

А. М. ЗАЕЗДНЫЙ

ОСНОВЫ
РАСЧЕТОВ
НЕЛИНЕЙНЫХ
И ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ
РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ
ЦЕПЕЙ

А. М. ЗАЕЗДНЫЙ

ОСНОВЫ РАСЧЕТОВ
НЕЛИНЕЙНЫХ
И ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ
РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ
ЦЕПЕЙ



Издательство «Связь»

Москва 1973

6Ф2

316

УДК 621.396.1.001.24

Заездный А. М.

316 Основы расчетов нелинейных и параметрических радиотехнических цепей. М., «Связь», 1973.

448 с. с ил.

Книга представляет собой руководство к расчетам нелинейных и параметрических цепей; кроме расчетных рецептов дано большое число примеров и задач, как в постановке анализа, так и в постановке синтеза. Задачи, как правило, снабжены подробными решениями. В приложении дана классификация различных методов решения и изучения дифференциальных уравнений и изложена рецептура пользования ими.

Книга предназначается для научных работников и инженеров в области радиотехники и электросвязи, а также для студентов старших курсов соответствующих факультетов.

3 $\frac{0341-50}{045(01)-73}$ 17-73

6Ф2

Содержание

Предисловие	5
Некоторые условные обозначения	7
1. Общие вопросы	10
Элементы и параметры элементов электрических цепей. Цепи и системы (10). Причинно-следственные связи в простейших элементах. Применимость принципа суперпозиции, преобразование спектра (12). Дополнительная классификация нелинейных элементов, их параметров и характеристик (17). Схемы моделирования нелинейных и параметрических цепей (19)	
2. Аппроксимация характеристик нелинейных элементов .	35
Общие сведения. Критерии аппроксимации (35). Аппроксимирующие функции (36). Определение коэффициентов аппроксимации (38)	
3. Гармонический и спектральный анализ	60
Общие сведения (60). Гармонический анализ (65). Спектральный анализ (73)	
4. Нелинейные цепи нулевого порядка	97
Общие сведения (97). Анализ цепей при непериодических воздействиях (97). Синтез цепей по заданным условиям преобразования непериодических воздействий (99). Замена нелинейных резисторов одним эквивалентным (100). Анализ цепей при моногармоническом воздействии (102). Синтез цепей по заданному преобразованию моногармонического воздействия (103). Анализ цепей при полигармонических воздействиях (105). Синтез цепей по заданному преобразованию полигармонического воздействия (107)	
5. Параметрические цепи нулевого порядка	144
Общие сведения (144). Анализ цепей при различных воздействиях (146). Синтез цепей по заданному преобразованию входного сигнала (147). Синтез цепей по заданному преобразованию двух сигналов — входного и цепи управления (147). Синтез цепей по заданному преобразованию сигналов и заданным характеристикам нелинейных резисторов (148)	
6. Нелинейные цепи первого порядка	163
Общие сведения. Схемы и дифференциальные уравнения (163). Анализ свободных процессов (166). Синтез цепей по заданному свободному процессу (170). Анализ цепей при непериодических воздействиях (173). Синтез цепей по заданному преобразованию непериодических воздействий (176). Анализ цепей при моногармоническом и полигармоническом воздействиях (181). Устойчивость нелинейных цепей первого порядка (185).	
7. Параметрические цепи первого порядка	238
Общие сведения (238). Анализ параметрических цепей первого порядка (239). Синтез параметрических цепей первого порядка (244). Анализ нелинейно-параметрических цепей первого порядка (245). Устойчивость параметрических и нелинейно-параметрических цепей первого порядка (246)	
8. Нелинейные цепи второго и более высоких порядков в свободном режиме при малых колебаниях	257
Общие сведения (267). Исследование устойчивости по дифференциальному уравнению (критерий Раусса—Гурвица, критерий Лъенара—Шипара) (268). Иссле-	

дование устойчивости по частотным характеристикам (критерий Найквиста, критерий Михайлова) (271). Исследование условий самовозбуждения генераторов с внутренней обратной связью (275)	
9. Нелинейные цепи второго порядка в свободном режиме при больших колебаниях	295
Общие сведения (295). Свободные и переходные процессы в нелинейных цепях второго порядка (297). Установившиеся процессы в автономных нелинейных цепях второго порядка (303)	
10. Нелинейные цепи второго порядка при внешних воздействиях	325
Общие сведения (325). Переходные процессы при гармоническом воздействии (326). Установившиеся процессы при гармоническом воздействии. (327) Синтез нелинейных цепей второго и более высоких порядков по заданным преобразованиям входных сигналов (330)	
11. Параметрические цепи второго порядка	344
Общие сведения (344). Свободные процессы при гармоническом законе изменения параметра (346). Вынужденные установившиеся процессы при гармоническом законе изменения параметра и гармоническом воздействии (347)	
Приложение 1. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений	360
Введение	360
П.1. Методы непосредственного интегрирования	362
П.2. Методы аппроксимации решений	363
П.3. Методы аппроксимации и преобразования дифференциального оператора	375
П.4. Методы перехода к более простым дифференциальным уравнениям на основе преобразования искомой переменной	387
П.5. Методы перехода к более простым дифференциальным уравнениям на основе преобразования либо независимой переменной, либо обеих переменных	400
П.6. Методы решения дифференциальных уравнений на основе перехода к интегральным уравнениям	415
П.7. Таблица соответствия методов интегрирования типам дифференциальных уравнений	419
П.8. Дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений	427
П.9. Особые точки и особые решения	429
П.10. Устойчивость решений	431
П.11. Некоторые свойства и асимптотика решений	433
П.12. Переход от фазового изображения к временному оригиналу	434
П.13. О некоторых косвенных методах интегрирования дифференциальных уравнений	436
Приложение 2. Справочный математический материал	
П.14. Таблица решений некоторых часто встречающихся дифференциальных уравнений	438
П.15. Таблица некоторых часто встречающихся дифференциальных уравнений	439
П.16. Таблица некоторых часто встречающихся интегралов	441
П.17. Некоторые сведения об эллиптических интегралах и функциях	442
П.18. Некоторые сведения о функциях В. К. Туркина	443
П.19. Двойные ряды Фурье	444
Список литературы	447

Предисловие

Цель предлагаемой книги — помочь инженерам и научным работникам в решении задач, связанных с анализом и синтезом нелинейных и параметрических цепей. Издание построено по образцу книг «Основы расчетов радиотехнических цепей (линейные цепи при гармонических воздействиях)», «Основы расчетов по статистической радиотехнике» и, как считает автор, наилучшим образом отвечает поставленным целям. Книга представляет собой нечто среднее между учебником и задачником и может быть определена как руководство к расчетам, содержащее большое число примеров и задач. Книга будет полезной и студентам соответствующих факультетов.

В каждом разделе приводятся краткие теоретические сведения, как правило, в виде расчетной рецептуры; за этими сведениями следуют примеры расчетов и задачи, значительная часть которых снабжена подробными решениями; к отдельным задачам даны только ответы.

Архитектоника настоящей книги существенно отличается от принятой в распространенных учебниках и монографиях, построение которых соответствует классификации явлений (процессов) и их приложений; здесь же, в руководстве по расчетам, архитектура соответствует классификации цепей и воздействий на них.

В учебниках и монографиях, как правило, вскрывается суть явления и дается его математическое описание (обычно одним способом), сопровождаемое сведениями о приложениях. В руководстве по расчету должна быть изложена методика его выполнения, а так как расчеты нелинейных цепей являются приближенными и для них разработано много различных методов, необходимо привести указания по выбору метода, а иногда и рекомендации по выполнению расчета несколькими методами из-за трудностей в оценке ошибки. По этим причинам большое внимание в книге уделяется различным методам расчета, их сравнению и рекомендациям по выбору наиболее подходящих.

Для классификации цепей принята терминология, которая в последние годы получила признание и широкое распространение, а именно: линейные цепи с постоянными параметрами называются просто «линейными цепями», а линейные цепи с переменными параметрами — «параметрическими».

Материал книги расположен в соответствии с ростом трудностей в его освоении: после общих вопросов (классификация элементов цепей, воздействий и режимов, аппроксимация характеристик, гармонический и спектральный анализ) рассматриваются цепи нулевого порядка, затем первого и далее второго и более высоких порядков. При рассмотрении цепей данного порядка сначала изучаются нелинейные цепи, а затем параметрические и

нелинейно-параметрические, причем последние рассматриваются в тех же разделах, что и параметрические.

Большая часть задач по расчету нелинейных и параметрических цепей сводится к решению или изучению соответствующих дифференциальных уравнений. Так как «нелинейные» задачи, как правило, не имеют точных решений, приходится искать приближенные, которые можно строить на основе различных методов. Важно отметить, что весьма полезно располагать широким ассортиментом этих методов, так как кроме того, что каждый из них имеет свой «радиус целесообразности применения», определяемый особенностями задачи (в первую очередь, значениями параметров), часто следует решать задачу параллельно двумя (и даже тремя!) методами для контроля правильности решения и, быть может, для того, чтобы вскрыть дополнительные детали изучаемого процесса. В связи с этим оказалось необходимым дать классификацию методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, определить «сферы применимости» и изложить рецептуру их использования. Эти материалы выделены в приложение I, с которым читателю рекомендуется бегло ознакомиться до начала работы над книгой, а затем возвращаться к нему по мере необходимости.

В книге излагаются аналитические методы, т. е. методы расчета с помощью аналитических выражений и иногда — графических построений. Вопросам численного интегрирования дифференциальных уравнений в книге внимание не уделяется. Другими словами, книга представляет собой руководство для аналитического изучения нелинейных и параметрических цепей; для расчетов на вычислительных машинах нужно проводить дополнительную работу, о которой в тексте лишь упоминается.

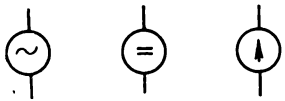
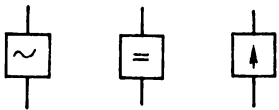
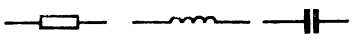
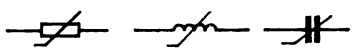
Нелинейные и параметрические цепи изучаются только на детерминированной основе; материал, относящийся к исследованию нелинейных цепей на вероятностной основе, можно найти в книге автора «Основы расчетов по статистической радиотехнике».

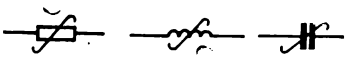
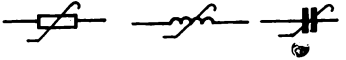
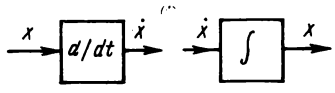
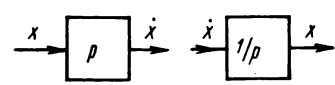
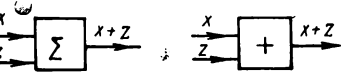
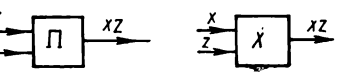
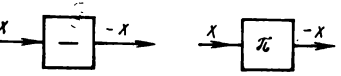
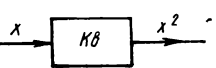
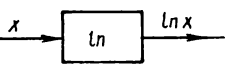
Следует еще добавить, что в книге рассматриваются только цепи с сосредоточенными постоянными, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями. В последнее время, главным образом вследствие развития техники интегральных модулей, существенно возрос интерес к нелинейным цепям с распределенными постоянными, которые описываются дифференциальными уравнениями в частных производных. Ограниченный объем книги, к сожалению, не позволил уделить внимания этим цепям.

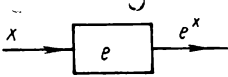
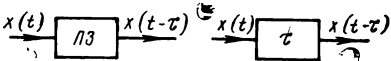
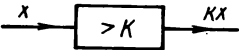

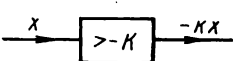
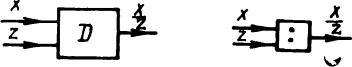
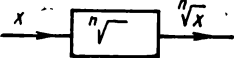
Автор рад поблагодарить своих друзей, коллег и учеников за помощь, способствовавшую улучшению книги. Особенно существенной была помощь рецензента И. С. Гоноровского и редактора Я. С. Басевича.

Замечания и пожелания, которые следует направлять по адресу: Москва-центр, Чистопрудный бульвар 2, изд-во «Связь» — будут встречены автором со вниманием и признательностью.

Некоторые условные обозначения

Обозначение	Содержание обозначения
u, U, i, I	Мгновенные и амплитудные значения напряжения и тока
e, E, j, J	Мгновенные и амплитудные значения задающих напряжения и тока
m, μ	Коэффициенты модуляции (изменения) сигнала и переменного параметра
ω, ω_μ	Частоты сигнала и переменного параметра
$\vec{f}(t), F(p), F(i\omega)$	Спектральная функция или операционное изображение временной функции $f(t)$
$\overleftarrow{F}(p), \overleftarrow{F}(i\omega), f(t)$	Временная функция, соответствующая операционному изображению $F(p)$ или спектральной функции $F(i\omega)$
$N(i\omega), N(\omega)$	Комплексная функция переменной ω и ее модуль
	Генераторы напряжения синусоидальной формы, постоянного напряжения и напряжения произвольной формы
	Генераторы тока синусоидальной формы, постоянного тока и тока произвольной формы
	Резистивный, индуктивный и емкостный линейные элементы
	Резистивный, индуктивный и емкостный нелинейные элементы

Обозначение	Содержание обозначения
	Резистивный, индуктивный и емкостный параметрические элементы
	Резистивный, индуктивный и емкостный нелинейно-параметрические элементы
	Дифференциатор, интегратор
	Дифференциатор и интегратор в линейных цепях
	Сумматор
	Перемножитель
	Инвертор, фазовращатель на π или другой угол, указанный на рисунке.
	Квадратор
	Логарифматор

Обозначение	Содержание обозначения
	Экспонатор
	Линия задержки
	Усилитель (ослабитель)
	Кубатор
	Усилитель с инвертором
	Делитель
	Извлекатель корня

1

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

Элементы и параметры элементов электрических цепей. Цепи и системы

Любая электрическая цепь представляет собой сочетание простейших элементов: резистивных — резисторов, емкостных — конденсаторов и индуктивных — катушек. Каждый простейший элемент количественно определяется своим параметром: резисторы — резистивностью (сопротивлением) R [Ом], конденсаторы — емкостью C [Ф], катушки — индуктивностью L [Г].

Параметры R , C и L могут быть постоянными и переменными; по данному признаку удобно классифицировать электрические цепи. При этом следует принять во внимание причину, вызывающую изменение параметра. Параметр может изменяться как вследствие изменений токов и напряжений «внутри цепи», так и под влиянием внешнего управления им (электрического, механического, теплового). В первом случае значение параметра можно выразить в виде функции тока (напряжения), а во втором — в виде функции времени, поскольку внешнее управление (воздействие) всегда представляется функцией времени.

В соответствии с изложенным все элементы электрических цепей можно делить на линейные, нелинейные и параметрические. Параметры линейных элементов постоянны. Параметры нелинейных элементов зависят от электрического режима цепи (тока, напряжения), причем изменение тока или напряжения (причины) приводит к изменению параметра (следствия). У параметрических элементов параметры зависят от внешнего управления (воздействия), причем изменение параметра (причины) вызывает изменение тока или напряжения (следствия).

Цепь является нелинейной или параметрической, если она содержит хотя бы один нелинейный или параметрический элемент.

Линейные цепи описываются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами (параметрами), которые здесь будут называться просто линейными дифференциаль-

ными уравнениями. Нелинейные цепи описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, т. е. уравнениями с коэффициентами, зависящими от функции (тока, напряжения). Параметрические цепи описываются линейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами, т. е. с коэффициентами, зависящими от аргумента (времени), которые здесь будут называться параметрическими дифференциальными уравнениями¹⁾.

Встречаются также нелинейно-параметрические цепи, в которых имеются либо как нелинейные, так и параметрические элементы, либо элементы, обладающие нелинейными свойствами, и параметры которых меняются во времени. Такие цепи описываются нелинейно-параметрическими дифференциальными уравнениями, коэффициенты которых зависят и от функции, и от аргумента (времени).

Под цепями (электрическими) обычно понимают соединения простейших элементов R , L , C , а под системами — цепи, содержащие, кроме элементов R , L , C , функциональные узлы и конструктивные элементы, которые могут быть представлены в виде соединений R , L , C только с помощью схем замещения, т. е. эквивалентных схем. Понятие системы, таким образом, включает в себя понятие цепи. Однако четкого разграничения между цепями и системами, как правило, не существует.

Системы и цепи, содержащие только резистивные элементы (линейные и нелинейные), т. е. не содержащие энергоемких элементов, называются безынерционными или системами нулевого порядка. Эти системы описываются конечными уравнениями²⁾. Системы, содержащие емкостные или индуктивные элементы (линейные и нелинейные), называются инерционными n -го порядка, где n — число самостоятельных энергоемких элементов (конденсаторов, катушек индуктивности). Эти системы описываются дифференциальными уравнениями n -го порядка.

¹⁾ Как уже указывалось в предисловии, термины «параметрические цепи», «параметрические дифференциальные уравнения» являются синонимами терминов «линейные цепи с переменными параметрами», «линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами» и получили распространение благодаря лаконичности.

В теории автоматического регулирования параметрические цепи называют «нестационарными», что нельзя считать приемлемым по двум причинам. Во-первых, термин «нестационарность» в данном случае адресуется к параметрам элементов, изменяющимся во времени; однако в нелинейных цепях параметры тоже изменяются во времени и, следовательно, по этой терминологии нелинейные цепи тоже должны быть отнесены к нестационарным. Во-вторых, общепринято, что термин «нестационарность» неприменим по отношению к параметрам, изменяющимся по периодическим законам; следовательно, цепи с параметрами, изменяющимися по периодическим законам, по этой терминологии должны называться стационарными. По указанным причинам в этой книге повсеместно используется термин «параметрические цепи».

²⁾ Системы нулевого порядка называют иногда «системами без памяти», чем и подчеркивается отсутствие в них энергоемких элементов.

Причинно-следственные связи в простейших элементах. Применимость принципа суперпозиции, преобразование спектра

ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Причинно-следственные связи выражают зависимость между причиной x и следствием y . В приложении к теории электрических цепей удобно рассматривать некоторую обобщенную цепь (рис. 1.1), на вход которой подается воздействие $x(t)$ — причина, а на выходе появляется реакция (отклик) $y(t)$ — следствие.

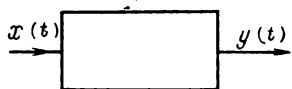


Рис. 1.1

Реакция цепи на входное воздействие зависит как от вида воздействия, так и от свойств цепи, т. е. от параметров ее элементов. В общем виде причинно-следственную связь можно записать в форме соотношения:

$$y(t) = f[x(t); a_1, a_2, \dots], \quad (1.1)$$

где a, a_2, \dots — параметры элементов цепи, т. е. R, L, C , или их сочетания.

Для линейных связей справедливы равенства:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2); \quad (1.2)$$

$$f(ax) = af(x). \quad (1.3)$$

Первое равенство выражает свойство аддитивности, второе — однородности. Свойство аддитивности отражает принцип независимости действия сил — принцип суперпозиции, согласно которому реакция на сумму воздействий равна сумме реакций на каждое воздействие в отдельности. Свойство однородности свидетельствует о том, что изменение масштаба аргумента в a раз эквивалентно такому же изменению функции¹⁾.

Принципу суперпозиции удовлетворяют причинно-следственные связи в форме (1.1), если параметры a_1 не зависят от y (от зависимой переменной), т. е. если параметры либо постоянны (линейные цепи), либо изменяются по времени (параметрические цепи), и не удовлетворяют — если имеет место зависимость от y (нелинейные цепи).

Свойству однородности удовлетворяют линейные цепи с точностью до постоянной составляющей (см. задачи 1.12 и 1.13), а также некоторые нелинейные цепи (задача 1.18).

Рассмотрим причинно-следственные связи в простейших элементах.

¹⁾ Свойство однородности часто называют свойством гомогенности.

ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Связь между током и напряжением в линейных элементах определяется известными соотношениями, которые трактуются как выражение их свойств:

— для резистивного элемента:

$$\left. \begin{aligned} u &= Ri \\ i &= \frac{1}{R} u = Gu \end{aligned} \right\}; \quad (1.4)$$

— для емкостного элемента:

$$\left. \begin{aligned} i &= \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} (Cu) = C \frac{du}{dt} \\ u &= \frac{1}{C} \int idt \\ q &= Cu \end{aligned} \right\}; \quad (1.5)$$

— для индуктивного элемента:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} (Li) = L \frac{di}{dt} \\ i &= \frac{1}{L} \int udt \\ \Phi &= Li \end{aligned} \right\}. \quad (1.6)$$

Здесь q — заряд в кулонах (ампер-секундах); Φ — поток в веберах (вольт-секундах).

Из этих формул следует, что в линейных элементах между причиной и следствием существует линейная связь: для резистивного элемента — между напряжением и током; для емкостного — между зарядом и напряжением; для индуктивного — между потоком и током. В энергоемких элементах имеет место линейная связь между током и производной напряжения (емкость) и между напряжением и производной тока (индуктивность).

Выражения (1.4), (1.5) и (1.6) вскрывают две особенности линейных элементов:

— линейные элементы не меняют форму синусоидального колебания, изменяя только его амплитуду и фазу (так как производная и интеграл от синусоидальных функций дают также синусоидальные функции)¹⁾;

— к цепям, состоящим из линейных элементов, применим принцип суперпозиции. Это утверждение вытекает из известных теорем анализа: интеграл (производная) суммы равен сумме интегралов (производных)¹⁾.

¹⁾ С точностью до постоянной составляющей (см. задачи 1.12 и 1.13).

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Резистивный элемент. Свойства резистивного нелинейного элемента обычно выражают при помощи вольтамперных характеристик мгновенных значений $u=f(i)$ или $i=\varphi(u)$.

Для резистивного элемента пользуются понятием динамического или дифференциального сопротивления:

$$R = \frac{du}{di}. \quad (1.7)$$

Если сопротивление зависит от напряжения, ток вычисляют по формуле:

$$i = \int \frac{du}{R(u)}. \quad (1.8)$$

Если же сопротивление определяется током, напряжение рассчитывают по соотношению:

$$u = \int R(i) di. \quad (1.9)$$

Необходимо подчеркнуть, что дифференциальное сопротивление представляет собой сопротивление «в точке» или сопротивление «в окрестности точки» (рис. 1.2) вольтамперной характеристики $i=\varphi(u)$ или $u=f(i)$. Его измеряют либо при помощи постоянного напряжения E (устанавливающего рабочую точку — смещение) и малого переменного напряжения, либо при помощи малых приращений постоянного напряжения. Дифференциальное сопротивление называют также «сопротивлением переменному току», в отличие от статического сопротивления или «сопротивления постоянному току», соответствующего измерениям «постоянных» значений напряжения E и тока I (рис. 1.2).

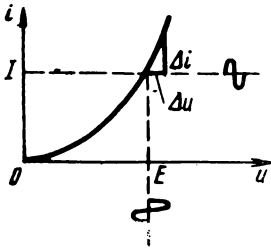


Рис. 1.2

Если элемент характеризуется проводимостью G^1), приведенные выше соотношения принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} G &= \frac{di}{du} \\ u &= \int \frac{di}{G(i)} \\ i &= \int G(u) du \end{aligned} \right\}. \quad (1.10)$$

Связь между динамическими и статическими сопротивлениями (проводимостями) выражается соотношениями (задача 1.34):

$$\frac{R_{\sim}}{R_{=}} = i \frac{f'(i)}{f(i)}, \quad \frac{R_{\sim}}{R_{=}} = \frac{\varphi(u)}{u \varphi'(u)} \quad (1.11)$$

¹⁾ Проводимость G в теории нелинейных цепей обычно называют крутизной и обозначают буквой S .

Из соотношений (1.7)—(1.11) следует, что в схемах, содержащих резистивные нелинейные элементы, форма синусоидально-го колебания изменяется и что к этим схемам принцип суперпозиции не применим¹⁾.

Индуктивный элемент. Напряжение на зажимах нелинейного индуктивного элемента определяется как

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt} [L(i) i] \\ \text{или} \\ u &= \left[L(i) + i \frac{dL(i)}{di} \right] \frac{di}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

Величина $\beta_L = dL(i)/di$ определяет зависимость индуктивности от тока.

Непосредственно из выражений (1.12) следует, что протекающий по нелинейной катушке синусоидальный ток вызывает на ней несинусоидальное напряжение; принцип суперпозиции к нелинейным индуктивностям не применим.

Статической индуктивностью называют отношение $L_{\sim} = \phi/i$, а динамической или дифференциальной — отношение $L_{\sim} = d\phi/di$.

Полной характеристикой нелинейного индуктивного элемента является ампервеберная $\phi(i)$, отражающая зависимость магнитного потока ϕ от протекающего через катушку тока i . На практике, однако, удобнее пользоваться этими же характеристиками, но выраженными в других координатах. Часто пользуются зависимостью $B(H)$, где B — магнитная индукция, H — напряженность магнитного поля. Так как величина B пропорциональна потоку ϕ , а H — току i , зависимость $B(H)$ совпадает по форме с зависимостью $\phi(i)$. Эти зависимости приводят к виду $L(i)$ или $\mu(i)$, где μ — магнитная проницаемость.

Емкостный элемент. Ток, протекающий через нелинейный конденсатор, к которому приложено напряжение u , выражается как

$$\left. \begin{aligned} i &= \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} [C(u) u] \\ \text{или} \\ i &= \left[C(u) + u \frac{dC(u)}{du} \right] \frac{du}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Величина $\beta_c = dC(u)/du$ определяет зависимость емкости от напряжения.

Непосредственно из выражений (1.13) следует, что подводимое к нелинейному конденсатору синусоидальное напряжение вызы-

¹⁾ Следует отметить, что принцип так называемой «последовательной суперпозиции» применим и к нелинейным цепям. В соответствии с этим принципом последовательно вычисляются реакции от каждого воздействия в отдельности, но каждое последующее воздействие прикладывается к точке, соответствующей величине предыдущего воздействия (т. е. переносится начало координат); при таких условиях реакция на сумму воздействий равна сумме реакций на каждое воздействие в отдельности (см. задачу 1.17).

вает несинусоидальный ток в цепи; принцип суперпозиции к нелинейным емкостям не применим.

Статической емкостью называют отношение $C_{\sim} = q/u$, а динамической или дифференциальной — отношение $C_{\sim} = dq/du$.

Полной характеристикой нелинейного емкостного элемента является вольткулонная $q(u)$, отражающая зависимость заряда q от приложенного напряжения u . На практике, однако, удобнее пользоваться характеристикой $C(u)$.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Резистивный элемент. Свойства резистивного параметрического элемента выражаются зависимостями $R(t)$ или $G(t)$. Связь между током и приложенным к нему напряжением определяется равенствами:

$$\left. \begin{aligned} i &= \frac{1}{R(t)} u \\ u &= R(t) i \\ i &= G(t) u \\ u &= \frac{1}{G(t)} i \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

Непосредственно из этих равенств следует, что ток по форме не повторяет синусоидальное напряжение (и наоборот) вследствие изменения параметра во времени. С другой же стороны, ф-лы (1.14) указывают на применимость принципа суперпозиции.

Индуктивный элемент. Свойства параметрического индуктивного элемента выражаются зависимостью $L(t)$. Напряжение на его зажимах выражается как

$$\text{или} \quad \left. \begin{aligned} u &= \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} [L(t) i] \\ u &= L(t) \frac{di}{dt} + \frac{dL(t)}{dt} i \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Из этих выражений следуют неизбежность деформации формы кривой напряжения и применимость принципа суперпозиции.

Емкостный элемент. Свойства параметрического емкостного элемента выражаются зависимостью $C(t)$. Ток через параметрический конденсатор определяется выражениями:

$$\text{или} \quad \left. \begin{aligned} i &= \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} [C(t) u] \\ i &= C(t) \frac{du}{dt} + \frac{dC(t)}{dt} u \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

Из этих выражений следуют те же выводы, что и из (1.15).

Дополнительная классификация нелинейных элементов, их параметров и характеристик

Объектами изучения в этой книге являются цепи, составленные из нелинейных и параметрических элементов, причем последние представляют собой также нелинейные элементы, но управляемые извне, т. е. при помощи специальной цепи управления (рис. 1.3). Таким образом, нелинейные элементы применяются во всех нелинейных и параметрических цепях, поэтому приведенная выше общая классификация нелинейных элементов, их параметров и характеристик требует дальнейшего развития.

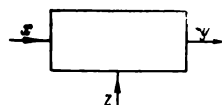


Рис. 1.3

Нелинейные элементы принято делить на *активные* и *пассивные*, причем эти термины имеют смысл, весьма условно отражающий их содержание. Под активными элементами понимают устройства, образованные при помощи как простейших элементов, так и источников энергии, а под пассивными — только простейшие элементы. Так, собственно резисторы, конденсаторы и катушки — пассивные элементы; в равной степени пассивным элементом является полупроводниковый диод, если он выполняет свои функции без специального источника напряжения. Говоря о пассивных элементах, термин «пассивные» обычно опускают. В качестве первых примеров активных элементов можно привести транзисторы и электронные лампы, которые не могут выполнять свои функции по отношению к внешнему сигналу без специальных источников напряжения, емкость, созданная при помощи «схемы с реактивной лампой», и т. д.

Нелинейные элементы полностью характеризуются причинно-следственными связями, называемыми характеристиками мгновенных значений. Эти характеристики являются непрерывными функциями своего аргумента; однако для анализа процессов и расчетов схем их часто идеализируют и представляют в виде кусочно-ломаных функций, которые называют ступенчатыми характеристиками, причем термин «ступенчатый» адресуют либо к самой характеристике, либо к ее производной. На рис. 1.4 показано несколько типовых непрерывных характеристик и «представляющих» их ступенчатых кривых. Характеристики, близкие к ступенчатой, могут описывать как сами нелинейные элементы, так и образованные из них цепи.

Характеристики нелинейных элементов могут быть однозначными и неоднозначными. Типовые неоднозначные характеристики, которые принято называть *S*- и *N*-характеристиками, изображены на рис. 1.5. Приборы с вольтамперными характеристиками типа *N* называют приборами с управлением по току, а с характеристиками типа *S* — приборами с управлением по напряжению. Поскольку ток и напряжение в этих приборах изменяются в зависимости от предыстории (т. е. направления изменения движения

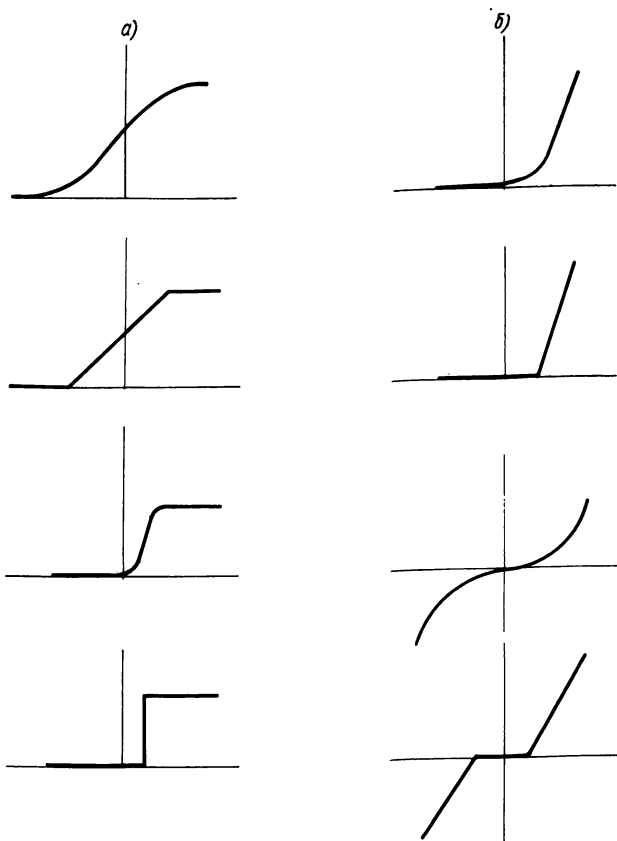


Рис. 1.4

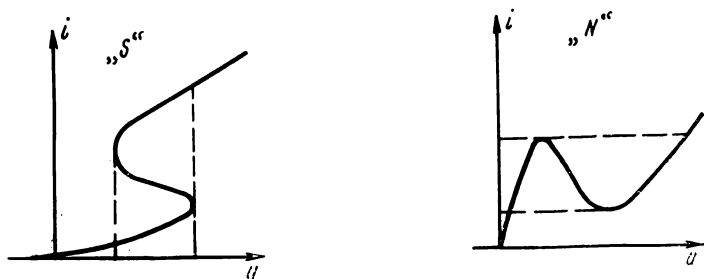


Рис. 1.5

и значения функции). по различным кривым (см. рис. 1.6), такие характеристики называют петлевыми.

Характеристики типа N имеют, например, туннельные диоды, а типа S — тиристоры; подобные характеристики имеют и реак-

тивные элементы, а также цепи, образованные из ряда активных и пассивных элементов (триггеры и др.).

Кроме характеристик мгновенных значений, при изучении нелинейных элементов и нелинейных цепей применяют и амплитуд-

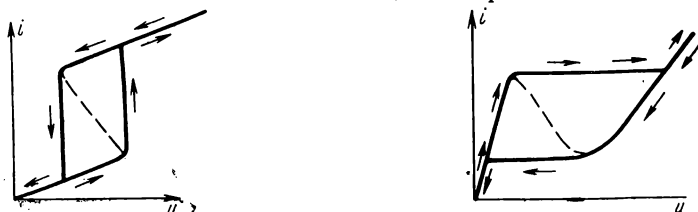


Рис. 1.6

ные, отражающие связь между амплитудой данной гармоники на выходе и амплитудой входного моногармонического испытательного сигнала, например $I_{n\omega} = f(U_{\omega})$, $I_n = f(U)$. Амплитудную характеристику по первой гармонике $I_1 = f(U)$ называют колебательной, а параметр $I_1/U = S_{cp}$ — ее средней крутизной. Аналогично определяют и другие параметры ¹⁾.

Рассмотренные характеристики мгновенных значений адресовались к безынерционным резисторам, т. е. таким, у которых с появлением тока мгновенно (без запаздывания) возникает напряжение, и наоборот. Широко распространены инерционные резисторы, параметры которых «не успевают» следить за мгновенными значениями тока или напряжения вследствие их тепловой инерционности. Сопротивления таких резисторов зависят не от мгновенных значений тока и напряжения, а являются функциями средних (или амплитудных) значений, например $R(U)$ или $R(I)$. Наиболее характерными примерами инерционных резисторов могут служить лампы накаливания, терморезисторы и др. При периодическом воздействии в установившемся режиме инерционные нелинейные элементы ведут себя как линейные с некоторыми усредненными параметрами.

Схемы моделирования нелинейных и параметрических цепей

Математические уравнения, описывающие нелинейные и параметрические цепи, можно моделировать при помощи простейших функциональных узлов: дифференциаторов, интеграторов, сумматоров, инверторов, усилителей, перемножителей, линий задержки и различных нелинейных функциональных преобразователей — квадраторов, кубаторов, экспонаторов, логарифматоров и т. д. Графические обозначения этих функциональных узлов даны в таблице условных обозначений (стр. 7—9). При составлении схем

¹⁾ Подробнее амплитудные характеристики, а также средние параметры рассматриваются в разд. 4 и последующих.

моделирования считается, что функциональные узлы являются идеальными, т. е. операция выполняется точно.

Основу методики составления схем моделирования дифференциальных уравнений составляет последовательное интегрирование наивысшей производной; создаваемые таким образом производные более низких порядков умножаются на свои коэффициенты и затем при помощи инверторов и сумматоров объединяются в замкнутую цепь в соответствии с заданным дифференциальным уравнением. Переменные и нелинейные коэффициенты реализуются необходимыми функциональными узлами, а иногда и специальными генераторами.

В ряде нижеприводимых задач даны примеры составления схем моделирования. Схемы соответствуют тем, которые «набираются» на аналоговых вычислительных машинах, но здесь они составлены без учета начальных условий, а также масштабных коэффициентов.

* * *

В настоящем разделе задачи распределены следующим образом. Первые девять задач посвящены вопросам классификации электрических цепей и дифференциальных уравнений; в задачах 1.10—1.27 выясняются свойства цепей по признакам, характеризующим их линейность или нелинейность, а также по признакам преобразования спектра; в задачах 1.28—1.42 определяются токи и напряжения по известным законам изменения параметров, либо законы изменения параметров по известным характеристикам мгновенных значений, и, наконец, задачи 1.43—1.45 посвящены составлению схем моделирования заданных дифференциальных уравнений.

Задачи и упражнения

1.1. На рис. 1.7 изображены восемь схем колебательного контура. Указать, к какому классу относится каждая цепь.

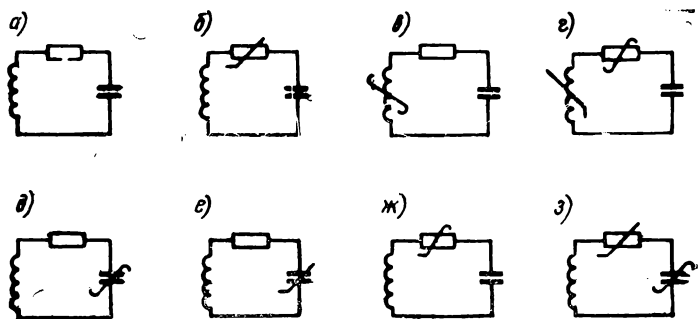


Рис. 1.7

1.2. Дать классификацию цепей, описываемых нижеприводимыми дифференциальными и интегро-дифференциальными уравнениями:

а) $L \frac{di}{dt} + Ri = u;$

б) $L \frac{di}{dt} + R_0 (1 + \mu \sin \Omega t) i = U \sin \omega t;$

в) $\frac{di}{dt} + ai^2 = bu;$

г) $\frac{d^2i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = U \sin \omega t;$

д) $\frac{d^2i}{dt^2} + 2\alpha (1 - \beta i^2) \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0;$

е) $\frac{d^2i}{dt^2} + 2\alpha (1 - \mu \sin \Omega t) \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0;$

ж) $\frac{d^2i}{dt^2} + 2\alpha (1 - \mu \sin \Omega t) \frac{di}{dt} + bi^2 = 0;$

з) $L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{(1 - \mu \sin \omega t)}{C_0} \int idt = 0;$

и) $L \frac{di}{dt} + ai^2 + \frac{(1 - \mu \sin \omega t)}{C_0} \int idt = 0.$

1.3. В цепи, изображенной на рис. 1.8, напряжение на выходе $u_{вых}$ прямо пропорционально напряжению на входе $u_{вх}$; коэффициент пропорциональности K зависит от управляющего напряжения $u_{упр}$. К какому классу следует отнести данную цепь?

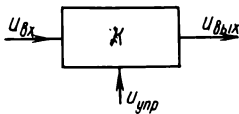


Рис. 1.8

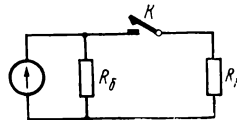


Рис. 1.9

1.4. В цепи, изображенной на схеме рис. 1.9, при помощи ключа K параллельно балластному резистору $R_б$ периодически подключается нагрузка R_n . К какому классу относится данная цепь?

1.5. Показать в общем виде, что параметрическую цепь (рис. 1.10), определяемую соотношением $y(t) = z(t)x(t)$, можно свести к нелинейной цепи, определяемой соотношением $y(t) = f[x(t)]$, а затем показать возможность обратного перехода.

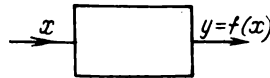
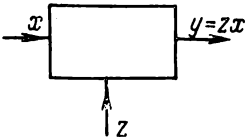


Рис. 1.10

1.6. На сетку лампы (рис. 1.11) подается изменяющееся во времени напряжение. К какому классу следует отнести данную цепь?

Допустимо считать, что появление переменной составляющей напряжения на аноде мало влияет на величину тока.

1.7. В цепи, изображенной на схеме рис. 1.12, катушки L_1 и L_2 намотаны на ферритовый сердечник, вследствие чего индуктивности являются нелинейными. Определить, является ли данная цепь параметрической или нелинейной.

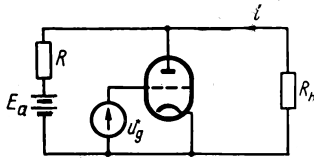


Рис. 1.11

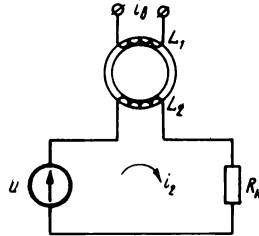


Рис. 1.12

имея в виду, что ток возбуждения i_b подается на катушку L_1 от постороннего источника.

1.8. Известно, что сопротивление некоторых полупроводников зависит от падающего на них светового потока. Как рассматривать схему рис. 1.13, если R

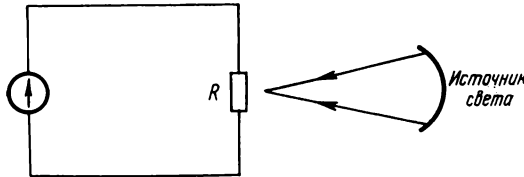


Рис. 1.13

представляет собой сопротивление полупроводника, находящегося под воздействием источника меняющегося во времени света.

1.9. На рис. 1.14а схематически изображен оптрон-прибор, представляющий собой сочетание светодиода и фоторезистора.

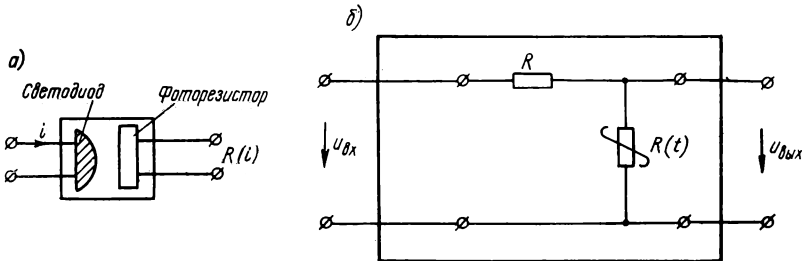


Рис. 1.14

Светодиод — это полупроводник, обладающий способностью светиться при прохождении через него тока; сила света зависит от величины тока. Фоторезистор — это резистор, сопротивление которого зависит от его освещенности. Таким образом, сочетание светодиода и фоторезистора позволяет получить параметрический элемент $R[i(t)]$ — резистор, управляемый током (оптрон).

На рис. 1.14б показана цепь, содержащая в качестве параметрического элемента оптрон. Составить выражение для передаточной функции мгновенных значений этой цепи, т. е. для отношения $u_{вых}/u_{вх}=K(t)$, считая, что ток изменяется по закону $i(t)$.

1.10. Показать на примере внешнего напряжения u , складывающегося из двух напряжений $u=u_1+u_2$, что к параметрическим цепям, содержащим $R(t)$ или $C(t)$, применим принцип суперпозиции.

1.11. Известно, что к линейным системам применим принцип суперпозиции. Соответствующее доказательство строится на аналитической основе, т. е. вольт-амперная характеристика $i=\varphi(u)$ исследуется (анализируется) на применимость суперпозиции. Возможна обратная постановка (постановка синтеза), которая и составляет содержание настоящей задачи.

Дан элемент с характеристикой $i=\varphi(u)$. Решить функциональное уравнение, т. е. определить вид функции $\varphi(u)$, исходя из условия удовлетворения принципа суперпозиции: $\varphi(u_1+u_2)=\varphi(u_1)+\varphi(u_2)$.

1.12. Решить функциональное уравнение по условию однородности, т. е. найти вид функции $i=\varphi(u)$, исходя из условия $\varphi(au)=a\varphi(u)$.

1.13. Показать, что для функциональной связи вида $y=ax$ удовлетворяются как условия аддитивности, так и однородности.

Установить, удовлетворяются ли для функциональной связи вида $y=ax+b$ условия аддитивности и однородности и применим ли к цепям с такой характеристикой принцип суперпозиции.

1.14. Выяснить, для каких из нижеприводимых функциональных связей удовлетворяются условия аддитивности и однородности, а для каких — не удовлетворяются:

а) $y=ax$; б) $y=ax+b$; в) $y=ax^2$; г) $y=ax+bx^2$; д) $y=ax+bx^3$; е) $y=a \sin x$.

1.15. Задан элемент, имеющий вольтамперную характеристику, изображенную на рис. 1.15. Уравнение этой характеристики записывается в виде $i=I_0+Su$.

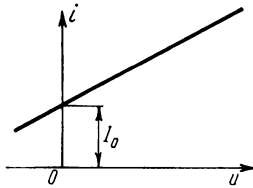


Рис. 1.15

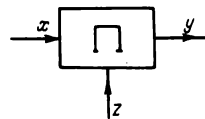


Рис. 1.16

Выяснить, является данный элемент линейным или нелинейным, считая, что $I_0=\text{const}$.

Аналогичные условия ставились в задаче 1.13. Здесь нужно дать решение, исходя из определения линейности, построенное на свойствах параметров элементов.

1.16. Показать, что дифференцирующие и интегрирующие цепи являются линейными.

1.17. К нелинейной цепи с характеристикой $y=f(x)$ приложено воздействие $x=x_1+x_2$; реакция цепи соответственно будет равна $f(x_1+x_2)$. Показать, что, применяя «последовательную суперпозицию», можно представить реакцию на суммарное воздействие как реакцию на последнее воздействие (см. сноску к стр. 15).

1.18. Функциональные зависимости некоторых систем определяются соотношениями: $y=\sqrt{x^2+x^2}$, $y=x/x$, $y=\dot{x}/x$. Установить, обладают ли эти системы свойствами аддитивности и однородности.

1.19. На рис. 1.16 изображена схема перемножителя, осуществляющего операцию перемножения входных переменных x и z по формуле $y=axz$. Определить линейность перемножителя по отношению к каждой переменной в отдельности и к обеим переменным вместе.

1.20. На рис. 1.17 изображена схема коррелятора, осуществляющего вычисление функции y по формуле: $y(\tau) = \int_0^{\tau} x(t)x(t-\tau)dt$. Выяснить, является ли коррелятор линейной цепью.

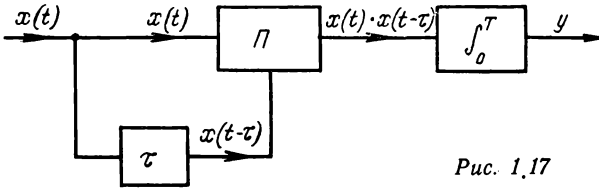


Рис. 1.17

1.21. Доказать, что если в линейной цепи под воздействием $x(t)$ возникает реакция $y(t)$, то при воздействии $\text{Re}[x(t)]$ возникнет $\text{Re}[y(t)]$.

1.22. Как известно, при изучении линейных цепей широко пользуются символьным методом, в основе которого лежит замена тригонометрических функций $\cos \omega t$ или $\sin \omega t$ функцией $e^{i\omega t}$, от которой, в свою очередь, в конце преобразований или расчетов нужно взять только вещественную или только мнимую часть.

Показать возможность применения символьного метода по отношению к внешнему воздействию на параметрические цепи и недопустимость его применения по отношению к внешнему управлению его параметрами. Задачу решить на примере дифференциального уравнения первого порядка: $dx/dt + a(t)x = f(t)$.

1.23. На нелинейный элемент, характеристика которого определяется выражением $i = au^2$, подается синусоидальное напряжение $u = U_0 \sin \omega t$. Найти ток в цепи и убедиться в том, что он не повторяет форму приложенного напряжения.

1.24. Через катушку, нелинейность которой характеризуется выражением $L = L_0(1 - pt)$, пропускается ток, меняющийся во времени по закону $i = I_0 \sin \Omega t$. Найти форму напряжения на катушке и убедиться в том, что она не повторяет форму тока.

1.25. На нелинейный конденсатор с характеристикой $C = C_0(1 - qu)$ подается линейно растущее напряжение $u = bt$. Найти закон изменения тока через конденсатор.

1.26. Сопротивление резистивного параметрического элемента меняется по закону $R(t) = R_0(1 + m \sin^2 \Omega t)$; на этот элемент подается напряжение $u = U_0 \sin \omega t$. Найти ток в цепи и убедиться в том, что он не повторяет форму приложенного напряжения.

1.27. Индуктивность катушки меняется во времени по закону $L(t) = L_0(1 + m \cos \Omega t)$. Найти напряжение на этой катушке, если через нее пропускается ток высокой частоты $i = I_0 \sin \omega t$, и убедиться в том, что напряжение не повторяет форму тока.

1.28. Внутреннее сопротивление некоторого электронного прибора на участке $u_1 < u < u_2$ можно выразить линейной функцией (рис. 1.18) $R = R_0(1 - qu)$, ($u_1 < u < u_2$), где $q = 1/U_0$. Найти ток в цепи, если известно, что при $u = 0$ $i = 0$.

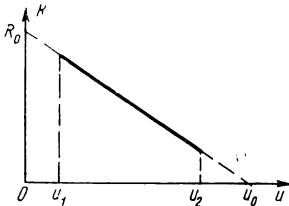


Рис. 1.18

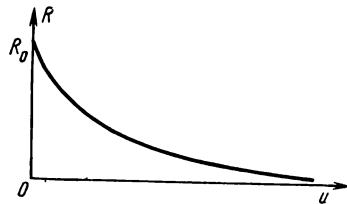


Рис. 1.19

1.29. Внутреннее сопротивление транзистора на некотором участке (рис. 1.19), можно представить выражением $R(u) = Re^{-qu}$. Найти уравнение вольтамперной характеристики $i(u)$, если известно, что при $u=0$ $i=0$.

1.30. К нелинейному элементу $R(i)$ подключен генератор тока (рис. 1.20). Найти напряжение u , если сопротивление $R(i)$ выражается функцией $R(i) = R_0 + bi$ и известно, что при $i=0$ $u=0$.

1.31. По нижеприведенным выражениям вольтамперных характеристик найти выражения для дифференциального сопротивления и дифференциальной проводимости:

- 1) $i = I_0 e^{qu}$; 2) $u = ai + (1/2)bi^2$; 3) $i = -I_0 \ln(1-qu)$; 4) $i = au^2$.

1.32. Вольтамперная характеристика бареттера имеет вид, показанный на рис. 1.21. В диапазоне изменения напряжения от $u=0$ до $u=u_1$ эту характеристику приближенно можно передать формулой $i = I_0 \operatorname{th} qu$, где коэффициент $q = S/I_0$, а величина S определяется из треугольника OAB : $S = AB/OB$. Найти

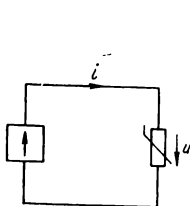


Рис. 1.20

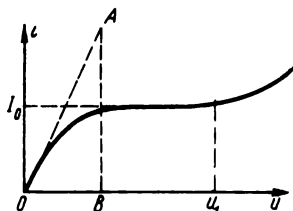


Рис. 1.21

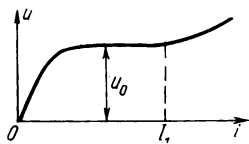


Рис. 1.22

закон изменения сопротивления бареттера от напряжения и построить соответствующий график.

1.33. Вольтамперная характеристика нелинейного элемента показана на рис. 1.22. В пределах от $i=0$ до $i=I_1$ эту характеристику можно представить выражением $u = U \operatorname{th} pi$, где коэффициент p определяется так же, как коэффициент q в предыдущей задаче. Найти закон изменения сопротивления в зависимости от тока и построить соответствующий график.

1.34. Найти аналитическую связь между сопротивлением переменному току R_{\sim} и сопротивлением постоянному току $R_{=}$, считая, что вольтамперная характеристика задана либо в виде $u = f(i)$, либо в виде $i = \varphi(u)$.

1.35. Характеристика нелинейного элемента показана на рис. 1.23. Уравнение этой характеристики $i = au^2$, причем коэффициент $a = 1$ мА/В².

Найти сопротивления переменному и постоянному токам при напряжении 6 В как графически, так и аналитически. Проверить, кроме того, найденный результат по ф-лам (1.11).

1.36. Характеристика некоторого элемента передается выражением $i = I_0 + S_a u$, причем $I_0 = \text{const}$. Пользуясь ф-лой (1.11), найти выражение для сопротивления постоянному току, если известно, что сопротивление переменному току $R_{\sim} = 1/S_a$.

1.37. Характеристика нелинейного элемента передается выражением $i = I_0 e^{qu}$, причем $I_0 = 10$ мА, а $q = 0,1$ 1/В. Найти значение $R_{=}$ при $u = 10$ В и по найденной величине определить R_{\sim} при том же напряжении. Вывести также

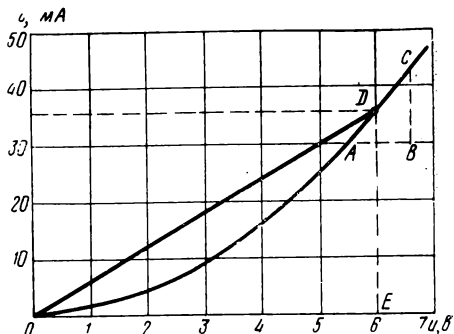


Рис. 1.23

общую формулу, отражающую связь между R_{\sim} и $R_{=}$ при данной характеристике.

1.38. Показать, какой вид должна иметь характеристика $i=\varphi(u)$ для того, чтобы сопротивление постоянному току $R_{=}$ было равно сопротивлению переменному току R_{\sim} в любой ее точке.

1.39. Характеристику нелинейной индуктивности можно выразить как $L=L_0(1-pi)$. Найти общее выражение для напряжения на индуктивности.

1.40. Характеристику емкостного нелинейного элемента можно представить формулой $C=C_0(1-qu)$. Найти выражение для тока через конденсатор.

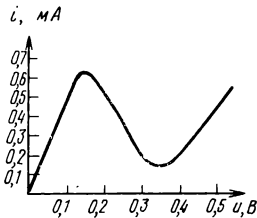


Рис. 1.24

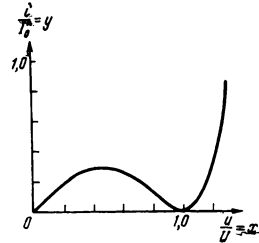


Рис. 1.25

1.41. На рис. 1.24 показана характеристика $i(u)$ туннельного диода; построить (качественно) графики $G=di/du$ и $R=du/di$ по характерным точкам и участкам.

1.42. Характеристика туннельного диода изображена на рис. 1.25; эта характеристика передается аналитическим выражением (см. задачу 2.16).

$$\frac{i}{I_0} = \frac{u}{U_0} - 2\left(\frac{u}{U_0}\right)^3 + \left(\frac{u}{U_0}\right)^5.$$

Здесь $I_0=1$ мА, $U_0=0,1$ В.

Для безразмерных тока и напряжения введем обозначения: $i/I_0=y$; $u/U_0=x$, тогда характеристика запишется в виде: $y=x-2x^3+x^5$.

Построить по этой характеристике графики проводимости $G=di/du$ и сопротивления $R=du/di$.

1.43. Составить структурную схему, моделирующую линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами вида $x+a_1\dot{x}+a_0x=f(t)$; генератор, создающий $f(t)$, считается заданным.

1.44. Составить структурную схему, моделирующую параметрическое дифференциальное уравнение вида $x+a_1(t)\dot{x}+a_0(t)x=f(t)$.

1.45. Составить структурную схему, моделирующую нелинейное дифференциальное уравнение вида $x+ax\dot{x}+bx^3=f(t)$.

РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ

1.1. а) Линейная; б) нелинейная; в) параметрическая; г) нелинейно-параметрическая; д) параметрическая; е) нелинейная; ж), з) нелинейно-параметрическая.

1.2. а) Линейная первого порядка; б) параметрическая первого порядка; в) нелинейная первого порядка; г) линейная второго порядка; д) нелинейная второго порядка; е) параметрическая второго порядка; ж) нелинейно-параметрическая второго порядка; з) параметрическая второго порядка; и) нелинейно-параметрическая второго порядка.

1.3. Так как $u_{вых}=Ku_{вх}$, а $K=K(u_{упр})=K[u_{упр}(t)]=K(t)$, то $u_{вых}=K(t)u_{вх}$ и, следовательно, цепь является параметрической.

1.4. Цепь является параметрической.

1.5. Представим $x(t)$ в виде: $x(t)=F(t)$ и найдем обратную функцию: $t=F^{-1}(x)$.

Теперь введем эту обратную функцию в выражение $z(t)$ исходного соотношения

$$y(t) = z[F^{-1}(x)]x = f(x) = f[x(t)].$$

Полученное равенство и показывает возможность представления параметрической цепи в виде нелинейной.

Покажем возможность обратного перехода. Перепишем исходное соотношение в виде

$$y(t) = f[x(t)] = \frac{f[x(t)]}{x(t)} x(t) = \frac{f[F(t)]}{F(t)} x(t) = z(t) x(t).$$

Таким образом, и от нелинейной цепи всегда можно перейти к представлению с помощью параметрической цепи.

1.6. Лампу можно рассматривать как резистор, подключенный параллельно нагрузке R_H . Так как этот резистор является переменным во времени, эквивалентная схема будет иметь вид изображенной на рис. P.1.1; очевидно, цепь является параметрической. При таком подходе в эквивалентной схеме отсутствует напряжение u_g , так как его действие учтено в законе изменения параметра резистора.

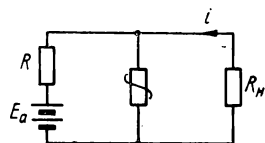


Рис. P.1.1

Эту же цепь можно рассматривать как нелинейную, если известна зависимость анодного тока i от сеточного напряжения u_g при фиксированном напряжении E_a анодной батареи.

Выбор того или иного представления зависит от удобств конкретного расчета и вида заданных условий.

1.7. Общую цепь следует разделить на две: цепь, состоящую из генератора тока i и катушки L_1 , и цепь, состоящую из генератора напряжения u , катушки L_2 и резистора R_H .

Первая цепь является нелинейной, так как индуктивность L_1 зависит от тока i_B . Вторая цепь в общем случае представляет собой нелинейно-параметрическую, так как, во-первых, индуктивность L_2 меняется во времени в соответствии с законом изменения тока i_B и свойствами сердечника и, во-вторых, эта индуктивность зависит от тока i_2 в схеме L_2, R_H . В частном случае малых изменений тока i_2 вторую цепь можно считать чисто параметрической, если допустить принять, что индуктивность L_2 не зависит от тока i_2 .

1.8. Схема отображает параметрическую цепь, так как сопротивление R , зависящее от освещенности, является функцией времени.

$$1.9. K(t) = \frac{u_{\text{вых}}(t)}{u_{\text{вх}}(t)} = \frac{R(i)}{R + R(i)} = \frac{R[i(t)]}{R + R[i(t)]}.$$

1.10. Нужно показать, что ток i в цепи, содержащей $R(t)$ или $C(t)$ и находящейся под воздействием напряжения $u = u_1 + u_2$, $i = i_1 + i_2$, где i_1 и i_2 — токи, которые протекали бы в этих цепях, если бы воздействия были соответственно равны u_1 и u_2 . Доказательство строится следующим образом.

Для первой цепи:

$$i = \frac{u}{R(t)} = \frac{u_1 + u_2}{R(t)} = \frac{u_1}{R(t)} + \frac{u_2}{R(t)} = i_1 + i_2.$$

Для второй цепи:

$$\begin{aligned} i &= \frac{d}{dt} [C(t) u] = C(t) \frac{du}{dt} + u \frac{dC(t)}{dt} = C(t) \frac{d(u_1 + u_2)}{dt} + (u_1 + u_2) \frac{dC(t)}{dt} = \\ &= C(t) \frac{du_1}{dt} + u_1 \frac{dC(t)}{dt} + C(t) \frac{du_2}{dt} + u_2 \frac{dC(t)}{dt} = i_1 + i_2. \end{aligned}$$

1.11. Возьмем от исходного равенства частную производную по u_1 :

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \Phi(u_1 + u_2) = \frac{\partial}{\partial u_1} \Phi(u_1), \quad (1)$$

а затем — по u_2 :

$$\frac{\partial}{\partial u_2} \Phi(u_1 + u_2) = \frac{\partial}{\partial u_2} \Phi(u_2). \quad (2)$$

Равенства (1) и (2) выполняются тождественно, т. е. при любых значениях u_1 и u_2 ; так как равны их левые части, то равны и правые:

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \Phi(u_1) = \frac{\partial}{\partial u_2} \Phi(u_2). \quad (3)$$

В последнем тождестве левая часть не зависит от u_2 , а правая — от u_1 ; следовательно, каждая из них равна постоянной $\frac{\partial}{\partial u_1} \Phi(u_2) = K$, откуда после интегрирования получаем $\Phi(u_1) = Ku_1 + C$.

Имея в виду, что полученное равенство справедливо для любых значений, можно написать $\Phi(u) = C + Ku$, т. е. исходное равенство удовлетворяется (с точностью до аддитивной постоянной) только в линейных системах.

1.12. Представим $\Phi(u)$ в виде степенного ряда:

$$\Phi(u) = b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + b_3 u^3 + \dots$$

и сопоставим два соотношения по условию однородности:

$$\begin{aligned} i_1 &= \Phi(au) = b_0 + b_1 au + b_2 (au)^2 + b_3 (au)^3 + \dots \\ i_2 &= a\Phi(u) = ab_0 + ab_1 u + ab_2 u^2 + ab_3 u^3 + \dots \end{aligned}$$

Легко видеть, что $i_1 = i_2$ только в том случае, если функция линейна и не содержит постоянной составляющей. Таким образом, функция, удовлетворяющая условию однородности, должна быть линейной и проходить через начало координат.

1.13. Для проверки свойств аддитивности положим $x = x_1 + x_2$; легко видеть, что для первой функции $y = y_1 + y_2 = ax_1 + ax_2$. Таким образом, условие аддитивности удовлетворяется.

Для проверки свойства однородности вместо x подставим в исходную функциональную связь kx ; легко видеть, что вместо y будет ky . Таким образом, удовлетворяется и условие однородности.

Аналогично проверим выполнение условий аддитивности и однородности для второй функции. Очевидно:

$$y_1 = ax_1 + b, \quad y_2 = ax_2 + b, \quad y = y_1 + y_2 = a(x_1 + x_2) + 2b.$$

Таким образом, условие аддитивности не выполняется, точнее выполняется «с точностью до постоянного слагаемого».

Легко убедиться в том, что и условие однородности выполняется с точностью до постоянного слагаемого. В самом деле, подставим в исходное соотношение $y = ax + b$ вместо x величину kx : $y_1 = akx + b$, сравним этот результат со следующим: $y_2 = k(ax + b) = akx + bk$. Так как $y_1 \neq y_2$, условие однородности выполняется с точностью до постоянного слагаемого.

Однако здесь возможна и другая трактовка, если условиться, что коэффициент k адресуется не к переменной x , а к переменной $(ax + b)$; для этих условий $y_1 = akx + bk = y_2 = k(ax + b)$, т. е. условие однородности выполняется¹⁾.

Итак, для линейных цепей с характеристиками вида $y = ax + b$ принцип суперпозиции применим «с точностью до постоянной составляющей».

1.14. а), б) — выполняются; в), г), д), е) — не выполняются.

¹⁾ Подобная трактовка уместна по отношению к усилителям постоянного тока (УПТ), в которых усиливаются как переменные, так и постоянные составляющие.

1.15. Так как в качестве признака линейности здесь следует считать независимость параметров от напряжения или тока, найдем сопротивление данного элемента.

Для переменного тока $R \sim du/di = 1/S$ и, следовательно, элемент является линейным.

Для постоянного тока $R = u/i = u/(I_0 + Su)$ и, следовательно, сопротивление является функцией напряжения. Однако при постоянном токе напряжение $u = \text{const}$, и поэтому в данном случае нельзя говорить о нелинейности. Понятие нелинейности имеет смысл только для меняющихся токов и напряжений, а также для их сумм.

Этот вывод совпадает с выводом, полученным в решении задачи 1.13, где было установлено, что функциональная зависимость $y = ax + b$ удовлетворяет принципу суперпозиции с точностью до постоянной составляющей.

1.16. Утверждение следует из известных правил дифференцирования и интегрирования:

$$(x + y + \dots)' = x' + y' + \dots; (kx)' = kx';$$

$$\int (u + v + \dots) dt = \int u dt + \int v dt + \dots; \int ax dt = a \int x dt,$$

т. е. эти операции удовлетворяют условиям аддитивности и однородности.

1.17. Согласно принципу «последовательной суперпозиции» каждое воздействие должно прикладываться к точке, соответствующей предыдущему воздействию (перенос начала координат); при таких условиях реакция на сумму воздействий равна реакции на суммарное, т. е. последнее воздействие (это утверждение и предстоит доказать).

Найдем реакцию y_1 на первое воздействие x_1 (см. рис. P1.2); очевидно, так как $y = f(x) = f(0+x)$, а $x = x_1$, то $y_1 = f(x_1)$.

Теперь найдем реакцию на воздействие x_2 , но перед этим перенесем начало координат в точку x_1 . В данном случае $y = f(x_1+x)$, а $x = x_2$, т. е. $y_2 = f(x_1+x_2)$, что и требовалось доказать.

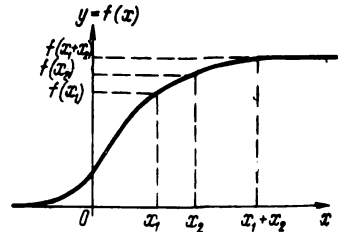


Рис. P 1.2

1.18. Для проверки свойства аддитивности достаточно положить $x = x_1 + x_2$, а свойства однородности — $x = ax_1$. Проверка показывает, что условие аддитивности не выполняется, а условие однородности выполняется.

1.19. Полагая $x = x_1 + x_2$, получаем, что $y = a(x_1 + x_2)z = ax_1z + ax_2z = y_1 + y_2$, т. е. условие аддитивности по отношению к любой переменной выполняется.

Полагая $x = kx$, получаем, что $y = kax_1z$, т. е. условие однородности по отношению к любой переменной также выполняется.

По отношению к обоим переменным нужно положить: $x = x_1 + x_2$, $z = z_1 + z_2$, $x = k_1x_1$, $z = k_1z_1$. Получаем:

$$y = a(x_1 + x_2)(z_1 + z_2) = ax_1z_1 + ax_2z_2 + ax_1z_2 + ax_2z_1 \neq y_1 + y_2, \\ y = ak_1x_1k_1z_1 = ak_1^2x_1z_1 \neq k_1y.$$

Таким образом, по отношению к каждой входной переменной в отдельности перемножитель является линейной цепью (точнее, параметрической), а по отношению к обоим переменным — нелинейной.

1.20. Коррелятор в общем случае не отвечает условиям аддитивности и однородности и, следовательно, не является линейной цепью. Однако, если при

замене $x = x_1 + x_2$ считается, что x_1 и x_2 — независимые величины и $\int_0^T x_1x_2 dt$ при

$T \rightarrow \infty$ практически равен нулю, то коррелятор работает как линейная цепь.

1.21. В линейной цепи имеет место равенство $y(t) = L[x(t)]$, в котором L — линейный оператор.

Если $x = x_1 + i x_2$, то в силу линейности $y(t) = L(x_1 + i x_2) = L(x_1) + L(i x_2) = y_1 + y_2$, $y_1 = L(x_1) = L\{\operatorname{Re}\{x(t)\}\}$, что и требовалось доказать.

1.22. Нужно показать, что если $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, то решение дифференциального уравнения представляет собой сумму двух решений, т. е. $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, причем x_1 и x_2 являются решениями при f_1 и f_2 соответственно. Этим будет доказана возможность применения символического метода по отношению к внешнему воздействию $f(t)$. С другой стороны, нужно показать, что если $a(t) = a_1 + a_2$, то решение дифференциального уравнения не будет составляться из двух решений, каждое из которых соответствует законам a_1 и a_2 в отдельности.

Решение дифференциального уравнения первого порядка имеет вид

$$x(t) = C e^{-\int a(t) dt} + e^{-\int a(t) dt} \int f(t) e^{\int a(t) dt} dt.$$

Если $f(t) = f_1 + f_2$, решение распадается на два, каждое из которых соответствует f_1 и f_2 , так как интеграл суммы равен сумме интегралов. При $a(t) = a_1 + a_2$ подобное разделение не имеет места, так как $a(t)$ является показателем экспоненциальной функции и, следовательно, условие аддитивности не удовлетворяется.

К заключению о недопустимости применения символических операций по отношению к функциям, передающим изменение параметра, можно прийти и непосредственно, исходя из того, что символические операции можно применять только при аддитивных (линейных) математических действиях (сложение, вычитание). Из рассмотрения параметрического дифференциального уравнения $dx/dt + a(t)x = f(t)$ следует, что применение символических операций по отношению к $a(t)$, приводит к нелинейным действиям (умножению), в то время как по отношению к $f(t)$ этого нет.

Таким образом, если, например, дано уравнение

$$\frac{dx}{dt} + (1 + \mu \cos \Omega t) x = \cos \omega t,$$

то от него можно перейти к уравнению

$$\frac{dx}{dt} + (1 + \mu \cos \Omega t) x = e^{i\omega t},$$

но нельзя перейти к уравнению

$$\frac{dx}{dt} + (1 + \mu e^{i\Omega t}) x = \cos \omega t.$$

Полезно подчеркнуть, что замена $\cos \omega t$ по формуле Эйлера $\cos \Omega t = (e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t})/2$, конечно, всегда допустима.

Приведенное уравнение можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} + \left(1 + \frac{\mu}{2} e^{i\Omega t} + \frac{\mu}{2} e^{-i\Omega t}\right) x = e^{i\omega t};$$

вещественная часть решения этого уравнения и является решением исходного уравнения.

1.23. $i = aU_0^2 \sin^2 \omega t.$

1.24. $u_L = I_0 \Omega L_0 (1 - 2p I_0 \sin \Omega t) \cos \Omega t.$

1.25. $i = C_0 b (1 - 2qbt).$

1.26. $i = \frac{U_0 \sin \omega t}{R_0 (1 + m \sin^2 \Omega t)}.$

1.27. $u_L = I_0 \omega L_0 (1 + m \cos \Omega t) \cos \Omega t - I_0 \Omega L_0 m \sin \Omega t \sin \omega t.$

1.28. В соответствии с ф-лой (1.8) получаем

$$i = \int \frac{du}{R(u)} = \int \frac{du}{R_0(1-qu)} = \frac{1}{R_0} \frac{1}{-q} \ln(1-qu) + C.$$

Поскольку при $u=0$ $i=0$, находим, что $C=0$. Следовательно,

$$i = -\frac{1}{qR_0} \ln(1-qu) = -\frac{U_0}{R_0} \ln\left(1 - \frac{iu}{U_0}\right).$$

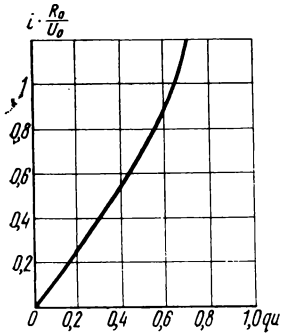


Рис. P 1.3

График, построенный по последнему выражению, представлен на рис. P1.3. Этот график, в соответствии с условием, справедлив в границах $u_1 < u < u_2$.

№ пп.	G_{\sim}	R_{\sim}
1	$I_0 q e^{qu}$	$\frac{1}{I_0 q} e^{-qu}$
2	$\frac{1}{a+bi}$	$a+bi$
3	$\frac{I_0 q}{1-qu}$	$\frac{1}{I_0 q} (1-qu)$
4	$2au$	$\frac{1}{2au}$

1.29. $i = \frac{1}{qR_0} (e^{qu} - 1).$

1.30. $u = R_0 i + \frac{bi^2}{2}.$

1.31. Результаты решения задачи сведены в следующую таблицу.

1.32. $R_{\sim} = \frac{du}{di} = \frac{1}{I_0 q} \operatorname{ch}^2 qu.$ График $R(u)$ представлен на рис. P1.4.

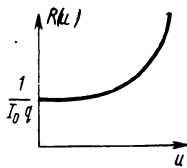


Рис. P 1.4

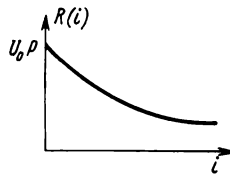


Рис. P 1.5

1.33. $R_{\sim} = U\rho \frac{1}{\operatorname{ch}^2 pi}.$ График $R(i)$ показан на рис. P1.5.

1.34. 1. При характеристике $u=f(i)$ имеем

$$R_{\sim} = \frac{du}{di} = \frac{d}{di} f(i) = f'(i); R_{=} = \frac{u}{i} = \frac{f(i)}{i}.$$

Сопоставляя эти два выражения, находим

$$\frac{R_{\sim}}{R_{=}} = \frac{f'(i)}{f(i)} i$$

или

$$R_{\sim} = R_{=} \frac{f'(i)}{f(i)} i, \quad R_{=} = R_{\sim} \frac{f(i)}{if'(i)}.$$

2. При характеристике $i = \varphi(u)$ получаем

$$\frac{di}{du} = \varphi'(u), \quad R_{\sim} = \frac{du}{di} = \frac{1}{\varphi'(u)}, \quad R_{=} = \frac{u}{i} = \frac{u}{\varphi(u)}.$$

Сопоставляя, находим

$$\frac{R_{\sim}}{R_{=}} = \frac{\varphi(u)}{u\varphi'(u)}$$

или

$$R_{\sim} = R_{=} \frac{\varphi(u)}{u\varphi'(u)}, \quad R_{=} = R_{\sim} \frac{u\varphi'(u)}{\varphi(u)}.$$

1.35. Из рис. 1.23 находим:

$$R_{=} = \frac{OE}{DE} = \frac{6}{36} 10^3 = \frac{1}{6} 10^3 \text{ Ом}; \quad R_{\sim} = \frac{AB}{CB} \approx \frac{1}{12} 10^3 = \frac{1}{12} 10^3 \text{ Ом}.$$

Аналитическое решение:

$$R_{\sim} = \frac{du}{di} = \frac{1}{2u}, \quad R_{=} = \frac{u}{i} = \frac{1}{u}.$$

При $u=6$ В получаем результат, найденный графическим путем. По ф-ле (1.11) имеем

$$\frac{R_{=}}{R_{\sim}} = u \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} = u \frac{2au}{au^2} = 2.$$

$$1.36. \quad R_{=} = \frac{u}{I_0 + S_a u}.$$

1.37. 1) При $u=10$ В $R_{\sim} = R_{=} = 369$ Ом. 2) $R_{\sim} = R_{=} / qu$.

1.38. Из ф-лы (1.11) следует, что для выполнения поставленного условия нужно выполнить равенство

$$\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} u = 1,$$

откуда

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{du}{u}, \quad \ln \varphi = \ln u + \ln k, \quad \varphi(u) = ku,$$

т. е. характеристика должна быть линейной. Следовательно, равенство $R_{\sim} = R_{=}$ отвечает условию линейности системы.

$$1.39. \quad u_L = L(1 - 2pi) \frac{di}{dt}.$$

$$1.40. \quad i = C_0(1 - 2qu) \frac{du}{dt}.$$

1.41. Графики функций $G(u)$ и $R(u)$ изображены на рис. P1.6. То обстоятельство, что проводимость (сопротивление) в определенных границах изменяется

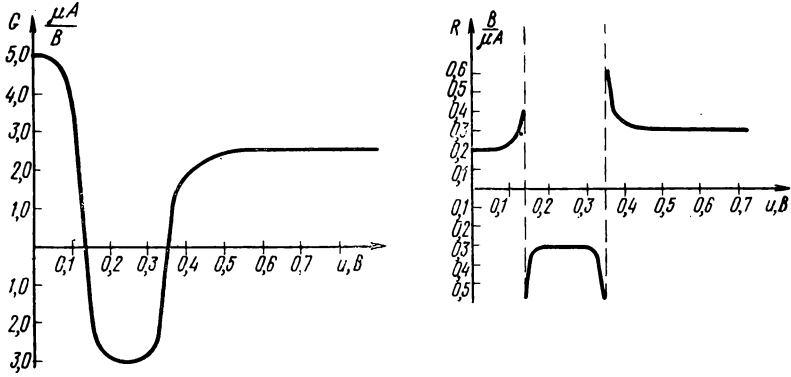


Рис. P 1.6

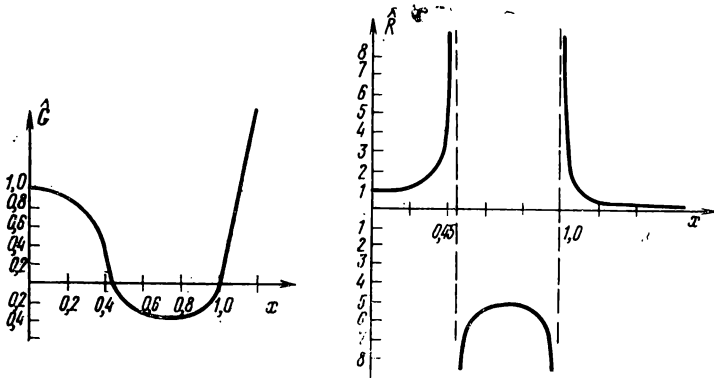


Рис. P 1.7

ния напряжения является отрицательной, используется для генерации колебаний (см. разд. 8).

1.42. Найдем проводимость G и сопротивление R , применив ту же нормировку, т. е.

$$G = \frac{di}{du}, \quad \hat{G} = \frac{d\left(\frac{i}{I_0}\right)}{d\left(\frac{u}{U_0}\right)} = \frac{dy}{dx};$$

$$R = \frac{du}{di}, \quad \hat{R} = \frac{d\left(\frac{u}{U_0}\right)}{d\left(\frac{i}{I_0}\right)} = \frac{dx}{dy}.$$

Очевидно, что

$$\hat{G} = 1 - 6x^2 + 5x^4; \hat{R} = \frac{1}{1 - 6x^2 + 5x^4}.$$

По этим формулам нетрудно построить соответствующие графики (рис. P1.7). Как видно из рисунков, «падающему» участку вольтамперной характеристики соответствуют отрицательные проводимость и сопротивление.

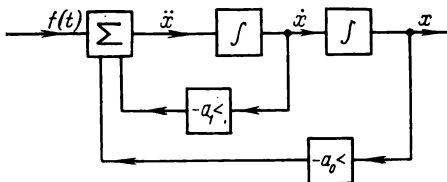


Рис. P 1.8

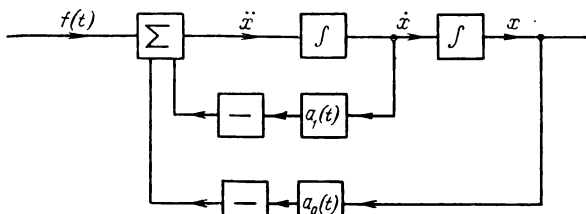


Рис. P 1.9

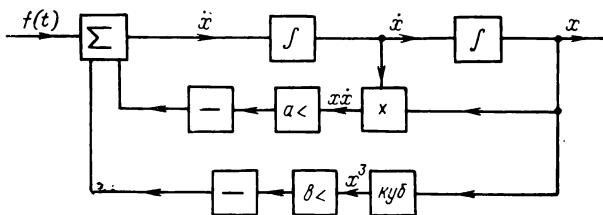


Рис. P 1.10

1.43. Схема изображена на рис. P1.8.

1.44. Схема изображена на рис. P1.9 и отличается от схемы предыдущей задачи применением усилителей с переменными (зависящими от времени) коэффициентами усиления.

1.45. Схема изображена на рис. P1.10.

2

АППРОКСИМАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Общие сведения. Критерии аппроксимации

Для расчета электрических цепей, содержащих нелинейные элементы, необходимо располагать характеристиками этих элементов. Обычно характеристики задаются в виде графиков («усредненных кривых») или табличных данных. Для графических расчетов такой способ представления характеристик является приемлемым; для аналитических же расчетов график нужно заменить аналитическим выражением — формулой.

Замена графика (таблицы) аналитическим выражением — аппроксимация — составляет неотъемлемую часть большинства радиотехнических расчетов. Общая задача аппроксимации разбивается на две самостоятельные:

- выбор класса функций, т. е. выбор функциональной структуры аппроксимирующего выражения;
- определение коэффициентов аппроксимации, т. е. постоянных (параметров), входящих в выражение аппроксимирующей функции.

Выбор класса функций связан с условиями и целями исследования: если в результате нужно получить спектр выходного колебания, аппроксимирующую функцию следует выбирать из условий упрощения операций гармонического (спектрального) анализа; если же предстоит решить дифференциальное уравнение для получения временной картины процесса, аппроксимирующую функцию выбирают из условий возможности выполнения операций интегрирования и т. д. Во всех случаях необходимо стремиться к лаконичности записи, т. е. искать простые аппроксимирующие функции.

Определение коэффициентов аппроксимации связано с условиями ее точности; эти условия конкретизируются при помощи так называемых критериев аппроксимации (приближения). Обычно применяют следующие критерии:

— критерий равномерного приближения, согласно которому аппроксимирующая функция $\tilde{f}(x)$ не должна отличаться от аппроксимируемой $f(x)$ более чем на некоторое число ε , т. е. $|\tilde{f}(x) - f(x)| \leq \varepsilon$;

— критерий среднеквадратичного приближения:

$$\left\{ \frac{1}{b-a} \int_a^b [\tilde{f}(x) - f(x)]^2 dx \right\}^{1/2} \leq \delta;$$

— критерий точного приближения, согласно которому аппроксимирующая функция $\tilde{f}(x)$ должна совпадать с аппроксимируемой $f(x)$ в ряде выбранных точек; при этом требования к характеру $\tilde{f}(x)$ в интервалах между выбранными точками обычно не предъявляются. Приближения, соответствующие этому критерию, часто называют интерполяционными или узловыми. Условия равенства можно адресовать как к самим функциям $\tilde{f}(x)$ и $f(x)$, так и к их производным $\tilde{f}^{(n)}(x)$ и $f^{(n)}(x)$.

В задачах аппроксимации характеристик нелинейных элементов требования к точности обычно не являются высокими, так как относительно велик разброс этих характеристик и параметров различных элементов цепей; точность аппроксимации должна быть одного порядка с точностью задания характеристик.

Аппроксимирующие функции

В нелинейной радиотехнике для целей аппроксимации чаще других применяются следующие функции:

1. Степенной полином

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_N x^N.$$

2. Экспоненциальный полином

$$y = A_0 + A_1 e^{a_1 x} + A_2 e^{a_2 x} + \dots + A_N e^{a_N x}.$$

3. Тригонометрический полином

$$y = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos(x + \varphi_1) + A_2 \cos(2x + \varphi_2) + \dots + A_N \cos(Nx + \varphi_N).$$

4. Кусочно-линейная и кусочно-нелинейная функции, представляющие собой совокупность отрезков прямых и кривых. Аналитически эти функции можно записывать рядом выражений, каждое из которых действительно на своем интервале; можно, однако, составлять аналитические формулы, действительные в неограниченной области (см. задачи 2.29—2.35).

Для конструирования кусочно-линейных аппроксимаций целесообразно использовать символы модуля функции $\text{mod } f(x) = \equiv |f(x)|$, знака x : $\text{sign } x = \frac{|x|}{x}$, целой части числа $[x] = E(x)$ и дробной части числа $\{x\} = e(x)$. Ясно, что при возрастании x его

целая часть $E(x)$ «ступенчато» возрастает, а дробная $e(x)$ — представляет собой «пилообразную» периодическую функцию. Удобно пользоваться также и единичной функцией: $1(x) = (1 + \text{sign } x)/2$.

На рис. 2.1 и 2.2 показаны графики функций, поведение которых может быть описано в неограниченной области при помощи приведенной символики.

При аппроксимации с помощью кусочно-нелинейных функций, представляющих собой совокупности отрезков прямых и кривых, в точках «стыка» могут выдвигаться условия равенства не только функций, но и их производных.

5. Дробно-рациональная функция

$$y = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m}.$$

Для аппроксимации характеристик нелинейных элементов дробно-рациональную функцию применяют только в наипростей-

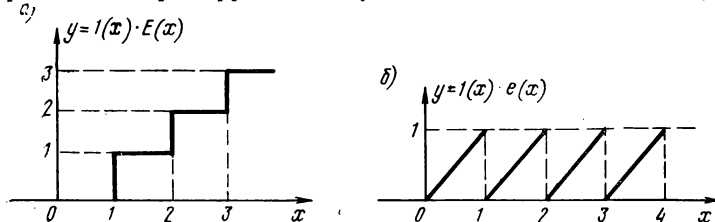


Рис. 2.2

шем виде, т. е. когда $m=1$; эти функции широко используются для аппроксимации передаточных характеристик линейных и параметрических цепей.

6. Дробно-степенная функция

$$y = Ax^\alpha;$$

здесь α — дробное число.

7. Различные трансцендентные функции (функция арктангенса, функция гиперболического тангенса, функция гиперболического синуса, функция Гаусса и др.).

Важно отметить, что функции первых пяти групп можно использовать для аппроксимации характеристик любого вида (взяв достаточное число членов полинома или отрезков прямых и кривых), а функции последних двух групп применяют только для характеристик определенного вида, соответствующих виду аппроксимируемых кривых.

Определение коэффициентов аппроксимации

Как уже указывалось, ввиду относительно невысоких требований к точности аппроксимации коэффициенты последней следует определять по условиям совпадения аппроксимирующей и аппроксимируемой функций (или их производных) в заданных точках; по этим условиям и составляют исходные уравнения, число которых должно быть равно числу подлежащих определению коэффициентов аппроксимации.

В тех случаях, когда характеристика аппроксимируется выражением, содержащим больше двух-трех членов, значения функции целесообразно выбирать при равноотстоящих значениях аргумента. Если число заданных точек превышает число коэффициентов аппроксимации, можно пользоваться «методом наименьших квадратов», при котором среднеквадратичная ошибка минимальна. Рецепт использования этим методом хорошо разработана и ее можно найти в распространенных математических справочниках.

Для определения коэффициентов аппроксимации практически удобным является введение нелинейных масштабов, что позволяет привести заданную функциональную зависимость к возможно более простому виду, например к виду, соответствующему уравнению прямой. В последнем случае говорят о «методе приведения к линейному виду». Коэффициенты аппроксимации определяются непосредственно по графику.

Важно отметить, что после нанесения на график экспериментальных точек в системе координат с нелинейными масштабами, легко устанавливается правомерность применения выбранной аппроксимации. Следует также добавить, что нелинейные масштабы можно вводить не только по отношению к каждой переменной, но и к их комбинациям, например, к произведению.

Расчеты можно существенно упростить, если аппроксимирующее выражение привести к «безразмерному виду». Например, вместо выражения $i = I_0 + S_1 u + S_3 u^3 + S_5 u^5$, в котором I_0 имеет размерность $[A]$, S_1 — $[A/B]$, S_3 — $[A/B^3]$, S_5 — $[A/B^5]$, удобно писать

$$i = I_0 \left[1 + \frac{S_1}{I_0} u + \frac{S_3}{I_0} \frac{I_0^3}{S_1^3} \left(\frac{u^3}{I_0^3/S_1^3} \right) + \frac{S_5}{I_0} \frac{I_0^5}{S_1^5} \left(\frac{u^5}{I_0^5/S_1^5} \right) \right]$$

или

$$y = 1 + x + a_3 x^3 + a_5 x^5,$$

где

$$y = \frac{i}{I_0}; \quad \frac{S_1}{I_0} u = x,$$

а

$$a_3 = S_3 \frac{I_0^2}{S_1^3}, \quad a_5 = S_5 \frac{I_0^4}{S_1^5} —$$

безразмерные коэффициенты.

В данном примере в качестве масштаба для тока выбрана величина I_0 , а для напряжения $U_0 = I_0/S_1$. Конечно, в качестве масштабов можно выбрать и другие величины; при этом следует исходить из приемлемости значений безразмерных коэффициентов.

При аппроксимации кусочно-линейной функцией может возникнуть задача: как следует выбрать отрезки прямых, чтобы ошибка аппроксимации не превосходила допустимой, а число отрезков было минимальным? Решение этой задачи по критерию равномерного приближения дано Ю. Л. Кетковым (Об оптимальных методах кусочно-линейной аппроксимации. Изд. вузов, «Радиотехника», 1966, № 6). В теории нелинейных цепей, как правило, нет необходимости прибегать к подобным методам, так как требования к точности аппроксимации относительно невысоко.

* * *

В настоящем разделе приведены задачи по определению коэффициентов аппроксимации (по конкретным расчетам и выводам общих выражений) на основе точечной аппроксимации (задачи 2.1—2.17), по приведению аппроксимирующих выражений к линейному виду (задачи 2.18—2.28), по составлению общих выражений при кусочно-линейной аппроксимации (задачи 2.29—2.35) и по аппроксимации производных заданной характеристики, а также характеристик по известным производным (задачи 2.35—2.42).

Задачи и упражнения

2.1. Характеристика электронного прибора изображена на рис. 2.3. Аппроксимировать эту характеристику полиномом второй степени в пределах от $u=0$ до $u=-16$ В, потребовав совпадения в точках $u_1=0$, $u_2=-8$ В и $u_3=-16$ В. Полученное выражение привести к безразмерному виду.

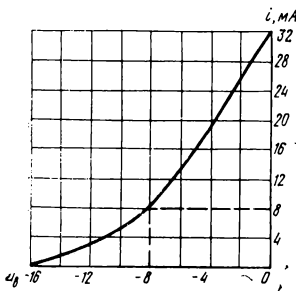


Рис. 2.3

2.2. Характеристику электронного прибора, изображенную на рис. 2.4, представить

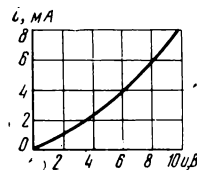


Рис. 2.4

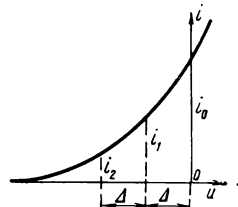


Рис. 2.5

полиномом второй степени, исходя из требования совпадения аппроксимирующей функции с аппроксимируемой в трех точках: 1) $u=0, i=0$; 2) $u=2 \text{ В}, i=1 \text{ мА}$; 3) $u=6 \text{ В}, i=4 \text{ мА}$. Полученное выражение представить в безразмерном виде.

2.3. Заданную в виде графика характеристику (рис. 2.5) аппроксимировать полиномом второго порядка вида $i=a_0+a_1u+a_2u^2$. Для расчета коэффициентов

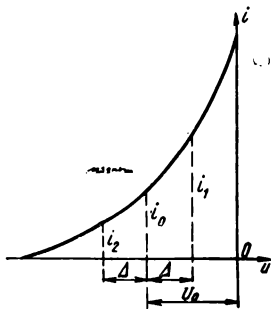


Рис. 2.6

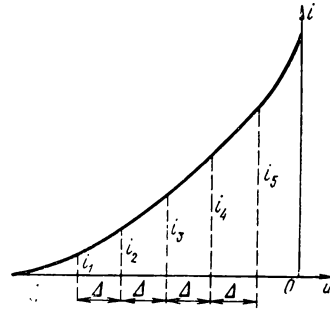


Рис. 2.7

a_0, a_1 и a_2 вывести общие формулы, считая, что значения токов i_0, i_1 и i_2 соответствуют равноотстоящим значениям аргумента.

2.4. Характеристику, изображенную на рис. 2.6, нужно аппроксимировать степенным полиномом второго порядка относительно рабочей точки U_0 : $i=a_0+a_1(u+U_0)+a_2(u+U_0)^2$.

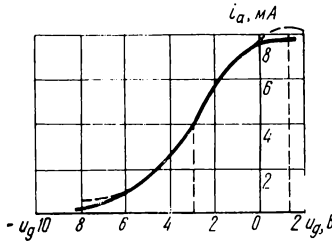


Рис. 2.8

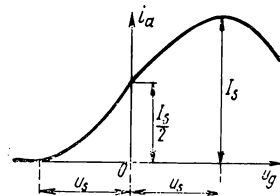


Рис. 2.9

Вывести общие формулы для расчета коэффициентов a_0, a_1 и a_2 , задаваясь равноотстоящими значениями аргумента.

2.5. Заданную в виде графика характеристику (рис. 2.7) аппроксимировать полиномом четвертой степени относительно рабочей точки $u=U_0$. Для расчета коэффициентов a_0, a_1, a_2, a_3 и a_4 вывести общие формулы, считая, что известные значения токов i_1, i_2, i_3, i_4 и i_5 соответствуют равноотстоящим значениям аргумента.

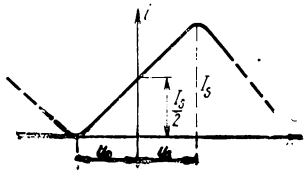


Рис. 2.10

2.6. Динамическая характеристика лампы 6Ж7 при $E_a=240 \text{ В}, E_0=135 \text{ В}$ и $R_a=30 \text{ кОм}$ представлена на рис. 2.8. Рабочая точка соответствует смещению $E_g=-2,9 \text{ В}$. Крутизна характеристики в рабочей точке $S_0=1,35 \text{ мА/В}$. В точке $u_g=-2,9 \text{ В}$ анодный ток $i_0=4,3 \text{ мА}$. В точке $u_g=1,35 \text{ В}$ прекращается рост анодного тока, т. е. $di_a/du_g=0$.

Аппроксимировать характеристику укороченным полиномом третьей степени $i_a = a_0 + a_1(u_g - E_g) + a_2(u_g - E_g)^2 + a_3(u_g - E_g)^3$, в котором начало координат перенесено в рабочую точку.

2.7. Характеристика лампы с вольфрамовым катодом имеет вид изображенной на рис. 2.9. Аппроксимировать эту характеристику укороченным полиномом третьей степени $i_a = a_0 + a_1 u_g + a_2 u_g^2 + a_3 u_g^3$, выразив коэффициенты аппроксимации только через два параметра: крутизну в рабочей точке $\left. \frac{di_a}{du_g} \right|_{u_g=0} = S_0$ и ток насыщения I_s .

Характеристику можно считать нечетной функцией относительно оси ординат.

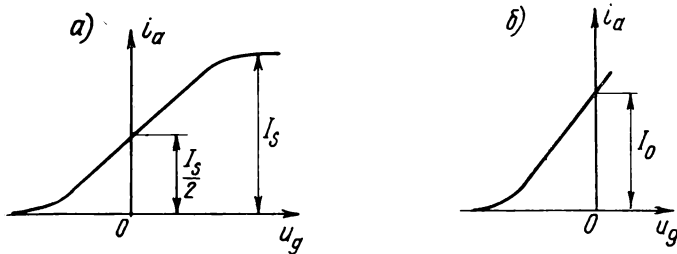


Рис. 2.11

2.8. Характеристику нелинейного элемента, изображенную на рис. 2.10, представить в виде синусоидальной функции $i = a + b \sin(qu + \varphi)$, действительной в пределах $-U_s \leq u \leq U_s$. Определить также коэффициенты аппроксимации a , b , q и φ , потребовав совпадения в точках $u = -U_s$ и $u = U_s$.

2.9. Характеристики анодного тока триода и пентода можно с удовлетворительной степенью точности аппроксимировать ф-лой Н. Н. Крылова: $i = A + B \operatorname{th} qu_g$. Найти значения коэффициентов A , B и q для случая симметричной характеристики и для случая, когда аппроксимируется только левая часть характеристик рис. 2.11.

В точке $u_g = 0$ крутизна характеристики равна S .

2.10. Определить в общем виде коэффициенты аппроксимации в выражении экспоненциального полинома второго порядка $i = A_1 e^{a_1 u} + A_2 e^{a_2 u}$ по условию совпадения функций в четырех равноотстоящих точках (рис. 2.12) и дать рецептуру расчета.

2.11. Аппроксимировать вольтамперную характеристику $i(u)$ выражением, состоящим из двух экспонент, $i = A_1 e^{a_1 u} + A_2 e^{a_2 u}$ по следующим точкам:

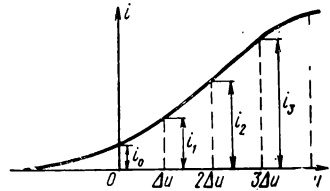


Рис. 2.12

$u, \text{ В}$	0	1	2	3
$i, \text{ мА}$	0,5	1	1,6	2,4

2.12. Аппроксимировать вольтамперную характеристику $i(u)$ выражением, состоящим из двух экспонент, $i = A_1 e^{a_1 u} + A_2 e^{a_2 u}$ по следующим точкам:

$u, \text{ В}$	0	0,5	1	1,5
$i, \text{ мА}$	0	0,24	0,23	0,17

2.13. Аппроксимировать вольтамперную характеристику $i(u)$ выражением, состоящим из двух экспонент, по следующим данным:

$u, \text{ В}$	0	-8	-16	-24
$i, \text{ мА}$	11,50	2,40	0,96	0,50

2.14. Характеристика резистора для случая, когда напряжение u является аргументом, определяется выражением $i = Bu^\beta$; для случая, когда в качестве аргумента выступает ток i , а в качестве функции — напряжение u , характеристика записывается в виде $u = Ai^\alpha$.

Составить формулы, выражающие связь между β и α , а также B и A , если характеристики отличаются только заменой мест переменных.

2.15. Найти коэффициенты аппроксимации α и β в выражении $i = \alpha u / (1 - e^{-\beta u})$, которое довольно хорошо передает вольтамперные характеристики многих электронных приборов. Коэффициенты α и β выразить через ток I_0 ($i = I_0$ при $u = 0$) и крутизну S ($di/du = S$ при $u = 0$).

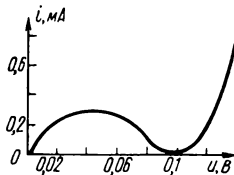


Рис. 2.13

Исследовать общее выражение при малых и больших (положительных и отрицательных) напряжениях и построить график характеристики.

2.16. На рис. 2.13 приведен упрощенный график характеристики туннельного диода. Аппроксимировать эту характеристику полиномом пятой степени, содержащим только нечетные члены; известно, что крутизна характеристики в начальной части равна 10 мА/В.

2.17. Характеристику туннельного диода, изображенную на рис. 2.14а, часто аппроксимируют суммой двух функций:

$$y = Ax e^{-\alpha x} + B(e^{\beta x} - 1) = y_T + y_D.$$

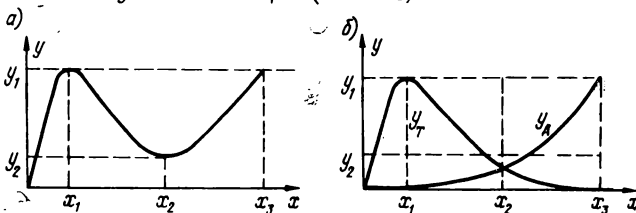


Рис. 2.14

Первая из них более или менее правильно передает туннельный ток y_T , а вторая — диффузионный y_D (рис. 2.14б).

Вывести приближенные формулы для определения коэффициентов A , B , α , β по характерным точкам характеристики рис. 2.14а.

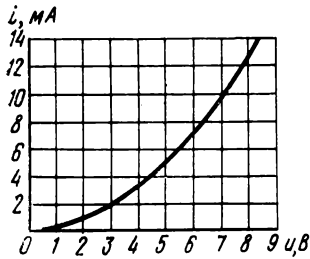


Рис. 2.15

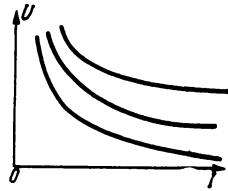


Рис. 2.16

2.18. Характеристику, изображенную на рис. 2.15, предполагается аппроксимировать выражением $i=au^2$. Проверить методом приведения к линейному виду, подходит ли данное выражение к заданной характеристике и в случае положительного ответа найти коэффициент a . Значения u и i , соответствующие графику рис. 2.15, приведены ниже:

$u, \text{В}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$i, \text{мА}$	0	0,2	0,8	1,8	3,2	5,0	7,2	9,8	12,8

2.19. При снятии характеристики были получены следующие данные:

$u, \text{В}$	0	0,3	0,4	0,6	0,8	0,9	1
$i, \text{мкА}$	0,1	1	5	30	130	300	700

Представить эту характеристику в виде экспоненциальной функции $i=I_0 e^{a u}$. Рекомендуется воспользоваться методом приведения ее к линейному виду.

2.20. При снятии характеристики были получены данные, приведенные в задаче 2.19, кроме значения тока при напряжении $u_0=0$, которое ввиду его малости по имеющемуся прибору нельзя было определить. Характеристику предполагается аппроксимировать функцией: $i=I_0 e^{a u}$. Определить коэффициенты I_0 и a .

2.21. При снятии статической характеристики диода были получены следующие значения:

$u, \text{В}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$i, \text{мА}$	1,1	2,45	5,5	12,3	27,3	61	135

Характеристику предполагается аппроксимировать экспоненциальной функцией $i=I_0 e^{a u}$. Определить, подходит ли в данном случае экспоненциальная функция и при положительном результате найти коэффициенты I_0 и a .

2.22. Характеристику дугового разряда $U(I)$ (рис. 2.16) принято аппроксимировать выражением вида $U=a+b/I$; найти простую методику для определения коэффициентов a, b по экспериментальным точкам U, I .

Дать, далее, общую методику определения коэффициентов выражения $y=x/(a+bx)$ по экспериментальным точкам x, y .

2.23. Характеристика катодного тока триода в некоторой части удовлетворительно передается функцией вида $i_k=A(u_g+U_0)^{3/2}$, где $U_0=Du_a$ и считается известным. Найти удобную методику расчета коэффициента A по известным значениям u_g и i_k , а также показать, каким образом легко удостовериться в том, что данная функция соответствует аппроксимируемой характеристике.

2.24. При снятии характеристики триода были получены следующие значения:

$u_g, \text{ В}$	-14	-10	-6	-2	+2	+6
$i_a, \text{ мА}$	1	4,5	10	16	24	30

Проверить, можно ли в указанном диапазоне пользоваться для аппроксимации формулой $i_a=A(u_g+Du_a)^{3/2}$, и в случае положительного результата считать коэффициент A . Известно, что $u_a=320 \text{ В}$, а $D=0,05$.

2.25. Привести к линейному виду формулу Н. Н. Крылова $i=I_0(1+\text{th } qu)$ и соответствующую характеристику изобразить в виде графика.

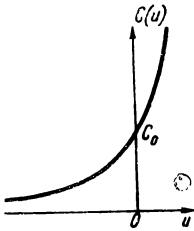


Рис. 2.17

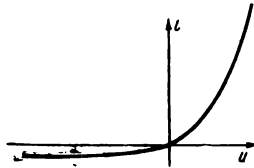


Рис. 2.18

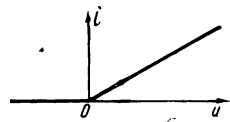


Рис. 2.19

2.26. Типовая характеристика $C(u)$ барьерной емкости p - n -перехода полупроводникового диода изображена на рис. 2.17. Для аппроксимации этой характеристики пользуются формулой

$$C(u) = C_0 \left(\frac{\varphi_k}{\varphi_k + u} \right)^{\frac{1}{h}},$$

где u — напряжение, приложенное к p - n -переходу; φ_k — «высота» потенциального барьера в вольтах; C_0 — емкость p - n -перехода при отсутствии приложенного напряжения; h — постоянная, зависящая от распределения примесей.

Привести уравнение к линейному виду с тем, чтобы по экспериментальным данным легко было определять коэффициент h .

2.27. Характеристика выпрямительного элемента представлена на рис. 2.18. Вывести простые формулы для определения коэффициентов аппроксимации, считая, что характеристика передается выражением: $i=I_0(e^{\beta u}-1)$.

2.28. Для оценки нелинейных искажений в усилителях иногда применяют коэффициент α , представляющий собой степень амплитуды входного напряжения в выражении амплитудной характеристики вида $U_{\text{вых}} = KU_{\text{вх}}^\alpha$.

Коэффициент α определяется по экспериментальным данным; найти удобную формулу для его определения, а также графически проиллюстрировать вид нелинейности и прием определения α .

2.29. Записать аппроксимирующую характеристику (рис. 2.19) в виде ломаной двумя способами: 1) по участкам, 2) в неограниченной области.

2.30. Записать представленную на рис. 2.20 характеристику в виде функции, действительной в неограниченной области изменения аргумента.

2.31. Записать изображенные на рис. 2.21 характеристики в виде функций, действительных в неограниченной области изменения аргумента.

2.32. Записать характеристику $i(u)$, изображенную на рис. 2.22, в виде функции, действительной в неограниченной области изменения аргумента.

2.23. Записать характеристику $i(u)$, изображенную на рис. 2.23, в виде функции, действительной в неограниченной области изменения аргумента.

2.34. Функция, изображенная на рис. 2.24, в первом квадранте соответствует формуле $i=au^2$; дать аналитическое выражение всей функции, считая ее нечетной.

2.35. Функция, изображенная на рис. 2.25, в первом квадранте соответствует формуле $i=au^3$; дать аналитическое выражение всей функции, считая ее четной.

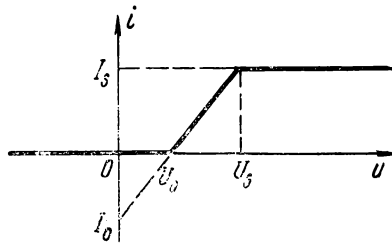


Рис. 2.20

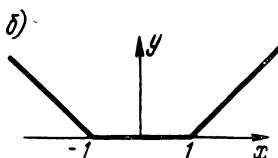
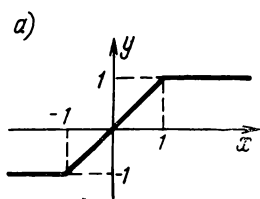


Рис. 2.21

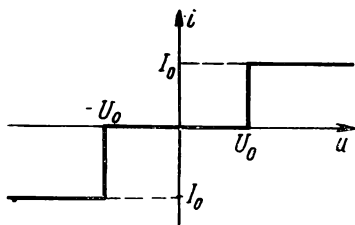


Рис. 2.22

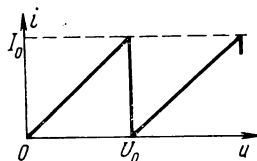


Рис. 2.23

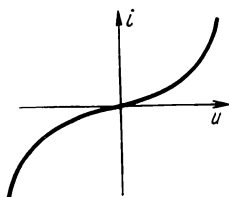


Рис. 2.24

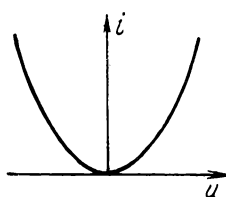


Рис. 2.25

2.36. На рис. 2.26а представлена вольтамперная характеристика нелинейного элемента $i(u)$, а на рис. 2.26б — ее аппроксимация в виде ломаной линии. Построить график первой производной (крутизны) и второй производной (кривизны) обеих характеристик; первую характеристику можно аппроксимировать формулой Н. Н. Крылова $i = I_s(1 + \text{th } qu)/2$, где $q = 2S_0/I_s$.

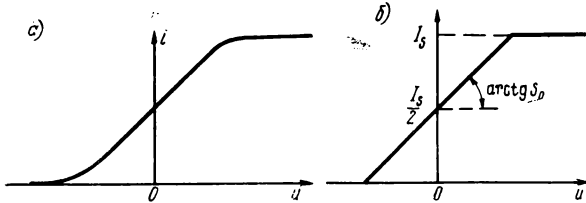


Рис. 2.26

На основе полученных результатов сделать вывод относительно ограничений, накладываемых на аппроксимацию ломаной прямой.

2.37. В задаче 2.7 получено выражение

$$i_a = \frac{I_s}{2} \left[1 + \frac{S_0}{I_s/2} u_g - \frac{4}{2r} \frac{S_0^3}{(I_s/2)^3} u_g^3 \right],$$

которое в диапазоне изменения напряжения от U_a до $+2U_a$ более или менее правильно передает характеристику лампы с вольфрамовым катодом. Привести это выражение к безразмерному виду и затем найти и построить характеристики крутизны и кривизны.

Аппроксимировать, кроме того, эту характеристику ломаной прямой и для нее построить те же графики крутизны и кривизны.

2.38. В задаче 2.15 исследовалась вольтамперная характеристика вида $i = au/(1 - e^{-\beta u})$ или $i = 2Su/(1 - e^{-2uS/I_0})$, где I_0 и S — значения тока и крутизны при $u = 0$.

Найти закон изменения крутизны di/du и построить график.

2.39. Известно, что крутизна характеристики нелинейного элемента приближенно передается выражением $s = S_0/\text{ch}^2 qu$. Найти выражение характеристики $i(u)$, считая, что при $u = 0$ $i = I_s/2$.

2.40. Известно, что крутизна характеристики нелинейного элемента приближенно передается функцией $s = S_0/(1 + q^2 u^2)$. Найти выражение характеристики, если известно, что при $u = 0$ $i = I_s/2$, а при $u \rightarrow \infty$ $i = I_s$.

2.41. Нелинейные эффекты при искажениях определенного вида («перекрестная модуляция») оценивают коэффициентом k , представляющим собой отношение: $k = s''/s$. Очевидно, коэффициент k является функцией напряжения (как и крутизна характеристики).

Найти выражение коэффициента k для аппроксимирующей функции вида $i = I_0(1 + \text{th } qu)$, $q = S_0/I_0$ и затем записать эти выражения для характеристик трех ламп, данные по которым приведены в следующей таблице:

Параметры	Значения параметров для ламп типов		
	2Ж27Л	12Ж1Л	6К3
I_0 , мА	1,84	7,2	16
S_0 , мА/В	1,28	2,4	2
q , 1/В	0,695	0,333	0,125

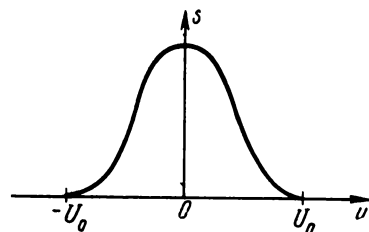


Рис. 2.27

Функцию $k=s''/s$ изобразить в виде графика в безразмерных координатах.

2.42. Характеристика крутизны $s(u)$ некоторого усилительного прибора имеет вид, соответствующий рис. 2.27. Аппроксимировать эту характеристику $s(u)$ двумя функциями, стыкующимися в точке $u=U_0$, по условиям равенства значений функций в точках $u=0$, $u=U_0$, а также равенства нулю значений всех производных $d^n s/ds^n$ ($n=1, 2, 3...$) в точке $u=U_0$.

РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ

2.1. Воспользуемся методом выбранных точек. Сформулируем по отношению к исходному выражению

$$i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2$$

три условия:

$$1) u=0; i=32 \text{ мА}; 2) u=-8 \text{ В}, i=8 \text{ мА}; 3) u=-16 \text{ В}, i=0.$$

В результате получим систему уравнений:

$$32 = a_0, \quad 8 = a_0 - a_1 \cdot 8 + a_2 \cdot 64, \quad 0 = a_0 - a_1 \cdot 16 + a_2 \cdot 256.$$

Решение этой системы дает

$$a_0 = 32 \text{ мА}, \quad a_1 = 4 \text{ мА/В}, \quad a_2 = 0,125 \text{ мА/В}^2.$$

Общее уравнение, следовательно, будет иметь вид

$$i = 32 + 4u + \frac{1}{8} u^2.$$

Для приведения этого уравнения к безразмерному виду перепишем его следующим образом:

$$i = 32 \left(1 + \frac{4}{32} u + \frac{1}{8 \cdot 32} u^2 \right).$$

Положим: $i/I_0 = i/32 = y$, $u/U_0 = u/8 = x$; тогда $y = 1 + x + \frac{1}{4} x^2$.

Конечно, в качестве масштабов, т. е. I_0 и U_0 , можно было выбрать и другие величины. Например, при $U_0 = 6 \text{ В}$, $I_0 = 32 \text{ мА}$ будем иметь

$$y_1 = 1 + \frac{3}{4} x_1 + \frac{9}{64} x_1^2.$$

$$2.2. \quad i = \frac{5}{12} u + \frac{1}{24} u^2, \quad y = x + \frac{1}{10} x^2, \quad y = \frac{i}{I_0} = \frac{i}{5/12}; \quad x = \frac{u}{U_0} = \frac{u}{1}.$$

2.3. Составляем систему уравнений:

$$i_0 = a_0, \quad i_1 = a_0 - a_1 \Delta + a_2 \Delta^2, \quad i_2 = a_0 - 2a_1 \Delta + 4a_2 \Delta^2.$$

Решая эту систему, получаем:

$$a_0 = i_0, \quad a_1 = \frac{3i_0 - 4i_1 + i_2}{2\Delta}, \quad a_2 = \frac{i_0 - 2i_1 + i_2}{2\Delta^2}.$$

2.4. Составляя и решая систему уравнений:

$$i_0 = a_0, \quad i_1 = a_0 + a_1 \Delta + a_2 \Delta^2, \quad i_2 = a_0 - a_1 \Delta + a_2 \Delta^2,$$

получаем:

$$a_0 = i_0, \quad a_1 = \frac{i_1 - i_2}{2\Delta}, \quad a_2 = \frac{i_1 - i_2 - 2i_0}{2\Delta^2}.$$

2.5.

$$a_0 = i_5,$$

$$a_1 = \frac{8(i_4 - i_2) - (i_5 - i_1)}{12\Delta},$$

$$a_2 = \frac{16(i_4 + i_2) - (i_5 + i_1) - 30i_3}{24\Delta^2},$$

$$a_3 = \frac{(i_5 - i_1) - 2(i_4 - i_2)}{12\Delta^3},$$

$$a_4 = \frac{(i_5 + i_1) - 4(i_4 + i_2) + 6i_3}{24\Delta^4}.$$

2.6. Перенесем начало координат в рабочую точку. Тогда общее уравнение запишется в виде

$$i_a = a_0 + a_1(u_g + |E_g|) + a_3(u_g + |E_g|)^3,$$

причем по условию $|E_g| = 2,9$ В.

Коэффициент $a_0 = i_0$; коэффициент $a_1 = S_0$, следовательно:

$$i_a = 4,3 + 1,35(u_g + 2,9) + a_3(u_g + 2,9)^3.$$

Коэффициент a_3 определяем из условия: при $u_g = 1,35$ В $di_a/du_g = 0$, $0 = 1,35 + 3a_3(1,35 + 2,9)^2$, откуда

$$a_3 = -\frac{1,35}{3(1,35 + 2,9)^2} = -\frac{1,35}{54} \text{ мА/В}^3.$$

Общее выражение характеристики лампы запишется в виде

$$i_a = 4,3 + 1,35 \left[(u_g + 2,9) - \frac{1}{54} (u_g + 2,9)^3 \right].$$

Построенная по последнему выражению характеристика изображена на рис. 2.8 пунктирной линией.

2.7. Вводя временно напряжение u_s , при котором $di_a/du_g = 0$ и $i_a = I_s$ после несложных преобразований и исключения u_s получаем

$$i_a = \frac{I_s}{2} \left[1 + \frac{S_0}{I_s} u_g - \frac{4}{27} \frac{S_0^3}{\left(\frac{I_s}{2}\right)^2} u_g^3 \right].$$

2.8.

$$i = \frac{I_s}{2} \left[1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{u}{u_s}\right) \right].$$

2.9.

$$1) A = B = \frac{I_s}{2}, \quad q = \frac{2S}{I_s}.$$

$$2) A = B = I_0, \quad q = \frac{S}{I_0}.$$

2.10. Подставляя в аппроксимирующее выражение значения токов и напряжений в выбранных точках, получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} i_0 &= A_1 + A_2, & i_2 &= A_1 e^{a_1 2\Delta u} + A_2 e^{a_2 2\Delta u} \\ i_1 &= A_1 e^{a_1 \Delta u} + A_2 e^{a_2 \Delta u}, & i_3 &= A_1 e^{a_1 3\Delta u} + A_2 e^{a_2 3\Delta u}. \end{aligned}$$

Введем временно обозначения $e^{a_1 \Delta u} = m_1$, $e^{a_2 \Delta u} = m_2$ ($m_1, m_2 \geq 0$) и перепишем систему в виде:

$$i_0 = A_1 + A_2, \quad (1) \quad i_2 = A_1 m_1^2 + A_2 m_2^2, \quad (3)$$

$$i_1 = A_1 m_1 + A_2 m_2, \quad (2) \quad i_3 = A_1 m_1^3 + A_2 m_2^3. \quad (4)$$

Для решения этой системы привлечем вспомогательные величины b_1 и b_2 , выбранные так, чтобы m_1 и m_2 являлись корнями квадратного уравнения

$$m^2 + mb_1 + b_2 = 0. \quad (5)$$

Умножим все члены ур-ния (1) на b_2 , а ур-ния (2) — на b_1 и сложим эти уравнения с ур-нием (3):

$$\begin{aligned} & b_2 i_0 = b_2 A_1 + b_2 A_2, \\ & + b_1 i_1 = b_1 A_1 m_1 + b_1 A_2 m_2, \\ & + i_2 = A_1 m_1^2 + A_2 m_2^2 \end{aligned}$$

$$b_2 i_0 + b_1 i_1 + i_2 = A_1 (m_1^2 + b_1 m_1 + b_2) + A_2 (m_2^2 + b_1 m_2 + b_2)$$

Так как m_1 и m_2 удовлетворяют условию (5), получаем

$$b_2 i_0 + b_1 i_1 + i_2 = 0. \quad (6)$$

Аналогично, умножая все члены ур-ния (2) на b_2 , а ур-ния (3) — на b_1 и складывая их с (4), находим:

$$\begin{aligned} & b_2 i_1 = b_2 A_1 m_1 + b_2 A_2 m_2, \\ & + b_1 i_2 = b_1 A_1 m_1^2 + b_1 A_2 m_2^2, \\ & + i_3 = A_1 m_1^3 + A_2 m_2^3 \end{aligned}$$

$$b_2 i_1 + b_1 i_2 + i_3 = m_1 A_1 (m_1^2 + b_1 m_1 + b_2) + m_2 A_2 (m_2^2 + b_1 m_2 + b_2)$$

Отсюда следует, что

$$b_2 i_1 + b_1 i_2 + i_3 = 0. \quad (7)$$

Уравнения (6) и (7) объединим в систему, решение которой дает значения вспомогательных величин:

$$b_1 = \frac{i_0 i_3 - i_1 i_2}{i_1^2 - i_0 i_2}, \quad b_2 = \frac{i_2^2 - i_1 i_3}{i_1^2 - i_0 i_2}, \quad (8)$$

если

$$i_1^2 - i_0 i_2 \neq 0. \quad (9)$$

Располагая значениями b_1 и b_2 из ур-ния (5), находим m_1 и m_2 :

$$m_{1,2} = -\frac{b_1}{2} \pm \sqrt{\frac{b_1^2}{4} - b_2}. \quad (10)$$

В свою очередь, по известным $m_{1,2}$ определяем коэффициенты a_1 и a_2 :

$$a_1 = \frac{1}{\Delta u} \ln m_1, \quad a_2 = \frac{1}{\Delta u} \ln m_2, \quad (11)$$

а затем A_1 и A_2 , подставляя m_1 и m_2 в уравнения (1) и (2):

$$A_1 = \frac{m_2 i_0 - i_1}{m_2 - m_1}, \quad A_2 = \frac{i_1 - m_1 i_0}{m_2 - m_1}, \quad (12)$$

если $m_2 \neq m_1$ или, что то же самое,

$$b_1^2 \neq 4b_2 \quad (13)$$

Таким образом, аппроксимация экспоненциальными функциями всегда возможна, если выполняются условия (9) и (13).

Отметим, что в тех случаях, когда в процессе промежуточных вычислений величины m_1 и m_2 оказываются комплексными, окончательные значения тока i являются вещественными.

Порядок расчета.

1. По графику характеристики нужно выбрать Δu и установить значения i_0, i_1, i_2, i_3 ;
2. Проверить п. 1 по условию $i_1^2 - i_0 i_2 \neq 0$. В случае невыполнения этого условия нужно изменить Δu или «сместить» значения i_0, i_1, i_2, i_3 .
3. Найти значения b_1 и b_2 по ф-лам (8).
4. Убедиться в справедливости неравенства (13).
5. Найти m_1 и m_2 по ф-ле (10).
6. Определить коэффициенты a_1 и a_2 по ф-лам (11).
7. Определить A_1 и A_2 по ф-лам (12).

2.11. Расчет проведем в порядке, установленном в задаче 2.10.

1. Выберем $\Delta u = 1$ В; $i_0 = 0,5$ мА; $i_1 = 1$ мА; $i_2 = 1,6$ мА; $i_3 = 2,4$ мА.

2. Выполним проверку: $i_1^2 - i_0 i_2 = 1 - 0,8 = 0,2 \neq 0$.

3. Найдем коэффициенты b_1, b_2 :

$$b_1 = \frac{i_0 i_3 - i_1 i_2}{i_1^2 - i_0 i_2} = \frac{0,5 \cdot 2,4 - 1 \cdot 1,6}{0,2} = -2,$$

$$b_2 = \frac{i_2^2 - i_1 i_3}{0,2} = \frac{1,6^2 - 1 \cdot 2,4}{0,2} = 0,8.$$

4. Убедимся в том, что $b_1^2 = 4 \neq 4b_2 = 3,2$.

5. Найдем значения $m_{1,2}$:

$$m_{1,2} = -\frac{b_1}{2} \pm \sqrt{\frac{b_1^2}{4} - b_2} = 1 \pm \sqrt{1 - 0,8} = 1 \pm 0,41.$$

$$m_1 = 1,41; \quad m_2 = 0,59 \quad m_{1,2} > 0.$$

6. Определим коэффициенты a_1 и a_2 :

$$a_1 = \frac{1}{\Delta u} \ln m_1 = \frac{1}{1} \ln 1,41 = 0,34 \text{ 1/В},$$

$$a_2 = \frac{1}{\Delta u} \ln m_2 = \frac{1}{1} \ln 0,59 = -0,53 \text{ 1/В}.$$

7. Рассчитаем A_1 и A_2 :

$$A_1 = \frac{m_2 i_0 - i_1}{m_2 - m_1} = \frac{0,59 \cdot 0,5 - 1}{0,59 - 1,41} = 0,86,$$

$$A_2 = \frac{i_1 - m_1 i_0}{m_2 - m_1} = \frac{1 - 1,41 \cdot 0,5}{0,59 - 1,41} = -0,36.$$

Таким образом, выражение вольтамперной характеристики имеет вид: $i = 0,86 e^{0,34u} - 0,36 e^{-0,53u}$. Легко проверить, что кривая $i(u)$ проходит через заданные точки.

2.12. $i = 0,856(e^{-0,96u} - e^{-2,2u})$.

2.13. $i = 8,72 e^{0,295u} + 2,83 e^{0,073u}$.

2.14. Из выражения $u = Ai^\alpha$ найдем ток $i: i = (u/A)^{1/\alpha}$ и подставим его в выражение $i(u): (u/A)^{1/\alpha} = Bu^\beta$.

Отсюда следует, что $1/\alpha = \beta, A^{-1/\alpha} = A^{-\beta} = B$.

2.15. Приведем выражение характеристики к безразмерному виду:

$$i = \frac{\alpha}{\beta} \frac{\beta u}{1 - e^{-\beta u}}, \quad y = \frac{x}{1 - e^{-x}}, \quad y = \frac{i}{\alpha/\beta}, \quad x = \beta u.$$

При $x \ll 1$ имеем

$$y \approx \frac{x}{1 - \left(1 - x + \frac{1}{2} x^2\right)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} x} \approx 1 + \frac{1}{2} x.$$

При $x \gg 1: y \approx x$.

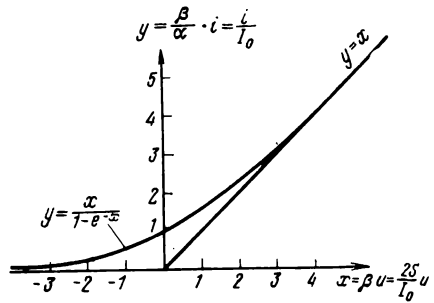


Рис. P 2.1

При $x < 0$ и $|x| \gg 1: y = \frac{x}{e^x}; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$.

График, построенный по выражению $y = x/(1 - e^{-x})$, представлен на рис. P2.1. Найдем теперь коэффициенты аппроксимации.

При $x = 0$ 1) $y = \frac{I_0}{\alpha/\beta} = 1$, откуда $\frac{\alpha}{\beta} = I_0$;

2) $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{d\left(\frac{i}{\alpha/\beta}\right)}{d(\beta u)} \Big|_{u=0} = \frac{1}{2}$,

т. е. $\frac{1}{\alpha} \frac{di}{du} \Big|_{u=0} = \frac{1}{2}$.

По условию $\frac{di}{du} \Big|_{u=0} = S$; следовательно, $\alpha = 2S, \beta = \alpha/I_0 = 2S/I_0$.

Теперь выражение характеристики можно записать в виде

$$i = \frac{2Su}{1 - e^{-\frac{2S}{I_0} u}}$$

2.16. Будем нормировать ток i к току $I_0=1$ мА, а напряжение u к $U_0=0,1$ В. По условию задачи характеристика должна быть представлена полиномом вида

$$\frac{i}{I_0} = \frac{u}{U_0} + a \left(\frac{u}{U_0} \right)^3 + b \left(\frac{u}{U_0} \right)^5.$$

Введя обозначения $i/I_0=y$, $u/U_0=x$, запишем (рис. P.2.2) $y=x+ax^3+bx^5$.

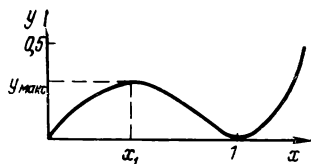


Рис. P.2.2

Требуется определить два коэффициента a , b и для этого нужно составить два уравнения. В точке $x=1$ $y=0$ и $dy/dx=0$; соответствующие уравнения имеют вид:

$$0=1+a+b; \quad 0=1+3a+5b.$$

Решая систему, находим: $a=-2$, $b=1$. Таким образом, искомое выражение:

$$y=x-2x^3+x^5.$$

Легко найти, что максимальное значение $y_{\max} \approx 0,29$ при $x_1 \approx 0,45$.

2.17. При малых x можно считать, что $y \approx Ax e^{-\alpha x}$. Составим два уравнения

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_1} = A e^{-\alpha x_1} (1 - \alpha x_1) = 0, \quad y_1 = A x_1 e^{-\alpha x_1}.$$

Из первого уравнения имеем

$$\alpha = \frac{1}{x_1}; \quad (1)$$

подставляя это значение во второе уравнение, получаем

$$A = e \cdot \frac{y_1}{x_1}. \quad (2)$$

При $x \approx x_3$ можно считать, что $y=y_d$, т. е. $y=B(e^{\beta x} - 1)$.

Обозначим производную y' в точке $x=x_3$ через S ; тогда $y'|_{x=x_3} = B\beta e^{\beta x_3} = S$.
В точке $x=x_2$ $y'|_{x=x_2} = 0$, т. е.

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_2} = A e^{-\alpha x_2} (1 - \alpha x_2) + B \beta e^{\beta x_2} = 0,$$

откуда $B\beta e^{\beta x_2} = Q$, где

$$Q = A\alpha x_2 - A e^{-\alpha x_2} \quad (3)$$

содержит все уже известные величины.

Разделив друг на друга два последние уравнения, получим $e^{\beta(x_3-x_2)} = S/Q$, откуда

$$\beta = \frac{1}{x_3 - x_2} \ln \frac{S}{Q}. \quad (4)$$

Теперь B можно определить по любой из двух формул:

$$B = \frac{S}{\beta} e^{-\beta x_3}, \quad B = \frac{Q}{\beta} e^{-\beta x_2}. \quad (5)$$

Таким образом, все коэффициенты можно определить по известным значениям абсцисс x_1 , x_2 , x_3 , значению ординаты y_1 и значению производной в точке x_3 .

2.18. Введем временно обозначение $u^2=x$, тогда $i=ax$.

Составим таблицу значений x и i :

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$u^2=x$	0	1	4	9	16	25	36	49	64
i	0	0,2	0,8	1,8	3,2	5,0	7,2	9,8	12,8

Строим график $i=f(x)$ (рис. P2.3) и убеждаемся в том, что все точки лежат на одной прямой с угловым коэффициентом $a=0,2$ мА/В².

2.19. Величина I_0 находится из условия: при $u=0$ $i=0,1$ мкА. Следовательно, $i=0,1 e^{au}$. Переписав это выражение в виде $\ln(i/0,1)=au$, можно проверить, будет ли оно соответствовать прямой линии в координатах $\ln(i/0,1)$, u и в случае положительного результата по данной прямой найти коэффициент a .

Составим таблицу данных для построения графика:

u	0	0,3	0,4	0,6	0,8	0,9	1
$\frac{i}{0,1}$	1	10	50	300	1300	3000	7000
$\ln \frac{i}{0,1}$	0	2,3	3,91	5,7	7,16	8,0	8,85

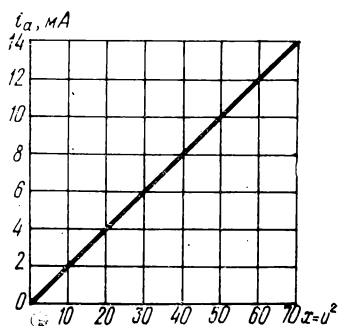


Рис. P 2.3

Построенный по этим данным график изображен на рис. P2.4. Легко видеть, что он мало отличается от прямой. По графику находим $a \approx 9$ 1/В. Следовательно, $i=0,1 e^{9u}$.

Соответствие рассчитанной характеристики опытным данным предоставляем проверить читателю.

2.20. Перепишем исходное выражение в виде $\ln i = \ln I_0 + au$ и нанесем в координатах u , $\ln i$ точки в соответствии с условиями (рис. P2.5). Данные для построения графика сведены в следующую таблицу:

$u, В$	0,3	0,4	0,6	0,8	0,9	1
$i, мА$	1	5	30	130	300	700
$\ln i$	0	1,61	3,4	4,86	5,7	6,54

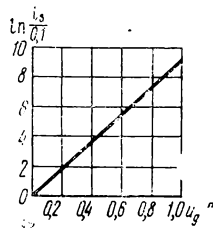


Рис. P 2.4

Усредняя нанесенные точки, получаем приближенно:

$$\ln I_0 = -2,3, \quad I_0 = e^{-2,3} = 0,1 \text{ мкА}, \quad a \approx 9 \text{ 1/В.}$$

2.21. $i=0,5 e^{8u}$.

2.22. Вводя обозначение $\frac{1}{I} = V$, получаем выражение $U = a + bV$, которое в координатах U, V представляет собой прямую. Нанося точки U, V , непосредственно по графику определяем значения a и b .

Для определения коэффициентов a и b из выражения $y = x/(a+bx)$ перепишем его в виде $z = x/y = a + bx$; в координатах z, x функция соответствует прямой и коэффициенты a, b легко определяются.

2.23. Вводя обозначение $u_g + U_0 = u$, перепишем исходное выражение в виде

$$\ln i_k = \ln A + \frac{3}{2} \ln u.$$

Откладывая на графике с координатами $\ln u$ и $\ln i_k$ соответствующие точки, легко установить насколько хорошо они соответствуют прямой с угловым коэффициентом $3/2$; по этому графику непосредственно определяется $\ln A$ (рис. P2.6).

2.24. Перепишем исходное выражение в виде

$$\ln i_a = \ln A + \frac{3}{2} \ln u,$$

где $u = u_g + Du_a = u_g + 16$; рассчитываем значения $\ln i_a$ и $\ln u$, результаты расчета сведены в следующую таблицу:

u_g	-14	-10	-6	-2	+2	+6
u	2	6	10	14	18	22
$\ln u$	0,69	1,79	2,3	2,64	2,89	3,09
i_a	1	4,5	10	16	24	30
$\ln i_a$	0	1,5	2,3	2,77	3,17	3,4

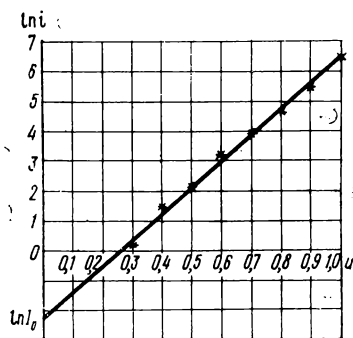


Рис. P 2.5

Нанеся табличные точки на график (рис. P2.7), видим, что они мало отклоняются от прямой.

Угловой коэффициент проверяем при $\ln u = 3,02$ (пунктирная линия на рис. P2.7): $3,4 / (3,02 - 0,69) = 3,4 / 2,33 = 1,46 \approx 1,5$. Можно считать данную аппроксима-

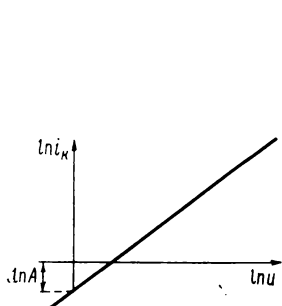


Рис. P 2.6

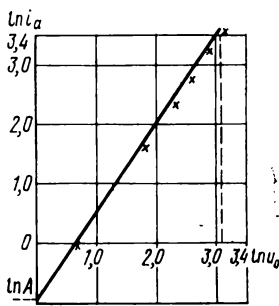


Рис. P 2.7

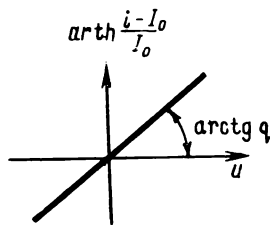


Рис. P 2.8

цию приемлемой. Из рис. P2.7 находим $\ln A = -0,98$; $A = e^{-0,98} \approx 0,38$. Итак, окончательно

$$i_a = 0,38(u_a + 16)^{3/2}.$$

$$2.25. \operatorname{ar th} \frac{i - I_0}{I_0} = qu.$$

График этой функции представляет собой прямую в координатах $(\operatorname{ar th} \frac{i - I_0}{I_0}, u)$ и изображен на рис. P2.8.

2.26. Преобразуем исходную формулу:

$$\ln \frac{C}{C_0} = \frac{1}{h} \ln \frac{\Phi_k}{\Phi_k + u}.$$

Откладывая по осям координат известные из эксперимента значения: $\ln(C/C_0)$, $\ln[\Phi_k/(\Phi_k + u)]$, легко проверить, удовлетворяет ли условиям аппроксимации данная функция и при положительном ответе по угловому коэффициенту определить $1/h$. Для реальных характеристик $h=2 \div 3$.

2.27. По виду характеристики устанавливаем, что при больших отрицательных напряжениях ток i неизменен; подставляя в исходную формулу $u \rightarrow -\infty$, получаем, что $i|_{u \rightarrow -\infty} = -I_0$. Таким образом, I_0 определяется по графику в левой полуплоскости.

Для определения β перепишем аппроксимирующее выражение в виде

$$\ln \frac{i + I_0}{I_0} = \beta u$$

и по графику в координатах $\ln[(i + I_0)/I_0]$, u , в которых экспериментальная кривая должна мало отличаться от прямой, определяем по угловому коэффициенту β .

$$2.28. \ln \frac{U_{\text{вых}}}{K} = \alpha \ln U_{\text{вх}}.$$

Соответствующие графики изображены на рис. P2.9.

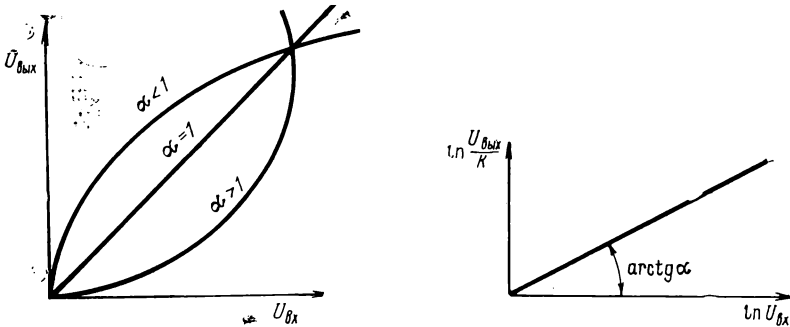


Рис. P 2.9

$$2.29. 1) i=0 \text{ при } u \leq 0, i=Su \text{ при } u > 0; 2) i = \frac{1}{2} S(u + |u|).$$

2.30. Обозначим $I_s/(U_s - U_0) = S$, тогда (рис. P2.10) уравнение прямой (а) выразится как $i = S(u - U_0)$, а уравнение ломаной, совпадающей с прямой при $u > u_0$ и тождественно равной нулю при $u < u_0$, — как $i = |1(u - U_0)S(u - U_0)|$.

Для получения выражения характеристики нужно вычесть ломаную (б); в результате получим

$$i = 1(u - U_0)S(u - U_0) - 1(u - U_s)S(u - U_0)$$

или

$$i = S[(u - U_0) \cdot 1(u - U_0) - (u - U_s) \cdot 1(u - U_s)].$$

$$2.31. y = \frac{1}{2} (|x + 1| - |x - 1|), y = \frac{1}{2} (|x + 1| + |x - 1| - 2).$$

$$2.32. i = I_0 [\text{sign } u + 1(u + U_0) - 2 \cdot 1(u) + 1(u - U_0)].$$

2.33. Возможны две записи:

$$1) i = I_0 \cdot 1(u) \cdot e \left\{ \frac{u}{U_0} \right\}; 2) i = \frac{I_0}{U_0} [1(u) \cdot u - 1(u - U_0) - 1(u - 2U_0) - \dots].$$

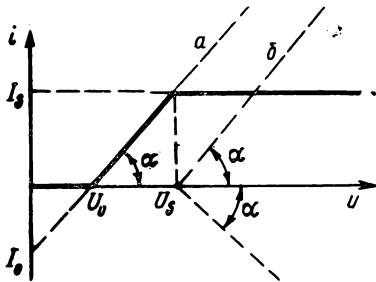


Рис. Р 2.10

$$2.34. i = au|u|.$$

$$2.35. i = a|u|u^2 = a|u|^3.$$

2.36. Для первой характеристики можно найти аналитические выражения крутизны и кривизны:

$$s = \frac{di}{du} = \frac{I_s}{2} q \frac{1}{\text{ch}^2 qu} = \frac{I_s}{2} \frac{2S_0}{I_s} \frac{1}{\text{ch}^2 qu} = \frac{S_0}{\text{ch}^2 qu},$$

$$s' = \frac{d^2i}{du^2} = -\frac{4S_0^2}{I_s} \frac{\text{th } qu}{\text{ch}^2 qu} = -q^2 I_s \frac{\text{th } qu}{\text{ch}^2 qu} = -S_0' \frac{\text{th } qu}{\text{ch}^2 qu}.$$

Исследуя на экстремальные значения функцию $y = \text{th } x / \text{ch}^2 x$, находим, что экстремумы соответствуют точкам $x_0 = \pm 0,66$; $y_0 = \pm 0,385$.

Графики s и s' для обеих характеристик изображены на рис. Р2.11. Рассматривая эти графики, легко прийти к выводу, что при аппроксимации ломаной можно относительно правильно передать только саму характеристику, но не ее производные; таким образом, при изучении процессов, в которых решающую роль играет скорость изменения, например, тока в зависимости от напряжения, аппроксимация ломаной пользы не приносит, так как в самом выборе такой аппроксимации уже заложено решение задачи.

$$2.37. \text{Вводя обозначения } \frac{i_a}{I_s/2} = y, \frac{u_s}{U_0} = \frac{u_s}{I_s/2S_0} = x, \text{ получаем}$$

$$y = 1 + x - \frac{4}{27} x^3.$$

Легко установить, что экстремумы соответствуют абсциссам $x = \pm 1,5$, а нули — абсциссам 1,5 и 3,0.

Выражения крутизны и кривизны имеют вид:

$$y' = 1 - \frac{12}{27} x^2; y'' = -\frac{24}{27} x.$$

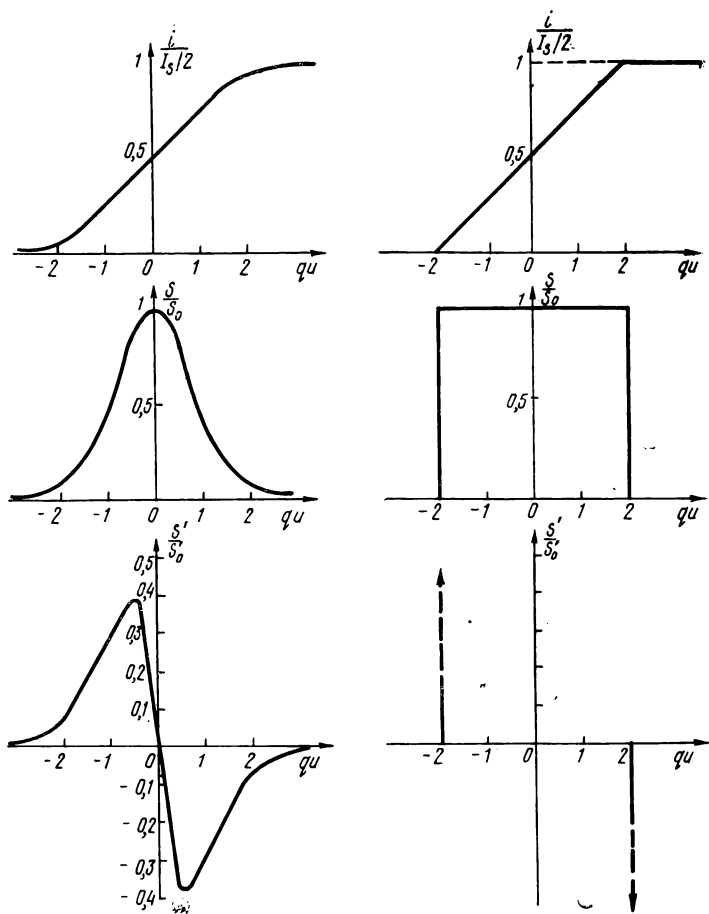


Рис. P 2.11

Графики, соответствующие y , y' и y'' , изображены на рис. P2.12a. На рис. P2.12б показаны те же графики для характеристики, аппроксимированной ломаной прямой.

2.38.

$$s(u) = \frac{di}{du} = 2S \frac{\left(1 - e^{-\frac{2S}{I_0} u}\right) - \frac{2S}{I_0} e^{-\frac{2S}{I_0} u} u}{\left(1 - e^{-\frac{2Su}{I_0}}\right)^2}.$$

В безразмерных координатах $\left(x = \beta u, y = \frac{\beta}{\alpha} i, x = \frac{2S}{I_0} u, y = \frac{i}{I_0}\right)$:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(1 - e^{-x}) - x e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}.$$

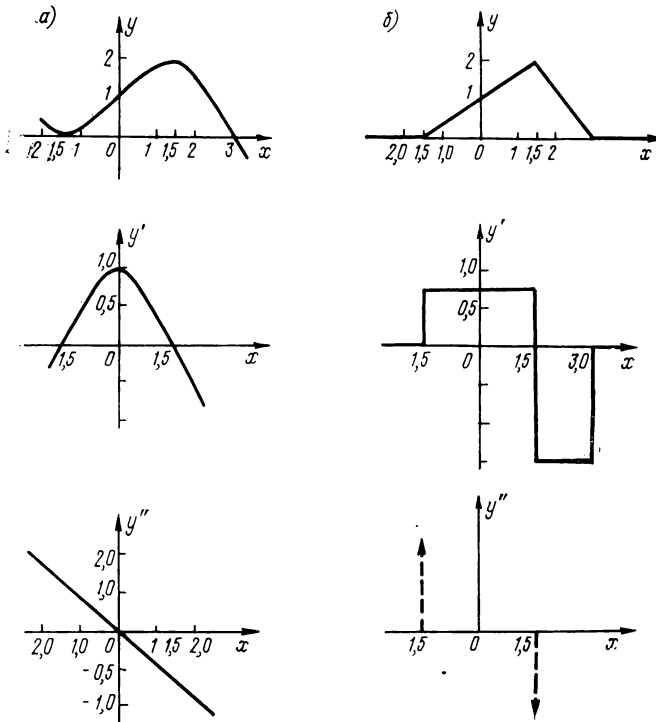


Рис. P 2.12

График, построенный по последнему выражению, представлен на рис. P2.13.

2.39. Интегрируя, находим

$$i = \int s du = \int \frac{S_0}{\operatorname{ch}^2 qu} du = \frac{S_0}{q} \operatorname{th} qu + C;$$

так как при $u=0$, $i=I_s/2$, то $C=I_s/2=S_0/q$, т. е.

$$i = \frac{I_s}{2} + \frac{I_s}{2} \operatorname{th} qu.$$

2.40. Интегрируя, получаем

$$i = \int s du = \frac{|S_0|}{q} \operatorname{arc} \operatorname{tg} qu + C.$$

Так как при $u=0$ $i=I_s/2$, то $C=I_s/2$. Следовательно,

$$i = \frac{I_s}{2} + \frac{S_0}{q} \operatorname{arc} \operatorname{tg} qu.$$

По условию, далее, при $u \rightarrow \infty$ $i \rightarrow I_s$; так как при этом $\operatorname{arc} \operatorname{tg} qu \rightarrow \pi/2$, то $S_0/q = (I_s/2) \cdot (2/\pi)$ и, окончательно:

$$i = \frac{I_s}{2} \left(1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} qu \right),$$

2.41. Так как $i = I_0(1 + \text{th} qu)$,

$$s = \frac{di}{du} = I_0 q \cdot \frac{1}{\text{ch}^2 qu} = S_0 (1 - \text{th}^2 qu).$$

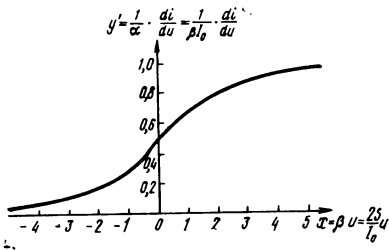


Рис. P 2.13

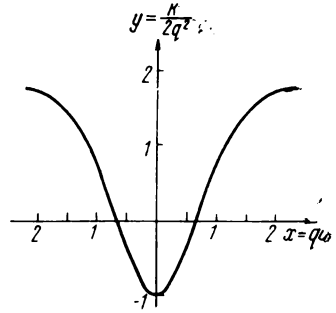


Рис. P 2.14

Вычисляя производные, находим:

$$s' = 2qS_0 \text{th} qu (1 - \text{th}^2 qu),$$

$$s'' = 2q^2 S_0 (1 - \text{th}^2 qu) (3\text{th}^2 qu - 1),$$

$$k = \frac{s''}{s} = 2q^2 (3\text{th}^2 qu - 1).$$

На рис. P2.14 представлен график $y = 3\text{th}^2 x - 1$, где

$$y = \frac{k}{2q^2}; \quad x = qu.$$

Выражения $k(u)$ для различных ламп имеют вид: 1) 2Ж27Л: $k = 0,96(3\text{th}^2 0,695u - 1)$; 2) 12Ж1Л: $k = 2,24(3\text{th}^2 0,333u - 1)$; 3) 6К3: $k = 0,0312(3\text{th}^2 0,125u - 1)$.

$$2.42. \quad s = S_0 e^2 \cdot e^{-\frac{2}{1 - \left(\frac{u}{U_0}\right)^2}} \quad \text{при } u < U_0,$$

$s = 0$ при $u \geq U_0$.

3

ГАРМОНИЧЕСКИЙ И СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Общие сведения

При изучении нелинейных и параметрических цепей в аналитическом плане задача, как правило, формулируется в следующем виде: даны цепь (оператор L) и входное воздействие x ; нужно найти выходную реакцию $y(t) = L[x(t)]$.

Кроме временной зависимости $y(t)$, обычно представляет интерес и ее спектр; операции нахождения спектра называют гармоническим или спектральным анализом. Если $y(t)$ представляет собой периодическую функцию, операции нахождения спектра называются гармоническим анализом. Если же $y(t)$ почти периодическая¹⁾ или непериодическая функция, — речь идет о спектральном анализе. Термин «спектральный анализ» адресуют и к периодическим функциям, так как последние представляют собой частный случай почти периодических; гармонический анализ является, таким образом, частным случаем спектрального.

