+3x_6+x_7$$

при условиях:

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+2x_3+3x_4+2x_5+4x_6+2x_7&=5,\\ 2x_1+x_2+4x_3-x_4+x_5+2x_6-3x_7&=7,\\ x_1+3x_2+x_3+4x_4-x_5+3x_6+2x_7&=5,\\ -x_1+2x_2+x_3+x_4+2x_5-x_6+x_7&=2,\\ x_j\geqslant 0, \qquad j=1,\, 2,\, \ldots,\, 7.& \end{aligned}$$

Все коэффициенты первого ограничения положительны. Согласно рекомендациям п. 7.2 гл. 6 компоненты исходного плана сопряженной задачи можно определить следующим образом:

$$y_1=\max\left\{\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{2}\right\}=1, \quad y_2=y_3=y_4=0.$$

Составляем вспомогательную таблицу. В строку Δ записываются величины

$$\Delta_j=\sum_{i=1}^{4}a_{ij}y_i-c_j, \qquad j=1,\, 2,\, \ldots,\, 7.$$

В нуль обращаются два значения Δ (Δ_1 и Δ_4). Следовательно, вспомогательная задача (C_Y) содержит, кроме единичных векторов условий e_i $(i=1, \ldots, 4)$, только два вектора, A_1 и A_4. Заполняем главную часть начальной основной таблицы. В последней ее строке в позициях столбцов $e_1, \ldots, e_4$ записываются относительные оценки условий задачи (C_Y). Имеем

$$\mu_i = 1, \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

Затем вычисляются относительные оценки векторов условий задачи (C_Y). Имеем

$$\delta_1 = \sum_{i=1}^{4} a_{i1}\mu_i = 3; \qquad \delta_4 = 7.$$

Оценки векторов A_1 и A_4 положительны. В очередной базис задачи (C_Y) вводится A_4 с большей оценкой. Коэффициенты разложения вектора A_4 по начальному базису, совпадающие с компонентами A_4, записываются в столбец A_k основной таблицы. В $(m+1)$-ю (пятую) позицию столбца A_k помещается величина $\delta_4 = 7$. Затем для неотрицательных элементов столбца A_k вычисляются составляющие столбца θ — отношения соответствующих элементов столбцов e_0 и A_k. Минимальный элемент $\theta_0 = {}^5/_4$ столбца θ достигается на векторе базиса e_3. Вектор e_3 подлежит исключению из базиса.

Продолжая процесс решения вспомогательной задачи по правилам второго алгоритма метода улучшения плана, получаем после двух итераций решения задач (C_Y) и $(\tilde{C}_Y)$:

$$(\Xi^*, E^*) = \left(\frac{11}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, \frac{16}{3}\right),$$
$$M^* = \left(1, \frac{4}{9}, -\frac{8}{9}, 1\right).$$

Невязка соответствующего квазиплана равна ${}^{17}/_3$. Следовательно, полученный квазиплан не является решением задачи.

Заполняем свободные позиции строки δ^* вспомогательной таблицы. Имеем

$$\delta^* = \left(0, \frac{16}{9}, \frac{35}{9}, 0, \frac{16}{3}, \frac{11}{9}, -\frac{1}{9}\right).$$

В последней строке θ субтаблицы, отвечающей первой итерации, заполняются только четыре позиции (позиции, в которых $\delta_j^* > 0$). Наименьший элемент θ_0 строки θ равен ${}^3/_{16}$.

Переходим ко второй итерации. Элементы первой строки субтаблицы, отвечающей второй итерации, вычисляются по формуле

$$\Delta_j' = \Delta_j - \theta_0\delta_j^*.$$

В строке Δ субтаблицы 2 три нулевых элемента, Δ_1', Δ_4', Δ_5'. Следовательно, помимо единичных векторов e_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ новая вспомогательная задача $(C_{Y'})$ содержит векторы условий A_1, A_4 и A_5.

В качестве главной части исходной основной таблицы для решения задачи $(C_{Y'})$ принимается последняя (третья) основная таблица решения задачи (C_Y). Вторая итерация метода сокращения невязок состоит в рассматриваемом примере всего из одного шага. Решения третьей и четвертой вспомогательных задач $(C_{Y''})$ и $(C_{Y'''})$ также достигаются за один шаг каждое. Задаче $(C_{Y'''})$ соответствует квазиплан

$$X^* = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$$

с нулевой невязкой. Квазиплан X^* является оптимальным планом задачи.

Весь ход решения задачи зафиксирован в основных табл. 7.5 и вспомогательной табл. 7.4.

5.3. Использование метода улучшения плана предполагает заданным некоторый опорный план исходной задачи (A). При решении задачи методом уточнения оценок следует отправляться от некоторого опорного плана сопряженной задачи $(\tilde{A})$. Вычисление опорного плана прямой или сопряженной задачи — работа, вообще говоря, не менее трудоемкая, чем определение оптимального плана по заданному опорному плану.

Метод сокращения невязок можно применять, отправляясь от произвольного (не обязательного опорного) плана задачи $(\tilde{A})$. Это — существенное достоинство метода, поскольку во многих случаях выбор неопорного плана сопряженной задачи не требует специальных вычислений. Если же структура задачи непосредственно не подсказывает вид исходного плана, следует обратиться к методу, изложенному в п. 7.6 гл. 6. В соответствии с этим методом задача (A) дополняется соотношением

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \leqslant M,$$

или

$$\sum_{j=0}^{n} x_j = M, \quad x_0 \geqslant 0.$$

Здесь M предполагается достаточно большим числом. Назовем полученную при этом задачу линейного программирования задачей (M). Сопряженная с ней задача, задача $(\tilde{M})$, состоит в отыскании минимума линейной формы

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i + M y_0,$$

Таблица 7.4

№	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	Y
1	5	1	2	2	3	2	4	2	1
2	7	2	1	4	−1	1	2	−3	
3	5	1	3	1	4	−1	3	2	
4	2	−1	2	1	1	2	−1	1	
5	c	1	1	1	3	1	3	1	
1	Δ	×	1	1	×	1	1	1	
	δ	3	—	—	7	—	—		
	δ'	**5/4**	—	—		—	—		
	δ^*		$^{16}/_9$	$^{35}/_9$		$^{16}/_3$	$^{11}/_9$	$-^1/_9$	
	θ	—	$^9/_{16}$	$^9/_{35}$	—	**3/16**	$^9/_{11}$	—	$\theta_0^{(1)}={}^3/_{16}$
2	Δ	×	$^2/_3$	$^{13}/_{48}$	×	×	$^{37}/_{48}$	$^{49}/_{48}$	
	δ^*		$^8/_3$	$^7/_3$			$-^5/_3$	$-^5/_3$	
	θ	—	$^1/_4$	**13/112**	—	—	—	—	$\theta_0^{(2)}={}^{13}/_{112}$
3	Δ	×	$^5/_{14}$	×	×	×	$^{27}/_{28}$	$^{17}/_{14}$	
	δ^*		4			−8	−6	−4	
	θ	—	**5/56**	—	—	—	—	—	$\theta_0^{(3)}={}^5/_{56}$
4	Δ	×	×	×	×	$^5/_7$	$^3/_2$	$^{11}/_7$	

Таблицы 7.5 (1—4)

	№	σ	$Б$	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	A_k	θ	Номер таблицы
	1	1	e_1	5	1				3	$^5/_3$	
	2	1	e_2	7		1			−1	—	
←	3	1	e_3	5			1		4	**5/4**	1
	4	1	e_4	2				1	1	2	
	5	μ_0	—	19	1	1	1	1	7	—	
	1	1	e_1	$^5/_4$	1		$-^3/_4$		$^1/_4$	5	
←	2	1	e_2	$^{33}/_4$		1	$^1/_4$		$^9/_4$	**11/3**	
→	3		A_4	$^5/_4$			$^1/_4$		$^1/_4$	5	1′
	4	1	e_4	$^3/_4$			$-^1/_4$	1	$-^5/_4$	—	
	5	μ_0'	—	$^{41}/_4$	1	1	$-^3/_4$	1	$^5/_4$	—	
←	1	1	e_1	$^1/_3$	1	$-^1/_9$	$-^7/_9$		$^8/_3$	**1/8**	
→	2		A_1	$^{11}/_3$		$^4/_9$	$^1/_9$		$^1/_3$	11	
	3		A_4	$^1/_3$		$-^1/_9$	$^2/_9$		$-^1/_3$	—	1″
	4	1	e_4	$^{16}/_3$		$^5/_9$	$-^1/_9$	1	$^8/_3$	2	
	5	μ_0''	—	$^{17}/_3$	1	$^4/_9$	$-^8/_9$	1	$^{16}/_3$	—	

Продолжение

	№	σ	$Б$	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	A_k	ϑ	Номер таблицы
$\rightleftarrows$	1		A_5	$^1/_8$	$^3/_8$	$-^1/_{24}$	$-^7/_{24}$		$^7/_{24}$	**3/7**	2
	2		A_1	$^{29}/_8$	$-^1/_8$	$^{11}/_{24}$	$^5/_{24}$		$^{43}/_{24}$	$^{87}/_{43}$	
	3		A_4	$^3/_8$	$^1/_8$	$-^1/_8$	$^1/_8$		$^1/_8$	3	
	4	1	e_4	5	-1	$^2/_3$	$^2/_3$	1	$^7/_3$	$^{15}/_7$	
	5	μ_1	—	5	-1	$^2/_3$	$^2/_3$	1	$^7/_3$	—	
$\longrightarrow$	1		A_3	$^3/_7$	$^9/_7$	$-^1/_7$	-1		$-^4/_7$	—	3
	2		A_1	$^{20}/_7$	$-^{17}/_7$	$^5/_7$	2		$^{13}/_7$	$^{20}/_{13}$	
	3		A_4	$^3/_7$	$^2/_7$	$-^1/_7$			$^3/_7$	1	
$\longleftarrow$	4	1	e_4	4	-4	1	3	1	4	**1**	
	5	μ_2	—	4	-4	1	3	1	4	—	
	1		A_3	1	$^5/_7$		$-^4/_7$	$^1/_7$			4
	2		A_1	1	$-^4/_7$	$^1/_4$	$^{17}/_{28}$	$-^{13}/_{28}$			
	3		A_4		$^5/_7$	$-^1/_4$	$-^9/_{28}$	$-^3/_{28}$			
$\longrightarrow$	4		A_2	1	-1	$^1/_4$	$^3/_4$	$^1/_4$			
	5	μ_3	—							—	

переменные которой подчинены ограничениям

$$\sum_{i=0}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j, \quad j=1, 2, \ldots, n,$$

$$y_0 \geqslant 0.$$

Очевидно, что в качестве плана задачи $(\tilde{M})$ можно принять вектор

$$\tilde{Y} = (y_0, 0, \ldots, 0),$$

где

$$y_0 = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \{c_j, 0\}.$$

Решим теперь задачу (M) методом сокращения невязок, отправляясь от плана $\tilde{Y}$. В процессе решения число M предполагается бо́льшим любого числа, с которым его приходится сравнивать. Пусть

$$\tilde{X}^* = (\overset{*}{x}_0, \overset{*}{x}_1, \ldots, \overset{*}{x}_n)$$

— решение задачи (M). Возможны два случая:

1. Индекс $j=0$ принадлежит множеству $E_Y(s)$, где $Y^{(s)}$ — план сопряженной задачи, отвечающий последней итерации метода сокращения невязок, т. е. $\Delta_0^{(s)} = 0$.

2. Индекс $j=0$ не принадлежит множеству $E_Y(s)$, т. е. $\Delta_0^{(s)} > 0$.

В первом случае искомым оптимальным планом задачи (A) является вектор

$$X^* = (\overset{*}{x}_1, \overset{*}{x}_2, \ldots, \overset{*}{x}_n).$$

Во втором — задача (A) неразрешима. Пользуясь указаниями п. 7.6 гл. 6, читатель сумеет доказать эти утверждения самостоятельно (упражнение 9). Нетрудно также доказать, что если процесс решения задачи (M) завершился случаем 2° (задача (M) неразрешима), то условия исходной задачи несовместны (упражнение 10).

5.4. Рассмотрим теперь особенности алгоритма метода сокращения невязок применительно к задачам линейного программирования с двухсторонними ограничениями.

Учет двухсторонних ограничений заставляет внести некоторые изменения в структуру основных и вспомогательной таблиц. Как и в случае канонической формы задачи, каждая итерация метода сокращения невязок требует заполнения серии основных таблиц и субтаблицы вспомогательной таблицы.

В основных таблицах и субтаблице вспомогательной таблицы, отвечающих отдельной итерации метода сокращения невязок, записывается процесс решения очередной вспомогательной задачи по второму алгоритму метода улучшения плана. В каждой субтаблице содержатся, кроме того, строки Δ, (α, β), δ^* и θ. В строках Δ, (α, β), $\delta^*=\delta^{(s)}$ и $(\alpha, \beta)^{(s)}$ (s — номер последней итерации метода улучшения плана при решении вспомогательной задачи) заполняются все позиции (позиции строки Δ, отвечающие $\Delta_j=0$, отмечаются косым крестом). В строке θ заполняются лишь те позиции, для которых соответствующие элементы строк Δ и δ^* одного знака.

Элементы строки Δ в первой субтаблице вычисляются по формуле

$$\Delta_j=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i-c_j,$$

где y_i — компоненты ядра плана сопряженной задачи $(\tilde{A})$. Элементы строки Δ'_j последующей субтаблицы вычисляются по рекуррентной формуле

$$\Delta'_j=\Delta_j-\theta_0\delta^*_j.$$

Строка Δ позволяет выделить множество E_Y и определить, таким образом, очередную вспомогательную задачу. В строку (α, β), следующую за строкой Δ, записывается символ α при $\Delta_j>0$ и β при $\Delta_j<0$. Позиции строки (α, β) при $j\in E_Y$ заполняются в соответствии с правилами решения задач линейного программирования с двухсторонними ограничениями по второму алгоритму метода улучшения плана (см. п. 7.3 гл. 5).

В последующих строках субтаблицы $(\delta, (\alpha, \beta)', \delta', (\alpha, \beta)'', \ldots, (\alpha, \beta)^{(s-1)}, \delta^{(s-1)})$ в ходе решения вспомогательной задачи заполняются только позиции, отвечающие векторам условий этой задачи. В строке $(\alpha, \beta)^{(s)}$ позиции, для которых $j\in E_Y$, заполняются по тем же правилам, что и в других итерациях решения задачи (C_Y). В позициях, для которых $j\notin E_Y$, указываются те же значения границ интервалов изменения переменных задачи, что и в строке (α, β).

Элементы строки $(\alpha, \beta)^{(s)}$ содержат значения внебазисных составляющих соответствующего квазиплана.

В строке δ^* помещены значения параметров

$$\delta_j^* = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mu_i^*.$$

При $j \in E_Y$ $\delta_j^* = \delta_j^{(s)}$. Последняя строка θ субтаблицы служит для определения параметра θ_0 элементарного преобразования ядра Y в ядро Y' очередного плана сопряженной задачи. Ядро Y' определяет переход к следующей итерации метода сокращения невязок.

Заполнение последующих субтаблиц вспомогательной таблицы проводится по тем же правилам. Единственное отличие, как уже отмечалось, заключается в том, что строка $\Delta^{(\nu)}$ вычисляется не непосредственно, а по рекуррентной формуле через параметры предыдущей итерации.

Чтобы закончить описание структуры вспомогательной таблицы, заметим, что ее верхняя часть окаймляется слева столбцом $B^{(Y)}$, справа столбцом Y и сверху строкой (α/β). В столбце $B^{(Y)}$ содержатся составляющие

$$b_i^{(Y)} = b_i - \sum_{j \notin E_Y} \gamma_j A_j$$

вектора ограничений первой вспомогательной задачи (параметры γ_j вычисляются по формулам (4.6)). Элементы столбца Y — составляющие ядра исходного плана сопряженной задачи. В верхнюю строку (α/β) записывают верхнюю и нижнюю границы интервалов изменения всех переменных задачи.

Все особенности основных таблиц, связанные с решением вспомогательных задач (каждая из них — задача с двухсторонними ограничениями), указаны в п. 7.3 гл. 5. Здесь следует лишь обратить внимание не некоторое несоответствие обозначений гл. 5 и 7, которое не должно приводить к недоразумениям. В гл. 5 относительные оценки условий задачи обозначены через λ_i. В гл. 7 предварительные оценки условий вспомогательной задачи названы μ_i, а компоненты решения задачи $(\tilde{C}_Y)$, сопряженной к вспомогательной задаче (C_Y), обозначены через μ_i^*.

Основные таблицы содержат столбец θ, элементы которого вычисляются по формуле (7.2) гл. 5. Элементы строки θ

в субтаблицах вспомогательной таблицы определяются из соотношения (4.24) настоящей главы.

При заполнении основных таблиц полезно иметь в виду следующее замечание.

Столбец e_0 основных таблиц содержит коэффициенты разложения вектора

$$e_0 = B^{(Y)} - \sum_{\substack{j \in E_Y \\ j \notin I_X}} \gamma_j A_j = B - \sum_{j \notin E_Y} \gamma_j A_j - \sum_{\substack{j \in E_Y \\ j \notin I_X}} \gamma_j A_j = \\ = B - \sum_{j \notin I_X} \gamma_j A_j \qquad (5.4)$$

по векторам базиса опорного плана задачи (C_Y). Здесь параметры γ_j вычисляются по формулам (4.6), I_X — множество индексов векторов A_j, входящих в базис опорного плана соответствующей вспомогательной задачи.

При решении вспомогательной задачи элементы главных частей основных таблиц преобразовываются по формуле (7.7) гл. 5. Решение задачи (C_Y) используется в качестве исходного плана задачи $(C_{Y'})$. Поэтому те же рекуррентные формулы служат для преобразования главной части основных таблиц при переходе от одной итерации метода сокращения невязок к следующей. В силу соотношения (5.4) последнее замечание относится также к преобразованию столбца e_0.

Проиллюстрируем применение метода сокращения невязок к решению задачи линейного программирования с двухсторонними ограничениями на примере, рассмотренном ранее при описании метода улучшения плана. Пусть требуется обратить в максимум линейную форму

$$L(X) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 + x_7 - x_8 - x_9 - x_{10} - x_{11}$$

при условиях:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 3x_6 + x_7 + x_8 \qquad\qquad &= 7,\\
2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 + 2x_7 \qquad + x_9 \qquad &= 8,\\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 0{,}5x_5 + x_6 + x_7 \qquad + x_{10} \quad &= 6,\\
2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 + x_7 \qquad\qquad + x_{11} &= 7,\\
0 \leqslant x_j \leqslant 1, \quad j = 1, 2, \ldots, 7,&\\
x_j \geqslant 0, \quad j = 8, 9, 10, 11.&
\end{aligned}$$

Процесс решения задачи записан в основных таблицах 7.7 и вспомогательной табл. 7.6. В качестве исходного плана сопряженной задачи принят вектор $Y = (0{,}8;\ 0;\ 0{,}6;\ 0)$.

Таблица 7.6

		α/β	0/1	0/1	0/1	0/1	0/1	0/1	0/1	0/1	0/1	0/1	0/1	
$B^{(Y)}$	№	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	Y
5	1	7	1	1	2	3	2	3	1	1				0,8
5	2	8	2	3	1	1	3	2	2		1			
5,5	3	6	1	2	3	2	0,5	1	1			1		0,6
5	4	7	2	1	3	1	2	3	1				1	
	5	c	1	2	3	1	2	3	1	−1	−1	−1	−1	
	1	Δ	0,4	×	0,4	2,6	−0,1	×	0,4	1,8	1	1,6	1	
		(α, β)	α	α	α	α	β	α	α	α	α	α	α	
		δ	—	7	—	—	—	**9**	—	—	—	—	—	
		(α, β)′	—	α	—	—	—	β	—	—	—	—	—	
		δ′	—	**7**	—	—	—	−9	—	—	—	—	—	
		(α, β)″	α	—	α	α	β	β	α	α	α	α	α	
		δ*	1,333		6,667	4,667	0,5	4,333	0,333	1	−1,333	1	1	
		θ	0,3	—	**0,06**	0,557	—	—	1,2	1,8	—	1,6	1	$\theta_0^{(1)}=0,06$
	2	Δ	0,32	×	×	2,32	−0,13	−0,26	0,38	1,74	1,08	1,54	0,94	
		(α, β)	α	—	—	α	β	β	α	α	α	α	α	
		δ*	−2			3	−2	−1,5	−0,5	1	−0,5	1	−1,5	
		θ	—	—	=	0,774	**0,065**	0,173	—	1,74	—	1,54	—	$\theta_0^{(2)}=0,065$

Продолжение

		α/β	0/1	0/1	0/1	0/1	0/1	0/1	0/1	0/1	0/1	0/1	0/1	
$B^{(Y)}$	№	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	Y
	3	Δ	0,45	×	×	2,125	×	−0,162	0,413	1,675	1,112	1,475	1,038	
		(α, β)	α	β	—	α	—	β	α	α	α	α	α	
		δ*	−0,857	2,286		3,571		−0,643	0,929	1	0,357	1	−1,786	
		θ	—	—	—	0,595	—	**0,253**	0,444	1,675	3,115	1,475	—	$\theta_0^{(3)}=0,253$
	4	Δ	0,667	−0,578	×	1,222	×	×	0,178	1,422	1,022	1,222	1,489	
		(α, β)	α	β	—	α	β	—	α	α	α	α	α	
		δ*		4		4	1,5		2	1	1	1	−2	
		θ	—	—	—	0,306	—	—	**0,0889**	1,422	1,022	1,222	—	$\theta_0^{(4)}=0,0889$
	5	Δ	0,667	−0,933	×	0,867	−0,133	×	×	1,333	0,933	1,133	1,667	
		(α, β)	α	β	—	α	β	—	—	α	α	α	α	
		δ*	−1	0,2		2,6	−0,4			1	−0,2	0,4	−1	
		θ	—	—	—	**0,333**	0,333	—	—	1,333	—	2,833	—	$\theta_0^{(5)}=0,333$
	6	Δ	1	−1	×	×	×	×	×	1	1	1	2	
		(α, β)	α	β	—	—	β	—	α	α	α	α	α	
		δ	—	—			**−3,929**		−3,714	—	—	—	—	
		(α, β)′	α	β	—	—	—	—	α	α	α	α	α	
		δ′	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

Таблицы 7.7 (1—6′)

	№	δ	$Б_X$	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	A_k	$\tilde{A}_k$	γ	θ	Номер таблицы
	1	1	e_1	5	1				3	3	0	1,667	1
	2	1	e_2	5		1			2	2	0	2,5	
	3	1	e_3	5,5			1		1	1	0	5,5	
	4	1	e_4	5				1	3	3	0	1,667	
←	5	$A_k = A_6$		0	—	—	—	—	−1	−1	1	1	
	6	—	μ_1	20,5	1	1	1	1	9	9	—	—	
	1	1	e_1	2	1				1	1	0	2	1′
←	2	1	e_2	3		1			3	3	0	1	
	3	1	e_3	4,5			1		2	2	0	2,25	
	4	1	e_4	2				1	1	1	0	2	
	5	$A_k = A_2$		0	—	—	—	—	−1	−1	1	1	
	6	—	μ_1'	11,5	1	1	1	1	7	7	—	—	
	1	1	e_1	1	1	−0,333			1,667	1,667	0		1″
→	2		A_2	1		0,333			0,333	0,333	0		
	3	1	e_3	2,5		−0,667	1		2,333	2,333	0		
←	4	1	e_4	1		−0,333		1	2,667	2,667	0		
	5	$A_k = A_3$		0	—	—	—	—	−1	−1	1		
	6	—	μ_1''	4,5	1	−1,333	1	1	6,667	6,667	—		

Продолжение

	№	δ	$Б_X$	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	A_k	$\tilde{A}_k$	γ	θ	Номер таблицы
	1	1	e_1	0,375	1	—0,125		—0,625	0,375	—0,375	—	—	2
←	2		A_2	0,875		0,375		—0,125	0,875	—0,875	1	**0,143**	
	3	1	e_3	1,625		—0,375	1	—0,875	—2,375	2,375	0	0,168	
→	4		A_3	0,375		—0,125		0,375	0,375	—0,375	1	1,667	
	5	$A_k = A_5$		1	—	—	—	—	—1	1	0	1	
	6	—	μ_2	2	1	—0,5	1	—1,5	—2	2	—	—	
	1	1	e_1	0,429	1	—0,286		—0,571	0,714	—0,714	—	—	3
→ ←	2		A_5	0,857		0,429		—0,143	0,429	—0,429	1	**0,333**	
	3	1	e_3	1,286		0,643	1	—1,214	—1,357	1,357	0	0,947	
	4		A_3	0,429		—0,286		0,429	0,714	—0,714	1	0,8	
	5	$A_k = A_6$		1	—	—	—	—	—1	1	0	1	
	6	—	μ_3	1,714	1	0,357	1	—1,786	—0,643	0,643	—	—	
	1	1	e_1	0,667	1	—1		—0,333	—1,333	—1,333	—	—	4
→	2		A_6	0,667		1		—0,333	1,667	1,667	0	0,4	
←	3	1	e_3	0,833		2	1	—1,667	3,333	3,333	0	0,25	
	4		A_3	0,667		—1		0,667	—1,333	—1,333	1	0,25	
	5	$A_k = A_7$		0	—	—	—	—	—1	—1	1	1	
	6	—	μ_4	1,5	1	1	1	—2	2	2	—	—	

Продолжение

	№	σ	$БX$	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	A_k	$\tilde{A}_k$	γ	θ	Номер таблицы
	1	1	e_1	1	1	−0,2	0,4	−1	2,6	2,6	0	0,385	5
	2		A_6	0,25			−0,5	0,5	−0,5	−0,5	1	1,5	
→ ←	3		A_7	0,25		0,6	0,3	−0,5	0,7	0,7	0	0,357	
	4		A_3	1		−0,2	0,4		0,6	0,6	0	1,667	
	5	$A_k=A_4$		0	—	—	—	—	−1	−1	1	1	
	6	—	μ_5	1	1	−0,2	0,4	−1	2,6	2,6	←	—	
←	1	1	e_1	0,0714	1	−2,429	−0,714	0,857	−3,929	3,929	0	0,0182	6
	2		A_6	0,429		0,429	−0,286	0,143	1,429	−1,429	1	0,4	
→	3		A_4	0,357		0,857	0,429	−0,714	1,357	−1,357	1	0,474	
	4		A_3	0,786		−0,714	0,143	0,429	−1,214	1,214	0	0,647	
	5	$A_k=A_5$		1	—	—	—	—	−1	1	0	1	
	6	—	μ_6	0,0714	1	−2,429	−0,714	0,857	−3,929	3,929	—	—	
→	1		A_5	0,982	−0,255	0,618	0,182	−0,218					6′
	2		A_6	0,455	0,364	−0,455	−0,545	0,455					
	3		A_4	0,382	0,345	0,0182	0,182	−0,418					
	4		A_3	0,764	−0,309	0,0364	0,364	0,164					
	5				—	—	—	—					
	6	—	μ_6'	0	0	0	0	0			—	—	

В строке Δ субтаблицы 1 в нуль обращаются параметры Δ_2 и Δ_6. Следовательно, $E_Y = \{2,6\}$. Ход решения первой вспомогательной задачи зафиксирован в основных таблицах 1, 1' и 1'' (см. табл. 7.7) и в субтаблице 1 вспомогательной табл. 7.6. В строке (α, β) субтаблицы 1 в позициях, отвечающих векторам условий A_2 и A_6, записан символ α, поскольку в исходном плане вспомогательной задачи (C_Y) переменные x_2 и x_6 равны нулю — левой границе интервала, на котором они определены. Другие позиции строки (α, β) заполняются в зависимости от знака соответствующего значения Δ_j. Так, в позиции столбца A_5, где $\Delta_5 = -0{,}1$, указан символ β, в позиции столбца A_3, где $\Delta_3 = 0{,}4$, записан символ α.

Компоненты квазиплана X указаны в строке $(\alpha, \beta)''$ субтаблицы 1 и в столбце e_0 основной табл. 1''. Параметр θ_0 элементарного преобразования ядра Y в ядро Y' плана сопряженной задачи достигается при $j=3$.

Элементы строки Δ субтаблицы 2 вычисляются по рекуррентной формуле (5.3). Множество $E_{Y'}$ состоит из индексов $j=2$ и 3. Решение задачи (C_Y) принимается в качестве исходного плана задачи $(C_{Y'})$. Поэтому главная часть основной табл. 2 вычисляется по главной части основной табл. 1'' в соответствии с теми же рекуррентными формулами, по которым элементы e_{ij} табл. 1'' определяются по элементам табл. 1'.

Базисные компоненты оптимального плана задачи содержатся в столбце e_0 основной табл. 7. Значения внебазисных составляющих решения определяются из строки (α, β) субтаблицы 7 вспомогательной таблицы.

§ 6. Метод сокращения невязок и двухсторонние оценки

6.1. При решении задачи (A) методом сокращения невязок строится последовательность планов сопряженной задачи $(\tilde{A})$, монотонно сходящаяся к ее решению.

Значение линейной формы сопряженной задачи на планах последовательности, монотонно убывая, стремится к значению линейной формы $L(X^*)$ на оптимальном плане X^* исходной задачи (A). Поэтому после каждой итерации метода легко получить ограничение сверху для оптимальной величины линейной формы $L(X)$ исследуемой задачи (A).

Есть задачи, в которых по каждому квазиплану можно построить план задачи со значением линейной формы, не меньшим чем на квазиплане. В таких задачах удается после каждой итерации метода сокращения невязок получить план и оценить разность между значением линейной формы на этом плане и ее оптимальной величиной.

Отмеченным полезным свойством обладают, в частности, задачи, в которых легко определяется план при любом векторе ограничений $B \geqslant 0$, а коэффициенты линейной формы неотрицательны. В этом нетрудно убедиться с помощью следующих рассуждений. Если X' — квазиплан задачи, то $AX' \leqslant B$. По допущению о структуре матрицы условий A легко определить неотрицательный вектор X'', удовлетворяющий системе

$$AX'' = B - AX'.$$

В таком случае вектор $X = X' + X''$ является планом исходной задачи, причем в силу неотрицательности коэффициентов линейной формы задачи

$$L(X) \geqslant L(X').$$

Указанными свойствами обладают, например, задачи, матрицы условий которых содержат полную систему единичных векторов. Таким же свойством обладает и транспортная задача.

6.2. Рассмотрим модификацию метода сокращения невязок (ее целесообразно называть *методом двухсторонних оценок*), позволяющую в общем случае двигаться по планам исходной задачи.

С каждой итерацией метода двухсторонних оценок связывается некоторая оценка уклонения полученного плана от оптимального. Решение задачи считается законченным, когда оценка уклонения укладывается в заданные пределы. Методу двухсторонних оценок зачастую приходится отдавать предпочтение при решении практических задач, в которых может быть задано допустимое отклонение значения линейной формы от оптимального. Следует, однако, помнить, что для решения задачи линейного программирования по методу двухсторонних оценок необходимо, кроме начального плана Y сопряженной задачи $(\tilde{A})$, иметь также начальный опорный план X исходной задачи (A).

Наметим кратко общую схему метода двухсторонних оценок.

Будем отправляться от опорного плана $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задачи (A) и плана $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ сопряженной задачи $(\tilde{A})$. Пусть задача (A) записана в канонической форме:

Требуется обратить в максимум линейную форму

$$L(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{6.1}$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m, \tag{6.2}$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{6.3}$$

Пусть, далее, $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m$ произвольный заданный набор чисел. Умножая i-е условие системы (6.2) на y_i суммируя правые и левые части полученных равенств и вычитая из результата соотношение (6.1), получаем

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i - L(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}y_i - c_j)\, x_j.$$

Вводя обозначение

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i - c_j, \tag{6.4}$$

приходим к соотношению

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i - L(X). \tag{6.5}$$

Таким образом, задача максимизации $L(X)$ при условиях (6.2) и (6.3) может быть сформулирована так же, как задача минимизации $\sum_{j=1}^{n} \Delta_j x_j$ при тех же условиях и фиксированных y_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$.

Пусть теперь вектор $Y=(y_1,\ \ldots,\ y_m)$ — произвольный план задачи $(\tilde{A})$, сопряженной с задачей (6.1)—(6.3). Тогда

$$\Delta_j \geqslant 0, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{6.6}$$

Если X — план задачи (A), то значение линейной формы (6.5) может быть использовано для оценки уклонения плана X от оптимального. Действительно,

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leqslant L(X_{\text{опт}}) \leqslant \sum_{i=1}^{m} b_i y_i.$$

Поэтому процесс решения может быть закончен, когда значение разности

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{j=1}^{n} \Delta_j x_j$$

станет величиной, соизмеримой с погрешностью измерений исходных данных задачи.

Пусть, как и прежде, E_Y представляет собой совокупность индексов j, для которых $\Delta_j = 0$, где Δ_j вычисляются по формуле (6.4), исходя из плана Y сопряженной задачи. Обозначим через E_X множество индексов векторов базиса опорного плана X. Введем, кроме того, множество $E_{X,\,Y}$, содержащее все индексы j, принадлежащие E_X или E_Y ($E_{X,\,Y} = E_X \cup E_Y$).

Свяжем с парой планов X и Y вспомогательную задачу ($D_{X,\,Y}$), в которой требуется обратить в минимум линейную форму

$$\sum_{j \in E_{X,\,Y}} \Delta_j x_j \tag{6.7}$$

при условиях:

$$\sum_{j \in E_{X,\,Y}} A_j x_j = B, \tag{6.8}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j \in E_{X,\,Y}. \tag{6.9}$$

Решим задачу ($D_{X,\,Y}$) в соответствии с правилами второго алгоритма метода последовательного улучшения плана. В качестве исходного плана задачи ($D_{X,\,Y}$) естественно принять заданный опорный план X. Ясно, что каждый план задачи ($D_{X,\,Y}$) является также планом задачи (A). Компоненты плана X задачи (A), индексы которых не входят в $E_{X,\,Y}$, равны нулю.

Пусть вектор X^* является оптимальным планом задачи ($D_{X,\,Y}$). Соотношение (6.5) показывает, что значение линейной формы (6.7) на плане X^* естественно назвать *невязкой плана* X^* задачи (A),

$$\varepsilon^* = \sum_{j \in E_{X,\,Y}} \Delta_j x_j^*. \tag{6.10}$$

Признак оптимальности плана задачи (A) формулируется следующим образом:

План X^* *является решением задачи* (A), *если его невязка равна нулю.*

Введем, как и в методе сокращения невязок, параметры

$$\delta_j^* = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mu_i^*, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{6.11}$$

где $M^* = (\mu_1^*, \mu_2^*, \ldots, \mu_m^*)$ — решение задачи ($\tilde{D}_{X,\,Y}$), сопряженной с вспомогательной задачей ($D_{X,\,Y}$). Решение задачи

$(D_{X,\,Y})$ и сопряженной с ней задачи $(\tilde{D}_{X,\,Y})$ определяют новый опорный план $X' = X^*$ задачи (A) и план Y' задачи $(\tilde{A})$. Невязка плана X' меньше невязки исходного плана X.

Переход от плана Y к плану Y' задачи $(\tilde{A})$ производится с помощью элементарного преобразования

$$Y' = Y - \theta_0 M^*. \tag{6.12}$$

Параметр θ_0 элементарного преобразования вычисляется по формуле

$$\theta_0 = \min_{\delta_j^* > 0} \frac{\Delta_j}{\delta_j^*}. \tag{6.13}$$

Величины Δ_j' очередной итерации связаны с параметрами Δ_j предшествующего шага рекуррентными соотношениями

$$\Delta_j' = \Delta_j - \theta_0 \delta_j^*. \tag{6.14}$$

Опорный план $X' = X^*$ задачи (A) и план Y' задачи $(\tilde{A})$ определяют новую вспомогательную задачу $(D_{X',\,Y'})$. При этом в качестве исходного плана задачи $(D_{X',\,Y'})$ естественно принять оптимальный план X^* задачи $(D_{X,\,Y})$.

Описанный процесс продолжается до получения плана с нулевой невязкой. Задача (A) всегда разрешима, поскольку, по условию, процесс решения задачи начинается с заданного опорного плана X задачи (A) и плана Y задачи $(\tilde{A})$.

6.3. Алгоритм метода двухсторонних оценок несколько отличается от вычислительной схемы метода сокращения невязок.

В методе сокращения невязок относительные оценки δ_j векторов условий A_j вспомогательной задачи вычислялись по формуле

$$\delta_j^{(l)} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \mu_j^*, \quad j \in E_Y$$

(коэффициенты линейной формы задачи (C_Y) при переменных x_j равны нулю).

Коэффициенты линейной формы задачи $(D_{X,\,Y})$ равны Δ_j. Поэтому в методе двухсторонних оценок

$$\delta_j^{(l)} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \mu_i^* - \Delta_j; \quad j \in E_{X,\,Y}. \tag{6.15}$$

Здесь l — номер последней итерации решения вспомогательной задачи.

В методе сокращения невязок

$$\delta_j^* = \delta_j^{(l)}, \quad j \in E_Y,$$

а в методе двухсторонних оценок

$$\delta_j^* = \delta_j^{(l)} + \Delta_j, \quad j \in E_{X,\,Y}. \tag{6.16}$$

При $j \in E_Y$ оценка $\Delta_j = 0$ и $\delta_j^* = \delta_j^{(l)}$. При $j \in E_{X^*}$ величина $\delta_j^{(l)} = 0$ (признак оптимальности плана X задачи $(D_{X,\,Y})$, вычисляемого по методу улучшения плана). Учитывая (6.16), получаем

$$\delta_j^* = \Delta_j \quad \text{при} \quad j \in E_{X^*},$$

и, следовательно (см. 6.14),

$$\Delta_j' = \Delta_j (1 - \theta_0), \quad \text{если} \quad j \in E_{X^*}. \tag{6.17}$$

В качестве исходного плана задачи $(D_{X',\,Y'})$ принимается оптимальный план задачи $(D_{X,\,Y})$. Поэтому $E_{X'} = E_{X^*}$ и соотношение (6.17) имеет место для всех $j \in E_{X'}$.

Среди величин Δ_j для $j \in E_{X,\,Y}$ имеются положительные (в противном случае невязка $\varepsilon^* = 0$). Пусть, например, $\Delta_{j_0} > 0$. Учитывая, далее, что все $\Delta_j' \geqslant 0$, имеем

$$(1 - \theta_0) = \frac{\Delta_{j_0}'}{\Delta_{j_0}} \geqslant 0.$$

Ясно, что оптимальный план вспомогательной задачи не изменится, если все коэффициенты ее линейной формы умножить на одно и то же положительное число. Формула (6.17) и соотношение $E_{X'} = F_{X^*}$ позволяют поэтому заменить решение задачи $(D_{X',\,Y'})$ на решение приведенной вспомогательной задачи с линейной формой

$$\sum_{j \in E_{X',\,Y'}} \Delta_j x_j$$

и ограничениями задачи $E_{X',\,Y'}$.

