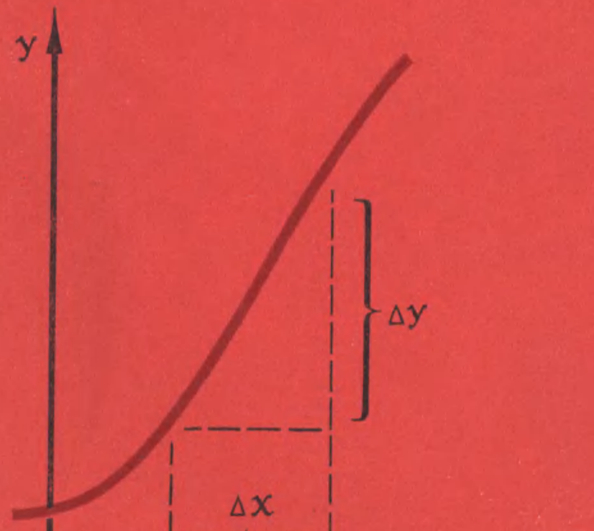
С. И. Шварцбурд
О. С. Ивашев-Мусатов

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА



С. И. ШВАРЦБУРД, О. С. ИВАШЕВ-МУСАТОВ

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

Одобрено Ученым советом Государственного комитета Совета Министров СССР по профессионально-техническому образованию в качестве учебного пособия для средних профессионально-технических училищ

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1977

Отзывы и замечания по книге просим направлять по адресу: *Москва, К-51, Неглинная ул., 29/14, «Высшая школа».*

Шварцбурд С. И., Ивашев-Мусатов О. С.
Ш 33 Алгебра и начала анализа. Учеб. пособие для средн. проф. техн. училищ. М., «Высш. школа», 1977.
111 с. с ил.

В учебном пособии учитывается как новая программа восьмилетней школы, так и специфика средних профтехучилищ. Ряд сложных понятий и доказательств, относящихся к элементам математического анализа, упрощены без снижения корректности изложения материала с точки зрения математической науки.

Книга предназначена для учащихся средних профессионально-технических училищ.

$Ш \frac{20203-131}{052(01)-77} 4-77$ **517.2**

ПРЕДИСЛОВИЕ

XXV съезд КПСС уделил большое внимание развитию в десятой пятилетке сети профессионально-технических училищ. Решениями XXV съезда предусмотрено: за пятилетие подготовить в системе профессионально-технического образования примерно 11 млн. квалифицированных рабочих, а также увеличить подготовку рабочих со средним образованием в профессионально-технических училищах не менее чем в 2,5 раза.

В десятой пятилетке встает задача всемерного совершенствования не только специального, но и общего среднего образования в средних ПТУ. Важное место в общем среднем образовании будущих рабочих занимает изучение математики. Необходимы поиски путей такого совершенствования.

Настоящая книга является учебным пособием по предмету «Алгебра и начала анализа» курса математики для учащихся средних профессионально-технических училищ, которые прошли новую программу по математике в восьмилетней школе.

Это пособие не заменяет учебных пособий по алгебре и началам анализа IX и X классов общеобразовательной школы, которые обязательны и для средних профтехучилищ.

Назначение данной книги — провести экспериментальное изучение тех же вопросов программы в ином освещении. При этом в пособии излагаются не все вопросы программы, и лишь часть из них, а именно: производная и интеграл и примыкающие к ним разделы. Сюда, с одной стороны, относятся такие темы, как предел функции, непрерывность функции и связанные с ними вопросы, а с другой стороны — применение производной и интеграла в приложениях и при изучении традиционно школьного материала — элементарных функций.

В основе изучения элементов математического анализа в данном пособии лежит понятие непрерывности функции. Для более ясного представления об этом понятии в учебнике помещено много рисунков. Каждый рисунок и график выполняют определенную учебную роль. Поэтому учащимся надо относиться к ним с вниманием, понимать и знать, какие особенности функции или свойства поясняет тот или иной рисунок. В связи с этим чтение текста данной книги рекомендуется сопровождать записями, «комментариями», т. е. читать «с карандашом в руке».

Часть упражнений дублируется для того, чтобы помочь учащимся усвоить то или иное понятие, выработать известные навыки, накопить знания. Разумеется, в тех случаях, когда материал уже усвоен, нет надобности выполнять одинаковые упражнения, их полезно оставлять для повторения в будущем.

Пункт со звездочкой необязателен для всех учащихся, его могут изучать лишь желающие.

В пособии содержится раздел для повторения курса восьмилетней школы. Учащиеся смогут самостоятельно или под руководством преподавателя по мере надобности повторять забытые вопросы арифметики и алгебры как в учебном году, так и при подготовке к выпускным экзаменам.

Порядок изложения и содержание данной книги не соответствуют полному перечню вопросов программы. Поэтому преподаватель должен сам решать, каким образом использовать книгу в процессе обучения. Вместе с тем некоторые замечания для преподавателя приводятся в конце книги и имеют целью осветить ряд методических вопросов преподавания по этому пособию.

Глава I
ФУНКЦИЯ И ЕЕ ПРОИЗВОДНАЯ

§ 1. ФУНКЦИЯ

1. Понятие функции и ее графика (повторение). Напомним основные сведения о числовых функциях, известные из предыдущих классов. Начнем с определения функции.

Если каждому числу x из числового множества D поставлено в соответствие единственное число y, то говорят, что на множестве D задана функция.

Множество D называют *областью определения* функции, x — *аргументом* функции.

Функцию обычно обозначают буквой f. Тот факт, что числу x поставлено в соответствие число y, записывают так: $y = f(x)$. Переменную y часто опускают и говорят: задана функция x^2, $\lg x$ и т. п. Вместо буквы f можно употреблять любую другую букву.

Напомним, что нет никаких ограничений на способ, которым установлено соответствие между переменными x и y. Чаще всего это соответствие устанавливается при помощи формул:

$$y = x^2 - 5x, \quad y = \sqrt{2x+3}, \quad y = \frac{2x+1}{4-7x} \quad \text{и т.п.}$$

Но бывают и более сложные случаи задания функции, когда на разных частях области определения функция задается разными формулами. Например:

$$y = \begin{cases} 2x-1 & \text{при} \quad x \leqslant -3, \\ 5 & \text{при} \quad -3 < x < 2, \\ 7-x & \text{при} \quad 2 \leqslant x, \end{cases} \quad \text{или} \quad y = \begin{cases} x^2 - x & \text{при} \quad x < 1, \\ 2 & \text{при} \quad x = 1, \\ 0 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

Функция может быть задана и словесным описанием. Например, функция $[x]$ есть целая часть числа x. Напомним, что $[x] = n$ для всех x, удовлетворяющих неравенству $n \leqslant x < n + 1$, где n — целое число.

Иногда функции задаются при помощи рисунка. Например, для каждого числа $x > 0$ можно рассматривать площадь фигуры, заштрихованной на рис. 1. Это функция от x. Ее обыкновенно обозначают через S, а ее значение в точке x обозначают $S(x)$. Из рисунка видно, что $S(1) = 1$, а $S(2) = 2{,}5$.

Приведенные примеры задания функции никоим образом не исчерпывают всего разнообразия возможностей, с которыми вы будете встречаться при дальнейшем обучении.

Область определения функции — множество D — тоже может быть весьма произвольна. Простейшие области определения: *отрезок* $[a; b]$ — множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \leqslant x \leqslant b$, и множество внутренних точек этого отрезка — *интервал* $]a; b[$ —

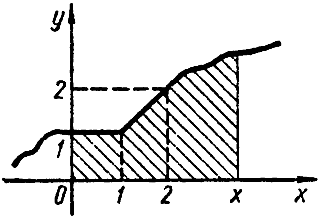


Рис. 1

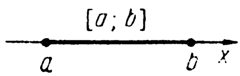


Рис. 2

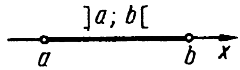


Рис. 3

множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $a < x < b$. Числа a и b называются *концами отрезка* и *интервала*: a — левым, b — правым. На числовой оси отрезок и интервал принято обозначать так, как это показано на рис. 2 и 3.

Кроме отрезков и интервалов часто еще говорят о *полуотрезках* (или полуинтервалах) $[a; b[$ и $]a; b]$. Это множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \leqslant x < b$ или $a < x \leqslant b$ соответственно. На рис. 4 и 5 приведено их изображение на числовой прямой.

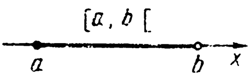


Рис 4

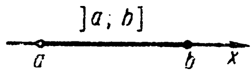


Рис. 5

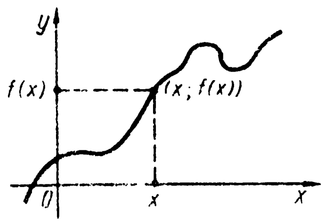


Рис. 6

Общее название для перечисленных выше множеств — *промежуток*. Число $b - a$ называется *длиной* такого промежутка.

Еще рассматриваются бесконечные промежутки — *лучи*, или *полупрямые*:

$]a; \infty[$ — множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $a < x$;
$[a; \infty[$ — множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \leqslant x$;
$]-\infty; a[$ — множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $x < a$;
$]-\infty; a]$ — множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $x \leqslant a$,
и *прямая*:
$]-\infty; \infty[= \mathbf{R}$ — множество всех действительных чисел.

Графиком функции f называется множество точек на плоскости с координатами $(x; f(x))$, где x — любое число из области определения этой функции (рис. 6).

График дает наглядное представление о рассматриваемой функции. Вы уже знакомы с графиками простейших функций: графиком линейной функции $y = kx + b$ является прямая (рис. 7); графиком обратной пропорциональности $y = \frac{m}{x}$ является гипербола (рис. 8, на рисунке $m > 0$). Графиком квадратного трехчлена или квадратичной функции

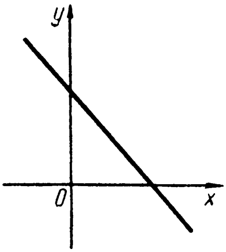


Рис. 7

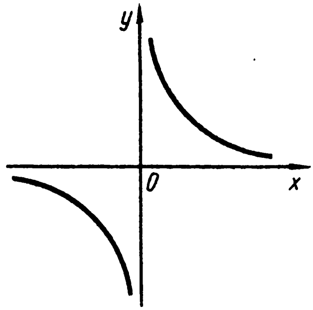


Рис. 8

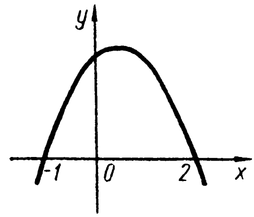


Рис. 9

$y = ax^2 + bx + c$ является парабола (на рис. 9 приведен график функции $y = 2 + x - x^2$).

Построим график функции $y = [x]$ — целая часть x. Построение проводится по полуинтервалам в соответствии с определением функции «целая часть». Пусть x удовлетворяет двойному неравенству $0 \leqslant x < 1$ (т. е. принадлежит полуинтервалу $[0; 1[$). Тогда целая часть x равна 0, т. е. $y = [x] = 0$. На рис. 10 эта часть графика изображена отрезком оси абсцисс, правый конец которого помечен светлым кружком. Этот кружок на графике говорит о том, что $[1] \neq 0$. Далее рассмотрим числа x, удовлетворяющие двойному неравенству $1 \leqslant x < 2$ (т. е. из полуинтервала $[1; 2[$). Для них целая часть равна 1, т. е. $y = [x] = 1$. Следовательно, над этим полуинтервалом график функции $[x]$—горизонтальный отрезок со светлым кружком в точке (2; 1). Рассматривая x, удовлетворяющие двойному неравенству $-1 \leqslant x < 0$ (т. е. из полуинтервала $[-1; 0[$), и замечая, что для них целая часть равна -1, получаем график $[x]$ над этим полуинтервалом — горизонтальный отрезок со светлым кружком в точке $(0; -1)$. Подобным образом, перебирая последовательно полуинтервалы с целыми концами, продолжаем строить график.

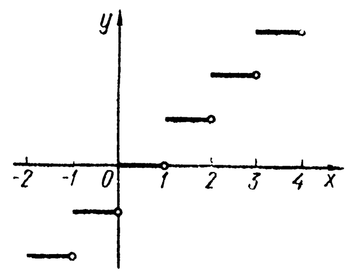


Рис. 10

Упражнения

Найдите:

1. $[3]$. **2.** $[2,2]$. **3.** $\left[\frac{22}{7}\right]$. **4.** $[\pi]$.

5. $[-2]$. **6.** $[-1{,}73]$. **7.** $\left[-\sqrt[3]{10}\right]$. **8.** $\left[\sqrt[3]{10}\right]$.

Постройте графики функций

9. $y = x + 2$. **10.** $y = x - 1$. **11.** $y = 3 - x$.

12. $y = 1 - \frac{x}{2}$. **13.** $y = 2x - 1$. **14.** $y = \frac{x}{3} + 2$.

15. $y = x^2 - 4$. **16.** $y = 9 - x^2$. **17.** $y = (x - 2)^2$.

18. $y = (x + 3)^2$. **19.** $y = -(x - 1)^2$. **20.** $y = x^2 - 2x + 1$.

21. $y = x^2 + 2x$. **22.** $y = 3x - x^2$. **23.** $y = 1 - 2x - x^2$.

24. $y = \frac{2}{x}$. **25.** $y = -\frac{3}{x}$. **26.** $y = |x|$.

27. Автомобиль движется 20 с со скоростью 60 км/ч, а затем 50 с со скоростью 100 км/ч. Запишите зависимость пути s (в километрах) от времени движения t (в секундах) и постройте график этой функции.

28. Стержень сечением 1 см^2 и длиной 25 см спаян из двух частей. Левая часть стержня, равная 10 см, имеет плотность 7,8 г/см^3, а правая, длиной 15 см, имеет плотность 8,9 г/см^3. От этого стержня отпиливают кусок длиной x (считая от левого конца). Напишите зависимость массы m (в граммах) этого куска от его длины x (в сантиметрах). Какова область определения этой функции? Постройте график этой функции.

29. В равнобедренном треугольнике ABC длина основания AB равна 2 см, а высота — 2 см. Прямая, перпендикулярная AB и отстоящая от точки A на расстоянии x (см), отсекает от треугольника ABC фигуру (рис. 11). Найдите площадь этой фигуры как функцию x. Начертите график этой функции.

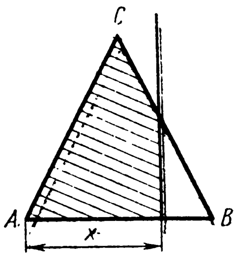


Рис. 11

2. Изменение функции. В более сложных (по сравнению с предыдущим пунктом) случаях график функции f обычно строят так: наносят на плоскости точки с координатами $(x_k; y_k)$, где числа x_k произвольно выбраны из области определения функции f (график которой мы хотим построить), а $y_k = f(x_k)$. Таким образом, построенные точки лежат на графике рассматриваемой функции. После этого проводят через отмеченные точки линию (рис. 12 и 13). Ее считают схематическим изображением искомого графика. Однако при этом ряд важных особенностей

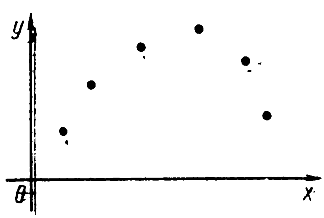


Рис. 12

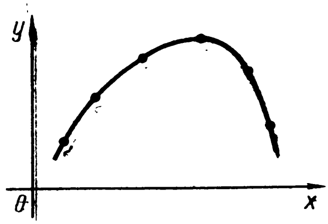


Рис. 13

графика функции может быть утерян или искажен (рис. 14, 15 и 16).
Рассмотрим некоторые из этих особенностей.

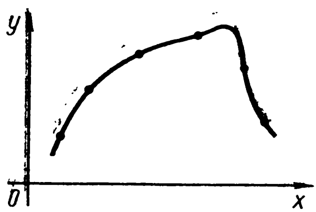


Рис. 14

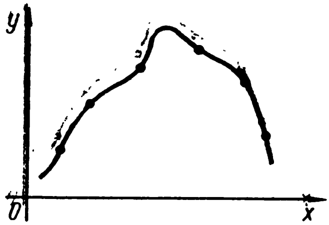


Рис. 15

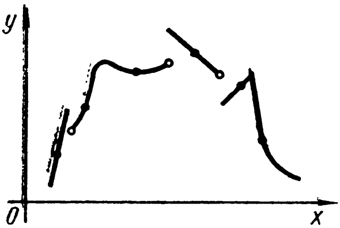


Рис. 16

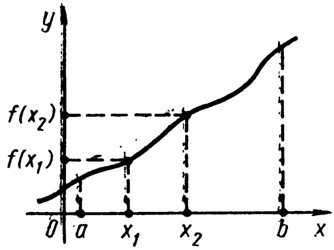


Рис. 17

Функция f называется *возрастающей на промежутке*, если для любых x_1 и x_2 этого промежутка из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$. Можно сказать, что график возрастающей функции идет «снизу вверх» при движении слева направо (рис. 17).

Функция f называется *убывающей на промежутке*, если для любых x_1 и x_2 этого промежутка из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$. Можно сказать, что график убывающей функции идет «сверху вниз» при движении слева направо (рис. 18).

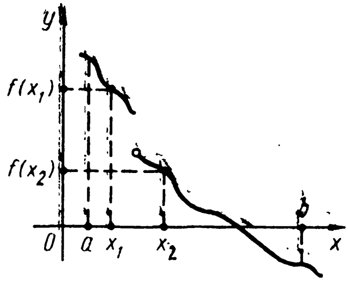


Рис. 18

Упражнения

30. На рис. 19—24 приведены графики функций. Укажите для этих функций промежутки: а) возрастания, б) убывания.

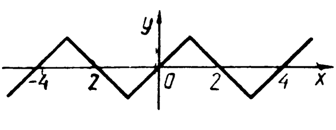


Рис. 19

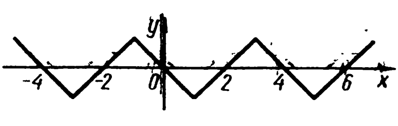


Рис. 20

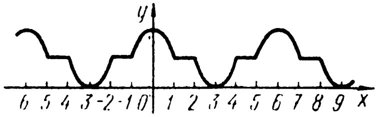


Рис. 21

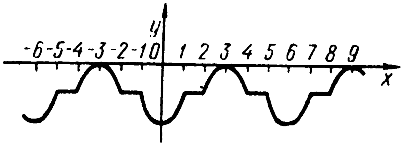


Рис. 22

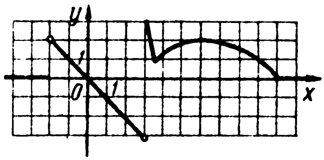


Рис. 23

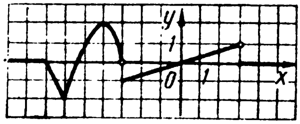


Рис. 24

Постройте график функции и укажите промежутки ее возрастания и убывания:

31. $y = (x - 1)^2 + 1$. **32.** $y = 1 - (x - 1)^2$.

33. $y = (x + 1)^2 - 1$. **34.** $y = 1 - (x + 1)^2$.

35. $y = |x + 1|$. **36.** $y = |1 - x|$. **37.** $y = |x| - 1$.

38. $y = 1 - |x|$. **39.** $y = x^2 + 3x$. **40.** $y = 3x - x^2$.

41. $y = x^2 - x$. **42.** $y = -x - x^2$.

43. На рис. 25 и 26 изображены графики движения поездов. На оси абсцисс откладывается время t — это ось Ot, на оси ординат — расстояние от железно-

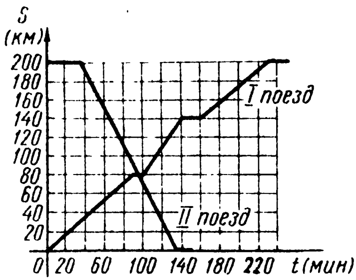


Рис. 25

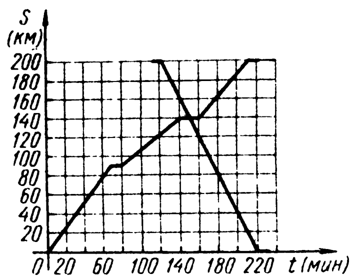


Рис. 26

дорожной станции A. Определите: 1) на каком расстоянии от пункта A и на какое время останавливались поезда; 2) через какое время после выхода из A и на каком расстоянии первый поезд встретил второй; 3) какова наибольшая скорость первого поезда.

44. Кирпич падает с крыши 20-этажного дома. Его расстояние от земли $H = 60 - 4{,}9t^2$ (м), где t — время падения (в секундах). 1) Начертите график зависимости H от t (откладывая время t на оси абсцисс, а высоту H — на оси ординат). 2) Сколько времени будет падать кирпич? 3) Когда он пролетит мимо перекрытия 10—11-го этажей? Найдите этот момент на чертеже.

3. Экстремум функции. Кроме промежутков возрастания и убыва-

ния для графика функции существенно указать точки экстремума. Дадим их определение.

Точка x_0 называется точкой максимума функции f, если можно указать такой интервал $]a;\ b[$, содержащий эту точку x_0, что

$$f(x_0) > f(x) \text{ для всех } x \neq x_0 \text{ из }]a;\ b[.$$

Можно сказать, что точка максимума функции есть «самая высокая» точка части графика функции, расположенной над интервалом $]a; b[$

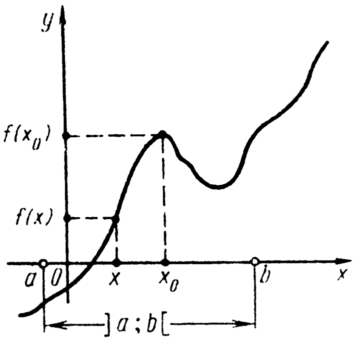


Рис. 27

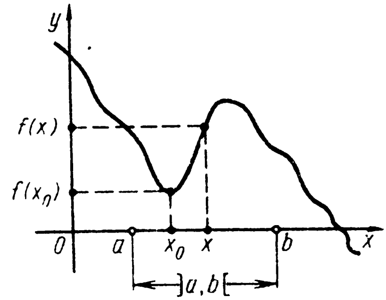


Рис. 28

(рис. 27). Например, общая граница между интервалом возрастания и интервалом убывания есть точка максимума. *Точка x_0 называется точкой минимума функции f, если можно указать такой интервал $]a;\ b[$, содержащий точку x_0, что $f(x_0) < f(x)$ для всех $x \neq x_0$ из $]a;\ b[$.*

Можно сказать, что точка минимума функции есть «самая низкая» точка на части графика функции, расположенной над интервалом $]a;\ b[$ (рис. 28). Например, общая граница между интервалом убывания и интервалом возрастания есть точка минимума.

Общее название для точек максимума и минимума — *точки экстремума.*

Упражнения

45. Для функций, приведенных в упр. 30—42, укажите точки экстремума.

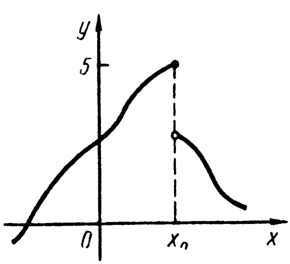


Рис. 29

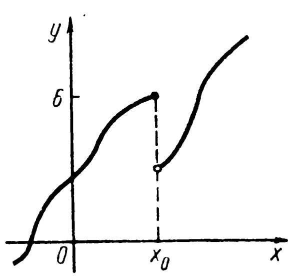


Рис. 30

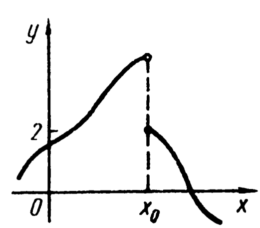


Рис. 31

46. Является ли точка x_0 точкой экстремума для функций, графики которых изображены на рис. 29—34?

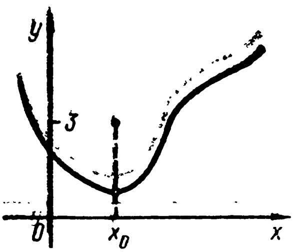


Рис. 32

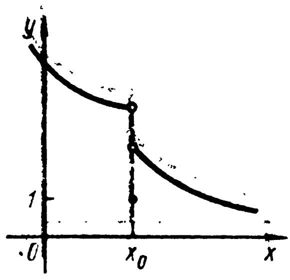


Рис. 33

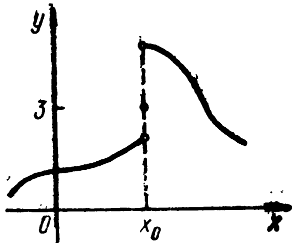


Рис. 34

4. Приращение аргумента и приращение функции. Далее мы часто будем иметь дело с разностью значений аргумента и разностью соответствующих значений функции. Для этих разностей введены специальные обозначения и названия.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^3$. Ее график изображен на рис. 35. Значение функции в точке 2 равно 8:

$$f(2) = 2^3 = 8.$$

Продвинемся вправо от точки 2 по оси абсцисс на расстояние, равное 0,2 единицы. Мы окажемся в точке 2,2. В этом случае говорят, что аргумент функции получил в точке 2 приращение 0,2. Приращение аргумента в точке x — это разность двух его значений $x_1 = 2{,}2$ и $x = 2$ (рис. 36). Пишут:

$$x_1 - x = \Delta x, \quad \text{т. е.} \quad 2{,}2 - 2 = 0{,}2.$$

Здесь греческая буква Δ (дельта прописная) применена для обозначения приращения аргумента. Не следует забывать, что Δx — это одно целое выражение, а не произведение «дельты» на «икс».

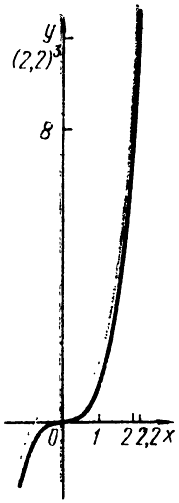


Рис. 35

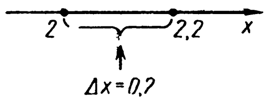


Рис. 36

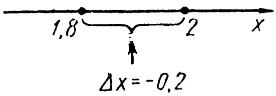


Рис. 37

Приращение аргумента иногда обозначают буквой h. В нашем примере $h = 0{,}2$.