Для операций гармонического анализа применяется хорошо известный аппарат рядов Фурье, а для спектрального анализа — либо аппарат кратных рядов Фурье (по отношению к почти периодическим функциям), либо аппарат интеграла Фурье (по отноше-

¹⁾ Строгое математическое определение почти периодического колебания не наглядно и здесь его применение не обязательно. Под почти периодической функцией будем понимать полигармоническую функцию, представляющую собой сумму гармонических колебаний с несоизмеримыми частотами, т. е.

$$f(t) = \sum_{n=0}^N C_n \cos(\omega_n t + \varphi_n), \quad \frac{\omega_i}{\omega_j} \neq k, \quad (i, j = 0, 1, 2 \dots),$$

где k — рациональное число; при отношении частот, равном рациональному числу почти периодическая функция переходит в периодическую.

нию к непериодическим функциям)¹⁾. Применение классических формул аппарата рядов Фурье (формулы Фурье—Эйлера) весьма часто приводит к громоздким выкладкам; для упрощения последних используют различные приемы (методы), дающие те же результаты (точные или приближенные), но более коротким путем. Все эти методы так или иначе строятся на основе классических формул и, как правило, адресуются к определенному классу аппроксимирующих функций. Нужно отметить, что во многих случаях применение классических формул облегчает гармонический анализ.

При выполнении операций гармонического анализа следует учитывать свойства четности и нечетности подлежащей анализу периодической функции; ниже приводятся необходимые сведения по этому вопросу.

Пусть характеристика нелинейного элемента аппроксимируется функцией $y=f(x)$ и

$$x = a_0 + a \cos \omega t + b \sin \omega t = a_0 + a \cos \tau + b \sin \tau;$$

тогда

$$y = y(\tau) = f(a_0 + a \cos \tau + b \sin \tau).$$

В общем случае функция $y(\tau)$ содержит четную и нечетную составляющие; коэффициенты Фурье такой функции находятся по формулам Эйлера—Фурье:

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(\tau) \cos n\tau d\tau \\ B_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(\tau) \sin n\tau d\tau \\ A_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(\tau) d\tau \end{aligned} \right\} (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.1)$$

Функцию $y(\tau)$, содержащую четную $y_{\text{чет}}(\tau)$ и нечетную $y_{\text{нечет}}(\tau)$ части, можно разделить на них при помощи формулы:

$$y(\tau) = y_{\text{чет}}(\tau) + y_{\text{нечет}}(\tau) = \frac{y(\tau) + y(-\tau)}{2} + \frac{y(\tau) - y(-\tau)}{2}.$$

Если входное воздействие представляет собой четную функцию, т. е. $x = a_0 + a \cos \tau$, то $y = y(\tau) = f(a_0 + a \cos \tau)$ также является четной функцией при любом значении $f(x)$; если же $x = b \sin \tau$, то $y = y(\tau) = f(b \sin \tau)$ может представлять собой в зависимости от вида $f(x)$ как четную, так и нечетную функции, а также их комбинацию.

¹⁾ Здесь рассматривается спектральный анализ по отношению только к почти периодическим функциям, так как спектральный анализ непериодических функций изучается в курсах и монографиях, посвященных линейным цепям.

Общие ф-лы (3.1) для четных и нечетных функций упрощаются; их можно упростить еще больше, если учесть свойства четности и нечетности не только относительно линии $\tau=0$, но и линии

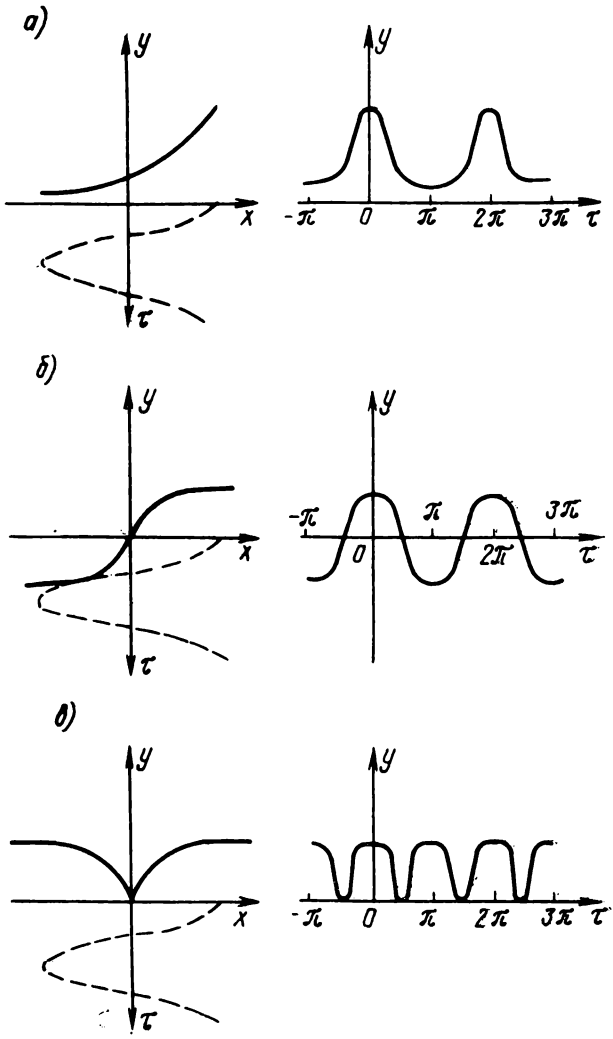


Рис. 3.1

$\tau=\pi/2$. Эти свойства зависят как от внешнего воздействия, так и от вида функции $f(x)$. Ниже приводятся соответствующие формулы и иллюстрации.

1. Четные функции $y(\tau)$ при $x = a \frac{\cos \tau}{\sin \tau}$:

а) $y(\tau) = y(-\tau)$ — рис. 3.1а; $y(x)$ содержит четную и нечетную составляющие:

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y(\tau) \cos n\tau d\tau \\ A_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} y(\tau) d\tau \\ B_n &= 0 \end{aligned} \right\}; \quad (3.2)$$

б) $y(\tau) = y(-\tau)$ и $y\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right) = -y\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right)$ — рис. 3.1б;

$$y(x) = -y(-x);$$

$$\left. \begin{aligned} A_{2n-1} &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} y(\tau) \cos(2n-1)\tau d\tau \\ B_n &= A_{2n} = 0 \end{aligned} \right\}; \quad (3.3)$$

в) $y(\tau) = y(-\tau)$ и $y\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right) = y\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right)$ — рис. 3.1в;

$$y(x) = y(-x);$$

$$\left. \begin{aligned} A_{2n} &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} y(\tau) \cos 2n\tau d\tau \\ A_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} y(\tau) d\tau \\ B_n &= A_{2n-1} = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (3.4)$$

2. Нечетные функции $y(\tau)$ при $x = a \sin \tau$:

а) $y(\tau) = -y(-\tau)$ — рис. 3.2а; функция $y(x)$ не однозначна:

$$\left. \begin{aligned} B_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y(\tau) \sin n\tau d\tau \\ A_n &= 0 \end{aligned} \right\}; \quad (3.5)$$

б) $y(\tau) = -y(-\tau)$ и $y\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right) = y\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right)$ — рис. 3.2б;

$$y(x) = -y(-x);$$

$$\left. \begin{aligned} B_{2n+1} &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} y(\tau) \sin(2n+1)\tau d\tau \\ A_n &= B_{2n} = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (3.6)$$

Сочетание свойств $y(\tau) = -y(-\tau)$ и $y\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right) = -y\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right)$ в преобразованиях $y = f(b \sin \tau)$ встретиться не может (см. задачу 3.3); этим и объясняется отсутствие четных синусоидальных гармоник вида $\sin 2n\tau$.

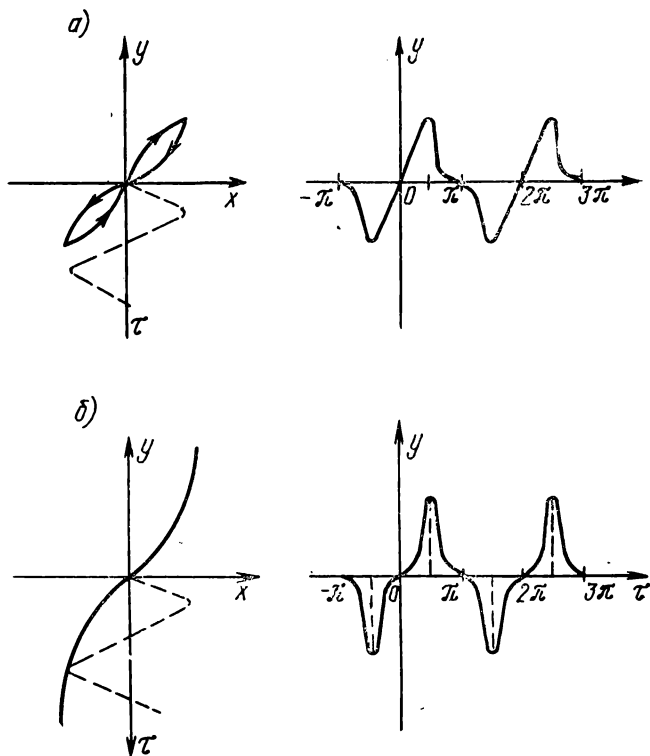


Рис. 3.2

Отметим еще, что при нечетном воздействии вида $x = a \sin \tau$ на элемент с четной характеристикой $y(x) = y(-x)$ функция $y(\tau)$ будет также четной; это легко себе представить, выполнив «мысленные построения» на рис. 3.1в или рис. 3.2б.

Из изложенного вытекает, что функция времени $y(\tau)$, представляющая собой реакцию нелинейного элемента с однозначной характеристикой $y(x) = f(x)$ на моногармоническое воздействие, является периодической с характерными свойствами четности и нечетности относительно линий $\tau = 0$, $\tau = \pi/2$, $\tau = \pi$. При изучении процессов, связанных с моногармоническим воздействием, фазой этого воздействия можно распорядиться (т. е. распорядиться началом рассмотрения); для проведения операций гармонического анализа, таким образом, вместо воздействия $x = a_0 + a \cos \tau +$

$+b \sin \tau$ всегда можно принимать воздействие в виде $x = a_0 + a \cos \tau$, а с учетом возможности переноса начала координат — и в виде одной косинусоиды.

Перейдем теперь к рассмотрению различных методов гармонического и спектрального анализа в порядке, соответствующем порядку изложения в разд. 2 сведений об аппроксимирующих функциях; сначала приводятся данные о гармоническом анализе, а затем — о спектральном.

Гармонический анализ

СТЕПЕННОЙ ПОЛИНОМ

При аппроксимации характеристик степенным полиномом следует пользоваться формулами кратных дуг (табл. 3.1). Отметим,

ТАБЛИЦА 3.1
Формулы кратных дуг

$$1) \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha,$$

$$2) \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha,$$

$$3) \sin^3 \alpha = \frac{3}{4} \sin \alpha - \frac{1}{4} \sin 3\alpha,$$

$$4) \cos^3 \alpha = \frac{3}{4} \cos \alpha + \frac{1}{4} \cos 3\alpha,$$

$$5) \sin^4 \alpha = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha + \frac{1}{8} \cos 4\alpha,$$

$$6) \cos^4 \alpha = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha + \frac{1}{8} \cos 4\alpha,$$

$$7) \sin^5 \alpha = \frac{1}{16} \sin 5\alpha - \frac{5}{16} \sin 3\alpha + \frac{5}{8} \sin \alpha,$$

$$8) \cos^5 \alpha = \frac{1}{16} \cos 5\alpha + \frac{5}{16} \cos 3\alpha + \frac{5}{8} \cos \alpha.$$

что этими формулами можно пользоваться не только при аппроксимации степенным полиномом, но и при аппроксимации другими функциями, в том числе трансцендентными. В таких случаях трансцендентные аппроксимирующие функции нужно представить степенным рядом, а затем после подстановки входного воздействия в виде гармонического колебания, привести полученное выражение при помощи формул кратных дуг к ряду Фурье; коэффициенты этого ряда (в свою очередь, представленные степенным рядом) и представляют собой результат гармонического анализа.

Примеры расчета гармоник на основе использования формул кратных дуг приводятся в задачах 3.4—3.11.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ ПОЛИНОМ

При аппроксимации характеристик экспоненциальным полиномом следует пользоваться разложением по бesselевым функциям от мнимого аргумента ¹⁾; соответствующие формулы имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} e^{a \cos x} &= B_0(a) + 2B_1(a) \cos x + 2B_2(a) \cos 2x + \dots \\ e^{a \sin x} &= B_0(a) + 2B_2(a) \cos 2x + 2B_4(a) \cos 4x + \dots \\ &\dots + 2B_1(a) \sin x + 2B_3(a) \sin 3x + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Отметим, что в расчетах разложения встречается только вещественный аргумент; название «функции от мнимого аргумента» следует понимать так же, как и второе название гиперболических функций «тригонометрические функции от мнимого аргумента». Бesselевы функции от вещественного $J_n(a)$ и мнимого $B_n(a)$ аргументов находятся между собой в таком же соотношении, как тригонометрические и гиперболические.

Графики бesselевых функций от мнимого аргумента для расчета постоянной составляющей и первых шести гармоник представлены на рис. 3.3.

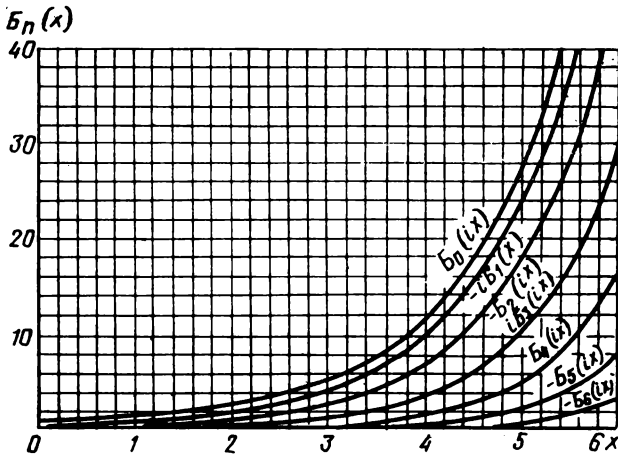


Рис. 3.3

Примеры разложений по бesselевым функциям от мнимого аргумента даны в задачах 3.12—3.14.

¹⁾ Эти функции часто называют модифицированными функциями Бесселя. В математической литературе функции Бесселя от мнимого аргумента обозначают не символом $B_n(a)$, а символом $I_n(a)$; отступление от принятых обозначений обусловлено обозначением амплитуды тока буквой I .

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОЛИНОМ

При аппроксимации характеристик тригонометрическим полиномом (а также полиномом, состоящим из гиперболических функций), следует пользоваться разложением по бесселевым функциям; соответствующие формулы имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \sin(a \sin x) &= 2J_1(a) \sin x + 2J_3(a) \sin 3x + \dots \\ \sin(a \cos x) &= 2J_1(a) \cos x - 2J_3(a) \cos 3x + \dots \\ \cos(a \sin x) &= J_0(a) + 2J_2(a) \cos 2x + 2J_4(a) \cos 4x + \dots \\ \cos(a \cos x) &= J_0(a) - 2J_2(a) \cos 2x + 2J_4(a) \cos 4x - \dots \end{aligned} \right\} (3.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sh}(a \sin x) &= 2B_1(a) \sin x - 2B_3(a) \sin 3x + \dots \\ \operatorname{sh}(a \cos x) &= 2B_1(a) \cos x + 2B_3(a) \cos 3x + \dots \\ \operatorname{ch}(a \sin x) &= B_0(a) - 2B_2(a) \cos 2x + 2B_4(a) \cos 4x - \dots \\ \operatorname{ch}(a \cos x) &= B_0(a) + 2B_2(a) \cos 2x + 2B_4(a) \cos 4x + \dots \end{aligned} \right\} (3.9)$$

Графики бесселевых функций от вещественного аргумента для расчета постоянной составляющей и первых пяти гармоник представлены на рис. 3.4. Примеры использования этих разложений даны в задачах 3.15—3.16.

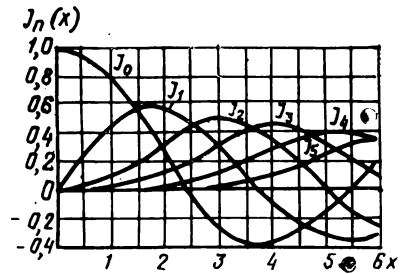


Рис. 3.4 →

КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫЕ И КУСОЧНО-НЕЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ

При аппроксимации кусочно-линейными и кусочно-нелинейными функциями амплитуды гармоник подсчитываются по общим формулам:

$$\left. \begin{aligned} A_n \\ B_n \end{aligned} \right\} = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} n \omega t dt.$$

Указанные формулы можно существенно упростить, если результаты интегрирования протабулировать; именно это и лежит в основе «метода угла отсечки» (метода А. И. Берга), широко используемого при кусочно-линейной аппроксимации.

Приведем соответствующие выкладки для аппроксимирующей функции в виде двух отрезков (рис. 3.5). Очевидно, если наклонная часть характеристики аппроксимируется прямой $i = I_0 + Su$, а входное напряжение $u = -E + U \cos \omega t$, то в пределах $0 < \omega t < \theta$

(θ — угол «отсечки»): $i = I_0 + S(-E + U \cos \omega t)$. Так как при $\omega t = \theta$ $i = 0$, то $0 = I_0 + S(-E + U \cos \theta)$. Сопоставляя два последних выражения, находим

$$i = SU (\cos \omega t - \cos \theta), \quad 0 < \omega t < \theta.$$

При $\omega t = 0$ $i = i_{\text{макс}}$,

$$i_{\text{макс}} = SU (1 - \cos \theta). \quad (3.10)$$

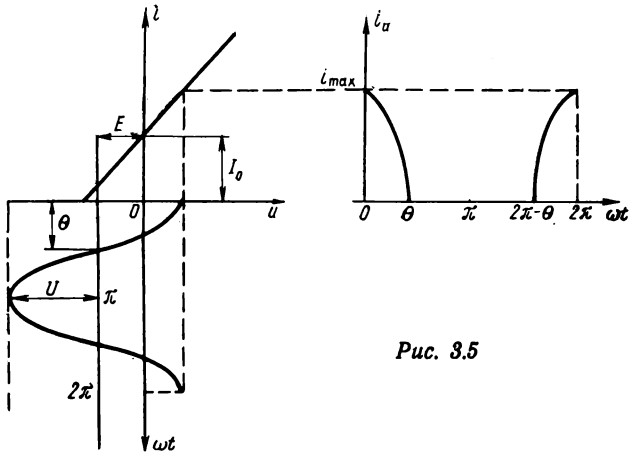


Рис. 3.5

Отметим, что связь между углом отсечки θ , параметрами характеристики S , E , I_0 и амплитудой U определяется выражением

$$\cos \theta = \frac{SE - I_0}{SU}. \quad (3.11)$$

Теперь легко рассчитать амплитуду n -й гармоники тока:

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} i(\omega t) \cos n \omega t d\omega t = \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta} SU (\cos \omega t - \cos \theta) \cos n \omega t d\omega t = \\ &= SU F_n(\theta), \end{aligned}$$

где

$$F_n(\theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta} (\cos \omega t - \cos \theta) \cos n \omega t d\omega t = \frac{2}{\pi} \frac{\sin n \theta \cos \theta - n \cos n \theta \sin \theta}{n(n^2 - 1)}.$$

Удобно нормировать I_n к максимальному значению тока:

$$\alpha_n = \frac{I_n}{i_{\text{макс}}} = \frac{SU F_n(\theta)}{SU (1 - \cos \theta)} = \frac{F_n(\theta)}{1 - \cos \theta} = f_n(\theta). \quad (3.12)$$

Безразмерные коэффициенты α_n являются функциями только угла отсечки θ :

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{\sin \theta - \theta \cos \theta}{\pi (1 - \cos \theta)} \\ \alpha_1 &= \frac{\theta - \sin \theta \cos \theta}{\pi (1 - \cos \theta)} \\ \alpha_n &= \frac{2}{\pi} \frac{\sin \theta \cos \theta - n \cos n \theta \sin \theta}{n (n^2 - 1) (1 - \cos \theta)} \quad (n \geq 2) \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Эти функции могут быть протабулированы.

Графики $\alpha_n = f_n(\theta)$ для постоянной составляющей и первых трех гармоник представлены на рис. 3.6.

Аналогично составляются таблицы при аппроксимирующей функции, состоящей из большего числа линейных участков, а также из линейных и нелинейных участков.

Примеры по гармоническому анализу при аппроксимации ломаными и сочетаниями прямых и кривых даны в задачах 3.17—3.22.

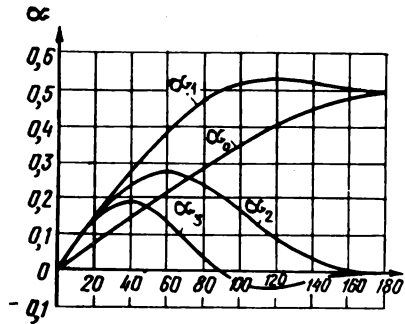


Рис. 3.6

ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Удобных приемов гармонического анализа при аппроксимации дробно-рациональными функциями нет; в равной степени не приносит пользы обращение к классическим формулам, так как соответствующие интегралы, кроме самых простейших случаев, не выражаются в элементарных функциях.

Здесь можно рекомендовать пользоваться либо приближенными формулами (см. ниже — формулы трех и пяти ординат), либо разложением в степенные ряды; в последнем случае после проверки на сходимость ряд нужно ограничить и оценить ошибку.

Из-за указанных сложностей гармонического анализа в расчетах нелинейных цепей аппроксимация дробно-рациональными функциями практически не применяется; эта аппроксимация, как уже отмечалось, широко используется для выражения передаточных функций линейных и параметрических цепей.

ДРОБНО-СТЕПЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Для гармонического анализа при аппроксимации дробно-степенной функцией вида $y = Ax^\alpha$ нужно воспользоваться известным выражением определенного интеграла [21, стр. 383, ф-ла (3.621,1)]:

$$J = \int_0^{\pi/2} \sin^{\mu-1} x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{\mu-1} x dx = 2^{\mu-2} B\left(\frac{\mu}{2}, \frac{\mu}{2}\right),$$

которое можно привести к виду (см. задачу 3.23).

$$J = \int_0^{\pi/2} \sin^{\mu-1} x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{\mu-1} x dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)}, \quad (3.14)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, для которой в распространенных справочниках есть таблицы и графики.

Формулы для расчета постоянной составляющей и амплитуд гармоник выводятся на основе использования этого интеграла. Если характеристика аппроксимируется функцией

$$y = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ Ax^\alpha & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

и $x = a \cos \omega t = a \cos \tau$, формулы для расчета постоянной составляющей, амплитуды первой гармоники и амплитуд второй, третьей, четвертой и пятой гармоник (см. задачу 3.24) имеют вид:

$$Y_0 = \frac{Aa^\alpha}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)}, \quad (3.15)$$

$$Y_1 = \frac{Aa^\alpha}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{2}\right)}, \quad (3.16)$$

$$Y_n = \frac{2^{n-1}Aa^\alpha}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+n+2}{2}\right)} - nY_{n-2} - \frac{1}{2}n(n-1)Y_{n-4}, \quad (n \leq 5). \quad (3.17)$$

Если характеристика аппроксимируется четной функцией $y = Ax^\alpha$, т. е. $y(x) = y(-x)$, то все нечетные гармоники равны нулю, а четные вычисляются по тем же формулам, но с умножением результата на 2 (см. задачу 3.25).

Если характеристика аппроксимируется нечетной функцией $y = Ax^\alpha$, т. е. $y(x) = -y(-x)$, то все четные гармоники равны нулю, а нечетные вычисляются по тем же формулам и результаты также должны быть умножены на 2 (см. задачу 3.25).

Для расчетов нужно пользоваться таблицей значений гамма-функции — см., например, [14, стр. 75]. На рис. 3.7 дан график функции $\Gamma(x)$.

При работе с выражениями, содержащими гамма-функции, удобно иметь таблицу следующих равенств:

$$\left. \begin{aligned}
 \Gamma(n) &= (n-1)! \\
 \Gamma(x+1) &= x\Gamma(x) \\
 \Gamma(x) &= (x-1)\Gamma(x-1) \\
 \Gamma(2x) &= \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) \\
 \Gamma(x)\Gamma(1-x) &= \frac{\pi}{\sin \pi x}
 \end{aligned} \right\} (3.18)$$

Нужно обратить внимание на то, что приведенные выше интегралы (3.14) имеют пределы от нуля до $\pi/2$, и, следовательно, могут использоваться для вычисления гармоник только в тех случаях, когда анализируемая функция обладает свойствами четности или нечетности от-

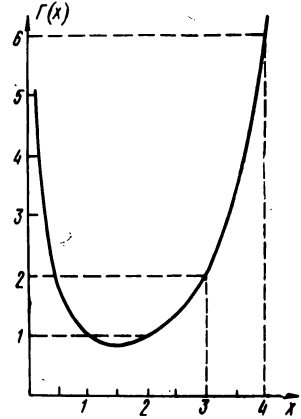
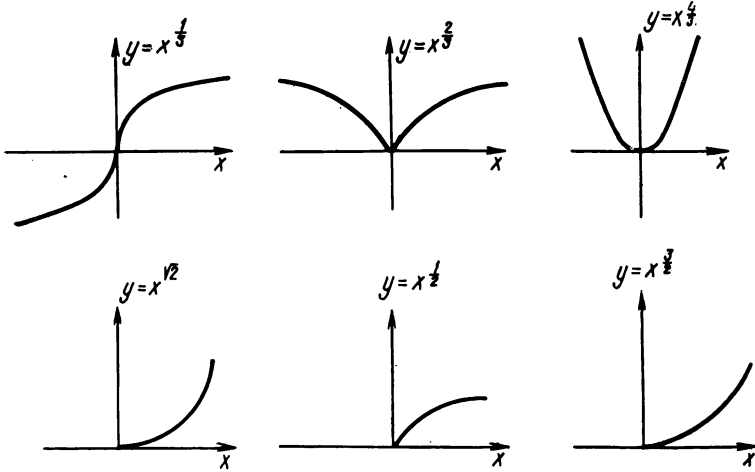


Рис. 3.7



носительно точки $\pi/2$. Для выявления этих свойств нужно установить свойства четности или нечетности исходной функции $y = Ax^\alpha$.

Для случая, когда $\alpha = p/q$, где p/q — несократимая дробь, а p, q — целые положительные числа, действительны следующие правила:

— если p и q — нечетные числа, то $y(x)$ — нечетная функция;

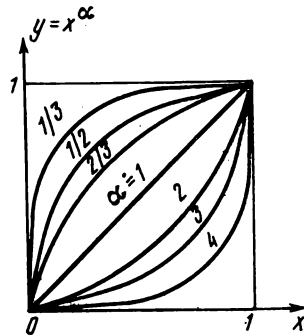


Рис. 3.8

— если p — четное число, а q — нечетное, то $y(x)$ — четная функция;

— если p — нечетное число, а q — четное, а также если α нельзя привести к виду p/q (например, $x^{\sqrt{2}}$, то $y(x)$ определяется только в области $0 < x < \infty$ и только при $y > 0$, т. е. только в первом квадранте, и, следовательно, для вычисления гармоник достаточно ограничиться пределами $0 \div \pi/2$.

Случай, когда $\alpha < 0$, с точки зрения аппроксимации характеристик нелинейных элементов интереса не представляет, так как эти функции либо претерпевают бесконечные разрывы, либо имеют бесконечные значения.

На рис. 3.8 даны для ориентировки схематические графики функций x^α при различных значениях α .

При гармоническом анализе на основе аппроксимации степенной функцией, кроме приведенной выше рецептуры, можно также пользоваться и разложением в степенной ряд, а также формулами кратных дуг (см. задачу 3.10); однако при этом, как правило, трудно оценить совершаемую ошибку.

Примеры по выполнению гармонического анализа при аппроксимации показательной функцией даны в задачах 3.23—3.27.

РАЗЛИЧНЫЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

При аппроксимации характеристик различными трансцендентными функциями, а также при графических расчетах для гармонического анализа пользуются приближенными формулами; наибольшее распространение получили формулы трех и пяти ординат. Эти формулы являются некоторым видоизменением известных формул приближенного гармонического анализа.

Формулы трех ординат позволяют находить приближенные значения постоянной составляющей и амплитуд первых двух гармоник по следующим известным значениям временной функции (рис. 3.9): максимальному значению i_{\max} , минимальному значению i_{\min} и значению i_0 , соответствующему отсутствию переменного напряжения (ток покоя). Эти формулы имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} I_0 &= \frac{i_{\max} + i_{\min}}{4} + \frac{i_0}{2} \\ I_1 &= \frac{i_{\max} - i_{\min}}{2} \\ I_2 &= \frac{i_{\max} + i_{\min}}{2} - \frac{i_0}{2} \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Формулы пяти ординат позволяют находить приближенные значения постоянной составляющей и амплитуд первых четырех гармоник по следующим известным значениям временной функции (рис. 3.10): i_{\max} , i_{\min} , i_0 , i_1 и i_2 . Значения i_1 и i_2 соответствуют та-

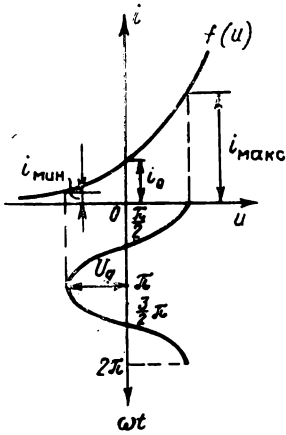


Рис. 3.9

$$\begin{aligned} i_{\max} &= f(U_g) \\ i_{\min} &= f(-U_g) \\ i_0 &= f(0) \end{aligned}$$

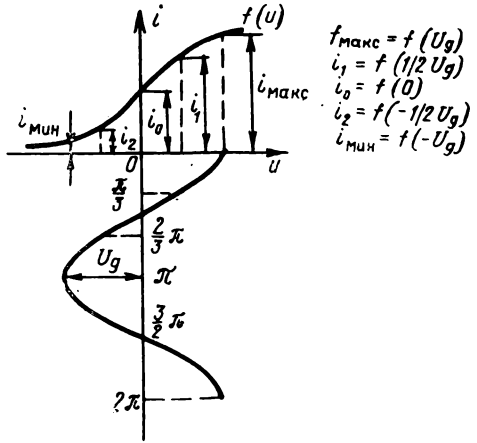


Рис. 3.10

$$\begin{aligned} f_{\max} &= f(U_g) \\ i_1 &= f(1/2 U_g) \\ i_0 &= f(0) \\ i_2 &= f(-1/2 U_g) \\ i_{\min} &= f(-U_g) \end{aligned}$$

ким значениям временной функции, при которых аргумент равен \pm половинному значению амплитуды подведенного напряжения. Формулы пяти ординат имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{6} [(i_{\max} + i_{\min}) + 2(i_1 + i_2)] \\ I_1 &= \frac{1}{3} [(i_{\max} - i_{\min}) + (i_1 - i_2)] \\ I_2 &= \frac{1}{4} [(i_{\max} + i_{\min}) - 2i_0] \\ I_3 &= \frac{1}{6} [(i_{\max} - i_{\min}) - 2(i_1 - i_2)] \\ I_4 &= \frac{1}{12} [(i_{\max} + i_{\min}) - 4(i_1 + i_2) + 6i_0] \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Формулы трех и пяти ординат дают относительно высокую точность при монотонных характеристиках мгновенных значений; необходимо иметь в виду, что ошибка увеличивается с ростом амплитуды внешнего воздействия.

Примеры использования этих формул даны в задачах 3.28—3.32.

Спектральный анализ

ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

При подаче на вход нелинейной цепи полигармонического колебания, состоящего из двух или более синусоидальных колебаний, на выходе будут иметь место как гармонические колебания (гармоники), так и комбинационные.

Если на вход цепи подается бигармоническое колебание, т. е. два колебания с частотами ω_1 и ω_2 , на ее выходе будет ряд колебаний с частотами $n\omega_1 \pm m\omega_2$, где n и m — любые целые числа натурального ряда, включая нули. Число $N = |n| + |m|$ называется порядком комбинационного колебания.

Гармонические колебания соответствуют случаю, когда n или m равно нулю; если m и n не равны нулю, колебания являются комбинационными. Для обозначения амплитуд гармонических и комбинационных колебаний используется символ I_{nm} .

Если на вход цепи подаются три колебания с частотами ω_1 , ω_2 и ω_3 , на ее выходе будет ряд колебаний с частотами $n\omega_1 \pm m\omega_2 \pm k\omega_3$. В этом случае порядком комбинационного колебания называется число $N = |n| + |m| + |k|$.

Задача спектрального анализа состоит в определении амплитуд и фаз гармонических и комбинационных колебаний. В общем виде при любых соотношениях амплитуд входных колебаний эта задача является весьма сложной и решается до конца только для некоторых простейших аппроксимирующих функций. Адекватным математическим аппаратом здесь является аппарат кратных рядов Фурье; однако вычисления на его основе весьма громоздки и к ним практически никогда не прибегают, а пользуются разложениями, аналогичными тем, которые использовались при гармоническом анализе.

С точки зрения простоты спектрального анализа наиболее подходящими для целей аппроксимации являются степенной и экспоненциальный полиномы, а также тригонометрический полином. Рассмотрим методы спектрального анализа по отношению к этим аппроксимирующим функциям.

СТЕПЕННОЙ ПОЛИНОМ

При аппроксимации характеристик степенным полиномом для нахождения спектра нужно пользоваться формулами кратных дуг (табл. 3.1) и формулами произведений синусов и косинусов различных степеней (табл. 3.2). Соответствующие примеры приведены в задачах 3.35—3.41.

Расчеты по определению спектра при относительно большом числе входных составляющих весьма громоздки и для их упрощения предлагались различные приемы. Например, можно пользоваться справочными таблицами, аналогичными табл. 3.3; однако

ТАБЛИЦА 3.2

Формулы произведений синусов и косинусов различных степеней

$$1) \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \cos (\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos (\alpha + \beta),$$

$$2) \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin (\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \sin (\alpha + \beta),$$

$$\begin{aligned}
3) \quad \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} \cos (\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos (\alpha + \beta), \\
4) \quad \sin \alpha \sin^2 \beta &= \frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{1}{4} \sin (\alpha - 2\beta) - \frac{1}{4} \sin (\alpha + 2\beta), \\
5) \quad \sin \alpha \cos^2 \beta &= \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{1}{4} \sin (\alpha - 2\beta) + \frac{1}{4} \sin (\alpha + 2\beta), \\
6) \quad \cos \alpha \cos^2 \beta &= \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{1}{4} \cos (\alpha - 2\beta) + \frac{1}{4} \cos (\alpha + 2\beta), \\
7) \quad \cos \alpha \sin^2 \beta &= \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{1}{4} \cos (\alpha - 2\beta) - \frac{1}{4} \cos (\alpha + 2\beta), \\
8) \quad \sin \alpha \cos^2 \alpha &= \frac{1}{4} \sin \alpha + \frac{1}{4} \sin 3\alpha, \\
9) \quad \cos \alpha \sin^2 \alpha &= \frac{1}{4} \cos \alpha - \frac{1}{4} \cos 3\alpha.
\end{aligned}$$

уже из этой таблицы, составленной только для трех составляющих, хорошо видно, насколько громоздки и неприемлем такой путь для большого числа составляющих.

Разработанные специально для этой цели приемы — наиболее эффективные среди них принадлежат В. А. Котельникову [38] и И. В. Басику [7] — также требуют громоздких вычислений; поэтому при большом числе входных составляющих следует обращаться к аппроксимации экспоненциальным полиномом, что значительно упрощает соответствующие расчеты.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ ПОЛИНОМ

Прежде всего отметим, что при аппроксимации характеристик экспоненциальным полиномом операции спектрального анализа можно адресовать к каждой экспоненциальной функции в отдельности, а затем соответствующие составляющие спектра сложить.

Для каждой экспоненциальной функции вида $i = I_0 e^{au}$ спектр тока определяется по формулам:

$$\left. \begin{aligned}
I_{mn} &= 2I_0 B_m(aU_1) B_n(aU_2) \\
I_{mnl} &= 2I_0 B_m(aU_1) B_n(aU_2) B_l(aU_3) \\
I_{mn\dots k} &= 2I_0 B_m(aU_1) B_n(aU_2) \dots B_k(aU_j)
\end{aligned} \right\}, \quad (3.21)$$

где U_1, U_2, \dots, U_j — амплитуды входных колебаний.

Вывод этих формул дан в задаче 3.42. Аналогично строятся формулы при аппроксимации тригонометрическим полиномом.

ТАБЛИЦА 3.3

Значения амплитуд выходных колебаний в цепи с характеристикой, соответствующей полному полиному третьей степени и находящейся под входным воздействием, образованным из трех гармонических составляющих:

$$i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3;$$

$$u = U_0 + U_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + U_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + U_3 \cos(\omega_3 t + \varphi_3).$$

№ пп.	Член полинома	Частоты комбинационных колебаний	Амплитуды комбинационных колебаний
1	a_0	0	a_0
2	$a_1(u - U_0)$	ω_1	$a_1 U_1$
3		ω_2	$a_1 U_2$
4		ω_3	$a_1 U_3$
5		0	$\frac{1}{2} a_2 (U_1^2 + U_2^2 + U_3^2)$
6	$a_2(u - U_0)^2$	$2\omega_1$	$\frac{1}{2} a_2 U_1^2$
7		$2\omega_2$	$\frac{1}{2} a_2 U_2^2$
8		$2\omega_3$	$\frac{1}{2} a_2 U_3^2$
9		$\omega_1 \pm \omega_2$	$a_2 U_1 U_2$
10		$\omega_1 \pm \omega_3$	$a_2 U_1 U_3$
11		$\omega_2 \pm \omega_3$	$a_2 U_2 U_3$
12		ω_1	$\frac{3}{4} a_3 U_1 (U_1^2 + 2U_2^2 + 2U_3^2)$
13		ω_2	$\frac{3}{4} a_3 U_2 (U_2^2 + 2U_3^2 + 2U_1^2)$
14	ω_3	$\frac{3}{4} a_3 U_3 (U_3^2 + 2U_1^2 + 2U_2^2)$	
15	$2\omega_1 \pm \omega_2$	$\frac{3}{4} a_3 U_1^2 U_2$	
16	$2\omega_1 \pm \omega_3$	$\frac{3}{4} a_3 U_1^2 U_3$	
17	$2\omega_2 \pm \omega_3$	$\frac{3}{4} a_3 U_2^2 U_3$	
18	$a_3(u - U_0)^3$	$\omega_1 \pm 2\omega_2$	$\frac{3}{4} a_3 U_1 U_2^2$
19		$\omega_1 \pm 2\omega_3$	$\frac{3}{4} a_3 U_1 U_3^2$

№ пп.	Член полинома	Частоты комбинационных колебаний	Амплитуды комбинационных колебаний
20	$a_3(u - U_0)^3$	$\omega_2 \pm 2\omega_3$	$\frac{3}{4} a_3 U_2 U_3^2$
21		$\omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3$	$\frac{3}{4} a_3 U_1 U_2 U_3$
22		$3\omega_1$	$\frac{1}{4} a_3 U_1^3$
23		$3\omega_2$	$\frac{1}{4} a_3 U_2^3$
24		$3\omega_3$	$\frac{1}{4} a_3 U_3^3$

В настоящем разделе задачи расположены в следующей последовательности. Первые три задачи (3.1—3.3) посвящены общим вопросам составления схем, связанным с операциями гармонического или спектрального анализа, а также выяснению некоторых общих свойств четности и нечетности функций, подвергшихся нелинейным преобразованиям; задачи 3.4—3.34 — вопросам гармонического анализа, а задачи 3.35—3.44 — вопросам спектрального анализа функций, подвергшихся нелинейным преобразованиям.

Задачи и упражнения

3.1. Составить функциональные схемы для получения значений постоянной составляющей и амплитуд гармоник косинусоидальных и синусоидальных составляющих.

3.2. Показать, что если $x = \sum_n A_n \cos \omega_n t$, то при любом виде $y=f(x)$ функция $y(t)$ является четной, т. е. $y(t)=y(-t)$.

3.3. Нечетная 2π -периодическая функция $y(\tau)$, появившаяся в результате преобразования $y=f(x)=f(b \sin \tau)$, не содержит косинусоидальных составляющих (так как по условию является нечетной), которые соответствуют свойству нечетности относительно линии $\tau=\pi/2$. Однако свойству нечетности относительно линии $\tau=\pi/2$ соответствуют и синусоидальные составляющие, но только четного порядка.

Показать, что функция $y=f(x)=f(b \sin \tau)$ не может содержать четных синусоидальных гармоник и, как следствие этого, не может обладать свойством нечетности относительно линии $\tau=\pi/2$.

3.4. Характеристика нелинейного элемента, на который подано напряжение $u = -8 + 8 \cos \omega t$, В, аппроксимируется выражением $i = 32 + 4u + \frac{1}{8} u^2$, мА. Найти значения постоянной составляющей I_0 и амплитуд первой I_1 и второй I_2 гармоник.

3.5. На сетку лампы с характеристикой $i_a = 5 + 2u_g + 0,2u_g^2$ мА подано напряжение $u_g = -3 + 2 \cos \omega t$, В. Найти значения постоянной составляющей и амплитуд первой и второй гармоник тока.

3.6. На сетку лампы, характеристика которой передается выражением $i_a = 20 + 4u_g - 0,1u_g^3$, мА, подается напряжение $u_g = 6 \sin \omega t$, В.

Найти значения постоянной составляющей и гармоник.

3.7. Показать в общем виде, что слагаемые с четными степенями (в выражении характеристики нелинейного элемента) приводят к появлению четных гармоник, а с нечетными — к появлению нечетных гармоник.

3.8. Вывести формулу для расчета коэффициента гармоник $k_3 = I_3/I_1$ для случая, когда характеристика нелинейного элемента передается выражением $i = I_0 + Su - \gamma u^3$. Рабочая точка выбрана при $u = 0$.

3.9. Характеристика нелинейного элемента аппроксимируется функцией $i = I_0 e^{au}$, а $u = E + U \cos \omega t$. Составить выражения для расчета гармоник тока на основе использования формул кратных дуг.

Выполнить аналогичные расчеты для условия: $u = E + U \sin \omega t$.

3.10. Характеристика нелинейного элемента аппроксимируется функцией: $i = I_0(1 + u/U_0)^{3/2}$, $u > 0$; найти постоянную составляющую и амплитуды первых двух гармоник на основе разложения характеристики в степенной ряд, ограничив его первыми двумя членами.

Напряжение u имеет вид: $u = U \cos \omega t$. Оценить ошибку в определении постоянной составляющей и амплитуд первых двух гармоник.

3.11. Характеристика нелинейного элемента аппроксимируется функцией (см. задачу 2.40)

$$i = I_0 \left(1 + \frac{2}{\pi} \arctg qu \right);$$

известно, что $u = U_0 \cos \omega t$.

Найти значения постоянной составляющей и амплитуд первой, третьей и пятой гармоник, а также оценить ошибку.

3.12. К диоду, характеристика которого аппроксимируется выражением $i = 0,5 e^{8u}$, подведено напряжение $u = -0,5 + 0,4 \cos \omega t$. Найти постоянную составляющую и амплитуды первых трех гармоник.

3.13. Характеристика диода аппроксимируется формулой $i = 0,5 e^{8u}$, мА. Какое нужно подать смещение, чтобы при амплитуде 0,5 В постоянная составляющая тока составляла 0,05 мА.

3.14. К диоду, характеристика которого передается выражением $i = 0,5 e^{10u}$, мА, подводится напряжение $u = -0,1 + 0,5 \cos \omega t$, В. Найти значение постоянной составляющей и амплитуды первой гармоники тока.

3.15. Характеристику лампы в некоторой области (задача 2.8) можно аппроксимировать выражением

$$i_a = \frac{I_s}{2} \left[1 + \sin \left(\frac{\pi}{2U_s} u_g \right) \right].$$

На сетку лампы с такой характеристикой подается напряжение $u_g = 8 \cos \omega t$, В. Известно, что $U_s = 8$ В (рис. 2.10), $I_s/2 = 16$ мА. Найти значения постоянной составляющей и амплитуды первой и третьей гармоник анодного тока.

3.16. Характеристика нелинейного элемента аппроксимируется выражением $i = I_0 \operatorname{sh} qu$, в котором I_0 — масштабный множитель, а $q = S/I_0$, где $S = di/du$ при $u = 0$. На нелинейный элемент подается напряжение $u = U_0 \cos \omega t$; составить расчетные формулы для амплитуд гармоник на выходе этого элемента.

3.17. Уравнение характеристики лампы (рис. 3.5) передается двумя прямыми: 1) $i_a = 0$ при $u_g < U_s = -6$ В; 2) $i_a = I_0 + Su_g$ при $u_g > U_s$, $S = 5$ мА/В; $I_0 = S|U_s| = 30$ мА.

На сетку подается напряжение $u_g = -10 + 8 \cos(\omega t + \varphi)$, В. Найти постоянную составляющую и амплитуды первой, второй и третьей гармоник анодного тока.

3.18. Характеристика лампы передается двумя прямыми: 1) $i_a = 0$ при $u_g < -8$ В; 2) $i_a = 32 + 4u_g$ при $u_g > -8$ В.

На сетку подается напряжение $u_g = -8 + 8 \cos \omega t$, В. Найти значения постоянной составляющей и амплитуд первой и второй гармоник тока.

3.19. По условию задачи 3.17 выяснить, как изменить смещение E_g , чтобы его третья гармоника была равна нулю.

3.20. Найти, как изменить смещение E_g по условиям задачи 3.18, чтобы амплитуда второй гармоники была максимальной.

3.21. Найти значение угла отсечки θ , при котором угол отсечки не зависит от амплитуды приложенного напряжения U .

3.22. На рис. 3.11 дана характеристика нелинейного элемента, построенная из отрезка прямой $i=0$ при $u < 0$ и параболы $i=au^2$ при $u > 0$. Найти значения постоянной составляющей и амплитуд первых двух гармоник, а также отношения $k_{21}=I_2/I_1$ и $k_{20}=I_2/I_0$ при условии, что $u=U \cos \omega t$.

3.23. Привести известные из таблиц определенные интегралы [21, стр. 383, ф-ла (3.621,1)]

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{\mu-1} x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{\mu-1} x dx = 2^{\mu-2} B\left(\frac{\mu}{2}, \frac{\mu}{2}\right)$$

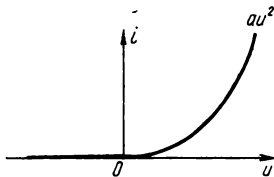


Рис. 3.11

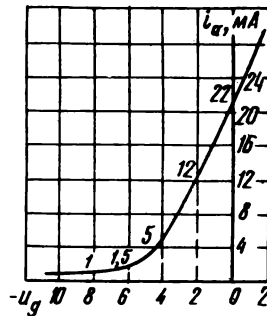


Рис. 3.12

к удобному для вычислений виду.

3.24. Характеристика нелинейного элемента аппроксимируется функцией:

$$y = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ Ax^\alpha & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Составить выражения для расчета постоянной составляющей и первых пяти гармоник, а затем общую рекуррентную формулу для расчета этих гармоник по известным постоянной составляющей и первой гармонике.

3.25. Характеристика нелинейного элемента аппроксимируется функцией $y = Ax^\alpha$, причем коэффициент α представляет собой несократимую дробь $\alpha = p/q$, где q — нечетное число, а p может быть четным или нечетным целым числом. Найти для обоих случаев выражения постоянной составляющей и первых пяти гармоник, если $x = a \cos \omega t = a \cos \tau$.

3.26. Составить формулу для отношения амплитуд третьей и первой гармоник при аппроксимации вида

$$y = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ Ax^\alpha & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

и $x = a \cos \omega t = a \cos \tau$. Найти это отношение при $\alpha_1 = 3/2$, $\alpha_2 = 7/2$.

3.27. Характеристика нелинейного элемента аппроксимируется функцией $i = Au^{\frac{7}{2}}$. Найти значения постоянной составляющей и первых пяти гармоник, если $u = U \cos \omega t = 1 \cos \tau$. Значение коэффициента $A = 1$.

3.28. На сетку лампы, характеристика которой изображена на рис. 3.12, подается напряжение $u_g = 4 + 4 \cos \omega t$, В. Найти значения постоянной составляю-

щей и амплитуд первой и второй гармоник тока, пользуясь формулами трех и пяти ординат.

3.29. Характеристика нелинейного элемента передается формулой: $i=0,4 e^{0,5u}$, мА, причем $u=0,5 \cos \omega t$, В. Найти амплитуду тока первой гармоники по формулам трех ординат.

3.30. На сетку лампы, характеристика которой передается формулой Крылова (задача 2.9): $i = \frac{I_s}{2} (1 + \text{th } qu_g)$, подается напряжение $u_g = 5 \sin \omega t$.

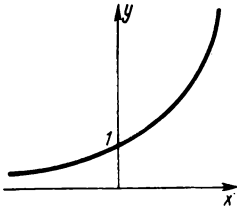


Рис. 3.13

Найти по формуле трех ординат значение тока первой гармоники, если $S=2$ мА/В, $I_s/2=10$ мА.

3.31. Характеристика нелинейного элемента (рис. 3.13) аппроксимируется функцией: $y=1+x/(1,25-x)$. Найти приближенное выражение для амплитуды первой гармоники по формуле трех ординат, если $x=A \cos \omega t$, $A \leq 1$.

3.32. На стр. 73 приведены формулы пяти ординат (3.20), которые получены по пяти известным значениям функции: $i_{\text{макс}}$, $i_{\text{мин}}$, i_0 , i_1 , i_2 , причем значения i_1 и i_2 соответствовали значениям аргумента $\omega t = \pi/3$ и $\omega t = 2\pi/3$ (рис. 3.10).

Получить формулы пяти ординат при новых исходных данных. Значения $i_{\text{макс}}$, $i_{\text{мин}}$ и i_0 — остаются прежними, т. е. при $\omega t=0$, $\omega t=\pi$ и $\omega t=\pi/2$, значения же i_1 и i_2 , которые теперь будем обозначать i'_1 и i'_2 (см. рис. 3.14), должны соответствовать $\omega t = \pi/4$ и $\omega t = 3\pi/4$.

3.33. На рис. 3.15 изображена неоднозначная характеристика $y(x)$ некоторого нелинейного элемента. Верхняя ветвь этой характеристики аппроксимируется функцией $y_1(x)$, а нижняя — функцией $y_2(x)$. На вход нелинейного элемента подается воздействие вида $x=X \cos \omega t$.

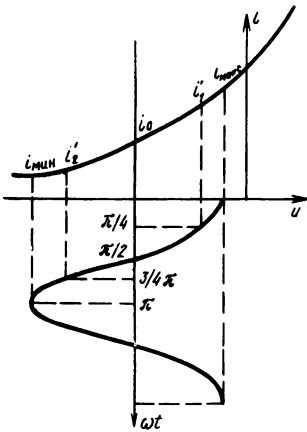


Рис. 3.14

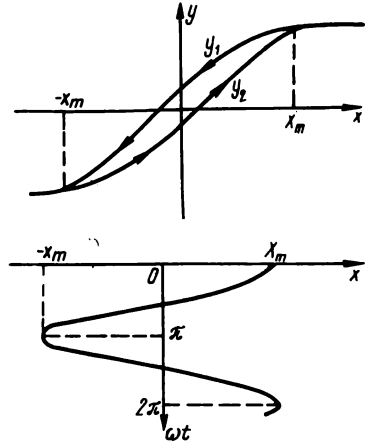


Рис. 3.15

Выписать в общем виде формулы для расчета постоянной составляющей и гармоник реакции $y(t)$.

3.34. На рис. 3.16 изображена неоднозначная характеристика, верхняя и нижняя ветви которой в пределах $-x_m < x < x_m$ достаточно хорошо аппроксимируются выражениями:

$$y_1 = a + x - (1+b)x^3, \quad y_2 = -a + x - (1-b)x^3.$$

«Средняя» ветвь соответствует выражению $y = x - x^3$. Найти, при каком соотношении между a и b в точках $\pm x_m$ справедливо равенство $y_1 = y_2 = y$; записать формулы для расчета постоянной составляющей и амплитуды первой гармоники, если на вход нелинейного элемента с данной характеристикой подается воздействие вида $x = X_m \cos \omega t$.

3.35. На вход нелинейной цепи, характеристика которой передается выражением $i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2$, подается колебание $u = U_1 \sin \omega_1 t + U_2 \sin \omega_2 t$. Найти спектр выходного тока и сравнить по мощности комбинационные и высшие гармонические колебания.

3.36. На нелинейный элемент, характеристика которого аппроксимируется выражением $i = 10 + 2u + 0,2u^2$, мА, подается напряжение $u = 3 \sin \omega t + 2 \sin \Omega t$, В. Найти значения постоянной составляющей, амплитуд гармоник и комбинационных колебаний.

3.37. Найти гармонические и комбинационные колебания на выходе нелинейной системы, характеристика которой аппроксимируется выражением $i = I_0 + Su - \gamma u^3$, а напряжение u состоит из двух синусоидальных напряжений: $u = U_1 \sin \omega t + U_2 \sin \Omega t$.

3.38. На вход нелинейного элемента с характеристикой $i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3$ подается напряжение

$$u = U_0 + U_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + U_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + U_3 \cos(\omega_3 t + \varphi_3).$$

Найти выражения для составляющих с частотами ω_1 , $2\omega_2$ и постоянной составляющей.

3.39. На вход нелинейного элемента, характеристика которого описывается полным полиномом третьей степени, подается напряжение, состоящее из трех гармонических колебаний с разными частотами. Подсчитать, сколько колебаний с разными частотами (включая постоянную составляющую) будет содержать выходной ток, и указать число колебаний каждого порядка.

3.40. На вход нелинейной цепи подается напряжение $u = U \cos \omega_1 t + U \cos \omega_2 t$. Составить спектрограммы выходного тока для цепей, имеющих следующие характеристики:

а) $i = I_0(1 + a_1 u + a_2 u^2)$; б) $i = I_0(1 + a_1 u + a_3 u^3)$; в) $i = I_0(1 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3)$,

причем численные значения коэффициентов a_1 , a_2 , a_3 одинаковы, и каждый из них равен единице.

3.41. На вход нелинейной цепи подается напряжение $u = U(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t + \cos \omega_3 t)$. Составить спектрограммы выходного тока для цепей, характеристики которых совпадают с характеристиками по условию задачи 3.40.

3.42. Вывести формулы для расчета амплитуд гармонических и комбинационных колебаний при подаче на вход нелинейной цепи двух и более косинусоидальных колебаний, если характеристика цепи аппроксимируется выражением вида $i = I_0 e^{a u}$.

3.43. На вход нелинейной цепи с характеристикой $i = 0,5 e^{10 u}$, мА, подаются два колебания с частотами ω и Ω и амплитудами 0,2 В и 0,1 В. Найти амплитуду колебания с частотой $\omega \pm \Omega$.

3.44. На вход нелинейной цепи с характеристикой $i = 0,5 e^{8 u}$ подаются колебания с амплитудами 0,4 В и 0,3 В и частотами ω и Ω . Найти амплитуду комбинационного колебания с частотой $3\omega \pm 2\Omega$.

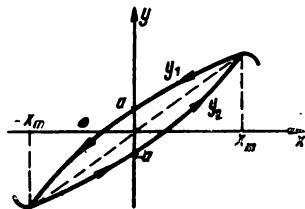


Рис. 3.16

РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ

3.1. Формулы (3.1) дают алгоритм для составления схем; соответствующие схемы для постоянной составляющей A_0 и амплитуд A_n , B_n гармоник с частотами $n\omega = n2\pi/T$ изображены на рис. Р3.1. На схемах не показано управление интегратором, при помощи которого он включается и отключается в соответ-

ствии с выбранной длительностью kT , где k — натуральное число, а также управление местным генератором, создающим функцию $\cos n\omega t$. Ослабитель a регулируется по выбранному числу k .

3.2. Так как $\cos \omega_n t = \cos(-\omega_n t)$, то $y(t) = y(-t)$. Соответствующая иллюстрация дана на рис. P.3.2.

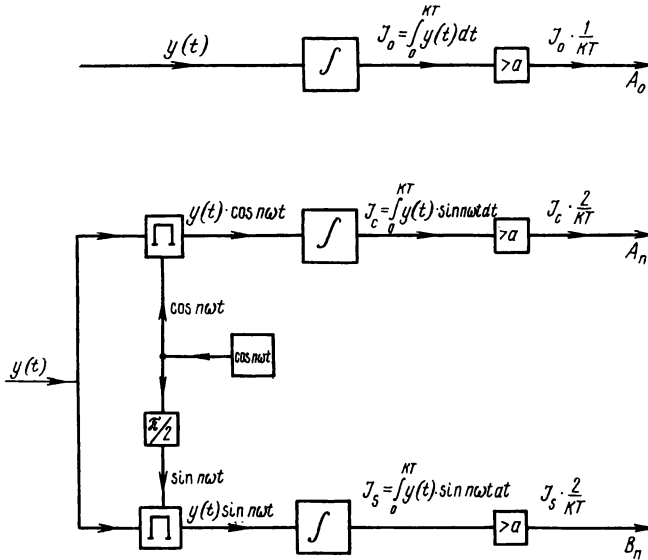


Рис. P.3.1

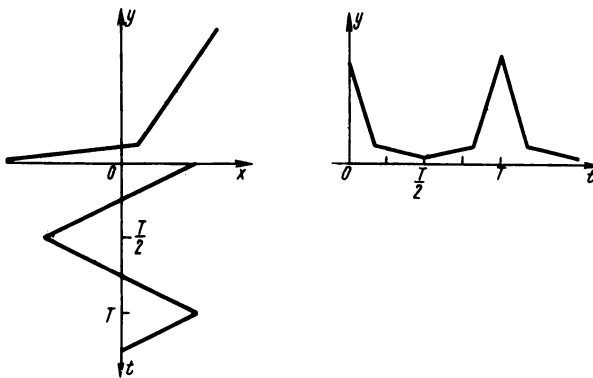


Рис. P.3.2

3.3. По условию задачи функция $y(\tau)$ является нечетной и, следовательно, может быть разложена в ряд Фурье по синусам: $y(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\tau$. Пужно установить, возможно ли равенство

$$y\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right) = -y\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right).$$

Для первой гармоники:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right) = \sin\frac{\pi}{2} \cos \tau + \cos\frac{\pi}{2} \sin \tau = \cos \tau,$$

$$-\sin\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right) = -\left(\sin\frac{\pi}{2} \cos \tau - \cos\frac{\pi}{2} \sin \tau\right) = -\cos \tau$$

равенство невозможно.

Для второй гармоники:

$$\sin 2\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right) = -\sin 2\tau,$$

$$-\sin 2\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right) = -(-\sin 2\tau) = \sin 2\tau$$

равенство также невозможно.

Легко показать невозможность выполнения равенства и для n -й гармоники; следовательно, приведенное выше равенство для нечетной функции $y(\tau) = f(b \sin \tau)$ невозможно. По этим причинам для ряда по синусам нет формул, аналогичных ф-лам (3.4) ряда по косинусам; другими словами, при разложении в ряд по синусам четные синусоидальные составляющие равны нулю.

Уместно напомнить, что разложения по формулам кратных дуг функций $\sin^2 x$, $\sin^4 x$ и т. д. (см. табл. 3.1) содержат четные косинусоидальные (а не синусоидальные) составляющие.

3.4. Подставляя закон изменения напряжения в выражение характеристики, получаем

$$i = 32 + 4(-8 + 8 \cos \omega t) + \frac{1}{8}(-8 + 8 \cos \omega t)^2.$$

Раскрывая скобки и пользуясь формулами кратных дуг, находим: $I_0 = 12$ мА, $I_1 = 16$ мА, $I_2 = 4$ мА.

3.5. $I_{a_0} = 1,2$ мА, $I_{a_1} = 1,6$ мА, $I_{a_2} = 0,4$ мА.

3.6. $I_{a_0} = 20$ мА, $I_{a_1} = 7,8$ мА, $I_{a_2} = 5,4$ мА.

3.7. Доказательство вытекает непосредственно из формул кратных дуг (табл. 3.1).

$$3.8. k_3 = \frac{\frac{\gamma}{S} U^2}{4 - 3 \frac{\gamma}{S} U^2}.$$

3.9. Подставив закон изменения напряжения u в выражение характеристики, получим

$$i = I_0 e^{aE} e^{aU \cos \omega t} \text{ или } y = e^{A \cos x} = e^x,$$

где $y = \frac{i}{I_0 e^{aE}}$, $A = aU$, $x = A \cos \tau$.

Представим e^x в виде степенного ряда:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots;$$

заменяем x через $A \cos \tau$ и воспользуемся формулами кратных дуг:

$$e^{A \cos \tau} = 1 + A \cos \tau + \frac{A^2}{2!} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\tau \right) + \frac{A^3}{3!} \left(\frac{3}{4} \cos \tau + \frac{1}{4} \cos 3\tau \right) + \\ + \frac{A^4}{4!} \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\tau + \frac{1}{8} \cos 4\tau \right) + \frac{A^5}{5!} \left(\frac{5}{8} \cos \tau + \frac{5}{16} \cos 3\tau + \right. \\ \left. + \frac{1}{16} \cos 5\tau \right) + \dots;$$

Группируя подобные члены, нетрудно получить следующие выражения:

$$e^{A \cos \tau} = \left[1 + \frac{\left(\frac{A}{2}\right)^2}{1!2} + \frac{\left(\frac{A}{2}\right)^4}{2!2^2} + \frac{\left(\frac{A}{2}\right)^6}{3!2^3} + \dots \right] + \\ + 2 \left[\frac{A}{2} + \frac{\left(\frac{A}{2}\right)^3}{1!2!} + \frac{\left(\frac{A}{2}\right)^5}{2!3!} + \frac{\left(\frac{A}{2}\right)^7}{3!4!} + \dots \right] \cos \tau + \\ + 2 \left[\frac{\left(\frac{A}{2}\right)^3}{0!2!} + \frac{\left(\frac{A}{2}\right)^4}{1!3!} + \frac{\left(\frac{A}{2}\right)^6}{2!4!} + \dots \right] \cos 2\tau + \\ \dots$$

Выражения в квадратных скобках представляют собой модифицированные функции Бесселя (см. стр. 66), которые здесь обозначаются символами $B_n(x)$; таким образом, приходим к уже знакомой ф-ле (3.7):

$$e^{A \cos \tau} = B_0(A) + 2B_1(A) \cos \tau + 2B_2(A) \cos 2\tau + \dots$$

Аналогично можно получить и вторую ф-лу (3.7).

3.10. Введем временно обозначения $i/I_0 = y$; $u/U_0 = x$; $U/U_0 = a$; $\omega t = \tau$ и разложим функцию $y = (1+x)^{3/2}$ в степенной ряд:

$$y = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \dots = 1 + \frac{3}{2}(1+0)^{1/2}x + \\ + \frac{3}{8}(1+0)^{-1/2}x^2 + \dots = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots$$

По условию: $x = u/U_0 = (U/U_0) \cos \omega t = a \cos \tau$; следовательно,

$$y = 1 + \frac{3}{2} a \cos \tau + \frac{3}{8} a^2 \cos^2 \tau.$$

По формулам кратных дуг находим:

$$Y_0 = 1 + \frac{3}{16} a^2, \quad J_0 = I_0 \left(1 + \frac{3}{16} \frac{U^2}{U_0^2} \right),$$

$$Y_1 = \frac{3}{2} a, \quad J_1 = I_0 \frac{3}{2} \frac{U}{U_0},$$

$$Y_2 = \frac{3}{16} a^2, \quad J_2 = I_0 \frac{3}{16} \left(\frac{U}{U_0} \right)^2.$$

Теперь оценим ошибку. Разложим в бесконечный ряд функцию $y = (1+x)^{3/2}$

$$y = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{3 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 - \dots$$

Так как ряд является знакопеременным (начиная с третьего члена), то при отбрасывании $(n+1)$ -го члена и всех последующих совершается ошибка δ , по абсолютной величине меньшая первого отброшенного члена, т. е. при отбрасывании всех членов ряда, начиная с третьего, имеем:

$$|\delta| \leq \frac{3}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 = \frac{1}{16} x^3.$$

Таким образом, если $x < 1$, т. е. $U < U_0$, то ошибка в определении постоянной составляющей и первых двух гармоник примерно меньше шести процентов.

3.11. Введем временно обозначения: $i/I_0 = y$; $qu = x$; $\omega t = \tau$; $qU_0 = a$ и разложим в степенной ряд функцию $\arcsin x$:

$$y = 1 + \frac{2}{\pi} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \right), \quad (|x| < 1).$$

Подставляя сюда $x = a \cos \tau$, получаем

$$y = 1 + \frac{2}{\pi} \left(a \cos \tau - \frac{a^3 \cos^3 \tau}{3} + \frac{a^5 \cos^5 \tau}{5} - \dots \right).$$

Применяя формулы кратных дуг, находим

$$\begin{aligned} y = 1 + \frac{2}{\pi} \left[a \cos \tau - \frac{a^3}{3} \left(\frac{3}{4} \cos \tau + \frac{1}{4} \cos 3\tau \right) + \frac{a^5}{5} \left(\frac{1}{16} \cos 5\tau + \frac{5}{16} \cos 3\tau + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{5}{8} \cos \tau \right) - \dots \right] = 1 - \frac{2}{\pi} \left[\left(a - \frac{a^3}{4} + \frac{a^5}{8} - \dots \right) \cos \tau - \right. \\ \left. - \left(\frac{a^3}{3 \cdot 4} - \frac{a^5}{5 \cdot 16} + \dots \right) \cos 3\tau + \left(\frac{a^5}{5 \cdot 16} - \dots \right) \cos 5\tau - \dots \right]. \end{aligned}$$

Теперь можно выписать значения постоянной составляющей и амплитуд гармоник:

$$\begin{aligned} Y_0 &= 1, & J_0 &= I_0, \\ Y_1 &= \frac{2}{\pi} \left(a - \frac{a^3}{4} + \frac{a^5}{8} - \dots \right), & J_1 &= I_0 \frac{2}{\pi} \left(qU_0 - \frac{q^3 U_0^3}{4} + \frac{q^5 U_0^5}{8} - \dots \right), \\ Y_3 &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{a^3}{3 \cdot 4} - \frac{a^5}{5 \cdot 16} + \dots \right), & J_3 &= I_0 \frac{2}{\pi} \left(\frac{q^3 U_0^3}{3 \cdot 4} - \frac{q^5 U_0^5}{5 \cdot 16} + \dots \right), \\ Y_5 &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{a^5}{5 \cdot 16} - \dots \right), & J_5 &= I_0 \frac{2}{\pi} \left(\frac{q^5 U_0^5}{5 \cdot 16} - \dots \right). \end{aligned}$$

Так как ряды, через которые выражаются амплитуды гармоник, являются знакопеременными, оценить ошибку можно для каждой гармоники в отдельности. Оценим, например, ошибку, совершаемую при отбрасывании всех членов ряда, начиная с $x^7/7$; эта ошибка δ удовлетворяет неравенству $|\delta| \leq (qU_0)^7/7$.

3.12. Подставляя закон изменения напряжения в формулу для характеристики днюда, получаем:

$$\begin{aligned} i &= 0,5 e^8 (-0,5 + 0,4 \cos \omega t) = 0,5 e^{-4} e^{3,2 \cos \omega t} = 0,5 \cdot 0,0183 e^{3,2 \cos \omega t} = \\ &= 0,00915 e^{3,2 \cos \omega t}. \end{aligned}$$

На основании ф-лы (3.7) имеем ¹⁾:

$$i_0 = 0,00915 B_0(3,2) \approx 0,00915 \cdot 5,75 \approx 0,052 \text{ мА},$$

$$I_1 = 0,00915 2B_1(3,2) \approx 0,00915 \cdot 2 \cdot 4,73 \approx 0,086 \text{ мА},$$

$$I_2 = 0,00915 2B_2(3,2) \approx 0,00915 \cdot 2 \cdot 2,79 \approx 0,051 \text{ мА}.$$

$$I_3 = 0,00915 2B_3(3,2) \approx 0,00915 \cdot 2 \cdot 1,25 \approx 0,023 \text{ мА}.$$

3.13. $E \approx -0,6 \text{ В}$.

3.14. $I_0 \approx 5 \text{ мА}$, $I_1 \approx 8,9 \text{ мА}$.

3.15. Подставляя значение u_g в выражение характеристики лампы, получаем

$$i_a = \frac{I_s}{2} + \frac{I_s}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2,8} 8 \cos \omega t\right) = \frac{I_s}{2} + \frac{I_s}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cos \pi t\right).$$

Воспользовавшись ф-лой (3.8), находим:

$$I_{a0} = \frac{I_s}{2}, \quad I_{a1} = \frac{I_s}{2} \cdot 2J_1\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad I_{a3} = \frac{I_s}{2} \cdot 2J_3\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

По графикам рис. 3.4 находим ²⁾: $J_1(\pi/2) \approx 0,57$; $J_3(\pi/2) \approx 0,08$. Следовательно, $I_{a0} = \frac{I_s}{2} = 1,6 \text{ мА}$; $I_{a1} = 32 \cdot 0,57 \approx 18,2 \text{ мА}$; $I_{a3} = 32 \cdot 0,08 \approx 2,56 \text{ мА}$.

3.16. $I_n = 2B_n(qU_0)$.

3.17. В соответствии с ф-лой (3.12) амплитуда n -й гармоники $I_{an} = \alpha_n i_a \text{ макс}$. Находим $i_a \text{ макс}$ по ф-лам (3.10) и (3.11):

$$i_a \text{ макс} = S U_g (1 - \cos \theta) = 5 \cdot 8 (1 - 0,5) = 20 \text{ мА},$$

$$\cos \theta = \frac{S E_g - I_0}{S U_g} = \frac{5 \cdot 10 - 30}{8 \cdot 5} = 0,5, \quad \theta = 60^\circ.$$

Находим по графикам рис. 3.6 значения коэффициентов: $\alpha_0 \approx 0,22$; $\alpha_1 \approx 0,39$; $\alpha_2 \approx 0,28$; $\alpha_3 \approx 0,14$. Теперь рассчитаем I_{a0} , I_{a1} , I_{a2} и I_{a3} :

$$I_{a0} = 0,22 \cdot 20 = 4,4 \text{ мА}; \quad I_{a1} = 0,39 \cdot 20 = 7,8 \text{ мА}; \quad I_{a2} = 0,28 \cdot 20 = 5,6 \text{ мА};$$

$$I_{a3} = 0,14 \cdot 20 = 2,8 \text{ мА}.$$

3.18. $I_{a0} = 10,2 \text{ мА}$; $I_{a1} = 16 \text{ мА}$; $I_{a2} = 6,4 \text{ мА}$.

3.19. $E_g = -6 \text{ В}$.

3.20. $E_g = -12 \text{ В}$.

3.21. $\theta = \pi/2$.

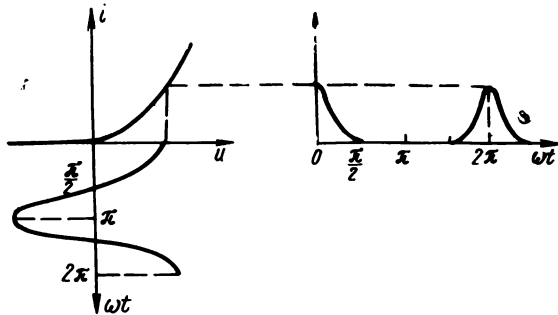


Рис. Р 3.3

¹⁾ Значения функций $B_n(x)$, найденные по рис. 3.3, могут содержать существенную ошибку. Рекомендуется пользоваться таблицами в [81, стр. 251 и др.].

²⁾ Для более точного определения значений функций Бесселя рекомендуется пользоваться таблицами в [81, стр. 251 и др.].

3.22. В соответствии с рис. P3.3 имеем:

$$I_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} i(\omega t) \cos n \omega t d\omega t = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} aU^2 \cos^2 \omega t \cos n \omega t d\omega t.$$

При $n=0$
$$\frac{I_0}{2} = \frac{2}{\pi} aU^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \omega t d\omega t = \frac{aU^2}{2}.$$

При $n=1$
$$I_1 = \frac{2}{\pi} aU^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \omega t \cos \omega t d\omega t = \frac{4}{3\pi} aU^2.$$

При $n=2$
$$I_2 = \frac{2}{\pi} aU^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \omega t \cos 2\omega t d\omega t = \frac{3}{4} aU^2 - \frac{I_0}{2} = \frac{1}{4} aU^2.$$

$$k_{21} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{3\pi}{16}, \quad k_{20} = \frac{I_2}{I_0} = \frac{1}{4}.$$

3.23. Выразим прежде всего бэ́та-функцию $B(x, y)$ через гамма-функцию $\Gamma(x)$, для которой в математических справочниках приводятся подробные таблицы. Известно [21, стр. 38, ф-ла (8.384,1)] следующее представление: $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$; таким образом,

$$B\left(\frac{\mu}{2}, \frac{\mu}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{2}\right)}.$$

Воспользуемся теперь формулой удвоения [21, стр. 952, ф-ла (8.335,1)]:

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right);$$

преобразуем знаменатель:

$$\Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{2}\right) = \frac{2^{\mu-1}}{\sqrt{2}} \Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{1}{2}\right).$$

Выражение интеграла

$$J = \int_0^{\pi/2} \sin^{\mu-1} x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{\mu-1} x dx = 2^{\mu-2} B\left(\frac{\mu}{2}, \frac{\mu}{2}\right)$$

теперь можно переписать в виде

$$\begin{aligned} J &= 2^{\mu-2} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)}{\Gamma(\mu)} = \\ &= 2^{\mu-2} \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\mu-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)}. \end{aligned}$$

$$\text{Итак, } J = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)}.$$

3.24. В соответствии с рис. P3.4 и общими ф-лами (3.1) имеем:

$$Y_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(\tau) d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} A (a \cos \tau)^\alpha d\tau = \frac{Aa^\alpha}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^\alpha \tau d\tau.$$

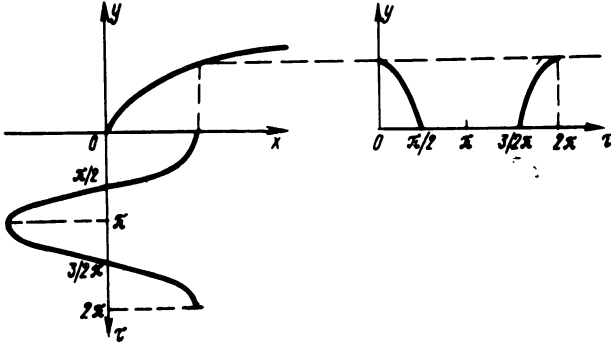


Рис. P3.4

Определенный интеграл выражается через гамму-функцию [ф-ла (3.14)]:

$$Y_0 = \frac{Aa^\alpha}{\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)} = \frac{Aa^\alpha}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)}.$$

Для первой гармоники:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(\tau) \cos \tau d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} A (a \cos \tau)^\alpha \cos \tau d\tau = \\ &= \frac{2Aa^\alpha}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^{\alpha+1} \tau d\tau = \frac{Aa^\alpha}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Для второй гармоники:

$$\begin{aligned} Y_2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(\tau) \cos 2\tau d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} A (a \cos \tau)^\alpha (2\cos^2 \tau - 1) d\tau = \\ &= \frac{4Aa^\alpha}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^{\alpha+2} \tau d\tau - \frac{2Aa^\alpha}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^\alpha \tau d\tau = \frac{2Aa^\alpha}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+4}{2}\right)} - 2Y_0. \end{aligned}$$

Для третьей гармоники:

$$\begin{aligned}
 Y_3 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(\tau) \cos 3\tau d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} A (a \cos \tau)^\alpha (4\cos^3 \tau - 3\cos \tau) d\tau = \\
 &= \frac{8Aa^\alpha}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^{\alpha+3} \tau d\tau - \frac{6Aa^\alpha}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^{\alpha+1} \tau d\tau = \frac{4Aa^\alpha}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+4}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+5}{2}\right)} - 3Y_1.
 \end{aligned}$$

Для четвертой гармоники:

$$\begin{aligned}
 Y_4 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(\tau) \cos 4\tau d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} A (a \cos \tau)^\alpha (8\cos^4 \tau - 4\cos 2\tau - 3) d\tau = \\
 &= \frac{16Aa^\alpha}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^{\alpha+4} \tau d\tau - \frac{8Aa^\alpha}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^\alpha \tau \cos 2\tau - \frac{6Aa^\alpha}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^\alpha \tau d\tau = \\
 &= \frac{8Aa^\alpha}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+6}{2}\right)} - 4Y_2 - 6Y_0.
 \end{aligned}$$

Для пятой гармоники:

$$\begin{aligned}
 Y_5 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(\tau) \cos 5\tau d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} A \cos^\alpha \tau (16\cos^5 \tau - 5\cos 3\tau - 10\cos \tau) d\tau = \\
 &= \frac{32Aa^\alpha}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^{\alpha+5} \tau d\tau - \frac{10Aa^\alpha}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^\alpha \tau \cos 3\tau d\tau - \frac{20Aa^\alpha}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^\alpha \tau \cos \tau d\tau = \\
 &= \frac{16Aa^\alpha}{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+6}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+7}{2}\right)} - 5Y_3 - 10Y_1.
 \end{aligned}$$

Теперь нетрудно составить общую рекуррентную формулу для вычисления первых пяти гармоник по известным постоянной составляющей и первой гармонике:

$$Y_n = \frac{2^{n-1} \cdot Aa^\alpha}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+n+2}{2}\right)} - nY_{n-2} - \frac{n}{2} (n-1) Y_{n-4}, \quad (n \leq 5).$$

3.25. Если p — четное число, то $y(x) = y(-x)$ и, кроме того (см. рис. 3.1в и 3.8), $y\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right) = y\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right)$; согласно ф-лам (3.4) все нечетные гармоники равны нулю, а четные определяются как

$$Y_{2n} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} y(\tau) \cos 2n\tau d\tau, \quad Y_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} y(\tau) d\tau.$$

Легко видеть, что эти выражения отличаются от выражений задачи 3.24 только множителем 2; таким образом, в данном случае действительны все полученные там формулы, но с учетом этого множителя.

Если p — нечетное число, то $y(x) = -y(-x)$ и, кроме того (см. рис. 3.1б и 3.8), $y\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right) = -y\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right)$; согласно ф-лам (3.3) все четные гармоники равны нулю, а нечетные определяются как

$$Y_{2n-1} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} y(\tau) \cos (2n-1)\tau d\tau.$$

Эти выражения также отличаются от выражений задачи 3.24 множителем 2, т. е. и в этом случае действительны все полученные там результаты с учетом этого множителя.

3.26. В соответствии с результатом, полученным в задаче 3.24, имеем

$$\frac{Y_3}{Y_1} = \frac{4Aa^\alpha}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+4}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+5}{2}\right)} \frac{\sqrt{\pi}}{Aa^\alpha} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)} - 3.$$

С помощью равенства $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ это выражение существенно упрощается:

$$\frac{Y_3}{Y_1} = 4 \frac{\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right)}{\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2}\right)} - 3 = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 3}.$$

При $\alpha_1 = 3/2$ $Y_3/Y_1 = \frac{1}{9}$, а при $\alpha_2 = 7/2$ $Y_3/Y_1 = 0,38$.

3.27. В данном случае характеристика определена только для $u > 0$ и $i > 0$ (см. рис. 3.8); для расчета постоянной составляющей и первых пяти гармоник следует пользоваться ф-лами (3.15), (3.16), (3.17):

$$Y_0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{3,5+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3,5+2}{2}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(2,25)}{\Gamma(2,75)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1,2}{1,62} = 0,208,$$

$$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(2,75)}{\Gamma\left(\frac{3,5+3}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1,62}{\Gamma(3,25)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1,62}{2,7} = 0,338,$$

$$Y_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{3,5+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3,5+4}{2}\right)} - 2Y_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{2,7}{4,45} - 0,416 = 0,686 - 0,416 = 0,270,$$

$$Y_3 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{4,45}{\Gamma\left(\frac{3,5+5}{2}\right)} - 3Y_1 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{4,45}{8,8} - 3 \cdot 0,338 = 1,142 - 1,014 = 0,128,$$

$$Y_4 = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \frac{8,8}{\Gamma\left(\frac{3,5+6}{2}\right)} - 4Y_2 - 6Y_0 = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \frac{8,6}{16,65} - 4 \cdot 0,270 - 6 \cdot 0,208 =$$

$$= 0,052.$$

$$Y_5 = \frac{16}{\sqrt{\pi}} \frac{16,65}{\Gamma\left(\frac{3,5+7}{2}\right)} - 5Y_3 - 10Y_1 = \frac{16}{\sqrt{\pi}} \frac{16,65}{37,40} - 5 \cdot 0,128 - 10 \cdot 0,338 =$$

$$= 0,028.$$

3.28. Чтобы воспользоваться для расчета формулами трех ординат [ф-ла (3.19)], нужно располагать значениями i_{\max} , i_{\min} и i_0 . Непосредственно из рис. 3.12 (см. также рис. 3.9) получаем: $i_{\max}=22$ мА; $i_{\min}=1$ мА; $i_0=5$ мА. Следовательно,

$$I_{a0} = \frac{i_{\max} + i_{\min}}{4} + \frac{i_0}{2} = \frac{23}{4} + \frac{5}{2} = \frac{33}{4} = 8,25 \text{ мА},$$

$$I_{a1} = \frac{i_{\max} - i_{\min}}{2} = \frac{21}{2} = 10,5 \text{ мА};$$

$$I_{a2} = \frac{i_{\max} + i_{\min}}{4} - \frac{i_0}{2} = \frac{23}{4} - \frac{5}{2} = \frac{13}{4} = 3,25 \text{ мА}.$$

При расчете по формулам пяти ординат [ф-ла (3.20)] нужно располагать значениями i_{\max} , i_{\min} , i_0 , i_1 , i_2 (рис. 3.10). Из рис. 3.12 находим: $i=12$ мА; $i_2=1,5$ мА. Выполняем расчет:

$$I_{a0} = \frac{1}{6} [(i_{\max} + i_{\min}) + 2(i_1 + i_2)] = \frac{1}{6} (23 + 27) = \frac{50}{6} = 8,34 \text{ мА},$$

$$I_{a1} = \frac{1}{3} [(i_{\max} - i_{\min}) + (i_1 - i_2)] = \frac{1}{3} (21 + 10,5) = \frac{31,5}{3} = 10,5 \text{ мА},$$

$$I_{a2} = \frac{i_{\max} + i_{\min}}{4} - \frac{i_0}{2} = 3,25 \text{ мА}.$$

3.29. $I_{a1}=10,9$ мА.

3.30. $I_{a1}=7,6$ мА.

3.31. Так как $J_{\max} = 1 + \frac{A}{1,25 - A}$, $J_{\min} = 1 - \frac{A}{1,25 + A}$, то $Y_1 =$

$$= \frac{1}{2} (J_{\max} - J_{\min}) = \frac{1}{2} \frac{2,25}{(1,25^2 - A^2)}.$$

3.32. $I_0 = \frac{1}{8} [(i_{\max} + i_{\min}) + 2(i_0 + i'_1 + i'_2)],$

$$I_1 = \frac{1}{4} [(i_{\text{макс}} - i_{\text{мин}}) + (i'_1 - i'_2)].$$

$$I_2 = \frac{1}{4} [(i_{\text{макс}} + i_{\text{мин}}) - 2i_0],$$

$$I_3 = \frac{1}{4} [(i_{\text{макс}} - i_{\text{мин}}) - \sqrt{2}(i'_1 - i'_2)],$$

$$I_4 = \frac{1}{8} [(i_{\text{макс}} + i_{\text{мин}}) + 2i_0 - 2(i'_1 + i'_2)].$$

3.33. В соответствии с общими формулами (3.1):

$$Y_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(\omega t) d\omega t, \quad Y_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(\omega t) \cos n\omega t d\omega t.$$

В данном случае $y(x) = y_1(X_m \cos \omega t)$ изменяется по закону $y_1(x)$ при $0 < \omega t < \pi$ и по закону $y_2(x)$ при $\pi < \omega t < 2\pi$ и т. д. В соответствии с этим имеем:

$$Y_0 = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\pi} y_1(X_m \cos \omega t) d\omega t + \int_{\pi}^{2\pi} y_2(X_m \cos \omega t) d\omega t \right],$$

$$Y_{n \cos} = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} y_1(X_m \cos \omega t) \cos n\omega t d\omega t + \int_{\pi}^{2\pi} y_2(X_m \cos \omega t) \cos n\omega t d\omega t \right],$$

$$Y_{n \sin} = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} y_1(X_m \cos \omega t) \sin n\omega t d\omega t + \int_{\pi}^{2\pi} y_2(X_m \cos \omega t) \sin n\omega t d\omega t \right],$$

$$y(t) = Y_0 + \sum_n Y_{n \cos} \cos n\omega t + \sum_n Y_{n \sin} \sin n\omega t.$$

3.34. Приравнявая выражения

$$y_1|_{x=x_m} = a + x_m - (1+b)x_m^3,$$

$$y_2|_{x=x_m} = -a + x_m - (1-b)x_m^3,$$

получаем уравнение, из которого находим, что $a/b = x_m^3$.

Выражения для расчета постоянной составляющей и амплитуды первой гармоники следующие:

$$Y_0 = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} [a + X_m \cos \omega t - (1+b)X_m^3 \cos^3 \omega t] d\omega t + \int_{\pi}^{2\pi} [-a + X_m \cos \omega t - (1-b)X_m^3 \cos^3 \omega t] d\omega t \right\},$$

$$Y_{1 \cos \sin} = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi} [a + X_m \cos \omega t - (1+b) X_m^3 \cos^3 \omega t]_{\sin}^{\cos} \omega t d\omega t + \int_{\pi}^{2\pi} [-a + X \cos \omega t - (1-b) X_m^3 \cos^3 \omega t]_{\sin}^{\cos} \omega t d\omega t \right\}.$$

3.35. Выходной ток изменяется во времени по закону:

$$i = a_0 + a_1 U_1 \sin \omega_1 t + a_1 U_2 \sin \omega_2 t + a_2 U_1^2 \sin^2 \omega_1 t + a_2 U_2^2 \sin^2 \omega_2 t + a_2 2 U_1 U_2 \sin \omega_1 t \sin \omega_2 t.$$

Постоянная составляющая, амплитуды гармоник и комбинационных колебаний выражаются как

$$I_0 = a_0 + \frac{a_2 U_1^2}{2} + \frac{a_2 U_2^2}{2},$$

$$I_{\omega_1} = a_1 U_1, \quad I_{\omega_2} = a_1 U_2,$$

$$I_{2\omega_1} = \frac{a_2 U_1^2}{2}, \quad I_{2\omega_2} = \frac{a_2 U_2^2}{2}.$$

Для сравнения по мощности нужно воспользоваться формулой $I^2 R/2$, считая, что сопротивление R одинаково на всех частотах, т. е. следует сравнивать между собой квадраты соответствующих амплитуд.

Мощность высших (вторых) гармоник

$$P_r = A \left(\frac{a_1^2 U_1^4}{4} + \frac{a_2^2 U_2^4}{4} \right) = A a_2^2 U_1^2 U_2^2 \left(\frac{U_1^2}{4U_2^2} + \frac{U_2^2}{4U_1^2} \right).$$

Мощность комбинационных колебаний

$$P_k = A \cdot 2 a_2^2 U_1^2 U_2^2.$$

В этих выражениях A — коэффициент пропорциональности.

Сравним теперь мощность высших гармоник с мощностью комбинационных колебаний:

$$\frac{P_r}{P_k} = \frac{1}{8} \left(\frac{U_1^2}{U_2^2} + \frac{U_2^2}{U_1^2} \right).$$

Если $U_1 = U_2$, то $P_k = 4P_r$, т. е. мощность комбинационных колебаний в четыре раза больше мощности высших гармоник. При любых других соотношениях U_1 и U_2 влияние высших гармоник относительно больше (рис. P3.5).

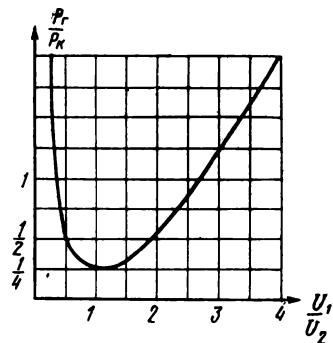


Рис. P3.5

3.36. $I_0 = 11,3$ мА; $I_{1\omega} = 6$ мА; $I_{12} = 4$ мА; $I_{2\omega} = 0,9$ мА; $I_{22} = 0,4$ мА; $I_{\omega-\omega} = I_{\omega+\omega} = 1,2$ мА.

3.37. $I_0 = I_0$,

$$I_{1\omega} = S U_1 - \frac{3}{4} \gamma U_1^3 - \frac{3}{2} \gamma U_1 U_2^2,$$

$$I_{12} = S U_2 - \frac{3}{4} \gamma U_2^3 - \frac{3}{2} \gamma U_1^2 U_2,$$

$$I_{3\omega} = \frac{\gamma}{4} U_1^3, \quad I_{3\Omega} = \frac{\gamma}{4} U_2^3, \quad I_{2\omega-\Omega} = I_{2\omega+\Omega} = 3\gamma U_1^2 U_2,$$

$$I_{\omega-2\Omega} = I_{\omega+2\Omega} = 3\gamma U_1 U_2^2.$$

3.38. $i_{\omega_1} = \left[a_1 U_1 + \frac{3}{4} a_3 U_1 (U_1^2 + 2U_2^2 + 2U_3^2) \right] \cos(\omega_1 t + \varphi_1),$

$$i_{2\omega_2} = \frac{1}{2} a_2 U_2^2 \cos(2\omega_2 t + 2\varphi_2),$$

$$I_0 = a_0 + \frac{1}{2} a_2 (U_1^2 + U_2^2 + U_3^2).$$

3.39. 31 колебание (постоянная составляющая, девять гармоник, шесть колебаний второго порядка, пятнадцать колебаний третьего порядка).

3.40. Спектрограммы изображены на рис. P3.6.

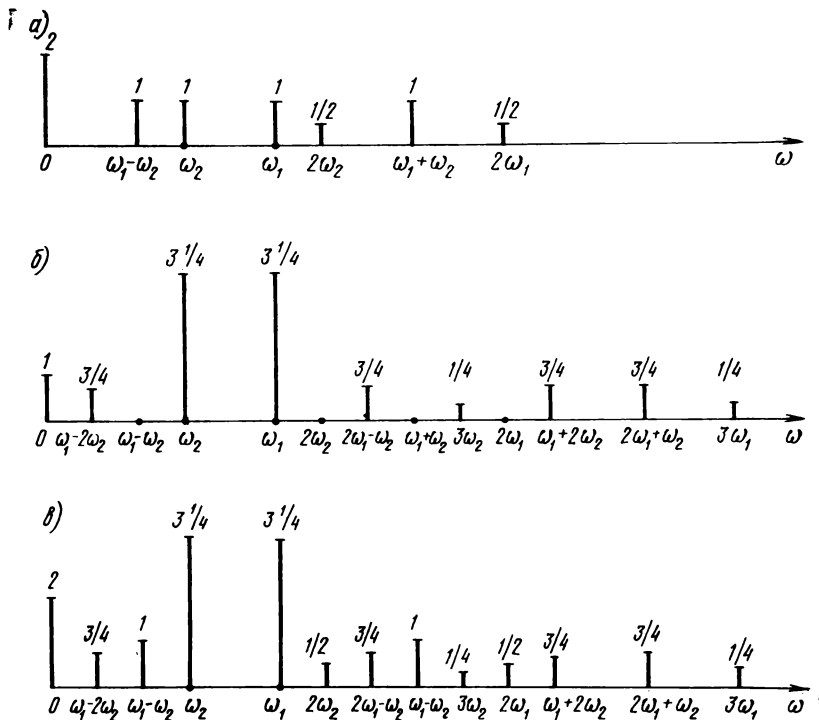
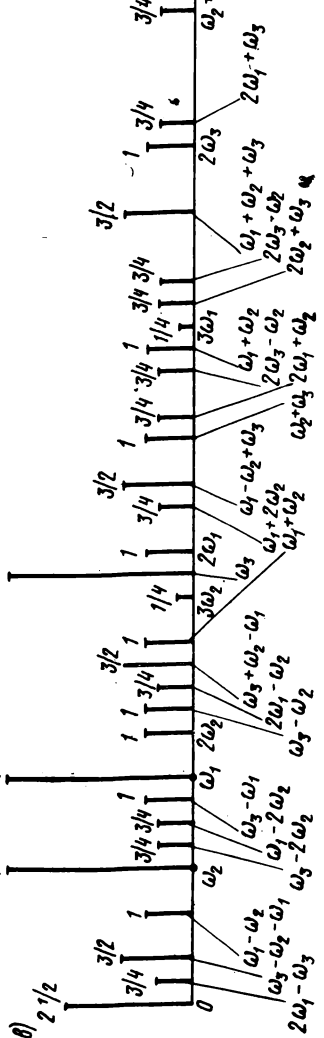
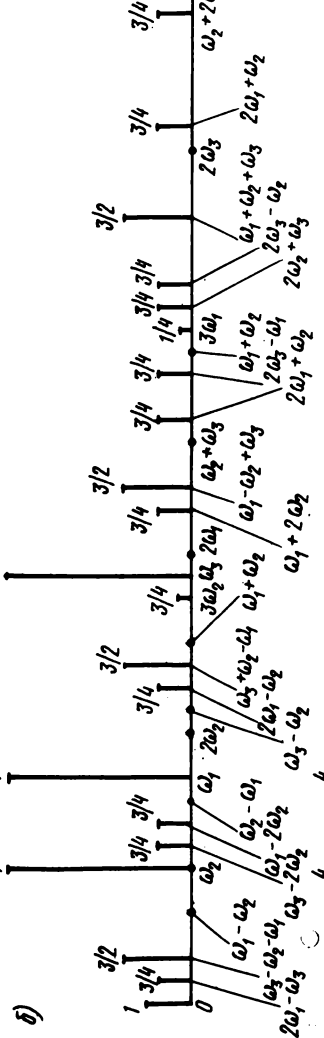
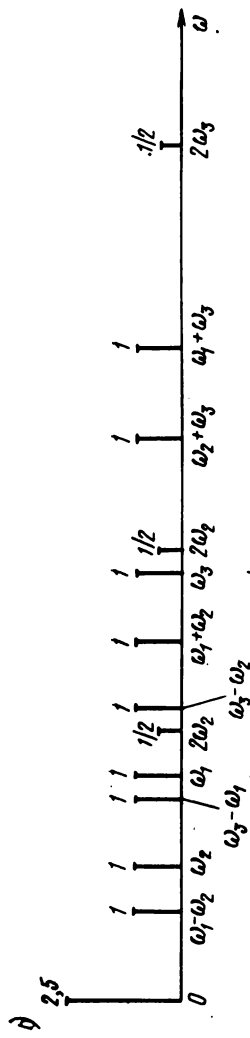


Рис. P3.6

3.41. Спектрограммы изображены на рис. P3.7.

3.42. Пусть входное напряжение u состоит из двух напряжений: $u = U_1 \cos \omega_1 t + U_2 \cos \omega_2 t$. Тогда выходной ток $i = I_0 e^{a U_1 \cos \omega_1 t} e^{a U_2 \cos \omega_2 t}$ или с учетом ф-л (3.7):



$$i = I_0 \left[B_0(aU_1) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} B_i(aU_1) \cos i \omega_1 t \right] \left[B_0(aU_2) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} B_i(aU_2) \cos i \omega_2 t \right].$$

Перемножение этих рядов дает составляющие с частотами $m\omega_1 \pm n\omega_2$, где $m=0, 1, 2, 3, \dots$, $n=0, 1, 2, 3, \dots$. Если m или n равно нулю, составляющие называются гармоническими; если m и n целые числа — комбинационными.

Для постоянной составляющей получаем $I_{00} = I_0 B_0(aU_1) B_0(aU_2)$.

Для гармоник частоты ω_1 : $I_{m\omega_1} = 2I_0 B_0(aU_2) B_m(aU_1)$.

Для гармоник частоты ω_2 : $I_{m\omega_2} = 2I_0 B_0(aU_1) B_n(aU_2)$.

Для комбинационных колебаний частоты $m\omega_1 \pm n\omega_2$: $I_{mn} = 2I_0 B_m(aU_1) \times B_n(aU_2)$.

Последняя формула является общей и справедлива для расчета не только комбинационных колебаний, но и гармонических, а также постоянной составляющей (при этом полученное по общей формуле значение постоянной составляющей нужно, как всегда, разделить пополам).

При воздействии большего числа входных колебаний аналогичным путем можно получить формулу:

$$I_{m \dots k} = 2I_0 B_m(aU_1) B_n(aU_2) \dots B_k(aU_j).$$

При использовании этой формулы нужно учитывать указания, сделанные для случая двух входных колебаний.

3.43. По формуле, полученной в предыдущей задаче, $I_{11} = 2I_0 B_1(aU_1) B_1(aU_2)$. Подставляя сюда условия задачи, находим:

$$I_{11} = 2 \cdot 0,5 B_1(10 \cdot 0,2) B_1(10 \cdot 0,1) = 1 B_1(2) B_1(1) = 1 \cdot 1,59 \cdot 0,56 = 0,89 \text{ мА.}$$

3.44. $I_{32} = 1,41 \text{ мА.}$

4

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА

Общие сведения

Нелинейные цепи нулевого порядка содержат только резисторы, среди которых хотя бы один является нелинейным; эти цепи электрически безынерционны, так как в них нет энергоемких элементов. Процессы в цепях нулевого порядка описываются конечным (а не дифференциальными) уравнениями.

К цепям нулевого порядка условно относят также цепи, содержащие и энергоемкие линейные элементы, но только в тех случаях, когда эти элементы включены в нагрузку и служат целям «отвода» ненужных составляющих (т. е. фильтрации полезных составляющих); для полезных составляющих нагрузка должна иметь чисто активный характер и, следовательно, для них всю цепь можно считать цепью нулевого порядка.

Цепи нулевого порядка можно классифицировать по различным признакам; с точки зрения изучения процессов в этих цепях удобно ориентироваться на признаки, характеризующие внешнее воздействие; именно по этим признакам сгруппирован материал настоящего раздела. Сначала здесь рассматриваются непериодические воздействия — воздействия в виде постоянного напряжения (тока) и напряжения заданной формы, а затем — моногармоническое и полигармоническое. Задача каждого расчета состоит либо в определении параметров элементов цепи, либо в количественной оценке результатов нелинейного преобразования. Эти задачи рассматриваются как в постановке анализа, так и в постановке синтеза.

Анализ цепей при непериодических воздействиях

Под непериодическими здесь понимаются воздействия в виде постоянного напряжения (тока), а также в виде напряжения любой формы, которое нельзя представить счетным множествам моногармонических колебаний. Полигармонические колебания, несмот-

ря на то, что они также являются непериодическими, рассматриваются отдельно (стр. 105—107).

Наиболее распространенной является следующая задача по расчету цепей нулевого порядка (рис. 4.1). Дана схема, т. е. известны входное напряжение e , характеристика $i(u)$ нелинейного резистора $R(u)$ и сопротивление нагрузки R . Нужно найти ток i в цепи и напряжение u на нелинейном резисторе.

Обычно заданная схема является более сложной, чем изображенная на рис. 4.1; однако, как правило, она может быть приве-

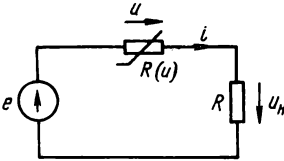


Рис. 4.1

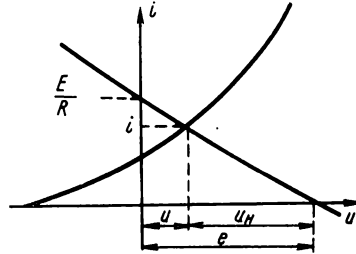


Рис. 4.2

дена к такому виду. В частности, несколько нелинейностей, соединенных последовательно и параллельно, можно пересчитать в одну (см. ниже). Схемы, содержащие один нелинейный и несколько линейных резисторов, приводятся к виду рис. 4.1 при помощи теорем об эквивалентных генераторах напряжения и тока. В равной степени к виду рис. 4.1 нетрудно привести и схемы, содержащие несколько генераторов напряжения (тока).

Приведем методику расчета схемы рис. 4.1. Исходные уравнения $e = u + iR$, $i = f(u)$ переписываются в виде

$$\left. \begin{aligned} i &= \frac{e - u}{R} \\ i &= f(u) \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

и затем решаются относительно u и i . При аналитическом решении напряжение u находится из уравнения $(e - u)/R = f(u)$, а затем определяется ток i из любого уравнения системы (4.1).

Если характеристика $i = f(u)$ задана в виде графика, задачу можно решить графически (рис. 4.2): значения u и i находятся в точке пересечения кривой $i = f(u)$ и прямой $i = (e - u)/R$, которую часто называют «нагрузочной».

Как правило, итогом расчета должно быть построение зависимости $i(e)$. Зависимость $i(e)$ может существенно отличаться от характеристики $i(u)$; так как указанное отличие является следствием влияния сопротивления нагрузки R , это влияние называют «реакцией нагрузки». В тех случаях, когда отличие несущественно, реакцией нагрузки пренебрегают; последнее обусловлено еще и тем, что

учет реакции нагрузки в аналитическом виде часто представляет собой трудную, а иногда и неразрешимую задачу.

Аналогично рассчитываются и схемы, содержащие нелинейный элемент, управляемый током, т. е. элемент с характеристикой вида $u = \psi(i)$, а также схемы, содержащие генератор тока.

Синтез цепей по заданным условиям преобразования непериодических воздействий

В задачу синтеза нелинейной цепи нулевого порядка по заданному преобразованию входного непериодического воздействия входит установление вида характеристики цепи, осуществляющей данное преобразование, а затем — реализация полученной характеристики.

Установление вида характеристики безынерционной цепи при непериодическом воздействии не вызывает затруднений, так как по существу решение содержится в формулировке задачи. Реализация полученной характеристики осуществляется либо при помощи специальных электронных приборов и их сочетаний, либо при помощи наипростейших нелинейных и линейных элементов. Этим вопросам посвящена обширная литература [3, 66, 19]; здесь рассматриваются только простейшие из них (задачи 4.16, 4.17).

При двух входных воздействиях задача сводится к синтезу цепи, осуществляющей заданное функциональное преобразование над обоими сигналами, например, умножение, деление и т. д. Для синтезируемых цепей могут использоваться либо комбинации из нелинейных и линейных элементов, каждый из которых имеет один

ТАБЛИЦА 4.1

Некоторые функциональные уравнения

Уравнения	Решения
1) $f(x + y) = f(x) + f(y)$,	$f(z) = az$.
2) $f(x + y) = f(x)f(y)$,	$f(z) = a^z$.
3) $f(x + y) = f(x)^{\ln f(y)}$,	$f(z) = ea^z$.
4) $f(x + y) = f(x)e^y$,	$f(z) = e^{az}$.
5) $f(x + y) = f(x) + y$,	$f(z) = z + a$.
6) $f(xy) = f(x) + f(y)$,	$f(z) = \ln z$.
7) $f(xy) = f(x)f(y)$,	$f(z) = z^a$.
8) $f(xy) = [f(x)]^y$,	$f(z) = Cz$.
9) $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x)f(y)}$,	$f(z) = aCz^2$.
10) $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$,	$f(z) = \ln z$.
11) $f(\ln x) = x$,	$f(z) = e^z$.

вход, либо нелинейные элементы с несколькими входами, например многоэлектродные электронные лампы.

Задача синтеза цепи (системы) для заданной обработки совокупности отдельных сигналов, как правило, не имеет однозначного решения. Общая рецептура ее решения состоит в следующем. Выписываются заданные входные и выходные сигналы; по их характеру и виду подбирается алгоритм обработки входных сигналов, который затем и служит основой для составления функциональной схемы. При решении подобных задач известную помощь может оказать табл. 4.1, в которой даны некоторые функциональные уравнения вместе с их решениями.

Замена нелинейных резисторов одним эквивалентным

Два нелинейных резистора можно заменить одним эквивалентным нелинейным резистором. Подобная замена, как правило, выполняется при помощи графических построений.

Рассмотрим в качестве примера замену двух включенных последовательно управляемых напряжением резисторов $i=f_1(u)$ и

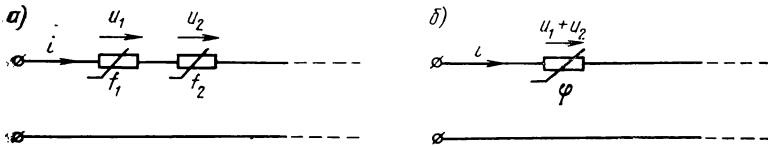


Рис. 4.3

$i=f_2(u)$. В соответствии с рис. 4.3 можно написать: для каждого резистора (рис. 4.3а) $i=f_1(u_1)$; $i=f_2(u_2)$, для эквивалентного («общего») резистора (рис. 4.3б) $i=\varphi(u_1+u_2)$. По этим равенствам и выполняется графическое построение (рис. 4.4).

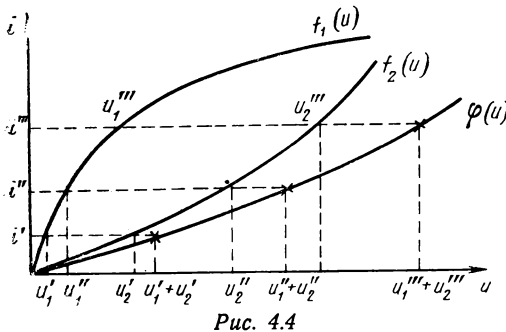


Рис. 4.4

выполняется графическое построение (рис. 4.4).

Подобным же образом проводятся расчеты для элементов, управляемых током, при параллельном соединении элементов, а также при числе нелинейных резисторов, большем двух.

Нахождение характеристики $i=\varphi(u)$ эквивалентного общего резистора

аналитическим путем представляет собой нелегкую задачу: нужно решить функциональное уравнение относительно φ по следующим условиям:

$$i = f_1(u_1) = f_2(u_2) = \varphi(u_1 + u_2). \quad (4.2)$$

Общий подход к решению такого функционального уравнения состоит в следующем. Из выражений $i=f_1(u_1, \mathbf{a}_1)$, $i=f_2(u_2, \mathbf{a}_2)$, где $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ — векторы параметров характеристик первого и второго резисторов, находятся u_1 и u_2 , т. е. определяются обратные функции: $u_1=f_1^{-1}(i, \mathbf{a}_1)$, $u_2=f_2^{-1}(i, \mathbf{a}_2)$, которые затем подставляются в исходное функциональное уравнение:

$$i = \varphi \{ [f_1^{-1}(i, \mathbf{a}_1) + f_2^{-1}(i, \mathbf{a}_2)], \mathbf{b} \}; \quad (4.3a)$$

последнее уравнение и должно быть решено относительно φ (здесь \mathbf{b} — вектор параметров характеристики эквивалентного резистора).

Уравнение (4.3a) можно переписать и в следующем виде:

$$\varphi^{-1}[i, \mathbf{b}] = f_1^{-1}(i, \mathbf{a}_1) + f_2^{-1}(i, \mathbf{a}_2). \quad (4.3b)$$

Для решения функциональных уравнений нет общих методов; частные методы и приемы обстоятельно изложены в работе [4]. Однако в этой работе отсутствуют способы решения уравнений вида (4.3), в которых ищется структура функции φ , объединяющей разнородные функции f_1^{-1} и f_2^{-1} .

В частном случае совпадения функций f_1^{-1} и f_2^{-1} задача отыскания функции φ , как правило, может быть доведена до конца. Рассмотрим этот случай подробнее; начнем с линейной функции. Функциональное уравнение

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

имеет решение в виде линейной функции (см. табл. 4.1): $f(z) = az$; очевидно, что если в уравнении (4.3b) f_1^{-1} и f_2^{-1} представляют собой линейные функции, то φ^{-1} — также линейная функция (см. задачу 4.21). Теперь представим себе, что f_1 и f_2 — нелинейные функции, но путем введения новых масштабов могут быть приведены к линейному виду (см. разд. 2); тогда f_1^{-1} и f_2^{-1} будут линейными функциями относительно новых масштабов и такой же линейной функцией окажется φ^{-1} (см. задачи 4.22, 4.26, 4.27, 4.28).

Следовательно, два нелинейных резистора с одинаковыми по функциональной структуре (т. е. различающимися только коэффициентами) характеристиками, можно заменить одним с характеристикой той же функциональной структуры, если исходные характеристики приводятся к линейному виду.

В общем случае, когда f_1 и f_2 являются различными аналитическими функциями, следует воспользоваться непосредственно ф-лой (4.3b). Решение разбивается на ряд этапов.

- 1) Находятся функции $f_1^{-1}(i, \mathbf{a}_1)$ и $f_2^{-1}(i, \mathbf{a}_2)$.
- 2) Определяется сумма $[f_1^{-1}(i, \mathbf{a}_1) + f_2^{-1}(i, \mathbf{a}_2)]$.
- 3) Аналитически находится обратная функция $\varphi^{-1}(i, \mathbf{b}) = f_1^{-1}(i, \mathbf{a}_1) + f_2^{-1}(i, \mathbf{a}_2)$. Если аналитическое решение получить не

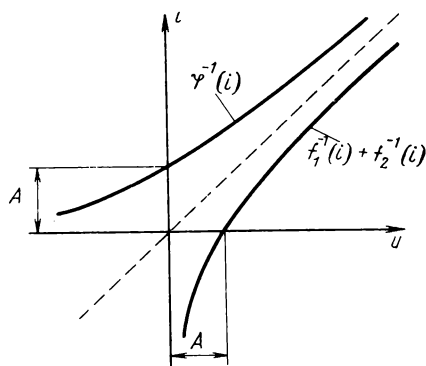


Рис. 4.5

удается, обратную функцию φ^{-1} нужно представить графически (рис. 4.5); обратная функция является зеркальным изображением исходной относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

4. Полученный график характеристики эквивалентного резистора далее аппроксимируется обычными приемами.

Этим и заканчивается решение задачи о замене двух нелинейных резисторов одним эквивалентным; при большем числе резисторов и при других их соединениях, как уже указывалось, решение проводится аналогично.

Анализ цепей при моногармоническом воздействии

Задача изучения нелинейных цепей нулевого порядка, находящихся под моногармоническим воздействием, мало отличается от задачи гармонического анализа, рассмотренной в разд. 3; по существу, их главное отличие заключается в оценке эффективности заданного преобразования путем сопоставления «полезных» и «вредных» составляющих выходного спектра.

Рассмотрим особенности обобщенной схемы преобразования спектра (рис. 4.6), т. е. цепи, находящейся под воздействием моно-

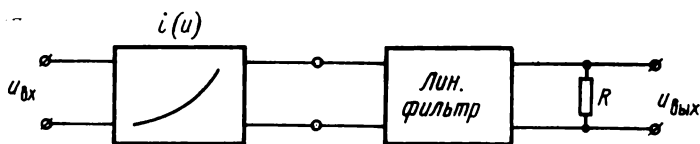


Рис. 4.6

гармонического колебания и предназначенной для получения колебаний заданных частот, и составим общую рецептуру исследования таких цепей. К нелинейному четырехполюснику с вольтамперной характеристикой $i(u)$ подводится входное напряжение $u_{вх}$. Вследствие нелинейности характеристики ток i как по форме, так и по спектральному составу будет отличаться от входного напряжения. На выходе устройства включаются в общем случае линейный фильтр и активная нагрузка; фильтр предназначен для отвода ненужных составляющих спектра, а активная нагрузка — для создания напряжения от тех отфильтрованных составляющих тока, которые являются полезным продуктом данного преобразования.

Анализ цепи при моногармоническом воздействии состоит, пре-

жде всего, в установлении связи между полезным продуктом и напряжением на ее входе. Эта связь является основной характеристикой цепи и для каждого вида преобразования имеет соответствующее наименование (характеристика выпрямления, характеристика умножения и т. д.).

Дальнейшее изучение схем преобразования сводится, во-первых, к исследованию основной характеристики с целью определения оптимальных параметров и режима схемы и, во-вторых, к определению относительного влияния паразитных продуктов преобразования, проникающих к нагрузочному сопротивлению R . Вывод выражения основной характеристики преобразования содержит следующие четыре стадии (этапа):

- аналитическую запись условий входа;
- аппроксимацию характеристики нелинейного элемента;
- сопоставление первых двух этапов с целью получения временной зависимости выходного тока;
- гармонический анализ выходного тока для выявления «полезных» и «вредных» составляющих.

Напомним, что характеристики нелинейного элемента зависят от величины выходного напряжения, т. е. от напряжения на нагрузке. Учет реакции нагрузки на характеристику нелинейного элемента требует особого подхода к каждой конкретной схеме, и в задачах настоящего раздела, как правило, не рассматривается. Здесь считается, что характеристики нелинейного элемента не зависят от напряжения на нагрузке.

В некоторых схемах линейный фильтр может отсутствовать (например, в ограничителях мгновенных значений); в таких случаях задача ограничивается рассмотрением формы выходного колебания.

Наиболее распространенными преобразованиями при моногармоническом воздействии являются выпрямление и умножение частоты, а также ограничение мгновенных значений; к задачам, связанным с этими преобразованиями, можно отнести и задачу оценки нелинейных искажений в усилителях.

Синтез цепей по заданному преобразованию моногоармонического воздействия

Задача синтеза нелинейной цепи нулевого порядка по заданному преобразованию моногоармонического воздействия формулируется следующим образом. На вход синтезируемого нелинейного элемента (нелинейной цепи) подается моногоармоническое колебание; выходное колебание должно иметь заданный спектр; нужно рассчитать характеристику мгновенных значений нелинейного элемента так, чтобы условия заданного преобразования выполнялись без применения линейных элементов. Задача считается решенной, если получено выражение характеристики нелинейного элемента; вопросы реализации характеристик, как уже указывалось выше,

составляют самостоятельную задачу. Формулировка условий, характеризующих выходные колебания, может адресоваться как к спектру, так и к их форме.

Общая рецептура определения характеристики $y(x)$ по известному входному воздействию $x=f(t)$ и известной форме выходной реакции $y=\varphi(t)$ (рис. 4.7) состоит в нахождении обратной функции

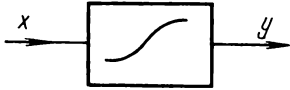


Рис. 4.7

$$t = f^{-1}(x) \quad (4.4)$$

и подстановке выражения t в равенство

$$y = \varphi(t) = \varphi[f_1^{-1}(x)]. \quad (4.5)$$

Так как при моногармоническом воздействии вида $x = \sin \omega t = \sin \tau$ или $x = \cos \omega t = \cos \tau$ обратные функции определяются как $\tau = \arcsin x$, $\tau = \arccos x$, то выражения характеристик мгновенных значений будут иметь одну из двух форм: $y = \varphi(\arcsin x)$, $y = \varphi(\arccos x)$.

Если выходной сигнал задан в виде тригонометрического полинома

$$y(\tau) = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cos n\tau, \quad (4.6)$$

а входное воздействие имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \tau \\ \tau &= \arccos \frac{x}{a} \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

то искомая характеристика определяется выражением:

$$y(x) = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cos \left(n \arccos \frac{x}{a} \right). \quad (4.8)$$

Так как

$$\cos(n \arccos z) = T_n(z), \quad (4.9)$$

где $T_n(z)$ — полиномы Чебышева первого рода, то

$$y(x) = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n T_n \left(\frac{x}{a} \right) = \sum_{n=0}^N A_n T_n \left(\frac{x}{a} \right). \quad (4.10)$$

Полиномы Чебышева первого рода являются однозначными функциями и, следовательно, характеристики $y(x)$ по ф-ле (4.10) могут быть реализованы.

Выражения $T_n(z)$ можно найти в многочисленных руководствах; в книге Дж. Ланса [41, стр. 28] даны выражения первых тринадцати полиномов. В табл. 4.2 приведены выражения $T_n(z)$ при $0 \leq n \leq 5$, а на рис. 4.8 представлены графики при $n=1, 2, 3, 4$.

ТАБЛИЦА 4.2

Выражения $T_n(z)$

$$T_0(z) = 1,$$

$$T_1(z) = z,$$

$$T_2(z) = 2z^2 - 1,$$

$$T_3(z) = 4z^3 - 3z,$$

$$T_4(z) = 8z^4 - 8z^2 + 1,$$

$$T_5(z) = 16z^5 - 20z^3 + 5z.$$

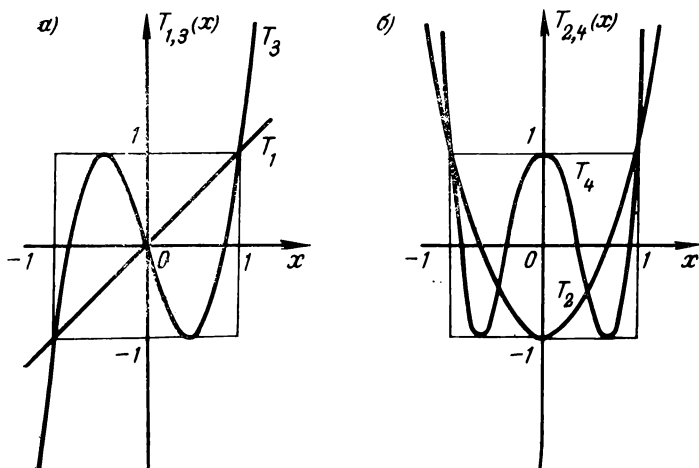


Рис. 4.8

Нужно отметить, что при помощи безынерционных элементов невозможно преобразовать входное колебание вида $x = a \cos \tau$ в колебания с заданными фазовыми сдвигами, а также в субгармонические (т. е. колебания с частотами ω/k , где $k \geq 2$ — целые числа); доказательства этих утверждений приводятся в задачах 4.48 и 4.47.

Анализ цепей при полигармонических воздействиях¹⁾

Задача изучения нелинейных цепей нулевого порядка, находящихся под полигармоническим воздействием, по существу не отличается от рассмотренной выше при моногармоническом воздействии; рецептура решения здесь остается такой же, за исключением того, что выходное колебание должно подвергаться спектральному анализу [который, как известно (см. разд. 3) обобщает гармонический анализ].

¹⁾ Под полигармоническим воздействием здесь условно понимается в том числе и воздействие, состоящее из независимых моногармонических колебаний, т. е. из колебаний, создаваемых разными источниками.

Наиболее распространенными преобразованиями при полигармонических воздействиях являются амплитудная модуляция, детектирование амплитудномодулированных колебаний, преобразование частоты (транспонирование спектра), гетеродинирование и др. По существу, устройства преобразования полигармонических сигналов различаются не схемами, а формой характеристик, параметрами элементов и режима, а также видами нагрузки: для выделения высокочастотных составляющих используется линейный фильтр в виде колебательного контура, а для выделения низкочастотных — цепи RC .

ТАБЛИЦА 4.3
Основные преобразования спектра

Преобразование	Входное колебание	Выходное (полезное) колебание	Нагрузка
Выпрямление	Синусоидальное с частотой Ω	Постоянная составляющая	Резистор с фильтром
Умножение частоты	Синусоидальное с частотой ω	Гармоническое с частотой $n\omega$	Контур, настроенный на частоту $n\omega$
Амплитудная модуляция	Сумма двух синусоидальных с частотами ω и Ω	Гармоническое с частотой ω и два комбинационных второго порядка с частотами $\omega \pm \Omega$	Колебательный контур, настроенный на частоту ω
Детектирование амплитудномодулированных колебаний	1) Сумма двух синусоидальных с частотами ω и $\omega + \Omega$ 2) Сумма трех синусоидальных с частотами ω и $\omega \pm \omega\Omega$	Комбинационное второго порядка с частотой Ω	Цепь RC
Преобразование частоты (транспонирование спектра)	Сумма двух синусоидальных с частотами ω_1 и ω_2	Комбинационное второго порядка с частотой $\omega_1 - \omega_2$	Контур, настроенный на частоту $\omega_1 - \omega_2 = \omega_p$
Гетеродинирование	Сумма двух синусоидальных с частотами ω_1 и ω_2	Комбинационное второго порядка с частотой $\omega_1 - \omega_2$	Цепь RC

В табл. 4.3 приведены основные сведения о наиболее распространенных преобразованиях спектра и применяемых нагрузках. Для общности в эту таблицу включены и преобразования моногармонического сигнала — выпрямление и умножение частоты.

Как и при изучении схем преобразования моногармонического сигнала, в результате исследования схем преобразования полигармонического сигнала нужно найти связь между полезным продуктом и напряжением на входе цепи. Эта связь является основной

характеристикой и для каждого вида преобразования имеет свое наименование (модуляционная характеристика, детекторная характеристика и т. д.). Далее необходимо оценить влияние паразитных продуктов и выяснить оптимальные параметры режима и элементов цепи.

Рецептура изучения, как уже указывалось, совпадает с таковой для преобразований при полигармоническом воздействии.

Синтез цепей по заданному преобразованию полигармонического воздействия

В синтез нелинейных цепей нулевого порядка по заданному преобразованию спектра (формы) полигармонического воздействия входят две самостоятельные задачи — задача преобразования спектра (формы) одного полигармонического сигнала и задача обработки совокупности гармонических или полигармонических сигналов по заданным условиям.

В первой задаче считается, что на вход синтезируемого устройства подается сумма моногармонических колебаний, т. е. сигнал вида

$$x(t) = \sum_{n=1}^N X_n \cos(\omega_n t - \varphi_n),$$

а во второй — совокупность отдельных сигналов:

$$x_1(t) = \sum_n X_{1n} \cos(\omega_{1n} t - \varphi_{1n}),$$

$$x_2(t) = \sum_n X_{2n} \cos(\omega_{2n} t - \varphi_{2n}),$$

.

над которыми нужно выполнить определенную операцию.

Рецептура синтеза характеристики $y(x)$ по известному полигармоническому воздействию $x = \dot{f}(t)$ и заданной форме выходного сигнала $y = \varphi(t)$ принципиально не отличается от изложенной выше рецептуры при моногармоническом воздействии; однако эта задача математически гораздо труднее и только в самых простых случаях может быть (да и то приближенно) доведена до конца. По этим причинам задачи такого содержания здесь не рассматриваются.

О синтезе схемы для заданной функциональной обработки совокупности отдельных сигналов уже шла речь в этом разделе (стр. 99—100); напомним, что эта задача не имеет однозначного решения и среди возможных решений следует выбрать одно, которое по определенным признакам (например, простоте) считается наилучшим. Общая рецептура здесь, как и прежде, состоит в поиске алгоритма, который позволяет перейти от совокупности входных воздействий к заданному выходному сигналу; по найденному алгоритму составляется функциональная схема.

* *
*

В настоящем разделе задачи распределены следующим образом. Расчеты токов и напряжений в цепях, находящихся под непериодическим воздействием, составляют содержание задач 4.1—4.15. Вопросам синтеза цепей по заданным преобразованиям непериодических воздействий посвящены задачи 4.16—4.20. Расчеты эквивалентных резисторов, которыми можно заменять различные соединения нескольких резисторов, даны в задачах 4.21—4.30. Анализ цепей, находящихся под моногармоническим воздействием, рассматривается в задачах 4.31—4.41, а синтез цепей по заданным условиям преобразования моногармонического воздействия — в задачах 4.42—4.53. Анализ цепей, находящихся под полигармоническим воздействием, составляет содержание задач 4.54—4.76. Синтез цепей по заданным условиям преобразования двух сигналов рассматривается в задачах 4.77—4.82.

Задачи и упражнения

4.1. В цепи, изображенной на рис. 4.9, напряжение $E=60$ В, а сопротивление $R_{вн}=300$ Ом. Характеристика нелинейного элемента изображена на рис. 4.10. Найти ток в цепи и напряжение на нелинейном элементе.

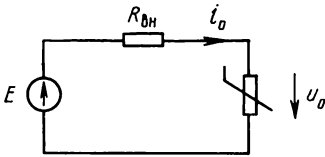


Рис. 4.9

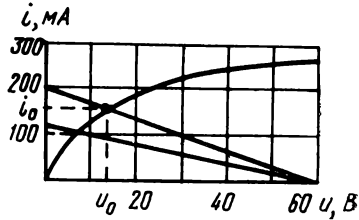


Рис. 4.10

4.2. Какое дополнительное сопротивление нужно включить последовательно с внутренним сопротивлением генератора в цепи рис. 4.9 для того, чтобы ток был равен 100 мА. Остальные условия соответствуют условию задачи 4.1.

4.3. В цепи, изображенной на схеме рис. 4.1, нелинейный резистор имеет квадратичную характеристику вида $i=au^2$; найти напряжение u на нелинейном элементе и ток i , если на вход цепи подается напряжение e .

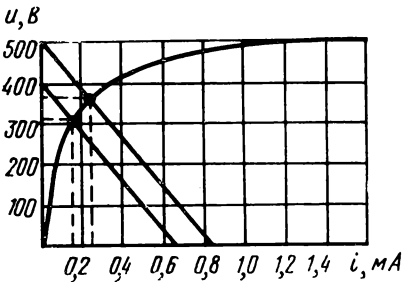


Рис. 4.11

4.4. Характеристика тиритового элемента изображена на рис. 4.11. Последовательно с ним введен постоянный резистор сопротивлением $R=0,6$ МОм; цепь включена под постоянное напряжение 500 В. Найти ток в цепи и напряжение на тиритовом элементе.

4.5. Тиритовый элемент и резистор R , соединенные между собой параллельно (рис. 4.12), подключены к источнику постоянного напряжения. Ток в неразветвленной части цепи $i=0,66$ мА. Характеристика тиритового элемента изображена на рис. 4.11 (задача 4.4);

сопротивление резистора $R=0,6 \text{ МОм}$. Найти токи i_1 и i_2 , а также напряжение источника E .

4.6. Для стабилизации тока в цепи питания накала ламп применяется баттерер, характеристика которого представлена на рис. 4.13. Ток, который нужно стабилизировать, равен 1 А , а сопротивление резистора, включенного последовательно с баттерером, равно 20 Ом . Выбрать напряжение источника питания, считая, что на участке характеристики от 8 до 12 В ток не меняется.

4.7. На рис. 4.14 изображена часть схемы усилителя постоянного тока. Найти ток в анодной цепи и напряжение на аноде лампы. Характеристика анодного тока представлена на рис. 4.15.

4.8. Последовательно с источником постоянного напряжения (рис. 4.16) включен постоянный резистор R и нелинейный резистор с характеристикой

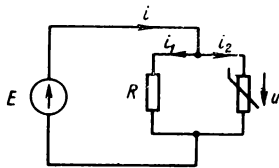


Рис. 4.12

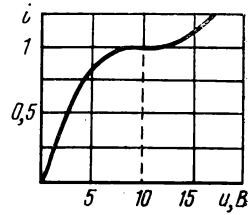


Рис. 4.13

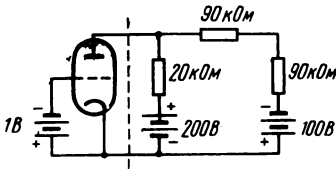


Рис. 4.14

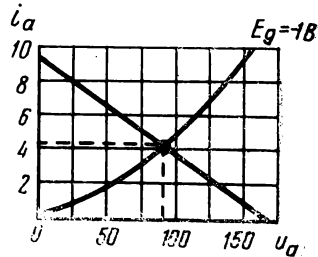


Рис. 4.15

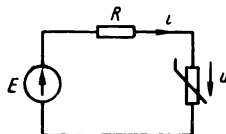


Рис. 4.16

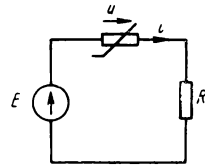


Рис. 4.17

$i=au^2$, справедливой для положительных значений напряжения, т. е. при $u>0$. Найти выражение для напряжения на нелинейном элементе и объяснить стабилизирующее (по отношению к напряжению u) действие этого нелинейного элемента.

4.9. В схеме рис. 4.17 нелинейный элемент имеет характеристику вида $i=a\sqrt{u}$, справедливую для положительных значений тока, т. е. при $i>0$. Найти общее выражение для тока в цепи и объяснить стабилизирующее (по отношению к току) действие такого нелинейного элемента.

4.10. Дана цепь (рис. 4.17), в которой характеристика нелинейного элемента $u=f(i)$ аппроксимируется для положительных значений тока выражением

$u = U_0 \operatorname{sh} qi$. Найти ток в цепи и напряжение на нелинейном элементе по следующим данным: $E = 110$ В; $R = 100$ Ом; $U_0 = 110$ В; $q = 10$ 1/А.

4.11. На рис. 4.18. изображена схема цепи, содержащей три линейных резистора и один нелинейный; характеристика последнего представлена на рис. 4.19. Определить ток через нелинейный резистор и напряжение на нем. Данные для расчета: $R_1 = 2$ кОм; $R_2 = 4$ кОм; $R_3 = 110$ кОм; $E = 20$ В.

4.12. На рис. 4.20 изображена схема цепи, содержащей два источника постоянного напряжения, два линейных резистора и один нелинейный с характе-

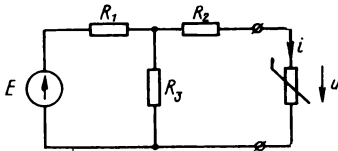


Рис. 4.18

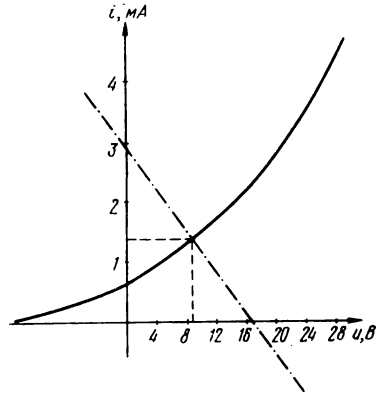


Рис. 4.19

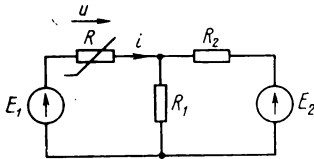


Рис. 4.20

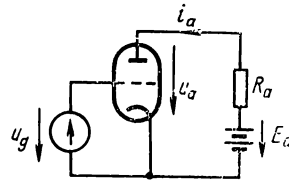


Рис. 4.21

ристической $u = \varphi(i)$. Составить выражение прямой, точка пересечения которой с кривой $u = \varphi(i)$ даст искомые значения тока i и напряжения u .

4.13. На вход нелинейной цепи с характеристикой

$$i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + \dots$$

подаются прямоугольные импульсы; доказать, что выходные импульсы будут иметь также прямоугольную форму.

Доказательство провести как при помощи графических построений, так и при помощи аналитических выкладок.

4.14. На рис. 4.21 изображена схема усилителя на трехэлектродной лампе, характеристика которой для $R_a = 0$ известна и выражается функцией $i_a = f(u_g)$ при $u_a = E_a = \text{const}$. В случае $R_a \neq 0$ характеристика лампы является функцией двух переменных: $i_a = \varphi(u_g, u_a)$, так как $u_a = E_a - i_a R_a$.

Составить выражение характеристики лампы с учетом реакции нагрузки, т. е. при $R_a \neq 0$ и, считая, что напряжение на аноде влияет на анодный ток в D раз меньше, чем напряжение на сетке u_g . Величина D называется проникаемостью лампы. Это означает, что вместо напряжения u_g в зависимости $i_a = f(u_g)$ нужно писать $u_g + D u_a$. Характеристику лампы по условию допустимо аппроксимировать линейной функцией.

4.15. Условия настоящей задачи совпадают с условиями задачи 4.14 за исключением того, что характеристику лампы по условию нужно аппроксимировать полиномом второй степени.

4.16. Составить схему для заданного функционального преобразования входного напряжения на основе кусочно-линейной аппроксимации. В качестве элементного базиса, т. е. элементов, из которых должна быть составлена схема,

выбрать линейные резисторы и диоды с идеальными ломаными характеристиками, а также источники напряжения (смещения) для этих диодов. Сопротивления диодов в открытом состоянии можно принять равными нулю, а в закрытом — бесконечности.

4.17. На рис. 4.22 показана схема операционного усилителя K , параллельно которому включен нелинейный резистор, управляемый током. Известно, что входное сопротивление операционного усилителя очень велико¹⁾, выходное малое, а коэффициент усиления K заметно больше единицы (порядка $10^4 \div 10^6$).

Показать, что при указанных условиях зависимость выходного напряжения $u_{\text{вых}}$ от внешнего воздействия e с высокой точностью совпадает с зависимостью $u = f(i)$ нелинейного резистора.

4.18. Составить алгоритм и функциональную схему для перемножения двух сигналов x_1 и x_2 при помощи квадраторов, сумматоров и инверторов.

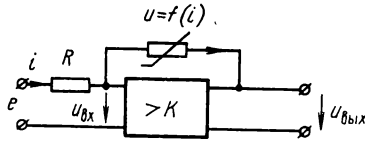


Рис. 4.22

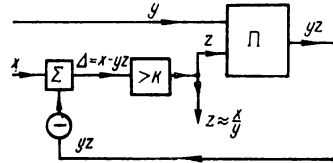


Рис. 4.23

4.19. Составить алгоритм и функциональную схему для осуществления операции умножения двух сигналов при помощи логарифматоров и экспонаторов. По тем же условиям составить схему деления одного сигнала на другой.

4.20. На рис. 4.23 изображена схема получения величины z , равной частному от деления сигнала x на сигнал y . Объяснить, как нужно изменять коэффициент усиления K для того, чтобы схема отвечала своему назначению.

4.21. Два последовательно соединенных линейных резистора R_1 и R_2 заменить эквивалентным R на основе общей ф-лы (4.36).

4.22. Два последовательно соединенных резистора с характеристиками $i = I_1 e^{a_1 u}$ и $i = I_2 e^{a_2 u}$ заменить эквивалентным и найти аналитическое выражение его характеристики.

4.23. Два последовательно соединенных резистора с характеристиками $i_1 = 1 e^{1 u}$, $i_2 = 1 e^{2 u}$ заменить эквивалентным; решение выполнить сначала графическим путем, а затем аналитическим.

4.24. Два последовательно соединенных резистора с характеристиками $i = 0,8 e^{0,4 u}$, $i = 0,4 e^{0,8 u}$ заменить эквивалентным и найти аналитическое выражение его характеристики.

4.25. Дан резистор с характеристикой $i = I e^{0,8 u}$, нужно последовательно с ним включить резистор с характеристикой $i = I e^{a_2 u}$, чтобы характеристика эквивалентного резистора соответствовала выражению $i = I e^{0,2 u}$. Определить показатель a_2 .

4.26. Два последовательно соединенных резистора с характеристиками $i = a_1 u^2$, $i = a_2 u^2$ заменить эквивалентным и найти аналитическое выражение его характеристики.

4.27. Два последовательно соединенных резистора с характеристиками $i = A u^{\alpha_1}$, $i = A u^{\alpha_2}$ заменить эквивалентным и найти аналитическое выражение его характеристики.

4.28. Найти выражение характеристики резистора, эквивалентного двум последовательно соединенным со следующими характеристиками: $i = A_1 u^{\alpha_1}$, $i = A_2 u^{\alpha_2}$.

4.29. Два последовательно соединенных резистора имеют следующие характеристики: $i = 1 e^{1 u}$, $i = 1 u^2$. Построить характеристику эквивалентного резистора на основе общей ф-лы (4.36).

¹⁾ По сравнению с сопротивлениями остальных элементов схемы.

4.30. Три нелинейных резистора с характеристиками $i=I_1 e^{a_1 u}$, $i=I_2 e^{a_2 u}$, $i=I_3 e^{a_3 u}$ соединены последовательно и подключены к источнику постоянного напряжения E . Определить напряжение на каждом из резисторов.

Данные для расчета: $I_1=1$ мА; $I_2=3$ мА; $I_3=2$ мА; $a_1=0,4$ 1/В; $a_2=0,6$ 1/В; $a_3=0,8$ 1/В; $E=10$ В.

4.31. Показать, что вне связи со свойствами четности или нечетности характеристики нелинейного элемента $y=f(x)$ выходная реакция всегда является четной функцией относительно $\pi/2$, т. е. $y\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right) = y\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right)$, если воздействие синусоидальное $x = \sin \tau$, и либо четной, либо нечетной функцией относительно $\pi/2$, т. е. $y\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right) = \pm y\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right)$, если воздействие косинусоидальное $x = a \cos \tau$, причем в последнем случае знак определяется свойствами четности функции $y=f(x)$.

Полученный результат иллюстрировать графиком.

4.32. На вход двухполупериодного выпрямителя, характеристика которого (рис. 4.24) передается уравнением $i=a|u|$, подается синусоидальное напряжение

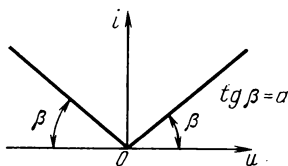


Рис. 4.24

$u=U_m \sin \Omega t$. Найти значение выпрямленного тока, а также амплитуду наибольшей переменной составляющей, подлежащей фильтрации.

4.33. На вход двухполупериодного выпрямителя с характеристикой $i=bu^2$ подается напряжение $u=U_m \sin \Omega t$. Найти значение выпрямленного тока и переменной составляющей и сравнить относительные значения переменной составляющей двух выпрямителей: 1) с характеристикой $i=bu^2$ и 2) с характеристикой $i=a|u|$ (задача 4.32).

4.34. На вход нелинейного элемента с характеристикой $i=a_0+a_1u+a_2u^2+a_3u^3+\dots$ подается синусоидальное напряжение $u=U \sin \Omega t$. Выяснить, какими свойствами должна обладать характеристика, чтобы постоянная составляющая не зависела от амплитуды приложенного напряжения.

4.35. В схеме удвоителя частоты (рис. 4.25) характеристика лампы аппроксимируется ломаной прямой: $i_a=0$ при $u_g < -5$ В; $i_a=I_0+Su_g$ при $u_g > -5$ В. Параметры лампы следующие: $S=2$ мА/В, $I_0=10$ мА. Можно считать, как уже указывалось, что на анодное напряжение не влияет изменение падения напряжения на нагрузке.

Рассчитать смещение E_g , при котором условия для удвоения частоты наилучшие, если амплитуда входного напряжения равна 6 В.

4.36. Найти по условиям задачи 4.35 напряжение частоты 2ω на настроенном анодном контуре, у которого $R_a=30$ кОм.

4.37. В анодную цепь лампы включен контур, настроенный на частоту 3ω ; ω — частота напряжения на сетке. В остальных условиях соответствуют условиям задачи 4.35. Рассчитать: смещение, при котором условия для утроения частоты наилучшие, и амплитуду тока третьей гармоники при этих условиях.

4.38. На сетку лампы, характеристика которой в широких пределах удовлетворительно передается формулой Крылова ¹⁾

$$i = \frac{I_s}{2} (1 + \text{th } qu_g),$$

подается синусоидальное напряжение, которое необходимо превратить в трапецидальное с возможно более крутыми фронтами. Найти аналитическое выражение закона изменения тока во времени и указать условие, при котором фронт будет крытым.

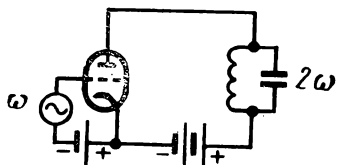


Рис. 4.25

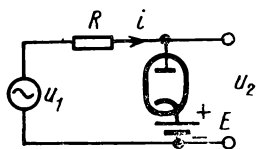


Рис. 4.26

4.39. Составить общую формулу для расчета выходного напряжения последовательного диодного ограничителя (рис. 4.26), считая характеристику диода **ломаной кривой** (рис. 4.27). Найти, кроме того, формулу для расчета сопротивления резистора R по заданным значениям входного и выходного напряжений, а также напряжения смещения E_g .

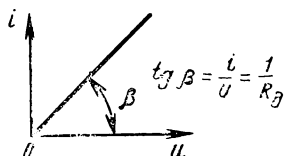


Рис. 4.27

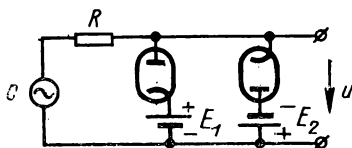


Рис. 4.28

4.40. На рис. 4.28 приведена схема двустороннего ограничителя мгновенных значений. Характеристика диода показана на рис. 4.29. На вход схемы подается синусоидальное напряжение с амплитудой 50 В. Рассчитать напряжения E_1 и E_2 и сопротивление резистора R так, чтобы напряжение на выходе имело трапеце-

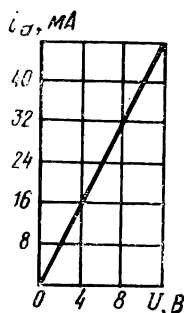


Рис. 4.29

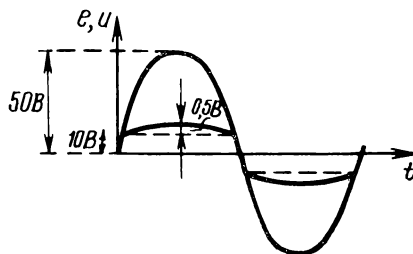


Рис. 4.30

¹⁾ Это имеет место при очень низком анодном напряжении (порядка 10 В); в формуле в данном случае не учтен перенос начала координат.

идальную форму с высотой 10 В; максимальное отклонение не должно превышать 0,5 В (рис. 4.30).

4.41. На вход симметричного ($E_1 = E_2 = E$) двустороннего ограничителя (рис. 4.28, задача 4.40) подается синусоидальное напряжение $e = \mathcal{E} \sin \omega t$. Составить формулу для расчета времени τ , в течение которого напряжение на выходе ограничителя изменяется от $-E$ до $+E$. Допустимо считать, что $\mathcal{E} \gg E$. Рассчитать время τ для условий: $\mathcal{E} = 200$ В, $E = 2$ В, $f = 100$ кГц.

4.42. На вход синтезируемого нелинейного элемента подается колебание вида $u = U \cos \omega t$; составить выражение характеристик $i = f(u)$ нелинейных элементов, при которых создаются следующие выходные сигналы без побочных продуктов: 1) $i = I_2 \cos 2\omega t$, 2) $i = I_3 \cos 3\omega t$, 3) $i = I_4 \cos 4\omega t$.

4.43. На вход синтезируемого нелинейного элемента подается колебание вида $u = U \cos \omega t$; на его выходе нужно получить колебание с равноамплитудным спектром, состоящим из трех первых гармоник, т. е. $i = \sum_{n=1}^3 I_0 \cos n\omega t$. Найти характеристику элемента, обеспечивающего выполнение заданного преобразования без побочных продуктов.

4.44. Составить выражение характеристик нелинейных элементов, осуществляющих идеальное преобразование входного колебания $u = U \cos \omega t$ в колебание вида $i = \sum_{n=1}^N I_0 \cos n\omega t$ при $N = 4, 5, 6$.

4.45. Составить выражение характеристики нелинейного элемента, на вход которого подается колебание $u = U \cos \omega t$, а на выходе должна быть сумма колебаний вида $i = I_0 \sum_{n=3}^5 \cos n\omega t$.

4.46. На выходе синтезируемого нелинейного элемента должно быть колебание.

$$i = I_1 \cos \omega t + \frac{1}{2} I_1 \cos 2\omega t + \frac{1}{4} I_1 \cos 3\omega t;$$

составить выражение характеристики $i(u)$, при которой заданное преобразование осуществляется без побочных продуктов.

4.47. Показать невозможность создания безынерционного нелинейного элемента, при помощи которого можно осуществить преобразование входного колебания $x = \cos \omega t$ в субгармоническое выходное колебание вида $y = \cos \frac{\omega}{k} t$, где $k = 2, 3, 4, \dots$

Доказательство провести аналитически, а затем — при помощи графического построения.

4.48. Рассмотреть возможность построения безынерционного нелинейного элемента, преобразующего входное колебание $x = X \cos \omega t = X \cos \tau$ в выходное колебание вида

$$y(t) = Y_0 + \sum_{n=1}^N Y_n \cos(n\tau - \varphi_n) = Y_0 + \sum_{n=1}^N (Y_{cn} \cos n\tau + Y_{sn} \sin n\tau).$$

4.49. Найти характеристику нелинейного элемента, преобразующего входной сигнал $x = a \cos \tau$ в полигармоническое колебание вида $y(\tau) = I_0(a) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(a) \times \times \cos n\tau$, где $I_n(a)$ — функция Бесселя первого рода.

4.50. На вход синтезируемого четырехполосника подается напряжение вида $x = \sin \omega t = \sin \tau$; на выходе нужно получить колебания треугольной формы (рис. 4.31). Найти выражение характеристики, обеспечивающее данное преобразование.

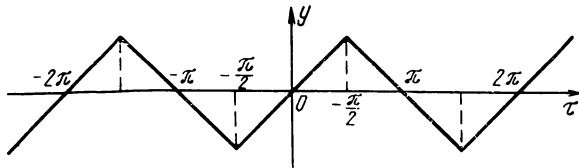


Рис. 4.31

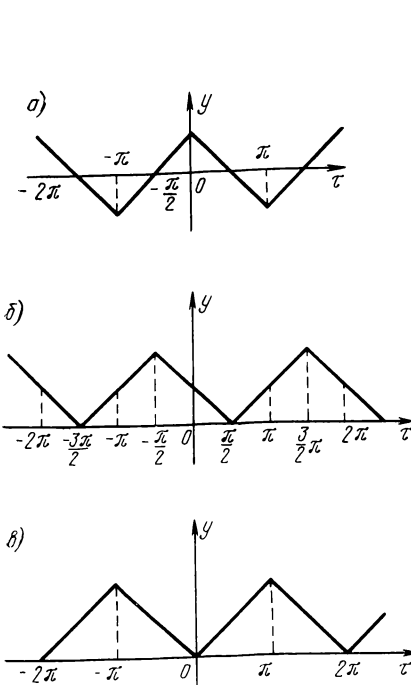


Рис. 4.32

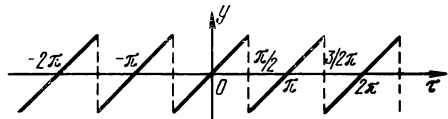


Рис. 4.33

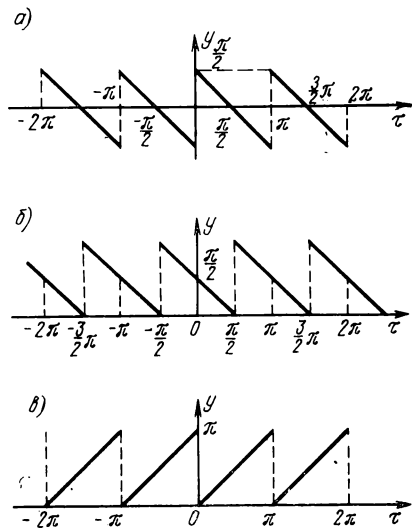


Рис. 4.34

4.51. Найти выражения характеристик нелинейных преобразователей, на вход которых подается напряжение либо $x = \sin \tau$, либо $x = \cos \tau$, а на выходе должны быть напряжения, формы которых показаны на рис. 4.32.

4.52. На вход синтезируемого четырехполосника подается колебание, приближенно описываемое выражением $x = \operatorname{tg} \omega t = \operatorname{tg} \tau$. На выходе нужно получить «пилообразное» колебание вида, изображенного на рис. 4.33. Найти выражение характеристики, обеспечивающей данное преобразование.

4.53. Найти выражения характеристик нелинейных преобразователей, на входы которых подается либо напряжение, приближенно описываемое функций $\operatorname{tg} \tau$, либо напряжение, приближенно соответствующее функции $\operatorname{ctg} \tau$; на выходах же их должны быть напряжения, форма которых изображена на рис. 4.34.

4.54. Вывести выражение модуляционной характеристики $I_{a1}=f(u_{\Omega})$ в схеме сеточной модуляции, если характеристика лампы передается уравнением $i=a_0+a_1u_g+a_2u_g^2$ а $u_g=u_{\omega}+u_{\Omega}=U_{\omega}\sin\omega t+U_{\Omega}\sin\Omega t$. Рабочая точка совпадает с началом координат.

4.55. Объяснить, возможна ли амплитудная модуляция в схеме, содержащей нелинейный элемент с характеристикой $i=a_0+a_1u+a_3u^3$, причем рабочая точка соответствует $u=0$.

4.56. Модулирующее напряжение состоит из двух синусоидальных колебаний: $u_{\Omega}=U_1\sin\Omega_1t+U_2\sin\Omega_2t$; характеристика нелинейного элемента описывается уравнением второй степени: $i=a_0+a_1u+a_2u^2$, а $u=U_{\omega}\sin\omega t+u_{\Omega}$. Рабочая точка соответствует условию $u=0$.