Таким образом, если A_j является вектором условий двух соседних приведенных вспомогательных задач, то коэффициенты линейных форм обеих задач, отвечающие вектору A_j, совпадают. Отмеченное обстоятельство исключает необходимость в ряде вспомогательных операций на каждом шаге метода двухсторонних оценок. Это и обусловило переход от вспомогательной задачи к приведенной.

Значение линейной формы вспомогательной задачи на каждом опорном плане $X^{(l)}$ будет отличаться от значения линейной формы соответствующей приведенной задачи на том же плане множителем

$$\nu_l = (1-\theta_0^{(1)})(1-\theta_0^{(2)})\ldots(1-\theta_0^{(l-1)}),$$

где l — номер итерации метода двухсторонних оценок. Поэтому невязка плана $X^{(l)}$ равна

$$\varepsilon_l^* = \nu_l \mu_0^{*(l)}, \tag{6.18}$$

где $\mu_0^{*(l)}$ — значение линейной формы приведенной вспомогательной задачи на плане $X^{(l)}$. Значение ε_l^* целесообразно записывать в левом нижнем углу основной таблицы, содержащей решение l-й приведенной вспомогательной задачи.

Сделанных замечаний достаточно, чтобы построить вычислительную схему метода двухсторонних оценок на базе алгоритма метода сокращения невязок. Предлагаем это сделать читателю (упражнение 11).

Покажем, что до тех пор, пока мы не придем к решению задачи (A), параметр θ_0 элементарного преобразования заключен внутри интервала (0, 1). Другими словами,

$$0 < \theta_0^{(l)} < 1, \tag{6.19}$$

если невязка плана $X^{(l)}$ положительна.

Неравенство $\theta_0^{(l)} < 1$ при $\varepsilon_l^* > 0$ следует из (6.18). С другой стороны, если среди параметров δ_j^* имеются положительные числа, то

$$\theta_0 = \min_{\delta_j^* > 0} \frac{\Delta_j}{\delta_j^*} > 0.$$

Чтобы установить справедливость левой части неравенства (6.19), достаточно, таким образом, показать, что среди параметров δ_j^* имеются положительные числа.

Предположение о том, что $\delta_j^* \leqslant 0$ для всех j, свидетельствует о неразрешимости задачи (A). Действительно, при

$\delta_j^* \leqslant 0$ для всех j вектор $Y(\theta)=Y-\theta M^*$ является планом задачи (A) при любом $\theta>0$ (см. (6.14)). Значение линейной формы задачи $(\tilde{A})$ на плане $Y(\theta)$ равно

$$\tilde{L}(Y(\theta))=\tilde{L}(Y-\theta M^*)=\tilde{L}(Y)-\theta\sum_{i=1}^{m} b_i\mu_i^* =$$
$$=\tilde{L}(Y)-\theta\cdot\sum_{j\in E_{X,Y}}\Delta_j x_j^*=\tilde{L}(Y)-\theta\varepsilon^*.$$

При $\varepsilon^*>0$ увеличение θ приводит к неограниченному убыванию $\tilde{L}(Y')$. Согласно лемме 1.3 гл. 3 отсюда следует, что задача (A) не имеет планов. Полученный вывод противоречит условию, согласно которому процесс решения задачи методом двухсторонних оценок начинается с заданного опорного плана задачи (A). Таким образом, среди δ_j^* имеются положительные величины. Неравенство (6.19) доказано.

6.4. Докажем, что метод двухсторонних оценок приводит к решению задачи линейного программирования за конечное число шагов. Доказательство построено по следующей схеме. Вначале будет показано, что каждый шаг метода двухсторонних оценок приводит либо к новому опорному плану задачи (A), либо к уменьшению числа векторов условий с положительными Δ_j в очередной вспомогательной задаче. Число опорных планов, как и число векторов условий с положительными Δ_j, конечно. Поэтому метод, не позволяющий вернуться к уже пройденному опорному плану или сокращающий от шага к шагу число векторов с положительными Δ_j, является конечным методом.

При переходе от одной итерации метода двухсторонних оценок к следующей могут встретиться два случая: параметр θ_0 элементарного преобразования может быть достигнут на индексе $j\notin E_{X,Y}$ или на индексе $j\in E_{X,Y}$. Рассмотрим обе эти возможности.

1. Параметр θ_0 достигается при $j\notin E_{X,Y}$. В этом случае

$$\Delta_j'=0 \quad (j\in E_{Y'}),$$

тогда как $\Delta_j>0$. Кроме того, как мы видели, $\theta_0>0$, если X^* не является решением задачи (A). Из соотношения (6.14) следует, что при этих условиях $\delta_l^*>0$. В задаче $(D_{X',Y'})$

параметр δ_j^* является оценкой вектора условий A_j. Следовательно, среди векторов условий задачи $(D_{X', Y'})$ имеются векторы с положительными оценками относительно базиса плана X'. В невырожденном случае (невырожденность задачи $(D_{X', Y'})$ следует из невырожденности задачи (A)) на первом шаге рассматриваемой итерации будет получен план задачи (A) с меньшим значением невязки ε^*. В процессе решения вспомогательной задачи $(D_{X', Y'})$ план Y' не меняется. Поэтому уменьшение значения линейной формы вспомогательной задачи определяется увеличением линейной формы исходной задачи.

Итак, при $j \notin E_{X, Y}$ переход от одной итерации метода двухсторонних оценок к следующей связан с движением по разным опорным планам задачи. Если использовать правила, гарантирующие от зацикливания, то приведенный вывод переносится и на вырожденный случай.

2. Параметр θ_0 достигается при $j \in E_{X, Y}$. Докажем, что в этом случае при переходе к следующей итерации метода двухсторонних оценок сокращается число векторов базиса вспомогательной задачи с положительными значениями Δ_j. Приведенное утверждение очевидно, если в процессе решения задачи $(D_{X, Y})$ число векторов базиса с положительными Δ_j уменьшается. В этом случае

$$E_X \supset E_{X^*} = E_{X'}.$$

Пусть теперь E_X и $E_{X^*} = E_{X'}$ содержат одно и то же число индексов векторов условий с $\Delta_j > 0$. Индекс j, на котором достигается θ_0, принадлежит, по условию, множеству $E_{X, Y}$. В соответствии с (6.19)

$$\theta_0 = \frac{\Delta_j}{\delta_j^*} > 0.$$

Отсюда $\Delta_j > 0$. Другими словами, $j \in E_X = E_{X'}$.

Таким образом, с одной стороны, $\Delta_j' = \theta$ (θ_0 достигается на индексе j). С другой стороны, $j \in E_{X'} = E_{X^*}$. В силу равенства (6.17) и правой части неравенства (6.19) полученные соотношения совместны только при нулевой невязке плана $X^* = X'$ (здесь X' рассматривается как решение задачи $(D_{X', Y'})$).

Итак, если решение задачи еще не получено, то параметр θ_0 элементарного преобразования может быть достигнут на индексе $j \in E_{X, Y}$ только в том случае, когда

$$E_X \supset E_{X^*} = E_{X'}.$$

Конечность метода двухсторонних оценок доказана.

6.5. Проиллюстрируем применение метода двухсторонних оценок на следующем примере.

Пример 1. Требуется обратить в максимум линейную форму

$$L(X) = 13x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 6x_4 + 17x_5 + 14x_6 + 15x_7 + \\ + 14{,}5x_8 + 29x_9 + 14x_{10}$$

при условиях:

$$1{,}5x_1 + x_2 + 17x_3 + 12x_4 + 18x_5 + 7{,}5x_6 + 5x_7 + 4x_8 + 6{,}5x_9 + 2{,}5x_{10} = 7,$$
$$9x_1 + 13x_2 + 16x_3 + 5x_4 + 4x_5 + 4x_6 + 6x_7 + 7x_8 + 15x_9 + 8x_{10} = 14{,}5,$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 10$$

Решение. Процесс решения задачи записан в основных таблицах 7.9 и вспомогательной табл. 7.8.

Примем в качестве исходного опорного плана задачи план с базисными компонентами $x_2 = 0{,}656$; $x_3 = 0{,}373$, а в качестве плана сопряженной задачи вектор $Y = (2{,}095;\ 1{,}095)$. В строке Δ первой субтаблицы вспомогательной таблицы в нуль обращаются Δ_1 и Δ_{10}. Поэтому $E_Y = \{1;\ 10\}$. Базис исходного опорного плана состоит из векторов A_2 и A_3. Следовательно, $E_X = \{2, 3\}$ и $E_{X,Y} = \{1, 2, 3, 10\}$.

Линейная форма первой вспомогательной задачи равна

$$\Delta_2 x_2 + \Delta_3 x_3 = 6{,}333x_2 + 44{,}14x_3,$$

а векторами условий задачи $(D_{X,Y})$ являются векторы A_1, A_2, A_3 и A_{10}. Решение задачи по методу улучшения плана записано в основных таблицах 1 и 1′ (см. табл. 7.9) и субтаблице 1 вспомогательной табл. 7.8.

Параметр θ_0 элементарного преобразования — минимальный элемент строки θ субтаблицы 1 — равен 0,157. Элементарное преобразование плана Y сопряженной задачи в план Y' приводит к $E_{Y'} = \{9, 10\}$. Базис решения задачи $(D_{X,Y})$ состоит из векторов A_3 и A_{10}. Эти же векторы образуют базис исходного плана X' задачи $(D_{X', Y'})$. Следовательно, $E_{X'} = \{3, 10\}$ и $E_{X', Y'} = \{3, 9, 10\}$. Невязка плана X' равна 9,081.

В соответствии с замечаниями п. 6.3 вместо задачи $(D_{X', Y'})$ целесообразно решать приведенную вспомогательную задачу с векторами условий, принадлежащими $E_{X', Y'}$, и линейной формой

$$\sum_{j \in E_{X', Y'}} \tilde{\Delta}'_j x_j = \sum_{j \in E_{X', Y'}} \frac{\Delta'_j}{1 - \theta_0} x_j.$$

Таблица 7.8

№		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	Y
	B											
1	7	1,5	1	17	12	18	7,5	5	4	6,5	2,5	2,095
2	14,5	9	13	16	5	4	4	6	7	15	8	1,095
3	C	13	10	9	6	17	14	15	14,5	29	14	
1	Δ	×	6,333	44,14	24,62	25,10	6,095	2,048	1,548	1,048	×	
	δ	6,246			—	—	—	—	—	—	**8,241**	
	δ'	−4,828	—		—	—	—	—	—	—		
	δ^*	−4,828	−11,27	44,14	38,40	61,62	22,99	11,50	6,667	6,667		
	θ	—	—	—	0,641	0,407	0,265	0,178	0,232	**0,157**	—	$\theta_0^{(1)}=0,157$
2	$\tilde{\Delta}'$	0,900	2,100	44,14	22,05	18,29	2,946	0,286	0,593	×	×	
	δ	—	—		—	—	—	—	—		−4,239	
	δ^*	−10,524	−20,32	44,14	43,12	71,33	25,29	10,524	4,239		−4,239	
	θ	—	—	—	0,511	0,256	0,116	**0,0272**	0,140	—	—	$\theta_0^{(2)}=0,0272$
3	$\tilde{\Delta}''$	1,220	2,727	44,14	21,46	16,80	2,321	×	0,491	×	0,119	

Таблица 7.9 (1—3)

	№	σ	$Б_x$	e_0	e_1	e_2	A_k	θ	Номер таблицы
$\longleftarrow$	1	6,333	A_2	0,656	−0,0780	0,0829	0,468	**1,401**	1
	2	44,14	A_3	0,373	0,0634	−0,0049	0,120	3,122	
	3	μ_1	20,63	20,63	2,305	0,310	8,241	—	
$\rightleftarrows$	1		A_{10}	1,401	−0,167	0,177	1,573	**0,891**	1′
	2	44,14	A_3	0,206	0,0833	−0,0260	0,151	1,362	
	3	μ_1'	9,081	9,081	3,679	−1,150	6,667	—	
$\longrightarrow$	1		A_9	0,891	−0,106	0,113	0,146	6,114	2
$\longleftarrow$	2	44,14	A_3	0,0712	0,0993	−0,0430	0,238	**2,986**	
	3	μ_2	2,650	3,143	4,385	−1,900	10,52	—	
	1		A_9	0,847	−0,167	0,139			3
$\longrightarrow$	2		A_7	0,299	0,417	−0,181			
	3	μ_3	0	0	0	0		—	

Это освобождает от необходимости вводить какие-либо изменения в табл. 1′ перед началом решения следующей вспомогательной задачи.

Поэтому первая строка субтаблицы 1 заполняется значениями

$$\tilde{\Delta}'_j=\frac{\Delta'_j}{1-\theta_0}=\frac{\Delta_j-\theta_0\delta^*_j}{1-\theta_0},$$

причем, как мы видели, $\tilde{\Delta}'_j=\Delta_j=\delta^*_j$, если $j\in E_{X'}$.

Решение приведенной вспомогательной задачи по методу улучшения плана записано в основных таблицах 1′ и 2 (см. табл. 7.9) и субтаблице 2 вспомогательной табл. 7.8. Базисные компоненты решения приведенной вспомогательной задачи содержатся в таблице e_0 основной табл. 2. В $(m+1)$-й (третьей) позиции столбца e_0 записывается значение линейной формы приведенной вспомогательной задачи на ее оптимальном плане. Чтобы получить значение линейной формы задачи ($D_{X',Y'}$) на этом плане (невязку соответствующего плана исходной задачи), следует умножить $e_{m+1,0}$ на $(1-\theta_0)$. Полученное значение невязки ε^* записывается в $(m+1)$-й позиции столбца $Б_X$ (слева от $e_{m+1,0}$).

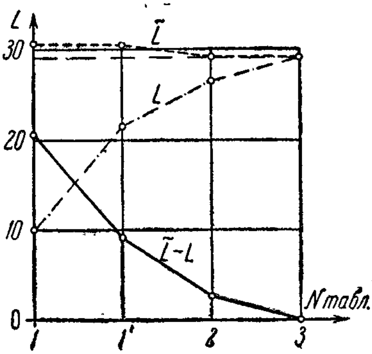


Рис. 7.6.

Решение приведенной вспомогательной задачи является опорным планом исходной задачи. Его базисные компоненты

$$x''_3=0{,}0712,\quad x''_9=0{,}891.$$

Следовательно, $E_{X''}=\{3,\ 9\}$. Элементарное преобразование с параметром $\theta'_0=0{,}0272$ приводит к плану Y'' сопряженной задачи. Элементы верхней строки $\tilde{\Delta}''$ субтаблицы, отвечающей очередной итерации метода двухсторонних оценок, вычисляются через параметры предыдущей итерации по формуле

$$\tilde{\Delta}''_j=\frac{\tilde{\Delta}'_j-\theta'_0\delta^{*\prime}_j}{1-\theta'_0}.$$

Параметр $\tilde{\Delta}''_j=0$ при $j=7$ и 9. Следовательно, $E_{Y''}=\{7,\ 9\}$ и $E_{X'',Y''}=\{3,\ 7,\ 9\}$. На оптимальном плане приведенной вспомогательной задачи с векторами условий A_3, A_7, A_9 значение ее линейной формы равно

$$\tilde{\Delta}''_3x^*_3+\tilde{\Delta}''_7x^*_7+\tilde{\Delta}''_9x^*_9=44,\ 14\cdot0+0\cdot0{,}847+0\cdot0{,}299=0.$$

Таким образом, опорный план X'' исходной задачи с базисными составляющими $x_7''=0{,}847$; $x_9''=0{,}299$ имеет нулевую невязку. Следовательно, этот план является решением задачи.

На рис. 7.6. приведен график изменения невязки плана от шага к шагу метода двухсторонних оценок. На этом же рисунке нанесены графики изменения значений линейных форм прямой и сопряженной задач на соответствующих планах. Последовательное построение таких графиков в процессе решения задачи позволяет прекратить вычисления, как только величина невязки станет соизмеримой с погрешностью измерения исходных данных.

Пример 2. Определить максимум линейной формы

$$L=3x_1-x_2+8x_3+2x_4-x_5+9x_6$$

при условиях:

$$\begin{aligned}
-6x_1+9x_2+3x_3-2x_5-x_6&\leqslant 12,\\
-4x_2+3x_3-3x_4+x_5-x_6&\leqslant 5,\\
2x_1+8x_2-5x_3+6x_4-8x_5+4x_6&\leqslant 20,\\
-x_1-3x_2-4x_3-8x_4+4x_6&\leqslant 10,\\
5x_1+x_2+2x_3+4x_4+9x_5+5x_6&\leqslant 24,\\
x_j\geqslant 0,\qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ 6.&
\end{aligned}$$

Решение. Эта задача была рассмотрена ранее при иллюстрации других методов линейного программирования. В основных таблицах 7.11 и вспомогательной табл. 7.10 записан ход ее решения по методу двухсторонних оценок. В качестве базиса исходного опорного плана принята система дополнительных единичных векторов. Исходный план сопряженной задачи задан вектором $Y=(0,\ 0,\ 0,\ 5,\ 14)$.

На рис. 7.7 изображены графики изменения $L(X)$, $\tilde{L}(Y)$ и невязки плана от шага к шагу метода двухсторонних оценок.

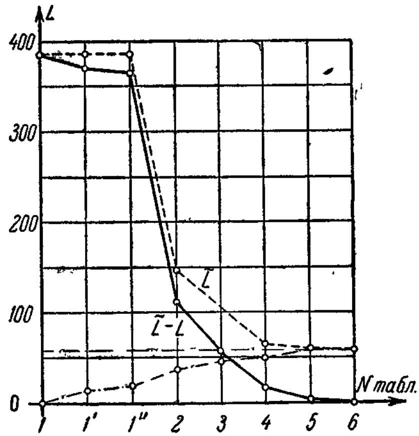


Рис. 7.7.

6.6. В заключение главы подчеркнем достоинства метода последовательного сокращения невязок, выгодно отличающие его от других методов линейного программирования.

Процесс вычисления оптимального плана методом сокращения невязок не требует предварительного определения опорного плана прямой или сопряженной задачи. Для начала

Таблица 7.10

№	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	Y
1	12	—6	9	3		—2	—1	1					
2	5		—4	3	—3	1	—1		1				
3	20	2	8	—5	6	—8	4			1			
4	10	—1	—3	—4	—8		4				1		5
5	24	5	1	2	4	9	5					1	14
6	C	3	—1	8	2	—1	9						
1	Δ	62	×	×	14	127	81	×	×	×	5	14	
	δ	—	—1	**8**	—	—	—						
	δ'	—	**9,667**		—	—	—		—2,667				
	δ''	—			—	—	—	—0,744	—1,923				
	δ^*	69,46			21,77	125,56	92,67	—0,744	—1,923		5	14	
	θ	0,893	—	—	**0,643**	1,011	0,874	—	—	—	1	1	$\theta_0^{(1)}=0,643$

Продолжение

№	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	Y
2	$\tilde{\Delta}$	48,55	×	×	×	129,59	59,98	1,340	3,465	×	5	14	
	δ	—	−94,33			—	—	—	—				
	δ^*	113	−94,33			147,33	92,67	−8	5,333		5	14	
	θ	**0,430**	—	—	—	0,880	0,647	—	0,650	—	1	1	$\theta_0^{(2)}=0,430$
3	$\tilde{\Delta}$	×	71,07	×	×	116,22	35,35	8,377	2,058	×	5	14	
	δ		—			—	—	—	—			—	
	δ^*		54,12			52,06	55	5,294	−3,529		5	7,353	
	θ	—	1,313	—	—	2,232	**0,643**	1,582	—	—	1	1,904	$\theta_0^{(3)}=0,643$
4	$\tilde{\Delta}$	×	101,57	×	×	231,62	×	13,92	12,11	×	5	25,96	
	δ	−165	—			—		—	—			—	
	δ^*	−165	270,88			−87,06		24,71	−16,47		5	−2,353	
	θ	—	**0,375**	—	—	—	—	0,563	—	—	1	—	$\theta_0^{(4)}=0,375$
5	$\tilde{\Delta}$	98,98	×	×	×	422,79	×	7,452	29,25	×	5	42,94	
	δ	—			−62,51	—		—	—			—	
	δ^*	−39,98			−62,51	−24,55		3,869	4,367		5	−2,353	
	θ	—	—	—	—	—	—	1,93	6,698	—	**1**	—	$\theta_0^{(5)}=1$
6	$\tilde{\Delta}$												

Таблицы 7.11 (1—6)

	№	σ	$Б$	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	A_k	θ	Номер таблицы
	1		A_7	12	1					3	4	1
←	2		A_8	5		1				3	**1,667**	
	3		A_9	20			1			—5	—	
	4	5	A_{10}	10				1		—4	—	
	5	14	A_{11}	24					1	2	12	
	6	μ_1	386	386				5	14	8	—	
←	1		A_7	7	1	—1				13	**0,538**	1′
→	2		A_3	1,667		0,333				—1,333	—	
	3		A_9	28,33		1,667	1			1,333	21,25	
	4	5	A_{10}	16,67		1,333		1		—8,333	—	
	5	14	A_{11}	20,67		—0,667			1	3,667	5,636	
	6	μ_1'	372,67	372,67		—2,667		5	14	9,667	—	

Продолжение

	№	σ	*Б*	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	A_k	θ	Номер таблицы
$\rightleftarrows$	1		A_2	0,538	0,0769	—0,0769				0,231	**2,333**	1″
	2		A_3	2,385	0,1026	0,231				—0,692	—	
	3		A_9	27,62	—0,1026	1,769	1			0,692	3,444	
	4	5	A_{10}	21,15	0,641	0,692		1		10,08	—	
	5	14	A_{11}	18,69	—0,282	—0,385			1	5,154	3,627	
	6	μ_1''	367,46	367,46	—0,744	—1,923		5	14	21,77	—	
$\rightarrow$	1		A_4	2,333	0,333	—0,333				—2	—	2
	2		A_3	4	0,333					—2	—	
	3		A_9	26	—0,333	2	1			4	6,5	
	4	5	A_{10}	44,67	4	—2,667		1		—25	—	
$\leftarrow$	5	14	A_{11}	6,667	—2	1,333			1	17	**0,392**	
	6	μ_2	113,02	316,67	—8	5,333		5	14	113	—	

Продолжение

	№	σ	Б	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	A_k	θ	Номер таблицы
	1		A_4	3,118	0,0980	−0,176			0,118	0,667	4,676	3
	2		A_3	4,784	0,0980	0,157			0,118	0,333	14,35	
	3		A_9	24,43	0,137	1,686	1		−0,235	1	24,43	
	4	5	A_{10}	54,47	1,059	−0,706		1	1,471	11	4,952	
→ ←	5		A_1	0,392	−0,118	0,0784			0,0588	0,333	**1,176**	
	6	μ_3	55,43	272,35	5,294	−3,529		5	7,353	55	—	
←	1		A_4	2,333	0,333	−0,333				4,333	**0,538**	4
	2		A_3	4,392	0,216	0,0784			0,0588	1,686	2,605	
	3		A_9	23,25	0,686	1,451	1		−0,412	6,196	3,753	
	4	5	A_{10}	41,53	4,941	−3,294		1	−0,471	54,18	0,767	
→	5		A_6	1,176	−0,353	0,235			0,176	−3,941	—	
	6	μ_4	15,10	207,65	24,71	−16,47		5	−2,353	270,88	—	

Продолжение

	№	σ	$Б$	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	A_k	ϑ	Номер таблицы
$\longrightarrow$	1		A_2	0,538	0,0769	—0,0769					—	5
	2		A_3	3,484	0,0860	0,208			0,0588		—	
	3		A_9	19,92	0,0136	1,928	1		—0,412		—	
$\longleftarrow$	4	5	A_{10}	12,36	0,774	0,873		1	—0,471	1	**12,36**	
	5		A_6	3,299	—0,0498	—0,0679			0,176		—	
	6	μ_5	2,809	61,79	3,869	4,367		5	—2,353		—	
	1		A_2	0,538	0,0769	—0,0769						6
	2		A_3	3,484	0,0860	0,208			0,0588			
	3		A_9	19,92	0,0136	1,928	1		—0,412			
$\longrightarrow$	4		A_{10}	12,36	0,774	0,873		1	—0,471			
	5		A_6	3,299	—0,0498	—0,0679			0,176			
	6	μ_6	0	0	0	0	0	0	0		—	

процесса достаточно знать лишь произвольный план сопряженной задачи, а решение задачи с двухсторонними ограничениями можно начинать с произвольного m-мерного вектора Y.

При наличии опорного плана исходной задачи и произвольного плана сопряженной задачи модификация метода сокращения невязок (метод двухсторонних оценок) позволяет в ряде случаев получить приближенное решение задачи с ошибкой, не превышающей допустимую, при существенно меньшем числе операций, чем это требуется для получения точных значений составляющих оптимального плана.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 7

1. Пользуясь методом сокращения невязок, обратить в максимум линейную форму

$$L = 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5$$

при условиях

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 \qquad\quad - x_5 &= 1, \\ -2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 &= 5, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 + x_5 &= 10, \\ x_j \geqslant 0, \quad j = 1,\ 2,\ 3,\ 4. \end{aligned}$$

2. Решить задачу упражнения 1 при дополнительном ограничении $x_j \leqslant 2$, $j = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$.

3. Решить задачу упражнения 1 методом двухсторонних оценок, отправляясь от опорного плана $X = (0,\ 0,\ 41/29,\ 31/29,\ 53/29)$ и плана двойственной задачи $Y = (0,\ 0,\ 1)$.

4. Отправляясь от плана $Y = (0,\ 0,\ 1)$ сопряженной задачи, установить, при каких значениях параметра a в задаче максимизации линейной формы

$$L = \sum_{j=1}^{4} x_j.$$

при условиях:

$$\begin{aligned} -x_1 + ax_2 + \frac{7}{5}x_3 + ax_4 &= 3, \\ -x_1 + \frac{7}{5}x_2 + ax_3 + \frac{7}{5}x_4 &= 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 5, \\ x_j \geqslant 0, \quad j = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \end{aligned}$$

имеют место случаи 1°, 2° и 3° метода сокращения невязок.

5. Показать, что сходимость метода сокращения невязок не нарушится, если не включать в последующие базисы искусственные единичные векторы, выведенные из базиса.

6. Пусть вектор $M^* = (\mu_1^*, \ldots, \mu_m^*)$ определяется условиями (4.16). Показать, что M^* является ядром решения задачи, сопряженной с задачей (4.8), (4.11), (4.12).

7. Показать, что формула (4.5) имеет место для задачи минимизации линейной формы (4.1) при условиях (4.2), (4.3), если величины γ_j определять по формуле

$$\gamma_j = \begin{cases} \alpha_j & \text{при} \quad \Delta_j < 0, \\ \beta_j & \text{при} \quad \Delta_j > 0. \end{cases}$$

8. Построить блок-схему алгоритма метода сокращения невязок для задач с двухсторонними ограничениями.

9. Свяжем с задачей линейного программирования задачу (M) (см. п. 5.3). Пусть $\tilde{X}^* = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ — решение задачи (M). Если индекс $j=0$ принадлежит множеству $E_{Y^{(s)}}$, где $Y^{(s)}$ — план сопряженной задачи, отвечающий последней итерации метода сокращения невязок, то $X^* = (x_1, \ldots, x_n)$ является решением исходной задачи. Если индекс $j=0$ не принадлежит $E_{Y^{(s)}}$, исходная задача неразрешима. Доказать.

10. Доказать, что если процесс решения задачи (M) завершился случаем 2° (задача (M) неразрешима), то условия исходной задачи несовместны.

11. Пользуясь указаниями п. 6.3 и примерами, описанными в п. 6.5, составить вычислительную схему и блок-схему метода двухсторонних оценок.

12. Привести геометрическое истолкование метода двухсторонних оценок в $(m+1)$-мерном пространстве.

ГЛАВА 8

КОНЕЧНЫЕ МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Все методы линейного программирования можно разбить на два класса. Методы первого класса (мы их называем *конечными методами*) обеспечивают решение задачи за конечное число шагов. Методы второго класса (*итеративные методы*) связаны с бесконечным числом итераций и позволяют получить, вообще говоря, лишь приближенное решение задачи. При этом качество приближения существенно зависит от числа проведенных итераций. Большая часть итеративных методов представляет собой численные методы решения прямоугольных игр, сформулированные в терминах линейного программирования.

В главах 4—7 подробно изучены качественные и вычислительные аспекты трех наиболее отработанных методов, основанных на существенно различающихся принципах. Это—метод улучшения плана, метод уточнения оценок и метод сокращения невязок. В настоящей главе рассматриваются вопросы, которые было нецелесообразно повторять при изложении каждого метода, поскольку они представляют интерес для всех конечных методов.

До сих пор изложение методов и соответствующих алгоритмов проводилось главным образом применительно к задаче линейного программирования, записанной в канонической форме. Единая форма записи задачи упрощает анализ методов и описание вычислительных схем. Это отнюдь не означает, что каждую практическую задачу следует вначале сводить к канонической форме. Часто сохранение естественной формы записи задачи позволяет существенно уменьшить трудоемкость ее решения. В качестве примера сошлемся на задачи с двухсторонними ограничениями, которые исследовались в предыдущих главах. В § 1 метод улучшения плана распространяется на задачи линейного программирования в произвольной форме записи. Следуя приведенным рекомендациям, читатель сумеет переписать и другие конечные методы и соответствующие алгоритмы для произвольной формы записи задачи.

В § 2 рассматриваются пути совершенствования метода улучшения плана и метода уточнения оценок, упрощающие вычислительную схему методов. Указанная здесь модификация методов обеспечивает более целесообразное использование самого узкого места современных вычислительных машин — их оперативной памяти.

Заключительный параграф (§ 3) посвящен классификации конечных методов. Здесь рассматриваются различные признаки, указывающие единый подход ко всем конечным методам линейного программирования.

§ 1. Конечные методы и задачи линейного программирования в произвольной форме записи

1.1. В этом параграфе мы займемся исследованием общей задачи линейного программирования, заданной в произвольной форме записи. В числе ограничений подобной задачи имеются как равенства, так и неравенства; условия неотрицательности налагаются лишь на часть переменных задачи. Любой из конечных методов линейного программирования может быть расписан для задач в произвольной форме записи. При этом следует опираться на общую схему метода, изложенную для канонической формы задачи, и руководствоваться геометрической сущностью метода. Мы остановимся здесь только на одном методе — методе последовательного улучшения плана.

Рассмотрим задачу линейного программирования, состоящую в максимизации линейной формы

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{cases} = b_i, & i = 1, 2, \ldots, p; & (1.2) \\ \leqslant b_i, & i = p+1, p+2, \ldots, m; & (1.3) \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = q+1, \quad q+2, \ldots, n. \tag{1.4}$$

Естественно предполагать уравнения (1.2) линейно независимыми, так как в противном случае часть из них можно было бы отбросить. Будем, кроме того, считать линейно независимой систему векторов

$$A_j=(a_{1j},\ a_{2j},\ \ldots,a_{mj})^T,\qquad j=1,\ 2,\ \ldots,q.$$

Это условие также не сужает общности дальнейших рассуждений: ему всегда можно удовлетворить за счет уменьшения числа переменных задачи, не подчиняющихся ограничению (1.4) (см. п. 4.1 гл. 2). Последнее предположение обеспечивает наличие опорных планов у рассматриваемой задачи (1.1)—(1.4).

Понятие опорного плана, сформулированное в п. 4.2 гл. 2, может быть уточнено применительно к задаче (1.1)—(1.4) следующим образом.

План $X=(x_1,\ x_2,\ \ldots,x_n)$ задачи (1.1)—(1.4) называется *опорным,* если существует неособенная квадратная подматрица

$$A_X=\begin{Vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \ldots & a_{i_1j_s}\\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \ldots & a_{i_2j_s}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{i_sj_1} & a_{i_sj_2} & \ldots & a_{i_sj_s}\end{Vmatrix}$$

матрицы условий $A=\|a_{ij}\|_{m,\,n}$, такая, что:

а) $i_\alpha=\alpha$ для $\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ p$; $j_\beta=\beta$ для $\beta=1,2,\ldots,q$;

б) если $q<j$ и $x_j>0$, то $j=j_\beta$ для некоторого $\beta\geqslant q+1$;

в) $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i_\alpha j}\,x_j=b_{i_\alpha}$ для $\alpha=1,\ 2,\ \ldots,s$.

Таким образом, строки матрицы A_X образованы условиями (1.2) и некоторыми из условий (1.3), причем все такие условия-неравенства удовлетворяются планом X как строгие равенства. Среди столбцов A_X содержатся все такие столбцы матрицы условий A, которые отвечают компонентам x_j, либо не ограниченным требованием неотрицательности, либо положительным в рассматриваемом плане X. Указанную подматрицу A_X, порождаемую опорным планом X, назовем *базисом этого плана.* В соответствии с общим определением, приведенным в п. 4.7 гл. 2, опорный план X задачи

(1.1)—(1.4) с базисом A_X называется ***невырожденным***, если

$$x_{j_\beta} > 0, \qquad \beta = q+1, \ldots, s;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j < b_i, \qquad i \neq i_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, s.$$

Доказательство эквивалентности сформулированных определений опорного плана и невырожденного плана задачи (1.1)—(1.4) и соответствующих понятий гл. 2 предоставляется читателю (см. упражнения 1, 2).

1.2. Описание метода улучшения плана будет проведено применительно к невырожденному случаю, когда все опорные планы задачи (1.1)—(1.4) оказываются невырожденными.

Допустим, что нам известен некоторый опорный план X задачи (1.1)—(1.4) и его базис A_X образован элементами, стоящими на пересечении строк и столбцов матрицы A с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_s$ и $j_1, j_2, \ldots, j_s$ соответственно. Процесс решения начинается с проверки плана X на оптимальность. Для этого определяется решение $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s)$ системы

$$\sum_{\alpha=1}^{s} a_{i_\alpha j_\beta} \lambda_\alpha = c_{j_\beta}, \qquad \beta = 1, 2, \ldots, s, \tag{1.5}$$

и вычисляются величины

$$\Delta_j = \sum_{\alpha=1}^{s} a_{i_\alpha j} \lambda_\alpha - c_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Если

$$\lambda_\alpha \geqslant 0, \qquad \alpha = p+1, \ldots, s \tag{1.6}$$

и

$$\Delta_j \geqslant 0 \quad \text{для} \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.7}$$

то, в соответствии с критерием оптимальности для задачи (1.1)—(1.4) (теорема 5.2 гл. 3), план X оказывается оптимальным. Назовем эту возможность случаем 1°. Если же хотя бы одно из соотношений (1.6), (1.7) нарушено, то осуществляется элементарное преобразование плана X, в результате которого либо обнаруживается неразрешимость задачи (случай 2°), либо строится улучшенный опорный план X' (случай 3°).

Напомним геометрический смысл элементарного преобразования метода улучшения плана (см. п. 2.2 гл. 4). Опорный план соответствует вершине многогранного множества задачи. Выберем одну из гиперплоскостей; проходящих через эту вершину и отвечающих условиям типа неравенств, и рассмотрим ребро многогранного множества задачи, которое расположено на пересечении оставшихся гиперплоскостей. Элементарное преобразование, связанное с выбранной гиперплоскостью, состоит в движении по указанному ребру. Если задача приведена к канонической форме, то элементарное преобразование ее опорного плана всегда связано с одной из координатных гиперплоскостей. В рассматриваемом случае элементарное преобразование может быть порождено как гиперплоскостью вида $x_j = 0$ $(j = q+1, \ldots, n)$, так и гиперплоскостью

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = p+1,\ p+2, \ldots, m,$$

отвечающей соответствующему ограничению системы (1.3). Поэтому при анализе элементарного преобразования опорного плана задачи (1.1)—(1.4) целесообразно различать два случая.

1.3. Рассмотрим первый случай. Элементарное преобразование определяется координатной гиперплоскостью $x_k = 0$ $(k \neq j_\beta,\ \beta = 1, 2, \ldots, s)$ (элементарное преобразование первого типа).

В результате этого преобразования опорный план X переходит в

$$X(\theta) = X - \theta H = (x_1(\theta),\ x_2(\theta), \ldots, x_n(\theta)),$$

где вектор $H = (h_1,\ h_2, \ldots, h_n)$ определяется соотношением

$$h_j = \begin{cases} x_{\beta k}, & \text{если } j = j_\beta, \quad \beta = 1,\ 2, \ldots, s; \\ -1, & \text{если } j = k; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{1.8}$$

Здесь величины $x_{\beta k}$ вычисляются из системы уравнений

$$\sum_{\beta=1}^{s} a_{i_\alpha j_\beta} x_{\beta k} = a_{i_\alpha k}, \qquad \alpha = 1,\ 2, \ldots, s. \tag{1.9}$$

Из формул (1.8) и (1.9) вытекает, что

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_\alpha j} x_j(\theta) = b_{i_\alpha} \quad \text{для} \quad \alpha = 1, 2, \ldots, s$$

при любом значении θ.

Выпишем условия, налагаемые на θ, при которых $X(\theta)$ является планом задачи, т. е. удовлетворяет оставшимся условиям (1.3) и ограничениям (1.4). Поскольку

$$x_k(\theta) = x_k + \theta,$$

параметр θ должен быть неотрицательным. Необходимость соблюдения остальных ограничений системы (1.4) приводит к неравенствам

$$x_{j_\beta} - \theta x_{\beta k} \geqslant 0, \qquad \beta = q+1, \ldots, s.$$

Итак, для неотрицательности всех составляющих вектора $X(\theta)$, начиная с $(q+1)$-й, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0', \tag{1.10}$$

где

$$\theta_0' = \min_{\substack{x_{\beta k} > 0 \\ \beta > q}} \frac{x_{j_\beta}}{x_{\beta k}}. \tag{1.11}$$

Если $x_{\beta k} \leqslant 0$ для $\beta = q+1, \ldots, s$, то вектор $X(\theta)$ имеет неотрицательные компоненты $x_j(\theta)$ $(j = q+1, \ldots, n)$ при любом неотрицательном значении θ. В этом случае полагаем $\theta_0' = \infty$.