Можно продвинуться от точки 2 влево на 0,2 единицы, тогда мы окажемся в точке 1,8 (рис. 37). Приращение аргумента теперь будет отрицательным:

$$\Delta x = -0{,}2; \quad h = -0{,}2.$$

Итак, *приращением аргумента* в точке x называют разность двух значений аргумента $x_1 - x$ и обозначают через h или Δx (читается: «дельта икс»). Таким образом,

$$\Delta x = x_1 - x \quad \text{и} \quad x_1 = x + \Delta x,$$

или

$$h = x_1 - x \quad \text{и} \quad x_1 = x + h.$$

Приращением функции f в точке x, соответствующим приращению аргумента $\Delta x = x_1 - x$, называют разность $f(x_1) - f(x)$. Приращение функции обозначают $\Delta f(x)$ или короче Δf, Δy и читают: «дельта эф от икс», «дельта эф» или «дельта игрек». Таким образом,

$$\Delta f(x) = f(x_1) - f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) \quad \text{и} \quad f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f(x)$$

или

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) \quad \text{и} \quad f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f$$

или

$$\Delta y = f(x + h) - f(x) \quad \text{и} \quad f(x + h) = y + \Delta y.$$

На рис. 38 отмечены приращение аргумента и соответствующее приращение функции. Например, если приращение аргумента функции $f(x) = x^3$ в точке x обозначим через h, то

$$\Delta y = f(x + h) - f(x) = (x + h)^3 -$$
$$- x^3 = (x + h - x) \times ((x + h)^2 + (x +$$
$$+ h)x + x^2) = h(x^2 + 2xh + h^2 + x^2 +$$
$$+ xh + x^2) = h(3x^2 + 3xh + h^2).$$

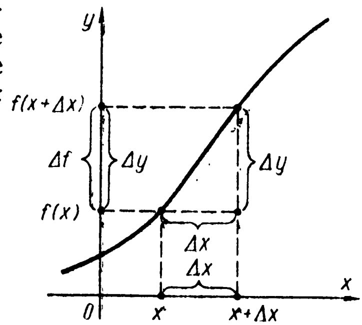


Рис. 38

Упражнения

47. Для функции $f(x) = 3x - 4$ найдите:
а) x_1, если $x = 3$ и $\Delta x = 0{,}2$;
б) x_1, если $x = 5$ и $h = 0{,}03$;
в) Δy, если $x = 4$ и $\Delta x = 0{,}1$;
г) Δy, если $x = 7$ и $h = 0{,}02$.

48. Для функции $y = x^2$ найдите:
а) приращение аргумента Δx, если $x_1 = 2{,}3$ и $x = 2$ и соответствующее приращение функции Δy;
б) приращение аргумента h, если $x_1 = 3{,}8$ и $x = 3{,}75$ и соответствующее приращение функции Δf.

49. Найдите приращение функции $y = \frac{1}{x}$, если:

а) $x = 5$ и $h = 0{,}05$; в) $\Delta x = -0{,}3$ и $x = 4{,}03$;

б) $x_1 = 3{,}01$ и $h = 0{,}01$; г) $\Delta x = -0{,}01$ и $x = 3$.

50. Выразите через x_0 и Δx приращение функции в точке x_0 для функций:

а) $y = 3 - 2x$; в) $f(x) = 2x^2$;

б) $y = \sqrt{x}$; г) $f(x) = 3x - x^2$.

51. На рис. 39 изображен график функции f. Глядя на рисунок, скажите, чему равно приращение аргумента и чему равно соответствующее приращение функции.

52. Чему равны приращения аргумента и какого они знака (рис. 40, 41, 42)? Какого знака соответствующие приращения функции и чему они равны?

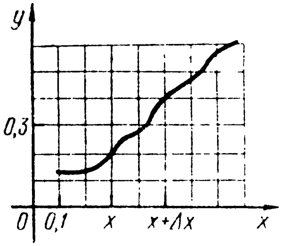


Рис. 39

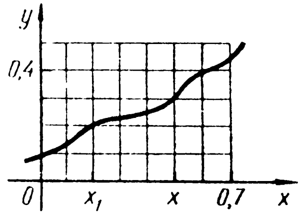


Рис. 40

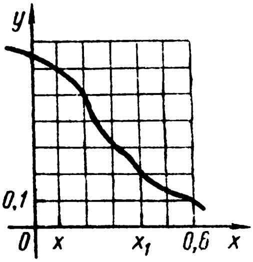


Рис. 41

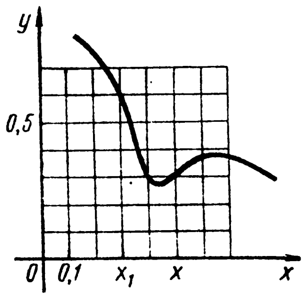


Рис. 42

§ 2. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

5. Наглядное представление о непрерывности функции. Вы уже умеете строить графики некоторых функций, например $y = 2 - x$ (рис. 43) или $y = x^2 - 2x$ (рис. 44). Обратим сейчас основное внима-

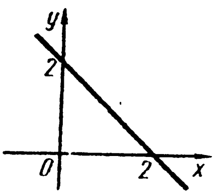


Рис. 43

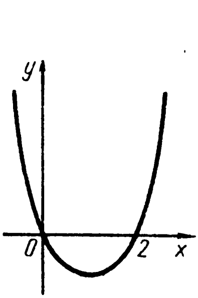


Рис. 44

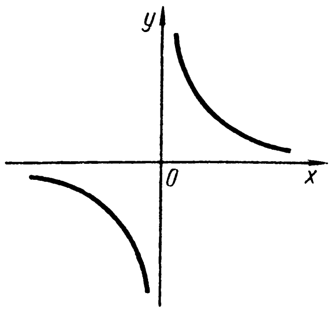


Рис. 45

ние в этих графиках на то, что их можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги — одним непрерывным движением. Поэтому говорят, что это *непрерывные функции*. А вот график функции $y = \frac{1}{x}$ (рис. 45) или $y = \frac{|x|}{x}$ (рис. 46) так нарисовать нельзя — нарисовав левую часть графика, придется оторвать карандаш от бумаги, чтобы нарисовать

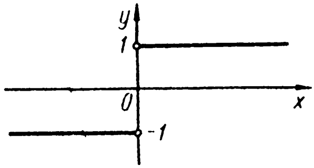


Рис. 46

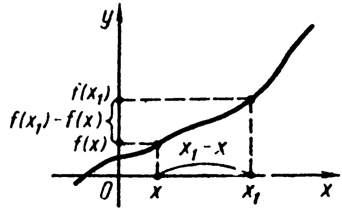


Рис. 47

правую часть. Про такие функции говорят, что они *разрывны*. В приведенных примерах точка нуль является *точкой разрыва*.

Функция $y = [x]$ (целая часть x, см. рис. 10) имеет разрывы при всех целых значениях аргумента x, а во всех остальных точках эта функция непрерывна.

В этом параграфе мы будем изучать описанное выше свойство непрерывности функции или его отсутствие, т. е. разрыв.

Упражнения 53 и 54, иллюстрирующие непрерывность или разрывность функции, приведены в конце этого пункта.

Рассмотрение графиков непрерывных функций приводит нас к следующей характеристике непрерывности функции: *малому изменению аргумента (т. е. малому* $|\Delta x|$) *соответствует малое изменение функции (т. е. малое* $|\Delta y|$).

Можно сформулировать свойство непрерывности функции и так: если $x_1 \approx x$, то $f(x_1) \approx f(x)$ и точность второго равенства может быть сделана как угодно большой за счет повышения точности первого равенства (рис. 47).

Рассмотрим, например, как будет меняться соответствующее приращение функции $y = x^2$ в точке 4, если уменьшить приращение Δx в этой точке.

Пусть $\Delta x = 0{,}3$, тогда $f(4{,}3) = 4{,}3^2 = 18{,}49$, а приращение функции $y = x^2$ в точке 4, соответствующее приращению аргумента 0,3, будет равно $\Delta y = f(4{,}3) - f(4) = 4{,}3^2 - 4^2 = 2{,}49$.

Посмотрим, как изменится приращение функции при уменьшении приращения аргумента. Например, возьмем $\Delta x = 0{,}2$ и $\Delta x = 0{,}1$. Соответственно получим $\Delta y = f(4{,}2) - f(4) = 1{,}64$ и $\Delta y = f(4{,}1) - f(4) = 0{,}81$.

Ниже приводится сводная таблица изменения приращения аргумента и соответствующего изменения приращения функции:

x	Δx	$x+\Delta x$	$f(x)$	$f(x+\Delta x)$	$\Delta f(x)$
4	0,3	4,3	16	18,49	2,49
4	0,2	4,2	16	17,64	1,64
4	0,1	4,1	16	16,81	0,81
4	0,01	4,01	16	16,0801	0,0801
......	......	......	......	......	......
4	−0,01	3,99	16	15,9201	−0,0799
4	−0,1	3,9	16	15,21	−0,79
4	−0,2	3,8	16	14,44	−1,56
4	−0,3	3,7	16	13,69	−2,31

Если процесс уменьшения $|\Delta x|$ продолжить (в таблице это отмечено многоточием), то заметим, что при уменьшении $|\Delta x|$ уменьшается и $|\Delta f(x)|$. Отсюда напрашивается вывод: функция $y = x^2$ в точке 4 непрерывна.

Разберем пример разрывной функции. Функция $y = \{x\} = x - [x]$ (дробная часть x, рис. 48) имеет разрывы при всех целых значениях аргумента x, а во всех остальных точках эта функция непрерывна. Составим для этой функции таблицу приращений аргумента и соответствующих значений приращений функции в точке 3:

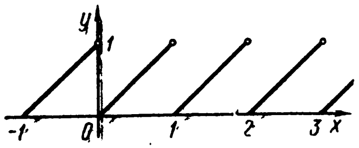


Рис. 48

x	Δx	$x+\Delta x$	$f(x)$	$f(x+\Delta x)$	$\Delta f(x)$
3	0,03	3,03	0	0,03	0,03
3	0,02	3,02	0	0,02	0,02
3	0,01	3,01	0	0,01	0,01
......	......	......	......	......	......
3	−0,01	2,99	0	0,99	0,99
3	−0,02	2,98	0	0,98	0,98
3	−0,03	2,97	0	0,97	0,97

Из верхней половины таблицы видно, что при неограниченном уменьшении положительных приращений аргумента неограниченно уменьшается и соответствующее приращение функции. Может показаться, что функция непрерывна в точке 3. Но, рассмотрев нижнюю половину таблицы, мы видим, что при уменьшении приращения аргумента (по абсолютной величине) приращение функции не уменьшается, а увеличивается. По графику (рис. 48) ясно видно, в чем здесь дело: от приближения аргумента слева к точке 3 мы не приближаемся к значению функции 0 в этой точке, а удаляемся от него, приближаясь к значению 1. Итак, при приближении аргумента слева к точке 3 соответствующее значение функции приближается к 1, а при приближении аргумента справа к точке 3 соответствующее значение функции приближается к 0 — значению функции в точке 3.

Получаем вывод: функция $y = \{x\}$ разрывна в точке 3. Эта функция разрывна и при любом целом значении аргумента x. По графику (рис. 48) видно, что в этих точках происходит «скачок» значений функции на единицу.

Характеристику непрерывности функции (имеется в виду приращение аргумента и приращение функции) мы часто встречаем в практике и технике. Например, при нагревании воды ее температура θ[1] есть функция от времени t, т е. $\theta = \theta(t)$. Поскольку за малый промежуток времени вода нагревается мало, то функция $\theta(t)$ такова, что малому приращению аргумента Δt соответствует малое приращение функции $\Delta\theta$, т.е. это непрерывная функция. Если подсоединить прибор, автоматически записывающий температуру нагреваемой воды, то мы увидим непрерывную линию, являющуюся графиком температуры $\theta(t)$.

К понятию непрерывности функции подводят и потребности приближенных вычислений. Представьте себе, что требуется вычислить значение функции $f(x)$ в точке x, т е. найти число $f(x)$. Причем часто приходится округлять число x, т. е. брать для вычисления другое число $x_1 \approx x$ и вычислять $f(x_1)$ вместо $f(x)$. При этом получается ошибка, равная $f(x_1) - f(x) = \Delta f$. Для непрерывных функций эта ошибка может быть сделана как угодно малой по модулю, если ошибка округления $x_1 - x = \Delta x$ подобрана достаточно малой (тоже по модулю) (см. рис. 47).

Поясним сказанное конкретным примером. Пусть требуется вычислить объем куба, ребро которого равно $\sqrt{2}$. Этот объем равен $(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$, что является значением функции $f(x) = x^3$ при аргументе $x = \sqrt{2}$. Для вычисления берется $\sqrt{2}$ с точностью до трех, четырех и т. п. знаков после запятой. В результате получается приближенное значение для объема куба. Ясно, что чем точнее измерено ребро, т. е. чем точнее вычислен $\sqrt{2}$, тем точнее получен объем.

Пример 1. Доказать, что линейная функция непрерывна.

Решение. Пусть $f(x) = kx + b$. Тогда

$$\Delta y = k(x + \Delta x) + b - kx - b = k\Delta x,$$

т. е.

$$|\Delta y| = |k| \cdot |\Delta x|.$$

Следовательно, при неограниченном уменьшении $|\Delta x|$ неограниченно уменьшается и $|\Delta y|$, т. е. линейная функция непрерывна.

[1] θ — буква греческого алфавита «тэта».

Пример 2. Доказать, что для всех $x > 1$ функция $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна.

Решение. Найдем приращение этой функции:

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)}.$$

Рассмотрим такие приращения аргумента Δx, для которых выполнено неравенство $x + \Delta x \geqslant 1$. Тогда

$$|\Delta y| = \frac{|\Delta x|}{x(x + \Delta x)} < |\Delta x|,$$

поскольку при уменьшении знаменателя дробь увеличивается. Получаем $|\Delta y| \leqslant |\Delta x|$, откуда видно, что при неограниченном уменьшении $|\Delta x|$ неограниченно уменьшается и $|\Delta y|$, что и требовалось доказать.

Пример 3. Доказать, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна в точке 0,2.

Решение. Найдем приращение этой функции в точке 0,2:

$$\Delta y = \frac{1}{0{,}2 + \Delta x} - \frac{1}{0{,}2} = \frac{-5\Delta x}{0{,}2 + \Delta x}.$$

Рассмотрим приращения аргумента Δx, удовлетворяющие неравенству $|\Delta x| \leqslant 0{,}1$. Тогда $0{,}2 + \Delta x \geqslant 0{,}1$ и

$$|\Delta y| = \frac{5|\Delta x|}{0{,}2 + \Delta x} \leqslant 50|\Delta x|.$$

Отсюда ясно, что при неограниченном уменьшении $|\Delta x|$ неограниченно уменьшается и $|\Delta y|$, что и требовалось доказать.

Заметим, что аналогичные рассуждения в общем случае показывают непрерывность $\frac{1}{x}$ в любой точке $x \neq 0$.

Пример 4. Доказать, что функция $f(x) = x^2$ непрерывна в точке $x = -3$.

Решение. Найдем приращение этой функции в точке -3:

$$\Delta y = (-3 + \Delta x)^2 - (-3)^2 = -6\Delta x + (\Delta x)^2 = \Delta x(-6 + \Delta x).$$

Рассмотрим Δx, удовлетворяющие неравенству $|\Delta x| \leqslant 1$. Тогда

$$|\Delta y| = |\Delta x||-6 + \Delta x| \leqslant |\Delta x|(6 + |\Delta x|) \leqslant 7|\Delta x|.$$

Отсюда видно, что при неограниченном уменьшении $|\Delta x|$ неограниченно уменьшается $|\Delta y|$, что и требовалось доказать.

Аналогичные рассуждения можно провести для любой точки x и доказать, что функция $f(x) = x^2$ непрерывна в этой точке.

Упражнения

53. На рис. 10, 13—35 и 38—48 приведены графики функций. Какие из функций непрерывны, а какие разрывны? Укажите точки разрыва. Укажите значения функции в точке разрыва (если они существуют).

54. Поезда отходят от станции каждые 10 мин. Найдите зависимость времени ожидания поезда от времени прихода пассажира на станцию (нарисовать график этой функции). Непрерывная ли эта функция?

По образцу таблицы на с. 16 заполните таблицу для функций:

55. $f(x) = x^2$ в точке $x = -2$, если $\Delta x = -0{,}3$; $-0{,}2$; $-0{,}1$; $0{,}1$; $0{,}2$; $0{,}3$.

56. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ в точке $x = 3$, если $\Delta x = -0{,}3$; $0{,}3$; $-0{,}2$; $0{,}2$; $-0{,}1$; $0{,}1$.

57. $f(x) = x^3$ в точке $x = -1{,}8$, если $\Delta x = -0{,}3$; $0{,}3$; $-0{,}2$; $0{,}2$; $-0{,}1$; $0{,}1$.

58. Сколько верных знаков надо взять у числа π, чтобы вычислить с точностью до четырех знаков: а) π^2; б) π^3; в) $\dfrac{1}{\pi}$; г) $\sqrt{\pi}$?

Докажите, что приведенные ниже функции f непрерывны в указанных точках:

59. $f(x) = C$, C — постоянная для всех x.

60. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x < -1$.

61. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x = 0{,}3$.

62. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x = -0{,}7$.

63. $f(x) = x^2$, $x = 2$.

64. $f(x) = x^2$, $x = 47$.

65. $f(x) = x^2$, $x = -15$.

66. $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 1$.

67. $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 0{,}02$.

6. Формулировка понятия непрерывности функции в точке. Дадим точную математическую формулировку понятия непрерывности функции в точке. При этом по традиции пользуются греческими буквами: ε — эпсилон и δ — дельта.

Определение. *Функция f называется непрерывной в точке x_0, если для любого положительного числа ε можно подобрать такое положительное число δ, что*

$|\Delta f| < \varepsilon$ *для всех приращений Δx таких, что* $|\Delta x| < \delta$. (1)

Если приращения функции записать подробнее, то условие (1) будет выглядеть следующим образом:

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ *для любого x такого, что* $|x - x_0| < \delta$. (2)

Например, применительно к приближенным вычислениям число ε можно рассматривать как заданную точность вычислений (если вычисления ведутся с точностью до трех знаков после запятой, то $\varepsilon = 0{,}001$, до четырех — то $\varepsilon = 0{,}0001$ и т. д.). А число δ — это та наибольшая ошибка, которую можно допустить при округлении числа x_0 (взяв вместо него число x), не нарушая заданной точности вычислений.

Проиллюстрируем данное определение на рис. 49. Возьмем график непрерывной функции f (т. е. этот график можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги). Отложим на оси ординат точку $f(x_0)$ и проведем прямые $y = f(x_0) + \varepsilon$ и $y = f(x_0) - \varepsilon$. Они ограничивают полосу, внутри которой находится точка $(x_0;\ f(x_0))$ графика рассматриваемой функции f вместе с частью этого графика. Спроектируем эту часть

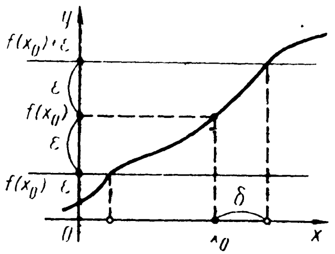


Рис. 49

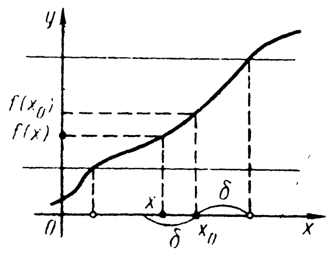


Рис. 50

графика на ось абсцисс. Проекция содержит интервал, в котором лежит точка x_0. Наименьшее расстояние от точки x_0 до концов этого интервала обозначим через δ — это положительное число. Тогда для любого числа x, попавшего в интервал $]x_0 - \delta;\ x_0 + \delta[$, выполняется неравенство $|x - x_0| < \delta$, а точка графика $(x;\ f(x))$ попадает внутрь полосы (рис. 50). Следовательно, ордината этой точки есть число, попадающее в интервал $]f(x_0) - \varepsilon;\ f(x_0) + \varepsilon[$ оси ординат, и потому выполнено неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Геометрически ясно, что подобное построение можно сделать для сколь угодно узкой полосы, то есть для любого числа $\varepsilon > 0$. Именно в этом и заключается основное зерно понятия непрерывности функции в точке.

Отметим, что если функция удовлетворяет условию

$$|\Delta y| \leqslant C\,|\Delta x|$$

(см. примеры 1—4, п. 5), то для любого числа $\varepsilon > 0$ достаточно взять $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$, и тогда условие (1) будет выполнено: если $|\Delta x| < \delta = \frac{\varepsilon}{C}$, то $|\Delta y| \leqslant C\,|\Delta x| < C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$, т. е. $|\Delta y| < \varepsilon$.

В курсах математического анализа доказываются основные свойства непрерывных функций.

Теорема. *Если функции f и g непрерывны в точке x_0, то в этой точке будут непрерывны следующие функции:* $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $k \cdot f$ (k — постоянная), $\frac{f}{g}$ (если $g(x_0) \neq 0$). *Функция* $f(x) = x^a$ *непрерывна внутри области определения.*

Доказательство этой теоремы выходит за рамки нашего курса. Наглядно же она ясна. Например, сумма $f + g$ непрерывна потому, что при малых изменениях слагаемых мало меняется их сумма.

Пример. Докажем, опираясь на теорему, что функция

$$y = \frac{\sqrt{x}}{1 - x^2}$$

непрерывна внутри области определения.

Область определения этой функции есть множество чисел x, которые удовлетворяют неравенствам $x \geqslant 0$ и $x \neq 1$ (поскольку знаменатель не должен равняться нулю). Числитель этой функции непрерывен при $x > 0$, так как это функция вида x^a при $a = \frac{1}{2}$ (см. основные свойства непрерывных функций). Знаменатель есть тоже непрерывная функция как разность двух непрерывных функций 1 и x^2. Следовательно, по основным свойствам непрерывных функций, эта дробь есть функция непрерывная, поскольку знаменатель не обращается в нуль в области определения.

Упражнения

68. Укажите для функции из упр. 59—67, как подобрать δ для заданного ε (в указанных точках).

Докажите непрерывность следующих функций (в их областях определения):

69. $y = (kx + b)^2$. 70. $y = x^3$. 71. $y = (kx + b)^n$.

72. $y = ax^2 + bx + c$. 73. $y = \dfrac{2x+3}{5-7x}$. 74. $y = \dfrac{2-3x}{5+x^2}$.

75. $y = \dfrac{x^3}{9-x^2}$. 76. $y = \dfrac{1+x^2}{1-x^4}$. 77. $y = \dfrac{\sqrt[4]{x}}{x^3-8}$.

78. $y = \dfrac{x-1}{x^2-x-2}$.

7. Предел функции. Тот факт, что функция f непрерывна в точке x_0, коротко принято записывать следующим образом:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{1}$$

Эта запись читается так: «предел функции эф при икс, стремящемся к икс нулевому, равен эф от икс нулевого».

Например, поскольку функция $f(x) = \dfrac{3x-7}{5-x}$ непрерывна в точке $x_0 = 2$, то

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x-7}{5-x} = \frac{3 \cdot 2 - 7}{5-2} = -\frac{1}{3}.$$

Упражнения на применение формулы (1) помещены в конце этого пункта (№ 79—88).

Оказывается, что полезно определить понятие предела функции при x, стремящемся к x_0, не только для функций, непрерывных в точке x_0, но и для других случаев. Предел функции сообщает дополнительную информацию о самой функции в том случае, если у функции в данной точке нет непрерывности.

Например, функция $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$ не является непрерывной в точке

2, так как она не определена в этой точке. Однако при всех $x \neq 2$ общий множитель числителя и знаменателя $(x-2)$ не равен нулю и потому возможно сокращение дроби:

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x+2}.$$

Полученная после сокращения функция $F(x) = \frac{1}{x+2}$ непрерывна в точке 2, и потому

$$\lim_{x \to 2} F(x) = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4} = F(2).$$

Число $\frac{1}{4}$ и принимается за предел интересующей нас функции f при x, стремящемся к 2. Коротко приведенные рассуждения принято записывать следующим образом:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}.$$

Обратим внимание на то, что для вычисления предела функции $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ при x, стремящемся к 2, нам пришлось рассмотреть другую функцию $F(x) = \frac{1}{x+2}$ (получившуюся из f после сокращения на $x-2$). Значения функций f и F равны между собой для всех значений x, кроме $x = 2$, а при $x = 2$ функция $F(x) = \frac{1}{4}$ непрерывна. Запишем кратко соотношения между функциями f и F:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при} \quad x \neq 2, \\ \frac{1}{4} & \text{при} \quad x = 2. \end{cases}$$

Таким образом, для вычисления предела функции f при x, стремящемся к 2, важно, что функцию f мы заменили на такую функцию F,

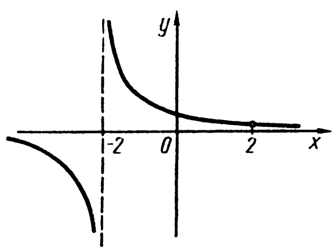


Рис. 51

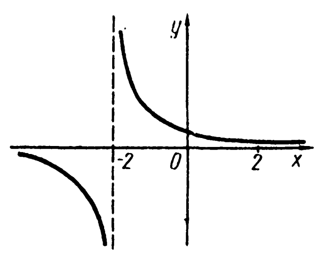


Рис. 52

которая совпадает с f для всех $x \neq 2$, а в точке $x = 2$ функция F непрерывна (в отличие от f) и потому легко вычисляется : $\lim\limits_{x \to 2} F(x) = \frac{1}{4}$. То, что функции f и F совпадают при всех $x \neq 2$, видно на рис. 51 и 52.

Перейдем к общему определению предела функции.

Определение. *Число A называется пределом функции f при x, стремящемся к x_0*,

$$\lim_{x \to x} f(x) = A, \tag{2}$$

если функция

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при} \quad x \neq x_0, \\ A & \text{при} \quad x = x_0 \end{cases} \tag{3}$$

непрерывна в точке x_0.

Упражнения на вычисление пределов функций даны в конце пункта (№ 89—98).

Запись $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ можно пояснить так: $f(x) \approx A$ для всех x, «близких» к x_0, т. е. $x \approx x_0$ и $x \neq x_0$, и точность равенства $f(x) \approx A$ может быть сделана сколь угодно большой за счет повышения точности в равенстве $x \approx x_0$.

В самом деле, по определению, функция $F(x)$ непрерывна в точке x_0. Следовательно, $F(x) \approx F(x_0)$ для всех x, «близких» к x_0. Но $F(x_0) = A$ и $F(x) = f(x)$ при $x \neq x_0$. Значит, приближенное равенство $F(x) \approx F(x_0)$ можно записать в виде $f(x) \approx A$ для всех $x \approx x_0$ и $x \neq x_0$.

На рис. 53 дан пример графика функции, для которой выполнено равенство (2).

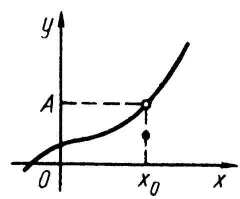


Рис. 53

Теория пределов выходит за рамки данного курса. Поэтому правила вычисления пределов приведем без доказательства — если существуют $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, то:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

2. $\lim\limits_{x \to x_0} kf(x) = k \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, k — постоянная.

3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

4. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$, если $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$.

Полное доказательство этих правил приводится в курсах математического анализа, а наглядное объяснение очень просто: если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) =$

$= A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, то это значит, что $f(x) \approx A$ и $g(x) \approx B$, если $x \approx x_0 (x \neq x_0)$. Но тогда $f(x) \pm g(x) \approx A \pm B$, что поясняет правило 1. Аналогично поясняются правила 2, 3 и 4.

Для приложений еще удобна следующая теорема.

Теорема (о промежуточной функции). *Если* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$ *и* $f(x) \leqslant p(x) \leqslant g(x)$ *для всех* $x \neq x_0$, *то и* $\lim\limits_{x\to x_0} p(x) = A$.