Найти выражение для мгновенного значения составляющих тока, обуславливающих заметное падение напряжения на контуре, настроенном на частоту ω .

4.57. Какие члены степенного полинома не должна содержать характеристика нелинейного элемента для того, чтобы имела место модуляция с одновременным подавлением несущей частоты?

4.58. Можно ли в схеме с одним нелинейным элементом получить модулированное колебание без посторонних продуктов преобразования путем видоизменения формы характеристики?

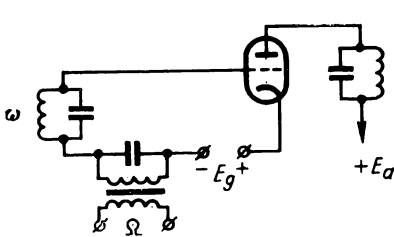


Рис. 4.35

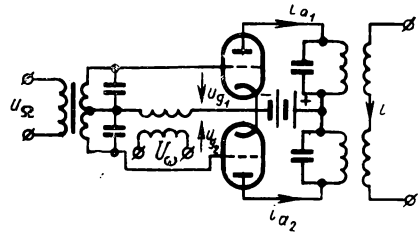


Рис. 4.36

4.59. В схеме сеточной модуляции (рис. 4.35) характеристику лампы можно аппроксимировать формулой Кривола:

$$i_a = \frac{I_s}{2} (1 + \text{th} qu_g).$$

На сетку лампы подается напряжение

$$u_g = u_{\omega} + u_{\Omega} = U_{\omega}\sin\omega t + U_{\Omega}\sin\Omega t - E_g.$$

Вывести уравнение модуляционной характеристики, используя для этой цели формулу трех ординат.

4.60. Найти по формуле, полученной в предыдущей задаче, ток первой гармоники, если амплитуда напряжения высокой частоты составляет 75 В, а максимальное напряжение, развиваемое микрофонным трансформатором, равно 100 В. Напряжение смещения $|E_g|=75$ В. Данные лампы: $S=2$ ма/В, $I_s=200$ мА.

4.61. Показать, что в цепи, изображенной на схеме рис. 4.36, осуществляется амплитудная модуляция с одновременным подавлением колебания несущей частоты. Допустимо считать, что элементы (включая и лампы) в обеих ветвях одинаковы; характеристики ламп аппроксимировать полиномом второй степени.

4.62. На вход нелинейной системы подается амплитудномодулированное колебание

$$u = U_0 (1 + m \sin \Omega t) \sin \omega t = U_0 \sin \omega t + \frac{mU_0}{2} \cos (\omega - \Omega) t - \frac{mU_0}{2} \cos (\omega + \Omega) t.$$

Выяснить, какие члены в уравнении степенного полинома приводят к появлению комбинационных колебаний второго порядка со звуковой частотой Ω ?

4.63. Объяснить, не производя математических выкладок, почему детектирование амплитудомодулированного колебания с подавленной несущей $u = U_0 m \sin \Omega t \sin \omega t$ не может привести к появлению звуковой частоты Ω ?

4.64. Объяснить без математических выкладок, почему возможно детектирование амплитудомодулированных колебаний с подавленной одной боковой, т. е.

$$u = U_0 \sin \omega t + \frac{mU_0}{2} \cos(\omega - \Omega)t.$$

4.65. Характеристикой детектирования называется зависимость тока детектирования I_d от амплитуды высокой частоты U_ω . Ток детектирования равен разности постоянной составляющей (по отношению к высокой частоте) и тока покоя I_{00} (т. е. тока в отсутствие колебаний высокой частоты).

Вывести выражение характеристики детектирования диодного детектора, если характеристика нелинейного элемента аппроксимируется уравнением $i = I_{00} e^{a u}$. Считается, как и в других задачах, что изменение напряжения на нагрузке не влияет на вид характеристики. При выводе воспользоваться формулой трех ординат.

Полученное выражение, далее, рекомендуется упростить для случая малых амплитуд, т. е. при условии $aU_\omega \ll 1$. Кроме того, получить точное выражение характеристики детектирования.

4.66. Характеристика нелинейного элемента, используемого в схеме детектирования, аппроксимируется полиномом второй степени

$$i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2.$$

Найти выражение характеристики детектирования.

4.67. Вывести выражения характеристики детектирования для схемы анодного детектора (рис. 4.37), если характеристику лампы можно аппроксимировать формулой Крылова. Рекомендуется воспользоваться формулой трех ординат.

4.68. На вход детектора, характеристика детектирования которого выражается формулой (задача 4.66) $I_d = a_2 U_\omega^2 / 2$, подается напряжение, модулированное двумя колебаниями с частотами Ω_1 и Ω_2 :

$$u_\omega = U(1 + m_1 \sin \Omega_1 t + m_2 \sin \Omega_2 t) \sin \omega t.$$

Найти соотношение между полезными и вредными продуктами в виде

$$k = \sqrt{\frac{\sum I_\Gamma^2 + \sum I_{\text{комб}}^2}{I_{1\Omega_1}^2 + I_{1\Omega_2}^2}},$$

где I_Γ и $I_{\text{комб}}$ — амплитуды гармонических и комбинационных составляющих. Полученное выражение упростить для двух частных случаев: 1) $m_2 = 0$, 2) $m_1 = m_2 = m$.

4.69. На вход квадратичного детектора подается АМ колебание вида

$$u = U_0(1 + \cos \Omega t) \cos \omega t.$$

Найти коэффициент гармоник на выходе детектора $k = I_2/I_1$ с учетом того, что составляющие АМ колебания проходят через колебательный контур, предшествующий детектору, с ослаблением, зависящим от частоты.

4.70. Характеристика детектора изображается ломаной прямой; рабочая точка соответствует $\theta = 90^\circ$. Найти выражение для характеристики детектирования и объяснить, почему при такой характеристике детектирование не сопровождается искажениями.

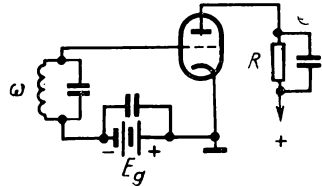


Рис. 4.37

4.71. Характеристика нелинейного элемента определяется формулой $i = Su/(1 - e^{-\alpha u})$. Найти выражение характеристики детектирования на основе формулы трех ординат, исследовать это выражение при малых и больших амплитудах и построить график.

4.72. Дан детектор с квадратичной характеристикой $i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2$ (рис. 4.38), на вход детектора подается гармоническое напряжение вместе с постоянным смещением E , т. е. $u = -E + U \sin \omega t$.

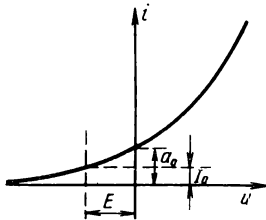


Рис. 4.38

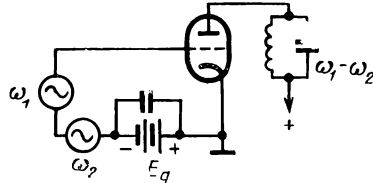


Рис. 4.39

Выяснить, как влияет смещение E на характеристику детектирования $I_d(U)$, а затем установить влияние смещения E на отношение I_d/I_{00} , где I_{00} — ток покоя, т. е. ток в отсутствие высокочастотного напряжения.

4.73. На вход квадратичного детектора подается колебание с одной боковой частотой и несущей: $u = U \cos \omega t + U \cos(\omega + \Omega)t$. Составить выражение мгновенного значения тока i , в котором отфильтрованы только низкочастотные составляющие (с частотами, близкими к Ω) и постоянная составляющая.

4.74. В схеме одноступенчатого преобразователя частоты (рис. 4.39) характеристику лампы можно представить полиномом второй степени: $i_a = a_0 + a_1 u_g + a_2 u_g^2$. Найти выражение характеристики преобразования, т. е. зависимость амплитуды тока I_p разностной частоты ($\omega_1 - \omega_2$) от амплитуд U_1 и U_2 входных напряжений. Рабочая точка соответствует началу координат, т. е. $E_g = 0$.

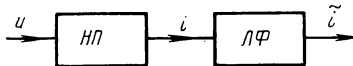


Рис. 4.40

4.75. На сетку лампы (рис. 4.39), характеристика которой передается формулой Крылова, подается смещение E_g , напряжение сигнала высокой частоты $u_c = U_c \sin \omega_c t$ и напряжение гетеродина $u_r = U_r \sin \omega_r t$. Найти выражение характеристики преобразователя $I_p = f(U_c)$ при условии, что $U_c \ll U_r$.

4.76. После нелинейного преобразователя с характеристикой $i = a_1 u + a_3 u^3$ включен линейный фильтр (рис. 4.40), настроенный на колебание сигнала

$$u_c = U_c(t) \cos \omega_c t = U_c \cos \omega_c t.$$

Пусть вместе с сигналом u_c на вход подается помеха вида

$$u_n = U_n(t) \cos \omega_n t = U_n \cos \omega_n t,$$

причем частота ω_n помехи существенно отличается от частоты ω_c сигнала, т. е. находится вне полосы пропускания линейного фильтра.

Найти мгновенное значение тока i на выходе линейного фильтра и определить, будет ли зависеть амплитуда этого тока от помехи, если амплитуда сигнала постоянна (т. е. соответствует «режиму молчания» $U_c = \text{const}$).

4.77. Показать, что при помощи безынерционной цепи нельзя осуществить преобразование входного сигнала вида $x = X_1 \cos \tau_1 + X_2 \cos \tau_2$ в сигнал, содержащий только суммарные или только разностные комбинационные колебания, т. е. $y = Y \cos(n_1 \tau_1 \pm n_2 \tau_2)$.

4.78. Нужно синтезировать нелинейные преобразователи (модуляторы), осуществляющие преобразование двух входных колебаний $u_\Omega = U_\Omega (1 + m \sin \Omega t)$, $u_\omega = U_\omega \sin \omega t$ в выходные колебания u по следующим условиям: 1) $u = U(1 +$

$+m \sin \Omega t) \sin \omega t$ (причем допустимо наличие побочных продуктов преобразования); 2) $u = U(1+m \sin \Omega t) \sin \omega t$ (причем побочных продуктов преобразования быть не должно); 3) $u = U \sin \Omega t \sin \omega t$ (причем побочных продуктов преобразования быть не должно).

В результате решения алгоритмы работы и функциональные схемы.

В третьем выражении $U = Km$, т. е. амплитуда выходного колебания прямо пропорциональна коэффициенту m .

4.79. В задаче 4.78 были получены три функциональные схемы для преобразования входных сигналов:

$u_{\Omega} = U_{\Omega} (1+m \sin \Omega t)$, $u_{\omega} = U_{\omega} \sin \omega t$ в сигнал $u = U(1+m \sin \Omega t) \sin \omega t$ (первые две схемы) и в сигнал $u = U \sin \Omega t \sin \omega t$ (третья схема).

В этих схемах все функциональные узлы были представлены условными обозначениями. Нужно вместо этих трех функциональных схем дать реализационные схемы, содержащие конкретные сведения о применяемых элементах. В качестве квадратора в каждой схеме условно можно применить транзистор, диод или электронную лампу, хотя для получения «квадратичной характеристики» следует использовать определенные соединения этих приборов.

4.80. В задачах 4.78 и 4.79 были найдены алгоритмы и построены схемы амплитудной модуляции с несущей и без несущей; эти схемы (вторую и третью) можно определить как идеальные, поскольку они не дают побочных продуктов преобразования при условии, что применяемые в них нелинейные элементы имеют идеальные квадратичные характеристики вида $i = au^2$.

В действительности характеристики отличаются от идеальных. Примем, что характеристики нелинейных элементов описываются полиномом второй степени: $i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2$, и поставим задачу синтеза цепей по условиям отсутствия побочных продуктов при данной характеристике. Таким образом, задача состоит в синтезе цепей для амплитудной модуляции (с несущей и без несущей), содержащих нелинейные элементы с заданными характеристиками.

4.81. Синтезировать цепь, преобразующую два входных сигнала: $u_{\omega} = U_{\omega} \cos \omega t$, $u_{\Omega} = U_{\Omega} \cos \Omega t$ в разностное колебание вида $u_p = U_p \cos(\omega - \Omega)t$.

4.82. Синтезировать цепь, преобразующую два входных колебания: $u_{\Omega} = U_{\Omega} (1+m \sin \Omega t)$, $u_{\omega} = U_{\omega} \sin \omega t$ в выходное колебание $u = U \cos(\omega - \Omega)t$, где $U = Km$; другими словами, синтезировать схему амплитудной модуляции с подавленной несущей и подавленной одной боковой — схему модуляции с одной боковой полосой.

РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ

4.1. Строим нагрузочную прямую (рис. 4.10) $i = (E - u)/R_{вн}$ по двум точкам: 1) при $u = 0$ $i = E/R_{вн}$; 2) при $i = 0$ $u = E$. Точка пересечения нагрузочной прямой с характеристикой $i = f(u)$ дает значения тока i_0 и напряжения u_0 на нелинейном элементе: $i_0 = 160$ мА; $u_0 = 13$ В.

4.2. $R = 200$ Ом.

4.3. Подставив в систему (4.1) выражение для тока, получаем уравнение

$$au^2 = \frac{e - u}{R},$$

из которого нетрудно определить u :

$$u_{1,2} = -\frac{1}{2aR} \pm \sqrt{\frac{1}{4a^2R^2} + \frac{e}{aR}}.$$

Ток i можно найти по одной из двух формул:

$$i_{1,2} = a \left(-\frac{1}{2aR} \pm \sqrt{\frac{1}{4a^2R^2} + \frac{e}{aR}} \right)^2, \quad i = \frac{e - u}{R}.$$

Так как перед корнем два знака, нужно выбрать одно из двух значений u и i (см. рис. P4.1). Ввиду того, что u по абсолютной величине должно быть меньше e , следует выбирать u_1 и i_1 , т. е.

$$u = -\frac{1}{2aR} + \sqrt{\frac{1}{4a^2R^2} + \frac{e}{aR}}, \quad i = au^2.$$

4.4. $i = 0,23$ мА; $u = 360$ В.

4.5. $i_1 = 0,51$ мА; $i_2 = 0,15$ мА; $E = 310$ В.

4.6. $E = 30$ В.

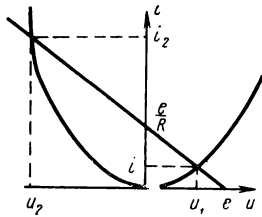


Рис. P4.1

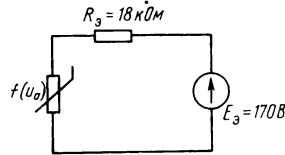


Рис. P4.2

4.7. Всю правую часть схемы рис. 4.14 (правее пунктирной линии) можно заменить по теореме об эквивалентном генераторе схемой, изображенной на рис. P4.2. Наносим «нагрузочную прямую» на характеристику рис. 4.15 по формуле

$$i = \frac{E_3 - u_a}{R_3} = \frac{170}{18} - \frac{1}{18} u_a, \text{ мА.}$$

Точка пересечения дает $U_a \approx 92$ В; $I_a \approx 4,2$ мА.

4.8. $u = \frac{1}{2aR} (\sqrt{1 + 4aRE} - 1)$. Стабилизирующее действие объясняется тем, что данная зависимость $u(E)$ имеет участок, сравнительно мало отличающийся от прямой, параллельной оси абсцисс.

4.9. $i = \frac{Ra^2}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4E}{R^2a^2}} - 1 \right)$. Стабилизирующее действие объясняется тем, что зависимость $i(E)$ в значительной части мало отличается от прямой, параллельной оси абсцисс.

4.10. Исходные уравнения:

$$E = iR + u, \quad u = f(i) = U_0 \operatorname{sh} qi.$$

Искомые значения напряжения и тока найдутся по точке пересечения кривой $U_0 \operatorname{sh} qi$ и прямой $E - iR$.

Соответствующее построение показано на рис. P4.3. Из рисунка находим: $u_1 = 5,2$ В; $i = 48$ мА.

4.11. На основе теоремы об эквивалентном генераторе, находим:

$$R_{\text{экв}} = \frac{(R_1 + R_2)R_3 + R_1R_2}{R_1R_3}, \quad R_{\text{экв}} = 5,66 \text{ кОм};$$

$$U_{\text{экв}} = E \frac{R_3}{R_1 + R_3}, \quad U_{\text{экв}} = 16,7 \text{ В.}$$

Эквивалентная схема изображена на рис. P4.4.

Для определения тока и напряжения на нелинейном резисторе ищем точку пересечения кривой $i = f(u)$ с прямой $i = (U_{\text{экв}} - u)/R_{\text{экв}}$; с этой целью по осям

откладываем $i_0 = 16,7/5,66 = 2,95$ мА; $u_0 = U_{\text{экв}} = 16,7$ В и соединяем эти точки прямой. Искомые величины (см. рис. 4.19) $u = 9$ В; $i \approx 1,3$ мА.

$$4.12. \quad u = E_1 \frac{R_2 + R \left(1 + \frac{E_2}{E_1}\right)}{R_1 + R_2} - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i.$$

4.13. Графические построения выполнены на рис. P4.5. Из рисунка ясно, что длительность и высота входного прямоугольного импульса не влияют на форму выходного импульса, которая при этих условиях также будет прямоугольной.

Здесь уместно провести параллель: подобно тому, как линейные цепи не изменяют форму моногармонического колебания, безынерционные нелинейные цепи не меняют форму «монопрямоугольного» колебания. Аналитическое доказатель-

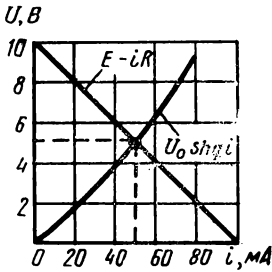


Рис. P4.3

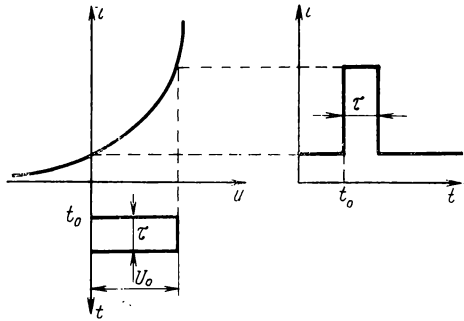


Рис. P4.5

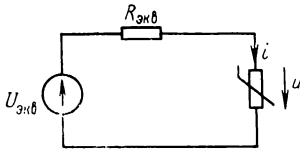


Рис. P4.4

ство можно построить на основе записи входного прямоугольного импульса в виде разности двух единичных функций (см. разд. 2):

$$u = U_0 [1(t - t_0) - 1(t - t_0 - \tau)].$$

Подставляя эту аппроксимацию в выражение характеристики нелинейного элемента, получаем

$$i = a_0 + a_1 U_0 [1(t - t_0) - 1(t - t_0 - \tau)] + a_2 U_0^2 [1(t - t_0) - 1(t - t_0 - \tau)] + a_3 U_0^3 [1(t - t_0) - 1(t - t_0 - \tau)]^2 + \dots$$

Выражения в квадратных скобках после раскрытия дают совокупность одинаковых членов, каждый из которых равен единице; эти члены отличаются друг от друга только «началом отсчета». Отсюда следует, что форма выходного импульса будет прямоугольной.

4.14. При линейной зависимости

$$i_a = S(u_g + Du_g) = S(u_g + DE_a - Di_a R_a).$$

Решая это уравнение относительно i_a и принимая во внимание, что $SD = 1/R_i$, получаем

$$i_a = \frac{S}{1 + \frac{R_a}{R_i}} (u_g + DE_a).$$

Множитель перед скобками обозначают через S_d и называют динамической крутизной. Легко видеть, что если $R_a \ll R_i$, то $S_d \approx S$, а при $R_a \gg R_i$ динамиче-

ская крутизна значительно меньше статической, т. е. характеристика имеет очень малый угол наклона — усиления почти нет.

4.15. По условию

$$i_a = I_0 + S(u_g + Du_a) + \gamma(u_g + Du_a)^2;$$

подставляя сюда $u_a = E_a - i_a R_a$, находим

$$i_a = I_0 + (Su_g + SDE_a - SDR_a i_a) + \frac{\gamma}{S^2} (Su_g + SDE_a - SDR_a i_a)^2.$$

Так как данное уравнение нужно решить относительно i_a , а это связано с громоздкими выкладками, целесообразно перейти к безразмерным величинам и ввести с этой целью следующие обозначения: $i_a/I_0 = y$; $S/I_0 = q$; $u_g + DE_a = u$; $qu = x$; $SDR_a = R_a/R_i = \beta$; $\gamma I_0/S^2 = k$ и переписать уравнение в виде

$$y = 1 + (x - \beta y) + k(x - \beta y)^2.$$

При $\gamma = 0$, т. е. при $k = 0$ приходим к результату, полученному в предыдущей задаче.

Решая последнее уравнение относительно y , находим

$$y = \frac{1}{2} \frac{1 + \beta + 2k\beta x}{k\beta^2} \left[1 \pm \sqrt{1 - 4k\beta^2 \frac{1 + x + k^2}{(1 + \beta + 2k\beta)^2}} \right].$$

Это выражение показывает к каким неудобным формулам приводит учет реакции нагрузки в нелинейных цепях, даже в тех случаях, когда характеристика нелинейного элемента аппроксимируется самым простым нелинейным полиномом.

4.16. Необходимая схема изображена на рис. P4.6a, причем $E_1 < E_2 < E_3$. Если $u < E_1$, характеристика $i(u)$ соответствует линейной, определяемой рези-

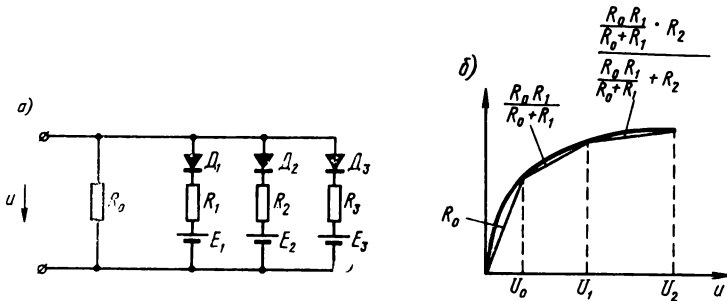


Рис. P4.6

стором R_0 (все диоды заперты); при $E_1 < u < E_2$ открыт диод D_1 и на этом участке наклон характеристики (рис. P4.6б) определяется параллельным соединением линейных резисторов R_0 и R_1 , т. е. $R_0 R_1 / (R_0 + R_1)$, а при $E_2 < u < E_3$ — сопротивлением

$$\frac{R_0 R_1 / (R_0 + R_1)}{R_0 R_1 / (R_0 + R_1) + R_2} \cdot R_2$$

и т. д.

По этим соотношениям можно рассчитать все линейные резисторы (см. номографию В. Б. Смолова [66]).

Следует отметить, что реальные диоды имеют плавные характеристики (т. е. без изломов), что облегчает решение задачи при помощи относительно малого числа элементов.

4.17. Запишем исходные уравнения:

$$e = iR + f(i) + u_{\text{вых}}, \quad (1)$$

$$u_{\text{вх}} = f(i) + u_{\text{вых}}, \quad (2)$$

$$u_{\text{вых}} = K u_{\text{вх}}. \quad (3)$$

Подставляя ур-ние (3) в (2), находим

$$u_{\text{вых}} \left(1 - \frac{1}{K} \right) = -f(i).$$

Так как по условию $K \gg 1$, то $u_{\text{вых}} = -f(i)$. Подставляя $f(i) = -u_{\text{вых}}$ в ур-ние (1), получаем $i = e/R$; следовательно:

$$u_{\text{вых}} = -f \left(\frac{e}{R} \right), \quad (4)$$

т. е. выходное напряжение $u_{\text{вых}}$ зависит от входного воздействия e так же, как напряжение u от тока i в нелинейном резисторе.

4.18. Образум сумму и разность входных сигналов, возведем каждый двучлен в квадрат и затем вычтем второй результат из первого:

$$(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 4x_1x_2.$$

Общий результат и представляет собой произведение входных сигналов с точностью до масштабного множителя.

Функциональная схема изображена на рис. P4.7.

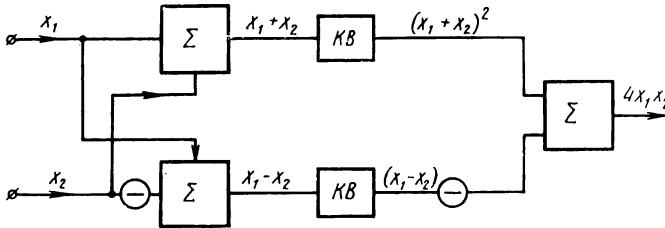


Рис. P 4.7

4.19. В соответствии с поз. 6 табл. 4.1 устанавливаем, что

$$\ln x_1 + \ln x_2 = \ln(x_1 x_2), \quad x_1 > 0, \quad x_2 > 0,$$

а в соответствии с поз. 11 той же таблицы, — что

$$x_1 x_2 = e^{\ln(x_1 x_2)} = e^{\ln x_1 + \ln x_2}.$$

Функциональная схема, реализующая операцию умножения на основе использования логарифматоров и экспонатора, дана на рис. P4.8.

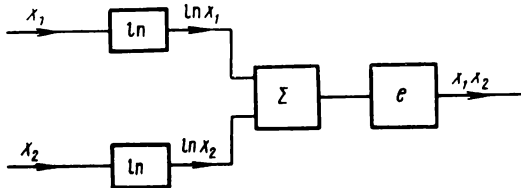


Рис. P 4.8

Для операции деления в соответствии с поз. 10 имеем:

$$\ln x_1 - \ln x_2 = \ln \left(\frac{x_1}{x_2} \right), \quad x_1 > 0, \quad x_2 > 0$$

и

$$\frac{x_1}{x_2} = e^{\ln x_1 - \ln x_2}.$$

Функциональная схема будет содержать дополнительно один инвертор после логарифматора сигнала x_2 .

4.20. Схема будет отвечать своему назначению, если будет выполняться приближенное равенство $x - yz \approx 0$; тогда $z \approx x/y$.

С другой стороны, $z = K(x - yz)$, откуда $z = Kx/(1 + Ky)$.

Сопоставляя эти два равенства

$$\frac{Kx}{1 + Ky} \approx \frac{x}{y},$$

устанавливаем, что схема будет отвечать своему назначению тем лучше, чем сильнее неравенство $Ky \gg 1$, $K \gg 1/y$. Таким образом, коэффициент усиления K должен регулироваться по уровню сигнала y .

4.21. Из выражений

$$i = \frac{u_1}{R_1} = a_1 u_1, \quad i = \frac{u_2}{R_2} = a_2 u_2$$

находим обратные функции:

$$u_1 = f_1^{-1}(i, a_1) = \frac{1}{a_1} i, \quad u_2 = f_2^{-1}(i, a_2) = \frac{1}{a_2} i$$

и подставляем их в функциональное уравнение (4.3а)

$$i = \varphi \left(\frac{1}{a_1} i + \frac{1}{a_2} i \right) = \varphi \left[\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) i \right]$$

или в (4.3б)

$$\varphi^{-1}(i, b) = \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) i.$$

Для того чтобы данное уравнение удовлетворялось, должно выполняться равенство $\varphi^{-1}(i, b) = bi$, тогда

$$b = \frac{1}{a_3} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = R = R_1 + R_2.$$

Следовательно, для эквивалентного резистора

$$i = \frac{1}{b} (u_1 + u_2) = \frac{u_1 + u_2}{R} = \frac{u_1 + u_2}{R_1 + R_2}.$$

В данном случае φ соответствует линейной функции.

4.22. Для приведения к линейному виду (см. стр. 101) найдем обратные функции:

$$f_1^{-1}(i, a_1) = u_1 = \frac{1}{a_1} \ln \frac{i}{I_1} = \frac{1}{a_1} \ln i - \frac{1}{a_1} \ln I_1,$$

$$f_2^{-1}(i, a_2) = u_2 = \frac{1}{a_2} \ln \frac{i}{I_2} = \frac{1}{a_2} \ln i - \frac{1}{a_2} \ln I_2.$$

Векторы параметров a_1 и a_2 представлены двумя постоянными каждый: a_1 или a_2 и $\ln I_1$ или $\ln I_2$. Подставив их в функциональное уравнение (4.36), получим

$$\varphi^{-1}(i, \mathbf{b}) = \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) \ln i - \frac{1}{a_1} \ln I_1 - \frac{1}{a_2} \ln I_2.$$

Легко увидеть, что равенство возможно только при условии, что $\varphi^{-1}(i, \mathbf{b}) = \ln(i, \mathbf{b})$. Введем вместо вектора \mathbf{b} две постоянных

$$\varphi^{-1}(i, \mathbf{b}) = \frac{1}{b_1} \ln \frac{i}{b_2} = \frac{1}{b_1} \ln i - \frac{1}{b_1} \ln b_2$$

и, приравняв левую часть правой

$$\frac{1}{b_1} \ln i - \frac{1}{b_1} \ln b_2 = \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) \ln i - \frac{1}{a_1} \ln I_1 - \frac{1}{a_2} \ln I_2,$$

получим возможность определить b_1 и b_2 :

$$\frac{1}{b_1} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}, \quad b_1 = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2};$$

$$\ln b_2 = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} \left(\frac{1}{a_1} \ln I_1 + \frac{1}{a_2} \ln I_2 \right).$$

Теперь ясно, что характеристика эквивалентного резистора имеет вид: $i = I e^{a u}$, где $I = b_2$, $a = b_1$. Формулу для $I = b_2$ целесообразно переписать в виде

$$\ln I = \frac{a_2 \ln I_1 + a_1 \ln I_2}{a_1 + a_2}.$$

Если $I_1 = I_2$, то $I = I_1 = I_2$; если $a_1 = a_2 = \alpha$, то $i = I e^{\frac{\alpha}{2} u}$.

4.23. $i = I e^{\frac{2}{3} u}$. Графическое построение показано на рис. P4.9.

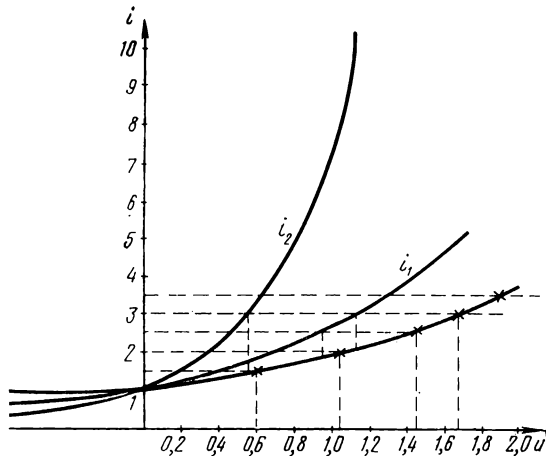


Рис. P4.9

4.24. $i = 0,6e^{0,24u}$.

4.25. Решая уравнение $a = a_1 a_2 / (a_1 + a_2)$ относительно a_2 , находим

$$a_2 = \frac{a a_1}{a_1 - a} = \frac{0,2 \cdot 0,8}{0,8 - 0,2} = 0,267.$$

4.26. Для приведения к линейному виду найдем обратные функции:

$$f_1^{-1}(i, a_1) = u_1 = \frac{1}{\sqrt{a_1}} \sqrt{i},$$

$$f_2^{-1}(i, a_2) = u_2 = \frac{1}{\sqrt{a_2}} \sqrt{i}.$$

Подставив в функциональное уравнение (4.36)

$$\varphi^{-1}(i, b) = \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} \right) \sqrt{i},$$

легко увидеть, что $\varphi^{-1}(i, b) = \sqrt{i \cdot \frac{1}{b}} = \sqrt{\frac{i}{b}}$.

Определим коэффициент b : $1/\sqrt{b} = 1/\sqrt{a_1} + 1/\sqrt{a_2}$.

Характеристика эквивалентного резистора: $i = b u^2$, где $b = a_1 a_2 / (\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2})^2$.

Если $a_1 = a_2 = a$, то $b = a/4$.

4.27. Для приведения к линейному виду перепишем характеристики резисторов следующим образом:

$$\ln \frac{i}{A} = \alpha_1 \ln u, \quad \ln \frac{i}{A} = \alpha_2 \ln u$$

и введем обозначения $\ln i/A = y$, $\ln u = x$; тогда

$$y = \alpha_1 x, \quad y = \alpha_2 x \quad \text{и} \quad x = \frac{1}{\alpha_1} y, \quad x = \frac{1}{\alpha_2} y.$$

Подставим эти величины в функциональное уравнение:

$$\varphi^{-1}(y, \beta) = \frac{1}{\alpha_1} y + \frac{1}{\alpha_2} y.$$

Данное уравнение удовлетворяется при условии, что $\frac{1}{\beta} y = \frac{1}{\alpha_1} y + \frac{1}{\alpha_2} y$,

откуда $\beta = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$.

Таким образом,

$$y = \beta x, \quad \ln \frac{1}{A} = \beta \ln u, \quad i = A e^{\beta \ln u} = A u^\beta.$$

4.28. $i = B u^\beta$, $\beta = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$,

$$\ln B = \frac{\alpha_1 \ln A_2 + \alpha_2 \ln A_1}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

4.29. Подставляя в общую формулу

$$\varphi^{-1}(i) = f_1^{-1}(i) + f_2^{-1}(i)$$

выражения обратных функций, получаем

$$\varphi^{-1}(i) = \ln i + \sqrt{i}.$$

По этому выражению легко построить график (см. рис. P4.10), который представляет собой функцию, обратную искомой; искомая функция $\varphi(i)$ строится как зеркальное изображение обратной относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

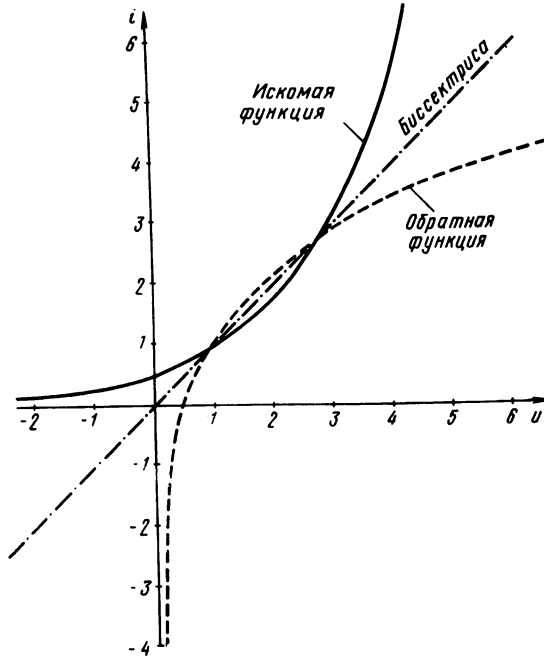


Рис. P 4.10

4.30. Составляем четыре исходных уравнения:

$$u_1 + u_2 + u_3 = E, \quad i = I_1 e^{a_1 u_1}, \quad i = I_2 e^{a_2 u_2}, \quad i = I_3 e^{a_3 u_3},$$

Определяя из последних трех уравнений u_1 , u_2 и u_3 и подставляя их значения в первое уравнение, получаем новое уравнение для тока i :

$$\frac{1}{a_1} \ln \frac{i}{I_1} + \frac{1}{a_2} \ln \frac{i}{I_2} + \frac{1}{a_3} \ln \frac{i}{I_3} = E.$$

Это уравнение нетрудно решить относительно i . Для того чтобы под знаком \ln были безразмерные величины, будем нормировать искомый ток i к начальному току I_1 и введем временно обозначения: $i/I_1 = y$, $I_1/I_2 = k_2$, $I_1/I_3 = k_3$; тогда

$$\frac{1}{a_1} \ln y + \frac{1}{a_2} \ln k_2 y + \frac{1}{a_3} \ln k_3 y = E$$

или

$$\frac{1}{a_1} \ln y + \frac{1}{a_2} \ln y + \frac{1}{a_3} \ln y + \frac{1}{a_2} \ln k_2 + \frac{1}{a_3} \ln k_3 = E,$$

откуда

$$\ln y = \frac{E - \left(\frac{1}{a_2} \ln k_2 + \frac{1}{a_3} \ln k_3 \right)}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}}$$

и окончательно

$$i = I_1 e^{\frac{E - \left(\frac{1}{a_2} \ln k_2 + \frac{1}{a_3} \ln k_3 \right)}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}}}$$

После определения тока i напряжения u_n на каждом из резисторов рассчитываются по формулам:

$$u_n = \frac{1}{a_n} \ln \frac{i}{I_n}$$

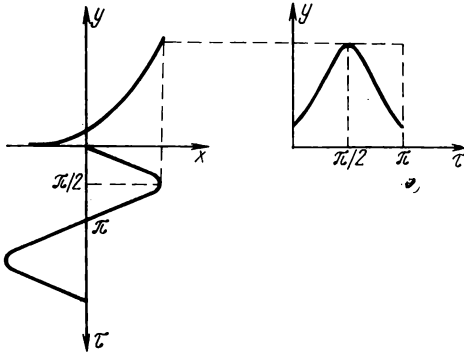


Рис. P4.11

Подставляя заданные в условиях задачи цифры, находим: $i \approx 11,1$ мА; $u_1 \approx 6$ В; $u_2 \approx 2,16$ В; $u_3 \approx 1,84$ В.

4.31. В первом случае, при воздействии $x = a \sin \tau$ выходная реакция будет иметь вид: $y = f(a \sin \tau)$. Так как

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} + \tau \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \tau \right),$$

то

$$y \left(\frac{\pi}{2} + \tau \right) = y \left(\frac{\pi}{2} - \tau \right).$$

Этот результат иллюстрируется рис. P4.11.

Во втором случае, при воздействии $x = a \cos \tau$ выходная реакция $y = f(a \cos \tau)$. Так как $\cos \left(\frac{\pi}{2} + \tau \right) = -\cos \left(\frac{\pi}{2} - \tau \right)$, то

$$f \left[a \cos \left(\frac{\pi}{2} + \tau \right) \right] = f \left[-a \cos \left(\frac{\pi}{2} - \tau \right) \right].$$

Следовательно, если $y = f(x)$ является четной функцией, т. е. $f(x) = f(-x)$, будет иметь место равенство (рис. P4.12a):

$$y \left(\frac{\pi}{2} + \tau \right) = y \left(\frac{\pi}{2} - \tau \right);$$

если же $f(x) = -f(-x)$, будет иметь место другое равенство (рис. P4.12б):

$$y \left(\frac{\pi}{2} + \tau \right) = -y \left(\frac{\pi}{2} - \tau \right).$$

4.32. Для каждого полупериода ток (рис. P4.13) будет выражаться формулой $i = aU_m \sin \Omega t$, ($0 < t < T/2$) и т. д. Разложение в ряд Фурье такой кривой известно [14, стр. 557]:

$$i = aU_m \left[\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos 2\Omega t}{1.3} + \frac{\cos 4\Omega t}{3.5} + \dots \right) \right].$$

Выпрямленный ток, следовательно, определится как

$$I_0 = \frac{2}{\pi} a U_m.$$

Наибольшая переменная составляющая будет иметь амплитуду

$$I_2 = \frac{4}{3\pi} a U_m.$$

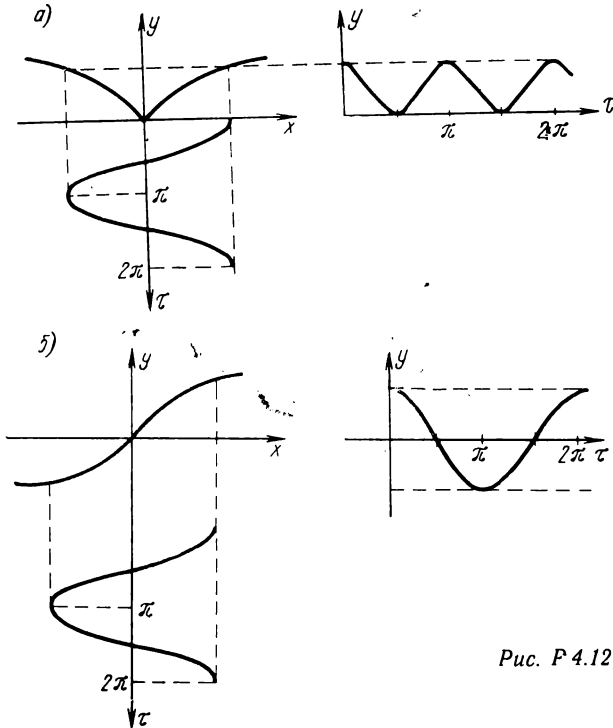


Рис. P 4.12

4.33. Для выпрямителя с характеристикой $i = bu^2$ $I_2/I_0 = 1$.

Для выпрямителя с характеристикой $i = a|u|$ $I_2/I_0 = 2/3$.

4.34. Характеристика должна быть нечетной функцией относительно рабочей точки, т. е. должны отсутствовать члены ряда с четными степенями.

4.35. Из рис. 3.6 (разд. 3) устанавливаем, что $\alpha_2 = \alpha_{2 \text{ макс}} = 0,28$ при $\theta \approx 60^\circ$; $\cos \theta = 0,5$. По ф-ле (3.11) находим:

$$SE_g = SU_g \cos \theta + I_0, \quad E_g = \frac{2 \cdot 6 \cdot 0,5 + 10}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ В.}$$

4.36. $U_K = 50,4 \text{ В.}$

4.37. $E_g \approx 9,6 \text{ В, } I_{a3} \approx 0,5 \text{ мА.}$

4.38. Если $u_g = U_0 \sin \Omega t$, то $i_0 = \frac{I_s}{2} [1 + \text{th}(qU_0 \sin \Omega t)]$.

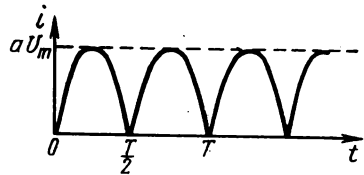


Рис. P 4.13

Это и есть уравнение «трапециевидальной кривой». Чем больше U_0 , т. е. чем сильнее неравенство $qU_0 > 1$, тем ближе будет данная кривая к прямоугольной; крутые фронты будут при условии $U_0 \gg 1/q$.

4.39. Когда диод заперт, т. е. когда $u_1 = E$, $i = 0$ и выходное напряжение повторяет входное $u_2 = u_1$. Если же через диод протекает ток, выходное напряжение $u_2 = u_1 - iR$, но ток i определяется формулой: $i = (u_1 - E)/(R + R_D)$, следовательно,

$$u_2 = u_1 - \frac{u_1 - E}{R + R_D} R = u_1 \frac{1}{1 + \frac{R}{R_D}} + E \frac{1}{1 + \frac{R}{R_D}}.$$

Из последнего выражения легко составить формулу для расчета сопротивления R :

$$R = R_D \frac{u_1 - u_2}{u_2 - E}.$$

4.40. Очевидно, $E_1 = 10$ В; $E_2 = 10$ В; полярность показана на схеме рис. 4.28. Сопротивление R рассчитываем по формуле (задача 4.39): $R = R_D(u_1 - u_2)/(u_2 - E)$. В данном случае $R_D = 250$ Ом (рис. 4.29); $u_1 = 50$ В; $E = 10$ В; $u_2 = 10,5$ В

$$R = 250 \frac{50 - 10,5}{10,5 - 10} = 19,75 \text{ кОм.}$$

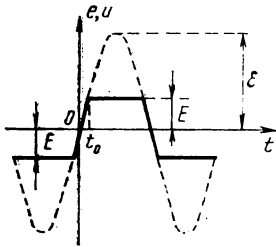


Рис. Р4.14

4.41. В окрестности нуля (рис. Р4.14) при условии, что $\mathcal{E} \gg E$, имеем

$$\frac{de}{dt} = \omega \mathcal{E} \cos \omega t \Big|_{\omega t \ll 1} \approx \omega \mathcal{E}.$$

Следовательно, выражение для выходного напряжения $u(t)$ в окрестности нуля можно записать в виде $u \approx \mathcal{E} \omega t$.

При $t = t_0$ $u = E$; таким образом $t_0 = E/\omega \mathcal{E}$, а время $\tau = 2t_0$ — соответственно: $\tau = 2E/\omega \mathcal{E}$. Подставляя условие задачи, находим

$$\tau = \frac{2 \cdot 2}{2\pi \cdot 10^6 \cdot 200} = \frac{1}{\pi \cdot 10^7} \text{ с} = \frac{1}{\pi \cdot 10} \text{ мкс.}$$

4.42. По формулам табл. 4.3 находим:

- 1) $i = I_1 \left[2 \left(\frac{u}{U} \right)^2 - 1 \right],$
- 2) $i = I_2 \left[4 \left(\frac{u}{U} \right)^3 - 3 \left(\frac{u}{U} \right) \right],$
- 3) $i = I_4 \left[8 \left(\frac{u}{U} \right)^4 - 8 \left(\frac{u}{U} \right)^2 + 1 \right].$

4.43. В соответствии с ф-лой (4.10)

$$\begin{aligned} i &= \sum_{n=1}^3 I_n T_n \left(\frac{u}{U} \right) = I_0 \left[\frac{u}{U} + 2 \left(\frac{u}{U} \right)^2 - 1 + 4 \left(\frac{u}{U} \right)^3 - 3 \left(\frac{u}{U} \right) \right] = \\ &= I_0 \left[-1 - 2 \frac{u}{U} + 2 \left(\frac{u}{U} \right)^2 + 4 \left(\frac{u}{U} \right)^3 \right]. \end{aligned}$$

4.44. 1) При $N=4$:

$$i = I_0 \left[-2 \left(\frac{u}{U} \right) - 6 \left(\frac{u}{U} \right)^2 + 4 \left(\frac{u}{U} \right)^3 + 8 \left(\frac{u}{U} \right)^4 \right].$$

2) При $N=5$:

$$i = I_0 \left[3 \left(\frac{u}{U} \right) - 6 \left(\frac{u}{U} \right)^2 - 16 \left(\frac{u}{U} \right)^3 + 8 \left(\frac{u}{U} \right)^4 + 16 \left(\frac{u}{U} \right)^5 \right],$$

3) при $N=6$:

$$i = I_0 \left[-1 + 3 \left(\frac{u}{U} \right) + 12 \left(\frac{u}{U} \right)^2 - 16 \left(\frac{u}{U} \right)^3 - 40 \left(\frac{u}{U} \right)^4 + 16 \left(\frac{u}{U} \right)^5 + 32 \left(\frac{u}{U} \right)^6 \right]$$

$$4.45. i = I_0 \left[1 - 2 \frac{u}{U} - 8 \left(\frac{u}{U} \right)^2 - 16 \left(\frac{u}{U} \right)^3 + 8 \left(\frac{u}{U} \right)^4 + 16 \left(\frac{u}{U} \right)^5 \right].$$

4.46. В соответствии с ф-лой (4.10) имеем

$$\begin{aligned} i &= I_1 \frac{u}{U} + \frac{1}{2} I_1 \left[2 \left(\frac{u}{U} \right)^2 - 1 \right] + \frac{1}{4} I_1 \left[4 \left(\frac{u}{U} \right)^3 - 3 \left(\frac{u}{U} \right) \right] = \\ &= I_1 \left[\frac{1}{4} \left(\frac{u}{U} \right) + \left(\frac{u}{U} \right)^2 + \left(\frac{u}{U} \right)^3 - \frac{1}{2} \right]. \end{aligned}$$

4.47. Приведем сначала аналитическое доказательство. Представим искомую характеристику $y=f(x)$ в виде степенного полинома: $y = \sum_{n=0}^N a_n x^n$; так как

$$x = \cos \omega t = \cos \tau, \text{ то } y = \sum_{n=0}^N a_n \cos^n \tau.$$

По формулам кратных дуг можно от этого полинома перейти к полиному вида: $y = \sum_{n=0}^N A_n \cos n\tau$. Но по условию $y = \cos \frac{\tau}{k}$; легко видеть, что равенство

$$\sum_{n=0}^N A_n \cos n\tau = \cos \frac{\tau}{k}$$

неосуществимо, если $k=2, 3, 4, \dots$

Графическое доказательство иллюстрируется рис. P4.15, на котором по точкам построена характеристика $y(x)$, необходимая для получения выходного колебания с «половинной частотой». Из рисунка видно, что характеристика является неоднозначной и при помощи резистивных элементов физически нереализуемой (отметим, что подобные характеристики можно реализовать на основе использования переключательных устройств; однако применение переключательных устройств приводит к параметрическим цепям и, следовательно, не соответствует условию задачи).

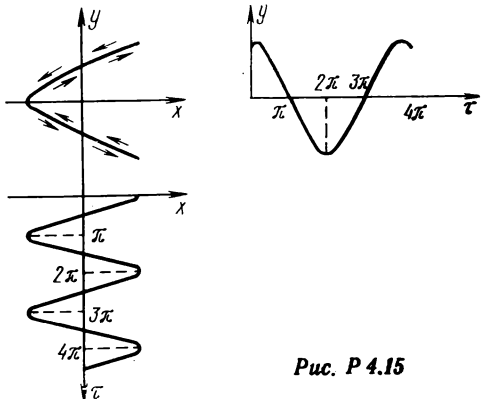


Рис. P 4.15

Данное доказательство можно упростить. По условию: $y = \cos \tau/k$, $x = \cos \tau$, подставляя $\tau = \arccos x$ в выражение y , получаем уравнение характеристики

$$y = \cos \left(\frac{1}{k} \arccos x \right), \quad k \geq 2.$$

Последняя функция является неоднозначной и, следовательно, нереализуемой. На рис. P4.16 дан график этой функции при $k=2$.

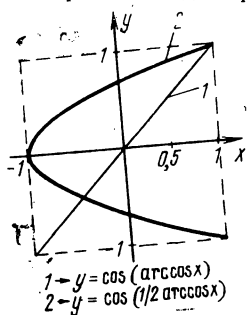


Рис. P 4.16

4.48. Очевидно, возможность реализации такого преобразования определяется возможностью получения выходного сигнала, состоящего из синусоидальных составляющих, т. е.

$$y_s(t) = \sum_{n=1}^N Y_{sn} \sin n \tau,$$

так как возможность получения косинусоидальных составляющих при входном воздействии вида $x = \cos \tau$ уже была доказана.

Так как по условию $x = X \cos \tau$, $\tau = \arccos x/X$, то

$$y_s(\tau) = \sum_{n=1}^N Y_{sn} \sin \left(n \arccos \frac{x}{X} \right) = \sum_{n=1}^N Y_{sn} U \left(\frac{x}{X} \right),$$

где $U \left(\frac{x}{X} \right)$ — полиномы Чебышева второго рода, определяемые формулой [41]:

$$U_n \left(\frac{x}{X} \right) = \frac{1}{n} \sqrt{X^2 - x^2} \frac{dT_n \left(\frac{x}{X} \right)}{dx}.$$

Последний множитель этого выражения является степенным полиномом и соответственно однозначной функцией. Нетрудно видеть, что $\sqrt{X^2 - x^2}$ не является однозначной функцией. В самом деле, из равенства $\cos \tau = x/X$ легко получить, что $\sqrt{X^2 - x^2} = X \sin \tau$ и, следовательно, при $0 < \tau < \pi$ перед знаком должен быть знак плюс, а при $\pi < \tau < 2\pi$ — знак минус. Таким образом, характеристика оказывается двузначной и не может быть реализована при помощи резистивной цепи.

Итак, при косинусоидальном внешнем воздействии можно получить выходной сигнал, представляющий собой сумму косинусоидальных составляющих с любыми амплитудами; однако обеспечить различные фазы у этих составляющих при помощи резистивной цепи невозможно (без переключающих устройств).

4.49. Пользуясь ф-лой (4.10), запишем

$$y(x) = I_0(a) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(a) T_n(x).$$

Известно равенство [41, стр. 37]

$$e^{ax} = I_0(a) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(a) T_n(x);$$

следовательно, искомая характеристика имеет вид: $y(x) = e^{ax}$.

4.50. Для получения необходимой зависимости $y(\tau) = \tau$, ($-\pi/2 < \tau < \pi/2$), найдем τ из выражения входного колебания: $\tau = \arcsin x$ и подставим его в выражение выходного колебания:

$$y = \arcsin x = \arcsin(\sin \tau).$$

Таким образом, выражение характеристики имеет вид: $y = \arcsin \sin x$, а выражение «треугольного» колебания: $y = \arcsin(\sin \tau)$.

На рис. P4.17 дана графическая иллюстрация рассматриваемого преобразования.

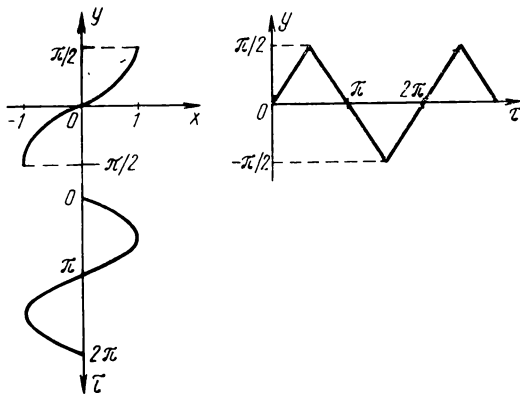


Рис. P 4.17

- 4.51. Рис. 4.32а: $y = \arcsin(\cos \tau)$, $y = \arcsin x$,
 рис. 4.32б: $y = \arcsin(\sin \tau)$, $y = \arcsin \cos x$,
 рис. 4.32в: $y = \arcsin(\cos \tau)$, $y = \arcsin \cos x$.

4.52. Из выражения $x = \operatorname{tg} \tau$ найдем, что $\tau = \operatorname{arctg} x$ и подставим это значение в выражение выходного колебания, которое по условию имеет вид: $y = \tau$, $(-\pi/2 < \tau < \pi/2)$, т. е.

$$y = \operatorname{arctg} x \quad \text{и} \quad y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \tau).$$

- 4.53. Рис. 4.34а: $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \tau)$, $y = \operatorname{arctg} x$,
 рис. 4.34б: $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} \tau)$, $y = \operatorname{arctg} \cos x$,
 рис. 4.34в: $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} \tau)$, $y = \operatorname{arctg} \cos x$.

4.54. Анодный ток изменяется во времени по закону:

$$i = a_0 + a_1 (U_\omega \sin \omega t + U_\Omega \sin \Omega t) + a_2 (U_\omega \sin \omega t + U_\Omega \sin \Omega t)^2.$$

Открывая скобки и сохраняя только слагаемые, содержащие множитель $\sin \omega t$ (контур настроен на частоту ω), получаем

$$i_\omega = a_1 U_\omega \sin \omega t + 2a_2 U_\Omega U_\omega \sin \Omega t \sin \omega t = a_1 U_\omega \left(1 + \frac{2a_2 U_\Omega}{a_1} \sin \Omega t \right) \sin \omega t.$$

Таким образом, амплитуда первой гармоники тока

$$I_{a_1} = a_1 U_\omega \left(1 + \frac{2a_2 U_\Omega}{a_1} \sin \Omega t \right)$$

связана линейной зависимостью с модулирующим напряжением $u_\Omega = U_\Omega \sin \Omega t$.

4.55. Амплитудная модуляция представляет собой умножение одного сигнала (модулирующего) на другой (модулируемый), когда на вход модулирующего устройства подается их сумма; следовательно, при указанных условиях осуществить модуляцию невозможно, так как из-за членов полинома с нечетными степенями не образуется произведение входных слагаемых (для этих целей нужны члены с четными степенями).

Объяснение, построенное на спектральной основе, состоит в следующем. Амплитудномодулированное колебание должно содержать комбинационные колеба-

ния второго порядка, к образованию которых приводят только члены полинома с четными степенями.

$$4.56. \quad i_{\omega} = a_1 U_{\omega} \left(1 + \frac{2a_2}{a_1} U_1 \sin \Omega_1 t + \frac{2a_2}{a_1} U_2 \sin \Omega_2 t \right) \sin \omega t.$$

4.57. Характеристика нелинейного элемента не должна содержать составляющих с нечетными степенями.

4.58. Рассмотрим решение этой задачи на примере модуляции одним синусоидальным колебанием с частотой Ω , т. е. $u_{\Omega} = U_{\Omega} (1 + m \sin \Omega t)$. На вход модуляционного устройства по условию задачи подается напряжение u_{Ω} и $u_{\omega} = U_{\omega} \sin \omega t$; на выходе должно быть колебание

$$i = I_0 (1 + m \sin \Omega t) \sin \omega t.$$

Спектрограммы входного и выходного колебаний показаны на рис. P4.18.

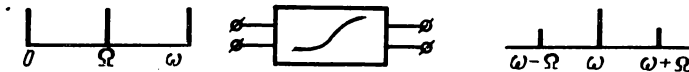


Рис. P 4.18

По условию задачи, нужно ответить на вопрос: можно ли так распорядиться коэффициентами a_0, a_1, a_2, \dots в выражении характеристики нелинейной цепи

$$i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + \dots,$$

чтобы на выходе были только три колебания — несущее с частотой ω и боковые (комбинационные) с частотами $\omega \pm \Omega$.

Для ответа на этот вопрос достаточно учесть, что для создания колебания с частотой ω необходимо линейное слагаемое $a_1 u$, а для создания комбинационных колебаний с частотами $\omega \pm \Omega$ — слагаемое $a_2 u^2$; однако линейное слагаемое непременно вызовет появление на выходе колебания с частотой Ω , что по условию недопустимо. Легко видеть, что компенсировать это колебание при помощи слагаемых более высоких степеней невозможно, так как каждое слагаемое приводит к появлению новых комбинационных колебаний (например, член $a_3 u^3$ вызовет колебания с частотами $\omega \pm 2\Omega, 2\omega \pm \Omega$ и т. д.).

Таким образом, «идеальную модуляцию» на основе использования только одного нелинейного элемента получить невозможно.

$$4.59. \quad I_{a_1} = \frac{I_s}{4} [\text{th } q (u_{зв} + U_{\omega}) - \text{th } q (u_{зв} - U_{\omega})].$$

$$4.60. \quad I_{a_1} = 86 \text{ мА.}$$

4.61. Подставляя сеточные напряжения $u_{g1} = u_{\omega} + u_{\Omega}$, $u_{g2} = u_{\omega} - u_{\Omega}$ в выражения характеристик ламп, получаем:

$$i_{a_1} = a_0 + a_1 u_{g1} + a_2 u_{g1}^2 = a_0 + a_1 (u_{\omega} + u_{\Omega}) + a_2 (u_{\omega} + u_{\Omega})^2,$$

$$i_{a_2} = a_0 + a_1 u_{g2} + a_2 u_{g2}^2 = a_0 + a_1 (u_{\omega} - u_{\Omega}) + a_2 (u_{\omega} - u_{\Omega})^2;$$

общий ток i пропорционален разности токов $(i_{a_1} - i_{a_2})$:

$$i = k (i_{a_1} - i_{a_2}) = k (2a_1 u_{\Omega} + 4a_2 u_{\omega} u_{\Omega}).$$

Так как $u = U_{\omega} \sin \omega t$, $u = U_{\Omega} \sin \Omega t$, то

$$i = k (2a_1 U_{\Omega} \sin \Omega t + 4a_2 U_{\omega} U_{\Omega} \sin \Omega t \sin \omega t)$$

или

$$i = k \cdot 2a_1 U_{\Omega} \sin \Omega t + k 2a_2 U_{\omega} U_{\Omega} [\cos (\omega - \Omega) t - \cos (\omega + \Omega) t].$$

Таким образом, спектр выходного тока состоит из двух боковых колебаний, амплитуды которых прямо пропорциональны амплитуде U_{Ω} модулирующего напряжения, и низкочастотной составляющей, которую нетрудно отфильтровать; колебание несущей частоты в такой схеме (называемой балансным модулятором) подавлено.

4.62. Члены полинома, содержащие четные степени.

4.63. Среди комбинационных колебаний, являющихся следствием нелинейного преобразования двух исходных колебаний:

$$\frac{U_0 m}{2} \cos(\omega + \Omega)t \text{ и } \frac{U_0 m}{2} \cos(\omega - \Omega)t,$$

не будет колебаний с частотой Ω .

4.64. Комбинационное колебание второго порядка содержит частоту Ω .

4.65. По формуле трех ординат (разд. 3) с учетом обозначений, принятых на рис. P4.19, определим постоянную составляющую:

$$I_0 = \frac{i_{\max} + i_{\min} + 2I_{00}}{4},$$

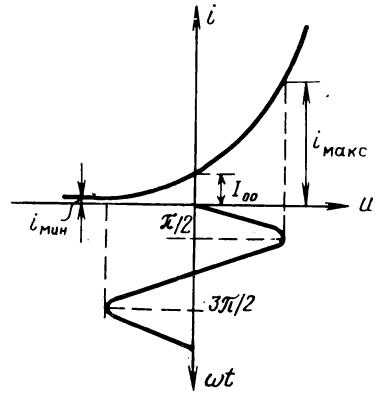


Рис. P4.19

а затем ток детектирования:

$$I_d = I_0 - I_{00} = \frac{i_{\max} + i_{\min}}{4} - \frac{I_{00}}{2}.$$

Если $u = U_{\omega} \sin \omega t$, то (рис. P4.19)

$$i_{\max} = I_{00} e^{aU_{\omega} \sin \omega t} \Big|_{\omega t = \pi/2} = I_{00} e^{aU_{\omega}},$$

$$i_{\min} = I_{00} e^{aU_{\omega} \sin \omega t} \Big|_{\omega t = (3/2)\pi} = I_{00} e^{-aU_{\omega}}.$$

Подставляя эти выражения в формулу для I_d , находим

$$I_d = \frac{I_{00} (e^{aU_{\omega}} + e^{-aU_{\omega}})}{4} - \frac{I_{00}}{2} = \frac{I_{00}}{2} (\operatorname{ch} aU_{\omega} - 1).$$

При $aU_{\omega} \ll 1$, так как $\operatorname{ch} x \approx 1 + x^2/2 + \dots$, получим $I_d \approx I_{00} \frac{a^2 U_{\omega}^2}{4}$. Теперь найдем точное выражение тока детектирования. Так как (см. разд. 3)

$$e^{a \sin x} = B_0(a) + 2B_1(a) \sin x + 2B_2(a) \cos 2x + \dots,$$

то

$$i = I_{00} e^{aU_{\omega} \sin \omega t} = I_{00} [B_0(aU_{\omega}) + \dots].$$

Ток детектирования

$$I_d = I_0 - I_{00} = I_{00} B_0(aU_{\omega}) - I_{00} = I_{00} [B_0(aU_{\omega}) - 1].$$

Приближенное выражение, полученное по формуле трех ординат, отличается от точного настолько, насколько отличается функция $\operatorname{sh} x$ от функции $B_0(x)$.

$$4.66. \quad I_d = \frac{a_2 U_\omega^2}{2}.$$

$$4.67. \quad I_d = \frac{I_s}{4} \left\{ \operatorname{th} q E_g - \frac{1}{2} \left[\operatorname{th} q (U_\omega + E_g) - \operatorname{th} (U_\omega - E_g) \right] \right\}.$$

$$4.68. \quad k = \sqrt{\frac{\frac{m_1^4}{4} + \frac{m_2^4}{4} + 4m_1^2 m_2^2}{4m_1^2 + 4m_2^2}}.$$

Если $m_2=0$, то $k=m_1/4$. При $m_1=m_2=m$ $k=(3/4)m$.

4.69. Как было установлено в задаче 4.66, ток детектирования в квадратичном детекторе определяется выражением: $i_d = \frac{a_2 U^2(t)}{2}$, где в данном случае $U(t) = U_0(1+m \cos \Omega t)$.

Коэффициент гармоник (см. задачу 4.68) для случая, когда все составляющие АМ колебания

$$u = U_0 \cos \omega_0 t + \frac{U_0 m}{2} \cos (\omega_0 - \Omega) t + \frac{U_0 m}{2} \cos (\omega_0 + \Omega) t$$

пошли к детектору без искажений, $k = I_2/I_1 = m/4$.

В действительности из-за неравномерности амплитудно-частотной характеристики контура к детектору будут подведены составляющие с другими значе-

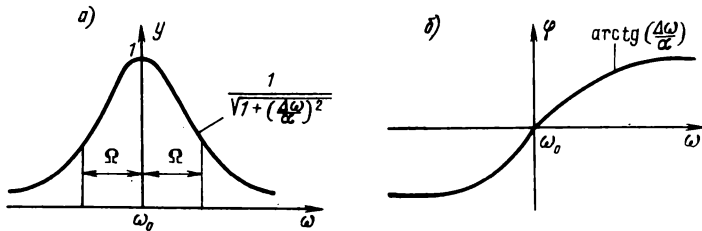


Рис. P 4.20

ниями амплитуд и фаз. При точной настройке контура (рис. P 4.20) напряжение на входе детектора определится как

$$u = U_0 \cos \omega_0 t + \frac{U_0 m}{2 \sqrt{1 + \left(\frac{\Omega}{\alpha}\right)^2}} \cos [(\omega_0 - \Omega) t - \varphi] + \frac{U_0 m}{2 \sqrt{1 + \left(\frac{\Omega}{\alpha}\right)^2}} \cos [(\omega_0 + \Omega) t + \varphi],$$

где $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\Omega}{\alpha}$, $\alpha = \frac{R}{2L} = \Delta\omega$, R , L — параметры контура; $\Delta\omega^*$ — половина полосы пропускания контура на уровне 0,707.

Для того чтобы найти нелинейные искажения, перепишем последнее выражение в виде

$$u = U_0 \cos \omega t + \frac{U_0 m}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega}{\alpha}\right)^2}} \cos(\Omega t + \varphi) \cos \omega t = \\ = U_0 \left[1 + \frac{m}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega}{\alpha}\right)^2}} \cos(\Omega t + \varphi) \right] \cos \omega t.$$

Так как ток детектирования $i_d = a_2 U^2(t)/2$, где в данном случае

$$U(t) = U_0 \left[1 + \frac{m}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega}{\alpha}\right)^2}} \cos(\Omega t + \varphi) \right],$$

то после возведения в квадрат, получим

$$i_d = \frac{a_2}{2} U_0^2 \left\{ 1 + \frac{2m}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega}{\alpha}\right)^2}} \cos(\Omega t + \varphi) + \right. \\ \left. + \frac{m^2}{1 + \left(\frac{\Omega}{\alpha}\right)^2} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(\Omega t + \varphi) \right] \right\}.$$

Отношение амплитуд второй и первой гармоник

$$k = \frac{I_2}{I_1} = \frac{\frac{1}{2} m^2}{1 + \left(\frac{\Omega}{\alpha}\right)^2} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega}{\alpha}\right)^2}}{2m} = \frac{m}{4} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega}{\alpha}\right)^2}}.$$

К этому выводу можно было прийти сразу, так как из теории линейных цепей известно, что эквивалентный коэффициент модуляции АМ колебания, прошедшего через колебательный контур, уменьшается в $\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega}{\alpha}\right)^2}}$ раз; соответственно уменьшаются и нелинейные искажения.

4.70. Выражение характеристики детектирования легко найти по формуле $I_0 = \alpha_0 i_{\max}$, в данном случае (см. разд. 3)

$$\alpha_0 \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{\pi} \approx 0,32, \quad i_{\max} = S U_{\omega};$$

следовательно, $I_0(t) = \frac{S}{\pi} U_{\omega}(t)$ или $I_0 = 0,32 S U_{\omega}$.

Из последнего выражения непосредственно следует, что I_0 повторяет форму U_{ω} . Отсутствие искажений объясняется тем, что при $\theta = \pi/2$ угол отсечки θ не изменяется при изменении амплитуды напряжения.

К такому же результату легко прийти, если аппроксимировать ломаную характеристику (см. задачи 2.29) выражением

$$i = S(|u| + u)^2/2;$$

при $u = U_{\omega} \sin \omega t$

$$i = \frac{S U}{2} (|\sin \omega t| + \sin \omega t).$$

Вычисляя постоянную составляющую по формуле

$$I_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i(t) d(\omega t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{SU}{2} (|\sin \omega t| + \sin \omega t) d(\omega t),$$

находим, что $I_0 = SU/\pi$.

4.71. По условию: $u = U \sin \omega t$ и, следовательно,

$$i = \frac{SU \sin \omega t}{1 - e^{-\alpha U \sin \omega t}}.$$

Постоянная составляющая по формуле трех ординат

$$i_0 = \frac{i_{\text{макс}} + i_{\text{мин}}}{4} + \frac{i_{00}}{2},$$

где $i_{\text{макс}} = SU/(1 - e^{-\alpha U})$ при $u = U$; $i_{\text{мин}} = SU/(1 - e^{\alpha U})$ при $u = -U$; $i_{00} = S/\alpha$ при $u = 0$.

Ток детектирования $i_d = i_0 - i_{00}$; следовательно,

$$i_d = \frac{i_{\text{макс}} + i_{\text{мин}}}{4} - \frac{i_{00}}{2} = \frac{SU}{4} \left(\frac{1}{1 - e^{-\alpha U}} - \frac{1}{1 - e^{\alpha U}} \right) - \frac{S}{2\alpha}.$$

Преобразуем выражение в скобках:

$$\frac{1}{1 - e^{-\alpha U}} - \frac{1}{1 - e^{\alpha U}} = \frac{e^{\alpha U}}{e^{\alpha U} - 1} - \frac{1}{1 - e^{\alpha U}} = \frac{e^{\alpha U} + 1}{e^{\alpha U} - 1}.$$

Теперь можно написать:

$$i_d = \frac{S}{2\alpha} \left(\frac{\alpha U}{2} \frac{e^{\alpha U} + 1}{e^{\alpha U} - 1} - 1 \right).$$

Иследуем последнее выражение при малых и больших амплитудах. При $\alpha U \ll 1$ имеем

$$i_d \approx \frac{S}{2\alpha} \left(\frac{\alpha U}{2} \frac{1 + \alpha U + 1}{1 + \alpha U - 1} - 1 \right) = \frac{S}{2\alpha} \left(\frac{\alpha U}{2} \frac{2 + \alpha U}{2U} - 1 \right) = \frac{S}{2\alpha} \frac{\alpha U}{2} = \frac{S}{4} U.$$

При $\alpha U \gg 1$

$$i_d \approx \frac{S}{2\alpha} \left(\frac{\alpha U}{2} - 1 \right) \approx \frac{S}{4} U.$$

Таким образом, как при малых, так и при больших амплитудах характеристика детектирования оказывается линейной, график функции

$$y = \frac{i_d}{S/2\alpha} = \frac{\alpha U}{2} \frac{e^{\alpha U} + 1}{e^{\alpha U} - 1} - 1$$

изображен на рис. P4.21.

4.72. Мгновенное значение тока

$$\begin{aligned} i &= a_0 + a_1(-E + U \sin \omega t) + a_2(-E + U \sin \omega t)^2 = \\ &= a_0 - a_1 E + a_2 E^2 + \frac{a_2 U^2}{2} + a_1 U \sin \omega t - 2a_2 E \sin \omega t - \frac{a_2 U^2}{2} \cos 2\omega t. \end{aligned}$$

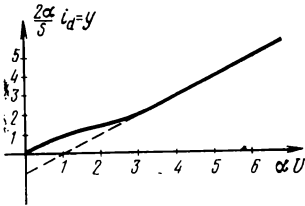


Рис. P 4.21

Постоянная составляющая $I_0 = a_0 - a_1 E + a_2 E^2 + a_2 U^2/2$; ток покоя (т. е. ток при $U=0$) $I_{00} = a_0 - a_1 E + a_2 E^2$; ток детектирования $I_d = I_0 - I_{00} = \frac{a_2 U^2}{2}$. Таким образом, ток детектирования не зависит от смещения E . Найдем теперь отношение I_d/I_{00} :

$$\frac{I_d}{I_{00}} = \frac{1}{2} \frac{a_2 U^2}{a_0 - a_1 E + a_2 E^2}.$$

Это отношение существенно зависит от смещения E .

4.73. $i_{\Omega} = a_0 + a_2 U^2 + a_2 U^2 \cos \Omega t$.

4.74. $I_p = a_2 U_1 U_2$.

4.75. $I_p = \frac{S}{4} [\text{th}^2 q (E_g + U_r) - \text{th}^2 q (E_g - U_r)] U_c$.

4.76. Подставляя входное напряжение в выражение характеристики нелинейного преобразователя и сохраняя только составляющие с частотой ω_0 , получаем

$$i = \left(a_1 U_c + \frac{3}{4} a_3 U_c^3 + \frac{3}{2} a_3 U_c U_{\Pi}^2 \right) \cos \omega_0 t.$$

Пусть теперь $U_c = \text{const}$, а $U_{\Pi} = U_{\Pi}(t)$, тогда

$$i = a_1 U_c \left[1 + \frac{3}{4} \frac{a_3}{a_1} U_c^2 + \frac{3}{2} \frac{a_3}{a_1} U_{\Pi}^2(t) \right] \cos \omega_0 t.$$

Из этого выражения следует, что несмотря на «молчание принимаемой станции» будет прослушиваться станция помехи, даже если ее несущая частота существенно отличается от частоты принимаемой станции. Описанный процесс называют перекрестной модуляцией или перекрестными искажениями.

Легко убедиться в том, что при аппроксимации характеристики нелинейного элемента полиномом второй степени нельзя объяснить возникновение перекрестных искажений.

4.77. Для доказательства достаточно раскрыть косинус суммы (разности)

$$\cos(n_1 \tau_1 \pm n_2 \tau_2) = \cos n_1 \tau_1 \cos n_2 \tau_2 \pm \sin n_1 \tau_1 \sin n_2 \tau_2$$

и вспомнить доказательство того (см. задачу 4.48), что для получения синусоидальных составляющих характеристика должна быть однозначной, т. е. не реализуемой без переключающих устройств.

4.78. 1) По первому условию нужно перемножить сигналы u_{Ω} и u_{ω} , не забывая о побочных продуктах; при этих условиях достаточно сложить входные колебания и возвести их в квадрат:

$$(u_{\Omega} + u_{\omega})^2 = u_{\Omega}^2 + u_{\omega}^2 + 2u_{\Omega} u_{\omega} = U_{\Omega}^2 (1 + m \sin \Omega t)^2 + U_{\omega}^2 \sin^2 \omega t + 2U_{\Omega} (1 + m \sin \Omega t) U_{\omega} \sin \omega t.$$

Побочные продукты: U_{Ω}^2 , $U_{\Omega}^2 m/2$, $2U_{\Omega}^2 m \sin \Omega t$, $(U_{\Omega}^2 m/2) \cos 2\Omega t$, $U_{\omega}^2/2$ ($U_{\omega}^2/2$) $\cos 2\omega t$ должны быть отфильтрованы. Функциональная схема изображена на рис. P4.22a.

Отметим, что для упрощения выкладок здесь и ниже опущены коэффициенты пропорциональности (масштабные множители).

2) По второму условию побочные продукты преобразования должны отсутствовать; при этих условиях нужно применить известный алгоритм перемножения (см. задачу 4.18), состоящий в образовании разности между квадратом суммы и квадратом разности:

$$(u_{\Omega} + u_{\omega})^2 - (u_{\Omega} - u_{\omega})^2 = 4u_{\Omega} u_{\omega} = 4u_{\Omega} (1 + m \sin \Omega t) U_{\omega} \sin \omega t.$$

В этом случае побочных продуктов нет.

Функциональная схема изображена на рис. P4.22б.

3) По третьему условию результатом преобразования должно быть колебание $u = U \sin \Omega t \sin \omega t$. Из выражений

$$u_{\Omega} = U_{\Omega} (1 + m \sin \Omega t) = U_{\Omega} + U_{\Omega} m \sin \Omega t, \quad u_{\omega} = U_{\omega} \sin \omega t$$

следует, что нужно освободиться от постоянной составляющей U_{Ω} , т. е. получить $u'_{\Omega} = U_{\Omega} \sin \Omega t$ и затем умножить u'_{Ω} на u_{ω} . Для того чтобы освободиться от побочных продуктов, нужно далее осуществить перемножение при помощи двух квадраторов так же, как и в п. 2.

Функциональная схема изображена на рис. P4.22в. Линейный фильтр, предназначенный для режективирования постоянной составляющей, представляет собой либо трансформатор, либо конденсатор.

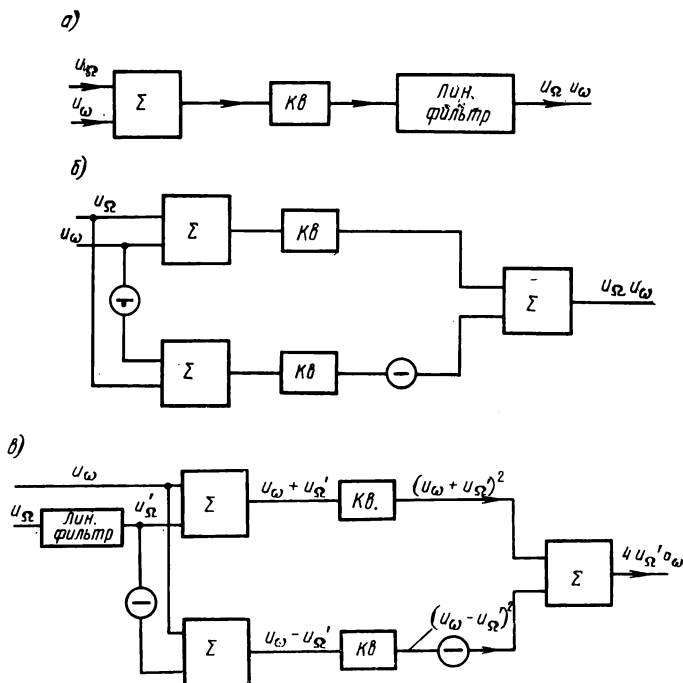


Рис. P4.22

Схемы, подавляющие несущую, т. е. освобождающие выходные колебания от составляющей вида $U_{\omega} \sin \omega t$, называются балансными.

4.79. Первая схема изображена на рис. P4.23а и соответствует функциональной схеме рис. P4.22а. Побочные продукты преобразования отфильтровываются при помощи колебательного контура, настроенного на частоту ω .

Вторая схема представлена на рис. P4.23б и соответствует схеме рис. P4.22б. Она содержит трансформатор высокой частоты со средней точкой; благодаря этому напряжению высокой частоты подается к квадраторам (диодам) в противофазе; аналогичное инвертирование совершается и в выходном трансформаторе.

Третья схема (рис. P4.23в) соответствует схеме рис. P4.22в. Она содержит низкочастотный входной трансформатор со средней точкой; благодаря этому входное колебание низкой частоты освобождается от постоянной составляющей

и подается в противофазе на квадраторы (диоды); одно из двух выходных колебаний инвертируется в выходном высокочастотном трансформаторе со средней точкой.

4.80. Очевидно, что цепи, содержащие один нелинейный элемент, из рассмотрения исключаются, так как для компенсации искажений (побочных продуктов преобразования) необходимо иметь по меньшей мере два канала.

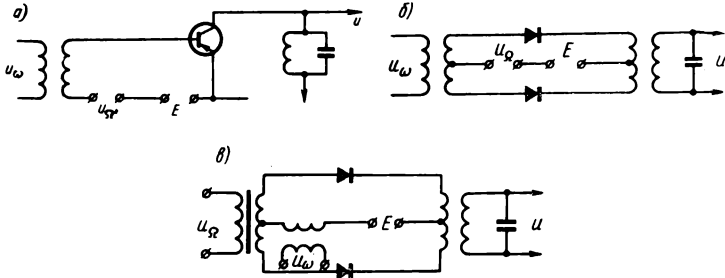


Рис. Р 4.23

Сначала рассмотрим модуляцию с несущей; на выходе нужно получить колебание $u = Au_{\Omega} u_{\omega}$, где $u_{\Omega} = U_{\Omega}(1 + m \sin \Omega t)$, $u_{\omega} = U_{\omega} \sin \omega t$. Характеристика нелинейного элемента имеет вид: $i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2$. В качестве напряжения u можно взять сумму и разность, т. е. $u_{\Omega} + u_{\omega}$ и $u_{\Omega} - u_{\omega}$ или $u_{\omega} + u_{\Omega}$ и $u_{\omega} - u_{\Omega}$. Примем второй вариант, так как при этом, как будет показано ниже, побочные продукты окажутся в области низких частот. Итак,

$$i_1 = a_0 + a_1 (u_{\omega} + u_{\Omega}) + a_2 (u_{\omega} + u_{\Omega})^2,$$

$$i_2 = a_0 + a_1 (u_{\Omega} - u_{\omega}) + a_2 (u_{\Omega} - u_{\omega})^2.$$

Образую разность токов, получаем

$$i_1 - i_2 = 2a_1 u_{\Omega} + 4a_2 u_{\Omega} u_{\omega}.$$

Низкочастотные побочные продукты относительно легко отфильтровываются. Функциональная и реализационная схемы изображены на рис. Р4.24а и б. Здесь следует обратить внимание на то, что для инвертирования низкочастотного колебания u_{Ω} нельзя применить трансформатор со средней точкой, так как это колебание по условию содержит и постоянную составляющую. Поэтому в схеме изображен униполярный инвертор.

Освободимся теперь от низкочастотных побочных продуктов. С этой целью в первом канале (ток i_1) изменим знаки при u_{ω} и u_{Ω} , а во втором — поменяем знаки местами:

$$i'_1 = a_0 + a_1 (-u_{\omega} - u_{\Omega}) + a_2 (-u_{\omega} - u_{\Omega})^2,$$

$$i'_2 = a_0 + a_1 (-u_{\omega} + u_{\Omega}) + a_2 (-u_{\omega} + u_{\Omega})^2$$

и образуем разность

$$(i'_1 - i'_2) = -2a_1 u_{\Omega} + 4a_2 u_{\Omega} u_{\omega}.$$

Складывая $(i_1 - i_2)$ с $(i'_1 - i'_2)$, получаем

$$(i_1 - i_2) + (i'_1 - i'_2) = 8a_2 u_{\Omega} u_{\omega}.$$

В этом результате уже нет побочных продуктов преобразования. Соответствующая функциональная схема изображена на рис. Р4.24в.

Теперь рассмотрим модуляцию без несущей, т. е. когда следует сразу же освободиться от постоянной составляющей низкочастотного колебания. В этом

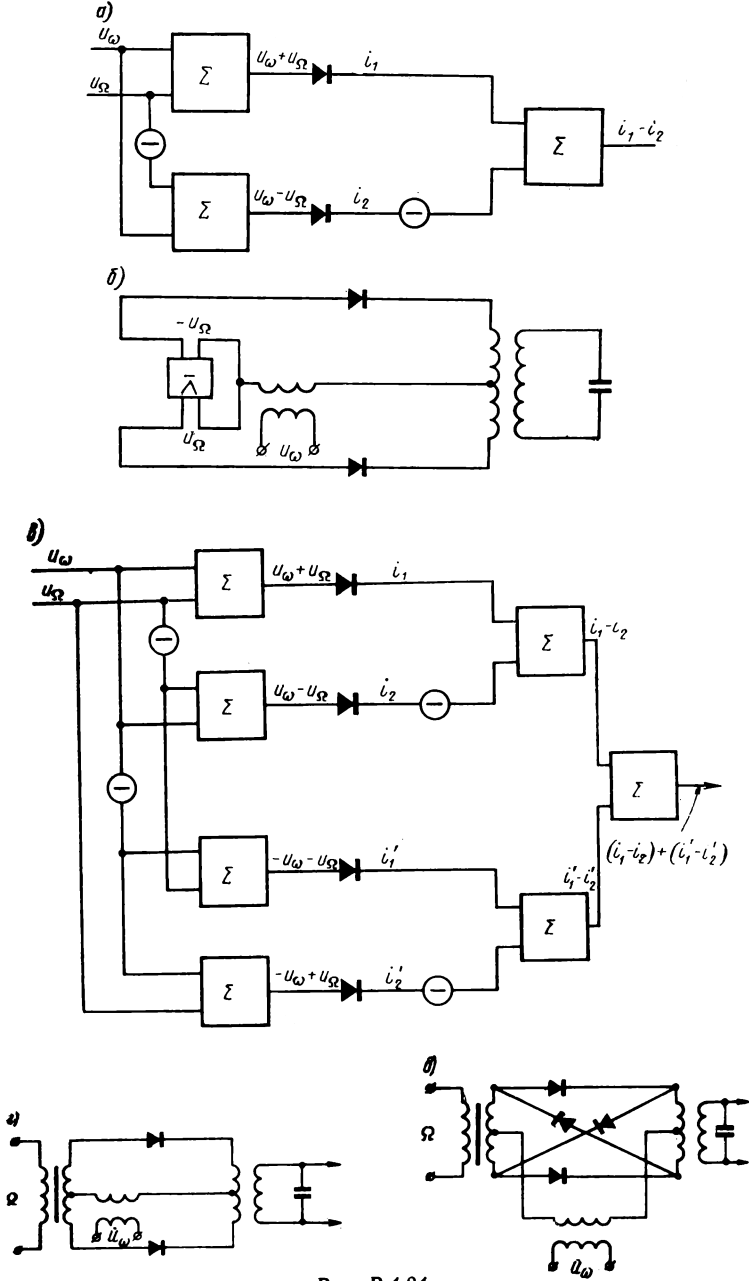


Рис. Р 4.24

случае выражение $u_{\Omega} = U_{\Omega} (1 + m \sin \Omega t)$ заменяется равенством $u'_{\Omega} = U'_{\Omega} \sin \Omega t$ все приведенные выше выкладки остаются в силе, если в них заменить u_{Ω} на u'_{Ω} .

Однако в этом случае гораздо проще обстоит дело с инвертированием низкочастотного напряжения, так как можно применять трансформатор со средней точкой. Так, вместо схемы рис. P4.24b придем к схеме рис. P4.24г (эта схема называется схемой балансной модуляции), а от функциональной схемы рис. P4.24в нетрудно перейти к реализационной схеме рис. P4.24д (эта схема называется схемой кольцевой модуляции).

4.81. Из равенства

$$\cos(\omega - \Omega)t = \cos \Omega t \cos \omega t + \sin \Omega t \sin \omega t$$

непосредственно следует функциональная схема (рис. P4.25).

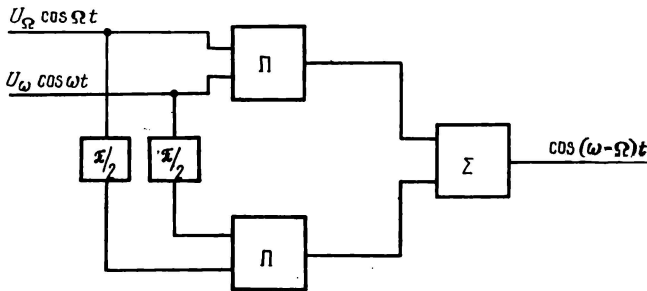


Рис. P4.25

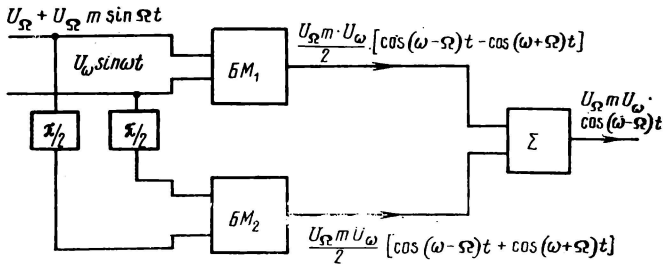


Рис. P4.26

4.82. В задаче 4.78 и других был рассмотрен вопрос синтеза схемы с подавленной несущей (балансного модулятора); таким образом, можно считать, что из колебаний

$$u_{\Omega} = U_{\Omega} (1 + m \sin \Omega t), \quad u_{\omega} = U_{\omega} \sin \omega t$$

при помощи балансного модулятора (БМ) можно получить колебание

$$U[\cos(\omega - \Omega)t - \cos(\omega + \Omega)t] = 2U \sin \omega t \sin \Omega t.$$

Так как

$$U[\cos(\omega - \Omega)t + \cos(\omega + \Omega)t] = 2U \cos \omega t \cos \Omega t,$$

для получения только колебания с разностной частотой нужно входные колебания $\sin \omega t$ и $\sin \Omega t$ сдвинуть на $\pi/2$, пропустить через два балансных модулятора, а затем сложить; тогда на выходе будет колебание $2U \cos(\omega - \Omega)t$.

Соответствующая функциональная схема изображена на рис. P4.26.

5

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА

Общие сведения

Параметрические цепи нулевого порядка содержат только резисторы, среди которых хотя бы один является параметрическим, т. е. параметр этого резистора изменяется под влиянием внешних причин, действующих только на этот резистор. Чаще всего внешними причинами являются напряжения или токи цепи управления, которые и изменяют значения параметра резистора. Таким образом, по отношению к цепи управления такой резистор представляет собой нелинейный элемент, а по отношению к цепи прохождения сигнала — параметрический (т. е. линейный с меняющимся во времени параметром).

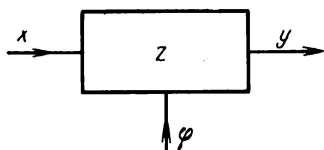


Рис. 5.1

Общая схема параметрической цепи представлена на рис. 5.1. Здесь, как и прежде, $x=x(t)$ и $y=y(t)$ — входной и выходной сигналы, а $\varphi=\varphi(t)$ — сигнал в цепи управления, при помощи

которого изменяется параметр Z резистора. Наличие цепи управления — главное отличие параметрической цепи от линейной и нелинейной.

Если рассматриваемая цепь является двухполюсником, то в роли $x(t)$ и $y(t)$ выступают входное напряжение и входной ток, а в роли параметра Z — входное сопротивление или входная проводимость. По отношению к четырехполюснику чаще всего $x(t)$ и $y(t)$ рассматривают как входное и выходное напряжения, а параметр Z — как коэффициент передачи (передаточная функция мгновенных значений по напряжению).

Параметрическая цепь, соответствующая рис. 5.1, описывается соотношением

$$y(t) = Z[\varphi(t)]x(t) = Z(t)x(t). \quad (5.1)$$

Соотношение (5.1) является линейным относительно внешнего воздействия $x(t)$ — см. разд. 1. Для каждого фиксированного момента времени между y и x существует линейная связь (рис. 5.2); параметр, определяющий эту связь, изменяется во времени по за-

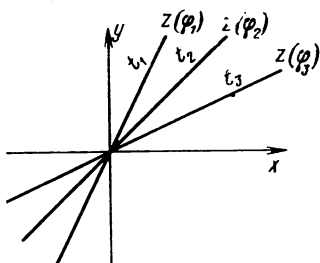


Рис. 5.2

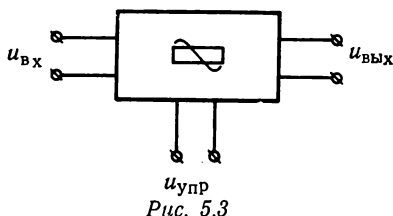


Рис. 5.3

кону $Z[\varphi(t)]$. Параметр Z зависит от φ ; даже в том случае, если эта зависимость линейна, элемент является нелинейным; у линейного элемента значение Z постоянно (не зависит от φ).

Параметром Z можно управлять и от входной (а не специальной) цепи x ; это не является определяющим.

Примером параметрической цепи может служить цепь, изображенная на условном рис. 5.3; сопротивление одного из резисторов этой цепи изменяется под действием напряжения $u_{упр}$.

Параметрические цепи нулевого порядка можно классифицировать по признакам, характеризующим нелинейный элемент, который в сочетании с линейным образует параметрическую цепь, а затем по признакам, определяющим особенности входного воздействия (входного сигнала) и воздействия в цепи управления (управляющего сигнала). Дополнительно можно вводить признак, определяющий назначение операции, выполняемой параметрической цепью над входным и управляющим сигналами (модуляторы, детекторы, перемножители, делители и т. д.).

По признакам, характеризующим нелинейный элемент, будем различать цепи, содержащие резисторы с однозначными непре-

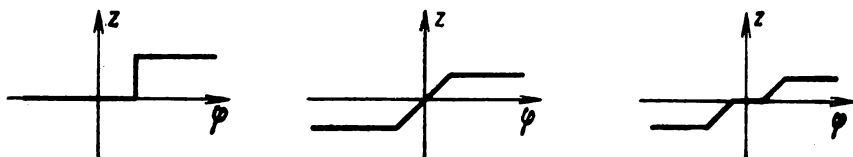


Рис. 5.4

рывными и разрывными (ступенчатыми) характеристиками. Примеры ступенчатых характеристик показаны на рис. 5.4; такие характеристики свойственны различным электронным реле и ключам.

По признакам, характеризующим воздействия во входной цепи и цепи управления, будем, как и прежде, различать непериодические воздействия, моногармонические (которые для простоты называют гармоническими) и полигармонические; последние могут быть периодическими или почти периодическими. Среди непериодических воздействий иногда целесообразно выделять импульсные, к которым относят финитные воздействия, существующие на ограниченном временном интервале $\Delta t = t_2 - t_1$; вне этого интервала воздействие тождественно равно нулю. Термин «импульсные» подчеркивает малость или сопоставимость Δt по сравнению с временными интервалами, характерными для изучаемого процесса (например, постоянной времени цепи, длительности некоторого другого воздействия и т. д.). Задачу изучения параметрических цепей, как и всех других, можно формулировать и в постановке анализа, и в постановке синтеза.

Анализ цепей при различных воздействиях

Задача анализа параметрических цепей нулевого порядка, как правило, состоит в нахождении выходной реакции $y(t)$ (см. рис. 5.1) при известных воздействиях $x(t)$, управлении $\varphi(t)$ и законе изменения параметра $Z(\varphi)$.

Рассмотрим цепи, изображенные на схемах рис. 5.5, к которым можно привести любые параметрические цепи нулевого порядка; эти схемы являются конкретизацией обобщенных схем рис. 5.1 и 5.3.

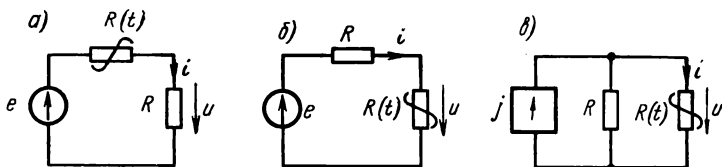


Рис. 5.5

Задача анализа таких цепей сводится к определению формы или частотного спектра выходного напряжения (тока) при известных входном воздействии $e(t)$ или $j(t)$ и законе изменения параметрического элемента $R(t)$. Параметрический элемент $R(t)$, образованный на основе использования нелинейного элемента, может представлять собой транзистор, электронную лампу, полевой транзистор, диод, туннельный диод, оптрон и т. д.; в рассматриваемых задачах считается, что реализационная схема, в которой отражены конструктивные особенности нелинейного элемента, уже приведена к виду рис. 5.5.

При непериодических воздействиях, как правило, содержание задачи составляет выяснение формы выходной реакции цепи, а при моногармоническом и полигармоническом — определение выходного спектра или его конкретных составляющих.

Решение перечисленных выше задач основано на применении закона Ома и выполнении операций гармонического и спектрального анализа (разд. 3). Выполнение операций спектрального анализа при изучении параметрических цепей, как правило, встречает большие трудности, чем при изучении нелинейных (как отмечалось в разд. 3, эти трудности велики и при изучении нелинейных цепей), где иногда удается довести решение до конца при помощи тригонометрических формул. При изучении параметрических цепей в большинстве случаев приходится прибегать к аппарату двойных рядов Фурье, работа с которым требует громоздких выкладок. В приложении П.19 приведены основные сведения, достаточные для работы с двойными рядами Фурье, и примеры пользования ими. Однако в решении задач настоящего раздела из-за ограниченного объема книги двойные ряды Фурье не применяются. Кроме того, путем некоторых преобразований иногда удается вместо двойных рядов Фурье, использовать обычный ряд Фурье с последующим применением тригонометрических формул.

Синтез цепей по заданному преобразованию входного сигнала

Наиболее распространенной является следующая задача: дан входной сигнал, который следует привести к заданному виду; нужно определить закон изменения параметра в цепи, реализующей заданное преобразование. Схема соединений при этом считается известной (например, одна из схем рис. 5.5). Вопросы реализации нелинейного элемента, с помощью которого можно осуществить найденный закон изменения параметра, при такой постановке считаются самостоятельными и относящимися к кругу исследования нелинейных, а не параметрических цепей. Основу решения данной задачи также составляет применение закона Ома.

Синтез цепей по заданному преобразованию двух сигналов — входного и цепи управления

В данной постановке задача формулируется следующим образом: даны сигналы во входной цепи и в цепи управления и задана операция, которой должны подвергнуться оба сигнала, т. е. известен сигнал на выходе; нужно определить параметрический элемент, при помощи которого можно реализовать заданное преобразование. В данном случае в условия задачи входит и определение характеристики нелинейного элемента, на базе которого создается параметрический элемент.

Для решения данной задачи целесообразно привлечь передаточную функцию мгновенных значений $h(t)$, определяемую отношением:

$$h(t) = \frac{y(t)}{x(t)}. \quad (5.2)$$

По условию функция $h(t)$ — известна¹⁾. В соответствии с равенством (5.1) можно считать, что

$$h(t) = Z[\varphi(t)], \quad (5.3)$$

причем $\varphi(t)$ — сигнал в цепи управления также является заданным.

Из ур-ния (5.3) можно определить характеристику нелинейного элемента $Z(\varphi)$, что и составляет предмет поиска.

Синтез цепей по заданному преобразованию сигналов и заданным характеристикам нелинейных резисторов

Здесь будет рассматриваться следующая задача: даны сигналы во входной цепи и в цепи управления и известна операция, которой должны подвергнуться оба сигнала, т. е. известен сигнал на выходе; задан, кроме того, тип нелинейного резистора с определенной характеристикой мгновенных значений. Нужно найти цепь, реализующую данное преобразование, т. е. структуру цепи и параметры ее элементов. По условию цепь должна состоять из конечно-

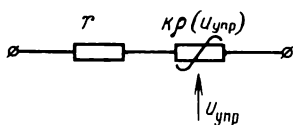


Рис. 5.6

го числа указанных нелинейных резисторов, конечного числа линейных резисторов и конечного числа ослабителей (аттенуаторов, делителей) или усилителей.

Для определенности будем рассматривать цепь, изображенную на схеме рис. 5.3, причем параметрический элемент в этой схеме символизирует некоторое сочетание отдельных ветвей, каждая из которых состоит из (рис. 5.6) линейного r и нелинейного $k\rho(u_{упр})$ резисторов, где $\rho(u_{упр})$ — заданная характеристика, а k — масштабный множитель (ослабитель или усилитель).

Заданную передаточную функцию $h(t)$ можно при данных условиях и согласно ур-нию (5.3) записать в виде:

$$h(t) = \frac{u_{вых}(t)}{u_{вх}(t)} = T(\rho, r, k) = F(u_{упр}). \quad (5.4)$$

Из ур-ния (5.4) по известной функции $\rho(u_{упр})$ и одной из двух функций $T(\rho)$ или $F(u_{упр})$ можно найти другую. В данной задаче известной является функция $F(u_{упр})$; так как известна и функция $\rho(u_{упр})$, то, находя обратную ей функцию $u_{упр}(\rho)$ и подставляя ее в $F(u_{упр})$, получаем функцию от ρ , т. е. $T(\rho; r; k)$, по которой и нужно синтезировать цепь.

¹⁾ Передаточная функция мгновенных значений имеет смысл только для безынерционных (резистивных) цепей, которые рассматриваются в настоящем разделе.

Будем считать, что выражение $T(p)$ задано в виде дробно-рациональной функции (при любом другом задании характеристику нужно аппроксимировать дробно-рациональной функцией); центральным моментом в теории синтеза параметрических цепей нулевого порядка является то, что в этом случае имеет место прямая аналогия между безынерционными (резистивными) цепями с переменными параметрами и инерционными цепями с постоянными параметрами¹⁾.

Для доказательства рассмотрим рис. 5.7, на котором показаны по одной i -й ветви ($i=1, 2, 3, \dots$) параметрической цепи (рис. 5.7а)



Рис. 5.7

и инерционной с постоянными параметрами (рис. 5.7б). Запишем матричное уравнение контурных токов для цепи, составленной из ветвей с линейными и параметрическими резисторами вида рис. 5.7а:

$$[R(p)] [i] = [e]; \quad (5.5)$$

элементы матрицы R имеют вид

$$R_{nm} = r_{nm} + k_{nm} \rho, \quad (5.6)$$

где символы n, m относятся к контурам цепи.

Теперь запишем матричное уравнение контурных токов для цепи, состоящей из ветвей с линейными резисторами и катушками с постоянными индуктивностями:

$$[Z(p)] \cdot [I(p)] = [E(p)]; \quad (5.7)$$

элементы матрицы Z имеют вид:

$$Z_{nm} = r_{nm} + L_{nm} p. \quad (5.8)$$

Сопоставление выражения (5.5) с (5.7) и (5.6) с (5.8) показывает, что p и ρ входят в уравнения одинаковым образом, и, следовательно, свойства цепей типа rL относительно p аналогичны свойствам цепей типа $r\rho$ относительно ρ .

Отсюда непосредственно вытекает, что и методы реализации могут быть аналогичными. Для реализации функции $T(p)$ нужно в последнюю вместо ρ подставить p и полученную функцию $T(p)$ реализовать известными методами в виде цепи rL и заменить все катушки L_i переменными резисторами ρ_i , причем множители k_i должны быть численно равны соответствующим нормированным значениям L_i . Методы реализации линейных цепей по заданным переда-

¹⁾ Теория синтеза параметрических цепей на этой основе создана трудами И. В. Гуревича [22].

точным функциям изложены в многочисленных руководствах, например в книгах [28, 5, 18].

В решениях задач настоящего раздела выкладки, связанные с аппроксимацией $T(p)$ дробно-рациональной функцией, и синтез цепи rL по этой функции, как относящиеся к линейным цепям, не приводятся; даются только итоговые результаты. Отметим также, что при аппроксимации характеристик и синтезе параметрических резистивных цепей величины нормируют к одной единице измерения данной величины (как это обычно принято в теории синтеза линейных цепей).

* * *

Задачи настоящего раздела распределены следующим образом. Первые шестнадцать задач (5.1—5.16) посвящены анализу параметрических цепей нулевого порядка; все остальные задачи — синтезу этих цепей. В задачах 5.17—5.19 осуществляется синтез цепи по заданному преобразованию только входного сигнала, а в задачах 5.20—5.25 — по заданному преобразованию двух сигналов: входной цепи и цепи управления. В задачах 5.26—5.30 содержатся как условия преобразования двух сигналов, так и условия выбора нелинейных элементов, заданных своими характеристиками.

Задачи и упражнения

5.1. В цепи, изображенной на схеме рис. 5.5а, генератор развивает напряжение

$$e = U_0 + U_{\Omega} \sin \Omega t = U_0(1 + m \sin \Omega t);$$

сопротивление параметрического резистора изменяется по закону

$$R(t) = \frac{R_0}{1 + \mu \sin(\omega t + \varphi)}, \quad \mu < 1.$$

Найти закон изменения тока в цепи и установить частоты составляющих тока. Определить, далее, при каких условиях в рассматриваемой схеме можно получить амплитудномодулированное колебание вида $u = U(1 + m \sin \Omega t) \times \sin(\omega t + \varphi)$.

5.2. В цепи рис. 5.5а сопротивление параметрического резистора изменяется по закону

$$R(t) = \frac{R_0}{1 + \mu \cos(\omega_{\mu} t + \varphi)}, \quad \mu < 1,$$

а входной сигнал имеет вид $e = U \cos \omega t$. Чему равна амплитуда комбинационного колебания с разностной частотой $(\omega - \omega_{\mu})$, если $R \ll R_0$?

5.3. В цепи рис. 5.5в генератор создает ток, имеющий форму: $j = J \cos \omega t$; сопротивление $R(t)$ изменяется по закону

$$R(t) = R_0[1 + \mu \cos(\omega_{\mu} t - \varphi)].$$

Найти амплитуды составляющих напряжения u .

5.4. В цепи рис. 5.5а входной сигнал имеет вид: $e = \mathcal{E} \cos(\omega t + \varphi)$, а сопротивление $R(t)$ изменяется по закону, определяемому законом управляющего сигнала, а именно:

$$R(t) = \frac{R_0}{1 + \mu \cos \omega_{\mu} t}, \quad \mu < 1.$$

Найти спектр тока и сравнить его со спектром тока в нелинейной цепи, на вход которой поданы два гармонических сигнала с частотами ω и ω_μ .

5.5. Определить спектр тока по условиям предыдущей задачи при $\mu \ll 1$, $R_0 \ll R$.

5.6. В цепи рис. 5.5а входной сигнал представляет собой периодическую функцию вида

$$e = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{E}_k e^{i k \omega t},$$

а сопротивление $R(t)$ изменяется по закону

$$R(t) = \frac{R_0}{1 + \mu \cos \omega_\mu t}.$$

Найти спектр тока.

5.7. Входное воздействие и сопротивление параметрического резистора определяются выражениями:

$$e = U_0 \sin \omega t, \quad R(t) = \frac{R_0}{1 + \mu \sin(k \omega t + \varphi)}, \quad \mu < 1, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Установить, можно ли в цепях, изображенных на схемах рис. 5.5а или 5.5б получить усиление входного сигнала $e(t)$.

5.8. В цепях, представленных на схемах рис. 5.5а или 5.5б, сопротивление резистора изменяется по закону

$$R(t) = \frac{R_0}{1 + \mu \sin \omega t}, \quad \mu < 1,$$

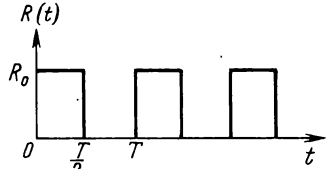


Рис. 5.8

причем это изменение осуществляется при помощи нелинейного элемента, который управляется сигналом $u_{упр} = U_{упр} \sin \omega t$. Напряжение $e = E$ является постоянным. Выяснить возможности усиления управляющего сигнала и привести примеры схем, в которых реализуется подобное усиление.

5.9. Цепь, изображенная на схеме 5.5б, используется в качестве выпрямителя; сопротивление переменного резистора изменяется по закону (рис. 5.8).

$$R(t) = \frac{R_0}{2} (1 + \text{sp } \Omega t),$$

где $\text{sp } \Omega t$ — меандровая характеристика:

$$\text{sp } \Omega t = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1) \Omega t, \quad \Omega = \frac{2\pi}{T},$$

а входное напряжение имеет вид $e = U \sin \Omega t$. Известно, что $R \gg R_0$. Найти значения выпрямленного напряжения, т. е. постоянную составляющую выходного напряжения.

5.10. По условиям предыдущей задачи найти значение постоянной составляющей выходного напряжения, если $R(t) = R_0(1 + \sin \Omega t)$.

5.11. В схеме параметрического выпрямителя (рис. 5.5а) сопротивление переменного резистора изменяется по закону

$$R(t) = R_0(1 - \mu \sin \Omega t), \quad \mu < 0,3.$$

Известно, что $R \ll R_0$. Найти значение выпрямленного напряжения; представить эпюры входного и выходного напряжений, а также сопротивления резистора. Входное напряжение изменяется по закону: $e = U \sin \Omega t$.

5.12. В схеме рис. 5.5а входное напряжение и сопротивление переменного резистора меняются по законам:

$$e = U \sin(\Omega t - \varphi), \quad R(t) = \frac{R_0}{1 + \mu \sin(\Omega t - \varphi_{\mu})}.$$

Найти постоянную составляющую выходного напряжения и выяснить, при каком сдвиге фаз φ_{μ} будет наилучшее выпрямление. Известно, что $R \ll R_0$.

5.13. На рис. 5.5б дана схема параметрического резистивного умножителя частоты, сопротивление которого изменяется по закону (см. задачу 5.9)

$$R(t) = \frac{R_0}{2} (1 + \sin \omega t),$$

а входное напряжение имеет вид: $e = U \sin \omega t$. Найти значения амплитуд второй и четвертой гармоник выходного напряжения, если известно, что $R \gg R_0$.

5.14. В схеме рис. 5.5а входное напряжение имеет вид АМ колебания: $e = U(t) \cos \omega t$; сопротивление параметрического элемента изменяется с той же частотой по закону

$$R(t) = \frac{R_0}{1 + \mu \cos(\omega t + \varphi)}.$$

Выяснить возможности детектирования АМ колебаний в данной схеме, если $R \ll R_0$.

Рассмотреть тот же вопрос при входном колебании вида $e = U(t) \sin \omega t$, а также частные случаи, соответствующие детектированию АМ колебаний без несущей (с подавленной несущей) и с одной боковой.

5.15. На вход синхронного детектора, кроме полезного сигнала $u_c = U_c(t) \cos \omega_c t$, попадает и помеха вида $u_n = U_n(t) \cos \omega_n t$. Сопоставить влияние помехи с влиянием полезного сигнала, если синхронный детектор собран по схеме рис. 5.5а и

$$R(t) = \frac{R_0}{1 + \mu \cos(\omega t + \varphi)},$$

причем $R \ll R_0$.

5.16. На рис. 5.9 изображена цепь, содержащая токовое реле (т. е. реле, срабатывающее при токе, превышающем определенное значение) и переменный резистор с характеристикой:

$$R(u) = R_1 \left\{ 1 + \frac{R_2}{R_1} [1 - 1(u - u_0)] \right\},$$

где u — напряжение, управляющее сопротивлением резистора.

Характеристика $R(u)$ изображена на рис. 5.10.

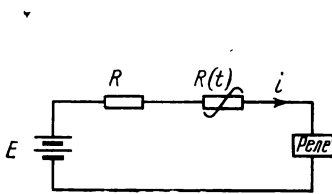


Рис. 5.9

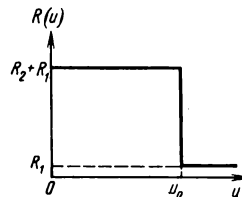


Рис. 5.10

Управляющее напряжение имеет форму прямоугольного импульса длительностью τ и может быть записана в виде $u = U_0[1(t) - 1(t - \tau)]$, причем $U_0 > u_0$. Записать выражение тока в цепи.

5.17. Выходное напряжение в цепи, изображенной на схеме рис. 5.5а, после линейного фильтра должно изменяться по закону $u = U_2 \cos 2\Omega t$ при условии, что входное напряжение имеет вид $e = \mathcal{E} \cos \Omega t$. Установить, как должно изменяться сопротивление переменного резистора $R(t)$ и каким должно быть соотношение между параметрами элементов цепи. Указать, далее, назначение линейного фильтра.

5.18. В задаче 5.17 был синтезирован параметрический удвоитель; на основе использования такого удвоителя как типового элемента (в котором допустимо изменять только элементы линейного фильтра) можно создать «генератор сетки частот», т. е. умножитель с частотами $k\Omega$, где $k=2, 3, 4, \dots$. Составить структурную схему такого умножителя.

5.19. Составить схему параметрического измерителя фазы входного колебания $x = A \cos(\omega t - \varphi)$ на основе использования синхронных детекторов (СД).

5.20. В схеме рис. 5.5а генератор развивает высокочастотное напряжение $e = \mathcal{E} \cos \omega t$, а сопротивление $R(t)$ повторяет модулирующее напряжение:

$$R(t) = \frac{R_0}{1 + ms(t)}, \quad ms(t) < 1.$$

Как нужно выбрать параметры постоянного и переменного резисторов для осуществления амплитудной модуляции?

5.21. Найти характеристику нелинейного элемента, при помощи которого можно в параметрической цепи нулевого порядка перемножить сигналы во входной цепи и цепи управления.

5.22. Найти характеристику нелинейного элемента, при помощи которого в параметрической цепи нулевого порядка можно разделить сигнал во входной цепи на сигнал в цепи управления.

5.23. Составить структурные схемы квадратора и кубатора на основе использования типовых параметрических цепей нулевого порядка с нелинейными элементами, параметры которых имеют линейные характеристики (см. задачу 5.21).

5.24. Составить структурные схемы идеального амплитудного детектора на основе использования параметрического делителя D .

5.25. Какой должна быть характеристика нелинейного резистора параметрической цепи для того, чтобы реализовать операцию возведения входного напряжения в степень, равную $3/2$.

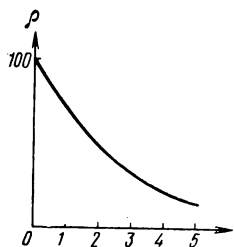


Рис. 5.11

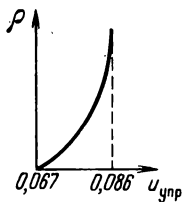


Рис. 5.12

5.26. Синтезировать параметрический перемножитель (см. задачу 5.21) по условию

$$h(t) = \frac{u_{\text{вых}}}{u_{\text{вх}}} = F(u_{\text{упр}}) = ku_{\text{упр}} = 0,2u_{\text{упр}}.$$

В качестве нелинейного резистора рекомендуется использовать оптрон, характеристика которого изображена на рис. 5.11; эта характеристика с достаточ-

ной точностью аппроксимируется дробно-рациональной функцией следующего вида:

$$\rho = 100(1 - 0,164u_{\text{упр}}) / (1 + 0,164u_{\text{упр}})$$

в пределах $0 \leq u_{\text{упр}} \leq 5$ В. Здесь ρ — в килоомах, а $u_{\text{упр}}$ — в вольтах.

5.27. Передаточная функция мгновенных значений параметрического резистивного четырехполюсника, изображенная на рис. 5.12, может аппроксимироваться следующей дробно-рациональной функцией:

$$h(t) = \frac{u_{\text{вых}}(t)}{u_{\text{вх}}(t)} = T(\rho) = \frac{1}{16} \frac{\rho^2 - 6\rho + 8}{\rho^2 + 10\rho + 21} = \frac{1}{16} \frac{(\rho - r)(\rho - 4)}{(\rho + 3)(\rho + 7)};$$

синтезировать соответствующую цепь.

5.28. Задан нелинейный резистор с характеристикой

$$\rho = a \sqrt{u_{\text{упр}}} = \sqrt{u_{\text{упр}}};$$

синтезировать резистивный множитель по условию $u_{\text{вых}} = k u_{\text{вх}} u_{\text{упр}}$; причем $k=1$.

5.29. Задан нелинейный элемент с характеристикой (рис. 5.12), которая в указанных пределах хорошо аппроксимируется функцией:

$$\rho = \frac{1}{2u_{\text{упр}}} - \frac{1}{2} \sqrt{4u_{\text{упр}}^2 - 12u_{\text{упр}} + 1} - 4, \quad 0,067 < u_{\text{упр}} < 0,086;$$

построить параметрический резистивный множитель по условию $u_{\text{вых}} = k u_{\text{вх}} u_{\text{упр}}$, причем $k=1$.

5.30. Синтезировать делитель из резисторов, характеристики которых имеют вид:

$$\rho(u_{\text{упр}}) = -15 + \sqrt{u_{\text{упр}} + 15}, \quad u_{\text{упр}} \geq 0$$

Передаточную функцию $h(t) = u_{\text{вых}}/u_{\text{вх}}$ принять в виде $h(t) = k/u_{\text{упр}}$, причем $k=1$.

РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ

5.1. Так как $i = e(t) / [R + R(t)]$, после подстановки $e(t)$ и $R(t)$ получим

$$i = \frac{U_0(1 + m \sin \Omega t) [1 + \mu \sin(\omega t + \varphi)]}{R_0 + R [1 + \mu \sin(\omega t + \varphi)]}.$$

Для того чтобы определить все составляющие тока, нужно выполнить необходимые вычисления с двойными рядами Фурье (П.19). Однако задачу определения частот составляющих можно решить и не прибегая к двойным рядам Фурье. С этой целью перепишем выражение для тока в виде

$$i = \frac{U_0}{R_0 + R [1 + \mu \sin(\omega t + \varphi)]} (1 + m \sin \Omega t) [1 + \mu \sin(\omega t + \varphi)]$$

и займемся первым множителем. Функция

$$u(t) = \frac{U_0}{R_0 + R [1 + \mu \sin(\omega t + \varphi)]}$$

является периодической с периодом $T_\omega = 2\pi/\omega$ и может быть представлена рядом Фурье:

$$u(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n e^{i n \omega t}.$$

Амплитуды U_n неизвестны, но по условию нужно выяснить только частоты составляющих тока, а для этого знание амплитуд не требуется. Введя последнее

разложение в найденный закон изменения тока, запишем

$$i = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{U}_n e^{i n \omega t} (1 + m \sin \Omega t) [1 + \mu \sin (\omega t + \varphi)].$$

Теперь для спектрального анализа можно воспользоваться тригонометрическими формулами; нетрудно убедиться в том, что составляющие тока будут иметь частоты $\Omega \pm n\omega$, а также «нулевую» (соответствующую постоянной составляющей). Легко, далее, увидеть, что если $R \ll R_0$, то найденный закон изменения тока совпадает с законом АМ колебания, указанного в условии задачи.

$$5.2. \quad U_{\omega - \omega_{\mu}} = \frac{\mu}{2} \frac{R}{R_0} U_c.$$

$$5.3. \quad U_{\omega} = JR_0; \quad U_{\omega \pm \omega_{\mu}} = JR_0 \frac{\mu}{2}.$$

5.4. Общее выражение для тока имеет вид

$$i = \mathcal{E} \cos (\omega t + \varphi) \frac{1 + \mu \cos \omega_{\mu} t}{R_0 + R(1 + \mu \cos \omega_{\mu} t)}.$$

Функция

$$\psi(t) = \frac{1 + \mu \cos \omega_{\mu} t}{\frac{1}{R_0} \left[1 + \frac{R}{R_0} (1 + \mu \cos \omega_{\mu} t) \right]}, \quad \mu < 1$$

является периодической с периодом $T_{\mu} = 2\pi/\omega_{\mu}$ и при $\mu < 1$ может быть представлена рядом Фурье:

$$\psi(t) = \frac{1}{R_0} \left[\frac{\psi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_{cn} \cos n \omega_{\mu} t + \psi_{sn} \sin n \omega_{\mu} t) \right] = \frac{1}{2R_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n e^{i n \omega_{\mu} t}.$$

После подстановки $\psi(t)$ выражение для тока примет вид

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} \cos (\omega t + \varphi) \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n e^{i n \omega_{\mu} t}.$$

Выполнив перемножение, нетрудно увидеть, что спектр тока содержит составляющие с частотами: $\omega \pm n\omega_{\mu}$, $n=0, 1, 2, 3, \dots$

Спектр тока в нелинейной цепи существенно отличается от полученного, так как частоты составляющих определяются соотношением (разд. 3) $m\omega \pm n\omega_{\mu}$ $n=0, 1, 2, 3, \dots$, $m=0, 1, 2, 3, \dots$ Таким образом, спектр тока в нелинейной цепи содержит гармоники с частотами $m\omega$ и комбинационные колебания с частотами вида $m\omega \pm n\omega_{\mu}$, а спектр тока в параметрической цепи — только одну первую гармонику и комбинационные колебания с частотами вида $\omega \pm n\omega_{\mu}$. Если в параметрической цепи отношение частот ω_{μ}/ω представляет собой натуральное число m , то и в параметрической цепи вместо соответствующих комбинационных появляются гармоники с частотами $m\omega$.

5.5. При данных условиях имеет место приближенное равенство

$$i = \mathcal{E} \cos (\omega t + \varphi) \frac{1 + \mu \cos \omega_{\mu} t}{R_0 + R(1 + \mu \cos \omega_{\mu} t)} = \frac{\mathcal{E} \cos (\omega t + \varphi) (1 + \mu \cos \omega_{\mu} t)}{R \left(1 + \frac{R_0}{R} + \mu \cos \omega_{\mu} t \right)} \approx$$

$$\begin{aligned} &\approx \frac{\mathcal{E}}{R} \cos(\omega t + \varphi) \left(1 + \mu \cos \omega_{\mu} t\right) \left(1 - \frac{R_0}{R} - \mu \cos \omega_{\mu} t\right) = \\ &= \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - \frac{R_0}{R} - \frac{\mu^2}{4}\right) \cos(\omega t + \varphi) - \frac{\mathcal{E}}{R} \frac{R_0}{R} \frac{\mu}{2} \{\cos[(\omega - \omega_{\mu})t + \varphi] + \\ &+ \cos[(\omega + \omega_{\mu})t + \varphi]\} - \frac{\mathcal{E}}{R} \frac{\mu^2}{4} \{\cos[(\omega - 2\omega_{\mu})t + \varphi] + \cos[(\omega + 2\omega_{\mu})t + \varphi]\}. \end{aligned}$$

Спектр содержит первую гармонику с частотой ω и четыре комбинационных колебания с частотами $\omega \pm \omega_{\mu}$ и $\omega \pm 2\omega_{\mu}$,

5.6. Выполнив преобразования, совпадающие с выкладками решения задачи 5.4, найдем

$$i = \frac{1}{R_0} \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{\mathcal{E}}_k e^{i k \omega t} \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{\psi}_n e^{i n \omega_{\mu} t}.$$

Перемножив, получим, что спектр тока содержит составляющие с частотами $k\omega \pm n\omega_{\mu}$. Спектр тока в параметрической цепи, находящейся под воздействием полигармонического периодического входного сигнала и гармонического сигнала в цепи управления, совпадает со спектром тока в нелинейной цепи, находящейся под воздействием двух гармонических сигналов.

5.7. Ток в обеих цепях одинаков:

$$i = \frac{e}{R + R(t)} = U_0 \sin \omega t \frac{[1 + \mu \sin(k\omega t + \varphi)]}{R_0 + R[1 + \mu \sin(k\omega t + \varphi)]}.$$

Нужно определить, возможно ли получить амплитуду $U_{\text{вых}}$ выходного напряжения, большую, чем амплитуда U_0 входного сигнала в схеме рис. 5.5а, для которой $u_a = iR$, и в схеме рис. 5.5б, для которой $u_{\sigma} = iR(t)$.

Рассмотрим обе схемы при различных соотношениях между R и R_0 . Пусть сперва $R \ll R_0$; тогда

$$i \approx \frac{U_0}{R_0} \sin \omega t [1 + \mu \sin(k\omega t + \varphi)]$$

и соответствующие напряжения выражаются как

$$u_a = U_0 \frac{R}{R_0} \sin \omega t [1 + \mu \sin(k\omega t + \varphi)],$$

$$u_{\sigma} = \frac{U_0}{R_0} \sin \omega t [1 + \mu \sin(k\omega t + \varphi)] \frac{R_0}{[1 + \mu \sin(k\omega t + \varphi)]} = U_0 \sin \omega t.$$

В первом случае $U_{\text{вых}} \ll U_0$, так как $R/R_0 \ll 1$; во втором — $U_{\text{вых}} = U_0$; итак, усиление невозможно.

Теперь рассмотрим условие $R \gg R_0$; при этом

$$i \approx \frac{U_0}{R} \sin \omega t,$$

а соответствующие напряжения определяются как

$$u_a = U_0 \sin \omega t, \\ u_{\sigma} = \frac{U_0}{R} \sin \omega t \frac{R_0}{1 + \mu \sin(k\omega t + \varphi)} = U_0 \frac{R_0}{R} \frac{\sin \omega t}{1 + \mu \sin(k\omega t + \varphi)}.$$

Легко видеть, что и здесь усиление невозможно.

Рассмотрим, наконец, условие $R = R_0$; при этом

$$i = \frac{U_0}{R} \sin \omega t \frac{1 + \mu \sin(k\omega t + \varphi)}{2 + \mu \sin(k\omega t + \varphi)}.$$

Для простоты положим, что $\mu < 0,5$; при этих условиях приближенное равенство

$$\frac{1}{2 + \mu \sin(k\omega t + \varphi)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{\mu}{2} \sin(k\omega t + \varphi)} \approx \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\mu}{2} \sin(k\omega t + \varphi) \right]$$

содержит ошибку, меньшую 10%. Выражение для тока примет вид

$$i \approx \frac{U_0}{2R} \sin \omega t [1 + \mu \sin(k\omega t + \varphi)] \left[1 - \frac{\mu}{2} \sin(k\omega t + \varphi) \right].$$

Напряжение в цепях рис. 5.5а и 5.5б будут равны:

$$u_a = \frac{U_0}{2} \sin \omega t \left[1 - \frac{\mu^2}{4} + \frac{\mu}{2} \sin(k\omega t + \varphi) + \frac{\mu^2}{4} \cos(2k\omega t + 2\varphi) \right],$$

$$u_b = \frac{U_0}{2} \sin \omega t \left[1 + \frac{\mu^2}{4} - \frac{\mu}{2} \sin(k\omega t + \varphi) - \frac{\mu^2}{4} \cos(2k\omega t + 2\varphi) \right].$$

Следовательно, и при этих условиях усиление невозможно.

Таким образом, получить усиление входного сигнала в резистивной параметрической цепи невозможно; совершенно иначе обстоит дело с усилением сигнала в цепи управления (см. задачу 5.8).

5.8. Ток в цепи определяется выражением

$$i = \frac{E}{R + R(t)} = \frac{E(1 + \mu \sin \omega t)}{R_0 + R(1 + \mu \sin \omega t)} = \frac{E}{R_0} \frac{1 + \mu \sin \omega t}{1 + \frac{R}{R_0}(1 + \mu \sin \omega t)}.$$

Выходные напряжения в схемах рис. 5.5а и 5.5б:

$$u_a = iR = E \frac{R}{R_0} \frac{1 + \mu \sin \omega t}{1 + \frac{R}{R_0}(1 + \mu \sin \omega t)} = E \frac{1 + \mu \sin \omega t}{\frac{R_0}{R} + (1 + \mu \sin \omega t)},$$

$$u_b = iR(t) = E \frac{1}{1 + \frac{R}{R_0}(1 + \mu \sin \omega t)}.$$

Если $R_0 \ll R$, напряжение на выходе схемы рис. 5.5а будет содержать только постоянную составляющую; в схеме рис. 5.5б при $\mu < 0,3$

$$u_b \approx E \frac{R_0}{R} (1 - \mu \sin \omega t),$$

т. е. $U_{\text{вых } б} \approx \frac{R_0}{R} \mu E$, $\frac{R_0}{R} \ll 1$.

Если $R \ll R_0$, то напряжение на выходе схемы рис. 5.5а определится как

$$u_a \approx E \frac{R}{R_0} (1 + \mu \sin \omega t),$$

т. е. $U_{\text{вых } а} = \frac{R}{R_0} \mu E$, $\frac{R}{R_0} \ll 1$,

а на выходе схемы рис. 5.5б — как $u_{\text{вых } б} \approx E$.

Наконец, если $R=R_0$ и $\mu < 0,3$, выходные напряжения обеих цепей одинаковы и равны:

$$U_{\text{вых} a, б} \approx \mu E, \quad \frac{R}{R_0} = 1.$$

Усиление цепи определяется отношением амплитуды выходного напряжения к амплитуде $U_{\text{упр}}$ сигнала цепи управления; при наилучших условиях, т. е. при $R/R_0=1$, будем иметь

$$K = \frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{упр}}} = \mu \frac{E}{U_{\text{упр}}}.$$

Легко видеть, что в рассматриваемых цепях усиление управляющего сигнала может быть сколь угодно большим за счет увеличения постоянного напряжения E .

В качестве примеров резистивных параметрических усилителей, в которых реализуется усиление сигнала в цепи управления, можно привести самые рас-

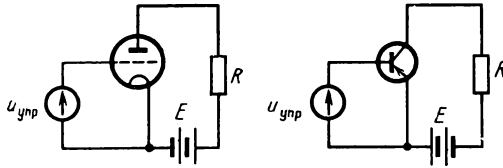


Рис. Р 5.1

пространные схемы лампового и транзисторного усилителей (рис. Р5.1), которые легко приводятся к параметрическим цепям рис. 5.5а.

5.9. Так как

$$u = iR(t) = \frac{e}{R + R(t)} R(t)$$

и $R \gg R(t)$, то

$$u \approx \frac{U}{R} \sin \Omega t \frac{R_0}{2} (1 + \text{sn } \Omega t) = \frac{UR_0}{2R} \sin \Omega t + \frac{UR_0}{2R} \sin \Omega t \text{sn } \Omega t.$$

Первое слагаемое не содержит постоянной составляющей; рассмотрим второе слагаемое $\frac{UR_0}{2R} \sin \Omega t \text{sn } \Omega t$, график которого изображен на рис. Р5.2б.

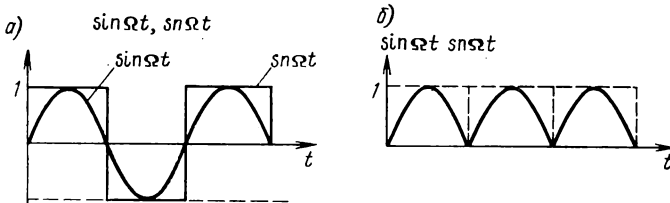


Рис. Р 5.2

Разложение в ряд Фурье кривой, соответствующей рис. Р5.2б, хорошо известно (см., например, [14, стр. 557]):

$$\sin \Omega t \text{sn } \Omega t = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos 2\Omega t}{1.3} + \frac{\cos 4\Omega t}{3.5} + \dots \right);$$

следовательно, постоянная составляющая на выходе параметрического выпрямителя

$$U_{\text{ср}} = UR_0/\pi R . .$$

5.10. $U = \frac{1}{2} \frac{R_0}{R} U .$

5.11. Напряжение на выходе выпрямителя

$$u = iR = \frac{e}{R + R_0 (1 - \mu \sin \Omega t)} R \approx \frac{R}{R_0} U \sin \Omega t (1 + \mu \sin \Omega t) .$$

Выпрямленное напряжение равно постоянной составляющей:

$$U_{\text{ср}} = \frac{\mu}{2} \frac{R}{R_0} U .$$

Эпюры $e(t)$, $R(t)$ и $u(t)$ даны на рис. П5.3.

5.12. $U_{\text{ср}} = \frac{1}{2} \frac{R}{R_0} \mu \cos (\varphi - \varphi_{\mu}) U .$

Наилучшие условия будут при $\varphi_{\mu} = \varphi$.

5.13. $U_2 = \frac{2}{3\pi} \frac{R_0}{R} U , U_4 = \frac{2}{15\pi} \frac{R_0}{R} U .$

5.14. Ток в цепи

$$i = \frac{e}{R + R(t)} \approx \frac{U(t) \cos \omega t}{R_0} [1 + \mu \cos (\omega t + \varphi)] = \\ = \frac{U(t)}{R_0} \left[\cos \omega t + \frac{\mu}{2} \cos (2\omega t + \varphi) + \frac{\mu}{2} \cos \varphi \right] .$$

При помощи низкочастотного фильтра выделим колебание, соответствующее последнему члену, этого выражения:

$$i_{\Omega} = \frac{\mu}{2R_0} \cos \varphi U(t) .$$

Эта составляющая без искажений повторяет огибающую $U(t)$; максимальное значение i_{Ω} будет иметь при $\varphi = k\pi$, $k=0, 1, 2, \dots$ Такой способ детектирования АМ колебаний называется синхронным детектированием.

Теперь рассмотрим случай, соответствующий входному колебанию вида $u = U(t) \sin \omega t$. В этом случае:

$$i \approx \frac{U(t)}{R_0} \left[\sin \omega t + \frac{\mu}{2} \sin (2\omega t + \varphi) + \frac{\mu}{2} \sin \varphi \right] .$$

$$i_a = \frac{\mu}{2R_0} \sin \varphi U(t) .$$

Здесь максимальный эффект детектирования будет при $\varphi = (2k+1)\pi/2$, $k=0, 1, 2, 3, \dots$

Из приведенных выкладок следует возможность передачи двух различных сигналов, соответствующих огибающим $U_1(t)$ и $U_2(t)$, на несущих $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$. Полученный вывод справедлив как для АМ колебания с несущей, т. е. при $U(t) = U_0(1 + m \sin \Omega t)$, так и для колебания без несущей, т. е. при $U(t) = U_0 \sin \Omega t$. В отличие от нелинейного детектирования АМ колебания без несущей, при синхронном детектировании, в месте приема нет необходимости восстанавливать несущую.

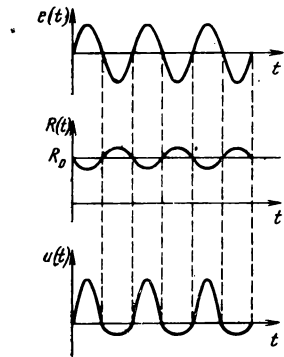


Рис. П 5.3

При приеме АМ колебания с одной боковой полосой, т. е. при $e = U_0 m \cos(\omega - \Omega)t$

$$i = \frac{U_0}{R_0} m \cos(\omega - \Omega)t [1 + \mu \cos(\omega t + \varphi)] = \\ = \frac{U_0}{R_0} m \left[\cos(\omega - \Omega)t + \frac{\mu}{2} \cos(\Omega t - \varphi) + \frac{\mu}{2} \cos(2\omega t - \Omega t + \varphi) \right].$$

После фильтрации низкочастотной составляющей будем иметь

$$i_{\Omega} = \frac{U_0}{R_0} m \frac{\mu}{2} \cos(\Omega t - \varphi).$$

При $\varphi = 0$ детектирование свободно от искажений.

Итак, и при детектировании АМ колебания с одной боковой полосой с помощью синхронного детектора также нет необходимости в восстановлении несущей в месте приема.

$$5.15. \quad i = \frac{\mu}{2R_0} U_c(t) \left\{ \cos \varphi + \frac{U_n(t)}{U_c(t)} \cos[(\omega_c - \omega_n)t + \varphi] \right\}.$$

Если $\varphi = 0$, то

$$i = \frac{\mu}{2R_0} U_c(t) \left[1 + \frac{U_n(t)}{U_c(t)} \cos(\omega_c - \omega_n)t \right].$$

Последнее выражение дает возможность оценить влияние помехи при различных соотношениях частот и амплитуд сигнала и помехи.

$$5.16. \quad i = \frac{E}{R + R_1 \cdot 1(t) + R_2 \cdot 1(t - \tau)}.$$

5.17. Сопротивление переменного резистора должно изменяться по закону

$$R(t) = \frac{R_0}{1 + \mu \cos \Omega t}, \quad \mu < 1;$$

амплитуда напряжения на выходе $U_2 = \frac{\mu}{2} \frac{R}{R_0} \mathcal{E}$. Необходимо выполнить условие: $R \ll R_0$. По заданной амплитуде U_2 можно найти R , а затем по указанному неравенству — R_0 .

Линейный фильтр не должен пропускать колебание с частотой Ω (а также постоянную составляющую) и фильтровать колебание с частотой 2Ω .

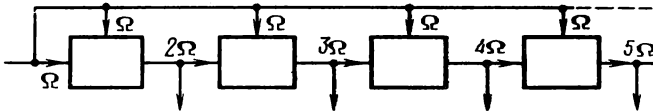


Рис. Р 5.4

5.18. Структурная схема изображена на рис. Р 5.4. Каждый прямоугольник символизирует параметрический преобразователь вместе с линейным фильтром.

5.19. Структурная схема изображена на рис. Р 5.5. Целесообразно использовать два синхронных детектора и в зависимости от значения φ и требований к точности вести изменения либо по $\cos \varphi$, либо по $\sin \varphi$.

5.20. Так как $u=iR=\frac{\mathcal{E} \cos \omega t}{R+R_0}R$, то при $R \ll R_0$ напряжение и на выходе будет иметь вид амплитудномодулированного колебания:

$$u \approx \mathcal{E} \frac{R}{R_0} [1 + ms(t)] \cos \omega t.$$

5.21. Согласно (5.3) $u_{\text{вых}}/u_{\text{вх}}=R(u_{\text{упр}})$. По условию: $u_{\text{вых}}=Ku_{\text{вх}}u_{\text{упр}}$, т. е. $R(u_{\text{упр}})=Ku_{\text{упр}}$.

Следовательно, сопротивление R нелинейного резистора должно линейно зависеть от управляющего напряжения. Отметим, что подобные характеристики имеют полевые транзисторы.

5.22. По условию: $u_{\text{вых}}=au_{\text{вх}}/u_{\text{упр}}$; следовательно, характеристика переменного резистора $R(u_{\text{упр}})=a/u_{\text{упр}}$ имеет вид гиперболы.

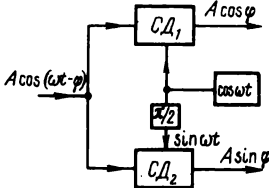


Рис. P 5.5

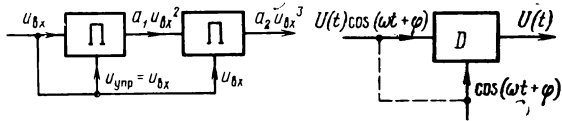


Рис. P 5.6

Рис. P 5.7

5.23. Искомая структурная схема изображена на рис. P 5.6.

5.24. Для того, чтобы выделить огибающую $U(t)$ АМ колебания $u=U(t)\cos(\omega t+\varphi)$, нужно осуществить деление на $\cos(\omega t+\varphi)$; структурная схема изображена на рис. P 5.7. Пунктиром показана линия синхронизации между принимаемым АМ колебанием и колебанием с постоянной амплитудой, создаваемым «местным генератором» (гетеродином).

Следует отметить, что опорное колебание можно создать из входного (при помощи фильтров и амплитудного ограничителя), причем реализовать это тем легче, чем меньше глубина модуляции входного колебания.

5.25. Сначала будем считать, что нужно перемножить сигналы входной $u_{\text{вх}}$ и управляющей $u_{\text{упр}}$, возведенный в степень, равную $1/2$, т. е. $u_{\text{вых}}=h_1 u_{\text{вх}} u_{\text{упр}}^{1/2}$, тогда в соответствии с ф-лой (5.3)

$$R(u_{\text{упр}}) = b \sqrt{u_{\text{упр}}} = \frac{1}{u_{\text{упр}}}, \quad u_{\text{упр}} > 0.$$

Теперь на зажимы цепи управления будем подавать входное напряжение, т. е. $u_{\text{упр}}=u_{\text{вх}}$; тогда $u_{\text{вых}}=b u_{\text{вх}}^{3/2}$.

5.26. В соответствии с ф-лой (5.4) и условием задачи $T(\rho)=F(u_{\text{упр}})=ku_{\text{упр}}$; $u_{\text{упр}}$ можно выразить через ρ по аппроксимационному выражению характеристики:

$$u_{\text{упр}} = (100-\rho)/(164+0,164\rho),$$

и подставить в условие; в результате, принимая во внимание, что $k=0,2$, получаем:

$$T(\rho) = k u_{\text{упр}} = 1,22 \frac{100-\rho}{100+\rho}.$$

Подставим вместо ρ символ p и будем считать $T(p)$ передаточной функцией линейной цепи с постоянными параметрами:

$$T(p) = 1,22 \frac{100-p}{100+p}.$$

После проверки на реализуемость синтезируем линейную цепь (рис. P5.8a), от которой переходим к искомой параметрической цепи, представляющей собой перемножитель (рис. P5.8б).

5.27. После проверки на реализуемость выполняем операции синтеза и приходим к схеме рис. P5.9a, а от нее — к схеме рис. P5.9б.

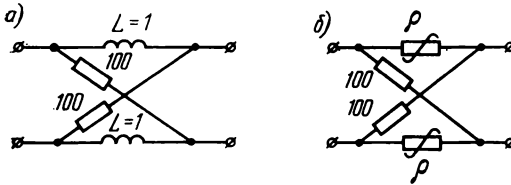


Рис. P 5.8

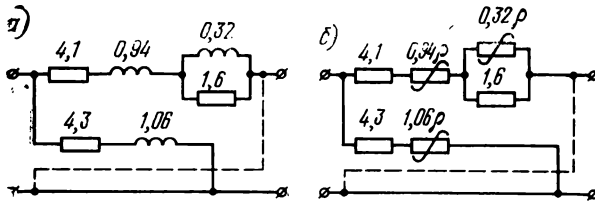


Рис. P 5.9

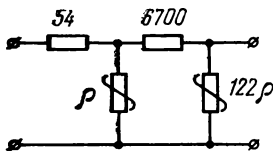


Рис. P 5.10

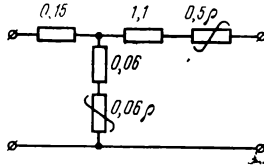


Рис. P 5.11

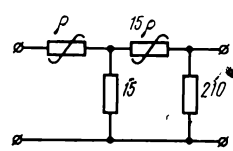


Рис. P 5.12

5.28. Найдем $u_{\text{упр}}(\rho)$: $u_{\text{упр}} = \rho^2$ и подставим это значение в выражение передаточной функции: $T(\rho) = k u_{\text{упр}} = \rho^2$. Полученная функция не удовлетворяет условиям физической реализуемости, и поэтому необходима подходящая аппроксимация.

На отрезке $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq u_{\text{упр}} \leq 1$ с точностью не менее 2% эту функцию можно аппроксимировать следующей реализуемой функцией:

$$T(\rho) = 3050 \frac{\rho^2}{(\rho + 50)(\rho + 60)}.$$

Ее реализация в виде параметрического резистивного четырехполюсника, представлена на рис. P5.10.

5.29. Найдем из аппроксимационного выражения характеристики $u_{\text{упр}}(\rho)$ и подставим в выражение: $T(\rho) = k u_{\text{упр}} = u_{\text{упр}}$, в результате получим

$$T(\rho) = \frac{\rho + 1}{(\rho + 3)(\rho + 5)}.$$

Реализованная цепь представлена на рис. P5.11.

5.30. Передаточная функция $T(\rho)$ имеет вид:

$$T(\rho) = \frac{1}{\rho^2 + 30\rho + 210};$$

ее реализация показана на рис. P5.12.

6

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Общие сведения. Схемы и дифференциальные уравнения

Цепями первого порядка называют цепи, содержащие один независимый накопитель энергии — конденсатор или катушку — и любое число резисторов. Цепи первого порядка, содержащие хотя бы один нелинейный элемент, будь то резистор, конденсатор или катушка, считаются нелинейными. Таким образом, цепи первого порядка состоят либо из одного конденсатора C или одной катушки L , либо из сочетаний RL и RC , причем в нелинейных цепях либо R , либо $L(C)$, либо R и $L(C)$ представляют собой нелинейные элементы.

Процессы в нелинейных цепях описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, по отношению к которым неприменимы методы, широко используемые в теории линейных цепей, т. е. методы, основанные на использовании принципа суперпозиции (спектральный, операционный, метод интеграла Фурье, метод наложения свободного и установившегося режимов); здесь применяются общие методы нахождения и изучения¹⁾ решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

Решения нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка далеко не всегда можно найти точно, и поэтому приходится довольствоваться приближениями. Для нахождения приближенных решений разработано много различных методов и приемов, каждый из которых имеет свой «радиус целесообразного применения» из-за присущих им преимуществ и недостатков. По этой причине одной из центральных задач расчета нелинейной цепи является

¹⁾ Понятие «нахождение решений» адресуется к количественным методам, при которых результатом решения является искомая функция, а понятие «изучение решения» — к качественным методам, применяемым при исследовании вопросов, связанных с устойчивостью, с поведением решения в отдельных интервалах и точках, асимптотические значения решений и т. п.

ся выбор наиболее подходящих методов¹⁾ для расчета данной конкретной цепи.

Необходимые сведения по методам решений обыкновенных дифференциальных уравнений даны в приложении 1, и читатель должен с ними ознакомиться до начала работы над материалом настоящего раздела. В настоящем разделе указывается только, какие методы целесообразно применять по отношению к тем или иным конкретным видам дифференциальных уравнений, описывающим конкретные схемы. Каждому методу присвоен свой номер в соответствии с классификацией, приведенной в приложении 1.

Нелинейные дифференциальные уравнения составляют так же, как и линейные, т. е. на основе законов Кирхгофа; при этом нужно пользоваться соотношениями, приведенными в качестве определений в разд. 1. В задачах 6.1—6.13 даны примеры составления дифференциальных уравнений, описывающих процессы в нелинейных цепях первого порядка. При составлении дифференциальных уравнений цепи, содержащей нелинейные резисторы, нужно принимать во внимание форму задания вольтамперной характеристики резистора. Если элемент управляется напряжением и его вольтамперная характеристика задана в виде $i(u)$, дифференциальное уравнение следует составлять относительно напряжения u ; если элемент управляется током и его вольтамперная характеристика задана в виде $u(i)$, дифференциальное уравнение следует составлять относительно тока.

Аналогичные рекомендации справедливы и для цепей, содержащих нелинейные конденсаторы, кулонвольтные характеристики которых могут быть заданы как в виде $q(u)$, так и в виде $u(q)$, или нелинейные катушки, веберамперные характеристики которых могут быть заданы как в виде $\phi(i)$, так и в виде $i(\phi)$. Эти рекомендации охватывают и случаи, когда нелинейность конденсатора задана в виде фарадвольтной характеристики $C(u)$, а нелинейность катушки — в виде генриамперной характеристики, $L(i)$, поскольку $q = C(u)u$; $\phi = L(i)i$.

Если цепь содержит как нелинейный резистор, так и нелинейный конденсатор (или нелинейную катушку), дифференциальное уравнение следует составлять относительно той переменной, которая является аргументом в характеристике, определяющей поведение нелинейного конденсатора (нелинейной катушки). Остальные переменные можно определить после нахождения указанной переменной.

Дифференциальные уравнения с самого начала рекомендуется приводить к безразмерному виду; это требование особенно важно

¹⁾ Приближенное решение каждого уравнения желательно находить не одним, а двумя-тремя методами, так как обычно оценить ошибку затруднительно; применение же нескольких методов и сравнение полученных по ним результатов исключает возможность грубой ошибки, а иногда и позволяет подметить нечто новое, что объясняет возникновение ошибок при использовании одного метода и их исчезновение при использовании другого.

в приближенных расчетах, результаты которых даются в виде графиков, а не формул. В качестве масштабов для приведения уравнений к безразмерному виду следует принимать либо постоянные цепи, либо постоянные внешнего воздействия. Например, в качестве масштаба времени целесообразно принимать или постоянные времена цепи ($RC, L/R$), или период внешнего воздействия ($T=2\pi/\Omega$); в качестве масштаба напряжения (тока) целесообразно выбирать либо установившееся (или начальное) значение тока, либо амплитуду внешнего воздействия и т. п. Выбор рационального масштаба во многом облегчает анализ результатов.

Нелинейные цепи первого порядка в свободном режиме описываются однородными дифференциальными уравнениями, которые в большинстве случаев можно привести к виду¹⁾

$$\frac{dx}{d\tau} + a(x) = 0, \quad (6.1)$$

а в режимах, соответствующих внешнему воздействию $f(\tau)$, — неоднородными дифференциальными уравнениями чаще всего одного из следующих видов:

$$\frac{dx}{d\tau} + a(x) = f(\tau), \quad (6.2)$$

$$a_1(x) \frac{dx}{d\tau} + a_0(x) = f(\tau). \quad (6.3)$$

Уравнения (6.1) — (6.3) являются разрешенными относительно производной $dx/d\tau$. Такими уравнениями описываются нелинейные цепи первого порядка, содержащие один нелинейный элемент (нелинейный резистор и линейный конденсатор или нелинейный конденсатор и линейный резистор и т. д.).

Наряду с этими уравнениями, встречаются и уравнения, в которых не удастся (а иногда и нецелесообразно к этому стремиться) выделить производную; подобные уравнения с неразрешенной производной в общем виде можно записать следующим образом:

$$F\left(\tau, x, \frac{dx}{d\tau}\right) = 0. \quad (6.4)$$

Часто, например, встречается уравнение вида

$$a_1(x) \varphi\left(\frac{dx}{d\tau}\right) + a_0(x) = f(\tau), \quad (6.5)$$

где φ — нелинейная функция, например, степенной полином.

Такими уравнениями описываются некоторые цепи, содержащие два нелинейных элемента: резистор и конденсатор или резистор и катушку.

¹⁾ Здесь и ниже τ — безразмерное время, т. е. время t , отнесенное к интервалу T , например периоду колебания, т. е. $\tau=t/T$ или $\tau=2\pi t/T$, и т. д.

Общее уравнение вида (6.4) может быть и нелинейно-параметрическим (если один из коэффициентов зависит явно от времени). В этом разделе рассматриваются только нелинейные уравнения, а нелинейно-параметрические — после параметрических и в разделе, посвященном именно им (разд. 7).