Определим величины

$$\left.\begin{aligned} \Delta^{(i)} &= b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \\ \delta_k^{(i)} &= \sum_{\beta=1}^{s} a_{i j_\beta} x_{\beta k} - a_{ik}, \\ i &= 1, 2, \ldots, m. \end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

Учитывая (1.8) и (1.12), имеем

$$\Delta^{(i)}(\theta) = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(\theta) = \Delta^{(i)} + \theta \delta_k^{(i)}.$$

Поэтому условия (1.3), которым должен удовлетворять вектор $X(\theta)$, переписываются в виде

$$\Delta^{(i)}+\theta\delta_k^{(i)}\geqslant 0, \qquad i=p+1, \ldots, m. \tag{1.13}$$

Разрешая систему неравенств (1.13) относительно $\theta\geqslant 0$, получаем

$$\theta\leqslant\theta_0'', \tag{1.14}$$

где

$$\theta_0''=\min_{\delta_k^{(i)}<0}\left(-\frac{\Delta^{(i)}}{\delta_k^{(i)}}\right). \tag{1.15}$$

Если $\delta^{(i)}\geqslant 0$ для всех значений i, то полагаем $\theta_0''=\infty$.

Неравенства (1.10) и (1.14) определяют совокупность значений θ, при которых $X(\theta)$ является планом задачи (1.1)—(1.4):

$$0\leqslant\theta\leqslant\theta_0,$$

где

$$\theta_0=\min\{\theta_0', \theta_0''\}, \tag{1.16}$$

а θ_0' и θ_0'' определяются из (1.11) и (1.15) соответственно.

Вычислим приращение линейной формы (1.1), связанное с переходом от X к $X(\theta)$. Имеем

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j(\theta)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j-\theta\left(\sum_{\beta=1}^{s} c_{j_\beta}x_{\beta k}-c_k\right).$$

Используя системы равенств (1.5) и (1.9), имеем

$$\sum_{\beta=1}^{s} c_{j_\beta}x_{\beta k}=\sum_{\beta=1}^{s}\left(\sum_{\alpha=1}^{s} a_{i_\alpha j_\beta}\lambda_\alpha\right)x_{\beta k}=$$
$$=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\sum_{\beta=1}^{s} a_{i_\alpha j_\beta}x_{\beta k}\right)\lambda_\alpha=\sum_{\alpha=1}^{k} a_{i_\alpha k}\lambda_\alpha.$$

Следовательно,

$$L(X(\theta))=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j(\theta)=L(X)-\theta\Delta_k. \tag{1.17}$$

Рассмотрим элементарное преобразование, определяемое гиперплоскостью

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_t j} x_j = b_{i_t} \qquad (t = p+1,\ p+2,\ \ldots,\ s)$$

(элементарное преобразование второго типа).

В результате этого преобразования план X переходит в

$$X(\theta) = (x_1(\theta),\ \ldots,\ x_n(\theta)) = X - \theta H,$$

где вектор $H = (h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_n)$ определяется в соответствии с формулой

$$h_j = \begin{cases} e_{\beta t}, & \text{если } i = j_\beta,\ \beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ s, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{1.18}$$

Величины $e_{\beta t}$ удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{\beta=1}^{s} a_{i_\alpha j_\beta} e_{\beta t} = \begin{cases} 0 & \text{для } \alpha \neq t, \\ 1 & \text{для } \alpha = t. \end{cases} \tag{1.19}$$

Найдем точные границы изменения θ, в пределах которых $X(\theta)$ является планом задачи (1.1)—(1.4). В соответствии с (1.19)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_\alpha j} x_j(\theta) = \sum_{j=1}^{n} a_{i_\alpha j} x_j - \theta \sum_{\beta=1}^{s} a_{i_\alpha j_\beta} e_{\beta t} = \\ = \begin{cases} b_{i_\alpha}, & \text{если } \alpha \neq t, \\ b_{i_\alpha} - \theta, & \text{если } \alpha = t. \end{cases} \tag{1.20}$$

Поэтому для выполнения условий (1.2), (1.3) при $i = i_\alpha$, $\alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ s$, необходимо и достаточно, чтобы θ было неотрицательным числом.

Пусть, по определению,

$$\bar{\delta}_t^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} h_j = \sum_{\beta=1}^{s} a_{i j_\beta} e_{\beta t}, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

В таком случае

$$\Delta^{(i)}(\theta) = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(\theta) = \Delta^{(i)} + \theta \bar{\delta}_t^{(i)}.$$

Учитывая неотрицательность θ и условия (1.3), которым должен удовлетворять вектор $X(\theta)$, получаем

$$\theta \leqslant \theta_0'',$$

где

$$\theta_0'' = \min_{\delta_t^{(i)} < 0} \left(-\frac{\Delta^{(i)}}{\overline{\delta}_t^{(i)}} \right). \tag{1.21}$$

Если $\overline{\delta}_t^{(i)} \geqslant 0$ для всех i, то $\theta_0'' = \infty$.

По определению вектора $X(\theta)$

$$x_j(\theta) = 0 \quad \text{при } j \neq j_\beta, \quad \beta = 1, 2, \ldots, s.$$

Следовательно, для соблюдения условий (1.4) необходимо и достаточно, чтобы

$$x_{j_\beta}(\theta) = x_{j_\beta} - \theta e_{\beta t} \geqslant 0, \qquad \beta = q+1, \ldots, s,$$

или, учитывая неотрицательность θ,

$$\theta \leqslant \theta_0',$$

где

$$\theta_0' = \min_{\substack{e_{\beta t} > 0 \\ \beta > q}} \frac{x_{j_\beta}}{e_{\beta t}}. \tag{1.22}$$

В случае, когда $e_{\beta t} \leqslant 0$ для $\beta = q+1, \ldots, s$, полагаем $\theta_0' = \infty$. Итак, искомая область изменения θ определяется соотношением

$$0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0,$$

где

$$\theta_0 = \min(\theta_0', \theta_0''), \tag{1.23}$$

а θ_0' и θ_0'' вычисляются по формулам (1.22) и (1.21) соответственно.

При данном элементарном преобразовании второго типа линейная форма (2.1) принимает значение

$$L(X(\theta)) = L(X) - \theta \sum_{j=1}^{n} c_j h_j.$$

Используя последовательно соотношения (1.18), (1.5) и (1.19), имеем

$$\sum_{j=1}^{n} c_j h_j = \sum_{\beta=1}^{s} c_{j_\beta} e_{\beta t} = \sum_{\beta=1}^{s} \left(\sum_{\alpha=1}^{s} a_{i_\alpha j_\beta} \lambda_\alpha \right) e_{\beta t} =$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{s} \left(\sum_{\beta=1}^{s} a_{i_\alpha j_\beta} e_{\beta t} \right) \lambda_\alpha = \lambda_t.$$

Следовательно,

$$L(X(\theta)) = L(X) - \theta\lambda_t. \tag{1.24}$$

1.4. Перейдем к анализу случаев 2° и 3°. Допустим, что среди чисел $\lambda_\alpha (\alpha = p+1, \ldots, s)$ и $\Delta_j (j = 1, 2, \ldots, n)$ имеются отрицательные величины. Выберем одну из них (например, наибольшую по абсолютной величине). Дальнейшее течение процесса решения определяется тем, является ли выбранный параметр одним из чисел Δ_j или одним из чисел λ_α. Остановимся на каждом из отмеченных случаев.

1. Выбор пал на параметр $\Delta_k < 0$. В этом случае используется элементарное преобразование первого типа, определяемое гиперплоскостью $x_k = 0$. Вычислим по формулам (1.11), (1.15) и (1.16) число θ_0. Может оказаться, что $\theta_0 = \infty$. В соответствии со сказанным ранее это эквивалентно выполнению условий

$$\left.\begin{array}{ll} x_{\beta k} \leqslant 0, & \beta = q+1, q+2, \ldots, s, \\ \delta_k^{(i)} \geqslant 0, & i = 1, 2, \ldots, m. \end{array}\right\} \tag{1.25}$$

Если $\theta_0 = \infty$, то $X(\theta)$ является планом задачи (1.1)—(1.4) при любом $\theta \geqslant 0$. Но согласно равенству (1.17)

$$\lim_{\theta \to \infty} L(X(\theta)) = \infty.$$

Таким образом, при соблюдении условий (1.25) (случай 2°) исследуемая задача оказывается неразрешимой.

Пусть теперь условия (1.25) не выполняются (случай 3°), и, следовательно, $\theta_0 < \infty$. Положим

$$X' = X(\theta_0).$$

Проверим, что X' является опорным планом задачи. Пусть вначале $\theta_0 = \theta_0'$. Это означает, что

$$\theta_0 = \frac{x_{jr}}{x_{rk}}, \quad x_{rk} > 0,$$

при некотором $r \geqslant q+1$.

Поскольку $x_{rk} \neq 0$, то из теоремы 2.1 гл. 4 вытекает неособенность матрицы $A_{X'}$, которая получена из базиса A_X плана X путем замены его r-го столбца столбцом $(a_{i_1k}, a_{i_2k}, \ldots, a_{i_sk})^T$.

Следовательно, план X' является опорным и его базис представляет собой квадратную матрицу порядка s.

Рассмотрим теперь другую возможность:

$$\theta_0 = \theta_0''.$$

В этом случае

$$\theta_0 = -\frac{\Delta^{(l)}}{\delta_k^{(l)}}, \quad \delta_k^{(l)} < 0$$

при некотором $l \neq i_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots, s$. Очевидно,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{lj} x_j' = b_l;$$

$$x_j' = 0, \text{ если } j \neq j_\beta, \ \beta = 1, 2, \ldots, s, \quad \text{и } j \neq k.$$

Поэтому, убедившись в неособенности матрицы

$$A_{X'} = \left\| \begin{matrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \ldots & a_{i_1j_s} & a_{i_1k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \ldots & b_{i_2j_s} & a_{i_2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_sj_1} & a_{i_sj_2} & \ldots & a_{i_sj_s} & a_{i_sk} \\ a_{lj_1} & a_{lj_2} & \ldots & a_{lj_s} & a_{lk} \end{matrix} \right\|,$$

мы докажем опорность плана X'.

Доказательство проведем от противного. Если столбцы матрицы $A_{X'}$ линейно зависимы, то ее последний столбец является линейной комбинацией первых s столбцов, так как эти столбцы по условию линейно независимы. В соответствии с (1.9) коэффициентами линейной комбинации оказываются числа $x_{\beta k}$. Но, по предположению,

$$\delta_k^{(l)} = \sum_{\beta=1}^{s} a_{lj_\beta} x_{\beta k} - a_{lk} \neq 0$$

Следовательно, допущение о линейной зависимости столбцов матрицы $A_{X'}$ ошибочно; матрица $A_{X'}$ неособенная.

Итак, план X' является опорным, причем его базис $A_{X'}$ в данном случае представляет собой матрицу порядка $s+1$, полученную в результате окаймления матрицы A_X строкой $(a_{lj_1}, a_{lj_2}, \ldots, a_{lj_s}, a_{lk})$ и столбцом $(a_{i_1k}, a_{i_2k}, \ldots, a_{i_sk}, a_{lk})^T$.

По предположению, X — невырожденный опорный план задачи (1.1)—(1.4).

Отсюда $x_{j_r}>0$, $\Delta^{(l)}>0$ и, следовательно, $\theta_0>0$. Обратившись к соотношению (1.17), обнаруживаем, что

$$L(X')=L(X)-\theta_0\Delta_k>L(X).$$

2. Рассмотрим теперь другой случай, возникающий при выборе параметра $\lambda_t<0$. В этом случае для улучшения плана используется элементарное преобразование второго типа, определяемое гиперплоскостью

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_tj}x_j=b_{i_t}\ .$$

Вычисляем число θ_0 по формулам (1.21)—(1.23). Если $\theta_0=\infty$, или, что то же самое, если оказываются выполненными условия

$$\left.\begin{aligned} &h_{j_\beta}=e_{\beta t}\leqslant 0 &&\text{для } \beta=q+1,\ \ldots,\ s;\\ &\bar{\delta}_t^{(i)}=\sum_{\beta=1}^{s} a_{ij_\beta}e_{\beta t}\geqslant 0 &&\text{для } i=1,\ 2,\ \ldots,\ m,\end{aligned}\right\}\qquad(1.26)$$

то $X(\theta)$ — план задачи (1.1)—(1.4) при любом $\theta\geqslant 0$. В соответствии с равенством (1.24) это означает неразрешимость исследуемой задачи (случай 2°).

Если условия (1.26) не выполняются, то $\theta_0<\infty$, что дает возможность определить план $X'=X(\theta_0)$ (случай 3°).

Как и в рассмотренном ранее случае, когда использовалось элементарное преобразование первого типа, план X' оказывается опорным. Для того чтобы в этом убедиться, необходимо снова рассмотреть две возможности, возникающие при вычислении θ_0.

Пусть $\theta_0=\theta_0'$. Тогда

$$\theta_0=\frac{x_{j_r}}{e_{rt}}\qquad(e_{rt}>0)$$

при некотором $r \geqslant q+1$. В этом случае

$$x'_j = 0, \quad j \neq j_\beta, \qquad \beta = 1, 2, \ldots, r-1, r+1, \ldots, s;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_\alpha j} x'_j = b_{i_\alpha}, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, t-1, t+1, \ldots, s.$$

Убедимся в неособенности квадратной матрицы $(s-1)$-го порядка:

$$A_{X'} = \left\| \begin{matrix} a_{i_1 j_1} & \ldots & a_{i_1 j_{r-1}} & a_{i_1 j_{r+1}} & \ldots & a_{i_1 j_s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_{t-1} j_1} & \ldots & a_{i_{t-1} j_{r-1}} & a_{i_{t-1} j_{r+1}} & \ldots & a_{i_{t-1} j_s} \\ a_{i_{t+1} j_1} & \ldots & a_{i_{t+1} j_{r-1}} & a_{i_{t+1} j_{r+1}} & \ldots & a_{i_{t+1} j_s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_s j_1} & \ldots & a_{i_s j_{r-1}} & a_{i_s j_{r+1}} & \ldots & a_{i_s j_s} \end{matrix} \right\|.$$

Действительно, определитель матрицы $A_{X'}$ с точностью до знака совпадает с алгебраическим дополнением элемента $a_{i_t j_r}$ матрицы A_X. Поэтому

$$|A_{X'}| = \pm e_{rt} |A_X| \neq 0,$$

так как $e_{rt} \neq 0$. Таким образом, X' является опорным планом с базисом $A_{X'}$, который представляет собой матрицу $(s-1)$-го порядка, образующуюся из A_X вычеркиванием t-й строки и r-го столбца.

Допустим другую возможность: $\theta_0 = \theta''_0$. В этом случае

$$\theta_0 = -\frac{\Delta^{(l)}}{\overline{\delta}_t^{(l)}} \qquad (\overline{\delta}_t^{(l)} < 0)$$

при некотором $l \neq i_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, s)$. Очевидно,

$$x'_j = 0 \quad \text{при } j \neq j_\beta, \quad \beta = 1, 2, \ldots, s;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j = b_i \quad \text{при } i = i_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, t-1, t+1, \ldots, s,$$
$$i = l.$$

Установим неособенность матрицы $A_{X'}$, образованной из A_X заменой ее t-й строки на строку $(a_{lj_1}, a_{lj_2}, \ldots, a_{lj_s})$.

В соответствии с (1.19) вектор $(e_{1t}, e_{2t}, \ldots, e_{st})^T$ является t-м столбцом матрицы A_X^{-1}. Поэтому коэффициент при t-й строке в разложении вектора $(a_{lj_1}, a_{lj_2}, \ldots, a_{lj_s})$ по строкам матрицы A_X равен

$$\overline{\delta}_t^{(l)} = \sum_{\beta=1}^{s} a_{lj_\beta} e_{\beta t} \neq 0.$$

Применяя, далее, теорему 2.1 гл. 4 к вектору $(a_{lj_1}, a_{lj_2}, \ldots$ $\ldots, a_{lj_s})$ и строкам матрицы A_X, приходим к выводу о неособенности матрицы $A_{X'}$. Итак, в данном случае X оказывается опорным планом с базисом $A_{X'}$, являющимся матрицей s-го порядка.

Из предположения о невырожденности плана X вытекает, что $\theta_0 > 0$. Следовательно, в соответствии с равенством (1.24)

$$L(X') = L(X) - \lambda_t \theta > L(X).$$

1.5. Итак, имея опорный план X задачи (1.1)—(1.4), мы либо устанавливаем его оптимальность (случай 1°) либо убеждаемся в неразрешимости задачи (случай 2°), либо строим новый опорный план X', связанный с бóльшим значением линейной формы (1.1) (случай 3°). Переход от плана X к плану X' составляет итерацию (шаг) метода. Монотонность роста линейной формы (1.1) от шага к шагу и ограниченность числа опорных планов задачи (1.1)—(1.4) определяют конечность описанного метода.

Подчеркнем, что пока речь шла о случае, когда все планы исследуемой задачи являются невырожденными. Только это предположение гарантирует положительность параметра θ_0, а следовательно, и монотонный рост линейной формы (1.1) в каждой итерации метода.

Параметр θ_0, необходимый для улучшения имеющегося опорного плана X, вычисляется как минимум некоторой системы чисел. При использовании элементарного преобразования первого типа она состоит из отношений

$$\begin{aligned} &\frac{x_{j\beta}}{x_{\beta k}} \; (\beta = q+1,\ q+2,\ \ldots,\ s,\ x_{\beta k} > 0), \\ &-\frac{\Delta^{(i)}}{\delta_k^{(i)}} \; (i \neq i_\alpha \text{ для } \alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ s;\ \delta_k^{(i)} < 0). \end{aligned} \tag{1.27}$$

В случае применения элементарного преобразования второго типа указанной системой чисел является система отношений

$$\begin{gathered}\frac{x_{j\beta}}{e_{\beta t}}(\beta=q+1,\ q+2,\ \ldots,\ s;\ e_{\beta t}>0),\\ -\frac{\Delta^{(i)}}{\bar{\delta}_t^{(i)}}(i\neq i_\alpha \text{ для } \alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ s;\ \bar{\delta}_t^{(i)}<0).\end{gathered} \tag{1.28}$$

Нетрудно проверить, что в невырожденном случае в системе чисел (1.27) или (1.28) существует единственный минимальный элемент (см. упражнение 3). Этот элемент, как было показано в предыдущем пункте, однозначно определяет базис нового опорного плана X'. В вырожденном случае минимум может достигаться сразу на нескольких элементах соответствующей системы (1.27) и (1.28). Для того чтобы определить базис нового опорного плана, необходимо среди чисел, равных θ_0, выбрать одно. Если этот выбор осуществлять произвольным образом, то, как показывают примеры, возможен цикл, т. е. периодическое возвращение к одному и тому же базису. Однако зацикливание — явление довольно редкое. Поэтому в практических задачах выбор одного из минимальных чисел систем (1.27) и (1.28) можно производить по любому правилу. Мы не будем здесь останавливаться на выводе правила, дающего полную гарантию от получения цикла в процессе решения любой задачи вида (1.1)—(1.4). Отметим только, что формирование такого правила можно осуществить с помощью неоднократно использованного в предыдущих главах ε-приема.

1.6. Сделаем несколько замечаний относительно алгоритма метода улучшения плана применительно к задаче (1.1)—(1.4). Из соотношения (1.19) следует, что числа e_{1t}, e_{2t}, ..., e_{st} составляют t-й столбец матрицы, обратной для матрицы

$$A_X=\|a_{i_\alpha j_\beta}\|_s$$

— базиса опорного плана X. Следовательно,

$$\|e_{\beta\alpha}\|_s=\|a_{i_\alpha j_\beta}\|_s^{-1}.$$

Покажем, что с помощью обратной матрицы $\|e_{\beta\alpha}\|_s$ базиса A_x легко определяются все необходимые промежуточные параметры итерации, связанной с улучшением плана X.

1. Числа λ_α, $\alpha=1, 2, \ldots, s$, необходимые для исследования плана X на оптимальность, удовлетворяют системе уравнений (1.5), или, в матричной форме,

$$\Lambda_X A_X = C_X. \tag{1.29}$$

Здесь $\Lambda_X=(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$, $A_X = \|a_{i_\alpha j_\beta}\|_s$, $C_X=(c_{j_1}, \ldots, c_{j_s})$. Умножая обе части (1.29) справа на

$$A_X^{-1} = \|e_{\beta\alpha}\|_s,$$

имеем

$$\Lambda_X = C_X \|e_{\beta\alpha}\|_s,$$

или, что то же самое,

$$\lambda_\alpha = \sum_{\beta=1}^{s} c_{j_\beta} e_{\beta\alpha}, \qquad \alpha=1, 2, \ldots, s. \tag{1.30}$$

2. Если для улучшения плана используется элементарное преобразование первого типа, то необходимо определить числа $x_{\beta k}$, $\beta=1, 2, \ldots, s$, составляющие решение системы уравнений (1.9). В матричной форме система (1.9) имеет вид

$$A_X X^{(k)} = A_k^{(X)},$$

где $X^{(k)}=(x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{sk})^T$, $A_k^{(X)}=(a_{i_1k}, a_{i_2k}, \ldots, a_{i_sk})^T$. Следовательно,

$$X^{(k)} = A_X^{-1} A_k^{(X)}.$$

Расписывая последнее равенство в координатах, получаем

$$x_{\beta k} = \sum_{\alpha=1}^{s} e_{\beta\alpha} a_{i_\alpha k}, \qquad \beta=1, 2, \ldots, t. \tag{1.31}$$

3. В случае применения элементарного преобразования второго типа аналогом вектора $X^{(k)}$ является соответствующий столбец (t-й столбец) матрицы $\|e_{\beta\alpha}\|_s$.

Итак, для того чтобы провести отдельную итерацию метода, не решая систем уравнений, достаточно знать матрицу, обратную по отношению к базису улучшаемого плана.

1.7. Займемся выводом рекуррентных соотношений, которые связывают элементы обратных матриц двух соседних (получаемых один из другого за одну итерацию) базисов.

Напомним одно утверждение, которым мы неоднократно пользовались в предыдущих главах (см. п. 1.3 гл. 5). Рассмотрим произвольную неособенную квадратную матрицу $\|d_{ij}\|_\rho$ порядка ϱ. Положим $\|\tilde{d}_{ij}\|_\rho = \|d_{ij}\|_\varrho^{-1}$. Если в матрице $\|d_{ij}\|_\rho$ заменить j_0-й столбец на вектор $D_0 = (d_{10}, d_{20}, \ldots, d_{\rho 0})^T$, то матрица $\|\tilde{d}'_{ij}\|_\rho$ обратная по отношению ко вновь полученной матрице, определяется в соответствии с соотношениями

$$\tilde{d}'_{ij} = \begin{cases} \tilde{d}_{ij} - \dfrac{\tilde{d}_{j_0 j} d_{i0}}{\tilde{d}_{j_0 0}}, & i \neq j_0, \\ \dfrac{\tilde{d}_{j_0 j}}{\tilde{d}_{j_0 0}}, & i = j_0, \end{cases} \tag{1.32}$$

$$i = 1, 2, \ldots, \varrho, \quad j = 1, 2, \ldots, \varrho.$$

Здесь через $\tilde{d}_{j0}$, $j = 1, 2, \ldots, \varrho$, обозначены коэффициенты разложения вектора D_0 по столбцам $D_j = (d_{1j}, d_{2j}, \ldots, d_{\rho j})^T$ матрицы $\|d_{ij}\|_\rho$:

$$\tilde{d}_{j0} = \sum_{\gamma=1}^{\varrho} \tilde{d}_{j\gamma} d_{\gamma 0}. \tag{1.33}$$

Пусть теперь в матрице $\|d_{ij}\|_\rho$ i-я строка заменена вектором $D^{(0)} = (d_{01}, d_{02}, \ldots, d_{0\rho})$. Соответствующую обратную матрицу обозначим снова через $\|\tilde{d}'_{ij}\|_\rho$. Учитывая, что $\|\tilde{d}_{ij}\|_\varrho^T$ — обратная матрица по отношению к матрице $\|d_{ij}\|_\varrho^T$, и формулы (1.32), (1.33), получаем рекуррентные соотношения, связывающие $\|\tilde{d}'_{ij}\|_\rho$ и $\|\tilde{d}_{ij}\|_\rho$:

$$\tilde{d}'_{ij} = \begin{cases} \tilde{d}_{ij} - \dfrac{\tilde{d}_{ii_0}}{\tilde{d}_{0i_0}} \tilde{d}_{0j}, & j \neq i_0, \\ \dfrac{\tilde{d}_{ii_0}}{\tilde{d}_{0i_0}}, & j = i_0, \end{cases} \tag{1.34}$$

$$i = 1, 2, \ldots, \varrho, \quad j = 1, 2, \ldots, \varrho,$$

где

$$\tilde{d}_{0i} = \sum_{\gamma=1}^{\varrho} \tilde{d}_{\gamma i} d_{0\gamma}, \quad i = 1, 2, \ldots, \varrho. \tag{1.35}$$

Перейдем к случаю, когда новая матрица образуется из $\|d_{ij}\|_\rho$ путем окаймления последней одной строкой и одним столбцом. Схематически новая матрица $\|d'_{ij}\|_{\rho+1}$ может быть изображена следующим образом:

$$\|d'_{ij}\|_{\rho+1} = \left\| \begin{array}{c|c} d_{ij} & d_{i0} \\ \hline d_{0j} & d \end{array} \right\| \begin{array}{c} \uparrow \\ \rho \\ \downarrow \end{array} \quad (d \neq 0). \qquad (1.36)$$
$$\leftarrow \rho \rightarrow$$

Используя схематическую запись (1.36), введем матрицы

$$\|d_{ij}\|^{(1)}_{\rho+1} = \left\| \begin{array}{c|c} d_{ij} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right\|,$$

$$\|d_{ij}\|^{(2)}_{\rho+1} = \left\| \begin{array}{c|c} d_{ij} & 0 \\ \hline d_{0j} & d \end{array} \right\|.$$

Как нетрудно проверить непосредственным умножением соответствующих матриц,

$$\|\tilde{d}_{ij}\|^{(1)}_{\rho+1} = \left\| \begin{array}{c|c} \tilde{d}_{ij} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right\|$$

является матрицей, обратной по отношению к $\|d_{ij}\|^{(1)}_{\rho+1}$. Матрица $\|d_{ij}\|^{(2)}_{\rho+1}$ отличается от $\|d_{ij}\|^{(1)}_{\rho+1}$ только последней строкой. Применяя формулы (1.34), получаем, что

$$\|\tilde{d}_{ij}\|^{(2)}_{\rho+1} = \left\| \begin{array}{c|c} \tilde{d}_{ij} & 0 \\ \hline -\tilde{d}_{0j}/d & 1/d \end{array} \right\|$$

представляет собой матрицу, обратную для $\|d_{ij}\|^{(2)}_{\rho+1}$. Здесь числа $\tilde{d}_{0j}$ определяются из (1.35).

В свою очередь матрица $\|d'_{ij}\|_{\rho+1}$ отличается от матрицы $\|d_{ij}\|^{(2)}_{\rho+1}$ только одним последним столбцом. Поэтому для определения элементов матрицы

$$\|\tilde{d}'_{ij}\|_{\rho+1} = \|d'_{ij}\|^{-1}_{\rho+1}$$

можно воспользоваться рекуррентными соотношениями (1.32), применив их к уже известной матрице $\|\tilde{d}_{ij}\|^{(2)}_{\rho+1}$.

Вычислим коэффициенты $d_i^{(2)}$ разложения по столбцам матрицы $\|d_{ij}\|^{(2)}_{\rho+1}$ вектора $(d_{10}, d_{20}, \ldots, d_{\rho 0}, d)^T$, используем явные выражения для элементов матрицы $\|\tilde{d}_{ij}\|^{(2)}_{\varrho+1}$:

$$d_i^{(2)}=\begin{cases}\sum\limits_{\gamma=1}^{\varrho}\tilde{d}_{i\gamma}d_{\gamma 0}=\tilde{d}_{i0}, & i=1,\ 2,\ \ldots,\ \varrho,\\ 1-\frac{1}{d}\sum\limits_{\gamma=1}^{\varrho}\tilde{d}_{0\gamma}d_{\gamma 0}, & i=\varrho+1.\end{cases}\tag{1.37}$$

В соответствии с формулами (1.32) и равенствами (1.37) получаем

$$\tilde{d}_{ij}=\begin{cases}\tilde{d}_{ij}+\dfrac{\tilde{d}_{0j}d_{i0}}{\tilde{d}_0} & \text{для } i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ \varrho;\\ -\dfrac{\tilde{d}_{0j}}{\tilde{d}_0} & \text{для } i=\varrho+1,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ \varrho;\\ -\dfrac{\tilde{d}_{i0}}{\tilde{d}_0} & \text{для } i=1,\ 2,\ \ldots,\ \varrho,\ j=\varrho+1;\\ \dfrac{1}{\tilde{d}_0} & \text{для } i=j=\varrho+1.\end{cases}\tag{1.38}$$

Здесь параметры $\tilde{d}_{0j}$ и $\tilde{d}_{i0}$ определяются по формулам (1.35) и (1.33) соответственно, а

$$\tilde{d}_0=d-\sum_{\gamma=1}^{\varrho}\tilde{d}_{0\gamma}d_{\gamma 0}=d-\sum_{\gamma=1}^{\varrho}d_{0\gamma}\tilde{d}_{\gamma 0}.\tag{1.39}$$

Наконец, рассмотрим последний случай, когда из матрицы $\|d_{ij}\|_\varrho$ вычеркивается одна строка (с номером i_0) и один столбец (с номером j_0). В результате образуется матрица $\|d'_{ij}\|_{\varrho-1}$ порядка $\varrho-1$. Обозначим матрицу, обратную для вновь полученной матрицы $\|d'_{ij}\|_{\varrho-1}$, через $\|\tilde{d}'_{ij}\|_{\varrho-1}$. Введем две вспомогательные матрицы порядка ϱ: $\|d_{ij}\|^{(1)}_\varrho$, образующуюся из $\|d_{ij}\|_\varrho$ заменой i_0-й строки единичной строкой с единицей на j_0-м месте, и $\|d_{ij}\|^{(2)}_\varrho$, которая в свою очередь образуется из $\|d_{ij}\|^{(1)}_\varrho$ заменой j_0-го столбца i_0-м единичным вектором.

Связь между обратными матрицами для матриц $\|d_{ij}\|_\varrho$ $\|d_{ij}\|^{(1)}_\varrho$ и $\|d_{ij}\|^{(1)}_\varrho$, $\|d_{ij}\|^{(2)}_\varrho$ может быть установлена с помощью соотношений (1.34) и (1.32) соответственно.

Если из матрицы, обратной по отношению к матрице $\|d_{ij}\|_{\varrho}^{(1)}$, вычеркнуть i_0-й столбец и j_0-ю строку, получим искомую матрицу $\|\tilde{d}'_{ij}\|^{-1}$.

Приведенные соображения позволяют вывести следующее рекуррентное соотношение, связывающее элементы матриц $\|\tilde{d}_{ij}\|_{\rho}$ и $\|\tilde{d}_{ij}\|_{\rho-1}$:

$$\tilde{d}'_{ij}=\begin{cases}\tilde{d}''_{ij}, & i<j_0, \quad j<i_0,\\ \tilde{d}''_{i+1,j}, & i\geqslant j_0, \quad j<i_0,\\ \tilde{d}''_{i,j+1}, & i<j_0, \quad j\geqslant i_0,\\ \tilde{d}''_{i+1,j+1}, & i\geqslant j_0, \quad j\geqslant i_0,\end{cases} \tag{1.40}$$

где

$$\tilde{d}''_{ij}=\tilde{d}_{ij}-\frac{\tilde{d}_{j_0j}\tilde{d}_{ii_0}}{\tilde{d}_{ji_0}}, \quad i\neq j_0, \quad j\neq i_0. \tag{1.41}$$

Предлагаем читателю в качестве упражнения доказать справедливость формул (1.40), (1.41) (см. упражнение 4).

1.8. В процессе улучшения плана могут представиться четыре различные возможности для изменения базиса. Они определяются типом выбранного элементарного преобразования и тем, чему (θ'_0 или θ''_0) равен параметр θ_0. Выведенные выше формулы позволяют для каждого из этих случаев получить рекуррентные зависимости, связывающие элементы соответствующих обратных матриц.

1. Используется элементарное преобразование первого типа, определяемое гиперплоскостью $x_k=0$, причем

$$\theta_0=\theta'_0=\frac{x_{jr}}{x_{rk}}.$$

Базис $A_{X'}$ нового опорного плана X' образуется из базиса A_X плана X заменой столбцом $(a_{i_1k}, a_{i_2k}, \ldots, a_{i_sk})^T$ r-го столбца.

Обозначим обратные матрицы для A_X и $A_{X'}$ через $\|e_{ij}\|_s$ и $\|e'_{ij}\|_s$ соответственно.

Используя соотношения (1.32), (1.33), получаем

$$e'_{ij}=\begin{cases} e_{ij}-\dfrac{e_{rj}x_{ik}}{x_{rk}}, & i\neq r,\\ \dfrac{e_{rj}}{x_{rk}}, & i=r, \end{cases} \tag{1.42}$$

$$i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ s.$$

Здесь числа x_{ik} — коэффициенты разложения вектора $A_k^{(X)}$ по столбцам базиса A_X — вычисляются по формуле (1.31).

2. Используется то же элементарное преобразование, что и в предыдущем случае, но

$$\theta_0=\theta''_0=-\frac{\Delta^{(l)}}{\delta_k^{(l)}}.$$

В этом случае базис $A_{X'}$ плана X' образуется путем окаймления базиса A_X строкой $(a_{lj_1}, a_{lj_2}, \ldots, a_{lj_s}, a_{lk})$ и столбцом $(a_{i_1k}, a_{i_2k}, \ldots, a_{i_sk}, a_{lk})^T$. Отметим, что коэффициенты разложения строки $(a_{lj_1}, a_{lj_2}, \ldots, a_{lj_s})$ по строкам базиса A_X определяются как

$$\bar{\delta}_\alpha^{(l)}=\sum_{\beta=1}^{s} a_{lj_\beta}e_{\beta\alpha},\qquad \alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ s. \tag{1.43}$$

Применяя соотношения (1.38), получаем следующее выражение для элементов матрицы $\|e'_{ij}\|_{s+1}$, обратной по отношению к матрице $A_{X'}$:

$$e'_{ij}=\begin{cases} e_{ij}+\dfrac{\bar{\delta}_j^{(l)}x_{ik}}{e_0} & \text{для}\quad i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ s,\\ -\dfrac{\bar{\delta}_j^{(l)}}{e_0} & \text{для}\quad i=s+1,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ s,\\ -\dfrac{x_{ik}}{e_0} & \text{для}\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ s,\ j=s+1,\\ \dfrac{1}{e_0} & \text{для}\quad i=j=s+1. \end{cases} \tag{1.44}$$

Здесь

$$e_0=a_{lk}-\sum_{\gamma=1}^{s}\bar{\delta}_\gamma^{(l)}a_{i_\gamma k}=a_{lk}-\sum_{\gamma=1}^{s}a_{lj_\gamma}x_{\gamma k}.$$

3. Применяется элементарное преобразование второго типа, определяемое гиперплоскостью

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_t j} x_j = b_{i_t},$$

причем

$$\theta_0 = \theta_0' = \frac{x_{jr}}{e_{rt}}.$$

В этих предположениях базис $A_{X'}$ плана X' образуется из A_X вычеркиванием t-й строки и r-го столбца. Поэтому для получения требуемых рекуррентных соотношений между $\|e_{ij}\|_s$ и $\|e'_{ij}\|_{s-1}$ — обратной матрицей базиса $A_{X'}$ — можно воспользоваться формулами (2.40) и (2.41). Итак,

$$e'_{ij} = \begin{cases} e_{ij} - \dfrac{e_{rj} e_{it}}{e_{rt}}, & \text{если } i < r,\ j < t; \\ e_{i+1,\,j} - \dfrac{e_{rj} e_{i+1,\,t}}{e_{rt}}, & \text{если } i \geqslant r,\ j < t; \\ e_{i,\,j+1} - \dfrac{e_{r,\,j+1} e_{it}}{e_{rt}}, & \text{если } i < r,\ j \geqslant t; \\ e_{i+1,\,j+1} - \dfrac{e_{r,\,j+1}\, e_{i+1,\,t}}{e_{rt}}, & \text{если } i \geqslant r,\ j \geqslant t; \end{cases} \tag{1.45}$$

$$(i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ s-1).$$

4. Последняя возможность возникает при использовании того же элементарного преобразования, что и в случае 3°, и

$$\theta_0 = \theta_0'' = -\frac{\Delta^{(l)}}{\bar{\delta}_t^{(l)}}.$$

Базис $A_{X'}$ плана X' образуется из A_X путем замены t-й строки строкой $(a_{lj_1}, a_{lj_2}, \ldots, a_{lj_s})$. Если воспользоваться формулами (1.34), (1.35) и учесть (1.43), то получим следующее выражение для элементов матрицы $\|e'_{ij}\|_s$, обратной по отношению к $A_{X'}$:

$$e'_{ij} = \begin{cases} e_{ij} - \dfrac{e_{it}}{\bar{\delta}_t^{(l)}} \bar{\delta}_j^{(l)}, & j \neq t, \\ \dfrac{e_{it}}{\bar{\delta}_t^{(l)}}, & j = t, \end{cases} \tag{1.46}$$

$$i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ s,$$

Приведенные рекуррентные соотношения (1.42), (1.44)—(1.46), а также указанные ранее выражения (1.30), (1.31) являются основой для составления алгоритма рассматриваемого метода. Рекомендуем читателю составить этот алгоритм самостоятельно (см. упражнение 5). Отметим только, что главная часть основных таблиц алгоритма заполняется элементами матриц $\|e_{ij}\|_s$, и следовательно, имеет размеры $s\times s$, где

$$\max(p,\ q)\leqslant s\leqslant \min(m,\ n)=\varphi_1.$$

1.9. В заключение параграфа сделаем несколько замечаний. Для приведения задачи (1.1)—(1.4) к каноническому виду необходимо ввести $m-p$ новых неотрицательных переменных (по числу неравенств системы (1.3)) и освободиться от q старых переменных, не ограниченных требованием неотрицательности. В результате образуется задача с $n+m-(p+q)$ неотрицательными переменными и $m-q$ условиями-равенствами. Поэтому при решении приведенной задачи вторым алгоритмом метода улучшения плана необходимо иметь дело с обратными матрицами порядка $\varphi_2=m-q$. Как отмечалось в конце предыдущего пункта, порядок обратных матриц, с которыми приходится оперировать при решении задачи описанным здесь методом, не превышает

$$\varphi_1=\min(m,\ n).$$

При реализации указанных методов на универсальных цифровых машинах обратная матрица, преобразуемая от шага к шагу, обычно помещается в оперативную память. Поэтому размер этой матрицы является основным параметром, в зависимости от значения которого задача «влезает» или «не влезает» в машину. При ручном счете также выгоднее, чтобы преобразуемые матрицы имели возможно меньший порядок.