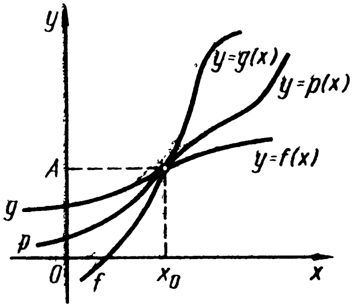


Рис. 54

Сформулируем эту теорему словами. *Если значения функции p для всех x, кроме x_0, заключены между соответствующими значениями функций f и g, пределы которых при x, стремящемся к x_0, совпадают и равны A, то и предел функции p при x, стремящемся к x_0, равен A.*

Рис. 54 дает наглядное представление о содержании теоремы.

Упражнения

Вычислите следующие пределы:

79. $\lim\limits_{x\to 3} (x^2 - 2x + 5)$.

80. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x}{3+x}$.

81. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x+5}{2+x^2}$.

82. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}}{x^3 - 5x^2 + 6}$.

83. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt[3]{x}+5}{2-x}$.

84. $\lim\limits_{x\to 27} \dfrac{x+20}{2-\sqrt[3]{x}}$.

85. $\lim\limits_{x\to 5} (7 - 2x)$.

86. $\lim\limits_{x\to -3} (x^2 + 2x + 5)$.

87. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{11-x}}{x^2 - x}$.

88. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x-3}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$.

89. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$.

90. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x^3 - x_0^3}{x - x_0}$.

91. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{5}}{x-5}$.

92. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}}{x - x_0}$

93. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+2}{x^2-4}$.

94. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-2x-3}$

95. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{2x^2-5x+3}$. 96. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-2x^3}{3x^4+2x}$.

97. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4-x}{3x-x^3}$. 98. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{x+1}$

99. На рис. 55 приведен график функций f. Определите по рисунку $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

100. Найдите $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ для функции f, графики которых изображены на рис. 56 и 57.

101. Сделайте рисунок, иллюстрирующий теорему о промежуточной функции, но не повторяющий рис. 54.

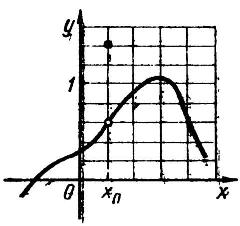


Рис. 55

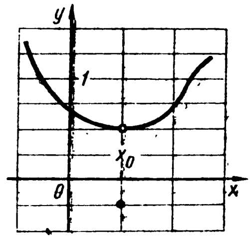


Рис. 56

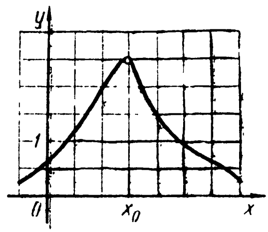


Рис. 57

102. Дайте наглядное объяснение (как это сделано для правила 1) для правил 2, 3 и 4 и для теоремы о промежуточной функции.

§ 3. ПРОИЗВОДНАЯ

Решение многих задач значительно упрощается, если пользоваться характеристикой скорости изменения функции — производной.

8. Определение производной. Наглядное представление о непрерывности функции состоит в том, что малому приращению аргумента соответствует малое приращение функции. Теперь нас будет интересовать уточнение: во сколько раз приращение функции больше (или меньше) приращения аргумента; коротко говорят: какова скорость изменения функции.

Производной функции f в точке x называется предел

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Это число обозначается $f'(x)$ (читается: «эф штрих от икс»), так что, по определению,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Для обозначения производной приняты и более простые записи: f', y', y'_x и т. п. (читается: «эф штрих», «игрек штрих», «игрек штрих по икс»). Пользуясь обозначениями из п. 4 (с. 13), формулу (1) часто записывают в виде

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{2}$$

Поскольку равенство (2) означает, что $y' \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$ для всех достаточно малых $|\Delta x|$, то

$$\Delta y \approx y' \cdot \Delta x, \tag{3}$$

т. е. производная как раз и показывает, во сколько раз Δy больше (или меньше) Δx, иначе — какова скорость изменения функции.

Пример 1. Найти производную функции $f(x) = x^2$.

Решение. По определению производной (см. формулу (1)) имеем

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Таким образом,

$$(x^2)' = 2x. \tag{4}$$

Пример 2. Доказать, что

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}. \tag{5}$$

Решение. По определению производной,

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x - (x+\Delta x)}{\Delta x (x+\Delta x) x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x (x+\Delta x) x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x(x+\Delta x)} = \frac{-1}{x^2}.$$

Пример 3. Найти $f'(2)$, если $f(x) = \frac{-1}{x}$.

Решение. Так как по формуле (5) $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$, то $f'(2) = \frac{-1}{2^2} = \frac{-1}{4}$.

Пример 4. Для функции $f(x) = x^2$ в точке $x = 3$ найти приближенно Δf для малых $|\Delta x|$.

Решение. По формуле (3), $\Delta f \approx f'(3)\,\Delta x$. Поскольку $f'(x) = 2x$ (см. формулу (4)), то $f'(3) = 6$. Следовательно, $\Delta f \approx 6\,\Delta x$.

Заметим, что для приближенных вычислений подсчет примера (4) означает следующее: ошибка в аргументе функции $f(x) = x^2$ около точки $x = 3$ вызывает ошибку в значении функции, в шесть раз бо́льшую. Это значит, например, что для вычисления π^2 надо брать один запасной знак для значения числа π.

Упражнения

Найдите производные следующих функций:

103. x^3. **104.** x^4. **105.** $\sqrt{x}$. **106.** $\sqrt[3]{x}$. **107.** $3-2x$.

108. $\sqrt[3]{x^2}$ $(x>0)$. **109.** x. **110.** C — постоянная.

111. $\frac{1}{x^2}$ **112.** $kx+b$. **113.** ax^2+bx+c.

Для функции $f(x)=\sqrt{x}$ и $g(x)=\sqrt[3]{x^2}$ найдите:

114. $f'(1)$. **115.** $f'(4)$. **116.** $f'(25)$.

117. $g'(1)$. **118.** $g'(8)$. **119.** $g'(125)$.

120. Для функции $f(x)=\sqrt{x}$ вычислите приближенно Δf (пользуясь формулой (3)) в точках:

$$а)\ x=1;\quad б)\ x=4;\quad в)\ x=25.$$

121. Для функции $f(x)=\frac{1}{x}$ найдите приближенно Δf (пользуясь формулой (3)) в точках:

$$а)\ x=0{,}1;\quad б)\ x=1;\quad в)\ x=3;\quad г)\ x=10.$$

122.* Докажите, что если функция имеет производную в точке, то эта функция непрерывна в этой точке.

Указание. Использовать определение производной и предела.

9. Геометрический смысл производной. Решение многих задач приводит к понятию производной: это и определение скорости точки и ее ускорения, и определение плотности вещества, и определение силы тока, и многое другое. Сейчас мы подробнее остановимся на геометрической задаче — построение касательной к кривой. Начнем с определения.

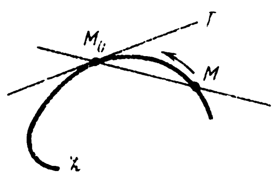


Рис. 58

Пусть задана линия L и точка M_0 на ней. Прямая M_0T называется *касательной* к линии L в точке M_0, если M_0T есть предельное положение секущей M_0M, когда точка M стремится по кривой L к точке M_0. Точка M_0 называется *точкой касания* (рис. 58).

При построении касательной к графику функции основной является следующая теорема, которую называют «геометрическим смыслом производной».

Теорема. *Существование невертикальной касательной к графику функции f в точке $M_0(x_0;\ f(x_0))$ равносильно существованию производной $f'(x_0)$. При этом угловой коэффициент касательной равен $f'(x_0)$, а уравнение касательной имеет вид*

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0). \qquad (1)$$

Сначала докажем, что угловой коэффициент секущей (рис. 59)

$$k = \frac{\Delta f}{\Delta x}. \tag{2}$$

Действительно, запишем уравнение секущей M_0M:

$$y = kx + b. \tag{3}$$

Точки $M_0(x_0; f(x_0))$ и $M(x; f(x))$ лежат на этой секущей. Следовательно, их координаты удовлетворяют уравнению (3):

$$f(x_0) = kx_0 + b \quad \text{и} \quad f(x) = kx + b.$$

Вычитая эти равенства почленно, получаем

$$f(x) - f(x_0) = k(x - x_0) \quad \text{или} \quad \Delta f = k \cdot \Delta x.$$

Из последнего равенства находим, что $k = \frac{\Delta f}{\Delta x}$. Формула (2) доказана.

При Δx, стремящемся к нулю, точка M по графику функции стремится к точке M_0, а секущая MM_0 поворачивается вокруг точки M_0. Ясно, что секущая имеет предельное невертикальное положение при $\Delta x \to 0$ тогда и только тогда, когда ее угловой коэффициент $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ имеет предел при $\Delta x \to 0$. Но

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Следовательно, предельное положение секущей M_0M есть прямая с угловым коэффициентом $f'(x_0)$, т. е. угловой коэффициент касательной M_0T равен $f'(x_0)$ (рис. 59).

Покажем, что (1) есть уравнение касательной M_0T. Координаты

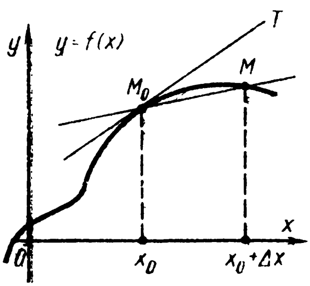


Рис. 59

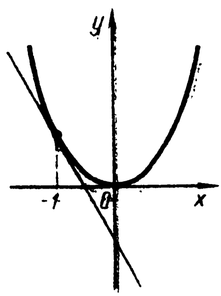


Рис. 60

точки $M_0(x_0; f(x_0))$ удовлетворяют этому уравнению. Раскроем скобки в уравнении (1) и перепишем его в виде

$$y = f'(x_0)\,x + f(x_0) - f'(x_0)\,x_0.$$

Мы видим, что угловой коэффициент этой прямой равен $f'(x_0)$. Следовательно, это касательная M_0T.

Пример. Построить касательную к параболе $y = x^2$ в точке $x_0 = -1$.

Решение. Поскольку $y' = 2x$ (формула (4), п. 8) то $y'(x_0) = 2(-1) = -2$.

Кроме того, $y(x_0) = (-1)^2 = 1$. Подставляя найденные значения в формулу (1), получаем уравнение искомой касательной

$$y = 1 - 2(x + 1) \text{ или } y = -2x - 1.$$

После этого касательная строится по ее уравнению (рис. 60).

Упражнения

Составьте уравнения касательных к параболе в точках ее пересечения с осями координат, если парабола задана уравнением:

123. $y = x^2 - 2x$. **124.** $y = x - x^2$.

125. $y = x^2 - x - 2$. **126.** $y = 2 - x - x^2$.

127. По рис. 61 (а,б) скажите, какая производная больше: $f'(x_0)$ или $g'(x_0)$.

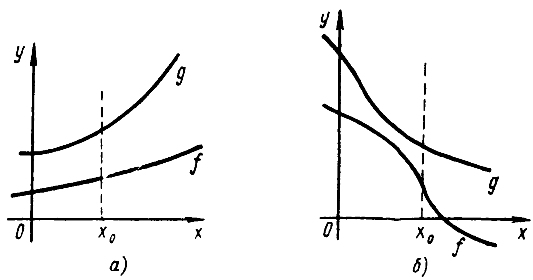


Рис. 61

128. Найдите площадь треугольника, образованного хордой и касательными к параболе, проведенными в концах хорды, если парабола и хорда заданы уравнениями: а) парабола $y = x^2$ и хорда $y = 1$; б) парабола $y = x^2 - 2x$ и хорда $y = 0$.

10. Правила вычисления производной. Для облегчения вычисления производных существует несколько правил. Коротко эти правила обычно формулируют следующим образом: *если функции f и g имеют производные, то их сумма, разность, произведение и частное (если $g \neq 0$ в рассматриваемой точке) тоже имеют производные и эти производные вычисляются по следующим формулам*:

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \tag{1}$$

коротко говорят: производная суммы равна сумме производных, а производная разности равна разности производных:

$$(kf)' = kf', \quad k \text{ — постоянная.} \tag{2}$$

коротко говорят: постоянный множитель выносится за знак производной;

$$(fg)' = f'g + fg', \tag{3}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}. \tag{4}$$

Пример 1. Найти производную функции $f(x) = 5x^3 - 2\sqrt[3]{x} + 7$.

Решение. Так как в упражнениях 103, 106 и 110 уже были вычислены

$$(x^3)' = 3x^2, \quad (7)' = 0 \quad \text{и} \quad \left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},$$

то

$$f'(x) = 5(x^3)' - 2\left(\sqrt[3]{x}\right)' + (7)' = 5 \cdot 3x^2 - 2 \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} =$$

$$= 15x^2 - \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Пример 2. Доказать, что при любом целом n ($x \neq 0$ при $n \leqslant 1$)

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \tag{5}$$

Решение. Доказательство для $n \geqslant 2$ проведем методом математической индукции. При $n = 2$ формула (5) верна. Это было доказано в примере 1, п. 8. Предположим, что формула верна при $n=k$, докажем, что тогда она верна и при $n = k + 1$. В самом деле,

$$(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = (x^k)' \cdot x + x^k \cdot (x)' = kx^{k-1} \cdot x + x^k \cdot 1 =$$

$$= kx^k + x^k = (k+1)\,x^k.$$

Отсюда в силу принципа математической индукции следует, что формула (5) верна для всех целых показателей $n \geqslant 2$. При $n = 1$ эта формула тоже верна (при $x \neq 0$), так как $(x)' = 1 = 1 \cdot x^{1-1}$. При $n = 0$ и $x \neq 0$ имеем: $x^n = x^0 = 1$ и $(1)' = 0 = nx^{n-1}$. Если $n < 0$, то число $m = -n > 0$, и по доказанному выше

$$(x^n)' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{(1)'\,x^m - 1 \cdot (x^m)'}{(x^m)^2} = \frac{0 \cdot x^m - mx^{m-1}}{x^{2m}} = \frac{-m}{x^{m+1}} = nx^{n-1}$$

в силу правила вычисления производной дроби. Формула (5) полностью доказана.

Замечание. Формула (5) верна для любого показателя n. Так, для $n = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{3}$, $n = \frac{2}{3}$ это уже было проверено в упражнениях. Общий случай будет разобран позднее.

Пример 3. Вычислить производные функций

$$f(x)=\sqrt[5]{x^4}-\frac{3}{x\sqrt{x}} \quad \text{и} \quad g(x)=\frac{\sqrt[7]{x^6}}{x^5+3}.$$

Решение. Пользуясь правилами вычисления производной, формулой (5) и замечанием к ней, имеем:

$$f'(x)=\left(x^{\frac{4}{5}}\right)'-3\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)'=\frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}}-3\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}}=$$

$$=\frac{4}{5\sqrt[5]{x}}+\frac{9}{2x^2\sqrt{x}},$$

$$g'(x)=\frac{\left(x^{\frac{6}{7}}\right)'(x^5+3)-\sqrt[7]{x^6}\,(x^5+3)'}{(x^5+3)^2}=\frac{\frac{6}{7}x^{-\frac{1}{7}}(x^5+3)-\sqrt[7]{x^6}\cdot 5x^4}{(x^5+3)^2}=$$

$$=\frac{6(x^5+3)-35x^5}{7\sqrt[7]{x}\,(x^5+3)^2}=\frac{18-29x^5}{7\sqrt[7]{x}\,(x^5+3)^2}.$$

Докажем теперь равенство (1) для суммы. По определению производной и правилу вычисления предела суммы,

$$(f(x)+g(x))'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x))-(f(x)+g(x))}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=f'(x)+g'(x).$$

Остальные правила доказываются аналогично. В п. 12 будут даны более простые выводы равенств (3) и (4).

Упражнения

Вычислите производные следующих функций:

129. $y=x^3-x^2$. **130.** $y=x^4+2x^2$.

131. $y=x^3+\dfrac{2}{x}$. **132.** $y=5x^6-\dfrac{3}{x^7}+10x+9$.

133. $y=\dfrac{x^3}{5+x^2}$. **134.** $y=\dfrac{7-2x}{5x+3}$.

135. $y=\dfrac{4-x^3}{7+5x^4}$. **136.** $y=\dfrac{2+\frac{1}{x^2}}{3-5x^3}$.

137. $y = \sqrt[3]{x^5} - 3x$. 138. $y = x^4 \sqrt[5]{x} - \frac{5}{\sqrt[4]{x}}$.

Для следующих функций в точках с указанными абсциссами напишите уравнение касательной:

139. $y = 13x - x^3 - 20, \quad x = 2$.

140. $y = x^2 - \frac{1}{x}, \quad x = -1$.

141. $y = \frac{x}{1 + x^2}, \quad x = 0; \quad \pm 1$.

142. $y = \frac{6(x+1)}{3+x^2}, \quad x = 0; \quad -1; \quad -3$.

143.* Докажите правила (2) и (1) для разности.

11. Применение производной. Рассмотрим применение производной к построению графиков функций, решению задач на нахождение наибольших и наименьших значений и использование производной в простейших приближенных вычислениях.

Для построения графиков функций основную роль играет *признак возрастания и убывания функции.*

Теорема. *Если $f'(x) > 0$ на интервале $]a; b[$, то функция $f(x)$ возрастает на интервале $]a; b[$. Если $f'(x) < 0$ на интервале $]a; b[$, то функция $f(x)$ убывает на интервале $]a; b[$.*

Доказательство этой теоремы выходит за рамки данного курса.

Пример 1. Построить график функции $y = 3x - x^3$.

Решение. Эта функция определена и непрерывна для всех x. Найдем ее промежутки возрастания и убывания, пользуясь признаком. Производная этой функции

$$y' = 3 - 3x^2 = 3(1 - x^2).$$

Ясно, что $y' > 0$ на интервале $]-1; 1[$. Следовательно, на интервале $]-1; 1[$ заданная функция возрастает, а на промежутках $]-\infty; -1[$ и $]1; \infty[$ производная $y' < 0$. Из этого следует, что на этих промежутках заданная функция убывает. Остается вычислить значения функции в концах найденных промежутков

$$y(-1) = 3 \cdot (-1) - (-1)^3 = -2, \quad y(1) = 3 \cdot 1 - 1^3 = 2$$

и учесть при построении графика, что

$$y = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = \pm\sqrt{3}.$$

После этого все отмеченные точки наносятся на рисунок и соединяются плавной линией с учетом промежутков возрастания и убывания (рис. 62).

Заметим, что в точках $x = 1$ и $x = -1$ при построении автоматически получились точки экстремума: максимум в точке $x = 1$ и минимум в точке $x = -1$. Это те точки, в которых $y' = 0$. Оказывается, что это неслучайно: условие $y' = 0$ есть необходимое условие экстремума для функций, имеющих производную. Функция возрастает на

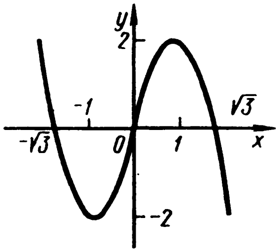


Рис. 62

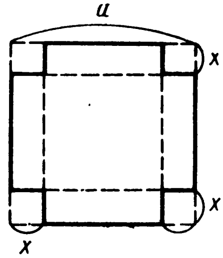


Рис. 63, а

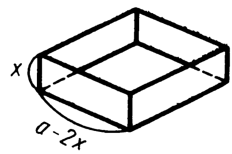


Рис. 63, б

отрезке $[-1; 1]$ (как это видно на рис. 62), а не на интервале. Это следует из ее непрерывности. Аналогично убывает функция на замкнутых промежутках $]-\infty; -1]$ и $[1; \infty[$.

Пример 2. Из квадратного листа бумаги выкроить коробку (без крышки), имеющую наибольшую вместимость.

Решение этой задачи тоже связано с применением производной и признака возрастания и убывания. Выкройка коробки показана на рис 63,*а*. Объем получающейся при этом коробки (рис. 63,*б*) равен

$$V = x(a-2x)^2 = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x.$$

Нам надо подобрать x так, чтобы этот объем был наибольшим. Построим график функции V. При этом ясно, что по смыслу задачи x должен удовлетворять неравенствам $0 < x < \frac{a}{2}$, т.е. находиться в интервале $]0; \frac{a}{2}[$. Определим интервалы возрастания и убывания функции V. Ее производная

$$V' = 12x^2 - 8ax + a^2 = 12\left(x - \frac{a}{6}\right)\left(x - \frac{a}{2}\right).$$

Ясно, что $V' > 0$ на интервале $\left]0; \frac{a}{6}\right[$. Следовательно, на этом интервале функция V возрастает. А на интервале $\left]\frac{a}{6}; \frac{a}{2}\right[$ производная $V' < 0$. Следовательно, на этом интервале функция V убывает. График функции V приведен на рис. 64. Из него видно, что наибольший объем V_{max} у коробки получается при $x = \frac{a}{6}$ и $V_{max} = \frac{2a^3}{27}$.

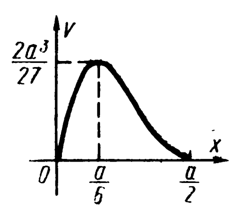


Рис. 64

Основой для приближенных вычислений служит формула (3), п. 8. Если воспользоваться тем, что $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, а $\Delta x = x - x_0$, то эту формулу можно записать в виде

$$f(x) - f(x_0) \approx (x - x_0) f'(x_0),$$

откуда получаем приближенную формулу

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0). \qquad (1)$$

Смысл этой простейшей из формул приближенных вычислений состоит в том, что, зная $f(x_0)$ и $f'(x_0)$, можно просто подсчитывать приближенные значения $f(x)$ при $x \approx x_0$. В курсах математического анализа доказывается, что точность этого равенства пропорциональна $(x - x_0)^2$; говорят: «имеет порядок $(x - x_0)^2$». Поэтому формула (1) дает достаточную точность, если $|x - x_0|$ достаточно мало.

Пример 3. Вычислить приближенно $\sqrt[5]{32,1}$.

Решение. Возьмем функцию $f(x) = \sqrt[5]{x}$. Число, которое нам надо приближенно вычислить, есть значение этой функции при $x = 32,1$. Положим $x_0 = 32$ и подсчитаем

$$f(x_0) = \sqrt[5]{32} = 2, \qquad f'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} \quad \text{и} \quad f'(x_0) = \frac{1}{5\sqrt[5]{32^4}} = \frac{1}{80}.$$

Подставляя эти числа в формулу (1) при $x = 32,1$, получаем

$$\sqrt[5]{32,1} \approx 2 + \frac{1}{80}(32,1 - 32) = 2 + \frac{1}{800} = 2,00125.$$

Сравнивая полученный результат с таблицей, видим, что ответ верен с точностью до пяти знаков после запятой.

Пример 4. Вычислить приближенно $(0,999)^{50}$.

Решение. При использовании формулы (1) берем

$$f(x) = x^{50}, \quad x_0 = 1 \quad \text{и} \quad x = 0,999.$$

Вычислим сначала

$$f(x_0) = 1^{50} = 1, \quad f'(x) = 50x^{49} \quad \text{и} \quad f'(x_0) = 50 \cdot 1^{49} = 50.$$

Подставив эти числа в формулу (1), получаем

$$(0,999)^{50} \approx 1 + 50(0,999 - 1) = 1 - 0,05 = 0,95.$$

Пример 5. Найти ошибку приближенного равенства $\sqrt[7]{130} \approx 2$.

Решение. Найти ошибку приближенного равенства $\sqrt[7]{130} \approx 2$ — значит определить значение разности $\sqrt[7]{130} - 2$. Для этого рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt[7]{x}$. Нас интересует значение этой функции при $x = 130$. Заметим, что $\sqrt[7]{128} = 2$, т. е. это значение функции $f(x) = \sqrt[7]{x}$ в точке $x_0 = 128$. Вычислив

$$f(x_0) = \sqrt[7]{128} = 2, \quad f'(x) = \frac{1}{7\sqrt[7]{x^6}} \quad \text{и} \quad f'(x_0) = \frac{1}{7\sqrt[7]{128^6}} = \frac{1}{7 \cdot 2^6}$$

и подставив полученные числа в формулу (1), получаем

$$\sqrt[7]{130} - 2 = f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0) = \frac{130 - 128}{7 \cdot 2^6} = \frac{1}{224} \approx 0{,}005,$$

т. е. ответ верен с точностью до двух знаков после запятой.

В ряде упражнений придется искать наибольшее и наименьшее значения для корня квадратного из некоторого выражения. При их решении следует иметь в виду, что наибольшее значение корня квадратного получается при наибольшем значении для подкоренного выражения.

Упражнения

Постройте графики функций:

144. $y = x^3 + 3x^2$.

145. $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2$.

146. $y = x + \frac{1}{x}$.

147. $y = x + \frac{4}{x^2}$.

148. $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

149. $y = \frac{2x}{1 + x^2}$.

150. $y = \frac{6(x - 1)}{x^2 + 3}$.

151. $y = \frac{x^3}{18}(x - 5)^2$.

152. $y = \frac{10(x - 2)}{x^2 + 5}$.

153. $y = x^3 + 3x^2 - 9x$.

154. Из всех цилиндров объема V найдите цилиндр с наименьшей полной поверхностью.

155. Из конусов с образующей l найдите конус наибольшего объема.

156. Из круглого бревна диаметром d вытесывается балка прямоугольного сечения с основанием b и высотой h. При каких b и h прочность балки будет наибольшей, если эта прочность пропорциональна bh^2?

157. Впишите в полушар радиуса r прямоугольный параллелепипед наибольшего объема с квадратным основанием.

158. Впишите в шар радиуса r цилиндр наибольшего объема.

159. Опишите около шара радиуса r конус наименьшего объема.

160. Суточные расходы при плавании судна состоят из двух частей: постоянной, равной a рублей, и переменной, возрастающей пропорционально кубу скорости. При какой скорости плавание судна между двумя портами будет наиболее выгодным?

161. Какими должны быть размеры открытого бассейна с квадратным дном и объемом V, чтобы на его облицовку (стенок и дна) ушло наименьшее количество материала?

162. Через точку M, лежащую внутри прямого угла, проведите прямую так, чтобы отрезок этой прямой, попавший внутрь этого прямого угла, имел наименьшую длину.

163. Через точку K, лежащую внутри прямого угла, проведите прямую так, чтобы отсекаемый от прямого угла треугольник имел наименьшую площадь.

164. Вырежьте из круга радиуса R сектор так, чтобы свернутая из него воронка имела наибольший объем.

165. В точке A расположен репродуктор. В точке B расположено 8 таких же репродукторов. Найдите на отрезке AB точку, в которой сила звука этих девяти репродукторов будет наименьшей.

166. Число 8 разбейте на два положительных слагаемых так, чтобы сумма их кубов была наименьшей.

Вычислите приближенно:

167. $\sqrt[3]{8,1}$. **168.** $\sqrt[3]{26,7}$. **169.** $\sqrt[10]{1000}$. **170.** $\sqrt[4]{80}$.

171. $(1,001)^{70}$. **172.** $(0,998)^{80}$. **173.** $\dfrac{1}{3+\sqrt[10]{1000}}$.

Найдите ошибку приближенного равенства:

174. $\sqrt[3]{350}\approx 7$. **175.** $\sqrt[5]{240}\approx 3$.

176. $\dfrac{1}{3-(0,996)^{100}}\approx\dfrac{1}{2}$. **177.** $\dfrac{1}{9+(1,003)^{100}}\approx 0,1$.