Выбор метода решения целесообразно связывать с формой внешнего воздействия $f(\tau)$. По этому признаку задачи расчета удобно разбить на следующие группы:

— расчет цепей в свободном режиме, т. е. при условии, что внешнее воздействие $f(\tau)$ тождественно равно нулю;

— расчет цепей в переходном и установившемся режимах при непериодических воздействиях любой формы;

— расчет цепей в установившемся режиме при моногармоническом (гармоническом) и полигармонических воздействиях.

В соответствии с приведенной классификацией ниже и рассматриваются расчеты нелинейных цепей как в количественном (нахождение решений), так и в качественном (изучение поведения решений) планах. Вопросы устойчивости исследуются отдельно (стр. 185—187). Во всех расчетах принимается, что характеристики нелинейных элементов являются однозначными функциями своих аргументов.

Кроме рассмотренных выше цепей первого порядка, в которых энергоемкий элемент (конденсатор, катушка) присутствует «в явном виде» и которые описываются дифференциальными уравнениями, в этом разделе изучаются и цепи, в которых энергоемкий элемент присутствует «в неявном виде». Имеются в виду цепи, содержащие дифференциатор или интегратор (в каждом из которых участвует энергоемкий элемент) и нелинейный и линейные резисторы. Если дифференциатор (интегратор) считается идеальным, т. е. выполняющим свои операции точно, то указанные цепи описываются конечными, а не дифференциальными уравнениями.

Задачи расчета нелинейных цепей первого порядка могут формулироваться как в постановке анализа, так и в постановке синтеза.

Анализ свободных процессов

Дифференциальные уравнения нелинейных цепей первого порядка, находящихся в свободном режиме, т. е. свободных от внешнего воздействия (правой части), можно привести к виду (6.1) или к виду

$$F\left(x, \frac{dx}{d\tau}\right) = 0. \quad (6.6)$$

Уравнение вида (6.6), как указывалось выше, может быть и не разрешено относительно производной.

Для решения и изучения уравнений цепей первого порядка в свободном режиме используются как прямые методы, так и косвен-

ные (см. приложение I). Среди методов прямого решения наибольшего применения заслуживают следующие¹⁾.

1. Метод непосредственного интегрирования (метод 1.1). Этот метод в технической литературе часто называют «методом интегрируемой аппроксимации», так как возможность получения решения зависит от выбора аппроксимирующей функции (см., например, задачи 6.14, 6.15, 6.20).

2. Метод решения в виде степенного ряда или степенного полинома (метод 2.1). Данный метод целесообразно использовать только в цепях с малой нелинейностью и в том случае, если допустима невысокая точность; при этих условиях можно сравнительно легко сопоставить решение для нелинейной цепи с решением для линейной, что иногда облегчает обсуждение искомого результата (см. задачу 6.15).

3. Метод малого параметра (метод 2.6). Метод малого параметра целесообразно использовать для изучения цепей более высокого порядка; однако его с успехом можно применять и для цепей первого порядка, особенно при малых нелинейностях. В последнем случае приближенное решение нелинейного уравнения легко наглядно сопоставить с решением линейного (см., задачу 6.20).

4. Метод минимизации невязки (метод 2.7). Этот метод оказывается весьма эффективным в тех случаях, когда можно «предсказать» функциональную структуру решения, т. е. удачно выбрать функции, аппроксимирующие решение (см., например, задачу 6.20).

5. Метод «припасовывания» (метод 3.2). При использовании метода припасовывания нужно проявлять большую осторожность, так как аппроксимация непрерывной кривой с помощью ломаной иногда может привести к потере качества. Во многих задачах, трудно поддающихся решению иными методами, применение метода припасовывания оказывается самым рациональным.

6. Метод изоклин (метод 3.5.1). Этот метод относительно громоздок, дает только графическое решение и его следует применять либо тогда, когда другие методы использовать нецелесообразно, либо в качестве «проверочного». При известном навыке, однако, метод изоклин позволяет быстро решать уравнение с приемлемой точностью (см. задачи 6.17, 6.20). Следует отметить, что для решения и изучения уравнений, не разрешенных относительно производной, метод изоклин может оказаться самым подходящим.

По отношению к нелинейным цепям первого порядка, находящимся в свободном режиме, т. е. к уравнениям вида

$$F\left(\frac{dx}{d\tau}, x\right) = 0,$$

уравнение изоклины всегда представляет собой прямую, парал-

¹⁾ Нумерация методов соответствует их нумерации в приложении I, где указаны основы применения каждого метода; здесь даются только рекомендации по их использованию при решении и изучении конкретных уравнений.

тельную ось абсцисс, так как уравнение изоклины совпадает с дифференциальным уравнением, если в последнем положить $dx/d\tau = k$ и разрешить его относительно x .

7. Метод введения параметра (метод 4.2в). Данный метод следует применять только по отношению к уравнениям, не разрешенным относительно производной (см. задачу 6.22).

8. Метод последовательных приближений Пикара (метод 6.2).

Метод может быть назван универсальным; однако целесообразность его применения существенно зависит от вида уравнения, т. е. от условий сходимости решения. В общем виде можно сказать, что так как при вычислении последующих приближений нужно интегрировать предыдущие, а при последовательном интегрировании функции «сглаживаются» и всякие неправильности из-за «неудачности» нулевого приближения, погрешностей округления и т. п., постепенно устраняются, этот метод, как правило, обеспечивает хорошую сходимость (см. П.6). Пример использования метода Пикара дан в задаче 6.23.

9. Метод перехода к интегральному уравнению на основе использования функции Грина (метод 6.3). Данный метод также можно назвать универсальным; однако успех определяется возможностью решения интегрального уравнения, а это зависит от вида дифференциального уравнения (см. задачу 6.23).

Напомним еще раз, что перед решением дифференциальное уравнение следует привести к безразмерному виду, а в случае невозможности получить решение в виде функции $x(\tau)$ следует искать решение в виде обратной функции $\tau(x)$.

Теперь обратимся к методам косвенного решения, т. е. к изучению решения на фазовой плоскости. Как уже указывалось (см. приложение 1), результатом решения по методу фазовой плоскости считается зависимость $y=f(x)$, где $y=dx/d\tau$. Располагая зависимостью $y=f(x)$, вообще говоря, можно найти и зависимость $x(\tau)$: для этого перехода разработаны приближенные методы (см. П.12); однако часто непосредственно по виду фазового изображения $y(x)$ можно получить основную информацию о процессе, т. е. переход к функции $x(\tau)$, таким образом, не требуется.

При изучении цепей первого порядка в свободном режиме собственн дифференциальное уравнение и представляет собой уравнение фазового изображения. В табл. 6.1 даны графики свободных движений (процессов) в линейных цепях первого порядка и соответствующие им фазовые изображения, т. е. дифференциальные уравнения; с этими движениями удобно сравнивать движения, полученные при рассмотрении нелинейных цепей, и таким образом судить о влиянии нелинейности.

Отметим, что в верхней полуплоскости $y(x)$ скорость всегда положительна и, следовательно, с течением времени величина x будет расти. Таким образом, направление движения в верхней полуплоскости (или, как говорят, направление движения «изображающей точки» в верхней полуплоскости) всегда будет слева направо, а в

нижней — справа налево, т. е. в обеих полуплоскостях движения совершаются по часовой стрелке.

Точки, соответствующие равенству $\dot{x}=0$, называются точками равновесия или узлами; узлы являются устойчивыми, если для них

ТАБЛИЦА 6.1

Свободные процессы в линейных цепях первого порядка и соответствующие им фазовые изображения

N/N n/n	Дифференциальное уравнение и его решение	Фазовое изображение	Временной оригинал
1	$\frac{dx}{d\tau} - \nu x = 0$ $x = \nu \tau$		
2	$\frac{dx}{d\tau} - \delta x = 0$ $x = e^{\delta \tau}$		
3	$\frac{dx}{d\tau} + \delta x = 0$ $x = e^{-\delta \tau}$		

$$y = \frac{dx}{d\tau}$$

выполняется неравенство $dy/dx < 0$, т. е. если при увеличении координаты x уменьшается скорость y . Вопросы устойчивости рассматриваются отдельно (стр. 185—187).

Метод фазовой плоскости допускает обобщения, состоящие в привлечении других фазовых координат (т. е. не только фазовых координат в виде x, y). В частности, для изучения свободного процесса в цепях первого порядка целесообразно ввести координаты x, δ , где переменная δ определяется равенством

$$\delta = \frac{\dot{x}}{x} = \frac{1}{x} \frac{dx}{d\tau}, \quad 1/c,$$

и называется диссипантом (см. П.13). Диссипант характеризует «знак диссипации» энергии: если $\delta < 0$, т. е. скорость и сама величина (координата) имеют разные знаки, энергия необратимо рас-

ходуется, процесс с течением времени прекращается; если $\delta > 0$, т. е. если с возрастанием величины ее скорость повышается, энергия поступает извне, процесс с течением времени развивается и стремится к бесконечности. По кривой $\delta(x)$ на плоскости диссипанта можно построить кривую процесса $x(t)$; прием для такого приближенного построения описан в П.13.

Синтез цепей по заданному свободному процессу

ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Задача синтеза нелинейной цепи первого порядка по заданному свободному процессу формулируется следующим образом. Задана цепь, содержащая резистор и энергоемкий элемент (конденсатор или катушку). Один из двух элементов является нелинейным и требуется найти его характеристику, при которой имеет место заданный свободный процесс. Вопросы реализации полученной характеристики считаются самостоятельной задачей.

Рассматриваемая задача эквивалентна синтезу цепи по реакции на единичный импульс (дельта-функцию). Эквивалентность этих задач показана ниже (стр. 174).

Приведем необходимые сведения по операциям синтеза и соответствующие расчетные формулы.

ЦЕПЬ, СОСТОЯЩАЯ ИЗ НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗИСТОРА И ЛИНЕЙНОГО КОНДЕНСАТОРА

Если резистор управляется током и его характеристика имеет вид $u = \varphi(i)$, то дифференциальное уравнение, составленное относительно тока, запишется следующим образом:

$$\varphi(i) = \frac{1}{C} \int i dt = 0, \quad \frac{d\varphi(i)}{dt} + \frac{1}{C} i = 0, \quad i(0) = I_0.$$

Задача синтеза состоит в нахождении $\varphi(i)$; исключим t из последнего уравнения. С этой целью выполним некоторые преобразования. Имея в виду тождество

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{di} \frac{di}{dt},$$

перепишем дифференциальное уравнение в виде

$$\frac{d\varphi}{di} \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0.$$

Скорость изменения тока $y_i = di/dt$ является функцией времени; однако y_i можно представить также в виде функции самого тока, т. е. в виде $y_i(i)$. Последняя запись соответствует фазовому изображению, которое предполагается однозначным. Подставляя вместо di/dt функцию $y_i(i)$, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d\varphi}{di} y_i(i) + \frac{1}{C} i = 0, \quad i(0) = I_0,$$

из которого нетрудно найти $\varphi(i)$:

$$\varphi(i) = -\frac{1}{C} \int \frac{i}{y_i(i)} di + K.$$

Полученное равенство справедливо и для линейной цепи; это позволяет определить постоянную K . Для линейной цепи

$$\varphi(i) = Ri, \quad i = I_0 e^{-\frac{1}{RC} t}, \quad y_i(i) = -\frac{1}{RC} i;$$

подставляя эти значения в дифференциальное уравнение, находим, что $K=0$.

Таким образом, формула для расчета характеристики резистора имеет вид:

$$\varphi(i) = -\frac{1}{C} \int \frac{i}{y_i(i)} di. \quad (6.7)$$

Если с самого начала дифференциальное уравнение привести к безразмерному виду

$$\frac{df(x)}{d\tau} + x = 0, \quad x(0) = 1,$$

где $x = i/I_0$, $\tau = t/T$, $T = EC/I_0^2$, $f(x) = (1/E) \varphi(i)$, и ввести обозначение $y(x) = dx/d\tau$, придем к общей формуле

$$f(x) = -\int \frac{x}{y(x)} dx. \quad (6.8a)$$

Если резистор управляется напряжением и его характеристика имеет вид $i = \varphi(u)$, то дифференциальное уравнение цепи запишется так:

$$u + \frac{1}{C} \int idt = 0, \quad \frac{du}{dt} + \frac{1}{C} \varphi(u) = 0, \quad u(0) = E.$$

При помощи фазового изображения $y_u(u)$, где $y_u = du/dt$, это уравнение можно переписать в виде

$$y_u(u) + \frac{1}{C} \varphi(u) = 0,$$

откуда

$$\varphi(u) = -C y_u(u).$$

Переходя, как и выше, к безразмерному виду, получаем

$$f(x) = -y(x), \quad (6.8b)$$

где $x = u/E$, $\tau = t/T$, $T = EC/I_0$, $f(x) = (1/I_0) \varphi(u)$.

¹⁾ При выборе масштаба E следует исходить из удобства вычислений.

**ЦЕПЬ, СОСТОЯЩАЯ ИЗ НЕЛИНЕЙНОГО КОНДЕНСАТОРА
И ЛИНЕЙНОГО РЕЗИСТОРА**

Свободный процесс в рассматриваемой цепи описывается дифференциальным уравнением:

$$Ri + u_c = 0, \quad R \frac{dq}{dt} + u_c = 0, \quad q = C(u_c)u_c, \\ RC(u_c) \frac{du_c}{dt} + Ru_c \frac{dC(u_c)}{dt} + u_c = 0, \quad u_c(0) = E.$$

Примем, что $C(u_c) = C_0 \gamma(u_c)$. Имея в виду равенство $\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{du_c} \frac{du_c}{dt}$ и используя обозначение фазового изображения $y_u(u_c) = y_u = du_c/dt$, перепишем последнее уравнение в виде

$$y_u + \frac{1 + R \frac{dC}{du_c} y_u}{RC} u_c = 0$$

и окончательно

$$\frac{dC}{du_c} + \frac{C}{u_c} = -\frac{1}{Ry_u}.$$

Это линейное уравнение можно проинтегрировать. Для удобства введем обозначения $x = u_c/E$; $C(u_c)/C_0 = z(x)$; $t/RC_0 = \tau$; $dx/d\tau = y(x)$ и запишем уравнение в виде

$$\frac{dz}{dx} + \frac{z}{x} = -\frac{1}{y(x)}.$$

Выполнив интегрирование, найдем

$$z'(x) = \frac{K}{x} - \frac{1}{x} \int \frac{x}{y(x)} dx.$$

Полученный закон изменения безразмерной емкости $z(x)$ должен быть справедлив и для линейной цепи, где $y(x) = -x$. Вводя это условие, находим, что $K=0$. Таким образом,

$$z(x) = -\frac{1}{x} \int \frac{x}{y(x)} dx. \quad (6.9)$$

**ЦЕПЬ, СОСТОЯЩАЯ ИЗ НЕЛИНЕЙНОЙ КАТУШКИ
И ЛИНЕЙНОГО РЕЗИСТОРА**

Полагая, что $L(i) = L_0 \beta(i)$, и совершая аналогичные выкладки, получаем

$$\psi(x) = -\frac{1}{x} \int \frac{x}{y(x)} dx, \quad (6.10)$$

т. е. формулу, совпадающую по виду с (6.9), но здесь $x = i/I_0$, $\tau = t/T$, $T = L_0/R$, $\psi(x) = \beta(i)$, $y(x) = dx/d\tau$.

ЦЕПЬ, СОСТОЯЩАЯ ИЗ НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗИСТОРА И ЛИНЕЙНОЙ КАТУШКИ

Для резистора, управляемого током по закону $u_R = \varphi(i)$, расчетная формула имеет вид

$$f(x) = -y(x), \quad (6.11)$$

где $x = i/I_0$, $\tau = t/T$, $T = I_0 L/E$, $f(x) = (1/E)\varphi(i)$.

Для резистора, управляемого напряжением по закону $i = \varphi(u_R)$, расчетная формула записывается так:

$$f(x) = -\int \frac{x}{y(x)} dx, \quad (6.12)$$

где $x = u_R/E$, $\tau = t/T$, $T = I_0 L/E$, $f(x) = (1/I_0)\varphi(u_R)$.

Анализ цепей при неперiodических воздействиях

Дифференциальные уравнения нелинейных цепей первого порядка, находящиеся под неперiodическим воздействием $\varphi(\tau)$, в общем виде можно записать следующим образом:

$$b(x) \frac{dx}{d\tau} + a(x) = \varphi(\tau) \quad (6.13)$$

или

$$F\left(x, \frac{dx}{d\tau}\right) = \varphi(\tau). \quad (6.14)$$

Вторая запись является более общей, так как не всегда заданное уравнение удастся записать так, чтобы производная $dx/d\tau$ не находилась под знаком некоторой другой функции, т. е. «входила» бы в уравнение в первой степени.

Для решения и изучения уравнений видов (6.13) и (6.14) можно использовать как прямые методы, так и косвенные. Здесь сохраняют силу все рекомендации, которые были даны выше (стр. 166—170) по отношению к задачам расчета свободных процессов.

Для задач расчета вынужденных процессов дополнительно следует отметить следующее.

1. Дифференциальное уравнение (6.13) часто можно существенно упростить путем преобразования переменной x (метод 4.3) согласно равенству:

$$b(x) \frac{dx}{d\tau} = \frac{dz}{d\tau},$$

из которого определяется новая переменная $z(x) = \int b(x) dx$. Если $\int b(x) dx = k a(x)$, нелинейное уравнение относительно x преобразуется

зудется в линейное относительно z . Напримёр, уравнение $x \frac{dx}{d\tau} + x^2 = \varphi(\tau)$ путем замены $z = x^2/2$ приводится к виду

$$\frac{dz}{d\tau} + 2z = \varphi(\tau).$$

Следует помнить, что новая переменная имеет другой физический смысл и при качественном изучении (например, по фазовой плоскости) нового уравнения это нужно принимать во внимание.

2. Часто встречаются условия, когда внешнее воздействие представляет собой «узкий» импульс и его допустимо представить в виде δ -функции с некоторым множителем. Эти условия имеют место и в том случае, если внешнее воздействие представляет собой единичную функцию. Но для того чтобы перейти от интегро-дифференциального уравнения к дифференциальному, нужно продифференцировать обе части уравнения, в результате чего в его правой части появляется δ -функция.

Итак, считаем заданным уравнение

$$F\left(x, \frac{dx}{d\tau}\right) = A \delta(\tau), \quad x(0) = 0,$$

соответствующее нулевым начальным условиям. Так как $\delta(\tau) \equiv 0$, при $\tau > 0$ исходное неавтономное дифференциальное уравнение можно заменить автономным, если учесть изменения условий, имевших место в цепи в момент $\tau = 0$. Целесообразно с этой целью ввести обозначения моментов времени: $\tau_- = 0_-$ («нуль с минусом») и $\tau_+ = 0_+$ («нуль с плюсом»). Начальное условие до подачи δ -функции обозначается как $x(0_-) = x_{0_-}$, а начальное условие после подачи δ -функции — как $x(0_+) = x_{0_+}$.

Таким образом, дифференциальное уравнение

$$F\left(x, \frac{dx}{d\tau}\right) = A \delta(\tau), \quad x(0_-) = 0,$$

эквивалентно дифференциальному уравнению

$$F\left(x, \frac{dx}{d\tau}\right) = 0, \quad x(0_+) = x_{0_+}.$$

Значение x_{0_+} проще всего определять непосредственно по схеме, руководствуясь известными положениями теории цепей.

Если уравнение цепи соответствует ненулевым начальным условиям, т. е. $x(0_-) = x_{0_-}$, то при замене дифференциального уравнения с правой частью в виде δ -функции однородным дифференциальным уравнением с начальным условием $x(0_+) = x_{0_+}$ значение x_{0_+} нужно определять с учетом x_{0_-} . Этот последний расчет можно формализовать; покажем соответствующую рецептуру на примере дифференциального уравнения вида

$$\frac{dx}{d\tau} + \varphi(x) = \delta(\tau), \quad x(0_-) = x_{0_-}.$$

Перепишем уравнение в виде

$$d\tau = -\frac{dx}{\varphi(x)} + \frac{\delta(\tau)}{\varphi(x)} d\tau$$

и проинтегрируем обе его части

$$\tau = -\int \frac{dx}{\varphi(x)} + \int \frac{\delta(\tau)}{\varphi(x)} d\tau + C.$$

Второй интеграл в правой части

$$\int \frac{\delta(\tau)}{\varphi[x(\tau)]} d\tau = \frac{1}{\varphi[x(0)]}.$$

Подставляя это значение интеграла в выражение для τ , находим, что

$$\tau = -\int \frac{dx}{\varphi(x)} + \frac{1}{\varphi[x(0)]} + C, \quad \varphi[x(0)] \neq 0.$$

Рассмотрим теперь то же нелинейное уравнение, но без правой части, т. е.

$$\frac{dx}{d\tau} + \varphi(x) = 0, \quad x(0) = x_0;$$

для этого уравнения имеем

$$y = -\int \frac{dx}{\varphi(x)} + C.$$

Сопоставляя оба решения, нетрудно сделать вывод, что решение, соответствующее воздействию в виде δ -функции при ненулевых начальных условиях, отличается от решения, соответствующего свободному режиму, только значением произвольной постоянной.

Таким образом, исходное уравнение эквивалентно уравнению

$$\frac{dx}{d\tau} + \varphi(x) = 0, \quad x(0_+) = x_{0+},$$

в котором x_{0+} определяется с учетом x_{0-} .

Уравнения (6.13) и (6.14) можно решить и при помощи метода изоклин (метод 3.5.1). Это следует специально подчеркнуть, так как обычно метод изоклин используется только по отношению к цепям второго порядка в свободном режиме.

Легко видеть, что дифференциальное уравнение вида

$$F\left(\frac{dx}{d\tau}, x, \tau\right) = 0$$

превращается в уравнение изоклины $x_{из}(\tau; k)$, если «заморозить» производную, т. е. положить $dx/d\tau = k$ и решить его относительно x , уравнение $x_{из}(\tau; k)$ дает геометрическое место точек, через которые искомая интегральная кривая $x(\tau)$ проходит под углом с тангенсом, равным k . Построение $x(\tau)$ в данном случае, т. е. при внешнем воздействии, принципиально не отличается от построений в свободном режиме (см. задачи 6.17 и 6.20).

Анализ цепей, находящихся под непериодическим воздействием, здесь считается завершенным, если найдены токи и напряжения; вопросы устойчивости рассматриваются отдельно, так как исследование устойчивости параметрических и нелинейно-параметрических цепей имеет много общего с изучением этих вопросов в нелинейных цепях, находящихся под внешним воздействием.

Порядок расположения задач связан со сложностью цепи (сначала рассматриваются цепи, содержащие только нелинейный энергоемкий элемент, а затем — цепи, содержащие нелинейный резистор и линейный энергоемкий элемент, и т. д.) и сложностью воздействия (δ -функция, единичная функция, линейнорастущее воздействие и т. д.).

Синтез цепей по заданному преобразованию непериодических воздействий

Постановка задачи синтеза нелинейной цепи первого порядка по заданному преобразованию непериодических воздействий, по существу, мало отличается от рассмотренной выше постановки аналогичной задачи, но адресованной к свободному процессу. Главное отличие состоит в том, что расчетные формулы и процедура синтеза оказываются более сложными, так как в общем случае здесь имеет значение и форма внешнего воздействия. Расчетам в такой постановке, т. е. определению характеристик нелинейных элементов, при помощи которых составляется цепь, обеспечивающая заданное преобразование непериодических воздействий, посвящена задача 6.47.

Существуют, однако, и другие отличия. Первое из них состоит в том, что здесь можно синтезировать элементарные нелинейные цепи, содержащие только энергоемкий элемент. Практической ценности эти цепи не имеют, но их рассмотрение в плане синтеза позволяет выявить некоторые возможности получения таких же результатов при помощи несколько усложненных схем. Вопросам синтеза элементарных нелинейных цепей первого порядка посвящены задачи 6.45—6.46.

Вторым отличием является возможность такой постановки задачи синтеза, при которой требуется не расчет характеристики нелинейного элемента, а создание конкретной структурной схемы, соответствующей нелинейной цепи первого порядка и реализующей заданное преобразование. В эти схемы входит резистивный нелинейный элемент (который, в частности, может играть роль функционального преобразователя, перемножителя и т. д.) и дифференциатор (или интегратор); дифференциатор содержит энергоемкий элемент и его сочетание с резистивным элементом образует цепь первого порядка. Однако если считать, что дифференциатор выполняет дифференцирование точно, то такая цепь описывается конечным, а не дифференциальным уравнением (см. также стр. 166). Вопросам синтеза структурных схем цепей первого порядка по за-

данному преобразованию непериодических сигналов посвящены задачи 6.48—6.50.

Приведем теперь необходимые сведения и расчетные формулы для расчета характеристик нелинейных элементов; эти сведения представляют собой дальнейшее развитие вопросов синтеза цепей по заданному свободному процессу (стр. 170—173). В первую очередь следует рассмотреть воздействия в виде единичного импульса и единичной функции. Для этих типовых воздействий расчетные формулы выводятся совершенно так же, как и для свободных процессов. Все расчетные формулы (включая и формулы для свободных процессов) с необходимыми пояснениями представлены в табл. 6.2.

Рассмотрим общий случай преобразования входного сигнала произвольной формы в выходной сигнал заданной формы. Входной сигнал запишем в виде

$$e(\tau) = Em(\tau).$$

В первую очередь рассмотрим цепь с нелинейным резистором, например, управляемым током (рис. 4 табл. 6.2); ее дифференциальное уравнение в безразмерном виде записывается следующим образом:

$$\frac{df(x)}{d\tau} + x = \frac{dm}{d\tau},$$

где $x = i/I_0$, $\tau = t/T$, $T = EC/I_0$, $f(x) = (1/E)\varphi(i)$.

Для исключения τ используем равенство

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{d\tau} = \frac{df}{dx} y(x)$$

и, кроме того, после определения по заданному процессу $x(\tau)$ обратной функции $\tau = \mu(x)$ используем второе равенство

$$\frac{dm(\tau)}{d\tau} = \frac{dm[\mu(x)]}{d[\mu(x)]}.$$

Для упрощения удобно ввести обозначение: $m[\mu(x)] = \lambda(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x)$; тогда

$$\frac{dm(\tau)}{d\tau} = \frac{d\lambda(x)}{d\tau} = \frac{d\lambda(x)}{dx} \frac{dx}{d\tau} = y \frac{d\lambda}{dx}.$$

Исходное дифференциальное уравнение теперь переписется в виде

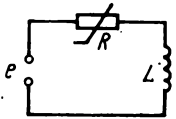
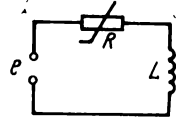
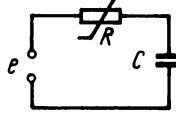
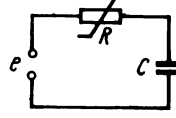
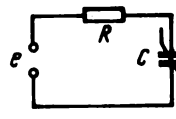
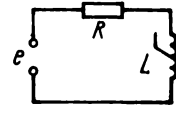
$$\frac{df(x)}{dx} y(x) + x = y(x) \frac{d\lambda}{dx},$$

откуда

$$f(x) = \lambda(x) - \int \frac{x}{y(x)} dx + K.$$

Полученная формула должна дать известный результат при $m(\tau) = 0$ и $m(\tau) = 1$; эти условия позволяют найти, что $K = -\lambda_0$. Так


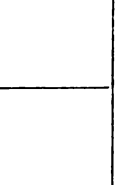
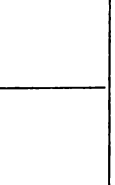
Формулы для расчета характеристик линейных элементов

№ пп.	Схема цепи	Выражение характеристики нелинейного элемента	Вид входного воздействия
1		$u_R = \varphi(i)$	$e = 0, i(0) = I_0$ $e = E \cdot 1(\tau)$ $e = E \delta(\tau)$
2		$i = \varphi(u_R)$	$e = 0, u_R(0) = E$ $e = E \cdot 1(\tau)$ $e = E \delta(\tau)$
3		$i = \varphi(u_R)$	$e = 0, u_R(0) = E$ $e = E \cdot 1(\tau)$ $e = E \delta(\tau)$
4		$u_R = \varphi(i)$	$e = 0, i(0) = I_0$ $e = E \cdot 1(\tau)$ $e = E \delta(\tau)$
5		$C(u_C) = C_0 \gamma(u_C)$	$e = 0, u_C(0) = E$ $e = E \cdot 1(\tau)$ $e = E \delta(\tau)$
6		$L(i) = L_0 \beta(i)$	$e = 0, i(0) = I_0$ $e = E \cdot 1(\tau)$ $e = E \cdot \delta(\tau)$

при простых воздействиях

Обозначения	Расчетные формулы	Примечания
$x = \frac{i}{I_0}$ $\tau = \frac{t}{T}, T = \frac{I_0 L}{E}$ $f(x) = \frac{1}{E} \Phi(i)$	$f(x) = -y(x)$ $f(x) = 1 - y(x)$ $f(x) = -y(x)$	<p>1) Всюду $y(x)$ фазовое изображение заданного процесса.</p> <p>2) В ф-лах 1—3 нужно выбрать масштабный ток I_0, а в ф-ле 4—масштабное напряжение E (для свободного процесса). Выбор этих величин можно, вообще говоря, подчинить только условиям удобства вычислений, т. е. приемлемости диапазона изменений.</p> <p>3) Внешнее воздействие $e(\tau)$ и процесс в цепи $x(\tau)$ рассматриваются при $\tau > 0$.</p>
$x = \frac{u_R}{E}$ $\tau = \frac{t}{T}, T = \frac{I_0 L}{E}$ $f(x) = \frac{1}{I_0} \Phi(u_R)$	$f(x) = - \int \frac{x}{y(x)} dx$ $f(x) = \int \frac{1-x}{y(x)} dx$ $f(x) = - \int \frac{x}{y(x)} dx$	
$x = \frac{u_R}{E}$ $\tau = \frac{t}{T}, T = \frac{E C}{I_0}$ $f(x) = \frac{1}{I_0} \Phi(u_R)$	$f(x) = -y(x)$	
$x = \frac{i}{I_0}$ $\tau = \frac{t}{T}, T = \frac{E C}{I_0}$ $f(x) = \frac{1}{E} \Phi(i)$	$f(x) = - \int \frac{x}{y(x)} dx$	
$x = \frac{u_C}{E}$ $\tau = \frac{t}{T}, T = RC_0$ $z(x) = \gamma(u_C)$	$z(x) = - \frac{1}{x} \int \frac{x}{y(x)} dx$ $z(x) = \frac{1}{x} \int \frac{1-x}{y(x)} dx$ $z(x) = - \frac{1}{x} \int \frac{x}{y(x)} dx$	
$x = \frac{i}{I_0}$ $\tau = \frac{t}{T}, T = \frac{L_0}{R}$ $\Psi(x) = \beta(i)$	$\Psi(x) = - \frac{1}{x} \frac{x}{y(x)} dx$ $\Psi(x) = \frac{1}{x} \int \frac{1-x}{y(x)} dx$ $\Psi(x) = - \frac{1}{x} \int \frac{x}{y(x)} dx$	

ТАБЛИЦА 6.3
 Формулы для расчета характеристик нелинейных элементов при произвольных воздействиях

№ пп.	Схема цепи	Выражение характеристики нелинейного элемента	Обозначения	Расчетные формулы
1		$i = \varphi(u_R)$	$e = Em(\tau), x = \frac{u_R}{E}$ $\lambda(x) = m(\tau)$ $\tau = \frac{t}{T}, T = \frac{EC}{I_0}$ $f(x) = \frac{1}{I_0} \Phi(u_R)$	$f(x) = \frac{d\lambda}{dx} - y(x)$
2		$u_R = \varphi(i)$	$e = Em(\tau), x = \frac{i}{I_0}$ $\lambda(x) = m(\tau) = \lambda_0 + \lambda_1(x)$ $\tau = \frac{t}{T}, T = \frac{EC}{I_0}$ $f(x) = \frac{1}{E} \Phi(i)$	$f(x) = \lambda_1(x) - \int \frac{x}{y(x)} dx$
3		$C(u_C) = C_0 \gamma(u_C)$	$e = Em(\tau), x = \frac{u_C}{E},$ $\lambda(x) = m(\tau),$ $\tau = \frac{t}{T}, T = RC_0,$ $z(x) = \gamma(u_C)$	$z(x) = \frac{1}{x} \int \frac{\lambda(x) - x}{y(y)} dx$

как $\lambda(x) - \lambda_0 = \lambda_1(x)$, то окончательная формула будет иметь следующий вид:

$$f(x) = \lambda_1(x) - \int \frac{x}{y(x)} dx. \quad (6.15)$$

Аналогично для схемы рис. 3 табл. 6.2 получим

$$f(x) = \frac{d\lambda}{dx} - y(x). \quad (6.16)$$

Теперь рассмотрим цепь с нелинейным конденсатором (рис. 5, табл. 6.2). Дифференциальное уравнение этой цепи имеет вид

$$\frac{dz}{dx} + \frac{z}{x} = -\frac{1}{y(x)} + \frac{1}{y(x)x} m(\tau),$$

где $x = u_c/E$, $C(x)/C_0 = z(x)$, $t/RC_0 = \tau$, $dx/d\tau = y(x)$.

Как и прежде, $m(\tau) = m[\mu(x)] = \lambda(x)$; следовательно,

$$\frac{dz}{dx} + \frac{z}{x} = -\frac{1}{y(x)} + \frac{\lambda(x)}{y(x)x}.$$

Относительно z это уравнение линейно и его можно проинтегрировать непосредственно:

$$\begin{aligned} z(x) &= e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left\{ \int \left[-\frac{1}{y(x)} + \frac{\lambda(x)}{y(x)x} \right] e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + K \right\} = \\ &= \frac{1}{x} \left[\int \frac{\lambda(x) - x}{y(x)} dx + K \right]. \end{aligned}$$

Полученная формула должна переходить в уже известные при $m(\tau) = 0$ и $m(\tau) = 1$ (τ); отсюда следует, что $K = 0$.

Таким образом, формула для определения закона изменения безразмерной емкости имеет вид

$$z(x) = \frac{1}{x} \int \frac{\lambda(x) - x}{y(x)} dx. \quad (6.17)$$

Формулы, соответствующие общему случаю для трех рассмотренных схем, сведены в табл. 6.3.

Анализ цепей при моногармоническом и полигармоническом воздействиях

Дифференциальные уравнения цепей первого порядка, находящихся под моногармоническим (гармоническим) или полигармоническим воздействием, внешне не отличаются от ур-ний (6.13) и (6.14), рассматривавшихся при анализе цепей, находящихся под непериодическим воздействием; однако отличия есть, и первое из них состоит в том, что здесь функция $\varphi(t)$ предполагается состоящей из счетного множества гармонических колебаний. Если частоты этих колебаний находятся в кратных соотношениях между собой, $\varphi(t)$ является периодической функцией, а если это условие не

выполняется, — почти периодической. Второе отличие заключается в том, что здесь требуется получить решение только для установившегося режима ($\tau \rightarrow \infty$) и, таким образом, нет необходимости в привлечении начальных условий¹⁾.

При выборе метода решения рассматриваемых задач, в общем, следует руководствоваться теми же соображениями, что и при изучении свободных процессов и процессов при непериодических воздействиях. Перечисленные на стр. 167—168 наиболее часто применяемые методы должны быть перечислены и здесь с заменой, конечно, степенного полинома (ряда) тригонометрическим. Более того, порядок расчета в этих задачах мало отличается от расчета в задачах указанных разделов, однако выкладки здесь более громоздки.

Поэтому рассмотрим здесь только два дополнительных метода: метод вариации параметров (метод 2.5) и метод усреднения коэффициентов (метод 3.4). Эти методы при изучении нелинейных цепей, находящихся под гармоническими воздействиями, являются самыми удобными и получили наибольшее распространение. Предпочтительность их перед остальными легко объяснить.

При рассматриваемых воздействиях и в установившемся режиме реакцию цепи всегда можно представить суммой гармонических колебаний с частотами, конечно, отличающимися от частот входных колебаний. В подавляющем большинстве практических задач в условиях поиска решения отмечается, что интерес представляют только определенных частот или даже одной частоты. Тем самым указывается функциональная структура решения и дальнейший расчет связан только с определением параметров. В этих условиях методы вариации параметров и усреднения коэффициентов оказываются наиболее эффективными.

Метод вариации параметров несколько сложнее, но позволяет изучать не только установившийся процесс, но и переходный. Он будет подробно рассматриваться (в модификации метода медленно меняющихся амплитуд) при изучении цепей второго порядка (разд. 9 и 10).

Рассмотрим подробнее метод усреднения коэффициентов. Следует отметить, что смысл и рецептура применения этого метода по отношению к нелинейным цепям существенно отличаются от изложенного о нем (см. приложение 1) по отношению к параметрическим цепям. Понятие «усреднение коэффициентов» здесь означает что для каждого периода в отдельности нелинейная зависимость, передающая характер изменений текущих значений параметра нелинейного элемента, заменяется линейной зависимостью с «усредненным» значением параметра. Это «среднее значение» параметра не зависит от мгновенных значений и остается постоянным при постоянной амплитуде приложенного напряжения (протекающего то-

¹⁾ Переходные процессы при периодических воздействиях соответствуют процессам при непериодических воздействиях и поэтому рассматривались выше (см., например, задачу 6.44).

ка), но зависит от его амплитудных значений. Таким образом, «средние параметры» являются функциями амплитудных, а не мгновенных значений электрических процессов. Физический смысл такой замены состоит в замене безынерционного нелинейного элемента (реагирующего на мгновенные значения) некоторым эквивалентным нелинейным элементом, реагирующим только на амплитудные (средние) значения. В установившемся режиме, т. е. при постоянной амплитуде, инерционный элемент работает как линейный.

Метод усреднения коэффициентов дает тем большую точность, чем меньше отличается нелинейная цепь от линейной. В радиотехнике его называют квазилинейным, а в технике автоматического регулирования — методом эквивалентной линеаризации, а также методом гармонического баланса; иногда данный метод называют «методом гармонической линеаризации».

С точки зрения, принятой в приложении 1, классификации этот метод, который в дальнейшем будем называть квазилинейным, представляет собой сочетание двух методов: поиска решения в виде тригонометрического ряда (метод 2.2) и усреднения коэффициентов (метод 3.4).

Квазилинейный метод рекомендуется, в первую очередь, применять в том случае, если по условиям задачи нужно найти закон изменения амплитуды только одной гармоники. Сущность этого метода состоит в следующем. Пусть входное воздействие имеет вид $v(t) = V \cos \omega t$; реакция цепи $x(t)$ является периодической функцией с периодом $T = 2\pi/\omega$ и может быть представлена рядом Фурье

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (X_{nc} \cos n \omega t + X_{ns} \sin \omega t),$$

где
$$\begin{matrix} X_{nc} \\ X_{ns} \end{matrix} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} n \omega t d(\omega t).$$

Реакция цепи $x(t)$ выражается через входное воздействие в виде сложной функции

$$x(t) = x[v(t)] = x(v \cos \omega t),$$

причем связь $x(v)$ определяется заданным дифференциальным уравнением; по известному дифференциальному оператору всегда можно вычислить искомые конкретные амплитуды X_{nc} , X_{ns} . Сопоставление найденной амплитуды с амплитудой входного воздействия приводит к «среднему параметру», зависящему от амплитуды входного воздействия, например, $\alpha_{1 \text{ ср}} = X_1/V$. Средние параметры могут быть как вещественными (в цепях, содержащих только резистивности), так и комплексными (в цепях, содержащих как резистивности, так и емкости или индуктивности).

Рецептура применения метода проста и допускает различные варианты; рассмотрим наиболее простую модификацию в приложе-

нии к задаче нахождения амплитуды первой гармоники. Пусть задано нелинейное дифференциальное уравнение, например, вида

$$\frac{dx}{dt} + \varphi(x) = V_c \cos \omega t + V_s \sin \omega t$$

и интерес представляет только первая гармоника

$$x(t) \approx x_1(t) = X_{1c} \cos \omega t + X_{1s} \sin \omega t,$$

которую примем в качестве приближенного решения. Введем это решение в левую часть уравнения; производная dx/dt даст те же составляющие первой гармоники; функция $\varphi(x)$ будет периодической с периодом $T = 2\pi/\omega$, и из нее можно выделить составляющие первой гармоники. Сгруппировав эти составляющие и сопоставив левые части уравнения с правыми (отсюда и термин «гармонический баланс»), нетрудно получить выражение искомых амплитуд; отношение найденной амплитуды к амплитуде входного воздействия дает средний параметр. Если $\varphi(x)$ имеет вид степенного полинома, вычислять интегралы для нахождения первой гармоники не требуется, можно воспользоваться формулами кратных дуг.

После того как функция $\varphi(x)$ представлена в виде гармонических составляющих, уравнение как бы «линеаризуется» и по отношению к нему можно применять символический метод, что существенно упрощает выкладки. В данном случае использование символического метода состоит в замене операции дифференцирования d/dt множителем p , т. е. умножением на $i\omega$, а операции интегрирования — множителем $1/p$, т. е. делением на $i\omega$; внешнее воздействие заменяется на $v(t) = \dot{V}e^{i\omega t}$, а искомое напряжение первой гармоники на $x_1(t) = \dot{X}_1 e^{i\omega t}$.

Квазилинейный метод можно применять и при полигармоническом воздействии; в данном случае в условии задачи должно быть указано, какие именно составляющие решения представляют интерес, и даны дополнительные сведения для определения амплитуд этих составляющих. Поясним это на примере бигармонического воздействия. Пусть

$$F(x, \dot{x}) = U_1 \sin \omega_1 t + U_2 \sin(\omega_2 t + \varphi).$$

Будем искать решение в виде двойного ряда Фурье (см. П.19):

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} X_{nm} \sin(n\omega_1 \pm m\omega_2 + \varphi_{n,m}).$$

Имея в виду конкретные указания: какие из составляющих решения представляют интерес, можно с самого начала сохранить в двойном ряду Фурье только те члены, которые (с учетом структуры дифференциального уравнения) приводят к появлению нужных составляющих. Подставив оставленные члены двойного ряда Фурье в дифференциальное уравнение и совершив преобразования, соот-

ветствующие структуре оператора F , получим сумму гармонических колебаний разных частот с неопределенными амплитудами.

Если по условию интерес представляют первые гармоники, то сохраняя только их и приравнивая амплитуды левой и правой частей уравнения (гармонический баланс), нетрудно получить связь между искомыми амплитудами и амплитудами внешнего воздействия.

Если же по условию интерес представляют колебания, частоты которых отличаются от частот колебаний внешнего воздействия, можно рекомендовать следующий прием, оказывающийся тем эффективнее, чем сильнее неравенство: $\omega_1 \gg \Delta\omega$, $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$. Основу этого приема составляет переход от двух колебаний с постоянными амплитудами $U_1 \sin \omega_1 t + U_2 \sin(\omega_2 t + \varphi)$ к одному с переменными амплитудой и фазой: $U(t) \sin[\omega_1 t + \psi(t)]$, где

$$U(t) = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + 2U_1 U_2 \cos(\Delta\omega t - \varphi)},$$

$$\psi(t) = \arctg \frac{U_2 \sin(\Delta\omega t - \varphi)}{U_1 + U_2 \cos(\Delta\omega t - \varphi)}.$$

При выполнении вышеприведенного неравенства можно считать, что $U(t)$ и $\psi(t)$ меняются медленно и при дифференцировании положить их постоянными; тем самым поиск решения сводится к процедуре, рассмотренной при моногармоническом воздействии.

Как и ранее, задача анализа цепи при периодических или почти периодических воздействиях считается завершенной, если найдены искомые токи или напряжения; вопросы устойчивости рассматриваются отдельно (см. ниже).

Устойчивость нелинейных цепей первого порядка

Вопросы определения устойчивости решений дифференциальных уравнений, изложенные в общем виде в П.10, полностью применимы к цепям первого порядка. Следует лишь указать, что по отношению к этим цепям, ответ, связанный с проверкой на устойчивость, получить гораздо легче, чем по отношению к цепям более высокого порядка. Однако при относительно сложном виде нелинейного дифференциального оператора нахождение ответа сопряжено с громоздкими выкладками и поэтому целесообразно привлечь косвенные методы изучения дифференциальных уравнений.

Напомним, что по прямым методам рецептура проверки на устойчивость решения $x(\tau)$ дифференциального уравнения

$$F\left(\frac{dx}{d\tau}, x, \tau\right) = 0$$

в точке равновесия x_0 , для которой $\left.\frac{dx}{d\tau}\right|_{x=x_0} = 0$, состоит в следующем. В исходное дифференциальное уравнение вводится точка равновесия, но вместе с «возмущением», т. е. $x = x_0 + \Delta x$; дифференци-

альное уравнение принимает вид нового уравнения относительно Δx

$$F \left[\frac{d\Delta x}{d\tau}, (x_0 + \Delta x), \tau \right] = 0.$$

Решение этого уравнения содержит ответ на поставленный вопрос: если $\Delta x \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$, цепь является устойчивой.

Рассмотрим теперь вопросы проверки на устойчивость по косвенным методам. При использовании фазовой плоскости $y(x)$, где $y = dx/d\tau$, дифференциальное уравнение является и уравнением фазовой траектории $F(y, x, \tau) = 0$, в котором τ играет роль параметра. В соответствии с изложенным выше (стр. 169) условие устойчивости имеет вид

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} < 0.$$

Проверка на устойчивость нелинейных цепей первого порядка при помощи фазового изображения, как правило, не вызывает затруднений, особенно при изучении свободных процессов, т. е. при отсутствии внешнего воздействия. Известные преимущества в вопросах проверки на устойчивость представляет использование плоскости диссипанта x, δ (см.

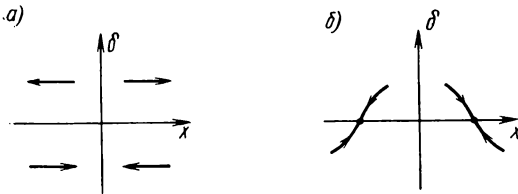


Рис. 6.1

стр. 168—170, а также П.13). Сформулируем общие правила, относящиеся к плоскости диссипанта.

1. Процесс устойчив, если $\delta < 0$; это объясняется тем, что при увеличении x уменьшается \dot{x} и, следовательно, процесс прекращается.

2. В нечетных квадрантах (1, 3) изображающая точка движется слева направо, а в четных (2, 4) — справа налево (рис. 6.1а). Например, в первом квадранте $x > 0, \delta > 0$; последнее возможно, если $\dot{x} > 0$, а так как $\delta = x/\dot{x}$, то при $x > 0$ процесс возрастает. Аналогично рассматриваются условия в других квадрантах.

3. Среди точек равновесия x_n , для которых $\left. \frac{dx}{d\tau} \right|_{x=x_n} = 0$, устойчивыми являются точки, удовлетворяющие условиям

$$\left. \begin{array}{l} \left. \frac{d\delta}{dx} \right|_{x=x_n} < 0 \text{ при } x_n > 0 \\ \left. \frac{d\delta}{dx} \right|_{x=x_n} > 0 \text{ при } x_n < 0 \end{array} \right\}.$$

Эти правила непосредственно следуют из правил о направлении движения изображающей точки (рис. 6.1б).

4. Если $\delta = \delta(x, \tau)$, то поведение диссипанта нужно исследовать обычными методами изучения функции от двух переменных. Наиболее просто поддаются изучению функции $\delta(x, \tau)$, которые можно представить в виде $\delta(x, \tau) = \delta_1(x)\delta_2(\tau)$. Вопросы устойчивости решений дифференциальных уравнений, диссипанты которых можно представить в таком виде, рассматриваются в разд. 7 при исследовании параметрических цепей первого порядка.

* *
*

В настоящем разделе задачи распределены следующим образом. Вопросам составления нелинейных дифференциальных уравнений посвящены задачи 6.1—6.13. Анализ и синтез цепей в свободном режиме рассматриваются в задачах 6.14—6.24 и 6.25—6.29 соответственно; в задачах 6.30—6.44 и 6.45—6.50 изучаются анализ и синтез цепей при непериодических воздействиях. Анализ цепей при гармонических воздействиях посвящены задачи 6.51—6.56, а вопросам устойчивости нелинейных цепей первого порядка — задачи 6.57—6.61.

Задачи и упражнения

6.1. Характеристика нелинейного резистора в цепи, соответствующей схеме рис. 6.2а, задана в виде функции $i = f(u)$. Составить дифференциальное уравнение как относительно напряжения u на нелинейном резисторе, так и относительно

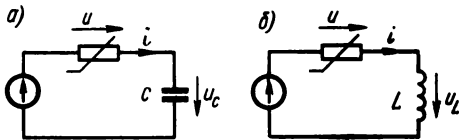


Рис. 6.2

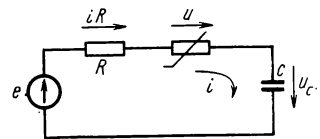


Рис. 6.3

напряжения u_c на конденсаторе. Показать также, как найти ток в цепи.

6.2. Нелинейный резистор цепи, изображенной на схеме рис. 6.2б, задан характеристикой вида $i = f(u)$. Составить дифференциальное уравнение относительно напряжения u .

6.3. В цепи, изображенной на схеме рис. 6.3, характеристика нелинейного резистора задана в виде функции $i = f(u)$. Составить дифференциальное уравнение для последовательного расчета u , u_c и тока i .

6.4. В цепи, изображенной на схеме рис. 6.3, характеристика нелинейного резистора задана в виде функции $u = \varphi(i)$. Составить дифференциальные уравнения относительно тока i для трех функций: 1) $\varphi(i) = a_0 + a_1 i + a_2 i^2$; 2) $\varphi(i) = = b/i$, $i > 0$; 3) $\varphi(i) = \alpha i - \beta i^3$.

6.5. В цепи, изображенной на схеме рис. 6.4, характеристика нелинейного резистора задана в виде функции $u = \varphi(i)$. Составить дифференциальное уравнение для расчета тока i .

6.6. Характеристика нелинейного резистора в схеме цепи, изображенной на рис. 6.5, задана в виде функции $u = \varphi(i)$. Составить дифференциальное уравнение для тока через конденсатор.

6.7. Характеристика нелинейного резистора в цепи, изображенной на рис. 6.6, задана функцией $i=f(u)$. Составить дифференциальное уравнение для расчета напряжения u_C на конденсаторе и напряжения u на нелинейном резисторе.

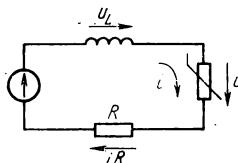


Рис. 6.4

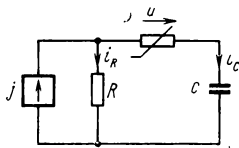


Рис. 6.5

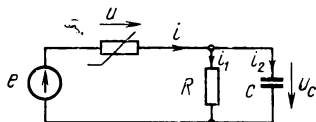


Рис. 6.6

6.8. В цепи, изображенной на схеме рис. 6.7, нелинейный резистор управляется напряжением, и его характеристика имеет вид $i=f(u)$. Составить дифференциальное уравнение для напряжения u в общем виде, а затем для частного случая экспоненциальной характеристики, т. е. при $i=I_0 e^{a u}$.

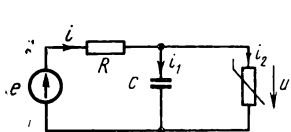


Рис. 6.7

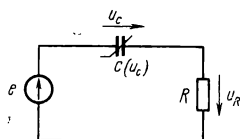


Рис. 6.8

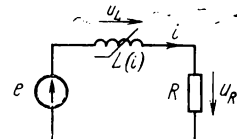


Рис. 6.9

В цепи, изображенной на схеме рис. 6.8, нелинейный конденсатор задан характеристикой $C(u_C)$. Составить дифференциальное уравнение относительно напряжения u_C в общем виде, а затем для частного случая, когда $C(u_C) = C_0(1 - a u_C)$.

Составить, кроме того, уравнение для заряда q , считая известной зависимость $q = \varphi(u_C)$, а затем зависимость $u_C = f(q)$, причем $q = a_1 u_C + a_2 u_C^2 + a_3 u_C^3$, $u_C = b_1 q + b_2 q^2 + b_3 q^3$.

6.10. В цепи, изображенной на схеме рис. 6.9, нелинейная катушка задана характеристикой $L(i)$. Составить дифференциальное уравнение для тока i в общем виде, а затем для частного случая, когда $L(i) = L_0(1 - \beta i)$. Составить, кроме того, уравнение для потока Φ , считая известной зависимость $\Phi = \varphi(i)$, а затем зависимость $i = f(\Phi)$.

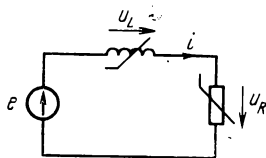


Рис. 6.10

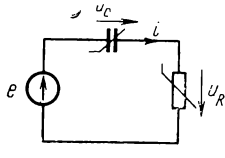


Рис. 6.11

6.11. Схема рис. 6.10 содержит нелинейную катушку и нелинейный резистор, характеристика которого задана функцией $u_R = \varphi(i)$. Составить дифференциальное уравнение относительно тока i для случаев, когда характеристика катушки задана функцией $\Phi(i)$ и функцией $L(i)$.

Составить, кроме того, дифференциальное уравнение для напряжения u_R , если характеристика резистора задана в виде $i = f(u_R)$, а характеристика катушки по-прежнему в виде $\Phi(i)$.

6.12. Цепь, соответствующая схеме рис. 6.11, содержит нелинейный конденсатор и нелинейный резистор. Характеристика нелинейной емкости задана в виде функции $C(u_C)$, а нелинейной резистивности — в виде функции $i=f(u_R)$. Составить дифференциальные уравнения относительно напряжения u_C , а затем относительно u_R .

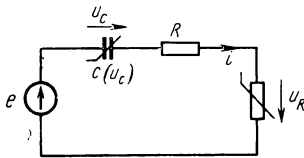


Рис. 6.12

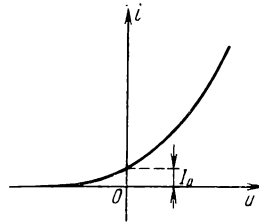


Рис. 6.13

Рассмотреть, далее, условия задания характеристики в виде $u_R=\varphi(i)$ и составить дифференциальное уравнение относительно u_C ; характеристику $\varphi(i)$ следует считать однозначной.

6.13. Цепь, соответствующая схеме рис. 6.12, содержит нелинейный конденсатор, а также нелинейный и линейный резисторы. Характеристика конденсатора задана функцией $C(u_C)$, а резистора — в первом случае функцией $i=f(u_R)$, а во втором — функцией $u_R=\varphi(i)$. Составить дифференциальные уравнения для обоих случаев.

Для второго случая принять, что $C(u_C)=C_0+au_C$, $u_R=\varphi(i)=a_1i+a_2i^2$.

6.14. Дифференциальное уравнение цепи, изображенной на схеме рис. 6.2б, имеет вид (задача 6.2)

$$\frac{d}{dt} f(u) + \frac{1}{L} u = \frac{1}{L} E.$$

Характеристика нелинейного элемента $i=f(u)$ показана на рис. 6.13 и в интересующем участке может быть аппроксимирована как полиномом второй степени, так и экспоненциальной функцией. Составить дифференциальные уравнения для обоих случаев и пояснить, какой функцией удобнее пользоваться с точки зрения простоты получения решения, т. е. простоты интегрирования дифференциального уравнения. В условии считается, что $E=0$ (свободный режим).

6.15. В задаче 6.14 были получены два дифференциальных уравнения (при $E=0$).

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{L(S+2bu)} = 0, \quad \frac{du}{dt} + \frac{1}{aLl_0} e^{-au} u = 0, \quad a \neq 0.$$

Найти зависимость $u(t)$ по обоим уравнениям при следующем начальном условии: при $t=0$ $u=U_0$. Для второго уравнения дать, кроме того, приближенное решение на основе разложения экспоненциальной функции в ряд с сохранением только первых членов разложения.

6.16. Найти закон, по которому совершается свободный процесс в схеме рис. 6.14, если характеристика нелинейного элемента аппроксимируется функцией $L=L_0(1-\beta i)$. Начальное условие: при $t=0$ $i=I_0$.

Полученный результат представить в виде двух графиков: одного для линейной цепи, т. е. при $\beta=0$, и второго для нелинейной при $\beta=1/2I_0$. Составить, кроме того, графики фазовых изображений обоих процессов, а также графики диссипатов.

6.17. Зависимость тока i от потока ϕ в нелинейной катушке цепи, изображенной на схеме рис. 6.14 (задача 6.16), аппроксимируется выражением $i=I_0(e^{\beta\phi}-1)$.

Найти закон изменения тока в свободном режиме при начальном условии $i(0) = I_0$, а также составить график фазового изображения свободного процесса. Решить, кроме того, дифференциальное уравнение методом изоклин.

6.18. В цепи, соответствующей схеме рис. 6.15, конденсатор, заряженный до напряжения E , разряжается на резистор R . Емкость C конденсатора зависит от напряжения u ; эта зависимость аппроксимируется функцией $C = C_0(1 - qu)$. Най-

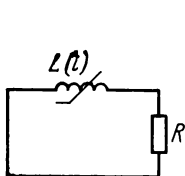


Рис. 6.14

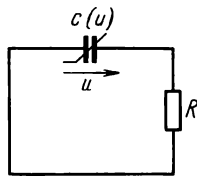


Рис. 6.15

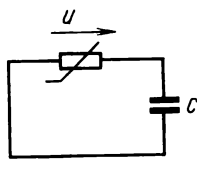


Рис. 6.16

ти закон, по которому разряжается конденсатор. Полученный результат представить в виде двух графиков: 1) для линейной цепи, т. е. при $q=0$, 2) для нелинейной цепи при $q=1/2E$.

6.19. Для цепи, содержащей нелинейный конденсатор $C(u)$ и линейный резистор (рис. 6.15), дифференциальное уравнение относительно напряжения на конденсаторе в свободном режиме имеет вид (см. задачу 6.9)

$$\frac{du}{dt} + \frac{1 + R \frac{dC(u)}{dt}}{RC(u)} u = 0.$$

Найти $u(t)$, если характеристика $C(u)$ аппроксимируется выражением (см. задачу 2.26). $C = C_0 \sqrt{\varphi/(\varphi + u)}$.

6.20. Найти закон изменения напряжения в свободном режиме на нелинейном резисторе в цепи, изображенной на схеме рис. 6.16; характеристику нелинейного резистора принять в виде укороченного полинома третьей степени:

$$i = \frac{1}{R} (u - qu^3).$$

Начальное условие: $u(0) = E$.

Задачу решить несколькими методами: 1) методом непосредственного интегрирования (1); 2) методом малого параметра (2.6); 3) методом наименьших квадратов (2.7а); 4) методом изоклин (3.5а).

Полученные решения изобразить в виде графиков для одного значения параметра $q = 1/\sqrt{2E}$. Построить также графики фазового изображения и диссипанта.

6.21. Найти закон изменения напряжения в свободном режиме на нелинейном резисторе в цепи, изображенной на схеме рис. 6.16 (задача 6.20). Характеристику нелинейного резистора принять в виде

$$i = \frac{1}{R} (u + qu^2).$$

Начальные условия: $u(0) = E$.

6.22. В цепи, изображенной на схеме рис. 6.17, резистор управляется током по закону:

$$u_R = a^2 i^2.$$

Найти напряжение u_R на резисторе в свободном режиме, считая, что $u_R(0) = E$.

6.23. В цепи, соответствующей схеме рис. 6.17, резистор управляется напряжением по закону $i = Su_R + au_R^2$, $u_R < S/a$. Найти напряжение на конденсаторе в свободном режиме, считая, что $u_C(0) = E$. Соотношение между параметрами подчиняется условию $aE = S$. Задачу решить по методу перехода к интегральному уравнению на основе использования функции Грина (метод 6.3).

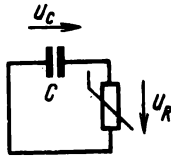


Рис. 6.17

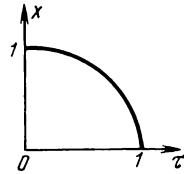


Рис. 6.18

6.24. Показать в общем виде, что в цепях первого порядка свободный режим не может быть колебательным (считается, что параметры элементов цепи не управляются внешними «причинами», а характеристики элементов являются однозначными).

6.25. Найти характеристики нелинейного резистора в цепи, содержащей, кроме этого резистора, линейный конденсатор, если свободный процесс (импульсная переходная характеристика) в цепи соответствует выражению (рис. 6.18)

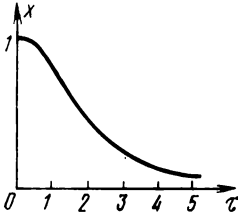


Рис. 6.19

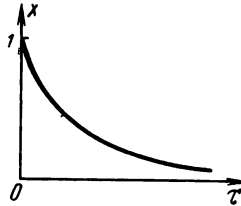


Рис. 6.20

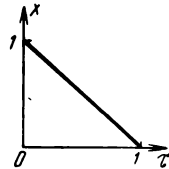


Рис. 6.21

$x = 1 - \tau^2$. Рассмотреть два резистора, из которых один управляется напряжением, а другой — током.

6.26. Найти необходимый закон изменения емкости нелинейного конденсатора, который при последовательном соединении с линейным резистором, должен обеспечивать свободный процесс (см. задачу 6.25) $x = 1 - \tau^2$.

6.27. На вход нелинейной цепи подается единичный импульс (дельта-функция); нужно синтезировать цепь по условию, что реакция цепи описывается выражением (рис. 6.19) $x = 1/(1 + \tau^2)$.

Найти характеристики нелинейных элементов, обеспечивающих указанную реакцию, для трех цепей: 1) $R(u), C$; 2) $R(i), C$; 3) $R, C(u_C)$.

6.28. На вход нелинейной цепи, состоящей из конденсатора и резистора, подается единичный импульс; найти характеристику одного из элементов по условию обеспечения реакции вида (рис. 6.20) $x = 1/(1 + \tau)$. Рассмотреть три цепи: 1) $R(u), C$; 2) $R(i), C$; 3) $R, C(u_C)$.

6.29. Условия задачи совпадают с условием задачи 6.28, но реакция цепи должна представлять собой линейную функцию вида (рис. 6.21) $x = 1 - \tau$.

6.30. На цепь, состоящую из одной нелинейной катушки с характеристикой вида $L = L_0(1 + ai)$, ($a > 0$), подается напряжение $e(t)$. Начальные условия — нулевые.

Найти ток $i(t)$ при следующих внешних воздействиях: 1) $e(t) = E \cdot 1(t)$; 2) $e(t) = A\delta(t)$; 3) $e(t) = kt$, $t > 0$. Результаты расчета представить в виде гра-

фиков. Рассмотреть, кроме того, характер тока в цепи для тех же условий, но при $\alpha < 0$.

6.31. На цепь, состоящую из одного незаряженного нелинейного конденсатора с характеристикой $C = C_0(1 + \beta u_C)$ подается напряжение $e(t)$. Найти ток в цепи для условий: 1) $e(t) = E \cdot \ln(t)$; 2) $e(t) = kt$, $t > 0$; 3) $e(t) = pt^2$, $t > 0$. Результаты расчета представить в виде графиков.

Рассмотреть, кроме того, характер тока в цепи для тех же условий, но при $\beta < 0$.

6.32. В цепи, изображенной на схеме рис. 6.22, дифференциальное сопротивление резистора меняется по закону $R = R_0(1 + \beta u)$, который соответствует вольтамперной характеристике вида $i = I_0 \ln(1 + \beta u)$, где $I_0 = 1/\beta R_0$ (рис. 6.22).

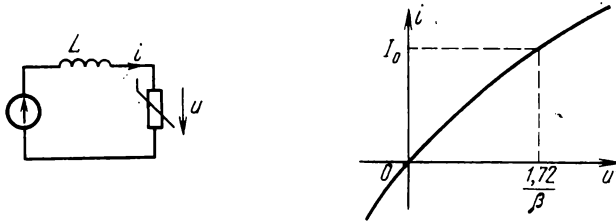


Рис. 6.22

Найти закон изменения напряжения u на нелинейном элементе при подаче в момент $t=0$ постоянного напряжения E и сравнить полученное решение с решением для линейной цепи, т. е. при $\beta=0$. Составить также выражение фазовой траектории переходного процесса в нелинейной цепи и построить соответствующие графики. Начальные условия — нулевые, т. е. при $t=0$ $u=0$.

6.33. За какое время напряжение на нелинейном элементе в цепи, изображенной на схеме рис. 6.22 (задача 6.32), возрастает от нуля до $E/2$, если $E=1$ В, $a=2$, а коэффициент $\beta=2$ 1/В. Задачу решить, исходя из уравнения фазовой траектории.

6.34. В задаче 6.32 считалось, что нелинейный резистор управляется напряжением в соответствии с вольтамперной характеристикой $i = I_0 \ln(1 + \beta u)$; в настоящей задаче будем считать, что резистор управляется током по закону, являющемуся обратной функцией вышеприведенной вольтамперной характеристики, т. е.

$$u = \frac{1}{\beta} \left(e^{\frac{i}{I_0}} - 1 \right).$$

Найти переходный процесс в той же цепи [$L = \text{const}$, $R = \varphi(i)$] при подаче постоянного напряжения E и сравнить полученное решение с решением для линейной цепи, т. е. при $e^{\frac{i}{I_0}} \approx 1 + i/I_0$. Начальные условия — нулевые: при $t=0$ $i=0$.

6.35. На цепь, содержащую линейную катушку L и нелинейный резистор $R(u)$, в момент $t=0$ подается постоянное напряжение E . Начальные условия — нулевые. Известен закон изменения сопротивления резистора: $R = R_0/(1 + q^2 u^2)$.

Найти выражение вольтамперной характеристики $i(u)$, а затем переходный процесс $u(t)$ и сопоставить его с переходным процессом в линейной цепи, т. е. при $R=R_0$.

6.36. На цепь, состоящую из линейной катушки и управляемого током нелинейного резистора (рис. 6.22), действует постоянное напряжение E , включенное в момент $t=0$. Найти переходный процесс $i(t)$ при нулевых начальных условиях и следующих вольтамперных характеристиках: 1) $u = ai^2$; 2) $u = bi^3$.

6.37. На цепь (рис. 6.23), состоящую из линейной катушки с индуктивностью $L=100$ Г, линейного резистора с сопротивлением $R=1$ кОм и диода, характеристика которого изображена на рис. 6.24 сплошной линией, в момент $t=0$ подается постоянное напряжение $E=100$ В. Найти переходный процесс $i(t)$ в цепи при аппроксимации характеристики диода двумя прямыми (рис. 6.24): $i=1,5u$ при $0 < u < 12$ В; $i=-30+4u$ при $12 < u < 30$ В. Здесь ток i — в миллиамперах, напряжение u — в вольтах.

6.38. На цепь, состоящую из линейной катушки и диода, характеристику которого можно аппроксимировать функцией $i=Au^{3/2}$, в момент $t=0$ подается постоянное напряжение E . Начальные условия — нулевые. Найти переходный процесс в цепи относительно напряжения на диоде, т. е. $u(t)$, и построить его график.

6.39. На цепь, изображенную на рис. 6.25, в момент $t=0$ подается постоянное напряжение E . Найти переходный процесс в цепи относительно напряжения u , напряжения u_C и тока i .

Характеристика управляемого напряжением резистора аппроксимируется функцией: $i=Su+au^2$.

6.40. Условия задачи 6.39 изменятся только в части, относящейся к резистору: в данном случае резистор управляется током, и его характеристика аппроксимируется функцией $u=Ri+bi^2$.

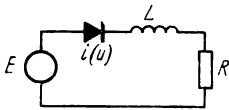


Рис. 6.23

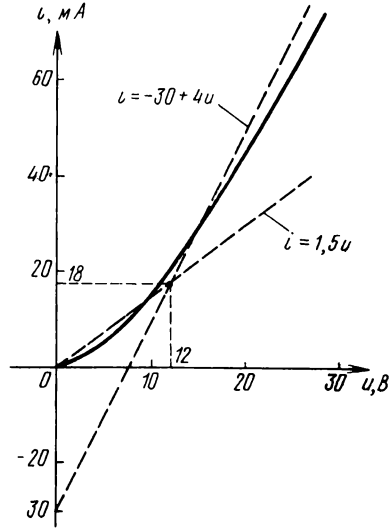


Рис. 6.24

6.41. На цепь, состоящую из линейной катушки и нелинейного резистора с характеристикой $u=a^2i^2$, подается напряжение $e(t)=Ekt^2$, ($t>0$). Найти ток в цепи.

6.42. В задаче 6.8 для напряжения на нелинейном резисторе в цепи рис. 6.7 было получено уравнение

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{RC} u + \frac{1}{C} I_0 e^{au} = \frac{1}{RC} e.$$

Построить (качественно) фазовое изображение напряжения на конденсаторе, а также найти установившееся значение напряжения $e=E \cdot 1(t)$, считая, что $E=0,2$ В, $I_0=1$ мА, $R=100$ Ом, $a=10$ 1/В.

6.43. В задаче 6.9 было получено дифференциальное уравнение для напряжения на нелинейном конденсаторе в цепи рис. 6.8 в виде

$$\frac{du_C}{dt} (1 - 2\alpha u_C) + \frac{1}{RC_0} u_C = \frac{1}{RC} e.$$

Построить (качественно) фазовое изображение, если $e=E \cdot 1(t)$, и найти значение установившегося напряжения на конденсаторе.

6.44. В схеме рис. 6.26 напряжение e меняется по закону $e=U_m \sin \Omega t \cdot 1(t)$. Характеристика диода аппроксимируется ломаной прямой (рис. 6.27): при $u < 0$

$i=0$; при $u>0$. $i=Su$. Реакция нагрузки, смещающая рабочую точку, во внимание не принимается.

Найти закон изменения напряжения на конденсаторе $u_c(t)$ в переходном режиме в течение первого периода. Полученный результат проиллюстрировать графиком при следующих данных: $R=10^2$ Ом, $C=1$ мкФ, $\Omega=10^3$ рад/с, $S=1$ Ма/В. Задачу решить методом припасовывания (метод 3.2).

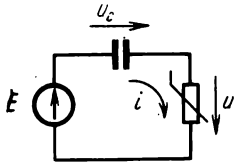


Рис. 6.25

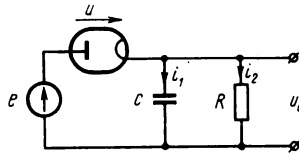


Рис. 6.26

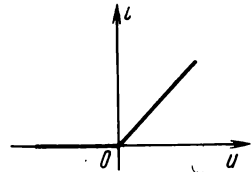


Рис. 6.27

6.45. Какой должна быть характеристика $C(u)$ нелинейного конденсатора для того, чтобы ток в его цепи с точностью до постоянного множителя был равен произведению напряжения на его производную.

6.46. Найти характеристику $C(u)$ нелинейного конденсатора по условию, что ток в его цепи должен быть равен с точностью до постоянного множителя произведению квадрата напряжения на его производную.

6.47. Найти характеристики нелинейных элементов в цепях, изображенных на рис. 1, 2, 3 табл. 6.3, которые обеспечивают при входном воздействии вида $m(\tau)=\tau$ выходной процесс $x(\tau)=1/\tau$.

6.48. В задаче 6.45 была найдена характеристика конденсатора по условию, что ток в его цепи представляет произведение напряжения на его производную. Здесь предлагается решить ту же задачу, т. е. получить произведение $(u \cdot du/dt)$, но при помощи нелинейного резистора, характеристика которого подлежит определению, и дифференциатора.

6.49. На вход синтезируемого устройства подается линейно растущее напряжение $u_1(t)=kt$ ($t>0$) и напряжение произвольной формы $u_2(t)$; на выходе устройства должно быть частное от деления сигнала $u_2(t)$ на $u_1(t)$. Составить алгоритм работы такого устройства и его функциональную схему; по условию можно использовать перемножитель, дифференциатор и один функциональный преобразователь — логарифматор.

6.50. Некоторый сигнал задан своей функциональной зависимостью: $s(t; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, a_N)$, где a_n — параметры сигнала. Дать общую рецептуру составления структурной схемы для измерения данного параметра a_n в любой текущий момент времени; допускается использование резистивных нелинейных элементов и одного дифференциатора (или интегратора).

6.51. На вход цепи, содержащей нелинейную катушку с характеристикой $\phi(i)=L(i)i=L_0i+ai^3$, подается гармонический ток $j=J \sin \omega t=J \sin \tau$; составить на основе квазилинейного метода общее выражение для расчета амплитуды напряжения первой гармоники напряжения на нелинейной катушке и ввести соответствующий «средний параметр».

6.52. На вход цепи, содержащей нелинейный конденсатор с характеристикой $q(u)=C(u)u=C_0u+\beta u^3$, подается гармоническое напряжение $e(t)=u=U \sin \omega t=U \sin \tau$; составить на основе квазилинейного метода общее выражение для расчета амплитуды тока первой гармоники в цепи и ввести соответствующий параметр.

6.53. На вход цепи, состоящей из линейного резистора и нелинейной катушки с характеристикой $L=L_0+ai^2$, подается гармоническое напряжение $e=U \sin \omega t$. Найти на основе квазилинейного метода выражение для первой гармоники тока и ввести соответствующий средний параметр.

6.54. В задаче 6.44 были найдены выражения «по участкам» переходного процесса в цепи рис. 6.26. По этим выражениям можно найти и кривые установившегося процесса, выполняя последовательно построения «одного периода

за другим». Однако только для установившегося режима эту задачу можно решить более простым путем, имея в виду, что напряжение на конденсаторе скачком не меняется и в точках 0 (или 2π) и π напряжение «слева» будет равно напряжению «справа».

В настоящей задаче предлагается составить уравнения для определения закона изменения напряжения на конденсаторе в цепи рис. 6.26 в установившемся режиме.

6.55. На линейную цепь, состоящую из последовательно соединенных элементов R и C , подано гармоническое напряжение $e = \mathcal{E} \sin \Omega t$. Найти уравнение изоклины при следующих данных: $\Omega = 10^3$ рад/с; $R = 10^3$ Ом; $C = 1$ мкФ; $\mathcal{E} = 10$ В.

6.56. Изложить методом изоклин методику решения нелинейного дифференциального уравнения

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{RC} u + \beta u^3 = \frac{U_0}{RC} \sin \omega t.$$

6.57. В задаче 6.15 рассматривались два дифференциальных уравнения:

$$\frac{dx}{d\tau} + \frac{x}{1 + Ax} = 0, \quad x(0) = 1;$$

$$\frac{dx}{d\tau} + x e^{-\alpha x} = 0, \quad x(0) = 1.$$

Проверить решения этих уравнений на устойчивость.

6.58. В задаче 6.22 было получено решение дифференциального уравнения

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 - x = 0, \quad x(0) = 1,$$

в виде кривой $x = (\tau - 2)^2/4$. Проверить полученное решение на устойчивость.

6.59. Проверить как на фазовой плоскости, так и на плоскости диссипанта устойчивость решений следующих дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{d\tau} + x^2 = 0, \quad x > 0;$$

$$\frac{dx}{d\tau} \mp \sqrt{x} = 0, \quad x > 0;$$

$$\frac{dx}{d\tau} - \frac{1}{x} = 0, \quad x > 0.$$

6.60. Проверить на устойчивость решение дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{d\tau} - (1 - a^2 x^2) x = 0$$

как на фазовой плоскости, так и на плоскости диссипанта.

6.61. Проверить на устойчивость решение дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{d\tau} + x - x^2 + x^3 + x^4 = 0, \quad x > 0.$$

РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ

6.1. Исходное уравнение $e = u + u_C$ можно переписать в виде

$$\frac{de}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{du_C}{dt}$$

или, перенеся член, относящийся к внешнему воздействию e , в правую часть, — в виде

$$\frac{du}{dt} + \frac{du_C}{dt} = \frac{de}{dt}.$$

Так как $i = C du_C/dt = f(u)$,

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{C} f(u) = \frac{de}{dt}.$$

Это и есть дифференциальное уравнение, составленное относительно u . Для перехода к напряжению u_C нужно воспользоваться равенством

$$u = e - u_C, \quad \frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} f(u);$$

тогда получим

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} f(e - u_C). \quad (*)$$

Конечно, по известному значению u напряжение u_C можно найти из равенства $u_C = e - u$. Зная u_C , легко найти ток i по формуле: $i = C du_C/dt$.

Следует обратить внимание на то, что уравнение (*) является нелинейно-параметрическим, а не нелинейным. В самом деле, пусть, например, функция f является квадратичной, т. е. $f(x) = ax^2$; тогда

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} (ae^2 + au_C^2 - 2aeu_C)$$

или (уравнение Риккати)

$$\frac{du_C}{dt} - \frac{a}{C} u_C^2 + \frac{2a}{C} e(t) u_C = \frac{a}{C} e^2.$$

Напомним, что нелинейно-параметрические дифференциальные уравнения рассматриваются в разделах, названия которых отражают только параметрические уравнения; последнее уравнение, таким образом, должно рассматриваться в разд. 7.

6.2. В исходном уравнении $L di/dt + u = e$ заменим ток i через $\varphi(u)$:

$$L \frac{d\varphi(u)}{dt} + u = e.$$

Используя равенство

$$\frac{d\varphi(u)}{du} \frac{du}{dt} = \frac{d\varphi(u)}{dt} = \varphi'_u(u) \frac{du}{dt}$$

можно написать

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{L \varphi'_u(u)} u - \frac{1}{L \varphi'_u(u)} e = 0.$$

$$6.3. \quad \frac{du}{dt} + R \frac{d}{dt} i(u) + \frac{1}{C} f(u) = \frac{de}{dt},$$

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} f\left(e - u_C - RC \frac{du_C}{dt}\right), \quad i = C \frac{du_C}{dt}.$$

Первое уравнение целесообразно представить в следующем виде:

$$\left[1 + R \frac{df(u)}{du} \right] \frac{du}{dt} + \frac{1}{C} f(u) = \frac{de}{dt}.$$

Второе уравнение является нелинейно-параметрическим.

6.4. Исходное уравнение $iR + u + u_C = e$ продифференцируем по t :

$$R \frac{di}{dt} + \frac{du}{dt} + \frac{du_C}{dt} = \frac{de}{dt}.$$

Приняв во внимание, что $du/dt = d\varphi(i)/dt$, $du_C/dt = (1/C)i$, получим

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{R} \frac{d}{dt} \varphi(i) + \frac{1}{RC} i = \frac{1}{R} \frac{de}{dt}.$$

Последнему уравнению, дающему ответ на поставленный вопрос, можно придать и другую форму. С этой целью используем равенство

$$\frac{d}{dt} \varphi(i) = \frac{d\varphi(i)}{di} \frac{di}{dt};$$

соответствующая подстановка дает

$$\frac{di}{dt} \left[1 + \frac{1}{R} \frac{d\varphi(i)}{di} \right] + \frac{1}{RC} i = \frac{1}{R} \frac{de}{dt}.$$

Если $\varphi(i) = a_0 + a_1 i + a_2 i^2$, $d\varphi/di = a_1 + 2a_2 i^2$, то

$$\frac{di}{dt} \left(1 + \frac{a_1}{R} + \frac{2a_2}{R} i \right) + \frac{1}{RC} i = \frac{1}{R} \frac{de}{dt}.$$

Если $a_2 = 0$, т. е. связь между причиной и следствием линейна, дифференциальное уравнение будет линейным.

Если $\varphi(i) = b/i$, $i > 0$, $d\varphi/di = -b/i^2$, то

$$\frac{di}{dt} \left(1 - \frac{b}{R} \frac{1}{i^2} \right) + \frac{1}{RC} i = \frac{1}{R} \frac{de}{dt}.$$

Наконец, если $\varphi(i) = \alpha i - \beta i^3$, $d\varphi/di = \alpha - 3\beta i^2$, то

$$\frac{di}{dt} \left(1 + \frac{\alpha}{R} - \frac{3\beta}{R} i^2 \right) + \frac{1}{RC} i = \frac{1}{R} \frac{de}{dt}.$$

6.5.
$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i + \frac{1}{L} \varphi(i) = \frac{1}{L} e.$$

6.6.
$$\frac{di_C}{dt} + \frac{1}{RC} i_C + \frac{1}{R} \frac{d}{dt} \varphi(i_C) = \frac{dj}{dt}$$

или

$$\frac{di_C}{dt} \left[1 + \frac{1}{R} \frac{d\varphi(i_C)}{di_C} \right] + \frac{1}{RC} i_C = \frac{dj}{dt}.$$

6.7. Составим исходные уравнения:

$$i = i_1 + i_2, \quad i_1 = \frac{1}{R} u_C, \quad i_2 = C \frac{du_C}{dt}, \quad e = u + u_C.$$

Подставляя выражения для i_1 и i_2 в первое равенство и принимая во внимание, что $i = f(u)$, получаем

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = \frac{1}{C} f(e - u_C).$$

Так как $u_C = e - u$, то

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{RC} u + \frac{1}{C} f(u) = \frac{de}{dt} + \frac{1}{RC} e.$$

6.8.
$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{RC} u + \frac{1}{C} f(u) = \frac{1}{RC} e,$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{RC} u + \frac{1}{C} I_0 e^{au} = \frac{1}{RC} e.$$

6.9. Исходное уравнение $u_C + iR = e$ с учетом того, что

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} [C(u_C) u_C],$$

перепишем в виде

$$u_C + RC(u_C) \frac{du_C}{dt} + Ru_C \frac{dC(u_C)}{dt} = e.$$

Если $C(u_C) = C_0(1 - \alpha u_C)$, $\frac{dC(u_C)}{dt} = -\alpha C_0 \frac{du_C}{dt}$,

то $u_C + RC_0 \frac{du_C}{dt} - RC_0 \alpha u_C \frac{du_C}{dt} - RC_0 \alpha u_C \frac{du_C}{dt} = e,$

$$\frac{du_C}{dt} (1 - 2\alpha u_C) + \frac{1}{RC_0} u_C = \frac{1}{RC} e.$$

Теперь составим уравнение для заряда:

$$R \frac{dq}{dt} + u_C = e.$$

Если известна зависимость $q = \varphi(u_C)$, то

$$R \frac{d}{dt} \varphi(u_C) + u_C = e.$$

а если — зависимость $u_C = f(q)$, то

$$R \frac{dq}{dt} + f(q) = e.$$

При $q = a_1 u_C + a_2 u_C^2 + a_3 u_C^3$ будем иметь

$$\frac{du_C}{dt} \left(1 + \frac{2a_2}{a_1} u_C + \frac{3a_3}{a_1} u_C^2 \right) + \frac{1}{a_1 R} u_C = \frac{1}{a_1 R} e,$$

а при $u_C = b_1 q + b_2 q^2 + b_3 q^3$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{b_1}{R} q + \frac{b_2}{R} q^2 + \frac{b_3}{R} q^3 = \frac{1}{R} e.$$

6.10. 1) $L(i) \frac{di}{dt} + \left[R + \frac{d}{dt} L(i) \right] i = e,$

или $\left[L(i) + i \frac{dL(i)}{di} \right] \frac{di}{dt} + Ri = e;$

2) $(1 - 2\beta i) \frac{di}{dt} + \frac{R}{L_0} i = \frac{1}{L_0} e;$

$$3) \quad \frac{d}{dt} \varphi(i) + Ri = e, \quad \frac{d\phi_j}{dt} + Rf(\phi) = e.$$

6.11. Исходное уравнение:

$$\frac{d\phi}{dt} + u_R = e;$$

при $u_R = \varphi(i)$, $\phi = \phi(i)$ имеем:

$$\frac{d\phi(i)}{dt} + \varphi(i) = e.$$

Если задана характеристика $L(i)$, то

$$\frac{d}{dt} [L(i) i] + \varphi(i) = e, \quad L(i) \frac{di}{dt} + i \frac{dL(i)}{dt} + \varphi(i) = e.$$

Наконец, если заданы $\phi(i)$ и $i = f(u_R)$, то

$$\frac{d}{dt} \{ \phi [f(u_R)] \} + u_R = e.$$

6.12. Так как

$$i = C(u_C) \frac{du_C}{dt} + u_C \frac{dC(u_C)}{dt}, \quad i = f(u_R) = f(e - u_C),$$

то

$$f(e - u_C) = C(u_C) \frac{du_C}{dt} + u_C \frac{dC(u_C)}{dt}$$

или

$$u_C \frac{dC(u_C)}{dt} + C(u_C) \frac{du_C}{dt} - f(e - u_C) = 0.$$

Это и есть дифференциальное уравнение относительно u_C ; от этого уравнения легко перейти к уравнению относительно u_R , так как $u_R = e - u_C$.

Путем подстановки

$$\frac{dC(u_C)}{dt} = \frac{dC(u_C)}{du_C} \frac{du_C}{dt}$$

полученное уравнение можно переписать в следующем виде:

$$\left[C(u_C) + u_C \frac{dC(u_C)}{du_C} \right] \frac{du_C}{dt} - f(e - u_C) = 0.$$

Если задана характеристика $u_R = \varphi(i)$, то при однозначной функции $\varphi(i)$ ее следует переписать в виде $i = \varphi^{-1}(u_R)$ и свести задачу к уже рассмотренной.

Можно, однако, поступить и иначе, если в качестве исходного принять уравнение $u_C + u_R = e$, тогда

$$u_C + \varphi \left[C(u_C) \frac{du_C}{dt} + u_C \frac{dC(u_C)}{dt} \right] = e.$$

Используя ту же подстановку

$$\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{du_C} \frac{du_C}{dt},$$

это уравнение можно переписать в форме

$$u_C + \Phi \left\{ \left[C(u_C) + u_C \frac{dC(u_C)}{du_C} \right] \frac{du_C}{dt} \right\} = e.$$

6.13. Так как

$$i = C(u_C) \frac{du_C}{dt} + u_C \frac{dC(u_C)}{dt}, \quad i = f(u_R),$$

а u_R можно выразить через u_C при помощи уравнения $u_R = [e - u_C - f(u_R)R]$, если решить последнее относительно u_R при конкретном виде функции $f(u_R)$, то искомое уравнение будет иметь вид

$$f_C(u_C, e, R) = C(u_C) \frac{du_C}{dt} + u_C \frac{dC(u_C)}{dt},$$

где $f_C(u_C, e, R)$ — результат исключения u_R , т. е. выражение u_R через u_C .

Если характеристика резистора задана в виде функции $u_R = \varphi(i)$, то из основного уравнения $u_C + Ri + u_R = e$, получим

$$u_C + R \frac{d}{dt} [C(u_C) u_C] + \Phi \left\{ \frac{d}{dt} [C(u_C) u_C] \right\} = e.$$

После подстановки конкретных зависимостей $C(u_C)$ и $\Phi(i)$ это дифференциальное уравнение можно привести к более простому виду. Если $C(u_C) = C_0 + \alpha u_C$, $\Phi(i) = a_1 i + a_2 i^2$, то

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [C(u_C) u_C] &= (C_0 + \alpha u_C) \frac{du_C}{dt} + \alpha u_C \frac{du_C}{dt} = (C_0 + 2\alpha u_C) \frac{du_C}{dt}, \\ u_C + R(C_0 + 2\alpha u_C) \frac{du_C}{dt} + a_1(C_0 + 2\alpha u_C) \frac{du_C}{dt} + a_2(C_0 + 2\alpha u_C)^2 \left(\frac{du_C}{dt} \right)^2 &= e. \end{aligned}$$

Последнее уравнение можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} (a_2 C_0^2 + 4a_2 C_0 \alpha u_C + 4a_2 \alpha^2 u_C^2) \left(\frac{du_C}{dt} \right)^2 + [(R + a_1) C_0 + \\ + 2\alpha (R + a_1) u_C] \frac{du_C}{dt} + u_C = e. \end{aligned}$$

6.14. В первом случае:

$$\begin{aligned} i = f(u) &= I_0 + Su + bu^2, \\ \frac{d}{dt} f(u) &= S \frac{du}{dt} + 2bu \frac{du}{dt} = \frac{du}{dt} (S + 2bu). \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в дифференциальное уравнение, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} (S + 2bu) + \frac{1}{L} u &= \frac{1}{L} E, \\ \frac{du}{dt} + \frac{u - E}{L(S + 2bu)} &= 0. \end{aligned}$$

Это дифференциальное уравнение интегрируется без затруднений.
Во втором случае:

$$i = f(u) = I_0 e^{au}, \quad \frac{d}{dt} f(u) = I_0 a e^{au} \frac{du}{dt}.$$

Подставляя выражение $\frac{d}{dt} f(u)$ в дифференциальное уравнение, находим

$$I_0 a e^{au} \frac{du}{dt} + \frac{1}{L} u = \frac{1}{L} E$$

или

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{aLI_0} e^{-au} (u - E) = 0, \quad a \neq 0.$$

Простыми подстановками это дифференциальное уравнение приводится к виду

$$\frac{e^x}{x} dx = Adt$$

и, так как $\int (e^x/x) dx = Ei(x)$ не выражается в элементарных функциях, можно сказать, что аппроксимация степенным полиномом имеет известные преимущества перед аппроксимацией экспоненциальной функцией.

6.15. Займемся первым уравнением и, прежде всего, приведем его к безразмерному виду. В качестве масштаба напряжения выберем U_0 , а в качестве масштаба времени — произведение LS . Поделим числители обеих частей этого уравнения на U_0 , а знаменатели — на LS и введем обозначения: $u/U_0 = x$, $t/LS = \tau$. Поделив и помножив, кроме того, второй член знаменателя второго слагаемого дифференциального уравнения на U_0 , получим

$$\frac{dx}{d\tau} + \frac{x}{1 + Ax} = 0, \quad x(0) = 1,$$

где $A = 2bU_0/S$.

В последнем уравнении переменные разделяются, и его можно проинтегрировать непосредственно. Находим: $-\frac{1+Ax}{x} dx = d\tau$, $-\int \frac{1+Ax}{x} dx = \tau$, $-\ln|x| - Ax = \tau + C$.

В соответствии с начальными условиями: при $\tau=0$ $x=1$ получим $C=-A$, т. е. $\tau = A(1-x) - \ln|x|$.

Графики $x(\tau)$ для $A=1$ и $A=2$ представлены на рис. P6.1.

Во втором уравнении для напряжения сохраним тот же масштаб U_0 , а для времени выберем другой масштаб — aLI_0 ; введем обозначения: $u/U_0 = x$, $aLI_0 = T$, $t/T = \tau$, $aU_0 = \alpha$.

После несложных преобразований получим

$$\frac{dx}{d\tau} + x e^{-\alpha x} = 0, \quad x(0) = 1.$$

Это уравнение можно решить непосредственно, но в виде обратной функции $\tau(x)$: $d\tau = -\frac{e^{\alpha x}}{x} dx$ или $\tau = -\int \frac{e^z}{z} dz + C$, где $z = \alpha x$.

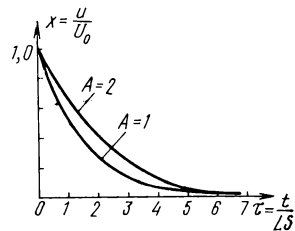


Рис. P 6.1

Интеграл $\int \frac{e^z}{z} dz$ не выражается в элементарных функциях; если этот интеграл привести к определенному, можно воспользоваться таблицами, имеющимися в справочных руководствах.

Известен следующий интеграл¹⁾:

$$\int_{-\infty}^z \frac{e^x}{x} dx = E^* i(z).$$

Для принятых здесь обозначений положим

$$\int_{-\infty}^z \frac{e^\xi}{\xi} d\xi = E^* i(z).$$

Приведем интеграл к табличному виду; напомним, что при $\tau=0$ $u=U_0$, $x=1$, а $aU_0=\alpha=z_0$.

Так как $\int_{-\infty}^z = \int_{-\infty}^{z_0} + \int_{z_0}^z$, можно написать, что $\int_{z_0}^z = \int_{-\infty}^z - \int_{-\infty}^{z_0}$

или

$$\tau = - \int_{z_0}^z \frac{e^\xi}{\xi} d\xi = - \int_{-\infty}^z \frac{e^\xi}{\xi} d\xi + \int_{-\infty}^{z_0} \frac{e^\xi}{\xi} d\xi = E^* i(z_0) - E^* i(z) = E^* i(\alpha) - E^* i(z).$$

Находя по таблицам значения $E^* i(z)$, нетрудно построить²⁾ график $x(\tau)$ для фиксированного значения aU_0 ; на рис. Р6.2 выполнено такое построение для $\alpha=aU_0=3$. Легко видеть существенное различие решений при различных аппроксимациях.

Теперь решим второе уравнение на основе разложения экспоненциальной функции в ряд с сохранением первых членов разложения, т. е. вместо уравнения

$$\frac{dx}{d\tau} + x e^{-\alpha x} = 0$$

будем рассматривать уравнение

$$\frac{dx}{d\tau} + x \left(1 - \alpha x + \frac{\alpha^2 x^2}{2} - \frac{\alpha^3 x^3}{6} + \dots \right) = 0.$$

Для уравнения $dx/d\tau + x = 0$, $x(0) = x_0$ решение известно: $x = x_0 e^{-\tau}$, $x/x_0 = e^{-\tau}$. Решим теперь уравнение:

$$\frac{dx}{d\tau} + x(1 - \alpha x) = 0, \quad x(0) = x_0.$$

¹⁾ Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. Специальные функции. М., «Наука», 1968, стр. 62—64.

²⁾ При построении полезно иметь в виду разложение $E^* i(x) = C + \ln z + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{nn!}$, которое при малых z превращается в следующее: $E^* i(z) \approx$

$\approx \ln(\gamma z)$, а при больших принимает вид $E^* i(z) = \frac{e^z}{z} \left(1 + \frac{1!}{z} + \frac{2!}{z^2} + \dots \right)$

Здесь $C=0,577$ — постоянная Эйлера, $\gamma=e^C=1,781$.

Разделяя переменные $dx/x(1-\alpha x) = -d\tau$ и интегрируя, получаем

$$\ln \frac{1-\alpha x}{x} + \ln C = \tau.$$

Последнее выражение имеет смысл только при условии $(1-\alpha x)/x > 0$, и так как $x = u/U_0 > 0$, то указанное условие можно переписать в виде: $x < 1/\alpha$, т. е. $u < U_0/\alpha$. Конечно, если $\alpha > 1$, подобное условие не может быть принято, так как решение не будет содержать сведений о начальной стадии свободного процесса; таким образом, принятым разложением (с сохранением только одного линейного члена) можно пользоваться, если $\alpha \leq 1$.

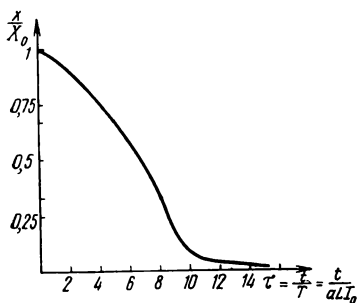


Рис. Р 6.2

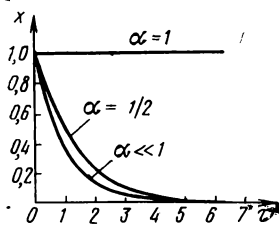


Рис. Р 6.3

Из равенства

$$\ln \left(C \frac{1-\alpha x}{x} \right) = \tau$$

легко найти постоянную C , приняв во внимание, что при $\tau=0$ $u=U_0$, $x=x_0=1$, в результате

$$C = \frac{1}{1-\alpha}, \quad \tau = \ln \left(\frac{1}{1-\alpha} \frac{1-\alpha x}{x} \right).$$

Решим последнее уравнение относительно x :

$$x = \frac{1}{\alpha + (1-\alpha)e^\tau}.$$

На рис. Р6.3 даны графики $x(\tau)$, построенные для $\alpha \ll 1$, $\alpha=1/2$ и $\alpha=1$. Этот пример наглядно иллюстрирует влияние функции, аппроксимирующей дифференциальный оператор: если в дифференциальном операторе сохранить всего один член в разложении экспоненты, то при $\alpha=1$ не будет переходного процесса. Кроме того, решение при $\alpha > 1$ вообще не имеет смысла.

Теперь рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{d\tau} + x \left(1 - \alpha x + \frac{\alpha^2 x^2}{2} \right) = 0, \quad x(0) = x_0 = 1.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим:

$$\frac{1}{2} \ln \frac{\alpha^2 x^2}{\frac{\alpha^2 x^2}{2} - \alpha x + 1} + \operatorname{arctg} (x-1) - C = -\tau,$$

$$C = \frac{1}{2} \ln \frac{\alpha^2}{\alpha^2/2 - \alpha + 1}$$

$$\tau = -\operatorname{arctg}(x-1) - \frac{1}{2} \ln \frac{\alpha^2 x^2}{\frac{\alpha^2 x^2}{2} - \alpha x + 1} + \frac{1}{2} \ln \frac{\alpha^2}{\alpha^2/2 - \alpha + 1}.$$

Последнее выражение имеет смысл при выполнении ряда неравенств, вытекающих из того, что $\tau > 0$ и аргумент под знаком логарифма должен быть положительным. Таким образом, необходимо, чтобы:

$$\frac{\alpha^2 x^2}{2} - \alpha x + 1 > 0,$$

$$\frac{1}{2} \ln \frac{\alpha^2}{\alpha^2/2 - \alpha + 1} - \operatorname{arctg}(x-1) - \frac{1}{2} \ln \frac{\alpha^2 x^2}{\frac{\alpha^2 x^2}{2} - \alpha x + 1} > 0.$$

Уже первое условие является настолько ограничивающим, что становится очевидной нецелесообразность принятой аппроксимации.

6.16. Обычным путем приходим к дифференциальному уравнению:

$$\frac{1 - 2\beta i}{i} \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L_0}.$$

Интегрируя это уравнение с учетом начального условия и вводя обозначения: $i/I_0 = x$; $tR/L_0 = \tau$; $2\beta I_0 = a$, получаем $\tau = -a(1-x) - \ln x$. При $a=0$ $\tau = -\ln x$, $x = e^{-\tau}$; при $a=1$ $\tau = -1+x - \ln x$. Графики, построенные по двум последним выражениям, приведены на рис. P6.4.

Составим теперь графики фазовых изображений обоих процессов. Для линейной цепи ($a=0$): $y = dx/d\tau = -x$; для нелинейной цепи ($a=1$): $y = -x/(1-x)$. Соответствующие графики изображены на рис. P6.5 для линейной цепи — сплошной линией, а для нелинейной — пунктирной.

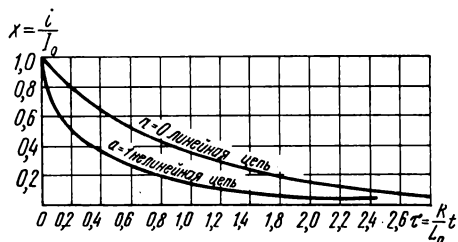


Рис. P 6.4

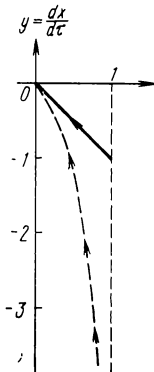


Рис. P 6.5

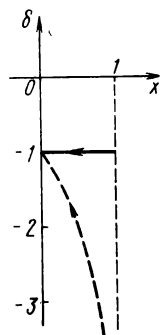


Рис. P 6.6

Графики диссипантов изображены на рис. P6.6; они соответствуют выражениям для линейной цепи: $\delta = -1$, для нелинейной цепи: $\delta = -1/(1-x)$.

6.17. Исходное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\phi}{dt} + Ri = 0, \quad i(0) = I_0$$

при помощи обозначений $i/I_0 = x$, $\beta\phi = z$, $1/\beta RI_0 = T$, $t/T = \tau$ приведем к безразмерному виду:

$$\frac{dz}{d\tau} + x = 0.$$

Так как $x=e^z-1$, $z=\ln(x+1)$, то

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{1}{x+1} \frac{dx}{d\tau}$$

и дифференциальное уравнение относительно безразмерного тока примет вид

$$\frac{dx}{d\tau} + (x+1)x = 0, \quad x(0)=1.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$\tau = - \int \frac{dx}{x(x+1)} + C, \quad \tau = - \ln \frac{x}{x+1} + C, \quad x > 0,$$

$$C = \ln \frac{x(0)}{x(0)+1} = \ln \frac{1}{2}, \quad \tau = \ln \frac{1}{2} \frac{x+1}{x}.$$

Решая последнее уравнение относительно x , находим

$$x = \frac{1}{2e^\tau - 1}, \quad \text{т. е.} \quad i = I_0 \frac{1}{2e^{\beta R I_0 t} - 1}.$$

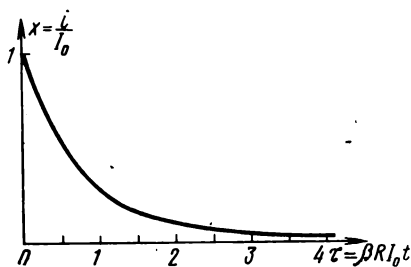


Рис. Р 6.7

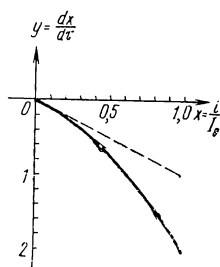


Рис. Р 6.8

Фазовое изображение соответствует выражению $y = dx/d\tau = -x - x^2$. Графики $x(\tau)$ и $y(x)$ представлены на рис. Р6.7 и Р6.8; в координатах x, y пунктиром показан график, соответствующий фазовому изображению линейной цепи.

Теперь решим уравнение

$$\frac{dx}{d\tau} + (x+1)x = 0, \quad x(0) = 1$$

методом изоклин. Полагая $dx/d\tau = k$, получаем $k = -x^2 - x$ или $x^2 + x + k = 0$, т. е. уравнения изоклин имеют вид

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - k}.$$

Так как $x \geq 0$, можно записать

$$x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - k}, \quad k \leq 0.$$

Выберем характерные значения k , при которых изоклины, представляющие собой прямые, параллельные оси абсцисс, будут проходить на одинаковых расстояниях друг от друга, что, конечно, удобно для построения.

Зададимся следующими значениями x : 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1,0. При этих значениях x , как легко установить, решив последнее уравнение относительно k , искомые величины k определяются выражением

$$k = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4};$$

значения $k = \operatorname{tg} \varphi$ будут следующими:

x	0	0,25	0,5	0,75	1,0
$k = \operatorname{tg} \varphi$	0	-0,31	-0,75	-1,31	-2

На рис. Р6.9 показано построение графика $x(\tau)$.

6.18. $\tau = -a(1-x) - \ln x$.

При $a=0$ $\tau = -\ln x$ $x = e^{-\tau}$; при $a=1$ $\tau = x - 1 - \ln x$. Здесь $x = u/E$, $\tau = t/RC_0$, $a = 2qE$.

При этих обозначениях кривые разряда конденсатора совпадают с кривыми свободного процесса в схеме нелинейной индуктивности и линейного активного сопротивления (см. задачу 6.17).

6.19. Приведем дифференциальное уравнение к безразмерному виду и с этой целью введем обозначения: $u/\varphi = x$, $RC_0 = T$, $t/T = \tau$, $z(x) = C/C_0 = \sqrt{1/(1+x)} = 1/\sqrt{1+x}$; тогда дифференциальное уравнение примет вид:

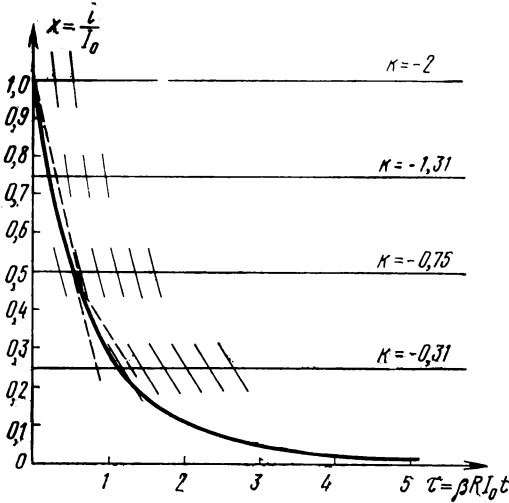


Рис. Р 6.9

$$\frac{dx}{d\tau} + \frac{1 + \frac{dz(x)}{d\tau}}{z(x)} = 0$$

или

$$\frac{dx}{d\tau} + \sqrt{1+x} \left[1 + \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} \right) \right] x = 0,$$

$$x(0) = X_0.$$

Так как

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} \right) = -\frac{1}{2} \frac{1}{(1+x)^{3/2}} \frac{dx}{d\tau},$$

уравнение после простых преобразований приводится к виду

$$\frac{dx}{d\tau} + \frac{2x(1+x)\sqrt{1+x}}{2+x} = 0,$$

допускающему непосредственное интегрирование.

Разделяя переменные

$$\frac{2+x}{2x(1+x)\sqrt{1+x}} dx = -d\tau$$

и интегрируя ¹⁾, находим

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} + 2\ln \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1} + C = -\tau.$$

Постоянную C определяем из условия: при $\tau=0$ $x=X_0$:

$$C = -\frac{1}{\sqrt{1+X_0}} - 2\ln \frac{\sqrt{1+X_0}-1}{\sqrt{1+X_0}+1}.$$

Решение в виде обратной функции $\tau(x)$ будет иметь вид

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1+X_0}} - \frac{1}{\sqrt{1+x}} + 2\ln \frac{\sqrt{1+X_0}-1}{\sqrt{1+X_0}+1} \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}-1}.$$

График, построенный по последнему выражению для $X_0=3$, дан на рис. Р6.10.

6.20. Составим дифференциальное уравнение:

$$u + \frac{1}{C} \int i dt = 0, \quad \frac{du}{dt} + \frac{1}{C} i = 0.$$

Так как по условию $i = \frac{u}{R} (1 - q^2 u^2)$,

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{RC} u (1 - q^2 u^2) = 0, \quad u(0) = E.$$

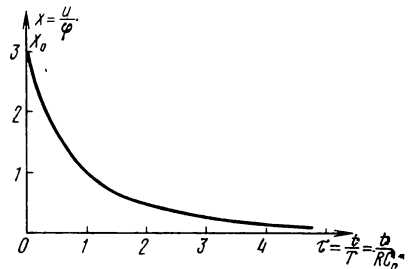


Рис. Р 6.10

Введем обозначения: $u/E = x$, $t/T = \tau$, $RC = T$, $q^2 E^2 = a^2$ и перепишем уравнение в безразмерном виде

$$\frac{dx}{d\tau} + x(1 - a^2 x^2) = 0, \quad x(0) = 1.$$

Теперь решим это уравнение несколькими методами.

Метод непосредственного интегрирования. Разделяя переменные

$$\frac{dx}{x(1-a^2 x^2)} = -d\tau, \quad x(0) = 1,$$

и интегрируя ²⁾, находим:

$$\ln(ax\sqrt{1-a^2 x^2}) + \ln C = -\tau \quad \text{или} \quad \ln(Cax\sqrt{1-a^2 x^2}) = -\tau.$$

Определим постоянную C из условия: при $\tau=0$ $x=1$:

$$C = \frac{1}{a\sqrt{1-a^2}}, \quad a < 1.$$

¹⁾ См. [14, стр. 355, 356, ф-лы (127), (138), (140)].

²⁾ См. [21, стр. 78, ф-ла (2.149)].

Теперь

$$\ln \left(\frac{x \sqrt{1 - a^2 x^2}}{\sqrt{1 - a^2}} \right) = -\tau, \quad x \sqrt{1 - a^2 x^2} = \sqrt{1 - a^2} e^{-\tau}.$$

Для линейной цепи ($q=0, a=0$) имеем: $x=e^{-\tau}$. Решим полученное уравнение относительно x :

$$\begin{aligned} x^2 (1 - a^2 x^2) &= (1 - a^2) e^{-2\tau}, \\ a^2 x^4 - x^2 + (1 - a^2) e^{-2\tau} &= 0, \end{aligned}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a^2 (1 - a^2) e^{-2\tau}}}{2a^2}}.$$

Легко убедиться в том, что перед внутренним корнем должен быть знак минус (так как при $\tau=0, x=0$), а перед внешним — знак плюс (так как при $\tau=0, x=1$); следовательно,

$$x = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - 4a^2 (1 - a^2) e^{-2\tau}}}{2a^2}}.$$

Для частного случая $a^2=1/2, q=1/\sqrt{2}E$, имеем

$$x = \sqrt{1 - \sqrt{1 - e^{-2\tau}}}.$$

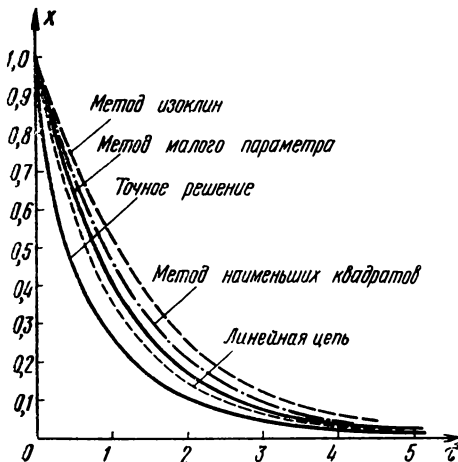


Рис. Р 6.11

График, построенный по последнему выражению, дан на рис. Р6.11 вместе с другими, о которых речь пойдет ниже.

Метод малого параметра. Решение исходного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{d\tau} + x - a^2 x^3 = 0, \quad x(0) = 1$$

будем искать в виде

$$x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \mu^3 x_3 + \dots,$$

где $\mu = a^2$, а функции x_0, x_1, x_2, \dots подлежат определению.

Ограничимся двумя членами последнего ряда. Подставляя x и $\dot{x} = dx/d\tau$ в исходное уравнение, запишем:

$$(\dot{x}_0 + a^2 \dot{x}_1) + (x_0 + a^2 x_1) - a^2 (x_0 + a^2 x_1)^3 = 0, \quad x(0) = 1.$$

Приравнявая члены при одинаковых степенях a^2 , находим:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 + x_0 &= 0, & x_0(0) &= 1; \\ \dot{x}_1 + x_1 - x_0^3 &= 0, & x_1(0) &= 0. \end{aligned}$$

Из первого уравнения находим: $x_0 = e^{-\tau}$. Второе уравнение теперь запишется в виде $\dot{x}_1 + x_1 = e^{-3\tau}$. Решение данного уравнения известно (см. табл. П.14):

$$x_1 = C e^{-\tau} + \frac{1}{1-3} e^{-3\tau} = C e^{-\tau} - \frac{1}{2} e^{-3\tau}.$$

Так как при $\tau=0$ $x_1=0$, то $C=1/2$ и

$$x_1 = \frac{1}{2} e^{-\tau} - \frac{1}{2} e^{-3\tau}.$$

Таким образом,

$$x \approx x_0 + a^2 x_1 = e^{-\tau} + \frac{a^2}{2} e^{-\tau} - \frac{a^2}{2} e^{-3\tau}$$

или

$$x = \left(1 + \frac{a^2}{2}\right) e^{-\tau} - \frac{a^2}{2} e^{-3\tau}.$$

Если $a^2=1/2$, то

$$x = \frac{5}{4} e^{-\tau} - \frac{1}{4} e^{-3\tau}.$$

График, построенный по этому выражению, изображен на рис. Р6.11. Из рисунка видно, что точность решения невысока и для ее повышения следует аппроксимировать решение суммой большего числа членов полинома.

Метод наименьших квадратов. Решение уравнения

$$\frac{dx}{d\tau} + x - a^2 x^3 = 0, \quad x(0) = 1,$$

будем искать в виде одной функции $x=e^{-k\tau}$, $k>0$, с неопределенным показателем k .

Определим невязку $\alpha(\tau)$:

$$\alpha = -k e^{-k\tau} + e^{-k\tau} - a^2 e^{-3k\tau}.$$

Найдем интеграл от квадрата невязки:

$$J = \int_0^{\infty} \alpha^2(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} (-k e^{-k\tau} + e^{-k\tau} - a^2 e^{-3k\tau})^2 d\tau.$$

Возводя в квадрат подынтегральное выражение и интегрируя, получаем

$$J = \frac{6k^2 + (6a^2 - 12)k + 6 - 6a^2 + 2a^4}{12k}.$$

Находя далее dJ/dk и приравнявая эту производную нулю, устанавливаем, что величина J имеет минимум при

$$k = \sqrt{1 - a^2 + \frac{1}{3} a^4}.$$

Если $a^2=1/2$, то $k \approx 0,76$. Таким образом, искомое решение: $x \approx e^{-0,76\tau}$.

График, построенный по этому выражению, изображен на том же рис. Р6.11; как видно из рисунка, он существенно отличается от графика точного решения. Для улучшения приближения следует аппроксимировать решение суммой большего числа экспоненциальных функций.

Метод изоклин. Полагая $dx/d\tau=k$, найдем уравнения изоклин:

$$k + x - a^2 x^3 = 0.$$

Для $a^2=1/2$ получим $k + x(1 - 0,5x^2) = 0$. Определим значения k , при которых $x=0; 0,25; 0,5; 0,75; 1,0$:

x	0	0,25	0,5	0,75	1,0
k	0	-0,242	-0,436	-0,54	-0,50

Проводя пять изоклин и нанося на них засечки, соответствующие углам φ с указанными значениями $k = \operatorname{tg} \varphi$, нетрудно построить искомую кривую $x(\tau)$; это построение выполнено на рис. Р6.12. Указанная кривая перенесена на рис. Р6.11 для сопоставления с кривыми, полученными другими методами.

Следует подчеркнуть, что цель данного примера не получить высокоточные результаты на основе применения различных методов, а показать, что аппроксимация решения суммой, содержащей малое число функций, как правило, не приводит к хорошим в смысле точности результатам.

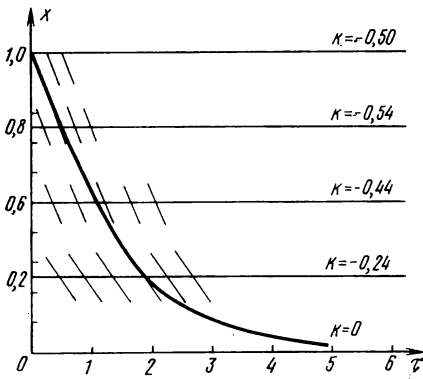


Рис. Р 6.12

На рис. Р6.11 точечным пунктиром показано решение, соответствующее линейной цепи; если в исходном дифференциальном уравнении

$$\frac{dx}{d\tau} + x - a^2x^3 = 0, \quad x(0) = 1$$

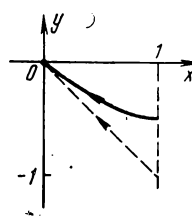


Рис. Р 6.13

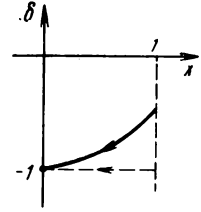


Рис. Р 6.14

пренебречь последним членом ($a^2=1/2$), то линейное дифференциальное уравнение $dx/d\tau + x = 0$, $x(0)=1$, будет иметь решение, соответствующее точечно-пунктирной кривой. Это решение, конечно, не зависит от параметра a .

На рис. Р6.13 и Р6.14 даны графики фазового изображения и диссипанта; здесь же пунктиром нанесены графики, соответствующие линейным цепям.

6.21. Пользуясь обозначениями, принятыми в задаче 6.20, запишем дифференциальное уравнение в безразмерном виде

$$\frac{dx}{d\tau} + x + ax^2 = 0, \quad x(0) = 1.$$

Это дифференциальное уравнение можно проинтегрировать непосредственно:

$$\begin{aligned} - \frac{dx}{x + ax^2} &= d\tau, \\ - \ln \frac{ax}{ax + 1} + C &= \tau^1), \\ C &= \ln \frac{a}{a + 1}, \\ \tau &= \ln \frac{a}{a + 1} \frac{ax + 1}{ax} = \ln \left[\frac{1}{a + 1} \left(a + \frac{1}{x} \right) \right]. \end{aligned}$$

¹⁾ $\int \frac{dx}{ax^2 + bx} = \frac{1}{b} \ln \frac{ax}{ax + b}$ (см. П.16).

Решим последнее уравнение относительно x :

$$e^\tau = \frac{1}{a+1} \left(a + \frac{1}{x} \right), \quad x = \frac{e^{-\tau}}{1 + a(1 - e^{-\tau})}.$$

6.22. Подставив в исходное уравнение $u_C + u_R = 0$ значение тока

$$i = C \frac{du_C}{dt} = -C \frac{du_R}{dt}$$

и выражение характеристики $u_R = a^2 i^2$, получим

$$-u_R + a^2 C^2 \left(\frac{du_R}{dt} \right)^2 = 0, \quad u_R(0) = E.$$

Приведем уравнение к безразмерному виду при помощи обозначений $u_R/E = x$, $Ea^2C^2 = T^2$, $t/T = \tau$, в результате получим

$$\left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 - x = 0, \quad x(0) = 1.$$

Это уравнение нецелесообразно разрешать относительно производной, так как его проще решить методом введения параметра (метод 4.2в).

Обозначив $x = p^2$, запишем:

$$x = p^2, \quad dx = 2p dp;$$

так как $dx/d\tau = p$, то

$$d\tau = \frac{1}{p} dx = \frac{2p dp}{p} = 2dp, \quad \tau = 2p + C$$

или, имея в виду, что $p^2 = x$,

$$x = \left(\frac{\tau - C}{2} \right)^2.$$

Вводя начальное условие, находим, что $C = -2$; следовательно,

$$x = \frac{1}{4} (\tau - 2)^2.$$

Возвращаясь к первоначальным обозначениям, получаем

$$u = E \left[1 - \frac{1}{\sqrt{EaC}} t + \frac{1}{E(2aC)^2} t^2 \right].$$

6.23. Так как

$$u_R + u_C = 0, \quad i = C \frac{du_C}{dt} = Su_R + au_R^2,$$

находим:

$$C \frac{du_C}{dt} + Su_C + au_C^2 = 0, \quad u_C(0) = E.$$

Вводя обозначения $u_C/E = x$, $C/S = T$, $t/T = \tau$, получаем

$$\frac{dx}{d\tau} + x + \frac{aE}{S} x^2 = 0; \quad x(0) = 1.$$

По условию $aE = S$; таким образом

$$\frac{dx}{d\tau} + x + x^2 = 0, \quad x(0) = 1.$$

Будем решать полученное уравнение методом 6.3 и перепишем его с этой целью в виде

$$\frac{dx}{d\tau} + x = -x^2.$$

Правая часть данного уравнения рассматривается как внешнее воздействие, благодаря чему можно воспользоваться интегралом Дюамеля (см. П.6):

$$x(\tau) = - \int_0^{\tau} h(\tau-s) x^2(s) ds + x_0,$$

где $h(\tau)$ — импульсная переходная функция, определяемая уравнением $dh/d\tau + h = \delta(\tau)$; в данном случае $h(\tau) = e^{-\tau}$ и, следовательно, принимая во внимание, что $x_0 = 1$, получаем интегральное уравнение

$$x(\tau) = 1 - e^{-\tau} \int_0^{\tau} e^s x^2(s) ds.$$

Решим это интегральное уравнение методом Пикара (метод 6.2). Нулевое приближение $x^{[0]} = 1$. Первое приближение:

$$x^{[1]}(\tau) = 1 - e^{-\tau} \int_0^{\tau} e^s \cdot 1 ds = e^{-\tau}.$$

Второе приближение:

$$x^{[2]}(\tau) = 1 - e^{-\tau} \int_0^{\tau} e^s (e^{-s})^2 ds = 1 - e^{-2\tau} - e^{-\tau} \text{ и т. д.}$$

6.24. Если параметры цепи не подвергаются изменениям во времени под действием внешнего управления, то дифференциальное уравнение цепи первого порядка в свободном режиме имеет вид: $dx/dt = f(x)$; время t в явном виде в уравнение не входит.

В случае периодических движений любое конкретное значение скорости dx/dt должно периодически повторяться, т. е. изображающая точка на фазовой плоскости должна проходить через одно и то же значение dx/dt (например, нулевое) не меньше двух раз в течение каждого периода; один раз при движении в прямом направлении и один раз в обратном. Если $f(x)$ — однозначная функция, такое состояние исключается.

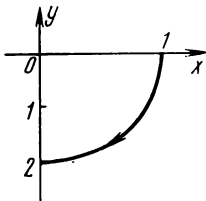


Рис. Р.6.15

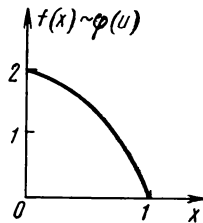
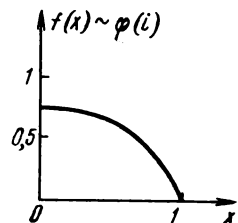


Рис. Р.6.16



6.25. Найдем выражение фазового изображения:

$$y(x) = \frac{dx}{d\tau} = -2\tau = -2\sqrt{1-x}, \quad x > 0.$$

График $y(x)$ дан на рис. Р6.15. Для резистора, управляемого напряжением, по ф-ле (6.8б) имеем

$$f(x) = -y(x) = 2\sqrt{1-x},$$

а для резистора, управляемого током, по ф-ле (6.8а) —

$$f(x) = -\int \frac{x}{y(x)} dx = \frac{x+2}{3}\sqrt{1-x}.$$

Вольтамперные характеристики, приведенные к безразмерному виду, изображены на рис. Р6.16.

6.26. Выполняя интегрирование по ф-ле (6.9), где $y(x) = -2\sqrt{1-x}$, находим

$$z(x) = \frac{x+2}{3x}\sqrt{1-x}.$$

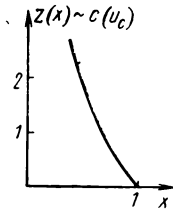


Рис. Р 6.17

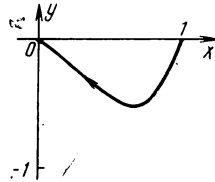


Рис. Р 6.18

График, построенный по последнему выражению и представляющий собой фарадвольтную характеристику, приведенную к безразмерному виду, дан на рис. Р6.17.

6.27. Фазовое изображение:

$$y(x) = -2x^2 \sqrt{\frac{1-x}{x}}, \quad x > 0.$$

График фазового изображения дан на рис. Р6.18.

Выражения характеристик находятся так же, как и в задачах 6.25, 6.26:

$$1) f(x) = 2x^2 \sqrt{\frac{1-x}{x}}; \quad 2) f(x) = \arctg \sqrt{\frac{x}{1-x}};$$

$$3) z(x) = \frac{1}{x} \arctg \sqrt{\frac{x}{1-x}}.$$

Соответствующие графики даны на рис. Р6.19.

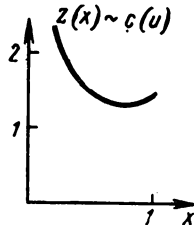
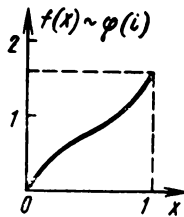
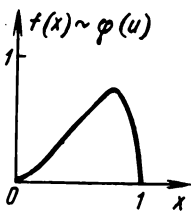


Рис. Р 6.19

6.28. Выражения характеристик:

$$1) f(x) = x^2; \quad 2) f(x) = \ln x; \quad 3) z(x) = \frac{1}{x} \ln x.$$

Графики характеристик даны на рис. P6.20.

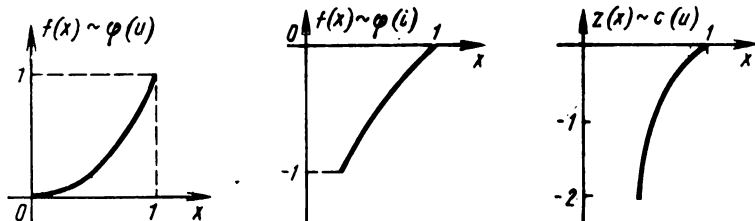


Рис. P 6.20

6.29. Выражения характеристик имеют следующий вид:

$$1) f(x) = 1; \quad 2) f(x) = \frac{x^2}{2}; \quad 3) z(x) = \frac{x}{2}.$$

Графики характеристик даны на рис. P6.21.

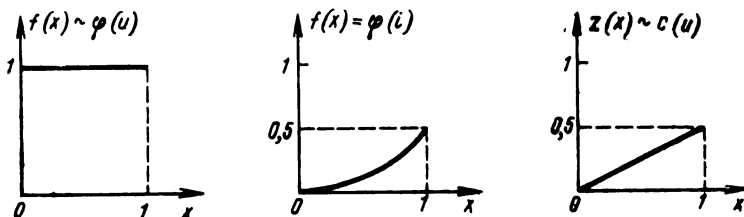


Рис. P 6.21

6.30. Исходное дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt} [L(i) i] = e(t), \quad i(0) = 0.$$

Подставляя в него $L(i) = L_0(1 + \alpha i)$, после интегрирования получаем

$$L_0(1 + \alpha i) i = \int e(t) dt + C, \quad i(0) = 0.$$

1) При $e(t) = E \cdot 1(t)$ $L_0 i + L_0 \alpha i^2 = Et + C$. Так как $i(0) = 0$, то $C = 0$ и

$$i = -\frac{1}{2\alpha} \pm \sqrt{\frac{1}{4\alpha^2} + \frac{E}{L_0 \alpha} t}.$$

Очевидно, перед корнем следует оставить знак плюс, так как $i > 0$; следовательно,

$$i = \frac{1}{2\alpha} \left(\sqrt{1 + \frac{4\alpha E}{L_0} t} - 1 \right).$$

Введя обозначения $2\alpha i = x$, $4\alpha E/L_0 = 1/T$, $t/T = \tau$, последнее выражение приведем к безразмерному виду

$$x = \sqrt{1 + \tau} - 1.$$

Для линейной цепи $\alpha=0$ и $i=(E/L_0)t$; для сопоставления с нелинейной цепью введем масштаб 2α :

$$2\alpha i = 2\alpha \frac{E}{L_0} t$$

и, пользуясь уже принятыми обозначениями, запишем:

$$x = \frac{1}{2} \tau.$$

2) При $e(t)=A\delta(t)$ имеем: $L_0i+L_0\alpha i^2=A$ и

$$i = -\frac{1}{2\alpha} \pm \sqrt{\frac{1}{4\alpha^2} + \frac{A}{L_0\alpha}}.$$

Так как $i>0$, то

$$i = \frac{1}{2\alpha} \left(\sqrt{1 + \frac{4\alpha A}{L_0}} - 1 \right)$$

или

$$x = \sqrt{1 + \frac{4\alpha A}{L_0}} - 1.$$

Для линейной цепи ($\alpha=0$) $i=A/L_0$ или $x=2\alpha A/L_0$. Последняя формула следует и из выражения для нелинейной цепи (при $4\alpha A/L_0 \ll 1$). В самом деле,

$$i = \frac{1}{2\alpha} \left(\sqrt{1 + \frac{4\alpha A}{L_0}} - 1 \right) \approx \frac{1}{2\alpha} \left(1 + \frac{2\alpha A}{L_0} - 1 \right) = \frac{A}{L_0}, \quad x = \frac{2\alpha A}{L_0}.$$

3) При $e(t)=kt$ $L_0i+L_0\alpha i^2=\frac{k}{2}t^2$ и

$$i = -\frac{1}{2\alpha} \pm \sqrt{\frac{1}{4\alpha^2} + \frac{kt^2}{2L_0\alpha}}$$

или, если отбросить знак минус,

$$i = \frac{1}{2\alpha} \left(\sqrt{1 + \frac{2k\alpha}{L_0} t^2} - 1 \right).$$

Для удобства сопоставления используем уже принятые обозначения:

$$2\alpha i = \sqrt{1 + \frac{kT}{2E} \frac{t^2}{T^2}} - 1,$$

т. е.

$$x = \sqrt{1 + \frac{kT}{2E} \tau^2} - 1.$$

Для линейной цепи:

$$i = \frac{k}{2L_0} t^2, \quad 2\alpha i = \frac{\alpha kT^2}{2L_0} \frac{t^2}{T^2}, \quad x = \frac{\alpha kT^2}{2L_0} \tau^2.$$

На рис. Р6.22 изображены графики переходных процессов в нелинейной катушке; на тех же графиках пунктиром показаны процессы в линейной катушке. Эти графики весьма поучительны. Например, при помощи катушки, имеющей указанную характеристику $L(i)$, можно преобразовывать «очень узкие импульсы» в импульсы с большой длительностью (рис. Р6.22б) и т. д.

Теперь выясним характер процессов при $\alpha < 0$, т. е. при $L(i) = L_0(1 - \alpha i)$. В первом случае, т. е. при $e(t) = E \cdot 1(t)$, для тока получим

$$i = \frac{1}{2\alpha} \pm \sqrt{\frac{1}{4\alpha^2} - \frac{E}{L_0\alpha} t};$$

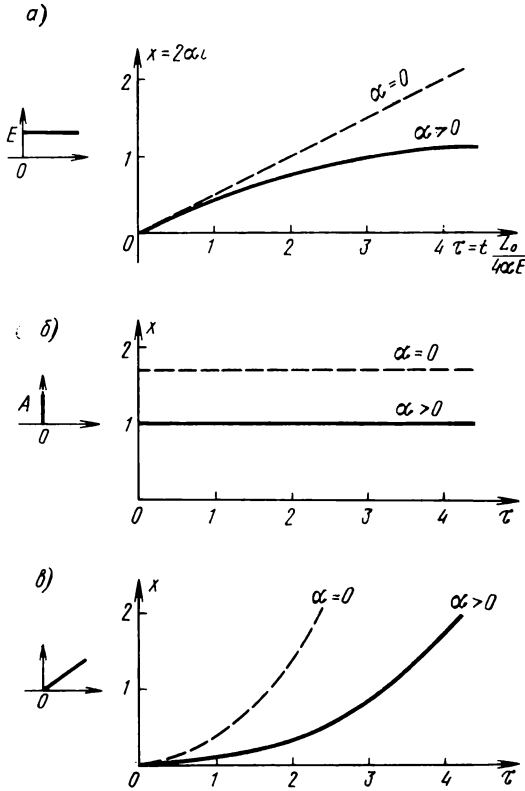


Рис. P6.22

чтобы выполнялось условие $i(0) = 0$, нужно сохранить знак минус, т. е.

$$i = \frac{1}{2\alpha} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\alpha E}{L_0} t} \right)$$

или

$$x = 1 - \sqrt{1 - \tau}.$$

Очевидно, ток в цепи будет протекать в течение отрезка времени, соответствующего неравенству $\tau < 1$ (при $\tau > 1$ имеет место мнимость). Объясняется это тем, что с ростом тока уменьшается индуктивность, что приводит к вырождению цепи.

При $e(t) = A\delta(t)$

$$i = \frac{1}{2\alpha} \left(1 - \sqrt{1 - 4 \frac{\alpha A}{L_0}} \right) \quad \text{или} \quad x = 1 - \sqrt{1 - 4 \frac{\alpha A}{L_0}}.$$

Здесь ток от времени не зависит.

Наконец, при $e(t) = kt$

$$i = \frac{1}{2\alpha} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2k\alpha}{L_0} t^2} \right)$$

или

$$x = 1 - \sqrt{1 - \frac{kT}{2E} \tau^2}.$$

При данном воздействии ток в цепи будет протекать в течение отрезка времени, соответствующего неравенству $\tau < \sqrt{2E/kT}$; затем цепь «выродится», т. е. индуктивность будет мала для того, чтобы реагировать на данное изменение тока.

6.31. Исходное дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{dq(u_C)}{dt} = \frac{d}{dt} [C(u_C)u_C] = i(t).$$

В данной цепи $u_C = e$; таким образом,

$$i = \frac{d}{dt} [C(e)e] = C \frac{de}{dt} + e \frac{dC}{dt}.$$

Так как $C = C_0(1 + \beta e)$, то $dC/dt = C_0\beta de/dt$ и

$$i = (C_0 + C_0\beta e + C_0\beta e) \frac{de}{dt} \quad \text{или} \quad i = C_0(1 + 2\beta e) \frac{de}{dt}.$$

1) При $e = E \cdot 1(t)$ имеем $i = C_0(1 + 2\beta E) \times \times E\delta(t)$. Для линейной цепи, т. е. при $\beta = 0$ $i = C_0 E \delta(t)$. Обратим внимание на то, что в цепи с емкостью ток может изменяться скачком.

2) При $e = kt$ $i = C_0(1 + 2\beta kt)k$, т. е. $i = C_0 k(1 + 2\beta kt)$. Для линейной цепи, т. е. при $\beta = 0$ $i = C_0 k$.

3) При $e = pt^2$ $i = C_0(1 + 2\beta pt^2)2pt$, т. е. $i = 2pC_0(t + 2\beta pt^3)$.

При $\beta = 0$ $i = 2pC_0 t$.

Графики переходных процессов изображены на рис. P 6.23; здесь же пунктирными линиями показаны переходные процессы, соответствующие линейным цепям.

Для случая $\beta < 0$ будем иметь:

1) $i = C_0(1 - 2\beta E)E\delta(t)$;

2) $i = C_0 k(1 - 2\beta kt)$;

3) $i = 2pC_0(t - 2\beta pt^3)$.

Условием «невыврожденной цепи» является неравенство: $i > 0$; отсюда следует, что

$$2\beta E < 1, \quad 2\beta kt < 1, \quad 2\beta pt^2 < 1;$$

при выполнении этих неравенств в цепи будет протекать ток.

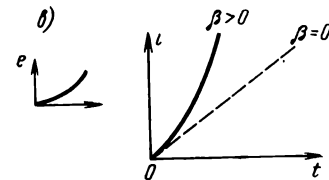
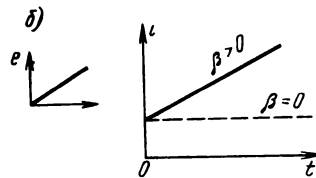
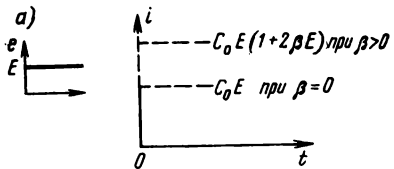


Рис. P 6.23

6.32. Исходное дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\frac{d}{dt} f(u) + \frac{1}{L} u = \frac{1}{L} E, \quad u(0) = 0^1).$$

В данном случае:

$$f(u) = I_0 \ln(1 + \beta u),$$

$$\frac{d}{dt} f(u) = I_0 \beta \frac{1}{1 + \beta u} \frac{du}{dt};$$

и так как $I_0 = 1/\beta R_0$, то

$$\frac{du}{dt} + \frac{R_0}{L} (1 + \beta u) = \frac{R_0}{L} (1 + \beta u) E.$$

Введя обозначения: $u/E = x$, $R_0/L = \frac{1}{T}$, $t/T = \tau$, $\beta E = a$, приведем уравнение к безразмерному виду:

$$\frac{dx}{d\tau} + (1 + ax)x = 1 + ax, \quad x(0) = 0,$$

или

$$\frac{dx}{ax^2 + (1-a)x - 1} = -d\tau.$$

Вычислив встретившийся табличный интеграл (см. П.16), найдем:

$$\frac{2}{a+1} \operatorname{Ar th} \frac{1-a+2ax}{1+a} = \tau + C.$$

Так как $\operatorname{Ar th} z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}$, можно написать

$$\frac{1}{1+a} \ln \frac{1+ax}{a(1-x)} = \tau + C.$$

Постоянная C определяется как

$$C = \frac{1}{1+a} \ln \frac{1}{a};$$

таким образом,

$$\tau = \frac{1}{1+a} \ln \frac{1+ax}{1-x}; \quad x = \frac{1 - e^{-(1+a)\tau}}{1 + a e^{-(1+a)\tau}}.$$

Для линейной цепи $a=0$ и $\tau = \ln \frac{1}{1-x}$, $x = 1 - e^{-\tau}$.

При $a=1$ $\tau = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \operatorname{Ar th} x$, $x = \operatorname{th} \tau$.

На рис. Р6.24 показаны графики процесса $x(\tau)$ при $a=0$ (линейная цепь) и при $a=1$ (нелинейная цепь).

¹⁾ Строго говоря, правую часть этого уравнения следовало бы записывать в виде: $\frac{1}{L} E \cdot \mathcal{1}(t)$; однако применяемая запись к недоразумению привести не может.

Составим теперь уравнение фазовой траектории. Приведем дифференциальное уравнение к безразмерному виду, воспользовавшись теми же обозначениями:

$$\frac{dx}{d\tau} + ax^2 + (1-a)x - 1 = 0.$$

Уравнение фазовой траектории запишется как

$$y = 1 - (1-a)x - ax^2.$$

Графики, построенные по этому выражению для нескольких значений a , даны на рис. P6.25.

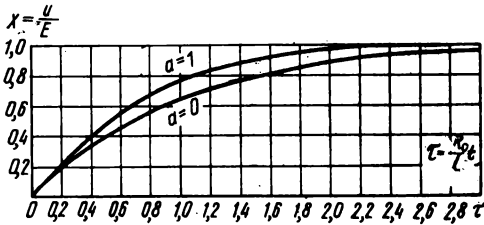


Рис. P6.24

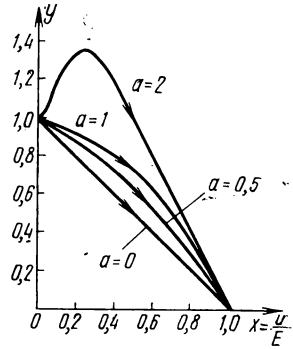


Рис. P6.25

6.33. В данном случае:

$$\frac{dx}{d\tau} = 1 + x - 2x^2, \quad \tau = \int_0^{1/2} \frac{dx}{1 + x - 2x^2}.$$

Вычисляя интеграл, получаем

$$\tau = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{-4x + 1 - 3}{-4x + 1 + 3} \right|^{1/2} \Big|_0^{1/2} = \frac{1}{3} \ln 4 = 0,463.$$

Так как $\tau = t R_0/L$, $t = 0,463 L/R_0$.

6.34. Исходное дифференциальное уравнение теперь нужно составить относительно тока i :

$$L \frac{di}{dt} + u = E,$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{L} \frac{1}{\beta} (e^{i/I_0} - 1) = \frac{1}{L} E.$$

Для приведения к безразмерному виду введем обозначения: $i/I_0 = x$, $\beta L_0 I_0 = T$, $t/T = \tau$, $\beta E = A$; дифференциальное уравнение при этом переписется в форме

$$\frac{dx}{d\tau} + e^x = A + 1, \quad x(0) = 0.$$

Для линейной цепи по условию:

$$e^x \approx 1 + x, \quad \frac{dx}{d\tau} + x = A,$$

$$x = A(1 - e^{-\tau}), \quad i = \beta I_0 E \left(1 - e^{-\frac{t}{\beta L I_0}}\right).$$

Решим теперь нелинейное уравнение различными методами. Сначала воспользуемся косвенным решением, т. е. рассмотрим фазовое изображение $y(x)$: $y = A + 1 - e^x$, $x > 0$. Сравнив его с фазовым изображением для линейной цепи (табл. 6.1) $y = A - x$, $x > 0$, легко видеть, что скорость нарастания тока в нелинейной цепи при всех x и A ниже скорости в линейной цепи; в самом деле,

$$\begin{aligned} y_{\text{л}} - y_{\text{нел}} &= A - x - (A + 1 - e^x) = -x - 1 + e^x = \\ &= -x - 1 + \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots\right) = \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots > 0, \quad x > 0. \end{aligned}$$

Графики фазовых изображений, а также соответствующих им кривых переходных процессов, которые будут найдены ниже, изображены на рис. P6.26.

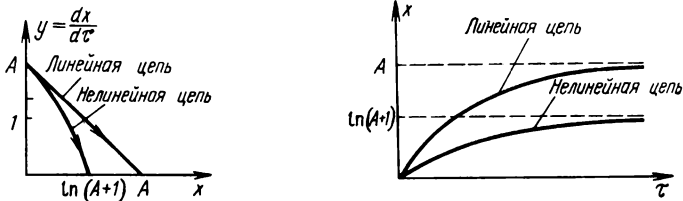


Рис. P6.26

Обратимся теперь к прямому решению. Исходное дифференциальное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными $dx/(A+1-e^x) = d\tau$. По (П.16) находим

$$\int \frac{dx}{a + b e^{mx}} = \frac{1}{am} [mx - \ln(a + b e^{mx})];$$

в данном случае

$$\tau = \frac{1}{A+1} [x - \ln(A + 1 - e^x)] + C.$$

Так как при $\tau=0$ $x=0$, то $C = \ln[A/(A+1)]$, т. е.

$$\tau = \frac{1}{A+1} [x - \ln(A + 1 - e^x) + \ln A]$$

или

$$\tau = \frac{1}{A+1} \left[x - \ln \frac{A + 1 - e^x}{A} \right].$$

Последнее выражение можно обратить, т. е. представить в виде функции $x(\tau)$. В результате преобразований получим:

$$(A + 1) \tau = x - \ln \frac{A + 1 - e^x}{A},$$

$$A + 1 - e^x = A e^x e^{-(A+1)\tau},$$

$$x = \ln \frac{1 + A}{1 + A e^{-(A+1)\tau}}.$$

Найденное выражение и представляет собой точное решение заданного уравнения (рис. Р6.26). Возвращаясь к первоначальным символам, запишем его в следующем виде:

$$i = I_0 \ln \frac{1 + \beta E}{1 + \beta E e^{-\frac{(\beta E + 1)t}{\beta L I_0}}}.$$

6.35. Найдем выражение вольтамперной характеристики:

$$i = \int \frac{1}{R} du = \int \frac{1 + q^2 u^2}{R_0} du = \frac{1}{R_0} u + \frac{q^2}{3 R_0} u^3 + C.$$

Так как при $u=0$ $i=0$, то и $C=0$. Дифференциальное уравнение $L di/dt + u = E$ после подстановки $i(u)$ приобретает вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{R_0} u + \frac{q^2}{3 R_0} u^3 \right) + \frac{1}{L} u = \frac{1}{L} E,$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{R_0}{L} \frac{u - E}{1 + q^2 u^2} = 0.$$

Введя обозначения: $qu = x$, $qE = b$, $L/R_0 = T$, $t/T = \tau$, дифференциальное уравнение легко привести к безразмерной форме

$$\frac{dx}{d\tau} + \frac{x - b}{1 + x^2} = 0, \quad \frac{1 + x^2}{x - b} dx = -d\tau.$$

После интегрирования получим

$$\ln(x - b) + \frac{1}{2}(x - b)^2 + 2b(x - b) + b^2 \ln(x - b) + C = -\tau.$$

Определив постоянную C (при $\tau=0$ $x=0$) и совершив небольшие преобразования, найдем

$$(1 + b^2) \ln \left(1 - \frac{x}{b} \right) + \frac{x^2}{2} + bx = -\tau.$$

Решить последнее уравнение относительно x не удастся, и поэтому будем считать последнее выражение окончательным; запишем его в следующем виде:

$$\tau = -(1 + b^2) \ln \left(1 - \frac{x}{b} \right) - bx - \frac{1}{2} x^2.$$

Для линейной цепи $q=0$, $b=qE=0$, $x/b = qu/qE = u/E$, т. е.

$$\tau = -\ln \left(1 - \frac{u}{E} \right),$$

$$u = E(1 - e^{-\tau}) = E \left(1 - e^{-\frac{R_0}{L} t} \right).$$

На рис. Р6.27 изображены графики переходных процессов для нелинейной цепи при $b=q$, $E=1$ и для линейной цепи при $q=0$.

6.36. Исходное дифференциальное уравнение

$$L \frac{di}{dt} + u = E, \quad i \geq 0, \quad i(0) = 0$$

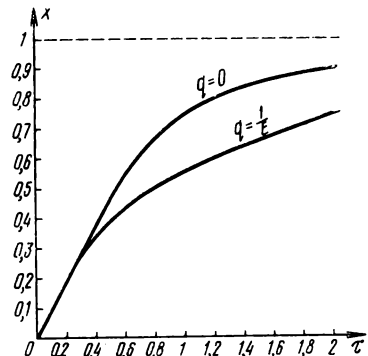


Рис. Р6.27

целесообразно приводить к безразмерному виду для каждого случая в отдельности:

$$1) \quad L \frac{di}{dt} + ai^2 = E; \quad \frac{di}{dt} + \frac{a}{L} i^2 = \frac{E}{L}.$$

Для приведения к безразмерному виду примем масштаб для тока I_0 , который определим равенством $E = aI_0^2$, $I_0 = \sqrt{E/a}$. Введем обозначения: $i/I_0 = x^2$, $LI_0/E = T$, $t/T = \tau$, $I_0^2 a/E = b$; теперь исходное уравнение переписется в виде

$$\frac{dx}{d\tau} + bx^2 = 1.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим:

$$\frac{dx}{1 - bx^2} = d\tau, \quad \tau = -\frac{1}{2b} \ln \left| \frac{1 - bx}{1 + bx} \right|.$$

Так как $\text{Ar th } z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}$, при помощи временного обозначения $z = -bx$ легко получить

$$b\tau = -\text{Ar th}(-bx) = \text{Ar th } bx, \quad x = \frac{1}{b} \text{th } b\tau.$$

Возвращаясь к первоначальным символам, получаем

$$i = \frac{E}{aI_0} \text{th} \left(\frac{I_0 a}{L} t \right).$$

2) В уравнении

$$L \frac{di}{dt} + bi^3 = E$$

примем новый масштаб для тока I_0 , определяемый равенством $E = bI_0^3$, $I_0 = \sqrt[3]{E/b}$. Здесь нужно ввести другие обозначения: $i/I_0 = x$, $LI_0/E = T$, $t/T = \tau$, $bI_0^3/E = B$; при этом дифференциальное уравнение запишется в виде

$$\frac{dx}{d\tau} + Bx^3 = 1.$$

Разделяя переменные, приходим к интегралу

$$\tau = \int \frac{dx}{1 - Bx^3}.$$

По табл. П.16 находим:

$$\int \frac{dz}{1 - z^3} = \frac{1}{3} \ln \frac{\sqrt{1+z+z^2}}{1-z} + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{arc tg} \frac{z\sqrt{3}}{2+z}.$$

Введя временные обозначения: $Bx^3 = z^3$, $z = \sqrt[3]{B}x$, $dx = (1/\sqrt[3]{B})dz$, запишем:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt[3]{B}} \left[\frac{1}{3} \ln \frac{\sqrt{1 + B^{1/3}x + B^{2/3}x^2}}{1 - B^{1/3}x} + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{arc tg} \frac{\sqrt{3} B^{1/3} x}{2 + B^{1/3} x} \right].$$

Перед тем как вернуться к первоначальным символам, целесообразно ввести еще одно обозначение:

$$\sqrt[3]{B} = B^{1/3} = (b I_0^3 / E)^{1/3} = (b/E)^{1/3} I_0 = A I_0, \text{ т. е. } A = (b/E)^{1/3}. \text{ Теперь}$$

$$\tau = \frac{1}{A I_0} \left[\frac{1}{3} \ln \frac{\sqrt{i + Ai + A^2 i^2}}{1 - Ai} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3} Ai}{2 + Ai} \right]$$

или

$$t = \frac{L}{AE} \left[\frac{1}{3} \ln \frac{\sqrt{i + Ai + A^2 i^2}}{1 - Ai} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3} Ai}{2 + Ai} \right].$$

В данном случае не удается обратить решение, т. е. найти функцию $i(t)$. На рис. P6.28 в обобщенных координатах (τ, x) даны кривые переходных процессов в цепях $L, R(i)$ с характеристиками $u=Ri, u=ai^2, u=bi^3$.

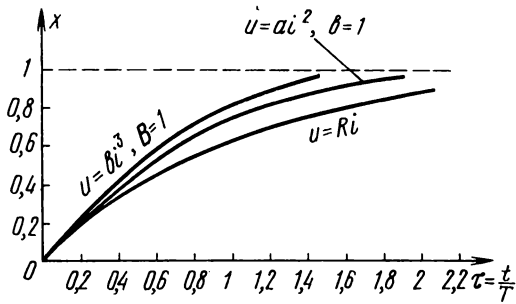


Рис. P6.28

6.37. Исходное дифференциальное уравнение имеет вид

$$L \frac{di}{dt} + Ri + u(i) = E,$$

где $u(i)$ — напряжение на диоде, которое определяется как обратная функция заданной характеристики.