Отсюда следует, что ответ на вопрос о том, приводить ли задачу (1.1)—(1.4) к каноническому виду или решать описанным здесь методом, зависит от соотношения чисел

$$\varphi_1=\min(m,\ n)$$

и

$$\varphi_2=m-q.$$

Если $\varphi_2\leqslant\varphi_1$, то предварительное приведение задачи к каноническому виду оправдано. Если же

$$\varphi_2 \geqslant \varphi_1 = n,$$

то целесообразно применить модификацию метода улучшения плана, описанию которой посвящен этот параграф.

Заметим, что при $p \geqslant 1$ и $q \geqslant 1$ размеры задачи (1.1) — (1.4) могут быть сокращены за счет исключения

$$\tau = \min(p, q)$$

переменных (из числа первых q переменных) и отбрасывания τ уравнений системы (1.2). В результате этих преобразований образуется новая задача типа (1.1)—(1.4), причем хотя бы один из ее параметров (p, q) заведомо равен нулю.

Однако в процессе сокращения числа переменных матрица условий A задачи изменяется. Поэтому не исключено, что матрица условий A' эквивалентной задачи оказывается менее выгодной для анализа, чем матрица A; например, матрица A может обладать существенно более высоким процентом нулевых элементов по сравнению с матрицей A'. Естественно, что в подобных случаях указанное преобразование приводит к усложнению вычислительной работы: незначительное уменьшение размеров задачи влечет за собой существенное увеличение трудоемкости отдельной итерации. В тех случаях, когда матрица A не обладает полезными особенностями и p, $q \geqslant 1$, исключение части переменных задачи (1.1)—(1.4) следует признать целесообразным.

Приведенные замечания еще раз подчеркивают важность предварительного анализа условий задачи.

1.10. Существует ряд классов задач линейного программирования, которые выгоднее решать в их естественной записи. Отметим некоторые из них.

Рассмотрим общую задачу линейного программирования с n неотрицательными переменными и m условиями-равенствами $(m < n)$. Известно, что задача, двойственная по отношению к ней, содержит m переменных, не ограниченных требованием неотрицательности, и n условий-неравенств. Поэтому для двойственной задачи

$$\varphi_1 = \min(m, n) = m; \quad \varphi_2 = n - m.$$

Если $m < n - m$, то решение двойственной задачи целесообразно проводить, не изменяя ее записи. В § 8 гл. 6

было показано, что метод уточнения оценок состоит в применении метода улучшения плана к двойственной задаче. При этом, как нетрудно сообразить, двойственная задача решается в соответствии с методом, описанным в этом параграфе. Поскольку ни одно из переменных двойственной задачи не ограничено условием неотрицательности, в процессе решения используется только элементарное преобразование второго типа и $\theta_0 = \theta_0''$.

Вследствие этого при улучшении плана двойственной задачи (системы предварительных оценок) реализуется только случай 4°: базисы соседних опорных планов различаются одной строкой (или, в терминах исходной задачи, одним вектором условий).

В качестве второго примера приведем постановку общей задачи линейного программирования в форме Л. В. Канторовича [64] (в форме общей планово-производственной задачи).

Производство или группа предприятий должны выпускать m_2 различных конечных продуктов в заранее заданной пропорции (в заданном ассортименте), определяемой числами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m_2}$. При этом используются m_1 производственных факторов, запасы которых составляют $b_1, b_2, \ldots, b_{m_1}$ соответствующих единиц. По условию, $b_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m_1)$. Если $b_i = 0$, то это означает, что i-й фактор является полуфабрикатом данного производства.

Имеется определенное количество (n) заранее отработанных способов производства. Способ производства с номером j характеризуется вектором

$$\bar{A}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})^T,$$

где $m = m_1 + m_2$. Первые m_1 компонент вектора A_j определяют затраты соответствующих производственных факторов, связанные с реализацией j-го способа производства в течение единицы времени (с единичной интенсивностью). Остальные m_2 компонент совпадают с количествами соответствующих конечных продуктов, производимыми по данному способу в единицу времени. Основная цель производства заключается в получении возможно большего количества конечных продуктов при соблюдении заданных пропорций, используя при этом только имеющиеся в наличии ресурсы.

Под планом производства, как обычно, понимается набор $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ интенсивностей использования различных способов производства.

Задача определения оптимального плана производства имеет следующую математическую формулировку.

Требуется определить вектор $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n, V)$, удовлетворяющий условиям

$$\sum_{j=1}^{n} a_{m_1+i,\,j}x_j \geqslant \lambda_i V, \qquad i=1, 2, \ldots, m_2; \tag{1.47}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \qquad i=1, 2, \ldots, m_1; \tag{1.48}$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j=1, 2, \ldots, n, \tag{1.49}$$

и имеющий максимально возможную $(n+1)$-ю компоненту

$$L(X)=V. \tag{1.50}$$

Если под комплектом конечных продуктов понимать набор этих продуктов в количествах $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m_2}$, то V — число комплектов конечных продуктов, которое можно получить при реализации плана $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Задача (1.47) — (1.50) имеет $n+1$ переменных, из которых n предполагаются неотрицательными, и $m=m_1+m_2$ условий-неравенств. В данном случае

$$\varphi_1=\min(n+1, \ m_1+m_2),$$
$$\varphi_2=m_1+m_2-1.$$

Обычно $n \ll m_1+m_2$, и, следовательно, $\varphi_1<\varphi_2$. Это означает, что при решении задачи (1.47) — (1.50) целесообразно оставить ее в том естественном виде, в котором она формулируется.

В следующем параграфе, где рассматривается модификация метода улучшения плана, основанная на одновременном введении в базис нескольких векторов условий, мы снова столкнемся с необходимостью использовать изложенный здесь метод.

Отметим, наконец, класс задач наилучшего равномерного приближения функций, заданных на конечной системе точек, посредством линейных комбинаций фиксированного набора функций. Применение метода улучшения плана в той форме, которая была здесь описана, к задачам указанного класса приводит к методу С. И. Зуховицкого [60].

В этом параграфе мы затронули только метод улучшения плана. Однако это не означает, что другие общие методы линейного программирования могут использоваться лишь для задач, приведенных к каноническому виду. Каждый общий метод линейного программирования может быть приспособлен также и для задач типа (1.1)—(1.4), подобно тому как это сделано в настоящем параграфе применительно к методу улучшения плана.

§ 2. Модификация конечных методов

2.1. Рассмотрим общую задачу линейного программирования, заданную в канонической форме.

Метод последовательного улучшения плана состоит в движении по соседним опорным планам задачи, базисы которых различаются единственным вектором. Вектор, подлежащий включению в базис, выбирается из числа векторов условий, имеющих отрицательные относительные оценки. Обычно этим свойством обладает ряд векторов условий. Каждый такой вектор является подходящим для введения в базис. Однако в соответствии с рекомендациями метода улучшения плана в новый базис включается только один подходящий вектор. Возникает вопрос, нельзя ли так модифицировать метод улучшения плана, чтобы можно было вводить в базис сразу несколько подходящих векторов условий. Аналогичный вопрос встает и для метода последовательного уточнения оценок.

При использовании метода уточнения оценок процесс решения задачи заключается в движении по ее соседним псевдопланам. Базисы двух соседних псевдопланов различаются только одним вектором условий. Для перехода к новому псевдоплану вычисляются коэффициенты разложения вектора ограничений по векторам базиса данного псевдоплана. Векторы базиса, отвечающие отрицательным коэффициентам, являются подходящими для исключения из базиса. Хотя в большинстве случаев имеется несколько подходящих для исключения векторов, из базиса удаляется только один из них. Поэтому совершенно естественным является вопрос о том, можно ли исключить из базиса псевдоплана сразу несколько подходящих векторов.

Настоящий параграф посвящен рассмотрению поставленных вопросов. Оказывается, каждый из них разрешается в положительном смысле, причем для задач больших размеров реализация соображений, указанных ниже, приводит к весьма ощутимым вычислительным преимуществам. Основная часть параграфа относится к методу улучшения плана, модификация метода уточнения оценок излагается более кратко. Некоторые из рекомендаций этого параграфа содержатся также в работе [2].

2.2. Все рассуждения будут проводиться применительно к задаче линейного программирования, состоящей в максимизации линейной формы

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.1}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m; \tag{2.2}$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{2.3}$$

Пусть $X_0=(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ \ldots,\ x_n^{(0)})$ — опорный план задачи (2.1) — (2.3) с базисом $A_{s_1},\ A_{s_2},\ \ldots,\ A_{s_m}$. Здесь, как обычно, $A_j=(a_{1j},\ a_{2j},\ \ldots,\ a_{nj})^T$ — j-й вектор условий задачи (2.1) — (2.3).

Перепишем систему уравнений (2.2) в эквивалентной форме, выразив базисные переменные данного плана относительно остальных неизвестных системы (см. п. 4.1 гл. 5):

$$x_{s_i}=x_{i0}-\sum_{j\notin I_{X_0}} x_{ij} x_j, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m. \tag{2.4}$$

Здесь величины $x_{1j},\ x_{2j},\ \ldots,\ x_{mj}$ являются соответствующими коэффициентами разложения вектора A_j по векторам $A_{s_1},\ A_{s_2}\ \ldots,\ A_{s_m}$ базиса плана X_0 ($j=0,\ 1,\ \ldots,\ n$; $A_0=B$). Через I_{X_0} обозначено множество индексов $s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_m$, отвечающих векторам базиса плана X_0.

Если заменить в линейной форме (2.1) переменные x_{s_i}, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ m$ их выражениями из (2.4), получим (см.

формулу (4.7) гл. 5)

$$L(X)=L(X_0)-\sum_{j\notin I_{X_0}}\Delta_j x_j, \tag{2.5}$$

где

$$\Delta_j=\sum_{i=1}^{m}x_{ij}c_{s_i}-c_j, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

В случае $\Delta_j \geqslant 0$ для $j\notin I_{X_0}$ план X_0 оказывается оптимальным. Допустим теперь, что среди параметров Δ_j имеются отрицательные. В соответствии с методом улучшения плана выбирается один из таких параметров, скажем, $\Delta_k<0$. После этого внебазисная переменная x_k начинает увеличиваться. Остальные внебазисные переменные сохраняют свои нулевые значения. Величины базисных переменных определяются формулой (2.4).

Если обозначить текущее значение k-й переменной через θ, то для выполнения условий (2.3) необходимо и достаточно, чтобы

$$x_{i0}-\theta x_{ik}\geqslant 0, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ \theta\geqslant 0. \tag{2.6}$$

При соблюдении требований (2.6) вектор

$$X(\theta)=(x_1(\theta),\quad x_2(\theta),\ \ldots,\ x_n(\theta)),$$

где

$$x_j(\theta)=\begin{cases} x_{i0}-\theta x_{ik}, & j=s_i\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m),\\ \theta, & j=k,\\ x_j^{(0)} & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

оказывается планом задачи (2.1)—(2.3).

Переход от плана X_0 к плану $X(\theta)$ сопровождается возрастанием линейной формы (2.1) на величину

$$L(X(\theta))-L(X_0)=-\Delta_k\theta. \tag{2.7}$$

Естественно подобрать такое значение θ_0 переменной θ, на котором линейная функция (2.7) достигает максимума при условиях (2.6). Значение θ_0 является, таким образом, решением задачи линейного программирования (2.6), (2.7) с одной переменной (θ).

Допустим теперь, что имеется ряд отрицательных величин Δ_j. Попытаемся ввести сразу несколько векторов условий A_j ($j\notin I_{X_0}$, $\Delta_j<0$) в базис плана X_0.

Обозначим через E множество индексов векторов A_μ, которые выбраны для одновременного включения в базис. Пусть θ_μ $(\mu \in E)$ — текущее значение переменной, отвечающей вводимому вектору A_μ. Из соотношений (2.4) получаем, что при фиксированных значениях θ_μ, $\mu \in E$ величины базисных (в смысле X_0) переменных x_{s_i} оказываются равными

$$x_{i0} - \sum_{\mu \in E} x_{i\mu}\theta_\mu.$$

Таким образом, параметры θ_μ, $\mu \in E$, определяют преобразование плана X_0 в вектор $X(\theta) = (x_1(\theta), \ldots, x_n(\theta))$, определяемый формулой

$$x_j(\theta) = \begin{cases} x_{i0} - \sum\limits_{\mu \in E} x_{i\mu}\theta_\mu, & j = s_i \ (i = 1, 2, \ldots, m), \\ \theta_j, & j \in E, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{2.8}$$

Здесь под θ понимается набор параметров θ_μ при $\mu \in E$.

По построению вектор $X(\theta)$ удовлетворяет равенствам (2.2) при любых значениях θ_μ, $\mu \in E_X$. Поэтому соблюдение системы неравенств

$$x_{i0} - \sum_{\mu \in E} x_{i\mu}\theta_\mu \geqslant 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{2.9}$$

и

$$\theta_\mu \geqslant 0, \quad \mu \in E, \tag{2.10}$$

является необходимым и достаточным условием для того, чтобы вектор $X(\theta)$ был планом задачи (2.1)—(2.3).

Из равенства (2.5) получаем

$$L(X(\theta)) - L(X_0) = -\sum_{\mu \in E} \Delta_\mu \theta_\mu. \tag{2.11}$$

Параметры θ_μ, $\mu \in E$, естественно выбрать такими, чтобы при переходе к новому плану $X(\theta)$ линейная форма (2.1) увеличилась на возможно большую величину. Следовательно, искомые значения пераметров θ_μ, $\mu \in E$, определяются путем максимизации линейной формы (2.11), переменные которой связаны ограничениями (2.9) и (2.10).

Назовем задачу (2.9)—(2.11) *вспомогательной задачей*, отвечающей плану X_0 и множеству E. Обозначим через t число переменных вспомогательной задачи, равное числу элементов множества E. Матрица $A_{X_0, E}$ условий вспомогательной задачи состоит из элементов x_{i_μ} и имеет размеры $m \times t$.

2.3. Сформулированная задача (2.9)—(2.11) записана не в канонической форме. Поэтому для ее решения может быть использована модификация метода улучшения плана, изложенная в предыдущем параграфе. В соответствии с общим определением, данным в п. 1.1, каждому опорному плану задачи (2.9)—(2.11) отвечает невырожденная квадратная подматрица матрицы $A_{X_0, E}$ — базис опорного плана. Порядок базиса $\bar{\tau}$ изменяется в пределах от 0 до $\min(t, m)$. Число переменных t вспомогательной задачи (2.9)—(2.11) обычно выбирается меньшим m. Поэтому

$$0 \leqslant \bar{\tau} \leqslant t.$$

Отметим, что случай $\bar{\tau} = 0$ (множество элементов базиса пусто) в данной задаче реализуем. Этому случаю отвечает опорный план $\theta_\mu = 0$ для $\mu \in E$.

Приняв опорный план $\theta_\mu = 0$ для $\mu \in E$ за исходный, применим для решения задачи (2.9)—(2.11) метод последовательного улучшения плана. Поскольку $\Delta_\mu < 0$ при $\mu \in E$, первая итерация метода не может завершиться случаем 1°. Следовательно, процесс решения вспомогательной задачи закончится либо установлением ее неразрешимости, либо получением опорного оптимального плана с базисом порядка τ, где

$$1 \leqslant \tau \leqslant t.$$

Первая возможность указывает на неразрешимость исходной задачи (2.1)—(2.3). Рассмотрим вторую возможность.

Пусть базис полученного опорного решения $\bar{\theta}_\mu$, $\mu \in E$, вспомогательной задачи состоит из элементов, расположенных на пересечении строк и столбцов матрицы $A_{X_0, E}$ с номерами $r_1, r_2, \ldots, r_\tau$ и $k_1, k_2, \ldots, k_\tau$ соответственно. Обозначим через $X' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ план задачи (2.1)—(2.3), который определяется по формуле (2.8), где параметры θ_μ заменены на $\bar{\theta}_\mu$ $(\mu \in E)$.

Очевидно,

$$x'_{s_i} = x_{i0} - \sum_{\mu \in E} x_{i\mu}\bar{\theta}_\mu = 0 \quad \text{при} \quad i = r_1, r_2, \ldots, r_\tau;$$

$$x'_j = 0, \quad \text{если} \quad j \notin I_{X_0} \quad \text{и} \quad j \neq k_1, k_2, \ldots, k_\tau.$$

Пусть $I_{X'}$ — множество индексов векторов условий, образуемое из I_{X_0} заменой индексов s_i для $i=r_1, r_2, \ldots, r_\tau$ на $k_1, k_2, \ldots, k_\tau$.

Для доказательства опорности плана X' необходимо убедиться в линейной независимости векторов A_j, $j \in I_{X'}$.

Положим

$$X_j = A_{X_0}^{-1} A_j = (x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{mj})^T,$$

где A_{X_0} — матрица, составленная из векторов базиса плана X_0. Образуем определитель $D_{X'}$ из компонент векторов X_j, $j \in I_{X'}$. Раскладывая определитель $D_{X'}$ по столбцам

$$X_{s_i} = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0, 1}_{i}, 0, \ldots, 0)^T,$$

$$1 \leqslant i \leqslant m, \quad i \neq r_\lambda, \quad 1 \leqslant \lambda \leqslant \tau,$$

имеем

$$D_{X'} = \pm D_0,$$

где D_0 — определитель базиса решения вспомогательной задачи (2.9)—(2.11) Но $D_0 \neq 0$. Следовательно, $D_{X'} \neq 0$, и система векторов X_j, $j \in I_{X'}$ линейно независима.

Учитывая, далее, что $A_j = A_{X_0} X_j$ и $|A_{X_0}| \neq 0$, приходим к выводу о линейной независимости системы A_j для $j \in I_{X'}$. Итак, опорность плана X' доказана.

В результате решения вспомогательной задачи получаем:

а) индексы $j \in E$ векторов A_j, которые целесообразно включить в базис ($j = k_\lambda$, $\lambda = 1, 2, \ldots, \tau$);

б) индексы s_i векторов A_{s_i}, подлежащих исключению из базиса ($i = r_\lambda$, $\lambda = 1, 2, \ldots, \tau$).

Отметим, что число τ векторов, вводимых в базис, может оказаться меньшим числа t элементов множества E. Однако, как мы видели, $\tau \geqslant 1$. Поэтому хотя бы одна позиция базиса будет заведомо обновлена. В большинстве случаев число обновляемых позиций базиса оказывается бо́льшим единицы. Совокупность операций, необходимых для перехода от плана X_0 к плану X', назовем ***большой итерацией***. Отдельный шаг метода улучшения плана, применяемого для решения вспомогательной задачи, будем называть ***малой итерацией***. Для начала очередной большой итерации, связанной с опорным планом X', необходимо знать либо коэффициенты разложения векторов условий по базису плана

X' (первый алгоритм), либо матрицу, обратную для базиса плана X' (второй алгоритм).

2.4. Остановимся на втором алгоритме. Выведем рекуррентные соотношения, которые связывают элементы матриц

$$A_{X_0}^{-1}=\|e_{ij}\|_m,\quad A_{X'}^{-1}=\|e'_{ij}\|_m.$$

Матрицы A_{X_0} и $A_{X'}$ — матрицы базисов планов X_0 и X' различаются τ векторами. Для упрощения обозначений допустим, что в матрице A_{X_0} заменяются первые τ позиций, т. е. $r_1=1, \ldots, r_\tau=\tau$. Этого всегда можно добиться за счет соответствующей перестановки столбцов матрицы A_{X_0} и строк матрицы $A_{X_0}^{-1}$. Итак,

$$A_{X'}=(A_{k_1},\ A_{k_2},\ \ldots,\ A_{k_\tau},\ A_{s_{\tau+1}},\ \ldots,\ A_{s_m}).$$

Умножая $A_{X'}$ слева на $A_{X_0}^{-1}$, имеем

$$A_{X_0}^{-1}A_{X'}=(X_{k_1},\ X_{k_2},\ \ldots,\ X_{k_\tau},\ e_{\tau+1},\ \ldots,\ e_m), \tag{2.12}$$

где

$$X_j=A_{X_0}^{-1}A_j,\quad e_i=(\underbrace{0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 1}_{i},\ 0,\ \ldots,\ 0)^T.$$

Матрица $(X_{k_1}, X_{k_2}, \ldots, X_{k_\tau})$ составлена из коэффициентов разложения вводимых в базис векторов $A_{k_1}, A_{k_2}, \ldots, A_{k_\tau}$ по векторам базиса плана X_0.

Пусть $\overline{B}_\tau$ — квадратная матрица порядка τ, образованная первыми τ строками матрицы $(X_{k_1}, \ldots, X_{k_\tau})$ ($\overline{B}_\tau$ состоит из коэффициентов разложения вводимых векторов, которые соответствуют векторам, исключаемым из базиса). Обозначим через $\overline{\overline{B}}_{m-\tau,\,\tau}$ матрицу размеров $(m-\tau)\times\tau$, составленную из остальных $(m-\tau)$ строк матрицы $(X_{k_1}, X_{k_2}, \ldots, X_{k_\tau})$.

В этих обозначениях равенство (2.12) может быть переписано в виде

$$A_{X_0}^{-1}A_{X'}=\left\|\begin{matrix}\overline{B}_\tau & O_{\tau,\,m-\tau}\\ \overline{\overline{B}}_{m-\tau,\,\tau} & E_{m-\tau}\end{matrix}\right\|, \tag{2.13}$$

где $O_{\tau,\,m-\tau}$ — нулевая матрица размеров $\tau\times(m-\tau)$, $E_{m-\tau}$ — единичная матрица порядка $m-\tau$. Путем непосредственного перемножения матриц нетрудно проверить справедливость равенства

$$D=\begin{Vmatrix} \overline{B}_\tau & O_{\tau,\, m-\tau} \\ \overline{\overline{B}}_{m-\tau,\, \tau} & E_{m-\tau} \end{Vmatrix}^{-1} = \begin{Vmatrix} \overline{B}_t^{-1} & O_{\tau,\, m-\tau} \\ -\overline{\overline{B}}_{m-\tau,\, \tau}\overline{B}_\tau^{-1} & E_{m-\tau} \end{Vmatrix}. \quad (2.14)$$

Используя равенства (2.13) и (2.14), получаем

$$DA_{X_0}^{-1}A_{X'}=E_m.$$

Следовательно,

$$A_{X'}^{-1}=DA_{X_0}^{-1}. \quad (2.15)$$

Соотношение (2.15) устанавливает искомую связь между матрицами $A_{X'}^{-1}$ и $A_{X_0}^{-1}$.

Разделим элементы матрицы $A_{X_0}^{-1}=\|e_{ij}\|_m$ на две группы: первая группа охватывает первые τ строк матрицы $A_{X_0}^{-1}$, вторая составлена из элементов оставшихся $m-\tau$ строк. Полученные группы элементов представляют собой матрицы $\|e_{ij}\|_{\tau,\, m}$, $\|e_{i+\tau,\, j}\|_{m-\tau,\, m}$ размеров $\tau\times m$ и $(m-\tau)\times m$ соответственно. Аналогично разобьем матрицу $A_{X'}^{-1}=\|e'_{ij}\|_m$ на матрицы $\|e'_{ij}\|_{\tau,\, m}$ и $\|e'_{i+\tau,\, j}\|_{m-\tau,\, \tau}$. Учет специальной структуры матрицы D, определяемой соотношением (2.14), позволяет конкретизировать формулу (2.15) следующим образом:

$$\|e'_{i+\tau,\, j}\|_{m-\tau,\, \tau}=\|e_{i+\tau,\, j}\|_{m-\tau,\, m}-\overline{\overline{B}}_{m-\tau,\, \tau}\overline{B}_\tau^{-1}\|e_{ij}\|_{\tau,\, m}; \quad (2.16)$$

$$\|e'_{ij}\|_{\tau,\, m}=\overline{B}_\tau^{-1}\|e_{ij}\|_{\tau,\, m}. \quad (2.17)$$

Полученные формулы являются естественным обобщением рекуррентных соотношений (1.21) гл. 5, которые широко использовались при алгоритмизации методов линейного программирования. Эти соотношения — частный случай формул (2.16), (2.17) при $\tau=1$.

Приведем краткое описание последовательности действий, связанных с одной большой итерацией при использовании второго алгоритма.

Перед началом итерации известны опорный план X_0 с базисом $\{A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m}\}=A_{X_0}$ и обратная матрица

$$A_{X_0}^{-1}=\|e_{ij}\|_m.$$

Вычисляются величины

$$\lambda_i = \sum_{\alpha=1}^{m} c_{s\alpha} e_{\alpha i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

затем определяются параметры

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \lambda_i - c_j, \qquad j \notin I_{X_0}.$$

В случае неотрицательности всех параметров Δ_j делается вывод об оптимальности плана X_0. Если же среди Δ_j имеются отрицательные числа, то приступают к построению нового опорного плана X'. Для этого выбирается несколько (t) векторов условий, которые целесообразно ввести в базис (множество индексов таких векторов обозначено через E). Целесообразность ввода вектора A_j в базис обычно определяется величиной Δ_j — оценкой A_j относительно старого базиса. Однако при выборе системы вводимых векторов могут использоваться и другие соображения. Выбор числа t элементов множества E во многом зависит от характера применяемых вычислительных средств, обычно $t < m$ (к этому вопросу мы вернемся в следующем пункте).

Множество E определяет вспомогательную задачу (2.9)—(2.11) с t неотрицательными переменными и m условиями-неравенствами. Параметры x_{ij} вспомогательной задачи вычисляются с помощью матрицы $\|e_{ij}\|_m$:

$$x_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{m} a_{\alpha j} e_{i\alpha} \qquad (j \in E).$$

Для решения задачи (2.9)—(2.11) применяется модификация метода улучшения плана, описанная в предыдущем параграфе. В исходном плане вспомогательной задачи все переменные равны нулю, базис этого плана не содержит ни одного элемента. На каждом шаге решения вспомогательной задачи вычисляется (по рекуррентным формулам) обратная матрица по отношению к базису соответствующего плана. Процесс решения завершается либо обнаружением неразрешимости вспомогательной задачи, либо определением её оптимального плана с базисом $\bar{B}_\tau$. В первом случае делается вывод о неразрешимости задачи (2.1)—(2.3), во втором —

осуществляется переход к новому опорному плану исследуемой задачи.

Пусть базис $\bar{B}_\tau$ оптимального плана $\bar{\theta}_\mu$, $\mu \in E$ задачи (2.9)—(2.11) состоит из элементов матрицы условий вспомогательной задачи, которые расположены на пересечении строк и столбцов с номерами $r_1, r_2, \ldots, r_\tau$ и $k_1, k_2, \ldots, k_\tau$ соответственно. В таком случае базис $A_{X'}$ нового опорного плана X' задачи (2.1)—(2.3) образуется из A_{X_0} путем обновления позиций $r_1, r_2, \ldots, r_\tau$ за счет векторов A_{k_1}, $A_{k_2}, \ldots, A_{k_\tau}$; компоненты плана X' вычисляются по формулам (2.8), где θ_μ заменены на $\bar{\theta}_\mu$.

При решении вспомогательной задачи вместе с ее оптимальным планом вычисляется матрица $\bar{B}_\tau^{-1}$. Поэтому для определения матрицы

$$A_{X'}^{-1} = \| e'_{ij} \|_m,$$

обратной для базиса плана X', можно воспользоваться рекуррентными соотношениями (2.16), (2.17). В результате получаем план X' и матрицу $A_{X'}^{-1}$ — необходимые данные для проведения следующей большой итерации.

2.5. Сделаем несколько замечаний, которые позволят читателю более отчетливо представить смысл и достоинства описанной здесь модификации метода улучшения плана. Поясним геометрическую сущность большой итерации. Ограничимся первой геометрической интерпретацией. Опорный план X_0 соответствует вершине многогранного множества условий задачи (2.1)—(2.3) (множества M). После выяснения неоптимальности плана X_0 формируется множество E индексов векторов условий, выбранных для включения в новый базис. Множество E определяет вспомогательную задачу данной итерации. Вершина X является пересечением гиперплоскости с уравнениями (2.2) и

$$x_j = 0 \quad \text{при} \quad j \notin I_{X_0}. \tag{2.18}$$

Выделив множество E, мы заменяем ограничения (2.18) для $j \in E$ условиями $x_j \geqslant 0$. Следовательно, многогранное множество M_E условий вспомогательной задачи является гранью множества M, проходящей через вершину X_0. Вспомогательная задача связана с максимизацией линейной формы основной задачи на множестве M_E. Размерность ϱ_E множества

M_E не превосходит t. В невырожденном случае $\varrho_E = t$. Точка X_0 — вершина множества M_E. Процесс решения вспомогательной задачи состоит в движении по соседним вершинам множества M_E, начиная с вершины X_0. Это движение осуществляется по правилам метода улучшения плана и поэтому (в невырожденном случае) сопровождается монотонным увеличением линейной формы задачи (2.1)—(2.3).

Операции, связанные с переходом от одной вершины множества M_E к другой (соседней), составляют малую итерацию. Каждая вершина M_E является вершиной множества M. Поэтому, получив оптимальный опорный план вспомогательной задачи, мы тем самым придем к новому опорному плану X' основной задачи — результату данной большой итерации.

При $t = 1$ и невырожденности плана X_0 множество M_E оказывается ребром множества M.

Ограниченное множество M_E имеет две вершины. Поэтому решение вспомогательной задачи требует только одной итерации. Этот случай имеет место при использовании обычной формы метода улучшения плана.

Вспомогательная задача образуется из основной задачи, если в последней некоторые из переменных полагаются равными нулю. Выбор нулевых переменных для каждой вспомогательной задачи может осуществляться различными способами.

При использовании метода улучшения плана естественно руководствоваться величинами оценок Δ_j векторов условий A_j относительно данного базиса, полагая равными нулю те x_j, для которых $\Delta_j > \Delta$, где Δ — некоторое число. В методе сокращения невязок и в его модификациях также строится последовательность вспомогательных задач. Однако здесь для выбора $x_j = 0$ используется текущий план двойственной задачи.

Приведенная здесь модификация метода улучшения плана позволяет расширить ограничения на размеры задачи, которые определяются емкостью оперативной памяти используемой универсальной вычислительной машины. Матрица условий задачи больших размеров записывается во внешнюю память вычислительной машины.

В процессе проведения большой итерации в оперативной памяти машины целесообразно хранить только условия вспомогательной задачи, размеры которой $m \times t$. Это позволит отнести все взаимодействия с внешней памятью в конец большой итерации. Значительная часть времени, затрачиваемого машиной на решение задачи, связана с обращением к внешним запоминающим устройствам. Поэтому сокращение числа таких обращений резко уменьшает время решения задачи.

При формировании вспомогательной задачи имеется возможность варьировать значением параметра t — числом переменных вспомогательной задачи. Емкость оперативной памяти ограничивает величину t сверху. В начале решения основной задачи, когда имеющийся план еще далек от оптимального, приращение линейной формы за одну большую итерацию оказывается тем значительнее, чем больше число t. Поэтому, увеличивая t, мы сокращаем количество больших итераций и, следовательно, уменьшаем число обращений к внешней памяти.

Естественно, что при этом возрастает количество малых итераций, необходимых для решения вспомогательной задачи. Однако увеличение размеров вспомогательной задачи мало сказывается на времени, необходимом для решения всей задачи, так как малые итерации не требуют обращения к внешней памяти. Итак, в начале процесса решения задачи следует выбирать значение параметра t возможно бо̀льшим. В конце решения основной задачи параметру t целесообразно придавать несколько меньшее значение, поскольку приращение линейной формы теперь уже мало зависит от t.

При решении задач больших размеров конечными методами линейного программирования число итераций может быть достаточно велико. Поэтому для получения искомого решения с определенной степенью точности следует:

а) либо проводить все вычисления с достаточным запасом знаков,

б) либо через каждые несколько итераций вычислять текущие параметры непосредственно (без использования рекуррентных формул).

Возможность использования первого пути ограничивается емкостью оперативной памяти. Реализация второй рекомендации может существенно увеличить время, потребное для решения задачи. Применение предложенной здесь модификации метода улучшения плана снижает влияние ошибок округления. Это объясняется тем, что в течение одной большой итерации решается задача сравнительно малых размеров. При переходе к следующей большой итерации параметры задачи иногда целесообразно пересчитывать путем непосредственного вычисления соответствующей обратной матрицы.

2.6. Рассмотрим теперь возможность одновременного вывода нескольких векторов из базиса псевдоплана при использовании метода уточнения оценок. Описание соответствующей модификации метода уточнения оценок проводится кратко. Тем не менее читатель, познакомившийся с предшествующими пунктами этого параграфа, сможет восстановить недостающие детали самостоятельно.

Допустим, что нам известен псевдоплан $X_0=(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ задачи (2.1)—(2.3) с базисом $A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m}$. Псевдоплан X отвечает некоторому опорному плану $Y_0=(y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)})$ задачи, двойственной по отношению к задаче (2.1) —(2.3).

Пусть

$$A_j=\sum_{i=1}^{m} x_{ij}A_{s_i}, \qquad j=0,\ 1,\ \ldots,\ n;$$

$$\Delta_j=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^{(0)}-c_j=\sum_{i=1}^{m} c_{s_i}x_{ij}-c_j,\quad j=1,\ 2,\ldots,\ n.$$

Таким образом,

$$x_{s_i}^{(0)}=x_{i0},\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\quad x_j^{(0)}=0 \quad \text{при} \quad j\neq s_i.$$

Предположим, что среди базисных компонент x_{i0} псевдоплана X_0 имеются отрицательные. Это указывает на необходимость изменения X_0 путем уточнения системы предварительных оценок Y_0.

Выберем несколько векторов, входящих в базис псевдоплана и имеющих отрицательные значения базисных компонент. Пусть эти векторы расположены в позициях базиса с номерами $r_1, r_2, \ldots, r_t$ $(t<m)$. Для того чтобы выяснить, какие из выбранных векторов целесообразно исключить из базиса и какими векторами следует заполнить освободившиеся позиции, необходимо решить следующую вспомогательную задачу:

Максимизировать линейную форму

$$-\sum_{j=1}^{n} \Delta_j x_j \tag{2.19}$$

при соблюдении условий

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} x_j = x_{i0}, \qquad i = r_1, r_2, \ldots, r_t; \tag{2.20}$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.21}$$

Пусть компоненты вектора $\overline{X}_0 = (\overline{x}_1^{(0)}, \overline{x}_2^{(0)}, \ldots, \overline{x}_n^{(0)})$ определяются равенствами

$$\overline{x}_j^{(0)} = \begin{cases} x_j^{(0)}, & \text{если } j = s_\lambda \text{ при } \lambda = r_1, r_2, \ldots, r_t, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Как нетрудно видеть, $\overline{X}_0$ — псевдоплан задачи (2.19)—(2.21) с базисом $A_{s\lambda}$, $\lambda = r_1, r_2, \ldots, r_t$. Поэтому для решения задачи (2.19)—(2.20) целесообразно использовать метод уточнения оценок, отправляясь от имеющегося псевдоплана $\overline{X}_0$.

Решив задачу (2.19)—(2.21), получим ее оптимальный план с базисом из векторов $A_{k_1}, A_{k_2}, \ldots, A_{k_t}$.

Базис нового псевдоплана задачи (2.1)—(2.3) образуется из предшествующего базиса путем обновления позиций $r_1, r_2, \ldots, r_t$ с помощью векторов $A_{k_1}, A_{k_2}, \ldots, A_{k_t}$. Отметим, что некоторые из векторов A_{k_i} могут совпадать с векторами A_{s_λ}, $\lambda = r_1, \ldots, r_t$; соответствующие позиции базиса не обновляются. При использовании указанной модификации метода уточнения оценок можно придерживаться как первого, так и второго алгоритмов. Эта модификация имеет те же вычислительные достоинства, что и соответствующее видоизменение метода улучшения плана (см. п. 2.5).

§ 3. Классификация конечных методов линейного программирования

3.1. В предыдущих главах подробно изучены три конечных метода линейного программирования: метод последовательного улучшения плана, метод последовательного уточнения оценок и метод последовательного сокращения невязок.

В различных главах приводятся замечания о других конечных методах и о возможных модификациях описанных здесь методов. В связи с этим представляется целесообразным рассмотреть различные конечные методы с единой точки зрения, сравнить принципы, на которых они основаны, структуру каждой итерации и порядок перехода от одной итерации к следующей.

Возможны различные подходы к систематизации конечных методов линейного программирования. Методы линейного программирования относят к разным группам в зависимости от того, используется для достижения решения прямая задача или ей сопряженная, или обе задачи двойственной пары совместно. Задачи линейного программирования имеют наглядное геометрическое и экономическое истолкование. Известные методы решения линейных экстремальных задач могут также классифицироваться с точки зрения каждой из этих интерпретаций. Имеются и другие формальные основания, позволяющие проанализировать конечные методы с единых позиций.

Необходимость единого подхода к различным методам линейного программирования вынуждает нас в следующих пунктах кратко повторить некоторые общие соображения, которые излагались в различных главах применительно к каждому методу в отдельности.

3.2. Естественно различать конечные методы линейного программирования в зависимости от того, получают ли решения задачи при движении по планам прямой задачи, или по планам сопряженной задачи, или при совместном использовании обеих задач двойственной пары.

При таком признаке классификации метод последовательного улучшения плана и различные его модификации следует отнести к конечным методам первой группы, в которых оптимальный план достигается при движении по опорным планам исходной задачи. Процесс решения начинается с анализа исходного опорного плана задачи. В каждой итерации метода осуществляется переход от одного опорного плана задачи к другому, соответствующему, вообще говоря, бо́льшему значению линейной формы.

Метод последовательного уточнения оценок и различные его модификации следует отнести ко второй группе конечных методов линейного программирования, в которых решение исходной задачи достигается при движении по планам сопряженной задачи. Процесс решения начинается с анализа заданного опорного плана сопряженной задачи. Каждая итерация метода соответствует переходу от одного опорного плана сопряженной задачи к другому, или, что то же самое, от одного псевдоплана исходной задачи к другому. Переход к новому плану сопряженной задачи связан, вообще говоря, с уменьшением ее линейной формы. Другими словами, переход к очередному псевдоплану приводит, вообще говоря, к уменьшению линейной формы исходной задачи. Вычислительная схема метода последовательного уточнения оценок формулируется в терминах исходной задачи.

Метод последовательного сокращения невязок в рассматриваемой классификации относится к третьей группе методов, в которой используются обе задачи двойственной пары. Процесс решения задачи начинается с анализа заданного плана (не обязательно опорного) сопряженной задачи. Каждой итерации метода соответствует переход от одного плана сопряженной задачи к следующему. При этом в расширенной задаче, отличающейся от исходной задачи линейной формой и дополнительными переменными с единичными векторами условий, происходит переход от одного опорного плана к другому. В терминах исходной задачи каждая итерация метода сокращения невязок означает переход от одного квазиплана задачи к следующему, с меньшей невязкой.