12. Сложная функция и ее производная. Пусть задана пара функций $y = f(z)$ и $z = g(x)$. Она задает y как функцию от x, т. е. $y = F(x)$. Действительно, возьмем x и вычислим соответствующее ему число $z = g(x)$. По этому числу z вычислим соответствующее ему число $y = f(z)$. Таким образом, по взятому числу x получено единственное число y, т. е. y есть функция от x. Функция $F(x)$ называется *сложной функцией*, составленной из функций f и g при промежуточной переменной z, и обозначается $f(g(x))$.

Например, функцию $y=\sqrt[3]{5-x^2}$ можно рассматривать как сложную функцию, составленную из функций $y=\sqrt[3]{z}$ и $z = 5 - x^2$.

В курсах математического анализа доказывается, что сложная функция, составленная из непрерывных функций, непрерывна. Наглядно это ясно: если мало меняется x, то мало меняется $z = g(x)$ в силу непрерывности функции g, а тогда мало меняется $y = f(z)$ в силу непрерывности функции f.

Перейдем к вычислению производных сложной функции. Правило вычисления производной сложной функции (мы его приводим без доказательства) коротко формулируется так: если составляющие функции имеют производные, то и сложная функция имеет производную

$$y'_x = y'_z\cdot z'_x. \qquad (1)$$

Пример 1. Вычислить производную функции $y=\sqrt[3]{5-x^2}$.

Решение. Рассмотрим заданную функцию как сложную функцию, составленную из функций $y=\sqrt[3]{z}$ и $z=5-x^2$. Составляющие функции имеют производные

$$y'_z=\frac{1}{3\sqrt[3]{z^2}} \text{ и } z'_x=(5-x^2)'=(5)'-(x^2)'=0-2x=-2x.$$

Тогда, по формуле (1), заданная функция тоже имеет производную

$$\left(\sqrt[3]{5-x^2}\right)' = y'_x = y'_z\, z'_x = \frac{1}{3\sqrt[3]{z^2}}(-2x) = \frac{-2x}{3\sqrt[3]{(5-x^2)^2}}.$$

Пример 2. Пусть p есть функция от x, имеющая производную. Доказать, что

$$(p^2)' = 2p\cdot p'. \tag{2}$$

Решение. Действительно, функцию $y = p^2(x)$ можно рассматривать как сложную: $y = z^2$ и $z = p(x)$. Так как $y'_z = 2z$ и $z'_x = p'$, то по правилу вычисления производной сложной функции (равенство (1)) имеем

$$(p^2)' = y'_x = y'_z \cdot z'_x = 2z\cdot p' = 2p\cdot p'.$$

Пользуясь равенством (2) и тем, что $fg = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2)$, можно вывести правило (3), п. 10:

$$(fg)' = \frac{1}{2}(((f+g)^2)' - (f^2)' - (g^2)') = \frac{1}{2}(2(f+g)(f'+g') - 2ff' -$$

$$-2gg') = ff' + fg' + gf' + gg' - ff' - gg' = fg' + gf'.$$

Пример 3. Доказать, что если функция g имеет производную и не обращается в нуль, то

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}. \tag{3}$$

Решение. Функцию $y = \frac{1}{g}$ рассмотрим как сложную: $y = \frac{1}{z}$ и $z = g(x)$. Так как $y' = \frac{-1}{z^2}$ и $z'_x = g'$, то по правилу вычисления производной сложной функции (равенство (1)) имеем

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = y'_x = y'_x \cdot z'_x = \frac{-1}{z^2}\cdot g' = \frac{-g'}{g^2}.$$

Пользуясь равенством (3), легко вывести правило (4), п. 10:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)' = f'\cdot\frac{1}{g} + f\cdot\left(\frac{1}{g}\right)' = f'\cdot\frac{1}{g} + f\cdot\frac{-g'}{g^2} =$$

$$= \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Поясним правило вычисления производной сложной функции следующим образом.

Пусть аргумент x функции получил приращение Δx. Тогда функция $z = g(x)$ получила приращение $\Delta z = g(x+\Delta x) - g(x)$, а функция $y = f(z)$ получила приращение $\Delta y = f(z+\Delta z) - f(z)$. Поскольку

$$y'_x \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad y'_z \approx \frac{\Delta y}{\Delta z} \quad \text{и} \quad z'_x \approx \frac{\Delta z}{\Delta x}, \quad \text{то}$$

$$y'_x \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x} \approx y'_z \cdot z'_x.$$

Упражнения

Вычислите производные следующих функций:

178. $y = (2x - 3)^{50}$.

179. $y = (7 - 5x)^{40}$.

180. $y = (x^2 + 4)^{17}$.

181. $y = (9 - x^2)^{23}$.

182. $y = (7 - 5x - 3x^2)^{16}$.

183. $y = (x^4 + 5x^2 + 8)^{39}$.

184. $y = \dfrac{1}{(x^4 + 3x^2 + 5)^3}$.

185. $y = \sqrt[5]{x^3 + 7x}$.

186. $y = \sqrt[7]{(7 - 2x)^3}$.

187. $y = (2x + 3)^5 (7 - x)^{\frac{4}{3}}$.

188. $y = (5 - 2x)^7 (3x + 1)^{\frac{3}{4}}$.

189. $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 3}$.

190. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1 - x^2}}$.

191. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt{25 - x^2}$ в точке с абсциссой $x = 3$.

192. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = (x^2 + x + 1)^3$ в точке с абсциссой $x = 0$.

Постройте графики функций:

193. $y = \sqrt{x + 1} + \sqrt{1 - x}$.

194. $y = x\sqrt{3 - x}$.

195. $y = x\sqrt{2 - x^2}$.

Глава II
ИНТЕГРАЛ

§ 4. ПЕРВООБРАЗНАЯ

13. Основные свойства первообразной. В § 3 вы познакомились еще с одним математическим действием — вычислением производной или дифференцированием. Теперь вы познакомитесь с обратным для дифференцирования действием — оно называется *интегрированием*. При дифференцировании по функции отыскивается производная. Следовательно, обратное действие состоит в том, что по заданной производной надо отыскать функцию. Перейдем к определению.

Функция F называется первообразной для функции f на заданном промежутке, если для всех x из этого промежутка

$$F'(x) = f(x). \tag{1}$$

Например, для функции $f(x) = x^2$ первообразной будет функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$, так как $F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$ для всех x; промежуток представляет собой всю прямую.

Для функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ первообразной будет функция $F(x) = 2\sqrt{x}$, так как $F'(x) = (2\sqrt{x})' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ для всех $x>0$; в этом случае промежутком является $]0; \infty[$.

Упражнения на нахождение первообразных даны в конце пункта (№ 196—206).

Одна из задач интегрирования состоит в том, чтобы для заданной функции найти все ее первообразные. Для доказательства соответствующих теорем нам потребуется признак постоянства функции.

Теорема 1 (признак постоянства функции). *Для того чтобы функция была постоянной на интервале, необходимо и достаточно, чтобы ее производная равнялась нулю на этом интервале.*

Пусть функция $g(x) = C$ — постоянная на некотором интервале. Тогда, как это было доказано в § 3, $g'(x) = (C)' = 0$. Обратное утверждение почти очевидно, но доказывается сложно, его доказательство не входит в программу курса.

Теперь мы можем сформулировать и доказать теорему, играющую основную роль в интегрировании.

Теорема 2 (основное свойство первообразных). *Если функция F есть первообразная для функции f на промежутке I, то при любой постоянной C функция*

$$F(x) + C \tag{2}$$

также является первообразной для функции f на промежутке I. Любая первообразная функция f на промежутке I может быть записана в виде $F(x) + C$.

Первое утверждение теоремы проверяется простым подсчетом. Так как $F'(x) = f(x)$ для всех x из I, то $(F(x) + C)' = F'(x) + (C)' = f(x) + 0 = f(x)$ для всех x из I, т. е. $F(x) + C$ есть первообразная для $f(x)$ на промежутке I.

Для доказательства обратного утверждения воспользуемся признаком постоянства функции. Пусть функция Φ — еще одна первообразная для функции f на промежутке I, т. е. $\Phi'(x) = f(x)$ для всех x из этого промежутка. Тогда для всех x из промежутка I имеем

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

откуда следует в силу признака постоянства функции, что разность $\Phi(x) - F(x)$ есть постоянная функция на промежутке I, т. е.

$$\Phi(x) - F(x) = C \quad \text{или} \quad \Phi(x) = F(x) + C,$$

что и требовалось доказать.

Например, любую первообразную для функции x^2 можно записать в виде

$$\frac{x^3}{3}+C,$$

где C — произвольная постоянная.

Пример. Найти для функции x^2 первообразную, график которой проходит через точку (0; 1), и первообразную, график которой проходит через точку (3; 5).

Решение. Так как любую первообразную функции x^2 можно записать в виде $\frac{x^3}{3}+C$, то поставленная задача сводится к нахождению постоянной C по указанным условиям. Для первой первообразной искомую постоянную C можно найти из уравнения

$$\frac{0^3}{3}+C=1, \quad \text{откуда} \quad C=1.$$

Следовательно, первая первообразная

$$F_1(x)=\frac{x^3}{3}+1.$$

Чтобы найти вторую первообразную, необходимо использовать условие

$$\frac{3^3}{3}+C=5, \quad \text{откуда} \quad C=-4.$$

Следовательно, вторая первообразная

$$F_2(x)=\frac{x^3}{3}-4.$$

Из полученных формул видно, что $F_1(x) - F_2(x) = 5$ и что график $F_2(x)$ расположен ниже, чем график $F_1(x)$.

Упражнения

Найдите одну из первообразных для функции:

196. x^3. **197.** x^4. **198.** x. **199.** $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

200. $\sqrt{x}$. **201.** $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. **202.** $\sqrt[3]{x}$. **203.** $\frac{1}{x^2}$.

204. $\sqrt[3]{x^2}$. **205.** $\sqrt{x^3}$. **206.** $2\frac{1}{2}$.

Указание. Использовать упражнения § 3.

207. Найдите все первообразные для функции, заданной в упр. 196—206.

Для указанной функции найдите первообразную, график которой проходит через указанную точку:

208. x^2 и (0; 3). **209.** $\sqrt{x^3}$ и (1; 3).

210. $\frac{1}{x^2}$ и (—2; 1). **211.** $\frac{1}{\sqrt{x}}$ и (4; —3).

212. Для функции $\frac{1}{\sqrt{x}}$ найдите: а) первообразную, график которой проходит через точку (1; 3); б) первообразную, график которой проходит через точку (9; 5). Чему равна разность этих первообразных? График какой из них расположен выше?

213. Для функции $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку (1; 5), и первообразную, график которой проходит через точку (8; 8). Чему равна разность этих первообразных? График какой из них расположен выше?

214. Для функции $\frac{1}{x^2}$ найдите: а) первообразную, график которой проходит через точку (1; —5); б) первообразную, график которой проходит через точку (0,02; —30). Чему равна разность этих первообразных? График какой из них расположен выше?

14. Правила нахождения первообразных. Как и при вычислении производных, нахождение первообразных упрощается, если пользоваться некоторыми правилами. Они сформулированы ниже в виде теорем.

Теорема 1 (первообразная степени). *Для степенной функции x^p, где $p \neq -1$ — действительное число, любую первообразную можно записать в виде*

$$\frac{x^{p+1}}{p+1}+C.$$

Действительно, при любой постоянной C

$$\left(\frac{x^{p+1}}{p+1}+C\right)'=\frac{1}{p+1}(x^{p+1})'=\frac{1}{p+1}(p+1)x^p=x^p.$$

То, что так можно записать любую первообразную степенной функции, следует из основного свойства первообразных (теорема 2, п. 13).

Теорема 2 (первообразная суммы). *Если F есть первообразная для функции f, а G — для функции g (на одном и том же промежутке), то $F+G$ есть первообразная для функции $f+g$ (на этом же промежутке).*

По условию, $F'(x)=f(x)$ и $G'(x)=g(x)$ для всех x из рассматриваемого промежутка. Поэтому (для указанных x)

$$(F(x)+G(x))'=F'(x)+G'(x)=f(x)+g(x),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3 (вынесение постоянного множителя). *Если F есть первообразная для f и k — постоянная, то kF есть первообразная для kf.*

По условию теоремы, $F'(x)=f(x)$ для всех x из некоторого промежутка. Поэтому (для указанных x)

$$(kF(x))' = kF'(x) = kf(x),$$

что и требовалось доказать.

Пример 1. Найдите первообразную для функции

$$f(x) = x^2 + \frac{5}{\sqrt{x}}.$$

Решение. Для функции x^2 первообразной является функция $\frac{x^3}{3}$ на промежутке $]-\infty;\ \infty[$, а для функции $\frac{1}{\sqrt{x}}$ первообразной является функция $2\sqrt{x}$ на $]0;\ \infty[$. Следовательно, в силу теорем 2 и 3 на промежутке $]0;\ \infty[$ для функции f первообразной является функция

$$\frac{x^3}{3} + 10\sqrt{x}.$$

Теорема 4 (линейная замена). *Если функция $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, то функция $\frac{1}{k}F(kx+b)$, где $k \neq 0$ и b — числа, есть первообразная для функции*

$$f(kx+b).$$

Действительно, так как $F' = f$, то по правилу дифференцирования сложной функции (п. 12) имеем

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}(F(kx+b))' = \frac{1}{k}F'(kx+b)(kx+b)' =$$

$$= \frac{1}{k}f(kx+b)k = f(kx+b),$$

что и требовалось доказать.

Пример 2. Найти первообразную для функции $\sqrt[3]{5x+7}$.

Решение. Так как для функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$ первообразной является $F(x) = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}$ (теорема 1), то для функции $f(5x+7) = \sqrt[3]{5x+7}$ первообразной будет функция

$$\frac{1}{5}F(5x+7) = \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}\sqrt[4]{(5x+7)^4} = \frac{3}{20}\sqrt[3]{(5x+7)^4}.$$

Пример 3. Найти первообразную для функции $\frac{1}{(4-3x)^2}$.

Решение. Так как для функции $f(x) = \frac{1}{x^2}$ первообразной является функция $F(x) = \frac{-1}{x}$ (теорема 1), то для функции $f(4-3x) =$

$= \frac{1}{(4-3x)^2}$ первообразной будет функция

$$\frac{1}{-3}F(4-3x)=\frac{1}{-3}\cdot\frac{-1}{4-3x}=\frac{1}{3(4-3x)}.$$

Пример 4. Найти первообразную для функции $g(x)=\frac{x^2-4}{x+2}$.

Решение. Так как в промежутке $]-2;\ \infty[$

$$g(x)=\frac{(x+2)(x-2)}{x+2}=x-2,$$

то первообразной функции g на промежутке $]-2;\ \infty[$ будет функция $\frac{x^2}{2}-2x$ (теоремы 2 и 3). Эта же функция есть первообразная для функции g и на промежутке $]-\infty;\ -2[$.

Упражнения

Найдите первообразные для указанных функций:

215. $x^3-\frac{5}{x^2}$.
216. $\sqrt[5]{x}+4x\sqrt{x}$.
217. $\frac{x^4-3x}{x^3}$.
218. $\frac{x^2-3}{\sqrt{x}}$.
219. $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^3$.
220. $\left(\sqrt[3]{x^2}-\frac{1}{x}\right)^2$.
221. $\frac{x^2-16}{x+4}$.
222. $\frac{x^2-9}{x-3}$.
223. $\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$.
224. $\frac{x^3-8}{x-2}$.
225. $\frac{x^3+27}{x^2-3x+9}$.
226. $(2x+5)^{74}$.
227. $(3-5x)^{49}$.
228. $\frac{1}{(4x+3)^{26}}$.
229. $\frac{1}{(7-3x)^{11}}$.
230. $\sqrt{7+11x}$.
231. $\frac{1}{\sqrt[3]{(5-2x)^2}}$.
232. $\frac{1}{\sqrt{3-7x}}$.
233. $\frac{5}{(4+9x)^3}$.
234. $\frac{4}{\sqrt[3]{1-8x}}$.

§ 5. ИНТЕГРАЛ

15. Формула Ньютона—Лейбница. Решение многих задач сводится к вычислению приращения первообразной для заданной функции. Оказывается, что это приращение не зависит от того, какую первообразную мы при этом возьмем. Действительно, пусть F и Φ есть первообразные для функции f на промежутке I. Тогда в силу основного свойства первообразных существует такая постоянная C, что $\Phi(x)=F(x)+$

$+ C$ для всех $x \in I$. Пусть числа a и b принадлежат I. Тогда

$$\Phi(b) - \Phi(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a),$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, приращение первообразной зависит только от заданной функции f и чисел a и b.

Определение. *Интегралом от a до b функции f называется приращение первообразной F этой функции*: $F(b) - F(a)$.

Определенный интеграл от a до b обозначается

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

и читается: «интеграл от a до b эф от икс дэ икс». Знак $\int$ называется *знаком интеграла*. Числа a и b называются *пределами интегрирования*: a — нижним, b — верхним. Функция f — *подынтегральной функцией*, а переменная x — *переменной интегрирования*.

Таким образом, если F есть первообразная для функции f, то, по определению,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{1}$$

Эта формула называется формулой Ньютона — Лейбница.

Например, используя первообразные, найденные в п. 13, имеем:

$$\int_{-1}^{2} x^2 dx = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 3, \quad \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1} = 2.$$

Для удобства вычислений по формуле Ньютона — Лейбница для разности $F(b) - F(a)$ принята сокращенная запись $F(x)\,\big|_a^b$, т. е.

$$F(b) - F(a) = F(x)\,\big|_a^b. \tag{2}$$

Пользуясь этим обозначением, формулу Ньютона—Лейбница можно записать в виде

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\,\big|_a^b, \tag{3}$$

а вычисления при этом ведутся, например, таким образом:

$$\int_0^3 (x^2 + 1)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_0^3 = \frac{3^3}{3} + 3 - 0 = 12.$$

Упражнения

Вычислите следующие интегралы:

235. $\int\limits_1^2 x^3dx$.

236. $\int\limits_{-1}^1 x^4dx$.

237. $\int\limits_{-2}^4 xdx$.

238. $\int\limits_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

239. $\int\limits_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

240. $\int\limits_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx$.

241. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x^2}$.

242. $\int\limits_{-5}^5 x^7dx$.

243. $\int\limits_{21}^{-21} x^{31}dx$.

244. $\int\limits_8^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

245. $\int\limits_0^2 (3-2x)\,dx$.

246. $\int\limits_2^0 (x^3-x)\,dx$.

247. $\int\limits_{-2}^2 (x^3-x)\,dx$.

248. $\int\limits_{-1}^3 (x^2-2x+2)\,dx$.

16.* Нахождение координаты по заданной скорости и скорости по заданному ускорению. В качестве одного из приложений понятия интеграла рассмотрим задачу определения скорости. При изучении движения полезно иметь такие его характеристики, пользуясь которыми это движение можно восстановить. Поскольку функция восстанавливается по ее производной интегрированием, то будем рассуждать следующим образом. Пусть точка движется по прямой. Ее координата x есть функция от времени движения t, т. е. $x = x(t)$. Поскольку

$$x(t) - x(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} x'(t)\,dt \tag{1}$$

в силу формулы Ньютона—Лейбница, то можем рассматривать $x'(t)$ как одну из характеристик движения; она называется *скоростью* и обозначается буквой v. Таким образом, по определению, скорость

$$v = x'_t = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{2}$$

Зная скорость движения v как функцию от времени t, т. е. $v = v(t)$, можно в силу равенств (1) и (2) восстановить уравнение движения

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} v(t)\,dt, \tag{3}$$

где $x_0 = x(t_0)$ называется *начальной координатой*.

Если же начальная координата x_0 неизвестна, то координата по скорости восстанавливается только с точностью до постоянного слагаемого.

Производную от скорости по времени называют *ускорением* движения:

$$a = v'_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}. \tag{4}$$

Зная ускорение как функцию времени, т. е. $a = a(t)$, можно восстановить уравнение движения, найдя сначала скорость этого движения

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt \tag{5}$$

по формуле Ньютона — Лейбница, где $v_0 = v(t_0)$ называется *начальной скоростью*. После этого можно найти координату по формуле (3).

Упражнения

249. Точка движется по прямой с постоянным ускорением a. Найдите скорость и координату этой точки как функции времени

250. Камень брошен вертикально вверх. Пренебрегая сопротивлением воздуха и считая ускорение силы тяжести $g \approx 9{,}8$ см/с², найдите: 1) наибольшую высоту подъема камня в зависимости от начальной скорости v_0; 2) через сколько времени камень упадет на землю; 3) скорость камня в самом верхнем положении.

251. Найдите координату точки (движущейся по прямой) к моменту времени $t = 5$, если при $t_0 = 0$ начальная координата $x_0 = 0$, а скорость точки меняется по закону $v = 9{,}8\,t - 0{,}003\,t^2$. Найдите ускорение этой точки в конце пути.

252. Скорость движущейся по прямой точки меняется по закону $v = Rt + k\sqrt{t}$. Найдите координату этой точки к моменту времени $t = 4$ и ускорение ее в конце пути, если $t_0 = 0$ и $x_0 = 0$.

253. Точка движется по параболе $y = x^2 - 2x + 3$ так, что ее проекция на ось абсцисс имеет постоянную скорость v. Для проекции этой точки на ось ординат найдите скорость и ускорение.

254. Точка движется по графику функции $y = x^3 - 2x^2$ так, что ее проекция на ось абсцисс имеет постоянную скорость v. Найдите скорость и ускорение проекции этой точки на ось ординат.

17. Нахождение площадей плоских фигур. Фигуры, о которых пойдет речь, называются криволинейными трапециями и определяются следующим образом. Пусть на отрезке $[a; b]$ задана непрерывная и не меняющая знака функция f. Фигура, ограниченная графиком этой функции, отрезком $[a; b]$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, называется *криволинейной трапецией* (рис. 65). Докажем, что , если $f \geqslant 0$ на $[a; b]$, то площадь S этой криволинейной трапеции можно подсчитать по формуле

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Для доказательства рассмотрим площадь части этой криволинейной трапеции, расположенной левее точки x (рис. 66).
Площадь этой фигуры обозначим $S(x)$. Этим на отрезке $[a; b]$ определена функция $S(x)$. Ясно, что $S(b) = S$ и $S(a) = 0$. Подсчитаем теперь производную этой функции, коротко говорят: производную площади. Для этого надо найти приращение этой функции $\Delta S = S(x + \Delta x) -$

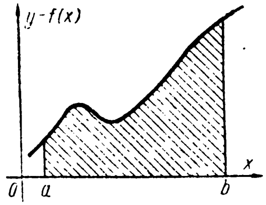


Рис. 65

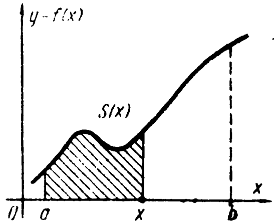


Рис. 66

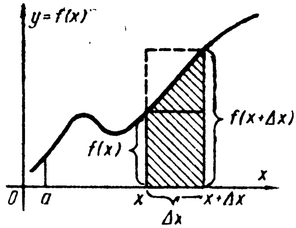


Рис. 67

— $S(x)$. На рис. 67 оно представлено площадью заштрихованной фигуры. Из того же рисунка ясно (для простоты функция f взята возрастающей на $[x; x + \Delta x]$ и $\Delta x > 0$), что

$$f(x)\Delta x < \Delta S < f(x+\Delta x)\Delta x$$

и потому

$$f(x) < \frac{\Delta S}{\Delta x} < f(x+\Delta x).$$

Но $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x) = f(x)$ и $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x) = f(x)$, так как f — непрерывная функция. Следовательно, в силу определения производной (формула (2), п. 8) и по теореме о промежуточной функции,

$$S'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x).$$

Таким образом, доказано, что функция $S(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$. Тогда, по формуле Ньютона — Лейбница,

$$\int_a^b f(x)\,dx = S(b) - S(a) = S,$$

так как $S(b) = S$ и $S(a) = 0$. Формула (1) доказана.

Теперь мы можем дать геометрическое толкование примерам подсчета интегралов, приведенных на с. 44. В первом примере найдена площадь фигуры, заштрихованной на рис. 68, она равна

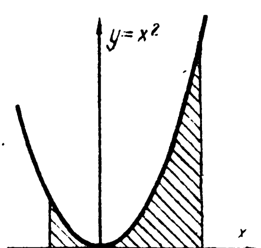


Рис. 68

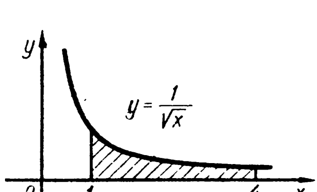


Рис. 69

3. Во втором примере найдена площадь фигуры, заштрихованной на рис. 69, она равна 2.

Замечание. Отметим, что попутно доказано следующее утверждение: непрерывная (неотрицательная) функция имеет первообразную — это площадь $S(x)$ криволинейной трапеции, заштрихованной на рис. 66.

Упражнения

Вычислите площади криволинейных трапеций, ограниченных указанными ниже отрезками оси абсцисс, прямыми $x = a$, $x = b$ (a и b — концы отрезков) и графиками функций (к решению сделайте рисунок):

255. $[1;\ 3]$ и $y = x^2$.

256. $[-2;\ 3]$ и $y = x^2$.

257. $[1;\ 4]$ и $y = \sqrt{x}$.

258. $[1;\ 8]$ и $y = \sqrt[3]{x}$.

259. $[1;\ 4]$ и $y = x\sqrt{x}$.

260. $\left[\frac{1}{3};\ 1\right]$ и $y = \frac{1}{x^2}$.

Вычислите площади фигур, ограниченных указанными ниже линиями (к решению сделайте рисунок):

261. $y = x^2$ и $y = \sqrt[3]{x}$.

262. $y = x^3$ и $y = \sqrt[4]{x}$.

263. $y = 2x - x^2$ и $y = 0$.

264. $y = 3x - x^2$ и $y = x$.

265. $y = x^2$ и $y = -x$.

266. $y = (x+1)^2$ и $y = 1 - x$.

267. $y = (1-x)^9$, $x = 0$ и $y = 0$.

268. $y = x^2 - 2x + 2$ и $y = x + 2$.

18. Основные свойства интеграла. I. Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, т. е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(z)\,dz = \cdots .$$

Это следует из того, что, как бы ни обозначать переменную интегрирования, она потом заменяется в формуле Ньютона — Лейбница числами a и b: все написанные выше интегралы равны $F(b) - F(a)$.

II. $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_b^b f(x)\,dx = 0.$$

Эти свойства также следуют из формулы Ньютона — Лейбница:

$$-\int_b^a f(x)\,dx = -(F(a) - F(b)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\int_b^b f(x)\,dx = F(b) - F(b) = 0.$$

III. $\left(\int\limits_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x).$

Здесь интеграл рассматривается как функция переменной x (верхнего предела интегрирования), а переменная интегрирования обозначена буквой t, чтобы различать эти две переменные.