Для первого участка ¹⁾:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i + \frac{1}{L} \frac{10^3}{1,5} i = \frac{1}{L} E.$$

Подставляя численные значения, находим

$$\frac{di}{dt} + \frac{1000}{100} i + \frac{1}{100} \cdot \frac{10^3}{1,5} i = \frac{1}{100} \cdot 100.$$

Интегрируя, получаем $i = C_1 e^{-16,67t} + 0,060$. Определив постоянную C_1 из условия: при $t=0$ $i=0$, запишем

$$i = 60 (1 - e^{-16,67t}).$$

Это выражение имеет силу на участке $0 < i < 18$ мА. Подставив это значение в последнюю формулу, найдем, что время, соответствующее росту тока от нуля до 18 мА, примерно равно $t_1 = 0,02$ с.

¹⁾ В последнее слагаемое нужно ввести множитель 10^3 , так как ток выражен в миллиамперах, а параметры L и R — через амперы.

Для второго участка:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i + \frac{1}{L} \left(\frac{30 \cdot 10^{-3} + i}{4 \cdot 10^{-3}} \right) = \frac{1}{L} E,$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{1000}{100} i + \frac{1}{100} \left(\frac{30 \cdot 10^{-3} + i}{4 \cdot 10^{-3}} \right) = \frac{1}{100} \cdot 100,$$

$$\frac{di}{dt} + 12,5 i = 0,925.$$

Интегрируя, находим $i = C_2 e^{-12,5t} + 0,074$. Постоянная C_2 определяется из условия: при $t = 0,02$ $i \approx 18$ мА; окончательно имеем

$$i = 73(1 - e^{-12,5t}).$$

Итак,

$$\begin{aligned} i &= 60(1 - e^{-16,67t}) && \text{при } 0 < t < 0,02 \text{ с,} \\ & && 0 < i < 18 \text{ мА;} \\ i &= 73(1 - e^{-12,5t}) && \text{при } t > 0,02 \text{ с,} \\ & && i > 18 \text{ мА.} \end{aligned}$$

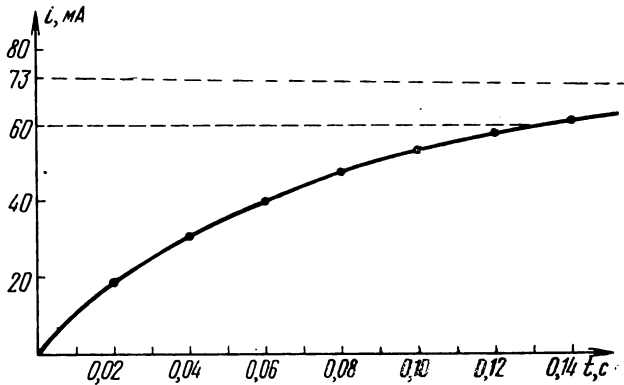


Рис. Р6.29

График переходного процесса $i(t)$, построенный по полученным формулам, дан на рис. Р6.29. Обратим внимание на то, что для кривой первого участка ($0 < t < 0,02$ с) установившееся значение тока было бы равно 60 мА, а для второго ($t > 0,02$ с) 73 мА.

6.38. Исходное дифференциальное уравнение имеет вид:

$$L \frac{di}{dt} + u = E.$$

Так как $i = Au^{3/2} = AE^{3/2} u^{3/2} / E^{3/2}$, удобно ввести следующие обозначения: $AE^{3/2} = I_0$, $u/E = x$. Замечая, что

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{i}{I_0} \right) = \frac{3}{2} x^{1/2} \frac{dx}{dt},$$

исходное дифференциальное уравнение перепишем в форме

$$\frac{L I_0}{E} \frac{3}{2} x^{1/2} \frac{dx}{dt} + \frac{u}{E} = 1.$$

Введя дополнительные обозначения $\frac{3}{2} \frac{L I_0}{E} = T$, $\frac{t}{T} = \tau$, получим

$$x^{1/2} \frac{dx}{d\tau} + x = 1.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим:

$$\tau = \int \frac{x^{1/2} dx}{1-x},$$

$$\tau = 2 \left(-\sqrt{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right).$$

Найти обратную функцию здесь не удастся, и последнее выражение является окончательным. Возвращаясь к первоначальным символам, запишем

$$t = 3 \frac{L I_0}{E} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{\frac{u}{E}}}{1 - \sqrt{\frac{u}{E}}} - \sqrt{\frac{u}{E}} \right).$$

На рис. P6.30 дан график переходного процесса.

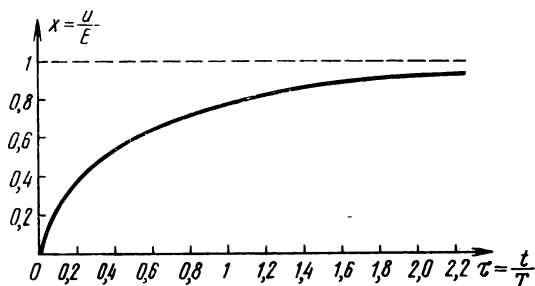


Рис. P 6.30

Укажем еще, что так как $\frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z} = \text{Ar th } z$, полученное решение можно записать и в виде:

$$\tau = 2(-\sqrt{x} + \text{Ar th } \sqrt{x}).$$

6.39. Составим дифференциальное уравнение:

$$\frac{1}{C} \int i dt + u = E \cdot 1(t),$$

$$\frac{1}{C} (S u + a u^2) + \frac{du}{dt} = E \delta(t), \quad u(0-) = 0.$$

Это дифференциальное уравнение эквивалентно следующему (см. стр. 174—175):

$$\frac{du}{dt} + \frac{S}{C} u + \frac{a}{C} u^2 = 0, \quad u(0_+) = E.$$

Приведем уравнение к безразмерному виду: введем обозначения $u/E = x$, $C/S = T$, $t/T = \tau$, $aE/C = A$; теперь уравнение примет вид:

$$\frac{dx}{d\tau} + x + Ax^2 = 0, \quad x(0) = 1.$$

Будем искать решение в виде обратной функции $\tau(x)$:

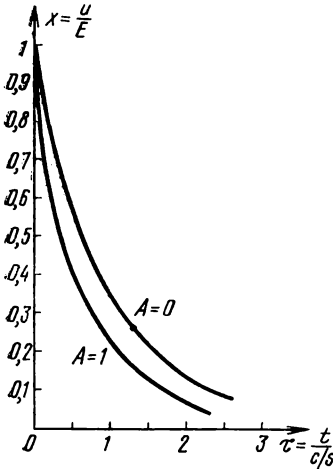


Рис. Р 6.31

$$\tau = - \int \frac{dx}{x + Ax^2} = \ln \frac{Ax + 1}{Ax} + K,$$

$$K = - \ln \frac{A + 1}{A},$$

$$\tau = \ln \frac{Ax + 1}{Ax} - \ln \frac{A + 1}{A} = \ln \frac{Ax + 1}{x(A + 1)}.$$

Данное уравнение легко решить относительно x :

$$x = \frac{1}{(A + 1)e^{\tau} - A}$$

или

$$x = \frac{e^{-\tau}}{A + 1 - Ae^{-\tau}} = \frac{e^{-\tau}}{1 + A(1 - e^{-\tau})}.$$

Графики, соответствующие последнему выражению при $A=0$ и $A=1$, даны на рис. Р6.31.

Теперь найдем напряжение u_C , а затем ток i .

Так как $u_C = E - e$, то

$$\frac{u_C}{E} = 1 - \frac{u}{E} = 1 - x = 1 - \frac{e^{-\tau}}{1 + A(1 - e^{-\tau})}$$

или

$$\frac{u_C}{E} = 1 - \frac{1}{(A + 1)e^{\tau} - A}.$$

Ток i выражается так:

$$i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{C}{S} SE \frac{d \frac{u_C}{E}}{dt} ES \frac{dz}{d\tau},$$

где $z = u_C/E$,

$$\text{Найдем } dz/d\tau: \frac{dz}{d\tau} = \frac{(A + 1)e^{\tau}}{[(A + 1)e^{\tau} - A]^2}.$$

$$\text{Следовательно, } i = ES \frac{(A + 1)e^{\tau}}{[(A + 1)e^{\tau} - A]^2}.$$

6.40. Так как резистор управляется током, составим исходное дифференциальное уравнение относительно тока:

$$u + u_C = E \cdot 1(t),$$

$$Ri + bi^2 + \frac{1}{C} \int i dt = E \cdot 1(t), \quad i(0) = 0,$$

$$R \frac{di}{dt} + 2bi \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = E \delta(t), \quad i(0-) = 0.$$

Это уравнение эквивалентно однородному (см. стр. 174—175):

$$R \frac{di}{dt} + 2bi \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0, \quad i(0+) = I_0, \quad I_0 > 0,$$

где I_0 определяется из уравнения $RI_0 + bI_0^2 = E$, откуда

$$I_0 = \sqrt{\left(\frac{R}{2b}\right)^2 + \frac{E}{b}} - \frac{R}{2b}.$$

Введем обозначения $x = i/I_0$, $RC = T$, $t/T = \tau$, $2bCI_0 = a$ и перепишем уравнение в безразмерном виде

$$\frac{dx}{d\tau} (1 + ax) + x = 0, \quad x(0) = 1.$$

Будем искать решение в виде обратной функции $\tau(x)$:

$$\tau = - \int \frac{1 + ax}{x} dx, \quad \tau = -(\ln x + ax) + k, \quad k = a, \quad \tau = -\ln x + a(1 - x).$$

При $a=0$ $x = e^{-\tau}$.

Напряжения u и u_C можно найти из равенств: $u = Ri + bi^2$, $u_C = E - u$.

6.41. Исходное дифференциальное уравнение записывается как

$$L \frac{di}{dt} + a^2 i^2 = E kt^2, \quad t > 0, \quad i(0) = 0.$$

Введем нормирующий ток I_0 , который, вообще говоря, можно выбрать произвольно, и приведем уравнение к безразмерному виду

$$L I_0 \frac{d \frac{i}{I_0}}{dt} + a^2 I_0^2 \frac{i^2}{I_0^2} = E kt^2.$$

После введения обозначений: $i/I_0 = x$, $a^2 I_0^2/E = \beta^2$, $LI_0/E\beta^2 = T$, $t/T = \tau$, $kT^2/\beta^2 = p^2$, уравнение можно представить в форме:

$$\frac{dx}{d\tau} + x^2 = p^2 \tau^2, \quad \tau > 0, \quad x(0) = 0.$$

Непосредственно данное уравнение проинтегрировать нельзя — это уравнение типа Рикатти (см. П.15). При помощи метода 4.1г, в котором используется подстановка $x = z/z$, $z = e^{\int x d\tau}$, можно свести данное нелинейное уравнение первого порядка к параметрическому второго порядка.

Так как $dx/d\tau = (\ddot{z}z - \dot{z}^2)/z^2$, то дифференциальное уравнение примет вид

$$\frac{d^2 z}{d \tau^2} - \rho^2 \tau^2 z = 0.$$

Начальные условия следует вводить с учетом равенства $z = e^{\int x d\tau}$, т. е.

$$\frac{d^2 z}{d \tau^2} - \rho^2 \tau^2 z = 0, \quad z(0) = 1.$$

Это уравнение также непосредственно не интегрируется, но его решение хорошо изучено ⁴⁾.

Решим уравнение первого порядка двумя методами: методом замораживания внешнего воздействия (метод 3.5) и методом последовательных приближений (метод 6.2).

По методу замораживания внешнего воздействия исходное дифференциальное уравнение следует переписать в виде

$$\frac{dx}{d \tau} + x^2 = \rho^2 \tau_i^2,$$

где τ_i — постоянные на конкретных участках.

Примем следующие границы «замороженных» участков: при $0 < \tau < 0,5$ $\tau_1 = 0$; при $0,5 < \tau < 1$ $\tau_2 = 0,5$; при $1,0 < \tau < 2$ $\tau_3 = 1$. Для упрощения расчета положим, что $\rho^2 = 1$. Соответствующие уравнения будут иметь вид:

$$\frac{dx_1}{d \tau} + x_1^2 = 0, \quad \frac{dx_2}{d \tau} + x_2^2 = 0,5^2, \quad \frac{dx_3}{d \tau} + x_3^2 = 1.$$

Уравнение

$$\frac{dx}{d \tau} + x^2 = A^2$$

интегрируется непосредственно методом разделения переменных:

$$\tau = \int \frac{dx}{A^2 - x^2} = \frac{1}{2A} \ln \left| \frac{x+A}{x-A} \right| + C.$$

Теперь решим уравнение

$$\frac{dx}{d \tau} + x^2 = \rho^2 \tau^2, \quad x(0) = 0$$

методом последовательных приближений. Перейдем к интегральному уравнению

$$x = \int_0^{\tau} (\rho^2 \tau^2 - x^2) d \tau.$$

Нулевое приближение: $x^{[0]} = 0$. Первое приближение:

$$x^{[1]}(\tau) = \int_0^{\tau} (\rho^2 \tau^2 - x_0^2) d \tau = \rho^2 \frac{\tau^3}{3}.$$

Второе приближение:

$$x^{[2]}(\tau) = \int_0^{\tau} \left(\rho^2 \tau^2 - \rho^4 \frac{\tau^6}{9} \right) d \tau = \rho^2 \frac{\tau^3}{3} - \rho^4 \frac{\tau^7}{63}.$$

⁴⁾ См., например, [П.21, стр. 529, 2.14].

Ограничимся вторым приближением; таким образом,

$$x(\tau) \approx p^2 \frac{\tau^3}{3} - p^4 \frac{\tau^7}{63}.$$

6.42. При помощи обозначений $(1/RC)t = \tau$, $au = x$, $aE = b$, $aRI_0 = p$ приведем уравнение к безразмерному виду

$$\frac{dx}{d\tau} + p e^x + x = b.$$

Уравнение фазовой траектории: $y = b - x - p e^x$. Фазовая траектория изображена на рис. P6.32.

Установившееся значение соответствует уравнению $y = 0$, т. е. $b - x_0 = p e^{x_0}$. Подставляя условия задачи, находим, что $b = 2$ и $p = 1$.

Решая уравнение $2 - x_0 = e^{x_0}$, получаем $x_0 = 0,44$. Следовательно,

$$u_0 = \frac{x_0}{a} = \frac{0,44}{10} = 0,044 \text{ В.}$$

6.43. При помощи обозначений $u_C/E = x$ $(1/RC_0)t = \tau$, $2aE = a$ исходное дифференциальное уравнение перепишем в виде

$$\frac{dx}{d\tau} + \frac{x}{1-ax} - \frac{1}{1-ax} = 0.$$

Уравнение фазовой траектории: $y = (1-x)/(1-ax)$. Установившееся значение напряжения можно определить из уравнения $(1-x_0)/(1-ax_0) = 0$; оказывает-

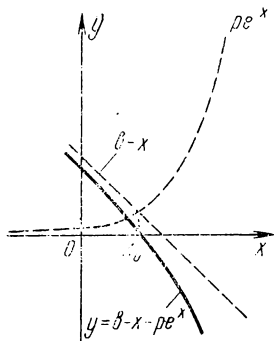


Рис. P 6.32

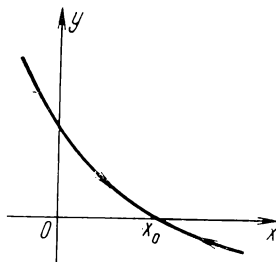


Рис. P 6.33

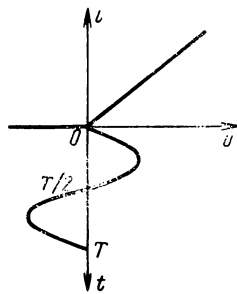


Рис. P 6.34

ся, что $x_0 = 1$ и не зависит от степени нелинейности, определяемой коэффициентом a ; $u_C \text{ уст} = E$.

График фазовой траектории дан на рис. P6.33.

6.44. Исходное дифференциальное уравнение составляется так же, как и в задаче 6.7; в данном случае оно будет иметь вид

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = \frac{1}{C} \varphi(e^{-u_C}) = \frac{1}{C} \varphi(U_m \sin \Omega t - u_C). \quad (1)$$

Проводя решение методом «припасовывания», будем рассматривать дифференциальное уравнение по участкам (рис. P6.34).

1) Отрезок времени, в течение которого $u > 0$, $\varphi(u) = Su$. Дифференциальное уравнение примет вид

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = \frac{1}{C} S U_m \sin \Omega t - \frac{1}{C} S u_C. \quad (2)$$

Для приведения к безразмерному виду введем обозначения:

$$\Omega t = \tau, \quad \frac{S}{\Omega C} = F, \quad \frac{u_C}{U_m} = y, \quad \frac{1}{RC\Omega} = \gamma, \quad \gamma + F = \rho. \quad (3)$$

Тогда получим

$$\frac{dy}{d\tau} + \rho y = F \sin \tau. \quad (4)$$

Решение ур-ния (4) известно:

$$y = e^{-\rho \tau} \left[F \int e^{\rho \tau} \sin \tau d\tau + C_1 \right].$$

Выполнив интегрирование, получим

$$y = e^{-\rho \tau} \left[F \frac{e^{\rho \tau}}{\rho^2 + 1} (\rho \sin \tau - \cos \tau) + C_1 \right].$$

Постоянная C_1 находится из условия: при $\tau=0$ $y=0$: $C_1 = F/(\rho^2 + 1)$, тогда

$$y = \frac{F}{\rho^2 + 1} [(\rho \sin \tau - \cos \tau) + e^{-\rho \tau}]. \quad (5)$$

По этому закону будет меняться безразмерное напряжение на конденсаторе в течение времени, при котором $u > 0$, т. е. пока правомерно пользование аппроксимирующей функцией в виде $\varphi(u) = Su$. Когда напряжение $u \leq 0$, необходимо пользоваться аппроксимирующей функцией $\varphi(u) = 0$. Найдем безразмерное время τ_1 , соответствующее переходу к другой аппроксимирующей функции.

Так как $u = e^{-u_C} = U_m \sin \Omega t - u_C$, то после введения обозначения $u/U_m = x$ получим $x = \sin \tau - y$.

В соответствии с изложенным найдем время τ_1 , при котором $x=0$, т. е. $y_1 = \sin \tau_1$. Подставляя значение y из ф-лы (5), получаем

$$\frac{\rho^2 + 1}{F} \sin \tau_1 = \rho \sin \tau_1 - \cos \tau_1 + e^{-\rho \tau_1}.$$

Последнее уравнение в общем виде решить относительно τ_1 трудно, поэтому подставим заданные условия для конкретной схемы:

$$F = \frac{S}{\Omega C} = \frac{10^{-3}}{10^3 \cdot 10^{-6}} = 1,$$

$$\gamma = \frac{1}{RC\Omega} = \frac{1}{10^3 \cdot 10^{-6} \cdot 10^3} = 1.$$

Тогда получим $3 \sin \tau_1 + \cos \tau_1 = e^{-2\tau_1}$.

Последнее уравнение можно переписать в виде $\sin(\tau_1 + 0,322) = 0,318 e^{-2\tau_1}$ и решить графически. Так как можно предположить, что τ_1 лежит вблизи π , допустимо разложить $e^{-\tau}$ в ряд и ограничиться первыми двумя членами. Выполнив соответствующие преобразования, найдем: $\tau_1 \approx 2,8$. С этого момента напряжение u становится меньше нуля и нужно пользоваться аппроксимацией $\varphi(u) = 0$.

2) Отрезок времени, в течение которого $u < 0$, $\varphi(u) = 0$. Дифференциальное уравнение будет иметь вид

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = 0$$

или

$$\frac{dy}{d\tau} + \gamma y = 0. \quad (6)$$

Решение этого уравнения

$$y = y_0 e^{-\gamma \tau}. \quad (7)$$

Значение y_0 определяется по ф-ле (5) при $\tau = \tau_1$, т. е.

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{F}{p^2 + 1} \{ (p \sin \tau_1 - \cos \tau_1) + e^{-p \tau_1} \} = \\ &= \frac{1}{5} (2 \sin 2,8 - \cos 2,8 + e^{-2 \cdot 2,8}) \approx 0,32. \end{aligned}$$

Таким образом, в течение времени, когда $u < 0$, безразмерное напряжение на конденсаторе будет меняться по закону

$$y \approx 0,32 e^{-\tau}. \quad (8)$$

Так будет продолжаться до момента τ_2 , когда напряжение вновь станет равным нулю; τ_2 можно найти из уравнения $\sin \tau_2 = 0,32 e^{-\tau_2}$. Решая это уравнение, получаем $\tau_2 \approx 6,61$.

Теперь можно построить график. В течение безразмерного времени $0 < \tau < 2,8$ безразмерное напряжение на конденсаторе y будет меняться в соответствии с ф-лой (5) по закону

$$y = \frac{1}{5} (2 \sin \tau - \cos \tau + e^{-2 \tau}).$$

В течение безразмерного времени $2,8 < \tau < 6,61$ безразмерное напряжение y будет меняться по закону (8).

На рис. Р6.35 выполнено построение для первого периода. Здесь же для сравнения дана кривая входного напряжения; напряжение на конденсаторе меняется по кривой OAB .

6.45. По условию должно выполняться равенство

$$i = \frac{d}{dt} [C(u) u] = p u \frac{du}{dt};$$

очевидно:

$$d[C(u) u] = p u du,$$

$$C(u) u = p \frac{u^2}{2} + k,$$

откуда

$$C(u) = p \frac{u}{2} + \frac{k}{u}.$$

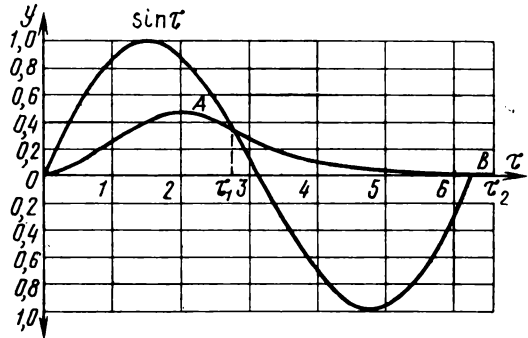


Рис. Р6.35

Постоянную k можно выбрать произвольно; выбираем $k=0$, окончательно имеем

$$C(u) = \frac{p}{2} u.$$

6.46. $C(u) = ku^2$.

6.47. Фазовое изображение: $y(x) = -x^2$. В данном случае $\lambda(x) = 1/x$. Выполняя интегрирование по формулам табл. 6.3, находим:

1) в цепи рис. 1: $f(x) = -\frac{1}{x^2} + x^2$;

2) в цепи рис. 2: $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$;

3) в цепи рис. 3: $z(x) = \frac{1}{2x^3} + \frac{\ln x}{x}$.

На рис. Р6.36 даны графики входного и выходного процессов и трех полученных характеристик.

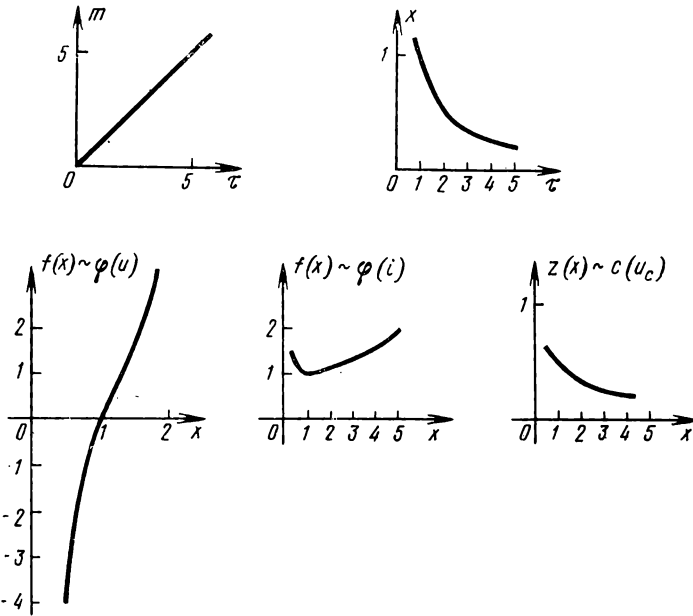


Рис. Р 6.36

6.48. Так как

$$i = k u \frac{du}{dt} = k \frac{1}{2} \left(\frac{du^2}{dt} \right),$$

достаточно входное напряжение возвести в квадрат, а затем продифференцировать.

6.49. Имея в виду, что

$$\frac{d}{dt} \ln [u_1(t)] = \frac{1}{u_1(t)} \dot{u}_1(t) = \frac{k}{u_1(t)},$$

легко получить (с точностью до постоянного множителя)

$$\frac{u_2(t)}{u_1(t)} = u_2(t) \frac{d}{dt} \ln [u_1(t)].$$

Соответствующая функциональная схема изображена на рис. Р6.37.

6.50. Задача не имеет однозначного решения. Рассмотрим один из возможных способов. Из двух равенств

$$s(t) = s(t; a, a_n), \quad \dot{s}(t) = \dot{s}(t; a, a_n),$$

в которых вектор a символизирует совокупность всех параметров, за исключением параметра a_n , определяется a_n через текущие значения s и \dot{s} .

Этот способ далеко не всегда приводит к цепи, содержащей только резистивные элементы и дифференциатор; часто в схему должны входить элементы, зависящие от времени t , явно, т. е. цепь является параметрической. Так, для измерения параметра α в сигнале $s = A e^{-\alpha t}$ легко получить алгоритм $\alpha = -\dot{s}/s$, для реализации которого нужен делитель, представляющий собой параметрическую цепь (см. разд. 5).

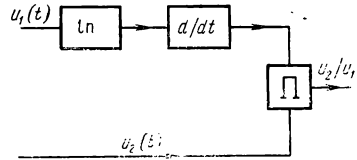


Рис. Р 6.37

6.51. Напряжение на катушке

$$u_L = \frac{d}{dt} [\phi(i)] = \frac{d}{dt} (L_0 i + \alpha i^3).$$

Так как $j = J \sin \omega t$, $i = j$, то

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (L_0 J \sin \omega t + \alpha J^3 \sin^3 \omega t) = \\ & = \frac{d}{dt} \left(L_0 J \sin \omega t + \frac{3}{4} \alpha J^3 \sin \omega t - \frac{1}{4} J^3 \alpha \sin 3 \omega t \right). \end{aligned}$$

Теперь можно воспользоваться символическим методом и заменить последнее выражение следующим:

$$\begin{aligned} & p \left(L_0 J e^{i \omega t} + \frac{3}{4} J^3 \alpha e^{i \omega t} - \frac{1}{4} \alpha J^3 e^{i 3 \omega t} \right) = \\ & = i \omega \left(L_0 J + \frac{3}{4} J^3 \alpha \right) e^{i \omega t} - i \frac{3}{4} \omega \alpha J^3 e^{i 3 \omega t}. \end{aligned}$$

Принимая искомое напряжение в виде $u_L = U_L e^{i \omega t}$ и сравнивая левую и правую части, получаем

$$U_L = i \omega J \left(L_0 + \frac{3}{4} \alpha J^2 \right).$$

Введем «среднюю индуктивность»

$$L_{cp} = L_0 + \frac{3}{4} \alpha J^2.$$

Теперь амплитуду первой гармоники напряжения на катушке, находящейся под воздействием гармонического тока с частотой ω и амплитудой I , можно рассчитать по формуле: $\dot{U} = i \omega L_{cp} I$, причем L_{cp} зависит от вида нелинейности и амплитуды задающего тока. Для практических измерений L_{cp} предложены простые схемы [54].

6.52. Ток через конденсатор

$$i = \frac{d}{dt} [q(u)] = \frac{d}{dt} (C_0 u + \beta u^3).$$

Так как $u = U \sin \omega t = U \sin \tau$, то

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (C_0 U \sin \omega t + \beta U^3 \sin^3 \omega t) = \\ & = \frac{d}{dt} \left(C_0 U \sin \omega t + \frac{3}{4} \beta U^3 \sin \omega t - \frac{1}{4} \beta U^3 \sin 3 \omega t \right). \end{aligned}$$

Теперь можно воспользоваться символическим методом и заменить последнее выражение следующим:

$$\begin{aligned} & p \left(C_0 U e^{i \omega t} + \frac{3}{4} \beta U^3 e^{i \omega t} - \frac{1}{4} \beta U^3 e^{i 3 \omega t} \right) = \\ & = i \omega \left(C_0 U + \frac{3}{4} \beta U^3 \right) e^{i \omega t} - i \frac{3}{4} \beta \omega U^3 e^{i 3 \omega t}. \end{aligned}$$

Принимая искомое решение в виде $i = \dot{I} e^{i \omega t}$ и сравнивая левую и правую части, получаем

$$\dot{I} = i \omega U \left(C_0 + \frac{3}{4} \beta U^2 \right).$$

Введем «среднюю емкость» $C_{cp} = C_0 + \frac{3}{4} \beta U^2$.

Теперь амплитуду первой гармоники тока через конденсатор, находящийся под воздействием гармонического напряжения с частотой ω и амплитудой I , можно рассчитать по формуле: $\dot{I}_1 = i \omega C_{cp} U$, причем C_{cp} зависит от вида нелинейности и амплитуды задающего напряжения.

6.53. Примем, что решение исходного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt} [(L_0 + \alpha i^2) i] + R i = U \sin \omega t$$

ищется в виде $i = I \sin(\omega t + \varphi)$ и перепишем это уравнение следующим образом:

$$\frac{d}{dt} [L_0 I \sin(\omega t + \varphi) + \alpha I^3 \sin^3(\omega t + \varphi)] + R I \sin(\omega t + \varphi) = U \sin \omega t.$$

Раскроем $\sin^3(\omega t + \varphi)$:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[L_0 I \sin(\omega t + \varphi) + \frac{3}{4} \alpha I^3 \sin(\omega t + \varphi) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} \alpha I^3 \sin^3(\omega t + \varphi) \right] + R I \sin(\omega t + \varphi) = U \sin \omega t. \end{aligned}$$

Теперь можно воспользоваться символическим методом: будем вместо $\sin \omega t$ писать $e^{i \omega t}$, а вместо $I \sin(\omega t + \varphi)$ будем писать $I e^{i \varphi} e^{i \omega t} = I e^{i \omega t}$. В результате получим

$$p L_0 \dot{I} e^{i \omega t} + p \frac{3}{4} \alpha I^2 e^{i \omega t} - p \frac{1}{4} \alpha I^3 e^{i 3 \varphi} e^{i 3 \omega t} + R \dot{I} e^{i \omega t} = U e^{i \omega t}.$$

Последняя запись подробно приведена для того, чтобы подчеркнуть, что во втором члене уравнения фаза φ приписывается только одному сомножителю из трех в выражении I^3 .

Сокращая на $e^{i\omega t}$, отбрасывая третий член, дифференцируя и вынося за скобки I , находим

$$i \left(R + i\omega L_0 + i\omega \frac{3}{4} \alpha I^2 \right) = U \quad \text{или} \quad i = \frac{U}{z_{cp}} \quad \bullet$$

где $z_{cp} = R + i\omega L_{cp}$, $L_{cp} = L_0 + \frac{3}{4} \alpha I^2$.

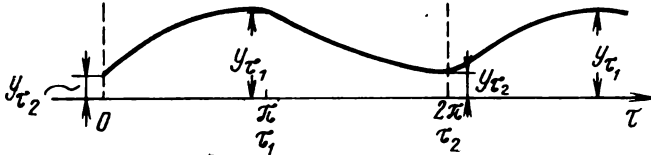


Рис. Р 6.38

6.54. В установившемся режиме (рис. Р6.38) период колебания (в безразмерном выражении) состоит из неизвестных отрезков τ_1 и τ_2 :

$$\Omega T = \tau_1 + \tau_2 = 2\pi. \quad (1)$$

В течение времени $0 < \tau < \tau_1$

$$y = \frac{1}{5} (2 \sin \tau - \cos \tau) + C_1 e^{-2\tau}. \quad (2)$$

В течение времени $\tau_1 < \tau < \tau_2$

$$y = y_{\tau_1} e^{-\tau}. \quad (3)$$

Неизвестными здесь являются C_1 , y_{τ_1} , τ_1 и τ_2 .

В решении задачи 6.44 составлялись два уравнения для определения τ_1 и τ_2 ; запишем аналогичные уравнения:

$$\frac{1}{5} (3 \sin \tau_1 + \cos \tau_1) - C_1 e^{-2\tau_1} = 0, \quad (4)$$

$$\sin \tau_2 - y_{\tau_1} e^{-\tau_2} = 0. \quad (5)$$

В установившемся режиме

$$\tau_1 + \tau_2 = 2\pi, \quad (6)$$

Для определения четырех неизвестных необходимо составить еще одно уравнение. Из рис. Р6.38 видим, что в точке 0 напряжения, определенные по выражениям (2) и (3), равны

$$-\frac{1}{5} + C_1 = y_{\tau_1} e^{-\tau_2}. \quad (7)$$

Система уравнений (4), (5), (6) и (7) дает возможность определить все постоянные; выражения (2) и (3) описывают законы изменения напряжения в установившемся режиме.

6.55. Исходное дифференциальное уравнение

$$Ri = \frac{1}{C} \int i dt = \mathcal{E} \sin \omega t$$

¹⁾ В данном случае понятие «нуль» является условным, т. е. соответствует началу любого периода установившегося колебания (рис. Р6.38).

после дифференцирования и введения обозначений $t/RC = \tau$, $iR/\mathcal{E} = x$, $\Omega RC = p$ легко привести к виду

$$\frac{dx}{d\tau} + x = p \cos p\tau.$$

Уравнение изоклины ($dx/d\tau = k$): $x = p \cos p\tau - k$, а при заданных условиях ($p=1$) $x = \cos \tau - k$.

6.56. Введя обозначения $\omega t = \tau$, $u/U_0 = x$, $\beta U_0^2/\omega = A$, $1/\omega RC = b$, дифференциальное уравнение можно привести к виду

$$\frac{dx}{d\tau} + bx + Ax^3 = b \sin \tau.$$

Заменяя $dx/d\tau = k$, получаем уравнение изоклины:

$$k + bx + Ax^3 = b \sin \tau.$$

В данном случае удобно решить это уравнение относительно τ :

$$\sin \tau = (k + bx + Ax^3)/b \quad \text{или} \quad \tau = \arcsin \left[\frac{k}{b} + \left(x + \frac{A}{b} x^3 \right) \right].$$

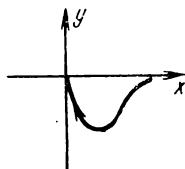
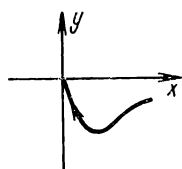


Рис. Р 6.39

Задавая значениями x при определенных значениях k , можно построить кривые $\tau(x)$ и $x(\tau)$ и далее вести расчет обычным способом.

6.57. На фазовой плоскости кривые $y(x)$ имеют вид:

$$y = -\frac{x}{1 + Ax}, \quad y = -x e^{-\alpha x};$$

обе они характеризуются устойчивым узлом (рис. Р6.39).

На плоскости диссипанта:

$$\delta = -\frac{1}{1 + Ax}, \quad \delta = -e^{-\alpha x};$$

при $x > 0$ кривые $\delta(x)$ лежат только в четвертом квадранте, т. е. $\delta < 0$ и решение устойчиво.

6.58. Решение является неустойчивым. Действительно, при $x > 0$ (а при полученном решении $\dot{x} > 0$ для любого τ) фазовое изображение, определяемое равенством $y(x) = \sqrt{x}$, находится в первом квадранте и имеет положительный наклон (рис. Р6.40а).

На плоскости диссипанта кривая $\delta(x) = 1/\sqrt{x}$ лежит в первом квадранте (рис. Р6.40б), т. е. $\delta > 0$ и, следовательно, решение неустойчиво.

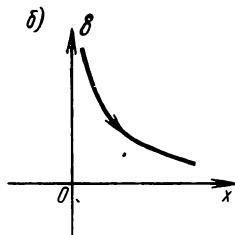
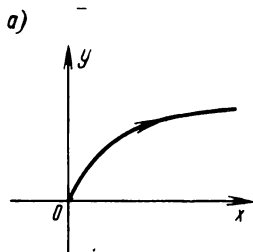


Рис. Р 6.40

6.59. Построив фазовые изображения (рис. P6.41) убеждаемся, что первые два решения устойчивы, а третье — неустойчиво.

При помощи диссипанта тот же ответ можно получить без построений, так как в первых двух случаях $\delta < 0$, а в третьем $\delta > 0$.

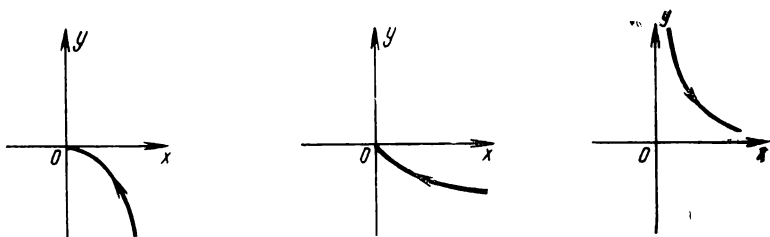


Рис. P 6.41

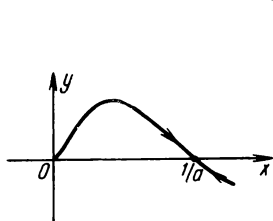


Рис. P6.42

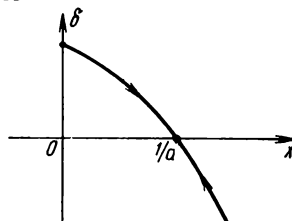


Рис. P 6.43

6.60. Точками равновесия являются точки $x=0$ и $x=1/a$. Построив график фазового изображения (рис. P6.42) $y = (1 - a^2x^2)x$, легко убедиться в том, что устойчивой может быть только точка $x=1/a$.

Ответ на плоскости диссипанта дан рис. P6.43. Однако и без рисунка ясно, что так как $\delta = 1 - a^2x^2$ при $0 < x < 1/a$ больше нуля, то в этой области процесс неустойчив, а при $x > 1/a$, $\delta < 0$ процесс устойчив и, следовательно, точка $x=1/a$ является устойчивой.

6.61. При помощи диссипанта ответ можно получить непосредственно. Выписываем выражение диссипанта $\delta = -1 + x - x^2 - x^3$ и убеждаемся в том, что при всех $x > 0$ $\delta < 0$ и, следовательно, решение устойчиво.

7

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Общие сведения

К параметрическим цепям первого порядка относятся цепи, содержащие один энергоемкий элемент (конденсатор или катушку) и резистивные элементы, причем хотя бы один из элементов цепи является параметрическим. Если же хотя бы один из элементов — нелинейно-параметрический, то цепь называется нелинейно-параметрической. В равной степени цепь можно считать нелинейно-параметрической, если один из элементов является параметрическим и один — нелинейным.

Дифференциальные уравнения параметрических цепей имеют вид (или могут быть приведены к такому виду):

$$\frac{dx}{d\tau} + a(\tau)x = f(\tau). \quad (7.1)$$

Нелинейно-параметрическое дифференциальное уравнение, если оно разрешено относительно производной, в общем случае записывается следующим образом:

$$b(x, \tau) \frac{dx}{d\tau} + a(x, \tau) = f(\tau); \quad (7.2)$$

Если же уравнение не разрешено относительно производной, то оно записывается в виде (6.4).

Параметрические уравнения первого порядка, как правило, допускают непосредственное интегрирование (иногда после несложных преобразований), и их решения можно представить в квадратурах. Однако это не означает, что после записи в квадратуре решение задачи следует считать завершенным, так как, во-первых, оно часто не выражается в известных функциях и, во-вторых, его форма может не соответствовать конечным целям исследования. Например, полученное в замкнутом виде выражение трудно поддается спектральному анализу, проверке на устойчивость и т. д. В связи с этим для решения указанных уравнений и изучения пара-

метрических цепей первого порядка разработаны специальные методы и приемы (для радиотехнических приложений); наиболее распространенным из них и посвящен настоящий раздел. Те параметрические цепи, которые описываются сравнительно легко решаемыми дифференциальными уравнениями либо уравнениями, подробно изучаемыми в распространенных математических руководствах, здесь не рассматриваются.

Для нелинейно-параметрических уравнений справедливы все положения разд. 6, посвященного нелинейным цепям. Следует лишь отметить, что здесь почти всегда приходится ориентироваться на приближенные решения, а также, что роль косвенных методов при решении и изучении этих уравнений существенно возрастает.

При классификации параметрических цепей следует учитывать форму внешнего воздействия и закон, по которому изменяется параметр элемента цепи. Здесь основное внимание уделяется моногармоническому закону изменения параметра и постоянному моногармоническому и полигармоническому воздействиям; однако рассматриваются также и другие законы изменения параметра и другие воздействия.

Нелинейно-параметрические цепи можно изучать только на основе аппарата дифференциальных уравнений; для исследования же параметрических цепей, являющихся линейными системами, можно привлечь также аппарат операционного исчисления и аппарат рядов и интеграла Фурье. Здесь используется только аппарат дифференциальных уравнений, так как аппарат операционного исчисления и др. требует большого вспомогательного (в том числе и справочного) материала, относящегося к линейным цепям¹⁾.

Параметрические цепи можно изучать как в плане анализа, так и в плане синтеза. Постановка задачи синтеза может иметь различные аспекты; некоторые из них здесь рассматриваются.

Анализ параметрических цепей первого порядка

Общий подход к анализу параметрических цепей первого порядка совпадает с общим подходом в решении параметрических уравнений первого порядка вида (7.1), который описан во всех математических руководствах. Он заключается в том, что сначала ищется решение однородного уравнения

$$\frac{dx}{d\tau} + a(\tau)x = 0,$$

а затем произвольная постоянная C заменяется на функцию $C(\tau)$, которая определяется после подстановки решения $x_{св}(\tau)$ однородного уравнения в исходное (метод Лагранжа — метод 2.4). Одно-

¹⁾ Рассмотрение параметрических цепей на основе аппарата операционного исчисления и др. можно найти в ряде монографий [67, 68, 50, 51, 71, 9], посвященных, главным образом, системам автоматического регулирования.

родные уравнения допускают непосредственное интегрирование, и их решение можно выразить в квадратурах. Как уже указывалось, такой подход не всегда приводит к приемлемым результатам, так как не всегда удается перейти от квадратур к удобным (приемлемым) формам решения.

По этим причинам для радиотехнических приложений разработаны специальные приемы и методы решения указанных уравнений. Наибольший практический интерес представляет анализ параметрических цепей при постоянном и моногармоническом воздействии, так как все другие воздействия можно свести к суперпозиции этих воздействий (см. ниже). Именно для них и при гармоническом законе изменения параметра разработан эффективный метод расчета, основанный на использовании специальных функций В. К. Туркина. Этот метод излагается ниже со всеми необходимыми для расчетов подробностями.

Дифференциальные уравнения многих применяющихся на практике параметрических цепей первого порядка можно привести (см. ниже, а также задачу 7.1) к следующему безразмерному виду:

$$\frac{dx}{d\tau} + a(1 + \mu \sin \tau)x = a e^{ib\tau}. \quad (7.3)$$

Напомним (см. разд. 1), что по отношению к внешнему воздействию можно применять символическую запись. Общее решение уравнения (7.4) известно:

$$x = e^{-\int a(1+\mu \sin \tau) d\tau} \left[\int a e^{ib\tau} e^{\int a(1+\mu \sin \tau) d\tau} d\tau + C \right]. \quad (7.4)$$

Интегралы в показателях экспоненты являются табличными:

$$x = e^{-a\tau} e^{a\mu \cos \tau} \left[\int a e^{ib\tau} e^{a\tau} e^{-a\mu \cos \tau} d\tau + C \right].$$

Оставшийся интеграл не берется в известных функциях. Воспользуемся разложением (см. разд. 3)

$$e^{\pm iz \cos \tau} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_{\pm n}(z) e^{in\tau}$$

и, обозначив

$$z = i a \mu, \quad (7.5)$$

перепишем последнее выражение в форме

$$\begin{aligned} x &= e^{-a\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_{-n}(z) e^{in\tau} \left[a e^{a\tau} e^{ib\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \frac{J_n(z)}{in + ib + a} e^{in\tau} + C \right] = \\ &= C e^{-a\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_{-n}(z) e^{in\tau} + a e^{ib\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_{-n}(z) e^{in\tau} \times \\ &\quad \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \frac{J_n(z)}{in + ib + a} e^{in\tau}. \end{aligned}$$

Постоянная C определяется из начальных условий; первый член этого выражения описывает свободный процесс, а второй — установившийся. Рассмотрим произведение рядов во втором члене:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_{-n}(z) e^{i n \tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \frac{J_n(z)}{i n + i b + a} e^{i n \tau} = \\ & = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^m \frac{J_n(z) J_{n-m}(z)}{i n + i b + a} \right) e^{i m \tau} = \\ & = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^{m-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(z) J_{n-m}(z)}{n - (i a - b)} e^{i m \tau} \end{aligned}$$

Обозначив

$$i a - b = \alpha, \quad (7.6)$$

перепишем общее решение в виде

$$\begin{aligned} x = C e^{-a \tau} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_{-m}(z) e^{i m \tau} + a e^{i b \tau} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^{m-1} \times \\ \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(z) J_{n-m}(z)}{n - \alpha} e^{i m \tau}, \end{aligned}$$

а затем в виде

$$x = C e^{-a \tau} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_{-m}(z) e^{i m \tau} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \dot{X}_m e^{i(m+b) \tau} \quad (7.7)$$

где

$$\dot{X}_m = a i^{m-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(z) J_{n-m}(z)}{n - \alpha}. \quad (7.8)$$

Функции

$$T_m(z, \alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(z) J_{n-m}(z)}{n - \alpha} \quad (7.9)$$

введены В. К. Туркиным и носят его имя; для этих функций составлены таблицы при различных значениях параметров a, b, μ ¹⁾.

¹⁾ В П.18 даны некоторые сведения о функциях В. К. Туркина и библиографические справки. Использование функций В. К. Туркина для расчета параметрических цепей первого порядка было предложено В. Ф. Кушниром [40].

Для установившегося режима окончательное выражение, таким образом, имеет вид

$$\left. \begin{aligned} x_{уст}(\tau) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \dot{X}_m e^{i(m+b)\tau} \\ \dot{X}_m &= a i^{m-1} T_m(a, b, \mu) \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

Свободный процесс описывается выражением

$$x_{св}(\tau) = C e^{-a\tau} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_{-m}(z) e^{im\tau}, \quad (7.11)$$

где C определяется из условий: $x_{св}(0) = x_0$.

Формулы (7.10) дают полное решение задачи для установившегося режима как при гармоническом воздействии вида $e^{ib\tau}$, так и при постоянном воздействии ($b=0$), причем ответ выражается в виде суммы гармонических составляющих, из которых можно выбрать только те, которые нужны по условиям задачи. Примеры использования приведенных формул даны в задачах 7.2—7.3.

При постоянном воздействии решение можно получить и в замкнутом виде, но тоже при помощи специальных функций. Исходное уравнение (7.4) для этого случая упрощается:

$$\frac{dx}{d\tau} + a(1 + \mu \sin \tau) = a;$$

после интегрирования и несложных преобразований решение приводится к виду

$$\begin{aligned} x &= a e^{a\mu \cos \tau} \left[\frac{I_0(a\mu)}{a} + 2a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{I_n(a\mu)}{n^2 + a^2} \cos n\tau + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n I_n(a\mu)}{n^2 + a^2} \sin n\tau \right]. \end{aligned}$$

Суммы рядов

$$B(\tau; a, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n(r)}{n^2 + a^2} \cos n\tau,$$

$$B(\tau; a, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n I_n(r)}{n^2 + a^2} \sin n\tau$$

протабулированы для ряда значений параметров a и $r = a\mu$ [70], и, таким образом, выражение для установившегося режима приобретает вид

$$x = a e^{r \cos \tau} \left[\frac{I_0(r)}{a} + 2aB(\tau; a, r) + 2B(\tau; a, r) \right]. \quad (7.12)$$

В задаче 7.4 дан пример применения этой формулы.

Теперь рассмотрим расчет установившегося процесса при любом периодическом законе изменения параметра [6]. Будем считать, что в дифференциальном уравнении

$$\frac{dx}{d\tau} + a(\tau)x = \dot{Q} e^{ib\tau}, \quad (7.13)$$

$a(\tau) = a(\tau + k \cdot 2\pi)$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), т. е. $a(\tau) - 2\pi$ — периодическая функция, допускающая представление рядом Фурье. Положив $a(\tau) = a_0 + a_1(\tau)$, запишем общее решение (7.13) в виде

$$x = e^{-a_0\tau} e^{-\int a_1(\tau) d\tau} \left[\int q(\tau) e^{a_0\tau} e^{\int a_1(\tau) d\tau} d\tau + C \right].$$

Функция $\int a_1(\tau) d\tau$ является также 2π — периодической; в равной степени будут 2π -периодическими функции $e^{\pm \int a_1(\tau) d\tau}$. Введем обозначения: $e^{-\int a_1(\tau) d\tau} = u(\tau)$, $e^{\int a_1(\tau) d\tau} = v(\tau)$ и перепишем последнее выражение в форме

$$x = e^{-a_0\tau} \cdot u(\tau) \left[\int q(\tau) e^{a_0\tau} v(\tau) d\tau + C \right].$$

Теперь поставленная задача сведена к задаче нахождения или аппроксимации функций $u(\tau)$, $v(\tau)$ и вычислению последнего интеграла. Представим $u(\tau)$ и $v(\tau)$ в виде рядов Фурье:

$$u(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{U}_n e^{in\tau}, \quad v(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{V}_n e^{in\tau}.$$

Между амплитудами \dot{U}_n и \dot{V}_n имеется связь (см. задачу 7.5). Теперь общее решение примет вид

$$x = e^{-a_0\tau} \cdot \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{U}_n e^{in\tau} \left[\int \dot{Q} e^{ib\tau} e^{a_0\tau} \cdot \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{V}_n e^{in\tau} d\tau + C \right].$$

Свободный процесс определится выражением

$$x_{св} = C e^{-a_0\tau} \cdot \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{U}_n e^{in\tau};$$

выражение установившегося процесса представим в виде

$$\begin{aligned} x_{уст} &= \dot{Q} e^{ib\tau} \cdot \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{U}_n e^{in\tau} \cdot \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\dot{V}_n}{in + ib + a_0} e^{in\tau} = \\ &= \dot{Q} e^{ib\tau} \cdot \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{X}_n e^{in\tau}, \end{aligned} \quad (7.14)$$

где в данном случае

$$\dot{X} = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\dot{V}_m \dot{U}_{n-m}}{i m + i b + a_0}.$$

Примеры изучения установившихся процессов в цепях, параметры элементов которых изменяются по сложному периодическому закону, даны в задачах 7.6—7.7.

Приведенных сведений достаточно для решения задач по изучению установившихся процессов в параметрических цепях первого порядка при постоянном или гармоническом воздействиях. При полигармоническом воздействии схема расчета сохраняется прежней, но решение будет представлять собой сумму решений, полученных при рассмотрении каждого воздействия в отдельности.

Следует еще добавить, что процессы в параметрических цепях первого порядка можно изучать и методом «замораживания» переменных (см. П.3) и, в частности, методом изоклин (метод 3.5а). По этому методу в дифференциальном уравнении (7.1) нужно положить $dx/d\tau = k$ и решить его относительно x , т. е. получить выражение изоклины:

$$x = \frac{f(\tau) - k}{a(\tau)},$$

по которому можно построить искомый процесс $x(\tau)$. Общая схема расчета по этому методу показана в задаче 7.8.

В заключение приведем ряд дополнительных рекомендаций практического характера. Прежде всего, анализ цепи, находящейся под финитным воздействием, можно свести к уже рассмотренным задачам путем «искусственной периодизации» внешнего воздействия, причем период повторения должен быть больше времени свободного процесса в данной цепи. Далее изучение цепи, находящейся под воздействием δ -функции, можно свести к изучению автономной цепи, но с измененными начальными условиями аналогично тому, как это делалось в разд. 6. Другими словами, решение неоднородного уравнения

$$a_1(t) \dot{x}(t, \tau) + a_0(t) x(t, \tau) = \delta(t - \tau)$$

с нулевыми начальными условиями эквивалентно решению однородного уравнения

$$a_1(t) \dot{x}(t, \tau) + a_0(t) x(t, \tau) = 0,$$

удовлетворяющего начальному условию $x(t, \tau)|_{t=\tau} = x(\tau, \tau) = 1/a_1(\tau)$.

Синтез параметрических цепей первого порядка

Постановка задачи синтеза параметрической цепи первого порядка может иметь различные аспекты. Представляется, что наибольшую практическую ценность имеют следующие.

1. На вход синтезируемой цепи подается единичный импульс (дельта-функция); на выходе нужно получить сигнал указанной формы. Требуется найти цепь, реализующую заданное преобразование, т. е. составить схему и определить закон изменения параметра одного из элементов цепи. Допускается, что параметр начинает изменяться в момент подачи импульса, т. е. цепь управления синхронизована с внешней цепью. В условия задачи входит требование, связанное с простотой управления: закон изменения параметра должен быть проще формы заданного выходного сигнала (в противном случае задача становится беспредметной). Сформулированную задачу будем называть задачей синтеза синхронизованной параметрической цепи первого порядка.

2. Задана линейная цепь второго порядка, т. е. цепь с постоянными параметрами. Нужно синтезировать параметрическую цепь первого порядка по условиям эквивалентности линейной цепи второго порядка. Эту задачу будем называть задачей синтеза параметрических фильтров первого порядка.

Несомненно, что могут быть поставлены задачи синтеза параметрических цепей первого порядка и по другим условиям; одно из этих условий рассматривается в задаче 7.15.

Решение задачи синтеза синхронизованной параметрической цепи основано на составлении однородного дифференциального уравнения, решение которого совпадает с импульсной переходной характеристикой цепи (а эта последняя, в свою очередь, совпадает по форме с заданным выходным сигналом). Вопросы составления уравнений по заданному решению хорошо изучены; решение указанной задачи не является однозначным, и для его выбора должны привлекаться дополнительные условия. В задачах 7.10—7.13 даны примеры синтеза синхронизованных цепей.

Параметрические фильтры можно синтезировать различными способами; одним из самых удобных представляется следующий. По заданному линейному однородному дифференциальному уравнению второго порядка выписывается общее решение; затем, в соответствии с методом Лагранжа (метод 3.2), произвольные постоянные превращаются в функции, которые определяются по исходному уравнению. Подстановка этих функций в общее решение и дает алгоритм, по которому можно синтезировать параметрическую цепь первого порядка (в данном случае цепь, содержащую один интегратор и параметрический элемент, например множитель и т. д.). Пример синтеза параметрического фильтра дан в задаче 7.14.

Анализ нелинейно-параметрических цепей первого порядка

Нелинейно-параметрические цепи первого порядка с одним нелинейным и одним параметрическим элементами описываются уравнениями вида

$$b(x, \tau) \frac{dx}{d\tau} + a(x, \tau) = f(\tau),$$

а с двумя нелинейными элементами, из которых один к тому же еще и параметрический, — уравнениями, которые, как правило, трудно разрешить относительно производной и их, в общем виде, следует записывать в виде (6.4). Дать рекомендации по решению и изучению таких уравнений — это значит, по существу, повторить весь материал приложения 1 и вводный текст к разд. 6. Все рекомендации по выбору метода решения нелинейных уравнений сохраняют свою силу и здесь. Дополнительно следует указать, что методы преобразования переменных (в том числе и переменны мест переменных) для упрощения дифференциальных уравнений довольно часто оказываются эффективными. Соответствующие примеры даны при изложении этих методов в приложении 1. Устойчивость целесообразно исследовать косвенными методами; эти вопросы рассматриваются ниже.

Утверждение о том, что общие подходы к решению нелинейно-параметрических уравнений мало отличаются от общих подходов к решению нелинейных уравнений, поясняется задачами 7.16—7.17.

Устойчивость параметрических и нелинейно-параметрических цепей первого порядка

Общие вопросы, связанные с определением устойчивости цепей, освещены в П.10; в разд. 6 даны сведения и расчетные рецептуры, относящиеся к нелинейным цепям первого порядка. Изложенное в разд. 6 сохраняет свою силу и по отношению к параметрическим и нелинейно-параметрическим цепям первого порядка; однако методика проверки устойчивости этих цепей при помощи косвенных методов нуждается в некотором развитии, что и будет сделано ниже.

По отношению к параметрическим цепям метод фазовой плоскости мало пригоден, так как в выражение фазового изображения время t входит в явном виде, т. е. соответствующее уравнение имеет вид: $y = F(x, t)$. Можно, конечно, считать t параметром и пользоваться приемами «замораживания переменных» (метод 3.5), но такой подход не всегда оказывается приемлемым.

По отношению к параметрическим и нелинейно-параметрическим цепям первого порядка удобно использовать плоскости диссипанта $\delta(x)$, $\delta(t)$, а также пространство $\delta(x, t)$. Необходимые сведения приводятся ниже.

Напомним, что (разд. 6) на плоскости $\delta(x)$ в нечетных квадрантах изображающая точка движется слева направо, а в четных — справа налево. Устойчивыми являются точки, в которых $\delta(x_n) = 0$ и удовлетворяются условия:

$$\left. \frac{d\delta}{dx} \right|_{x=x_n} < 0 \text{ при } x_n > 0, \quad \left. \frac{d\delta}{dx} \right|_{x=x_n} > 0 \text{ при } x_n < 0.$$

Рассмотрим теперь плоскость $\delta(t)$, соответствующую параметрической цепи в свободном режиме. Сформулируем некоторые правила.

1. Если $\delta(t)$ представляет собой периодическую функцию, то процесс $x(t)$ представляет собой либо периодическую функцию, либо периодическую функцию с экспоненциальным множителем, причем если $\delta_0 < 0$, то $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, а если $\delta_0 > 0$, то $x(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Здесь δ_0 — постоянная составляющая периодической функции $\delta(t)$. Доказательство этого утверждения дано в задаче 7.18.

2. Если $\delta(t)$ представляет собой непериодическую функцию, то судить о характере процесса $x(t)$ можно по знаку $\delta(t)$: $x(t) \rightarrow 0$ при $\delta(t) < 0$ и $x(t) \rightarrow \infty$ при $\delta(t) > 0$. Если $\delta(t) = 0$, $x(t) = \text{const}$.

Эти правила являются следствиями, вытекающими из определения диссипанта.

Рассмотрим теперь пространство диссипанта $\delta(t, x)$, относящееся к нелинейным и параметрическим цепям в вынужденном режиме, а также к нелинейно-параметрическим цепям в свободном и вынужденном режимах. В общем виде следует отметить, что функцию $\delta(t, x)$ нужно изучать известными средствами как функцию двух переменных. В частном, но весьма распространенном случае, когда $\delta(t, x) = \psi(t)\varphi(x)$, причем $\psi(t) \neq 0$ ни при каких t , можно найти точки равновесия из уравнения $\varphi(x) = 0$, а заключение о процессе $x(t)$ делать на основе анализа выражения

$$\delta(x) = \text{sign} [\psi(t)] \varphi(x),$$

чем задача сводится к уже рассмотренной.

* * *

В настоящем разделе задачи расположены в следующем порядке. Задачи 7.1—7.9 посвящены анализу параметрических цепей первого порядка, находящихся под постоянным или гармоническим воздействием, причем параметр меняется либо по гармоническому, либо по более сложному, но тоже периодическому закону. В задачах 7.10—7.15 рассматриваются вопросы синтеза параметрических цепей первого порядка, а в задачах 7.16—7.17 — вопросы анализа нелинейно-параметрических цепей первого порядка. Наконец, в задачах 7.18—7.22 изучаются вопросы устойчивости (а также асимптотического поведения) на плоскости диссипанта.

Задачи и упражнения

7.1. На рис. 7.1 изображены три схемы параметрических цепей первого порядка, причем их параметры изменяются по следующим законам:

$$\text{а) } R(t) = R_0 + R_1 \sin \omega_\mu t,$$

$$\text{б) } \frac{1}{C(t)} = \frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_1} \sin \omega_\mu t,$$

$$\text{в) } \frac{1}{R(t)} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1} \sin \omega_\mu t.$$

Составить дифференциальные уравнения и привести их к безразмерному виду (7.4).

7.2. Сопротивление резистора в цепи, изображенной на рис. 7.2, модулируется по закону $R(t) = R(1 - \mu \cos \omega_\mu t)$. Данные элементов цепи следующие: $E = 1,5$ В, $R = 100$ Ом, $\mu = 0,5$, $L = 5$ мГ, $\omega_\mu = 5000$ рад/с. Найти постоянную составляющую тока и его первые три гармоники.

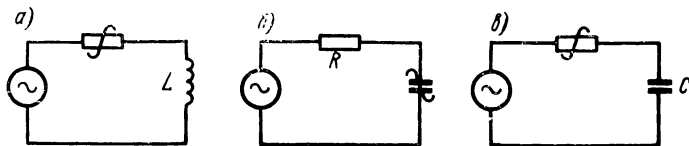


Рис. 7.1

7.3. На рис. 7.3 изображена схема синхронного детектора; сопротивление резистора меняется по закону $R(t) = R/(1 + \mu \sin \omega_\mu t)$, а входное напряжение имеет вид $e(t) = \mathcal{E} \sin(\omega t + \varphi)$, причем $\omega = \omega_\mu$.

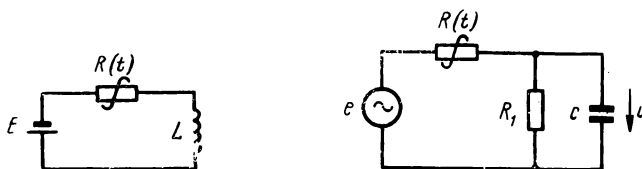


Рис. 7.2

Рис. 7.3

Найти постоянную составляющую на выходе синхронного детектора при следующих условиях: $\mathcal{E} = 1$ В, $\omega = 10^6$ рад/с, $C = 643$ пкФ, $R_1 = 35$ кОм, $R = 10$ кОм, $\mu = 0,9$.

7.4. В задаче 7.2 рассматривалась схема угольного микрофона, состоящая из переменного резистора и катушки; по условию нужно было определить постоянную составляющую и первые гармоники.

В настоящей задаче условия изменены: нужно получить выражение тока в цепи угольного микрофона не как сумму отдельных гармоник, а в замкнутом виде. Значения параметров элементов цепи почти не отличаются от таковых в задаче 7.2: $E = 1,5$ В, $L = 5 \cdot 10^{-3}$ Г, $\omega_\mu = 5 \cdot 10^3$ рад/с, $\mu = 0,4$, $R = 125$ Ом.

7.5. При изучении параметрических цепей, в которых параметр изменяется по сложному (не моногармоническому) закону, вводятся обозначения (см. стр. 243):

$$u(\tau) = e^{-\int a_1(\tau) d\tau} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{U}_n e^{i n \tau}$$

$$v(\tau) = e^{\int a_1(\tau) d\tau} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{V}_n e^{i n \tau},$$

где $a_1(\tau)$ — переменная составляющая 2π -периодической функции $a(\tau)$. Установить связь между \dot{U}_n и \dot{V}_n .

7.6. Найти установившийся процесс в цепи, содержащей параметрический резистор и линейную катушку, по условиям задачи 7.1, но с той существенной

разницей, что сопротивление резистора меняется по меандровому («синус прямоугольный») закону и соответствующее дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{dx}{d\tau} + [a_0 + a_1 \operatorname{сп} \tau] x = \dot{Q} e^{i b \tau},$$

$$\text{где } \operatorname{сп} \tau = \frac{2}{\pi} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{1}{i q} e^{i q \tau} = \begin{cases} 1 & (0 < \tau < \pi), \\ 0 & (\pi < \tau < 2\pi), \end{cases}$$

$$(q = \pm 1, \pm 3, \pm 5).$$

7.7. Условия настоящей задачи совпадают с условиями предыдущей с тем отличием, что параметр изменяется по пилообразному закону в соответствии с нижеследующей записью:

$$\frac{dx}{d\tau} + a(\tau) x = \dot{Q} e^{i b \tau}, \quad a(\tau) = a_0 + a_1(\tau),$$

$$a_1(\tau) = a_1 \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{i n} e^{i n \tau} = -a_1 \frac{\tau}{2} \quad (-\pi \leq \tau \leq \pi).$$

7.8. Дать общую схему решения методом изоклин дифференциального уравнения (6.4), если $a(\tau) = a_0/(1 + \mu \sin \tau)$.

7.9. На рис. 7.4. изображена параметрическая цепь первого порядка, при помощи которой создаются колебания, приближающиеся по форме к пилообразным. Сопротивление параметрического резистора изменяется по периодическому закону, изображенному на рис. 7.5а; если $R_2 \gg R$, то напряжение u на конденсаторе C будет изменяться по закону (в установившемся режиме):

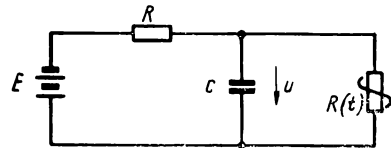


Рис. 7.4

$$u = E - (E - u_1) e^{-\frac{1}{RC} t} \quad \text{— в течение времени } t_1;$$

$$u = u_2 e^{-\frac{1}{RC} (t - t_1)} \quad \text{— в течение времени } t_2.$$

Построить изображения процесса на фазовой плоскости и на плоскости диссипанта.

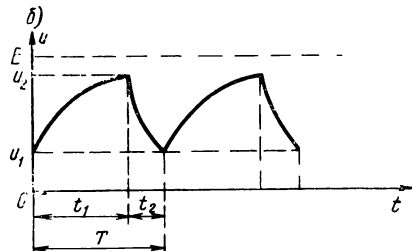
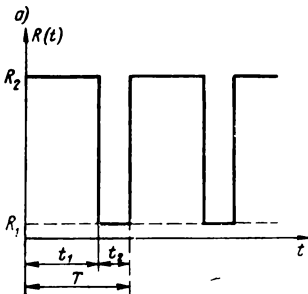


Рис. 7.5

7.10. Составить общую рецептуру синтеза параметрической цепи первого порядка по импульсной переходной характеристике $h(t)$.

7.11. Синтезировать цепь, преобразующую единичный импульс в «колокольный» $h(t) = e^{-\alpha t^2}$, $t \geq 0$.

7.12. Рассмотреть вопрос о синтезе параметрической цепи первого порядка по импульсной переходной характеристике вида $h(t) = 1 \sin \omega t$, $t \geq 0$.

7.13. Синтезировать цепь, преобразующую единичный импульс в сигнал вида $h(t) = 1 \operatorname{th} \alpha t$, $t > 0$.

7.14. Задана линейная цепь в виде консервативного колебательного контура, описываемого уравнением

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = f(t).$$

Синтезировать параметрический фильтр первого порядка по условиям эквивалентности данной линейной цепи.

7.15. Синтезировать параметрическую цепь первого порядка для измерения фазы гармонического колебания $x(t) = \sin(\omega t + \varphi)$.

7.16. Решить уравнение

$$\frac{dx}{d\tau} + x + q \ln(x - e^{-\tau}) = 0, \quad x(0) = 2$$

методами минимизации невязки.

7.17. Найти приближенное решение уравнения

$$\frac{dx}{d\tau} + x + \tau x^2 = 0, \quad x(0) = x_0$$

методом перехода к интегральным уравнениям на основе использования функции Грина (метод 6.3).

7.18. Доказать утверждение, что постоянная составляющая δ периодической диссипатной функции $\delta(t)$ определяет характер процесса $x(t)$.

7.19. На основе плоскости диссипанта сделать заключение о процессах $x(t)$, являющихся решениями следующих дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} - \omega \operatorname{ctg} \omega t x = 0, \quad (1)$$

$$\frac{dx}{dt} + (\alpha - \omega \operatorname{ctg} \omega t) x = 0. \quad (2)$$

7.20. Проверить на плоскости диссипанта, является ли устойчивым решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} + \sum_{n=0}^N a_n t^n x = 0, \quad t > 0, \quad a_n > 0.$$

7.21. Дано дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} + \psi(t) \varphi(x) = f(t), \quad x(0) = x_0;$$

определить характер процесса $x(t)$ после включения внешнего воздействия $f(t)$ в момент $t=0$.

7.22. Пусть в уравнении

$$\frac{dx}{dt} + a(t) x = f(t), \quad x(0) = x_0$$

$a(t) > 0$ и $f(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Показать, что решение уравнения $x(t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ

7.1. Для схемы рис. 7.1а:

$$L \frac{di}{dt} + R_0 \left(1 + \frac{R_1}{R_0} \sin \omega_\mu t \right) i = \mathcal{E} e^{i \omega t}.$$

Полагая $R_1/R_0 = \mu$, $\omega/\omega_\mu = b$, $\omega_\mu t = \tau$, находим

$$\omega_\mu L \frac{di}{d\tau} + R_0 (1 + \mu \sin \tau) i = \mathcal{E} e^{i b \tau}.$$

Разделим обе части уравнения на $\omega_\mu L$ и после введения обозначения $R_0/\omega_\mu L = a$ получим

$$\frac{di}{d\tau} + a (1 + \mu \sin \tau) i = \frac{\mathcal{E}}{R_0} a e^{i b \tau}.$$

Теперь остается ввести еще одно обозначение $x = i R_0 / \mathcal{E}$ и записать окончательно

$$\frac{dx}{d\tau} + a (1 + \mu \sin \tau) x = a e^{i b \tau}.$$

Для схемы рис. 7.1б:

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C(t)} = \mathcal{E} e^{i \omega t},$$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{R C_0} \left(1 + \frac{C_0}{C_1} \sin \omega_\mu t \right) q = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{i \omega t}.$$

Вводя обозначения $x = q/EC_0$, $a = 1/\omega_\mu C_0 R$, $\mu = C_0/C_1$, $\omega/\omega_\mu = b$, $\omega_\mu t = \tau$, приходим к уравнению

$$\frac{dx}{d\tau} + a (1 + \mu \sin \tau) x = a e^{i b \tau}.$$

Для схемы рис. 7.1в:

$$R(t) \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E} e^{i b \omega t},$$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{R(t) C} = \frac{\mathcal{E}}{R(t)} e^{i b \omega t},$$

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{R_0 C} \left(1 + \frac{R_0}{R_1} \sin \omega_\mu t \right) q &= \frac{\mathcal{E}}{R_0} e^{i b \omega t} + \\ &+ \frac{\mathcal{E}}{R_1} e^{i b \omega t} \sin \omega_\mu t. \end{aligned}$$

Полученное уравнение распадается на два с различными правыми частями; в остальном нормировка выполняется так же, как и для схемы рис. 7.1б.

7.2. Дифференциальное уравнение цепи

$$L \frac{di}{dt} + R(t) i = E,$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} (1 - \mu \cos \omega_\mu t) i = \frac{E}{L}$$

при помощи обозначений $x=iR/E$, $\tau=\omega_\mu t-\pi/2$, $a=R/\omega_\mu L$ приводится к виду (7.4)

$$\frac{dx}{d\tau} + a(1 + \mu \sin \tau) x = a.$$

Отметим, что в данном случае $b=0$.
По ф-лам (7.10) имеем:

$$x = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \dot{X}_m e^{i m \tau}, \quad \dot{X}_m = a i^{m-1} T_m(a, 0, \mu)$$

или

$$i = \frac{E}{i \omega_\mu L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} T_m(a, 0, \mu) e^{i m \omega_\mu t}, \quad i = i_0 + \sum_{k=1}^{\infty} i_k.$$

Постоянная составляющая: $i_0 = \frac{E}{i \omega_\mu L} T_0(a, 0, \mu)$.

Гармоники:

$$i_k = \frac{E}{i \omega_\mu L} \{ [T_k(a, 0, \mu) + T_{-k}(a, 0, \mu)] \cos k \omega_\mu t + \\ + i [T_k(a, 0, \mu) - T_{-k}(a, 0, \mu)] \sin k \omega_\mu t \}.$$

Для упрощения записи целесообразно преобразовать последнее выражение по ф-ле (П18.8); в результате преобразования получим

$$i_k = \frac{2E}{\omega_\mu L} \{ \text{Im} [T_k(a, 0, \mu)] \cos k \omega_\mu t + \text{Re} [T_k(a, 0, \mu)] \cdot \sin k \omega_\mu t \}.$$

Теперь введем численные данные по условиям задачи:

$$a = \frac{R}{\omega_\mu L} = \frac{100}{5000 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 4, \quad \mu = 0,5.$$

По таблицам находим:

$$T_0(4; 0; 0,5) = i 0,28448, \\ T_1(4; 0; 0,5) = 0,02014 + i 0,06897, \\ T_2(4; 0; 0,5) = 0,01161 + i 0,0152, \\ T_3(4; 0; 0,5) = 0,00326 + i 0,00032.$$

Вычисляем:

$$i_0 = \frac{E}{i \omega_\mu L} T_0(a, 0, \mu) = \frac{1,5 \cdot 0,28448}{5000 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 0,01707 a, \\ i_1 = \frac{2E}{\omega_\mu L} \{ \text{Im} [T_1(a, 0, \mu)] \cos \omega_\mu t + \text{Re} [T_1(a, 0, \mu)] \sin \omega_\mu t \} = \\ = \frac{2 \cdot 1,5}{5000 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} (0,06897 \cos \omega_\mu t + 0,02014 \sin \omega_\mu t) = \\ = 0,008277 \cos \omega_\mu t + 0,002417 \sin \omega_\mu t, A.$$

Аналогично определяем:

$$i_2 = 0,001383 \cos 2 \omega_\mu t + 0,001393 \sin 2 \omega_\mu t, A, \\ i_3 = 0,000039 \cos 3 \omega_\mu t + 0,000391 \sin 3 \omega_\mu t, A,$$

Более высокие гармоники можно вычислить при помощи рекуррентных ф-л (П18.5) и (П18.6).

7.3. Составим дифференциальное уравнение относительно напряжений на конденсаторе:

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{C} \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R(t)} \right] u = \frac{e}{CR(t)}$$

или

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{R'C} (1 + \mu' \sin \omega t) u = \frac{e}{RC} (1 + \mu \sin \omega t),$$

где $R' = RR_1/(R+R_1)$, $\mu' = \mu R_1/(R+R_1)$.

Так как $e = \mathcal{E} \sin(\omega t + \varphi)$, то

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + \frac{1}{R'C} (1 + \mu' \sin \omega t) u &= \frac{\mu \mathcal{E}}{2RC} \cos \varphi + \\ &+ \frac{\mathcal{E}}{RC} \sin(\omega t + \varphi) - \frac{\mu \mathcal{E}}{2RC} \cos(2\omega t + \varphi). \end{aligned}$$

Поскольку рассматриваемая цепь линейна, решение последнего уравнения сводится к решению трех дифференциальных уравнений, левые части которых одинаковы, а правые части равны соответственно первому, второму и третьему слагаемым правой части данного уравнения. Если обозначить решение этих трех уравнений через u_1 , u_2 и u_3 , то решение последнего уравнения будет равно их сумме, т. е. $u = u_1 + u_2 + u_3$.

1) Решим уравнение

$$\frac{du_1}{dt} + \frac{1}{R'C} (1 + \mu' \sin \omega t) u_1 = \frac{\mu \mathcal{E}}{2RC} \cos \varphi.$$

При помощи обозначений $x = 2Ru_1/\mu R' \mathcal{E} \cos \varphi$, $a = 1/\omega R'C$ оно приводится к виду (7.4) при $b=0$. Решение уравнения дается ф-лой (7.10). Возвращаясь к первоначальным символам, получаем

$$u_1 = \frac{\mu \mathcal{E} \cos \varphi}{2\omega CR} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^{m-1} T_m(a, 0, \mu') e^{i m \omega t}.$$

Постоянная составляющая этого напряжения

$$u_{10} = \frac{\mu \mathcal{E} \cos \varphi}{i 2\omega CR} T_0(a, 0, \mu').$$

2) Решим уравнение

$$\frac{du_2}{dt} + \frac{1}{R'C} (1 + \mu' \sin \omega t) u_2 = \frac{\mathcal{E}}{RC} \sin(\omega t + \varphi).$$

Заменим $\sin(\omega t + \varphi)$ на $i \exp(i\omega t + \varphi)$. Вещественная часть решения

$$\frac{du_2}{dt} + \frac{1}{R'C} (1 + \mu' \sin \omega t) u_2 = \frac{\mathcal{E}}{iRC} e^{i(\omega t + \varphi)}$$

и будет искомым u_2 . При помощи обозначений $x = \frac{i R e^{-i\varphi}}{R'} \frac{u_2}{\mathcal{E}}$, $a = \frac{1}{\omega R'C}$

последнее уравнение приводится к виду (7.4); $b=1$. Решение уравнения дается ф-лой (7.10); возвращаясь к исходным обозначениям, получаем

$$u_2 = \operatorname{Re} \left[\frac{\mathcal{E} e^{i\varphi}}{i \omega C R} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^{m-1} T_m(a, 1, \mu') e^{i(m+1)\omega t} \right].$$

Постоянная составляющая:

$$u_{20} = \frac{\mathcal{E}}{\omega C R} \{-\operatorname{Im} [T_{-1}(a, 1, \mu')] \cos \varphi - \operatorname{Re} [T_{-1}(a, 1, \mu')] \sin \varphi\}.$$

3) Решим уравнение

$$\frac{du_3}{dt} + \frac{1}{RC} (1 + \mu' \sin \omega t) u_3 = -\frac{\mu \mathcal{E}}{2RC} \cos(2\omega t + \varphi).$$

Заменяем $\cos(2\omega t + \varphi)$ на $\exp[i(2\omega t + \varphi)]$; вещественная часть решения

$$\frac{du_3}{dt} + \frac{1}{RC} (1 + \mu' \sin \omega t) u_3 = -\frac{\mu \mathcal{E}}{2RC} e^{i(2\omega t + \varphi)}$$

и будет искомым u_3 . При помощи обозначений $x = -2R e^{-i\varphi} u_3 / \mu R' \mathcal{E}$, $a = 1/\omega R' C$ последнее уравнение приводится к виду (7.4); $b=2$. Найдем его решение:

$$u_3 = -\operatorname{Re} \left[\frac{\mu \mathcal{E} e^{i\varphi}}{2 \omega C R} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^{m-1} T_m(a, 2, \mu') e^{i(m+2)\omega t} \right],$$

$$u_{30} = \frac{\mu \mathcal{E}}{2 \omega C R} \{\operatorname{Im} [T_{-2}(a, 2, \mu')] \cos \varphi + \operatorname{Re} [T_{-2}(a, 2, \mu')] \sin \varphi\}.$$

Теперь выполним численные расчеты:

$$R' = \frac{RR_1}{R + R_1} = \frac{10^4 \cdot 3,5 \cdot 10^4}{10^4 + 3,5 \cdot 10^4} = 0,778 \cdot 10^4 \text{ Ом},$$

$$\mu' = \mu \frac{R_1}{R + R_1} = 0,9 \frac{3,5 \cdot 10^4}{10^4 + 3,5 \cdot 10^4} = 0,7;$$

$$a = \frac{1}{\omega C R'} = \frac{1}{10^6 \cdot 643 \cdot 10^{-12} \cdot 0,778 \cdot 10^4} = 0,2;$$

$$\begin{aligned} u_0 &= u_{10} + u_{20} + u_{30} = \frac{\mu \mathcal{E} \cos \varphi}{i 2 \omega C R} T_0'(a, 0, \mu') + \\ &+ \frac{\mathcal{E}}{\omega C R} \{-\operatorname{Im} [T_{-1}(a, 1, \mu')] \cos \varphi - \operatorname{Re} [T_{-1}(a, 1, \mu')] \sin \varphi\} + \\ &+ \frac{\mu \mathcal{E}}{2 \omega C R} \{\operatorname{Im} [T_{-2}(a, 2, \mu')] \cos \varphi + \operatorname{Re} [T_{-2}(a, 2, \mu')] \sin \varphi\}. \end{aligned}$$

Так как в таблице нет значений функций при отрицательных m , чтобы не вычислять их по рекуррентным формулам, воспользуемся ф-лой (Пл8.2)

$$T_{-m}(z, a) = T_m(z, a+m),$$

и, так как $a+m = i a - b + m$, то $T_{-m}(a, b, \mu) = T_m(a, b-m, \mu)$. Отсюда следует, что

$$T_{-1}(a, 1, \mu) = T_1(a, 0, \mu), \quad T_{-2}(a, 2, \mu) = T_2(a, 0, \mu).$$

Теперь окончательная формула для расчета постоянной составляющей напряжения на конденсаторе будет иметь вид

$$u_0 = \frac{\mathcal{E}}{\omega CR} \left\{ \frac{\mu}{2i} T_0(a, 0, \mu') - \operatorname{Im}[T_1(a, 0, \mu')] \right\} + \\ + \frac{\mu}{2} \operatorname{Im}[T_2(a, 0, \mu')] \cos \varphi + \frac{\mathcal{E}}{\omega CR} \left\{ -\operatorname{Re}[T_1(a, 0, \mu')] + \right. \\ \left. + \frac{\mu}{2} \operatorname{Re}[T_{-2}(a, 0, \mu')] \right\} \sin \varphi.$$

По таблицам находим:

$$T_0(0,2; 0; 0,7) = i 5,04729;$$

$$\operatorname{Re}[T_1(0,2; 0; 0,7)] = 0,33900; \quad \operatorname{Re}[T_2(0,2; 0; 0,7)] = 0,00351;$$

$$\operatorname{Im}[T_{-1}(0,2; 0; 0,7)] = 0,06755; \quad \operatorname{Im}[T_{-2}(0,2; 0; 0,7)] = -0,01151.$$

Рассчитав, что

$$\frac{\mathcal{E}}{\omega CR} = \frac{1}{10^6 \cdot 643 \cdot 10^{-12} \cdot 10^4} = 0,15552,$$

получим окончательно

$$u_0 = 0,15552 \left(\frac{0,9}{2} 5,04729 - 0,06755 - \frac{0,9}{2} 0,01151 \right) \cos \varphi + \\ + 0,15552 \left(-0,33900 + \frac{0,9}{2} 0,00351 \right) \sin \varphi = 0,3419 \cos \varphi - 0,05247 \sin \varphi, \quad B.$$

7.4. В соответствии с выражением (7.12) после расчета величин a и r :

$$a = \frac{R}{\omega_\mu L} = \frac{125}{5 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 5,0;$$

$$r = a\mu = 5,0 \cdot 0,4 = 2, \quad I_0(z) = 2,2796$$

получаем:

$$x = 5 e^2 \cos \tau \left[\frac{2,2796}{5} + 10 B(\tau; 5,2) + \right. \\ \left. + 2 B(\tau; 5,2) \right].$$

Это выражение является окончательным. В табл. 7.1 даны значения нормированного тока x , рассчитанные по последней формуле при помощи таблиц [70], через каждые 20 градусов (1 град = 0,9 градуса), а на рис. P7.1 — график, построенный по данным табл. 7.1.

ТАБЛИЦА 7.1
Данные к расчету тока угольного микрофона

τ , град.	x	τ , град.	x	τ , град.	x
0	1,102	140	0,740	280	1,480
20	0,960	160	0,782	300	1,586
40	0,855	180	0,847	320	1,622
60	0,784	200	0,936	340	1,571
80	0,739	220	1,050	360	1,439
100	0,718	240	1,186	380	1,269
120	0,720	260	1,336	400	1,102

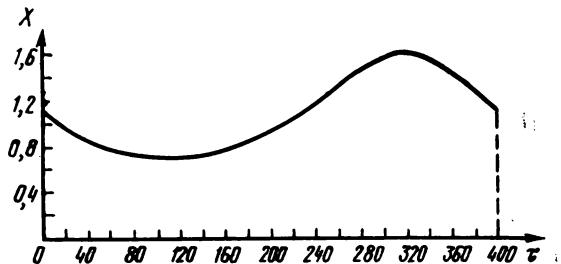


Рис. P7.1

7.5. Представим ряд, соответствующий периодической функции $a_1(\tau)$, состоящим либо из нечетных, либо из четных гармоник (в общем случае — это два отдельных ряда) и рассмотрим искомые связи для этих рядов.

$$1) a_1(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \dot{C}_q e^{i q \tau},$$

$$q = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots,$$

$$z(\tau) = \int a_1(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{\dot{C}_q}{i q} e^{i q \tau},$$

$$z(\tau) = -z(\tau - \pi).$$

Составим выражения для расчета амплитуд \dot{U}_n и \dot{V}_n :

$$\dot{U}_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-z(\tau)} e^{-i n \tau} d\tau, \quad \dot{V}_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{z(\tau)} e^{-i n \tau} d\tau.$$

В первом равенстве введем замену: $\tau = y - \pi$, но вместо y опять будем писать τ :

$$\dot{U}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-z(\tau-\pi)} e^{-i n \tau} e^{i n \pi} d\tau.$$

Принимая во внимание свойство «нечетных рядов»: $-z(\tau-\pi) = z(\tau)$, а также то, что интеграл от периодической функции, взятый по длине, равной периоду, не зависит от начала отсчета, получаем

$$\dot{U}_n = \frac{e^{i n \pi}}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{z(\tau)} e^{-i n \tau} d\tau, \text{ т. е. } \dot{U}_n = (-1)^n \dot{V}_n.$$

$$2) a_1(\tau) = \sum_{p=2}^{\infty} A_p \cos p \tau, \quad p = 2, 4, 6, \dots$$

$$z(\tau) = \int a_1(\tau) d\tau = \sum_{p=2}^{\infty} \frac{A_p}{p} \sin p \tau,$$

$$z(\tau) = -z(\pi - \tau).$$

Проводя аналогичный расчет, находим $\dot{U}_n = (-1)^n \dot{V}_n$.

7.6. В соответствии с общей методикой (см. текст) нужно найти вспомогательные функции:

$$u(\tau) = e^{-\int a_1(\tau) d\tau}, \quad v(\tau) = e^{\int a_1(\tau) d\tau}.$$

Выполним необходимые вычисления:

$$\int a_1 \operatorname{sp} \tau d\tau = -a_1 \frac{2}{\pi} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{1}{q^2} e^{iq\tau} = \begin{cases} a_1 \left(\tau - \frac{\pi}{2} \right), & 0 \leq \tau \leq \pi, \\ a_1 \left(\frac{3\pi}{2} - \tau \right), & \pi \leq \tau \leq 2\pi; \end{cases}$$

$$u(\tau) = \begin{cases} e^{-a_1 \left(\tau - \frac{\pi}{2} \right)}, & 0 \leq \tau \leq \pi, \\ e^{-a_1 \left(\frac{3\pi}{2} - \tau \right)}, & \pi \leq \tau \leq 2\pi; \end{cases}$$

$$v(\tau) = \begin{cases} e^{a_1 \left(\tau - \frac{\pi}{2} \right)}, & 0 \leq \tau \leq \pi, \\ e^{a_1 \left(\frac{3\pi}{2} - \tau \right)}, & \pi \leq \tau \leq 2\pi. \end{cases}$$

Комплексные амплитуды, например функции $v(\tau)$, определим по формуле

$$\dot{V}_n = \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} v(\tau) e^{-in\tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} e^{a_1 \left(\tau - \frac{\pi}{2} \right)} e^{-in\tau} d\tau + \int_{\pi}^{2\pi} e^{a_1 \left(\frac{3\pi}{2} - \tau \right)} e^{-in\tau} d\tau \right].$$

Имеющиеся здесь определенные интегралы вычисляются, и результаты можно найти во всех распространенных справочниках; после несложных преобразований получаем

$$\dot{V}_n = \frac{2a_1}{\pi} \frac{1}{n^2 + a_1^2} \left[(-1)^n e^{a_1 \frac{\pi}{2}} - e^{-a_1 \frac{\pi}{2}} \right].$$

Аналогично можно определить и \dot{U}_n ; однако для этого проще воспользоваться «формулами связи», полученными в задаче 7.5.

По ф-ле (7.14) находим выражение для установившегося режима

$$x = \begin{cases} \dot{Q} e^{ib\tau} e^{-a_1 \left(\tau - \frac{\pi}{2} \right)} \frac{2a_1}{\pi} \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{a_1 \frac{\pi}{2}} - e^{-a_1 \frac{\pi}{2}}}{(n^2 + a_1^2) (in + ib + a_0)} e^{in\tau}, & a \leq \tau \leq \pi; \\ \dot{Q} e^{ib\tau} e^{-a \left(\frac{3\pi}{2} - \tau \right)} \frac{2a_1}{\pi} \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{a_1 \frac{\pi}{2}} - e^{-a_1 \frac{\pi}{2}}}{(n^2 + a^2) (in + ib + a_0)} e^{in\tau}, & \pi \leq \tau \leq 2\pi. \end{cases}$$

Суммы, входящие в последнее выражение, известны [26], поэтому после простых преобразований, получаем

$$x = \begin{cases} \dot{Q} e^{i b \tau} \frac{1}{z + a_1} \left[1 + \frac{2 a_1 \operatorname{sh} (z - a_1) \frac{\pi}{2}}{(z - a_1) \operatorname{sh} z \pi} e^{-(z + a_1) \left(\tau - \frac{\pi}{2} \right)} \right], & 0 \leq \tau \leq \pi, \\ \dot{Q} e^{i b \tau} \frac{1}{z - a_1} \left[1 - \frac{2 a_1 \operatorname{sh} (z + a_1) \frac{\pi}{2}}{(z + a_1) \operatorname{sh} z \pi} e^{-(z - a_1) \left(\tau - \frac{3\pi}{2} \right)} \right], & \pi \leq \tau \leq 2\pi. \end{cases}$$

Здесь $z = a_0 + i b$.

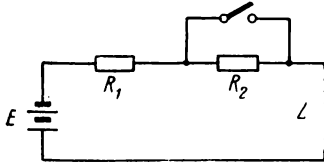


Рис. P 7.2

Из последних выражений как частные случаи следуют решения ряда задач. Например, рассмотрим цепь, в которой резистор R_2 выключается с частотой Ω (рис. P 7.2); пусть цепь находится под постоянным напряжением E и нужно найти в ней ток. В последних выражениях положим: $b = 0$, $\tau = \Omega t$, $Q = E/\Omega L$, $a_0 = (2R_1 + R_2)/2\Omega L$, $a_1 = -R_2/2\Omega L$. После простых преобразований, получаем:

$$i = \frac{E}{R_1 + R_2} \left[1 + \frac{R_2}{R_1} \frac{1 + \operatorname{cth} (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{T}{4}}{1 + \operatorname{cth} \alpha_2 \frac{T}{4}} e^{-\alpha_1 \tau} \right], \quad 0 < \tau \leq \frac{T}{2};$$

$$i = \frac{E}{R_1} \left[1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1 + \operatorname{cth} (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{T}{4}}{1 + \operatorname{cth} \alpha_1 \frac{T}{4}} e^{-\alpha_2 \left(t - \frac{T}{2} \right)} \right], \quad \frac{T}{2} < t \leq T.$$

Здесь $\alpha_1 = (R_1 + R_2)/L$; $\alpha_2 = R_1/L$.

При непериодическом выключении ключа следует в первом равенстве положить $\alpha_2 T \gg 1$ и $(\alpha_1 + \alpha_2) T \gg 1$; в этом случае

$$i = \frac{E}{R_1 + R_2} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} e^{-\alpha_1 t} \right).$$

При непериодическом включении нужно во втором равенстве положить $\alpha_1 T \gg 1$ и $(\alpha_1 + \alpha_2) T \gg 1$, а также перенести начало координат в точку $T/2$; в этом случае:

$$i = \frac{E}{R_1} \left(1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\alpha_2 t} \right).$$

Аналогично можно получить решения и других задач, например задачи, связанной с решением дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{d\tau} + [a_0 + a_1 \operatorname{sp} \tau] x = Q \cos b (\tau + \varphi).$$

Следует отметить, что в общем случае выкладки оказываются громоздкими, но они существенно упрощаются при конкретных значениях параметров a_0 , a_1 , b и φ .

7.7. Выполним необходимые вычисления, аналогичные вычислениям предыдущей задачи:

$$\int a_1(\tau) d\tau = -\frac{a_1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} e^{i n x} = -a_1 \left(\frac{\tau^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} \right), \quad -\pi \leq \tau \leq \pi;$$

$$u(\tau) = e^{a_1 \left(\frac{\tau^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} \right)}, \quad -\pi \leq \tau \leq \pi;$$

$$v(\tau) = e^{-a_1 \left(\frac{\tau^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} \right)}, \quad -\pi \leq \tau \leq \pi.$$

Вычислим коэффициенты Фурье (подробное вычисление приводится ниже, после текста решения задачи):

$$V_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-a_1 \left(\frac{\tau^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} \right)} e^{-i n \tau} d\tau =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi a_1}} e^{\frac{a_1 \pi^2}{12}} e^{-\frac{n^2}{a_1}} \left[\Phi \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{a_1} + i \frac{1}{\sqrt{a_1}} n \right) - \Phi \left(-\frac{\pi}{2} \sqrt{a_1} + i \frac{1}{\sqrt{a_1}} n \right) \right],$$

где $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$.

Аналогично определяем и \dot{U}_n .

По ф-ле (7.14) находим решение для установившегося режима:

$$x = \dot{Q} e^{i b \tau} \frac{1}{\sqrt{\pi a_1}} e^{\frac{a_1}{4} \tau^2} \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{n^2}{a_1}}}{i n + i b + a_0} \left[\Phi \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{a_1} + i \frac{1}{\sqrt{a_1}} n \right) - \Phi \left(-\frac{\pi}{2} \sqrt{a_1} + i \frac{1}{\sqrt{a_1}} n \right) \right] e^{i n \tau}, \quad -\pi \leq \tau \leq \pi.$$

В случае постоянного воздействия, т. е. при $b=0$, получаем

$$x = Q \frac{1}{\sqrt{\pi a_1}} e^{\frac{a_1}{4} \tau^2} \left\{ \frac{2 \Phi \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{a_1} \right)}{a_0} + \right. \\ \left. + a_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{n^2}{a_1}}}{n^2 + a_0^2} \left[\Phi \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{a_1} + i \frac{1}{\sqrt{a_1}} n \right) - \Phi \left(-\frac{\pi}{2} \sqrt{a_1} + i \frac{1}{\sqrt{a_1}} n \right) \right] \cos n \tau + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n e^{-\frac{n^2}{a_1}}}{n^2 + a_0^2} \left[\Phi \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{a_1} + i \frac{1}{\sqrt{a_1}} n \right) - \Phi \left(-\frac{\pi}{2} \sqrt{a_1} + i \frac{1}{\sqrt{a_1}} n \right) \right] \sin n \tau \right\}, \quad -\pi \leq \tau \leq \pi.$$

Результаты расчета величины x/Q при $a_0=1$ и $a_1=0,8$ сведены в следующую таблицу.

τ	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
x/Q	7,51	2,83	1,81	1,36	1,37	1,69	2,47	3,69	7,51

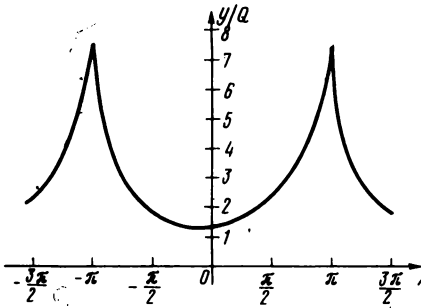


Рис. Р 7.3

График, построенный по этой таблице, изображен на рис. Р7.3. При расчете, преследуя только иллюстративные цели, учитывалась лишь первая гармоника.

Аналогично можно решить и уравнение, например, вида

$$\frac{dx}{d\tau} + a(\tau)x = Q \cos b(\tau + \varphi);$$

его решение выражается равенством:

$$x = \frac{1}{\sqrt{\pi a_1}} Q e^{\frac{a_1}{n} \tau^2} \left\{ \cos b(\tau + \varphi) \cdot \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_0 e^{-\frac{n^2}{a_1}}}{(n+b)^2 + a_0^2} \left[\Phi\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{a_1} + i \frac{n}{\sqrt{a_1}}\right) - \Phi\left(-\frac{\pi}{2} \sqrt{a_1} + i \frac{n}{\sqrt{a_1}}\right) \right] e^{i n \tau} + \right. \\ \left. + \sin b(\tau + \varphi) \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(n+b) e^{-\frac{n^2}{a_1}}}{(n+b)^2 + a_0^2} \left[\Phi\left(\frac{n \sqrt{a_1}}{2} + i \frac{n}{\sqrt{a_1}}\right) - \Phi\left(-\frac{\pi \sqrt{a_1}}{2} + i \frac{n}{\sqrt{a_1}}\right) \right] e^{i n \tau} \right\}, \quad -\pi \leq \tau \leq \pi.$$

Эти ряды сходятся очень быстро как из-за множителя e^{-n^2/a_1} , так и из-за того, что при $n \gg \pi a_1/2$:

$$\Phi\left(\frac{\pi \sqrt{a_1}}{2} + i \frac{n}{\sqrt{a_1}}\right) - \Phi\left(-\frac{\pi \sqrt{a_1}}{2} + i \frac{n}{\sqrt{a_1}}\right) \approx 0.$$

Теперь вычислим интеграл для определения коэффициентов Фурье более подробно:

$$\dot{V}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-a_1 \left(\frac{\tau^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} \right)} e^{-i n \tau} d\tau = \frac{1}{\pi} e^{\frac{a_1 \pi^2}{12}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-a \frac{\tau^2}{4} - i n \tau} d\tau.$$

Преобразуем выражение показателя экспоненты:

$$-a_1 \frac{\tau^2}{4} - i n \tau = -\frac{a_1}{4} \left(\tau^2 + \frac{4}{a_1} i n \tau \right) = -\frac{a_1}{4} \left[\tau^2 + 2 \frac{2}{a_1} i n \tau + \left(\frac{2}{a_1} i n \right)^2 - \right.$$

$$-\left(\frac{2}{a_1} i n\right)^2] = -\frac{a_1}{4} \left[\left(\tau + \frac{2}{a_1} i n \right)^2 + \frac{4n^2}{a_1^2} \right] = -\frac{a_1}{4} \left(\tau + \frac{2}{a_1} i n \right)^2 - \frac{n^2}{a_1}.$$

Теперь выражение \dot{V}_n можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &= \frac{1}{\pi} e^{\frac{a_1 \pi^2}{12}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{a_1}{4} \left(\tau + \frac{2}{a_1} i n \right)^2 - \frac{n^2}{a_1}} d\tau = \\ &= \frac{1}{\pi} e^{\frac{a_1 \pi^2}{12}} e^{-\frac{n^2}{a_1}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{a_1}{4} \left(\tau + \frac{2}{a_1} i n \right)^2} d\tau. \end{aligned}$$

Заменим переменные: $\frac{\sqrt{a_1}}{2} \left(\tau + \frac{2}{a_1} i n \right) = z, dx = \frac{2}{\sqrt{a_1}} dz;$

теперь

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &= \frac{1}{\pi} e^{\frac{a_1 \pi^2}{12}} e^{-\frac{n^2}{a_1}} \frac{2}{\sqrt{a_1}} \int_{-\frac{\pi \sqrt{a_1}}{2} + i \frac{n}{\sqrt{a_1}}}^{\frac{\pi \sqrt{a_1}}{2} + i \frac{n}{\sqrt{a_1}}} e^{-z^2} dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi a_1}} e^{\frac{a_1 \pi^2}{12}} e^{-\frac{n^2}{a_1}} \left[\Phi \left(\frac{\pi \sqrt{a_1}}{2} + i \frac{n}{\sqrt{a_1}} \right) - \Phi \left(-\frac{\pi \sqrt{a_1}}{2} + i \frac{n}{\sqrt{a_1}} \right) \right], \end{aligned}$$

где $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt.$

7.8. Полагая $dx/d\tau = k$, находим уравнение изоклины:

$$x = -k \frac{1}{a(\tau)} = -k \frac{1 + \mu \sin \tau}{a_0}.$$

Задаваясь различными значениями k , легко построить семейство изоклин (рис. P7.4), на каждой из которых наносятся засечки под углом, тангенс которого равен k . Затем, по обычным правилам, из точки, соответствующей начальным условиям, строится интегральная кривая $x(\tau)$.

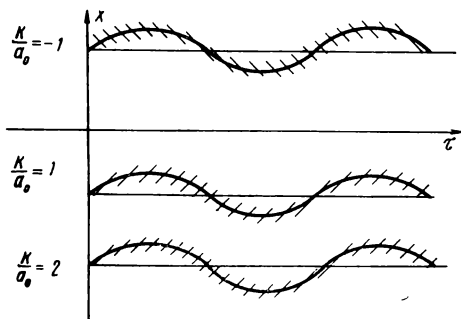


Рис. P7.4

7.9. Целесообразно ввести обозначения: $u/E = x, u_1/E = x_1, u_2/E = x_2, R/R_1 = k, t/RC = \tau, t/R_1C = k\tau$. При этих обозначениях закон изменения безразмерного напряжения на конденсаторе (с учетом переноса начала координат) запишется следующим образом:

$$x = 1 - (1 - x_1) e^{-\tau} \quad \text{— во время заряда;}$$

$$x = x_2 e^{-k\tau} \quad \text{— во время разряда.}$$

Найдем выражение изображения на фазовой плоскости:

$$\dot{x} = 1 - x \quad \text{— во время заряда;}$$

$$\dot{x} = -kx \quad \text{— во время разряда.}$$

График фазового изображения дан на рис. P7.5a.

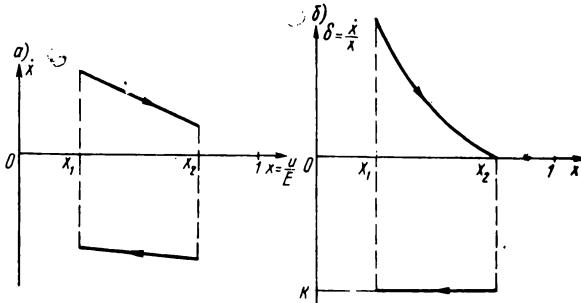


Рис. P 7.5

Найдем выражение изображения на плоскости диссипанта:

$$\delta = \frac{1}{x} - 1 \quad \text{— во время заряда;}$$

$$\delta = -k \quad \text{— во время разряда.}$$

График изображения на плоскости диссипанта дан на рис. P7.5б.

7.10. Общее уравнение параметрической цепи первого порядка имеет вид: $dh/dt + a(t)h = 0$ с начальным условием $h(0) = A$.

Непосредственно из общего уравнения определяем искомый закон изменения коэффициента $a(t)$: $a(t) = -\dot{h}(t)/ht$.

7.11. В данном случае $h(0) = A = 1$. По формуле, полученной в задаче 7.10, находим

$$a(t) = -\frac{\dot{h}(t)}{h(t)} = -\frac{2\alpha t e^{-\alpha t^2}}{e^{-\alpha t^2}} = 2\alpha t.$$

Уравнение цепи будет следующим:

$$\frac{dh}{dt} + 2\alpha t \cdot h(t) = \delta(t).$$

Реализационная схема изображена на рис. P7.6.

Сопротивление резистора должно изменяться по линейному закону, причем начало изменения должно совпадать с моментом подачи входного импульса. Отметим, что в данном случае закон изменения параметра существенно проще выходного сигнала.

7.12. Составим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dh}{dt} + a(t)h = 0;$$

найдем

$$a(t) = -\frac{\omega \cos \omega t}{\sin \omega t} = -\omega \operatorname{ctg} \omega t.$$

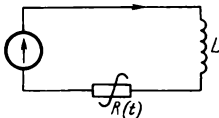


Рис. P 7.6

Таким образом,

$$\frac{dh}{dt} - \omega \operatorname{ctg} \omega t h(t) = 0, \quad h(0) = 1.$$

Конечно, реализовать резистор, сопротивление которого меняется по закону $\operatorname{ctg} \omega t$, невозможно; следовательно, создавать колебания вида $\sin \omega t$ при помощи параметрической цепи первого порядка нельзя. Нет смысла создавать и колебания, приближенно отображающие функцию $\sin \omega t$ (при помощи резистора, сопротивление которого приближенно воспроизводит функцию $\operatorname{ctg} \omega t$), так как закон изменения параметра сложнее закона выходного сигнала.

7.13. Найдем коэффициент $a(t)$:

$$a(t) = -\frac{(\operatorname{th} \alpha t)'}{\operatorname{th} \alpha t} = -\alpha \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \alpha t \operatorname{th} \alpha t} = -2\alpha \frac{1}{\operatorname{sh} 2\alpha t}.$$

Дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{dh}{dt} - 2\alpha \frac{1}{\operatorname{sh} 2\alpha t} h = \delta(t), \quad h(0) = 1.$$

Очевидно реализация подобной цепи не имеет смысла, так как функцию $1/\operatorname{sh} 2\alpha t$ создать не легче, чем функцию $\operatorname{th} \alpha t$, и, кроме того, здесь сопротивление резистора должно быть отрицательным.

7.14. Решение однородного уравнения второго порядка известно: $x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$. Находя по методу Лагранжа $C_1(t)$ и $C_2(t)$ и подставляя их в общее решение (соответствующие выкладки приведены в П.2), получаем

$$x = \int_0^t f(\xi) \sin \omega_0 (t - \xi) d\xi + k_1 \cos \omega_0 t + k_2 \sin \omega_0 t.$$

Для реализации данной цепи нужны перемножитель, генератор опорного напряжения $\sin \omega_0 t$, линия задержки, интегратор и сумматор. Подобные фильтры целесообразно применять тогда, когда в одной системе должно быть много однотипных фильтров и для всех этих фильтров можно использовать один общий стабильный генератор. Кроме того, параллельное соединение таких фильтров позволяет получить устойчивые N -звенные параметрические фильтры, эквивалентные линейным фильтрам N -го порядка.

7.15. Так как

$$\begin{aligned} \int_0^T \sin(\omega t + \varphi) \sin \omega t dt &= \int_0^T \cos \varphi \sin^2 \omega t dt + \\ &+ \int_0^T \sin \varphi \cos \omega t \sin \omega t dt = \cos \varphi \int_0^T \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\omega t \right) dt = \cos \varphi \frac{1}{2} T, \end{aligned}$$

если время интегрирования T достаточно велико ($T \gg 2\pi/\omega$), то алгоритм измерения фазы будет следующим:

$$\cos \varphi = \frac{2}{T} \int_0^T \sin(\omega t + \varphi) \sin \omega t dt.$$

Таким образом, реализационная схема параметрической цепи первого порядка должна содержать генератор опорного напряжения $\sin \omega t$, перемножитель и интегратор (см. рис. P7.7).

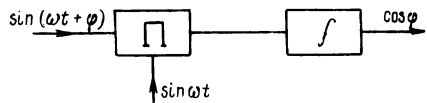


Рис. P 7.7

7.16. Решение будем искать в виде

$$x(\tau) = e^{-\tau} + e^{-k\tau};$$

коэффициент k подлежит определению.

Найдем производную $\dot{x} = -e^{-\tau} - k e^{-k\tau}$ и подставим \dot{x} и x в исходное уравнение для определения невязки $\alpha(\tau)$:

$$\begin{aligned} \alpha(\tau) &= -e^{-\tau} - k e^{-k\tau} + e^{-\tau} + e^{-k\tau} + q \ln(e^{-\tau} + e^{-k\tau} - e^{-\tau}) = \\ &= [1 - k(1 + q)] e^{-k\tau}. \end{aligned}$$

Определим коэффициент k разными методами.

Метод наименьших квадратов. Нужно минимизировать функционал

$$J = \int_a^b \alpha^2(\tau) d\tau, \text{ т. е. коэффициент } k \text{ определяется из условия:}$$

$$\int_a^b \frac{\partial \alpha}{\partial k} \alpha d\tau = 0.$$

Положим $a=0, b=\infty$. Вычислим:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial k} = -(1 + q) e^{-k\tau} - [1 - k(1 + q)] e^{-k\tau},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial \alpha}{\partial k} \alpha d\tau = \frac{1}{2k} \left\{ -(1 + q) [1 - k(1 + q)] - \frac{[1 - k(1 + q)]^2}{2k} \right\}.$$

Приравнявая $\int_0^{\infty} \frac{\partial \alpha}{\partial k} \alpha d\tau = 0$, получаем

$$k_{1,2} = \pm \frac{1}{1 + q}.$$

Проверка показывает, что k_2 не минимизирует невязку; следовательно,

$$k = \frac{1}{1 + q}.$$

Метод моментов. В этом методе минимизируется величина $I = \int_a^b \alpha(\tau) \varphi(\tau) d\tau$,

где $\varphi(\tau)$ — моментная функция; положим $\varphi(\tau) \equiv 1, a=0, b=\infty$,

$$I = \int_0^{\infty} \alpha(\tau) d\tau = \frac{1}{k} [1 - k(1 + q)].$$

Приравнявая $I(k)=0$, получаем, что и по этому методу

$$k = \frac{1}{1 + q}.$$

Метод коллокаций. Потребуем, чтобы в точке $\tau=0$ невязка обращалась в нуль. Это условие дает уравнение $1 - k(1 + q) = 0$, из которого находим то же значение

$$k = \frac{1}{1 + q}.$$

Таким образом, решение уравнения имеет вид:

$$x(\tau) = e^{-\tau} + e^{-\frac{1}{q+1}\tau}$$

7.17. Перепишем исходное уравнение в виде:

$$\frac{dx}{d\tau} + x = -\tau x^2, \quad x(0) = x_0;$$

теперь решение можно представить в виде

$$x(\tau) = -\int_0^\tau h(\tau-s) s x^2(s) ds + x_0,$$

где $h(\tau)$ — функция Грина, которая в данном случае совпадает с импульсной переходной функцией цепи, т. е. является решением уравнения

$$\frac{dh}{d\tau} + h = \delta(\tau);$$

очевидно, $h(\tau) = e^{-\tau}$. Таким образом,

$$x(\tau) = -\int_0^\tau e^{-(\tau-s)} s x^2(s) ds + x_0.$$

Примем нулевое приближение $x^{[0]}(\tau) = x_0$ и найдем первое приближение:

$$\begin{aligned} x^{[1]}(\tau) &= x_0 - e^{-\tau} \int_0^\tau e^s s x_0^2 ds = x_0 - x_0^2 e^{-\tau} [e^s (s-1)] \Big|_0^\tau = \\ &= x_0 - x_0^2 e^{-\tau} [e^\tau (\tau-1) + 1]. \end{aligned}$$

Таким образом, $x^{[1]} = x_0 - x_0^2 (\tau + e^{-\tau} - 1)$.

Аналогично можно найти и последующие приближения.

7.18. Представим $\delta(t)$ в виде

$$\delta(t) = \delta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

и найдем процесс $x(t)$:

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = \delta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \cos(n\omega t + \varphi_n),$$

$$\ln x = \delta_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n}{n\omega} \sin(n\omega t + \varphi_n) + C,$$

$$x = C_1 e^{\delta_0 t} e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n}{n\omega} \sin(n\omega t + \varphi_n)}.$$

Из последней записи ясно, что $x(t) \rightarrow 0$, если $\delta_0 < 0$, и $x(t) \rightarrow \infty$, если $\delta_0 > 0$, так как правый сомножитель представляет собой периодическую функцию.

7.19. В первом уравнении $\delta(t) = \omega \operatorname{ctg} \omega t$, т. е. диссипант представляет собой периодическую функцию без постоянной составляющей, и, следовательно, процесс $x(t)$ является периодическим (точное решение известно: $x = a \sin \omega t$).

Во втором уравнении $\delta(t) = -\alpha + \omega \operatorname{ctg} \omega t$, т. е. диссипант содержит отрицательную постоянную составляющую, и, следовательно, $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ (точное решение второго уравнения тоже известно: $x = a e^{-\alpha t} \sin \omega t$).

7.20. Так как при $a_n > 0$

$$\delta(t) = - \sum_{n=0}^N a_n t^n < 0$$

для $t > 0$, решение устойчиво, причем устойчивая точка соответствует $x = 0$.

7.21. В данном случае

$$\delta(t, x) = -\psi(t) \frac{\varphi(x)}{x} + f(t) \frac{1}{x},$$

и в момент $t = 0$

$$\delta(0, x_0) = -\psi(0) \frac{\varphi(0)}{x} + f(0) \frac{1}{x_0}.$$

Если $\delta(0, x_0) > 0$ — процесс растет, если же $\delta(0, x_0) < 0$ — уменьшается.

7.22. В данном случае

$$\delta(t) = -a(t) + \frac{1}{x} f(t)$$

и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = -a(\infty);$$

так как по условию $a(\infty) > 0$, то $x(t) \rightarrow 0$.

8

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ ВТОРОГО И БОЛЕЕ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ В СВОБОДНОМ РЕЖИМЕ ПРИ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЯХ (ЛИНЕЙНАЯ ТРАКТОВКА)

Общие сведения

Предметность настоящего раздела адресуется к автогенераторам (генераторам) и усилителям, свободным от приложенных внешних воздействий; вопрос ставится так: возможно ли самовозбуждение (нарушение устойчивости) при данной схеме и данных параметрах цепи. Так как в свободном режиме колебания возникают из-за внутренних флуктуаций, начальный период роста этих колебаний характеризуется их малостью. Для малых колебаний, соответствующих любому участку нелинейной характеристики цепи, указанный участок может считаться линейным и, следовательно, для выяснения вопроса о возможности роста колебаний в данной нелинейной цепи, последнюю можно заменить линейной. Таким образом, устойчивость при малых колебаниях можно исследовать на основе линейной трактовки и называть ее следует линейной устойчивостью.

В зависимости от исходных данных задача может формулироваться по-разному. Если изучаемая цепь задана своим дифференциальным уравнением, задача состоит в оценке поведения решения уравнения при ненулевых начальных условиях. Если же цепь задана своими частотными характеристиками, т. е. комплексной передаточной функцией, задача сводится к оценке устойчивости по частотным характеристикам.

Частотные характеристики могут быть заданы в виде аналитического выражения комплексной передаточной функции или в виде графиков (таблицы значений) амплитудно-частотной (АЧ) и фазо-частотной (ФЧ) характеристик, от которых можно перейти и к годографу, представляющему собой сочетание АЧ и ФЧ характеристик на одном графике (в одном выражении, если речь идет

об аналитическом представлении). Для каждого из этих видов задания характеристик разработаны свои приемы выяснения устойчивости, называемые критериями устойчивости. Ниже излагаются примеры изучения устойчивости по различным критериям.

Общие определения устойчивости даны в П.10. В теории линейной устойчивости изучается только устойчивость «в малом», при которой малые изменения воздействия или параметров цепи вызывают малые же изменения реакции.

Исследование устойчивости по дифференциальному уравнению (критерий Рауса—Гурвица, критерий Лъенара—Шипара)

Решение линейного однородного уравнения m -го порядка

$$a_m \frac{d^m x}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0$$

имеет, как известно, вид: $x = \sum_{i=1}^m A_i e^{p_i t}$, где A_i — постоянные, а p_i — корни характеристического уравнения:

$$a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0. \quad (8.1)$$

Корни могут быть вещественными: $p_i = \beta_i$ или комплексно-сопряженными: $p_i = \alpha_i \pm i\omega_i$. Если уравнение имеет n вещественных корней и k пар комплексно-сопряженных, решение записывается в виде суммы

$$x = \sum_{i=1}^n C_i e^{\beta_i t} + \sum_{i=1}^k C_i e^{\alpha_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i).$$

Из этого выражения следует, что система является устойчивой, если все слагаемые с течением времени уменьшаются (затухают), т. е. показатели экспонент имеют отрицательные знаки. Другими словами, система является устойчивой, если все вещественные корни и вещественные части всех комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения отрицательны. Если же хотя бы один корень (или его вещественная часть) будет положительным, т. е. появится слагаемое одного из видов $e^{|\beta_k| t}$, $e^{|\alpha_k| t} \cos(\omega_k t + \varphi_k)$, система окажется неустойчивой.

Случай, когда $\beta_k = 0$, соответствует отсутствию в характеристическом уравнении свободного члена, т. е. члена с переменной x не под знаком производной; в этом случае можно говорить об устойчивости производной dx/dt , так как относительно нее составлено дифференциальное уравнение. Случай, когда $\alpha_k = 0$, соответствует «колебательному решению», т. е. в системе будет иметь место гармоническое колебание с постоянной амплитудой.

Таким образом, задача выяснения устойчивости сводится к определению знака корней (вещественных или вещественной части

комплексно-сопряженных) характеристического уравнения (8.1). Нахождение корней уравнения в тех случаях, когда его степень выше второй, представляет собой сложную задачу, как правило, решаемую приближенно. Однако для исследования устойчивости достаточно определить знаки вещественных частей корней и для этих целей разработаны специальные приемы, среди которых наибольшим распространением пользуется так называемый критерий Рауса—Гурвица¹⁾.

Согласно этому критерию для ответа на вопрос: являются ли все вещественные части корней характеристического уравнения отрицательными, нужно составить определитель $(m+1)$ -го порядка, у которого диагональные²⁾ элементы представляют собой коэффициенты a с возрастающими справа налево индексами. В каждом из столбцов определителя под диагональным элементом выписываются коэффициенты с возрастающими индексами, а над ними — с убывающими. Все коэффициенты, индексы которых превышают m или отрицательны, заменяются нулями. В общем виде этот определитель, называемый определителем Гурвица, записывается так:

$$H = \begin{vmatrix} a_{m-1} & a_{m-3} & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ a_m & a_{m-2} & a_{m-4} & & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & \cdot & a_5 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}.$$

Для полиномов второго, третьего, четвертого и пятого порядков определители Гурвица будут иметь вид:

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix}; \quad H_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix};$$

$$H_4 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}; \quad H_5 = \begin{vmatrix} a_4 & a_2 & a_0 & 0 & 0 \\ a_5 & a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_5 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}.$$

Для устойчивости необходимо, чтобы все главные миноры определителя были положительны. Напомним, что главные мино-

¹⁾ Доказательство этого критерия, называемого также теоремой Рауса—Гурвица, можно найти в любом курсе высшей алгебры. Рациональные полиномы, вещественные части корней которых отрицательны, называются полиномами Гурвица.

²⁾ Имеется в виду диагональ, соединяющая левый верхний угол с правым нижним углом.

ры образуются отбрасыванием одноименных нижних строк и правых столбцов. Обозначим их через M_k . Тогда главные миноры определителя Гурвица, например, пятого порядка будут:

$$M_4 = a_4; \quad M_3 = \begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_5 & a_3 \end{vmatrix}; \quad M_2 = \begin{vmatrix} a_4 & a_2 & a_0 \\ a_5 & a_3 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_2 \end{vmatrix};$$

$$M_1 = \begin{vmatrix} a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ a_5 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_5 & a_3 & a_1 \end{vmatrix}; \quad M_0 = H_5.$$

Напомним, что последний минор M_0 равен определителю H_m ; если его раскрыть по элементам последнего столбца, то сразу видно, что $M_0 = a_0 M_1$. Следовательно, требование положительности последнего минора сводится всегда к требованию положительности свободного члена полинома. Составим в качестве примеров условия устойчивости для полиномов третьего и четвертого порядков. Для полинома третьего порядка:

$$M_2 > 0; \quad M_1 > 0; \quad M_0 > 0,$$

или

$$a_2 > 0; \quad a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0; \quad a_0 > 0.$$

Для полинома четвертого порядка:

$$M_3 > 0; \quad M_2 > 0; \quad M_1 > 0; \quad M_0 > 0,$$

или

$$a_3 > 0; \quad a_2 a_3 - a_3 a_4 > 0; \quad a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 > 0; \quad a_0^5 > 0.$$

ТАБЛИЦА 8.1

Условия Льенара—Шипара

№ пп.	m — нечетное	m — четное
1	$\left. \begin{matrix} a_{m-1}, a_{m-3}, \dots, a_2, a_0 \\ M_{m-3}, M_{m-5}, \dots, M_2, M_0 \end{matrix} \right\} > 0$	$\left. \begin{matrix} a_{m-1}, a_{m-2}, a_{m-4}, \dots, a_2, a_0 \\ M_{m-3}, M_{m-5}, \dots, M_3, M_1 \end{matrix} \right\} > 0$
2	$\left. \begin{matrix} a_{m-1}, a_{m-3}, \dots, a_2, a_0 \\ M_{m-2}, M_{m-4}, \dots, M_3, M_1 \end{matrix} \right\} > 0$	$\left. \begin{matrix} a_{m-2}, a_{m-4}, \dots, a_2, a_0 \\ M_{m-2}, M_{m-4}, \dots, M_2, M_0 \end{matrix} \right\} > 0$
3	$\left. \begin{matrix} a_{m-1}, a_{m-2}, a_{m-4}, \dots, a_1, a_0 \\ M_{m-3}, M_{m-5}, \dots, M_2, M_0 \end{matrix} \right\} > 0$	$\left. \begin{matrix} a_{m-1}, a_{m-3}, \dots, a_3, a_1, a_0 \\ M_{m-3}, M_{m-5}, \dots, M_3, M_1 \end{matrix} \right\} > 0$
4	$\left. \begin{matrix} a_{m-2}, a_{m-4}, \dots, a_3, a_1, a_0 \\ M_{m-2}, M_{m-4}, \dots, M_3, M_1 \end{matrix} \right\} > 0$	$\left. \begin{matrix} a_{m-2}, a_{m-3}, \dots, a_3, a_1, a_0 \\ M_{m-2}, M_{m-4}, \dots, M_2, M_0 \end{matrix} \right\} > 0$

Таким образом, критерий Рауса—Гурвица представляет собой систему детерминантных неравенств.

Для систем высокого порядка целесообразно применять критерий Льенара—Шипара¹⁾, в котором число детерминантных неравенств примерно вдвое меньше, чем в критерии Рауса—Гурвица. По критерию Льенара—Шипара необходимое и достаточное условие отрицательности вещественных частей всех корней полинома могут быть записаны в любой из систем неравенств²⁾, приведенных в табл. 8.1.

В задачах, где коэффициенты заданы конкретными числами, можно несколько упростить вычисления на основе использования критерия Чеботарева—Меймана³⁾.

Исследование устойчивости по частотным характеристикам (критерий Найквиста, критерий Михайлова)

Если рассматриваемая цепь задана аналитическим выражением комплексной передаточной функции $N(p) = N(i\omega)$, представляющей отношение изображений (спектров) выходной величины x_2 и входной x_1 , задачу изучения устойчивости по этой передаточной функции можно свести к задаче изучения устойчивости по дифференциальному уравнению.

В самом деле, пользуясь символическим методом, можно написать: $\dot{X}_2 = N(p)\dot{X}_1$, где \dot{X}_2 и \dot{X}_1 — комплексные амплитуды выходной и входной величин. Заменяя в последнем равенстве оператор p символом d/dt и переходя от амплитуды к мгновенным значениям, получаем дифференциальное уравнение

$$x_2(t) = N\left(\frac{d}{dt}\right)x_1(t),$$

которое и предстоит исследовать на устойчивость.

Рабочее правило для составления дифференциальных уравнений формулируется следующим образом: в выражении комплексной передаточной функции, записанной в виде отношения двух рациональных полиномов

$$N(p) = \frac{b_k p^k + b_{k-1} p^{k-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0},$$

¹⁾ Лье на р и Ш и п а р (Lienard et Chipart) — французские математики; излагаемый критерий предложен в 1914 г. Доказательство его можно найти в книге Ф. Р. Г а н т м а х е р а [П.16, стр. 457—460].

²⁾ Приводимая таблица взята из книги К. А. К а р а ч а р о в а, А. Г. П и л ю т и к а «Введение в техническую теорию устойчивости движения», ГИФМЛ, 1962. Аналогичная таблица приведена на стр. 481 книги Л. Заде и Ч. Дезоера [24].

³⁾ Подробности можно найти в статье авторов «Проблема Рауса—Гурвица для полиномов и целых функций». Труды Математического института им. Стеклова, т. XXVII, а также в книге Л. Э. Э л ь с г о л ь ц а [П.42].

нужно заменить p^n на d^n/dt^n и, используя предыдущее равенство, записать:

$$\begin{aligned} a_m \frac{d^m x_2}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} x_2}{dt^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{dx_2}{dt} + a_0 x_2 = \\ = b_k \frac{d^k x_1}{dt^k} + b_{k-1} \frac{d^{k-1} x_1}{dt^{k-1}} + \dots + b_1 \frac{dx_1}{dt} + b_0 x_1. \end{aligned}$$

В этом выражении правая часть представляет собой внешнее воздействие; однако для проверки на устойчивость «в малом» достаточно исследовать однородное дифференциальное уравнение

$$a_m \frac{d^m x_2}{dt^2} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} x_2}{dt^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{dx_2}{dt} + a_0 x_2 = 0,$$

т. е. задача сводится к уже рассмотренной и можно воспользоваться критерием Рауса—Гурвица (см. задачу 8.8).

Для составления выражения комплексной передаточной функции, равно как и для экспериментального снятия частотных характеристик, нужно рассматривать изучаемое устройство при разомкнутой цепи обратной связи, а выводы, полученные при этом рассмотрении, применить к исследованию устройства с замкнутой петлей обратной связи (рис. 8.1)¹⁾.

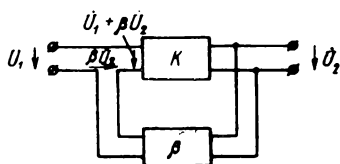


Рис. 8.1

Общее выражение комплексной передаточной функции для более или менее сложных схем следует находить при помощи теории четырехполюсников и матричного исчисления, например, по книге [28].

Для устойчивости необходимо выполнение хотя бы одного из нижеследующих условий на всех частотах:

$$\left. \begin{aligned} K_{\beta}(\omega) = \frac{U_2}{U_1} < 1 \\ \varphi_{U_2 \rightarrow U_1}(\omega) \neq n \cdot 2\pi \\ (n = 0, 1, 2 \dots) \end{aligned} \right\}, \quad (8.2)$$

где (см. рис. 8.1) $K_{\beta}(i\omega) = \frac{K(i\omega)}{1 - \beta(i\omega)K(i\omega)}$, $\varphi(\omega) = \varphi_K + \varphi_{\beta}$.

¹⁾ Подробности, относящиеся к некоторой условности такого рассмотрения, разъяснены в [30, стр. 201 и др.]; там же дан подробный вывод условий устойчивости по критерию Найквиста. Нужно добавить, что при составлении эквивалентной схемы усилителя с разомкнутой цепью обратной связи следует учитывать входное сопротивление усилителя. В ламповых схемах при отсутствии сеточных токов входное резистивное сопротивление близко к бесконечности; необходимость учета входной емкости зависит от диапазона частот и конкретных данных схемы.

Для самовозбуждения необходимо выполнение двух условий:

$$\left. \begin{aligned} K_{\beta}(\omega) &> 1 \\ \varphi(\omega_0) &= n \cdot 2\pi \end{aligned} \right\}, \quad (8.3)$$

причем первое условие, называемое балансом амплитуд, должно выполняться для всех частот в окрестности частоты ω_0 , а второе, называемое балансом фаз, — только для колебаний с частотой ω_0 .

Чтобы найти условия самовозбуждения, нужно из общего выражения передаточной функции

$$K(i\omega) = K_1(\omega) + iK_2(\omega) = \operatorname{Re}[K(i\omega)] + i\operatorname{Im}[K(i\omega)]$$

составить уравнение (баланс фаз) для определения частоты генерации ω_r :

$$\operatorname{Im}[K(i\omega_r)] = 0, \quad (8.4)$$

а затем найденную частоту подставить в неравенство (баланс амплитуд), являющееся условием самовозбуждения на частоте ω_r :

$$\operatorname{Re}[K(i\omega_r)] > 1. \quad (8.5)$$

На рис. 8.2 показаны графики частотных характеристик устойчивой (рис. 8.2а) и неустойчивой (рис. 8.2б) цепей.

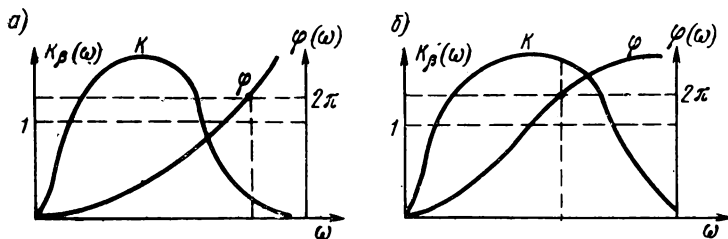


Рис. 8.2

Вместо двух характеристик — амплитудно-частотной и фазо-частотной — можно рассматривать одну, объединяющую их и называемую годографом. Годограф представляет собой комплексную передаточную функцию, построенную в полярной системе координат $K_{\beta}(\omega)$, φ ; частота ω играет роль параметра. Аналитическое выражение годографа можно построить по двум функциям:

$$K_{\beta}(\omega) = \sqrt{K_1^2(\omega) + K_2^2(\omega)}, \quad \varphi(\omega) = \operatorname{arc\,tg} \frac{K_2(\omega)}{K_1(\omega)},$$

исключая параметр ω . Экспериментальное построение годографа требует нахождения точек, соответствующих модулю и фазовому углу при фиксированных частотах, которые должны соответствовать исследуемому диапазону частот, в общем случае от нуля до бесконечности.

Из критерия Найквиста следует, что если годограф не охватывает точку с координатами $1, i0$, то система устойчива; если же годограф охватывает точку с координатами $1, i0$, система неустойчива.

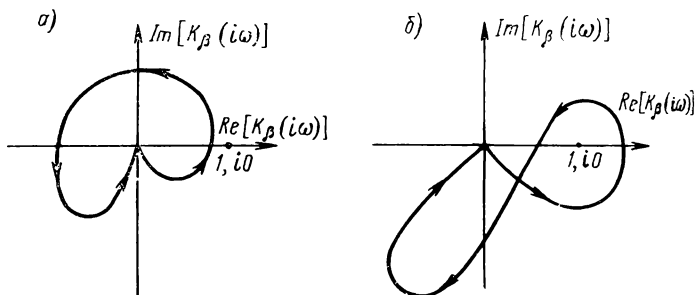


Рис. 8.3

На рис. 8.3а представлен годограф устойчивой системы, а на рис. 8.3б — неустойчивой. Стрелками показано направление, соответствующее увеличению частоты. При увеличении частоты годограф описывает кривую, проходящую через ряд квадрантов. Так, на рис. 8.3а кривая годографа прошла через четыре квадранта, окружая начало координат, а на рис. 8.3б — тоже четыре квадранта, но один из них — два раза, вследствие чего кривая не окружила начало координат. Особенности движения конца вектора годографа при изменении частоты от нуля до бесконечности могут служить признаком устойчивости. Соответствующий критерий был предложен А. В. Михайловым в 1938 г.¹⁾; в математической литературе этот критерий связывается с теоремой, называемой «принцип аргумента»²⁾.

Критерий Михайлова формулируется следующим образом: система устойчива, если приращение аргумента годографа при изменении частоты ω от нуля до бесконечности равно $m\pi/2$, где m — порядок системы; если же угол поворота вектора годографа меньше, чем $m\pi/2$, система неустойчива. Доказательство этих утверждений можно найти, например, в [30, стр. 204—205].

Равносильная формулировка критерия Михайлова может быть и такой: для устойчивости необходимо, чтобы кривая годографа проходила поочередно m квадрантов против часовой стрелки, окружая начало координат. Так как кривая годографа поочередно пересекает оси координат, то для устойчивости необходимо, чтобы координаты $N_1(\omega)$ и $N_2(\omega)$ комплексной передаточной функции $N(i\omega) = N_1(\omega) + iN_2(\omega)$ поочередно обращались в нуль. Отсюда вытекает еще одна формулировка критерия устойчивости Михайлова: для устойчивости системы необходимо, чтобы все кор-

¹⁾ «Автоматика и телемеханика», 1938, № 3.

²⁾ См., например, Л. Э. Эльсгольц [П.42, стр. 161].

ни уравнений $N_1(\omega) = 0$, $N_2(\omega) = 0$ были вещественными и перемежающимися друг с другом, т. е. чтобы между любыми двумя корнями одного из этих уравнений находился корень другого уравнения.

Порядок цепи (системы) соответствует порядку уравнения; при задании цепи частотными характеристиками порядок m нужно определять непосредственно по схеме, считая, что число независимых энергоемких элементов цепи равно порядку дифференциального уравнения.

Исследование условий самовозбуждения генераторов с внутренней обратной связью

Выше рассматривались генераторы и усилители с внешней обратной связью; в устройствах, в которых используются электронные приборы с падающим участком характеристик (с «отрицательным сопротивлением»), действие обратной связи сосредоточено внутри нелинейного элемента, и такие устройства называются генераторами (или усилителями) с внутренней обратной связью.

Условия самовозбуждения таких генераторов можно исследовать на основе дифференциальных уравнений; при этом анализ можно существенно упростить, если представить генератор в виде одной из изображенных на рис. 8.4 эквивалентных схем. Для схемы рис. 8.4а условие самовозбуждений имеет вид

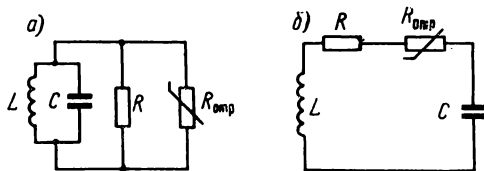


Рис. 8.4

$$\frac{1}{|R_{отр}|} > \frac{1}{R} \quad \text{или} \quad |R_{отр}| < R,$$

а для схемы рис. 8.4б $|R_{отр}| > R$.

* * *

В настоящем разделе задачи расположены в нижеуказанной последовательности. Первые восемь задач посвящены составлению дифференциальных уравнений генераторов и выяснению условий самовозбуждения по этим уравнениям при помощи критериев Рауса—Гурвица или Лъенара—Шипара. В задачах 8.9—8.24 сначала находятся частотные характеристики, а затем по ним — условия самовозбуждения. В задачах 8.25—8.28 частотные характеристики заданы годографом и по нему делается заключение об устойчивости. Наконец в задачах 8.29—8.31 анализируются вопросы самовозбуждения в генераторах с внутренней обратной связью.

Задачи и упражнения

8.1. Составить дифференциальные уравнения и вывести условия самовозбуждения для схем ламповых генераторов: с индуктивной связью и контуром в цепи сетки (рис. 8.5а), с индуктивной связью и контуром в цепи анода (рис. 8.5б).

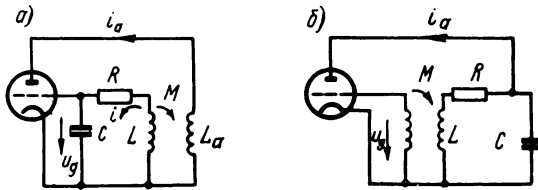


Рис. 8.5

Характеристику лампы аппроксимировать уравнением прямой $i_a = Su_{упр}$, где (см. разд. 2) $u_{упр} = u_g + Du_a$. Для схемы с контуром в цепи сетки можно считать, что $u_{упр} \approx u_g$. Сеточными токами можно пренебречь; входную емкость принять равной нулю.

8.2. Составить дифференциальное уравнение для транзисторного генератора с контуром в цепи коллектора (рис. 8.6) и получить условие самовозбуждения.

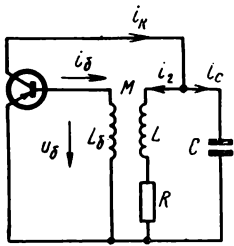


Рис. 8.6

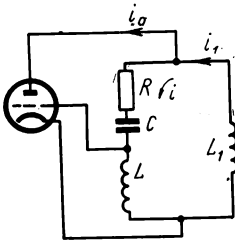


Рис. 8.7

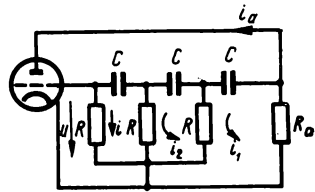


Рис. 8.8

8.3. Составить дифференциальное уравнение и вывести условие самовозбуждения трехточечной схемы генератора, изображенной на рис. 8.7. Характеристику лампы аппроксимировать линейной функцией $i_a = Su_g$; реакцией нагрузки можно пренебречь.

8.4. Составить дифференциальное уравнение и вывести условие самовозбуждения трехзвенной схемы RC-генератора (рис. 8.8). Характеристику лампы аппроксимировать линейной функцией $i_a = Su$; реакцией нагрузки можно пренебречь.

8.5. Исследовать на устойчивость дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^5 x}{dt^5} + \frac{d^4 x}{dt^4} + 7 \frac{d^3 x}{dt^3} + 4 \frac{d^2 x}{dt^2} + 10 \frac{dx}{dt} + 3x = 0.$$

Исследование провести как по критерию Рауса—Гурвица, так и по критерию Ляпуна—Шипара.

8.6. Составить условия устойчивости по следующим двум дифференциальным уравнениям:

$$1) \frac{d^3 x}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0;$$

$$2) \frac{d^4 x}{dt^4} + a_3 \frac{d^3 x}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0.$$

Условия должны быть составлены по критерию Лъенара—Шипара.

8.7. Выяснить, являются ли устойчивыми решения следующих дифференциальных уравнений:

$$1) \frac{d^4 x}{dt^4} + \frac{d^3 x}{dt^3} + 3 \frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + x = 0;$$

$$2) \frac{d^5 x}{dt^5} + 2 \frac{d^4 x}{dt^4} + 3 \frac{d^3 x}{dt^3} + 2 \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = 0.$$

8.8. На рис. 8.9 изображена схема цепи, передаточная функция которой имеет вид

$$N(p) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{p C_1 R_2}{p^2 R_1 R_2 C_1 C_2 + p (C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_1 R_2) + 1}.$$

Исследовать данную цепь на устойчивость по критерию Рауса—Гурвица, предварительно перейдя к дифференциальному уравнению.

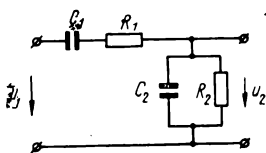


Рис. 8.9

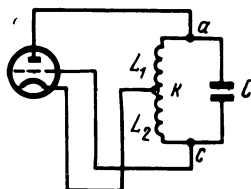


Рис. 8.10

8.9. Найти условия самовозбуждения лампового генератора с индуктивной связью и контуром в цепи сетки (рис. 8.5а, задача 8.1) на основе частотных характеристик. Принять те же допущения, что и в задаче 8.1.

8.10. Найти добротность Q колебательного контура в схеме рис. 8.5а, при которой генератор самовозбуждается. Данные элементов генератора следующие: $S=1,5$ мА/В, $\lambda=500$ м, $M=4$ мкГ.

8.11. Найти условия самовозбуждения лампового генератора с индуктивной связью с контуром в цепи анода (рис. 8.5б, задача 8.1) на основе частотных характеристик. Принять те же допущения, что и в задаче 8.1.

8.12. Найти условия самовозбуждения транзисторного генератора с индуктивной трансформаторной связью (рис. 8.6, задача 8.2) на основе частотных характеристик. При получении формул допустимо считать, что $R_{16} \gg \omega L_6$.

8.13. В задаче 8.9 было получено условие самовозбуждения лампового генератора с контуром в цепи сетки. В условии было указано, что внутреннее сопротивление лампы R_i можно принять весьма большим.

В настоящей задаче нужно выяснить, как изменяется условие самовозбуждения при учете нагрузки, т. е. когда сопротивлением нагрузки в анодной цепи нельзя пренебрегать по сравнению с внутренним сопротивлением лампы.

8.14. На рис. 8.10 изображена так называемая трехточечная схема лампового генератора с индуктивной связью. Вывести условия самовозбуждения, пренебрегая сеточными токами и активным сопротивлением контура; реакцией нагрузки пренебрегать нельзя. Входную емкость принять равной нулю.

8.15. На рис. 8.11 изображена схема транзисторного трехточечного LC-генератора с индуктивной связью. Найти условия самовозбуждения, считая, что $R_1 \ll \omega L_1$ и $R_2 \ll \omega L_2$.

8.16. Получить условие самовозбуждения транзисторного трехточечного LC-генератора с емкостной связью (рис. 8.12).

8.17. Получить условия самовозбуждения лампового трехточечного LC-генератора с емкостной связью (рис. 8.13).

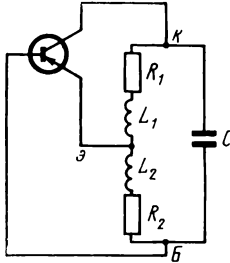


Рис. 8.11

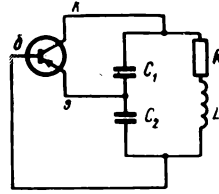


Рис. 8.12

8.18. На рис. 8.14 изображена трехточечная схема лампового генератора в общем виде. Вывести условия самовозбуждения также в общем виде.

8.19. Доказать, что в цепи, схема которой изображена на рис. 8.15, самовозбуждение невозможно.

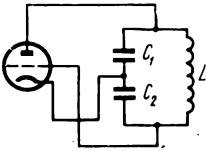


Рис. 8.13

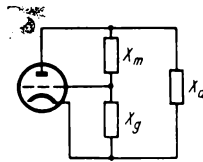


Рис. 8.14

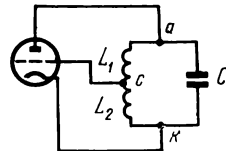


Рис. 8.15

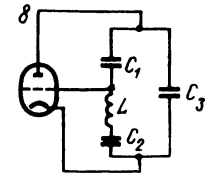
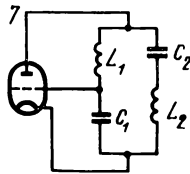
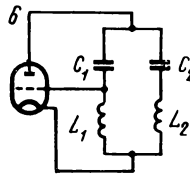
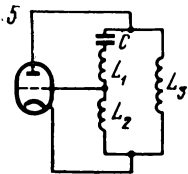
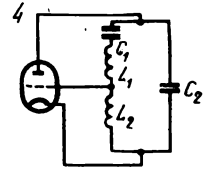
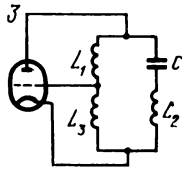
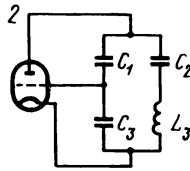
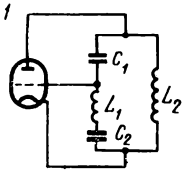


Рис. 8.16

8.20. На рис. 8.16 изображены 8 трехточечных схем. Выяснить, в каких схемах удовлетворяются фазовые соотношения и генерация возможна, а в каких — нет.

8.21. На рис. 8.17 представлена схема генератора. Найти условия его самовозбуждения.

8.22. На рис. 8.18 показана схема генератора, применяемая на метровых волнах. Найти частоту генерации ω , считая, что контуры одинаковы и наст-

роены на частоту $\omega_0 = 1/\sqrt{L_a C_a} = 1/\sqrt{L_g C_g}$. Активными сопротивлениями в колебательных контурах можно пренебречь.

8.23. Найти условия самовозбуждения однолампового RC -генератора (рис. 8.19). Сеточными токами и входной емкостью можно пренебречь.

Из условий самовозбуждения в общем случае получить условия для случая, когда $R_i \ll R_a$, $R_i \ll R$.

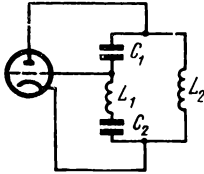


Рис. 8.17

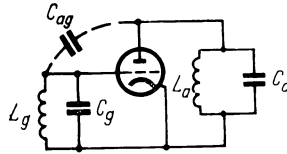


Рис. 8.18

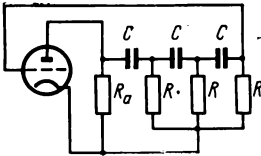


Рис. 8.19

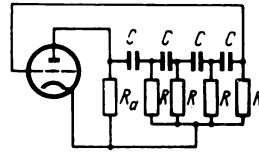


Рис. 8.20

8.24. Найти условия самовозбуждения четырехзвенного RC -генератора (рис. 8.20), приняв, что $R_i \ll R_a$ и $R_i \ll R$.

8.25. Построить годограф цепи с передаточной функцией

$$N(p) = p^2 + p + 1$$

и определить по критерию Михайлова, является ли данная цепь устойчивой. Здесь $p = i\omega$ — нормированная (безразмерная) частота.

8.26. Построить годограф цепи с передаточной функцией

$$N(p) = 2p^3 + 2p^2 + 3p + 5$$

и определить по критерию Михайлова, является ли данная цепь устойчивой. Здесь, как и в задаче 8.25, $p = i\omega$ — нормированная частота.

8.27. Построить годограф цепи с передаточной функцией

$$N(p) = p^4 + 2p^3 + 3p^2 + 2p + 1$$

и определить по критерию Михайлова, является ли данная цепь устойчивой; $p = i\omega$ — нормированная частота.

8.28. Построить годограф цепи с передаточной функцией

$$N(p) = 3p^4 + 4p^3 + 3p^2 + 3p + 1$$

и определить по критерию Михайлова, является ли данная цепь устойчивой; $p = i\omega$ — нормированная частота.

8.29. На рис. 8.21а изображена схема динаatronного генератора. Составить дифференциальное уравнение и найти условия его самовозбуждения. Характеристику лампы, изображенную на рис. 8.21б, в окрестности рабочей точки можно аппроксимировать выражением $i_a = -S_0 u$.

8.30 На рис. 8.22а дана схема динаatronного генератора, собранного на лампе с характеристикой, приведенной на рис. 8.22б.

Выяснить возможность генерации при следующих данных: $L=100$ мкГ, $f_0=10^6$ Гц, $Q=100$, $E_a=75$ В.

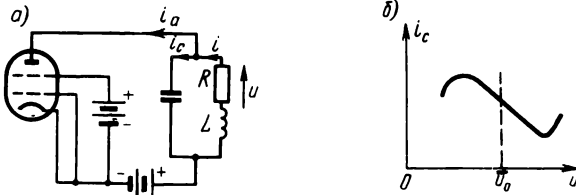


Рис. 8.21

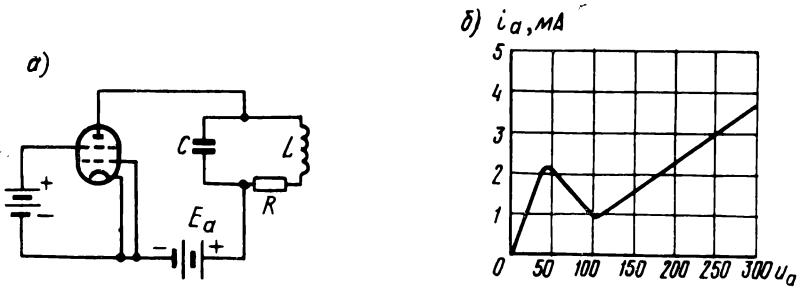


Рис. 8.22

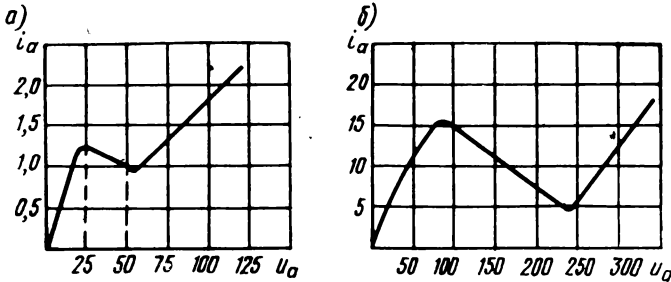


Рис. 8.23

8.31. На рис. 8.23 изображены характеристики двух различных ламп; выясните, какую из них следует использовать в схеме динаatronного генератора (рис. 8.22а), если эквивалентное сопротивление контура на резонансной частоте равно 20 кОм.

РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ

8.1. Составим интегро-дифференциальное уравнение для цепи рис. 8.5а:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = M \frac{di_a}{dt}.$$

Выразим ток i в контуре через напряжение u_c на конденсаторе, равное напряжению на сетке u_g :

$$u_g = \frac{1}{C} \int idt; \quad i = C \frac{du_g}{dt}; \quad \frac{di}{dt} = C \frac{d^2 u_g}{dt^2}.$$

Анодный ток i_a также выразим через напряжение на сетке:

$$\frac{di_a}{dt} = \frac{di_a}{du_g} \frac{du_g}{dt} = S \frac{du_g}{dt}.$$

Подставив оба равенства в исходное уравнение, получим

$$\frac{d^2 u_g}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_g}{dt} + \frac{1}{LC} u_g = \frac{MS}{LC} \frac{du_g}{dt}$$

или

$$\frac{d^2 u_g}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} - \frac{MS}{LC} \right) \frac{du_g}{dt} + \frac{1}{LC} u_g = 0.$$

По критерию Рауса—Гурвица для нарушения устойчивости необходимо, чтобы один из коэффициентов был отрицательным, так как коэффициент $1/LC > 0$, остается потребовать, чтобы $R/L - MS/LC > 0$, откуда условие самовозбуждения принимает вид: $M > RC/S$.