Наиболее четко характеристики методов третьей группы выступают в одной из модификаций метода сокращения невязок — в методе двухсторонних оценок. Здесь решение задачи начинается с произвольного (не обязательно опорного) плана сопряженной задачи и некоторого опорного плана прямой задачи. В результате каждой итерации производится переход к новому плану сопряженной задачи и новому опорному плану исходной задачи. В методе двухсторонних оценок от шага к шагу сокращается невязка плана — разность между значениями линейных форм сопряженной и исходной задач на соответствующих планах.

Приведенные соображения позволяют считать три описанных в настоящей книге метода основными представителями трех групп конечных методов, связанных с принципиально различными подходами к решению задач линейного программирования.

3.3. В главах 1, 2 и 3 приведены две геометрические интерпретации задачи линейного программирования и сопряженной с ней задачи. Для обзора и сравнения различных конечных методов более удобна вторая интерпретация. Как обычно при этом геометрическом истолковании, задача предполагается записанной в канонической форме.

В $(m+1)$-мерном пространстве точек $U=(u_1, \ldots, u_{m+1})$ рассматривается выпуклый многогранный конус K и прямая Q. Конус K порожден расширенными векторами условий $\bar{A}_j (j=1, 2, \ldots, n)$. Прямая Q, параллельная оси Ou_{m+1}, проходит через точку $B=(b_1, \ldots, b_m, 0)$, определяемую вектором ограничений. Между $(m+1)$-мерным пространством точек U и n-мерным пространством точек $X=(x_1, \ldots, x_n)$ установлено соответствие, согласно которому конус K отвечает точкам $X \geqslant 0$, а прямая Q является образом точек с нулевым вектором невязок,

$$E=B-AX$$

(здесь A — матрица условий задачи, B — вектор ограничений). Таким образом, общая часть прямой Q и конуса K соответствует точкам X, удовлетворяющим условиям

$$X \geqslant 0, \quad AX=B,$$

и, следовательно, является образом области определения линейной формы задачи.

В разрешимой задаче линейного программирования общая часть прямой Q и конуса K может состоять из отрезка или луча. Для простоты изложения будем рассматривать случай, когда пересечение прямой и конуса представляет собой отрезок. Координата u_{m+1} точек U определяет значение линейной формы на соответствующем векторе X. Верхняя точка M пересечения прямой Q и конуса K отвечает максимальному значению линейной формы, а нижняя точка m — минимальному значению линейной формы в области своего определения. Таким образом, в геометрических терминах задача линейного программирования сводится к отысканию верхней (в задачах на максимум) точки пересечения прямой Q и конуса K.

Гиперплоскости, натянутые на m линейно независимых расширенных векторов условий и пересекающие отрезок Mm, соответствуют опорным планам задачи. Гиперплоскости, натянутые на m линейно независимых расширенных векторов условий, не пересекающие отрезок и расположенные над конусом K, соответствуют опорным планам сопряженной задачи.

Можно доказать (см. упражнения 8 и 9), что если образом области определения линейной формы исходной задачи является отрезок Mm, то области определения линейной формы сопряженной задачи отвечает луч MQ — часть прямой Q, расположенная над точкой M.

Отрезок Mm содержит конечное число точек — образов опорных планов исходной задачи. Точно так же луч MQ содержит конечное число точек, соответствующих опорным планам сопряженной задачи.

Точкам поверхности конуса K, за исключением точек M и m, соответствуют векторы X с ненулевыми векторами невязок. Поверхность конуса может быть разбита на верхнюю и нижнюю части. Точка U поверхности конуса относится к верхней части поверхности, если через луч OU может быть проведена гиперплоскость, разделяющая конус K и положительную полуось Ou_{m+1}. Аналогично определяется нижняя часть поверхности конуса.

Построения, подробно описанные в п. 3.1 гл. 7, позволяют выделить конечное число точек верхней части поверхности конуса, соответствующих квазипланам задачи максимизации, и точки нижней части поверхности конуса — образы квазипланов задачи минимизации.

В приведенных геометрических понятиях легко сформулировать особенности различных конечных методов линейного программирования.

Метод последовательного улучшения плана и его модификации соответствуют движению по планам задачи. От итерации к итерации мы переходим от одного опорного плана задачи к другому, вообще говоря, с бо́льшим (в задачах максимизации) значением линейной формы. Следовательно, метод улучшения плана соответствует движению по точкам отрезка Mm, образам опорных планов исходной задачи, вверх до точки M.

Метод последовательного уточнения оценок и его модификации соответствуют движению по опорным планам сопряженной задачи. Каждая итерация метода определяет переход от одного опорного плана сопряженной задачи к следующему, вообще говоря, с меньшим значением линейной формы. Следовательно, метод уточнения оценок соответствует движению по точкам луча MQ, образам опорных планов сопряженной задачи, вниз до точки M.

Каждый шаг метода последовательного сокращения невязок переводит один квазиплан задачи в следующий, с меньшей невязкой. Следовательно, метод сокращения невязок для задач максимизации соответствует движению к оптимуму по точкам верхней части поверхности конуса, отвечающим квазипланам задачи.

Возможны конечные методы линейного программирования, которые приводят к оптимуму по более сложному пути. В частности, с точки зрения приведенной геометрической классификации методов, метод двухсторонних оценок, изложенный в § 6 гл. 7, следует отнести не к модификации метода сокращения невязок, а скорее рассматривать как комбинацию методов улучшения плана и уточнения оценок. В методе двухсторонних оценок приближение к оптимуму производится по прямой Q извне и изнутри конуса.

Итак, метод улучшения плана соответствует движению к оптимуму изнутри конуса задачи, метод уточнения оценок — извне конуса, а метод сокращения невязок — по поверхности конуса. Во всех трех случаях движение к оптимуму происходит по точкам, принадлежащим конечному множеству точек.

Таким образом, геометрическая классификация также свидетельствует о том, что три метода, рассмотренные в книге, могут с полным правом называться основными конечными методами линейного программирования.

3.4. Экономическая интерпретация задачи линейного программирования, введенная в п. 7.2 гл. 1, и экономическое истолкование двойственной задачи, изложенное в п. 1.5 гл. 3, позволяют с несколько иной точки зрения подойти к классификации конечных методов.

Как мы уже видели, формулировка задачи в экономических терминах более естественна, если условия задачи записываются в виде неравенств. Прямая задача с линейной формой

$$L=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (3.1)$$

и условиями

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m, \tag{3.2}$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{3.3}$$

интерпретируется как задача составления плана работы предприятия (выбора времен или интенсивностей использования технологических способов производства из числа заранее отработанных способов). Искомый план должен обеспечить максимальный выпуск некоторого однородного продукта при заданных ресурсах различных производственных факторов.

В соотношениях (3.1) — (3.3) приняты следующие обозначения:

x_j — время, в течение которого предприятие работает по j-му технологическому способу (интенсивность использования j-го способа производства);

a_{ij} — количество единиц i-го производственного фактора, используемое в j-м технологическом способе в единицу времени (при единичной интенсивности);

b_i — размер запаса i-го производственного фактора;

c_j — количество единиц продукции, выпускаемое в единицу времени при использовании одного лишь j-го технологического способа производства.

В некоторых случаях под c_j удобно понимать оценку (цену, стоимость) продукции, выпущенной в единицу времени при j-м способе производства. В зависимости от определения коэффициентов c_j линейная форма означает общий объем или общую оценку (цену, стоимость) выпускаемой продукции.

Каждый технологический способ производства характеризуется расширенным вектором условий $\bar{A}_j$. Первые m компонент вектора $\bar{A}_j$ определяет вектор затрат, а последняя составляющая совпадает с объемом или оценкой выпускаемой продукции.

Задача планирования производства, принятая за основу экономической интерпретации методов линейного программирования, может быть записана и в канонической форме. Для этого следует ввести m дополнительных фиктивных способов производства с единичными векторами затрат ($A_{m+i}=e_i$) и нулевыми оценками производительности. При способе производства с номером $m+i$ в единицу времени расходуется только i-й производственный фактор (единица i-го фактора в единицу времени) и ничего не производится. Фиктивные технологические способы производства используются в тех планах, которым соответствуют излишки отдельных производственных факторов.

План производства задается вектором X, компоненты которого обозначают времена (интенсивности) использования разных технологических способов. Оптимальный план обеспечивает наибольшую при заданных ресурсах оценку выпускаемой продукции (или, что то же самое, максимальный объем продукции предприятия).

Отправляясь от оценки выпускаемой продукции, можно естественным образом оценить отдельные производственные факторы. Система оценок $y_1, y_2, \ldots, y_m$ производственных факторов, план цен, определяется как решение задачи, сопряженной с задачей планирования производства. Эта задача состоит в вычислении минимума линейной формы

$$\tilde{L}(Y)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \tag{3.4}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j, \qquad j=1, 2, \ldots, n, \tag{3.5}$$

$$y_i \geqslant 0, \qquad i=1, 2, \ldots, m. \tag{3.6}$$

Линейная форма (3.4) интерпретируется как суммарная оценка ресурсов. Условия (3.5) требуют, чтобы оценка суммарных расходов производственных факторов при каждом технологическом способе производства была не меньше оценки выпускаемой за это же время продукции. Условия (3.6) имеют естественное происхождение: оценки не могут быть отрицательными величинами.

План цен определяет оптимальный план производства и, наоборот, оптимальному плану производства соответствует план цен — система оценок производственных факторов. Напомним, что оценки производственных факторов измеряются в единицах ценности выпускаемой продукции.

Ясно, что наиболее экономичными являются способы производства, для которых оценка затрат совпадает с оценкой продукции. Будем называть такие технологические способы *рентабельными* способами производства. Нерентабельные способы производства — убыточны: оценка продукции, произведенной при нерентабельных способах производства, ниже оценки затрат ресурсов. Нерентабельные технологические способы используют возможности производства не наилучшим образом. Оптимальный план производства составляется из одних только рентабельных технологических способов.

Приведенное экономическое истолкование пары двойственных задач позволяет сформулировать рассмотренные конечные методы в терминах задачи планирования производства.

Процесс решения задачи по методу улучшения плана начинается с некоторого опорного плана. В экономической терминологии это значит, что решение задачи начинается с анализа некоторого набора из m неотрицательных чисел $x_{s_1}, x_{s_2}, \ldots, x_{s_m}$, определяющих интенсивности (времена) использования каждого из m технологических способов производства с линейно независимыми векторами затрат $A_{s_1}, \ldots, A_{s_m}$. Естественно назвать способы производства, отвечающие векторам базиса, *базисными* технологическими способами.

Разложение вектора затрат A_j по базисным векторам затрат сводится к установлению времен (интенсивностей) x_{ij} использования базисных способов производства, при которых будет израсходовано столько же ресурсов каждого из производственных факторов, сколько расходуется при j-м способе производства в единицу времени. При работе предприятия в соответствии с s_i-м способом производства в течение x_{ij} единиц времени ($i = 1, 2, \ldots, m$) использование всех базисных технологических способов обеспечит выпуск $\sum_{i=1}^{m} c_{s_i} x_{ij}$ единиц продукции. Оценка произведенной продукции при этом будет равна $\sum_{i=1}^{m} c_{s_i} x_{ij}$ единиц ценности. С другой стороны, при использовании одного лишь j-го способа производства в течение единицы времени выпуск продукции окажется равным c_j единиц продукции (или, что то же самое, оценка продукции будет равна c_j единиц ценности). Таким образом, при одних и тех же затратах производственных факторов объем и, следовательно, оценка произведенной продукции в первом случае будет равна $\sum_{i=1}^{m} c_{s_i} x_{ij}$, а во втором — c_j. Разность

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_{s_i} x_{ij} - c_j$$

является оценкой j-го способа производства по отношению к выбранной системе базисных способов производства. Параметр Δ_j позволяет судить о целесообразности включения в план j-го способа производства за счет соответствующего сокращения интенсивности использования базисных технологических способов. Если $\Delta_j < 0$, такое преобразование целесообразно. При $\Delta_j \geqslant 0$ оно привело бы к сокращению выпуска продукции: способ производства с номером j менее экономичен, чем комбинация базисных способов.

Таким образом, анализ исходного плана производства сводится к вычислению параметров Δ_j. Переход к другим базисным способам производства не приведет к увеличению выпуска продукции, если $\Delta_j \geqslant 0$ для всех j. В этом случае анализируемый план оптимален. Если среди Δ_j имеются отрицательные величины, можно улучшить план производства, заменив один из базисных способов k-м технологическим способом с $\Delta_k < 0$. При этом способ, исключаемый из числа базисных, выбирается так, чтобы новый опорный план был реализуем (чтобы $x_j \geqslant 0$ для всех j).

Вновь полученный план снова проверяется на оптимальность. Через конечное число шагов последовательное улучшение плана приведет к оптимальному плану работы предприятия.

Сформулируем теперь в экономических терминах метод последовательного уточнения оценок. Решение задачи начинается с анализа некоторого опорного плана сопряженной задачи. План сопряженной задачи может быть интерпретирован как система предварительных оценок производственных факторов. Система предварительных оценок должна удовлетворять условиям (3.5), (3.6). Опорному плану сопряженной задачи соответствуют, кроме того, m рентабельных (относительно этого плана) способов производства с линейно независимыми векторами затрат. Будем называть эти технологические способы *базисными* способами. Пусть номера базисных способов производства $s_1, s_2, \ldots, s_m$. План производства не всегда может быть реализован, если ограничиваться только способами производства, рентабельными относительно заданной системы предварительных оценок. Времена x_{i0} использования рентабельных способов производства должны удовлетворять условиям

$$b_\lambda = \sum_{i=1}^{m} a_{\lambda s_i} x_{i0}, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, m. \tag{3.7}$$

Если все x_{i0}, удовлетворяющие системе (3.7), неотрицательны, то исходная система предварительных оценок оказывается системой оценок производственных факторов, т. е. «планом цен», а соответствующий план производства оптимален. Наличие отрицательных компонент x_{i0} среди составляющих решения системы уравнений (3.7) свидетельствует о нереализуемости плана производства, соответствующего выбранным предварительным оценкам производственных факторов. В этом случае следует уточнить систему оценок. Из числа базисных способов исключается r-й способ, отвечающий отрицательному значению x_{i0}.

Выбор r-го способа в качестве рентабельного послужил одной из причин нереализуемости плана производства. Уточнение предварительных оценок целесообразно провести таким образом, чтобы r-й способ стал нерентабельным, а остальные базисные способы по-прежнему оставались рентабельными. Увеличивая степень нерентабельности

$$\left(\Delta_r = \sum_{i=1}^{m} a_{ir} y_i - c_r\right)$$

r-го способа, следует следить, чтобы система чисел $y_1, y_2, \ldots, y_m$ удовлетворяла свойствам (3.5) и (3.6) предварительных оценок. Полученная при этом предельная система предварительных оценок определит новый рентабельный способ производства, который войдет в число базисных способов вместо изъятого r-го. После этого необходимо снова проверить, может ли быть реализован план из базисных способов производства. Уточнение оценок производится до тех пор, пока векторы затрат рентабельных (с точки зрения очередной системы оценок) технологических способов не определят реализуемый план производства.

Изложение экономической сущности метода сокращения невязок естественнее всего проводить на примере одной из модификаций метода, названной в гл. 7 методом двухсторонних оценок.

Процесс решения задачи начинается с анализа некоторой системы предварительных оценок (плана сопряженной задачи) и плана производства (опорного плана исходной задачи). Заданная система предварительных оценок определяет суммарную оценку расходуемых производственных факторов. Исходный производственный план определяет суммарную оценку выпускаемой продукции. Заданная система предварительных оценок и исходный план производства оптимальны, если суммарная оценка затрат совпадает с общей оценкой продукции. В противном случае определяется невязка плана — превышение расходов над доходами. Метод заключается в последовательном сокращении невязок.

Используя только базисные способы производства, отвечающие исходному опорному плану, и способы производства, рентабельные относительно заданной системы предварительных оценок, строим план производства, сводящий к минимуму невязку предыдущего плана. Этот план указывает направление изменения системы предварительных оценок. Если при измененных оценках производственных факторов суммарная оценка продукции совпадает с общей оценкой затрат, то полученный производственный план оптимален, а соответствующая система предварительных оценок оказывается планом цен. В противном случае решается очередная вспомогательная задача, в которой требуется минимизировать невязку ранее полученного плана на множестве способов производства, рентабельных с точки зрения соответствующей системы предварительных оценок или принадлежащих к базисным способам исследуемого плана. Таким образом, последовательное изменение предварительных оценок производственных факторов и системы базисных технологических способов постепенно сокращает невязку — превышение расходов над доходами — и приводит к выявлению способов производства и системы цен, наиболее целесообразных в условиях исследуемой задачи.

Аналогичное экономическое истолкование можно привести и для других модификаций метода сокращения невязок.

Как видим, название основных конечных методов линейного программирования полностью соответствуют их экономической сущности.

В методе последовательного улучшения плана и в различных его модификациях задается исходный план производства. Анализ плана позволяет установить его оптимальность или указать пути его улучшения. Для оптимального плана производства определяется система оценок производственных факторов — план цен.

В различных вариантах метода последовательного уточнения оценок исходным пунктом анализа является заданная система предварительных оценок производственных факторов. Попытки построения плана производства, соответствующего системе предварительных оценок, приводят к последовательному их уточнению. Системе оценок соответствует оптимальный план производства.

Наконец, в различных модификациях метода сокращения невязок процесс решения задачи начинают с плана производства и системы предварительных оценок, которые, вообще говоря, не согласованы между собой и приводят к невязке плана — превышению суммарной оценки затрат над суммарной оценкой продукции. Последовательное сокращение невязок приводит к оптимальному плану производства и системе оценок производственных факторов.

Таким образом, экономическое истолкование задачи линейного программирования позволяет охарактеризовать основные конечные методы, как наиболее естественные пути составления оптимального плана работы предприятия и оценки его ресурсов.

3.5. В заключение параграфа рассмотрим некоторые формальные признаки методов линейного программирования, которые могут быть положены в основу их классификации.

Пусть задача записана в канонической форме:

Требуется вычислить максимум линейной формы

$$L = CX \tag{3.8}$$

при условиях

$$AX = B, \tag{3.9}$$

$$X \geqslant 0. \tag{3.10}$$

Теорема 5.2, доказанная в гл. 3, позволяет заменить решение экстремальной задачи (3.8)—(3.10) вычислением n-мерного вектора X и m-мерного вектора Y, удовлетворяющих следующей системе линейных уравнений и линейных неравенств

$$AX = B, \tag{3.11}$$

$$X \geqslant 0, \tag{3.12}$$

$$YA \geqslant C, \tag{3.13}$$

$$CX = BY. \tag{3.14}$$

Последнее равенство является следствием системы условий

$$(YA)_j = c_j \quad \text{при} \quad x_j \neq 0. \tag{3.15}$$

Четыре системы равенств и неравенств (3.11)—(3.14) определяют четыре группы методов линейного программирования. Переход от итерации к итерации в любом методе приводит к движению по векторам X и Y, для которых выполняются три из четырех систем условий, а четвертая система используется в качестве признака оптимальности пары (X, Y).

Каждый шаг метода, не нарушая трех выполненных систем условий, обеспечивает монотонное в некотором смысле приближение к множеству точек (X, Y), для которых выполняется четвертая система условий.

В методе последовательного улучшения плана переход от одной итерации метода к следующей соответствует движению по опорным планам X задачи (3.8)—(3.10). Следовательно, условия (3.11) и (3.12) удовлетворяются на каждом шаге метода. Каждому опорному плану X метод однозначно приводит в соответствие вектор Y, для которого выполняются условия (3.15), а следовательно, и равенство (3.14) Таким образом, метод улучшения плана связан с движением по точкам (X, Y), для которых удовлетворяются условия (3.11), (3.12) и (3.14), а условие (3.13) не выполняется. Неравенства (3.13) или, что то же самое, условия

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_{s_i} x_{ij} - c_j \geqslant 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

определяют признак оптимальности метода.

Пусть на некотором шаге метода мы пришли в точку (X_0, Y_0). Многогранное множество условий двойственной задачи задается системой неравенств (3.13). Рассмотрим в пространстве переменных двойственной задачи гиперплоскость

$$BY = CX_0 (= BY_0).$$

Нетрудно доказать (предоставим это читателю), что каждая итерация метода улучшения плана монотонно сокращает расстояние гиперплоскости $BY = CX_0$ до многогранного множества $YA \geqslant C$. Гиперплоскость, отвечающая оптимальному плану, является опорной для области определения линейной формы двойственной задачи.

Переход от итерации к итерации метода последовательного уточнения оценок соответствует движению по опорным планам двойственной задачи. Следовательно, условия (3.13) выполняются на каждом шаге метода. Каждый опорный план Y двойственной задачи определяет некоторый псевдоплан X исходной задачи, для которого удовлетворяются условия (3.11) и (3.14) (вследствие справедливости соотношений (3.15)). Таким образом, метод уточнения оценок связан с движением по точкам (X, Y), для которых выполняются условия (3.11), (3.13) и (3.14). Условия (3.12)—неотрицательность составляющих псевдоплана — являются признаком оптимальности псевдоплана. При каждом шаге метода монотонно сокращается расстояние гиперплоскости

$$CX = BY_0 \ (= CX_0)$$

от многогранного множества условий исходной задачи

$$AX = B, \quad X \geqslant 0.$$

Гиперплоскость, отвечающая решению задачи (3.8)—(3.10), оказывается опорной для области определения линейной формы исходной задачи.

В методе последовательного сокращения невязок каждой итерации соответствует план Y сопряженной задачи и определяемый ею квазиплан X исходной задачи. Для векторов X и Y удовлетворяются условия (3.12), (3.13) и (3.14). Нарушено только условие (3.11). Метод состоит в движении по квазипланам X (и, следовательно, по планам Y сопряженной задачи), при котором монотонно сокращается невязка ε_0 квазиплана

$$\varepsilon_0 = \sum_{i=1}^{m} |(AX-B)_i|.$$

Схема вычислений упрощается, если ввести дополнительное предположение о неотрицательности невязок

$$\varepsilon_i = (B-AX)_i \geqslant 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Условие (3.11) (равенство нулю невязок всех условий) — признак оптимальности квазиплана.

Методы четвертой группы связаны с движением по точкам (X, Y), отвечающим планам пары двойственных задач. Таким образом, на каждом шаге метода удовлетворяются условия (3.11), (3.12) и (3.13). Нарушено только условие (3.14). С каждым шагом метода разность $BY-CX$ монотонно сокращается.

Один из методов четвертой группы состоит в одновременном улучшении планов прямой и двойственной задач (см. п. 8.3 гл. 6). Векторы X и Y представляют собой в этом случае опорные планы пары двойственных задач. От итерации к итерации монотонно сокращается разность линейных форм обеих задач.

Другим примером методов четвертой группы является метод двухсторонних оценок. Каждая итерация метода приводит к опорному плану X исходной задачи и плану Y сопряженной задачи. Точка (X, Y) удовлетворяет условиям (3.11)—(3.13), а разность $BY-CX$ от шага к шагу монотонно сокращается.

В каждом из перечисленных методов движение происходит по опорным планам, по псевдопланам или по квазипланам исходной задачи. Общее число опорных планов, псевдопланов и квазипланов задачи ограничено. Таким образом, для любого из рассмотренных методов общее количество точек (X, Y), для которых удовлетворяются три из четырех систем условий (3.11)—(3.14), конечно. Кроме того, в невырожденных задачах (к этому случаю можно, как мы видели, искусственным приемом свести любую задачу линейного программирования) переход от итерации к итерации связан с монотонным приближением к решению задачи. Оба указанных обстоятельства гарантируют достижение оптимального плана за конечное число шагов.

До сих пор в этом параграфе мы рассматривали задачи линейного программирования, записанные в канонической форме. Более общая запись задачи, в которой среди условий содержатся равенства и неравенства и не все переменные связаны условием неотрицательности, позволяет расщепить методы линейного программирования на большее число групп. Вместо двух систем условий (3.11) и (3.12), определяющих области изменения линейной формы прямой задачи, в более общем случае появляются три системы:

$$A_1X=B_1;\quad A_2X\geqslant B_2;$$
$$x_j\geqslant 0,\qquad j=j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_t.$$

Увеличивается также число различных систем условий, определяющих область изменения переменных двойственной задачи (их становится также три). Неизменными остаются только условия вида (3.15). Таким образом, решение задачи линейного программирования сводится к решению семи систем линейных уравнений и линейных неравенств. В новой классификации к методам одной группы относятся методы, соответствующие движению по векторам $(X,\ Y)$, для которых удовлетворяются шесть из семи систем условий. Седьмая система принимается в качестве признака оптимальности векторов $(X,\ Y)$. Каждый шаг метода обеспечивает монотонное в некотором смысле приближение к оптимальным планам пары двойственных задач.

Подчеркнем, что приведенные в настоящем пункте характеристики методов могут быть использованы также для классификации итеративных методов линейного программирования. Однако в этом случае набор точек $(X,\ Y)$, по которым осуществляется движение, бесконечен. Поэтому итеративные методы дают лишь приближенное (с любой заранее заданной степенью точности) решение задачи.

Формальная классификация, принятая здесь для методов линейного программирования, обеспечивает также единый подход ко всем методам решения нелинейных условных экстремальных задач и поэтому может быть использована в качестве основы для систематизации методов математического программирования.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 8

1. Доказать эквивалентность определения опорного плана из п. 1.1 и общего определения, приведенного в п. 4.2 гл. 2.

2. Доказать эквивалентность определения невырожденного опорного плана из п. 1.1 и соответствующего общего определения, сформулированного в п. 4.7 гл. 2.

3. Доказать, что для всякой невырожденной задачи системы отношений (1.27) и (1.28) имеют по одному минимуму.

4. Доказать справедливость рекуррентных формул (1.41).

5. Используя замечания пп. 1.6—1.8, составить вычислительную схему метода улучшения плана применительно к задаче (1.1)—(1.4).

6. Составить блок-схему алгоритма метода улучшения плана для случая, когда в базис одновременно вводится несколько векторов условий.

7. Составить блок-схему алгоритма метода уточнения оценок для случая, когда из базиса одновременно исключаются несколько векторов условий.

8. Если линейная форма исходной задачи ограничена снизу и сверху в области своего определения, то многогранное множество условий двойственной задачи неограниченно. Доказать.

9. Линейные формы взаимосопряженных задач, ограниченные с обеих сторон на множествах планов этих задач, сохраняют постоянное значение в области своего определения. Доказать.

10. Составить вычислительную схему решения задачи (1.47)—(1.50) по методу улучшения плана, сохранив естественную форму записи задачи.

11. Привести экономическую интерпретацию процесса решения задачи (1.47)—(1.50) по методу улучшения плана.

12. Составить общую схему метода последовательного уточнения оценок применительно к задачам линейного программирования в произвольной форме записи.

ДОПОЛНЕНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Здесь приводятся некоторые факты из линейной алгебры и элементы теории выпуклых множеств конечномерного пространства, составляющие математический аппарат линейного программирования.

В первом параграфе излагаются первоначальные сведения, касающиеся конечномерных векторных пространств, матриц и определителей. Этот параграф носит справочный характер, все утверждения приводятся в нем без доказательств. Соответствующие обоснования читатель сможет найти, например, в книге [121]. Следующий параграф (§ 2) посвящен системам линейных уравнений. Особое внимание здесь уделено геометрическому истолкованию приводимых утверждений. В частности, в § 2 отмечена связь между теорией систем линейных уравнений и двояким определением линейного многообразия. В заключение параграфа описывается один конечный метод решения систем линейных уравнений (метод полного исключения Жордана-Гаусса), играющий особую роль в линейном программировании.

В последнем параграфе (§ 3) приводятся необходимые сведения из теории выпуклых множеств многомерного пространства. Здесь доказывается теорема о разделяющей гиперплоскости и отмечаются несколько важных следствий из нее. Кроме того, в § 3 приводится ряд полезных утверждений, связанных с понятием размерности выпуклого множества и со свойствами его крайних точек.

Все утверждения § 2 и 3 доказываются. Исключением являются лишь те из них, проверка которых составляет содержание соответствующих упражнений.

§ 1. Векторы, матрицы и определители

1.1. Упорядоченная система n действительных чисел

$$X=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$$

называется *n-мерным вектором*. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будем называть *компонентами* или *составляющими* вектора X. Векторы будут обычно обозначаться большими буквами, а их компоненты — соответствующими малыми буквами. Два n-мерных вектора

$$X=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \quad \text{и} \quad Y=(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$$

считаются *равными*, если их соответствующие компоненты совпадают, т. е. если

$$x_i=y_i \quad \text{для} \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Суммой векторов X и Y называется вектор

$$Z=(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n)$$

с компонентами $z_i=x_i+y_i$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$;

$$Z=X+Y=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ \ldots,\ x_n+y_n).$$

Как нетрудно проверить, сложение векторов обладает свойством коммутативности:

$$X+Y=Y+X$$

и ассоциативности:

$$(X+Y)+Z=X+(Y+Z).$$

Разностью упорядоченной пары векторов X и Y называется вектор Z вида

$$Z=X-Y=(x_1-y_1,\ x_2-y_2,\ \ldots,\ x_n-y_n).$$

Вектор, все компоненты которого равны нулю, называется *нулевым вектором*:

$$0=(0,\ 0,\ \ldots,\ 0).$$

Таким образом, для равенства векторов X и Y необходимо и достаточно, чтобы

$$X-Y=0.$$

Произведением вектора X на действительное число (скаляр) α называется вектор

$$\alpha X = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

Из приведенных определений суммы двух векторов и произведения вектора на скаляр непосредственно вытекают следующие свойства этих операций:

$$\alpha_1(\alpha_2 X) = (\alpha_1\alpha_2) X \qquad \text{(ассоциативность)},$$

$$\left.\begin{aligned}(\alpha_1+\alpha_2) &= \alpha_1 X + \alpha_2 X,\\ \alpha(X+Y) &= \alpha X + \alpha Y,\end{aligned}\right\}\text{(дистрибутивность)}$$

$$0X = \alpha 0 = 0.$$

Совокупность всех n-мерных векторов, для которых введены понятия сложения, вычитания и умножения на скаляр, называется *n-мерным векторным пространством (действительным)*. Слово *действительное*, стоящее в скобках, указывает на то, что компоненты векторов и скаляры являются действительными числами. В дальнейшем оно будет обычно опускаться. Однако это не может привести к недоразумению, так как мы будем иметь дело только с действительным случаем.

При $n=3$ введенное векторное пространство соответствует обычному пространству трех измерений. Каждой упорядоченной тройке чисел (x_1, x_2, x_3) в этом пространстве соответствует точка с координатами x_1, x_2, x_3 (или вектор, направленный в нее из начала координат). Наоборот, каждой точке трехмерного пространства может быть сопоставлена упорядоченная тройка действительных чисел, составленная из координат этой точки. Таким образом, элементы n-мерного векторного пространства при $n=3$ (или $n=2$) можно интерпретировать либо как точки, либо как векторы, проведенные из начала координат. В этой книге слова *вектор* и *точка* используются как синонимы для обозначения элементов векторного пространства.

1.2. Каждой паре векторов

$$A = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \text{и} \quad B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

может быть сопоставлено число

$$(A, B)=\sum_{i=1}^{n} a_i b_i,$$

называемое их *скалярным произведением.*

Введенная функция пары векторов обладает следующими свойствами:

1. $(A, B)=(B, A)$.
2. $(A_1+A_2, B)=(A_1, B)+(A_2, B)$.
3. $(\lambda A, B)=\lambda(A, B)$.
4. $(A, A)\geqslant 0$, причем знак равенства в этом соотношении возможен лишь при $A=0$.
5. $(A, B)^2\geqslant(A, A)(B, B)$.

Последнее неравенство обычно связывают с именем Буняковского.

Два вектора, A и B, называются *ортогональными*, если

$$(A, B)=0.$$

В частности, нулевой вектор ортогонален любому вектору данного пространства.

Используя понятие скалярного произведения, можно определить расстояние между точками n-мерного пространства (задать в нем метрику).

Длиной, или *нормой*, вектора

$$A=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

называется число

$$|A|=+\sqrt{(A, A)}=+\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}.$$

В соответствии со свойством 4 скалярного произведения $|A|\geqslant 0$ для любого вектора A, причем равенство $|A|=0$ возможно только при $A=0$.

Расстояние между точками A и B полагается равным

$$\varrho(A, B)=|A-B|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2}.$$

Пусть A, B и C — произвольные точки n-мерного пространства. Используя свойства скалярного произведения, можно доказать справедливость следующего неравенства (*неравенства треугольника*):

$$|A-B|\leqslant|A-C|+|C-B|.$$

Неравенство треугольника, так же как и неравенство Буняковского, имеет прозрачный геометрический смысл при n, равном 2 и 3. Известно, что скалярное произведение двух векторов на плоскости или в пространстве (трехмерном) равно произведению их длин, умноженному на косинус угла между ними. Следовательно, неравенство Буняковского, будучи переписано в эквивалентной форме

$$\frac{(A, B)}{|A||B|} \leqslant 1,$$

означает в данном случае, что косинус любого угла не превосходит единицы. Что касается неравенства треугольника, то оно расшифровывается так: сумма длин двух сторон треугольника не меньше длины третьей стороны.

n-мерное векторное пространство, в котором определено понятие скалярного произведения (а следовательно, введена метрика), принято называть *эвклидовым*. В дальнейшем n-мерное эвклидово пространство будет обозначаться через E_n.

Говорят, что последовательность векторов $X_1, X_2, \ldots, \ldots, X_k, \ldots$ из E_n сходится к вектору X, принадлежащему E_n $(\lim\limits_{k \to \infty} X_k = X)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число $N(\varepsilon)$, начиная с которого $(i \geqslant N(\varepsilon))$

$$|X - X_i| < \varepsilon.$$

Из определения нормы следует, что последовательность $\{X_k\}$ сходится к X в том и только в том случае, если

$$\lim_{k \to \infty} x_s^{(k)} = x_s, \quad s = 1, 2, \ldots, n.$$

Здесь

$$X_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}), \qquad k = 1, 2, \ldots,$$
$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

1.3. Прямоугольная таблица чисел

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}, \qquad (1.1)$$

имеющая m строк и n столбцов, называется *матрицей* $m \times n$.

Числа, составляющие матрицу A, называются ее *элементами*. Элементы матрицы снабжаются упорядоченной парой индексов. Первый индекс указывает номер строки, а второй — номер столбца, на пересечении которых расположен данный элемент. Например, элемент a_{ij} находится на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы A.

Часто для записи матрицы (1.1) применяется более краткое обозначение:

$$A = \| a_{ij} \|_{m,\, n}. \tag{1.2}$$

В тех случаях, когда размеры матрицы A указываются в тексте, индексы m и n в обозначении (1.2) могут опускаться. Иногда матрица A обозначается как

$$A = (A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n),$$

где A_j — j-й столбец матрицы A, или

$$A = (A^{(1)},\ A^{(2)},\ \ldots,\ A^{(m)}),$$

где $A^{(i)}$ — i-я строка матрицы A.

Если число строк матрицы A равно числу ее столбцов ($m = n$), то она называется *квадратной матрицей порядка* n. При краткой записи квадратной матрицы справа от двойной черты обычно указывается ее порядок:

$$\| a_{ij} \|_n.$$

Элементы a_{ii}, $i = 1, 2, \ldots, n$ квадратной матрицы $\| a_{ij} \|_n$ составляют ее главную диагональ.

Если матрица A имеет только одну строку или только один столбец ($m = 1$ или $n = 1$), то она может рассматриваться как вектор. В первом случае

$$A = (a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{1n})$$

— n-мерный вектор-строка, во втором —

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

— m-мерный вектор-столбец.

Для матриц вводятся операции сложения и умножения. *Суммой* матриц $A=\|a_{ij}\|_{m,n}$ и $B=\|b_{ij}\|_{m,n}$ называется матрица

$$C=\|c_{ij}\|_{m,n}=\|a_{ij}+b_{ij}\|_{m,n}.$$

Произвольный элемент матрицы $C=A+B$ равен сумме соответствующих элементов матриц A и B. Операция сложения определена только для матриц одинаковых размеров.

Рассмотрим две матрицы, $S=\|s_{ij}\|_{m,k}$ и $T=\|t_{ij}\|_{k,n}$. Число столбцов матрицы S равно числу строк матрицы T. *Произведением* матрицы S на матрицу T называется матрица

$$D=ST=\|d_{ij}\|_{m,n},$$

где

$$d_{ij}=\sum_{\lambda=1}^{k} s_{i\lambda}t_{\lambda j}. \tag{1.3}$$

Операция умножения определена не для всех матриц: число столбцов множимого должно быть равно числу строк множителя. Элемент матрицы D — результата умножения матрицы S на матрицу T, — стоящий в i-й строке и j-м столбце, равен сумме произведений соответствующих элементов i-й строки матрицы S и j-го столбца матрицы T.

Операции сложения и умножения матриц обладают рядом свойств, которые часто используются при действиях с матрицами:

1. $\|a_{ij}\|_{m,n}+\|b_{ij}\|_{m,n}=\|b_{ij}\|_{m,n}+\|a_{ij}\|_{m,n}$
(коммутативность сложения).

2. $\|a_{ij}\|_{m,n}+(\|b_{ij}\|_{m,n}+\|c_{ij}\|_{m,n})=$
$=(\|a_{ij}\|_{m,n}+\|b_{ij}\|_{m,n})+\|c_{ij}\|_{m,n}$
(ассоциативность сложения).

3. $(\|a_{ij}\|_{m,k}\|b_{ij}\|_{k,r})\|c_{ij}\|_{r,n}=\|a_{ij}\|_{m,k}(\|b_{ij}\|_{k,r}\|c_{ij}\|_{r,n})$
(ассоциативность умножения).

4. $\|c_{ij}\|_{m,k}(\|a_{ij}\|_{k,n}+\|b_{ij}\|_{k,n})=$
$=\|c_{ij}\|_{m,k}\|a_{ij}\|_{k,n}+\|c_{ij}\|_{m,k}\|b_{ij}\|_{k,n};$
$(\|a_{ij}\|_{m,k}+\|b_{ij}\|_{m,k})\|c_{ij}\|_{k,n}=$
$=\|a_{ij}\|_{m,k}\|c_{ij}\|_{k,n}+\|b_{ij}\|_{m,k}\|c_{ij}\|_{k,n}$
(дистрибутивность операций сложения и умножения).