Если F есть первообразная для f, то

$$\left(\int\limits_a^x f(t)\,dt\right)' = (F(x) - F(a))' = F'(x) - (F(a))' = f(x) - 0 = f(x).$$

19. Логарифмическая функция. Возьмем положительное число x и рассмотрим

$$\int\limits_1^x \frac{dt}{t}. \qquad (1)$$

При $x > 1$ этот интеграл есть площадь криволинейной трапеции $1xBA$ (рис. 70). Если же $0 < x < 1$, то этот интеграл равен площади

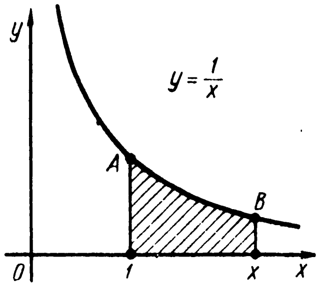


Рис. 70

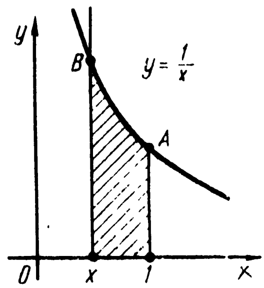


Рис. 71

криволинейной трапеции $x1BA$ (рис. 71), но взятой со знаком минус. Действительно, так как $x < 1$, то площадь криволинейной трапеции $x1BA$ равна

$$\int\limits_x^1 \frac{dt}{t}.$$

Следовательно, если воспользоваться свойством II определенного интеграла (см. п. 18), то

$$\int\limits_1^x \frac{dt}{t} = -\int\limits_x^1 \frac{dt}{t} = -\text{пл. } x1BA.$$

Для неположительных x этот интеграл не определен, так как подынтегральная функция не ограничена около нуля (рис. 71). Таким образом, для каждого положительного x получаем определенное значение интеграла (1). Этим на промежутке $]0;\infty[$ определена функция переменной x, которую называют *натуральным логарифмом* и обозначают ln. Итак, по определению,

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}. \tag{2}$$

Рассмотрим некоторые свойства натурального логарифма.

В силу свойства II определенного интеграла (см. п. 18)

$$\ln 1 = 0, \tag{3}$$

так как при $x = 1$ в формуле (2) получается интеграл, у которого верхний и нижний пределы совпадают.

В силу свойства III определенного интеграла (см. п. 18)

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \tag{4}$$

т. е. натуральный логарифм есть функция, дифференцируемая во всей области определения, а следовательно, и непрерывная.

Докажем основные свойства натурального логарифма:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b. \tag{5}$$

Действительно, по правилу вычисления производной сложной функции, $(\ln(ax))' = \frac{1}{ax}\cdot a = \frac{1}{x}$. Таким образом, $\ln x$ и $\ln(ax)$ есть первообразные для функции $\frac{1}{x}$ на промежутке $]0;\infty[$. Поэтому существует такая постоянная C, что $\ln(ax) = \ln x + C$. Для определения значения постоянной C положим $x = 1$, тогда $\ln a = \ln 1 + C = C$. Отсюда находим $C = \ln a$. Подставляя найденное значение C в формулу $\ln(ax) = \ln x + C$, получаем равенство $\ln(ax) = \ln a + \ln x$, которое при $x = b$ дает (5).

Из формулы (5) следует, что

$$\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b. \tag{6}$$

Действительно, так как $a = \frac{a}{b}\cdot b$, то, пользуясь формулой (5), получаем

$$\ln a = \ln\left(\frac{a}{b}\cdot b\right) = \ln\frac{a}{b} + \ln b,$$

откуда после переноса в левую часть полученного равенства $\ln b$ с противоположным знаком вытекает формула (6).

Из формул (6) и (3) находим, что

$$\ln\frac{1}{b} = -\ln b, \tag{7}$$

так как

$$\ln \frac{1}{b} = \ln 1 - \ln b = 0 - \ln b = -\ln b.$$

При помощи метода математической индукции из формулы (5) для любого натурального n получаем формулу

$$\ln (a_1 \cdot a_2 \ldots a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n. \quad (8)$$

Из формулы (8) для любого натурального n находим

$$\ln \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \ln a. \quad (9)$$

Действительно, так как $a = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n$, то из формулы (8) при $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \sqrt[n]{a}$ получаем

$$\ln a = \ln \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = n \ln \sqrt[n]{a},$$

откуда следует формула (9).

Наконец, из формулы (8) для любого целого n получаем

$$\ln a^n = n \ln a. \quad (10)$$

Эту формулу докажите самостоятельно сначала для натуральных n, а затем и для отрицательных, используя формулу (7).

Функция натуральный логарифм возрастает на промежутке $]0; \infty[$ и не ограничена. Действительно, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ по формуле (4). А так как $x > 0$, то $(\ln x)' > 0$ и, следовательно, логарифм натуральный есть возрастающая функция (рис. 72).

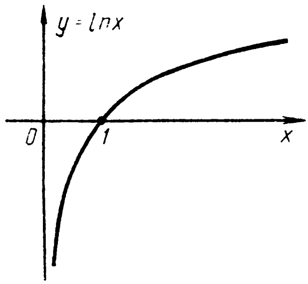


Рис. 72

Покажем, что при увеличении x неограниченно увеличивается и $\ln x$. В самом деле, для любого числа K существует натуральное число $n > \frac{K}{\ln 2}$ в силу свойства неограниченности множества N натуральных чисел. Тогда для всех $x > 2^n$ в силу возрастания функции ln имеем

$$\ln x > \ln 2^n = n \ln 2 > \frac{K}{\ln 2} \cdot \ln 2 = K.$$

Этим доказано неограниченное возрастание ln.

В следующем пункте вы увидите, что известные из курса VIII класса логарифмы связаны с натуральным логарифмом формулой

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \quad x > 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1. \quad (11)$$

В частности,

$$\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10}. \tag{12}$$

Из формулы (12) получается формула

$$\ln x = \ln 10 \cdot \lg x, \tag{13}$$

которая показывает, что нет необходимости в составлении специальных таблиц для вычисления натуральных логарифмов. Коэффициент пропорциональности $\ln 10 = 2{,}3026\ldots$ называют *множителем перехода* от десятичных логарифмов к натуральным и обычно обозначают через $\frac{1}{M}$.

Упражнения

Пользуясь формулой (11), докажите приведенные ниже равенства (для всех допустимых значений переменных):

269. $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$. **270.** $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.

271. $\log_a 1 = 0$. **272.** $\log_a a = 1$.

273. $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$.

274. $\log_a (a_1 \cdot a_2 \ldots a_n) = \log_a a_1 + \log_a a_2 + \cdots + \log_a a_n$.

275. $\log_a b^n = n \log_a b$. **276.** $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$.

277. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$. **278.** $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

Пользуясь таблицами В. М. Брадиса, найдите:

279. $\ln 3$. **280.** $\ln 231$. **281.** $\ln 0{,}017$.

282. $\log_3 7$. **283.** $\log_5 319$. **284.** $\log_{0,7} 0{,}813$.

285. $\log_{\frac{1}{3}} 19$. **286.** $\log_{1,5} 0{,}271$. **287.** $\log_{0,23} 7{,}81$.

Постройте графики функций:

288. $y = \log_2 x$. **289.** $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

290. $y = \log_{0,7} x$. **291.** $y = \log_{1,7} x$.

292. $y = \log_a x$ (отдельно для $a > 1$ и $0 < a < 1$).

293. Докажите, что функция $\log_a$ возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$.

Вычислите производные следующих функций:

294. $\ln (3x)$. **295.** $\ln (2 - 5x)$.

296. $\log_3(x^2+4)$. 297. $\log_5(3-x-x^2)$.

298. $\ln\dfrac{1-x}{2+x}$. 299. $\dfrac{1}{2a}\ln\dfrac{a+x}{a-x}$.

300. $x\ln x - x$. 301. $\ln\left(x+\sqrt{x^2+q}\right)$.

302. $\sqrt{x}\,\ln\left(2+\sqrt{x}\right)$.

Напишите уравнение касательной к линии в точке с указанной абсциссой:

303. $y=\ln x$, $x_0=1$. 304. $y=\log_3 x$, $x_0=3$.

Вычислите приближенно:

305. $\ln 1{,}02$. 306. $\ln 0{,}96$. 307. $\lg 11$.

Найдите первообразные следующих функций:

308. $\dfrac{1}{x}$. 309. $\dfrac{3}{x}$. 310. $\dfrac{1}{5x}$. 311. $\dfrac{1}{x+2}$.

312. $\dfrac{5}{x+3}$. 313. $\dfrac{1}{2x+6}$. 314. $\dfrac{5}{3x+2}$.

315.* $\dfrac{1}{x}$ на промежутке $]-\infty;\ 0[$.

Вычислите интегралы:

316. $\displaystyle\int_3^7 \frac{dx}{x}$. 317. $\displaystyle\int_{0,2}^{1,8} \frac{dx}{x}$ 318. $\displaystyle\int_1^3 \left(x-\frac{2}{x}\right)dx$.

319. $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{2dx}{x+3}$. 320. $\displaystyle\int_{-1,5}^{0} \frac{3dx}{2x+4}$. 321. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}}^{2} \frac{5dx}{3x+2}$

322. $\displaystyle\int_1^{10} \ln x dx$. Указание. Используйте упр. 300.

323. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$. Указание. Используйте упр. 301.

324. Вычислите площадь, ограниченную линиями:

$$y=\ln x,\ y=0,\ x=a>1.$$

20. Экспонента. В п. 19 вы познакомились с функцией ln и ее свойствами. Она определена для всех $x>0$, т. е. областью ее определения является промежуток $]0;\infty[$, а множеством значений — множество всех действительных чисел R. Функция ln возрастает и потому имеет обратную функцию (см. «Алгебра—6»), которая называется *экспонентной* и обозначается exp. По свойству обратной функции, экспонента имеет область определения, совпадающую со множеством значений функции ln, т. е. $D(\exp)=R$, а множество ее значений совпа-

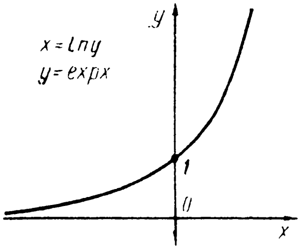


Рис. 73

дает с областью определения ln, т. е. $E(\exp) =]0; \infty[$. График экспоненты симметричен относительно прямой $y = x$ графику функции ln (поскольку это взаимно обратные функции). Поэтому, для того чтобы построить график функции $y = \exp x$, достаточно нарисовать график $x = \ln y$ (рис. 73). Отметим, что из определения взаимно обратных функций следуют формулы:

$$\ln(\exp x) = x \text{ при любом } x \qquad (1)$$

$$\exp(\ln x) = x \text{ при любом } x > 0. \qquad (2)$$

Приведем основные свойства функции exp:

$$\exp 0 = 1, \qquad (3)$$

$$\exp(a + b) = \exp a \cdot \exp b, \qquad (4)$$

$$\exp(-b) = \frac{1}{\exp b}, \qquad (5)$$

$$\exp(a - b) = \frac{\exp a}{\exp b}, \qquad (6)$$

$$\exp(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \exp a_1 \cdot \exp a_2 \ldots \exp a_n, \qquad (7)$$

где n — натуральное число,

$$\exp(na) = (\exp a)^n, \qquad (8)$$

где n — целое число.

Докажем, например, формулу (4). Пользуясь формулами (2) и (1) и свойством ln (п. 19, равенство (5)), имеем

$$\exp a \cdot \exp b = \exp(\ln(\exp a \cdot \exp b)) = \exp(\ln(\exp a) + \ln(\exp b)) =$$
$$= \exp(a + b).$$

Равенство (4) доказано. Остальные свойства следуют из формулы (4) (докажите их сами).

В VIII классе степень числа $a > 0$ была определена только для рациональных показателей $x = \frac{p}{q}$ $(p \in Z,\ q \in N)$:

$$a^x = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Дадим теперь определение степени a с любым действительным показателем степени x при помощи равенства

$$a^x = \exp(x \ln a). \qquad (9)$$

Для рациональных x это определение совпадает с определением, данным в курсе VIII класса. Действительно, так как $\ln a^x = x \ln a$ при рациональном x, то из этого равенства в силу равенства (2) получаем $a^x = \exp(x \ln a)$, т. е. равенство (9) для рациональных показателей степени x.

Далее докажем две важные формулы:

$$\log_a a^x = x \quad \text{для любых } x \tag{10}$$

и

$$a^{\log_a x} = x \quad \text{для любых } x > 0. \tag{11}$$

Действительно, согласно определению (формулы (9) и (11), п. 19)

$$\log_a a^x = \frac{\ln(\exp(x \ln a))}{\ln a} = \frac{x \ln a}{\ln a} = x.$$

Таким образом, формула (10) доказана. Формула (11) доказывается аналогично:

$$a^{\log_a x} = \exp(\log_a x \cdot \ln a) = \exp\left(\frac{\ln x}{\ln a} \cdot \ln a\right) = \exp(\ln x) = x.$$

Из формул (10) и (11) следует, что показательная функция $y = a^x$ и логарифмическая функция $y = \log_a x$ есть взаимнообратные функции. Кроме того, формула (11) показывает, что число $\log_a x$, определенное формулой (11), п. 19, совпадает с логарифмом числа x по основанию a, определенным в курсе VIII класса.

Значение экспоненты в точке 1 называется числом e и обозначается буквой e, т. е. согласно определению

$$e = \exp 1. \tag{12}$$

Это число играет большую роль во многих вопросах математики. Доказано, что число e — иррациональное и потому записывается в виде непериодической десятичной дроби:

$$e = 2{,}71828.$$

Покажем, что экспонента есть показательная функция с основанием e, т. е.

$$\exp x = e^x, \tag{13}$$

а натуральный логарифм есть логарифм с основанием e:

$$\ln x = \log_e x. \tag{14}$$

Действительно, из формулы (12) следует, что

$$\ln e = 1, \tag{15}$$

и потому, пользуясь равенствами (9) и (11), п. 19, можем написать:

$$e^x = \exp(x \ln e) = \exp x,$$

$$\log_e x = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x.$$

Докажем теперь, что для любого x

$$(e^x)' = e^x \quad \text{и} \quad (a^x)' = a^x \ln a. \tag{16}$$

Функция $x = \ln y$ имеет во всей области определения производную. Следовательно, в каждой точке график этой функции имеет касательную. Но эта кривая, по определению, есть график функции $y = \exp x$. Таким образом, график функции $y = \exp x$ имеет в каждой точке касательную, а это значит, что функция exp всюду имеет производную. Остается найти эту производную. Заметим, что в формуле (1) слева и справа стоят равные функции. Следовательно, их производные тоже равны:

$$(x)' = (\ln(\exp x))', \text{ т. е. } 1 = \frac{1}{\exp x}(\exp x)'$$

по правилу вычисления производной сложной функции. Отсюда следует, что

$$(\exp x)' = \exp x \quad \text{или} \quad (e^x)' = e^x.$$

Для доказательства второй формулы (16) воспользуемся правилом вычисления производной сложной функции: так как $a^x = e^{x \ln a}$, то

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a}(x \ln a)' = a^x \ln a.$$

Наконец, докажем, что при любом действительном p и любом $x > 0$

$$(x^p)' = px^{p-1}. \tag{17}$$

Действительно, так как, по определению, $x^p = e^{p \ln x}$, то

$$(x^p)' = (e^{p \ln x})' = e^{p \ln x}(p \ln x)' = x^p p \frac{1}{x} = px^{p-1}.$$

Из формулы (17) следует, что теорема 1 из п. 14 верна при любом действительном $p \neq -1$, а при $p = -1$, т. е. для функции $y = \frac{1}{x}$, первообразной будет $\ln x + C$.

Из формул (16) вытекает следующая теорема:

Теорема. *Для показательной функции a^x первообразной будет функция $\frac{a^x}{\ln a} + C$, где C — произвольная постоянная. В частности, для экспоненты e^x первообразной будет функция $e^x + C$.*

В самом деле, так как производная постоянной равна нулю, то

$$\left(\frac{a^x}{\ln a} + C\right)' = \left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(a^x)' = \frac{1}{\ln a} a^x \cdot \ln a = a^x,$$

а

$$(e^x + C)' = (e^x)' = e^x,$$

что и требовалось доказать.

Отметим еще очень важное свойство показательной функции

$$y' = ky \leftrightarrow y = Ce^{kx}, \tag{18}$$

где C — произвольная постоянная. Для доказательства вычислим

$$(ye^{-kx})' = y'e^{-kx} + ye^{-kx}(-k) = kye^{-kx} - kye^{-kx} = 0,$$

поскольку $y' = ky$. Следовательно, производная функция ye^{-kx} равна нулю для всех x. Отсюда следует в силу признака постоянства функции (см. § 4, п. 13), что это произведение есть постоянная C, т. е.

$$ye^{-kx} = C, \text{ откуда } y = Ce^{kx},$$

что и требовалось доказать.

Обратное утверждение проверяется дифференцированием.

Упражнения

325. Докажите равенства (5)—(8).

Вычислите, пользуясь таблицами десятичных логарифмов:

326. $3^{\sqrt{2}}$. **327.** 2^{π}. **328.** $0{,}17^{2,3}$. **329.** $1{,}9^{-0,47}$.

Постройте графики функций:

330. $y = a^x$ при $a = 2$; $1{,}7$; $0{,}3$; 1. **331.** $y = x^p$ при $x > 0$ и $p = 2{,}5$; $0{,}7$; $-1{,}3$. **332.** Запишите для показательной функции a^x равенство (3)—(8) и докажите их. Докажите, что равенство (8) верно при любом действительном n.

Вычислите производные следующих функций:

333. e^{-3x}. **334.** 3^{2x}. **335.** $5^{\sqrt{x}}$. **336.** e^{-x^2}. **337.** $x^2(0{,}3)^x$. **338*.** $\frac{3^{x^2}}{\ln x}$. **339*.** $\frac{\ln x}{x^{\pi}}$. **340*.** $\sqrt[3]{\ln x}\, e^{-x}$. **341*.** $\frac{\ln x}{2^x + 3}$. **342.** Напишите уравнение касательной к линии $y = e^x$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$.

343. Напишите уравнение касательной к линии $y = 3^{-x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Постройте графики функций:

344. $y = x\ln x$. **345.** $y = \frac{x}{\ln x}$. **346.** $y = \frac{x}{e^x}$.

347. $y = \frac{e^x}{x}$. **348*.** $y = 3\ln x - \ln^3 x$.

Найдите первообразные следующих функций:

349. e^{2x}. **350.** e^{-3x}. **351.** 3^{5x}. **352.** $\frac{1}{7^{2x}}$.

353*. $\frac{2}{5x+1} - 3^{7x}$. **354*.** $(2^x + 0{,}3^{-x})^2$.

Вычислите интегралы:

355. $\int_0^2 e^x dx$. **356.** $\int_{-1}^{0} e^{3x} dx$. **357.** $\int_{-2}^{3} \frac{dx}{e^x}$.

358. $\int\limits_{\lg 2}^{\lg 7} 10^x dx$. 359. $\int\limits_{\lg 3}^{-\lg 5} 10^{2x} dx$. 360. $\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{5^{\frac{x}{3}}}$.

361. Вычислите площадь, ограниченную линиями $y = 3^x$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 1$.

Глава III

СВЕДЕНИЯ ИЗ АРИФМЕТИКИ И АЛГЕБРЫ IV—VIII КЛАССОВ[1]

21. Множества и операции над ними. *Множество* может быть задано или перечислением всех своих элементов (если это конечное множество), или указанием определенного признака для элементов этого множества. Например, множество $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, состоящее из шести элементов — натуральных чисел, задано перечислением всех элементов множества. Или множество $M = \{\bigcirc; \Delta; \square\}$ задано перечислением трех геометрических фигур — элементов этого множества. Множество $B = \{2; 4; 6; \ldots\}$ всех четных чисел задано указанием признака для элементов этого множества.

То, что элемент a принадлежит множеству A, записывают так: $a \in A$. Знак принадлежности $\in$ читают: «принадлежит». Если элемент b не принадлежит множеству A, то пишут $b \notin A$. Например, если множество $A = \{3; 7; 11; 19\}$, то $7 \in A$, но $5 \notin A$.

Для наглядности принято изображать элементы множества точками на плоскости. Например, множество $A = \{$яблоко; кит; жук$\}$

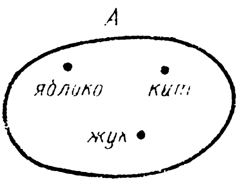


Рис. 74

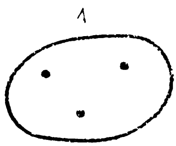


Рис. 75

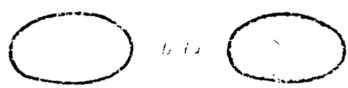


Рис. 76

изображено на рис. 74, или проще на рис. 75, или совсем просто на рис. 76 (не отмечая элементов множества).

Пересечением двух множеств называется множество, состоящее из всех их общих элементов. Пересечение множеств A и B обозначается $A \cap B$, знак $\cap$ читают: «пересечение».

Например, если множество $A = \{4;$ кот; $\Delta\}$, а множество $B = \{$жук; 7; кот; репа$\}$, то $A \cap B = \{$кот$\}$, т. е. множеству, состоя-

[1] Материал для повторения курса средней школы.

щему из одного элемента — кота. На рис. 77 пересечение множеств A и B заштриховано дважды.

Объединением двух множеств называется множество, состоящее из всех элементов, входящих хотя бы в одно из этих множеств. Объединение множеств A и B обозначается $A \cup B$, знак $\cup$ читают: «объединение». Например, если $A = \{3$; кит; яблоко; Солнце$\}$, а $B = \{$бык;

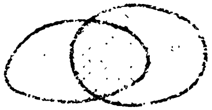


Рис. 77

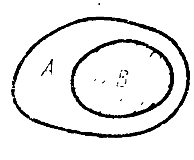


Рис. 78

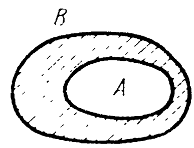


Рис. 79

Солнце; 7; 3$\}$, то $A \cup B = \{3$; кит; яблоко; Солнце; бык; 7$\}$. На рис. 77 вся заштрихованная фигура изображает множество $A \cup B$.

Для некоторых множеств приняты стандартные обозначения: $N = \{1; 2; 3; 4; \ldots\}$ — множество натуральных чисел; $Z = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$ — множество целых чисел; Q — множество всех рациональных чисел (целые числа, положительные и отрицательные дроби); $\varnothing$— пустое множество, т. е. множество, не содержащее ни одного элемента; R — множество действительных чисел.

Подмножеством множества A называется множество B, каждый элемент которого принадлежит множеству A. Записывают это так: $B \subset A$, что читается: «множество B содержится во множестве A» или «B содержится в A», или так: $A \supset B$, что читается: «множество A содержит множество B» или «A содержит B» (рис. 78). Например, $N \subset Z$, $Z \subset Q$, $Q \subset R$. Считается, что пустое множество ϕ есть подмножество любого множества.

Дополнением множества A до множества B (содержащего множество A) называется множество всех элементов множества B, не являющихся элементами множества A. Например, дополнение N до Z есть множество отрицательных целых чисел и нуль, дополнение множества Q до множества R есть множество иррациональных чисел. На рис. 79 дополнение множества A до множества B заштриховано.

Упражнения

Для множества $A = \{1$; 7; Земля; кот$\}$, $B = \{$Солнце; 7; жук$\}$, $C = \{3$; кот; Земля$\}$ найдите:

362. $A \cap B$. **363.** $A \cup B$. **364.** $A \cap C$. **365.** $B \cap C$. **366.** Дополнение $A \cap C$ до A.

22. Правила арифметических действий. Любые два числа a и b можно *сложить* и *перемножить*. Их *сумма* обозначается $a + b$, числа a и b называются *слагаемыми*. Их *произведение* обозначается $a \cdot b$ или ab, числа a и b называются *множителями*. Например:

$$23{,}9 + 4{,}57 = 28{,}47; \quad 3{,}71 \cdot 25{,}4 = 94{,}234.$$

Разностью чисел a и b называется такое число c, что $b + c = a$. Эта разность обозначается $a - b$, так что $c = a - b$. Число a называется *уменьшаемым*, число b — *вычитаемым*. Вычитание из числа a числа b можно заменить сложением числа a с числом, противоположным b, которое обозначается $(-b)$, например $a - b = a + (-b)$. При этом $a - a = a + (-a) = 0$.

Частным чисел a и $b \neq 0$ называется такое число c, что $bc = a$. Частное обозначается: $a : b$, или $\frac{a}{b}$ или a/b. Число a называется *делимым*, число b — *делителем*. Деление числа a на число $b \neq 0$ можно заменить умножением числа a на число, обратное числу b, которое обозначается: $\frac{1}{b}$, или b^{-1}, или $^1/_b$. При этом

$$a \cdot (a^{-1}) = 1.$$

Законы арифметических действий:

1) переместительный: $a + b = b + a$ и $ab = ba$;
2) сочетательный: $a + (b + c) = (a + b) + c$ и $a(bc) = (ab)c$;
3) распределительный: $a(b + c) = ab + ac$;
4) свойства нуля: $a + 0 = a - 0 = a$, $a \cdot 0 = 0$, делить на 0 нельзя,

   $a + (-a) = 0$;

5) свойства единицы: $a \cdot 1 = a:1 = a$, $a \cdot (a^{-1}) = a:a = 1$.

Примеры выполнения арифметических действий:

$$3{,}7 + 2{,}54 - 1{,}7 = 3{,}7 - 1{,}7 + 2{,}54 = 4{,}54;$$

$$3{,}6\,(2{,}97 : 1{,}8) = 2{,}97\,(3{,}6 : 1{,}8) = 2{,}97 \cdot 2 = 5{,}94;$$

$$2{,}57 \cdot 1{,}83 + 7{,}43 \cdot 1{,}83 = (2{,}57 + 7{,}43)\,1{,}83 = 10 \cdot 1{,}83 = 18{,}3;$$

$$(5{,}5 : 0{,}9) - (3{,}7 : 0{,}9) = (5{,}5 - 3{,}7) : 0{,}9 = 1{,}8 : 0{,}9 = 2.$$

Сложение, вычитание и умножение обычно выполняют «столбиком»:

$$\begin{array}{r} 2{,}7 \\ +\;0{,}43 \\ 13{,}56 \\ \hline 16{,}69 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7{,}32 \\ -\,4{,}594 \\ \hline 2{,}726 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2{,}73 \\ \cdot\;1{,}5 \\ \hline 1365 \\ 273 \\ \hline 4{,}095 \end{array}$$

При сложении и вычитании числа подписываются так, чтобы запятые были расположены друг под другом. Если одно число имеет после запятой меньше знаков, чем другое, то недостающие знаки заменяются нулями — их обычно не пишут. При умножении друг под другом располагают последние (правые) знаки. Умножают, сначала не обращая внимания на запятую. В конечном результате запятую ставят так, чтобы справа от нее было столько же вычисленных знаков (включая нули, полученные при умножении), сколько знаков во всех множителях вместе стоит справа от запятой. Например, в произведении $51{,}703\cdot$ $\cdot 9{,}8041$ справа от запятой надо отделить $3+4=7$ знаков.