Теперь перейдем к схеме рис. 8.5б. Здесь $i_a = S(u_g + Du_a)$, а так как $u_a/u_g \approx -L/M$, то

$$i_a = S \left(u_g - D \frac{L}{M} u_g \right) \quad \text{и} \quad \frac{di_a}{du_g} = S - SD \frac{L}{M}.$$

В соответствии с этим условие самовозбуждения примет вид $M > LD + RC/S$.

8.2. Исходным является уравнение Кирхгофа

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L + M \frac{di_C}{dt} = \frac{1}{C} \int i_C dt.$$

Приведем это уравнение к одной переменной — напряжению на базе u_6 . Используя равенства

$$M \frac{di_L}{dt} \approx u_6, \quad i_L = \frac{1}{M} \int u_6 dt,$$

можно заменить переменные в первых двух членах исходного уравнения. Ток i_C можно выразить через u_6 при помощи входного сопротивления R_{i6} транзистора: $i_6 = u_6/R_{i6}$, а ток i_C — через токи i_6 и i_L :

$$i_C = \beta i_6 - i_L = \beta \frac{u_6}{R_{i6}} - \frac{1}{M} \int u_6 dt.$$

Здесь β определяется равенством: $i_k = i_L + i_C = \beta i_6$, т. е. $\beta = i_k/i_6$.

Подставив приведенные равенства в исходное уравнение, после простых преобразований найдем

$$\frac{du_6}{dt} + \frac{1}{L} \left[R - \frac{\beta}{R_{i6}} \frac{M}{C} \right] u_6 + \frac{1}{LC} \int u_6 dt = 0.$$

Преобразуем отношение β/R_{i6} :

$$\frac{\beta}{R_{i6}} = \frac{i_k}{i_6} \frac{i_6}{u_6} = \frac{i_k}{u_6} = S_T$$

и продифференцируем последнее выражение:

$$\frac{d^2 u_6}{dt^2} + \frac{R}{L} \left(1 - \frac{MS_T}{RC} \right) \frac{du_6}{dt} + \omega_0^2 u_6 = 0.$$

Условие самовозбуждения будет иметь вид: $M > RC/S_T$, где на линейном участке $S_T = i_k/u_6$.

8.3. По схеме рис. 8.3 составляем уравнения:

$$\begin{aligned} i_a &= i_1 - i; \\ -L \frac{di}{dt} - Ri - \frac{1}{C} \int i dt &= L_1 \frac{di_1}{dt}. \end{aligned} \quad (1)$$

Из двух уравнений получаем

$$L \frac{di}{dt} + L_1 \left(\frac{di}{dt} + \frac{di_a}{dt} \right) + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = 0. \quad (2)$$

Выразим анодный ток i_a через ток i :

$$i_a = Su_6 = SL \frac{di}{dt}, \quad \frac{di_a}{dt} = SL \frac{d^2 i}{dt^2}.$$

Выражение (2) при этом переписется как

$$L_1 SL \frac{d^2 i}{dt^2} + (L + L_1) \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = 0$$

или

$$L_1 LC S \frac{d^3 i}{dt^3} + (L + L_1) C \frac{d^2 i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i = 0. \quad (3)$$

Составляя по выражению (3) условие самовозбуждения по критерию Раунса—Гурвица, получаем

$$RC(L + L_1)C - L_1 LCS. \quad \Delta > 0. \quad (4)$$

Решая это неравенство относительно S , находим

$$S > RC \frac{L + L_1}{L_1 L} \quad (5)$$

или $S > RC/L_{\text{экв}}$, где $L_{\text{экв}} = L_1 L / (L_1 + L)$.

8.4. Составляем исходные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} u &= Ri \\ i_a &= Su \\ \frac{1}{C} \int i_1 dt + R(i_1 - i_2) + R_a(i_1 + i_2) &= 0 \\ \frac{1}{C} \int i_2 dt + R(i_2 - i) + R(i_2 - i_1) &= 0 \\ \frac{1}{C} \int i dt + Ri + R(i - i_2) &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Исключив из этой системы все неизвестные, кроме u , получим уравнение

$$(2\alpha + \beta S) \frac{d^3 u}{dt^3} + \frac{d^2 u}{dt^2} + 2\delta \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{1}{(RC)^2} \frac{R}{6R + 4R_a}, & 2\alpha &= RC \frac{R + 3R_a}{6R + 4R_a}, \\ 2\delta &= \frac{1}{RC} \frac{5R + R_a}{6R + 4R_a}, & \beta &= RC \frac{R R_a}{6R + 4R_a}. \end{aligned}$$

Применив к дифференциальному уравнению критерий Рауса—Гурвица, получим условие самовозбуждения: $2\delta - \omega_0^2(2\alpha + \beta S) < 0$, которое можно привести к виду

$$R_a S > 29 + 23 \frac{R_a}{R} + 4 \left(\frac{R_a}{R} \right)^2.$$

8.5. В данном случае $a_0=3$, $a_1=10$, $a_2=4$, $a_3=7$, $a_4=1$, $a_5=1$. Выписываем главные миноры:

$$M_0 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 M_1 = 3 \cdot 8 = 24 > 0,$$

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 10 \end{vmatrix} = 10 M_3 - 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 50 - 3(49 - 3 - 10 - 28) = 8 > 0,$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 5 > 0, \quad M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 3 > 0, \quad M_4 = 1 > 0.$$

Так как все миноры положительны, то в соответствии с критерием Рауса—Гурвица, решение устойчиво.

Теперь проверим этот результат по критерию Лъенара—Шипара. В данном случае $m=5$, т. е. m — нечетное и нужно пользоваться детерминантными неравенствами левого столбца (табл. 8.1).

По неравенствам п. 1 достаточно, чтобы $a_0 > 0$, $a_2 > 0$, $a_4 > 0$, $M_0 > 0$, $M_2 > 0$.

По неравенствам п. 2 достаточно, чтобы $a_0 > 0$, $a_2 > 0$, $a_4 > 0$, $M_1 > 0$, $M_3 > 0$.

По неравенствам п. 3: $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_3 > 0$, $a_4 > 0$, $M_0 > 0$, $M_2 > 0$.

По неравенствам п. 4: $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_3 > 0$, $M_1 > 0$, $M_3 > 0$.

Любая из четырех групп неравенств достаточна для выполнения условий устойчивости; в данном примере все неравенства удовлетворяются.

8.6. 1) $a_0 > 0$, $a_2 > 0$, $a_2 a_1 - a_0 > 0$;

2) $a_0 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$,

$$a_3 a_2 a_1 - a_3^2 a_0 - a_1^2 > 0.$$

Возможны и другие сочетания неравенств.

8.7. 1) Устойчиво; 2) Неустойчиво.

8.8. Заменив p символом d/dt , а амплитудные значения — мгновенными, запишем

$$R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 u_2}{dt^2} + (C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_1 R_2) \frac{du_2}{dt} + u_2 = C_1 R_2 \frac{du_1}{dt}.$$

Перейдем к однородному уравнению, одновременно освобождаясь от коэффициента при высшей производной:

$$\frac{d^2 u_2}{dt^2} + \frac{C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_1 R_2}{R_1 R_2 C_1 C_2} \frac{du_2}{dt} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} u_2 = 0.$$

Условием устойчивости решения уравнения второго порядка является выполнение двух неравенств:

$$\frac{C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_1 R_2}{R_1 R_2 C_1 C_2} = \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{C_2 R_1} > 0,$$

$$\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} > 0.$$

8.9. Представим схему рис. 8.5а в виде усилителя с разомкнутой цепью обратной связи (рис. P8.1а); заменим, кроме того, электронную лампу эквивалентной схемой, учтя, что ее внутреннее сопротивление достаточно велико. Выкладки будут проще, если воспользуемся теоремой об эквивалентном генераторе тока.

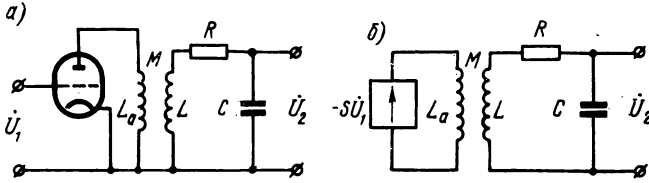


Рис. P 8.1

В результате получим схему, изображенную на рис. P8.1б; для этой схемы нужно найти условия баланса амплитуд и фаз.

Напряжение \dot{U}_k , вводимое во второй контур из первого, с большой точностью определяется выражением:

$$\dot{U}_k \approx \pm i I_1 \omega M = \pm i S \dot{U}_1 \omega M,$$

причем знак зависит от включения выводов катушки.

Напряжение \dot{U}_2 связано с напряжением \dot{U}_k соотношением:

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_k} = \frac{1}{i \omega C} \frac{1}{R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} \approx \frac{1}{i \omega C R} \frac{1}{1 + i \xi}.$$

Подставляя вместо \dot{U}_k его значение, выраженное через \dot{U}_1 , получаем

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \pm \frac{S \omega M}{\omega C R (1 + i \xi)}.$$

Баланс фаз будет иметь место при $\xi = X/R = 0$, т. е. при $\omega L = 1/\omega C$ или $\omega = \omega_0$; кроме того, перед дробью должен быть знак плюс.

Условие баланса амплитуд запишется в виде

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{S M}{R C} > 1 \text{ или } M > \frac{R C}{S}.$$

8.10. $Q > 44,3$.

8.11. Составим схему усилителя с разомкнутой цепью обратной связи (рис. P8.2а); эту последнюю упростим при помощи теоремы об эквивалентном генераторе напряжения (рис. P8.2б).

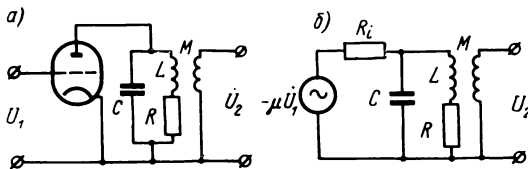


Рис. P 8.2

Найдем теперь $K(i\omega) = \dot{U}_2/\dot{U}_1$. Напряжение на контуре

$$\dot{U}_k = - \frac{\mu \dot{U}_1}{R_i + \frac{R_{\text{св}}}{1 + i \xi}} \frac{R_{\text{св}}}{1 + i \xi}.$$

Напряжение на выходе \dot{U}_2 связано с напряжением на контуре \dot{U}_k соотношением ¹⁾ $\dot{U}_2/\dot{U}_k \approx \pm \mu/L$. Составляя отношение \dot{U}_2/\dot{U}_1 , получаем

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \pm \frac{M}{L} \frac{\mu}{R_i + \frac{R_{\text{св}}}{1+i\xi}} \frac{R_{\text{св}}}{1+i\xi}.$$

Для баланса фаз необходимо, чтобы $\xi=0$ и, кроме того, нужно включить катушку так, чтобы остался только знак плюс. Для баланса амплитуд на частоте ω_0 получаем условие

$$\frac{M}{L} > \frac{R_i + R_{\text{св}}}{\mu R_{\text{св}}}.$$

Заменяв $1/\mu = D$ и $R_i/\mu = 1/S$, последнему условию можно придать вид

$$\frac{M}{L} D + \frac{1}{S R_{\text{св}}}.$$

Учитывая, что $R_{\text{св}} = L/CR$, можно также написать

$$M > LD + \frac{RC}{S}.$$

8.12. Составим эквивалентную схему с разомкнутой цепью обратной связи (рис. P8.3). Катушка обратной связи L_5 здесь нагружена на сопротивление участка база—эмиттер — R_{i6} ; это сопротивление у обычных транзисторов мало (порядка 10^3 Ом), так как в цепи базы всегда протекает базовый ток (в отличие от лампы, где сеточный ток часто можно принять равным нулю).

Найдем комплексную передаточную функцию:

$$K(i\omega) = \frac{\dot{U}_{\text{вых}}}{U_6} = \frac{\dot{U}_k}{U_6} \frac{\dot{U}_{\text{вых}}}{\dot{U}_k} = K_{\text{тр}} K_{\text{ос}},$$

где $K_{\text{тр}}$ — коэффициент усиления транзистора, а $K_{\text{ос}}$ — коэффициент передачи цепи обратной связи.

При составлении выражения для $K_{\text{тр}}$ необходимо принять во внимание вносимое из базовой цепи в коллекторный контур сопротивление, причем учесть нужно активную составляющую, так как реактивную нетрудно скомпенсировать. Сопротивление R' контура с учетом вносимого сопротивления определяется как

$$R' = R + R_{\text{вн}} = R + k^2 \frac{\rho^2}{R_{i6}},$$

где $k = M/L$, а $\rho = \sqrt{L/C}$.

Теперь

$$K_{\text{тр}} = -\mu \frac{Z_k}{R_i + Z_k} = -\mu \frac{R_{\text{св}}}{R_i + R_{\text{св}} + i\xi R_{i6}},$$

где $Z_k = \frac{R_{\text{св}}}{1+i\xi}$, $R_{\text{св}} = \frac{L}{CR'}$, $\xi = Q' \frac{2\Delta\omega}{\omega_0}$, $Q' = \frac{\rho^2}{R'}$.

¹⁾ Считаем, что $R \ll \omega L$.

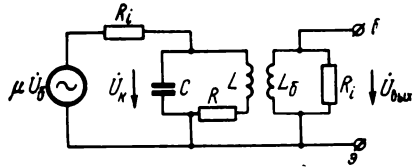


Рис. P8.3

Найдем K_{oc} :

$$K_{oc} = \frac{1}{\dot{U}_k} \frac{\dot{U}_k}{i \omega L} (-i \omega M) \cdot \frac{R_{i6}}{R_{i6} + i \omega L_6} = -\frac{M}{L} \frac{R_{i6}}{R_{i6} + i \omega L_6}.$$

Комплексная передаточная функция

$$K(i \omega) = K_{тр} K_{oc} = \mu \frac{M}{L} \frac{R_{\alpha}}{R_i + R_{\alpha} + i R_i \xi} \cdot \frac{R_{i6}}{R_{i6} + i \omega L_6}.$$

Если $R_{i6} \gg \omega L_6$ (см. условие), последнее выражение можно упростить:

$$\begin{aligned} K(i \omega) &\approx \mu \frac{M}{L} \frac{R_{\alpha}}{R_i + R_{\alpha} + i R_i \xi} = \\ &= \mu \frac{M}{L} R_{\alpha} \left[\frac{R_i + R_{\alpha}}{(R_i + R_{\alpha})^2 + R_i^2 \xi^2} - i \frac{R_i \xi}{(R_i + R_{\alpha})^2 + R_i^2 \xi^2} \right]. \end{aligned}$$

Частота генерации ω_r находится из уравнения:

$$\text{Im}[K(i \omega_r)] = 0, \text{ т. е. } \xi|_{\omega=\omega_r} = 0,$$

$$\frac{\omega_r L - \frac{1}{\omega_r C}}{R'} = 0, \quad \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Найдем условие самовозбуждения:

$$\text{Re}[K(i \omega_r)] > 1, \quad \mu \frac{M}{L} \frac{R_{\alpha}}{R_i + R_{\alpha} + i R_i \xi} > 1,$$

$$\frac{M}{L} = k > \frac{R_i + R_{\alpha}}{\mu R_{\alpha}} = \frac{1}{\mu} + \frac{R_i}{\mu R_{\alpha}},$$

$$\text{т. е. } k > D + \frac{1}{S R_{\alpha}}.$$

Необходимо иметь в виду, что R_{α} коллекторного контура транзисторного генератора существенно меньше R_{α} анодного контура лампового генератора, и поэтому при прочих равных условиях величина k в схеме транзисторного генератора должна быть больше.

8.13. Представим заданную схему в виде эквивалентной, состоящей из двух контуров. В первом контуре емкость $C_1 = \infty$; второй контур является колебательным (рис. P8.1).

Исходя из уравнений связанных контуров (см. [28, § 5]), можно получить выражение для комплексного коэффициента передачи

$$K(i \omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = -\frac{\mu}{\omega C \sqrt{R_i R}} \frac{A}{[(1 + i \xi_1)(1 + i \xi_2) + A^2]},$$

$$\text{где } \xi_1 = X_i/R_i = \omega L_a/R_i, \quad \xi_2 = X_2/R = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) / R, \quad A = \omega M / \sqrt{R_i R}.$$

Условие баланса фаз будет выполняться на частоте, определяемой из уравнения

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC} \sqrt{1 + \frac{L_a}{L} \frac{R}{R_i}}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \frac{L_a}{L} \frac{R}{R_i}}}.$$

Если $R_i \gg R$, то $\omega_r \approx \omega_0$.

Условие баланса амплитуд находится из неравенства $K(\omega_0) = U_2/U_1 > 1$. Выполняя несложные преобразования, получаем

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\mu M}{C} \frac{1}{(R_i R + \omega_0^2 M^2)}.$$

Если $R_i R \gg \omega_0^2 M^2$, то условие баланса амплитуд примет вид: $M > RC/S$, т. е. будет совпадать с условием, полученным в задаче 8.9.

В общем случае $M > \frac{RC}{S} + \frac{k^2}{\mu} L_a$, где $k^2 = M^2/LL_a$.

Так как обычно $k \ll 1$, учет реакции нагрузки в данной схеме мало влияет на условия самовозбуждения.

8.14. Заменим схему генератора схемой усилителя с разомкнутой цепью обратной связи (рис. P8.4a) и далее электронную лампу — эквивалентным генератором (рис. P8.4б).

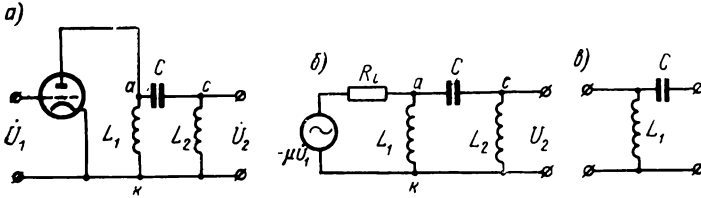


Рис. P 8.4

Для дальнейшего анализа целесообразно воспользоваться теорией четырехполюсника [28, § 2]. В соответствии с ф-лой 2.17¹⁾

$$\dot{U}_2 = -\mu \dot{U}_1 \frac{i \omega L_2}{H_a}, \quad (1)$$

где $H_a = A_{22}R_i + A_{11} i \omega L_2 + A_{21}R_i i \omega L_2 + A_{12}$.

Коэффициенты A относятся к схеме рис. P8.4в.

По табл. 2.3 (поз. 8) находим:

$$A_{11} = 1, \quad A_{12} = \frac{1}{i \omega C}, \quad A_{21} = \frac{1}{i \omega L_1}, \quad A_{22} = 1 - \frac{1}{\omega^2 L_1 C}.$$

Подставляя значения коэффициентов в выражение для сопротивления передачи H_a , получаем

$$\begin{aligned} H_a &= R_i \frac{\omega^2 L_1 C - 1}{\omega^2 L_1 C} + i \omega L_2 + R_i \frac{L_2}{L_1} + \frac{1}{i \omega C} = \\ &= \frac{R_i (\omega^2 L_1 C - 1) i \omega C - \omega^2 L_1 C \omega^2 L_2 C + R_i \omega^2 L_2 C i \omega C + \omega^2 L_1 C}{i \omega C \omega^2 L_1 C}. \end{aligned}$$

Подставив найденное выражение в (1), будем иметь

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = -\mu \frac{i \omega L_2 i \omega C \omega^2 L_1 C}{-\omega^2 L_1 C \omega^2 L_2 C + \omega^2 L_1 C + i \omega C R_i [(\omega^2 L_1 C - 1) + \omega^2 L_2 C]}$$

или

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \mu \frac{\omega^2 L_1 C \omega^2 L_2 C}{\omega^2 L_1 C (1 - \omega^2 L_2 C) + i \omega C R_i (\omega^2 L_1 C + \omega^2 L_2 C - 1)}. \quad (2)$$

¹⁾ Здесь номера формул соответствуют формулам [28].

Условие баланса фаз требует обращения в нуль мнимой части этого выражения. На частоте, при которой выполняется условие баланса фаз, возникает генерация

$$\omega_0^2 = \frac{1}{C(L_1 + L_2)}. \quad (3)$$

Условие баланса амплитуд

$$\frac{U_2}{U_1} = \mu \frac{\omega_0^2 L_2 C}{1 - \omega_0^2 L_2 C} > 1.$$

Из ф-лы (3) находим, что $\omega_0^2 L_2 C = L_2 / (L_1 + L_2)$, тогда

$$\mu > \frac{1 - L_2 / (L_1 + L_2)}{L_2 / (L_1 + L_2)} \quad \text{или} \quad \mu > \frac{L_1}{L_2}. \quad (4)$$

8.15. Представим схему генератора в виде каскадного соединения четырехполюсников (рис. P8.5); четырехполюсник Y представляет собой транзистор, а $Y_{\text{вх}} = 1/R_{i6}$ — входная проводимость транзистора. Для выяснения условия само-

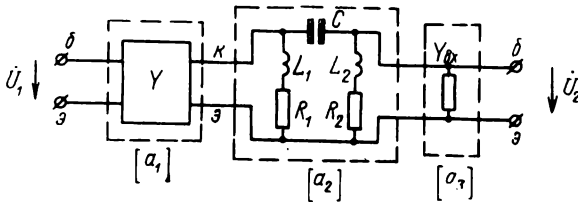


Рис. P8.5

возбуждения достаточно найти коэффициент a_{11} матрицы $[a]$ общего четырехполюсника.

Составим матрицы $[a]$ для всех четырехполюсников:

$$[a_1] = -\frac{1}{Y_{21}} \begin{bmatrix} Y_{22} & 1 \\ |Y| & Y_{11} \end{bmatrix}, \quad [a_2] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_2}{Z_3} & Z_2 \\ \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{Z_1 Z_3} & 1 + \frac{Z_2}{Z_1} \end{bmatrix}, \quad [a_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_{\text{вх}} & 0 \end{bmatrix},$$

где $Z_1 = R_1 + i\omega L_1$, $Z_2 = 1/i\omega C$, $Z_3 = R_2 + i\omega L_2$, $Y_{21} = S$; $Y_{22} = 1/R_i$.

Перемножим матрицы $[a_1]$ и $[a_2]$:

$$[a_1] \cdot [a_2] = -\frac{1}{Y_{21}} \begin{bmatrix} Y_{22} \left(1 + \frac{Z_2}{Z_3}\right) + \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{Z_1 Z_3} & Y_{22} Z_2 + 1 + \frac{Z_2}{Z_1} \\ |Y| \left(1 + \frac{Z_2}{Z_3}\right) + Y_{11} \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{Z_1 Z_3} & |Y| Z_2 + Y_{11} \left(1 + \frac{Z_2}{Z_1}\right) \end{bmatrix}.$$

Вычислим коэффициент a_{11} матрицы произведения всех трех матриц:

$$a_{11} = -\frac{1}{Y_{21}} \left[Y_{22} \left(1 + \frac{Z_2}{Z_3}\right) + \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{Z_1 Z_3} + Y_{\text{вх}} \left(Y_{22} Z_2 + 1 + \frac{Z_2}{Z_1} \right) \right].$$

Подставим выражения Z:

$$a_{11} = -\frac{1}{Y_{21}} \left\{ Y_{22} \left[1 + \frac{1}{i \omega C (R_2 + i \omega L_2)} \right] + \frac{R_1 + R_2 + i \left(\omega L_1 + \omega L_2 - \frac{1}{\omega C} \right)}{(R_1 + i \omega L_1) (R_2 + i \omega L_2)} + Y_{вх} \left[\frac{Y_{22}}{i \omega C} + 1 + \frac{1}{i \omega C (R_1 + i \omega L_1)} \right] \right\}.$$

Учтя, что $R_i \ll \omega L_i$ и $R_2 \ll \omega L_2$, выпишем вещественную и мнимую части a_{11} :

$$\operatorname{Re} [a_{11}] = -\frac{1}{Y_{21}} \left[Y_{22} - \frac{Y_{22}}{\omega^2 C L_2} - \frac{R}{\omega^2 L_1 L_2} + Y_{вх} \left(1 - \frac{1}{\omega^2 L_1 C} \right) \right],$$

$$\operatorname{Im} [a_{11}] = \frac{1}{Y_{21}} \left[\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{\omega^2 L_1 L_2} + Y_{вх} \frac{Y_{22}}{\omega C} \right].$$

Здесь $L = L_1 + L_2$, $R = R_1 + R_2$.

Определим частоту генерации:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_r L - \frac{1}{\omega_r C}}{\omega_r^2 L_1 L_2} + Y_{вх} \frac{Y_{22}}{\omega_r C} &= 0, \\ \omega_r^2 L C - 1 + Y_{вх} Y_{22} \omega_r^2 L_1 L_2 &= 0, \\ \omega_r &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{1}{1 + Y_{вх} Y_{22} \frac{L_1 L_2}{(L_1 + L_2) C}}}. \end{aligned}$$

Последнюю формулу можно упростить, если принять во внимание, что произведение $Y_{вх} Y_{22}$ имеет порядок $10^{-10} (A/B)^2$; поэтому приближенно $\omega_r \approx 1/\sqrt{LC}$.

Найдем условие самовозбуждения из неравенства $\operatorname{Re}[a_{11}] > 1$; в результате несложных преобразований получим

$$\frac{L_1}{L_2} < \frac{Y_{21}}{Y_{22}} - \frac{RC}{Y_{22}} \frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2} - \frac{Y_{вх}}{Y_{22}} \frac{L_2}{L_1}.$$

Это и есть условие самовозбуждения.

Если не учитывать сопротивления контура и входную проводимость, получим условие, аналогичное условию для лампового генератора:

$$\frac{L_1}{L_2} < \frac{Y_{21}}{Y_{22}}$$

и, так как $Y_{21} = S$, $Y_{22} = 1/R_i$, $SR_i = \mu$, то $\mu > L_1/L_2$. Однако из-за сопротивления R и входной проводимости $Y_{вх}$ коэффициент усиления транзистора должен быть больше, а именно:

$$\mu > \frac{L_1}{L_2} + \frac{RC}{Y_{22}} \frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2} + \frac{Y_{вх}}{Y_{22}} \frac{L_2}{L_1}.$$

$$8.16. \quad \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 + Y_{вх} Y_{22} \frac{L}{C_1 + C_2}},$$

$$\mu > \frac{C_2}{C_1} + \frac{R}{Y_{22}} \frac{C_1 + C_2}{L} + \frac{Y_{вх}}{Y_{22}} \frac{C_1}{C_2}.$$

$$8.17. \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}, \quad C_0 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}, \quad \mu > \frac{C_2}{C_1}.$$

8.18. Эквивалентная схема изображена на рис. Р8.6. По ф-ле (2.17) табл. 2.1 [28, § 2], находим:

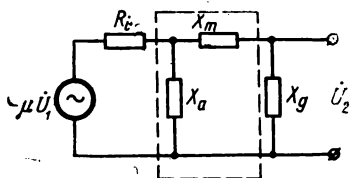


Рис. Р8.6

$$U_2 = -\mu U_1 \frac{i X_g}{H_a}, \quad (1)$$

где $H_a = A_{22}R_i + A_{11}iX_g + A_{21}R_i iX_g + A_{12}$.

Коэффициенты A относятся к четырехполюснику, обведенному пунктиром на рис. Р8.6. В соответствии с табл. 2.3 [28, поз. 8] находим:

$$A_{11} = 1; \quad A_{12} = iX_m; \quad A_{21} = \frac{1}{iX_a}; \quad A_{22} = 1 + \frac{X_m}{X_a}.$$

Подставляя значение H_a в (1), получаем

$$\frac{U_2}{U_1} = -\mu \frac{iX_g X_a}{R_i(X_a + X_m + X_g) + i(X_g + X_m)X_a}$$

или

$$\frac{U_2}{U_1} = -\mu \frac{iX_g X_a [R_i(X_a + X_m + X_g) - i(X_g + X_m)X_a]}{R_i^2(X_a + X_m + X_g)^2 + (X_g + X_m)^2 X_a^2}. \quad (2)$$

Условие баланса фаз определяем, обращая в нуль мнимую часть:

$$X_a + X_m + X_g = 0. \quad (3)$$

Из этого условия находится частота генерации ω_0 .

Условие баланс амплитуд получаем из выражения (2) при подстановке в него условия (3):

$$\frac{U_2}{U_1} = -\mu \frac{X_g}{X_g + X_m} > 1, \\ -X_m > X_g(1 + \mu). \quad (4)$$

Для выполнения условия баланса амплитуд необходимо, чтобы сопротивления X_m и X_g имели противоположные знаки; кроме того, $|X_m| > |X_g|$.

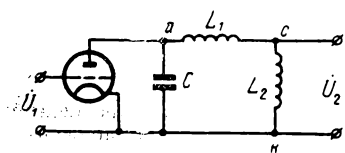


Рис. Р8.7

8.19. Для доказательства достаточно изобразить эквивалентную схему в виде, соответствующем рис. Р8.7; из рисунка ясно, что сдвиг фаз между U_2 и U_1 не может быть равен нулю или 2π .

8.20. Генерация возможна в схемах рис. 8.16 (1, 5, 6, 7), в остальных — невозможна.

8.21. Составляем эквивалентные схемы (рис. Р8.8). В данном случае (см. решение задачи 8.18):

$$X_a = \omega L_2, \quad X_m = -\frac{1}{\omega C_1}, \quad X_g = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}.$$

Условие баланса фаз (рис. Р8.9)

$$\omega_0 L_2 - \frac{1}{\omega_0 C_1} + \omega_0 L_1 - \frac{1}{\omega_0 C_2} = 0,$$

откуда

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 + L_2 \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}} = \frac{1}{\sqrt{C_1(L_1 + L_2)}} \sqrt{1 + \frac{C_1}{C_2}}.$$

При $C_2 = \infty$ получаем формулу для схемы рис. 8.10 (задача 8.14). Условие баланса амплитуд

$$\frac{1}{\omega_0 C_1} > \left(\omega_0 L_1 - \frac{1}{\omega_0 C_2} \right) (1 + \mu).$$

Подставляя в это неравенство значение ω_0 , после преобразований получаем

$$\mu > \frac{L_2 \left(1 + \frac{C_1}{C_2} \right)}{L_1 - \frac{C_1}{C_2} L_2}.$$

При $C_2 = \infty$ последняя формула совпадает с аналогичной формулой задачи 8.14.

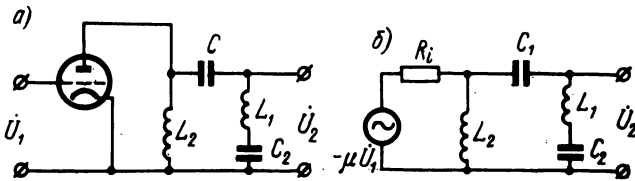


Рис. P 8.8

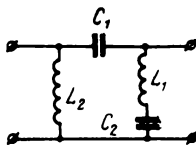


Рис. P 8.9

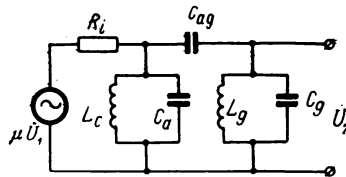


Рис. P 8.10

8.22. Воспользуемся условием баланса фаз (задача 8.18): $X_a + X_g + X_m = 0$. В данном случае (рис. P8.10):

$$X_m = -\frac{1}{\omega C_{ag}}, \quad X_a = X_g = -\frac{L/C}{\omega L - 1/\omega C}.$$

Подставляя значения X_a и X_g в условие баланса фаз, получаем уравнение

$$-2 \frac{L/C}{\omega_r L - 1/\omega_r C} - \frac{1}{\omega_r C_{ag}} = 0,$$

решение которого относительно генерируемой частоты ω_r дает

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC + 2LC_{ag}}} \quad \text{или} \quad \omega_r = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + 2C_{ag}/C}}.$$

Таким образом, частота генерации ω_r всегда ниже собственной частоты ω_0 .

8.23. Представив схему генератора в виде усилителя с разомкнутой цепью обратной связи и найдя по таблицам коэффициентов четырехполюсников коэффициент a_{11} , после преобразований получим:

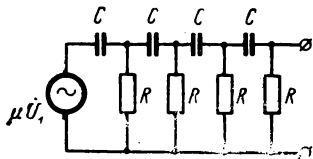
$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \frac{1}{\sqrt{6 + 4R_3/R}}, \quad \mu > \frac{R_i}{R_3} \left[29 + 23 \frac{R_3}{R} + 4 \left(\frac{R_3}{R} \right)^2 \right],$$

где $R_3 = R_i R_a / (R_i + R_a)$.

Если $R_i \ll R_a$, $R_i \ll R$, то $\omega_0 = 1/\sqrt{6}RC$, $\mu > 29$.

8.24. При сделанных допущениях эквивалентная схема будет иметь вид изображенной на рис. P8.11.

Так как $K(i\omega) = \dot{U}_2 / (-\mu \dot{U}_1) = 1/A_{11}$, то для решения поставленной задачи нужно найти коэффициент A_{11} . По таблицам четырехполюсников после небольших преобразований находим



$$A_{11} = \frac{x^4 - 15x^2 + 1 + i(7x - 10x^3)}{x^4},$$

Рис. P 8.11

где $x = \omega CR$.

Таким образом,
$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = -\mu \frac{x^4}{x^4 - 15x^2 + 1 + i(7x - 10x^3)}.$$

Баланс фаз: $7x_0 - 10x_0^3 = 0$, $x_0 = \sqrt{7/10}$,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{7}{10}} \frac{1}{RC}.$$

Баланс амплитуд:

$$\frac{U_2}{U_1} = -\mu \frac{\frac{49}{100}}{\frac{49}{100} - 15 \frac{7}{10} + 1} = \frac{\mu}{18,4}, \quad \mu > 18,4.$$

8.25. Заменяем символ p на $i\omega$

$$N(i\omega) = -\hat{\omega}^2 + 1 + i\hat{\omega}$$

и вычислим вещественную и мнимую части $N(i\hat{\omega})$ для нескольких значений $\hat{\omega}$. Результаты вычислений сведены в следующую таблицу:

$\hat{\omega}$	0	1	2	3	4
$\text{Re}[N(i\hat{\omega})]$	1	0	-3	-8	-15
$\text{Im}[N(i\hat{\omega})]$	0	1	2	3	4

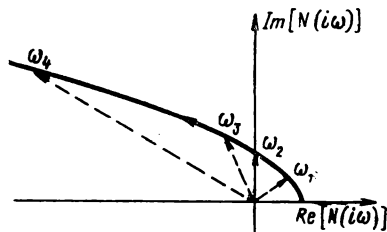


Рис. P 8.12

На рис. P8.12 изображен годограф вектора $N(i\hat{\omega})$, причем $\hat{\omega}_4 > \hat{\omega}_3 > \hat{\omega}_2 > \hat{\omega}_1$.

Пунктирными линиями отмечено положение вектора для нескольких частот. Из рисунка видно, что при изменении частоты от 0 до ∞ аргумент вектора $N(i\hat{\omega})$ изменится от 0 до π , т. е. на $2\pi/2$. Таким образом, согласно критерию Михайлова, данная цепь является устойчивой.

Легко видеть, что корни уравнений $N_2(\hat{\omega})=0$ и $N_1(\hat{\omega})=0$ чередуются.

8.26. Подставив в исходное выражение $p=i\hat{\omega}$, получим

$$N(i\hat{\omega}) = (5 - 2\hat{\omega}^2) + i(3\hat{\omega} - 2\hat{\omega}^3).$$

Результаты вычислений для нескольких значений $\hat{\omega}$ сведены в следующую таблицу:

$\hat{\omega}$	0	1	1,2	1,6	2	3	4
$\text{Re}[N(i\hat{\omega})]$	5	3	2,12	0	-3	-13	-27
$\text{Im}[N(i\hat{\omega})]$	0	1	0	4	-10	-45	-106

Годограф цепи изображен на рис. P8.13. Легко видеть, что при увеличении частоты до ω_2 вектор поворачивается в положительном направлении, а при дальнейшем увеличении частоты — в отрицательном. В результате общий угол поворота вектора $N(i\hat{\omega})$ меньше, чем $3\pi/2$, т. е. цепь неустойчива.

Нетрудно убедиться в том, что корни уравнений $N_2(\hat{\omega})=0$ и $N_1(\hat{\omega})=0$ не являются чередующимися.

8.27. Подставив в исходное выражение $p=i\hat{\omega}$, найдем:

$$N(i\hat{\omega}) = 1 - 3\hat{\omega}^2 + \hat{\omega}^4 + i\hat{\omega}(2 - 2\hat{\omega}^2),$$

$$N_1(\hat{\omega}) = 1 - 3\hat{\omega}^2 + \hat{\omega}^4, \quad N_2(\hat{\omega}) = 2\hat{\omega}(1 - \hat{\omega}^2).$$

Годограф цепи изображен на рис. P8.14. Так как система четвертого порядка и годограф проходит через четыре квадранта, окружая начало координат, система устойчива.

Легко видеть, что корни уравнений чередуются:

$$\hat{\omega}_1 = 0, \quad \hat{\omega}_2 = \sqrt{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}}, \quad \hat{\omega}_3 = 1, \quad \hat{\omega}_4 = \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}.$$

8.28. Цепь является неустойчивой. Годограф ее изображен на рис. P8.15.

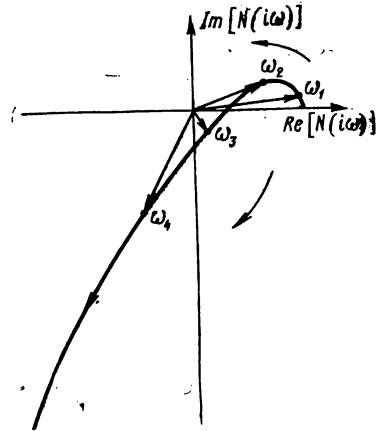


Рис. P8.13

8.29. Составляем исходные уравнения:

$$i_a = i - i_C;$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri = -\frac{1}{C} \int i_C dt = -\frac{1}{C} \int i dt + \frac{1}{C} \int i_a dt.$$

Продифференцируем последнее уравнение по t :

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{1}{C} i_a.$$

Анодный ток связан с напряжением u на аноде функцией $i_a = -S_0 u$; с другой стороны, достаточно точно $u \approx -L di/dt$; тогда $i_a \approx S_0 L di/dt$.

Подставляя значение i_a в дифференциальное уравнение и группируя подобные члены, получаем

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + \left(R - \frac{S_0 L}{C} \right) \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0$$

или

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} - \frac{S_0}{C} \right) \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0.$$

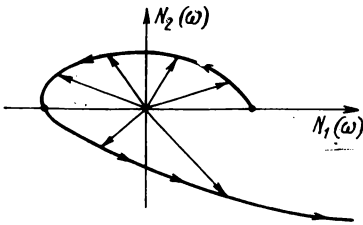


Рис. P8.14

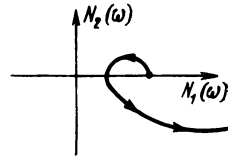


Рис. P8.15

Условие самовозбуждения находим из требования

$$\frac{R}{L} - \frac{S_0}{C} < 0,$$

откуда $S_0 > \frac{RC}{L}$ или $S_0 > \frac{1}{R_{\text{эф}}}$.

8.30. Генерация возможна, так как выполняется условие $|R_{\text{отр}}| < R$, $5 \cdot 10^4 \text{ Ом} < 10^5 \text{ Ом}$.

8.31. Генерация возможна только при использовании лампы с характеристикой, изображенной на рис. 8.23б.

9

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В СВОБОДНОМ РЕЖИМЕ ПРИ БОЛЬШИХ КОЛЕБАНИЯХ

Общие сведения

Нелинейные цепи второго порядка содержат два независимых энергоемких элемента, которые обмениваются между собой энергией; в отсутствие внешнего воздействия свободные процессы в таких цепях (их часто называют автономными цепями) могут быть колебательными; при определенных условиях свободный процесс может продолжаться бесконечно долго. Другими словами, устойчивые состояния свободного процесса в нелинейных цепях второго порядка отнюдь не должны являться постоянными величинами, как в цепях (с потерями) первого порядка. Вследствие этого задачи изучения свободных процессов в нелинейных цепях второго порядка имеют несколько аспектов, которые ниже и будут рассмотрены.

Дифференциальное уравнение автономной нелинейной цепи второго порядка можно привести к виду

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + F\left(x, \frac{dx}{d\tau}\right) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y_0. \quad (9.1)$$

Различают следующие практически наиболее интересные задачи рассмотрения свободных процессов, т. е. изучения или решения уравнения (9.1):

— задача нахождения процесса $x(t)$ от $t=0$ до $t=\infty$. Таким образом, первая задача сводится к нахождению свободного процесса. Однако удобно различать случаи, когда $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_{уст}(t)$, т. е. случаи, соответствующие затухающему и стационарному колебательному процессам. Будем условно называть колебания по первым условиям — свободным процессом, а по вторым — переходным процессом;

— задача нахождения только установившегося (стационарного) процесса $x_{уст}(t)$, т. е. без определения переходного (информация о котором содержит и информацию об установившемся процессе);

— задача определения устойчивости решений, когда нужно только выяснить, имеются ли устойчивые решения, т. е. возможны ли устойчивые колебания в данной цепи.

Вообще говоря, все три задачи переплетаются между собой и, в частности, первая и вторая включают в себя вопросы, связанные с устойчивостью колебаний. Однако приведенное деление целесообразно, так как для каждой группы задач есть свои (оптимальные) методы решения.

Уравнения вида (9.1), за малым исключением, не имеют точных решений, т. е. точные решения не могут быть выражены при помощи конечного числа известных функций. По этой причине нужно либо обращаться к бесконечным рядам и к составлению новых функций, либо ограничиваться приближенными решениями. Второй путь предпочтительнее и, как правило, удовлетворяет практические запросы.

Для интегрирования уравнений вида (9.1) можно применять чуть ли не все приближенные методы, сведения о которых даны в приложении 1, и, в первую очередь, методы 2.2, 2.3, 2.5, 2.6, 2.7, 3.2, 3.3, 3.4, 3.6, 4.2а, 6.3. В литературе встречаются работы по всем этим методам и каждый из них действительно имеет свои преимущества при конкретных условиях.

Однако не все методы получили одинаковое распространение и объясняется это, прежде всего, тем, что не все цепи получили одинаковое распространение. Чаще других встречаются цепи, содержащие два независимых накопителя энергии (линейные и нелинейные) и резистивный элемент либо с малым положительным сопротивлением, либо с нелинейным отрицательным сопротивлением, а для таких цепей наиболее подходящими (из числа прямых) оказываются методы вариации параметров (2.5) для переходного режима и метод усреднения коэффициентов (3.4) для установившегося режима. В качестве косвенных следует назвать методы замораживания переменных (3.5) и среди них, в первую очередь, метод изоклин (3.5а), дельта-метод (3.5б), метод Льенара (3.5в), а также методы, основанные на привлечении дополнительных фазовых координат (П.13). Именно этим методам ниже будет уделено основное внимание. Здесь также будут даны некоторые примеры применения и других методов; часть из них рассматривается в приложении 1.

В настоящем разделе излагается рецептура расчета по некоторым методам в дополнение к тем общим сведениям, которые приведены в приложении 1.

Свободные и переходные процессы в нелинейных цепях второго порядка

Среди линейных цепей второго порядка особое место занимают так называемые избирательные (селективные) цепи, описываемые уравнениями, которые можно привести к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \mu F\left(x, \frac{dx}{dt}\right). \quad (9.2)$$

В этом уравнении μ — некоторый параметр, характеризующий избирательность цепи¹⁾; этот параметр у избирательных цепей мал в том смысле, что при $\mu \rightarrow 0$ цепь становится «идеально избирательной», т. е. превращается в консервативный колебательный контур.

При $\mu = 0$ решение ур-ния (9.2) определяется выражением

$$x = a \sin \omega_0 t + b \cos \omega_0 t;$$

при $\mu \neq 0$ можно, в соответствии с исходными положениями метода вариации параметров (метод 2.5)²⁾, принять следующий вид решения:

$$x = a(t) \sin \omega t + b(t) \cos \omega t, \quad (9.3)$$

в которых амплитуды $a(t)$, $b(t)$ являются функциями времени, а частота ω принимается либо также функцией времени, либо постоянной и подлежащей определению. В дальнейшем для сокращения будем писать a , b вместо $a(t)$, $b(t)$.

Если μ мало, то амплитуды a , b представляют собой медленные функции времени и для них выполняются неравенства:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} \ll \omega a, \quad \frac{d^2a}{dt^2} \ll \omega \frac{da}{dt} \\ \frac{db}{dt} \ll \omega b, \quad \frac{d^2b}{dt^2} \ll \omega \frac{db}{dt} \end{aligned} \right\}. \quad (9.4)$$

При условии медленности изменения амплитуды правую часть ур-ния (9.2) можно (с хорошим приближением) представить как периодическую функцию, которая разлагается в ряд Фурье:

$$\mu F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [\psi_n(a, b) \sin n \omega t + f_n(a, b) \cos n \omega t].$$

Если колебательный контур обладает высокой избиратель-

¹⁾ Чаще всего этим параметром является затухание свободных колебаний контура: $d=1/Q$, где Q — добротность контура.

²⁾ Читателю рекомендуется вспомнить материал, относящийся к этому методу (П.2). Здесь укажем, что излагаемая модификация метода вариации параметров принадлежит Ван дер Полю и называется «методом медленно меняющихся амплитуд» или «методом Ван дер Поля».

ностью, т. е. $Q \gg 1$, первая гармоника будет существенно преобладать над остальными и можно принять, что

$$\mu F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \approx \psi_1(a, b) \sin \omega t + f_1(a, b) \cos \omega t. \quad (9.5)$$

Подставляя принятое решение (9.3) и разложение (9.5) в исходное уравнение (9.2) и учитывая условия (9.4), нетрудно прийти (см. задачу 9.1) к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{1}{2\omega} [f_1(a, b) + (\omega^2 - \omega_0^2) b] \\ \frac{db}{dt} &= -\frac{1}{2\omega} [\psi_1(a, b) + (\omega^2 - \omega_0^2) a] \end{aligned} \right\} \quad (9.6)$$

Так как цепь является автономной, можно выбрать начало отсчета, т. е. фазу колебания, и положить в решении (9.3) $b=0$; соответственно уравнения (9.6) упростятся и окончательно можно записать:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \sin \omega t \\ \frac{da}{dt} &= \frac{1}{2\omega} f_1(a) \\ \psi_1(a) + (\omega^2 - \omega_0^2) a &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.7)$$

Решения (9.6) или (9.7) дают возможность получить закон изменения амплитуды a и, следовательно, мгновенного значения x , а также найти частоту ω , которая в общем случае является функцией амплитуды, а следовательно, и времени.

Метод медленно меняющихся амплитуд для нахождения свободного или переходного процесса, таким образом, включает ряд этапов.

1. По заданной схеме составляется дифференциальное уравнение; последнее приводится к форме (9.2) и его решение ищется в виде $x = a \sin \omega t$.

2. Правая часть уравнения раскладывается в ряд Фурье и сохраняются только первые гармоники:

$$\mu F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = \psi_1(a) \sin \omega t + f_1(a) \cos \omega t.$$

При разложении в ряд Фурье необходимо применять тригонометрические формулы, которые сведены в табл. 9.1¹⁾.

3. Найденные коэффициенты $f_1(a)$, $\psi_1(a)$ подставляются в уравнение (9.6) или (9.7).

4. Интегрированием и решением полученных уравнений определяются законы изменения амплитуды и частоты.

¹⁾ Таблица 9.1 нужна также для расчетов разд. 10 и 11, поэтому в ней содержатся и формулы, необходимость в которых в этом разделе не возникает.

ТАБЛИЦА 9.1

Формулы для разложения в ряд Фурье

№ пп.	Функция	Точное разложение	Первая гармоника
1	$\sin^2 \alpha$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha$	—
2	$\cos^2 \alpha$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha$	—
3	$\sin \alpha \cos \alpha$	$\frac{1}{2} \sin 2\alpha$	—
4	$\sin^3 \alpha$	$\frac{3}{4} \sin \alpha - \frac{1}{4} \sin 3\alpha$	$\frac{3}{4} \sin \alpha$
5	$\cos^3 \alpha$	$\frac{3}{4} \cos \alpha + \frac{1}{4} \cos 3\alpha$	$\frac{3}{4} \cos \alpha$
6	$\sin \alpha \cos^2 \alpha$	$\frac{1}{4} \sin \alpha + \frac{1}{4} \sin 3\alpha$	$\frac{1}{4} \sin \alpha$
7	$\cos \alpha \sin^2 \alpha$	$\frac{1}{4} \cos \alpha - \frac{1}{4} \cos 3\alpha$	$\frac{1}{4} \cos \alpha$
8	$\sin^4 \alpha$	$\frac{1}{8} (3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha)$	—
9	$\cos^4 \alpha$	$\frac{1}{8} (3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha)$	—
10	$\sin^3 \alpha \cos \alpha$	$\frac{1}{8} (2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha)$	—
11	$\sin \alpha \cos^3 \alpha$	$\frac{1}{8} (2 \sin 2\alpha + \sin 4\alpha)$	—
12	$\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$	$\frac{1}{8} (1 - \cos 4\alpha)$	—
13	$\sin^5 \alpha$	$\frac{1}{16} (\sin 5\alpha - 5 \sin 3\alpha + 10 \sin \alpha)$	$\frac{5}{8} \sin \alpha$
14	$\cos^5 \alpha$	$\frac{1}{16} (\cos 5\alpha + 5 \cos 3\alpha + 10 \cos \alpha)$	$\frac{5}{8} \cos \alpha$
15	$\sin^3 \alpha \cos^2 \alpha$	$\frac{1}{8} \left(\sin \alpha + \frac{1}{2} \sin 3\alpha - \frac{1}{2} \sin 5\alpha \right)$	$\frac{1}{8} \sin \alpha$
16	$\cos^3 \alpha \sin^2 \alpha$	$\frac{1}{8} \left(\cos \alpha - \frac{1}{2} \cos 3\alpha - \frac{1}{2} \cos 5\alpha \right)$	$\frac{1}{8} \cos \alpha$
17	$\sin \alpha \cos^4 \alpha$	$-\frac{1}{8} \sin \alpha + \frac{3}{16} \sin 3\alpha + \frac{1}{16} \sin 5\alpha$	$-\frac{1}{8} \sin \alpha$

№ пп.	Функция	Точное разложение	Первая гармоника
18	$\cos \alpha \sin^4 \alpha$	$-\frac{1}{8} \cos \alpha - \frac{3}{16} \cos 3\alpha + \frac{1}{16} \cos 5\alpha$	$-\frac{1}{8} \cos \alpha$
19	$\sin \alpha \sin \beta$	$\frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$	—
20	$\sin \alpha \cos \beta$	$\frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$	—
21	$\cos \alpha \cos \beta$	$\frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$	—

5. Найденные решения проверяются на устойчивость.

Стационарные значения амплитуды можно определить из уравнения: $da/dt=0$, а затем выполнить проверку на устойчивость (см. П.10, а также разд. 6).

Однако для избирательных цепей стационарный режим целесообразнее исследовать методом усреднения параметров (квазилинейным, см. ниже). Нужно специально указать, что на основе квазилинейного метода можно находить и переходные процессы; методически уместнее эти вопросы изложить ниже, вместе с вопросами изучения стационарного режима.

Наряду с рассмотренным аналитическим методом медленно меняющихся амплитуд, для изучения нелинейных цепей второго порядка (в том числе и с невысокой избирательностью, и вовсе неизбирательных) широко применяются «методы замораживания переменных» (подгруппа 3.5), которые чаще всего используются в графоаналитических модификациях. Эти методы подробно излагаются в П.3.

Напомним рецептуру расчета по методу изоклин (метод 3.5а) как имеющего наглядную физическую трактовку, а также в связи с тем, что по этому методу можно привести полезный справочный материал¹⁾.

Итак (см. П.3), для уравнения

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + a_1(x) \frac{dx}{d\tau} + a_0(x) x = 0 \quad (9.8)$$

выражение изоклины имеет вид

$$y = \frac{a_0(x) x}{-k - a_1(x)}, \quad (9.9)$$

где $y = dx/d\tau$, а $k = dy/dx$.

¹⁾ Для конкретных графических построений δ -метод оказывается более удобным; однако метод изоклин позволяет быстрее и проще находить главные качественные черты процесса.

Введем следующие «главные изоклины»:
 — изоклину нулей ($\varphi=0^\circ$, $k=0$)

$$y_A = -\frac{a_0(x)}{a_1(x)} x;$$

— изоклину бесконечностей ($\varphi=90^\circ$, $k=\infty$)

$$y_B = 0;$$

— изоклину положительной биссектрисы ($\varphi=45^\circ$, $k=1$)

$$y_C = \frac{a_0(x)}{-1 - a_1(x)} x;$$

— изоклину отрицательной биссектрисы ($\varphi=45^\circ$, $k=-1$)

$$y_D = \frac{a_0(x)}{1 - a_1(x)} x.$$

Четыре главные изоклины дают возможность быстро представить себе основные черты фазового изображения. В тех точках, где dy/dx представляет собой неопределенность вида $0/0$, фазовое изображение может проходить через изоклину под любым углом. Эти точки называются особыми (см. П.9).

В табл. 9.2 даны рисунки некоторых процессов и их фазовых изображений, характерных для нелинейных систем второго порядка.

В качестве косвенных методов для исследования цепей второго порядка целесообразно использовать не только фазовую плоскость, но и плоскость консерванта, а также плоскость консерванта-диссипанта (П.13).

Далее, среди нелинейных цепей второго порядка встречаются цепи, описываемые нелинейным уравнением, не содержащие первой производной, т. е. уравнением вида $F(x, \ddot{x})=0$. В таких уравнениях вторую производную, как правило, можно выделить, т. е. уравнение можно привести к виду:

$$\ddot{x} + \varphi(x) = 0.$$

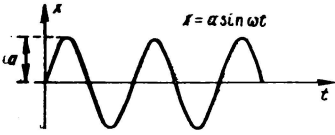
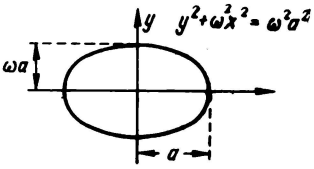
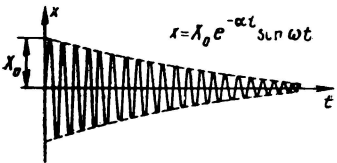
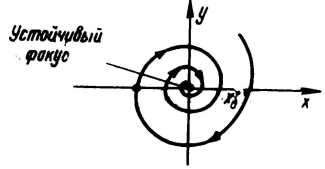
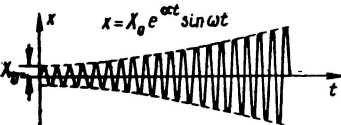
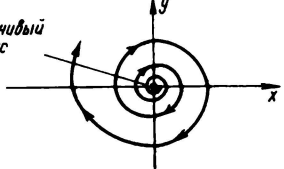
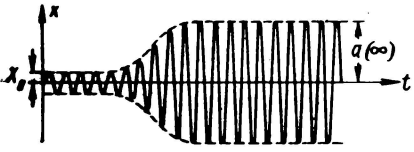
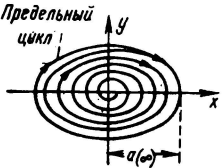
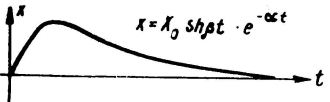
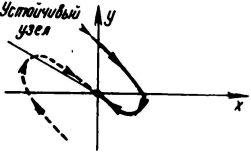
В частности, такой вид имеют уравнение Дуффинга и его различные формы (см. П.15). Для этих уравнений в соответствии с методом 4.2а, вводя новую переменную $y = dx/d\tau$, а затем освобождаясь от нее, можно получить точное решение в виде обратной функции (см. П.4):

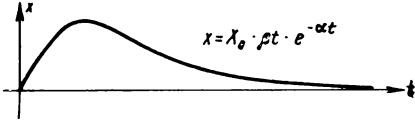
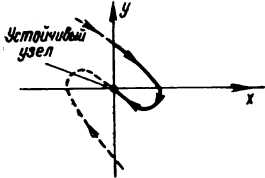

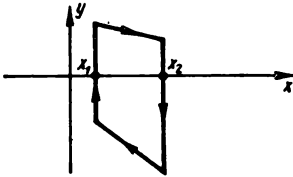
$$\tau = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{-2 \int \varphi(x) dx + C}},$$

причем, если $\varphi(x)$ представляет собой степенной полином, решение можно выразить через табулированные функции (см. П.17 и задачу 9.10).

ТАБЛИЦА 9.2

Фазовые изображения некоторых колебательных процессов

Вид движения (временная картина-оригинал)	Фазовое изображение
 <p>$x = a \sin \omega t$</p>	 <p>$y^2 + \omega^2 x^2 = \omega^2 a^2$</p>
 <p>$x = X_0 e^{-\alpha t} \sin \omega t$</p>	 <p>Устойчивый фокус</p>
 <p>$x = X_0 e^{\alpha t} \sin \omega t$</p>	 <p>Неустойчивый фокус</p>
 <p>$a(\infty)$</p>	 <p>Предельный цикл</p>
 <p>$x = X_0 \text{sh } pt \cdot e^{-\alpha t}$</p>	 <p>Устойчивый узел</p>

Вид движения (временная картина-оригинал)	Фазовое изображение
 <p>$x = \lambda_0 \cdot \beta t \cdot e^{-\alpha t}$</p>	 <p>Устойчивый узел</p>
	

Заметим, что дифференциальные уравнения вида

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 = \sum_{n=0}^2 a_n x^n$$

также можно решить точно при помощи эллиптических функций; это вытекает из равенства

$$\frac{dx}{d\tau} = \pm \sqrt{\sum_{n=0}^2 a_n x^n},$$

и, следовательно,

$$\tau = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{\sum_{n=0}^2 a_n x^n + C}}.$$

Установившиеся процессы в автономных нелинейных цепях второго порядка

Установившиеся процессы (стационарные) можно определять по найденным переходным процессам при $t \rightarrow \infty$. Для избирательных цепей, однако, более удобным оказывается метод усреднения коэффициентов в той его модификации, которая называется квазилинейным методом (метод Ю. Б. Кобзарева). Этот метод уже описан в разд. 6, где приведены примеры пользования им по отношению к цепям первого порядка. Все изложенное в разд. 6 и адресованное к цепям первого порядка, сохраняет силу и здесь,

т. е. по отношению к цепям второго порядка; некоторые дополнения будут сделаны ниже.

В изучении установившегося режима избирательных цепей второго порядка центральную роль играют вопросы расчета амплитуды первой гармоники стационарных колебаний, которую обычно называют стационарной амплитудой первой гармоники.

Напомним, что основу квазилинейного метода, пригодного только для высокоизбирательных цепей, составляет замена безынерционного нелинейного элемента, т. е. элемента, реагирующего на мгновенные значения тока или напряжения, некоторым фиктивным инерционным элементом, реагирующим только на амплитудные значения. В установившемся режиме инерционный нелинейный элемент ведет себя как линейный. Для практических расчетов при помощи квазилинейного метода параметры нелинейных элементов, определяемые мгновенными значениями, нужно заменить новыми, зависящими от амплитудных значений. Эти последние параметры называют «параметрами по первой гармонике» или «средними».

Для расчета стационарной амплитуды напряжения (тока) генератора можно воспользоваться условием самовозбуждения (условием баланса амплитуд), представляющим собой неравенство, содержащее нелинейный параметр (например, крутизну s) мгновенных значений. Этот параметр мгновенных значений нужно заменить средним (параметром амплитудных значений), и неравенство обратить в равенство. Полученное равенство представляет собой уравнение стационарности, из которого можно определить стационарную амплитуду графическим или аналитическим путем.

Наиболее часто встречающимся средним параметром является средняя крутизна $S_{\text{ср}} = I_1/U_1$, где I_1 — амплитуда первой гармоники выходного тока; U_1 — амплитуда входного напряжения. Аналогично можно ввести и другие параметры, например среднее сопротивление $R_{\text{ср}} = U_1/I_1$. Средние параметры легко найти экспериментально по снятым амплитудным характеристикам.

Как уже указывалось, на основе квазилинейного метода можно рассчитывать и переходные процессы [36]. С этой целью нужно составить выражение свободного процесса для линеаризованной рассматриваемой цепи (т. е. для цепи, в нелинейной характеристике которой сохранены только линейные составляющие) и затем входящие в это выражение параметры мгновенных значений заменить средними.

Для избирательной цепи второго порядка огибающая свободного процесса описывается выражением

$$A(t) = A_0 e^{-\alpha t},$$

в котором A_0 — начальная амплитуда. Рассмотрим небольшой отрезок времени на участке изменения амплитуды, начинающегося с момента t , и обозначим амплитуду в начале этого участка через

A , а затем продифференцируем обе части:

$$dA(t)/dt = -\alpha A e^{-\alpha t} = -\alpha A(t).$$

Теперь нужно заменить параметр α параметром $\alpha_{\text{ср}}$, зависящим от амплитуды; для этого целесообразно воспользоваться выражением

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_{\text{ср}},$$

в котором α_0 — параметр избирательной цепи без обратной связи, а $\alpha_{\text{ср}}$ — величина, определяющая изменение этого параметра из-за обратной связи и зависящая от амплитудных значений, т. е. $\alpha_{\text{ср}} = \alpha_{\text{ср}}(A)$; в результате получим уравнение

$$dA(t)/dt = -[\alpha_0 + \alpha_{\text{ср}}(A)] A(t),$$

интегрирование которого и дает закон установления амплитуды.

Пример изучения переходного процесса по квазилинейному методу приведен в задаче 9.8.

Следует отметить, что установившийся процесс в автономных нелинейных цепях может не зависеть от начальных условий (например, генератор с самовозбуждением). Системы, в которых установившийся периодический режим не зависит от начальных условий, часто называют конвергентными, а системы, в которых можно получать различные стационарные режимы, задавая различные начальные условия, — неконвергентными.

Изложенное выше справедливо для нелинейных цепей второго порядка, содержащих два энергоемких линейных элемента и нелинейный резистор. Объясняется это тем, что именно из таких элементов и составляются схемы генераторов, изучение которых заканчивается рассмотрением свободного (переходного) процесса. Цепи, содержащие нелинейные энергоемкие элементы, нужно исследовать, в первую очередь, в вынужденных режимах, для работы в которых они и предназначаются (см. разд. 10).

Укажем в заключение, что вопросы устойчивости решений однородных нелинейных дифференциальных уравнений должны рассматриваться в соответствии с П.10, а также П.9; весьма эффективны в изучении этих вопросов косвенные методы.

* * *

В настоящем разделе задачи располжены в следующем порядке. Первые 14 задач посвящены нахождению свободных и переходных процессов как по методу медленно меняющихся амплитуд (задачи 9.1—9.7), так и по другим методам: по квазилинейному — задача 9.8, по методу минимизации невязки — задача 9.9, по методу, связанному с привлечением специальных функций, — задача 9.10, по методу фазовой плоскости — задачи 9.11—9.14. Задачи 9.15—9.21 сводятся к определению средних параметров; задачи 9.23—9.29 посвящены расчету стационарной амплитуды генератора синусоидальных колебаний. В задачах 9.30—9.32 решаются вопросы о возможности существования устойчивых колебаний в рассматриваемых цепях.

Задачи и упражнения

9.1. Вывести ур-ния (9.6), являющиеся решением (9.3) ур-ния (9.2) при условии, что амплитуды $a(t)$, $b(t)$ меняются медленно.

9.2. Рассмотреть методом медленно меняющихся амплитуд режим свободных колебаний в линейном колебательном контуре L, C, R (рис. 9.1) для двух случаев: $R > 0$ при $t=0, i=I_0$; $R=0$ при $t=0, i=I_0$.

Дифференциальное уравнение первого порядка (для огибающей) исследовать на фазовой плоскости.

9.3. Дифференциальное уравнение лампового генератора с индуктивной связью (см. задачу 8.1) имеет вид

$$\frac{d^2 u_g}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} - \frac{M}{LC} \frac{di_a}{du_g} \right) \frac{du_g}{dt} + \frac{1}{LC} u_g = 0.$$

Решить это дифференциальное уравнение методом медленно меняющихся амплитуд; дифференциальное уравнение относительно амплитуд исследовать на фазовой плоскости. Характеристика лампы аппроксимируется симметричной функцией $i_a = a_0 + S_0 u_g - \gamma u_g^3$; рабочая точка находится в середине характеристики.

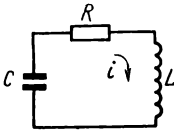


Рис. 9.1

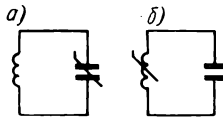


Рис. 9.2

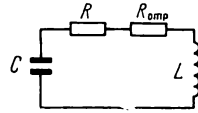


Рис. 9.3

9.4. Найти время, в течение которого амплитуда достигнет 0,95 от установившегося значения по условиям задачи 9.3, считая, что процесс генерации начинается с амплитуды, составляющей 10^{-6} от установившейся.

9.5. Дифференциальное уравнение лампового генератора (задача 9.3) имеет вид (уравнение Ван дер Поля)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 2e(1-x^2) \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

Существуют генераторы, процессы в которых описываются уравнением другого вида (уравнение Рэля)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 2e \left[1 - \frac{1}{\omega_0^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right] \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

Показать, что уравнение Рэля можно свести к уравнению Ван дер Поля.

9.6. Составить дифференциальное уравнение для консервативных колебательных контуров с нелинейными элементами (рис. 9.2). Нелинейные зависимости передаются следующими выражениями: $u_C = \alpha q + \beta q^3$, $i = \alpha \phi + \beta \phi^3$.

9.7. Дифференциальное уравнение консервативного колебательного контура с одним нелинейным параметром, характеристика которого передается полукубической параболой, записывается в общем виде следующим образом (задача 9.6):

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x + \gamma x^3 = 0.$$

Найти колебания свободного процесса.

9.8. Найти переходный процесс в генераторе синусоидальных колебаний, эквивалентная схема которого приведена на рис. 9.3, причем $|R_{отр}| = Ms/C$.

Задачу решить квазилинейным методом; решение считается законченным, когда выражение для $A(t)$ выписано в виде квадратуры. При переходе от мгновенной крутизны s к средней S_{cp} принять аппроксимации характеристики лампы как в виде укороченного полинома третьей степени (задача 2.7), так и в виде функции с гиперболическим тангенсом (2.9); при этих условиях выражения средней крутизны имеют вид:

$$S_{cp} = S_0 + \frac{3}{4} a_3 A^2, \quad S_{cp} = S_0 \frac{\text{th } q A}{q A}.$$

9.9. В задаче 9.7 было решено уравнение

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x + \gamma x^3 = 0$$

методом медленно меняющихся амплитуд и было найдено, что $x = a_0 \sin \omega t$, где

$$\omega = \sqrt{1 + \frac{3}{4} \frac{\gamma}{\omega_0^2} a_0^2}.$$

В настоящей задаче предлагается изложить порядок решения другим подходящим методом, который надлежит выбрать.

9.10. Получить точное решение уравнения (см. задачу 9.8)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x + \gamma x^3 = 0,$$

выраженное через эллиптические функции (см. П.17).

9.11. Построить фазовое изображение колебаний в свободном режиме консервативного колебательного контура. Начальные условия: при $dx/dt=0$ $x=x_0$.

9.12. Построить фазовое изображение свободных колебаний в контуре с добротностью $Q=5$. Начальные условия: при $dx/dt=0$ $x=x_0$.

9.13. Построить фазовое изображение свободного процесса в контуре с добротностью $Q=1/2$. Начальные условия: при $dx/dt=0$ $x=x_0$.

9.14. Построить фазовое изображение свободных колебаний в ламповом генераторе с контуром в цепи сетки и с индуктивной связью по следующим данным.

$$\text{Данные лампы: } i_a = 30 \left(1 + 0,1 u_g - \frac{4}{27 \cdot 10^3} u_g^3 \right), \text{ мА.}$$

Данные контура: $L=80 \text{ мкГ}$, $C=318 \text{ пФ}$, $R=50 \text{ Ом}$.

Данные обратной связи: $M=16 \text{ мкГ}$.

9.15. На рис. 9.4а изображены полученные экспериментально амплитудные характеристики $I_{a1}=f(U_g)$ лампы 6С5 при анодном напряжении $E_a=200 \text{ В}$ и $E_a=100 \text{ В}$ при фиксированном напряжении смещения на управляющей сетке. По этим характеристикам построить характеристики средней крутизны.

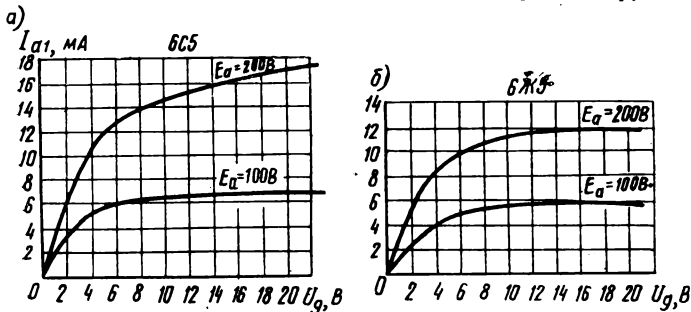


Рис. 9.4

Аналогичные построения выполнить для характеристик ламп 6Ж7, изображенных на рис. 9.4б.

Данные, по которым построены амплитудные характеристики, приводятся в следующей таблице.

U_g , В		0	2	4	6	8	10
6С5 I_{a1} , мА	$E_a=200$ В	0	6	10,4	12,6	13,8	14,6
	$E_a=100$ В	0	3,6	5,4	6,2	6,4	6,6
6Ж7 I_{a1} , мА	$E_a=200$ В	0	5,1	8,4	9,2	10,6	11,2
	$E_a=100$ В	0	2,2	4,0	4,8	5,2	5,6

U_g , В		12	14	16	18	20	22
6С5 I_{a1} , мА	$E_a=200$ В	15,2	15,6	16,2	16,4	17	17,2
	$E_a=100$ В	6,8	6,8	6,8	6,8	6,8	6,8
6Ж7 I_{a1} , мА	$E_a=200$ В	11,6	11,7	11,7	11,8	11,8	—
	$E_a=100$ В	5,8	5,8	5,8	5,8	5,8	—

9.16. На рис. 9.5 изображена характеристика лампы $i_a=f(u_g)$. По этой характеристике построить кривую средней крутизны, используя для этой цели формулу трех ординат. Построение выполнить для двух значений напряжения смещения: $E_g=0$ и $E_g=-8$ В.

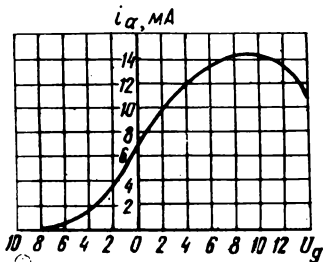


Рис. 9.5

9.17. Найти выражение для средней крутизны, если характеристику лампы можно аппроксимировать полиномом третьей степени: $i_a=a_0+a_1u+a_3u^3$. Определить в общем виде знак коэффициента a_3 , исходя из условия: при росте амплитуды напряжения крутизна характеристики должна уменьшаться. Полученную формулу для средней крутизны изобразить в виде графика и определить границы изменения амплитуды U , в которых эта формула имеет смысл.

9.18. Найти выражение для средней крутизны, если характеристика лампы аппроксимируется полиномом пятой степени:

$$i_a=a_0+a_1u+a_2u^2+a_3u^3+a_4u^4+a_5u^5.$$

Построить кривую средней крутизны сначала качественно при $a_5<0$, а затем для характеристики лампы, аппроксимируемой формулой

$$i_a=26+4u+15u^2+u^3-0,16u^5 \text{ мА.}$$

9.19. Пусть характеристику лампы $i_a=f(u_g)$ можно представить в виде ломаной прямой (рис. 9.6). Найти аналитические выражения для средней крутизны в функции амплитуды напряжения на сетке при двух положениях рабочей точки: $\theta=90^\circ$, $0<\theta<90^\circ$.

Аналитическое выражение тока первой гармоники имеет вид (см. разд. 3):

$$I_{a1} = \frac{SU_g}{\pi} (\theta - \sin \theta \cos \theta),$$

$$\cos \theta = \frac{SE_g - I_0}{SU_g}.$$

Обозначения ясны из рис. 9.6.

Полученные аналитические выражения проиллюстрировать графиками.

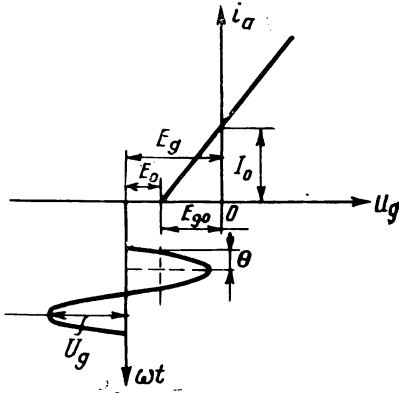


Рис. 9.6

9.20. Характеристика лампы аппроксимируется формулой Крылова

$$i_a = \frac{I_s}{2} (1 + \text{th } q u_g).$$

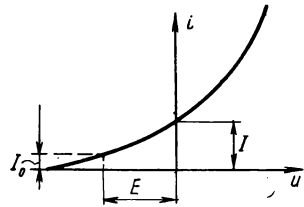


Рис. 9.7

Найти выражение для средней крутизны, используя для вывода формулу трех ординат. Полученный результат представить в виде графика.

9.21. Характеристику нелинейного элемента $i=f(u)$ в некоторой части можно представить экспоненциальной функцией $i=Ie^{au}$. Найти выражение средней крутизны при произвольном смещении E (рис. 9.7).

9.22. Характеристика лампы в схеме лампового генератора аппроксимируется ломаной прямой, состоящей из двух отрезков. Рабочая точка на характеристике устанавливается последовательно, так что осуществляются следующие режимы (по углу отсечки θ): $\theta=90^\circ$, $0^\circ < \theta < 90^\circ$, $90^\circ < \theta < 180^\circ$. Объяснить, возможна ли генерация при указанных трех режимах и заданной характеристике.

9.23. Известно, что условие самовозбуждения лампового генератора с индуктивной связью и с контуром в цепи сетки имеет вид (задача 8.9): $M > RC/S$. Найти стационарную амплитуду напряжения на сетке, если характеристика лампы аппроксимируется полиномом третьей степени

$$i = a_0 + a_1 u_g - a_3 u_g^3.$$

9.24. Найти выражение для стационарной амплитуды напряжения на сетке лампового генератора с индуктивной связью с контуром в цепи анода (задача 8.11). Характеристику лампы аппроксимировать функцией $i = a_0 + a_1 u_g - a_3 u_g^3$.

9.25. Для трехточечной схемы генератора (рис. 8.7) было получено условие самовозбуждения в виде (задача 8.3) $S > RC(L+L_1)/L_1L$. Найти стационарную амплитуду напряжения на сетке при аппроксимации характеристики лампы полиномом третьей степени $i = a_0 + a_1 u_g - a_3 u_g^3$.

9.26. В задаче 8.23 было получено условие самовозбуждения трехзвенного RC-генератора в виде

$$S > \frac{1}{R_3} \left[29 + 23 \frac{R_3}{R} + 4 \left(\frac{R_3}{R} \right)^2 \right],$$

где $R_3 = R_i R_a / (R_i + R_a)$.

Найти стационарную амплитуду напряжения на сетке, если характеристика лампы передается выражением

$$i_a = a_0 + a_1 u_g - a_3 u_g^3.$$

9.27. Рассчитать элементы схемы лампового генератора (гетеродина) с индуктивной связью с контуром в цепи сетки по следующим исходным данным (задача 9.15): лампа 6С5, $E_a = 200$ В, $f_0 = 10^6$ Гц, $U_{g \text{ ст}} = 20$ В, $C = 100$ пФ, $Q = 50$.

9.28. Рассчитать по условию задачи 9.17 необходимую взаимную индуктивность M , если анодное напряжение $E_a = 100$ В.

9.29. Рассчитать стационарную амплитуду лампового генератора, собранного на лампе 6Ж7, при $E_a = 200$ В (задача 9.15) по известным данным схемы с контуром в цепи сетки и с индуктивной связью: $R = 60$ Ом, $C = 100$ пФ, $M = 5$ мкГ.

9.30. На основе использования понятия «консервант» ответить на вопрос: могут ли быть устойчивыми решения нижеприводимых уравнений:

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{d^2 x}{d\tau^2} + x &= 0; & 3) \quad \frac{d^2 x}{d\tau^2} + x + \gamma x^3 &= 0; \\ 2) \quad \frac{d^2 x}{d\tau} - x &= 0; & 4) \quad \frac{d^2 x}{d\tau^2} + x - \gamma x^3 &= 0. \end{aligned}$$

9.31. Сделать основные заключения об устойчивости маятника без трения, описываемого уравнением: $d^2\theta/d\tau^2 + \sin\theta = 0$, где θ — угол, отсчитываемый от вертикали, направленной вниз.

9.32. Составить выражение, отражающее связь между консервантом и диссипантом свободного процесса диссипативного колебательного контура.

РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ

9.1. Продифференцируем принятое решение (9.3):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a \omega \cos \omega t + \frac{da}{dt} \sin \omega t - b \omega \sin \omega t + \frac{db}{dt} \cos \omega t, \\ \ddot{x} &= -\omega^2 a \sin \omega t + \omega \frac{da}{dt} \cos \omega t + \omega \frac{da}{dt} \cos \omega t + \frac{d^2 a}{dt^2} \sin \omega t - \\ &- \omega^2 b \cos \omega t - \omega \frac{db}{dt} \sin \omega t - \omega \frac{db}{dt} \sin \omega t + \frac{d^2 b}{dt^2} \cos \omega t \end{aligned}$$

и подставим в исходное уравнение (9.2):

$$\begin{aligned} &- \omega^2 a \sin \omega t + 2\omega \frac{da}{dt} \cos \omega t + \frac{d^2 a}{dt^2} \sin \omega t - \\ &- \omega^2 b \cos \omega t - 2\omega \frac{db}{dt} \sin \omega t + \frac{d^2 b}{dt^2} \cos \omega t + \\ &+ \omega_0^2 a \sin \omega t + \omega_0^2 b \cos \omega t = \mu F \left(x, \frac{dx}{dt} \right). \end{aligned}$$

Используя неравенство (9.4) и разложение (9.5), запишем:

$$\begin{aligned} &2\omega \frac{da}{dt} \cos \omega t - a(\omega^2 - \omega_0^2) \sin \omega t - 2\omega \frac{db}{dt} \sin \omega t - \\ &- b(\omega^2 - \omega_0^2) \cos \omega t = \psi_1(a, b) \sin \omega t + f_1(a, b) \cos \omega t. \end{aligned}$$

Приравняв члены при синусах и косинусах, найдем:

$$2\omega \frac{da}{dt} - b(\omega^2 - \omega_0^2) = f_1(a, b),$$

$$2\omega \frac{db}{dt} + a(\omega^2 - \omega_0^2) = -\psi_1(a, b).$$

Из последних формул непосредственно следуют ур-ния (9.6).

9.2. В соответствии с изложенным на стр. 298, 300 решение разобьем на ряд этапов.

1. Составим исходное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0,$$

которое с использованием обозначения $i/I_0 = x$ приведем к виду (9.2)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = -2\alpha \frac{dx}{dt}. \quad (1)$$

Так как система является автономной, решение будет определяться выражением

$$x = a \sin \omega t. \quad (2)$$

2. Разложим правую часть ур-ния (1) в ряд Фурье и найдем коэффициенты ψ_1 и f_1 :

$$-2\alpha \frac{dx}{dt} = -2\alpha a \omega \cos \omega t,$$

$$\psi_1 = 0, \quad f_1 = -2\alpha a \omega. \quad (3)$$

3. Подставим значения коэффициентов f_1 и ψ_1 в ур-ние (9.6):

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2\omega} [-2\alpha a \omega + (\omega^2 - \omega_0^2) 0],$$

$$\frac{db}{dt} = -\frac{1}{2\omega} [0 - (\omega_0^2 - \omega^2) a] = 0.$$

Эти уравнения дают: для амплитуды $da/dt = -\alpha a$; для частоты $\omega = \omega_0$.

4. Полученное дифференциальное уравнение можно проинтегрировать непосредственно; однако по условию задачи это уравнение должно быть рассмотрено на фазовой плоскости для двух случаев: $\alpha > 0$; $\alpha = 0$.

Первый случай дает знакомое фазовое изображение (рис. P9.1): амплитуда a изменяется по экспоненциальному закону (табл. 6.1, поз. 3).

Во втором случае $da/dt = 0$, следовательно, $\dot{a} = \text{const}$. Если при $t=0$ выполняется равенство $a = a_0$, то оно справедливо и при любом t .

5. Для оценки устойчивости нужно проверить неравенство

$$\frac{d}{da} \left(\frac{da}{dt} \right) < 0$$

в точке $da/dt = 0$. В данном случае неравенство удовлетворяется.

9.3. В данном случае

$$\frac{di_a}{du_g} = S_0 - 3\gamma u_g^2,$$

следовательно,

$$\frac{d^2 u_g}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} - \frac{MS_0}{LC} + \frac{M}{LC} 3\gamma u_g^2 \right) \frac{du_g}{dt} + \frac{1}{LC} u_g = 0.$$

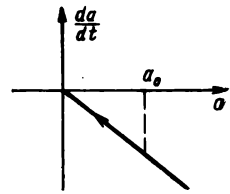


Рис. P9.1

Обозначим: $MS_0/RC = m$, $R/L = 2\alpha$, $1/LC = \omega_0^2$; тогда

$$\frac{d^2 u_g}{dt^2} + 2\alpha \left(1 - m + \frac{M}{RC} 3\gamma u_g^2\right) \frac{du_g}{dt} + \omega_0^2 u_g = 0$$

или

$$\frac{d^2 u_g}{dt^2} + 2\alpha(1-m) \left[1 + \frac{M}{(1-m)RC} 3\gamma u_g^2\right] \frac{du_g}{dt} + \omega_0^2 u_g = 0.$$

Введем дополнительные обозначения: $\frac{1}{m-1} \frac{MS_0}{RC} \frac{3\gamma}{S_0} u_g^2 = x^2$, $\alpha(m-1) = \varepsilon$

и умножим все члены уравнения на величину $\frac{1}{\sqrt{m-1}} \sqrt{\frac{MS_0}{RC}} \sqrt{\frac{3\gamma}{S_0}}$, в результате получим

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 2\varepsilon(1-x^2) \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

Это уравнение Ван дер Поля (см. П.15). Решим его по намеченным выше этапам (стр. 298, 300).

1. Решение исходного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 2\varepsilon(1-x^2) \frac{dx}{dt}$$

ищем в виде:

$$x = a \sin \omega t, \quad \frac{dx}{dt} = a \omega \cos \omega t, \quad x^2 = a^2 \sin^2 \omega t.$$

2. Раскроем правую часть этого уравнения и найдем коэффициенты ψ_1 и f_1 :

$$2\varepsilon(1-x^2) \frac{dx}{dt} = 2\varepsilon [a \omega \cos \omega t - a^3 \sin^2 \omega t a \omega \cos \omega t].$$

Из табл. 9.1 [ф-ла (7)] найдем

$$2\varepsilon(1-x^2) \frac{dx}{dt} = 2\varepsilon \left[a \omega \cos \omega t - a^3 \omega \left(\frac{1}{4} \cos \omega t - \frac{1}{4} \cos 3 \omega t \right) \right].$$

Искомые коэффициенты: $\psi_1 = 0$, $f_1 = 2\varepsilon a \omega (1 - a^2/4)$.

Представим значения ψ_1 и f_1 в ур-ния (9.6):

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2\omega} \left[2\varepsilon a \omega \left(1 - \frac{a^2}{4} \right) - (\omega_0^2 - \omega^2) 0 \right],$$

$$\frac{db}{dt} = 0 = -\frac{1}{2\omega} [0 - (\omega_0^2 - \omega^2) a].$$

Для амплитуды

$$da/dt = \varepsilon a (1 - a^2/4);$$

для частоты $\omega = \omega_0$.

4. Установившаяся амплитуда находится из условия $da/dt = 0$, следовательно, $a_1 \text{уст} = 0$; $a_2 \text{уст} = 2$. Процесс установления колебаний легко проследить на фазовой плоскости (рис. Р9.2).

5. Проверка выполняется по условию

$$\frac{d}{da} \left(\frac{da}{dt} \right) a = a_{уст} < 0.$$

Легко видеть, что при $a=0$ это условие не удовлетворяется, а при $a=2$ удовлетворяется. Конечно, к этому выводу можно прийти непосредственно по фазовому изображению.

9.4. Из дифференциального уравнения для огибающей

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon a \left(1 - \frac{a^2}{4} \right)$$

и значения установившейся амплитуды $a_{уст} = 2$ находим

$$t = \frac{1}{\varepsilon} \int_{2 \cdot 10^{-6}}^{1,9} \frac{da}{a \left(1 - \frac{a^2}{4} \right)}.$$

Выполняя интегрирование, получаем

$$t \approx \frac{15}{\varepsilon} = \frac{15}{a(m-1)}.$$

9.5. Введя обозначения $\omega_0 t = \tau$, $2\varepsilon/\omega_0 = \mu$, приведем уравнение Рэлея к безразмерному виду

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} - \mu \left[1 - \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 \right] \frac{dx}{d\tau} + x = 0.$$

Продифференцируем последнее выражение по τ :

$$\frac{d^3 x}{d\tau^3} - \mu \frac{d^2 x}{d\tau^2} + \mu \left[\left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 \frac{dx}{d\tau} \right] + \frac{dx}{d\tau} = 0,$$

$$\frac{d^3 x}{d\tau^3} - \mu \frac{d^2 x}{d\tau^2} + \mu \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 \frac{d^2 x}{d\tau^2} + \mu \frac{dx}{d\tau} \cdot 2 \frac{dx}{d\tau} \frac{d^2 x}{d\tau^2} + \frac{dx}{d\tau} = 0.$$

Сгруппировав подобные члены, получим

$$\frac{d^3 x}{d\tau^3} - \mu \left[1 - 3 \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 \right] \frac{d^2 x}{d\tau^2} + \frac{dx}{d\tau} = 0.$$

При помощи обозначения $dx/d\tau = z$ приведем последнее уравнение к уравнению Ван дер Поля

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} - \mu (1 - 3z^2) \frac{dz}{d\tau} + z = 0.$$

9.6. Для схемы рис. 9.2а: $L \frac{di}{dt} + u_c = 0$, $i = dq/dt$, $L \frac{d^2 q}{dt^2} + u_c = 0$.

Так как $u_c = \alpha q + \beta q^3$,

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \alpha q + \beta q^3 = 0$$

или

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{\alpha}{L} q + \frac{\beta}{L} q^3 = 0.$$

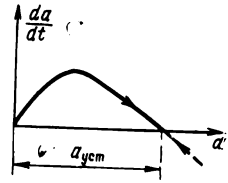


Рис. Р 9.2

Для схемы рис. 9.2б:

$$\frac{d\phi}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{1}{C} i = 0.$$

Так как $i = \alpha\phi + \beta\phi^3$, то

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{\alpha}{C} \phi + \frac{\beta}{C} \phi^3 = 0.$$

9.7. Разобьем решение на несколько этапов.

1. Приведем исходное дифференциальное уравнение к виду

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = -\gamma \omega^3.$$

Его решение $x = a \sin \omega t$.

2. Раскроем правую часть этого уравнения:

$$-\gamma x^3 = -\gamma a^3 \sin^3 \omega t = -\gamma a^3 \left(\frac{3}{4} \sin \omega t - \frac{1}{4} \sin 3\omega t \right).$$

Найдем коэффициенты ψ_1 и f_1 :

$$\psi_1 = -\frac{3}{4} \gamma a^3, \quad f_1 = 0.$$

3. Подставим значения ψ_1 и f_1 в ур-ния (9.6):

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{1}{2\omega} [0 - (\omega_0^2 - \omega^2) 0], \\ \frac{db}{dt} &= 0 = -\frac{1}{2\omega} \left[-\frac{3}{4} \gamma a^3 - (\omega_0^2 - \omega^2) a \right]. \end{aligned}$$

Итак, для амплитуды $da/dt = 0$; для частоты $\frac{3}{4} \gamma a^3 + (\omega_0^2 - \omega^2) a = 0$.

4. Из уравнения для амплитуды найдем, что $a = \text{const} = a_0$, т. е. амплитуда определяется начальными условиями и является постоянной.

Частота зависит от амплитуды $\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4} \gamma a^2$. Колебания, частота которых зависит от амплитуды, называются неизохронными.

9.8. В соответствии с основами применения квазилинейного метода для изучения переходных процессов (стр. 303—305) в исходное дифференциальное уравнение

$$\frac{dA}{dt} = -\alpha A = -\frac{1}{2L} (R - R_{\text{отр}}) A$$

нужно вместо $R_{\text{отр}} = Ms/C$ ввести $R_{\text{отр}} = \frac{MS_{\text{ср}}}{C}$, т. е. $\frac{dA}{dt} = -\alpha_0 \left(1 - \frac{MS_{\text{ср}}}{RC} \right) A$,

где $\alpha_0 = R/2L$.

В первом случае имеем

$$\frac{dA}{dt} = -\alpha_0 \left(1 - \frac{MS_0}{RC} - \frac{3}{4} a^2 \frac{M}{RC} A^2 \right) A,$$

откуда

$$\frac{dA}{\left(1 - \frac{MS_0}{RC} - \frac{3}{4} a^2 \frac{M}{RC} A^2 \right) A} = -\alpha_0 dt.$$

Во втором случае

$$\frac{dA}{dt} = -\alpha_0 \left(1 - \frac{MS_0}{RC} \frac{\operatorname{th} q A}{q A} \right) A,$$

откуда

$$\frac{dA}{\left(1 - \frac{MS_0}{RC} \frac{\operatorname{th} q A}{q A} \right) A} = -\alpha_0 dt.$$

9.9. Остановимся, прежде всего, на методе малого параметра (2.6). Прямое применение этого метода приводит к появлению секулярных членов (см. например, П.2), и поэтому целесообразно обратиться к другим методам, например методам минимизации невязки (2.7).

Так как нелинейность в дифференциальном уравнении является нечетной функцией, будем аппроксимировать искомое решение суммой первой и третьей гармоник:

$$x = a_1 \sin \omega_0 t + a_3 \sin 3\omega_0 t.$$

Найдя \ddot{x} и γx^3 и подставив их в исходное дифференциальное уравнение, получим выражение невязки

$$\begin{aligned} \alpha(t) = & -8 a_3 \omega_0^2 \sin 3\omega_0 t + \gamma a_1^3 \sin^3 \omega_0 t + 3 \gamma a_1^2 a_3 \sin^2 \omega_0 t \sin 3\omega_0 t + \\ & + 3 \gamma a_1 a_3^2 \sin \omega_0 t \sin^2 3\omega_0 t + \gamma a_3^3 \sin^3 3\omega_0 t. \end{aligned}$$

Располагая выражением невязки $\alpha(t)$, можно найти коэффициенты a_1 и a_3 по любому из изложенных в П.2 методов: методу наименьших квадратов, методу моментов и методу коллокации. При расчетах следует пользоваться формулами табл. 9.1.

9.10. Перепишем исходное дифференциальное уравнение в безразмерном виде

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + x + \alpha^2 x^3 = 0,$$

где $\tau = \omega_0 t$, $\alpha^2 = \gamma/\omega_0^2$, и введем подстановку:

$$\dot{x} = \frac{dx}{d\tau} = y,$$

$$\ddot{x} = \frac{dy}{d\tau} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{d\tau} = y \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} y^2;$$

в результате получим новое уравнение:

$$\frac{dy^2}{dx} = -2(x + \alpha^2 x^3), \quad y^2 = -2 \int (x + \alpha^2 x^3) dx + C_1,$$

$$y = \frac{dx}{d\tau} = \pm \sqrt{-2 \int (x + \alpha^2 x^3) dx + C_1},$$

$$\tau = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{-2 \int (x + \alpha^2 x^3) dx + C_1}} + C_2.$$

Определим постоянную C_1 . Так как система консервативна, в ней установятся колебания с амплитудой A (задача 9.7); следовательно, $x=A$ при $y=dx/d\tau=0$; отсюда получаем

$$C_1 = 2(x^2 + \alpha^2 x^4)|_{x=A} = 2(A^2 + \alpha^2 A^4).$$

Теперь решение можно записать в виде

$$\tau = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{(A^2 - x^2) + \alpha^2 (A^4 - x^4)}} + C_2.$$

Последнее выражение можно свести к стандартной форме эллиптического интеграла первого рода. С этой целью можно воспользоваться специальной таблицей [81, стр. 97]; здесь, однако, приведем полностью необходимые преобразования.

Перепишем подкоренное выражение в виде

$$\begin{aligned} (A^2 - x^2) + \alpha^2 (A^4 - x^4) &= (A^2 - x^2) + \alpha^2 (A^2 - x^2) (A^2 + x^2) = \\ &= (A^2 - x^2) [1 + \alpha^2 (A^2 + x^2)] = \alpha^2 (A^2 - x^2) \left(x^2 + \frac{1}{\alpha^2} + A^2 \right). \end{aligned}$$

Введем обозначения: $x = A \cos \varphi$, $dx = -A \sin \varphi d\varphi$; подставив последние выражения в интеграл, запишем

$$\tau = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 \left(A + \frac{1}{\alpha^2} + A^2 \cos^2 \varphi \right)}} + C_2.$$

Для того чтобы привести этот интеграл к стандартному, нужно преобразовать подкоренное выражение:

$$\begin{aligned} \alpha^2 \left(A^2 + \frac{1}{\alpha^2} \cos^2 \varphi \right) &= \alpha^2 A^2 \left(1 + \frac{1}{\alpha^2 A^2} + 1 - 1 + \cos^2 \varphi \right) = \\ &= -\alpha^2 A^2 \left(-2 - \frac{1}{\alpha^2 A^2} + 1 - \cos^2 \varphi \right) = -\alpha^2 A^2 \left(-2 - \frac{1}{\alpha^2 A^2} + \sin^2 \varphi \right) = \\ &= \alpha^2 A^2 \left(2 + \frac{1}{\alpha^2 A^2} - \sin^2 \varphi \right) = \alpha^2 A^2 \left(2 + \frac{1}{\alpha^2 A^2} \right) \left[1 - \frac{1}{\left(2 + \frac{1}{\alpha^2 A^2} \right)} \sin^2 \varphi \right]. \end{aligned}$$

Теперь можно записать:

$$\tau = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 + 2\alpha^2 A^2}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + C_2.$$

Постоянную интегрирования C_2 можно исключить, сделав интеграл определенным с тем, чтобы привести его к табличному виду. Так как система является автономной, можно выбрать произвольно начало отсчета. Примем начало отсчета соответствующим максимальному значению x , т. е. $x = A$; тогда интегрирование по x нужно вести в пределах $\int_{x=A}^x$, причем, так как время τ в левой части должно увеличиваться, перед интегралом нужно выбрать знак плюс. Принимая во внимание далее, что $x = A \cos \varphi$, при интегрировании по φ пределы нужно взять от нуля до φ , т. е.

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 + 2\alpha^2 A^2}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad ^1)$$

или в соответствии с обозначением ((П.17.1)

$$\omega_0 t = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 + 2\alpha^2 A^2}} F(\varphi, k).$$

¹⁾ Под интегралом вместо φ можно было бы написать любой другой символ; принятая запись, несмотря на некоторую некорректность, широко применяется и к недоразумениям привести не может.

Модуль k определяется выражением $k^2 = (1 + 2\alpha^2 A^2) \alpha^2 A^2$, т. е. амплитудой колебания A и коэффициентом $\alpha^2 = \gamma/\omega_0^2$.

Полученный интеграл выражает точную зависимость между текущим значением $x = A \cos \varphi$ и текущим временем. В терминах и обозначениях теории эллиптических функций (см. П.17) текущее значение процесса определяется следующим образом:

$$x = A \cos \varphi = A \cos(amu) = A \operatorname{сnu}.$$

Таблицы для пользования этими формулами имеются в многочисленных руководствах, например [81].

9.11. Из сопоставления дифференциального уравнения консервативного колебательного контура

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0;$$

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + x = 0, \quad \omega_0 t = \tau$$

с уравнением (9.9) вытекает, что в данном случае $A(x) = 0$; $B(x) = 1$.

Уравнения главных изоклин:

изоклина A : $x = 0$ ($\varphi = 0^\circ$),

» B : $y = 0$ ($\varphi = 90^\circ$),

» C : $y = -x$ ($\varphi = 45^\circ$),

» D : $y = x$ ($\varphi = -45^\circ$).

Нанося графики главных изоклин и проводя засечки под углами (рис. P9.3), получаем искомую кривую в виде окружности.

9.12. Дифференциальное уравнение колебательного контура

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

с использованием общепринятых обозначений: $\omega_0 t = \tau$, $2\alpha/\omega_0 = \frac{1}{Q}$ приводим к виду

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \frac{1}{Q} \frac{dx}{d\tau} + x = 0.$$

В данном случае $Q = 5$; следовательно,

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \frac{1}{5} \frac{dx}{d\tau} + x = 0.$$

Сопоставляя с (9.9), видим, что $A(x) = 1/5$, $B(x) = 1$.

Уравнения главных изоклин:

$$y_A = -5x, \quad y_B = 0,$$

$$y_C = \frac{1}{-1 - 1/5} x = -\frac{5}{6} x,$$

$$y_D = \frac{1}{1 - 1/5} x = \frac{5}{4} x.$$

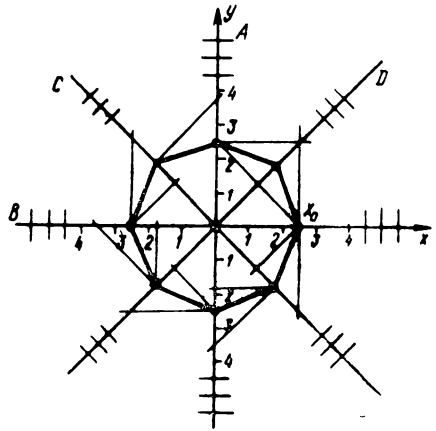
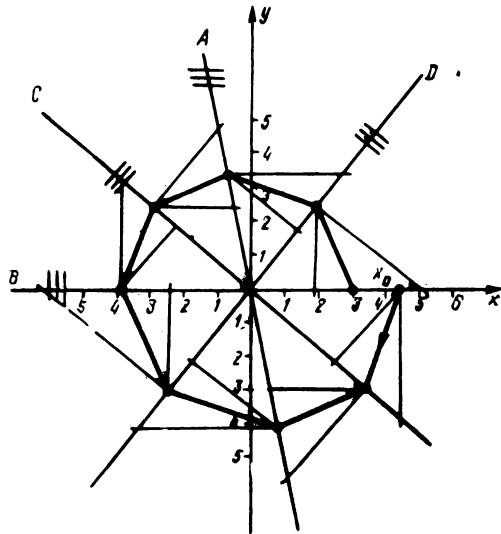
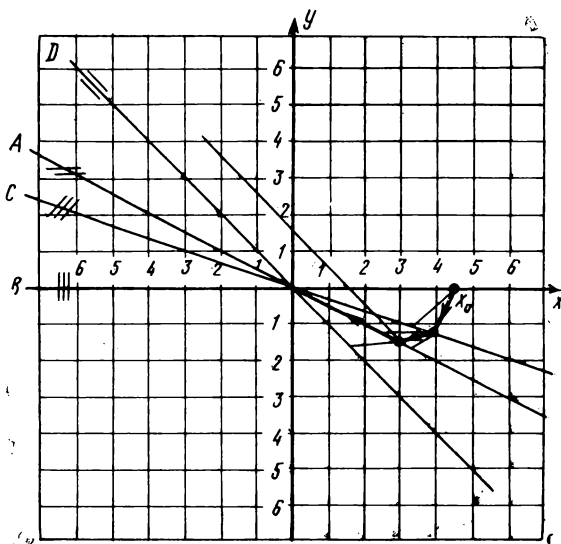


Рис. P 9.3



Puc. P 9.4



Puc. P 9.5

Нанося главные изоклины с засечками и пользуясь известными графическими построениями (рис. P9.4), получаем на фазовой плоскости картину свертывающейся спирали.

$$9.13. \quad y_A = -\frac{1}{2}x, \quad y_B = 0, \quad y_C = -\frac{1}{3}x, \quad y_D = -x.$$

Построение показано на рис. P9.5.

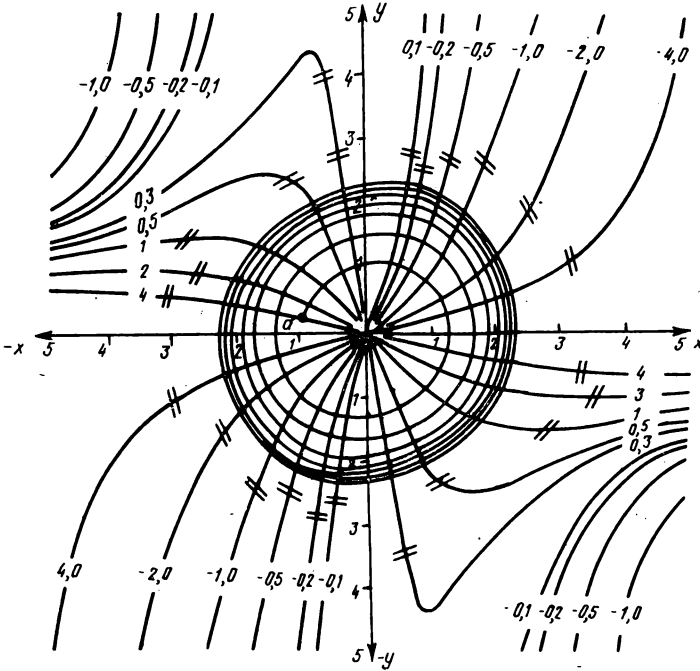


Рис. P9.6

9.14. Фазовое изображение представлено на рис. P9.6. Уравнение изоклины

$$y = \frac{10x}{2 - 10k - 1,33x^2}.$$

Обозначения: $\tau = \omega_0 t$, $x = qu_g$, $q = \frac{2S}{I_s}$.

9.15. Графики $S_{cp}(U_g)$ даны на рис. P9.7.

9.16. Задаваясь различными значениями U_g , находим амплитуду тока первой гармоники по формуле трех ординат: $I_{a1} = (i_{\max} - i_{\min})/2$; по формуле $S_{cp} = I_{a1}/U_g$ находятся значения средней крутизны. График $S_{cp}(N_g)$ дан на рис. P9.8.

9.17. Коэффициент a_3 должен быть отрицательным:

$$S_{cp} = a_1 - \frac{3}{4} a_3 U^2 = a_1 \left(1 - \frac{3}{4} \frac{a_3}{a_1} U^2 \right).$$

График $S_{cp}(U)$ изображен на рис. P9.9.

Границы, в которых формула для S_{cp} имеет смысл, следующие: $0 < U < 2\sqrt{a_1/3a_3}$.

9.18. Качественный график кривой S_{cp} дан на рис. P9.10а; график S_{cp} для заданной характеристики — на рис. P9.10б.

Для графика рис. P9.10б: $S_{max} = 4 \cdot 1,35$ мА/В; $U_0 = 1,93$ В.

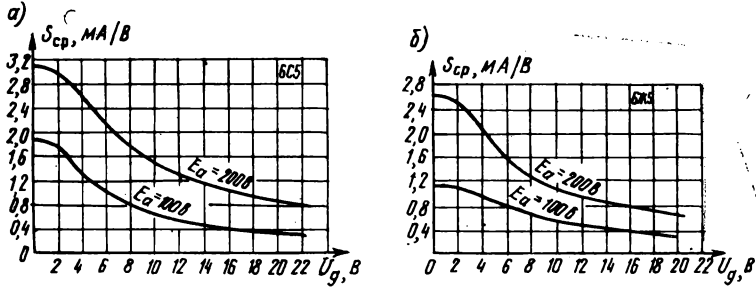


Рис. P 9.7

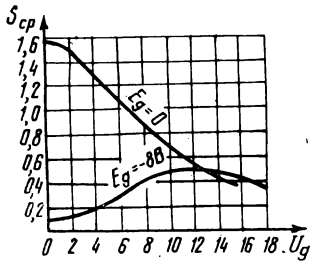


Рис. P 9.8

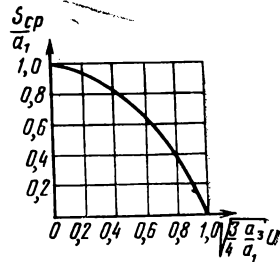


Рис. P 9.9

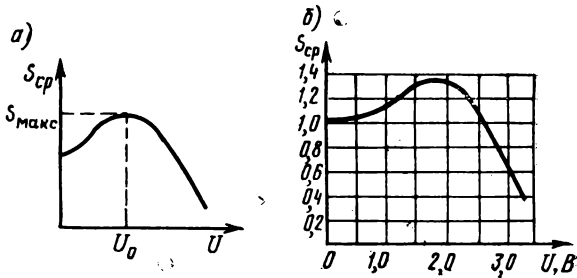


Рис. P 9.10

9.19. Для случая $\theta = 90^\circ$ $E_g = E_{g0}$. В этом случае

$$I_{a1} = \frac{S u_g}{\pi} \frac{\pi}{2} = \frac{S u_g}{2},$$

следовательно,

$$S_{cp} = \frac{I_{a1}}{U_g} = \frac{S}{2}. \quad (1)$$

Для случая $0 < \theta < 90^\circ$ введем обозначение:

$$\frac{S U_g}{S E_g - I_0} = x; \quad \frac{U_g}{E_0} = \frac{U_g}{E_g - E_{g0}} = x, \quad x > 1; \quad (2)$$

тогда

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1}{x} \\ \sin \theta &= \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x} \sqrt{x^2 - 1} \\ \theta &= \arccos \frac{1}{x} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Первая гармоника тока определяется выражением:

$$I_{a1} = \frac{S U_g}{\pi} \left(\arccos \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \sqrt{x^2 - 1} \right).$$

Средняя крутизна

$$S_{cp} = \frac{I_{a1}}{U_g} = \frac{S}{\pi} \left(\arccos \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2} \right). \quad (4)$$

Если $\theta \rightarrow \pi/2$, $x \rightarrow \infty$, тогда

$$\lim S_{cp} = \frac{S}{\pi} \arccos 0 = \frac{S}{2},$$

т. е. получили ф-лу (1).

Выражение (4), используя тождество

$$\arccos y = \arctg \frac{\sqrt{1 - y^2}}{y}, \quad (5)$$

можно переписать в более удобном виде

$$S_{cp} = \frac{S}{\pi} \left(\arctg \sqrt{x^2 - 1} - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2} \right). \quad (6)$$

По выражению (6) построен график средней крутизны в безразмерных единицах:

$$\frac{S_{cp}}{S} = f \left(\frac{U_g}{E_0} \right).$$

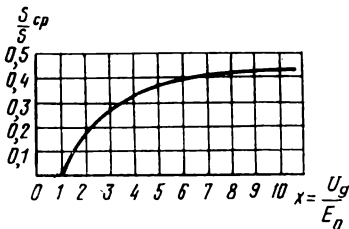


Рис. P9.11

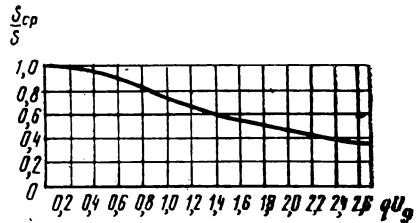


Рис. P9.12

Этот график дан на рис. P9.11. При $U_g \gg E_0$ $S_{cp} \approx S/2$.

$$9.20. \quad S_{cp} = S \frac{\text{th } q u_g}{q u_g}.$$

График, построенный по этому выражению, дан на рис. P9.12.

9.21. Для решения задачи воспользуемся формулой разложения функции $e^x \cos x$ (разд. 3). При вскрытии неопределенности выражения $B_1(x)/x$ при $x=0$ следует воспользоваться приближенным равенством

$$B_1(x) \approx \frac{1}{2} x$$

при $x \ll 1$. В результате простых преобразований получим

$$S_{cp} = 2 a I_0 \frac{B_1(aU)}{aU}.$$

График, построенный по последнему выражению, дан на рис. P9.13.

9.22. Иллюстрирующий решение график дан на рис. P9.14а.

Для случая $\theta=90^\circ$ (задача 9.19) $S_{cp}=S/2$, т. е., средняя крутизна не зависит от амплитуды сеточного напряжения. Таким образом,

в схеме генератора, собранного на лампе с заданной характеристикой, колебания будут расти бесконечно, так как с ростом колебаний средняя крутизна (т. е. усиительные свойства лампы в среднем) не уменьшается. Осуществление подобного генератора невозможно.

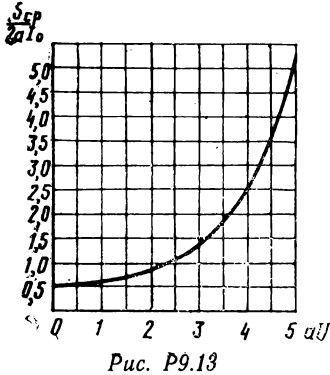


Рис. P9.13

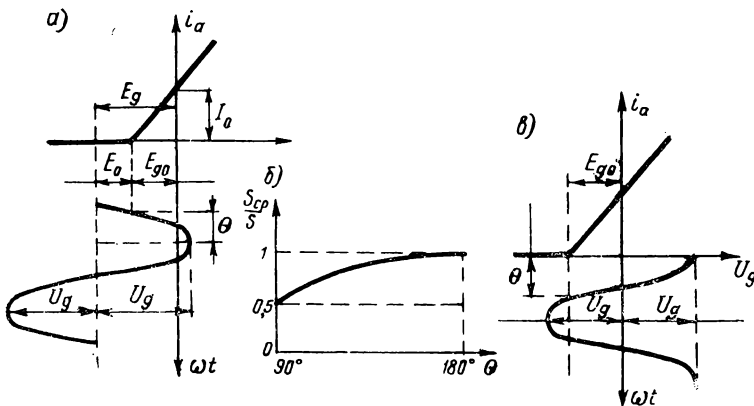


Рис. P9.14

Для случая $0^\circ < \theta < 90^\circ$ (задача 9.19)

$$S_{cp} = \frac{S}{\pi} \left(\arctg \sqrt{x^2 - 1} - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2} \right),$$

где $x = U_g / E_0 = U_g / (E_g - E_{g0})$.

График $S_{cp} = f(x)$ показан на рис. P9.11. В данном случае средняя крутизна с ростом колебаний увеличивается, что способствует еще большему росту колебаний. Следовательно, при этом режиме осуществление генерации также невозможно, т. е. при $0^\circ < \theta < 90^\circ$ нижняя отсечка не может быть причиной ограничения роста колебаний.

Для случая $90^\circ < \theta < 180^\circ$ удобнее найти зависимость S_{cp} от угла отсечки θ , а по ней уже определить зависимость S_{cp} от амплитуды U_g . Из формулы, приведенной на стр. 68, имеем

$$I_{a1} = \frac{SU_g}{\pi} (\theta - \sin \theta \cos \theta),$$

откуда

$$S_{cp} = \frac{I_{a1}}{U_g} = \frac{S}{\pi} (\theta - \sin \theta \cos \theta).$$

График $S_{cp} = \varphi(\theta)$ при $90^\circ < \theta < 180^\circ$ изображен на рис. P9.14б. Из иллюстративного графика для данного режима (рис. P9.14а) видно, что при уменьшении амплитуды $\theta \rightarrow 180^\circ$, а при ее увеличении $\theta \rightarrow 90^\circ$. Следовательно, в данном случае с ростом колебаний средняя крутизна уменьшается и генерация возможна. В этом режиме нижняя отсечка является причиной ограничения роста колебаний.

9.23. Уравнение стационарности в данном случае имеет вид: $S_{cp} = RC/M$. Выражение для S_{cp} (задача 9.17):

$$S_{cp} = a_1 - \frac{3}{4} a_3 U_g^2.$$

Подставляя это выражение в уравнение стационарности и решая его относительно U_g , получаем

$$U_{g \text{ ст}} = \frac{2}{\sqrt{3} a_3} \sqrt{a_1 - \frac{RC}{M}}.$$

$$9.24. U_{g \text{ ст}} = \frac{2}{\sqrt{3} a_3} a_1 - \sqrt{\frac{RC}{M - LD}}.$$

$$9.25. U_{g \text{ ст}} = \sqrt{\frac{a_1 - RC \frac{L + L_1}{LL_1}}{3 a_3}}.$$

$$9.26. U_{g \text{ ст}} = 2 \sqrt{\frac{a_1 R_3 - 29 - 23 \frac{R_3}{R} - 4 \left(\frac{R_3}{R} \right)^2}{3 a_3 R_3}}.$$

9.27. Нужно рассчитать индуктивность контура L , сопротивление R и взаимноиндуктивность M , при которой генератор будет развивать напряжение с амплитудой, равной 20 В.

Индуктивность L и сопротивление R легко рассчитываются по формулам:

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C} = \frac{10^{12}}{4 \pi^2 \cdot 10^{14} \cdot 100} \approx 250 \cdot 10^{-6} \text{ Г} = 250 \text{ мкГ},$$

$$R = \frac{2 \pi f_0 L}{Q} = \frac{2 \pi \cdot 10^6 \cdot 250 \cdot 10^{-6}}{50} = 31,4 \text{ Ом}.$$

Для расчета взаимноиндуктивности M нужно воспользоваться графиком средней крутизны лампы 6С5, полученным в задаче 9.15.

Из уравнения стационарности $S_{ср} = RC/M$ находим: $M = RC/S_{ср}$. Значение $S_{ср}$ при $U_g = 20$ В определяем по графику рис. P9.7а: $S_{ср} = 0,85$ мА/В, следовательно,

$$M = \frac{RC}{S_{ср}} = \frac{31,4 \cdot 100 \cdot 10^{-12}}{0,85 \cdot 10^{-3}} = 3,7 \cdot 10^{-6} \text{ Г} = 3,7 \text{ мкГ}.$$

9.28. $M \approx 8,3$ мкГ.

9.29. $U_{уст} = 9$ В.

9.30. 1) Так как $\kappa = -1$, т. е. $\kappa < 0$, то решение является устойчивым.

2) Так как $\kappa = 1$, т. е. $\kappa > 0$, решение не может быть устойчивым.

3) При $\gamma > 0$ решение устойчиво при любых начальных условиях, так как $\kappa = -\gamma x^2$.

4) Решение будет устойчивым только при условии, что $\gamma x^2 < 1$, т. е. начальное условие должно удовлетворять неравенству $|x| < 1/\sqrt{\gamma}$.

9.31. Консервант определяется выражением $\kappa(\theta) = -\sin \theta/\theta$; график $\kappa(\theta)$ изображен на рис. P9.15. Из рисунка видно, что если начальные условия соответ-

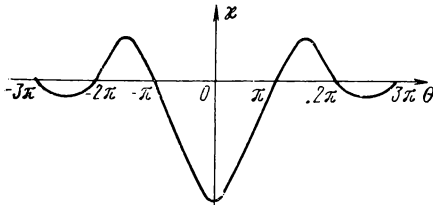


Рис. P9.15

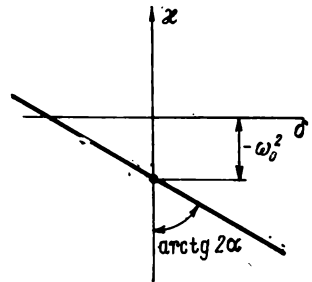


Рис. P9.16

ствуют неравенству $-\pi < \theta < \pi$, то колебания маятника будут устойчивыми, так как при этом $\kappa < 0$. Если внешний толчок будет таким, что, например, $\theta > \pi$, устойчивость нарушится.

9.32. Дифференциальное уравнение диссипативного колебательного контура имеет вид

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0;$$

разделив его почленно на x , получим

$$\ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

или

$$\dot{x} = -2\alpha x - \omega_0^2 x.$$

На плоскости консервант-диссипант свободный процесс в диссипативном колебательном контуре представляется прямой (рис. P9.16).

10

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРИ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Общие сведения

Материал настоящего раздела является развитием предыдущего; здесь рассматриваются те же цепи, но не в свободном режиме, а в вынужденном. Как и при изучении цепей второго порядка для исследования вынужденных режимов пригодны почти все приближенные методы, изложенные в приложении 1. В равной степени сохраняют свою силу утверждения о предпочтительности (когда речь идет об избирательных системах) метода медленно меняющихся амплитуд при изучении переходных процессов и квазилинейного метода — при изучении стационарных процессов.

Методом фазовой плоскости для изучения вынужденных режимов пользоваться можно (см. П.3), но нецелесообразно.

Как и в предыдущем разделе, основное внимание здесь сосредоточено на избирательных цепях; сначала рассматриваются переходные процессы, а затем — стационарные. Решение каждой задачи связано с громоздкими выкладками, поэтому число задач относительно невелико; их основное назначение — иллюстрация расчетной рецептуры. В ряде задач изучаются линейные цепи, но их решения даются по рецептуре, предназначенной для нелинейных цепей; такой методический подход позволяет облегчить овладение соответствующим материалом.

В этом разделе рассматриваются также вопросы синтеза нелинейных цепей по заданным преобразованиям внешнего воздействия. Преобразования реализуются цепями, содержащими дифференциаторы, интеграторы (их число определяет порядок цепи) и нелинейные элементы, обрабатывающие исходный и дифференцированный (или интегрированный) сигналы; основу такого синтеза составляет использование структурных свойств сигналов, т. е. свойств, выражаемых при помощи связей между сигналом и его производными (интегралами) или другими функциональными преобразованиями.

Переходные процессы при гармоническом воздействии

Рассмотрим избирательные цепи второго порядка, дифференциальные уравнения которых могут быть приведены к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \mu F \left(t, x, \frac{dx}{dt} \right). \quad (10.1)$$

В отличие от ур-ния (9.2), здесь в правую часть время t входит в явном виде, что соответствует наличию внешнего воздействия $f(t)$. Примем его моногармоническим (гармоническим), т. е.

$$f(t) = F_0 \cos(\omega t + \varphi). \quad (10.2)$$

Если частота внешнего воздействия равна или мало отличается от собственной частоты $\omega \approx \omega_0$, внешнее воздействие (и соответственно вынужденные колебания в установившемся режиме) называют резонансным; если $\omega \approx \frac{n}{m} \omega_0$ (n и m — целые малые числа), — синхронным и, наконец, при всех других соотношениях между ω и ω_0 — асинхронным.

Задача изучения переходного процесса состоит в решении ур-ния (10.1), т. е. нахождения зависимости $x(t)$ при $0 < t < \infty$ и заданных начальных условиях. Точное решение ур-ния (10.1) в общем виде невозможно; учет особенностей, являющихся следствием высокой избирательности цепи, позволяет сравнительно простыми средствами получить приближенное решение на основе метода медленно меняющихся амплитуд, подробно изложенного в предыдущем разделе. Дополнительно нужно отметить следующее.

В зависимости от схемы цепи, т. е. от вида функции F в ур-нии (10.1), в ней могут протекать различные процессы, свойственные именно нелинейным цепям. Если обратная связь невелика и цепь находится в недовозбужденном режиме, в ней в установившемся режиме появится ток с частотой ω внешнего воздействия и, если ω мало отличается от ω_0 , решение для переходного процесса можно принять в виде колебания с внешней частотой ω и с переменной амплитудой. Если же цепь находится в возбужденном режиме, т. е. генерирует свои колебания с частотой ω_r , процесс оказывается более сложным. В этих условиях на нелинейный элемент действуют два гармонических колебания с частотами ω и ω_r и возникающие комбинационные колебания с частотами

$$\omega_k = N \omega \pm M \omega_r; \quad (10.3)$$

среди последних особую роль играют колебания, частоты ω_k которых мало отличаются от ω_0 . Таким образом, на формирование переходного процесса влияет целый ряд колебаний и это влияние учитывается в характере изменения амплитуды принятого в качестве решения колебания с частотой ω внешнего воздействия.

Итак, решение ур-ния (10.1) при воздействии (10.2) ищется в виде, совпадающем с (9.3);

$$x = a(t) \sin \omega t + b(t) \cos \omega t \quad (10.4)$$

и соответственно уравнения для амплитуд аналогичны уравнениям (9.6).

Эти уравнения полностью описывают нелинейную избирательную цепь. Решение их дает зависимости $a(t)$ и $b(t)$, которые в сочетании с (10.4) определяют закон изменения мгновенных значений искомого колебания. Подставляя в этот закон время $t \rightarrow \infty$, можно получить установившиеся (стационарные) значения амплитуд $a_0(\omega)$ и $b_0(\omega)$, т. е. амплитудно-частотные характеристики (см. ниже). Стационарные значения можно также найти из условий: $da/dt = db/dt = 0$.

Довольно часто можно упростить выкладки, если перейти от декартовой системы координат к полярной по формулам:

$$\left. \begin{aligned} a \sin \omega t + b \cos \omega t &= A \sin(\omega t + \varphi) \\ a &= A \cos \varphi; \quad b = A \sin \varphi \\ A^2 &= a^2 + b^2; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} \end{aligned} \right\} \quad (10.5)$$

В этих преобразованиях, как правило, используется равенство

$$\frac{dA^2}{dt} = 2A \frac{dA}{dt}. \quad (10.6)$$

Рецептура расчета переходного процесса в вынужденном режиме совпадает с таковой в свободном режиме (разд. 9) и содержит те же пять этапов. Однако выкладки здесь гораздо более громоздки, и поэтому задачи, иллюстрирующие применение изложенной методики для расчета переходных процессов, адресуются только к линейным цепям (задачи 10.1—10.3), а установившихся — сначала к линейным, а затем нелинейным (задачи 10.4—10.11).

Установившиеся процессы при гармоническом воздействии

Установившийся процесс можно получить, как уже указывалось, если в уравнениях (9.6) положить $da/dt = db/dt = 0$; появляющиеся при этом конечные уравнения представляют собой амплитудно-частотные (либо амплитудно-частотную и фазо-частотную) характеристики, выражающие зависимости амплитуды и фазы колебаний от расстройки и параметров элементов, из которых составлена цепь.

Найденные стационарные значения нужно проверить на устойчивость; с этой целью следует вернуться к системе (9.6) и подставить в уравнения $a = a_0 + \Delta a$, где a_0 — предположительно устойчивая амплитуда; затем нужно составить дифференциальное уравнение относительно Δa и исследовать его решение при $t \rightarrow \infty$ (см. П. 10).

Однако для изучения установившегося процесса можно и не обращаться к системе ур-ний (9.6), полученных на основе метода медленно меняющихся амплитуд, а воспользоваться квазилинейным методом (методом гармонического баланса), подробно рассмотренным в разд. 6 применительно к цепям первого порядка. В разд. 9 квазилинейный метод использовался и по отношению к цепям второго порядка, но только к таким, у которых нелинейным элементом был резистор, а энергоемкие элементы (конденсатор, катушка) были линейными. Здесь будет дана расчетная рецептура квазилинейного метода применительно к цепям второго порядка, содержащим нелинейные энергоемкие элементы.

Рассмотрим сначала цепь с нелинейной индуктивностью; пусть нелинейность задана характеристикой $\phi(i)$. Общее уравнение цепи при внешнем гармоническом воздействии имеет вид

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \omega \mathcal{E} \sin \omega t$$

или с использованием оператора дифференцирования $p = d/dt$

$$p^2\phi + pRi + \frac{1}{C} i = \omega \mathcal{E} \sin \omega t.$$

Если бы индуктивность была линейной, то $\phi = Li$ и поток ϕ повторял бы по форме ток i ; так как катушка нелинейна, то поток ϕ не будет повторять ток i . Считая цепь высокоизбирательной, примем, что поток ϕ содержит только первую гармонику, но с током она не совпадает по фазе. Так как ток $i = I \sin \omega t$,

$$\phi = \Phi_s \sin \omega t + \Phi_c \cos \omega t.$$

Коэффициенты Φ_s и Φ_c можно найти по формулам:

$$\begin{aligned} \Phi_s &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \phi(I \sin \omega t) \frac{\sin \omega t}{\cos \omega t} \omega t d\omega t; \\ \Phi_c & \end{aligned} \quad (10.7)$$

однако, как будет показано ниже, в этом нет необходимости.

Так как $i = I \sin \omega t$, $pi = I \omega \cos \omega t$, то $\sin \omega t = i/I$, $\cos \omega t = pi/\omega I$ и можно записать

$$\phi = \frac{\Phi_s}{I} i + \frac{\Phi_c}{I} \frac{p}{\omega} i.$$

Зависимость потока ϕ от тока i и его производной pi здесь как бы линейризована, и потому данный метод часто называют «методом гармонической линейризации», хотя этимологически это название объяснить нельзя.

Отношения Φ_s/I , Φ_c/I имеют размерность индуктивности, и так как Φ_s , Φ_c зависят от амплитуды тока, можно ввести обозначения: $\Phi_s/I = L_s(I) = L_s$, $\Phi_c/I = L_c(I) = L_c$, т. е. $\phi = L_s i + L_c \frac{p}{\omega} i = (L_s + iL_c) i$.

Величина в скобках представляет собой «индуктивность по первой гармонике» или среднюю индуктивность

$$L_{cp} = L_s + iL_c, \quad (10.8)$$

которая в общем случае является комплексной. В работе [54] изложена методика экспериментального определения L_s и L_c как функции тока I . Очевидно, $L_{cp} = \Phi_1/I_1$, т. е. представляет собой отношение первых гармоник потока и тока.

Подставляя $\phi = L_{cp}i$ в дифференциальное уравнение и пользуясь символическим методом, получаем:

$$\begin{aligned} p^2 L_{cp} \dot{I} e^{i\omega t} + pRI e^{i\omega t} + \frac{1}{C} I e^{i\omega t} &= \omega \mathcal{E} e^{i\omega t}, \\ (i\omega)^2 L_{cp} \dot{I} + i\omega R \dot{I} + \frac{1}{C} I &= \omega \dot{\mathcal{E}}, \\ \mathcal{I} &= \frac{\mathcal{E}}{i\omega L_{cp} + R + \frac{1}{i\omega C}}. \end{aligned} \quad (10.9)$$

Здесь $L_{cp} = L_{cp}(I)$ — является функцией амплитуды тока. Для напряжения u_L на катушке можно написать:

$$\begin{aligned} u_L &= \frac{d\phi}{dt} = pL_{cp}i, \\ \dot{U}_L &= i\omega L_{cp} \dot{I} = i\omega(L_s + iL_c)\dot{I}. \end{aligned} \quad (10.10)$$

Аналогичные соотношения можно получить и для емкости (задача 10.8):

$$\begin{aligned} C_{cp} &= C_s + iC_c, \quad C_{cp} = \frac{Q_1}{U_1}, \\ \dot{U}_C &= \frac{iC}{i\omega(C_s + iC_c)}. \end{aligned} \quad (10.11)$$

Здесь $C_s = C_s(U_C)$, $C_c = C_c(U_C)$.

Из ф-лы (10.9) с учетом (10.8) легко получить выражение для амплитуды тока в контуре, содержащем нелинейную катушку:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{(R - \omega L_c)^2 + \left(\omega L_s - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (10.12)$$

Это выражение трудно доступно для исследования, так как $L_c = L_c(I)$ и $L_s = L_s(I)$ (см. задачу 10.11).

Для широко применяемых ферритов указанные зависимости часто аппроксимируют квадратичными функциями: $L_s = L_{s0}(1 + aI^2)$, $L_c = L_{c0}(1 + bI^2)$.

Таким образом, на основе квазилинейного метода расчет цепи, содержащей нелинейные элементы, сводится к расчету линей-

ной цепи, но со средними параметрами, зависящими от амплитудных значений. Следует указать, что если известна зависимость $\phi(i)$, то значения Φ_s, Φ_c можно найти по ф-ле (10.7), так как это рекомендовалось в разд. 6, и нет необходимости обращаться к средним параметрам по ф-ле (10.8); однако на практике зависимость $\phi(i)$ получить невозможно, а зависимости $L_s(i)$ и $L_c(i)$ — сравнительно легко. В теоретических исследованиях обычно задаются зависимостью $\phi(i)$ или $q(u)$.

Выражения амплитудно-частотных и фазо-частотных характеристик нелинейных цепей имеют, как правило, весьма сложный вид, поэтому часто вместо функций $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ приходится находить обратные им функции $\omega(A)$ и $\omega(\varphi)$ и ограничиваться графическими иллюстрациями полученных решений.

Синтез нелинейных цепей второго и более высоких порядков по заданным преобразованиям входных сигналов

Задача формулируется следующим образом. Задан входной сигнал в виде функции времени и ряда параметров: $s(t) = s(t; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, a_N)$, причем параметры, в свою очередь, также могут быть функциями времени. Сигнал нужно преобразовать так, чтобы в результате получить новую функцию, соответствующую условиям задачи, например функцию, выражающую закон изменения параметра a_n , или функцию, тождественно равную нулю (режекторный фильтр), и т. д. В условиях задачи может быть указана необходимость обеспечения инвариантности преобразованного сигнала по отношению к определенным параметрам.

Сформулированная задача может иметь ряд решений, и для выбора наиболее подходящего из них следует привлекать дополнительные соображения. Общий подход к решению поставленной задачи состоит в следующем. По заданному сигналу $s(t)$ находятся функционально преобразованные сигналы $L_n[s(t)]$; здесь L_n символизирует операцию преобразования (дифференцирование, интегрирование, возведен в степень и т. д.); таким образом появляются новые сигналы $L_1(s), L_2(s)$. Из преобразованных сигналов выбираются два или более сигнала, которые связываются между собой по определенному правилу, т. е. $\Phi[L_n(s), L_m(s)] = 0$. Выбор преобразованных сигналов и правила связи между ними должны быть подчинены условиям относительной простоты реализации получаемого алгоритма.

В задачах 10.15—10.16 даны примеры синтеза нелинейных цепей (а в некоторых случаях и линейных) по заданным преобразованиям входных сигналов. Решение задачи синтеза здесь считается завершенным, если получен алгоритм, по которому можно составить структурную схему, содержащую реализуемые функциональные узлы и преобразователи.

* *
*

В настоящем разделе задачи расположены в следующем порядке. Первые три задачи (10.1—10.3) посвящены изучению переходных процессов методом медленно меняющихся амплитуд; в задачах 10.4—10.11 изучаются установившиеся процессы как методом медленно меняющихся амплитуд, так и квазилинейным. Наконец, в задачах 10.12—10.16 рассматривается синтез устройств, осуществляющих заданное преобразование входных сигналов.

Задачи и упражнения

10.1. Найти выражение для переходного процесса в линейном консервативном контуре, находящемся под воздействием гармонического напряжения с частотой, равной собственной частоте контура (рис. 10.1).

10.2. Найти выражение для переходного процесса в линейном диссипативном контуре, если в момент $t=0$ к контуру подключен генератор синусоидального напряжения с частотой $\omega=\omega_0$, т. е. равной собственной частоте контура (считается, что $\alpha \ll \omega_0$, $\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \approx \omega_0$).

10.3. Найти выражение для переходного процесса, совершающегося в линейном диссипативном контуре, если в момент $t=0$ к контуру подключен генератор синусоидального напряжения с частотой ω , не равной собственной частоте ω_0 колебательного контура.

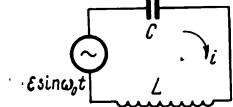


Рис. 10.1

10.4. В задаче 10.2 рассматривался переходный процесс в линейном диссипативном контуре при внешнем воздействии, частота которого совпадает с частотой собственных колебаний, т. е. $\omega=\omega_0$, причем считалось, что $\alpha \ll \omega_0$, $\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \approx \omega_0$.

По полученному в задаче 10.2 дифференциальному уравнению найти стационарную амплитуду и сравнить найденное значение с тем, которое будет иметь место, если в выражении свободного процесса $t \rightarrow \infty$.

10.5. В задаче 10.3 был рассмотрен свободный процесс в диссипативном линейном контуре при внешнем воздействии, частота ω которого не равна частоте ω_0 собственных колебаний.

По полученным в задаче 10.3 дифференциальным уравнениям найти выражение стационарной амплитуды, т. е. амплитудно-частотную характеристику контура.

10.6. Найти амплитудно-частотную характеристику нелинейного контура, описываемого дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x + \gamma x^3 = P \sin \omega t$$

на основе метода медленно меняющихся амплитуд.

10.7. В задаче 8.1 было получено дифференциальное уравнение лампового генератора

$$\frac{d^2 u_g}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} - \frac{Ms}{LC} \right) \frac{du_g}{dt} + \frac{1}{LC} u_g = 0,$$

которое соответствует эквивалентной схеме колебательного контура, содержащего сопротивление R и отрицательное сопротивление $R_{отр} = |MS/C|$. При включении в такой контур внешнего напряжения контур превращается в так называемый регенерированный контур или регенератор.

Составить на основе метода медленно меняющихся амплитуд уравнения для определения частотных характеристик регенератора, считая, что для этих условий дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{d^2 u_g}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} - \frac{Ms}{LC} \right) \frac{du_g}{dt} + \frac{1}{LC} u_g = \omega_0^2 \mathcal{E} \cos \omega t,$$

где крутизна s определяется характеристикой лампы:

$$i = I + Su_g - \gamma u_g^3, \text{ т. е. } s = S - 3\gamma u_g^2.$$

10.8. Получить выражения для средней емкости квазилинейным методом, а затем составить выражение модуля передаточной функции по напряжению для контура с нелинейным конденсатором (рис. 10.2).

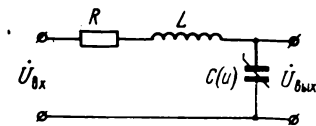


Рис. 10.2

10.9. Найти выражения $C_{cp} = Q_1/U_1$ для двух зависимостей между напряжением u на конденсаторе и зарядом q :

- 1) $q = \alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3$;
- 2) $u = \beta_0 + \beta_1 q + \beta_2 q^2 + \beta_3 q^3$.

10.10. Составить выражение для амплитудно-частотной характеристики колебательного контура, содержащего нелинейный конденсатор (см. задачу 10.9), средняя емкость которого подчиняется зависимости $C_{cp} = C_0(1 + \lambda U_{вых}^2)$. Амплитудно-частотная характеристика была найдена в задаче 10.8:

$$K(\omega) = \frac{U_{вых}}{U_{вх}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC_{cp})^2 + \omega^2 R^2 C_{cp}^2}}.$$

10.11. Ток в контуре, содержащем нелинейную катушку, определяется ф-лой (10.12). Составить выражение амплитудно-частотной характеристики контура на основе следующих аппроксимаций: $L_c = L_0 f_c(I)$, $L_s = L_0 [1 + f_s(I)]$.

10.12. Задан моногармонический сигнал: $s(t) = a \sin \omega t$, $(-\infty < t < \infty)$. Синтезировать измеритель частоты ω , построенный на операциях дифференцирования, интегрирования и других простейших преобразованиях.

10.13. Синтезировать амплитудный детектор по следующим условиям: 1) инвариантность к частоте без ограничений на скорость изменения амплитуды; 2) инвариантность к частоте при условии, что амплитуда меняется медленно; 3) без требования инвариантности к частоте.

Сигнал имеет вид, соответствующий условию задачи 10.12, но амплитуда a является функцией времени.

10.14. Задан сигнал $s(t) = a \sin[\omega_0 t + \psi(t)]$, $a = \text{const}$. Синтезировать алгоритмы для построения фазовых (частотных) детекторов, на выходе которых должен быть сигнал $\psi(t)$.

10.15. Синтезировать алгоритмы работы режекторных фильтров, обеспечивающих полную режекцию нижеприведенных сигналов при известных значениях параметров этих сигналов (кроме масштабных множителей A):

$$1) s(t) = A \sin(\omega t + \varphi); \quad 2) s(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2);$$

$$3) s(t) = A e^{-\alpha t^2}; \quad 4) s(t) = A \frac{\sin \omega t}{\omega t}.$$

10.16. Синтезировать алгоритмы работы режекторных фильтров, обеспечивающих полную режекцию нижеприводимых сигналов, при любых значениях параметров этих сигналов:

$$1) s(t) = A \sin(\omega t + \varphi); \quad 2) s(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2);$$

$$3) s(t) = A e^{-\alpha t^2}.$$

РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ

10.1. 1. Исходное дифференциальное уравнение

$$L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt = \mathcal{E} \sin \omega_0 t$$

приводим к виду

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \omega_0^2 i = \frac{\omega_0 \mathcal{E}}{L} \cos \omega_0 t,$$

а затем и к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \cos \omega_0 t,$$

где $\mathcal{E}/\omega_0 L = I_0$, $i/I_0 = x$.

2. Находим коэффициенты разложения правой части уравнения [см. ф-лу (9.5)]: $\psi_1 = 0$, $f_1 = \omega_0^2$.

3. Подставляем найденные коэффициенты в уравнение (9.6):

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2\omega_0} (\omega_0^2 + 0) = \frac{1}{2} \omega_0, \quad \frac{db}{dt} = 0.$$

4. Находим переходный процесс:

$$a = \int \frac{1}{2} \omega_0 dt + C = \frac{1}{2} \omega_0 t + C;$$

если при $t=0$ $a=0$, то $C=0$. Так как $x = a \sin \omega_0 t$,

$$\text{то} \quad i = \frac{I_0}{2} \omega_0 t \sin \omega_0 t.$$

На фазовой плоскости (a, \dot{a}) получаем прямую, параллельную ось абсцисс (поз. 1 табл. 6.1); амплитуда неограниченно растет.

5. Проверка на устойчивость: так как

$$\frac{d}{da} \left(\frac{da}{dt} \right) \equiv 0,$$

то колебаний с устойчивыми амплитудами нет.

10.2. 1. Исходное дифференциальное уравнение

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int idt = \mathcal{E} \sin \omega_0 t$$

легко привести к виду

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \frac{\omega_0 \mathcal{E}}{L} \cos \omega_0 t.$$

Вводя обозначения $\mathcal{E}/\omega_0 L = I_0$, $i/I_0 = x$, получаем

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = -2\alpha \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \cos \omega_0 t. \quad (1)$$

Решение ищем в форме

$$\left. \begin{aligned} x &= a \sin \omega_0 t + b \cos \omega_0 t \\ \frac{dx}{dt} &= a \omega_0 \cos \omega_0 t - b \omega_0 \sin \omega_0 t \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

2. С учетом ф-л (2) ур-ние (1) переписывается так:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = -2\alpha a \omega_0 \cos \omega_0 t + 2\alpha b \omega_0 \sin \omega_0 t + \omega_0^2 \cos \omega_0 t.$$

Находим коэффициенты ψ_1 и f_1 :

$$\psi_1(a, b) = 2\alpha b \omega_0, \quad f_1(a, b) = \omega_0^2 - 2\alpha a \omega_0. \quad (3)$$

3. Подставляем значения коэффициентов ψ_1 и f_1 в ур-ние (9.6):

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{1}{2\omega_0} (\omega_0^2 - 2\alpha a \omega_0) = \frac{1}{2} \omega_0 - \alpha a \\ \frac{db}{dt} &= -\frac{1}{2\omega_0} 2\alpha b \omega_0 = -\alpha b \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

При $\alpha=0$ получаем результат задачи 10.1.

4. Интегрируем ур-ние (4):

$$1) \frac{da}{a - \frac{1}{2} \frac{\omega_0}{\alpha}} = -\alpha dt; \quad \ln(a - Q) = -\alpha t + C_1, \quad a - Q = C_2 e^{-\alpha t}.$$

При $t=0$ $a=0$, $C_2=-Q$; таким образом, $a=Q(1-e^{-\alpha t})$.

$$2) \frac{db}{b} = -\alpha dt, \quad b = C_3 e^{-\alpha t} \quad \text{при } t=0, \quad b=0, \quad C_3=0$$

и, следовательно, $b=0$.

Переходный процесс:

$$\begin{aligned} x &= a(t) \sin \omega_0 t, & i &= I_0 Q (1 - e^{-\alpha t}) \sin \omega_0 t, \\ i &= \frac{\mathcal{E}}{\omega_0 L} \frac{\omega_0 L}{R} (1 - e^{-\alpha t}) \sin \omega_0 t, & i &= \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-\alpha t}) \sin \omega_0 t. \end{aligned}$$

5. Проверка на устойчивость элементарна: процесс устойчив.

10.3. 1. Исходное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \frac{\omega \mathcal{E}}{L} \cos \omega t$$

путем введения обозначений $\mathcal{E}/\omega_0 L = I_0$, $i/I_0 = x$ приводим к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = -2\alpha \frac{dx}{dt} + \omega \omega_0 \cos \omega t. \quad (1)$$

Решение ищем в форме:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \sin \omega t + b \cos \omega t \\ \frac{dx}{dt} &= a \omega \cos \omega t - b \omega \sin \omega t \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

2. С учетом ф-л (2) выражение (1) переписывается так:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = -2\alpha a \omega \cos \omega t + 2\alpha b \omega \sin \omega t + \omega \omega_0 \cos \omega t.$$

Находим коэффициенты ψ_1 и f_1 :

$$\psi_1(a, b) = 2\alpha b \omega, \quad f_1(a, b) = \omega \omega_0 - 2\alpha a \omega. \quad (3)$$

3. Подставляем значения коэффициентов ψ_1 и f_1 в ур-ния (9.6):

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{1}{2\omega} [\omega\omega_0 - 2\alpha a \omega + (\omega^2 - \omega_0^2) b] \\ \frac{db}{dt} &= -\frac{1}{2\omega} [2\alpha b \omega + (\omega^2 - \omega_0^2) a] \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

4. Для решения системы (4) целесообразно перейти к полярным координатам:

$$\begin{aligned} x &= a \sin \omega t + b \cos \omega t = A \sin(\omega t + \varphi); \\ a &= A \cos \varphi, \quad b = A \sin \varphi, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}, \quad a^2 + b^2 = A^2. \end{aligned}$$

Умножая первое ур-ние (4) на a , второе на b и складывая, получаем

$$\frac{dA^2}{dt} = \omega_0 a - 2\alpha A^2.$$

Так как $dA^2/dt = 2A dA/dt$, $a = A \cos \varphi$, то

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\omega_0}{2} \cos \varphi - \alpha A. \quad (5)$$

Заменяя в ур-ниях (4) $a = A \cos \varphi$ и $b = A \sin \varphi$, находим:

$$\frac{dA}{dt} \cos \varphi - A \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2\omega} [\omega\omega_0 - 2\alpha\omega A \cos \varphi + (\omega^2 - \omega_0^2) A \sin \varphi],$$

$$\frac{dA}{dt} \sin \varphi + A \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{2\omega} [2\alpha\omega A \sin \varphi + (\omega^2 - \omega_0^2) A \cos \varphi].$$

Умножая первое уравнение на $\sin \varphi$, а второе — на $\cos \varphi$ и вычитая из второго первое, получаем

$$A \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{2} \omega_0 \sin \varphi - \frac{1}{2\omega} (\omega^2 - \omega_0^2) A$$

или

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega} - \frac{\omega_0 \sin \varphi}{2A}. \quad (6)$$

Интегрирование системы ур-ний (5) и (6):

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\omega_0}{2} \cos \varphi - \alpha A,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega} - \frac{\omega_0 \sin \varphi}{2A}$$

дает закон изменения $A(t)$ и $\varphi(t)$ в переходном режиме; соответствующие вычисления относительно громоздки и здесь не приводятся. Установившийся процесс рассматривается ниже, в задаче 10.5.

10.4. Исходная система уравнений (задача 10.2)

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2} \omega_0 - \alpha a, \quad \frac{db}{dt} = -\alpha b$$

при условии, что $da/dt=db/dt=0$, дает: $a_{уст}=\omega_0/2\alpha=Q$, $b_{уст}=0$. Следовательно,

$$x = a \sin \omega_0 t = Q \sin \omega_0 t,$$

$$i = x I_0 = Q \frac{\mathcal{E}}{\omega_0 L} \sin \omega_0 t = \frac{\mathcal{E}}{R} \sin \omega_0 t.$$

Тот же результат имеет место, если в выражение свободного процесса подставить $t=\infty$.

10.5. В исходных уравнениях

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\omega_0}{2} \cos \varphi - \alpha A, \quad \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\omega} - \omega_0 \frac{\sin \varphi}{2A}$$

положим $dA/dt=d\varphi/dt=0$; в результате получим:

$$\cos \varphi = \frac{2\alpha}{\omega_0} A = \frac{1}{Q} A, \quad \sin \varphi = -\frac{A}{\omega\omega_0} (\omega^2 - \omega_0^2).$$

Возводя в квадрат и складывая, находим

$$1 = \left[\frac{1}{Q^2} + \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}{\omega^2 \omega_0^2} \right] A^2,$$

откуда

$$A = \frac{Q}{\sqrt{1 + \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}{4\alpha^2 \omega^2}}}.$$

Используя общепринятые обозначения: $\omega - \omega_0 = \Delta\omega$, $\Delta\omega/\alpha = \xi$ и считая, что $\omega + \omega_0 \approx 2\omega$, имеем $A = Q/\sqrt{1 + \xi^2}$.

Вспомогательные обозначения: $x = i/I_0$, $I_0 = \mathcal{E}/\omega_0 L = Q\mathcal{E}/R$, для амплитуды тока будем иметь

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R \sqrt{1 + \xi^2}}.$$

Проверка на устойчивость дает положительные результаты.

10.6. 1. Приводим заданное дифференциальное уравнение к виду

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = -\gamma x^3 + P \sin \omega t = F(x, t)$$

и ищем его решение в форме

$$x = a \sin \omega t + b \cos \omega t.$$

2. Раскладываем правую часть в ряд Фурье и находим коэффициенты первых гармоник (при этих вычислениях рекомендуется пользоваться табл. 9.1):

$$F(x, t) = -\gamma (a^3 \sin^3 \omega t + 3a^2 b \sin^2 \omega t \cos \omega t + 3b^2 a \cos^2 \omega t \sin \omega t + b^3 \cos^3 \omega t) +$$

$$+ P \sin \omega t = -\gamma \left[\frac{3}{4} a^3 \sin \omega t - \frac{1}{4} a^3 \sin 3\omega t + 3a^2 b \left(\frac{1}{4} \cos \omega t - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{1}{4} \cos 3\omega t \right) + 3ba^2 \left(\frac{1}{4} \sin \omega t + \frac{1}{4} \sin 3\omega t \right) + \frac{3}{4} b^3 \cos \omega t + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} b^3 \cos 3\omega t \right] + P \sin \omega t.$$

Коэффициенты $\psi_1(a, b)$ и $f_1(a, b)$:

$$\psi_1(\tau, b) = -\frac{3}{4} \gamma a^3 - \frac{3}{4} \gamma b^2 a + P,$$

$$f_1(a, b) = -\frac{3}{4} \gamma a^2 b - \frac{3}{4} \gamma b^3.$$

Пользуясь обозначениями (10.5), можно написать:

$$\psi_1 = -\frac{3}{4} \gamma a A^2 + P, \quad f_1 = -\frac{3}{4} \gamma b A^2,$$

где $A^2 = a^2 + b^2$.

3. Подставляем коэффициенты ψ_1 и f_1 в уравнение (10.4):

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2\omega} \left[-\frac{3}{4} \gamma b A^2 + (\omega^2 - \omega_0^2) b \right],$$

$$\frac{db}{dt} = -\frac{1}{2\omega} \left[-\frac{3}{4} \gamma a A^2 + P + (\omega^2 - \omega_0^2) a \right].$$

В установившемся режиме $da/dt = db/dt = 0$; получаем систему конечных уравнений:

$$(\omega^2 - \omega_0^2) a - \frac{3}{4} \gamma a A^2 + P = 0,$$

$$(\omega^2 - \omega_0^2) b - \frac{3}{4} \gamma b A^2 = 0.$$

Из второго уравнения следует, что $b = 0$; отсюда вытекает, что $a = A$ и остается одно уравнение

$$\frac{3}{4} \gamma A^3 - (\omega^2 - \omega_0^2) A - P = 0.$$

Полученное неполное кубическое уравнение и представляет собой выражение амплитудно-частотной характеристики. Решить это уравнение и найти зависимость $A(\omega)$ можно любым из известных способов; однако удобнее определить функцию $\omega(A)$ как более доступную для простых графических построений. Обратная функция имеет вид

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4} \gamma A^2 - \frac{P}{A}.$$

10.7. Приведем заданное уравнение к безразмерному виду относительно напряжения u_g с помощью обозначения: $u_g/\mathcal{E} = x$; в результате получим:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \left[\frac{R}{L} - \frac{M}{LC} \left(S - 3\gamma \mathcal{E}^2 \frac{u_g^2}{\mathcal{E}^2} \right) \right] \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \cos \omega t$$

или

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2(\alpha_0 + \alpha_2 x^2) \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \cos \omega t,$$

где

$$\alpha_0 = \frac{R}{2L} - \frac{MS}{2LC}, \quad \alpha_2 = \frac{M}{2LC} 3\gamma \mathcal{E}^2.$$

Приступаем к решению.