Следует отметить, что операция умножения матриц не обладает свойством коммутативности. Другими словами, вообще говоря,

$$\| a_{ij} \|_{k,r} \| b_{ij} \|_{k,r} \neq \| b_{ij} \|_{r,k} \| a_{ij} \|_{k,r}.$$

Чаще всего мы будем иметь дело с квадратными матрицами. Из общих определений следует, что складывать и перемножать квадратные матрицы можно только в случае равенства их порядков. Среди квадратных матриц порядка n роль единицы играет единичная матрица

$$I_n = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix} \right\|,$$

у которой по главной диагонали стоят единицы, а остальные элементы равны нулю. Для любой матрицы A порядка n

$$AI_n = I_n A = A.$$

Подобно векторам матрицы можно умножать на скаляры. *Произведением матрицы* $A = \| a_{ij} \|_{m,n}$ *на скаляр* α называется матрица

$$B = \alpha A = \| \alpha a_{ij} \|_{m,n}.$$

Таким образом, для того чтобы умножить матрицу на некоторое число, следует умножить на это число каждый элемент матрицы. Отметим еще одну операцию, производимую над одной матрицей.

Транспонированной матрицей для матрицы (1.1) (или по отношению к матрице (1.1)) называется матрица

$$A^T = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{i1} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{i2} & \dots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1j} & a_{2j} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{mj} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{in} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\|,$$

столбцами которой являются соответствующие строки исходной матрицы A. Операция транспонирования матрицы A

обозначается значком ^{T} расположенным над A. В частности, вектор-столбец

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1m} \end{pmatrix}$$

может быть записан в виде

$$A=(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1m})^T.$$

Операция транспонирования обладает следующими свойствами:

$$1.\quad (A+B)^T=A^T+B^T.$$

$$2.\quad (AB)^T=B^TA^T,$$

т. е. транспонированная матрица для суммы матриц равна сумме транспонированных слагаемых; транспонированная матрица произведения матриц равна произведению транспонированных сомножителей, взятых в обратном порядке.

1.4. Всякая совокупность из n чисел $1, 2, \ldots, n$, расположенных в некотором определенном порядке, называется *перестановкой* из n чисел (символов). Очевидно, число различных перестановок, которые можно составить из n чисел, равно $n!$

Принято говорить, что числа (символы) i и j образуют *инверсию* в данной перестановке, если $i>j$, но i стоит в этой перестановке перед j.

Перестановка называется *четной*, если ее символы составляют четное число инверсий, и *нечетной* — в противоположном случае. Подсчет числа инверсий у данной перестановки, а следовательно, и определение ее четности можно осуществлять следующим образом.

Рассмотрим перестановку $I=(i_1, i_2, \ldots, i_n)$. Число ее символов, меньших i_s, но расположенных правее символа i_s, обозначим через k_s. Число инверсий перестановки I равно

$$k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}.$$

Например, число инверсий перестановки (3, 1, 4, 2, 6, 5) из шести символов равно

$$2+0+1+0+1=4.$$

Поэтому рассматриваемая перестановка является четной.

Эти предварительные сведения были необходимы для того, чтобы ввести понятие определителя произвольной квадратной матрицы.

Рассмотрим квадратную матрицу

$$A=\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix}\right\| = \| a_{ij} \|_n. \tag{1.4}$$

Составим всевозможные произведения по n элементов матрицы A, расположенных в разных строках и разных столбцах. Каждое из таких произведений может быть записано в виде

$$a_{1j_1}\, a_{2j_2} \dots a_{nj_n}. \tag{1.5}$$

По определению, индексы j_1, j_2, $\dots$, j_n различны, и следовательно, образуют перестановку

$$(j_1,\ j_2,\ \dots,\ j_n). \tag{1.6}$$

Определителем матрицы A называется величина, равная алгебраической сумме всех произведений вида (1.5), взятых со знаком $(-1)^d$. Степень d равна 0 или 1 в зависимости от того, четной или нечетной оказалась перестановка (1.6). Число слагаемых вида (1.5), составляющих определитель, равно $n!$

Определитель матрицы A принято обозначать символом $|A|$. Иногда применяются также другие обозначения определителя, отвечающие разным записям матрицы A:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |\, \| a_{ij} \|_n | =$$

$$= |(A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_n)| = |(A^{(1)},\ A^{(2)},\ \dots,\ A^{(n)})|.$$

Элементы, строки и столбцы матрицы A обычно называют элементами, строками и столбцами определителя $|A|$.

Отметим некоторые свойства определителей, часто используемые в процессе их вычисления.

1. $|A| = |A^T|$, т. е. определитель матрицы не меняется при ее транспонировании.

2. Если одна из строк (один из столбцов) определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю.

3. От перестановки двух строк (двух столбцов) определитель меняет знак, сохраняя свою абсолютную величину.

4. Определитель, содержащий две одинаковые строки (два одинаковых столбца), равен нулю.

5. Если все элементы некоторой строки (некоторого столбца) определителя умножить на число α, то и сам определитель умножится на α.

6. $|(A_1 A_2, \ldots, A_j' + A_j'', \ldots, A_n)| =$

$$= |(A_1, A_2, \ldots, A_j', \ldots, A_n)| + |(A_1, A_2, \ldots, A_j'', \ldots, A_n)|;$$

$$|(A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A_1^{(i)} + A_2^{(i)}, \ldots, A^{(n)})| =$$

$$= |(A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A_1^{(i)}, \ldots, A^{(n)})| +$$

$$+ |(A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A_2^{(i)}, \ldots, A^{(n)}|.$$

Первое соотношение имеет следующую словесную формулировку. Если j-й столбец A_j матрицы A равен сумме двух векторов A_j' и A_j'', то определитель $|A|$ равен сумме определителей матриц A' и A'', все столбцы которых, кроме j-го, такие же, как и у матрицы A, а j-й столбец A' (A'') совпадает с A_j' (A_j''). Второе соотношение расшифровывается аналогично, только столбцы заменяются строками.

7. Определитель не изменится, если к одной из его строк (одному из его столбцов) прибавить другую строку (другой столбец), умноженную (умноженный) на произвольное число.

8. Пусть дана матрица A, имеющая вид (1.4). Вычеркнем из матрицы A i-ю строку и j-й столбец, на пересечении которых расположен элемент a_{ij}. Обозначим через M_{ij} определитель вновь полученной матрицы порядка $n-1$.

Число $(-1)^{i+j} M_{ij} = A_{ij}$ принято называть *алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} матрицы A.

Справедливы следующие равенства:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij};$$

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

В первом случае мы имеем разложение $|A|$ по i-й строке; во втором — по j-му столбцу.

9. Пусть A и B — квадратные матрицы одного и того же порядка.

В таком случае

$$|AB| = |A||B|,$$

т. е. определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц.

1.5. Квадратная матрица A называется *неособенной* (или *невырожденной*), если ее определитель $|A|$ не равен нулю. Если $|A| = 0$, то матрицу A называют *особенной* или *вырожденной*.

Пусть A — неособенная матрица вида (1.4). Рассмотрим матрицу $\|\tilde{a}_{ij}\|_n$, элементы $\tilde{a}_{ij}$ которой определяются соотношением

$$\tilde{a}_{ij} = \frac{A_{ji}}{|A|}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.7}$$

Здесь A_{ji} — алгебраическое дополнение элемента a_{ji} матрицы A. Используя четвертое и восьмое свойства определителей, а также правило умножения матриц, получаем

$$A \|\tilde{a}_{ij}\|_n = \|\tilde{a}_{ij}\|_n A = I_n, \tag{1.8}$$

где I_n — единичная матрица порядка n. Предоставляем читателю проверить справедливость равенств (1.8) самостоятельно (см. упражнение 2).

Можно показать (см. упражнение 3), что матрица $\|\tilde{a}_{ij}\|_n$ является единственной матрицей, для которой имеют место равенства (1.8).

Матрица A^{-1} называется *обратной* для матрицы (или по отношению к матрице) A, если

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Итак, в случае невырожденности матрицы A

$$A^{-1} = \|\tilde{a}_{ij}\|_n,$$

где элементы $\tilde{a}_{ij}$ определяются формулой (1.7).

Если матрица A является вырожденной, то обратной для нее матрицы не существует. Доказательство этого утверждения предоставляется читателю (см. упражнение 4).

1.6. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_s$ — произвольная система n-мерных векторов.

Вектор

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_s A_s,$$

где α_i — скаляр ($i = 1, 2, \ldots, s$), называют обычно *линейной комбинацией* векторов $A_1, A_2, \ldots, A_s$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$. Система векторов $A_1, A_2, \ldots, A_s$ называется *линейно зависимой*, если нулевой вектор

$$0 = \underbrace{(0,\ 0,\ \ldots,\ 0)}_{n}$$

может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $A_1, A_2, \ldots, A_s$, среди коэффициентов которой имеются ненулевые.

В противном случае система векторов $A_1, A_2, \ldots, A_s$, по определению, линейно независима. Другими словами, систему $A_1, A_2, \ldots, A_s$ называют *линейно независимой*, если соотношение

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i A_i = 0$$

возможно лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_s = 0$. Векторы, составляющие линейно независимую систему, называются линейно независимыми.

Нетрудно проверить, что если данный вектор представим в виде линейной комбинации линейно независимых векторов, то это представление единственно.

Приведем критерий линейной независимости системы векторов, широко используемый в различных разделах математики.

Для линейной независимости системы векторов $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$, $i = 1, 2, \ldots, s$, *необходимо и достаточно существование квадратной матрицы порядка* s:

$$\left\| \begin{matrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \ldots & a_{1j_s} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \ldots & a_{2j_s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{sj_1} & a_{sj_2} & \ldots & a_{sj_s} \end{matrix} \right\|,$$

составленной из координат векторов A_i, с определителем, отличным от нуля.

Если, в частности, $s=n$, то для линейной независимости данной системы векторов необходимо и достаточно, чтобы

$$|(A_1, A_2, \ldots, A_n)| \neq 0.$$

Из приведенного критерия следует, что в n-мерном пространстве не существует линейно независимой системы, состоящей более чем из n векторов. С другой стороны, единичные векторы $e_1=(1, 0, 0, \ldots, 0)$, $e_2=(0, 1, 0, \ldots, 0)$, ..., $e_n=(0, 0, 0, \ldots, 1)$, составляют, очевидно, линейно независимую систему.

По аналогии с плоскостью и трехмерным пространством *размерностью* векторного пространства естественно назвать величину, совпадающую с максимальным числом линейно независимых векторов этого пространства. Таким образом, размерность *n-мерного* векторного пространства равна n.

Рассмотрим произвольную прямоугольную матрицу A вида (1.1).

Матрица, составленная из элементов, расположенных на пересечении фиксированной системы строк и столбцов A, называется *подматрицей* матрицы A. Определитель произвольной квадратной подматрицы матрицы A принято называть *минором* этой матрицы. Порядок минора определяется порядком соответствующей подматрицы.

Наивысший порядок отличных от нуля миноров матрицы A называется *рангом* этой *матрицы*.

Из критерия линейной независимости системы векторов следует, что максимальное число линейно независимых строк матрицы A равно максимальному числу линейно независимых столбцов этой матрицы и совпадает с рангом A. Предоставляем читателю доказать это утверждение (см. упражнение 6).

Рангом произвольной *системы векторов* называется максимальное число линейно независимых векторов данной системы. Совокупность линейно независимых векторов системы, число которых равно ее рангу, принято называть *базисом* системы. Множество линейно независимых векторов данной системы является ее базисом в том и только в том случае, если любой вектор системы представим в виде линейной комбинации векторов рассматриваемого множества.

Необходимость этого утверждения очевидна. Доказательство достаточности можно провести, опираясь на критерий линейной независимости системы векторов.

1.7. При анализе систем линейных уравнений, которому посвящен следующий параграф, будут использоваться свойства некоторых важных множеств точек n-мерного пространства.

Непустое множество n-мерных векторов назовем *подпространством* n-мерного векторного пространства, если результаты сложения любых двух векторов множества и умножения произвольного вектора множества на скаляр принадлежат этому множеству.

Очевидно, что любое подпространство содержит нулевой вектор, так так $O \cdot X = 0$ для произвольного элемента X из подпространства.

Подпространство называется *r-мерным*, если максимальное число линейно независимых векторов, содержащихся в нем, равно r. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_r$ — система линейно независимых векторов n-мерного векторного пространства. Рассмотрим множество всевозможных линейных комбинаций этой системы. Легко показать, что оно является r-мерным подпространством. С другой стороны, в любом r-мерном подпространстве существуют r линейно независимых векторов, совокупность линейных комбинаций которых совпадает с данным подпространством. Доказательство этих утверждений предоставляется читателю (упражнение 7).

Итак, r-мерное подпространство можно определить как совокупность всех линейных комбинаций некоторой линейно независимой системы из r векторов. Если $r = 0$, то подпространство состоит из одного лишь нулевого вектора. Если $r = n$, то оно совпадает со всем пространством. При $0 < r < n$ получаем промежуточные подпространства, содержащие бесчисленное множество элементов и несовпадающие со всем пространством.

Множество элементов n-мерного пространства, представимых в виде

$$X + X',$$

где X — фиксированный вектор, а X' принадлежит некоторому r-мерному подпространству, называется *r-мерным линейным многообразием* ($r \leqslant n$).

Таким образом, r-мерное линейное многообразие может рассматриваться как некоторый сдвиг r-мерного подпространства. В частности, если сдвиг (вектор X) равен нулевому вектору, то многообразие превращается в подпространство.

Назовем одномерное линейное многообразие *прямой*; $(n-1)$-мерное линейное многообразие — *гиперплоскостью*.

Учитывая определение r-мерного подпространства, можно сказать, что r-мерное линейное многообразие представляет собой множество точек вида

$$X+\sum_{i=1}^{r}\alpha_i X_i,$$

где X—фиксированная точка n-мерного пространства; $X_1, X_2, \ldots, X_r$ — некоторая линейно независимая система n-мерных векторов, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ — произвольные числа.

§ 2. Системы линейных уравнений

2.1. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i, \qquad i=1, 2, \ldots, m, \tag{2.1}$$

состоящую из m уравнений с n неизвестными x_j $(j=1,2, \ldots, n)$.

Матрица $A=\|a_{ij}\|_{m,n}$, составленная из коэффициентов системы (2.1), называется *матрицей системы* (2.1). Если положить $A_j=(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})^T$, то матрица системы (2.1) может быть записана в виде

$$A=(A_1, A_2, \ldots, A_n).$$
$$B=(b_1, b_2, \ldots, b_n)^T.$$

Вектор B называют *столбцом свободных членов* системы.

Система (2.1) может быть переписана в следующих эквивалентных формах:

$$\sum_{j=1}^{n} A_j x_j=B; \tag{2.2}$$

$$AX=B, \tag{2.3}$$

где $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$.

Матрица $\tilde{A}=(A_1, A_2, \ldots, A_n, B)$ называется *расширенной матрицей* системы (2.1). Вектор $X'=(x_1', x_2', \ldots, x_n')$

называется *решением* системы (2.1), если замена неизвестных x_j системы числами x'_j ($j=1, 2, \ldots, n$) превращает все уравнения (2.1) в тождества.

Система линейных уравнений, обладающая хотя бы одним решением, называется *совместной* (*непротиворечивой*).

Если система не имеет ни одного решения, то говорят, что она *несовместна*, или *противоречива*. Иногда совместная система называется *разрешимой*, а несовместная — *неразрешимой*.

В этом параграфе приводятся условия совместности систем линейных уравнений и даются характеристики совокупности решений совместной системы. Кроме того, здесь излагается метод решения систем линейных уравнений, нашедший широкое применение в линейном программировании.

2.2. Начнем наши рассмотрения со случая, когда число m уравнений системы (2.1) равно числу n ее неизвестных. При этом матрица системы A оказывается квадратной матрицей порядка n.

Предположим, что определитель матрицы A отличен от нуля. Пусть вектор $X'=(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)^T$ является некоторым решением системы (2.1). Используя запись (2.3), получаем

$$AX'=B.$$

Умножим обе части этого равенства слева на матрицу A^{-1}, обратную для матрицы системы A (существование A^{-1} следует из условия $|A|\neq 0$). Получаем цепочку равенств:

$$X'=IX'=(A^{-1}A)X'=A^{-1}B. \tag{2.4}$$

Итак, любое решение системы (2.1) выражается формулой (2.4). Если система (2.1) с квадратной матрицей A совместна, то она обладает единственным решением.

Убедимся, что вектор $X'=A^{-1}B$ является решением системы (2.1). Действительно,

$$AX'=A(A^{-1}B)=(AA^{-1})B=IB=B.$$

Таким образом, система (2.1) при $n=m$ и $|A|\neq 0$ совместна и имеет единственное решение, определяемое формулой (2.4).

Преобразуем формулу (2.4). Учитывая соотношение (1.7), определяющее элементы $\tilde{a}_{ij}$ обратной матрицы A^{-1}, и правило умножения матриц, получаем

$$x_j'=\sum_{s=1}^{n}\tilde{a}_{js}b_s=\sum_{s=1}^{n}\frac{A_{sj}}{|A|}b_s. \tag{2.5}$$

В соответствии с восьмым свойством определителей

$$\sum_{s=1}^{n}A_{sj}b_s=|(A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{j-1},\ B,\ A_{j+1},\ \ldots,\ A_n)|. \tag{2.6}$$

Равенства (2.5) и (2.6) приводят к соотношению

$$x_i'=\frac{|(A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{j-1},\ B,\ A_{j+1},\ \ldots,\ A_n)|}{|(A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n)|},\quad j=1,2,\ldots,n, \tag{2.7}$$

известному под названием *правила Крамера*.

Правило Крамера формулируется следующим образом: Если квадратная матрица A системы линейных уравнений невырождена, то j-я компонента решения системы равна дроби, знаменателем которой является определитель матрицы A, а числителем — определитель матрицы, полученной из A заменой j-го столбца столбцом свободных членов системы.

2.3. Обратимся теперь к общему случаю, отказавшись от каких бы то ни было предположений относительно матрицы системы линейных уравнений (2.1).

Пусть ранг матрицы A равен r. Исключим из рассмотрения тривиальный случай, когда $r=0$, означающий, что матрица A состоит из одних нулей. Базис системы векторов $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$, составляющих матрицу A, содержит r векторов. Примем для определенности, что этими векторами являются $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_r$. Допустим, что система уравнений (2.1) совместна и $X=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ — одно из ее решений. В таком случае вектор свободных членов системы B является линейной комбинацией векторов A_j, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$:

$$B=\sum_{j=1}^{n}x_jA_j.$$

Поскольку каждый из векторов A_j, $j\geqslant r+1$, может быть выражен через векторы базиса, то

$$B=\sum_{j=1}^{r}\alpha_jA_j.$$

Отсюда следует, что векторы $A_1, A_2, \ldots, A_r$ составляют базис системы $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$, и, следовательно, ранг расширенной матрицы $\tilde{A}=(A_1, A_2, \ldots, A_n, B)$ системы (2.1) равен r — рангу матрицы A.

Пусть теперь ранги матриц A и $\tilde{A}$ совпадают и равны r.

Если $A_1, A_2, \ldots, A_r$ — базис системы векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то найдутся такие числа α_i ($i=1, 2, \ldots, r$), что

$$B=\sum_{i=1}^{r} \alpha_i A_i. \tag{2.8}$$

В противном случае система векторов $A_1, A_2, \ldots, A_r, B$ оказалась бы линейно независимой, и ранг матрицы $\tilde{A}$ превзошел бы число r.

Равенство (2.8) означает, что вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, 0, \ldots, 0)$ является решением системы (2.1).

Таким образом, мы получили следующий критерий совместности системы линейных уравнений.

Теорема 2.1. *Для совместности системы линейных уравнений необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу ее расширенной матрицы.*

Отметим, что теорема 2.1 справедлива и при $r=0$, так как в этом случае для разрешимости системы необходимо и достаточно, чтобы $B=0$. Следовательно, матрица $\tilde{A}$, так же как и матрица A, имеет ранг, равный нулю.

Если удалось выяснить, что данная система линейных уравнений разрешима, то сразу же встает вопрос о том, каково полное множество ее решений.

Свяжем с системой уравнений (2.1) систему

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=0, \qquad j=1, 2, \ldots, m, \tag{2.9}$$

или, что то же самое,

$$AX=0. \tag{2.10}$$

Нам удобно будет также пользоваться следующими эквивалентными записями системы (2.9):

$$\sum_{j=1}^{n} A_j x_j=0, \tag{2.11}$$

$$(A^{(i)}, X)=0, \qquad i=1, 2, \ldots, m, \tag{2.12}$$

Здесь $A^{(i)}=(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ — вектор, совпадающий с i-й строкой матрицы A.

Система уравнений с нулевым вектором свободных членов называется *однородной*.

Таким образом, система (2.9) — однородная система линейных уравнений. Поскольку матрицы систем (2.1) и (2.9) одинаковы, то систему (2.9) называют однородной системой, *соответствующей* системе (2.1).

Пусть X_1 и X_2 — два решения системы (2.1) и $Y=X_1-X_2$. Очевидно, что

$$AY=AX_1-AX_2=0.$$

Следовательно, вектор Y — решение однородной системы (2.9) (или (2.10)). С другой стороны, если Y — любое решение системы (2.9), а X_1 — некоторое решение системы (2.1), то $X_2=X_1+Y$ также является решением системы (2.1), так как

$$AX_2=AX_1+AY=B+0=B.$$

Отсюда следует, что полная совокупность решений (о б щ е е р е ш е н и е) системы (2.1) всегда может быть представлена в виде суммы частного решения этой системы и общего решения соответствующей ей однородной системы (2.9).

2.4. Займемся исследованием общего решения однородной системы уравнений (2.9).

Совместность системы (2.9) не вызывает сомнений, поскольку ей удовлетворяет нулевой вектор $0=(0, 0, \ldots, 0)$. Пусть ранг матрицы A системы (2.9) равен r. Это означает, что максимальный порядок отличного от нуля минора матрицы A равен r. Примем для определенности, что $|\,\|a_{ij}\|_r\,|\neq 0$. В таком случае первые r строк матрицы A линейно независимы.

Назовем две системы линейных уравнений с одинаковым числом неизвестных *эквивалентными*, если общие решения обеих систем совпадают.

Рассмотрим систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=0, \qquad i=1, 2, \ldots, r, \tag{2.13}$$

состоящую из первых r уравнений системы (2.9). Воспользовавшись записью (2.12), можно переписать (2.13) в виде

$$(A^{(i)},\ X)=0, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ r. \tag{2.14}$$

По условию,

$$A^{(s)}=\sum_{i=1}^{r}\alpha_{is}A^{(i)}, \qquad s=r+1,\ \ldots,\ m.$$

Следовательно, если вектор X удовлетворяет системе (2.14), то

$$(A^{(s)},\ X)=\sum_{i=1}^{r}\alpha_{is}(A^{(i)},\ X)=0, \qquad s=r+1,\ \ldots,\ m.$$

Отсюда вытекает, что системы (2.9) и (2.13) эквивалентны, т. е. общее решение одной из них является общим решением другой системы.

Перепишем систему уравнений (2.13) в эквивалентном виде:

$$\sum_{j=1}^{r}a_{ij}x_j=-\sum_{j=r+1}^{n}a_{ij}x_j, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ r. \tag{2.15}$$

По условию, определитель матрицы $\|a_{ij}\|_r$ отличен от нуля. Следовательно, при любых значениях неизвестных x_j, $j=r+1,\ \ldots,\ n$, первые r неизвестных системы (2.13) определяются однозначно, причем для их вычисления можно воспользоваться правилом Крамера.

Введем систему n-мерных векторов

$$X_s=(x_1^{(s)},\ x_2^{(s)},\ \ldots,\ \underbrace{x_r^{(s)},\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 1}_{s},\ 0,\ \ldots,\ 0),$$

где числа $x_1^{(s)},\ x_2^{(s)},\ \ldots,\ x_r^{(s)}$ находятся из системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{r}a_{ij}x_j^{(s)}=-a_{i,\ r+s}, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ r, \tag{2.16}$$

а индекс s изменяется от 1 до $n-r$.

Учитывая единственность решения системы (2.15) при любом фиксированном значении ее правой части, получаем следующее выражение для произвольного решения $X' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ системы (2.13):

$$X' = \sum_{s=1}^{n-r} x'_{r+s} X_s. \tag{2.17}$$

С другой стороны, из линейности и однородности системы (2.13) следует, что вектор $\sum_{s=1}^{n-r} \alpha_s X_s$ при любых $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r}$ является решением этой системы.

Итак, общее решение системы (2.13) (а следовательно, и эквивалентной системы (2.9)) представляет собой множество всевозможных линейных комбинаций векторов $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$. Последние $n-r$ компонент векторов X_s, $s = 1, 2, \ldots, n-r$ образуют квадратную матрицу с определителем, отличным от нуля. Следовательно, векторы $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$ линейно независимы.

Мы получили следующее утверждение:

Теорема 2.2. *Совокупность решений (общее решение) однородной системы линейных уравнений с n неизвестными и матрицей ранга r представляет собой $(n-r)$-мерное подпространство (подпространство решений).*

2.5. Пусть система (2.1) совместна, ее матрица имеет ранг r и X — одно из решений этой системы. Учитывая установленную ранее связь между общими решениями систем (2.1) и (2.9), можно утверждать существование таких линейно независимых векторов X_s, $s = 1, 2, \ldots, n-r$ (они являются решениями системы (2.9)), что множество векторов

$$X + \sum_{s=1}^{n-r} \alpha_s X_s$$

при всевозможных значениях чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r}$ совпадает с общим решением системы (2.1).

Полученное утверждение относительно общего решения системы (2.1) можно сформулировать следующим образом:

Теорема 2.3. *Общее решение совместной системы линейных уравнений с n неизвестными и матрицей ранга r является $(n-r)$-мерным линейным многообразием. Это многообразие образуется сдвигом подпространства реше-*

ний соответствующей однородной системы на любой вектор, удовлетворяющий исходной системе.

В качестве следствия из теоремы 2.3 получаем условие единственности решения системы линейных уравнений.

Теорема 2.4. *Разрешимая система линейных уравнений имеет единственное решение в том и только в том случае, если ранг матрицы системы равен числу ее неизвестных.*

В частности, если число уравнений и число неизвестных системы равны, то необходимое и достаточное условие единственности решения системы заключается в невырожденности ее матрицы.

Рассмотрим произвольное ϱ-мерное линейное многообразие, состоящее из точек

$$X_0 + \sum_{i=1}^{\varrho} \alpha_i X_i, \tag{2.18}$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_\varrho$ — линейно независимая система векторов ($\varrho < n$). С помощью векторов $X_1, X_2, \ldots X_\varrho$ образуем однородную систему линейных уравнений

$$(X_i, Y) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, \varrho. \tag{2.19}$$

Компоненты вектора $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ являются неизвестными системы (2.19). Ранг матрицы системы (2.19) равен ϱ. Согласно теореме 2.2 общее решение однородной системы (2.19) представляется в виде

$$\alpha_1 Y_1 + \alpha Y_2 + \ldots + \alpha_{n-\varrho} Y_{n-\varrho},$$

где Y_i, $i = 1, 2, \ldots, n-\varrho$ линейно независимые векторы, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-\varrho}$ — произвольные числа. В частности,

$$(X_i, Y_j) = 0$$

для $i = 1, 2, \ldots, \varrho$; $j = 1, 2, \ldots, n-\varrho$. Следовательно, однородная система уравнений

$$(Y_i, X) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-\varrho, \tag{2.20}$$

имеет в качестве решений векторы

$$X_1, X_2, \ldots, X_\varrho.$$

Учитывая, что векторы $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-\varrho}$ линейно независимы, заключаем, что ранг системы (2.20) равен $n-\varrho$.

Поэтому согласно теореме 2.2 общее решение этой системы является ϱ-мерным подпространством. Векторы $X_1, X_2, \ldots, X_\varrho$ — линейно независимы и содержатся в указанном подпространстве. Следовательно, общее решение системы (2.20) имеет вид

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_\varrho X_\varrho. \tag{2.21}$$

Введем теперь в рассмотрение систему линейных уравнений

$$(Y_i, X) = (Y_i, X_0), \qquad i = 1, 2, \ldots, n - \varrho. \tag{2.22}$$

Очевидно, X_0 является одним из решений системы (2.22). Теорема 2.3 и представление (2.21) для общего решения системы (2.20) показывают, что выражение (2.18) является общим решением системы (2.22).

Мы доказали, таким образом, предложение, обратное теореме 2.3.

Теорема 2.5. *Произвольное ϱ-мерное линейное многообразие является общим решением некоторой системы линейных уравнений с n неизвестными, ранг матрицы которой равен $n-\varrho$.*

Рассмотрим одно линейное уравнение с n неизвестными,

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b. \tag{2.23}$$

Пусть вектор $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ отличен от нулевого. Из теоремы 2.3 следует, что общее решение уравнения (2.23) представляет собой $(n-1)$-мерное линейное многообразие, т. е. гиперплоскость.

С другой стороны, согласно теореме 2.5 любая гиперплоскость является общим решением некоторого уравнения типа (2.23) с вектором $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq 0$. Приведенные соображения дают основания ввести еще одно определение гиперплоскости.

Гиперплоскостью называется множество точек n-мерного пространства, удовлетворяющих линейному уравнению вида (2.23), в котором $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq 0$.

Уравнение (2.23) принято называть *уравнением гиперплоскости*. Вектор $A \neq 0$ называется *направляющим вектором* гиперплоскости, определяемой уравнением (2.23).

Пусть X_0 — произвольная точка гиперплоскости (2.23) (гиперплоскости, определяемой уравнением (2.23)). Очевидно, гиперплоскость (2.23) может рассматриваться как совокупность точек, представимых в виде X_0+X', где $(A, X')=0$. Таким образом, гиперплоскость (2.23) является сдвигом на вектор X_0 множества векторов X', ортогональных направляющему вектору A. Поэтому принято говорить, что гиперплоскость ортогональна своему направляющему вектору.

При рассмотрении систем линейных уравнений можно считать, что среди коэффициентов каждого из них имеются отличные от нуля. Действительно, если система содержит уравнение

$$0X_1+0X_2+\ldots+0X_n=b,$$

то при $b\neq 0$ она несовместна, а при $b=0$ выписанное уравнение не накладывает никаких ограничений на вектор X и может быть отброшено.

Отсюда следует, что общее решение совместной системы линейных уравнений является пересечением (общей частью) нескольких гиперплоскостей (по числу уравнений системы).

Будем говорить, что гиперплоскости *линейно независимы*, если их направляющие векторы образуют линейно независимую систему.

Теоремы 2.3 и 2.5 позволяют дать еще одно определение линейного многообразия.

Общая часть (пересечение) r линейно независимых гиперплоскостей (в том случае, если она непуста) называется $(n-r)$*-мерным линейным многообразием.*

Итак, $(n-r)$*-мерное линейное многообразие* можно рассматривать либо как сдвинутое множество линейных комбинаций $(n-r)$ линейно независимых векторов, либо как общую часть r линейно независимых гиперплоскостей.

Доказательство эквивалентности обоих определений, вытекающее из теорем 2.3 и 2.5, составляет основное содержание теории систем линейных уравнений.

В главе 3 установлены аналоги теорем 2.3 и 2.5 применительно к системам линейных равенств и неравенств. Эти предложения позволят обосновать эквивалентность двух различных определений выпуклого многогранного множества — области определения линейной формы задачи линейного программирования — частным случаем которого является линейное многообразие.

2.6. Приведем еще один критерий совместности систем линейных уравнений, который в некоторых случаях оказывается более удобным, чем первый (теорема 2.1).

Теорема 2.6. *Для совместности системы линейных уравнений (2.1) необходимо и достаточно, чтобы равенство*

$$(Y,\ B)=0 \tag{2.24}$$

выполнялось при любом векторе $Y=(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)$, *удовлетворяющем однородной системе*

$$(A_j,\ Y)=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i=0, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{2.25}$$

Доказательство сформулированной теоремы опирается на следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть* $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_k$ — *произвольная линейно независимая система векторов. В таком случае матрица*

$$M=\begin{Vmatrix} (X_1,\ X_1) & (X_1,\ X_2)\ldots(X_1,\ X_k) \\ (X_2,\ X_1) & (X_2,\ X_2)\ldots(X_2,\ X_k) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (X_k,\ X_1) & (X_k,\ X_2)\ldots(X_k,\ X_k) \end{Vmatrix},$$

образованная скалярными произведениями этих векторов, является невырожденной.

Доказательство. Рассмотрим однородную систему уравнений с матрицей M:

$$\sum_{j=1}^{k}(X_i,\ X_j)\,y_j=0, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ k. \tag{2.26}$$

Пусть $\Lambda=(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_k)$ — произвольное решение системы (2.26):

$$\sum_{j=1}^{k}(X_i,\ X_j)\,\lambda_j=0, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ k. \tag{2.27}$$

Учитывая аддитивность и однородность скалярного произведения (свойства 2 и 3), можно переписать равенства (2.27) в виде

$$(X_i,\ R)=0, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ k, \tag{2.28}$$

где

$$R=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j X_j.$$

Умножая i-е равенство системы (2.28) на λ_i и складывая результаты, получаем

$$\sum_{j=1}^{k}\lambda_i(X_i,\ R)=(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i X_j,\ R)=(R,\ R)=0, \tag{2.29}$$

Равенство (2.29) означает, что вектор

$$R=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j X_j=0.$$

Но, по условию, векторы X_1, X_2, ..., X_k линейно независимы. Следовательно,

$$\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_k=0.$$

Таким образом, система (2.26) имеет единственное решение, которым является нулевой вектор.

В соответствии с теоремой 2.4 это влечет за собой невырожденность матрицы M. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.6.

1. Необходимость. Пусть система (2.1) разрешима. Это значит, что вектор B может быть представлен в виде линейной комбинации векторов A_j (столбцов матрицы A):

$$B=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j A_j. \tag{2.30}$$

Рассмотрим произвольное решение $\Lambda=(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_m)$ системы (2.25):

$$(A_j,\ \Lambda)=0, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{2.31}$$

Умножая скалярно обе части векторного равенства (2.30) на

Λ и учитывая (2.31), получаем

$$(B, \Lambda)=\sum_{j=1}^{n} \alpha_j (A_j, \Lambda)=0.$$

Необходимость доказана.

2. Достаточность. Эта часть доказательства несколько сложнее предыдущей. Согласно теореме 2.2 среди решений однородной системы (2.25) имеются $(m-r)$ линейно независимых векторов (здесь r — ранг матрицы A). Пусть ими будут векторы

$$Y_i=(y_1^{(i)},\ y_2^{(i)},\ \ldots,\ y_m^{(i)}), \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m-r.$$

По условию,

$$(A_j,\ Y_i)=0, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m-r; \quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{2.32}$$

Среди векторов A_j, составляющих матрицу A системы (2.1) имеется r линейно независимых. Положим для определенности что линейно независимыми являются векторы

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_r.$$

Проверим, что векторы

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_r,\quad Y_1,\ Y_2,\ \ldots,\ Y_{m-r} \tag{2.33}$$

составляют линейно независимую систему. Пусть

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j A_j + \sum_{i=1}^{m-r} \beta_i Y_i = 0. \tag{2.34}$$

Умножая обе части равенства (2.34) скалярно на векторы A_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ r)$ и Y_j $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ m-r)$, и учитывая (2.32), получаем

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j (A_j,\ A_i)=0, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ r,$$

$$\sum_{i=1}^{m-r} \beta_i (Y_i,\ Y_j)=0, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ m-r.$$

Согласно лемме 2.1 матрицы $\|(A_j,\ A_i)\|_r$ и $\|(Y_i,\ Y_j)\|_{m-r}$ невырождены. Следовательно, из теоремы 2.4 вытекает, что

$$\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_r=\beta_1=\beta_2=\ldots=\beta_{m-r}=0.$$

Итак, система векторов (2.3) линейно независима. Число векторов системы (2.3) равно $r+(m-r)=m$. Поэтому любой вектор m-мерного пространства может быть представлен в виде их линейной комбинации. В частности,

$$B=\sum_{j=1}^{r} x_j A_j+\sum_{i=1}^{m-r} y_i Y_i. \tag{2.35}$$

Умножим обе части равенства (2.35) на векторы Y_j. Учитывая условия теоремы, согласно которым

$$(B,\ Y_i)=0, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m-r,$$

и соотношения (2.32), получаем

$$\sum_{i=1}^{m-r} y_i (Y_i,\ Y_j)=0, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ m-r. \tag{2.36}$$

В силу леммы 2.1 и теоремы 2.4 соотношения (2.36) влекут за собой равенства

$$y_1=y_2=\ldots=y_{m-r}=0.$$

Поэтому (2.35) может быть переписано в виде

$$B=\sum_{j=1}^{r} x_j A_j,$$

что означает совместность системы (2.1), одним из решений которой является вектор $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_r,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0)$. Теорема доказана полностью.

Если ранг матрицы A равен r, то общее решение однородной системы (2.25) представляет собой совокупность линейных комбинаций некоторых $(m-r)$ линейно независимых решений этой системы. Поэтому условия ортогональности (2.24) следует проверять лишь для $(m-r)$ линейно независимых векторов, являющихся решениями системы (2.25).

В соответствии с теоремой 2.4 критерием единственности совместной системы (1.2) является линейная независимость столбцов матрицы A. Условие (2.24) не составляет ограничения для вектора B только в том случае, если $r=m$. Следовательно, критерий разрешимости системы (2.1) при любом векторе свободных членов состоит в линейной независимости строк матрицы A.

Отсюда вытекает, что для единственности решения системы (2.1) при любом векторе B необходимо и достаточно, чтобы матрица A была квадратной и невырожденной.

Отметим также следующее простое утверждение (упражнение 8):

Если матрица A квадратная, то единственность решения однородной системы, соответствующей системе уравнений (2.1), является необходимым и достаточным условием для совместности системы (2.1) при любом векторе B.

2.7. До сих пор мы ни слова не сказали о том, как решать конкретные системы линейных уравнений. Один из возможных путей решения системы вида (2.1) непосредственно следует из приведенной здесь теории линейных систем. Этот путь заключается в следующем.

Вначале определяются ранги матрицы A и расширенной матрицы $\tilde{A}$ системы.

Если они различны, делается вывод о несовместности системы. В противном случае приступают к определению общего решения системы. При вычислении ранга матрицы системы выделяется ее невырожденная квадратная подматрица максимального порядка. Обозначим ее через $\bar{A}$. Уравнения системы, коэффициенты которых не участвуют в образовании матрицы $\bar{A}$, в дальнейшем не учитываются. Неизвестные, коэффициенты при которых не являются элементами матрицы $\bar{A}$, переносятся в правую часть. При этом образуется система уравнений с квадратной невырожденной матрицей $\bar{A}$ и вектором свободных членов, являющимся суммой одного вектора и линейной комбинации нескольких векторов. Коэффициенты линейной комбинации могут принимать произвольные значения.

Далее используется правило Крамера, с помощью которого неизвестные, соответствующие столбцам матрицы $\bar{A}$, выражаются через остальные неизвестные системы. На этом построение общего решения системы заканчивается.