Деление обычно выполняется «уголком». При этом пользуются тем, что при умножении делимого и делителя на одно и то же число частное не меняется. Например найдем частное $16{,}422 : 4{,}6$. Умножим и делимое и делитель на 10 (если бы делитель имел и сотые, то умножали бы на 100, если делитель справа от запятой имеет k знаков, то умножаем на 10^k, т. е. в делителе и делимом сдвигаем запятую на k мест вправо). После такого преобразования мы приходим к следующему равенству $16{,}422 : 4{,}6 = 164{,}22 : 46$. Деление «уголком» выполняется следующим образом: берем первую цифру делимого, в данном случае это цифра 1, она меньше делителя, т. е. $1 < 46$, добавляем следующую цифру делимого — получаем $16 < 46$, вновь добавляем следующую цифру делимого — получаем $164 > 46$. Теперь подбираем целое число k так, чтобы выполнялось неравенство $k\cdot 46 \leqslant 164 < (k+1)\cdot 46$. В нашем примере $k=3$. Вычитаем произведение $3\cdot 46 = 138$ из 164 — получаем первый остаток 26. «Сносим» следующую цифру делимого 2 — получаем 262. Так как снесенная цифра 2 стоит уже правее запятой, то после цифры 3 в частном ставим запятую. Подбор следующей цифры частного делаем так же, как и подбор 3, т. е. ищем такое число целое k, чтобы $k\cdot 46 \leqslant 262 < (k+$ $+1)\cdot 46$. Это число 5. Вычитаем из 262 произведение $5\cdot 46 = 230$ — получаем второй остаток 32 и «сносим» к нему следующую цифру делимого 2 — получаем 322. Подбираем следующую цифру частного так же, как и первые: ищем такое целое число k, чтобы выполнялось неравенство $k\cdot 46 \leqslant 322 < (k+1)\cdot 46$. Получается $k=7$ и $7\cdot 46 = 322$. При вычитании получается 0 — частное найдено и деление закончено, итак, мы нашли, что $16{,}422 : 4{,}6 =$ $= 3{,}57$.

$$
\begin{array}{r|l}
164{,}22 & 46 \\ \cline{2-2}
\underline{138} & 3{,}57 \\
262 & \\
\underline{230} & \\
322 & \\
\underline{322} & \\
0 &
\end{array}
$$

Иногда деление до конца не доводят, т. е. последний остаток p не равен нулю. Тогда говорят, что деление проведено с остатком и получено неполное частное. Если делимое a, делитель b и c — неполное частное, то $a = bc + p$.

При умножении (делении) пользуются еще правилом знаков: произведение (частное) двух чисел одинаковых знаков есть число положительное, а разных знаков — отрицательное.

Упражнения

Вычислите:

367. $16{,}31 - 8{,}219 + 4{,}2$. **368.** $3{,}48 + 28{,}146$. **369.** $0{,}03\cdot 21{,}05$. **370.** $10{,}53 : 0{,}12$. **371.** $17{,}3\cdot 2{,}54$. **372.** $3{,}7\cdot 0{,}0029$. **373.** $6{,}851 : 1{,}3$. **374.** $0{,}334961 : 82{,}3$.

23. Делимость чисел. *Делителем* данного натурального числа называется натуральное число, на которое заданное число делится нацело. Например, число 12 имеет делители $\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 12\}$, число 8 имеет делители $\{1; 2; 4; 8\}$. Общими делителями для чисел 12 и 8 являются $\{1; 2; 4\}$.

Наибольшим общим делителем чисел a и b называется наибольший из их общих делителей, он обозначается $D(a, b)$. Например, наибольший общий делитель чисел 12 и 8 есть $D(12; 8) = 4$.

Взаимно простыми называются числа a и b, если $D(a,b) = 1$. Число называется *простым*, если оно имеет только два делителя — себя и единицу. Вот несколько первых простых чисел: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; ...

Кратным числа a называется любое число, для которого a есть делитель. Пересечение множеств чисел, кратных числу a и кратных числу b, есть множество чисел — общих кратных чисел a и b. Наименьшее из чисел этого множества называется *наименьшим общим кратным* чисел a и b, оно обозначается $K(a, b)$. Например, числа, кратные 8, образуют множество $\{8; 16; 24; 32; 40; \ldots\}$, числа, кратные 12, образуют множество $\{12; 24; 36; 48; \ldots\}$. Множество общих кратных чисел 8 и 12 есть пересечение указанных множеств и равно $\{24; 48; \ldots\}$, так что $K(8; 12) = 24$.

24. Признаки делимости. Если каждое слагаемое суммы делится нацело на число a, то и вся сумма делится нацело на a. Например, $777 + 49$ делится на 7, так как каждое слагаемое делится на 7.

Произведение делится на число a, если хотя бы один из множителей делится на a. Например, произведение $36 \cdot 14 \cdot 17$ делится на 7, так как множитель 14 делится на 7.

Признак делимости на 2. Если число оканчивается четной цифрой, то оно делится на 2. Четные цифры: 0; 2; 4; 6; 8.

Признак делимости на 3. Если сумма цифр числа делится на 3, то число делится на 3. Например, число 25 803 714 делится на 3, так как сумма его цифр $2 + 5 + 8 + 0 + 3 + 7 + 1 + 4 = 30$ делится на 3, а число 76 458 103 не делится на 3, так как сумма его цифр $7 + 6 + 4 + 5 + 8 + 1 + 0 + 3 = 34$ не делится на 3.

Признак делимости на 5. Если число оканчивается цифрой 5 или 0, то оно делится на 5.

Каждое число единственным образом раскладывается в произведение простых чисел. Это разложение проводят, последовательно деля заданное число и его последовательные частные на простые числа, начиная с первого: на 2, на 3, на 5, на 7 и т. д.

Например,

4464	2	следовательно,
2232	2	$4464 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 31$
1116	2	
558	2	
279	3	
93	3	
31	31	

315	3	следовательно,
105	3	$315\,000 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 10^3 =$
35	5	$= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot 7$.
7	7	

После того как числа разложены на простые множители, легко найти их наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Для нахождения наибольшего общего делителя берут все общие простые делители в наименьшей степени. Например, по приведенным выше разложениям $D(4464;\ 315\,000) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$. Для нахождения наименьшего общего кратного достаточно взять одно из чисел и домножить его на недостающие множители. Например, $K(4464;\ 315\,000) = 315\,000 \cdot 2 \cdot$ $\cdot 31 = 19\,530\,000$.

Упражнения

Найдите D и K для пар:

375. 36 и 48. **376.** 40 и 15. **377.** 135 и 225. **378.** 108 и 144.
379. 84 000 и 66 600. **380.** 14 400 и 81 000.

25. Обыкновенные дроби. *Обыкновенной дробью* или *рациональным* числом называется число вида $\frac{m}{n}$, где n — натуральное число, а m — целое число. Число n называется *знаменателем* дроби, а число m — *числителем*.

Из двух дробей с одинаковыми знаменателями больше та, у которой больше числитель. Чтобы сложить (вычесть) дроби с одинаковыми знаменателями, складывают (вычитают) их числители, а знаменатель подписывают общий. Например;

$$\frac{2}{7} < \frac{5}{7};\quad \frac{-9}{5} < \frac{1}{5};\quad \frac{5}{13} + \frac{3}{13} = \frac{5+3}{13} = \frac{8}{13};$$

$$\frac{11}{7} - \frac{5}{7} = \frac{11-5}{7} = \frac{6}{7}.$$

Основное свойство дроби: дробь *не меняется*, если ее числитель и знаменатель умножить или разделить на одно и то же число: $\frac{4}{6} = \frac{8}{12} =$ $= \frac{2}{3} = \ldots$ Этим пользуются при сравнении, сложении и вычитании дробей с разными знаменателями и для упрощения дробей. Прежде чем производить с такими дробями действия, находят наименьшее общее кратное их знаменателей — *общий знаменатель*. Числитель и знаменатель каждой дроби умножают на такое число — дополнительный множитель, чтобы знаменатель стал равен общему знаменателю. После «приведения дробей к общему знаменателю» действия с ними производят так, как это было описано выше.

Например, а) что больше: $\frac{2}{3}$ или $\frac{4}{5}$?

$$K(3;\ 5) = 15;\quad \frac{2}{3} = \frac{10}{15};\quad \frac{4}{5} = \frac{12}{15};\quad \frac{10}{15} < \frac{12}{15} \Rightarrow \frac{2}{3} < \frac{4}{5};$$

б) $\frac{1}{2} + \frac{3}{7} = \frac{7}{14} + \frac{6}{14} = \frac{13}{14}$;

в) $\frac{5}{12} - \frac{2}{9} = \frac{15-8}{36} = \frac{7}{36}$.

Если слагаемые больше единицы, то удобнее выделить целые части и их складывать (вычитать) отдельно. Например,

$$\frac{13}{6}+\frac{5}{4}=2+\frac{1}{6}+1+\frac{1}{4}=3+\frac{2+3}{12}=3\,\frac{5}{12}.$$

Произведением двух обыкновенных дробей называется дробь, числитель которой равен произведению числителей множителей, а знаменатель — произведению знаменателей. Например,

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{7}=\frac{3\cdot 5}{2\cdot 7}=\frac{15}{14}.$$

Частное двух обыкновенных дробей определяется как произведение делимого на дробь, обратную делителю. Например,

$$\frac{7}{3}:\frac{2}{5}=\frac{7}{3}\cdot\frac{5}{2}=\frac{35}{6}.$$

Если при умножении (делении) в числителе и знаменателе окажутся общие делители, то на них надо сократить. Например,

$$\frac{12}{35}:\frac{36}{25}=\frac{12\ \ 25}{35\cdot 36}=\frac{1\cdot 5}{7\cdot 3}=\frac{5}{21}.$$

Если действия производят в выражении, содержащем как десятичные, так и обыкновенные дроби, то или все дроби обращают в десятичные, или все дроби обращают в обыкновенные (в зависимости от конкретного примера). Например,

а) что больше: 0,37 или 1/3?

$$0{,}37=\frac{37}{100}=\frac{111}{300};\quad \frac{1}{3}=\frac{100}{300}\Rightarrow 0{,}37>\frac{1}{3};$$

б) $0{,}3+\frac{5}{6}=\frac{3}{10}+\frac{5}{6}=\frac{9}{30}+\frac{25}{30}=\frac{34}{30}=\frac{17}{15}=1\frac{2}{15};$

в) $0{,}63+\frac{7}{20}=0{,}63+\frac{28}{100}=0{,}63+0{,}28=0{,}91;$

г) $0{,}72:\frac{27}{20}=\frac{72}{100}\cdot\frac{20}{27}=\frac{72\cdot 20}{100\cdot 27}=\frac{8\cdot 1}{5\cdot 3}=\frac{8}{15};$

д) $2:\frac{4}{7}=2\cdot\frac{7}{4}=2\cdot 1{,}75=3{,}5.$

При обращении обыкновенной дроби в десятичную «делением уголком» может случиться, что ни один из остатков не обращается в нуль. Тогда получается периодическая десятичная дробь, у которой одна или несколько цифр все время будет повторяться в одном и том же порядке. Например, при обращении 2/3 в десятичную дробь получается периодическая дробь, 0,6666666... Повторяющаяся группа цифр называется *периодом* и обычно записывается в скобках. Пишут:

0,(6) вместо 0,666666...

2,7(43) вместо 2,743434343...

Чтобы представить число α, заданное в виде периодической десятичной дроби, в виде обыкновенной удобно поступать следующим образом. Пусть $\alpha = 2{,}7(43)$. Тогда $1000\alpha = 2743{,}(43)$ и $10\alpha = 27{,}(43)$. Вычитая эти равенства почленно, получаем: $990\alpha = 2716$ и, следовательно, $\alpha = 2716/990$. Ясно, что и в общем случае любая периодическая десятичная дробь обращается в обыкновенную, т. е. представляет рациональное число. Непериодические десятичные дроби представляют иррациональные числа. Примеры иррациональных чисел: $\sqrt{2}$ или 0, 12122122212222... (после k-й единицы стоит k двоек — это непериодическая десятичная дробь и потому представляет иррациональное число). Объединение множества рациональных чисел и множества иррациональных чисел есть множество действительных чисел R — их мы будем называть просто числами.

Упражнения

Сравните числа:

381. $\frac{2}{7}$ и $\frac{4}{21}$. **382.** $\frac{3}{11}$ и $\frac{2}{9}$. **383.** $0{,}04$ и $\frac{2}{45}$.

Выполните действия:

384. $\frac{3}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$. **385.** $0{,}24 \cdot \frac{4}{9}$. **386.** $3{,}211 + \frac{1}{5} - \frac{1}{8}$.

387. $0{,}014 : \frac{21}{11}$. **388.** $\frac{5}{11} : 0{,}31$.

Представьте заданные числа в виде десятичной или обыкновенной дроби:

389. $\frac{2}{11}$. **390.** $\frac{5}{12}$. **391.** $0{,}(23)$. **392.** $5{,}3(71)$.

26. Степень. *Степенью* числа a с натуральным показателем n называется произведение n множителей, каждый из которых равен a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n \text{ множителей}}.$$

Число a называется *основанием* степени, n — *показателем* степени, a^n — *степенью*. По определению полагают, что $a^1 = a$ и $a^0 = 1$ при $a \neq 0$. Если целое число $n < 0$, то согласно определению $a^n = 1 : a^{-n}$ при $a \neq 0$. Если $n > 1$ — натуральное число и $a > 0$, то степенью $a^{\frac{1}{n}}$ называется такое число $b > 0$, что $b^n = a$. Это число b называется еще *арифметическим корнем* степени n из числа a и обозначается $\sqrt[n]{a}$. В математической литературе при нечетных n допускаются значения $a \leqslant 0$. При этом полагают, что $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$. Для любого рационального числа $x = \frac{m}{n}$, где n — натуральное, m — целое, $D(n, m) = 1$, по определению полагают:

$$a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},\ n \in N,\ m \in Z,\ D(n,\ m) = 1.$$

При этом считают, что $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$ при четном n.
Свойства степени: для любых чисел p и q

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q};\quad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p};\quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q};$$

$$(ab)^p = a^p \cdot b^p;\quad (a^p)^q = a^{pq} = (a^q)^p.$$

Например, $\sqrt[4]{16} = 2$; $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$; $2^4 \cdot 2^6 = 2^{10} = 1024$; $32^2 = (2^5)^2 = 2^{10} = 1024$; $3^5 : 3^4 = 3^{5-4} = 3^1 = 3$; $\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\right)^5 = \left(\sqrt{\frac{6}{3}}\right)^5 = (\sqrt{2})^5 = 4\sqrt{2}$.

Упражнения

Выполнить действия:

393. $\sqrt[3]{27^2}$. **394.** $\sqrt{4^5}$. **395.** $2^3 \cdot \sqrt{2} \cdot 2^2 \cdot \sqrt{2}$. **396.** $8 \cdot 2^2 : 2^5$.

Запишите при помощи дробных и отрицательных показателей:

397. $\frac{1}{x^2}$. **398.** $\sqrt{x^3}$. **399.** $\frac{1}{\sqrt{a}}$. **400.** $\sqrt[6]{2^5}$.

Запишите при помощи радикалов:

401. $x^{-\frac{2}{3}}$. **402** $x^{\frac{1}{2}}$. **403.** $a^{-\frac{1}{4}}$.

Запишите как степень простого числа:

404. $4^5 \cdot 8^{-3} : 16$. **405.** $\left(\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\right)^4$. **406.** $\left(3\sqrt[3]{9}\right)^{\frac{2}{5}}$.

Вынесите множитель из под корня:

407. $\sqrt{a^5}$. **408.** $\sqrt{20a^3}$. **409.** $\sqrt[3]{8x^4}$.

27. Порядок выполнения арифметических действий. Если в выражении без скобок подряд стоят несколько чисел или алгебраических выражений, связанных действиями сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень, то действия производятся в следующем порядке: 1) возведение в степень, 2) умножение и деление (в порядке записи — слева направо), 3) сложение и вычитание (в порядке записи — слева направо). Вычислим, например, $36 : 3 - 2 \cdot 4 + 2^3 \cdot 5 :$

$: 4 \cdot 7$ Сначала находим число $a = 2^3 = 8$. Затем выполняем действия умножения и деления: $b = 36 : 3 = 12$, $c = 2 \cdot 4 = 8$, $d = a \cdot 5 : 4 \cdot 7 = 8 \cdot 5 : 4 \cdot 7 = 40 : 4 \cdot 7 = 10 \cdot 7 = 70$. Затем выполняем сложение и вычитание: $b - c + d = 12 - 8 + 70 = 74$. Заметим, что при вычислении d было бы удобнее переставить умножение на 5 и деление на 4, т. е. $d = 2^3 \cdot 5 : 4 \cdot 7 = 2^3 : 2^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 10 \cdot 7 = 70$.

Если в выражении стоят скобки, то сначала выполняются действия, указанные в скобках. Например, вычислим число $a = (26 - 19) \cdot (46 - 39)$. Сначала вычисляем число $b = 26 - 19 = 7$ и число $c = 46 - 39 = 7$, после чего находим произведение $a = bc = 7 \cdot 7 = 49$.

Разберем еще пример:

$$a = \left(2 \cdot 3 - \frac{15}{5}\right)(6 \cdot 5 - 3^3) - \left(\frac{5 + 2 \cdot 8}{7} + 1\right) : (5 - 3).$$

Сначала производим действия, указанные в скобках, т. е. находим числа

$$b = 2 \cdot 3 - \frac{15}{5} = 6 - 3 = 3; \quad c = 6 \cdot 5 - 3^3 = 30 - 27 = 3;$$

$$d = \frac{5 + 2 \cdot 8}{7} = \frac{5 + 16}{7} = \frac{21}{7} = 3; \quad e = d + 1 = 3 + 1 = 4;$$

$$g = 5 - 3 = 2.$$

После этого находим значение выражения, т. е. число

$$a = bc - e : g = 3 \cdot 3 - 4 : 2 = 9 - 2 = 7.$$

Вычисление можно несколько видоизменить, числа b, c, e и g можно находить в любом порядке. При вычислении b можно было поступить так:

$$b = 2 \cdot 3 - \frac{15}{5} = 3\left(2 - \frac{5}{5}\right) = 3(2 - 1) = 3 \cdot 1 = 3.$$

Если перед скобками стоит знак плюс, то скобки можно опустить. Например,

$$3{,}7 + \left(\frac{5}{9} : \frac{2}{3} - \frac{5}{4} \cdot 2\right) = \frac{37}{10} + \frac{5 \cdot 3}{9 \cdot 2} - \frac{5 \cdot 2}{4 \cdot 1} =$$

$$= \frac{37}{10} + \frac{5}{6} - \frac{5}{2} = \frac{111 + 25 - 75}{30} = \frac{61}{30} = 2\,\frac{1}{30}.$$

Если перед скобками стоит знак минус, то скобки тоже можно опустить, изменив на противоположный знак каждого слагаемого, заключенного в скобках. Например,

$$\frac{13}{3} - \left(7{,}2 : \frac{9}{5} - 2{,}1 \cdot \frac{2}{7}\right) = 4 + \frac{1}{3} - \frac{72 \cdot 5}{10 \cdot 9} + \frac{21 \cdot 2}{10 \cdot 7} =$$

$$= 4 + \frac{1}{3} - \frac{4}{1} + \frac{3}{5} = \frac{5 + 9}{15} = \frac{14}{15}.$$

Упражнения

Выполните действия:

410. $3 \cdot 2 + 14 : (7 - 3 \cdot 2)$. **411.** $3 + 4 : 2^3 \cdot 6 - \left(\frac{5+7}{2+4} : 2 + 1\right)$.

412. $5\left(\frac{7}{3} - 2 - 0{,}3 \cdot \frac{10}{9}\right)$. **413.** $3 \cdot \sqrt{2^3} \cdot \sqrt{2} : 0{,}12$.

414. $(0{,}03)^3 : \frac{9}{5 \cdot 10^4} + 0{,}05$.

28. Пропорции и проценты. *Пропорцией* называется равенство вида $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, где a, b, c, d — числа, причем $b \neq 0$ и $d \neq 0$. Эти числа называются членами пропорции: a и d — крайними, b и c — средними.

Основное свойство пропорции: произведение крайних членов пропорции равно произведению ее средних членов, т. е. $ad = bc$.

Процентом называется одна сотая часть числа. Для определения p процентов от числа N используют «формулу процентов»:

$$A = \frac{N}{100} \cdot p.$$

Пользуясь этой формулой, можно решить три задачи: 1) задано число N и его процент p — найти A; 2) задано число N и число A — сколько процентов p от числа N составляет A; 3) известно, что число A составляет $p\%$ от числа N — найти число N.

Покажем это на следующих примерах:

1) Найти 83% от числа 72. Здесь $N = 72$, $p = 83$. Подставляя эти значения в формулу, имеем

$$A = \frac{72}{100} \cdot 83 = 59{,}76.$$

2) Число 91 составляет 65% от некоторого числа. Найти это число. Здесь $A = 91$, $p = 65$. Подставляя эти значения в формулу, получаем

$$91 = \frac{N}{100} \cdot 65, \text{ откуда } N = \frac{91 \cdot 100}{65} = 140.$$

29. Координатная прямая. Модуль числа. При изображении чисел на координатной прямой выбирают на прямой две точки — 0 и 1 (они изображают число 0 и число 1). Обычно прямую располагают горизонтально, а точку 1 — правее точки 0. Направление от 0 к 1 называется положительным, а противоположное направление — отрицательным. Отрезок с концами 0 и 1 считается единичным. Откладывая последовательно в положительном направлении на прямой единичный отрезок, получаем точки 2; 3; 4; ..., которые изображают числа +2; +3; +4; ...

(рис. 80). Не говорят: «точка, изображающая число $+3$», а говорят короче: «точка $+3$».

Точка прямой, симметричная точке $+3$, относительно точки 0, изображает число -3, ее называют «точкой -3». Вообще точка, симметрич-

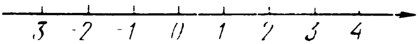


Рис. 80

Рис. 81

ная точке k относительно 0, изображает число $-k$ и называется «точка $-k$» (рис. 80). Точки $-k$ и k называются противоположными.

Аналогично изображаются и любые рациональные числа. Например, чтобы изобразить число $-11/13$, делят единичный отрезок на 13 конгруэнтных частей и 11 таких частей откладывают в отрицательном направлении от 0. Полученная точка (рис. 81) изображает число $-11/13$ и называется «точка $-11/13$».

Кроме рациональных чисел точки прямой изображают и иррациональные числа, т.е. числа, которые не могут быть записаны в виде дроби. Например, число $\sqrt{2}$ выражает длину диагонали квадрата, сторона которого равна единичному отрезку. Построив на единичном отрезке квадрат и проведя окружность радиуса OA до пересечения с координатной прямой, получаем на прямой «точку $\sqrt{2}$» (рис. 82).

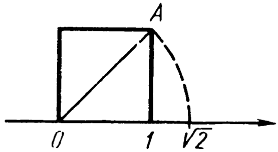


Рис. 82

Для любого иррационального числа можно найти десятичное приближение с любой точностью.

Прямая, каждая точка которой изображает определенное число, называется *координатной прямой*. Число a, которое изображается точкой A, называется *координатой* этой точки A, пишут: $A = M(a)$. Точка a и $-a$ одинаково удалены от точки 0. Это расстояние называется *модулем числа* a и числа $-a$ и обозначается $|a|$ и $|-a|$, т. е. $|a| = |-a|$. Числа a и $-a$ называются противоположными. Для модуля числа x справедливо равенство

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Для любых двух чисел a и b

$$|ab| = |a||b|; \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}; \quad |a+b| \leqslant |a| + |b|.$$

Из двух разных чисел одно больше и на числовой прямой оно расположено правее. Число 0 делит все числа на положительные, которые расположены на координатной прямой справа от 0, и отрицательные, которые расположены на координатной прямой слева от 0. Любое положительное число больше любого отрицательного.

30. Тождества. Тождественные преобразования. Выражения, содержащие переменные, принимают различные значения в зависимости от значений переменных. Значения выражений (содержащих переменные) при одних и тех же значениях переменных называются *соответственными*. Например, для выражений $x^2 + 3x - 1$ и $2x + 5$ при $x = 0$ соответственными значениями будут -1 и 5, а при $x = 1$ -3 и 7.

Два выражения называются *тождественно равными*, если все их соответственные значения равны. Например, $(x+1)^2$ и $x(x+2)+1$; $\frac{1}{x}$ и $\frac{x+1}{x}-1$. Но выражение $x+2$ не тождественно равно выражению $\frac{x^2+2x}{x}$, так как первое имеет смысл при любых значениях переменной, а второе — при $x \neq 0$. Про эти выражения можно сказать, что они тождественно равны при $x \neq 0$. Если же никаких оговорок не сделано, то принято считать, что тождественные выражения определены при одних и тех же значениях переменной.

Замена одного выражения другим, тождественно равным ему, называется *тождественным преобразованием* выражения.

Тождеством называется равенство двух тождественных выражений.

Приведем пример тождественных преобразований:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = (a+b)a + (a+b)b =$$
$$= a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Таким образом, доказано тождество сокращенного умножения:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Аналогично доказываются и остальные тождества сокращенного умножения:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2;$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3;$$
$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$$

Упражнения

Выполнив тождественные преобразования, упростите выражения:

415. $\dfrac{(a-x)(a^2+ax+x^2)+x^3}{(a+b)^3-3ab(a+b)-b^3}$.

416. $\dfrac{(a-b)(a+b)-(a-b^2)}{a^2-2a+1}$.

417. $\dfrac{(a^2-b^2)(a^2+ab+b^2)}{b^3-\dfrac{a^3+b^3}{2}}$.

418. $\dfrac{(x-y)(x^3+y^3)}{x^2-xy+y^2}+y^2$.

31. Многочлены. Произведение числового множителя на какие-либо степени переменных называются *одночленом*. Числовой множитель называется *коэффициентом* одночлена. Так $a^2\cdot(-b)^2$ — одночлен, $5\cdot(ab)^2\cdot ab^3$ — одночлен с коэффициентом 5.

В одночлене *стандартного* вида все одинаковые множители объединены и заменены соответствующими степенями. Сумма показателей степеней переменных называется *степенью одночлена*.

Пример. Приведем одночлен к стандартному виду

$$3(ab)^2\cdot 5a\cdot b^3\cdot(-a)\cdot(-b)^2=-15a^{2+1+1}\cdot b^{2+3+2}=-15a^4b^7.$$

Получили одночлен с коэффициентом —15, его степень равна $7+4=$ $=11$.

Многочленом называется сумма одночленов. Многочлен обычно располагают по убывающим или возрастающим степеням переменной:

$$5x^2-3x^3+7x^4,\quad x^5-2x^4+3x^2-x+6 \text{ и т. п.}$$

Выражения, представляющие собой сумму, разность и произведение многочленов, называются *целыми алгебраическими выражениями*. После тождественных преобразований они приводятся к многочленам.