1. Приводим последнее уравнение к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = -2\alpha_0 \frac{dx}{dt} - 2\alpha_2 x^2 \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \cos^2 \omega t = F\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right)$$

и ищем решение в форме:

$$x = a \sin \omega t + b \cos \omega t,$$

$$\frac{dx}{dt} = a \omega \cos \omega t - b \omega \sin \omega t.$$

2. Разлагаем правую часть полученного уравнения в ряд Фурье (полезно обращаться к табл. 9.1):

$$F\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right) = -2\alpha_0 (a \omega \cos \omega t - b \omega \sin \omega t) - 2\alpha_2 (a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t + \\ + 2ab \sin \omega t \cos \omega t) (a \omega \cos \omega t - b \omega \sin \omega t) + \omega_0^2 \cos^2 \omega t = -2\alpha_0 a \omega \cos \omega t + \\ + 2\alpha_0 b \omega \sin \omega t - 2\alpha_2 a^3 \omega \sin^2 \omega t \cos \omega t - 2\alpha_2 b^3 \omega \cos^2 \omega t \sin \omega t - 4\alpha_2 a^2 b \omega \sin \omega t \times \\ \times \cos^2 \omega t + 2\alpha_2 a^2 b \sin^3 \omega t + 2\alpha_2 b^3 \cos^3 \omega t \sin \omega t + 4\alpha_2 ab^2 \omega \sin^2 \omega t \cos \omega t.$$

Отсюда нетрудно найти коэффициенты $\psi_1(a, b)$ и $f_1(a, b)$:

$$\psi_1(a, b) = -2\alpha_0 \omega b - \frac{1}{2} \alpha_2 \omega b A^2,$$

$$f_1(a, b) = 2\alpha_0 \omega a + \frac{1}{2} \alpha_2 a A^2 - \omega_0^2,$$

где $A^2 = a^2 + b^2$.

3. Подставляя значения $\psi_1(a, b)$ и $f_1(a, b)$ в ур-ния (9.6) и переходя к полярным координатам по ф-лам 10.5, получаем:

$$\frac{dA}{dt} = -\alpha_0 A - \frac{1}{4} \alpha_2 A^3 - \frac{\cos \varphi}{2\omega},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\omega} - \frac{\sin \varphi}{2\omega A}.$$

4. Полагая $dA/dt = d\varphi/dt = 0$, находим уравнения установившегося режима:

$$-\alpha_0 A - \frac{1}{4} \alpha_2 A^3 + \frac{\cos \varphi}{2\omega} = 0, \quad \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\omega} - \frac{\sin \varphi}{2\omega A} = 0,$$

из которых можно определить амплитудно-частотную характеристику $A(\omega)$ и фазо-частотную $\varphi(\omega)$.

10.8. Ток через конденсатор определяется формулой

$$i = \frac{dq}{dt}, \quad q = Cu.$$

Если u — синусоидальная функция и C — постоянная емкость, то заряд q повторяет форму напряжения u ; если же C — нелинейная емкость, то при условии, что можно сохранить только первую гармонику, для заряда q нужно учесть и сдвиг фаз:

$$q = Q_s \sin \omega t + Q_c \cos \omega t,$$

где

$$Q_s = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} q(U \sin \omega t) \sin \omega t d\omega t,$$

$$Q_c = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} q(U \sin \omega t) \cos \omega t d\omega t.$$

Так как $u=U \sin \omega t$, $pu=U\omega \cos \omega t$, $\sin \omega t = \frac{u}{U}$, $\cos \omega t = \frac{u}{U} \frac{p}{\omega}$,
то можно записать

$$q = \frac{Q_s}{U} u + \frac{Q_c}{U} \frac{p}{\omega} u.$$

Обозначив $Q_s/U=C_{\sin}$, $Q_c/U=C_{\cos}$, получим $q=(C_{\sin}+i C_{\cos})u$, $q=C_{cp}u$ и, переходя к амплитудным значениям: $Q=C_{cp}U$, где Q и U — амплитуды первых гармоник заряда и напряжения на конденсаторе.

Амплитуда тока через конденсатор $I_c=i\omega C_{cp}U$.

Модуль передаточной функции по напряжению для колебательного контура находится из выражения:

$$K(\omega) = \frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}} = \frac{\frac{1}{\omega C_{cp}}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C_{cp}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC_{cp})^2 + \omega^2 R^2 C_{cp}^2}}.$$

$$10.9. 1) C_{cp} = \frac{Q_1}{U_1} = C_0 (1 + \lambda U^2), \text{ где } C_0 = \alpha_1, \lambda = \frac{3}{4} \frac{\alpha_3}{C_0}.$$

$$2) C_{cp} = \frac{C_0}{1 + pU^2}, \text{ где } C_0 = \frac{1}{\beta_1}, \rho = \frac{3}{4} \frac{\beta_3}{\beta_1}.$$

10.10. Подставляя выражение C_{cp} в формулу для $K(\omega)=K$, запишем

$$K^2 = \frac{1}{[1 - \omega^2 LC_0 (1 + \lambda U_{\text{вых}}^2)] + \omega^2 R^2 C_0 (1 + \lambda U_{\text{вых}}^2)^2}.$$

Введем для удобства следующие обозначения: $v=\omega/\omega_0$, $\omega_0^2=1/LC_0$,
 $\omega_0^2 R^2 C_0^2 = n^2$, $\lambda U_{\text{вх}}^2 = m$
и перепишем последнее выражение в виде:

$$K^2 = \frac{1}{[1 - v^2 (1 + mK^2)]^2 + v^2 n^2 (1 + mK^2)^2}.$$

Решить последнее уравнение в виде функции $K(v)$ трудно и поэтому целесообразно искать обратную функцию $v(K)$; после преобразований получим

$$v^4 + \frac{n^2 (1 + mK^2)^2 - 2 (1 + mK^2)}{(1 + mK^2)^2} v^2 + \frac{K^2 - 1}{K^2 (1 + mK^2)^2} = 0.$$

Последнее уравнение нетрудно решить относительно безразмерной частоты $v=\omega/\omega_0$.

10.11. Подставив заданные аппроксимации, запишем

$$I = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{[R - \omega L_0 f_c(I)]^2 + \left\{ \omega L_0 [1 + f_s(I)] - \frac{1}{\omega C} \right\}^2}}.$$

Воспользуемся общепринятыми обозначениями:

$$\omega L_0 - \frac{1}{\omega C} \approx 2\Delta\omega L_0, \quad \frac{\omega_0 L_0}{R} = Q_0,$$

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0, \quad \frac{R}{2L_0} = \alpha,$$

$$\omega L_0 = (\omega_0 + \Delta\omega) L_0, \quad \frac{\Delta\omega}{\alpha} = \xi$$

и преобразуем подкоренное выражение:

$$\begin{aligned} & [R - \omega_0 L_0(I) - \Delta\omega L_0 f_c(I)]^2 + [2\Delta\omega L_0 + \omega_0 L_0 f_s(I) + \Delta\omega L_0 f_s(I)]^2 = \\ & = R^2 \{ [1 - Q_0 f_c(I) - 2\xi f_c(I)]^2 + [\xi + 2\xi f_s(I) + Q_0 f_s(I)]^2 \} = \\ & = R^2 \{ [\xi \cdot 2f_c(I) + Q_0 f_c(I) - 1]^2 + [\xi[1 + 2f_s(I)] + Q_0 f_s(I)]^2 \}. \end{aligned}$$

Исходное выражение теперь примет вид:

$$I^2 = \frac{\xi^2}{R^2} \frac{1}{[\xi \cdot 2f_c(I) + Q_0 f_c(I) - 1]^2 + \{\xi[1 + 2f_s(I)] + Q_0 f_s(I)\}^2} \cdot$$

Решить это уравнение относительно I , т. е. получить зависимость $I(\xi)$ даже при простых формах $f_c(I)$ и $f_s(I)$ вряд ли возможно; поэтому поставим перед собой задачу получить обратную функцию $\xi(I)$ и дальнейшие преобразования подчиним этой цели:

$$\begin{aligned} \frac{\xi^2}{I^2 R^2} &= \xi^2 \cdot 4f_c^2(I) + \xi \cdot 4f_c(I) [Q_0 f_c(I) - 1] + \xi^2 [1 + 2f_s(I)]^2 + \xi \cdot 2f_s(I) Q_0 [1 + \\ &+ 2f_s(I)] + [Q_0 f_c(I) - 1]^2 + Q_0^2 f_s^2(I); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\xi^2}{I^2 R^2} &= \xi^2 [4f_c^2(I) + 4f_s^2(I) + 4f_s(I) + 1] + \xi [4Q_0 f_c^2(I) - 4f_c(I) + 4Q_0 f_s^2(I) + \\ &+ 2f_s(I) Q_0] + Q_0^2 f_c^2(I) - 2Q_0 f_c(I) + 1 + Q_0^2 f_s^2(I); \\ &\xi \{ 4Q_0 [f_c^2(I) + f_s^2(I)] - 4f_s(I) + 2Q_0 f_s(I) \} + \\ &+ \xi^2 \{ 4[f_c^2(I) + f_s^2(I)] + 4f_s(I) + 1 \} + \xi \{ 4Q_0 [f_c^2(I) + f_s^2(I)] - 4f_s(I) + \\ &+ 2Q_0 f_s(I) \} + Q_0^2 [f_c^2(I) + f_s^2(I)] - 2Q_0 f_c(I) + 1 - \frac{\xi^2}{I^2 R^2} = 0. \end{aligned}$$

Последнее выражение, представляющее собой квадратное уравнение относительно ξ , можно при помощи очевидных обозначений переписать в виде $\xi^2 A(I) + 2\xi B(I) + C(I) = 0$,

и, следовательно,

$$\xi_{1,2} = \frac{-B(I) \pm \sqrt{B^2(I) - A(I)C(I)}}{A(I)}.$$

Это выражение уже можно исследовать при конкретных $f_s(I)$ и $f_c(I)$.

10.12. Введем вспомогательные преобразованные сигналы:

$$\begin{aligned} s(t) &= a \sin \omega t, & \dot{s}(t) &= -a \omega^2 \sin \omega t, \\ \dot{s}(t) &= a \omega \cos \omega t, & \ddot{s}(t) &= -\frac{a}{\omega} \cos \omega t^1. \end{aligned}$$

¹⁾ Точка внизу символизирует операцию интегрирования с удалением постоянной (если она появляется); таким образом, $\dot{s}(t) = \int_0^t s(\xi) d\xi - s(0)$.

Теперь предстоит выбрать связь между преобразованными сигналами, исходя из условий измерения частоты ω . Эта задача имеет несколько решений.

- 1) Разделим вторую производную на сигнал: $\omega = \sqrt{-\ddot{s}/s}$.
- 2) Аналогичный алгоритм будет при делении первой производной на первый интеграл: $\omega = \sqrt{-\dot{s}/s}$.

Структурные схемы, реализующие эти алгоритмы, изображены на рис. P10.1 и P10.1б.

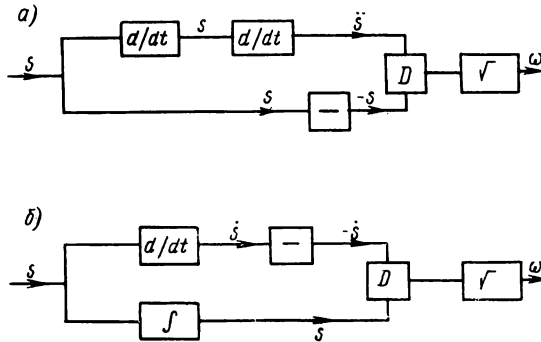


Рис. P10.1.

- 3) Умножим сигнал на вторую производную:

$$s\ddot{s} = a^2 \omega^2 \sin^2 \omega t, \quad s\dot{s} = -a^2 \omega^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\omega t \right).$$

Если применить фильтр, пропускающий только постоянную составляющую, то получим следующий алгоритм: $\omega^2 = -2s\dot{s}/a^2$.

Структурная схема изображена на рис. P10.2а.

- 4) Умножим сигнал на первую производную:

$$\dot{s}s = a^2 \omega \sin \omega t \cos \omega t = \frac{1}{2} a^2 \omega \sin 2\omega t.$$

Если на выходе переключателя поставить амплитудный детектор, то по току детектирования можно измерять частоту. Структурная схема, соответствующая данному случаю, представлена на рис. P10.2б.

- 5) Поделим первую производную на сигнал: $\dot{s}/s = \omega \operatorname{ctg} \omega t$.

Периодическую функцию $\operatorname{ctg} \omega t$ (с привлечением теории обобщенных функций)¹⁾ можно представить рядом Фурье; это дает

$$\frac{\dot{s}}{s} = \omega 2 (\sin 2\omega t + \sin 4\omega t + \dots).$$

Если применить фильтр нижних частот с тем, чтобы режектировать колебания с частотами выше, чем 2ω , то $\dot{s}/s = 2\omega \sin 2\omega t$, т. е. пришли к алгоритму 4, но без влияния амплитуды a ; нужно включить амплитудный детектор. Структурная схема, реализующая этот алгоритм, дана на рис. P10.2в.

Каждая из схем имеет свои преимущества и недостатки, характеризующиеся, в первую очередь, следующими факторами: 1) инвариантностью результатов измерений к амплитуде сигнала; 2) необходимостью применения делителей (которые сложнее перемножителей, особенно при знакоразличных входных сигналах).

¹⁾ См., например, [26].

лах; кроме того, здесь приходится считаться с «машинным нулем»); 3) необходимостью применения фильтров нижних частот (ФНЧ); 4) необходимостью при-

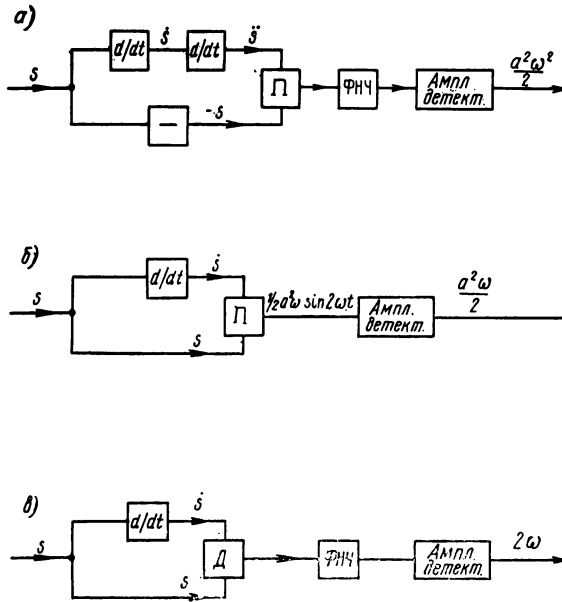


Рис. Р10.2

менения амплитудных детекторов и т. д. Очевидно, что для измерения частоты в широких пределах схемы, содержащие ФНЧ, непригодны и т. п.

$$10.13. 1) a(t) = \sqrt{\overset{\wedge}{s^2 + s^2}}.$$

$$2) a(t) \approx \sqrt{s^2 - \frac{s^2 s}{s}}.$$

$$3) a(t) \approx \sqrt{s^2 + \frac{s^2}{\omega^2}}.$$

Соответствующие структурные схемы изображены на рис. Р10.3.

$$10.14. 1) \psi(t) = \int_0^t \left(\frac{\dot{s}}{\hat{s}} - \omega_0 \right) d\xi;$$

¹⁾ Символ \hat{s} означает, что все составляющие спектра сигнала $s(t)$ повернуты на $\pi/2$, т. е. $\hat{s}(t)$ представляет собой преобразованный по Гильберту сигнал $s(t)$:

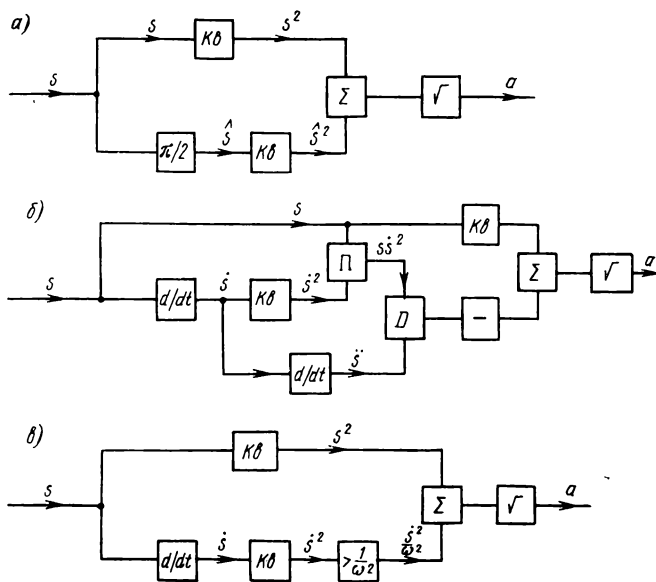


Рис. P10.3

$$2) \psi(t) = \arctg \frac{s \cos \omega_0 t - \frac{1}{\omega_0} \dot{s} \sin \omega_0 t}{s \sin \omega_0 t + \frac{1}{\omega_0} \dot{s} \cos \omega_0 t};$$

$$3) \psi(t) = \arctg \frac{s}{\dot{s}} - \omega_0 t;$$

$$4) \psi(t) = \int_0^t \frac{\dot{s} - a \omega_0}{\sqrt{a^2 - s^2}} d\xi.$$

10.15. 1) $\ddot{s} + \omega^2 s = 0;$

2) $s^{(4)} + (\omega_1^2 + \omega_2^2) \ddot{s} + \omega_1^2 \omega_2^2 s = 0;$

3) $\ddot{s} s - \dot{s}^2 + 2\alpha s^2 = 0;$

4) $2 \ddot{s} \dot{s} - 3\dot{s}^2 - 4\omega^2 s \ddot{s} + 2\omega^2 \dot{s}^2 - \omega^4 s^2 = 0.$

10.16. 1) $\ddot{s} s - s^2 = 0;$

2)
$$\begin{vmatrix} s^{(4)} & \dot{s} & s \\ \dot{s} & s & \ddot{s} \\ \ddot{s} & \dot{s} & s^{(4)} \end{vmatrix} = 0;$$

3) $\ddot{s} s^2 + 3\dot{s} s \ddot{s} - 2\dot{s}^3.$

11

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ВТОРОГО ПОРЯДКА¹⁾

Общие сведения

Параметрические цепи второго порядка описываются дифференциальными уравнениями вида

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + b(\tau) \frac{dx}{d\tau} + a(\tau)x = f(\tau), \quad (11.1)$$

а нелинейно-параметрические — дифференциальными уравнениями того же вида, но коэффициенты в общем случае зависят как от функции x , так и ее производной $dx/d\tau$, т. е.

$$C(\tau, x, \dot{x}) \frac{d^2x}{d\tau^2} + b(\tau, x, \dot{x}) \frac{dx}{d\tau} + a(\tau, x, \dot{x})x = f(\tau). \quad (11.2)$$

Обратим внимание на то, что в ур-нии (11.2) в общем случае, в отличие от ур-ния (11.1), нельзя освободиться от коэффициента при старшей производной. Здесь основное внимание будет сосредоточено на уравнениях вида (11.1), т. е. на параметрических цепях. Решение и изучение каждого из этих уравнений представляет собой, как правило, обширную и нелегкую задачу; как уже известно, существенная часть приложения 1 посвящена рассмотрению именно параметрических уравнений.

Уравнения вида (11.1) в большинстве своем не имеют решений в виде элементарных функций; ввиду того, что некоторые из этих уравнений имеют важное значение в физике и технике, их решения ищут в виде табулированных степенных рядов; таким образом, появляются новые специальные функции. Рассмотрению отдельных видов ур-ний (11.1) посвящены фундаментальные монографии.

В радиотехнических приложениях наибольшее применение до последнего времени имели уравнения Хилла и Матье (см. П.15),

¹⁾ Еще раз напомним (см. предисловие), что нелинейно-параметрические цепи второго порядка также относятся к этому разделу, несмотря на то, что в названии это не отражено.

описывающие широко используемые цепи второго порядка; в последние годы, в связи со все расширяющимся применением параметрических цепей, сочетающих в себе возможности нелинейных и преимущества линейных, появляется интерес и к ряду других уравнений, и число последних неуклонно растет.

Методы решения и изучения уравнений вида (11.1) относительно подробно изложены в приложении 1. Здесь нужно отметить следующее. Благодаря линейности этих уравнений особое значение приобретает рассмотрение однородных уравнений.

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + b(\tau) \frac{dx}{d\tau} + a(\tau)x = 0, \quad (11.3)$$

на основе решений которых можно найти решение и неоднородных (метод Лагранжа и др.).

При помощи методов преобразования переменных всегда можно освободиться от члена с первой производной и привести уравнение (11.1) к виду

$$\frac{d^2z}{d\eta^2} + \gamma(\eta)z = F(\eta). \quad (11.4)$$

Последнее уравнение во многих случаях доступнее для решения относительно функции $z(\eta)$, чем исходное относительно $x(\tau)$.

Среди уравнений вида (11.1) часто встречаются «приводимые» (см. П.4, П.5), т. е. такие параметрические уравнения, которые можно привести к линейным (с постоянными коэффициентами), а для этих последних разработаны не только исчерпывающие методы решений (анализа), но и методы синтеза цепей.

Наконец, для изучения характера решений здесь большую помощь могут оказать косвенные методы и, в первую очередь, методы фазовой плоскости, плоскости диссипанта и консерванта (в сочетании с методом замораживания переменных). Широко применяются для решения и изучения уравнений (11.1) частотные методы, особенно в установившемся режиме. Наиболее полно эти вопросы изложены в [71].

В настоящем (очень небольшом по объему) разделе даются некоторые частные примеры изучения параметрических и нелинейно-параметрических цепей, применяемых в радиотехнике. В большей своей части задачи сводятся к получению уравнений и приведению их к такому виду, который может считаться изученным по литературе. Рассмотрен ряд частных, но имеющих большое практическое значение задач синтеза параметрических цепей.

Задача синтеза параметрических цепей может иметь много постановок, отличающихся друг от друга исходными условиями. Здесь будут рассмотрены две постановки следующего содержания: 1) синтез параметрических фильтров гармонических колебаний по условиям эквивалентности линейным фильтром, 2) синтез пара-

метрических фильтров колебаний сложной формы по заданным условиям избирательности.

Напомним, что при изучении параметрических цепей метод операционного исчисления, а также различные другие интегральные преобразования, как уже указывалось в разд. 7, здесь не используются, так как эти методы по применяемому аппарату ближе к «линейной тематике».

Свободные процессы при гармоническом законе изменения параметра

Свободный процесс¹⁾ в параметрической цепи второго порядка описывается однородным дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + b(\tau) \frac{dx}{d\tau} + a(\tau)x = 0; \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0. \quad (11.5)$$

Если одна из функций $a(\tau)$ или $b(\tau)$ является 2π -периодической, а вторая — постоянной, то уравнение всегда можно привести к уравнению Хилла:

$$\ddot{x} + [\lambda + \Phi_{2\pi}(\tau)]x = 0, \quad (11.6)$$

частным случаем которого является уравнение Матье —

$$\ddot{x} + (\lambda + a \cos 2\tau)x = 0. \quad (11.7)$$

Здесь, конечно, x — новая переменная.

Уравнение Матье на плоскости консерванта (κ, τ) , имеет весьма простой вид

$$\kappa = -\lambda - a \cos^2 \tau. \quad (11.8)$$

В дополнение к изложенному в приложении 1 относительно решений вида (11.5) здесь следует отметить, что при условии избирательности параметрической цепи оказывается эффективным использование приближенных методов и, в первую очередь, метода медленно меняющихся амплитуд, а также «частотного», т. е. когда решение ищется в виде ряда Фурье (метод 2.2).

Точное решение уравнения Матье ищется на основе теории Флоке ([45] и др.), согласно которой общий интеграл уравнения Матье можно представить в форме

$$x = C_1 e^{\mu\tau} \varphi(\tau) + C_2 e^{-\mu\tau} \varphi(-\tau),$$

где $\varphi(\tau)$ — 2π - или π -периодическая функция, μ — вещественное или комплексное число, а C_1, C_2 — произвольные постоянные. При определенных соотношениях чисел λ и a в уравнении (11.7) его решения

¹⁾ Следует обратить внимание на известную условность применяемой здесь терминологии; свободный процесс связывается только с отсутствием внешнего входного воздействия, но не с воздействием, управляющим изменением параметров.

будут периодическими; эти периодические решения называются функциями Матье и достаточно полно протабулированы.

Таблицы и графики функций Матье, таким образом, по известным значениям λ и a сразу определяют области существования периодических колебаний в цепях, описываемых уравнениями Матье. При этом следует иметь в виду, что входящая в уравнение Матье (11.7) искомая переменная представляет собой преобразованную зависимую переменную уравнения (11.5) и от полученного решения уравнения Матье еще необходимо вернуться к исходной переменной.

Исследование свободных процессов в параметрических цепях представляет собой обширную область, которой посвящены специальные монографии (см., например, [49]). Решение каждой задачи в этой области сопряжено с громоздкими выкладками, и поэтому здесь рассматриваются только отдельные задачи по конкретным условиям.

Относительно свободного режима в нелинейно-параметрических цепях нужно указать, что если цепь является избирательной, то самым подходящим следует считать метод медленно меняющихся амплитуд (см. задачу 11.4).

Вынужденные установившиеся процессы при гармоническом законе изменения параметра и гармоническом воздействии

Общее дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + b(\tau) \frac{dx}{d\tau} + a(\tau)x = F_0 \sin \tau$$

при изменении одного из параметров $a(\tau)$ или $b(\tau)$ по гармоническому закону удается свести к виду

$$\ddot{x} + (\lambda + a \cos \tau)x = f(\tau),$$

где $f(\tau)$ — гармоническая или полигармоническая функция, определяемая $F_0 \sin \tau$ и коэффициентами уравнения. Здесь опять нужно повторить все, что отмечалось выше о роли приложения 1, а также об эффективности использования (для избирательных систем) методов медленно меняющихся амплитуд и частотного; для этих задач оказывается удобным и метод фазовых интегралов (метод БВК, см. П.2).

Синтез параметрических цепей по заданным условиям фильтрации гармонических колебаний и колебаний сложной формы

СИНТЕЗ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ФИЛЬТРОВ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

В связи с технологическими достижениями радиоэлектроники возрос интерес к вопросам замены катушек индуктивности и механических фильтров цепями, содержащими только резисторы и

конденсаторы, т. е. RC -цепями. В этом плане особый интерес представляют «параллельные структуры» параметрических RC -фильтров, обеспечивающих их абсолютную устойчивость и имеющих ряд других преимуществ.

Основу синтеза параметрических фильтров параллельной структуры составляет математическая задача представления решения заданного линейного дифференциального уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами в виде линейной комбинации решений n уравнений первого порядка; каждое решение уравнения первого порядка может соответствовать процессу в параметрической цепи того же порядка.

Будем называть параметрическим фильтром цепь, состоящую из резисторов и одного конденсатора, причем параметр одного из резисторов изменяется в соответствии с сигналом цепи управления. Параметрический фильтр представляет собой сочетание перемножителей с интеграторами и является цепью первого порядка. Система, составленная из параллельно соединенных N параметрических фильтров, называется N -канальным (групповым) параметрическим фильтром.

Задача синтеза формулируется следующим образом. Задано дифференциальное уравнение (или передаточная функция) линейной физически реализуемой цепи; заданы также внешнее воздействие $f(t)$ и реакция цепи $x(t)$. Нужно синтезировать цепь, реализующую заданное преобразование $f(t)$ в $x(t)$; по условию цепь должна содержать параллельно соединенные однотипные параметрические фильтры и сумматор. Математически задача состоит в конструировании решения исходного линейного уравнения

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i x(\tau)}{d\tau^i} = f(t)$$

в виде

$$x(\tau) = \sum_{i=1}^n x_i(t),$$

где $x_i(t)$ — решение дифференциального уравнения первого порядка, которое должно быть представлено в форме интеграла свертки:

$$x_i(t) = \int h_i(t) f(t) dt,$$

в котором $h_i(t)$ — весовая функция, соответствующая уравнению первого порядка.

Рецептура синтеза может быть построена на основе ряда методов, известных по математической и технической литературе. В задаче 11.9 рассматривается синтез на основе использования метода вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). В задаче 11.10 показывается возможность синтеза на основе перехода

к передаточной функции; это направление, тяготеющее к аппарату «линейной тематики», здесь подробно не рассматривается. Наконец, в задаче 11.11 дана методика синтеза на основе рекуррентного метода нахождения периодических решений. Каждый из методов характеризуется своими особенностями в реализационном плане.

СИНТЕЗ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПО ЗАДАНЫМ УСЛОВИЯМ ИЗБИРАТЕЛЬНОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО КОЛЕБАНИЙ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Подобно тому, как реагирует обычный колебательный контур с постоянными параметрами на гармонические колебания, может реагировать параметрический контур на колебание сложной формы. Это явление называют «обобщенным резонансом» [46].

Задача синтеза параметрических цепей с заданными избирательными свойствами по отношению к сложным сигналам может формулироваться аналогично задаче синтеза линейных цепей по заданным условиям избирательности относительно гармонических сигналов.

В основу создания соответствующей методики синтеза может быть положено понятие «приведения», введенное еще А. М. Ляпуновым (см. П.5). Линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами называется приводимым, если его можно преобразовать (путем введения новых переменных) в эквивалентное (т. е. имеющее совпадающие решения) линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. В радиотехнике использование «приведения» начато трудами А. С. Виницкого [17]. Рассмотрим сложное колебание в виде колебания с угловой модуляцией, т. е.

$$f(t) = F_0 e^{i\varphi(t)} = F_0 e^{i\omega_0 \tau(t)},$$

где $\tau(t)$ — функция, определяющая закон изменения фазы и имеющая размерность времени; ω_0 — постоянная с размерностью рад/с.

Будем считать функцию $\tau(t) = \tau$ независимой переменной («приведенным временем»), [17]; для гармонического сигнала $f(\tau) = F e^{i\omega_0 \tau}$ линейная избирательная цепь в общем случае описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами:

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k x(\tau)}{d\tau^k} = \sum_{k=0}^m b_{kx} \frac{d^k f(\tau)}{d\tau^k}.$$

Так как $d\tau = d\tau/dt dt = \dot{\tau} dt$, исходное дифференциальное уравнение можно переписать в виде:

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k x(t)}{(\dot{\tau} dt)^k} = \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k f(t)}{(\dot{\tau} dt)^k}.$$

Последнее уравнение после подстановки конкретной зависимости $\tau(t)$ превращается в параметрическое, т. е. в линейное уравнение с переменными коэффициентами. Это уравнение и служит основой для реализации.

Рецептура синтеза состоит из следующих этапов.

1. Формулируются условия синтеза, т. е. указываются форма сложного сигнала и условия его фильтрации. Условия фильтрации сложного сигнала формулируются в виде линейного дифференциального уравнения с фиксированными избирательными свойствами по отношению к моногармоническому сигналу; параметрическая цепь должна фильтровать сложные сигналы так, как линейная цепь фильтрует моногармонические.

2. Исходное дифференциальное уравнение преобразуется в уравнение «с приведенным временем»; после подстановки конкретных зависимостей, отображающих форму фильтруемого сигнала, получается параметрическое дифференциальное уравнение, отличающееся от исходного тем, что его коэффициенты являются функциями времени.

3. Составляется схема по исходному дифференциальному уравнению; цепь, соответствующая данной схеме, содержит элементы с постоянными параметрами. Вместо них должны быть включены элементы, параметры которых изменяются в соответствии с коэффициентами; этим и исчерпывается задача синтеза параметрической цепи.

Параметры элементов таких цепей изменяются по законам, содержащим сведения о структурных связях внешнего воздействия, т. е. о связях между производными фильтруемого сигнала; по этой причине подобные цепи называют «структурно-сигнальными параметрическими фильтрами» (ССПФ).

Выше было рассмотрено сложное колебание в виде колебания с угловой модуляцией; аналогично могут быть рассмотрены и колебания вида АМ, АМ-ЧМ и др.

*
*
*

В настоящем разделе первые четыре задачи (11.1—11.4) посвящены рассмотрению уравнений, соответствующих свободному режиму, а задачи 11.5—11.8 — вынужденному. В задачах 11.9—11.13 рассматриваются вопросы синтеза параметрических цепей.

Задачи и упражнения

11.1. Показать, что параметрическое уравнение (11.3) при функциональном преобразовании $\tau = \varphi(\eta)$ сохраняет свойства линейности.

11.2. Показать, что параметрическое уравнение (11.3) при любом функциональном преобразовании $x = \psi(z)$ теряет свойства линейности, но сохраняет их при линейном преобразовании вида $x = \alpha(\tau)z + \beta(\tau)$.

11.3. Свести дифференциальное уравнение колебательного контура с параметрической емкостью

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \omega_0^2(1 + \mu \cos \omega_\mu t)x = 0$$

к дифференциальному уравнению первого порядка и дать методику его решения на фазовой плоскости методом изоклин.

11.4. Дан избирательный нелинейно-параметрический контур, описываемый уравнением

$$\ddot{x} + \omega_0^2 (1 + q \cos 2\omega t) x + \gamma x^3 = 0.$$

Составить уравнение для переходного процесса в режиме свободных колебаний, а затем — для установившегося процесса на основе метода медленно меняющихся амплитуд.

11.5. Составить дифференциальное уравнение колебательного контура, у которого индуктивность $L(t)$ и емкость $C(t)$ изменяются по законам:

$$L(t) = L_0[1 + \mu_L l(t)], \quad C(t) = C_0[1 + \mu_C c(t)].$$

Контур находится под действием внешней эдс $e(t)$. Свести полученное уравнение к виду, свободному от первой производной.

11.6. Привести дифференциальное уравнение колебательного контура с параметрической емкостью.

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\alpha \frac{du}{dt} + \omega_0^2 (1 + \mu \cos \omega_\mu t) u = e(t)$$

к уравнению свободному от первой производной.

11.7. Уравнение сверхгенератора [30, стр. 334] для случая, когда характеристика нелинейного элемента аппроксимируется полиномом второй степени, имеет вид

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{1}{L} \left(R - \frac{MS}{C} - \frac{2M\gamma U_{\Sigma}}{C} \sin \Omega t \right) \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0 \mathcal{E} \cos \omega t.$$

Привести это уравнение к виду, свободному от первой производной.

11.8. Свести заданное дифференциальное уравнение N -го порядка:

$$a_N(t) \frac{d^N x}{dt^N} + \dots + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_0(t) x = f(t)$$

к интегральному уравнению на основе использования импульсной переходной характеристики, причем последняя должна соответствовать линейной цепи с постоянными параметрами. Полученное интегральное уравнение свести к одному из «стандартных» видов.

11.9. Синтезировать двухканальный параметрический фильтр, осуществляющий преобразование внешнего сигнала $f(t)$ так же, как это делается в консервативном колебательном контуре, описываемом уравнением

$$\ddot{x} + a_0 x = f(t), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad a_0 = \omega_0^2.$$

Синтез провести на основе метода Лагранжа. Итогом решения задачи должна быть структурная схема двухканального параметрического фильтра.

11.10. Показать возможность синтеза двухканального параметрического фильтра на основе перехода от весовой функции к передаточной.

11.11. Известен метод [26, стр. 171—180] нахождения периодических решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами для условий, когда внешнее воздействие является периодической функцией. Метод допускает обобщение на любые непериодические воздействия; с этой целью непериодическое воздействие нужно превратить в финитную функцию и искусственно периодизовать с периодом, большим времени свободного процесса (обусловленное «длительностью» весовой функции) в цепи, соответствующей данному дифференциальному уравнению.

Дать методику синтеза n -канального параметрического фильтра на основе указанного рекуррентного метода нахождения периодических решений.

11.12. Синтезировать ССПФ для ЧМ колебания $f(t) = F_0 e^{i\omega_0 \tau(t)}$ по условиям эквивалентности с фильтрацией гармонического колебания обычным колебательным контуром. Рассмотреть частный случай, когда $\omega_0 \tau(t) = \omega_0 t + M \sin \Omega t$.

11.13. Синтезировать ССПФ для АМ—ЧМ сигнала вида $q(t) = F_0 V(t) e^{i\omega_0 \tau(t)}$ по условию эквивалентности с фильтрацией гармонического колебания обычным колебательным контуром.

РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ

11.1. Для доказательства сделанного утверждения достаточно показать, что $dx/d\tau$ и $d^2x/d\tau^2$ после замены τ по равенству $\tau = \varphi(\eta)$ будут представлять собой функции вида: $f_1(\eta) dx/d\eta$, $f_2(\eta) d^2x/d\eta^2$. С этой целью найдем $dx/d\tau$ и $d^2x/d\tau^2$:

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{d\eta} \frac{d\eta}{d\tau} = \frac{dx}{d\eta} \frac{1}{\varphi'(\eta)},$$

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx}{d\tau} \right) = \frac{1}{\varphi'(\eta)} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{dx}{d\eta} \cdot \frac{1}{\varphi'(\eta)} \right) = \frac{1}{\varphi'(\eta)} \left[-\frac{dx}{d\eta} \frac{\varphi''(\eta)}{[\varphi'(\eta)]^2} + \frac{1}{\varphi'(\eta)} \frac{d^2x}{d\eta^2} \right] = \frac{1}{[\varphi'(\eta)]^2} \frac{d^2x}{d\eta^2} - \frac{\varphi''(\eta)}{[\varphi'(\eta)]^3} \frac{dx}{d\eta}.$$

Таким образом, $dx/d\tau$ и $d^2x/d\tau^2$ выражаются через $dx/d\eta$ и $d^2x/d\eta^2$ с коэффициентами, зависящими только от η , что и требовалось доказать.

11.2. То, что при нелинейной функции ψ теряются свойства линейности, является очевидным и легко доказывается на любом примере после подстановки $x = \psi(z)$.

Для доказательства того, что при линейной замене свойства линейности сохраняются, найдем $dx/d\tau$, $d^2x/d\tau^2$:

$$\frac{dx}{d\tau} = \alpha(\tau) \frac{dz}{d\tau} + z \frac{d\alpha}{d\tau} + \frac{d\beta}{d\tau},$$

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \alpha(\tau) \frac{d^2z}{d\tau^2} + \frac{dz}{d\tau} \frac{d\alpha}{d\tau} + z \frac{d^2\alpha}{d\tau^2} + \frac{dz}{d\tau} \frac{d\alpha}{d\tau} + \frac{d^2\beta}{d\tau^2}.$$

Подставляя $dx/d\tau$, $d^2x/d\tau^2$ в исходное дифференциальное уравнение и приводя его к каноническому виду, легко убеждаемся, что свойства линейности сохранены, а однородности — утрачены.

11.3. Пользуясь методом 4.1в, заменяем величины:

$$x = e^{\int z d\tau}, \quad \dot{x} = e^{\int z d\tau} z = xz,$$

$$\ddot{x} = e^{\int z d\tau} (\dot{z} + z^2) = x(\dot{z} + z^2).$$

Подставляя их в исходное уравнение, получаем:

$$x(\dot{z} + z^2) + 2\alpha xz + \omega_0^2(1 + \mu \cos \omega_\mu t)x = 0,$$

$$\dot{z} + z^2 + 2\alpha z + \omega_0^2(1 + \mu \cos \omega_\mu t) = 0.$$

Решение этого уравнения первого порядка (уравнения Риккати, см. П.15) можно исследовать на фазовой плоскости методом изоклин. «Замораживая» первую производную, т. е. полагая $\dot{z} = k$ и переписывая уравнения в виде:

$$z^2 + 2\alpha z + k + \omega_0^2(1 + \mu \cos \omega_\mu t) = 0,$$

легко найти уравнение изоклины:

$$z_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - k - \omega_0^2(1 + \mu \cos \omega_\mu t)},$$

по которому можно построить процесс $z(t)$, а от последнего перейти к процессу $x = e^{\int z dt}$.

Отметим, что привести однородное параметрическое уравнение второго порядка к нелинейно-параметрическому уравнению первого порядка можно было бы и на основе метода 4.2б.

11.4. Перепишем исходное уравнение

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -q \omega_0^2 \cos 2\omega t x - \gamma x^3 = F(x, t)$$

и будем искать его решение в виде: $x = a \sin \omega t + b \cos \omega t$.

Подставляя в правую часть уравнения это решение, находим:

$$F(x, t) = -q \omega_0^2 \cos 2\omega t a \sin \omega t - q \omega_0^2 \cos 2\omega t b \cos \omega t - \gamma (a \sin \omega t + b \cos \omega t)^3.$$

Раскладывая в ряд Фурье и находя коэффициенты $\psi_1(a, b)$, $f_1(a, b)$, после подстановки их в ур-ние (9.6) получаем:

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2\omega} \left[\frac{1}{2} \omega_0^2 q + \frac{3}{4} \gamma A^2 - (\omega^2 - \omega_0^2) \right] b,$$

$$\frac{db}{dt} = -\frac{1}{2\omega} \left[-\frac{1}{2} \omega_0^2 q + \frac{3}{4} \gamma A^2 - (\omega^2 - \omega_0^2) \right] a,$$

где $A^2 = a^2 + b^2$.

Решение полученной системы даст переходный процесс свободных колебаний. Для установившегося режима, т. е. когда $da/dt = db/dt = 0$, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{1}{2} \omega_0^2 q + \frac{3}{4} \gamma A^2 - (\omega^2 - \omega_0^2) \right] b &= 0 \\ \left[-\frac{1}{2} \omega_0^2 q + \frac{3}{4} \gamma A^2 - (\omega^2 - \omega_0^2) \right] a &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Устойчивость решения представляется исследовать читателю самостоятельно.

11.5. Исходное уравнение

$$\frac{d}{dt} [L(t) i] + Ri + \frac{1}{C(t)} \int idt = e(t)$$

целесообразно записать относительно заряда $q = \int idt$:

$$\frac{d}{dt} \left[L(t) \frac{dq}{dt} \right] + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C(t)} = e(t).$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R + \frac{d}{dt} L(t)}{L(t)} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{L(t) C(t)} = \frac{1}{L(t)} e(t).$$

Подставляя законы изменения параметров, находим

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R \left(1 + \frac{L_0}{R} \mu_L \frac{dI}{dt} \right)}{L_0 [1 + \mu_L I(t)]} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{L_0 C_0 [1 + \mu_L I(t)] [1 + \mu_C C(t)]} = \frac{1}{L_0 [1 + \mu_L I(t)]} e(t).$$

Для того чтобы свести полученное уравнение к виду, свободному от первой производной, введем очевидные обозначения

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\alpha(t) \frac{dq}{dt} + \omega^2(t) q = e(t)$$

и воспользуемся рецептурой метода 4.1а (П.4); в результате получим:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \left[\omega^2(t) - \alpha^2(t) - \frac{d\alpha(t)}{dt} \right] z = v(t) e^{\int \alpha(t) dt},$$

$$q = z e^{-\int \alpha(t) dt}$$

11.6. В соответствии с методом 4.1а (приложение 1), пользуясь подстановкой $u = xz$, получаем

$$\ddot{x} + \left[\omega_0^2 (1 + \mu \cos \omega_\mu t) - \alpha^2 \right] x = e(t) e^{\int \alpha dt},$$

$$u = e^{-\int \alpha dt} x.$$

11.7. Вводя обозначения $\omega t = \tau$, $R/L = 2\alpha$, $MS/RC = m$, $2M\gamma U_\Omega / RC = a$, $1 - m = \lambda$, $\omega/\Omega = 2Q$, $u/\mathcal{E} = x$, $\Omega/\omega = \rho$, получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \frac{1}{Q} (\lambda - a \sin p \tau) \frac{dx}{d\tau} + x = \cos \tau,$$

которое и будем преобразовывать по методу 4.1а (П.4). В соответствии с изложенной рецептурой, найдем

$$\ddot{u} + \left[1 - \frac{1}{2^2 Q^2} (\lambda - a \sin p \tau)^2 - \frac{1}{2Q} (-ap \cos p \tau) \right] u = \cos \tau e^{\frac{1}{2Q} \int (\lambda - a \sin p \tau) d\tau},$$

$$x = e^{-\frac{1}{2Q} \int (\lambda - a \sin p \tau) d\tau} u.$$

Выполнив элементарные преобразования, получим:

$$\ddot{u} + \left[1 - \frac{\lambda^2}{4Q^2} - \frac{a^2}{8Q^2} + \frac{a\lambda}{2Q^2} \sin p \tau + \frac{a^2}{8Q^2} \cos 2p \tau + \frac{ap}{2Q} \cos p \tau \right] u =$$

$$= \cos \tau e^{\frac{\lambda}{2Q} \tau} e^{\frac{ap}{2Q} \cos p \tau},$$

$$x = e^{-\frac{\lambda}{2Q} \tau} e^{-\frac{ap}{2Q} \cos p \tau} u.$$

11.8. Исходным соотношением (см. П.6) является следующее:

$$x(t) = \int_0^t h(t-s) f(s) ds,$$

где $f(t)$ — внешнее воздействие, а $h(t)$ — импульсная переходная характеристика цепи, причем по условию $h(t)$ должна быть характеристикой цепи с постоянными параметрами. Представив коэффициенты заданного уравнения

$$a_N(t) \frac{d^N x}{dt^N} + \dots + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_0(t) x = f(t)$$

в виде $a_n(t) = \alpha_n + \alpha_n(t)$, где α_n — постоянные, а $\alpha_n(t)$ — функции времени, перепишем уравнение

$$\alpha_N \frac{d^N x}{dt^N} + \alpha_{N-1} \frac{d^{N-1} x}{dt^{N-1}} + \dots + \alpha_1 \frac{dx}{dt} + \alpha_0 x = f(t) -$$

$$- \alpha_N(t) \frac{d^N x}{dt^N} - \alpha_{N-1}(t) \frac{d^{N-1} x}{dt^{N-1}} - \dots - \alpha_1(t) \frac{dx}{dt} - \alpha_0(t) x.$$

Введем обозначение:

$$\alpha_N(t) \frac{d^N x}{dt^N} + \alpha_{N-1}(t) \frac{d^{N-1} x}{dt^{N-1}} + \dots + \alpha_1(t) \frac{dx}{dt} + \alpha_0(t) x = \Psi(t, x).$$

Теперь дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$\alpha_N \frac{d^N x}{dt^N} + \alpha_{N-1} \frac{d^{N-1} x}{dt^{N-1}} + \dots + \alpha_1 \frac{dx}{dt} + \alpha_0 x = f(t) - \Psi(t, x).$$

Пусть $h(t)$ — представляет собой решение линейного дифференциального уравнения вида

$$\alpha_N \frac{d^N x}{dt^N} + \alpha_{N-1} \frac{d^{N-1} x}{dt^{N-1}} + \dots + \alpha_1 \frac{dx}{dt} + \alpha_0 x = \delta(t).$$

т. е. импульсную переходную характеристику «линеаризованной» цепи; тогда в соответствии с (П.6) можно написать

$$x(t) = \int_0^t h(t-s) [f(s) - \Psi(s, x)] ds.$$

Напомним, что $\Psi(s, x)$ зависит от $x(t)$ и его производных.

Таким образом, совершен переход от дифференциального уравнения к интегральному. Для того чтобы привести полученное интегральное уравнение к «стандартному виду», представим его правую часть в виде двух интегралов:

$$x = \int_0^t h(t-s) f(s) ds - \int_0^t h(t-s) \Psi(s, x) ds.$$

Первый интеграл может быть вычислен; обозначим результат вычисления через $f_0(t)$. Функция $f_0(t)$ представляет собой реакцию «линеаризованной» цепи от воздействия $f(t)$. Теперь интегральное уравнение можно записать так:

$$x = - \int_0^t h(t-s) \Psi(s, x) ds + f_0(t).$$

Полученное уравнение является неоднородным интегральным уравнением Вольтерра второго рода (см. П.6).

11.9. В соответствии с методом Лагранжа (метод 3.2) нужно в решении однородного уравнения

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2 = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$$

принять, что постоянные C_1 и C_2 являются функциями времени (см. П.3). Выполнив элементарные выкладки, найдем:

$$C_1 = - \frac{f(t) x_2}{x_1 x_2 - \dot{x}_1 x_2}, \quad C_2 = \frac{f(t) x_1}{x_1 x_2 - \dot{x}_1 x_2}.$$

Так как в данном случае $x_1 x_2 - \dot{x}_1 x_2 = \omega_0$, то

$$C_1(t) = - \frac{1}{\omega_0} \int_0^t f(\xi) \sin \omega_0 \xi d \xi,$$

$$C_2(t) = \frac{1}{\omega_0} \int_0^t f(\xi) \cos \omega_0 \xi d \xi,$$

$$x = \frac{1}{\omega_0} \left[\sin \omega_0 t \int_0^t f(\xi) \cos \omega_0 \xi d \xi - \cos \omega_0 t \int_0^t f(\xi) \sin \omega_0 \xi d \xi \right].$$

Последнее выражение представляет собой алгоритм работы двухканального параметрического фильтра, схема которого изображена на рис. P11.1. На схеме пунктирными линиями показана цепь синхронизации, по которой управляют

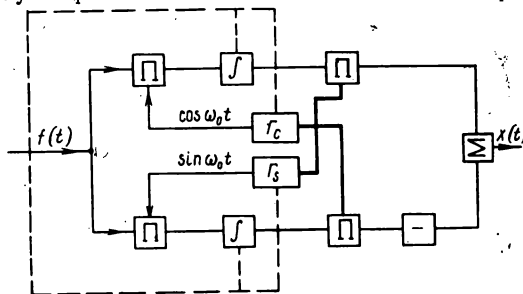


Рис. P11.1

«местными» генераторами весовых функций. На схеме представлены два генератора: Γ_c и Γ_s ; практически нужен один генератор и фазовращатель на $\pi/2$.

11.10. Для цепей, соответствующих нулевым начальным условиям, пользуясь методом интеграла Дюамеля, можно написать:

$$x(t) = \int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d \tau,$$

где $h(t)$ — весовая функция.

Отметим, что $X(p) = H(p)F(p)$, где $X(p)$, $H(p)$, $F(p)$ — изображения по Лапласу функций $x(t)$, $h(t)$ и $f(t)$ соответственно.

Поскольку идет речь о синтезе параметрических фильтров, эквивалентных линейным цепям с постоянными параметрами, передаточную функцию $H(p)$ в общем виде можно представить как отношение двух степенных полиномов:

$$H(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j p^j}{p^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i}, \quad m < n.$$

Если в правой части исходного дифференциального уравнения находится только $f(t)$, то $B(p) = 1$, и именно при этом условии $H(p)$ называется передаточной функцией.

Для цепи второго порядка, т. е. при $n=2$ и в общем случае при $m=1$, запишем

$$h(t) = Dv(t) \cos(\omega_0 t - \theta),$$

где $v(t) = e^{-\alpha t}$, $\omega_0 = \beta$, $\theta = \frac{\pi}{2} - \psi$,

$$D = \frac{b_1}{\beta} \sqrt{\left(\frac{b_0}{b_1} - \alpha\right)^2 + \beta^2}, \quad \psi = \arctg \frac{\beta}{\frac{b_0}{b_1} - \alpha},$$

α , β — действительная и мнимая части комплексных корней уравнения $A(p) = 0$.

Подставляя $h(t)$ в выражение интеграла Дюамеля, нетрудно получить

$$x(t) = D \left[\cos(\omega_0 t - \theta) \int_0^t f(\tau) \cos \omega_0 \tau v(t - \tau) d\tau + \right. \\ \left. + \sin(\omega_0 t - \theta) \int_0^t f(\tau) \sin \omega_0 \tau v(t - \tau) d\tau \right].$$

Последнее выражение представляет собой алгоритм работы двухканального параметрического фильтра. Этот фильтр соответствует любой отвечающей условиям реализуемости огибающей $v(t)$.

11.11. В соответствии с рекуррентным методом нахождения периодических решений, решение дифференциального уравнения

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i}{dt^i} x(t) = f(t),$$

где $f(t)$ — периодическая функция, записывается в виде:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n Y_i x_i(t),$$

где $Y_i = \frac{1}{\prod_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^n (p_i - p_k)},$

$$x_i(t) = e^{p_i t} \int f(t) e^{-p_i t} dt$$

— решение уравнения первого порядка с такой же правой частью, т. е. уравнения

$$\frac{dx_i}{dt} - p_i x_i = f(t),$$

а p_i — корни характеристического уравнения

$$p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0.$$

При нулевых начальных условиях можно написать:

$$x_i(t) = \int_0^t f(\tau) e^{p_i(t-\tau)} d\tau.$$

Таким образом, решение дифференциального уравнения n -го порядка представляет собой сумму решений n дифференциальных уравнений первого порядка, причем все решения отличаются друг от друга только множителями, определяемыми корнями характеристического уравнения.

В том случае, когда корни характеристического уравнения являются действительными, полученные алгоритмы приводят к схемам фильтров с постоянными параметрами (рис. P11.2). Блоки Y_i представляют собой усилители, коэффициенты усиления которых определяются корнями характеристического уравнения; RC -цепи могут быть совершенно одинаковыми.

Каждая RC -цепь с постоянными параметрами может быть «параметризована», и тогда стабильность ее внешних характеристик будет определяться ста-

бильностью «местного генератора». Для достижения этого достаточно записать решение уравнения первого порядка в виде:

$$x(t) = e^{-a_0 t} \left[\int f(t) e^{a_0 t} dt + K \right].$$

Структурная схема, реализующая последний алгоритм, изображена на рис. П11.3; пунктиром намечены цепи синхронизации.

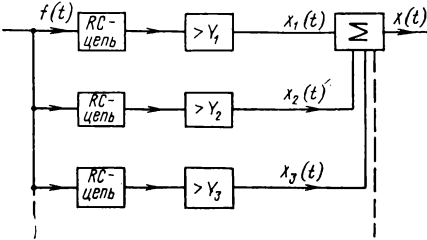


Рис. П11.2

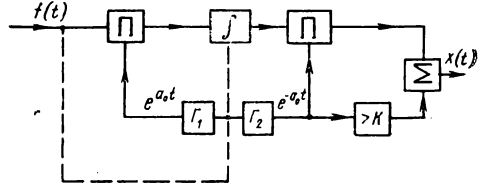


Рис. П11.3

Если корни характеристического уравнения являются комплексно-сопряженными, решение можно переписать в форме:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n/2} x_k(t),$$

где $x_k(t) = Y_i x_i(t) + Y_{i+1} x_{i+1}(t)$ — решение, соответствующее дифференциальному уравнению второго порядка.

В тех случаях, когда корни чисто мнимые или комплексно-сопряженные, говорить о соответствии каждого решения $x_i(t)$ уравнению первого порядка можно только условно, так как корни неразделимы и пара решений $x_i(t)$ соответствует одному дифференциальному уравнению второго порядка; однако с реализованной точки зрения говорить о таком соответствии можно, поскольку каждому фильтру соответствует своя весовая функция (одно из двух частных решений уравнения второго порядка).

11.12. Дифференциальное уравнение колебательного контура в приведенных координатах имеет вид

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + 2\alpha \frac{dx}{d\tau} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 f(t) = \omega_0^2 F_0 e^{i\omega\tau(t)}$$

Перейдем к «натуральному времени» на основе равенства $d\tau = \dot{\tau} dt$:

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{\dot{\tau}} \frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx}{d\tau} \right) = \frac{d}{\dot{\tau} dt} \left(\frac{1}{\dot{\tau}} \frac{dx}{dt} \right) = \frac{1}{\dot{\tau}^2} \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{\ddot{\tau}}{\dot{\tau}^3} \frac{dx}{dt}.$$

Подставив $dx/d\tau$ и $d^2 x/d\tau^2$ в исходное дифференциальное уравнение, получим

$$\bar{x} + \left(2\alpha\dot{\tau} - \frac{\ddot{\tau}}{\dot{\tau}} \right) \dot{x} + \omega_0^2 \dot{\tau}^2 x = \omega_0^2 \dot{\tau}^2 f(t).$$

Если $\tau(t) = t + \frac{M}{\omega_0} \sin \Omega t$, $\dot{\tau} = 1 + M \frac{\Omega}{\omega_0} \cos \Omega t$, $\ddot{\tau} = -M \frac{\Omega^2}{\omega_0} \sin \Omega t$, то

$$\ddot{x} + \left[2\alpha \left(1 + \frac{M}{\omega_0} \sin \Omega t \right) - \frac{M \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \sin \Omega t}{1 + \frac{M}{\omega_0} \sin \Omega t} \right] \dot{x} + \omega_0^2 \left(1 + M \frac{\Omega}{\omega_0} \cos \Omega t \right)^2 x =$$

$$= \omega_0^2 \left(1 + M \frac{\Omega}{\omega_0} \cos \Omega t \right)^2 f(t).$$

11.13. Представим АМ—ЧМ сигнал в виде $q(t) = V(t)f(t)$, где $f(t) = F_0 e^{i\omega_0 \tau(t)}$ — ЧМ сигнал.

Реакцию фильтра также представим в виде произведения: $z(t) = V(t)x(t)$.

В дифференциальное уравнение контура в приведенных кординатах

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + 2\alpha \frac{dx}{d\tau} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 f(t)$$

подставим вместо x и f соответственно: $x(t) = z(t)/V(t)$, $f(t) = q(t)/V(t)$; в результате получим

$$\frac{d^2}{(\dot{\tau} dt)^2} \left[\frac{z(t)}{V(t)} \right] + 2\alpha \frac{d}{\dot{\tau} dt} \left[\frac{z(t)}{V(t)} \right] + \omega_0^2 \frac{z(t)}{V(t)} = \omega_0^2 \frac{q(t)}{V(t)}.$$

После преобразований будем иметь:

$$\ddot{z} + \left(2\alpha \dot{\tau} - \frac{\ddot{\tau}}{\dot{\tau}} - 2 \frac{\dot{V}}{V} \right) \dot{z} + \left(\omega_0^2 \dot{\tau}^2 - \frac{\ddot{V}}{V} + 2 \frac{\dot{V}^2}{V^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\dot{V} \ddot{\tau}}{V \dot{\tau}} - 2\alpha \dot{\tau} \frac{\dot{V}}{V} \right) z = \omega_0^2 \dot{\tau}^2 q.$$

Приложение I

МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Введение

В настоящем приложении излагаются общие сведения о методах интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений; эти сведения используются при решении задач, связанных с изучением и расчетом нелинейных, параметрических и нелинейно-параметрических цепей. По каждому методу приводится расчетная рецептура; по методам, широко освещенным в учебной и монографической литературе, даются только ссылки на эту литературу. Каждый метод, как правило, иллюстрируется одним-двумя примерами, причем для большей ясности иллюстрации строятся по отношению к простым уравнениям, в том числе и линейным. Особые решения в примерах не изучаются — о них идет речь в П.9.

Здесь рассматриваются аналитические методы и только иногда указывается на возможности использования того или иного метода в качестве численного (см. предисловие).

Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами называются параметрическими дифференциальными уравнениями¹⁾. При рассмотрении различных методов будем ориентироваться на уравнения первого и второго порядков:

$$a_1(\tau, x, \dot{x}) \frac{dx}{d\tau} + a_0(\tau, x, \dot{x}) x = f(\tau),$$

$$a_2(\tau, x, \dot{x}, \ddot{x}) \frac{d^2x}{d\tau^2} + a_1(\tau, x, \dot{x}, \ddot{x}) \frac{dx}{d\tau} + a_0(\tau, x, \dot{x}, \ddot{x}) x = f(\tau),$$

в которых x, τ — вещественные переменные. Будем исследовать также уравнения, не разрешенные относительно старшей производной.

Прежде чем излагать конкретные методы, дадим классификацию наиболее распространенных из них: сначала по общим признакам, характеризующим постановку задачи и точность ее решения, а затем по признакам, определяющим пути решения. По признаку, характеризующему постановку задачи поиска решения, все методы интегрирования дифференциальных уравнений можно представить двумя группами:

— методы прямого решения, в которых результатом решения считается функция $x(\tau)$, называемая интегральной кривой, или обратная ей функция $\tau(x)$;

— методы косвенного решения, в которых результатом решения считается некоторое изображение интегральной кривой, например функция $y(x)$, где $y = dx/d\tau$, называемая фазовой траекторией или фазовым изображением.

Метод, в котором результатом решения считается функция $y(x)$, называют «методом фазовой плоскости».

По признаку, характеризующему точность решения, можно различать следующие методы:

— точные, найденные по которым решения после их подстановки в исходное дифференциальное уравнение обращают последнее в тождество;

¹⁾ Термин «параметрические уравнения» соответствует термину «параметрические цепи», которые описываются линейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами (см. предисловие и разд. 1).

— приближенные; решения, найденные этими методами, после подстановки их в исходное дифференциальное уравнение, обращают последнее в приближенное тождество; разность между точным и приближенным тождествами называется невязкой;

— качественные, позволяющие выяснять вопросы существования и единственности, вопросы устойчивости, вопросы поведения решения в отдельных точках и на определенных интервалах, некоторые вопросы асимптотического представления решений и др. Как правило, ответы на эти вопросы находятся не приближенным интегрированием, а изучением исходного или преобразованного дифференциального уравнения.

По признакам, характеризующим пути отыскания решений, все методы разбиваются на группы, «внутри» которых проводится дальнейшая классификация. К этим группам относятся:

1. Методы непосредственного интегрирования.
2. Методы аппроксимации решения.
3. Методы аппроксимации и преобразования дифференциального оператора.
4. Методы перехода к более простым дифференциальным уравнениям на основе преобразования зависимой переменной.
5. Методы перехода к более простым дифференциальным уравнениям на основе преобразования независимой переменной или обеих переменных.
6. Методы перехода к интегральным уравнениям.

Каждому методу присваивается свой номер, состоящий из двух цифр: первая соответствует номеру группы от первой до шестой, а вторая — порядковому номеру внутри группы. Если данный метод имеет различные модификации, то после цифр вводят букву русского алфавита.

Ниже следующее изложение построено на уровне строгости, соответствующем «средним нормам» технической литературы.

В приложениях, как и во всей книге, приняты следующие обозначения:

x — безразмерная зависимая переменная;

τ — безразмерное время (размерное время — t), т. е. безразмерная независимая переменная;

$y = dx/d\tau$ — скорость зависимой переменной;

z — преобразованная зависимая переменная;

η — преобразованная независимая переменная.

Отметим еще раз, что наряду с обозначениями $dx/d\tau$, dy/dx и т. д. будут применяться обозначения $x(\tau)$, $y'(\tau)$, в которых точка отображает операцию дифференцирования по времени (τ , t), а штрих — по «своей» переменной. Далее, весьма часто, если это не может привести к недоразумениям, функции $x(\tau)$, $f(t)$, $y(x)$ и т. д. для сокращения будут записываться в виде x , f , y и т. д.

Нумерация коэффициентов дифференциального уравнения зависит от удобства построения расчетных формул. Чаще всего индекс коэффициента соответствует порядку производной, т. е.

$$a_n \frac{d^n x}{d\tau^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{d\tau^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{d\tau} + a_0 x = f(\tau);$$

однако применяются и такие записи:

$$a_1 \frac{d^n x}{d\tau^n} + a_2 \frac{d^{n-1} x}{d\tau^{n-1}} + \dots + a_n \frac{dx}{d\tau} + a_{n+1} x = f(\tau),$$

$$\frac{d^n x}{d\tau^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{d\tau^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{d\tau} + a_n x = f(\tau).$$

Излагаемый ниже материал отнюдь не является исчерпывающим или даже достаточно полным; в нем нашли отражение только наиболее распространенные методы, применявшиеся при изучении нелинейных и параметрических цепей. Однако приведенная классификация охватывает все известные методы, в том числе и те, которые здесь не рассматриваются; некоторые методы представляют собой

сочетание других, которые в данной классификации признаны самостоятельными.

Из числа нерассмотренных, в первую очередь, следует указать на методы «квазилинеаризации» Р. Беллмана и Р. Калаба [П.7], методы и приемы, изложенные в работах И. А. Биргефа [П.11], Н. К. Куликова [П.26] и др.

Нужно также отметить, что здесь нет материала по сравнению различных приближенных методов; в последние годы намечены основы общей теории для такого сравнения [П.22].

В приложении I (П.1—П.13) излагаются методы интегрирования дифференциальных уравнений, а справочный материал приводится в приложении II (П.14)—(П.18).

П.1. Методы непосредственного интегрирования

Непосредственное интегрирование можно адресовать только к самым простым дифференциальным уравнениям, которые ниже будут указаны; те уравнения, которые с помощью преобразований или подстановок приводятся к виду, допускающему непосредственное интегрирование, связываются с «методами перехода к более простым дифференциальным уравнениям», т. е. с методами четвертой и пятой групп.

Непосредственно интегрировать можно только следующие уравнения первого порядка:

уравнения n -го порядка вида:

$$\frac{dx}{d\tau} = \varphi(x); \quad \frac{dx}{d\tau} = f_1(\tau); \quad \frac{dx}{d\tau} = f(\tau)\varphi(x),$$

уравнения n -го порядка вида

$$\frac{d^n x}{d\tau^n} = f(\tau),$$

а также уравнение в полных дифференциалах

$$P(\tau, x)dx + Q(\tau, x)d\tau = 0$$

при условии, что

$$\partial P/\partial\tau = \partial Q/\partial x.$$

Заданное уравнение иногда удается привести к уравнению в полных дифференциалах при помощи интегрирующего множителя. В частности, уравнение

$$\frac{dx}{d\tau} + a(\tau)x = f(\tau)$$

при помощи интегрирующего множителя [14, стр. 440] $\mu = e^{\int a\tau}$ приводится к виду «в полных дифференциалах»; общий интеграл этого уравнения находится по формуле

$$x = e^{-\int a\tau} \left[\int f e^{\int a\tau} d\tau + C \right].$$

Непосредственное интегрирование возможно как относительно функции x , так и относительно аргумента τ ; в последнем случае результат решения будет представлен в виде обратной функции $\tau(x)$. С методами непосредственного интегрирования можно ознакомиться в любом курсе дифференциальных уравнений [П.1, П.32, П.42, П.41].

Условно отнесем к методам непосредственного интегрирования и формулу Лиувилля:

$$v(\tau) = Cu(\tau) \int \frac{1}{u^2(\tau)} e^{-\int a_1(\tau) d\tau} d\tau,$$

которая дает возможность непосредственно найти одно частное решение $v(\tau)$ по известному другому частному решению $u(\tau)$ линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + a_1(\tau) \frac{dx}{d\tau} + a_0(\tau)x = 0.$$

общее решение которого представляет собой сумму частных:

$$x(\tau) = Au(\tau) + Bv(\tau).$$

Изложенное выше относится к прямым методам. Косвенным методом, где самостоятельным результатом служит некоторое изображение искомого решения, доступно гораздо больше видов уравнений. Например, уравнение вида

$$\frac{dx}{d\tau} = F(x, \tau)$$

непосредственно дает фазовое изображение $y = F(x, \tau)$; уравнение вида

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + a_1 \frac{dx}{d\tau} + a_0x = 0$$

можно привести к линейному фазовому изображению $\kappa = a_0 - a_1\delta$ относительно фазовых координат $\delta = x/x$ и $\kappa = \dot{x}/x$.

П.2. Методы аппроксимации решений

Методы этой группы объединяет общий подход, содержание которого заключено в предложении: «решение ищем в виде...». На основе изучения свойств связей между функцией и ее производными, а иногда и на основе чисто физических соображений или экспериментальных данных можно высказать предположение о функциональной структуре решения, т. е. дать его аппроксимацию, которая в отдельных случаях может быть и точной. Здесь различают следующие методы.

2.1. *Метод выбора решения в виде линейной комбинации экспоненциальных функций.* Этот метод является точным только по отношению к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами, в которых между функцией и производными имеет место линейная связь; этой связи удовлетворяют только линейные комбинации экспоненциальных функций [14, стр. 453].

Применение данного метода в качестве приближенного связано с условиями аппроксимации решения; в этом качестве метод рассматривается ниже вместе с «методами минимизации невязки» (2.7) и др.

Следует отметить, что благодаря свойству экспоненциальных функций, позволяющему легко разделять аргументы¹⁾, можно применять аппарат операционного исчисления и по отношению к некоторым нелинейным уравнениям²⁾; этот метод, однако, не имеет преимуществ перед другими и из-за относительной громоздкости не получил широкого распространения.

2.2. *Методы поиска решения в виде рядов и полиномов.* Решение в виде степенного ряда можно искать по отношению ко всем уравнениям, не поддающимся непосредственному интегрированию; практическое использование такого подхода не всегда целесообразно как из-за громоздкости вычислений, так и из-за медленной сходимости соответствующих рядов³⁾. Решения в виде степенного полинома являются приближенными.

Поиск решения в виде степенного полинома широко применяется в методах минимизации невязки (2.7), а также в методе последовательных приближений

¹⁾ То есть благодаря равенству $f(x+y) = f(x)f(y)$; $e^{x+y} = e^x e^y$.

²⁾ Подробности можно найти, например, в книге В. Хьюза [79, стр. 82—98].

³⁾ Следует отметить, что для некоторых уравнений не удается найти точный вид разложения решения в ряд как по степеням τ , так и по степеням $(1/\tau)$.

(6.2). Рецептúra пользования методом решения в виде степенного ряда изложена во многих учебниках и руководствах [П.1, стр. 213 и др.; П.30, стр. 461—464; П.42, стр. 125—134].

Аналогично обстоит дело и с поиском решения в виде тригонометрического ряда Фурье, если, конечно, заранее известно, что решение является периодическим; рецептúra его применения в главном совпадает с рецептúрой по методу решения в виде степенного ряда.

В тех случаях, когда заранее известно, что решение не является периодическим, но может быть представлено в виде ряда, расположенного по тригонометрическим функциям (например, почти периодическое колебание, или отрезок функции), следует пользоваться аналогичными приемами. В равной степени это замечание относится и к случаям, когда известно, что решение можно представить в виде ряда, расположенного по ортогональным функциям некоторой полной системы; такой ряд также называется рядом Фурье, а иногда обобщенным рядом Фурье.

К методам поиска решения в виде рядов и полиномов прямо относится «метод использования непрерывных дробей» [П.1, стр. 241—246; П.21, стр. 191—192] бесконечных и конечных.

2.3. *Метод аппроксимации решения на основе «точечного исчисления».* Под точечным исчислением понимают совокупность правил прямого и обратного переходов от функций к векторам, проекции которых численно равны значениям функций в определенных точках; аппарат точечного исчисления приспособлен для приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений трудами Г. Е. Пухова [60]¹⁾.

Решение дифференциального уравнения аппроксимируется функциональной зависимостью, которая затем отображается числовым вектором со значениями, равными значениям искомой функции в выбранных точках. Дифференциальный оператор также аппроксимируется вектором в тех же точках²⁾. На основе аппарата точечного исчисления определяются коэффициенты аппроксимирующего выражения. Подробности, связанные с этим методом и иллюстрирующие его примеры, даны в [60].

2.4. *Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).* В классическом виде метод адресуется к линейным неоднородным уравнениям; решение неоднородного уравнения ищется как решение однородного (без правой части), но с переменными произвольными постоянными. Этот метод приспособляют и к неоднородным нелинейным дифференциальным уравнениям; в таких задачах его называют методом вариации параметров (см. метод 2.5).

Напомним рецептúra применения метода вариации произвольных постоянных по отношению к неоднородным линейным уравнениям первого и второго порядков. Для решения неоднородного уравнения первого порядка

$$\frac{dx}{d\tau} + a(\tau)x = f(\tau)$$

сначала находят решение $x(\tau, C)$ однородного уравнения

$$\frac{dx}{d\tau} + a(\tau)x = 0.$$

Произвольную постоянную C заменяют пока неопределенной функцией $C(\tau)$; эта функция находится после подстановки $x[\tau, C(\tau)]$, $\dot{x}[\tau, C(\tau), \dot{C}(\tau)]$ в исходное неоднородное уравнение и решения нового дифференциального уравнения относительно C ; результат решения имеет вид $C[\tau, f(\tau), K]$, где K — новая

¹⁾ Аппарат точечного исчисления не следует путать с методом точечных преобразований (см., например, [16, стр. 64—74]), в котором требуется найти зависимость (функции «последования»), позволяющую переходить от точки к точке при построении фазового изображения.

²⁾ Поскольку аппроксимируется не только решение, но и дифференциальный оператор, этот метод с точки зрения классификации можно включить между второй и третьей группами.

постоянная. Общее решение неоднородного уравнения теперь можно записать в форме: $x\{\tau, C\{\tau, f(\tau), K\}\}$.

Пример 1. Найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{d\tau} + \alpha x = f(\tau).$$

Решение однородного уравнения известно: $x = C e^{-\alpha\tau}$; подставляя $x = C(\tau)e^{-\alpha\tau}$, $\dot{x} = -\alpha C(\tau)e^{-\alpha\tau} + \dot{C}(\tau)e^{-\alpha\tau}$ в неоднородное уравнение

$$[\dot{C}(\tau) - \alpha C(\tau)]e^{-\alpha\tau} + \alpha C(\tau)e^{-\alpha\tau} = f(\tau),$$

приходим к новому дифференциальному уравнению относительно $C(\tau)$:

$$\dot{C} = e^{\alpha\tau} f(\tau),$$

решение которого имеет вид

$$C(\tau) = \int e^{\alpha\tau} f(\tau) d\tau + K.$$

Теперь общее решение неоднородного уравнения запишется в окончательной форме

$$x = e^{-\alpha\tau} \left[\int f(\tau) e^{\alpha\tau} d\tau + K \right].$$

Для решения неоднородного уравнения второго порядка

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = f(\tau)$$

сначала находят $x = C_1 x_1 + C_2 x_2$, т. е. сумму линейно независимых решений однородного уравнения

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0;$$

постоянные C_1 и C_2 заменяют затем функциями $C_1(\tau)$ и $C_2(\tau)$.

Для определения функций $C_1(\tau)$, $C_2(\tau)$ нужны два уравнения, в то время как имеется только одно, образующееся при подстановке $x = C_1 x_1 + C_2 x_2$ в исходное уравнение. Для получения дополнительного уравнения принимают следующее условие: в выражении для производной

$$\dot{x} = (C_1 \dot{x}_1 + C_2 \dot{x}_2) + (\dot{C}_1 x_1 + \dot{C}_2 x_2)$$

вторая сумма должна обращаться в нуль. Другими словами, при дифференцировании решения x функции $C_1(\tau)$, $C_2(\tau)$ рассматриваются как постоянные.

Таким образом, появляется первое уравнение для нахождения C_1 и C_2 :

$$\dot{C}_1 x_1 + \dot{C}_2 x_2 = 0.$$

Дифференцируя теперь $\dot{x} = C_1 \dot{x}_1 + C_2 \dot{x}_2$ еще раз, находим

$$\ddot{x} = C_1 \ddot{x}_1 + C_2 \ddot{x}_2 + \dot{C}_1 \dot{x}_1 + \dot{C}_2 \dot{x}_2;$$

подставив \ddot{x} , \dot{x} и x в исходное уравнение, легко получить второе уравнение для C_1 и C_2 :

$$\dot{C}_1 \dot{x}_1 + \dot{C}_2 \dot{x}_2 = f(\tau).$$

Из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{C}_1 x_1 + \dot{C}_2 x_2 &= 0 \\ \dot{C}_1 \dot{x}_1 + \dot{C}_2 \dot{x}_2 &= f(\tau) \end{aligned} \right\}$$

нетрудно определить \dot{C}_1 и \dot{C}_2 :

$$\dot{C}_1 = \frac{-x_2 f}{x_1 x_2 - x_1^2 x_2}, \quad \dot{C}_2 = \frac{x_1 f}{x_1 x_2 - x_1^2 x_2}.$$

Интегрируя последние уравнения, находим $C_1(\tau)$, $C_2(\tau)$ и тем самым $x(\tau) = C_1(\tau)x_1(\tau) + C_2(\tau)x_2(\tau)$.

Пример 2. Рассмотрим уравнение консервативного колебательного контура, находящегося под произвольным воздействием $f(\tau)$:

$$\ddot{x} + x = f(\tau).$$

Здесь $\tau = \omega_0 t$, ω_0 — частота собственных колебаний. Решение однородного уравнения известно: $x = C_1 x_1 + C_2 x_2 = C_1 \cos \tau + C_2 \sin \tau$. Полагая $C_1 = C_1(\tau)$, $C_2 = C_2(\tau)$ по вышеприведенным формулам находим:

$$\dot{C}_1 = f(\tau) \sin \tau, \quad \dot{C}_2 = f(\tau) \cos \tau,$$

и далее:

$$C_1 = - \int_0^\tau f(\xi) \sin \xi d\xi + K_1,$$

$$C_2 = \int_0^\tau f(\xi) \cos \xi d\xi + K_2.$$

Подставим выражения для C_1 и C_2 в общее решение:

$$\begin{aligned} x &= - \int_0^\tau f(\xi) \sin \xi \cos \tau d\xi + \int_0^\tau f(\xi) \cos \xi \sin \tau d\xi + K_1 \cos \tau + K_2 \sin \tau = \\ &= \int_0^\tau f(\xi) \sin(\tau - \xi) d\xi + K_1 \cos \tau + K_2 \sin \tau. \end{aligned}$$

Как уже указывалось, метод Лагранжа служит основой для создания ряда других методов.

2.5. Метод вариации параметров решения. Метод вариации параметров по существу представляет собой метод Лагранжа, распространенный на однородные и неоднородные нелинейные уравнения. Исходное уравнение «расщепляют» так, что функция, из-за которой оно трудно поддается решению, оказывается выделенной; ее можно перенести в правую часть и рассматривать как внешнее воздействие. Затем отыскивают решение уравнения без этой функции — так называемое «порождающее решение». Параметры (произвольные постоянные) этого порождающего решения являются постоянными; для того чтобы удовлетворить исходному уравнению, их принимают переменными, т. е. в виде функций времени. На эти параметры иногда накладывают дополнительные условия или ограничения, например, связанные с «медленностью» их изменения¹⁾. В остальном рецептура применения метода вариации параметров мало отличается от рецептуры применения метода Лагранжа; особенности ее состоят в специфике приемов, при помощи которых выделяют дифференциальное уравнение относительно переменного параметра.

По отношению к дифференциальным уравнениям первого порядка рецептура метода вариации параметров совпадает с рецептурой метода Лагранжа; в общем виде можно разве заметить, что иногда дифференциальное уравнение относительно параметра может и не оказаться более простым, чем исходное.

Пример 8. Уравнение

$$x + x + qx^2 = 0, \quad x(0) = A_0,$$

можно проинтегрировать непосредственно; однако найдем его решение методом

¹⁾ Без этих условий часто не удается непосредственно проинтегрировать дифференциальное уравнение и получить закон изменения параметра во времени.

вариации параметров. Выделим член qx^2 ; решение более простого уравнения $x+x=0$ известно (порождающее решение): $x=Ae^{-\tau}$. Примем, что $A=A(\tau)$, $x=Ae^{-\tau}+A'e^{-\tau}$; подставляя эти выражения в исходное уравнение и сокращая, получаем

$$\frac{dA}{d\tau} + qA^2 e^{-\tau} = 0.$$

Это уравнение легко интегрируется:

$$\frac{dA}{A^2} = -q e^{-\tau} d\tau; \quad -\frac{1}{A} = q e^{-\tau} C; \quad A(\tau) = -\frac{1}{q e^{-\tau} + C}.$$

Теперь решение будет иметь вид:

$$x = A(\tau) e^{-\tau} = -\frac{e^{-\tau}}{q e^{-\tau} + C}.$$

Так как $x(0) = A_0$, то

$$C = -\frac{1}{A_0} - q,$$

$$x = -\frac{e^{-\tau}}{q e^{-\tau} - \frac{1}{A_0} - q} = \frac{A_0 e^{-\tau}}{1 + A_0 q (1 - e^{-\tau})}.$$

По отношению к дифференциальным уравнениям второго порядка рецептура метода вариации параметров существенно зависит от правой части и априорной информации о виде решения, а также от значений и поведения параметров. Эти причины вызвали к жизни множество различных модификаций метода вариации параметров, каждая из которых приспособлена для своего круга задач, так как они построены на основе учета соотношений между параметрами заданного уравнения и связываются с физическими представлениями об изучаемом процессе; они рассматриваются в основном тексте книги — в разд. 9—11. Здесь же только заметим, что основным среди этих методов является метод медленно меняющихся амплитуд (метод Ван дер Поля), в котором варьируется амплитуда гармонического колебания, представляющего собой порождающее решение.

2.6. Метод малого параметра. Решение по этому методу¹⁾ ищется в виде ряда по некоторым подлежащим определению функциям; каждая функция содержит множитель — малый параметр — во все возрастающей степени; последнее позволяет, как правило, ограничивать решение малым числом членов.

Рецептура применения метода состоит в следующем. В заданном дифференциальном уравнении выделяют член (члены), из-за которого уравнение не поддается непосредственному интегрированию. В этом члене, в свою очередь, выделяют множитель μ — малый параметр, так что при $\mu = \mu_0$ результат интегрирования соответствует порождающему решению. Решение заданного уравнения аппроксимируют суммой, состоящей из порождающего решения и пока неопределенных функций с множителями вида μ^n ($n=1, 2, 3, \dots$). Подстановка этого решения в исходное дифференциальное уравнение дает систему дифференциальных уравнений, из которой находят подлежащие определению функции. Начальные условия вводят в порождающее уравнение; для всех остальных уравнений начальные условия принимают нулевыми.

¹⁾ Метод малого параметра часто называют «методом возмущений»; если при значении параметра $\mu = \mu_0$ уравнение легко решается, то это порождающее решение называется невозмущенным; при μ , отличающемся от μ_0 , имеет место возмущенное решение.

Применение метода малого параметра эффективно в тех случаях, когда решение быстро сходится, а это часто оказывается недостижимым. Иногда вместе с сомножителями μ^n появляется аргумент τ также во все возрастающей степени; такие члены называются секулярными или вековыми. Проследить за появлением секулярных членов легко на простом примере разложения по степеням расстройки $\Delta\omega = \omega - \omega_0 = \mu$ выражения

$$\sin(\omega_0 + \Delta\omega)t = \cos \mu t \sin \omega_0 t + \sin \mu t \sin \omega_0 t;$$

раскладывая $\cos \mu t$ и $\sin \mu t$ в степенные ряды, получаем

$$\sin(\omega_0 + \Delta\omega)t = \sin \omega_0 t + \mu t \cos \omega_0 t - \frac{\mu^2 t^2}{2} \sin \omega_0 t - \frac{\mu^3 t^3}{3!} \cos \omega_0 t \dots$$

Левая часть данного выражения представляет собой периодическую функцию, ограниченную при любом t ; для правой части это неочевидно, а исследование сходимости далеко не всегда является простой задачей. Это пример наглядно показывает, как секулярные члены затрудняют решение. Предложены специальные приемы для освобождения от секулярных членов; однако в тех случаях, когда их появление неизбежно, лучше обращаться к другим методам.

Эффективность метода малого параметра может и не зависеть от порядка малости этого параметра; более того, в основе метода нет условия «малости параметра» и решение, вообще говоря, можно конструировать по степеням любого параметра (конечно, не нарушая условий сходимости) или по степеням разности между текущим и некоторым фиксированным значениями параметра. По этим причинам рассматриваемый метод в литературе часто называют методом «разложения в ряд по параметру», т. е. опускают слово «малому» [П.21, стр. 39]. Однако поиск решения наиболее прост именно при малом параметре.

Рассмотрим примеры применения метода по отношению к дифференциальным уравнениям первого порядка.

Пример 1. В данном параметрическом дифференциальном уравнении

$$\frac{dx}{d\tau} - \alpha\tau^2 x = \tau, \quad x(0) = 0,$$

членом, из-за которого решение не выражается в элементарных функциях, является $(\alpha\tau^2 x)$; примем множитель α в качестве малого параметра, т. е. $\mu = \alpha$. Освободимся от этого члена; положим $\alpha = 0$, тогда уравнение упростится:

$$\frac{dx_0}{d\tau} = \tau$$

и порождающее решение будет иметь вид: $x_0 = \frac{1}{2} \tau^2$.

Аппроксимируем решение в форме:

$$x = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha^3 x_3 + \dots;$$

функции x_1, x_2, x_3 подлежат определению.

Подставляя x и \dot{x} в дифференциальное уравнение, находим:

$$(\dot{x}_0 + \alpha \dot{x}_1 + \alpha^2 \dot{x}_2 + \alpha^3 \dot{x}_3 + \dots) - \alpha\tau^2 (x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha^3 x_3 + \dots) = \tau.$$

Из последнего равенства после сопоставления членов с одинаковыми степенями α получаем систему уравнений для нахождения функций x_1, x_2, x_3, \dots

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \tau^2 x_0 = \tau^2 \frac{\tau^2}{2} = \frac{1}{2} \tau^4, & x_1(0) &= 0 \\ \dot{x}_2 &= \tau^2 x_1, & x_2(0) &= 0 \\ \dot{x}_3 &= \tau^2 x_2, & x_3(0) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Эти уравнения легко последовательно интегрируются:

$$x_1 = \frac{1}{2} \frac{\tau^5}{5}, \quad x_2 = \frac{1}{2.5} \frac{\tau^8}{8},$$

$$x_3 = \frac{1}{2.5 \cdot 8} \frac{\tau^{11}}{11} \dots$$

Подставив найденные функции в принятое решение, получим

$$x = \frac{\alpha^0}{2} \tau^2 + \frac{\alpha}{2.5} \tau^5 + \frac{\alpha^2}{2.5 \cdot 8} \tau^8 + \frac{\alpha^3}{2.5 \cdot 8 \cdot 11} \tau^{11} + \dots$$

При $\alpha < 1$ и $\tau < 1$ этот ряд сходится быстро; при $\alpha \ll 1$ ряд сходится относительно быстро даже при τ , превышающем единицу.

Пример 2. В нелинейном дифференциальном уравнении

$$\frac{dx}{d\tau} + x + qx^2 = 0, \quad x(0) = A_0,$$

«трудным» членом является qx^2 ; уравнение без этого члена

$$\frac{dx_0}{d\tau} + x_0 = 0, \quad x_0(0) = A_0,$$

дает порождающее решение: $x_0 = A_0 e^{-\tau}$. Аппроксимируем решение в виде $x = x_0 + qx_1 + q^2x_2$, т. е. в качестве малого параметра принимаем q . Подставляя x и x в исходное уравнение, получаем

$$(x_0 + qx_1 + q^2x_2) + (x_0 + qx_1 + q^2x_2) + q(x_0 + qx_1 + q^2x_2)^2 = 0.$$

Раскрывая скобки и выделяя члены с одинаковыми степенями q , находим:

$$x_1 + x_1 + x_0^2 = 0, \quad x_1(0) = 0;$$

$$x_2 + x_2 + 2x_0x_1 = 0, \quad x_2(0) = 0.$$

Для определения x_1 с учетом того, что $x_0 = A_0 e^{-\tau}$, получаем уравнение

$$\frac{dx_1}{d\tau} + x_1 = -A_0^2 e^{-2\tau}, \quad x_1(0) = 0,$$

которое можно решить, например, методом Лагранжа; в результате решения имеем:

$$x_1 = C_1 e^{-\tau} + A_0^2 e^{-2\tau}, \quad C_1 = -A_0^2,$$

$$x_1 = A_0^2 (e^{-2\tau} - e^{-\tau}).$$

Уравнение для определения x_2 записывается в виде:

$$\frac{dx_2}{d\tau} + x_2 = -2A_0 e^{-\tau} A_0^2 (e^{-2\tau} - e^{-\tau}) = -2A_0^3 (e^{-3\tau} - e^{-2\tau}),$$

а его решение — в виде

$$x_2 = A_0^3 (e^{-3\tau} - 2e^{-2\tau} + e^{-\tau}).$$

Подставляя x_0 , x_1 и x_2 в принятое решение, находим

$$x = A_0 e^{-\tau} + qA_0^2 (e^{-2\tau} - e^{-\tau}) + q^2A_0^3 (e^{-3\tau} - 2e^{-2\tau} + e^{-\tau}).$$

После элементарных преобразований окончательно получаем

$$x = A_0 e^{-\tau} [1 + qA_0 (e^{-\tau} + 1) + q^2A_0^2 (e^{-\tau} - 1)^2].$$

В заключение следует отметить, что принятие решения в виде только первых трех членов ряда допустимо при сильном неравенстве $q \ll 1$.

Метод малого параметра можно рационализировать, если с самого начала усложниться о характере упрощенного дифференциального уравнения, дающего порождающее решение. Цель указанной рационализации — освободить выполняющего расчет от утомительной процедуры нахождения функций x_1, x_2, \dots , из которых составляется аппроксимирующее решение. Такой рационализированный метод малого параметра в литературе называют реверсивным [32, стр. 183—185; 79, стр. 98—101].

Дополнительная рационализация этого метода состоит в использовании переходов от оригиналов к операционным изображениям, что упрощает вычисления.

Заданное во временной области дифференциальное уравнение перепишем в операционном виде:

$$a_1(p) \overset{\longleftrightarrow}{x} + a_2(p) \overset{\longleftrightarrow}{x^2} + \dots = \mu \overset{\longleftrightarrow}{f}(\tau),$$

где $a_n(p)$ — дифференциальные операторы над x^n ; двусторонняя стрелка символизирует переход от оригинала к изображению и наоборот. Здесь $a_1(p)$ представляет собой линейный оператор, соответствующий линейной части дифференциального уравнения, дающего порождающее решение x_1 , т. е. $a_1(p) \overset{\longleftrightarrow}{x_1} = \overset{\longleftrightarrow}{f}(\tau)$.

Решение уравнения аппроксимируется рядом по пока неопределенным функциям x_n с множителями μ^n :

$$x = \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \mu^3 x_3 + \dots = \mu (x_1 + \mu x_2 + \mu^2 x_3 + \dots).$$

Подстановка принятого решения в исходное дифференциальное уравнение приводит к системе, решение которой позволяет последовательно находить функции x_1, x_2, x_3, \dots так же, как в методе малого параметра. Рационализация состоит в том, что эта система решается раз навсегда и записывается в виде набора готовых формул. Приведем первые четыре из этих формул²⁾:

$$\left. \begin{aligned} \overset{\longleftrightarrow}{x_1} &= \frac{1}{a_1(p)} \overset{\longleftrightarrow}{f}(\tau) \\ \overset{\longleftrightarrow}{x_2} &= -\frac{a_2(p)}{a_1(p)} \overset{\longleftrightarrow}{x_1^2} \\ \overset{\longleftrightarrow}{x_3} &= -\frac{1}{a_1(p)} [2a_2(p) \overset{\longleftrightarrow}{x_1 x_2} + a_3(p) \overset{\longleftrightarrow}{x_1^3}] \\ \overset{\longleftrightarrow}{x_4} &= -\frac{1}{a_1(p)} [a_2(p) (\overset{\longleftrightarrow}{x_2^2} + 2\overset{\longleftrightarrow}{x_1 x_3}) + 3a_3(p) \overset{\longleftrightarrow}{x_1^2 x_2} + a_4(p) \overset{\longleftrightarrow}{x_1^4}] \end{aligned} \right\}$$

Пример 3. Дано уравнение

$$\frac{dx}{d\tau} + x + qx^2 = 0, \quad x(0) = A_0,$$

которое рассматривалось выше при изучении метода малого параметра и которое можно записать в виде

$$\frac{dx}{d\tau} + x + qx^2 = A_0 \delta(\tau),$$

¹⁾ Здесь порождающее решение обозначено через x_1 , в отличие от метода малого параметра, где это решение обозначалось через x_0 .

²⁾ Первые пять формул приведены в [79, стр. 99]; там же имеются ссылки на статьи, в которых даны последующие формулы.

более удобным для последующего решения при помощи операционных изображений. В соответствии с принятыми обозначениями:

$$a_1(p) = p+1; \quad a_2(p) = q, \quad a_3, a_4, \dots = 0; \quad f(\tau) = \overleftarrow{A_0} \delta(\tau) = A_0.$$

Находим x_1 по первой формуле:

$$\overleftarrow{x_1}(\tau) = \frac{1}{a_1(p)} \overleftarrow{A}(\tau) = \frac{A_0}{p+1}, \quad x_1(\tau) = A_0 e^{-\tau}.$$

Находим x_2 по второй формуле:

$$\overleftarrow{x_2}(\tau) = -\frac{a_2(p)}{a_1(p)} \overleftarrow{x_1}(\tau) = -\frac{q}{p+1} (A_0 e^{-\tau})^2 = -A_0^2 q \frac{1}{p+1} \frac{1}{p+2}.$$

Так как

$$\frac{1}{(p+1)(p+2)} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}, \quad \text{то } x_2(\tau) = -A_0^2 q (e^{-\tau} - e^{-2\tau}).$$

Находим x_3 по третьей формуле:

$$\begin{aligned} \overleftarrow{x_3} &= -\frac{1}{a_1(p)} 2a_2(p) \overleftarrow{x_1} \overleftarrow{x_2} = -2 \frac{q}{p+1} [A_0 e^{-\tau} (-A_0^2 q) (e^{-\tau} - e^{-2\tau})] = \\ &= 2A_0^3 q^2 \frac{1}{p+1} (e^{-2\tau} - e^{-3\tau}) = 2A_0^3 q^2 \frac{1}{p+1} \left(\frac{1}{p+2} - \frac{1}{p+3} \right). \end{aligned}$$

Определим оригинал x_3 :

$$\begin{aligned} x_3(\tau) &= 2A_0^3 q^2 \left[\frac{1}{(p+1)(p+2)} - \frac{1}{(p+1)(p+3)} \right] = 2A_0^3 q^2 \left[(e^{-\tau} - e^{-2\tau}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (e^{-\tau} - e^{-3\tau}) \right] = 2A_0^3 q^2 \left(\frac{1}{2} e^{-\tau} - e^{-2\tau} + \frac{1}{2} e^{-3\tau} \right). \end{aligned}$$

Теперь можно записать общее решение:

$$x = \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \mu^3 x_3 + \dots,$$

причем в данном случае принято, что $\mu = 1$. Итак,

$$x = A_0 e^{-\tau} - A_0^2 q (e^{-\tau} - e^{-2\tau}) + 2A_0^3 q^2 \left(\frac{1}{2} e^{-\tau} - e^{-2\tau} + \frac{1}{2} e^{-3\tau} \right).$$

или

$$x = A_0 e^{-\tau} + qA_0^2 (e^{-2\tau} - e^{-\tau}) + q^2 A_0^3 (e^{-3\tau} - 2e^{-2\tau} + e^{-\tau}).$$

Легко видеть, что это решение совпадает с решением, полученным выше методом малого параметра.

Теперь перейдем к дифференциальному уравнению второго порядка и проследим за появлением секулярного члена.

Пример 4. В данном нелинейном дифференциальном уравнении

$$\ddot{x} + x + \mu x^3 = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = A,$$

«трудным» членом является μx^3 ; уравнение без этого члена

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0, \quad x_0(0) = 0, \quad \dot{x}_0(0) = A,$$

дает порождающее решение $x_0 = A \sin \tau$. Аппроксимируем решение в виде $x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots$, но ограничимся членом с первой степенью μ .

Подставляя x и \dot{x} в исходное уравнение, получаем:

$$(x_0 + \mu \ddot{x}_1) + (x_0 + \mu x_1) + \mu (x_0 + \mu x_1)^3 = 0, \quad \ddot{x}_0 + x_0 + \mu (\ddot{x}_1 + x_1 + x_0^3) + 0(\mu) = 0.$$

Для определения x_1 , получаем уравнение:

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -x_0^3 = -A^3 \sin^3 \tau = -A^3 \frac{3}{4} \sin \tau + A^3 \frac{1}{4} \sin 3\tau,$$

$$x_1(0) = 0, \dot{x}_1(0) = 0.$$

Решение этого уравнения известно (см. поз. 2, 3 табл. П.14):

$$x_1 = \frac{3}{8} A^3 \tau \cos \tau - \frac{A^3}{32} \sin 3\tau.$$

Следовательно,

$$x \approx x_0 + x_1 = A \sin \tau + \mu \frac{3}{8} A^3 \tau \cos \tau - \mu \frac{1}{32} A^3 \sin 3\tau.$$

Второй член этого выражения является секулярным: при $\tau \rightarrow \infty$ x неограниченно возрастает. От секулярного члена, вообще говоря, можно освободиться, но только при наличии априорной информации о поведении решения (например, об известном факте зависимости частоты от амплитуды в нелинейных системах); однако целесообразнее в подобных условиях обращаться к другим методам.

2.7. Метод минимизации невязки. По этому методу решение ищется в виде комбинации некоторых функций, коэффициенты которых определяются по условию минимизации невязки.

После подстановки аппроксимирующего решения $x = \varphi(\tau; a_1, a_2, \dots, a_N)$ в исходное дифференциальное уравнение невязка α , т. е. разность между точным и приближенным тождествами, будет содержать те же коэффициенты:

$$\alpha = \alpha(\tau; a_1, a_2, \dots, a_N).$$

Если бы решение было точным, то невязка α тождественно равнялась бы нулю; таким образом, невязка дает косвенное представление о точности принятого решения; во всяком случае можно утверждать, что чем меньше невязка, тем точнее решение. Это и является основой метода минимизации невязки. Для определения коэффициентов $\{a_n\}_{n=1}^N$ в принятом решении на невязку α нужно наложить N условий; различные модификации метода минимизации невязки соответствуют различным условиям.

Наибольшее распространение получили следующие методы.

2.7а. Метод минимизации невязки по условиям среднеквадратичного приближения («метод наименьших квадратов»); по этому методу коэффициенты определяются из условия минимизации интеграла

$$\int_a^b \alpha^2 d\tau.$$

2.7б. Метод минимизации невязки по условиям минимизации моментов («метод моментов»); т. е. по условиям минимизации интегралов

$$\int_a^b \alpha \psi_n(\tau) d\tau,$$

где $\{\psi_n\}_{n=1}^N$ — некоторая выбранная система функций.

2.7а. Метод минимизации невязки по условиям обращения ее в нуль в определенных точках («метод коллокации»); т. е.

$$\alpha(\tau_1) = \alpha(\tau_2) = \dots = 0.$$

Рассмотрим кратко рецептуру применения этих методов, причем будем считать, что приближенное решение \tilde{x} ищется в виде суммы линейно-независимых

$$\text{функций, т. е. } \tilde{x}(\tau) = \sum_{n=1}^N a_n \psi_n(\tau).$$

После подстановки в исходное дифференциальное уравнение принятого решения $\tilde{x}(\tau)$ появляется невязка α ; коэффициенты должны быть определены из системы, содержащей N уравнений, составленных по условиям минимизации невязки.

1. *Метод наименьших квадратов.* По условию коэффициенты a_n в выражении $\alpha(\tau; a_1, a_2, \dots, a_N)$ должны быть определены из уравнений, составленных по условию минимизации интеграла $J = \int_a^b \alpha^2(\tau) d\tau$ для каждого коэффициента; это условие дает систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a_1} &= \int_a^b 2\alpha(\tau) \frac{\partial \alpha}{\partial a_1} d\tau = 0 \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\partial J}{\partial a_N} &= \int_a^b 2\alpha(\tau) \frac{\partial \alpha}{\partial a_N} d\tau = 0 \end{aligned} \right\}.$$

Вычисление коэффициентов a_n по этим уравнениям должно сопровождаться проверкой на минимум.

2. *Метод моментов.* Система уравнений для определения коэффициентов в соответствии с условием здесь имеет вид:

$$\int_a^b \alpha(\tau) \psi_1(\tau) d\tau = 0, \dots, \int_a^b \alpha(\tau) \psi_N(\tau) d\tau = 0.$$

Если дифференциальное уравнение является линейным, а функции $\psi_n(\tau)$ — ортогональными, результаты, получаемые по обоим методам, совпадают; для нелинейных уравнений результаты отличаются.

Следует отметить, что оба указанных метода можно отнести к классу вариационных, так как вариационный подход в задачах отыскания функций путем минимизации определенного функционала приводит именно к этим системам уравнений. Метод наименьших квадратов в вариационной трактовке принадлежит Б. Г. Галеркину и называется методом Галеркина, а метод моментов — В. Ритцу и называется методом Ритца.

3. *Метод коллокации.* По условию $\alpha(\tau)$ должно обращаться в нуль в N точках; таким образом, система уравнений будет иметь вид

$$\begin{aligned} \alpha(\tau_1; a_1, a_2, \dots, a_N) &= 0, \\ \dots \dots \dots \\ \alpha(\tau_N; a_1, a_2, \dots, a_N) &= 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим простой пример, для которого известно точное решение. Пусть задано дифференциальное уравнение $\ddot{x} + x = 0$, но не с начальными, а краевыми условиями: $x(0) = 0$; $x(1) = 1$; $0 \leq \tau \leq 1$. Аппроксимируем решение в виде: $x = a\tau + b\tau^2$.

Первое условие удовлетворено; из второго условия получаем $a + b = 1$, и, следовательно, в аппроксимирующем выражении остается только один параметр: $x = a\tau + (1-a)\tau^2$. Найдем невязку:

$$\ddot{x} = 2(1-a), \quad \alpha = 2(1-a) + a\tau + (1-a)\tau^2.$$

По методу наименьших квадратов:

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \int_0^1 2\alpha \frac{d\alpha}{da} d\tau = 0,$$

$$\int_0^1 [2(1-a) + a\tau + (1-a)\tau^2] (-2 + \tau - \tau^2) d\tau = 0.$$

Вычисляя интеграл и решая уравнение относительно a , получаем: $a \approx 1,271$. По методу моментов примем, что $\psi(\tau) \equiv 1$, тогда:

$$\int_0^1 \alpha(\tau) d\tau = 0,$$

$$\int_0^1 [2(1-a) + a\tau + (1-a)\tau^2] d\tau = 0.$$

Вычисляя интеграл и решая уравнение, находим, что $a \approx 1,270$. По методу коллокации потребуем, чтобы $\alpha=0$ при $\tau=1/2$:

$$2(1-a) + a \cdot \frac{1}{2} + (1-a) \frac{1}{4} = 0,$$

откуда

$$a = 9/7 = 1,285.$$

Точное решение известно: $x = \sin \tau / \sin 1$.

Приближенные решения для всех трех методов следующие:

$$x = 1,271\tau - 0,271\tau^2,$$

$$x = 1,270\tau - 0,270\tau^2,$$

$$x = 1,285\tau - 0,285\tau^2.$$

В точках $\tau=0,1$ приближенные решения совпадают с точными, при $\tau=0,5$ относительная ошибка меньше 0,3%.

2.8. *Метод фазовых интегралов (метод БВК)*. Методу БВК (Бриллюэна, Вентцеля и Крамерса) посвящена обширная литература; быть может наиболее полной обзорной работой является монография Дж. Хединга [П.37].

С точки зрения радиотехнических приложений методу БВК можно дать следующую трактовку. Пусть задано параметрическое уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f(t);$$

используя подстановку $x = uv$ (см. метод 4.1), можно освободиться от члена, содержащего первую производную, и привести уравнение к виду:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0^2 [1 + a(t)] u = F(t).$$

Задача состоит в нахождении общего решения однородного уравнения

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0^2 [1 + a(t)] u = 0,$$

так как общее решение неоднородного уравнения можно найти методом вариации постоянных (метод 2.4).

Вводя обозначение $\omega_0^2[1+a(t)]=v^2(t)$, однородное уравнение можно переписать в форме

$$\frac{d^2u}{dt^2} + v^2(t)u = 0.$$

Решение последнего уравнения аппроксимируют выражением:

$$u = \frac{1}{\sqrt{v(t)}} [A \cos \psi + B \sin \psi],$$

где фаза ψ представляется интегралом («фазовым интегралом») $\psi = \int v(t) dt$.

Если $a(t) \ll 1$, то $v = \omega_0$ и $\psi = \omega_0 t$.

Принятая аппроксимация тем точнее, чем сильнее неравенство

$$|v^2| \gg \left| \frac{3}{4} \left(\frac{1}{v} \frac{dv}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{d^2v}{dt^2} \frac{1}{v} \right|;$$

Метод БВК находит широкое применение в ряде задач теоретической и прикладной радиотехники; с ним можно ознакомиться по статье А. Пайпса [55]. В частности, Д. Д. Кловский методом БВК исследовал свержегенеративный приемник [35].

П.3. Методы аппроксимации и преобразования дифференциального оператора

К этой группе относятся методы, основу которых составляет переход от заданного уравнения к некоторому аппроксимирующему уравнению (или совокупности уравнений); решение последнего приближенно воспроизводит решение заданного уравнения.

Аппроксимация может адресоваться к самому дифференциальному оператору (как к некоторой функции) или только к коэффициентам при производных; возможна также временная замена переменных постоянными — так называемое «замораживание» переменных, т. е. на «время замены» исходное уравнение аппроксимируется некоторым другим уравнением.

К этой группе следует отнести не только методы, в которых основу составляет аппроксимация дифференциального оператора, но и методы, построенные на его преобразованиях. Вопросам преобразования линейных дифференциальных операторов посвящена обширная литература (например, Неймарк М. А. *Линейные дифференциальные операторы*, изд. второе. М., «Наука», 1969); из наиболее конструктивных преобразований нужно отметить метод разложения на множители [П.1, стр. 172 и др.]. О методах преобразования операторов упоминается также в разд. П.5 при рассмотрении преобразования обеих переменных. Здесь же будут рассмотрены только два частных преобразования (метод 3.6), позволяющие упростить заданные уравнения.

Перейдем к рассмотрению конкретных методов; общим для них является трудность (а иногда и невозможность) оценки ошибки, вызванной аппроксимацией исходного дифференциального уравнения.

3.1. *Метод упрощения дифференциального оператора.* Для приведения заданного дифференциального уравнения к виду, более удобному с точки зрения отыскания решения, дифференциальный оператор упрощают, например, отбрасывая «маловлиятельные» члены, заменяют нелинейные члены линейными и т. п.; другими словами, дифференциальный оператор, рассматриваемый как функция ряда переменных — t, x, \dot{x}, \dots , аппроксимируют другой функцией, полученной из первоначальной путем ее упрощения. Приведем простые примеры.

Пример 1. Заданное уравнение

$$\ddot{x} + \frac{1}{1 - q \sin \tau} x = \cos n \tau$$

можно заменить более простым:

$$\ddot{x} + (1 + q \sin \tau)x = \cos n\tau,$$

если $q \ll 1$.

Пример 2. Уравнение

$$\ddot{x} + x + x^2 + 0,2x^3 = 0$$

можно упростить, отбросив последний член, если известно, что значения x значительно меньше единицы; в этих условиях ошибка будет небольшой.

При таких упрощениях центральным является вопрос оценки ошибки, так как иногда ошибка может привести и к качественным изменениям. Некоторую пользу здесь могут принести неравенства [П.21, стр. 40] для дифференциальных уравнений первого порядка; приведем наиболее конструктивное из них.

Заменяем данное дифференциальное уравнение $\dot{x} + F(\tau, x) = 0$ с неизвестным решением $x = f(\tau)$, проходящим через точку (ξ, η) , некоторым упрощенным:

$\dot{x} + G(\tau, x) = 0$ с известным решением $x = g(\tau)$, проходящим через ту же точку (ξ, η) . Если известно, что $|F(\tau, x) - G(\tau, x)| \leq \delta$, то

$$|f(\tau) - g(\tau)| \leq \frac{\delta}{M} (e^{M|\tau - \xi|} - 1),$$

где M — константа, с которой функции F, G удовлетворяют условию Липшица.

Напомним, что условие Липшица выражает ограниченность относительного роста функции по переменной x и записывается в виде неравенства

$$|F(\tau, x_1) - F(\tau, x_2)| \leq M|x_1 - x_2|,$$

или

$$M \geq \frac{|F(\tau, x_1) - F(\tau, x_2)|}{|x_1 - x_2|};$$

константу M обычно определяют как верхнюю грань производной по x , т. е.

$$M = \sup \left| \frac{\partial F}{\partial x} \right| = \sup |F'_x|.$$

Пример 3. Задано дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{d\tau} + x^2 - \tau^2 = 0, \quad x(0) = 0, \quad |x| < 1, \quad |\tau| < 1.$$

точное решение $f(\tau)$ которого неизвестно; заменим это уравнение упрощенным

$$\frac{dx}{d\tau} - \tau^2 = 0, \quad x(0) = 0, \quad |x| < 1, \quad |\tau| < 1,$$

точное решение $g(\tau)$ которого известно: $g(\tau) = \tau^3/3$.

Оценим ошибку, вызванную этой заменой. Общая точка (ξ, η) , через которую проходят обе интегральные кривые: $f(\tau)$ и $g(\tau)$, имеет координаты $(0, 0)$. В данном случае:

$$|F(\tau, x) - G(\tau, x)| = |(x^2 - \tau^2) - (-\tau^2)| = x^2 = \delta(x), \quad \delta = 1;$$

$$M = \sup \left| \frac{\partial F}{\partial x} \right| = \sup |2x| \leq 2$$

и, следовательно,

$$\left| f(\tau) - \frac{1}{3} \tau^3 \right| \leq \frac{1}{2} (e^{2\tau} - 1).$$

Точное решение заданного уравнения можно представить в виде ряда

$$f(\tau) = \frac{\tau^3}{3} - \frac{\tau^7}{63} + \frac{2\tau^{11}}{2079} - \frac{\tau^{15}}{63 \cdot 15} + \dots$$

Легко убедиться в том, что приведенное неравенство удовлетворяется при всех $|\tau| < 0$, а также в том, что конструктивная польза от неравенства с таким большим «запасом» весьма невелика.

Наряду с неравенствами, аналогичными приведенному, существуют так называемые дифференциальные неравенства, в которых участвуют и производные, в том числе высоких порядков (см., например, [П.21, П.36]). На основе использования дифференциальных неравенств С. А. Чаплыгиным предложен метод интегрирования дифференциальных уравнений, носящий его имя [П.39, П.42].

К методу упрощения дифференциального оператора прямо относится «метод показателей Ляпунова» [П.14]. В качестве еще одного примера можно привести разработанный Я. С. Ицхоки [31] метод приближенного интегрирования линейных дифференциальных уравнений (с постоянными коэффициентами) высокого порядка путем замены их аналогичным уравнением, но более низкого порядка при одновременном использовании метода аппроксимации решения.

В книге К. Т. Леондеса [42, стр. 69—85] приведен довольно обширный материал по аппроксимации линейных (в том числе и с переменными коэффициентами) дифференциальных операторов и указаны способы оценки квадратичной ошибки.

3.2. Метод линеаризации дифференциальных уравнений по участкам. Этот метод также является «методом упрощения дифференциального оператора», но он имеет ряд особенностей, из-за которых его целесообразно выделить.

Сущность его состоит в том, что заданное нелинейное или параметрическое уравнение заменяется совокупностью линейных, решения которых согласовываются («стыкуются», «припасовываются», «сшиваются») на границах соседних участков. В прикладной литературе этот метод чаще всего называют методом «припасовывания»¹⁾. Между «методом линеаризации» и «методом замораживания» (см. метод 3.5) много общего, и иногда трудно провести между ними границу (см. ниже).

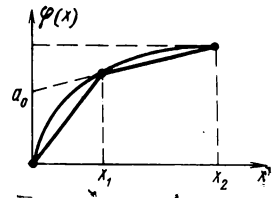


Рис. П3.1

Пример Решим уравнение

$$\frac{dx}{d\tau} + \varphi(x) = 0, \quad x(0) = A_0,$$

пользуясь методом припасовывания и аппроксимацией $\varphi(x)$ двумя прямыми (рис. П3.1):

$$\begin{aligned} \text{при } 0 < x < x_1 & \quad \varphi(x) = a_1 x; \\ \text{при } x_1 < x < x_2 & \quad \varphi(x) = a_0 + a_2 x. \end{aligned}$$

Соответствующие дифференциальные уравнения и их решения имеют вид (см. поз. 1 табл. П.14):

$$\frac{dx}{x\tau} + a_1 x = 0, \quad x = C_1 e^{-a_1 \tau}, \quad 0 < \tau < \tau_1;$$

$$\frac{dx}{d\tau} + a_2 x + a_0 = 0, \quad x = C_2 e^{-a_2(\tau - \tau_1)} - \frac{a_0}{a_2}, \quad \tau > \tau_1.$$

Определим постоянные C_1 и C_2 .

При $\tau = 0$ $x = A_0$; следовательно, $C_1 = A_0$.

¹⁾ Первой работой по методу припасовывания является статья Н. Д. Папалекси «О процессах в цепи переменного тока, содержащей электрический вентиль», опубликованная в 1912 г. [57]. Этому же вопросу посвящена недавно изданная монография [43].

При $\tau = \tau_1$ $x = A_0 e^{-a_1 \tau_1} = X_1$; отсюда $C_2 = X_1 + \frac{a_0}{a_2}$. Таким образом,

$$x = A_0 e^{-a_1 \tau} \quad \text{при } 0 < \tau < \tau_1;$$

$$x = A_0 e^{-a_2 \left[\tau - \left(1 - \frac{b_1}{a_2} \right) \tau_1 \right]} - \frac{a_0}{a_2} [1 - e^{-a_2 (\tau - \tau_1)}] \quad \text{при } \tau > \tau_1.$$

Момент τ_1 находится из уравнения $A_0 e^{-a_1 \tau_1} = X_1$, т. е.

$$\tau_1 = \frac{1}{a_1} \ln \frac{A_0}{X_1}.$$

Кривая, передающая полученное решение, изображена на рис. ПЗ.2.

Выше был рассмотрен пример решения нелинейного уравнения; аналогично могут быть решены и параметрические уравнения. Однако здесь возникают трудности, связанные с выбором значений постоянных коэффициентов аппроксимирующего уравнения вместо функций исходного. Иногда пользуются «усреднением коэффициентов» по участкам (см. метод 3.4). Можно разбить интервал решения на ряд подынтервалов и взять внутри каждого из них любое значение переменного коэффициента исходного уравнения; соответствующее доказательство, равно как и процедура решения, даны в работе С. М. Алферова [П.2].

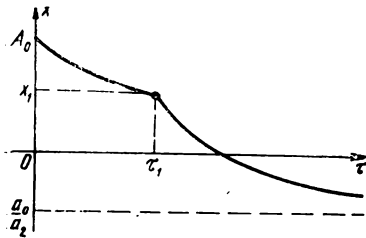


Рис. ПЗ.2

Следует еще раз подчеркнуть, что рассмотренный «метод линеаризации» по существу совпадает с рассматриваемым ниже «методом замораживания»; можно считать, что первый является частным случаем второго, но его значение настолько велико, что он заслуживает отдельного рассмотрения.

3.3. *Метод аппроксимации нелинейной части дифференциального оператора суммой экспонент.* Существо метода вытекает из его названия; метод имеет ряд достоинств как в вычислительном плане, так и в плане качественного изучения решения. С ним можно ознакомиться по книге Л. М. Гольденберга [20, стр. 737—739] и по работам Л. В. Данилова [23]. Метод рекомендуется применять в тех задачах, где дифференциальный оператор состоит из одного нелинейного члена и относительно большого числа линейных.

3.4. *Метод усреднения коэффициентов.* Этот приближенный метод широко освещен в литературе; условия усреднения могут быть различными как по виду, так и по интервалу усреднения.

Следует выделить случай, когда переменные коэффициенты представляют собой периодическую функцию или «гармоническую функцию с медленно меняющейся амплитудой»; в этом случае усреднение проводится за текущий период колебаний коэффициента. И здесь виды усреднения могут быть различными.

Чаще всего применяется усреднение по площади. Для параметрического уравнения

$$\ddot{x} + a_1(\tau) \dot{x} + a_0(\tau) x = f(\tau), \quad a \leq \tau \leq b,$$

при условии, что коэффициенты изменяются медленно, усреднение проводится по формулам:

$$\bar{a}_1 = \frac{1}{b-a} \int_a^b a_1(\tau) d\tau, \quad \bar{a}_0 = \frac{1}{b-a} \int_a^b a_0(\tau) d\tau.$$

Для нелинейных уравнений вида

$$\ddot{x} + a_1(x)\dot{x} + a_0(x)x = f(\tau)$$

операция усреднения связывается с формой предполагаемого решения. Если, например, решение ищется в виде

$$x = A \cos \tau + B \sin \tau = C \cos(\tau - \varphi),$$

усреднение выполняется за период:

$$\bar{a}_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_1(A \cos \tau + B \sin \tau) d\tau = \bar{a}_1(A, B) = \bar{a}_1(C, \varphi),$$

$$\bar{a}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_0(A \cos \tau + B \sin \tau) d\tau = \bar{a}_0(A, B) = \bar{a}_0(C, \varphi);$$

усредненные коэффициенты \bar{a}_1 и \bar{a}_0 являются функциями амплитуды и фазы (но не мгновенного значения, как до усреднения). Такое усреднение лежит в основе ряда методов: квазилинейного метода Ю. Б. Кобзарева, а также других методов, но в сочетании с использованием иных условий, например медленности изменения амплитуды и т. д.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Дано дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + \frac{1}{1 + 0,1\tau} x = 0, \quad 0 \leq \tau \leq 2, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0;$$

его нужно заменить более простым путем усреднения коэффициента.

Имеем:

$$\frac{1}{2-0} \int_0^2 \frac{1}{1+0,1\tau} d\tau = \frac{1}{2} \frac{\ln(1+0,1\tau)}{0,1} \Big|_0^2 = \frac{\ln 1,2}{0,2} = 0,911,$$

т. е.

$$\ddot{x} + 0,911x = 0, \quad 0 \leq \tau \leq 2, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Решение последнего уравнения не встречает затруднений:

$$x = \cos 0,954\tau.$$

Пример 2. Дано дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} - \mu(1-x^2)\dot{x} + x = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = B_0$$

и известно, что $x = A(\tau) \sin \tau = A \sin \tau$, причем $\dot{A} \ll A$, $\ddot{A} \ll \dot{A}$. Нужно заменить заданное дифференциальное уравнение более простым путем усреднения коэффициента.

В соответствии с изложенным имеем

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= \overline{(1-x^2)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_1(A, \tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - A^2 \sin^2 \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\tau - \frac{A^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\tau \right) d\tau = 1 - \frac{A^2}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, исходное дифференциальное уравнение, переписывается в виде

$$\ddot{x} - \mu \left(1 - \frac{A^2}{2}\right) \dot{x} + x = 0.$$

Подставляя теперь предполагаемое решение и его производные

$$x = A \sin \tau, \quad \dot{x} = \dot{A} \sin \tau + A \cos \tau,$$

$$\ddot{x} = \ddot{A} \sin \tau + 2\dot{A} \cos \tau + A \sin \tau$$

в дифференциальное уравнение

$$\ddot{A} \sin \tau + 2\dot{A} \cos \tau - A \sin \tau + \left(1 - \frac{A^2}{2}\right) (\dot{A} \sin \tau + A \cos \tau) + A \sin \tau = 0$$

и принимая во внимание приведенные выше условия медленности изменения амплитуды A , получаем новое дифференциальное уравнение

$$\dot{A} - \frac{\mu}{2} \left(1 - \frac{A^2}{2}\right) A = 0, \quad A(0) = A_0,$$

решение которого относительно $A(\tau)$ уже не представляет труда.

Здесь следует обратить внимание на то, что прямая подстановка принятого решения, т. е. без усреднения коэффициентов, приводит к уравнению:

$$\ddot{x} - \mu \left(1 - \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} \cos 2\tau\right) \dot{x} + x = 0,$$

$$\ddot{A} \sin \tau + 2\dot{A} \cos \tau - \mu \left(1 - \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} \cos 2\tau\right) (\dot{A} \sin \tau + A \cos \tau) = 0,$$

которое после учета медленности изменения амплитуды принимает вид

$$\dot{A} - \mu \frac{1}{2} \left(1 - \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} \cos 2\tau\right) A = 0.$$

Последнее уравнение является нелинейно-параметрическим, и его уже нельзя решить простыми средствами.

Приведенный пример, по существу, иллюстрирует применение метода медленно меняющихся амплитуд (метода Ван дер Поля) и метода усреднения Крылова—Боголюбова, о которых идет речь в разд. 9.

3.5. Методы «замораживания переменных». Сущность этих методов состоит в том, что в заданном дифференциальном уравнении выделяется одна переменная (или комбинация переменных) и ее значение фиксируется; при фиксированном значении ищется решение уравнения, затем фиксируется новое значение и опять ищется решение и т. д. Совокупность найденных решений с учетом начальных условий позволяет построить искомое решение. В качестве фиксируемых («замораживаемых») могут выступать зависимая переменная и ее производные, независимая переменная, коэффициенты уравнения, а также различные комбинации переменных.

Следует подчеркнуть, что методы этой группы являются численными, а численные методы проще всего адресовать к уравнениям первого порядка. Поэтому, если речь идет об уравнениях второго порядка, методы замораживания переменных применяются как косвенные; другими словами, при решении уравнений второго порядка ищут фазовое изображение $y(x)$ (которое является решением уравнения первого порядка), а от фазового изображения далее переходят к искомой функции $x(\tau)$.

Нужно также добавить, что далеко не всегда удается «заморозить» переменные непосредственно в заданном уравнении; в таких случаях предварительно преобразуют входящие в уравнения функциональные зависимости. Так как преобразования подбирают в соответствии с требованиями последующего «заморажи-

вания» переменных, целесообразно подобные методы включить в эту группу, а не в ту группу, где преобразование совершается с целью приведения заданного уравнения к более простому виду (группы 4 и 5). Если «замораживание» осуществляется с целью приведения заданного уравнения к линейному, то соответствующую процедуру следует отнести к «методу линеаризации» (метод 3.2).

Рассмотрим наиболее употребительные методы замораживания переменных.

3.5а. *Метод изоклин (метод замораживания первой производной).* Этот широко известный метод основан на замораживании первой производной зависимой переменной. По отношению к дифференциальным уравнениям первого порядка вида

$$\frac{dx}{d\tau} = F(\tau, x), \quad x(0) = X_0,$$

рецептура пользования методом очень проста: полагая $dx/d\tau = k$, получаем конечное уравнение кривой, называемой изоклиной $F(\tau, x) = k$ и представляющей собой геометрическое место точек, через которые интегральная кривая проходит под углом, тангенс которого численно равен k . Построив несколько изоклин с разными значениями k и нанеся на них «засечки» (поле направлений) под соответствующим углом, нетрудно (при учете начального условия) получить график интегральной кривой.

Пример 1. Найти интегральную кривую дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{d\tau} - x = \tau, \quad x(0) = 0.$$

Полагая $dx/d\tau = k$, получаем уравнение изоклины $x = k - \tau$, $k = \operatorname{tg} \varphi$; построим несколько изоклин (рис. П3.3):

$$k = 0, \quad \varphi = 0, \quad x = -\tau;$$

$$k = \frac{1}{2}, \quad \varphi = 27^\circ, \quad x = \frac{1}{2} - \tau;$$

$$k = 1, \quad \varphi = 45^\circ, \quad x = 1 - \tau;$$

$$k = 2, \quad \varphi = 64^\circ, \quad x = 2 - \tau;$$

$$k = -\frac{1}{2}, \quad \varphi = 154^\circ, \quad x = -\frac{1}{2} - \tau;$$

$$k = -1, \quad \varphi = 135^\circ, \quad x = -1 - \tau;$$

$$k = -2, \quad \varphi = 117^\circ, \quad x = -2 - \tau.$$

На каждую изоклину наносим засечки под соответствующим углом. Отмечаем точку, определяемую начальными условиями, в данном случае $(0, 0)$. Из этой точки проводим два луча: под «своим» углом и под углом соседней изоклины. Биссектриса угла, образованного этими двумя лучами, на участке между двумя изоклинами считается частью (участком) искомой интегральной кривой. Найденные таким образом отдельные участки соединяются далее плавной кривой.

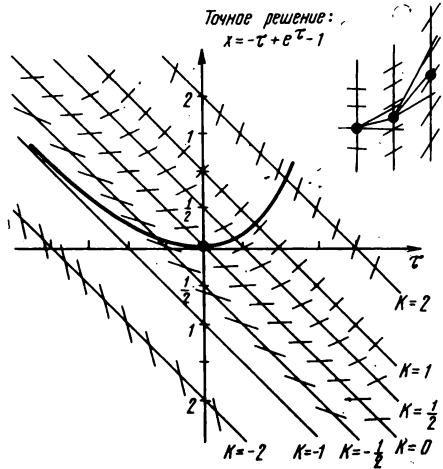


Рис. П3.3

По отношению к «автономным» дифференциальным уравнениям второго порядка вида:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + a_1(x) \frac{dx}{d\tau} + a_0(x)x = 0,$$

т. е. когда аргумент τ в явном виде не входит в дифференциальное уравнение, рецептура применения метода изоклин состоит в следующем.

Применяя подстановку

$$dx/d\tau = y, \quad d^2x/d\tau^2 = dy/d\tau = (dy/dx)(dx/d\tau) = y \, dy/dx,$$

перепишем заданное уравнение в виде:

$$y \frac{dy}{dx} + a_1(x)y + a_0(x)x = 0,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = -a_1(x) - \frac{a_0(x)x}{y}.$$

Полагая $dy/dx = k$ и решая последнее уравнение относительно y , получаем выражение изоклины:

$$y = \frac{a_0(x)x}{-k - a_1(x)}.$$

Удобно ввести «главные изоклины», через которые интегральная кривая $y(x)$ проходит под углами:

- изоклина y_A — $\varphi = 0^\circ$, $k = 0$;
- изоклина y_B — $\varphi = 90^\circ$, $k = \infty$;
- изоклина y_C — $\varphi = 45^\circ$, $k = 1$;
- изоклина y_D — $\varphi = -45^\circ$, $k = -1$.

Соответствующие уравнения главных изоклин имеют вид:

$$y_A = -\frac{a_0(x)}{a_1(x)}x, \quad y_C = \frac{a_0(x)}{1 - a_1(x)}x,$$

$$y_B = 0, \quad y_D = \frac{a_0(x)}{1 - a_1(x)}x.$$

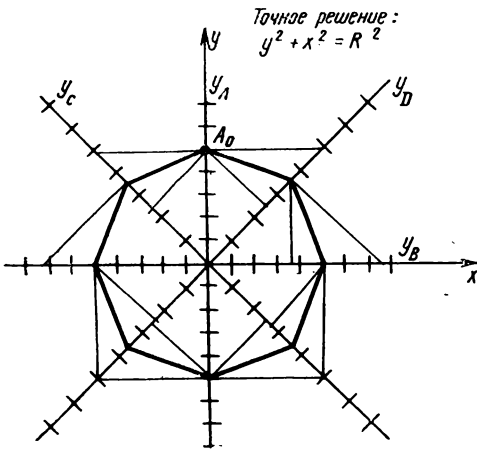


Рис. П3.4

В тех точках, где dy/dx представляет собой неопределенность вида $0/0$, интегральная кривая может проходить под любым углом; эти точки называются «особыми» и рассматриваются отдельно (см. разд. П.9).

Интегральная кривая $y(x)$, конечно, не есть решение заданного дифференциального уравнения; эта кривая является фазовым изображением искомого решения. Однако от фазового изображения $y(x)$ всегда можно перейти к искомому оригиналу $x(\tau)$ (см. П.12).

Пример 2. Дано уравнение:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = 0, \quad x(0) = 0,$$

$$\dot{x}(0) = A_0;$$

построить кривую $y(x)$.

В данном случае $a_1(x) \equiv 0$, $a_0(x) = 1$. Уравнения главных изоклин в соответствии с приведенными выше формулами, имеют вид:

$$\begin{aligned} y_A \rightarrow x = 0, & \quad y_C = -x, \\ y_B = 0, & \quad y_D = x. \end{aligned}$$

Нанося засечки, легко построить зависимость $y(x)$, которая представляет собой окружность (рис. ПЗ.4).

В данном случае можно найти и точное решение:

$$y \frac{dx}{dx} + x = 0, \quad ydy = -xdx, \quad y^2 + x^2 = R^2.$$

3.5б. *Дельта-метод (метод замораживания нелинейной части дифференциального оператора)*. Этот метод адресуется к дифференциальным уравнениям второго порядка. Он является косвенным, поскольку результатом здесь является кривая $y(x)$, от которой нужно перейти к кривой $x(\tau)$.

Заданное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \varphi(x, \dot{x}) = 0$$

всегда можно переписать в виде

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x + f(x, \dot{x}) - x = 0$$

и затем, используя уже знакомое обозначение $y = dx/d\tau$, в следующей форме:

$$y \frac{dy}{dx} + x = -[f(x, \dot{x}) - x] = -\delta(x, \dot{x}).$$

Будем фиксировать значения $\delta(x, \dot{x})$ и обозначим их δ ; тогда

$$y \frac{dy}{dx} + (x + \delta) = 0$$

и

$$y^2 + (x + \delta)^2 = \text{const} = R^2.$$

Последнее выражение соответствует окружности в координатах (x, y) с центром в точке $x = -\delta$, $y = 0$ и с радиусом, равным R . Таким образом, для достаточно малого приращения интегральная кривая есть дуга окружности.

Построение выполняется в следующем порядке. По известным начальным условиям $x(0)$, $\dot{x}(0)$ находят значение δ_0 , которое определяет центр дуги окружности; этот центр расположен на оси абсцисс (рис. ПЗ.5). Из точки $(-\delta_0, 0)$ радиусом R_0 проводят небольшую дугу окружности, в конце которой находится точка $x(1)$, $\dot{x}(1)$. По координатам этой точки определяют новое значение δ_1 , и из точки $(-\delta_1, 0)$ радиусом R_1 проводят новую дугу окружности и т. д. При вычислении значения δ , соответствующего некоторому интервалу, для большей точности следует обращаться к средним значениям \bar{x} и $\bar{\dot{x}} = \bar{y}$ на данном интервале. Соединяя плавной кривой отрезки отдельных дуг, получают приближенную интегральную кривую.

Метод можно рационализировать для частных случаев $\delta(x)$ или $\delta(\dot{x})$. Важно отметить, что изложенное выше справедливо не только для $\delta(x, \dot{x})$, но и для $\delta(\tau, x, \dot{x})$, т. е. для уравнений, в которые время τ входит в явном виде.

3.5в. *Методы Лъенара и Пелла (метод замораживания зависимой и независимой переменных)*. Метод Лъенара [44] адресуется к дифференциальным

уравнениям вида $\ddot{x} - \varphi(x) + x = 0$, которые с помощью подстановки $y = dx/dt$ легко приводятся к следующей форме:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{x - \varphi(y)}{y}.$$

Если в последнем уравнении «заморозить» переменные x, y , получим значение dy/dx в «замороженной» точке; через эту точку интегральная кривая $y(x)$ проходит под углом, тангенс которого равен dy/dx .

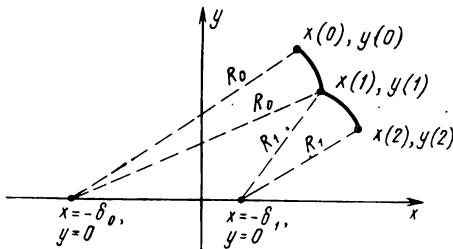


Рис. П3.5

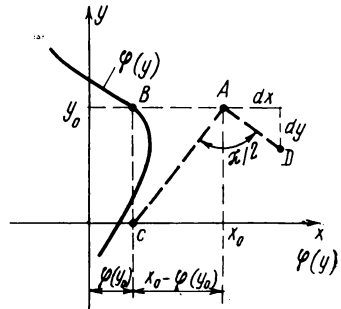


Рис. П3.6

Кривая $y(x)$ по методу Льенара легко находится при помощи графических построений. Нанесем систему координат (y, x) (рис. П3.6) и на ней построим график $\varphi(y)$, причем $\varphi(y)$ откладывается вдоль оси x в том же масштабе x . Отметим точку A , соответствующую начальным условиям (x_0, y_0) .

Легко убедиться в том, что отношение катетов AB к BC соответствует (с учетом знака) правой части дифференциального уравнения и, следовательно, перпендикуляр к линии AC будет представлять собой часть интегральной кривой, так как $-dy/dx = AB/BC$ (здесь нужно учесть, что на рисунке $dy < 0$). Повторив такое же построение относительно точки D , получим следующий отрезок интегральной кривой и т. д.

Некоторое обобщение метода Льенара дано Пеллом [58], который по аналогической методике рассмотрел уравнение $\ddot{x} - \varphi(x) + a(x) = 0$; методика Пелла (вместе с примером) подробно изложена в книге Н. В. Бутенина [16].

3.5г. Методы Каэна и Дробова (метод предварительного преобразования функциональных зависимостей и замораживания обеих переменных). Метод Каэна [34] адресуется к дифференциальным уравнениям двух видов:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + a(x) \frac{dx}{d\tau} + \varphi(x) = 0,$$

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + b(x) \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + a(x) \frac{dx}{d\tau} + \varphi(x) = 0.$$

К каждому из этих уравнений применяется свое преобразование входящих в них функциональных зависимостей и в полученных новых уравнениях совершается операция замораживания обеих переменных.

По отношению к первому уравнению вводится функциональное преобразование $g(x) = \int a(x) dx$, которое вместе с подстановкой $y = dx/d\tau + g(x)$ позволяет упростить исходное уравнение. Дифференцируя последнее выражение по τ и принимая во внимание, что

$$g(x) = \int a(x) dx = \int a(x) \frac{dx}{d\tau} d\tau,$$

получаем

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{d^2x}{d\tau^2} + a(x) \frac{dx}{d\tau},$$

откуда

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{dy}{d\tau} - a(x) \frac{dx}{d\tau}.$$

Подстановка последнего равенства в исходное уравнение позволяет освободиться от среднего члена, и новое уравнение будет иметь вид

$$\frac{dy}{d\tau} + \varphi(x) = 0$$

или

$$\frac{dy}{dx} [y - g(x)] + \varphi(x) = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(x)}{g(x) - y}.$$

По последнему уравнению любым из рассмотренных выше методов можно найти зависимость $y(x)$; после нахождения $y(x)$ предстоит определить $dx/d\tau$ из равенства, вытекающего из принятых функционального преобразования и подстановки $dx/d\tau = y(x) - \int a(x) dx$, и затем найти $x(\tau)$.

Подробнее с этим методом можно ознакомиться в статье Ж. Казна [34], а также в работе Г. С. Рамма [62].

Для второго уравнения вводится следующее преобразование: $dx/d\tau = z e^{-\int b(x) dx}$, в котором переменная z является «временной» функцией; от нее удается освободиться. Найдем

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{\tau^2} &= \frac{dz}{d\tau} e^{-\int b(x) dx} - z e^{-\int b(x) dx} b(x) \frac{dx}{d\tau} = \left[\frac{dz}{d\tau} - b(x) z \right] e^{-\int b(x) dx} \frac{dx}{d\tau} = \\ &= \left[\frac{dz}{dx} - z b(x) \right] z e^{-2 \int b(x) dx}. \end{aligned}$$

Подставим последнее выражение в исходное дифференциальное уравнение и выполним элементарные преобразования:

$$\begin{aligned} \left[\frac{dz}{dx} - z b(x) \right] z e^{-2 \int b(x) dx} + b(x) z^2 e^{-2 \int b(x) dx} + a(x) z e^{-\int b(x) dx} + \varphi(x) = \\ = \frac{dz}{dx} + a(x) e^{\int b(x) dx} + \frac{1}{z} \varphi(x) e^{2 \int b(x) dx} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Введем обозначение $g(x) = \int a(x) e^{\int b(x) dx} dx$ и новую переменную $y = z + g(x)$.

(2)

Дифференцируя последнее выражение по x :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} + a(x) e^{\int b(x) dx},$$

определяем dz/dx :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} - a(x) e^{\int b(x) dx}$$

и подставляя в (1), получаем

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{z} \varphi(x) e^{2 \int b(x) dx} = 0.$$

Так как согласно (2) $z = y - g(x)$, то окончательно

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(x) e^{2 \int b(x) dx}}{g(x) - y}.$$

Последнее уравнение решается так же, как и уравнения, рассмотренные выше.

Функциональные преобразования с последующим замораживанием обеих переменных С. А. Дробов применил по отношению к уравнению вида:

$$\ddot{x} + ax + x + \frac{d}{dt} [\Phi(x)] + \Psi(x) = A,$$

которые можно записать и так:

$$\frac{d}{d\tau} [\dot{x} + ax + \Phi(x)] + x + \Psi(x) = A.$$

Вводя подстановку $y = \dot{x} + ax + \Phi(x)$, $dy/d\tau = \dot{x} dy/dx$, получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A - x - \Psi(x)}{y - ax - \Phi(x)}.$$

Последнее уравнение можно решить любым из приведенных выше методов.

Подробное изложение методики С. А. Дробова вместе с примером можно найти в книге Н. В. Бутенина [16].

3.6. *Методы преобразования дифференциального оператора.* Здесь будут рассмотрены два частных преобразования дифференциального оператора, применимых в случаях, когда дифференциальный оператор (или его коэффициенты) отвечает определенным условиям.

3.6а. Метод интегрирования дифференциальных уравнений, левая часть которых является точной производной некоторой более простой функции. Если левая часть уравнения $F(\tau, x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}) = f(\tau)$ является точной производной некоторой функции $\Phi(\tau, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})$, то порядок данного уравнения можно снизить на единицу; иногда такое преобразование дифференциального оператора позволяет получить решение в конечном виде.

Пример. В уравнении $x\ddot{x} + (\dot{x})^2 = 0$ левая часть является точной производной функции $x\dot{x}$; следовательно,

$$\frac{d}{d\tau} (x\dot{x}) = 0, \quad x\dot{x} = C_1,$$

$$x dx = C_1 d\tau, \quad \frac{x^2}{2} = C_1 \tau + C_2.$$

3.6б. Метод интегрирования дифференциального уравнения второго порядка $a(\tau)\ddot{x} + b(\tau)\dot{x} + c(\tau)x = 0$ при условии, что $c(\tau) = \dot{b}(\tau) - \ddot{a}(\tau)$. При указанном условии исходное уравнение преобразуется в уравнение первого порядка

$$a(\tau)\dot{x} + [b(\tau) - \dot{a}(\tau)]x = k,$$

что легко проверить дифференцированием. Интегрирование последнего уравнения не встречает затруднений.

П.4. Методы перехода к более простым дифференциальным уравнениям на основе преобразования искомой переменной

К этой группе относятся методы, основанные на преобразовании искомой (зависимой) переменной и ее производных в целях перехода от заданного уравнения к более простому. По признакам, характеризующим объект преобразования, методы этой группы можно делить на методы, связанные с преобразованием: а) искомой переменной, б) производной искомой переменной, в) функций от искомой переменной. Рассмотрим наиболее употребительные из них.

4.1. Методы, основанные на преобразовании искомой переменной. Здесь можно различать три преобразования: искомая переменная представляется в виде произведения двух новых переменных, в виде произведения новой переменной на независимую переменную или степень независимой переменной и в виде функционального преобразования новой переменной. Рассмотрим методы, соответствующие этим преобразованиям.

4.1а. Метод, основанный на представлении искомой переменной в виде произведения двух новых функций. Введением подстановки $x=uv$ в заданное дифференциальное уравнение и наложением рационального условия на одну из двух новых функций можно существенно упростить исходное уравнение. Так, от дифференциальных уравнений первого порядка с неразделяющимися переменными нетрудно перейти к уравнениям, допускающим непосредственное интегрирование, или к уравнениям с разделяющимися переменными, в дифференциальных уравнениях второго порядка это позволяет освободиться от первой производной, от параметрического уравнения можно иногда перейти к линейному.

Пример 1. Параметрическое уравнение первого порядка с неразделяющимися переменными:

$$\dot{x} + a(\tau)x = f(\tau); \quad \dot{x} + ax = f$$

приведем к уравнению, допускающему непосредственное интегрирование. Введем подстановку: $x=uv$, $x=uv+\dot{u}v$; тогда $uv+\dot{u}v+auv=f$, $vu+\dot{u}(v+av)=f$.

Сформулируем рациональное условие, согласно которому функция v должна являться решением дифференциального уравнения $\dot{v}+av=0$, т. е. $v=e^{-\int a d\tau}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f e^{\int a d\tau}, \quad u = \int f e^{\int a d\tau} d\tau + C, \\ x &= e^{-\int a d\tau} \left[\int f e^{\int a d\tau} d\tau + C \right]. \end{aligned}$$

Пример 2. Однородное нелинейно-параметрическое уравнение первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{x} + a(\tau)x + b(\tau)x^2 &= 0, \\ \dot{x} + ax + bx^2 &= 0 \end{aligned}$$

приведем к уравнению с разделяющимися переменными. Полагая $x=uv$ и поступая аналогично предыдущему, находим:

$$\begin{aligned} \dot{u} + b e^{-\int a d\tau} u^2 &= 0, \quad \frac{du}{u^2} = -b e^{-\int a d\tau} d\tau, \\ \frac{u^3}{3} &= -b \int e^{-\int a d\tau} d\tau + C, \quad x = e^{-\int a d\tau} u. \end{aligned}$$

Пример 3. В параметрическом дифференциальном уравнении второго порядка

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2a(\tau)\dot{x} + b(\tau)x &= f(\tau), \\ \ddot{x} + 2ax + bx &= f \end{aligned}$$

освободимся от члена, содержащего первую производную. Положим:

$$\begin{aligned}x &= uv, \quad \dot{x} = u\dot{v} + \dot{u}v, \\ \ddot{x} &= u\ddot{v} + 2\dot{u}\dot{v} + \ddot{u}v;\end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned}u\ddot{v} + 2\dot{u}\dot{v} + \ddot{u}v + 2au\dot{v} + 2a\dot{u}v + buv &= f, \\ v\ddot{u} + (2\dot{v} + 2a\dot{v})\dot{u} + (\ddot{v} + 2a\dot{v} + bv)u &= f.\end{aligned}$$

(Сформулируем рациональное условие:

$$\begin{aligned}\dot{v} + av &= 0, \quad v = e^{-\int a d\tau}, \\ \dot{v} &= -a - e^{-\int a d\tau}, \quad \ddot{v} = a^2 e^{-\int a d\tau} - \dot{a} e^{-\int a d\tau}.\end{aligned}$$

Вводя v , \dot{v} и \ddot{v} в последнее уравнение, придем к параметрическому дифференциальному уравнению второго порядка, не содержащему члена с первой производной:

$$\ddot{u} + (b - a^2 - \dot{a})u = f e^{\int a d\tau}, \quad x = e^{-\int a d\tau} u.$$

Если $(b - a^2 - \dot{a}) = c$, то исходное параметрическое уравнение переходит в линейное¹⁾. Например, уравнение Бесселя

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \left(1 - \frac{n^2}{\tau^2}\right)x = 0$$

при $n = \pm \frac{1}{2}$, т. е.

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \left(1 - \frac{1}{4\tau^2}\right)x = 0,$$

легко приводится к уравнению с постоянными коэффициентами. В самом деле, в данном случае:

$$a = 1/2\tau, \quad b = 1 - (1/4\tau^2), \quad \dot{a} = -1/2\tau^2$$

и

$$b - a^2 - \dot{a} = 1,$$

т. е. вместо исходного уравнения можно записать новое: $\ddot{u} + u = 0$ и найти исконую переменную x по формуле:

$$\begin{aligned}x &= e^{-\int a d\tau} u = e^{-\int \frac{1}{2\tau} d\tau} u, \\ x &= \frac{u}{\sqrt{\tau}} = \frac{A \cos \tau + B \sin \tau}{\sqrt{\tau}}.\end{aligned}$$

Пример 4. В нелинейно-параметрическом уравнении второго порядка

$$\ddot{x} + 2ax + bx + cx^3 = f$$

освободимся от первой производной. Полагая $x = uv$ и действуя аналогично предыдущему, получаем:

$$\begin{aligned}\ddot{u} + (b - a^2 - \dot{a})u + ce^{-2\int a d\tau} u^3 &= fe^{\int a d\tau}, \\ x &= e^{-\int a d\tau} u.\end{aligned}$$

¹⁾ Параметрические уравнения, допускающие путем преобразований переменных приведение к линейным, называются приводимыми.

Метод представления искомой переменной в виде произведения двух новых функций распространяется и на систему параметрических уравнений первого порядка

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \sum_{n=1}^N a_{in}(\tau) x_n, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Путем введения новых переменных $x_i = \sum_{n=1}^N u_{in}(\tau) v_n$ можно перейти к новой системе

$$\frac{dv_i}{d\tau} = \sum_{n=1}^N q_{in}(\tau) v_n.$$

которая является эквивалентной исходной. Методы перехода разработаны А. М. Ляпуновым; говоря об эквивалентности двух систем, иногда добавляют «эквивалентность в смысле Ляпунова».

В частности, системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами можно привести к системам с постоянными коэффициентами; такие системы называются приводимыми. Основы теории приведения к эквивалентным системам изложены в книге Ф. Р. Гантмахера [П.16, гл. XV]. К системам с постоянными коэффициентами могут быть приведены не только системы с периодическими коэффициентами; возможности такого приведения устанавливаются рядом теорем, данным Н. П. Еругиным [П.19, П.20], а также [П.29, стр. 630 и др.].

Другое развитие метод представления искомой переменной в виде произведения двух новых функций получил в работе И. И. Беленького [П.6], где приведены условия возможности решения задачи перехода от линейного дифференциального уравнения с переменными полиномиальными коэффициентами

$$\sum_{n=1}^N (a_{kn} \tau^k + a_{(k-1)n} \tau^{k-1} + \dots + a_{0n}) x^{(n)} = 0, \quad a_{kn} \neq 0,$$

к уравнению того же порядка, но с постоянными коэффициентами

$$\sum_{n=1}^N A_n x^{(n)} = 0, \quad A_n \neq 0,$$

при помощи подстановки $x = uv$, где функция $u(\tau)$ выбирается в виде $u(\tau) = 1/(a_{kN} \tau^k + a_{(k-1)N} \tau^{k-1} + \dots + a_{0N})$.

Возможность приведения параметрического уравнения второго порядка

$$(a_2 \tau + b_2) \ddot{x} + (a_1 \tau + b_1) \dot{x} + (a_0 \tau + b_0) x = 0, \\ a_2 \neq 0, \quad k=1, \quad N=2$$

к линейному определяется существованием равенств:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = -2a_2^2, \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix} = -a_1 a_2;$$

при выполнении этих условий решение заданного уравнения имеет вид:

$$x = \frac{1}{a_2 \tau + b_2} v,$$

где v — общее решение линейного уравнения

$$a_2 \ddot{v} + a_1 \dot{v} + a_0 v = 0.$$

Пример 5. В уравнении $\tau \ddot{x} + (b - \tau) \dot{x} - ax = 0$

$$a_2 = 1, \quad b_2 = 0, \quad a_1 = -1, \quad b_1 = b, \quad a_0 = 0, \quad b_0 = -a;$$

приведенные выше условия:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix} = -b; \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{vmatrix} = -a$$

удовлетворяются при $b=2$ и $a=1$. При таких значениях коэффициентов b и a решение исходного уравнения имеет вид

$$x = \frac{1}{\tau} v,$$

где v — общее решение линейного уравнения:

$$\dot{v} - v = 0, \quad v = C_1 + C_2 e^\tau.$$

Таким образом, $x = \frac{1}{\tau} (C_1 + C_2 e^\tau)$.

В работах Л. М. Берковича [П.8, П.9, П.10] дается другой метод перехода от параметрических уравнений к линейным, названный им методом факторизации. Согласно этому методу искомая переменная x также представляется в виде произведения двух новых переменных, но одновременно с ней преобразуется и независимая переменная τ ; по этой причине метод факторизации отнесен к пятой группе.

4.16. *Метод, основанный на представлении искомой переменной в виде произведения новой переменной либо на независимую переменную, либо на ее степень.* Этот метод является частным случаем метода представления искомой переменной x через произведение двух новых переменных u и v ; здесь принимается, что $v = \tau$, т. е. $x = u\tau$.