Читатель, вероятно, заметил, что при немалых значениях параметров m и n реализация намеченного способа решения систем линейных уравнений связана с необходимостью вычисления большого числа определителей высокого порядка. Вычисление каждого такого определителя представляет собой весьма трудоемкую работу. Поэтому описанный выше путь отыскания общего решения системы уравнений оказывается практически непригодным.

Для решения систем линейных уравнений с числовыми коэффициентами создано много методов, экономных в вычислительном отношении.

Мы остановимся здесь на одном из них.

Как обычно, наши рассуждения будут проводиться применительно к системе (2.1). Метод, излагаемый ниже, известен под названием метода *полного исключения*. Обычно он связывается с именами Жордана и Гаусса.

Метод полного исключения основывается на использовании двух видов элементарных преобразований расширенной матрицы системы.

1. Некоторая строка расширенной матрицы умножается на число, отличное от нуля.

2. К одной из строк расширенной матрицы прибавляется другая строка, умноженная на произвольное число.

Нетрудно проверить, что каждое из элементарных преобразований (а следовательно, и любая их последовательность) приводит к расширенной матрице новой системы, которая эквивалентна исходной системе. Доказательство этого утверждения читатель сможет провести самостоятельно (см. упражнение 9).

Метод полного исключения складывается из конечного числа шагов. Опишем первый шаг метода. Среди элементов матрицы системы A (главной части расширенной матрицы $\tilde{A}$) выбирается произвольный элемент, отличный от нуля. Этот элемент называют *направляющим элементом* данного шага (преобразования). Строку и столбец, которые содержат направляющий элемент преобразования, принято называть *направляющими* данного преобразования.

Все элементы направляющей строки расширенной матрицы $\tilde{A}$ делятся на направляющий элемент. В результате образуется новая направляющая строка. Далее, из каждой строки матрицы $\tilde{A}$ (исключая направляющую строку) вычитается новая направляющая строка, умноженная на элемент, который расположен на пересечении преобразуемой строки и направляющего столбца. На этом первый шаг метода полного исключения заканчивается.

Обозначим через $\tilde{A}'$ матрицу, в которую перешла матрица $\tilde{A}$. Матрица $\tilde{A}'$ образовалась из матрицы $\tilde{A}$ с помощью одного элементарного преобразования первого вида и $(m-1)$ элементарных преобразований второго вида. Следовательно, система уравнений с расширенной матрицей $\tilde{A}$ эквивалентна исходной системе (2.1).

Отметим, что в результате описанных преобразований все элементы направляющего столбца, отличные от направляющего элемента, перешли в нули, а направляющий элемент перешел в единицу.

Совокупность элементов первых n столбцов матрицы $\tilde{A}'$, лежащих вне направляющей строки и направляющего столбца первого шага, назовем главной частью матрицы $\tilde{A}'$.

Направляющий элемент второго шага разыскивается среди ненулевых элементов главной части матрицы $\tilde{A}'$. Второй шаг проводится по тем же правилам, что и первый. Отметим, что столбец, отвечающий направляющему столбцу первого шага, в результате второго шага не меняется, так как на пересечении этого столбца и направляющей строки второго шага стоит нуль. В полученной после второго шага матрице $\tilde{A}''$ на месте направляющих столбцов (первого и второго шагов) стоят единичные векторы. Единичная компонента каждого из этих векторов расположена в соответствующей направляющей строке. Дальнейшие шаги метода полного исключения проводятся по аналогичным правилам. Допустим, что уже осуществлено k шагов метода и $\tilde{A}^{(k)}$ — полученная в результате матрица. Каждому шагу соответствует своя направляющая строка и свой направляющий столбец. В матрице $\tilde{A}^{(k)}$ имеется k строк и k столбцов, которые на предыдущих шагах выбирались в качестве направляющих. Поэтому k столбцов матрицы $\tilde{A}^{(k)}$ представляют собой единичные векторы с единицами в соответствующих направляющих строках. Совокупность элементов первых n столбцов матрицы $\tilde{A}^{(k)}$, расположенных вне направляющих строк и столбцов предыдущих шагов,— главная часть этой матрицы. Направляющий элемент $(k+1)$-го шага выбирается среди ненулевых элементов главной части матрицы $\tilde{A}^{(k)}$. После этого к матрице $\tilde{A}^{(k)}$ применяется та же последовательность элементарных преобразований, что и на первом шаге. В результате приходим к матрице $\tilde{A}^{(k+1)}$, имеющей $(k+1)$ единичных столбцов.

Последовательные шаги осуществляются до тех пор, пока имеется возможность выбора направляющего элемента. Если после k-го шага главная часть матрицы $\tilde{A}^{(k)}$ не содержит ни одного элемента или состоит из одних нулей, то процесс решения на этом заканчивается.

Очевидно, что описанный процесс содержит не более чем $\tau = \min\{m, n\}$ шагов, причем общее число умножений и делений не превосходит $m\tau \frac{2n-\tau+1}{2}$.

2.8. Пусть процесс решения оборвался после l-го шага. Прежде всего заметим, что матрица

$$\tilde{A}^{(l)} = (A_1^{(l)}, A_2^{(l)}, \ldots, A_n^{(l)}, B^{(l)}) = (A^{(l)}, B^{(l)})$$

образовалась из матрицы $\tilde{A}$ с помощью элементарных преобразований. Следовательно, система линейных уравнений

$$A^{(l)}X = B^{(l)} \tag{2.37}$$

эквивалентна системе (2.1). Поскольку процесс решения закончен, главная часть матрицы $\tilde{A}^{(l)}$ либо не содержит ни одного элемента, либо состоит из одних нулей.

Предположим вначале, что среди строк матрицы $\tilde{A}^{(l)}$ имеются такие, которые не являлись направляющими ни в одном из проведенных шагов. Рассмотрим любую из этих строк.

Допустим, что ее номер равен i_0. Как нетрудно проверить, $a_{i_0 j}^{(l)} = 0$ для $j = 1, 2, \ldots, n$. Действительно, если j — номер столбца, который был направляющим в одном из шагов процесса, то $a_{i_0 j}^{(l)} = 0$, поскольку единственный ненулевой элемент j-го столбца расположен в соответствующей направляющей строке. Если же j-й столбец ни разу не выбирался в качестве направляющего, то элемент $a_{i_0 j}^{(l)}$ расположен в главной части матрицы $\tilde{A}^{(l)}$, которая, по условию, содержит только нулевые элементы.

Таким образом, i_0-е уравнение системы (2.37) имеет вид

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b_{i_0}^{(l)}. \tag{2.38}$$

1. Если $b_{i_0}^{(l)} \neq 0$, то уравнение (2.38) противоречиво. Поэтому система (2.1), эквивалентная несовместной системе (2.37), не имеет ни одного решения.

2. Если $b_{i_0}^{(l)} = 0$, то i_0-е уравнение системы (2.37), являясь тождеством $(0 = 0)$, не накладывает никаких ограничений на неизвестные системы, и следовательно, может быть опущено.

Перебирая одну за другой строки матрицы $\tilde{A}^{(l)}$, не являющиеся направляющими, мы либо установим неразрешимость системы, либо отбросим все такие строки.

Допустим, что случай 1°, указывающий на неразрешимость системы (2.1), ни разу не имел места. Тогда в системе (2.37) останутся только такие уравнения, которые соответствуют строкам матрицы $\tilde{A}^{(l)}$, выбранным в качестве направляющих на одном из шагов процесса.

Таким образом, в системе (2.37) окажется ровно l уравнений (по числу направляющих строк). Примем для определенности, что это — первые l уравнений. Перепишем полученную систему уравнений в виде

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(l)} x_j = b_i^{(l)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, l. \tag{2.39}$$

Очевидно, система (2.39) эквивалентна системе (2.37), а следовательно, и исходной системе (2.1). В частности, l может равняться m. Это значит, что в процессе решения все строки системы выбирались в качестве направляющих. В этом случае отбрасывать часть уравнений системы (2.37) не придется. Итак, либо исходная система окажется несовместной, либо мы перейдем к системе (2.39), эквивалентной системе (2.1). Покажем, что система (2.39) совместна, и определение ее общего решения не требует каких бы то ни было вычислений.

Без ограничения общности будем считать, что i-й направляющей строке $(i = 1, 2, \ldots, l)$ соответствует i-й направляющий столбец (этого всегда можно добиться за счет соответствующей перенумерации переменных системы (2.39). Тогда в соответствии с описанными выше правилами метода полного исключения

$$a_{ij}^{(l)} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases} \qquad (j = 1, 2, \ldots, l).$$

Следовательно, система (2.39) может быть переписана в виде

$$x_i = b_i^{(l)} - \sum_{j=l+1}^{n} a_{ij}^{(l)} x_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, l. \tag{2.40}$$

Положим

$$X_0 = (b_1^{(l)}, b_2^{(l)}, \ldots, b_l^{(l)}, 0, 0, \ldots, 0),$$

$$X_s = (\underbrace{-a_{1s}^{(l)}, -a_{2s}^{(l)}, \ldots, -a_{ls}^{(l)}, 0, 0, \ldots, 0,}_{s} \; 1, \; 0, \; \ldots, \; 0),$$

$$s = l+1, \; \ldots, n.$$

Очевидно, X_0 является решением системы (2.40), а векторы X_s $(s = l+1, \ldots, n)$ удовлетворяют однородной системе уравнений, соответствующей системе (2.40).

Ранг матрицы системы (2.40) равен l (коэффициенты при первых l неизвестных составляют единичную матрицу порядка l). Векторы X_s $(s = l+1, \ldots, n)$ линейно независимы (их последние $n-l$ координат образуют единичную матрицу порядка $n-l$). Поэтому согласно теореме 2.3 общее решение системы (2.40) имеет вид

$$X_0 + \sum_{s=l+1}^{n} \alpha_s X_s, \tag{2.41}$$

где $\alpha_{l+1}, \alpha_{l+2}, \ldots, \alpha_n$ — произвольные коэффициенты.

Но система (2.40) эквивалентна системе (2.1). Следовательно, выражение (2.41) является общим решением системы (2.1).

Каждый шаг описанного метода состоит *в исключении* некоторого неизвестного (соответствующего направляющему столбцу) из *всех* уравнений системы, кроме того, которое отвечает направляющей строке данного шага. Этим и объясняется название метода — *метод полного исключения.*

Для решения систем линейных уравнений часто применяется также *метод исключения Гаусса.* Этот метод сходен с методом полного исключения. Различие методов состоит в том, что в методе исключения Гаусса каждый шаг состоит в исключении некоторого неизвестного только из тех уравнений, которые не соответствуют направляющим строкам предшествующих шагов. Таким образом, число преобразуемых строк в k-м шаге метода исключения равно $n-k$, тогда как в методе полного исключения всякий раз преобразуются все строки.

Если подсчитать трудоемкость обоих методов, то окажется, что метод полного исключения требует несколько большего числа операций по сравнению с методом исключения. Однако метод полного исключения играет особую роль в линейном программировании. Он является алгоритмической основой всех конечных методов линейного программирования.

§ 3. Выпуклые множества

3.1. В п. 1.2 было введено n-мерное эвклидово пространство E_n. Мы будем рассматривать различные множества точек (векторов) пространства E_n. Напомним, что условие принадлежности всех точек множества G_1 множеству G_2 записывается обычно так: $G_1 \subset G_2$ (G_1 содержится в G_2). Если множество G_1 содержит только одну точку X, то условие принадлежности этой точки множеству G_2 обозначается по-другому:

$$X \in G_2.$$

В частности, запись $G \subset E_n$ означает, что множество G состоит из точек пространства E_n. В конце первого параграфа было введено несколько важных множеств пространства E_n: r-мерное подпространство, r-мерное линейное многообразие ($0 \leqslant r \leqslant n$). Частным случаем линейного многообразия являются гиперплоскость ($r = n - 1$) и прямая ($r = 1$).

Рассмотрим произвольную гиперплоскость с уравнением

$$(\Lambda, X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = c. \tag{3.1}$$

Гиперплоскость (3.1) порождает пару множеств, называемых *полупространствами*:

$$(\Lambda, X) \leqslant c, \quad (\Lambda, X) \geqslant c. \tag{3.2}$$

Уравнение произвольной прямой пространства E_n имеет вид

$$X = A + Bt, \quad -\infty < t < \infty, \tag{3.3}$$

где A и B — некоторые векторы из E_n. Вектор B принято называть *направляющим вектором* данной прямой. Если параметр t в уравнении (3.3) ограничен снизу или сверху конечным числом, то соответствующее множество называется *лучом* (или *полупрямой*) с направляющим вектором B. При наличии двухсторонних конечных ограничений на параметр t уравнение (3.3) определяет *отрезок*.

Любую точку отрезка, задаваемого уравнением

$$X = A + Bt, \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

можно представить в виде линейной комбинации его концов:

$$A + B\alpha, \quad A + B\beta.$$

Действительно,

$$A + Bt = \mu_1 (A + B\alpha) + \mu_2 (A + B\beta), \tag{3.4}$$

$$\mu_1 = \frac{\beta - t}{\beta - \alpha}, \quad \mu_2 = \frac{t - \alpha}{\beta - \alpha}. \tag{3.5}$$

Заметим, что

$$\mu_1 + \mu_2 = 1, \quad \mu_1 \geqslant 0, \quad \mu_2 \geqslant 0. \tag{3.6}$$

С другой стороны, как нетрудно заметить, при любых μ_1 и μ_2, удовлетворяющих (3.6), найдется такое t, заключенное между α и β, для которого выполняются равенства (3.5), а следовательно, и представление (3.4).

Таким образом, отрезок с концами в точках A' и A'' является совокупностью точек X вида

$$X = \mu A' + (1 - \mu) A'', \quad 0 \leqslant \mu \leqslant 1.$$

Шаром с центром в точке $A \in E_n$ и радиусом $\varrho > 0$ называется множество точек $X \in E_n$, для которых

$$|X - A| < \varrho. \tag{3.7}$$

Шар (3.7) составляет *ϱ-окрестность* точки A. Если множество $G \in E_n$ содержит вместе с точкой X ее ε-окрестность при некотором $\varepsilon > 0$, то X называется *внутренней* точкой множества G. *Внешняя* точка множества G обладает некоторой окрестностью, находящейся вне G.

Если в любой окрестности точки X содержатся как точки G, так и точки, не принадлежащие G, то, по определению, X — *граничная* точка множества G. Множество, содержащее все свои граничные точки, называется *замкнутым*.

Нетрудно убедиться, что любое линейное многообразие (и в частности, гиперплоскость и прямая), полупространство, луч, отрезок являются замкнутыми множествами (см. упражнение 11).

Легко проверить, что объединение конечного числа замкнутых множеств $G_1, G_2, \ldots, G_k$ ($\bigcup\limits_{l=1}^{k} G_l$) и общая часть произвольного числа замкнутых множеств $G_1, G_2, \ldots$ $\ldots, G_k, \ldots$ ($\bigcap G_l$) также являются замкнутыми множествами. Доказательство этих утверждений предоставляется читателю (см. упражнение 12).

Множество G называют ограниченным, если найдется такое число c, не зависящее от X, что

$$|X| < c$$

для всех $X \in G$.

На n-мерное эвклидово пространство без труда переносится известная теорема Больцано — Вейерштрасса:

Из любой ограниченной последовательности точек пространства E_n может быть выделена сходящаяся подпоследовательность. Доказательство этой теоремы составляет содержание упражнения 13.

Пусть $F(X)$ — функция, согласно которой каждой точке X_0 множества $G \subset E_n$ отвечает определенное действительное число $F(X_0)$. Множество G называется *областью определения* или *областью задания* функции $F(X)$.

Функция $F(X)$ называется *непрерывной* в точке X_0 из области своего задания, если для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любой точки X, принадлежащей области определения $F(X)$ и отстоящей от X_0 меньше чем на δ ($|X - X_0| < \delta$),

$$|F(X) - F(X_0)| < \varepsilon.$$

О функции, определенной и непрерывной в каждой точке множества G, говорят, что она непрерывна на множестве G. Если $F(X)$ — функция, непрерывная на ограниченном замкнутом множестве G, то она достигает на этом множестве как верхней, так и нижней грани, т. е. существуют такие точки $X', X'' \in G$, что

$$F(X') = \sup_{X \in G} F(X) = \max_{X \in G} F(X),$$
$$F(X'') = \inf_{X \in G} F(X) = \min_{X \in G} F(X).$$

Доказательство сформулированного утверждения опирается на теорему Больцано — Вейерштрасса и проводится точно так же, как и для функции одного переменного (см. упражнение 14). Простейшими примерами непрерывных функций являются линейная функция $F(X)=(C, X)=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ и квадратичная функция $F(X)=X^T\|a_{ij}\|X=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$.

Каждая из этих функций непрерывна на всем пространстве E_n (см. упражнение 15).

3.2. Множество $G\in E_n$ называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками A и B оно содержит соединяющий их отрезок:

$$\mu A+(1-\mu)B, \quad 0\leqslant\mu\leqslant 1.$$

Нетрудно проверить, что если G — выпуклое множество и точки $P_1, P_2, \ldots, P_s$ содержатся в G, то при любых $\alpha_i\geqslant 0$, $i=1, 2, \ldots, s$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=1}^{s}\alpha_i=1,$$

точка $\sum_{i=1}^{s}\alpha_i P_i\in G$ (см. упражнение 16).

Все упоминавшиеся в предыдущем пункте множества являются выпуклыми (см. упражнение 17).

Нетрудно проверить, что общая часть произвольного числа выпуклых множеств является выпуклым множеством (см. упражнение 18). Важный класс выпуклых множеств составляют так называемые выпуклые конусы. Приведем соответствующее определение.

Будем говорить, что выпуклое замкнутое множество $T\subset E_n$ является *выпуклым конусом* с вершиной в точке P_0, если для произвольного вектора $P\in T$ и любого $\mu\geqslant 0$ вектор

$$P_0+\mu(P-P_0)\in T.$$

Нетрудно проверить, что всякое линейное многообразие является выпуклым конусом, причем за вершину конуса может быть принята любая точка многообразия (см. упражнение 19). Другим достаточно общим примером выпуклого конуса является следующий. Пусть D—произвольное выпуклое замкнутое ограниченное множество, а P_0—некоторая точка, расположенная вне D. Совокупность всех лучей, исходящих из P_0 и пересекающих D, является выпуклым конусом (см. упражнение 20).

Мы сейчас сформулируем и докажем одно фундаментальное утверждение относительно выпуклых множеств. Это утверждение является основой доказательства многих важных фактов теории математического программирования.

Начнем с определения. Будем говорить, что гиперплоскость с уравнением

$$(\Lambda, X) = c$$

разделяет множества G_1 и G_2, если $(\Lambda, X) \leqslant c$ для всех точек $X \in G_1$ и $(\Lambda, X) \geqslant c$ для всех точек $X \in G_2$. Другими словами, некоторая гиперплоскость разделяет множества G_1 и G_2 в том и только в том случае, если G_1 расположено в одном из полупространств, порождаемых гиперплоскостью, а G_2 лежит в другом полупространстве.

Если все неравенства, участвующие в определении разделяющей гиперплоскости, являются строгими, то говорят, что данная гиперплоскость *строго разделяет* множества G_1 и G_2.

Таким образом, гиперплоскость, строго разделяющая множества G_1 и G_2, обладает следующим свойством: все точки множества G_1 являются внутренними точками одного из полупространств, порождаемых гиперплоскостью, а все точки множества G_2 оказываются внутренними точками другого полупространства.

Если множество G_1 расположено внутри одного из полупространств, порождаемых гиперплоскостью П, а G_2 принадлежит другому полупространству, то говорят, что гиперплоскость П *строго отделяет* множество G_1 от множества G_2.

Теорема 3.1 (теорема о разделяющей гиперплоскости). *Пусть G_1 и G_2—произвольные выпуклые замкнутые множества без общих точек, из которых хотя бы одно ограничено. В этих предположениях существует гиперплоскость, строго разделяющая множества G_1 и G_2.*

Доказательство. Для определенности допустим, что ограниченным множеством является G_1.

Положим

$$\sigma = \inf |P_1 - P_2|,$$

где нижняя грань берется по всевозможным точкам $P_1 \in G_1$ и $P_2 \in G_2$. Согласно определению нижней грани существуют такие последовательности точек $\{P_1^{(k)}\}$ и $\{P_2^{(k)}\}$ $(P_1^{(k)} \in G_1$, $P_2^{(k)} \in G_2)$, что

$$\lim_{k \to \infty} |P_1^{(k)} - P_2^{(k)}| = \sigma. \tag{3.8}$$

Поскольку G_1 — ограниченное множество, последовательность $\{P_1^{(k)}\}$ ограничена. Последовательность $\{P_2^{(k)}\}$ также ограничена, так как

$$|P_2^{(k)}| = |(P_2^{(k)} - P_1^{(k)}) + P_1^{(k)}| \leqslant |P_1^{(k)} - P_2^{(k)}| + |P_1^{(k)}|.$$

Пользуясь теоремой Больцано — Вейерштрасса, выделим из последовательностей $\{P_1^{(k)}\}$ и $\{P_2^{(k)}\}$ последовательности, сходящиеся соответственно к точкам P_1^*, P_2^*. В силу замкнутости рассматриваемых множеств $P_1^* \in G_1$, $P_2^* \in G_2$. Таким образом, существует такая последовательность индексов k_i, $i = 1, 2, \ldots$, что

$$\lim_{i \to \infty} |P_1^{(k_i)} - P_1^*| = 0; \quad \lim_{i \to \infty} |P_2^{(k_i)} - P_2^*| = 0.$$

Переходя в выражении $|P_1^{(k_i)} - P_2^{(k_i)}|$ к пределу при $i \to \infty$ и учитывая (3.8), получаем

$$|P_1^* - P_2^*| = \sigma = \min_{\substack{P_1 \in G_1 \\ P_2 \in G_2}} |P_1 - P_2|. \tag{3.9}$$

По условию, множества G_1, G_2 не имеют общих точек, следовательно $\sigma > 0$.

Пусть

$$R_\mu = \mu P_1^* + (1 - \mu) P_2^*,$$

где $0 < \mu < 1$. Обозначим через Π_μ гиперплоскость, определяемую уравнением

$$(\Lambda, X) = (\Lambda, R_\mu), \tag{3.10}$$

где $\Lambda = P_1^* - P_2^*$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что Π_μ содержит точку R_μ. Покажем, что гиперплоскость

Π_μ строго разделяет множества G_1 и G_2. Доказательство проводится от противного.

Пусть $Q \in G_1$, и вместе с тем

$$(\Lambda, Q) \leqslant (\Lambda, R_\mu). \tag{3.11}$$

Поскольку P_1^* и Q принадлежат выпуклому множеству G_1, любая точка $Q_\varepsilon = (1-\varepsilon) P_1^* + \varepsilon Q$, где $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, также содержится в G_1.

Вычислим квадрат расстояния между точками $Q_\varepsilon \in G_1$ и $P_2^* \in G_2$:

$$|Q_\varepsilon - P_2^*|^2 = |(1-\varepsilon) P_1^* + \varepsilon Q - P_2^*|^2 = |\Lambda + \varepsilon (Q - P_1^*)|^2 =$$
$$= \varepsilon^2 |Q - P_1^*|^2 + 2\varepsilon (\Lambda, Q - P_1^*) + |\Lambda|^2.$$

Установим теперь, что

$$(\Lambda, Q - P_1^*) < 0. \tag{3.12}$$

В самом деле,

$$(\Lambda, R_\mu) = (\Lambda, \mu P_1^* + (1-\mu) P_2^*) =$$
$$= (\Lambda, (\mu - 1)(P_1^* - P_2^*) + P_1^*) =$$
$$= (\Lambda, (\mu - 1)\Lambda + P_1^*) = (\mu - 1)|\Lambda|^2 + (\Lambda, P_1^*),$$

но $|\Lambda|^2 = \sigma^2 > 0$, $\mu \leqslant 1$. Следовательно,

$$(\Lambda, R_\mu) < (\Lambda, P_1^*).$$

Сравнивая полученное соотношение с (3.11), приходим к неравенству

$$(\Lambda, P_1^*) > (\Lambda, Q),$$

эквивалентному (3.12).

Положим $(\Lambda, Q - P_1^*) = \alpha$ $(\alpha < 0)$, $|Q - P_1^*| = \beta$. Тогда

$$|Q_\varepsilon - P_2^*| = \beta^2 \varepsilon^2 + 2\varepsilon\alpha + \sigma^2.$$

Выбрав $\theta > 0$, удовлетворяющее условиям

$$\frac{-\alpha}{1+\beta^2}\theta < 1, \quad \theta < 2,$$

положим

$$\varepsilon_0 = -\frac{\alpha}{1+\beta^2}\theta.$$

Точка $Q_{\varepsilon_0} \in G_1$, так как $0 < \varepsilon_0 < 1$. С другой стороны,

$$| Q_{\varepsilon_0} - P_2^* | = \sigma^2 + 2\varepsilon_0\alpha + \varepsilon_0^2\beta^2 \leqslant \sigma^2 - \frac{\alpha^2}{1+\beta^2}\theta(2-\theta) < \sigma^2.$$

Итак, допустив справедливость неравенства (3.11), приходим к соотношению, противоречащему (3.9). Следовательно,

$$(\Lambda, Q) > (\Lambda, R_\mu)$$

для любой точки $Q \in G_1$. Аналогично доказывается, что

$$(\Lambda, Q) < (\Lambda, R_\mu)$$

для всех точек $Q \in G_2$.

Таким образом, гиперплоскость

$$(\Lambda, X) = c,$$

где $\Lambda = P_1^* - P_2^*$, $c = (\Lambda, R_\mu)$, $R_\mu = \mu P_1^* + (1-\mu) P_2^*$, $0 < \mu < 1$, строго разделяет множества G_1 и G_2.

Теорема полностью доказана.

Если отказаться хотя бы от одного из предположений теоремы 3.1 относительно множеств G_1 и G_2, то теорема перестает быть верной (см. упражнение 21).

Иногда нет необходимости требовать, чтобы гиперплоскость строго разделяла два множества. Достаточно иметь гиперплоскость, которая просто разделяет эти множества. В таких случаях может оказаться полезным следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Если G_1 и G_2 — произвольные выпуклые множества без общих точек, то существует гиперплоскость, разделяющая G_1 и G_2.*

Теорема 3.2 не используется в последующем изложении. Поэтому доказательство ее здесь не приводится. При желании читатель сможет доказать эту теорему самостоятельно (см. упражнение 23).

3.3. В качестве следствия из теоремы о разделяющей гиперплоскости установим два предложения, которые будут использованы в последующих главах.

Будем говорить, что гиперплоскость П с уравнением

$$(\Lambda, X) = c$$

является *опорной* гиперплоскостью множества G (опорной для G) в точке $P_0 \in G$, если *а*) $(\Lambda, P_0) = c$ (П содержит точку P_0),

б) $(\Lambda, P) \leqslant c$ для всех точек $P \in G$,

или

$$(\Lambda, P) \geqslant c \quad \text{при } P \in G$$

(множество G лежит в одном из полупространств, порождаемых П).

Следствие 3.1 (теорема об опорной гиперплоскости). *Если P_0 — граничная точка выпуклого замкнутого множества G, то существует опорная гиперплоскость множества G в точке P_0.*

Доказательство. Поскольку P_0 — граничная точка множества G, найдется последовательность $\{P_k\}$, которая состоит из точек, не принадлежащих G, и сходится к P_0. Рассмотрим выпуклые множества G_1 и G_2, из которых первым является точка P_k, а второе совпадает с G. Согласно теореме 3.1 существует такая гиперплоскость Π_k с уравнением

$$(\Lambda_k, X) = c_k, \tag{3.13}$$

что

$$(\Lambda_k, P_k) > c_k, \tag{3.14}$$

$$(\Lambda_k, P) < c_k, \qquad P \in G. \tag{3.15}$$

Не уменьшая общности, можно считать

$$|\Lambda_k| \leqslant 1, \quad |c_k| \leqslant 1.$$

Пользуясь теоремой Больцано — Вейерштрасса, выделим из последовательности векторов $\{\Lambda_k\}$ и последовательности чисел $\{c_k\}$ подпоследовательности, сходящиеся соответственно к Λ и c. Покажем, что гиперплоскость с уравнением

$$(\Lambda, X) = c$$

является искомой.

Действительно, переходя в неравенствах (3.15) к пределу по выделенной подпоследовательности индексов k при фиксированном $P \in G$, получаем

$$(\Lambda, P) \leqslant c, \qquad P \in G. \tag{3.16}$$

В частности,

$$(\Lambda, P_0) \leqslant c. \tag{3.17}$$

С другой стороны, переход к пределу по указанной подпоследовательности в (3.14) приводит к неравенству

$$(\Lambda,\ P_0) \geqslant c. \tag{3.18}$$

Сравнивая (3.17) и (3.18), получаем

$$(\Lambda,\ P_0) = c. \tag{3.19}$$

Соотношения (3.16) и (3.19) показывают, что гиперплоскость $\Lambda,\ X) = c$ является опорной для G в точке P_0. Доказательство следствия закончено.

Отметим, что условия теоремы об опорной гиперплоскости могут быть несколько ослаблены: множество G не обязательно предполагать замкнутым (см. упражнение 22).

Определим расстояние $\varrho(P,\ G)$ между точкой P и множеством G, положив

$$\varrho(P,\ G) = \inf_{Q \in G} |P - Q|.$$

Пусть G_1 и G_2 — замкнутые непересекающиеся множества, из которых хотя бы одно ограничено. Назовем $P_2^* \in G_2$ точкой G_2, наименее удаленной от множества G_1, если

$$\varrho(P_2^*,\ G_1) = \inf_{P_2 \in G_2} \varrho(P_2,\ G_1).$$

Существование такой точки было установлено при доказательстве теоремы 3.1.

Следствие 3.2. *Пусть G_1 и G_2 — множества, удовлетворяющие условиям теоремы* 3.1, P_2^* — *точка* G_2, *наименее удаленная от* G_1. *Существует гиперплоскость* Π *с уравнением*

$$(\Lambda,\ X) = c,$$

такая, что

а) $(\Lambda,\ P) \leqslant c$ *для* $P \in G_2$,

б) $(\Lambda,\ P_2^*) = c$,

в) $(\Lambda,\ P) > c$ *для* $P \in G_1$.

(Гиперплоскость Π является опорной для G_2 в точке P_2^* и строго отделяет множество G_1 от множества G_2.)

Доказательство. Введем в рассмотрение гиперплоскость с уравнением

$$(\Lambda,\ X)=(\Lambda,\ R_\mu),$$

где

$$\Lambda=(P_1^*-P_2^*),\quad R_\mu=\mu P_1^*+(1-\mu)P_2^*.$$

Здесь P_1^* — точка G_1, наименее удаленная от множества G_2.

В процессе доказательства теоремы 3.1 было установлено, что при $0<\mu<1$

$$\min_{P_1\in G_1}(\Lambda,\ P_1)>(\Lambda,\ R_\mu), \tag{3.20}$$

$$\max_{P_2\in G_2}(\Lambda,\ P_2)<(\Lambda,\ R_\mu). \tag{3.21}$$

Устремляя параметр μ в (3.21) к нулю, получаем

$$\max_{P_2\in G_2}(\Lambda,\ P_2)\leqslant(\Lambda,\ P_2^*). \tag{3.22}$$

Заметим, что $(\Lambda,\ R_\mu)=\mu|\Lambda|^2+|\Lambda,\ P_2^*|$ не возрастает с убыванием μ. Поэтому если устремить параметр μ в (3.20) к нулю, то неравенство остается строгим:

$$\min_{P_1\in G_1}(\Lambda,\ P_1)>(\Lambda,\ P_2^*). \tag{3.23}$$

Из соотношений (3.22) и (3.23) следует, что гиперплоскость П с уравнением

$$(\Lambda,\ X)=(\Lambda,\ P_2^*)$$

обладает всеми требуемыми свойствами, и следовательно, является искомой.

3.4. Рассмотрим пространство трех измерений. Среди выпуклых множеств этого пространства имеются одномерные (отрезок), двумерные (круг) и трехмерные (шар). Характеристическим свойством трехмерной выпуклой фигуры является то, что не существует плоскости, в которую ее можно было бы погрузить. Двумерное выпуклое множество может быть погружено в некоторую плоскость; однако не существует прямой, содержащей это множество. Одномерное выпуклое множество всегда принадлежит некоторой прямой.

Приведенные соображения подсказывают следующее определение размерности выпуклого множества, расположенного в n-мерном пространстве.

Будем говорить, что *выпуклое множество имеет размерность* ϱ, если оно содержится в некотором ϱ-мерном линейном многообразии и не может принадлежать линейному многообразию размерности, меньшей чем ϱ.

Если вспомнить два различных определения линейного многообразия, то определение размерности выпуклого множества можно сформулировать в следующих двух эквивалентных формах:

1. Размерность выпуклого множества $G \subset E_n$ равна $\varrho = n - r$, где r — максимальное число линейно независимых гиперплоскостей, общая часть которых содержит G.

2. Размерность выпуклого множества G равна минимальному числу ϱ линейно независимых векторов $X_1, X_2, \ldots, X_\rho$, таких, что G содержится в совокупности точек

$$X = X_0 + \sum_{i=1}^{\varrho} \alpha_i X_i,$$

где $X_0 \in G$, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ — произвольные числа.

Установим одно полезное утверждение, поясняющее смысл понятия размерности выпуклого множества.

Теорема 3.3. *Выпуклое множество G имеет размерность, равную $\varrho \geqslant 1$, в том и только в том случае, если*

а) G содержится в некотором ϱ-мерном линейном многообразии R,

б) найдутся точка $P \in G$ и число $\varepsilon > 0$, такие, что в пределах ε-окрестности точки P множество G и многообразие R совпадают.

Доказательство.

Необходимость. Пусть размерность G равна ϱ и R — ϱ-мерное многообразие, содержащее G. Рассмотрим произвольную точку $X_0 \in G$. Выберем максимальное число линейно независимых векторов $X_1, X_2, \ldots, X_s$ среди векторов вида $X - X_0$, где $X \in G$. Очевидно, их число s равно ϱ.

Действительно, неравенство $s > \varrho$ противоречит тому, что множество $X - X_0$, $X \in G$ содержится в ϱ-мерном подпространстве $X - X_0$, $X \in R$.

С другой стороны, множество G принадлежит многообразию

$$X_0 + \sum_{i=1}^{s} \alpha_i X_i,$$

поэтому $s \geqslant \varrho$.

Итак, $s=\varrho$.

В силу выпуклости множества G

$$\alpha_0 X_0+\sum_{i=1}^{\varrho}\alpha_i(X_i+X_0)\in G$$

при любых числах $\alpha_i\geqslant 0$, $i=0, 1, \ldots, \varrho$, сумма которых равна единице. Следовательно,

$$X_0+\sum_{i=1}^{\varrho}\alpha_i X_i\in G, \tag{3.24}$$

если

$$\alpha_i\geqslant 0,\quad i=1, 2, \ldots, \varrho,\quad \sum_{i=1}^{\varrho}\alpha_i\leqslant 1.$$

Положим

$$X_0'=X_0+\frac{1}{2\varrho}\sum_{i=1}^{\varrho}X_i\qquad (X_0'\in G).$$

В силу (3.24)

$$X_0'\pm\frac{1}{2\varrho}X_i\in G,\qquad i=1, 2, \ldots, \varrho.$$

Следовательно,

$$X_0'+\sum_{i=1}^{\varrho}\alpha_i^+X_i-\sum_{i=1}^{\varrho}\alpha_i^-X_i\in G,$$

если

$$\alpha_i^+\geqslant 0,\quad \alpha_i^-\geqslant 0,\quad i=1, 2, \ldots, \varrho,\quad \sum_{i=1}^{\varrho}\alpha_i^+ +\sum_{i=1}^{\varrho}\alpha_i^-\leqslant\frac{1}{2\varrho},$$

или, что то же самое,

$$X_0'+\sum_{i=1}^{\varrho}\alpha_i X_i\in G, \tag{3.25}$$

если

$$\sum_{i=1}^{\varrho}|\alpha_i|\leqslant\frac{1}{2\varrho}.$$

По условию, множество $X-X_0'$, $X\in G$, содержится в подпространстве $X-X_0'$, $X\in R$. Следовательно, линейно независимые векторы $X_1, X_2, \ldots, X_\rho$ принадлежат этому подпространству и ϱ-мерное линейное многообразие совпадает с совокупностью точек вида

$$X'_0 + \sum_{i=1}^{\varrho} \alpha_i X_i, \tag{3.26}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\rho$ — произвольные числа. Положим

$$\mu = \inf \left| \sum_{i=1}^{\varrho} \alpha_i X_i \right| = \min \sqrt{\sum_{i=1}^{\varrho} \sum_{j=1}^{\varrho} \alpha_i \alpha_j (X_i, X_j)},$$

где нижняя грань берется по всевозможным коэффициентам α_i, удовлетворяющим условию

$$\sum_{i=1}^{\varrho} |\alpha_i| = 1, \tag{3.27}$$

Функция $\left| \sum_{i=1}^{\varrho} \alpha_i X_i \right|$ определена и непрерывна в каждой точке

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\rho) \in E_\rho.$$

Совокупность точек $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\rho)$, подчиняющихся условию (3.27), является ограниченным замкнутым множеством. Следовательно, существуют такие числа $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_\rho$, что

$$\mu = \left| \sum_{i=1}^{\varrho} \bar{\alpha}_i X_i \right|, \quad \sum_{i=1}^{\varrho} \bar{\alpha}_i = 1.$$

По определению, $\mu \geqslant 0$. Если $\mu = 0$, то

$$\sum_{i=1}^{\varrho} \bar{\alpha}_i X_i = 0$$

и в силу линейной независимости векторов $X_1, X_2, \ldots, X_\varrho$

$$\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2 = \ldots = \bar{\alpha}_\rho = 0,$$

что противоречит условию (3.27). Отсюда $\mu > 0$.

Пусть $X \in R$ и

$$|X - X'_0| \leqslant \frac{\mu}{2\varrho}. \tag{3.28}$$

В соответствии с (3.26)

$$X - X_0' = \sum_{i=1}^{\varrho} \alpha_i X_i.$$

Положим

$$\sum_{i=1}^{\varrho} |\alpha_i| = \Delta.$$

Согласно определению числа μ

$$\frac{1}{\Delta}\left|\sum_{i=1}^{\varrho} \alpha_i X_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{\varrho} \frac{\alpha_i}{\Delta} X_i\right| \geqslant \mu.$$

Отсюда, учитывая (3.28), имеем

$$\Delta = \sum_{i=1}^{\varrho} |\alpha_i| \leqslant \frac{1}{\mu}\left|\sum_{i=1}^{\varrho} \alpha_i X_i\right| \leqslant \frac{1}{2\varrho}. \tag{3.29}$$

Соотношения (3.29) и (3.25) показывают, что

$$X = X_0' + \sum_{i=1}^{\varrho} \alpha_i X_i \in G.$$

Итак, любая точка X ϱ-мерного линейного многообразия R, удовлетворяющая неравенству (3.28), принадлежит G, причем $G \subset R$. Необходимость теоремы доказана $\left(P = X_0',\ \varepsilon = \frac{\mu}{2\varrho}\right)$.