Действия над многочленами подчиняются тем же правилам,что и действия с числами: произведение одночлена на многочлен равно сумме произведений одночлена на каждый член многочлена:

$$3ax(a^2+2ax+3x^2)=3a^3x+6a^2x^2+9ax^3.$$

Произведение двух многочленов равно сумме произведений каждого члена одного многочлена на каждый член второго многочлена:

$$(x^2-3x+1)(x-2)=x^2\cdot x+x^2\cdot(-2)+(-3x)\cdot x+$$
$$+(-3x)\cdot(-2)+1\cdot x+1\cdot(-2)=x^3-2x^2-$$
$$-3x^2+6x+x-2=x^3-5x^2+7x-2.$$

Разложить многочлен на множители — значит представить его в виде произведения многочленов или одночлена на многочлены. При этом используются следующие приемы:

1) Вынесение общего множителя:

$$9ax^2-6a^2x=(3ax)\cdot(3x)-(3ax)\cdot(2a)=3ax(3x-2a).$$

2) Группировка:

$$x^2-7x+6=x^2-x-6x+6=x(x-1)-6(x-1)=$$
$$=(x-1)\cdot(x-6).$$

3) Разложение квадратного трехчлена: ax^2+ $+bx+c$: если x_1 и x_2 — его корни, то

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Например, квадратный трехчлен x^2-6x+8 имеет корни $x=2$ и $x=4$, следовательно, $x^2-6x+8=(x-2)\cdot(x-4)$; квадратный трехчлен $3x^2 - 5x - 2$ имеет корни $x = 2$ и $x = -\frac{1}{3}$ и потому $3x^2 - 5x - 2 = 3(x - 2)(x + \frac{1}{3})$.

Корнем многочлена называется значение переменной, при котором многочлен принимает значение, равное нулю.

Упражнения

Разложите на множители многочлены:

419. $ax^2 + a^2x$. **420.** $3y^2 - 6y$. **421.** $b^2 + 2b + 1$.
422. $x^3 - x^2 - x + 1$.

32. Уравнения и неравенства. Высказывания бывают истинные и ложные. Например, $2 \cdot 2 = 4$ и $3 < 5$ есть истинные высказывания, а $3 < 1$ и $7 - 5 = 0$ — ложные.

Если из высказывания A следует высказывание B, то пишут: $A \Rightarrow B$, читается: «из A следует B», $\Rightarrow$ — знак логического следования.

Если из высказывания A следует высказывание B, а из высказывания B следует высказывание A, то эти высказывания называются *равносильными* и пишут: $A \Leftrightarrow B$, $\Leftrightarrow$ — знак равносильности, который читается: «равносильно».

Если в предложение с переменной подставить ее значения, то при одних значениях получится истинное высказывание, а при других — ложное. Например предложение с переменной $(x - 1)^2 = 4$ будет истинным высказыванием при $x = -1$ и $x = 3$, так как $(-2)^2 = 4$ и $2^2 = 4$, а при подстановке остальных значений переменной x получим ложные высказывания. Предложение с переменной $x < 3$ при подстановке значения $x = 2$ дает истинное высказывание, а при $x = 5$ — ложное.

Равенство с переменной называется *уравнением*, если нужно найти значения переменной, при которых это равенство истинно. Примеры уравнений: $3x - 6 = 0$, $x^2 - 6x + 8 = 0$.

Корнем или *решением уравнения* называется значение переменной, при подстановке которого в уравнение получается истинное высказывание. Например, 2 есть корень уравнения $3x - 6 = 0$, так как $3 \cdot 2 - 6 = 0$; 4 есть корень уравнения $3x^2 - 6x + 8 = 0$, так как $4^2 - 6 \cdot 4 + 8 = 0$

Решением неравенства называется значение переменной, при котором неравенство истинно. Например, для неравенства $x + 5 < 0$ одним из решений будет число -6, так как $-6 + 5 < 0$. Все решения неравенства составляют множество его решений.

Решить неравенство (или уравнение) — значит найти множество его решений. Так, для уравнения $3x - 6 = 0$ множество решений есть $\{2\}$; для неравенства $x + 5 < 0$ множество решений есть бесконечный промежуток $]-\infty; -5[$.

Уравнения (неравенства) называются *равносильными*, если множества их решений равны. Например, уравнения $3x - 6 = 0$ и $(x - 2)^2 = 0$ равносильны, так как множество их решений есть $\{2\}$.

При решении уравнений и неравенств пользуются следующими основными правилами и приемами:

1) К обеим частям уравнения (неравенства) можно прибавить одно и то же число — при этом получается равносильное уравнение (неравенство). Отсюда следует, что любые слагаемые (как числовые, так и буквенные) можно переносить из одной части уравнения (неравенства) в другую с переменой знака. Так, уравнение вида $x + a = 0$ можно решить, прибавляя к обеим его частям число $-a$:

$$x + a = 0 \Leftrightarrow x = -a.$$

2а) Обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю. Например, $3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$.

2б) Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же положительное число. Например, $\frac{2+x}{3} \geqslant 1 \Leftrightarrow 2 + x \geqslant 3$.

2в) Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, то смысл неравенства нужно изменить на противоположный. Например, $-x > 1 \Leftrightarrow x < -1$.

При помощи этих правил решается любое линейное уравнение (т. е. уравнение вида $ax + b = 0$, $a \neq 0$) и линейное неравенство (т. е. неравенство вида $ax + b < 0$ или $ax + b > 0$, $a \neq 0$).

Например

$3x - 6 = 0 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$, ответ: $\{2\}$;

$$9 - 5x > 0 \Leftrightarrow -5x > -9 \Leftrightarrow x < \frac{9}{5}, \text{ ответ: }]-\infty;\ \frac{9}{5}[.$$

Нередко пользуются и такими свойствами неравенств:

3) Транзитивность: $a < b$ и $b < c \Rightarrow a < c$.

4) Правило сложения (вычитания) неравенств:

$$+\begin{array}{c} a < b \\ c < d \\ \hline a + c < b + d \end{array}, \qquad -\begin{array}{c} a < b \\ d > c \\ \hline a - d < b - c \end{array},$$

т. е. неравенства одного смысла можно складывать, а противоположного — вычитать.

5) Правило умножения неравенств:

$$\left.\begin{array}{l} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{array}\right\} \Rightarrow ac < bd \text{ и следствие } 0 < a < b \Rightarrow a^n < b^n \text{ (для любого } n > 0).$$

Если ставится задача: найти все общие решения двух или нескольких неравенств, то говорят, что требуется решить *систему неравенств*. Множество решений системы неравенств есть пересечение множеств решений, входящих в нее неравенств. Например,

$$\begin{cases} \frac{x-3}{2} > 2x \\ 0 > \frac{4x-1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 > 4x \\ 4x - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x > 3 \\ 4x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x < \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x < -1.$$

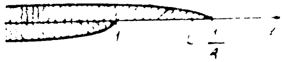


Рис. 83

Таким образом, множеством решений этой системы является промежуток $]-\infty; -1[$ (рис. 83).

Решением уравнения с двумя переменными называется упорядоченная пара значений переменных, обращающая это уравнение в истинное равенство. Например, для уравнения $x^2 + y^2 = 25$ решением будет пара чисел $x = 3$, $y = 4$. Это решение коротко записывают (3; 4): на первом месте x, на втором — y. Для этого уравнения решениями будут также пары (5; 0), (— 4; 3) и еще множество других пар.

Если ставится задача найти все общие решения для нескольких уравнений от нескольких переменных, то говорят, что требуется решить систему уравнений.

Решением системы уравнений с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая каждое из уравнений системы в истинное равенство. Решить систему уравнений — значит найти множество ее решений.

Система двух линейных уравнений с двумя переменными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

может иметь:

а) одно решение:

$$\begin{cases} 3x + y = 5, \\ x - y = -1, \end{cases} \quad \text{ответ: } \{(1;\ 2)\};$$

б) бесконечно много решений:

$$\begin{cases} 3x - y = 1, \\ -6x + 2y = -2, \end{cases} \quad \text{ответ: } \{(x;\ 3x - 1)\}, \text{ где } x \text{ — любое число;}$$

в) ни одного решения:

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ -2x + 2y = 3. \end{cases}$$

При решении систем линейных уравнений применяются способы:

1. Сложение (или исключение):

$$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 7x - 2y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 2y = 22 \\ 7x - 2y = 17 \end{cases}$$

$$13x = 39 \Leftrightarrow x = 3;$$

$$3 \cdot 3 + y = 11 \Leftrightarrow y = 2.$$

Ответ: $\{(3;\ 2)\}$.

2. Подстановка:

$$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 7x - 2y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 11 - 3x \\ 7x - 2y = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 7x - 2\cdot(11 - 3x) = 17; \\ 13x - 22 = 17; \quad x = 3; \\ y = 11 - 3 \cdot 3 = 2. \end{array}$$

Ответ: $\{(3;\ 2)\}$.

3. Графический способ состоит в построении прямых, изображающих уравнения системы, тогда координаты точки их пересечения являются решением системы (рис. 84).

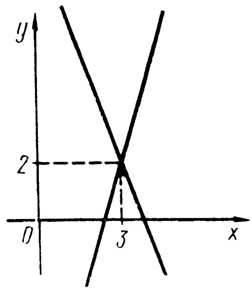


Рис. 84

Квадратные уравнения. Уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0,$$

где a, b, и c — числа, называется *квадратным уравнением*. *Корни* квадратного уравнения могут быть найдены по формулам:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

где $D = b^2 - 4ac$ называется *дискриминантом* квадратного уравнения. Если $a = 1$ и b — четное, то для решения удобнее формула

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}.$$

Если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два корня, если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет один корень, если $D < 0$, то квадратное уравнение действительных корней не имеет.

Теорема Виета. *Сумма корней квадратного уравнения равна* $-b/a$, *произведение его корней равно* c/a: $x_1 + x_2 = -b/a$, $x_1x_2 = c/a$. Верно и обратное утверждение, а именно: если числа x_1 и x_2 удовлетворяют этим равенствам, то они есть корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Пример. Разложить на множители квадратный трехчлен

$$2x^2 + 5x + 3.$$

Решение:

$$2x^2 + 5x + 3 = 0, \quad x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4},$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -\frac{3}{2}.$$

Следовательно, имеем разложение: $2x^2 + 5x + 3 = 2(x + 1)\left(x + \frac{3}{2}\right) = (x + 1)(2x + 3)$.

Уравнения степени выше первой можно решать или подбором, или введением новой переменной, или при помощи разложения на множители, или графически (см. функции и графики).

Примеры: 1) Решить уравнение $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$. Разложим многочлен, стоящий в правой части, на множители:

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = x^2(x-1) - 4(x-1) = (x-1)(x^2-4) =$$
$$= (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+2).$$

Таким образом, уравнение приведено к виду $(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+2) = 0$ и множество его решений $\{1;\ 2;\ -2\}$.

2) Решить уравнение $(x^2-5)^2 - 3(x^2-5) - 4 = 0$.

Обозначим $x^2 - 5 = t$, тогда уравнение принимает вид $t^2 - 3t - 4 = 0$. Следовательно,

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2}, \quad t_1 = 4, \quad t_2 = -1;$$

$$x^2 - 5 = 4, \quad x^2 = 9, \quad x_{1,2} = \pm 3;$$

$$x^2 - 5 = -1, \quad x^2 = 4, \quad x_{3,4} = \pm 2.$$

Ответ: $\{-3;\ -2;\ 2;\ 3\}$.

Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$ называется *биквадратным* и решается введением новой переменной $t = x^2$. Например,

$$3x^4 + x^2 - 4 = 0, \quad x^2 = t, \quad 3t^2 + t - 4 = 0,$$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{6}, \quad t_1 = 1, \quad t_2 = -\frac{4}{3},$$

$x^2 = 1$, $x_{1,2} = \pm 1$; $x^2 = -\frac{4}{3}$ —полученное уравнение решений не имеет. Множество решений биквадратного уравнения: $\{-1;\ 1\}$.

Упражнения

Решите линейные уравнения и неравенства:

423. $2x + 3 = 3x + 1$. **424.** $3 - 2x = 5$.

425. $1 - 3x < 7$. **426.** $1 + x > 2x - 4$.

Решите системы неравенств:

427. $\begin{cases} 2x < 5, \\ 1 - x > 3. \end{cases}$ **428.** $\begin{cases} y + 1 > 2y + 1, \\ 3y - 1 < y - 3. \end{cases}$

429. $-1 \leqslant \frac{x+1}{3} < 1$.

Решите системы линейных уравнений:

430. $\begin{cases} y = x + 1, \\ 2x + 3y = 8. \end{cases}$ **431.** $\begin{cases} 2x + 3y = -1, \\ 5x - 2y = 7. \end{cases}$

432. $\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ 4x + 6y = -1. \end{cases}$ **433.** $\begin{cases} x - 3y = 2, \\ 3x - 9y = 6. \end{cases}$

Решите квадратные уравнения:

434. $x^2 - 8x + 12 = 0$. **435.** $2y^2 + 3y + 1 = 0$.

Разложите на множители квадратные трехчлены:

436. $a^2 - 2a - 24$. **437.** $3x^2 - 7x + 2$.

33. Функции и графики. Многие алгебраические факты можно истолковать наглядно, если воспользоваться *методом координат* на плоскости.

Возьмем на плоскости точку O и проведем через нее две взаимно перпендикулярные координатные прямые, для которых точка O есть начало отсчета. Одна из них называется осью *абсцисс* или осью Ox (ее обычно располагают горизонтально, а положительное направление на ней берут слева направо), а вторая — осью *ординат* или осью Oy (ее обычно располагают вертикально, а положительное направление на ней берут снизу вверх). Эта пара осей координат называется *системой координат* на плоскости, а точка O — *началом координат* (рис. 85).

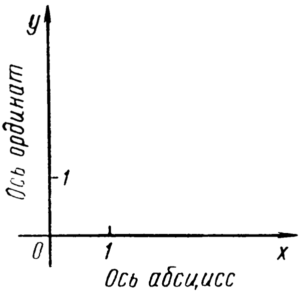


Рис. 85

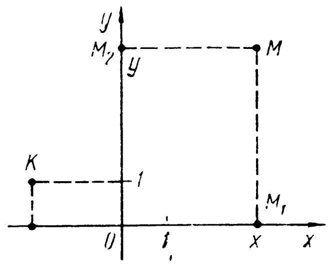


Рис. 86

Если на плоскости выбрана система координат, то положение точки на плоскости определяется парой чисел — *координатами* этой точки. Из точки M опускаются перпендикуляры на оси координат: $MM_1 \perp Ox$ и $MM_2 \perp Oy$. Координата точки M_1 называется *абсциссой* точки M или координатой x и обозначается буквой x (рис. 86). Координата точки M_2 называется *ординатой* точки M или координатой y и обозначается буквой y. Если точка M имеет координаты x и y, то это записывают так: $M(x; y)$ — число x ставят на первом месте, а число y — на втором. На рис. 86 имеем: $M(3; 4)$, $K = M(-2; 1)$.

Линейная функция $y = kx + b$. Графиком линейной функции служит *прямая* (рис. 87), пересекающая ось ординат в точке b, $k = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол между прямой и осью Ox. Коэффициенты в уравнении прямой имеют названия: b — *начальная ордината*, k — *угловой коэффициент*. Важный частный случай линейной функции при $b = 0$, $y = kx$ называется *прямой пропорциональностью*; график ее есть прямая, проходящая через начало координат (рис. 88).

С помощью графиков можно наглядно объяснить решения системы линейных уравнений и неравенств:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 > 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 > 0. \end{cases}$$

Каждое уравнение системы изображается на плоскости некоторой прямой (исключая особые — «вырожденные» случаи). Если эти пря-

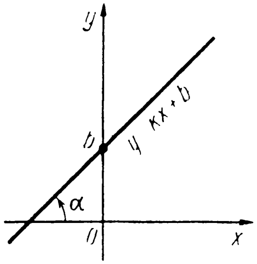


Рис. 87

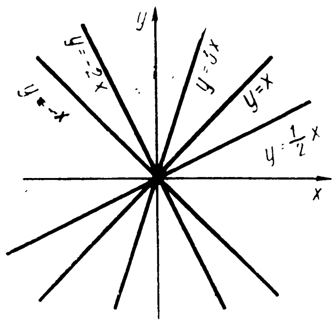


Рис. 88

мые пересекаются, то координаты точки пересечения есть решение системы. Поскольку две прямые пересекаются в одной точке, то в этом случае система имеет единственвое решение (рис. 89).

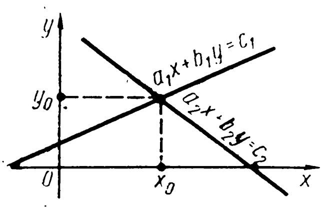


Рис. 89

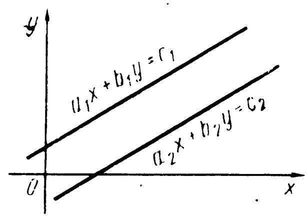


Рис. 90

Если прямые параллельны (рис. 90), то у них или нет общих точек, и система уравнений решения не имеет, или прямые совпадают (рис. 91), тогда система уравнений имеет бесконечно много решений — координаты каждой точки прямой есть решение этой системы уравнений.

Решение неравенства $ax + by \geqslant c$ есть *полуплоскость*, граница которой есть прямая $ax + by = c$ (на рис. 92 изображено неравенство $2x + 3y \leqslant 6$). Решение системы неравенств есть пересечение соответствующих полуплоскостей (на рис. 93 изображено решение системы неравенств $x + y \geqslant 2$ и $2x - y < 1$, при этом прямая $x + y = 2$ изображена сплошной линией, так как соответствующее неравенство нестрогое — точки этой прямой принадлежат решению, а прямая $2x - y = 1$ изображена пунктиром, так как соответствующее неравенство строгое, и точки этой прямой не принадлежат решению).

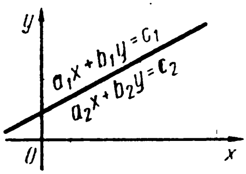


Рис. 91

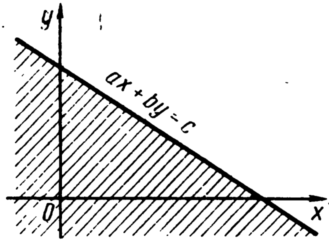


Рис. 92

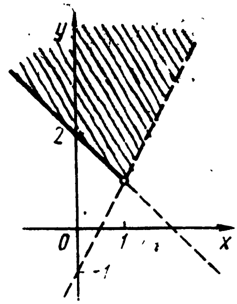


Рис. 93

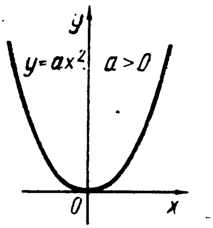


Рис. 94

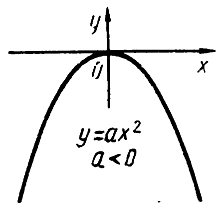


Рис. 95

Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Графиком этой квадратичной функции служит *парабола* $y = ax^2$, подвергнутая параллельному переносу $\overrightarrow{OM}$, где $M\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. Парабола $y = ax^2$ изображена на рис. 94 и 95, начало координат — *вершина*

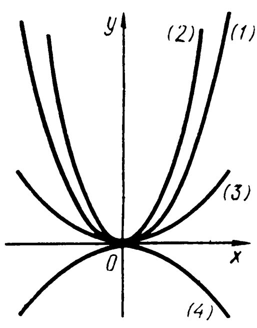


Рис. 96

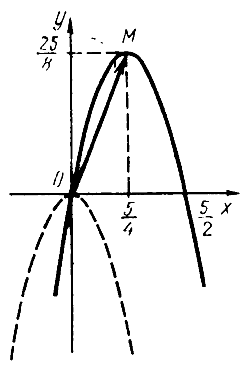


Рис. 97

параболы, ось ординат — ее ось симметрии. На рис. 96 изображены параболы: (1) $y = x^2$, (2) $y = 2x^2$, (3) $y = \frac{1}{3}x^2$, (4) $y = -\frac{x^2}{3}$; параболы (3) и (4) симметричны относительно оси абсцисс. На рис. 97 изображена парабола $y = 5x - 2x^2$, которая получена при параллельном переносе $\overrightarrow{OM}$ параболы $y = -2x^2$ (пунктир).

Решение неравенства $y > ax^2 + bx + c$ изображено на рис. 98, а неравенства $y \leqslant ax^2 + bx + c$ — на рис. 99. При решении квад-

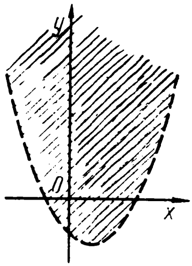


Рис. 98

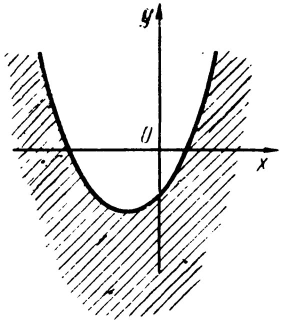


Рис. 99

ратного неравенства $ax^2 + bx + c > 0$ находят корни x_1 и x_2 квадратного трехчлена, представляют его в виде произведения $a(x - x_1)(x - x_2)$ и смотрят, какие из промежутков $]-\infty; x_1[$, $]x_1; x_2[$, $]x_2; \infty[$ (здесь $x_1 < x_2$) являются решением. Если квадратный трехчлен действительных корней не имеет, то неравенство или не имеет решения, или множество его решений есть все действительные числа.

Степенная функция задается формулой $y = ax^n$. На рис. 88 приведены графики степенных функций при $n = 1$ и разных a. На рис. 94 — 96 приведены графики степенных функция при $n = 2$ и

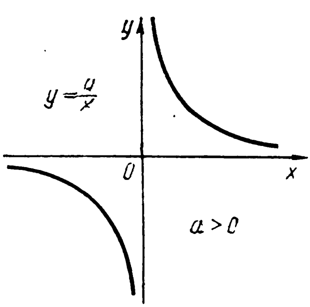


Рис. 100

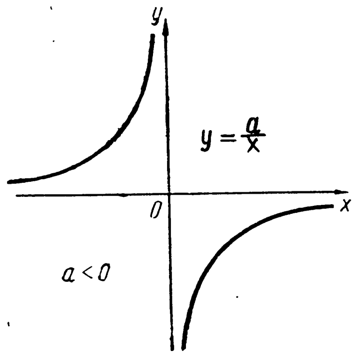


Рис. 101

разных a. На рис. 100 приведен график степенной функции для $n = -1$ при $a > 0$ и при $a < 0$ — на рис. 101. График этой функции называется *гиперболой*, а сама функция — *обратной пропорциональ-*

ностью. На рис. 102—104 при $a = 1$ приведены графики некоторых других степенных функций. При целых показателях n степенная функция четная, если n четное, и нечетная, если показатель n нечетный.

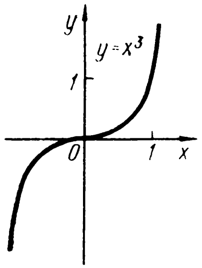


Рис. 102

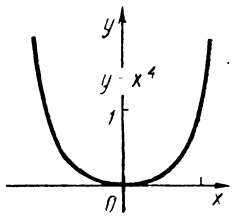


Рис. 103

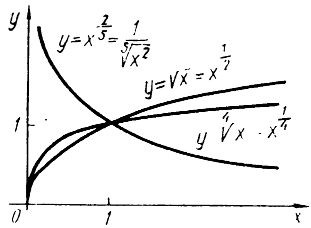


Рис. 104

На интервале $]0; \infty[$ степенная функция (при $a > 0$) возрастает при $n > 0$ и убывает при $n < 0$.

Упражнения

Постройте графики линейных функций:

438. $y = \frac{x}{2}$. **439.** $y = 3x$. **440.** $y = x + 1$.

441. $y = 3x - 2$. **442.** $y = 1 - 2x$. **443.** $y = 2 - \frac{x}{2}$.

Постройте прямые:

444. $2x + y = 5$. **445.** $x = 1$. **446.** $y = 3$.

Изобразите на координатной плоскости множества, являющиеся решением приведенных неравенств и систем неравенств:

447. $x + y > 1$. **448.** $2x - y \leqslant 3$. **449.** $x - 3y < 2$.

450. $y > -1$.

451. $\begin{cases} x - y \geqslant 2, \\ 2x + y < 1. \end{cases}$ **452.** $\begin{cases} 3x + 2y > -3, \\ x + 2y < 1 \end{cases}$ **453.** $\begin{cases} 2x - y < 1, \\ 2x - y \geqslant -2. \end{cases}$

454. $\begin{cases} 2x + y \geqslant 3, \\ 2x + y < 0. \end{cases}$ **455.** $\begin{cases} x + y > 1, \\ x + y \geqslant 2. \end{cases}$ **456.** $\begin{cases} x \geqslant -1, \\ y < 3. \end{cases}$

Постройте параболы:

457. $y = x^2 - 2x - 1$. **458.** $y = 2 - 4x - x^2$. **459.** $y = 3x - x^2$.

Изобразите на координатной плоскости множества, являющиеся решением приведенных неравенств:

460. $y \geqslant x^2 + 2x - 2$. **461.** $y < 1 + 4x - x^2$. **462.** $y \geqslant 3x - x^2$.

Решите квадратное неравенство:

463. $x^2 - x - 2 \geqslant 0$. **464.** $x^2 + 2x - 3 < 0$. **465.** $x - x^2 + 6 > 0$.

466. $x^2 - 2x + 2 < 0$. 467. $x^2 + 5x + 8 > 0$. 468. $x^2 - 6x + 9 \leqslant 0$.

34. Последовательности. *Последовательностью* называется функция, заданная на множестве натуральных чисел. Значение этой функции $f(n)$ обозначают еще a_n и т. п. и называют *n-м членом* последовательности. Если последовательность задана только на множестве первых n натуральных чисел, то последовательность называется *конечной* и записывается так: $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Последовательность называется *возрастающей*, если $a_{n+1} > a_n$, и *убывающей*, если $a_{n+1} < a_n$ (при всех n). Все способы задания функции относятся и к последовательностям. График последовательности состоит из отдельных точек. Члены последовательности можно изображать на прямой (рис. 105). Задавать последовательности можно рекуррентным способом, т. е. формулой, выражающей a_{n+1} через предыдущие члены последовательности, например

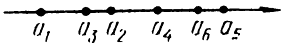


Рис. 105

$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

Арифметической прогрессией называется последовательность, задаваемая формулой $a_{n+1} = a_n + d$, число d называется *разностью* арифметической прогрессии, при этом $a_{n+1} = a_1 + nd$. Для суммы n первых членов арифметической прогрессии известны формулы:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n, \quad S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n.$$

Геометрической прогрессией называется последовательность, задаваемая формулой $b_{n+1} = b_n q$, число q называется *знаменателем* прогрессии, при этом $b_{n+1} = b_1 q^n$. Для суммы n первых членов геометрической прогрессии при $q \neq 1$ известны формулы:

$$S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1 - q}, \quad S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

35. Приближенные вычисления. *Погрешностью* приближенного значения a числа x называется разность $x - a = \Delta$. Если $|\Delta| \leqslant h$, то говорят, что a есть приближенное значение числа x с точностью до h, и записывают это так: $x = a \pm h$. *Относительной* погрешностью приближенного значения a для числа x называется $\frac{\Delta}{a}$.

Цифра α называется *верной*, если модуль погрешности данного приближения не превосходит единицы того разряда, в котором записана цифра α.

Правила округления. Если в округляемом разряде стоят цифры 0; 1; 2; 3; 4, то их отбрасывают, т. е. число округляется с недостатком. Если в округляемом разряде стоят цифры 5; 6; 7; 8; 9, то в предыдущий разряд добавляется единица, т. е. число округляется с избытком. При округлении результатов вычислений погрешность округления не превосходит половины единицы того разряда, до которого ведется округление.