Такая подстановка целесообразна по отношению к нелинейно-параметрическим уравнениям первого порядка вида:

$$\frac{dx}{d\tau} + f\left(\frac{x}{\tau}\right) = 0;$$

подставляя в это уравнение $x = u\tau$, $\dot{x} = \dot{u} + u\dot{\tau}$, приходим к уравнению с разделяющимися переменными:

$$u + \tau \frac{du}{d\tau} + f(u) = 0,$$

$$\frac{du}{f(u) + u} = -\frac{d\tau}{\tau}, \quad x = u\tau.$$

Пример 6. Проинтегрируем уравнение:

$$\dot{x} - \frac{x}{\tau} - \frac{x^2}{\tau^2} - 1 = 0, \quad \tau > 0, \quad x(1) = 0,$$

Полагая $x/\tau = u$ и имея в виду, что в данном случае $f(u) = -u - u^2 - 1$, получаем:

$$\frac{du}{u^2 + 1} = \frac{d\tau}{\tau}, \quad \text{arc tg } u = \ln \tau + C,$$

$$\text{arc tg } \frac{x}{\tau} = \ln \tau + C.$$

При заданных начальных условиях $C=0$. Решая уравнение относительно x , находим:

$$x = \tau \operatorname{tg}(\ln \tau).$$

Изложенным выше рекомендациям можно дать другую более общую трактовку. Если в дифференциальном уравнении вида

$$M(\tau, x)d\tau + N(\tau, x)dx = 0,$$

т. е.

$$\frac{dx}{d\tau} = -\frac{M(\tau, x)}{N(\tau, x)},$$

функции $M(\tau, x)$ и $N(\tau, x)$ являются однородными одинаковой степени функциями своих аргументов, то в данном дифференциальном уравнении переменные разделяются при помощи подстановки $x = u\tau$.

Напомним, что однородной степени n функцией нескольких переменных $f(x, y, z, \dots)$ называется функция, удовлетворяющая равенству

$$f(kx, ky, kz, \dots) = k^n f(x, y, z, \dots).$$

Например,

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + y^2 + x \sqrt{x - \frac{x^3}{y}}$$

является однородной функцией степени $n=2$, а

$$f(x, y, z) = \frac{x+z}{2x+3y}$$

— однородной функцией степени $n=0$.

Однородную степени n функцию $z = f(\tau, x)$ можно записывать в виде $z = \tau^n f(x/\tau)$ или $z = x^n f(\tau/x)$; отсюда непосредственно и вытекает возможность разделения переменных при помощи подстановки: $x = u\tau$.

Пример 7. Дано уравнение

$$\frac{dx}{d\tau} + \frac{x^2}{\tau(\tau-x)} = 0,$$

$$x^2 d\tau + \tau(\tau-x) dx = 0,$$

в котором $M = x^2$, $N = \tau(\tau-x)$ — однородные функции степени $n=2$.

Подставляя в это уравнение $x = u\tau$, $dx = u d\tau + \tau du$, получаем:

$$u^2 \tau^2 d\tau + \tau(\tau - u\tau)(u d\tau + \tau du) = 0,$$

$$u^2 d\tau + (1-u)u d\tau + (1-u)\tau du = 0,$$

$$ud\tau + (1-u)\tau du = 0,$$

$$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{u-1}{u} du;$$

последнее уравнение легко интегрируется.

Перепишав заданное уравнение в виде

$$\frac{dx}{d\tau} = -\frac{x^2}{\tau(\tau-x)} = -\frac{\left(\frac{x}{\tau}\right)^2}{1-\frac{x}{\tau}},$$

можно сразу воспользоваться приведенной выше рекомендацией.

Нетрудно заметить, что каждый член функций $M(x, \tau)$, $N(x, \tau)$, входящих в однородное уравнение, имеет одну и ту же «размерность»¹⁾, например:

$$\begin{array}{cccc} x^2 & & x\tau & \\ \cdot & & \cdot & \\ x^3 & \cdot & x^2\tau & \cdot \\ & \cdot & x\tau^2 & \cdot \\ & & & \tau^3 \end{array}$$

и т. д.

Если соответствие размерностей нарушается, уравнение не является однородным по указанному выше определению. Тем не менее, в некоторых дифференциальных уравнениях вида $M(\tau, x)d\tau + N(\tau, x)dx = 0$, не являющихся однородными, все же удается разделить переменные, но с использованием подстановки:

$$x = u\tau^q, \quad (*)$$

где число q устанавливается при помощи понятия «обобщенного однородного уравнения».

Число q служит целям «согласования размерностей» τ и x , которые могут входить в функции $M(\tau, x)$, $N(\tau, x)$ так, что разные члены будут иметь разные размерности. Согласование размерностей при помощи равенства (*) устраняет эту недостаточность и переводит исходное уравнение из неоднородного в так называемое «обобщенное однородное». Новая функция u при этом оказывается безразмерной.

Независимой переменной τ приписывают размерность «единица», и тогда размерность переменной x будет q ; число q определяется из простых алгебраических уравнений, соответствующих заданному дифференциальному уравнению.

Найдем, например, число q для уравнения

$$(x + x\sqrt{\tau^2 x^4 - 1})d\tau + 2\tau dx = 0.$$

В подкоренном выражении второй член имеет нулевую размерность; следовательно, и первый член должен иметь нулевую размерность; отсюда следует уравнение

$$2 + 4q = 0$$

т. е. $q = -1/2$. К этому же результату можно прийти еще проще: очевидно²⁾:

$$x^4 \stackrel{\cong}{=} \frac{1}{\tau^2}, \quad x \stackrel{\cong}{=} \frac{1}{\sqrt{\tau}},$$

а так как $\tau \stackrel{\cong}{=} 1$, то

$$x \stackrel{\cong}{=} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \stackrel{\cong}{=} -\frac{1}{2} = q.$$

Теперь подстановка $x = u/\sqrt{\tau}$, $\tau > 0$ дает:

$$\left(\frac{u}{\sqrt{\tau}} + \frac{u}{\sqrt{\tau}} \sqrt{\tau^2 \left(\frac{u}{\sqrt{\tau}} \right)^4 - 1} \right) d\tau + 2\tau d \frac{u}{\sqrt{\tau}} = 0,$$

$$(u + u\sqrt{u^4 - 1}) d\tau + 2\tau du = 0.$$

¹⁾ Величины x и τ приняты безразмерными и, следовательно, их комбинации, например x^2 , $x\tau$ и т. д., также являются безразмерными. Однако возможно «нарушение размерности», если в один ряд, например, включить комбинации вида $x^2\tau$, x^4 , τ^2 ; именно в этом смысле следует понимать слово «размерность».

²⁾ Символ $\stackrel{\cong}{=}$ означает равенство размерностей.

В последнем уравнении переменные разделяются. Рассмотрим еще один пример. Заданное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{d\tau} = -\left(\frac{2}{\tau^2} - x^2\right) = x^2 - \frac{2}{\tau^2}.$$

не является однородным; приведем его к «обобщенному однородному».

Очевидно, $x \xrightarrow{\tau} \frac{1}{\tau} \xrightarrow{\tau} -1 \xrightarrow{\tau} q$; введем подстановку

$$\begin{aligned} x = u\tau^{-1} &= \frac{u}{\tau}, \quad \frac{dx}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{u}{\tau} \right) = \frac{\tau \frac{du}{d\tau} - u}{\tau^2}, \\ \frac{1}{\tau} \frac{du}{d\tau} - \frac{u}{\tau^2} &= \left(\frac{u}{\tau} \right)^2 - \frac{2}{\tau^2}, \\ \tau \frac{du}{d\tau} &= u^2 + u - 2, \\ \frac{du}{u^2 + u - 2} &= \frac{d\tau}{\tau}. \end{aligned}$$

Заметим в заключение, что подстановка вида $x = u\tau^\alpha$, т. е. $u = x\tau^{-\alpha}$, может рассматриваться и как преобразование обеих переменных; другими словами, ее можно отнести к методам пятой группы (см. метод 5.3).

4.1в. Метод, основанный на представлении искомой переменной в виде функционального преобразования новой переменной. Заданное дифференциальное уравнение $F(\tau, x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0$ при помощи подстановки $x = \varphi(u)$ иногда удается свести к более простому.

Общие рекомендации для выбора $\varphi(u)$ сформулировать трудно, если не невозможно. Этот вопрос рассматривается ниже, в методах пятой группы, которые основаны на преобразовании обеих переменных. Здесь же будет указана

только подстановка $x = e^{\int u d\tau}$, нашедшая широкое применение.

Так как

$$\begin{aligned} x &= e^{\int u d\tau}, \quad \dot{x} = e^{\int u d\tau} u = xu, \\ \ddot{x} &= e^{\int u d\tau} (\dot{u} + u^2) = \dot{x}(\dot{u} + u^2), \end{aligned}$$

исходное уравнение переводится в новое, порядок которого на единицу ниже:

$$x F\left(\tau, \frac{\dot{x}}{x}, \frac{\ddot{x}}{x}\right) = 0, \quad F[\tau, u, (\dot{u} + u^2)] = 0.$$

Пример 8. Рассмотрим однородное параметрическое уравнение второго порядка:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + a(\tau)\dot{x} + b(\tau)x &= 0, \\ \ddot{x} + ax + bx &= 0; \end{aligned}$$

в соответствии с изложенной рекомендацией получаем:

$$\begin{aligned} x \left(\frac{\ddot{x}}{x} + a \frac{\dot{x}}{x} + b \right) &= 0, \\ \dot{u} + u^2 + au + b &= 0, \end{aligned}$$

т. е. приходим к нелинейно-параметрическому уравнению первого порядка.

Приведенный метод, по существу, совпадает с методом 4.2б (см. ниже), в котором производная искомой переменной представляется в виде произведения этой переменной на новую.

4.1г. Метод, основанный на представлении искомой переменной в виде частного от деления производной новой переменной \dot{u} на саму переменную u . Нелинейно-параметрические дифференциальные уравнения вида (уравнение Риккати)

$$\frac{dx}{d\tau} + A(\tau)x^2 + B(\tau)x + D(\tau) = 0$$

при помощи подстановки $x = \dot{u}/Au$ сводятся к параметрическим уравнениям вида $\ddot{u} + \alpha(\tau)\dot{u} + \beta(\tau)u = 0$.

В самом деле, так как

$$x = [A\dot{u}\dot{u} - \dot{u}(A\dot{u} + u\dot{A})]/A^2u^2,$$

то

$$\frac{\ddot{u}}{Au} - \frac{\dot{u}^2}{Au^2} - \frac{\dot{A}\dot{u}}{A^2u} + A \frac{\dot{u}^2}{A^2u^2} + B \frac{\dot{u}}{Au} + D = 0,$$

$$\ddot{u} + \left(B - \frac{\dot{A}}{A}\right)\dot{u} + ADu = 0,$$

т. е. $\alpha(\tau) = B(\tau) - \frac{\dot{A}(\tau)}{A(\tau)}$, $\beta(\tau) = A(\tau)D(\tau)$.

4.2. Методы, основанные на преобразовании производной искомой переменной. Здесь можно различать следующие представления производной искомой переменной: а) в виде новой переменной, б) в виде произведения искомой переменной на новую переменную, в) в виде некоторого параметра.

Рассмотрим методы, соответствующие этим представлениям: первые два метода адресуются к дифференциальным уравнениям порядка не ниже второго, а третий — к уравнениям первого порядка, если в них трудно (или не следует к этому стремиться) выделить производную.

4.2а. Метод замены производной искомой переменной новой переменной. За основу метода принимается подстановка $x = dx/d\tau = y$ и в зависимости от «возможностей интегрирования» решение ищется либо в виде $y(\tau)$ и затем $x = \int y(\tau) d\tau$, либо в виде фазового изображения $y(x)$, от которого затем предстоит перейти к искомой интегральной кривой $x(\tau)$ по рекомендациям, изложенным в [П.13].

Для дифференциальных уравнений вида $F(\tau, x, \dot{x}) = 0$, т. е. для уравнений, не содержащих искомой переменную x в явном виде, подстановка $\dot{x} = y$ понижает их порядок: $F(\tau, y, y) = 0$ и после нахождения $y(\tau)$ можно найти $x(\tau)$.

Для дифференциальных уравнений вида $F(x, x, \dot{x}) = 0$, т. е. для уравнений, не содержащих независимую переменную τ в явном виде, подстановка

$$\dot{x} = y, \quad \ddot{x} = \frac{dy}{d\tau} = \dot{y} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{d\tau} = y'y$$

приводит к дифференциальному уравнению первого порядка $F(x, y, y') = 0$, но относительно фазового изображения $y(x)$.

Для дифференциальных уравнений вида $F(\dot{x}, \dot{x}) = 0$, т. е. не содержащих ни τ , ни x в явном виде, решение совсем упрощается, так как подстановка $\dot{x} = y$ приводит к уравнению первого порядка $F(y, \dot{y}) = 0$, решив которое, нетрудно перейти к искомой функции $x(\tau)$.

Для дифференциальных уравнений вида $F(x, \dot{x})=0$, т. е. не содержащих ни τ , ни x в явном виде, решение, как правило, существенно упрощается.

Если вторую производную можно выделить, т. е. если уравнение можно привести к виду $\ddot{x} + \varphi(x) = 0$, то преобразуя используемую подстановку очевидным образом:

$$\ddot{x} = yy' = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} y^2,$$

приходим к уравнению

$$(y^2)' = -2\varphi(x)$$

и далее:

$$y^2 = -2 \int \varphi(x) dx + C,$$

$$y = \pm \sqrt{-2 \int \varphi(x) dx + C} = \frac{dx}{d\tau},$$

$$\tau = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{-2 \int \varphi(x) dx + C}} + C_1,$$

т. е. получаем решение в виде обратной функции $\tau(x)$.

Следует отметить, что если $\varphi(x)$ представляет собой степенной полином, то функция $\tau(x)$ выражается через эллиптические интегралы (см. П.17).

Наконец, уравнения вида $F(\tau, \dot{x})=0$, т. е. не содержащие ни x , ни \ddot{x} , интегрируются непосредственно.

4.26. Метод представления производной в виде произведения искомой переменной на новую переменную. Этот метод адресуется к однородным уравнениям порядка не ниже второго и основан на подстановке $x = xz$, $\dot{x} = xz' + xz$, благодаря которой порядок уравнения удается снизить.

После нахождения функции $z(t)$ искомая функция $x(\tau)$ определяется непосредственным интегрированием: $x = C e^{\int z(\tau) d\tau}$. По существу, указанная подстановка представляет собой «объединение переменных»:

$$\frac{\dot{x}}{x} = z, \quad \frac{\ddot{x}}{x} = z' + z^2;$$

к подобным «объединениям» следует прибегать в тех случаях, когда они понижают порядок уравнения ¹⁾.

Пример 1. Параметрическое уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + a(\tau)\dot{x} + b(\tau)x = 0$$

приведем к уравнению первого порядка.

Используя указанную подстановку, получаем нелинейно-параметрическое уравнение первого порядка

$$z' + a(\tau)z + z^2 + b(\tau) = 0$$

Последнее уравнение (уравнение Риккати) можно исследовать, например, на фазовой плоскости $z(z)$ при помощи метода «замораживания коэффициентов» и др.

¹⁾ Изложенный метод совпадает с методом, основанным на функциональном преобразовании новой переменной (4.1в), и отличается от него лишь логикой построения.

Пример 2. Нелинейно-параметрическое уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + \frac{a(\tau)}{x} \dot{x}^2 + b(\tau)x = 0$$

преобразуем в уравнение первого порядка.

Перепишав заданное уравнение в виде:

$$\frac{\ddot{x}}{x} + a(\tau) \left(\frac{\dot{x}}{x} \right)^2 + b(\tau) = 0$$

и используя принятую подстановку, получим

$$\dot{z} + [1 + a(\tau)]z^2 + b(\tau) = 0.$$

4.2в. *Метод представления производной в виде некоторого параметра*¹⁾. По отношению к уравнениям первого порядка, не разрешенным относительно производной²⁾, весьма часто оказывается целесообразным вводить вместо производной $dx/d\tau = \dot{x}$ параметр p с целью получения решения в виде двух уравнений в параметрической форме. Другими словами, решение уравнения $\Phi(\tau, x, \dot{x}) = \Phi(\tau, x, p) = 0$ можно получить в виде системы

$$x = \varphi(p), \quad \tau = \psi(p).$$

Будем считать, что заданные уравнения можно разрешить либо относительно x , либо относительно τ , т. е. привести к одному из следующих видов:

$$x = F(\dot{x}), \tag{1a}$$

$$x = F(\tau, \dot{x}), \tag{1б}$$

$$\tau = F(\dot{x}), \tag{2a}$$

$$\tau = F(x, \dot{x}). \tag{2б}$$

Рассмотрим уравнение (1а), положив $\dot{x} = p$, т. е. записав его в виде:

$$x = F(p), \quad dx = F'_p(p) dp.$$

Так как $dx/d\tau = p$, то

$$d\tau = \frac{1}{p} dx = \frac{F'_p(p)}{p} dp$$

и

$$\tau = \int \frac{F'_p(p)}{p} dp + C.$$

Система

$$x = F(p), \quad \tau = \int \frac{F'_p(p)}{p} dp + C$$

и представляет собой решение в параметрической форме заданного уравнения. Иногда от этой системы удастся перейти к искомой зависимости в виде $x(\tau)$.

¹⁾ Этот метод часто называют «методом интегрирования посредством дифференцирования» или «методом предварительного дифференцирования».

²⁾ К этому виду следует относить не только те уравнения, которые невозможно или трудно разрешить относительно производной, но и те, которые не разрешены относительно производной и нет причин стремиться к этому.

Пример 3. Задано уравнение $x^2 - x = 0$; будем его интегрировать методом введения параметра. В данном случае

$$x = p^2, \quad \tau = \int \frac{2p}{p} dp + C = 2p + C.$$

Выразив p через τ , получим $x = [(\tau - C)/2]^2$.

Теперь рассмотрим ур-ние (16): $x = F(\tau, p)$.
Найдем дифференциал dx :

$$dx = F'_\tau d\tau + F'_p dp.$$

Из последнего равенства найдем $dp/d\tau$:

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{p - F'_\tau(p, \tau)}{F'_p(p, \tau)}. \quad (*)$$

Дальнейшие преобразования следует связывать с видом функций $F'_\tau(p, \tau)$, $F'_p(p, \tau)$. Если удастся получить решение последнего уравнения в виде $p(\tau)$, то искомое решение можно найти либо подстановкой в (16), т. е. $x = F[\tau, p(\tau)]$, либо интегрированием по формуле $x = \int p(\tau) d\tau + C$.

Если удастся получить решение последнего уравнения в виде $\tau(p)$, то решением исходного уравнения является система:

$$\tau = \tau(p), \quad x = F[\tau(p), p].$$

Пример 4. Нелинейно-параметрическое уравнение $x^2 - x - \tau x + x = 0$ решим относительно x и введем $p = x$:

$$x = -p^2 + p + \tau p = F(\tau, p).$$

В соответствии с вышеприведенной формулой (*) находим:

$$F' = -2p \frac{dp}{d\tau} + \frac{dp}{d\tau} + \tau \frac{dp}{d\tau} + p,$$

$$F'_p = -2p + 1 + \tau,$$

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{p - \left(-2p \frac{dp}{d\tau} + \frac{dp}{d\tau} + \tau \frac{dp}{d\tau} + p \right)}{-2p + 1 + \tau} = -\frac{dp}{d\tau}.$$

Таким образом,

$$2dp/d\tau = 0, \quad p(\tau) = C_1,$$

$$x = \int p(\tau) d\tau + C_2 = C_1\tau + C_2.$$

Теперь обратимся к ур-ниям (2а) и (2б). Записывая (2а) в виде

$$\tau = F(p), \quad d\tau = F'_p(p) dp$$

и подставляя $d\tau$ в равенство $dx/d\tau = p$, получаем

$$x = \int p F'_p(p) dp + C = \varphi(p).$$

Решением заданного уравнения является система:

$$\tau = F(p), \quad x = \varphi(p).$$

Пример 5. Решая уравнения $x^3 + x - \tau = 0$ относительно τ : $\tau = p + p^3 = F(p)$ и находя x :

$$x = \int p(1 + 3p^2) dp = \frac{1}{2} p^2 + \frac{3}{4} p^4 + C,$$

получаем решение в параметрической форме:

$$x = \frac{1}{2} p^2 + \frac{3}{4} p^4 + C, \quad \tau = p + p^3.$$

Наконец, рассмотрим ур-ние (26):

$$\tau = F(x, p), \quad d\tau = F'_x dx + F'_p dp.$$

Из последнего равенства найдем $dp/d\tau$:

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{1 - pF'_x(p, x)}{F'_p(p, x)}.$$

Результат аналогичен полученному выше по отношению к ур-нию (16).

Пример 6. Уравнение $x^3 - x + \tau = 0$ решим относительно τ :

$$\tau = x - p^3 = F(x, p).$$

Найдем $dp/d\tau$:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\tau} &= \frac{1 - pF'_x(p, x)}{F'_p(p, x)} = \frac{1 - p(1 - 3p^2 \frac{dp}{dx})}{-3p^2} = \frac{p-1}{3p^2} - p \frac{dp}{dx} = \\ &= \frac{p-1}{3p^2} - p \frac{dp}{dx} \frac{d\tau}{d\tau} = \frac{p-1}{3p^2} - \frac{dp}{d\tau}, \\ \frac{dp}{d\tau} &= \frac{p-1}{6p^2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$d\tau = \frac{6p^2}{p-1} dp,$$

$$\tau = 6 \left(\ln |p-1| + p + \frac{p^2}{2} \right) + C.$$

Последнее равенство вместе с равенством $x = p^3 + \tau$ дает решение в параметрической форме.

Ниже приводится таблица расчетных формул (табл. П4.1).

ТАБЛИЦА П4.1

Представление решений уравнений, не разрешенных относительно производной, в параметрической форме при помощи параметра $p = dx/d\tau$

Уравнения, разрешенные относительно искомой переменной		Уравнения, разрешенные относительно независимой переменной	
$x = F(\dot{x})$	$x = F(\tau, \dot{x})$	$\tau = F(\dot{x})$	$\tau = F(x, \dot{x})$
$x = F(p)$	$x = F(\tau, p)$	$\tau = F(p)$	$\tau = F(x, p)$
$\tau = \int \frac{F'_p(p)}{p} dp + C$	$\frac{dp}{d\tau} = \frac{p - F'_\tau(\tau, p)}{F'_p(\tau, p)}$	$x = \int p F'_p(p) dp + C$	$\frac{dp}{d\tau} = \frac{1 - p F'_x(x, p)}{F'_p(x, p)}$

Укажем в заключение, что иногда целесообразно заменять производную \dot{x} некоторой функцией от параметра p ; поясним это примером. Пусть задано нелинейно-параметрическое дифференциальное уравнение

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+x^2}} - \tau = A,$$

которое легко решается относительно τ :

$$\tau = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1+x^2}} - A.$$

Полагая $\dot{x} = \operatorname{tg} p$, получаем $\tau = \sin p - A = F(p)$, и согласно табличной формуле

$$x = \int p F'_p(p) dp + C = \int p \cos p dp + C.$$

Так как

$$\int z \cos z dz = \cos z + z \sin z,$$

то

$$x = \cos p + p \sin p + C.$$

Последнее равенство вместе с равенством $\tau = \sin p - A$ и дает решение задачи.

Если бы применялась подстановка $\dot{x} = p$, то первое из двух итоговых равенств имело бы вид

$$\tau = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} - A,$$

а второе оказалось бы еще более сложным:

$$x = \int p F'_p(p) dp + C = \int p (1+p^2)^{-3/2} dp + C.$$

4.3. Методы представления функций от искомой переменной и ее производной в виде некоторой функции от новой переменной и ее производной. Здесь речь будет идти о преобразованиях вида $\psi(x, \dot{x}) = \Phi(z, \dot{z})$. Общие рекомендации для этого случая сформулировать трудно, если не невозможно. Рассмотрим преобразование вида:

$$\varphi(x) \dot{x} = \dot{z}, \quad z = \int \varphi(x) dx,$$

которое часто существенно упрощает исходное уравнение. Распространенными являются следующие подстановки:

$$x^n \dot{x} = \frac{1}{n+1} \dot{z}, \quad z = x^{n+1},$$

$$\frac{1}{|x|} \dot{x} = \dot{z}, \quad z = \ln |x|,$$

$$e^x \dot{x} = \dot{z}, \quad z = e^x,$$

$$\cos x \dot{x} = \dot{z}, \quad z = \sin x,$$

$$\frac{1}{1+x^2} \dot{x} = \dot{z}, \quad z = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \dot{x} = \dot{z}, \quad z = \operatorname{arc} \sin x$$

Отсюда следует, что с помощью указанных подстановок существенно упрощаются уравнения, которые можно привести к виду

$$\varphi(x)x + a(\tau) \int \varphi(x) dx - b(\tau) = 0.$$

Пример 1. Упростим нелинейно-параметрическое уравнение вида (уравнение Бернулли):

$$\begin{aligned} \dot{x} + a(\tau)x - b(\tau)x^n &= 0, \\ x^{-n}\dot{x} + a(\tau)x^{-n+1} - b(\tau) &= 0. \end{aligned}$$

Полагая $x^{-n+1} = z$, $x^{-n}\dot{x} = z/(1-n)$, получаем параметрическое уравнение

$$z + (1-n)a(\tau)z = (n-1)b(\tau).$$

Последнее уравнение интегрируется без затруднений, искомая функция $x(\tau)$ находится из равенства $x^{-n+1} = z$.

Пример 2. Нелинейно-параметрическое уравнение

$$x\dot{x} + a(\tau)x^2 = f(\tau)$$

с помощью подстановки $x^2 = z$ легко приводится к параметрическому уравнению вида $z + 2a(\tau)z = 2f(\tau)$.

П.5. Методы перехода к более простым дифференциальным уравнениям на основе преобразования либо независимой переменной, либо обеих переменных

Методы, относящиеся к этой группе, можно делить на подгруппы по признакам, характеризующим объекты и характер преобразований. К подгруппе 5.1 относятся методы, в которых преобразованию подвергается только независимая переменная τ . Подгруппу 5.2 составляет метод, согласно которому преобразуются обе переменные, но преобразование состоит только в перемене мест, т. е. замене качеств функции и аргумента. Методы, объединенные в подгруппу 5.3, основаны на совместном преобразовании обеих переменных при помощи одной новой переменной, а в подгруппу 5.4 — также на преобразовании обеих переменных, но при помощи двух новых переменных.

Ниже относительно подробно рассматриваются только те методы, которые сравнительно широко применяются при изучении и расчетах нелинейных и параметрических цепей.

5.1. Методы, основанные на преобразовании независимой переменной. Прежде всего следует отметить, что параметрическое уравнение при любом преобразовании вида $\tau = \varphi(\eta)$ остается параметрическим уравнением относительно новой переменной η ; однородное уравнение, кроме того, остается однородным¹⁾.

Преобразование $\tau = \varphi(\eta)$ может быть линейным и нелинейным; по этому признаку можно делить методы подгруппы 5.1 следующим образом.

5.1а. Метод, основанный на линейном преобразовании независимой переменной. Подстановка $\tau = A\eta + B$ или $b\tau + C = \eta$ применяется в тех случаях, когда коэффициенты дифференциального уравнения представляют собой степень линейной формы. Благодаря такой подстановке можно заданное уравнение при-

¹⁾ Эти утверждения легко доказываются (см., например, [П.29, стр. 410]. По отношению к искомой переменной x это утверждение в общем случае силы не имеет.

вести к более простому виду, для которого, в свою очередь, разработаны другие методы. Например, дифференциальное уравнение

$$\sum_{n=0}^N a_n (b\tau + c)^n \frac{d^n x}{d\tau^n} = f(\tau)$$

при помощи подстановки $b\tau + c = \eta$ преобразуется в другое:

$$\sum_{n=0}^N a_n b^n \eta^n \frac{d^n x}{d\eta^n} = f\left(\frac{\eta - C}{b}\right),$$

которое легко решается излагаемым ниже методом 5.16.

Если степени η и порядок $dx/d\eta$ не равны друг другу, следует обратиться к методу 4.3.

5.16. *Методы, основанные на нелинейном преобразовании независимой переменной τ .* В рассматриваемых ниже методах переменная τ заменяется некоторой функцией φ от новой переменной η , т. е. $\tau = \varphi(\eta)$ или $\eta = \psi(\tau)$.

Выбор функции φ (или ψ) зависит от конкретных условий, связанных с общей задачей перехода от заданного уравнения к более простому.

Здесь будут рассмотрены следующие способы упрощения уравнений: 1) переход от параметрического уравнения к линейному, 2) переход от заданного уравнения к самосопряженному, 3) исключение члена, содержащего $(n-1)$ -ю производную. Перечисленные способы не исчерпывают всех возможностей, которые может дать нелинейное преобразование независимой переменной: в отдельных случаях удачно найденное преобразование весьма упрощает исходное дифференциальное уравнение (много примеров, иллюстрирующих изложенное, можно найти в книге Э. Камке [П.21]). Здесь будут приведены условия упрощения, для которых есть регулярные методы преобразования.

1. Переход от параметрического уравнения к линейному. Параметрическое уравнение первого порядка вида

$$\frac{dx}{d\tau} + a(\tau)x = f(\tau)$$

можно проинтегрировать непосредственно; можно, однако, это сделать и на основе перехода к линейному уравнению. Введем новую переменную $\eta = \psi(\tau)$; тогда $d\eta = \dot{\psi}d\tau$, $d\tau = \frac{1}{\dot{\psi}}d\eta$ и исходное уравнение запишется в форме:

$$\dot{\psi} \frac{dx}{d\eta} + a(\tau)x = f(\tau) \quad \text{или} \quad \frac{dx}{d\eta} + \frac{a(\tau)}{\dot{\psi}}x = \frac{f(\tau)}{\dot{\psi}} = F(\tau).$$

Потребуем, чтобы

$$a(\tau)/\dot{\psi} = 1, \quad \psi(\tau) = \int a(\tau)d\tau + C; \quad (1)$$

при этих условиях параметрическое дифференциальное уравнение преобразуется в линейное:

$$\frac{dx}{d\eta} + x = F(\tau) = F[\varphi(\eta)].$$

Пример 1. Приведем заданное параметрическое уравнение

$$\frac{dx}{d\tau} + \cos \tau x = 0, \quad \tau > 0$$

к линейному относительно новой переменной $\eta = \psi(\tau)$.

Находим ψ : $\psi = \int \cos \tau d\tau + C = \sin \tau + C$. Так как решение уравнения $dx/d\eta + x = 0$ имеет вид

$$x = e^{-\eta}, \text{ а } \eta = \psi(\tau) = \sin \tau + C, \text{ то } x = C_1 e^{-\sin \tau}.$$

Пример 2. Решим параметрическое уравнение

$$(a\tau + b)^3 \frac{dx}{d\tau} + \tau^2 x = 0;$$

находя $\eta = \psi(\tau)$, получаем

$$\eta = \int \frac{\tau^2}{(a\tau + b)^3} d\tau = \frac{1}{a^3} \left[\ln(a\tau + b) + \frac{2b}{a\tau + b} - \frac{b^2}{2(a\tau + b)^2} \right] + C.$$

и решение будет иметь вид

$$x = C_1 \exp \left\{ -\frac{1}{a^3} \left[\ln(a\tau + b) + \frac{2b}{a\tau + b} - \frac{b^2}{2(a\tau + b)^2} \right] \right\}.$$

Последнее выражение допускает упрощения, которые здесь могут быть опущены.

Легко видеть, что рассмотренное преобразование полезно и для нелинейно-параметрических уравнений, например, вида

$$\frac{dx}{d\tau} + \alpha(\tau) \Phi(x) = f(\tau),$$

а также

$$\left(\frac{dx}{d\tau} \right)^k + \alpha(\tau) \Phi(x) = f(\tau);$$

в последнем случае для функции $\psi(\tau)$ вышеприведенная ф-ла (1) неприменима; не составляет, однако, труда вывести для этого случая свою формулу преобразования:

$$\psi(\tau) = \int \sqrt[k]{\alpha(\tau)} d\tau + C.$$

Рассмотрим теперь преобразование параметрического уравнения второго порядка

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + b(\tau) \frac{dx}{d\tau} + a(\tau)x = 0$$

в линейное

$$\frac{d^2x}{d\eta^2} + B \frac{dx}{d\eta} + Ax = 0$$

на основе подстановки $\eta = \psi(\tau)$, $d\eta = \dot{\psi} d\tau$, $d\tau = \frac{1}{\dot{\psi}} d\eta$.

Выразим $dx/d\tau$ и $d^2x/d\tau^2$ через $dx/d\eta$, $d^2x/d\eta^2$ и пока неопределенную функцию ψ :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \dot{\psi} \frac{dx}{d\eta}, \\ \frac{d^2x}{d\tau^2} &= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx}{d\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} \left(\dot{\psi} \frac{dx}{d\eta} \right) = \dot{\psi} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx}{d\eta} \right) + \ddot{\psi} \frac{dx}{d\eta} = \dot{\psi}^2 \frac{d^2x}{d\eta^2} + \ddot{\psi} \frac{dx}{d\eta}; \end{aligned}$$

подставим эти выражения в исходное дифференциальное уравнение

$$\psi^2 \frac{d^2x}{d\eta^2} + [\ddot{\psi} + b(\tau)\dot{\psi}] \frac{dx}{d\eta} + a(\tau)x = 0$$

или

$$\frac{d^2x}{d\eta^2} + \frac{\ddot{\psi} + b(\tau)\dot{\psi}}{\psi^2} \frac{dx}{d\eta} + \frac{a(\tau)}{\psi^2} x = 0$$

По условию $a(\tau)/\psi^2 = A$, следовательно,

$$\psi(\tau) = \frac{1}{\sqrt{A}} \int \sqrt{a(\tau)} d\tau + C. \quad (2)$$

Кроме того, по условию $[\ddot{\psi} + b(\tau)\dot{\psi}]/\psi^2 = B$. Найдем $\dot{\psi}$, $\ddot{\psi}$ и подставим в последнее равенство:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{1}{\sqrt{A}} \sqrt{a(\tau)}, & \ddot{\psi} &= \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{\dot{a}(\tau)}{2\sqrt{a(\tau)}}, \\ \frac{\frac{1}{\sqrt{A}} \frac{\dot{a}(\tau)}{2\sqrt{a(\tau)}} + b(\tau) \frac{1}{\sqrt{A}} \sqrt{a(\tau)}}{\frac{1}{A} a(\tau)} &= B. \end{aligned}$$

Совершая элементарные преобразования, получаем

$$\sqrt{A} \left[\frac{\dot{a}(\tau)}{2\sqrt{a^3(\tau)}} + \frac{b(\tau)}{\sqrt{a(\tau)}} \right] = B. \quad (3)$$

Таким образом, параметрическое дифференциальное уравнение второго порядка можно привести к линейному введением новой переменной $\eta = \psi(\tau)$ по Ф-ле (2) только при условии, что переменные коэффициенты $a(\tau)$ и $b(\tau)$ отвечают равенству (3). Нужно отметить, что подобная связь между коэффициентами встречается не часто.

Для дополнительного условия, состоящего в том, что каждый из членов выражения в квадратных скобках (3) порознь должен быть равен постоянной, т. е. $\dot{a}(\tau)/2\sqrt{a^3(\tau)} = K_1$, $b(\tau)/\sqrt{a(\tau)} = K_2$, легко получить

$$a(\tau) = \frac{1}{K_1^2 \tau^2}, \quad b(\tau) = \frac{K_2}{K_1} \frac{1}{\tau},$$

что соответствует дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{K_2}{K_1} \frac{1}{\tau} \frac{dx}{d\tau} + \frac{1}{K_1^2 \tau^2} x = 0,$$

которое при $K_1 = K_2 = 1$ называется уравнением Эйлера и обычно записывается в виде:

$$\tau^2 \frac{d^2x}{d\tau^2} + \tau \frac{dx}{d\tau} + x = 0.$$

Приводя это уравнение к виду, совпадающему с исходным, и учитывая, что

$$a(\tau) = 1/\tau^2, \quad b(\tau) = 1/\tau,$$

находим функцию $\psi(\tau)$ по ф-ле (2):

$$\eta = \psi(\tau) = \int \frac{1}{\tau} d\tau + C = \ln \tau + C.$$

Полагая $C=0$, имеем $\eta = \ln \tau$, $\tau = e^\eta$.

Последняя подстановка является весьма распространенной.

Пример 3. Найдем решение уравнения

$$\tau^2 \ddot{x} - 2\tau \dot{x} + 2x = 0$$

на основе приведения данного параметрического уравнения к линейному.

В рассматриваемом случае

$$a(\tau) = 2/\tau^2, \quad b(\tau) = -2/\tau.$$

Введем новую переменную по ф-ле (2):

$$\eta = \psi(\tau) = \frac{1}{\sqrt{A}} \int \sqrt{a(\tau)} d\tau = \frac{1}{\sqrt{A}} \int \sqrt{\frac{2}{\tau^2}} d\tau = \sqrt{\frac{2}{A}} \ln \tau.$$

Проверим равенство (3) и определим A и B . Подставляя a , $\sqrt{a^3}$, b и \sqrt{a} , находим: $-3/\sqrt{2} = B/\sqrt{A}$. Примем, что $A=2$, $B=-3$ и придем к линейному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2x}{d\eta^2} - 3 \frac{dx}{d\eta} + 2x = 0,$$

которое легко решается

$$x = C_1 e^\eta + C_2 e^{2\eta}.$$

Так как

$$\eta = \sqrt{2/A} \ln \tau = \sqrt{2/2} \ln \tau, \quad \tau = e^\eta,$$

общее решение

$$x = C_1 \tau + C_2 \tau^2.$$

Выше было рассмотрено уравнение

$$\tau^2 \ddot{x} + \beta \tau \dot{x} + \alpha x = 0;$$

аналогичными рассуждениями можно показать, что и уравнения

$$F(x, \tau^q \dot{x}, \tau^p \ddot{x}) = 0,$$

если они приводятся к обобщенным однородным уравнениям, при помощи подстановки $\tau = e^\eta$ можно привести к линейному или более простому, чем исходное.

Легко видеть, что последнее уравнение можно также упростить, если вместо x будет фигурировать $\Phi(x)$, т. е. если уравнение второго порядка будет иметь вид

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + b(\tau) \frac{dx}{d\tau} + a(\tau) \Phi(x) = f(\tau).$$

2. Переход от заданного уравнения к самосопряженному. Самосопряженным дифференциальным уравнением второго порядка принято называть уравнение, в котором коэффициент при первой производной представляет собой производную коэффициента при второй производной, т. е.

$$a_2 \frac{d^2x}{d\tau^2} + a_1 \frac{dx}{d\tau} + a_0 x = 0,$$

причем

$$a_1(\tau) = \frac{d}{d\tau} a_2(\tau), \quad a_1 = a_2.$$

Легко видеть, что самосопряженное уравнение можно записать в виде:

$$\frac{d}{d\tau} \left(a_2 \frac{dx}{d\tau} \right) + a_0 x = 0,$$

который в ряде задач оказывается предпочтительнее исходного.

Покажем, что любое параметрическое уравнение второго порядка можно преобразовать в самосопряженное, а затем путем преобразования независимой переменной освободиться от члена с первой производной. Домножим в исходном уравнении все члены на пока неопределенную функцию $\mu(\tau)$

$$a_2 \mu \frac{d^2 x}{d\tau^2} + a_1 \mu \frac{dx}{d\tau} + a_0 \mu x = 0$$

и потребуем, чтобы выполнялось равенство:

$$a_1 \mu = \frac{d}{d\tau} (a_2 \mu) = a_2 \dot{\mu} + \mu \dot{a}_2,$$

$$a_2 \dot{\mu} + \mu (\dot{a}_2 - a_1) = 0.$$

Отсюда получаем уравнение

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{da_2}{a_2} + \frac{a_1}{a_2} d\tau,$$

из которого и определяем функцию $\mu(\tau)$:

$$\mu = \frac{1}{a_2} e^{\int \frac{a_1}{a_2} d\tau}.$$

Подставляя эту функцию в дифференциальное уравнение, получаем

$$e^{\int \frac{a_1}{a_2} d\tau} \frac{d^2 x}{d\tau^2} + \frac{a_1}{a_2} e^{\int \frac{a_1}{a_2} d\tau} \frac{dx}{d\tau} + \frac{a_0}{a_2} e^{\int \frac{a_1}{a_2} d\tau} x = 0$$

или

$$\frac{d}{d\tau} \left(e^{\int \frac{a_1}{a_2} d\tau} \frac{dx}{d\tau} \right) + \frac{a_0}{a_2} e^{\int \frac{a_1}{a_2} d\tau} x = 0.$$

Последнее уравнение эквивалентно исходному.

Если $a_2 = 1$, то $\mu = e^{\int a_1 d\tau}$.

3. Исключение члена уравнения с первой производной при помощи преобразования независимой переменной. Рассмотрим теперь самосопряженное уравнение

$$a_2 \frac{d^2 x}{d\tau^2} + a_2 \frac{dx}{d\tau} + a_0 x = 0,$$

к которому, как было показано выше, можно привести любое параметрическое уравнение второго порядка; задача состоит в том, чтобы освободиться от члена с первой производной на основе преобразования независимой переменной τ .

Перепишем самосопряженное уравнение в виде:

$$\frac{d}{d\tau} \left(a_2 \frac{dx}{d\tau} \right) + a_0 x = 0$$

и введем подстановку: $\eta = \psi(\tau)$, $d\eta = \dot{\psi}d\tau$, $d\tau = \frac{1}{\dot{\psi}} d\eta$; тогда

$$\dot{\psi} \frac{d}{d\eta} \left(a_2 \dot{\psi} \frac{dx}{d\eta} \right) + a_0 x = 0.$$

Потребуем, чтобы $a_2 \dot{\psi}(\tau) = 1$, откуда

$$\psi(\tau) = \int \frac{1}{a_2(\tau)} d\tau + C.$$

Теперь уравнение можно переписать как

$$\frac{d^2x}{d\eta^2} + a_0 a_2 x = 0,$$

где нет члена, содержащего первую производную.

Для случая, когда $a_2(\tau) \equiv 1$, т. е. для уравнения $\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = f$ приведенные рассуждения сохраняют силу; это уравнение можно переписать в форме

$$\frac{d}{d\tau} \left(e^{\int a_1 d\tau} \frac{dx}{d\tau} \right) + a_0 e^{\int a_1 d\tau} x = f e^{\int a_1 d\tau}.$$

В данном случае

$$\psi(\tau) = \int e^{-\int a_1 d\tau} d\tau + C,$$

а преобразованное уравнение имеет вид

$$\frac{d^2x}{d\eta^2} + a_0 e^{2\int a_1 d\tau} x = f e^{2\int a_1 d\tau}.$$

Аналогично можно преобразовать и уравнение третьего порядка [П.34, т. 1, стр. 87—89]; путем преобразования обеих переменных можно исключить в уравнении n -го порядка члены, содержащие $(n-1)$ -ю и $(n-2)$ -ю производные; такое исключение называют канонической нормализацией Лягерра—Форсайта [П.34, т. 1, стр. 85].

Следует отметить, что исключение первой производной на основе преобразования независимой переменной можно реализовать и непосредственно, отправляясь от преобразованного уравнения (стр. 403)

$$\frac{d^2x}{d\eta^2} + \frac{\dot{\psi} + a_1(\tau)\dot{\psi}}{\dot{\psi}^2} \frac{dx}{d\eta} + \frac{a_0(\tau)}{\dot{\psi}^2} x = 0.$$

Приравнявая коэффициент при первой производной нулю и решая уравнение относительно ψ , получаем:

$$\dot{\psi}(\tau) = e^{-\int a_1(\tau) d\tau}, \quad \psi(\tau) = \int e^{-\int a_1(\tau) d\tau} d\tau.$$

Подставляя в данное уравнение найденное значение $\dot{\psi}(\tau)$, приходим к уже полученному выше уравнению

$$\frac{d^2x}{d\eta^2} + a_0 e^{2\int a_1 d\tau} x = 0.$$

Нужно обратить внимание на то, что выше уже излагался прием, при помощи которого в уравнении можно освободиться от члена, содержащего первую производную (метод 4.1а); однако тот прием был основан на преобразовании искомой переменной $x = uv$, в то время как здесь преобразованию подвергается

независимая переменная $\tau = \varphi(\eta)$ и вследствие этого преобразованные уравнения оказываются различными.

5.2. *Метод, основанный на замене мест обеих переменных.* Иногда от заданного уравнения удается перейти к более простому только на основе замены мест зависимой x и независимой τ переменных; в этих случаях решение, если его удастся получить, имеет вид обратной функции $\tau(x)$. Например, от нелинейно-параметрического уравнения

$$\frac{dx}{d\tau} - \frac{x}{2\tau + x^3} = 0$$

путем замены переменных можно перейти к параметрическому уравнению

$$\frac{d\tau}{dx} - \frac{2}{x} \tau = x^2,$$

которое легко интегрируется.

Трудно указать рекомендации, связанные с оценкой целесообразности использования данного метода. Можно, разве, отметить, что если, например, в уравнении первого порядка

$$\frac{dx}{d\tau} - \frac{M(\tau, x)}{N(\tau, x)} = 0$$

функция $M(\tau, x) = M(x)$, а функция $N(\tau, x)$ допускает отделение функции от τ , то заменой переменных, т. е. приведением к виду

$$\frac{d\tau}{dx} - \frac{N(\tau, x)}{M(x)} = 0,$$

как правило, можно добиться существенных упрощений.

Пусть, например, $N(\tau, x) = a\psi(x)\varphi(\tau) + b\dot{f}(x)$; тогда приходим к параметрическому уравнению

$$\frac{d\tau}{dx} - \frac{a\psi(x)}{M(x)} \varphi(\tau) = -b \frac{f(x)}{M(x)},$$

которое интегрируется методом преобразования независимой переменной (5.26).

В качестве примеров, иллюстрирующих изложенное, приведем нелинейно-параметрические уравнения:

$$1) (\ln x + \tau) \dot{x} = 1, \quad \frac{dx}{d\tau} - \frac{1}{\ln x + \tau} = 0;$$

$$2) (\tau \sin x - 1) \dot{x} + \cos x = 0, \quad \frac{dx}{d\tau} + \frac{\cos x}{\tau \sin x - 1} = 0,$$

которые с помощью замены мест переменных приводятся к линейным и параметрическим:

$$1) \frac{d\tau}{dx} - \tau = \ln x;$$

$$2) \frac{d\tau}{dx} + \operatorname{tg} x \tau = \frac{1}{\cos x},$$

интегрирование этих последних уравнений не вызывает затруднений.

Некоторые уравнения, в которых функция $N(\tau, x)$ не допускает отделения функции от τ , все же удается проинтегрировать методом замены переменных. Например, нелинейно-параметрическое уравнение

$$\frac{dx}{d\tau} - \frac{1}{\tau^2 x^3 + \tau x} = 0$$

после перемены мест переменных остается нелинейно-параметрическим (уравнение Бернулли):

$$\frac{d\tau}{dx} - x\tau - x^3\tau^2 = 0,$$

но допускает интегрирование методом 4.3; его решение известно [П.21, стр. 468]:

$$\frac{1}{\tau} = 2 - x^2 + C e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

5.3. *Методы, основанные на совместном преобразовании обеих переменных при помощи одной новой переменной.* Введение новой переменной z , функционально связанной с обеими переменными τ и x , т. е. $z = \Phi(\tau, x)$, довольно часто позволяет перейти от заданного уравнения к относительно более простому. Так, уравнения вида

$$\frac{dx}{d\tau} - F(a\tau + bx + C) = 0$$

при помощи новой переменной

$$z = a\tau + bx + C, \quad \frac{dz}{d\tau} = a + b\frac{dx}{d\tau},$$

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{b}\left(\frac{dz}{d\tau} - a\right)$$

можно привести к виду

$$\frac{1}{b}\left(\frac{dz}{d\tau} - a\right) - F(z) = 0,$$

$$\frac{dz}{a + bF(z)} = d\tau,$$

допускающему непосредственное интегрирование.

Та же подстановка позволяет разделить переменные и в более сложном уравнении [П.21, стр. 432]:

$$\frac{dx}{d\tau} = \tau^{a-1} x^{1-b} F\left(\frac{\tau^a}{a} \pm \frac{x^b}{b} + C\right);$$

полагая $z = \frac{\tau^a}{a} \pm \frac{x^b}{b} + C$, $\frac{dz}{d\tau} = \tau^{a-1} \pm x^{b-1} \frac{dx}{d\tau}$,

приходим к уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{dz}{d\tau} = \tau^{a-1} [1 + F(z)].$$

Путем линейных преобразований переменных можно аналогичным образом решать уравнения вида

$$\frac{dx}{d\tau} - F\left(\frac{A\tau + Bx + C}{a\tau + bx + C}\right) = 0,$$

если $Ab - aB \neq 0$ [П.1, стр. 30]. Введение подстановок $z = x/\tau$, $z = x/\tau^\alpha$ подробно рассматривалось при изучении метода 4.1б (метод, основанный на представлении искомой переменной в виде произведения новой переменной, либо на независимую переменную, либо на степень независимой переменной), где были установлены виды дифференциальных уравнений, которые упрощаются при таких подстановках.

Довольно широко используются подстановки $z = x\tau$, $z = x\tau + A$; примеры можно найти, например, в книге Э. Камке [П.21, стр. 440, 441] и др.

Применяются и другие подстановки, например:

$$z = \frac{1}{x} + a\tau, \quad [\text{П.21, стр. 441}],$$

$$z = a(\tau)x + b(\tau), \quad [\text{П.21, стр. 441—442}],$$

$$z = \frac{a}{x + b\tau}, \quad [\text{П.21, стр. 442}]$$

и т. д., имеющие частный характер, т. е. адресуемые к конкретным видам уравнений.

5.4. *Методы, основанные на преобразовании обеих переменных при помощи двух новых переменных.* Основу методов этой группы составляет преобразование обеих переменных τ и x , а иногда и вместе с первой производной $dx/d\tau = p$, в новые переменные η и z , так что в общем случае:

$$\eta = \Psi(\tau, x, p), \quad z = \Phi(\tau, x, p),$$

или

$$\tau = T(\eta, z), \quad x = X(\eta, z).$$

Регулярных общих приемов преобразования обеих переменных по условиям приведения исходного уравнения к заданному, к сожалению, нет. Разработанные приемы имеют относительно «частный характер» и адресуются к уравнениям определенных видов. Однако по отношению к уравнениям этих определенных видов и для конкретных задач, состоящих либо в отыскании решений, либо в приведении исходного уравнения заданному, известны методы и приемы, которые с полным правом можно назвать регулярными. Таких регулярных методов немного: по отношению к уравнениям первого порядка — так называемое преобразование Лежандра, а по отношению к уравнениям второго и более высоких порядков — методы факторизации и переменного масштаба.

Огромное число различных преобразований обеих переменных, благодаря которым удается переходить от заданных уравнений к более простым, можно условно отнести к «нерегулярным методам»; успех в выборе подходящего преобразования определяется математической интуицией и опытом выполняющего расчет, а также наличием справочного материала. Большое число подобных преобразований можно найти в книге Э. Камке [П.21]. Значение подобных нерегулярных методов относительно невелико, так как с их помощью редко удается решить встречающиеся задачи. Некоторые из них упоминаются при изучении метода 5.4г.

Трудности в создании общих методов для определения «преобразующих» функций T , X (или Ψ , Φ) состоят в следующем.

Пусть

$$\tau = T(\eta, z), \quad x = X(\eta, z),$$

$$d\tau = \frac{\partial T}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial T}{\partial z} dz,$$

$$dx = \frac{\partial X}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial X}{\partial z} dz.$$

тогда

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = \frac{\frac{\partial X}{\partial \eta} + \frac{\partial X}{\partial z} \frac{dz}{d\eta}}{\frac{dT}{d\eta} + \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{dz}{d\eta}}, \quad \left(\frac{\partial(\tau, x)}{\partial(\eta, z)} \neq 0 \right).$$

Подставив τ , x , $dx/d\tau$ в исходное дифференциальное уравнение и сопоставив последнее с заданным (к которому должно быть приведено исходное), можно получить систему дифференциальных уравнений в частных производных, которую и предстоит решить относительно функций T и X (совершенно аналогично, но иногда существенно проще, обстоит дело с функциями Ψ и Φ). К сожалению, подобные задачи, как правило, решить не легче, чем исходное уравнение.

Перейдем к рассмотрению регулярных методов, а затем рассмотрим несколько «нерегулярных приемов».

5.4а. *Преобразование Лежандра обеих переменных.* В заданном дифференциальном уравнении первого порядка

$$F\left(\tau, x, \frac{dx}{d\tau}\right) = 0.$$

введем новые переменные $p = dx/d\tau$, $z = \tau p - x$. Так как

$$dz = \tau dp + p d\tau - dx, \text{ а } p d\tau = (dx/d\tau) d\tau = dx,$$

то $dz = \tau dp$ и $\tau = dz/dp$.

Обратим внимание на свойство дуальности «старых» и «новых» переменных¹⁾:

новые переменные: $p = \frac{dx}{d\tau}$ $z = \begin{cases} \tau p - x, \\ \tau \frac{dx}{d\tau} - x \end{cases}$	старые переменные: $\tau = \frac{dz}{dp}$ $x = \begin{cases} p\tau - z, \\ p \frac{dz}{dp} - z. \end{cases}$
--	---

Процедура решения на основе преобразования Лежандра состоит в следующем. В заданное дифференциальное уравнение вводим новые переменные

$$\tau = dz/dp, \quad x = p(dz/dp) - z, \quad dx/d\tau = p$$

и приходим к новому уравнению

$$F\left(\frac{dz}{dp}, p \frac{dz}{dp} - z, p\right) = 0.$$

Последнее уравнение часто оказывается проще исходного; если его удастся решить, можно записать $z = f(p, c)$. Подставляя эту запись в выражения «старых переменных»

$$\tau = dz/dp, \quad x = p(dz/dp) - z,$$

находим решение исходного уравнения в параметрической форме:

$$\tau = \tau(p, C), \quad x = x(p, C).$$

Рассмотрим примеры применения преобразования Лежандра.

Пример 1. Решим нелинейно-параметрическое уравнение

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 - 2 \frac{x}{\tau} \frac{dx}{d\tau} - 4 \frac{x}{\tau} = 0$$

на основе преобразования Лежандра. Подставив в него $dx/d\tau = p$, $\tau = dz/dp$, $x = p(dz/dp) - z$, получим:

$$p^2 - 2 \frac{dp}{dz} \left(p \frac{dz}{dp} - z \right) p - 4 \frac{dp}{dz} \left(p \frac{dz}{dp} - z \right) = 0,$$

¹⁾ См., например, [П.21, стр. 58; П.29, стр. 136].

$$p^2 - 2p^2 + 2pz \frac{dp}{dz} - 4p + 4z \frac{dp}{dz} = 0,$$

$$\frac{dz}{dp} = \frac{2p + 4}{p^2 + 4p} z.$$

В результате приходим к уравнению с разделенными переменными:

$$\frac{dz}{z} = \frac{4p + 4}{p^2 + 4p} dp.$$

Интегрируя, находим $z = C_1(p^2 + 4p)$.

Подставляя найденное решение в формулы для «старых переменных», имеем:

$$\tau = \frac{dz}{dp} = 2C_1(p + 2),$$

$$x = p\tau - z = p2C_1(p + 2) - C_1(p^2 + 4p) = C_1p^2.$$

Полученные формулы $\tau(p)$, $x(p)$ дают решения в параметрической форме. В данном случае не составляет труда исключить параметр p и получить решение в виде $x(\tau)$.

Пример 2. Нелинейно-параметрическое уравнение, не разрешенное относительно производной

$$\frac{dx}{d\tau} = m \ln \tau + \ln \left(\tau \frac{dx}{d\tau} - x \right), \quad m \neq -1$$

решим на основе использования преобразования Лежандра. Пользуясь формулами преобразования: $dx/d\tau = p$, $\tau = dz/d\tau$, $\tau(dx/d\tau) - x = z$, перепишем заданное уравнение в виде

$$p = m \ln \frac{dz}{dp} + \ln z$$

и разрешим его относительно dz/dp :

$$\frac{dz}{dp} = e^{\frac{p}{m}} z^{-\frac{1}{m}}.$$

В последнем уравнении переменные разделяются; интегрируя, получаем

$$z = \left[(m + 1) e^{\frac{p}{m}} + C \right]^{\frac{m}{m+1}}.$$

Теперь можно записать решение в параметрической форме:

$$\tau = \frac{dz}{dp} = \left[(m + 1) e^{\frac{p}{m}} + C \right]^{-\frac{1}{m+1}} e^{\frac{p}{m}},$$

$$x = p\tau - z = p \left[(m + 1) e^{\frac{p}{m}} + C \right]^{-\frac{1}{m+1}} e^{\frac{p}{m}} - \left[(m + 1) e^{\frac{p}{m}} + C \right]^{\frac{m}{m+1}}.$$

Полученные выражения можно несколько упростить; однако здесь эти упрощения не приводятся.

5.46. Метод перехода от параметрических дифференциальных уравнений к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами на основе факторизации оператора. Заданное параметрическое уравнение с оператором

$$L = p^n + a_{n-1}(\tau)p^{n-1} + \dots + a_1(\tau)p + a_0(\tau),$$

где $p=d/d\tau$ можно представить в виде произведения линейных операторов первого порядка:

$$L = \prod_{k=1}^n [p - \alpha_k(\tau)];$$

такое представление называется факторизацией оператора L .

С помощью преобразований переменных:

$$S: x = e^{-\frac{1}{n} \int a_1(\tau) d\tau} u; \quad T: d\eta = \sqrt[n]{a_n(\tau)} d\tau,$$

которые могут применяться как отдельно (S или T), так и вместе (S и T), а также в виде произведения, взятого в том или ином порядке (TS или ST), можно оператор Lx с переменными коэффициентами перевести в оператор Mz с постоянными коэффициентами:

$$M = \prod_{k=1}^n (p - r_k),$$

где r_k — некоторые постоянные.

Этот метод подробно изложен в работах Л. М. Берковича [П.8, П.9, П.10], сформулировавшего теоремы, которые устанавливают возможность перехода, и разработавшего регулярные приемы выбора подходящих преобразований. В указанных работах приведен ряд примеров.

5.4в. Метод перехода от нелинейных и параметрических дифференциальных уравнений к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами на основе «переменного масштаба». Термин «переменный масштаб» введен Н. Г. Бондарем [П.12], разработавшим регулярные приемы преобразования обеих переменных для перехода от заданных уравнений к более простым, и именно — к уравнениям с постоянными коэффициентами.

Как уже указывалось, переход от параметрических уравнений к линейным иногда удается осуществить на основе преобразования только одной независимой переменной τ (методы подгруппы 5.1) и весьма часто — на основе преобразования обеих переменных (метод факторизации оператора, 5.4б). Здесь пойдет речь о преобразовании нелинейных, а также параметрических уравнений на основе приемов, разработанных Н. Г. Бондарем и названных им «методом переменного масштаба».

Для пояснения метода рассмотрим простейшее уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + R(x) = 0. \quad (1)$$

Несмотря на то, что решение этого уравнения легко найти (см. метод 4.2а) при помощи подстановки $x=y$ в виде обратной функции

$$\tau = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{-2 \int R(x) dx + C}};$$

на этом простом примере легче показать то главное, что составляет основу приемов Н. Г. Бондаря.

В монографии Н. Г. Бондаря [П.12] дается методика интегрирования и весьма сложных нелинейных, а также параметрических уравнений. Представим функцию $R(x)$ из ур-ния (1) в виде

$$R(x) = f(x)f'(x), \quad (2)$$

где

$$f(x) = \sqrt{2 \int_0^x R(\xi) d\xi}. \quad (3)$$

Выражение (3) следует из (2) непосредственно. Подставляя (2) в (1), получаем

$$\ddot{x} + f(x)f'(x) = 0. \quad (4)$$

Совершим переход от нелинейного уравнения (4) к линейному уравнению вида:

$$z''(\varphi) + z(\varphi) = 0. \quad (5)$$

С этой целью введем новые переменные:

$$f[x(\tau)] = z[\varphi(\tau)], \quad f(x) = z(\varphi). \quad (6)$$

Дифференцируя (6) по τ , находим:

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{dz}{d\tau}, \quad \frac{df}{dx} \frac{dx}{d\tau} = \frac{dz}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\tau},$$

$$f'(x)\dot{x} = z'(\varphi)\dot{\varphi}.$$

Теперь потребуем, чтобы

$$f'(x) = \dot{\varphi}, \quad z'(\varphi) = \dot{x}. \quad (7)$$

Дифференцируя второе равенство (7) по τ , получаем

$$\ddot{x} = \frac{d}{d\tau} [z'(\tau)] = \frac{dz'}{d\tau} = \frac{dz'}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\tau} = z'' \dot{\varphi} = z'' f'(x).$$

Введя \ddot{x} в (4), запишем:

$$z'' f'(x) + f(x) f'(x) = 0,$$

и так как согласно (6) $f(x) = z(\varphi)$, то, если $f'(x) \neq 0$, приходим к новому дифференциальному уравнению

$$z'' + z = 0, \quad (8)$$

решение которого

$$z(\varphi) = A \cos \varphi(\tau) + B \sin \varphi(\tau) \quad (9)$$

или

$$f(x) = A \cos \varphi(\tau) + B \sin \varphi(\tau). \quad (10)$$

Последнее выражение представляет собой решение уравнения (1), но в неявном виде [напомним, что функция $\varphi(\tau)$ выражается через $f(x)$ при помощи первого равенства (7)]. Для того чтобы получить решение в явном виде, запишем формулу (10) иначе:

$$f(x) = C \cos[\varphi(\tau) - \gamma] = C \cos \psi(\tau), \quad (11)$$

где

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \operatorname{tg} \gamma = B/A, \quad \psi(\tau) = \varphi(\tau) - \gamma, \quad \dot{\psi} = \dot{\varphi}.$$

Продифференцируем выражение (11) по τ :

$$\frac{df}{d\tau} = -C \sin \psi \dot{\psi}, \quad \frac{df}{dx} \frac{dx}{d\tau} = -C \sin \psi \dot{\psi},$$

$$f'(x)\dot{x} = -C \sin \psi \dot{\psi}.$$

Так как согласно первому равенству (7) $f'(x) = \dot{\varphi}$, то

$$\dot{x} = -C \sin \psi(\tau). \quad (12)$$

Сопоставляя формулы (12) и (11), имеем

$$\dot{x}^2 + f^2(x) = C^2,$$

откуда

$$\dot{x} = \sqrt{C^2 - f^2(x)} \quad (13)$$

и

$$\tau = \int \frac{dx}{\sqrt{C^2 - f^2(x)}}. \quad (14)$$

Таким образом, получено решение в явном виде, но в форме обратной функции $\tau(x)$. Постоянная C определяется по начальным условиям $f(x_0)$ и $x(0)$ из ф-лы (13).

Пример 3. Дано нелинейное дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + a \sin x = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0,$$

т. е.

$$R(x) = a \sin x.$$

Находим по ф-ле (3) функцию $f(x)$:

$$f(x) = \sqrt{2 \int_0^x R(\xi) d\xi} = \sqrt{2a \int_0^x \sin \xi d\xi} = \sqrt{2a(1 - \cos x)} = 2\sqrt{a} \sin \frac{x}{2}.$$

При $\tau=0$ $x=x_0$, $f(x_0) = 2\sqrt{a} \sin(x_0/2)$.

Так как $\dot{x} = \sqrt{C^2 - f^2(x)}$, то $v_0 = \sqrt{C^2 - f^2(x_0)}$, т. е. $C^2 = v_0^2 + f^2(x_0) = v_0^2 + 4a \sin^2 \frac{x_0}{2}$,

и согласно (14)

$$\tau = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{4a \sin^2 \frac{x_0}{2} + v_0^2 - 4a \sin^2 \frac{x}{2}}}.$$

Здесь было рассмотрено простое нелинейное уравнение второго порядка с тем, чтобы наилучшим образом проиллюстрировать основную идею метода; Н. Г. Бондарем в его монографии [П.12] исследованы нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка, содержащие и первую производную, а также параметрические уравнения второго порядка. Там же дана классификация приемов; относящихся к методу переменного масштаба, и приведена обширная библиография.

5.4г. Различные нерегулярные приемы перехода к более простым уравнениям на основе преобразования обеих переменных. Иногда удается упростить исходное дифференциальное уравнение при помощи подстановок, содержащих преобразование обеих переменных, которые не поддаются классификации; такие приемы принято называть нерегулярными. Так, в 1883 г. Ж. Буссинеск дал решение параметрического уравнения ¹⁾

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{a^2}{(b\tau - \tau^2)^2} x = A$$

путем преобразования обеих переменных по формулам:

$$\tau = \frac{b}{1 - e^{-2\eta}}, \quad x = \frac{Ab^2}{8} z \frac{1}{\operatorname{ch} \eta}$$

или

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \frac{\tau}{b - \tau}, \quad z = \frac{8}{Ab^2} x \operatorname{ch} \eta,$$

использование которых приводит к простому уравнению

$$\frac{d^2z}{d\eta^2} + k^2 z = \frac{2}{\operatorname{ch}^3 \eta}, \quad \text{где} \quad k^2 = (2a/b)^2 - 1.$$

¹⁾ См. [56, стр. 318—319].

В качестве второго примера можно дать уравнение ¹⁾

$$\tau^4 \ddot{x} + (\tau x - x)^3 = 0,$$

приводимое к виду:

$$\frac{d^2 z}{d \eta^2} + \frac{dz}{d \eta} + \left(\frac{dz}{d \eta} \right)^3 = 0$$

путем подстановок $\tau = e^\eta$ $x = \tau z$. Последнее уравнение при помощи еще одной подстановки $dz/d\eta = y$ преобразуется к еще более простому:

$$\frac{dy}{d \eta} + y + y^3 = 0.$$

Ряд подобных примеров можно найти в книге Э. Камке [П.21].

П.6. Методы решения дифференциальных уравнений на основе перехода к интегральным уравнениям

В некоторых случаях решение дифференциального уравнения (или изучение характера решения) оказывается более доступным, если предварительно совершен переход от заданного дифференциального уравнения к эквивалентному интегральному. При таком подходе, естественно, возникают две самостоятельные задачи: 1) переход к интегральному уравнению, 2) решение интегрального уравнения.

Решение интегральных уравнений прямого отношения к решению дифференциальных уравнений не имеет. В нижеследующем изложении вопросы решения интегральных уравнений практически не рассматриваются. Не рассматриваются также методы решения дифференциальных уравнений на основе применения интегральных преобразований (Лапласа, Меллина и др.), несмотря на то, что они используются не только по отношению к линейным, но и по отношению к параметрическим уравнениям; эти методы подробно освещены в классической литературе (см., например [П.1, гл. VIII]).

Здесь будут рассмотрены только те методы, которые относительно широко используются при расчете нелинейных и параметрических цепей:

- общий метод перехода от линейных и параметрических дифференциальных уравнений к интегральным;
- метод интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка на основе последовательных приближений (метод Пикара);
- метод перехода от нелинейных и параметрических дифференциальных уравнений к интегральным на основе использования функции Грина;
- метод записи решений линейных дифференциальных уравнений в виде интегральных соотношений.

Последний метод включен в шестую группу условно, так как в нем нет интегрального уравнения как такового; напомним, что в интегральном уравнении искомая функция $x(\tau)$ находится под знаком интеграла. Напомним также общий вид интегрального уравнения:

$$x(\tau) = \lambda \int_a^b K(\tau, s) \psi[x(s)] ds + f(\tau).$$

Здесь $x(\tau)$ — искомая функция; $K(\tau, s)$ — ядро уравнения (считается известным); λ — численный параметр; $f(\tau)$ — «внешнее воздействие» (считается известным); $\psi(z)$ — нелинейная функция (считается известной).

¹⁾ См. [П.28, стр. 133—134].

Если $\psi(z) \equiv z$, интегральное уравнение называется линейным и записывается в виде,

$$x(\tau) = \lambda \int_a^b K(\tau, s) x(s) ds + f(\tau).$$

Если $b = \text{const}$, уравнение называется интегральным уравнением Фредгольма второго рода; если верхний предел переменный, т. е. $b = \tau$, — интегральным уравнением Вольтерра второго рода.

Если $b = \text{const}$, уравнение называется интегральным уравнением Фредгольма однородным.

Уравнением первого рода называется уравнение, в котором левая часть равна нулю (его часто называют уравнением Абеля); обычно оно записывается так

$$\int_a^b K(\tau, s) x(s) ds = f(\tau).$$

Методы решения интегральных уравнений широко освещены в учебной и монографической литературе, например, [П.38, П.25, П.18].

6.1. *Общий метод перехода от линейных и параметрических дифференциальных уравнений к интегральному.* В теории интегральных уравнений доказываются ¹⁾, что дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{d^n x}{d\tau^n} + a_1(\tau) \frac{d^{n-1} x}{d\tau^{n-1}} + \dots + a_n(\tau) x = f(\tau), \quad \tau > 0,$$

$$x(0) = C_0, \quad \dot{x}(0) = C_1, \quad \dots, \quad x^{n-1}(0) = C_{n-1}$$

эквивалентно интегральному уравнению

$$x(\tau) + \int_0^\tau K(\tau, s) x(s) ds = F(\tau),$$

где

$$K(\tau, s) = \sum_{k=1}^n a_k(\tau) \frac{(\tau-s)^{k-1}}{(k-1)!},$$

$$F(\tau) = f(\tau) - C_{n-1} a_1(\tau) - (C_{n-1} \tau + C_{n-2}) a_2(\tau) - \dots - \left(C_{n-1} \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + C_1 \tau + C_0 \right) a_n(\tau).$$

Для дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + a_1(\tau) \frac{dx}{d\tau} + a_2(\tau) x = f(\tau),$$

$$x(0) = C_0, \quad \dot{x}(0) = C_1$$

получаем:

$$K(\tau, s) = a_1(\tau) + a_2(\tau)(\tau-s),$$

$$F(\tau) = f(\tau) - C_1 a_1(\tau) - (C_0 + C_1 \tau) + a_2(\tau),$$

¹⁾ См., например, [П.38, стр. 107; П.18, стр. 24—26; П.25, стр. 16—18].

т. е. искомая функция $x(\tau)$ определяется интегральным уравнением:

$$x(\tau) + \int_0^{\tau} [a_1(\tau) + a_2(\tau)(\tau - s)] x(s) ds = f(\tau) - C_1 a_1(\tau) - (C_0 + C_1 \tau) a_2(\tau).$$

Пример 1. Составим интегральное уравнение по заданному дифференциальному:

$$\ddot{x} + \tau \dot{x} + x = 0, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

В данном случае: $f(\tau) = 0$, $a_1(\tau) = \tau$, $a_2(\tau) = 1$, $C_1 = 0$, $C_0 = 1$; получаем интегральное уравнение

$$x(\tau) + \int_0^{\tau} [\tau + (\tau - s)] x(s) ds = -1$$

или

$$x(\tau) = -1 - \int_0^{\tau} (2\tau - s) x(s) ds.$$

6.2. Метод интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка на основе последовательных приближений (метод Пикара). Заданное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{d\tau} = F(\tau, x), \quad x(\tau_0) = x_0$$

после интегрирования обеих частей по τ

$$\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{dx}{d\tau} d\tau = x(\tau) - x_0 = \int_{\tau_0}^{\tau} F[\tau, x(\tau)] d\tau^1$$

непосредственно преобразуется в интегральное уравнение

$$x(\tau) = x_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} F[\tau, x(\tau)] d\tau,$$

имеющее единственное решение.

На основе этого интегрального уравнения построен известный метод последовательных приближений Пикара, согласно которому выбирают (аппроксимируют) начальное решение в виде $x^{[0]}(\tau)$ — нулевое приближение — и затем вычисляют последовательные приближения искомого решения по формулам:

$$x^{[l+1]}(\tau) = x_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} F[\tau, x^{[l]}(\tau)] d\tau.$$

Пример 2. Найдём решение дифференциального уравнения

$$\dot{x} + x^2 = \tau^2, \quad x(0) = 0, \quad \tau > 0$$

методом последовательных приближений.

¹⁾ Вообще говоря, следует писать не $\int_{\tau_0}^{\tau} F[\tau, x(\tau)] d\tau$, а $\int_{\tau_0}^{\tau} F[s, x(s)] ds$; однако к недоразумениям подобная запись не приводит.

Переходим к интегральному уравнению:

$$x(\tau) = \int_0^{\tau} [\tau^2 - x^2(\tau)] d\tau.$$

Нулевое приближение: $x^{[0]} = 0$.

Первое приближение:

$$x^{[1]}(\tau) = \int_0^{\tau} (\tau^2 - 0) d\tau = \frac{\tau^3}{3};$$

последующие приближения:

$$x^{[2]}(\tau) = \int_0^{\tau} \left(\tau^2 - \frac{\tau^6}{9} \right) d\tau = \frac{\tau^3}{3} - \frac{\tau^7}{63};$$

$$\begin{aligned} x^{[3]}(\tau) &= \int_0^{\tau} \left[\tau^2 - \left(\frac{\tau^3}{3} - \frac{\tau^7}{63} \right)^2 \right] d\tau = \int_0^{\tau} \left(\tau^2 - \frac{\tau^6}{9} + \frac{2}{3 \cdot 63} \tau^{10} - \frac{\tau^{14}}{63^2} \right) d\tau = \\ &= \frac{\tau^3}{3} - \frac{\tau^7}{68} + \frac{2\tau^{11}}{2079} - \frac{\tau^{15}}{63^2 \cdot 15} + \dots \end{aligned}$$

Отметим в заключение, что для выяснения сходимости и расчета числа необходимых приближений разработаны соответствующие оценки (см., например, [П.21, стр. 33—35] и др.).

6.3. Метод перехода от нелинейных и параметрических уравнений к интегральным на основе использования функции Грина. В теории дифференциальных уравнений показывается¹⁾, что решение параметрического уравнения с правой частью

$$L[x] = a_0(\tau)x^{(n)}(\tau) + a_1(\tau)x^{(n-1)} + a_n(\tau)x = f(\tau)$$

при заданных краевых (или начальных) условиях можно представить в виде интегрального соотношения

$$x(\tau) = \int_a^b G(\tau, s) f(s) ds,$$

в котором функция Грина $G(\tau, s)$ представляет собой решение соответствующего однородного дифференциального уравнения $L[x] = 0$ при тех же краевых (начальных) условиях.

В технических приложениях, связанных с линейными системами, функцию Грина часто определяют не как решение однородного дифференциального уравнения при заданных краевых или начальных условиях, а как решение неоднородного дифференциального уравнения с правой частью в виде дельта-функции и нулевых начальных условиях; при этом функцию Грина называют импульсной переходной характеристикой, а соответствующее интегральное соотношение — интегралом Дюамеля [37, стр. 270—271].

Для дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + b_0 \frac{dx}{d\tau} + a_0x = f(\tau), \quad f(\tau) \equiv 0 \text{ при } \tau < 0$$

¹⁾ См., например, [П.34, т. 1, стр. 233—245; П.25, стр. 123—135].

импульсная переходная характеристика $h(\tau)$ представляет собой решение уравнения

$$\frac{d^2h}{d\tau^2} + b_0 \frac{dh}{d\tau} + a_0 h = \delta(\tau), \tau \geq 0$$

при нулевых начальных условиях; искомое решение заданного уравнения в этом случае определяется интегральным соотношением, называемым интегралом Дюамеля:

$$x(\tau) = \int_0^{\tau} h(\tau - s) f(s) ds.$$

Теперь нетрудно перейти от более сложных дифференциальных уравнений (и в первую очередь, нелинейных) к интегральным уравнениям второго рода (Фредгольма или Вольтерра) на основе использования функции Грина.

Пример. Дано нелинейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + b_0 \frac{dx}{d\tau} + [a_0 + a(x)] x = f(\tau), \tau > 0;$$

перепишем его следующим образом:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + b_0 \frac{dx}{d\tau} + a_0 x = f(\tau) - a(x) x.$$

Используя запись интеграла Дюамеля, приходим к следующему нелинейному интегральному уравнению:

$$x(\tau) = \int_0^{\tau} h(\tau - s) \{f(s) - a[x(s)] x(s)\} ds.$$

Этот метод развит в работах Е. Н. Розенвассера; подробное изложение этих работ вместе с многочисленными примерами можно найти в его монографии [63].

П.7. Таблица соответствия методов интегрирования типам дифференциальных уравнений

Условный номер метода	Метод	Дифференциальные уравнения
-----------------------	-------	----------------------------

Методы непосредственного интегрирования

1	Методы непосредственного интегрирования	$\frac{dx}{d\tau} = \Phi(x); \quad \frac{dx}{d\tau} = f(\tau) \Phi(x);$ $P(\tau, x) dx + Q(\tau, x) d\tau = 0,$ $\frac{\partial P}{\partial \tau} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{d^n x}{d\tau^n} = f(x)$
---	---	---

Условный номер метода	Метод	Дифференциальные уравнения
Методы аппроксимации решений		
2.1	Метод выбора решения в виде линейной комбинации экспоненциальных функций	Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами
2.2	Методы поиска решения в виде рядов и полиномов	Практически все дифференциальные уравнения
2.3	Метод аппроксимации решения на основе «точного исчисления»	Практически все относительно простые дифференциальные уравнения
2.4	Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)	Неоднородные дифференциальные уравнения — параметрические и линейные
2.5	Метод вариации параметров	Практически все дифференциальные уравнения при условии, что априорная информация о решении достаточна, чтобы представить его в виде функциональной зависимости с неопределенными переменными параметрами (см. текст)
2.6	Метод малого параметра	Те дифференциальные уравнения, для которых принятое решение в виде ряда быстро сходится (см. текст)
2.7 2.7а 2.7б 2.7в	Методы минимизации невязки Метод наименьших квадратов Метод моментов Метод коллокации	Общих рекомендаций нет (см. текст)
2.8	Метод фазовых интегралов (метод БВК)	$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha(t) \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f(t);$ <p>это уравнение приводится к виду</p> $\frac{d^2u}{dt^2} + \nu^2(t) u = F(t);$ <p>решение тем точнее, чем сильнее неравенство</p> $ \nu ^2 \gg \left \frac{3}{4} \left(\frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{d^2\nu}{dt^2} - \frac{1}{\nu} \right $

Условный номер метода	Метод	Дифференциальные уравнения
Методы аппроксимации дифференциального оператора		
3.1	Метод упрощения дифференциального оператора	Общих рекомендаций нет (см. текст)
3.2	Метод линеаризации дифференциальных уравнений по участкам	Общих рекомендаций нет (см. текст)
3.3	Метод аппроксимации нелинейной части дифференциального оператора суммой экспонент	Уравнение вида $\sum_{n=1}^N a_n \frac{d^n x}{d \tau^n} + \varphi(x) = 0$
3.4	Метод усреднения коэффициентов	Общих рекомендаций нет (см. текст)
3.5	Методы «замораживания переменных»	$\frac{dx}{d \tau} = F(\tau, x);$
3.5а	Метод изоклин	$\frac{d^2 x}{d \tau^2} + a_1(x) \frac{dx}{d \tau} + a_0(x) x = 0$
3.5б	Дельта-метод	$\frac{d^2 x}{d \tau^2} + \varphi(x, x, \tau) = 0$
3.5в	Метод Льенара	$\frac{d^2 x}{d \tau^2} - \varphi(x) + x = 0$
3.5в	Метод Пелла	$\frac{d^2 x}{d \tau^2} - \varphi(x) + a(x) = 0$
3.5г	Метод Каэна	$\frac{d^2 x}{d \tau^2} + a(x) \frac{dx}{d \tau} + \varphi(x) = 0;$ $\frac{d^2 x}{d \tau^2} + b(x) \left(\frac{dx}{d \tau} \right)^2 + a(x) \frac{dx}{d \tau} + \varphi(x) = 0$
	Метод Дробова	$\frac{d^2 x}{d \tau^2} + a \frac{dx}{d \tau} + x + \frac{d}{d \tau} [\Phi(x)] + \varphi(x) = A$

Условный номер метода	Метод	Дифференциальные уравнения
3.6 3.6а	<p>Методы преобразования дифференциального оператора</p> <p>Метод интегрирования дифференциальных уравнений, левая часть которых является точной производной некоторой более простой функции</p>	<p>Дифференциальные уравнения, отвечающие условиям, сформулированным в названии метода</p>
3.6б	<p>Метод интегрирования дифференциальных уравнений, характеризуемых определенной связью между коэффициентами</p>	$a(\tau)\ddot{x} + b(\tau)\dot{x} + c(\tau)x = 0$ <p>при условии, что</p> $c(\tau) = \dot{b}(\tau) - \ddot{a}(\tau)$

Методы перехода к более простым дифференциальным уравнениям на основе преобразования искомой переменной

4.1 4.1а	<p>Методы преобразования искомой переменной x</p> <p>Метод представления x в виде произведения двух новых переменных $x = uv$</p>	<p>Уравнения</p> $\dot{x} + a(\tau)x = f(\tau), \quad x + a(\tau)x + b(\tau)\varphi(x) = 0$ <p>приводятся к уравнениям с разделенными переменными;</p> $\ddot{x} + b(\tau)\dot{x} + a(\tau)x = f(\tau)$ <p>приводится к уравнению</p> $\ddot{x} + v(\tau)x = F(\tau),$ <p>а иногда и к уравнению с постоянными коэффициентами (см. текст);</p>
		$\sum_{n=1}^N (a_{kn} \tau^k + a_{(k-1)n} \tau^{k-1} + \dots + a_{0n}) \times$ $\times x^{(n)} = 0, \quad a_{kn} \neq 0$ <p>приводится (при определенных условиях (см. текст) к уравнению</p> $\sum_{n=1}^N A_n x^{(n)} = 0, \quad A_n \neq 0, \quad A_n = \text{const}$

Условный номер метода	Метод	Дифференциальные уравнения
4.1б	Метод, основанный на представлении искомой переменной в виде произведения новой переменной, либо на независимую переменную, либо на степень независимой переменной	Уравнения $\frac{dx}{d\tau} + f\left(\frac{x}{\tau}\right) = 0, \quad \frac{dx}{d\tau} = \frac{M(\tau, x)}{N(\tau, x)},$ если $M(\tau, x)$ и $N(\tau, x)$ являются однородными одинаковой степени или обобщенными (см. текст); в последнем случае применяется вторая подстановка
4.1в	Метод, основанный на функциональном преобразовании искомой переменной $x = e^{\int u dt}, \quad u = \dot{x}/x$	Уравнение $F_0(\tau, x, \dot{x}, \ddot{x}) = xF\left(\tau, \frac{\dot{x}}{x}, \frac{\ddot{x}}{x}\right) = 0$ переводится в новое, порядок которого на единицу ниже
4.1г	Метод, основанный на представлении искомой переменной в виде $x = u/u, \quad u = e^{\int x d\tau}$	Уравнение Риккати $\frac{dx}{d\tau} + A(\tau)x^2 + B(\tau)x + D(\tau) = 0$ при помощи подстановки $x = \dot{u}/Au$ переводится в уравнение $\frac{d^2u}{d\tau^2} + \alpha(\tau)\frac{du}{d\tau} + \beta(\tau)u = 0,$ где $\alpha(\tau) = B(\tau) - \frac{\dot{A}(\tau)}{A(\tau)}, \quad \beta(\tau) = A(\tau)D(\tau)$
4.2	Методы, основанные на преобразовании производной x	
4.2а	Метод замены x $\dot{x} = y$	Уравнение $F(\tau, \dot{x}, \ddot{x}) = 0$ переводится в новое, порядок которого на единицу ниже; $F(x, y, y') = 0, \quad F(\dot{x}, \ddot{x}) = 0, \quad F(x, \ddot{x}) = 0$ переводятся в новые, более простые
4.2б	Метод подстановки $\dot{x} = xz$	Совпадает с методом 4.1в

Условный номер метода	Метод	Дифференциальные уравнения
4.2в	Метод представления производной в виде параметра $x = p$	$x = F(x), \quad x = F(\tau, \ddot{x}),$ $\tau = F(\dot{x}), \quad \tau = F(x, \dot{x})$
4.3	Метод преобразования вида $\varphi(x)\dot{x} = z, \quad z = \int \varphi(x) dx$	$x^{-n}\dot{x} + a(\tau)x^{-n+1} - b(\tau) = 0,$ $\varphi(x)\dot{x} + a(\tau) \left[\int \varphi(x) dx \right] - b(\tau) = 0$
Метод перехода к более простым уравнениям на основе преобразования либо τ , либо τ и x		
5.1	Методы, основанные на преобразовании τ	
5.1а	Метод, основанный на линейном преобразовании $\tau - \eta = b\tau + c$	$\sum_{n=1}^N a_n (b\tau + c)^n \frac{d^n x}{d\tau^n} = f(\tau)$
5.16	Метод, основанный на нелинейном преобразовании $\tau - \eta = \psi(\tau)$	<p>Уравнения</p> $\frac{dx}{d\tau} + a(\tau)x = f(\tau), \quad \frac{dx}{d\tau} + a(\tau)\varphi(x) = f(\tau)$ $\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^k + a(\tau)\varphi(x) = f(\tau)$ <p>переводятся в уравнения с постоянными коэффициентами;</p> $\frac{d^2x}{d\tau^2} + b(\tau)\frac{dx}{d\tau} + a(\tau)\varphi(x) = 0$ <p>переводится либо в уравнение с постоянными коэффициентами, либо в самосопряженное, либо в свободное от члена с первой производной</p> $\tau^2 \frac{d^2x}{d\tau^2} + \tau \frac{dx}{d\tau} + x = 0,$ <p>переводится в уравнение с постоянными коэффициентами; аналогично</p> $\tau^2 \frac{d^2x}{d\tau^2} + A\tau \frac{dx}{d\tau} + Bx = 0,$ <p style="text-align: center;">$A, B = \text{const}$</p> <p>также переводится в уравнение с постоянными коэффициентами</p>

Условный номер метода	Метод	Дифференциальные уравнения
5.2	Метод, основанный на перемене мест обеих переменных	<p>Общих рекомендаций нет (см. текст). Легко преобразуется, например, уравнение вида</p> $\frac{dx}{d\tau} - \frac{M(x)}{N(\tau, x)} = 0$
5.3	<p>Метод, основанный на преобразовании</p> $z = \Phi(\tau, x)$	$\frac{dx}{d\tau} - F(a\tau + bx + c) = 0,$ $\frac{dx}{d\tau} - F\left(\frac{A\tau + Bx + C}{a\tau + bx + c}\right) = 0, \quad Ab - aB \neq 0,$ $\frac{dx}{d\tau} = \tau^{a-1} x^{1-b} F\left(\frac{\tau^a}{a} \pm \frac{x^b}{b} + c\right).$ <p>Общих рекомендаций нет (см. текст)</p>
5.4	Методы, основанные на преобразованиях обеих переменных при помощи двух новых переменных	
5.4a	<p>Преобразование Лежандра</p> $p = \frac{dx}{d\tau},$ $z = \tau p - x$	<p>Если $F\left(\tau, x, \frac{dx}{d\tau}\right) = 0$ преобразуется в уравнение</p> $F\left(\frac{dz}{dp}, p \frac{dz}{dp} - z, p\right) = 0,$ <p>которое оказывается более простым, например:</p> $\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^k + A \frac{x}{\tau} \frac{dx}{d\tau} + B \frac{x}{\tau} = 0$
5.4б	Метод факторизации оператора	$Lx = [p^n + a_{n-1}(\tau)p^{n-1} + \dots + a_1(\tau)p + a_0]x,$ $p = \frac{d}{d\tau}$ <p>переводится в</p> $Mz = \prod_{k=1}^n (p - r_k)z, \quad r_k = \text{const}$

Условный номер метода	Метод	Дифференциальные уравнения
5.4в	Метод переменного масштаба	Общих рекомендаций нет (см. текст)
5.4г	Нерегулярные приемы	Общих рекомендаций нет (см. текст)

Методы перехода к интегральным уравнениям

6.1	Общий метод перехода от линейных и параметрических уравнений к интегральным	<p>Уравнение</p> $\sum_{n=0}^N a_n(\tau) \frac{d^n x}{d\tau^n} = f(\tau), \tau > 0$ <p>заменяется интегральным:</p> $x(\tau) + \int_0^{\tau} K(\tau, s)x(s)ds = F(\tau)$
6.2	Метод интегрирования на основе последовательных приближений (метод Пикара)	$\frac{dx}{d\tau} = F(\tau, x), x(\tau_0) = x_0,$ $x^{[l+1]}(\tau) = x_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} F[\tau, x^{[l]}(\tau)] d\tau$
6.3	Метод перехода к интегральным уравнениям на основе использования функции Грина	<p>Параметрические уравнения</p> $\sum_{n=0}^N a_n(\tau) \frac{d^n x}{d\tau^n} = f(\tau);$ <p>решение имеет вид</p> $x(\tau) = \int_a^b G(\tau, s)f(s)ds.$ <p>Нелинейные уравнения «расщепляются» так, что в левой части появляется уравнение для которого известна функция Грина; нелинейные члены переносятся вправо и, таким образом, для решения создается интегральное уравнение</p>

II.8. Дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений

Систему, состоящую из n совместных дифференциальных уравнений первого порядка относительно переменных x_1, x_2, \dots, x_n , можно заменить одним равносильным дифференциальным уравнением n -го порядка относительно любой из переменных x_i . Дифференциальное уравнение n -го порядка относительно переменной x можно заменить равносильной системой, состоящей из n дифференциальных уравнений первого порядка относительно переменных $x, x', \dots, x^{(n-1)}$.

Эти утверждения, требующие некоторых уточнений из-за частных случаев, подробно рассматриваются в математических курсах¹⁾; там же приводятся обобщения, связанные с системами, содержащими уравнения различных порядков.

Здесь рассматриваются только те вопросы, которые представляются наиболее существенными при расчете нелинейных и параметрических цепей. Начнем с простого примера. Пусть задана система, состоящая из двух уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{d\tau} = y, \quad \frac{dy}{d\tau} = -x.$$

Переход от двух уравнений к одному уравнению второго порядка относительно переменной x совершается элементарно:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{dy}{d\tau} = -x$$

и, следовательно,

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = 0.$$

Так же можно перейти к одному уравнению относительно переменной y :

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} = -\frac{dx}{d\tau} = -y$$

и

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + y = 0.$$

Столь же прост переход от уравнения второго порядка

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = 0$$

к системе из двух уравнений первого порядка относительно переменных x и $y = x'$. В этой системе первым уравнением является следующее: $y = dx/d\tau$, а вторым — $dy/d\tau = -x$.

Для линейных уравнений рецептуру подобных преобразований можно записать в общем виде. Пусть задана система

$$L_{11}x_1 + L_{12}x_2 = f_1, \quad L_{21}x_1 + L_{22}x_2 = f_2,$$

¹⁾ См., например, [П.1, стр. 22—23; П.32, стр. 26] и др.

где L_{ij} — дифференциальные операторы, и нужно эту систему заменить одним дифференциальным уравнением относительно любой из переменных.

Примем сначала, что рассматриваемые операторы имеют постоянные коэффициенты.

Умножим первое уравнение на L_{21} , а второе — на L_{11} :

$$L_{11}L_{21}x_1 + L_{12}L_{21}x_2 = L_{21}f_1,$$

$$L_{21}L_{11}x_1 + L_{22}L_{11}x_2 = L_{11}f_2$$

и вычтем одно из другого, приняв во внимание, что для дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами $L_{11}L_{21}x_1 = L_{21}L_{11}x_1$; в результате получим

$$(L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21})x_2 = L_{11}f_2 - L_{21}f_1.$$

Аналогично: $(L_{11}L_{22} - L_{21}L_{12})x_1 = L_{22}f_1 - L_{12}f_2.$

Подобный общий прием не правомерен по отношению к линейным операторам с переменными коэффициентами (параметрическим операторам) и к нелинейным операторам, так как для них в общем случае $L_{11}L_{21}x_1 \neq L_{21}L_{11}x_1$. Поэтому по отношению к параметрическим и нелинейным уравнениям уравнения в системы и системы в уравнения, как правило, преобразуются обычными последовательными подстановками. Для параметрических уравнений на этой основе разработаны специальные методы: метод уравнивающих операторов и метод последовательного дифференцирования [50, стр. 18—30; 49, стр. 39—41].

Здесь ограничимся рассмотрением примеров.

Пример 1. Преобразуем нелинейно-параметрическое уравнение третьего порядка

$$\ddot{x} + a_2(\tau, x)\dot{x} + a_1(\tau, x)\dot{x} + a_0(\tau, x) = 0$$

в систему, состоящую из трех уравнений первого порядка.

Очевидно:

$$\ddot{x} = y, \quad \ddot{y} = z, \quad \dot{z} + a_2(\tau, x)z + a_1(\tau, x)y + a_0(\tau, x) = 0.$$

Пример 2. Задана система

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{\tau}z, \quad \frac{dz}{d\tau} = \frac{(x-z)^2 + \tau z}{\tau^2};$$

нужно составить одно дифференциальное уравнение относительно переменной x .

Для исключения z найдем z :

$$z = \tau\dot{x}, \quad z = \tau\ddot{z} + \dot{x};$$

теперь

$$\tau\ddot{x} + \dot{x} = \left(\frac{x}{\tau} - \dot{x}\right)^2 + \dot{x}$$

или

$$\ddot{x} - \frac{1}{\tau}\dot{x}^2 + \frac{2}{\tau^2}x\dot{x} - \frac{1}{\tau^3}x^2 = 0.$$

Обратим внимание теперь на то, что при рассмотренном переходе от одного уравнения к системе уравнений независимая переменная τ сохранялась, т. е. не подвергалась ни преобразованиям, ни исключению. Возможен вместе с тем и другой переход, сопровождающийся исключением независимой переменной из одного уравнения, но при условии, что исходное уравнение является «автоном-

ным», т. е. не содержит τ в явном виде (ни в правой части, ни в коэффициентах)¹⁾.

Рассмотрим такой переход на примере автономного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + a_1(x) \frac{dx}{d\tau} + a_0(x)x = 0;$$

заменяем его системой из двух уравнений и исключим независимую переменную τ из второго уравнения.

Первое уравнение очевидно: $dx/d\tau = y$; для получения второго проведем уже знакомые нам операции:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{dy}{d\tau} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{d\tau} = y \frac{dy}{dx}$$

и подставим результат в исходное уравнение, разделив все его члены на y :

$$\frac{dy}{dx} + a_1(x) + \frac{1}{y} a_0(x)x = 0.$$

Система уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{d\tau} = y; \quad \frac{dy}{dx} + a_1(x) + \frac{1}{y} a_0(x)x = 0$$

эквивалентна исходному уравнению второго порядка.

Важно подчеркнуть, что во втором уравнении системы исключена независимая переменная τ ; следует также заметить, что это уравнение является нелинейно-параметрическим (оно было бы параметрическим, если бы последний член имел вид $[a_0(x)xy]$, а не вид $[a_0(x)xy^{-1}]$).

В заключение отметим, что для интегрирования системы дифференциальных уравнений первого порядка иногда целесообразно применять метод нахождения интегрируемых комбинаций, о котором можно прочесть во многих учебниках и монографиях (см., например, [П.42, гл. III, § 3; П.30, гл. XV, § 3, п. 13]. Этот метод упоминается и здесь, в П.11.

П.9. Особые точки и особые решения

Для дифференциального уравнения первого порядка $dx/d\tau = F(\tau, x)$ условия существования решения и его единственности выполняются, если частная производная $\partial F/\partial x$ имеет конечное значение во всех точках (теорема Коши). Если условие теоремы Коши не выполняется в каких-либо точках, то через них может (но не обязательно) проходить более одной интегральной линии или же не проходить ни одной линии. Такие точки называются особыми точками данного уравнения. Особые точки могут быть изолированными, а могут заполнять целые линии, которые в этих случаях называют особыми, а соответствующее решение, графиком которого служит особая линия, — особым решением.

Для нахождения особых точек и особых решений целесообразно переписать исходное уравнение в виде, соответствующем одной из следующих записей:

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{P(\tau, x)}{Q(\tau, x)}, \quad \frac{d\tau}{dx} = \frac{Q(\tau, x)}{P(\tau, x)}.$$

¹⁾ Автономными не могут быть ни параметрические, ни нелинейно-параметрические уравнения; другими словами, автономное дифференциальное уравнение описывает такой процесс, дифференциальный закон развития которого не зависит от времени явно.

Если производные $\partial F/\partial x$ или $\frac{\partial F^{-1}}{\partial \tau}$ имеют конечные значения во всех точках и, кроме того, $P(\tau, x) \neq 0$, $Q(\tau, x) \neq 0$, то через эти точки проходит одна интегральная линия.

Если же в некоторой точке τ_0, x_0 имеют место равенства

$$P(\tau_0, x_0) = 0, \quad Q(\tau_0, x_0) = 0,$$

то точка с этими координатами является особой.

Рассмотрим несколько типичных примеров.

Пример 1. Дифференциальное уравнение $dx/d\tau = \tau + x$, как легко проверить по теореме Коши:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1,$$

удовлетворяет условиям существования и единственности во всех точках, особых точек нет.

Пример 2. В дифференциальном уравнении $dx/d\tau = x/\tau$ особая точка соответствует началу координат $-\tau=0, x=0$. Через нее проходит пучок прямых $x=C\tau$ при любых значениях постоянной C (рис. П9.1). Такая особая точка называется узлом.

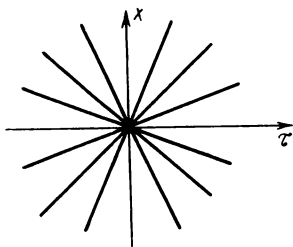


Рис. П.9.1

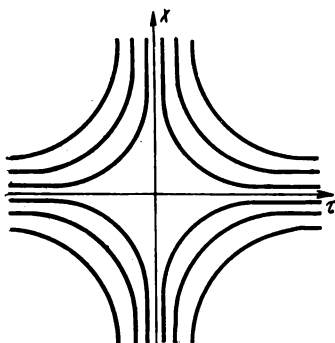


Рис. П.9.2

Пример 3. В дифференциальном уравнении $dx/d\tau = -x/\tau$ особая точка также соответствует началу координат; решение уравнения имеет вид (рис. П9.2): $x\tau=C$; ни при каких значениях C интегральные кривые не проходят через особую точку. Такая особая точка называется седлом.

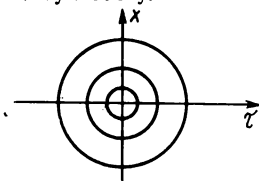


Рис. П.9.3

Пример 4. Рассмотрим дифференциальное уравнение: $dx/d\tau = -\tau/x$; здесь особая точка также соответствует началу координат и так как решение имеет вид (рис. П9.3) $\tau^2 + x^2 = C$, то через особую точку также не проходит ни одна интегральная кривая. Такая особая точка называется центром.

Пример 5. В дифференциальном уравнении

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\tau + x}{\tau - x}$$

особая точка также соответствует началу координат; решение в данном случае имеет вид

$$\sqrt{\tau^2 + x^2} = C e^{\arctg \frac{x}{\tau}}$$

или, в полярных координатах, $\rho = C e^\varphi$.

Через особую точку, называемую фокусом, проходит бесчисленное множество интегральных кривых (рис. П.9.4) при любых значениях C .

Тип особой точки легко устанавливается при помощи правил, составленных по отношению к дифференциальному уравнению вида ¹⁾:

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{c\tau + dx}{a\tau + bx}$$

и характеристического уравнения с корнями $\lambda = \alpha + i\beta$:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Если:

1) $\lambda_1 = \alpha_1$, $\lambda_2 = \alpha_2$, $\text{sign } \alpha_1 = \text{sign } \alpha_2$ — особая точка называется узлом.

2) $\lambda_1 = \alpha_1$, $\lambda_2 = \alpha_2$, $\text{sign } \alpha_1 \neq \text{sign } \alpha_2$ — особая точка называется седлом.

3) $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$ — особая точка называется центром.

4) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ — особая точка называется фокусом.

Особые точки на фазовой плоскости $y(x)$, где $y = dx/d\tau$ в существенной степени определяют характер фазовой траектории и, как правило, перед построением фазовой траектории целесообразно найти число особых точек и установить их типы.

В дополнение к изложенному следует отметить, что для качественного изучения как фазовой траектории, так и решения дифференциального уравнения, следует начало координат перенести в исследуемую особую точку и разложить функции P и Q в окрестности этой точки в ряд Тейлора, ограничиваясь членами первого порядка.

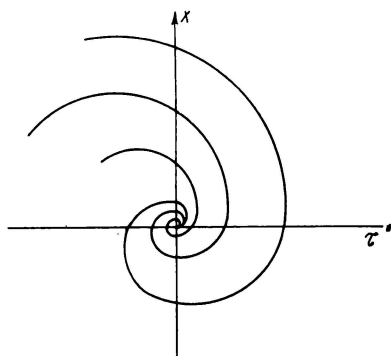


Рис. П.9.4

П.10. Устойчивость решений

Вопросы устойчивости решений дифференциальных уравнений представляют собой обширную область знаний и, можно сказать, образуют самостоятельную ветвь общей теории дифференциальных уравнений. Классификация этих вопросов связывается, в первую очередь, с определением устойчивости (например, устойчивость «в малом», устойчивость «в большом», устойчивость «в целом», «асимптотическая» устойчивость, «абсолютная» устойчивость и др.), а затем — с видом изучаемых дифференциальных уравнений (линейные, нелинейные, параметрические, нелинейно-параметрические) и видом внешнего воздействия (периодическое, импульсное и т. д.).

Для отдельных видов дифференциальных уравнений, как правило, существует несколько методов исследования устойчивости, причем каждый из них характеризуется своим «кругом целесообразности применения» в зависимости от условий задания изучаемой системы, ее сложности, вида внешних воздействий и т. п.

Здесь будет изложена только небольшая часть положений общей теории устойчивости и именно та, которая необходима для изучения радиотехнических нелинейных и параметрических цепей. В настоящем приложении приводятся самые общие сведения; более конкретные сведения в виде расчетных процедур даются в соответствующих разделах. Вопросы устойчивости линейных цепей, к которым можно сводить задачи изучения нелинейных цепей при малых сигналах, подробно рассматриваются в разд. 8.

¹⁾ От $P(\tau, x)$ и $Q(\tau, x)$ перейти к линейным формам $(c\tau + dx)$ и $(a\tau + bx)$ можно на основе разложения P и Q в ряд Тейлора в окрестности особой точки.

Общую задачу изучения устойчивости автономной нелинейной цепи рассмотрим на примере нелинейного уравнения второго порядка, которое запишем в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{d\tau} = P(x, y), \quad \frac{dy}{d\tau} = Q(x, y).$$

Пусть в точке x_0, y_0 в момент τ_0 имеет место равновесие, т. е.

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)_{\tau=\tau_0} = P(x_0, y_0) = 0, \quad \left(\frac{dy}{d\tau}\right)_{\tau=\tau_0} = Q(x_0, y_0) = 0;$$

задача состоит в выяснении вопроса: является ли это состояние равновесия устойчивым? Конкретизация вопроса заключается в следующем. В момент $\tau = \tau_0$ системе сообщается некоторое возмущение, так что $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$; если с течением времени (при $\tau \rightarrow \infty$) Δx стремится к нулю, — система устойчива, а при росте Δx — неустойчива.

Общая методика изучения поведения Δx соответствует следующей рецептуре, данной А. М. Ляпуновым еще в конце прошлого столетия. Исходные дифференциальные уравнения записываются относительно «возмущенных координат»:

$$\frac{d(x_0 + \Delta x)}{d\tau} = P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y),$$

$$\frac{d(y_0 + \Delta y)}{d\tau} = Q(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y);$$

так как $\frac{dx_0}{d\tau} = 0$, $\frac{dy_0}{d\tau} = 0$, можно написать:

$$\frac{d\Delta x}{d\tau} = P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y),$$

$$\frac{d\Delta y}{d\tau} = Q(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y).$$

Полученные дифференциальные уравнения нужно решить относительно Δx и Δy ; при изучении «устойчивости в малом», т. е. в окрестности точки x_0, y_0 , функции P и Q можно разложить в ряд Тейлора и ограничиться только линейными членами, т. е.

$$\frac{d\Delta x}{d\tau} = P'_x \Delta x + P'_y \Delta y,$$

$$\frac{d\Delta y}{d\tau} = Q'_x \Delta x + Q'_y \Delta y,$$

где символом P'_x и т. д. означают частные производные по соответствующей переменной в точке равновесия, т. е.

$$P'_x = P'_x(x_0, y_0) \text{ и т. д.}$$

Последняя система, называемая укороченной, представляет собой линейную систему, для решения которой известны общие алгоритмы. Ее решение ищется в виде функций:

$$\Delta x = \Delta x_0 e^{p\tau}; \quad \Delta y = \Delta y_0 e^{p\tau};$$

после подстановки в укороченную систему приходим к алгебраической системе:

$$(-p + P'_x) \Delta x_0 + P'_y \Delta y_0 = 0,$$

$$Q'_x \Delta x_0 + (-p + Q'_y) \Delta y_0 = 0,$$

для которой условие совместности записывается в виде характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} -p + P_x' & P_y' \\ Q_x' & -p + Q_y' \end{vmatrix} = 0.$$

Из этого уравнения нетрудно определить значение показателя p :

$$p^2 - (P_x' + Q_y')p + P_x' Q_y' - P_y' Q_x' = 0,$$

$$p = \frac{1}{2} (P_x' + Q_y') \pm \sqrt{\frac{1}{4} (P_x' + Q_y')^2 - \begin{vmatrix} P_x' & P_y' \\ Q_x' & Q_y' \end{vmatrix}}.$$

Для того чтобы Δx и Δy со временем уменьшались, оба значения p должны быть отрицательными или иметь отрицательную вещественную часть; легко видеть, что для этого необходимо выполнение двух условий:

$$P_x' + Q_y' < 0, \quad \begin{vmatrix} P_x' & P_y' \\ Q_x' & Q_y' \end{vmatrix} > 0.$$

Необходимо отметить, что если хотя бы одно из значений $\text{Re } p$ равно нулю, то вопрос об устойчивости не может быть решен на основе линейного приближения.

Для дифференциального уравнения первого порядка $dx/d\tau = \varphi(x)$, т. е. при $Q_y' = 0$ последние условия записываются в виде одного неравенства $\varphi'(x_0) < 0$; при этом конечно, по условию имеет место равенство $\varphi(x_0) = 0$.

Исследовать устойчивость по укороченным уравнениям можно и на основе изучения особых точек (П.9). Как было установлено выше, существует четыре типа особых точек — узел, седло, фокус, центр. Точки типа узел и фокус могут быть устойчивыми и неустойчивыми. Для того чтобы узел ($\beta = 0$) был устойчивым, необходимо, чтобы $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 < 0$; такое же условие требуется и для устойчивости фокуса ($\beta \neq 0$).

Изложенный метод изучения устойчивости можно условно назвать косвенным, так как здесь решаются некоторые вспомогательные уравнения. А. М. Ляпуновым предложен и «прямой метод», когда непосредственно по заданному дифференциальному уравнению, но без его решения можно выяснить устойчивость. Основу этого метода составляют так называемые «функции Ляпунова» или V -функции, которые специально конструируются по некоторым определенным признакам (непрерывность частных производных, однозначность, обращение в нуль в начале координат). По свойствам, определяющим знакопостоянство функции Ляпунова, можно судить об устойчивости движения. Составление функций Ляпунова существенно зависит от опыта исследователя, а иногда и от удачи; общих правил, позволяющих во всех случаях строить функции Ляпунова, пока нет.

В радиотехнической практике прямой метод А. М. Ляпунова до сих пор не находил применения; доступно и достаточно подробно основы прямого метода изложены, например, в монографиях [П.27, П.24, стр. 231—244].

Для изучения устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования применяется так называемый частотный метод В. Попова; основы этого метода вместе с примерами изложены, например, в книгах [9, стр. 678—684; П.24, стр. 270—285].

П.11. Некоторые свойства и асимптотика решений

Весьма часто в задачу входит не отыскание решения как такового, а только выяснение некоторых его свойств да еще, быть может, в ограниченных интервалах изменения переменных или, напротив, при стремлении последних к беско-

нечности. Этим вопросам посвящена обширная литература, например [П.34, П.21, П.13, П.15] и др.

Из всего комплекса вопросов, относящихся к данной проблематике, здесь будут рассмотрены только те частные приемы получения информации о некоторых свойствах решения, которые используются в данной книге.

1. Для нахождения экстремумов решения дифференциального уравнения первого порядка $dx/d\tau = F(\tau, x)$ достаточно исследовать уравнение $F(\tau_0, x_0) = 0$; точки τ_0, x_0 соответствуют экстремумам, причем максимумам соответствуют точки, для которых $F'_\tau < 0$, а минимумам — точки, для которых $F'_\tau > 0$.

2. Для нахождения точек перегиба решения дифференциального уравнения первого порядка $dx/d\tau = F(\tau, x)$ нужно исследовать уравнение, образующееся приравнением нулю производной правой части; в соответствии с правилом дифференцирования сложной функции получаем

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} = 0$$

или

$$F'_\tau + F'_x \dot{x} = 0.$$

3. Для определения асимптотического решения системы дифференциальных уравнений первого порядка иногда целесообразно находить предварительные решения (первый интеграл) для комбинации переменных. Первым интегралом называется соотношение вида $\Phi(\tau, x, y, z, \dots, C) = 0$, если оно тождественно удовлетворяется для любого решения системы. Для нахождения первого интеграла нужно преобразовать заданную систему так, чтобы, во-первых, в качестве одной из переменных выступала выбранная комбинация x, y, z, \dots и, во-вторых, преобразованное уравнение допускало непосредственное интегрирование относительно выбранной комбинации. Общие правила здесь сформулировать нельзя.

Пример. Пусть задана система:

$$\dot{x} = z + x, \quad \dot{z} = z - x;$$

нужно представить характер решения при $\tau \rightarrow \infty$ с помощью первого интеграла.

Преобразуем систему следующим образом:

$$x\dot{x} = xz + x^2, \quad z\dot{z} = z^2 - zx;$$

имея в виду, что $x\dot{x} = \frac{1}{2} \frac{dx^2}{d\tau}$, сложим уравнения:

$$\frac{1}{2} \frac{d(x^2 + z^2)}{d\tau} = x^2 + z^2.$$

Последнее уравнение можно решить относительно комбинации $(x^2 + z^2)$; это решение и будет представлять собой первый интеграл. Очевидно:

$$\frac{d(x^2 + z^2)}{x^2 + z^2} = 2d\tau, \quad \ln(x^2 + z^2) = 2\tau + C_1, \quad x^2 + z^2 = C e^{2\tau}.$$

Теперь легко видеть, что при $\tau \rightarrow \infty$ решение стремится к бесконечности, а при $\tau \rightarrow -\infty$ — к нулю.

П.12. Переход от фазового изображения к временному оригиналу

Основу косвенных методов решения дифференциальных уравнений составляет нахождение фазовых изображений, по которым можно составить представление о характере самого решения. Однако по фазовому изображению можно и построить решение, но приближенно (конечно, если исходное уравнение интегрируется точно, то перейти от фазового изображения к оригиналу можно тоже точно).

Рассмотрим переход от фазового изображения $y(x)$ к искомому решению $x(t)$. Будем аппроксимировать кривую $y(x)$ кусочно-ломаной (рис. П12.1); для каждого отрезка прямой можно написать:

$$y = \frac{dx}{dt} = b + kx,$$

откуда $dx/(b+kx) = dt$ и

$$\Delta t \approx \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{b+kx} = \frac{1}{k} \left| \ln(b+kx) \right|_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{k} \left| \ln y \right|_{x_1}^{x_2} = -\frac{1}{k} \ln \frac{y_2}{y_1}.$$

Так как угловой коэффициент $k = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$, время, в течение которого изображающая точка проходит данный отрезок, определяется так:

$$\Delta t = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \ln \frac{y_2}{y_1}.$$

Расчет по этой формуле элементарно прост, но его можно и еще упростить. Перепишем последнее равенство в виде

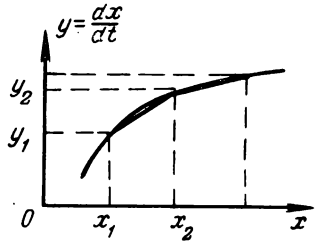


Рис. П12.1

$$\Delta t_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_{n-1}} \frac{\ln \frac{y_n}{y_{n-1}}}{\frac{y_n}{y_{n-1}} - 1} = \frac{\Delta x_n}{y_{n-1}} F(z),$$

где $z = y_n / y_{n-1}$.

Множитель $F(z) = \ln z / (z - 1)$ можно представить в виде графика или таблицы. На рис. П12.2 приведен график функции $F(z)$ для трех масштабов.

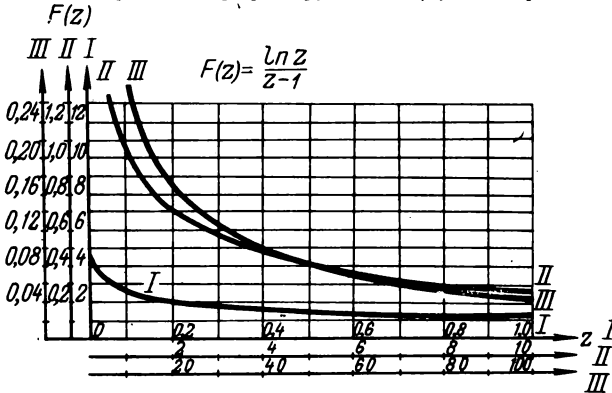


Рис. П12.2

Аналогично можно совершить переход от фазового изображения $\delta(x)$, где $\delta = \dot{x}/x$, к оригиналу $x(t)$. В данном случае кусочно-ломаной аппроксимируется функция $\delta(x)$, т. е.

$$\frac{\dot{x}}{x} = b + kx \text{ и } \frac{dx}{dt} = bx + kx^2,$$

откуда

$$\Delta t \approx \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{bx + kx^2}.$$

Последний интеграл является табличным (см. П.16), и дальнейший расчет строится аналогично предыдущему.

Усложнение фазовых координат влечет за собой усложнение расчетов по переходу от фазового изображения к оригиналу.

П.13. О некоторых косвенных методах интегрирования дифференциальных уравнений

Основой косвенных методов интегрирования дифференциальных уравнений является нахождение фазового изображения, по которому можно составить представление о характере решения. Обычно в качестве фазовых координат, по которым строится фазовое изображение, выступают сама функция $x=x(t)$ и ее первая производная $\dot{x}=x'(t)=dx/dt$. Целесообразно расширить ассортимент применяемых фазовых координат; ниже излагается соответствующий материал.

Определим понятие *диссипант* следующим равенством:

$$\delta = \frac{y}{x} = \frac{\dot{x}}{x} = (\ln x)', \quad 1/c.$$

Диссипант связан с представлениями о диссипации энергии: при $\delta > 0$ процесс увеличивается, при $\delta < 0$ — уменьшается (энергия расходуется необратимо).

Для процессов «пропорционального роста» (экспоненциальных) диссипант не зависит от времени и равен постоянному числу. Физический смысл диссипанта легко уяснить из приближенного равенства

$$\delta \approx \frac{\Delta x/x}{\Delta t}, \quad 1/c$$

и сформулировать его следующим образом: диссипант дает представление о «скорости относительного изменения процесса».

По характеру изменения диссипанта легко судить об устойчивости процесса: если $\delta > 0$ (скорость и путь совпадают по знаку) — процесс неустойчив. Диссипант постоянной равен нулю.

Определим понятие *консервант* следующим равенством:

$$\kappa = \frac{\dot{y}}{x} = \frac{\ddot{x}}{x}, \quad 1/c^2.$$

Консервант связан с представлениями о «консервативности энергии»: если $\kappa < 0$ и $\kappa = \text{const}$ — энергия «консервативна», т. е. в среднем не изменяется и непрерывно преобразуется из потенциальной в кинетическую и обратно. Чтобы показать это, достаточно выполнить простые преобразования:

$$\kappa = \frac{1}{x} \left(\frac{d\dot{x}}{dt} \right) = \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{y}{x} \frac{dy}{dx},$$

и так как $ydy = \frac{1}{2} dy^2$, то $\kappa = dy^2/dx^2$.

Итак, консервант представляет собой производную одного вида энергии по другому виду.

Для гармонического колебания с частотой ω , консервант $\kappa = -\omega^2$; для экспоненциального процесса с декрементом α , $\kappa = \alpha^2$.

Между консервантом и диссипантом существует связь, вытекающая из соотношения

$$\dot{\delta} = \left(\frac{\dot{x}}{x} \right)' = \frac{x\ddot{x} - \dot{x}^2}{x^2} = \kappa - \delta^2,$$

т. е.

$$\kappa = \delta^2 + \dot{\delta}.$$

Консервант имеет следующий физический смысл: ускорение относительного изменения процесса. Консервант линейно растущего процесса равен нулю.

Понятия диссипант и консервант являются центральными; из них конструируются вводимые ниже понятия — кондисант и кондисквадрат.

Определим понятие *кондисант* следующим равенством:

$$\rho = \frac{\kappa}{\delta} = \frac{\ddot{x}}{\dot{x}} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx}, \text{ 1/с.}$$

Кондисант представляет собой отношение консерванта к диссипанту; именно этим объясняется данное словообразование.

Физический смысл кондисанта вытекает из последнего равенства: кондисант равен производной скорости по процессу (напомним, что отношение мгновенных значений скорости и процесса представляет собой диссипант).

Определим понятие *кондисквадрат* следующим равенством:

$$\lambda = \frac{\kappa}{\delta^2} = \frac{\rho}{\delta} = \frac{x\ddot{x}}{\dot{x}^2} = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{(\ln y)'}{(\ln x)'}$$

Кондисквадрат дает отношение консерванта к диссипанту в квадрате; это и отражено в его названии. Знак кондисквadrата определяется знаком консерванта; кондисквадрат является безразмерной величиной.

Из приближенного равенства

$$\lambda = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}$$

следует физический смысл кондисквadrата: он представляет собой отношение относительного изменения скорости процесса к относительному изменению самого процесса. Кондисквадрат объединяет не только обычные фазовые координаты x и y (путь и скорость), но и производную функциональной связи между ними.

Выражению для кондисквadrата можно придать и другие формы:

$$\lambda = 1 + \frac{\dot{\delta}}{\delta^2}, \quad \lambda = \left(1 - \frac{\delta^2}{\kappa} \right)^{-1},$$

если принять во внимание равенство: $\kappa = \delta^2 + \dot{\delta}$.

Для экспоненциального процесса кондисквадрат равен единице при любом показателе, будь то декремент или инкремент. Для гармонического колебания кондисквадрат изменяется во времени по закону «квадрат тангенса». Кондисквадрат линейно растущего процесса равен нулю.

Вышеприведенные понятия могут использоваться в качестве фазовых координат в косвенных методах интегрирования дифференциальных уравнений.

Так, уравнения

$$\frac{dx}{dt} + a(t)x = 0, \quad \frac{d^2x}{dt^2} + a(t)x = 0$$

можно переписать в виде

$$\delta = -a(t), \quad \kappa = -a(t).$$

и изучать на плоскостях $\delta(t)$, $\kappa(t)$.

Нелинейные уравнения видов:

$$\frac{dx}{dt} + f(x) = 0, \quad \frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = 0$$

можно переписать так:

$$\delta = -\frac{f(x)}{x}, \quad \varkappa = -\frac{f'(x)}{x}$$

и изучать на плоскостях $\delta(x)$, $\varkappa(x)$.

Нелинейно-параметрические уравнения

$$\frac{dx}{dt} + a(t)f(x) = 0, \quad \frac{d^2x}{dt^2} + a(t)f(x) = 0$$

также можно изучать при помощи консерванта и диссипанта, но в этом случае они будут функциями двух переменных.

В качестве фазовых координат можно использовать одновременно δ и \varkappa ; для колебательного процесса, соответствующего дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

фазовое изображение представляет собой прямую:

$$\varkappa = -\omega_0^2 - 2\alpha\delta.$$

В разд. 6—12 даны примеры использования приведенных понятий для решения конкретных задач.

Приложение II

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

П.14. Таблица решений некоторых часто встречающихся дифференциальных уравнений

УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1) $\dot{x} + ax = A e^{b\tau}$,

$$x = C e^{-a\tau} + \begin{cases} A \tau e^{b\tau} & \text{при } a + b = 0, \\ \frac{A}{a+b} e^{b\tau} & \text{при } a + b \neq 0. \end{cases}$$

2) $\dot{x} + ax = A \sin \tau$,

$$x = C e^{-a\tau} + \frac{A}{a^2 + 1} (a \sin \tau - b \cos \tau).$$

3) $\ddot{x} + x + ax^3 = 0$,

$$\tau = \ln C \frac{1 + ax}{x}.$$

4) $\dot{x} - \tau x - \tau^3 x^3 = 0$,

$$x = \frac{1}{2 - \tau^2 + C e^{-\frac{1}{2}\tau^2}}.$$

УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1) $\ddot{x} + x = 0,$

$$x = C_1 \cos \tau + C_2 \sin \tau.$$

2) $\ddot{x} - x = 0,$

$$x = C_1 e^{\tau} + C_2 e^{-\tau}.$$

3) $\ddot{x} + x = \sin n \tau,$

$$x = C_1 \cos \tau + C_2 \sin \tau + \begin{cases} -\frac{\sin n \tau}{n^2 - 1} & \text{при } n^2 \neq 1, \\ \pm \frac{1}{2} \tau \cos \tau & \text{при } n = \pm 1. \end{cases}$$

4) $\ddot{x} + x = \cos n \tau,$

$$x = C_1 \cos \tau + C_2 \sin \tau + \begin{cases} -\frac{\cos n \tau}{n^2 - 1} & \text{при } n^2 \neq 1, \\ +\frac{1}{2} \tau \sin \tau & \text{при } n = \pm 1. \end{cases}$$

П.15. Таблица некоторых часто встречающихся дифференциальных уравнений

УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1) $\dot{x} + a(\tau)x^n + b(\tau)x = 0$

— уравнение Бернулли

2) $\dot{x} + a(\tau)x^2 + b(\tau)x + c(\tau) = 0$

— уравнение Риккати

3) $\dot{x} + a(\tau)x^3 + b(\tau)x^2 + c(\tau)x + d(\tau) = 0$

— уравнение Абеля первого рода

4) $\dot{x} + \frac{a(\tau)}{x + d(\tau)}x^2 + \frac{b(\tau)}{x + d(\tau)}x + \frac{c(\tau)}{x + d(\tau)} = 0$

— уравнение Абеля второго рода

5) $\tau f(\dot{x}) + g(\dot{x}) - x = 0$

— уравнение Лагранжа (Даламбера)

6) $\tau \dot{x} + g(\dot{x}) - x = 0$

— уравнение Клеро

7) $\dot{x} + \frac{A \tau x + Bx^2 + C \tau + Dx + F}{A \tau^2 + B \tau x + G \tau + Hx + K}$

— уравнение Якоби

8) $\dot{x} + \frac{\sqrt{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + F}}{\sqrt{A \tau^4 + B \tau^3 + C \tau^2 + D \tau + F}}$

— уравнение Эйлера

9) $(L + N\tau)\dot{x} + (M - Nx) = 0$

— уравнение Дарбу

(L, N, M — полиномы относительно τ и x).

УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1) $\ddot{x} + \tau x = 0$

— уравнение Эйри

2) $\ddot{x} - \frac{1}{4}(A + \tau^2)x = 0$

— уравнение Вебера

- 3) $\ddot{x} + [\lambda + \Phi_{2\pi}(\tau)]x = 0,$
 $\Phi_{2\pi}(\tau) = \Phi_{2\pi}(\tau + 2\pi)$ — уравнение Хилла
- 4) $\ddot{x} + (\lambda + a \cos 2\tau)x = 0$ — уравнение Матье
- 5) $\ddot{x} + a[1 - u(\tau)]x = 0$ — уравнение Шредингера (одномерное)
- 6) $\ddot{x} + (\lambda - \tau^2)x = 0$ — уравнение гармонического осциллятора
- 7) а) $\ddot{x} + a \sin x = b \sin \tau$ — уравнение Дуффинга
б) $\ddot{x} + a \sin x = f(\tau)$ — обобщенное уравнение Дуффинга
в) $\ddot{x} + \lambda^2 x + \beta x^3 = f(\tau)$ — упрощенное уравнение Дуффинга
- 8) $\ddot{x} + 2A\dot{x} + Bx = 0$ — уравнение свободных колебаний цепи с двумя реактивными элементами
- 9) $\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$ — уравнение Ван дер Поля
- 10) $\ddot{x} - \varepsilon(\dot{x} - \mu^2 x^3) + \lambda^2 x = 0$ — уравнение Рэлея
- 11) $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + Bx = 0$ — уравнение Льенара
- 12) а) $\ddot{x} - \tau\dot{x} - Ax = 0$ — уравнение Вебера (сводится к п. 2)
б) $\ddot{x} - 2\tau\dot{x} + Ax = 0$ — уравнение Эрмита
- 13) $\tau^2 \ddot{x} + \tau\dot{x} + (\tau^2 - n^2)x = 0$ — уравнение Бесселя
- 14) а) $(1 - \tau^2)\ddot{x} - 2\tau\dot{x} + n(n+1)x = 0$ — уравнение Лежандра
б) $(1 - \tau^2)\ddot{x} - 2\tau\dot{x} + n(n+1)x - \frac{m^2}{1 - \tau^2}x = 0$ — присоединенное уравнение Лежандра
- 15) $(1 - \tau^2)\ddot{x} - \tau\dot{x} + n^2x = 0$ — уравнение Чебышева
- 16) а) $\tau(\tau - 1)\ddot{x} + [(1 + A + B)\tau - C]\dot{x} + ABx = 0$ — гипергеометрическое уравнение Гаусса
б) $\tau\ddot{x} + (C - \tau)\dot{x} - Ax = 0$ — вырожденное гипергеометрическое уравнение
в) $\tau^2 \ddot{x} + \frac{1}{4}(1 - 4m^2 + 4k\tau - \tau^2)x = 0$ — вырожденное гипергеометрическое уравнение Уиттекера
- 17) а) $\tau\dot{x} + (1 - \tau)x + Ax = 0$ — уравнение Лагерра
б) $\tau\dot{x} + (1 + k - \tau)x + Ax = 0$ — присоединенное уравнение Лагерра
- 18) $\tau\ddot{x} + 2\dot{x} + A\tau^m x^n = 0$ — уравнение Эмдена

$$19) \ddot{x} - \frac{1}{\sqrt{\tau}} x^{3/2} = 0$$

— уравнение Томса—Ферми
(уравнение распределе-
ния электронов в атоме),

$$20) \ddot{x} + \frac{x}{2} - \frac{\lambda^2}{2} \tau \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} = 0$$

($\lambda > 0$)

— уравнение Польвани
(уравнение магнетрона),

УРАВНЕНИЕ n -ГО ПОРЯДКА

$$1) \sum_{n=0}^N A_n \tau^n x^{(n)} = f(\tau)$$

— уравнение Эйлера

$$2) \sum_{n=0}^N (A_n \tau + B_n) x^{(n)} = C$$

— уравнение Лапласа

П.16. Таблица некоторых часто встречающихся интегралов

$$1) \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}.$$

$$2) \int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1).$$

$$3) \int x^2 e^{ax} dx = e^{ax} \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{2x}{a^3} + \frac{2}{a^3} \right).$$

$$4) \int e^{ax} \frac{\sin bx dx}{\cos bx} = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} \left(a \frac{\sin bx}{\cos bx} \mp b \frac{\cos bx}{\sin bx} \right).$$

$$5) \int \frac{dx}{a + b e^{mx}} = \frac{1}{am} [mx - \ln(a + b e^{mx})].$$

$$6) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{2}{\Delta} \operatorname{arctg} \frac{2ax + b}{\sqrt{\Delta}} \quad \text{при } \Delta > 0,$$

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = -\frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \operatorname{Arth} \frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}} = \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \ln \times$$

$$\times \frac{2ax + b - \sqrt{-\Delta}}{2ax + b + \sqrt{-\Delta}} \quad \text{при } \Delta < 0.$$

$$\Delta = 4ac - b^2.$$

$$7) \int \frac{dx}{a^3 \pm x^3} = \pm \frac{1}{6a^2} \ln \frac{(a \pm x)^2}{a^2 \mp ax + x^2} + \frac{1}{\sqrt{3} a^2} \operatorname{arctg} \frac{2x \mp a}{\sqrt{3} a} =$$

$$= \pm \frac{1}{6a^2} \ln \frac{(a \pm x)^2}{a^2 \mp ax + x^2} + \frac{1}{\sqrt{3} a^2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3} x}{2\sqrt[3]{a \mp x}}.$$

$$8) \int \frac{\sqrt{x}}{1-x} dx = -2\sqrt{x} + \ln \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}.$$

II.17. Некоторые сведения об эллиптических интегралах и функциях

Интегралы видов

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \int \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx, \\ \int \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

называются соответственно эллиптическими интегралами первого, второго и третьего рода в лежандровой нормальной форме.

В данном случае интерес представляют (в приложении к задачам нелинейной радиотехники) только эллиптические интегралы первого рода. Подстановкой $x = \sin \varphi$ эллиптические интегралы приводятся к нормальной тригонометрической форме:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}},$$

Число k называется модулем интеграла.

Эллиптические интегралы, взятые в пределах от 0 до $\pi/2$, называют полными. Для эллиптических интегралов первого рода применяют обозначения:

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}} = \int_0^{\sin \varphi} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad (1)$$

$$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = K. \quad (2)$$

При такой записи эллиптический интеграл $F(\varphi, k)$ является функцией аргумента φ и модуля k .

Можно рассматривать верхний предел φ интеграла

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}} \quad (3)$$

как функцию от u , т. е. рассматривать функцию, обратную эллиптическому интегралу. В этом случае величина u называется аргументом и ее зависимость от φ записывают так:

$$u = \arg \varphi, \quad (4)$$

а величина φ — называется амплитудой и записывается следующим образом:

$$\varphi = \operatorname{am} u. \quad (5)$$

Функции

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sn} u &= \sin \varphi = \sin(\operatorname{am} u) \\ \operatorname{cn} u &= \cos \varphi = \cos(\operatorname{am} u) \\ \operatorname{dn} u &= \Delta \varphi = \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} = \frac{d\varphi}{du} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

называются соответственно синусом амплитуды (или эллиптическим синусом), косинусом амплитуды (или эллиптическим косинусом) и дельтой амплитуды. Они называются функциями Якоби, или эллиптическими функциями.

Для эллиптических интегралов и эллиптических функций составлены подробные таблицы и графики [81]. Разложения в ряды, функциональные соотношения и т. д. можно найти, например, в [21, П.5, 81]. В [81] дана, кроме того, удобная таблица для приведения различных форм интегралов к стандартной форме вида (П.17.1).

П.18. Некоторые сведения о функциях В. К. Туркина

Функции

$$T_m^{(k)}(z, \alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(z) J_{n-m}(z)}{(n-\alpha)^k}, \quad (1)$$

где $J_n(z)$ — функция Бесселя первого рода, введены В. К. Туркиным и использованы им совместно с Г. А. Левиным в работе [73] для изучения вопросов детектирования частотномодулированных колебаний. В настоящей книге функции В. К. Туркина при $k=1$ используются для решений параметрических дифференциальных уравнений (см. разд. 7) первого порядка вида:

$$\frac{dx}{d\tau} + a(1 + \mu \sin \tau)x = a e^{ib\tau},$$

обозначения которых связаны с обозначениями функций В. К. Туркина двумя равенствами: $z = i\mu a$, $\alpha = ia - b$.

В [69] даны таблицы значений функций В. К. Туркина при следующих значениях m , a , b , μ : $m=0, 1, 2, 3$; $a=0,2; 0,4; 0,6; 1,0; 1,5; 2,0; 2,5; 3,0; 3,5; 4,0; 4,5; 5,0$; $b=0; 0,1; 0,2; 0,4; 0,6; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$; $\mu=0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 0,7; 1,0$.

Для целого ряда других значений m , a , b и μ $T_m^{(1)}(z, \alpha) = T_m(z, \alpha)$ можно получить при помощи указанных таблиц и нижеприводимых формул:

$$T_{-m}(z, \alpha) = T_m(z, \alpha + m), \quad (2)$$

$$T_m(-z, \alpha) = (-1)^m T_m(z, \alpha), \quad (3)$$

$$T_m(z, -\alpha) = (-1)^{m+1} T_m(z, \alpha + m), \quad (4)$$

$$\frac{z}{2} [T_{m+1}(z, \alpha) + T_{m-1}(z, \alpha)] - (\alpha - m) T_m(z, \alpha) = \begin{cases} 1 & \text{при } m = 0, \\ 0 & \text{при } m \neq 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$\frac{z}{2} [T_{m+1}(z, \alpha + 1) + T_{m-1}(z, \alpha - 1)] - \alpha T_m(z, \alpha) = \begin{cases} 1 & \text{при } m = 0, \\ 0 & \text{при } m \neq 0. \end{cases} \quad (6)$$

При $|\alpha| \gg 1$ и $\mu \ll 1$ для приближенных расчетов можно пользоваться формулой:

$$T_m(z, \alpha) \approx -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{z}{2\alpha} \right)^m, \quad m \geq 0, \quad (7)$$

тем более точной, чем больше $|\alpha|$ и меньше μ .

Наряду с обозначением $T_m(z, \alpha)$ в качестве равноправных используются обозначения $T_m(a, b, \mu)$, T_m . Так как таблицы [69] составлены для $m > 0$, то при $m < 0$ нужно обращаться к ф-ле (П.18.2), которую целесообразно несколько преобразовать для случая $b=0$.

В соответствии с ф-лами (П.18.2), (П.18.3), (П.18.4) запишем

$$\begin{aligned} T_{-m}(z, \alpha) &= T_m(z, \alpha + m) = (-1)^{-m} T_m(-z, \alpha + m) = \\ &= (-1)^{-2m-1} T_m(-z, -\alpha) = -T_m^*(z, \alpha), \end{aligned}$$

где * обозначает комплексно-сопряженную величину.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ПРИЛОЖЕНИЯМ

- П.1. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. ОНТИ, Харьков, 1939.
- П.2. Алферов С. М. О приближенном интегрировании линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. В сборнике «Вопросы теории автоматического регулирования». М., Оборонгиз, 1956.
- П.3. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. М., «Наука», 1964.
- П.4. Арфкен Г. Математические методы в физике. М., Атомиздат, 1970.
- П.5. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М., «Наука», 1970.
- П.6. Беленький И. И. О приведении линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами к линейному дифференциальному уравнению того же порядка с постоянными коэффициентами. Труды Новочеркасского политехнического института им. С. Орджоникидзе, 1958, т. 57/71, 72—79.
- П.7. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М., «Мир», 1968.
- П.8. Беркович Л. М. О факторизации обыкновенных линейных дифференциальных операторов, преобразуемых в операторы с постоянными коэффициентами, I. — «Известия вузов, Математика», 1965, № 4, 8—16.
- П.9. Беркович Л. М. О факторизации обыкновенных линейных дифференциальных операторов, преобразуемых в операторы с постоянными коэффициентами, II. — «Известия вузов, Математика», 1967, № 12, 3—14.
- П.10. Беркович Л. М. О некоторых классах разностных и дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. — «Известия вузов, Математика», 1970, № 7, 13—25.
- П.11. Биргер И. А. Некоторые математические методы решения инженерных задач. М., Оборонгиз, 1956.
- П.12. Бондарь Н. Г. Некоторые автономные задачи нелинейной механики. Киев. «Наукова думка», 1969.
- П.13. Де Брейн Н. Г. Асимптотические методы в анализе. ИЛ, 1961.
- П.14. Былов Б. Ф. и др. Теория показателей Ляпунова. М., «Наука», 1966.
- П.15. Возов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Мир», 1968.
- П.16. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., «Наука», 1966.
- П.17. Гноенский Л. С., Каменский Г. А., Эльсгольц Л. Э. Математические основы теории управляемых систем. М., «Наука», 1969.
- П.18. Голубенцев А. Н. Интегральные методы в динамике. Киев, «Техника», 1967.
- П.19. Еругин Н. П. Метод Лаппо-Данилевского в теории линейных дифференциальных уравнений. Изд-во ЛГУ, 1956.
- П.20. Еругин Н. П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, Изд-во АН БССР, 1963.
- П.21. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. ИЛ, 1951.
- П.22. Канторович Л. В., Акимов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. ГИФМЛ, 1959.
- П.23. Кэддингтон Э., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. ИЛ, 1958.
- П.24. Колобов А. М., Черенкова Л. П. Избранные главы высшей математики. Часть 2. Минск, «Высшая школа», 1967.
- П.25. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.
- П.26. Куликов Н. К. Инженерный метод решения и исследования обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. «Высшая школа», 1964.
- П.27. Ла-Салль Ж., Левшеч С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М., «Мир», 1964.

- П.28. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Росвузиздат, 1962.
- П.29. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд-во ЛГУ, 1955.
- П.30. Мышкис А. Д. Лекции по высшей математике. Изд. третье. М., «Наука», 1969.
- П.31. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. ГИТТЛ, 1949.
- П.32. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Изд. второе. М., «Наука», 1965.
- П.33. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Огиз, 1947.
- П.34. Сансонэ Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения, тт. I, II. ИЛ, 1953, 1954.
- П.35. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М., «Наука», 1970.
- П.36. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., «Мир», 1970.
- П.37. Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). М., «Мир», 1965.
- П.38. Цлаф Л. Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. М., «Наука», 1966.
- П.39. Чаплыгин С. А. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. ГИТТЛ, 1950.
- П.40. Шварц Л. Математические методы для физических наук. М., «Мир», 1965.
- П.41. Школьник А. Г. Дифференциальные уравнения. М., Учпедгиз, 1963.
- П.42. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения. ГИТТЛ, 1957.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ОСНОВНОМУ ТЕКСТУ

1. Андронов А. А. Собрание трудов. Изд-во АН СССР, 1956.
2. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний, издание второе. ГИФМЛ, 1959.
3. Аралов М. С. Выпуклые характеристики в пентодах и их свойства. М.—Л., «Энергия», 1966.
4. Ацель Я. Некоторые общие методы в теории функциональных уравнений одной переменной. УМН, 1956, т. XI, вып. 3(69), 3—68.
5. Балабанян Н. Синтез электрических цепей. Госэнергоиздат, 1963.
6. Басевич Я. С. Аппроксимационное решение параметрического уравнения первого порядка при изменении параметра по сложному периодическому закону. Труды учебных институтов связи. Вып. 57, 1972.
7. Басик И. В. Метод определения компонент тока при воздействии на нелинейную систему суммы синусоидальных напряжений. Сборник научных трудов ЦНИИС Министерства связи, 1948.
8. Беллин А. И. Неавтономные системы. В сборнике «Проблемы механики», ИЛ, 1955.
9. Бесежерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. М., «Наука», 1966.
10. Бессонов Л. А. Нелинейные электрические цепи. «Высшая школа», 1964.
11. Блякьер О. Анализ нелинейных систем. М., «Мир», 1969.
12. Блехман И. И. Синхронизация динамических систем. М., «Наука», 1971.

13. Бондаренко В. М. Вопросы анализа нелинейных цепей. Киев, «Наукова думка», 1967.
14. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. Издание пятое. ГИТТЛ, 1955.
15. Бруевич А. Н., Евтянов С. И. Аппроксимация нелинейных характеристик и спектры при гармоническом воздействии. М., «Советское радио», 1965.
16. Бутенин Н. В. Элементы теории нелинейных колебаний. Судпромгиз, 1962.
17. Виницкий А. С. Модулированные фильтры и следящий прием ЧМ. М., «Советское радио», 1969.
18. Гиллемин Э. А. Синтез пассивных цепей. М., «Связь», 1970.
19. Гинзбург С. А. Нелинейные цепи и их функциональные характеристики. М., Госэнергоиздат, 1958.
20. Гольденберг Л. М. Теория и расчет импульсных устройств на полупроводниковых приборах. М., «Связь», 1969.
21. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. ГИФМЛ, 1963.
22. Гуревич И. В. Основы синтеза параметрических функциональных преобразователей. Изд. ЛЭИС, Ленинград, 1971.
23. Данилов Л. В. Приближенный анализ вынужденных режимов нелинейных систем. «Известия ЛЭТИ». Вып. 66, ч. 1, 1967.
24. Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем. М., «Наука», 1970.
25. Заездный А. М. Сборник задач и упражнений по курсу «Теоретическая радиотехника». М., Связьиздат, 1957.
26. Заездный А. М. Гармонический синтез в радиотехнике и электросвязи. М., Госэнергоиздат, 1961.
27. Заездный А. М. Основы расчетов по статистической радиотехнике. М., «Связь», 1969.
28. Заездный А. М., Гуревич И. В. Основы расчета радиотехнических цепей (линейные цепи при гармонических воздействиях). Изд. 2-е. М., «Связь», 1968.
29. Заездный А. М., Кушнир В. Ф. Параметрические системы. Конспект лекций по курсу «Теоретическая радиотехника». Изд. ЛЭИС, 1962.
30. Заездный А. М., Кушнир В. Ф., Ферсман Б. А. Теория нелинейных электрических цепей. М., «Связь», 1968.
31. Ицхоки Я. С. Приближенный метод анализа переходных процессов в сложных линейных цепях. М., «Советское радио», 1969.
32. Каннингхэм В. Введение в теорию нелинейных систем. М., Госэнергоиздат, 1962.
33. Каудерер Г. Нелинейная механика. ИЛ, 1961.
34. Каэн Ж. Графическое интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Bull. des Soc. Fr. des Elcticiens, 7 serie, v. IV, 37, Janv. 1954.
35. Кловский Д. Д. О решении дифференциального уравнения сверхрегенератора. «Известия вузов. Радиотехника», 1959, № 1.
36. Кловский Д. Д., Николаев Б. И. К вопросу об использовании метода среднего параметра. «Труды учебных институтов связи», 1969, № 47.
37. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М., «Наука», 1970.
38. Котельников В. А. О воздействии на нелинейные сопротивления суммы синусоидальных напряжений. НТС ЛЭИС, 1936, № 14.
39. Крылов Н. Н. Электрические процессы в нелинейных элементах радиоприемников. М., Связьиздат, 1949.
40. Кушнир В. Ф. К теории параметрических систем первого порядка. «Радиотехника», 1963, № 9.
41. Ланс Дж. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. ИЛ, 1962.
42. Леондес К. Т. (редактор). Современная теория систем управления. М., «Наука», 1970.
43. Лисицкая И. Н., Синицкий Л. А., Шумков Ю. М. Анализ электрических цепей с магнитными и полупроводниковыми элементами. Киев. «Наукова думка», 1969.

44. Лъенар А. Исследование автоколебаний. «Revue generale d' electricite», v. XXIII, 1928, № 21, 22.
45. Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложения функций Матье. ИЛ, 1953.
46. Манделъштам Л. И. Полное собрание трудов. Том IV. Лекции по колебаниям, 1955.
47. Мигдал А. Б., Крайнов В. П. Приближенные методы квантовой механики. М., «Наука», 1966.
48. Минорский Н. Современные направления в нелинейной механике. В сборнике «Проблемы механики». ИЛ, 1955.
49. Михайлов Ф. А. Свободные колебания линейных систем с переменными параметрами. М., Оборонгиз, 1961.
50. Михайлов Ф. А. и др. Динамика нестационарных линейных систем. М., «Наука», 1967.
51. Михайлов Ф. А. и др. Динамика непрерывных линейных систем с детерминированными и случайными параметрами. М., «Наука», 1971.
52. Мойсеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М., «Наука», 1969.
53. Мэзон С., Циммерман Г. Электронные цепи, сигналы и системы. ИЛ, 1963.
54. Несвижский Ю. Б. О применении метода гармонической линеаризации к анализу вынужденных колебаний в цепях, содержащих катушки индуктивности с ферритовыми сердечниками. «Электросвязь», 1963, № 3.
55. Пайпс А. (Pipes A.). Анализ цепей с переменными параметрами методом БВК. «Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, P. J., Communication and Electronics», 1954, 73, 93.
56. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. М., «Наука», 1967.
57. Папалекси Н. Д. О процессах в цепи переменного тока, содержащей электрический вентиль. Собрание трудов, изд-во АН СССР, 1948, стр. 52—68.
58. Пелл Дж. (Pelle W. H.). Graphical solution of a Nonlinear Vibration Problem J. Appel, Mech., 24, № 2, 1957.
59. Попов Е. П., Пальтов И. П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. ГИФМЛ, 1960.
60. Пухов Г. Е. Методы анализа и синтеза квазианалоговых электронных цепей. Киев, «Наукова думка», 1967.
61. Рамм Г. С. Теория нелинейных электрических цепей. Часть первая. Л., изд. ЛЭИС, 1968.
62. Рамм Г. С. Графические методы решения некоторых нелинейных задач радиотехники. Л., изд. ЛЭИС, 1968.
63. Розенвассер Е. Н. Колебание нелинейных систем. М., «Наука», 1969.
64. Рытов С. М. Развитие теории нелинейных колебаний в СССР. «Радиотехника и электроника», 1957, 11, 1435—1450.
65. Складчевич А. Н. Операторные методы в статистической динамике автоматических систем. М., «Наука», 1965.
66. Смоллов В. Б. Диодные функциональные преобразователи. М.—Л., «Энергия», 1967.
67. Солодов А. В. Линейные системы автоматического управления с переменными параметрами. ГИФМЛ, 1962.
68. Солодов А. В., Петров Ф. С. Линейные автоматические системы с переменными параметрами. М., «Наука», 1971.
69. Таблицы и формулы функций В. К. Туркина Л., изд. ЛЭИС, 1963.
70. Таблицы и формулы сумм тригонометрических рядов видов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n(r)}{n^2 + a^2} \frac{\sin nx}{\cos nx} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nI_n(r)}{n^2 + a^2} \frac{\sin nx}{\cos nx},$$

под ред. А. М. Заездного. Л., изд. ЛЭИС, 1961.

71. Тафт В. А. Основы спектральной теории и расчет цепей с переменными параметрами. М., «Наука», 1964.
72. Турбович И. Т. Метод близких систем и его применение. Изд-во АН СССР, 1961.
73. Туркин В. К., Левин Г. А. К теории детектирования частотомодулированных колебаний. Доклады АН СССР, 1956, т. 106, № 6, стр. 999—1002.
74. Филиппов Е. Нелинейная электротехника. М., «Энергия», 1968.
75. Харвелл Г. П. Физические основы электротехники. Перевод под редакцией К. М. Поливанова. М., Госэнергоиздат, 1950.
76. Хаяси Т. Вынужденные колебания в нелинейных системах. ИЛ, 1957.
77. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. М., «Мир», 1968.
78. Хейл Дж. Колебания в нелинейных системах. М., «Мир», 1966.
79. Хьюз В. Нелинейные электрические цепи. М.—Л., «Энергия», 1967.
80. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. ИЛ, 1963.
81. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М., «Наука», 1964.

Александр Михайлович Заездный

**ОСНОВЫ РАСЧЕТОВ НЕЛИНЕЙНЫХ
И ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ**

Отв. редактор *Л. С. Басевич*

Редактор *Н. К. Логинова*

Художник *Д. И. Агаян*

Техн. редактор *К. Г. Маркоч*

Корректор *Л. П. Текунова*

Сдано в набор 28/I 1973 г.	Подписано в печ. 19/IV 1973 г.
Форм. бум. 60×90 ^{1/8}	28,0 печ. л. 28,0 усл.-п. л. 30,07 уч.-изд. л.
T-05293	Тираж 26 000 экз. Бумага типографская № 2
Зак. изд. 14270	Цена 1 руб. 74 коп.
Издательство «Связь», Москва-центр, Чистопрудный бульвар, 2	

Типография издательства «Связь» Государственного комитета Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва-центр, ул. Кирова, 40. Зак. тип. 17

b.74187.

W. G. M. S. Co. C. 2. 7. 33