Достаточность. Пусть R — ϱ-мерное линейное многообразие, содержащее G, и точка $P \in G$ удовлетворяет условию *б* теоремы.

Многообразие R состоит из точек вида

$$P + \sum_{i=1}^{\varrho} \alpha_i X_i,$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_\varrho$ — линейно независимая система векторов. Согласно условию *б* теоремы

$$P + \varepsilon X_i \in G$$

для $i = 1, 2, \ldots, \varrho$. Пусть R' — произвольное линейное многообразие, содержащее G. В таком случае точки εX_i ($i = 1, 2, \ldots, \varrho$) принадлежат подпространству $X - P$, $X \in R'$. Следовательно, размерность линейного многообразия R' не может быть меньше, чем ϱ.

Размерность R не превышает размерности любого линейного многообразия, содержащего G. Это означает, что размерность G равна ϱ.

Достаточность условий теоремы доказана.

Из доказанной теоремы, в частности, следует, что размерность n имеют те и только те выпуклые множества $G \in E_n$, которые содержат внутренние точки.

Выпуклым множеством размерности 0 является точка (общая часть n линейно независимых гиперплоскостей).

Одномерное выпуклое множество расположено на некоторой прямой. Отсюда следует, что в предположении замкнутости оно совпадает либо с прямой, либо с лучом, либо с отрезком (см. упражнение 24).

Подчеркнем, что введенное здесь определение размерности относится только к выпуклым множествам. Попытка использовать это определение для любых множеств обречена на неудачу, поскольку такое одномерное множество, как окружность, согласно данному определению является двумерным множеством.

3.5. Точку P множества G назовем *крайней*, если не существует двух различных точек P_1 и P_2, принадлежащих G, таких, что

$$P = \mu P_1 + (1-\mu) P_2,$$

где

$$0 < \mu < 1.$$

Таким образом, если P — крайняя точка множества G, а S — произвольный отрезок, принадлежащий G, то P либо не содержится в S, либо является одним из его концов.

Примерами крайних точек линейных и плоских множеств являются концы отрезка, вершины многоугольника, точки граничной окружности круга и т. д. Выпуклые множества могут иметь как конечное (многоугольник), так и бесконечное (круг) число крайних точек. Некоторые выпуклые множества (например, прямая) не содержит ни одной крайней точки. Ниже мы увидим, что подобные множества обязаны быть либо неограниченными, либо незамкнутыми.

Будем говорить, что множество G является *выпуклой оболочкой* множества G_1, если оно состоит из всевозможных точек вида

$$\sum_{i=1}^{N} \mu_i P_i,$$

где $\sum_{i=1}^{N} \mu_i = 1$, $\mu_i \geqslant 0 \, (i = 1, 2, \ldots, N)$, $P_1, P_2, \ldots, P_N$ — произвольная конечная система точек из G_1.

Вектор $\sum_{i=1}^{N} \mu_i P_i$ принято называть *выпуклой комбинацией* векторов $P_1, P_2, \ldots, P_N$. Нетрудно заметить, что выпуклая оболочка произвольного множества есть выпуклое множество (см. упражнение 25). С другой стороны, любое выпуклое множество, содержащее G_1, обязано включать его выпуклую оболочку G (см. упражнение 16).

Поэтому выпуклая оболочка множества G — минимальное выпуклое множество, содержащее G. Сформулируем и докажем утверждение, которое дает возможность выяснить структуру выпуклого замкнутого ограниченного множества.

Теорема 3.4 (теорема о представлении). *Пусть G — выпуклое замкнутое ограниченное множество, G^* — совокупность крайних точек G. В таком случае G является выпуклой оболочкой множества G^*.*

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по размерности n эвклидова пространства E_n, содержащего G.

Если выпуклое замкнутое ограниченное множество $G \subset E_1$, то оно, очевидно, является либо точкой, либо отрезком. В первом случае множества G и G^* совпадают. Во втором случае G^* состоит из концов отрезка G, а любой отрезок является выпуклой оболочкой своих концов. Итак, при $n = 1$ теорема доказана.

Допустим справедливость утверждения теоремы для пространства E_{n-1}. Покажем, что оно имеет место и в случае E_n. Пусть множество $G \in E_n$ и $P_0 = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)})$ — произвольная точка G.

1. Допустим вначале, что P_0 — граничная точка множества G. Тогда по следствию 3.1 через точку P_0 может быть проведена гиперплоскость Π с уравнением

$$(\Lambda, X) = c, \tag{3.30}$$

опорная для G т. е. такая, что $(\Lambda, X) \leqslant c$ при $X \in G$.

Обозначим через G_1 общую часть множества G и гиперплоскости Π. Очевидно, G_1 — выпуклое замкнутое ограниченное множество; точка $P_0 \in G$. Допустим для определенности, что последняя компонента λ_n направляющего вектора $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ гиперплоскости Π отлична от нуля.

В соответствии с уравнением (3.30) для любой точки $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \Pi$ имеет место равенство

$$p_n = -\frac{1}{\lambda_n} \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i p_i + \frac{c}{\lambda_n}. \tag{3.31}$$

Рассмотрим множество $\overline{G}_1 \in E_{n-1}$, состоящее из точек $\overline{P} = (p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}) \in E_{n-1}$, таких, что соответствующие точки $P = (p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n)$, где p_n определяется из соотношения (3.31), принадлежит G_1.

Очевидно, $\overline{G}_1$ — выпуклое замкнутое ограниченное множество (этим условиям удовлетворяет G_1); точка $\overline{P}_0 = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \ldots, p_{n-1}^{(0)}) \in \overline{G}_1$. Следовательно, по предположению индукции найдутся такие крайние точки множества $\overline{G}_1$

$$\overline{P}_i = (p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, \ldots, p_{n-1}^{(i)}), \qquad i = 1, 2, \ldots, N,$$

что

$$\overline{P}_0 = \sum_{i=1}^{N} \mu_i \overline{P}_i, \tag{3.32}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \mu_i = 1, \quad \mu_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Определим точки

$$P_i = (p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, \ldots, p_{n-1}^{(i)}, p_n^{(i)}), \qquad i = 1, 2, \ldots, N,$$

положив

$$p_n^{(i)} = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{\lambda_n} p_k^{(i)} + \frac{c}{\lambda_n}. \tag{3.33}$$

Точки $P_i \in G_1$, так как по условию $\overline{P}_i \in \overline{G}_1$ ($i = 1, 2, \ldots, N$). Поскольку точка P_0 удовлетворяет равенству (3.31) и справедливы представление (3.32) и соотношение (3.33), то

$$p_n^{(0)} = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{\lambda_n} p_k^{(0)} + \frac{c}{\lambda_n} = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{\lambda_n} \sum_{i=1}^{N} \mu_i p_k^{(i)} + \frac{c}{\lambda_n} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \mu_i \left[-\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{\lambda_n} p_k^{(i)} + \frac{c}{\lambda_n} \right] = \sum_{i=1}^{N} \mu_i p_n^{(i)}. \qquad (3.34)$$

Учитывая (3.32) и (3.34), получаем

$$P_0 = \sum_{i=1}^{N} \mu_i P_i, \qquad (3.35)$$

где

$$\sum_{i=1}^{N} \mu_i = 1; \quad \mu_i \geqslant 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Покажем, что все точки P_i, участвующие в представлении (3.35), являются крайними точками множества G. Предположив противное для некоторого $i\,(1 \leqslant i \leqslant N)$, имеем

$$P_i = \mu Q_1 + (1-\mu) Q_2, \qquad 0 < \mu < 1, \quad Q_1 \neq Q_2;$$

$$Q_s = (q_1^{(s)}, q_2^{(s)}, \ldots, q_n^{(s)}) \in G, \qquad s = 1, 2.$$

Так как Π — опорная гиперплоскость множества G, то

$$(\Lambda, Q_s) \leqslant c, \quad s = 1, 2. \qquad (3.36)$$

Далее,

$$(\Lambda, P_i) = \mu (\Lambda, Q_1) + (1-\mu)(\Lambda, Q_2) = c.$$

Отсюда, учитывая (3.36) и условие $0 < \mu < 1$, получаем

$$(\Lambda, Q_1) = (\Lambda, Q_2) = c.$$

Поэтому $Q_s \in G_1$, $s = 1,2$, а следовательно,

$$\overline{Q}_s = (q_1^{(s)}, q_2^{(s)}, \ldots, q_{n-1}^{(s)}) \in \overline{G}_1, \quad s = 1, 2.$$

Итак,

$$\overline{P}_i = \mu \overline{Q}_1 + (1-\mu) \overline{Q}_2, \quad 0 < \mu < 1,$$

$$\overline{Q}_s \in \overline{G}_1, \quad s = 1, 2.$$

Поскольку $\overline{P}_i$ — крайняя точка множества $\overline{G}_1$, то $\overline{Q}_1 = \overline{Q}_2 = P_i$, откуда, обращаясь к соотношению (3.31), выводим, что $Q_1 = Q_2$.

Полученное противоречие означает, что P_i — крайняя точка множества G.

2. Пусть теперь точка P_0 — внутренняя точка множества G. Рассмотрим прямую L с уравнением

$$X = P_0 + Rt, \quad -\infty < t < \infty, \tag{3.37}$$

где R — произвольный ненулевой вектор. Общая часть G и L является, очевидно, отрезком $\overline{L}$ с уравнением

$$X = P_0 + Rt, \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2.$$

Положим

$$X_1 = P_0 + Rt_1, \quad X_2 = P_0 + Rt_2.$$

Тогда

$$P_0 = \mu X_1 + (1-\mu) X_2, \quad 0 < \mu < 1.$$

Очевидно, X_1 и X_2 — граничные точки G. Поэтому для них существуют представления типа (3.35):

$$X_s = \sum_{i=1}^{N_s} \mu_i^{(s)} P_i^{(s)},$$

$$\sum_{i=1}^{N_s} \mu_i^{(s)} = 1, \quad \mu_i^{(s)} \geqslant 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, N_s.$$

$P_i^{(s)}$ — крайние точки G, $s = 1, 2$. Следовательно,

$$P_0 = \sum_{i=1}^{N_1} \mu\mu_i^{(1)} P_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{N_2} (1-\mu) \mu_i^{(2)} P_i^{(2)}.$$

Положим

$$P_i = \begin{cases} P_i^{(1)}, & i = 1, 2, \ldots, N_1, \\ P_{i-N_1}^{(2)}, & i = N_1 + 1, N_1 + 2, \ldots, N_1 + N_2 = N, \end{cases}$$

$$\mu_i = \begin{cases} \mu\mu_i^{(1)}, & i = 1, 2, \ldots, N_1, \\ (1-\mu)\mu_{i-N_1}^{(2)}, & i = N_1 + 1, N_1 + 2, \ldots, N. \end{cases}$$

Тогда

$$P_0 = \sum_{i=1}^{N} \mu_i P_i, \tag{3.38}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \mu_i = 1, \quad \mu_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Итак, согласно (3.35) и (3.38) произвольная точка множества G может быть представлена в виде выпуклой комбинации конечного числа крайних точек этого множества. Вместе с тем любая выпуклая комбинация конечного числа точек выпуклого множества принадлежит этому множеству. Поэтому G является выпуклой оболочкой G^* — множества своих крайних точек.

Допустив справедливость утверждения теоремы для $(n-1)$-мерного пространства, мы установили, что она имеет место и для E_n. Как было показано ранее, теорема верна при $n=1$. Следовательно, теорема о представлении доказана полностью.

Пусть G — произвольное выпуклое множество. Множество G_0 назовем *остовом* G, если

а) G — выпуклая оболочка G_0,

б) любое подмножество G_0 не удовлетворяет условию *а*. Образно говоря, остов множества является наиболее экономным множеством из числа удовлетворяющих условию *а*.

Заметим, что не любое выпуклое множество обладает остовом, например, открытый интервал остова не имеет. Теорема о представлении устанавливает существование остова для произвольного выпуклого замкнутого ограниченного множества. При этом оказывается, что остов множества G, удовлетворяющего перечисленным условиям, совпадает с G^* — множеством крайних точек G.

В заключение приведем одно очевидное следствие теоремы 3.4.

Следствие 3.3. *Всякое непустое выпуклое замкнутое ограниченное множество содержит хотя бы одну крайнюю точку.*

УПРАЖНЕНИЯ

1. Используя свойства скалярного произведения, доказать справедливость неравенства треугольника:

$$|A-B| \leqslant |A-C| + |C-B|,$$

где A, B, C — произвольные точки из E_n.

2. Убедиться в справедливости равенства:

$$\| a_{ij} \|_n \| \tilde{a}_{ij} \|_n = \| \tilde{a}_{ij} \|_n \| a_{ij} \|_n = I_n,$$

где матрица $\| \tilde{a}_{ij} \|_n$ (обратная по отношению к матрице $\| a_{ij} \|_n$) определяется соотношением (1.7).

3. Доказать единственность обратной матрицы для любой невырожденной матрицы $\|a_{ij}\|_n$.

4. Проверить, что для вырожденной матрицы не существует обратной.

5. Если некоторый вектор представляется в виде линейной комбинации линейно независимых векторов, то это представление единственно. Доказать.

6. Пользуясь критерием линейной независимости системы векторов, доказать, что ранг произвольной матрицы равен максимальному числу линейно независимых строк (столбцов) матрицы.

7. Доказать эквивалентность двух определений r-мерного подпространства:

а) r-мерное подпространство — совокупность всех линейных комбинаций r линейно независимых векторов;

б) r-мерное подпространство — множество, которое вместе с парой векторов содержит произвольную линейную комбинацию этих векторов, причем максимальное число линейно независимых векторов множества равно r.

8. Если A — квадратная матрица, то разрешимость системы уравнений

$$AX=B$$

при любом векторе B является необходимым и достаточным условием для единственности решения соответствующей однородной системы

$$AX=0.$$

Доказать.

9. Убедиться в том, что элементарные преобразования расширенной матрицы системы линейных уравнений, введенные в п. 2.7, не оказывают влияния на общее решение системы.

10. Используя метод полного исключения, определить общее решение следующих систем:

а)
$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2+x_3-2x_4 &=1,\\ 2x_1+x_2+3x_3+x_4-3x_5&=3,\\ x_1+2x_2+3x_3-3x_4+2x_5&=2; \end{aligned}$$

б)
$$\begin{aligned} -x_1+3x_2+2x_3-3x_4+2x_5+3x_6&=3,\\ 2x_1-3x_2-x_3+3x_4-2x_5-x_6&=1,\\ 3x_1-3x_2+3x_4-2x_5+x_6&=2; \end{aligned}$$

в)
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3&=1,\\ -2x_1+x_2-x_3&=2,\\ -x_1+3x_2+2x_3&=3. \end{aligned}$$

11. Проверить, что произвольное линейное многообразие, полупространство, луч и отрезок являются замкнутыми множествами.

12. Доказать, что объединение конечного числа замкнутых множеств и общая часть произвольного числа замкнутых множеств являются замкнутыми множествами.

13. Доказать, что из любой ограниченной последовательности точек пространства E_n может быть выделена сходящаяся подпоследовательность.

14. Функция, определенная и непрерывная на ограниченном замкнутом множестве пространства E_n, достигает на этом множестве своей верхней и нижней граней. Доказать.

15. Убедиться в том, что линейная функция

$$F(X) = (C, X) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

и квадратическая функция

$$F(X) = X^T \| a_{ij} \|_n X = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

непрерывны в каждой точке пространства E_n.

16. Если G — выпуклое множество, то из условий

$$P_i \in G, \ \alpha_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s, \quad \sum_{i=1}^{s} \alpha_i = 1$$

вытекает, что

$$P = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i P_i \in G.$$

Доказать.

17. Убедиться в том, что линейное многообразие, полупространство, луч, отрезок и шар являются выпуклыми множествами.

18. Общая часть произвольного числа выпуклых множеств — выпуклое множество. Доказать.

19. Проверить, что произвольное линейное многообразие может рассматриваться как конус с вершиной в любой точке многообразия.

20. Пусть D — выпуклое замкнутое ограниченное множество пространства E_n, точка $P_0 \notin D$. Показать, что совокупность лучей, исходящих из P_0 и пересекающих D, составляет выпуклый конус.

21. Убедиться в том, что отказ от любого из предположений теоремы 3.1 относительно множеств G_1 и G_2 делает ее утверждение, вообще говоря, неверным.

22. Пусть G — произвольное выпуклое множество пространства E_n, точка $P \in E_n$ не является внутренней точкой G. Используя теорему 3.1 и следствие 3.1, установить существование гиперплоскости, проходящей через P и содержащей G в одном из своих полупространств.

23. Доказать теорему 3.2. Указание: рассмотреть множество G, состоящее из точек

$$X = X_1 - X_2,$$

где $X_i \in G_i$, $i = 1, 2$, и применить к нему и точке $P = 0$ утверждение предыдущего упражнения.

24. Проверить, что одномерное выпуклое замкнутое множество совпадает либо с прямой, либо с лучом, либо с отрезком.

25. Доказать, что выпуклая оболочка произвольного множества — выпуклое множество.

26. Усовершенствовав доказательство теоремы о представлении, показать, что любая точка выпуклого замкнутого ограниченного множества является выпуклой комбинацией не более, чем $n+1$ крайних точек этого множества. Указание: прямая L с уравнением (3.37) проводится через P_0 и некоторую крайнюю точку множества G.

27. Проверить, что открытый интервал не имеет остова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А., Лурье А., Олейник Ю., Применение электронных вычислительных машин в оперативном планировании, «Автомобильный транспорт», № 6, 1960.
2. Ацел и Рассел (Aczel M. A. and Russel A. H.), Nev methods of solving linear programs, Oper. Res. Quart. **8**, 4 (1957), 206—219.
3. Барсов А. С., Что такое линейное программирование, М., Физматгиз (1959).
4. Бил (Beale E. M. L.), An algorithm for solving the transportation problem when shipping cost over each route is convex, Nav. Res. Logist. Quart. **6**, 1 (1959).
5. Бил (Beale E. M. L.), An alternative method for linear programming, Proc. Cambridge Philos. Soc. **50**, 4 (1954), 513—523.
6. Бил (Beale E. M. L.), Cycling in the dual simplex algorithm, Nav. Res. Logist. Quart. **2** (1955), 269—275.
7. Бил (Beale E. M. L.), On minimizing a convex function subject to linear inequalities, J. Roy. Stat. Soc. **17** (1955), 173—183.
8. Бил (Beale E. M. L.), Quadratic programming, Nav. Res. Logist. Quart. **6**, 3(1959).
9. Браун (Brown G. W.), Iterative solution of games by fictious play, Activity analysis of production and allocation, ed. T. C. Koopmans, Cowles Commission Monograph, 13, Wiley, New York (1951), 374—376.
10. Браун, фон Нейман (Brown G. W., von Neumann J.), Solution of games by differential equations, Contributions to the theory of games, vol. 1, ed. H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Annals of Math. Studies, 24, Princeton (1950), 73—79.
11. Булавский В. А., Итеративный метод решения общей задачи линейного программирования (сборник «Численные методы оптимального планирования», Экономико-математическая серия Сибирского отделения АН СССР, вып. 1, 1962), 35—65.
12. Бэтчелор (Batchelor J. H.), Bibliography on Operations Research, St. Louis, 2-nd ed. (1959).
13. Вагнер (Wagner H. M.), A comparison of the original and the revised simplex method, Oper. Res. **5**, 3 (1957), 361—369.
14. Вагнер (Wagner H. M.), The simplex method, for beginners, Oper. Res. **6**, 2 (1958), 190—199.

15. Вайда (Vaida S.), Теория игр и линейное программирование, сборник [96], стр. 11—106.
16. Вулф (Wolfe P.), The simplex method for quadratic programming, Econometrica **27**, 3 (1959).
17. Габр (Habr J.), Линейное программирование (пособие для экономистов), Госстатиздат, М. (1960).
18. Гасс (Gass S. I.), Линейное программирование (методы и приложения), М. Физматгиз (1961).
19. Гасс, Саати (Gass S. I., Saaty T. L.), The computational algorithm for the parametric objective function, Nav. Res. Logist. Quart. **2** (1955), 39—45.
20. Гельфанд И. М., Цетлин М. Л., Принцип нелокального поиска в системах автоматической оптимизации, ДАН СССР **137**, 2 (1961).
21. Герчук Я. П., Проблемы оптимального планирования (линейное программирование), Экономиздат, М. (1961).
22. Глейзал, Алгоритм для решения проблемы транспортировки, «Математика», 2, № 1 (1958).
23. Голдман (Goldman A. J.), Теоремы разложения и отделимости для многогранных выпуклых множеств, сборник [96], 162—171.
24. Голдман и Таккер (Goldman A. J. and Tucker A. W.), Многогранные выпуклые конусы, сборник [96], 142—161.
25. Голдман и Таккер (Goldman A. J. and Tucker A. W.), Теория линейного программирования, сборник [96], 172—213.
26. Гольштейн Е. Г., Об одном классе нелинейных, экстремальных задач, ДАН СССР **133**, 3 (1960), 507—510.
27. Гольштейн Е. Г., Об одном бесконечном аналоге задач линейного программирования и его приложениях к некоторым вопросам теории приближений, ДАН СССР **140**, 1 (1961), 23—26.
28. Гольштейн Е. Г., Задача наилучшего чебышевского приближения в комплексной области с дополнительными условиями на коэффициенты аппроксимирующего полинома, ДАН СССР **141**, № 2 (1961), 274—276.
29. Гольштейн Е. Г., Об одном обобщении чебышевской задачи наилучшего приближения, УМН, XVI, 4 (100) (1961), 208—210.
30. Гольштейн Е. Г., Об одной общей постановке задачи наилучшего приближения, ДАН СССР **144**, 1 (1962), 21—22.
31. Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б., Об одном классе задач планирования народного хозяйства, Проблемы кибернетики, вып. 5 (1961), 165—182.
32. Гомори (Gomory R. E.), Outline of an algorithm for integer solutions to linear programs, Bull. Amer. Math. Soc. **64**, 5 (1958), 275—278.
33. Гомори (Gomory R. E.), An algorithm for integer solutions to linear programs, Princeton—IBM, Mathematics Research Project Technical Report, № 1, November 17 (1958).
34. Гомори (Gomory R. E.), All-integer programming algorithm by Ralph E. Gomory, IBm, Res. Center Report—189, January 29 (1960).

35. Гомори, Баумол (Gomory R. E., Baumol W. J.), Целочисленное программирование и оценки (сб. «Численные методы оптимального планирования», Экон.-матем. серия Сиб. отд. АН СССР, вып. 1, 1962), стр. 65—110.
36. Гофман (Hoffman A. J.), Cycling in the simplex algorithm, National Bureau of Standards Report, № 2974, December 16 (1953).
37. Гофман, Маннос, Соколовский, Вигман (Hoffman A. J., Mannos M., Sokolowsky D., Wiegmann N. A.), Computational experience in solving linear programs, J. Soc. Industr., Appl. Math. 1, 1 (1953), 17—33.
38. Гэйл (Gale D.), The basic theorems of real linear programming and game theory, Nav. Res. Logist. Quart. 3 (1956), 193—200.
39. Гэйл, Кун, Таккер (Gale D., Kuhn H. W., Tucker A. W.), Linear programming and the theory of games, Activity analysis of production and allocation, ed. T. C. Koopmans, Cowles Commission Monograph, 13, Wiley, New York (1951), 317—329.
40. Данциг (Dantzig G. B.), Programming of interdependent activities, Mathematical model., Econometrica 17 (1949), 200—211.
41. Данциг (Dantzig G. B.), Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities, Activity analysis of production and allocation, ed. T. C. Koopmans, Cowles Commission Monograph, 13, Wiley, New York (1951), 339—347.
42. Данциг (Dantzig G. B.), Application of the simplex method to a transportation problem, Activity analysis of production and allocation, ed. T. C. Koopmans, Cowles Commission Monograph, 13, Wiley, New York (1951), 359—373.
43. Данциг (Dantzig G. B.), A proof of the equivalence of the programming problem and the game problem, Activity analysis of production and allocation, ed. T. C. Koopmans, Cowles Commission Monograph, 13, Wiley, New York (1951), 330—335.
44. Данциг (Dantzig G. B.), Upper bounds, secondary constraints and block triangularity in linear programming, Econometrica 32, 2 (1955), 174—183.
45. Данциг (Dantzig G. B.), Constructive proof of the min—max theorem, Pacific J, Math. 6, I (1956), 25—33.
46. Данциг (Dantzig G. B.), Note on solving linear programs in integers, Nav. Res. Logist. Quart. 4, 1 (1959).
47. Данциг (Dantzig G. B.), Linear programming under uncertainty, Manag. Sci. 1 (1954—55), 197—206.
48. Данциг и Вулф (Dantzig G. B. and Wolfe P.), Decomposition principle for linear programs, Oper. Res. 8, 1 (1960), 101—112.
49. Данциг, Орден (Dantzig G. B., Orden A.), A duality theorem based on the simplex method, Symposium on linear inequalities and programming, ed. A. Orden and L. Goldstein (Project SCCOOP, 10), Directorate of Management Analysis, DCS Comptroller, Headquarters US Air Force, Washington, D. C. (1952), 51—55.

50. Данциг, Орден, Вулф (Dantzig G. B., Orden A., Wolfe P.), The generalized simplex method for minimizing a linear form under linear inequality restraints, Pacific J. Math., 5, № 2 (1955), 183—195.
51. Данциг, Орчард-Хейс (Dantzig G. B., Orchard-Hays W.), The product form for the inverse in the simplex method, Math. Tables Aids Comp. 8 (1954), 64—67.
52. Данциг, Форд, Фулкерсон (Dantzig G. B., Ford L. R., Fulkerson D. R.), Алгоритм для одновременного решения прямой и двойственной задач линейного программирования, сборник [96].
53. Даффин (Duffin R. J.), Бесконечные программы, сборник [96].
54. Деннис (Dennis J. B.), Математическое программирование и электрические цепи, ИЛ, М. 1961.
55. Думлер С. А., Линейное программирование и его применение на производстве, Вестник машиностроения, № 10 (1958), 70—74.
56. Дэвис (Davis C.), Linear programming and computers, Computers and Automation, 4 (1955), Part. I—7, 10—17; Part II, 8, 10—16.
57. Зойтендейк (Zoutendijk G.), Методы возможных направлений, ИЛ, М. (1963).
58. Зуховицкий С. И., Некоторые вопросы теории чебышевских приближений, Киев (1950).
59. Зуховицкий С. И., Алгоритм для решения чебышевской задачи в случае конечной системы несовместных линейных уравнений, ДАН СССР 79, 4 (1951), 561—564.
60. Зуховицкий С. И., О наилучшем в смысле П. Л. Чебышева приближении конечной системы несовместных линейных уравнений, Матем. сб. 33, 2 (1953), 327—342.
61. Канторович Л. В., Математические методы в организации и планировании производства, ЛГУ (1939), стр. 67.
62. Канторович Л. В., Об одном эффективном методе решения некоторых классов экстремальных проблем, ДАН СССР 28, № 3 (1940), 212—215.
63. Канторович Л. В., О перемещении масс, ДАН СССР, 37, № 7—8 (1942), 227—229.
64. Канторович Л. В., О методах анализа некоторых экстремальных планово-производственных задач, ДАН СССР 115, 3 (1957), 441—444.
65. Канторович Л. В., Экономический расчет наилучшего использования ресурсов, Изд. АН СССР, М. 1959.
66. Канторович Л. В., Гавурин М. К., Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков, Сб. «Проблемы повышения эффективности работы транспорта», Изд. АН СССР (1949), 110—138.
67. Канторович Л. В., Залгаллер В. А., Расчет рационального раскроя промышленных материалов, Лениздат, 1951, стр. 198.

68. Канторович Л. В., Рубинштейн Г. Ш., Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах, ДАН СССР **115**, 6 (1957), 1058—1061.
69. Креко (Krekó B.), Лекции по линейному программированию, сборник [97], 400—430.
70. Кун (Kuhn H. W.), The Hungarian method for solving the assignment problem, Nev. Res. Logist. Quart. **2** (1955), 83—97.
71. Кун (Kuhn H. W.), Variants of the Hungarian method for assignment problems, Nav. Res. Logist, Quart. **3**, 4 (1956) 253—258.
72. Кун и Таккер (Kuhn H. W., Tucker A. W.), Nonlinear programming, Proc. of the second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (ed. J. Neumann), Univ. Calif., Berkeley (1951), 481—492.
73. Лемке (Lemke G. E.), The dual method of solving the linear programming problem, Nav. Res. Logist. Quart. **1**, 1 (1954), 36—47.
74. Леонтьев (Leontieff W. W.), Исследование структуры американской экономики. Госстатиздат, М., 1958.
75. Маданский (Madansky), Inequalities for stochastic linear programming problems, Manag. Sci. **6**, 2 (1960), 197—204.
76. Манкрес (Munkres J.), Algorithms for the assignement and trasportation problems, J. Soc. Industr. Appl. Math. **5**, 7 (1957), 32—38.
77. Манн (Manne A. S.), A target—assignment problem, The Journal of the operations Research Society of America **6**, 3 (1958), 307—466.
78. Марковиц (Markovitz H.), The elimination form of the inverse and its application to linear programming, Manag. Sci. **3**, 3 (1957), 255—269.
79. Марковиц, Манн (Markovitz H., Manne A. S.), On the solution of discrete programming problems, Econometrica **25**, 1 (1957), 84—110.
80. Маршак, Микей (Marschak J., Mickey M. R.), Optimal Weapon Systems, Nav. Res. Logist. Quart. **1** and **2** (1954).
81. Милс (Mills H. D.), Маргинальные значения матричных игр и задач линейного программирования, сборник [96], 287—297.
82. Моцкин (Motzkin T. S.), New techniques for linear unequalities and optimization, Symposium of linear Unequalities and Programming, Washington (1952), 15—27.
83. Моцкин, Райффа, Томпсон, Тролл (Motzkin T. S., Raiffa H., Thompson G. U., Thrall R. M.), The double description method, Contributions to the Theory of Games, vol. II, Ann. of Math. studies, № 28, Princeton (1953), 51—73.
84. Фон Нейман (von Neuman J.), A numerical method to determine optimum strategy, Nav. Res. Logist. Quart. I, 2 (1954), 109—115.

85. Орчард-Хейс (Orchard-Hays W.), Evolution of linear programming computing techniques, Manag. Sci. 4, 2 (1958), 183—190.
86. Осборн (Osborn H.), The problem of continuous programs, Pacif J. Math. 6, 4 (1956), 721—731.
87. Раднер (Radner R.), The linear team: an example of linear programming under uncertainty, Proceedings of the second symposium in linear programming, vol. I and 2, ed. H. A. Antosiewicz, Directorate of Management analysis, DCS Comptroller, Headquarters US Air Force, Washington, D. C. (1955), 381—396.
88. Рейнфельд, Фогель (Reinfeld N. V., Fogel W. R.), Математическое программирование, ИЛ, М., 1960.
89. Ремез Е. Я., Общие вычислительные методы чебышевского приближения, Изд. АН УССР, Киев, 1957.
90. Рилей, Гасс (Riley V., Gass S. L.), Bibliography on linear programming and related techniques, Baltimora (1958).
91. Робинсон (Robinson J.), An iterative method of solving a game, Ann. Math. 54 (1951), 296—301.
92. Роде (Rohde F. V.), Bibliography on linear programming, Operat. Res. 5, I (1957), 45—62.
93. Розен (Rosen J.), The gradient projection method for nonlinear programming, J. Soc. Indust. and Appl. Math. 8 (1960), 181—217.
94. Рубинштейн Г. Ш., Задача о крайней точке пересечения оси с многогранником и ее приложение к исследованию конечной системы линейных неравенств, ДАН СССР 100, 4 (1955), 627—630.
95. Рубинштейн Г. Ш., Обобщение задачи о крайней точке пересечения оси с выпуклым многогранником, ДАН СССР 113, 5(1957), 987—990.
96. Сборник статей под редакцией Куна и Таккера, Линейные неравенства и смежные вопросы, ИЛ, 1959.
97. Сборник статей под редакцией Немчинова В. С., Применение математики в экономических исследованиях, т. I, Соцэкгиз, М., 1959.
98. Сборник статей под редакцией Немчинова В. С., Применение математики в экономических исследованиях, т. II, Соцэкгиз, М., 1962.
99. Сборник «Применение математики и электронной техники в планировании», Изд. эконом. лит., М., 1961.
100. Сборник статей под ред. Федоровича М. М., Математические методы в планировании производства, Изд. эконом. лит., М., 1961.
101. Сетунов Ф., Чернышов Ю., Применение методов линейного программирования для решения экономических задач на автомобильном транспорте, Ж. «Труд и заработная плата», № 11 (1959).
102. Слейтер (Slater M. L.), Lagrange multipliers revisited: a contribution to nonlinear programming, Cowles Commission Discussion Paper, Math., 403, November (1950).
103. Таккер (Tucker A. W.), Linear and nonlinear programming, Operat. Res. 5, 2 (1957), 244—257.

104. Таккер (Tucker A. W.), Двойственные системы однородных линейных соотношений, Сборник [96], 126—141.
105. Томпкинс (Tompkins C. B.), Projection methods in calculation, Proceedings of the second symposium in linear programming, Washington (1955), 425—448.
106. Труды Научного совещания по применению математических методов в экономических исследованиях и планировании (4—8 апреля 1960 г.), т. IV, Линейное программирование, Изд. АН СССР, М. (1961).
107. Удзава (Uzawa H.), Теорема о выпуклых многогранных конусах, сборник [128], 43—56.
108. Удзава (Uzawa H.), Теорема Куна—Таккера о вогнутом программировании, сборник [128], 57—64.
109. Удзава, Градиентный метод для вогнутого программирования, II, Глобальная устойчивость в строго вогнутом случае, сборник [128], 189—197.
110. Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, Гостехиздат (1950), стр. 240.
111. Форд, Фулкерсон (Ford L. R., Fulkerson D. R.), A simple algorithm for finding maximal network flows and an application to the Hitchcock problem, Canad. J. Math. **9**, (1957), 210—218.
112. Форд, Фулкерсон (Ford L. R., Fulkerson D. R.), A primaldual algorithm for the capacitated Hitchcock problem, Nav. Res. Logist. Quart. **4**, 1 (1957), 45—54.
113. Фриш (Frisch R.), La résolution des problémes de programme linéaire par le methode du potentiel logarithmique, Cahier sém. économetrie **4** (1956), 7—20, Discuss. 20—23.
114. Хавинсон С. Я., Об одном классе экстремальных задач для полиномов, ДАН СССР **130**, 5 (1960), 997—1000.
115. Хилдрет (Hildreth C.), Process for quadratic programming, Nav. Res. Logist. Quart. **3**, 1 (1957).
116. Хичкок (Hitchcock F. L.), Distribution of a product from several sources to numerous localities, J. Math. Phys. **20**, (1941), 224—230.
117. Чарнес (Charnes A.), Optimality and degeneracy in linear programming, Econometrica **20**, 2 (1952), 160—170.
118. Чарнес, Купер, Хендерсон (Charnes A., Cooper W., Henderson A.), Введение в линейное программирование, изд. Моск. эконом. ин-та, М. (1960).
119. Чарнес, Лемке (Charnes A., Lemke C. E.), The minimization of nonlinear separable convex functionals, Nav. Res. Logist. Quart. **1**, 4 (1954), 301—312.
120. Шетти (Shetty C. M.), A solution of transportation problem with non linear costs. Oper. Res. **7** (1959), 571—580.
121. Шилов Г. Е., Введение в теорию линейных пространств, Гостехиздат (1956).
122. Эблоу, Брайгэм (Ablow C. M., Brigham G.), An analog solution of programming problems, Oper. Res. **3** (1955), 388—394.

123. Эгервари (Egerváry E.), Matrixok combinatorius tulájdonsagairol, Math. Fiz. Lapok, 38 (1931), 16—28.
124. Эрроу, Гурвиц (Arrow K. J., Hurwitcz L.), Gradient methods for constrained maxima, Oper. Res. 5, 2 (1957), 258—265.
125. Эрроу, Гурвиц (Arrow K. J., Hurwitcz L.), Градиентный метод для вогнутого программирования, I, Локальные результаты, сборник [28], 175—188.
126. Эрроу, Гурвиц (Arrow K. J., Hurwitcz L.), Градиентный метод для вогнутого программирования, III, Дальнейшие глобальные результаты и приложения к распределению ресурсов, сборник [128], 198—216.
127. Эрроу, Гурвиц, Удзава (Arrow K. J., Hurwitcz L., Uzawa H.), Constraint qualifications in maximization problems, Nav. Res. Logist. Quart., 8, № 2 (1961), 175—191.
128. Эрроу, Гурвиц, Удзава (Arrow K. J., Hurwitcz L., Uzawa H.), Исследования по линейному и нелинейному программированию, Сб. статей, ИЛ, М. (1962).
129. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г., Задачи и методы линейного программирования, Советское радио, М. (1961).
130. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г., Об одном методе количественного анализа упрощенных экономических моделей, сборник [98], 136—182.
131. Якобс (Jakobs W. W.), Military applications of linear programming, Proceedings of the second symposium in linear programming, vol. 1 and 2, ed. H. A. Antosiewicz, Directorate of Management Analysis, DCS Comptroller, Headquarters US Air Force, Washington, D. C. (1955), 1—27.
132. Яковлева М. А., Задача о минимуме транспортных затрат, сборник [97], 390—400.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Давид Борисович Юдин
и Евгений Григорьевич Гольштейн

Линейное программирование.
Теория и конечные методы.

М., Физматгиз, 1963 г., 776 стр. с илл.

(серия: «Физико-математическая библиотека инженера»)

Редакторы *С. М. Мовшович, М. М. Горячая*

Техн. редактор *Н. Я. Мурашова*

Корректор *Е. А. Белицкая*

Сдано в набор 11/VI 1963 г. Подписано к печати 14/XI 1963 г. Бумага $84 \times 108^1/_{32}$. Физ. печ. л. 24,25. Условн. печ. л. 39,77. Уч.-изд. л. 39,37. Тираж 26 000 экз. Т-08896. Цена книги 2 р. 12 к. Заказ № 1041.

Государственное издательство
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Первая Образцовая типография
имени А. А. Жданова
Московского городского совнархоза.
Москва, Ж-54, Валовая, 28.