Правила сложения и вычитания приближенных слагаемых:

1. Выделить наименее точное слагаемое, т. е. такое, в котором имеется наименьшее число верных десятичных знаков.

2. Округлить все остальные слагаемые так, чтобы каждое из них имело на один десятичный знак больше, чем выделенное.

3. Округлить ответ на один знак.

Пример. Вычислить сумму трех чисел, в записи которых все десятичные знаки — верные: 0,6; 0,423; 0,286.

Р е ш е н и е. 1. Выделяем слагаемое с наименьшим числом верных десятичных знаков: 0,6 (один десятичный знак).

2. Округляем остальные слагаемые до двух десятичных знаков: $0{,}423 \approx 0{,}42$; $0{,}286 \approx 0{,}29$ и находим сумму приближенных значений этих трех чисел:

$$\begin{array}{r} 0{,}6 \\ +\;0{,}42 \\ 0{,}29 \\ \hline 1{,}31 \end{array}$$

3. Округляем ответ на один знак: $1{,}31 \approx 1{,}3$.

Правила умножения и деления приближенных чисел:

1. Выделить множитель с наименьшим числом значащих цифр (*значащими цифрами* числа, записанного в виде десятичной дроби, называют все его цифры начиная с первой слева, отличной от 0).

2. Округлить все остальные множители так, чтобы каждое из них имело на одну значащую цифру больше.

3. Сохранить в результате столько значащих цифр, сколько их в выделенном сомножителе.

Пример. Вычислить произведение двух чисел, в записи которых все десятичные знаки — верные: $0{,}2743 \cdot 0{,}72$.

Р е ш е н и е. 1. Выделяем множитель с наименьшим числом верных значащих цифр: 0,72 (две верных значащих цифры).

2. Округляем второй множитель до трех значащих цифр: 0,274.

3. В полученном произведении $0{,}274 \cdot 0{,}72 = 0{,}19728$ сохраняем две значащие цифры, т. е. произведение $0{,}19728 \approx 0{,}20$.

П р и м е ч а н и е. Если полученный результат промежуточный, то в нем сохраняют на одну цифру больше.

При возведении в степень сохраняют столько значащих цифр, сколько их в основании степени.

ЗАМЕЧАНИЯ ДЛЯ ПРЕПОДАВАТЕЛЯ

Перестройка среднего математического образования в средней общеобразовательной школе имеет непосредственное отношение к системе среднего образования в ПТУ. Считается необходимым обучать математике в средних ПТУ по тем же учебным пособиям и учебникам, что и в школе. Этот факт следует приветствовать, так как этим подчеркивается полноценность математического образования в средних ПТУ, которые в настоящее время проходят стадию становления и развития.

Вместе с тем наличие общих требований к знаниям и совпадение разделов программ еще не означает полной тождественности систем обучения, и поэтому весьма возможно, что по мере развития средних ПТУ возникнет проблема создания своих собственных учебников, задачников и методических пособий, отличающихся от соответствующих книг общеобразовательной школы. Разработка таких пособий может иметь место лишь на основе широкого эксперимента и достаточно веского научно-методического обоснования. Однако уже сейчас издание дополнительной учебной и методической литературы по математике для средних ПТУ целесообразно. Сборники задач по математике, содержащие производственные задачи по группе специальностей, а также сборники, освещающие и обобщающие положительный опыт преподавателей, и ряд других учебных и методических пособий нужны средним ПТУ уже сегодня.

Издание настоящего пособия связано с поиском экономного пути и методически аргументированного изложения некоторых новых разделов курса — элементов математического анализа. Эффективность предложенного пути необходимо еще проверить в практике преподавания. Данное пособие служит целям выявления основ для разработки в будущем курса математики для средних ПТУ, который, возможно, будет отличаться от курса средней общеобразовательной школы так, как, например, отличается курс математики в техникумах от курсов школы и средних ПТУ.

Необходимость подобного рода экспериментов оправдывается различием условий, в которых работают учащиеся средней школы и учащиеся средних ПТУ — у них различные учебные планы, разное число часов в неделю, отводимых на математику, разные сроки обучения (3 и 4 года вместо двух лет общеобразовательной школы в IX и X классах).

В настоящем пособии излагаются лишь вопросы, в преподавание которых вносятся изменения по сравнению с соответствующими вопросами IX и X классов. Предполагается, что остальной материал изучается по учебным пособиям алгебры и начал анализа для IX и X классов. Поэтому в процессе эксперимента у учащихся должны быть на руках и данное пособие, и учебные пособия для IX и X классов. При этом учитель, воспользовавшись методическими рекомендациями, которые излагаются ниже, должен приложить определенные усилия, чтобы согласовать работу по двум пособиям и успешно провести эксперимент, подготовить учащихся к экзаменам.

Рассмотрим основные методические цели данного пособия. Ими являются:

а) выделение элементам математического анализа вспомогательной роли аппарата для изучения элементарных функций и их свойств. Поэтому этот материал не рассматривается в качестве специального объекта для детального изучения в средних ПТУ, а служит лишь средством более научного изучения свойств элементарных функций и связанного с ними материала;

б) выявление возможностей более компактного и доступного изложения элементов математического анализа сразу после восьмилетней школы;

в) исследование возможностей и целесообразности изучения всех включенных в программу вопросов математического анализа без разрыва во времени изучения, в отличие от курса средней школы, когда производная изучается в IX классе школы, а интеграл — в X классе. Это изменение в последовательности изучения призвано высвободить значительное количество учебного времени и к концу обучения дать возможность провести полноценное повторение всего курса;

г) выделение дополнительного учебного времени на изучение других вопросов программы: элементарных функций, алгебры многочленов, уравнений и неравенств и их систем за счет высвобождаемого времени из разделов «Производная и интеграл»;

д) повышение уровня усвоения знаний, умений и навыков учащихся средних ПТУ за счет увеличения числа часов, выделяемых на изучение основного курса математики.

Средствами достижения указанных целей при обучении по данному пособию служат:

1) полный отказ от теории и практики вычисления пределов последовательностей; отказ от аппарата «ε — N»;

2) значительное упрощение и сокращение теории и практики вычисления пределов функции; аппарат «ε — δ» не является основным и необязателен для усвоения всеми учащимися;

3) признание в качестве основного понятия изучаемых элементов математического анализа понятия о непрерывности функций с опорой на наглядное опи-

сание и представление этого свойства при вычерчивании графика функции без отрыва карандаша от бумаги.

В результате предполагается получить более простой и доступный аппарат математического анализа, которым будут пользоваться учащиеся при исследовании функций. При этом необходимые пояснения проводятся на рисунках, примерах и контрпримерах, наглядность которых призвана сделать материал доступным. Этим изучение элементов математического анализа в средних ПТУ будет отличаться от вузовского изложения соответствующих вопросов и от изложения их в техникумах.

Выбор методики изложения элементов анализа в данной книге объясняется рядом причин общепедагогического характера. Во-первых, выбранная методика позволяет высвободить время для усвоения учащимися средних ПТУ ряда приложений математики, что само по себе ценно, так как служит политехническим целям преподавания математики и способствует лучшему пониманию роли математики в познании реальной действительности, воспитанию у учащихся правильного мировоззрения. Во-вторых, избранный путь изложения элементов анализа не лишает курс его научной и общеобразовательной ценности, хотя ряд сложностей и теоретических тонкостей удается обойти и не рассматривать с учащимися. В-третьих, предлагаемое изложение более доступно, чем принятое теперь в школе и техникумах. Если это подтвердится в условиях реального преподавания и учащиеся будут усваивать учебный материал, то можно будет сделать определенные выводы о целесообразности создания учебных пособий и учебников для средних ПТУ

Остановимся на некоторых вопросах конкретного использования данных учебных материалов в процессе обучения, его сочетания с учебными пособиями для IX и X классов общеобразовательной школы.

1. Прежде всего отметим, что основной материал данного пособия — это производная и интеграл и примыкающие к ним вопросы непрерывности и предела функции, исследование функций с помощью производной, применения производной, интеграл, первообразная и приложения производной и интеграла. Этот материал в данном пособии изложен не так, как в школьных учебных пособиях, и его предполагается изучать вместо соответствующего материала школьного учебного пособия.

2. Принцип математической индукции (причем, на наш взгляд, возможна постановка вопроса о его удалении из программы средних ПТУ), комбинаторика, тригонометрические функции и их производные, системы уравнений и неравенств изучают по учебным пособиям для общеобразовательной школы без каких-либо изменений. При этом принятое в данном пособии изложение производной и интеграла подряд позволяет не разрывать тригонометрию. Компактное изложение элементов анализа дает возможность использовать их более эффективно в физике и специальных дисциплинах.

3. Для лучшей ориентации преподавателя при использовании одновременно данного пособия и учебных пособий по алгебре и началам математического анализа для IX и X классов школы ниже приводятся предложения о последовательности изучения материала, согласно которым можно будет вести преподавание. При этом порядок изложения материала, за исключением изучения интеграла сразу за производной, остается таким, каким оно принято в соответствии с программой и тематическим планом для средних ПТУ. Это означает, например, что принцип математической индукции и комбинаторика изучаются в средних ПТУ на последнем курсе, в конце программы, но по пособию для IX класса. Некоторые темы, как, например, действительные числа, изучаются по данному пособию в разделе «Сведения из арифметики и алгебры IV—VIII классов», а не по учебному пособию для IX класса. Логарифмическую и показательную функции предлагается изучать по данному пособию, тригонометрические функции и их производные — по учебным пособиям для IX и X классов, непрерывность и предел функции, а также производную и интеграл — по данному пособию. Системы уравнений и неравенств изучаются по учебному пособию для X класса.

В данном пособии по-иному, чем в учебном пособии для X класса, написан раздел «Сведения из арифметики и алгебры IV—VIII классов». В нем содержится лишь материал 8-летней школы.

Ниже помещен ряд материалов, который со всеми учащимися не рекомендуется изучать, но учителю полезно их иметь под рукой и учитывать.

К пункту 7. Приведем доказательство правила вычисления предела суммы. Положим $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $B = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. Тогда, по определению предела, будут непрерывны в точке x_0 функции

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при} \quad x \neq x_0, \\ A & \text{при} \quad x = x_0, \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{при} \quad x \neq x_0, \\ B & \text{при} \quad x = x_0. \end{cases}$$

Так как сумма непрерывных функций непрерывна, то функция

$$F(x) + G(x) = \begin{cases} f(x) + g(x) & \text{при} \quad x \neq x_0, \\ A + B & \text{при} \quad x = x_0 \end{cases}$$

непрерывна в точке x_0. А это по определению предела функции означает, что

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = A + B = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x),$$

что и требовалось доказать. Остальные правила доказываются аналогично.

К пункту 9. В качестве примера на геометрический смысл производной можно разобрать так называемую задачу о прожекторе (это установит и определенные связи с курсом физики). Коротко эту задачу можно сформулировать так: какой формы должно быть зеркало у прожектора? где поместить точечный источник света, чтобы все отраженные лучи образовали параллельный пучок?

Начнем с доказательства следующего факта: если взять параболу $y = x^2$ (и представить себе, что это зеркало в плоскости) и лучи, параллельные оси ординат (т. е. образующие параллельный пучок), то все они, отразившись, попадут в одну точку. Эта точка называется *фокусом* параболы. Тогда ясно, что зеркало прожектора можно получить, «провернув» эту параболу около оси ординат. Источник же света надо поместить в фокусе параболы.

При доказательстве мы будем пользоваться известным из физики законом отражения света: «угол падения равен углу отражения» (рис. 106). А эти углы

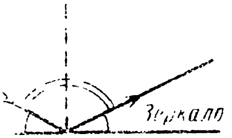


Рис. 106

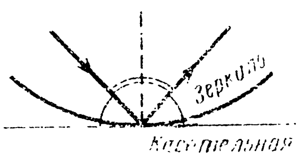


Рис. 107

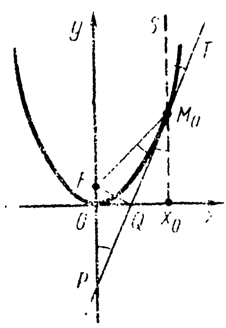


Рис. 108

для кривого зеркала определяются как угол между лучом и перпендикуляром к касательной к зеркалу, проведенной в точке падения (отражения) луча (рис. 107).

Возьмем произвольную точку M_0 на параболе (рис. 108) с абсциссой x_0, при этом $SM_0 \parallel Oy$ — падающий луч, FM_0 — отраженный. Уравнение касательной M_0T имеет вид (см. пример на с. 27)

$$y = x_0^2 + 2x_0(x - x_0) \quad \text{или} \quad y = 2x_0\left(x - \frac{x_0}{2}\right).$$

Докажем, что $\Delta OPQ \cong \Delta QM_0x_0$. Углы треугольников при вершине Q равны, как вертикальные. Остается доказать, что равны катеты. Из уравнения касательной находим координаты точки Q, а именно: $y = 0$ и $x = \frac{x_0}{2}$. Следовательно, $|OQ| = \frac{x_0}{2} = |Qx_0|$. Таким образом, равенство треугольников доказано. Итак, Q есть середина $[PM_0]$ т. е. FQ — медиана треугольника PFM_0. Так как $SM_0 \parallel Oy$, то $\measuredangle P \cong \measuredangle SM_0T$. А в силу законов отражения $\measuredangle FM_0P \cong \measuredangle SM_0T$. Следовательно, $\measuredangle P \cong \measuredangle FM_0P$ и треугольник PFM_0 — равнобедренный. Поэтому его медиана $FQ \perp PM_0$. Обозначим через α угол наклона касательной M_0T к оси абсцисс Тогда $\operatorname{tg}\alpha = (x^2)'|_{x=x_0} = 2x_0$. Из прямоугольного треугольника OQP видно, что $\alpha = \frac{\pi}{2} - \measuredangle P$. Тогда из прямоугольного треугольника FQP получаем, что $\measuredangle PFQ = \frac{\pi}{2} - \measuredangle P = \alpha$. Окончательно из треугольника OFQ имеем

$$|OF| = \frac{|OQ|}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\frac{x_0}{2}}{2x_0} = \frac{1}{4}.$$

Этим доказано, что каждый луч, параллельный оси ординат, после отражения проходит через точку $(0; \frac{1}{4})$ — это фокус параболы. Поэтому если в фокусе параболы поместить точечный источник света, то все отраженные лучи (от параболы как от зеркала) будут параллельны оси ординат.

К пункту 11. Приведем некоторые пояснения относительно признака возрастания функции. Пусть $f'(x) > 0$ для всех $x \in]a; b[$ и $x_1 < x_2$ — две любые точки из этого интервала. Тогда при $\Delta x > 0$ и достаточно малом в силу формулы (3), п. 8 имеем

$$f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) = \Delta f(x_1) \approx f'(x_1)\Delta x > 0,$$

так что $f(x_1) < f(x_1 + \Delta x)$. Таким образом, мы получили точку $c_1 = x_1 + \Delta x > x_1$ и такую, что $f(x_1) < f(c_1)$.

При этом точка $c_1 \in]a; b[$ и потому $f'(c_1) > 0$. Повторяя приведенное выше рассуждение, получаем точку $c_2 > c_1$ и такую, что

$$f(c_1) < f(c_2).$$

Продолжая этот процесс, получим точки c_k, $x_1 < c_1 < c_2 < \ldots < c_n < x_2$ и такие, что

$$f(x_1) < f(c_1) < f(c_2) < \ldots < f(c_n) < f(x_2).$$

Этим доказано, что

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Признак убывания функции поясняется аналогично. Добавим еще одно замечание. Мы все время говорили о возрастании (убывании) функции на интервале. Однако если функция непрерывна в концах этого интервала $]a; b[$, то она будет возрастать и на отрезке $[a; b]$. Этим мы, по сути дела, пользуемся при построении графиков: граничные точки интервалов возрастания (убывания) присоединяем к этим интервалам, а в этих точках при построении получаются (как правило) экстремумы функции.

Приведем достаточные условия максимума (минимума).

Вторая производная и экстремум функции. Производная $f'(x)$ в свою очередь есть некоторая функция от x. Может оказаться, что эта функция тоже имеет производную; эта новая производная называется второй производной функции f и обозначается f'' или y'' и т. п. (читается: «эф два штриха», «игрек два штриха» и т. п.), так что, по определению,

$$f'' = (f')' \quad \text{или} \quad y'' = (y')' \quad \text{и т. п.}$$

Например, если $f(x) = x^7$, то $f'(x) = 7x^6$, а $f''(x) = (7x^6)' = 42x^5$.

Оказывается, что точки максимума и минимума в ряде случаев легко различить по знаку второй производной. Об этом говорит *достаточный признак экстремума.*

Теорема. *Если $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) < 0$, то x_0 есть точка максимума функции f. Если $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) > 0$, то x_0 есть точка минимума функции f.*

Пример. Найдем экстремумы функции $f(x) = 6x^2 - x^3$. Производная $f'(x) = 12x - 3x^2$ обращается в нуль при $x = 0$ и $x = 4$. Вторая производная $f''(x) = 12-6x$, так что $f''(0) = 12 > 0$, т. е. точка 0 есть точка минимума; $f''(4) = 12-24 < 0$, т. е. точка 4 есть точка максимума.

Докажем более слабое утверждение: если $f'(x_0) = 0$ и $f'' > 0$ на интервале $]a;\ b[$, содержащем точку x_0, то точка x_0 есть точка минимума функции f (рис. 109).

В самом деле, $f'' = (f')' > 0$ и в силу признака монотонности функция f' возрастает на интервале $]a;\ b[$. Так как $f'(x_0) = 0$, то $f'(x) < 0$ на интервале

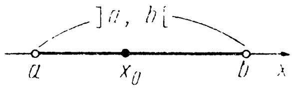


Рис. 109

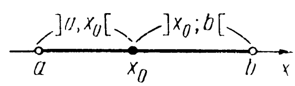


Рис. 110

$]a;\ x_0[$ (рис. 110) и на этом интервале функция f убывает, т. е. $f(x) > f(x_0)$ для всех x из интервала $]a;\ x_0[$. А для всех x из интервала $]x_0;\ b[$ выполнено неравенство $f'(x) > 0$, и поэтому на этом интервале функция f возрастает, т. е. $f(x) > f(x_0)$ для всех x из интервала $]x_0;\ b[$. Следовательно, для всех $x \neq x_0$ из интервала $]a;\ b[$ получено неравенство $f(x) > f(x_0)$, т. е. x_0 есть точка минимума.

Упражнения

Вычислите вторые производные функций:

469. x^5. **470.** $x^{10} - 3x$. **471.** $\dfrac{1}{x}$. **472.** $\sqrt{x}$. **473.** $\sqrt{x} - 5x$.

Пользуясь достаточным признаком экстремума, найдите экстремумы у функций:

474. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$. **475.** $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+3}$.

476. $f(x) = 3x^2 + 10x + 3$. **477.** $f(x) = -5x^2 + 7x - 4$.

478. $f(x) = ax^2 + bx + c$.

479. Докажите достаточный признак минимума, считая известным достаточный признак максимума.

480. Докажите утверждение: если $f'(x_0) = 0$ и $f'' < 0$ на интервале $]a;\ b[$, содержащем точку x_0, то точка x_0 есть точка максимума функции f.

К пункту 12. Дадим теперь полную формулировку правила вычисления производной сложной функции и его доказательство.

Теорема. *Если функция g имеет производную в точке x_0, а функция f имеет производную в точке $z_0 = g(x_0)$, то сложная функция $F(x) = f(g(x))$ имеет в точке x_0 производную*

$$F'(x_0) = g'(x_0)\,f'(g(x_0)). \tag{1}$$

Так как

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

то, по определению предела, функция

$$u(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{при} \quad z \neq z_0, \\ f'(z_0) & \text{при} \quad z = z_0 \end{cases} \tag{2}$$

непрерывна в точке z_0. Из равенства (2) следует, что

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0) \cdot u(z) \tag{3}$$

для любого аргумента z. Действительно, при $z = z_0$ правая и левая части этого равенства равны нулю и потому оно справедливо. Если же $z \neq z_0$, то равенство (3) следует из первой строки равенства (2). Вычислим теперь $F'(x_0)$, пользуясь равенством (3) и правилом вычисления предела произведения:

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(g(x) - g(x_0))\,u(g(x))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} u(g(x)) =$$

$$= g'(x_0)\,u(g(x_0)) = g'(x_0)\,f'(g(x_0)).$$

При этом мы воспользовались тем, что функция $u(g(x))$ непрерывна в точке x_0, так как она составлена из непрерывных функций. Поэтому $\lim\limits_{x \to x_0} u(g(x)) = u(g(x_0))$. Но $g(x_0) = z_0$ по условию теоремы, а $u(z_0) = f'(z_0)$ в силу равенства (2) (вторая строка).

К пункту 13. При доказательстве признака постоянства функции обратное утверждение, т. е. достаточность этого признака, доказано не было. Восполним этот пробел.

Доказательство достаточности проведем методом от противного. Предположим, что $g'(x) = 0$ для всех x из интервала $]a; b[$, но функция g не является постоянной на интервале $]a; b[$, т. е. на этом интервале найдутся две точки x_1 и x_2 такие, что $g(x_1) \neq g(x_2)$. Возьмем тогда вспомогательную функцию

$$h(x) = g(x) + kx,$$

где число k подобрано так, чтобы $h(x_1) = h(x_2)$. Это равенство и позволяет найти число k:

$$g(x_1) + kx_1 = g(x_2) + kx_2,$$

откуда

$$k = \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_2 - x_1}.$$

Поскольку $g(x_1) \neq g(x_2)$ (по предположению), то $k \neq 0$. Но тогда

$$h'(x) = g'(x) + k = k \neq 0,$$

так как $g'(x) = 0$ по условию. Следовательно, $h'(x)$ сохраняет постоянный знак на интервале $]a;\ b[$, и потому функция h возрастает или убывает на этом интервале, что противоречит равенству $h(x_1) = h(x_2)$. Это противоречие показывает, что сделанное предположение неверно, т. е. функция g постоянна на интервале $]a;\ b[$.

Применение интеграла и производной в геометрии. В пособии рассматривались некоторые приложения интеграла—это введение логарифмической и показательной функции и вычисление площадей плоских фигур. Покажем, как систематическое применение интеграла к решению ряда геометрических вопросов дает заметную экономию времени.

Прежде всего следует сконцентрировать внимание на вопросе о площадях подобных фигур. Соответствующий факт был отмечен в курсе геометрии VII класса, но доказан только для многоугольников, теперь он может быть доказан в общем виде.

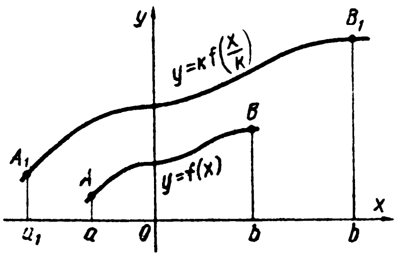


Рис. 111

Теорема. *Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.*

Очевидно, что доказательство достаточно провести для криволинейных трапеций, поскольку из них может быть составлена любая фигура. Итак, пусть S — площадь криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной графиком неотрицательной и непрерывной на отрезке $[a;\ b]$ функции f (рис. 111). Тогда

$$S = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

где функция F есть первообразная для функции f. Пусть криволинейная трапеция $a_1A_1B_1b_1$ подобна криволинейной трапеции $aABb$ (рис. 111) с коэффициентом подобия k. Если ее расположить так, что $a_1 = ka$ и $b_1 = kb$, то сверху она будет ограничена графиком функции $y = kf(\frac{x}{k})$. Первообразная для этой функции равна $k^2F(\frac{x}{k})$ согласно теореме 4 из п. 14. Вычислим площадь S_1 криволинейной трапеции $a_1A_1B_1b_1$:

$$S_1 = \int_{ka}^{kb} kf\left(\frac{x}{k}\right)dx = k^2F\left(\frac{kb}{k}\right) - k^2F\left(\frac{ka}{k}\right) = k^2\,(F(b) - F(a)) = k^2S,$$

поскольку выше отмечалось, что $F(b) - F(a) = S$. Теорема доказана.

Следствие. *Площадь круга радиуса R равна πR^2, где π есть площадь круга радиуса единица.*

Поскольку круг радиуса R подобен кругу радиуса единица с коэффициентом подобия, равным R, а площадь круга радиуса единица равна π, то площадь круга радиуса R равна πR^2 в силу доказанной теоремы.

Как следствие, легко получается формула для длины окружности: длина окружности радиуса R равна $2\pi R$.

Проведем две концентрические окружности радиуса R и радиуса $R + \Delta R$ (рис. 112). Площадь получившегося кольца приблизительно равна длине l окружности радиуса R, умноженной на ширину ΔR этого кольца:

$$l \cdot \Delta R \approx \pi\,(R + \Delta R)^2 - \pi R^2 = \pi 2R \cdot \Delta R + \pi\,(\Delta R)^2,$$

и точность этого приближенного равенства тем больше, чем меньше ΔR. После сокращения на ΔR получается $l \approx 2\pi R + \Delta R$. Переходя к пределу, получаем точное равенство

$$l = \lim_{\Delta R \to 0} (2\pi R + \Delta R) = 2\pi R.$$

Значительные упрощения получаются и в стереометрии при вычислении объемов тел и площадей сферы и ее частей. Начнем с вычисления объемов тел.

Пусть задано тело, объем которого V мы хотим подсчитать. Про это тело из-

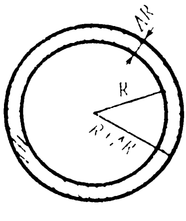


Рис. 112

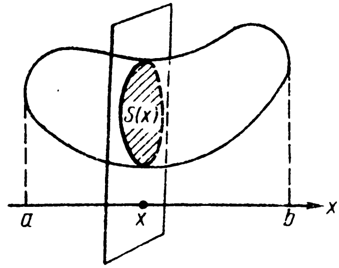


Рис. 113

вестно следующее: каждая плоскость, перпендикулярная оси Ox (которую обычно выбираем мы сами) и пересекающая Ox в точке x, в сечении с телом образует плоскую фигуру (рис. 113), площадь этой фигуры $S(x)$ нам известна как функция от x. Тогда

$$V = \int_a^b S(x)\,dx, \tag{4}$$

где a — наименьшее, а b — наибольшее значение x, при которых проводимые плоскости пересекают рассматриваемое тело.

Пример 1. Доказать, что *объем шара радиуса R равен* $\frac{4}{3}\pi R^3$. Проведем ось Ox через центр шара, начало отсчета совпадает с центром шара (рис. 114)

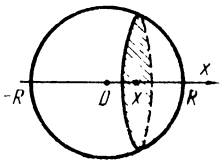


Рис. 114

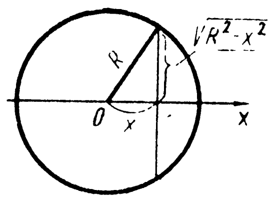


Рис. 115

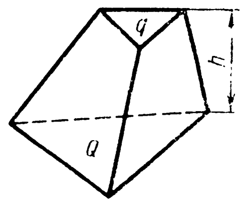


Рис. 116

Тогда площадь сечения $S(x)$ есть площадь круга радиуса $\sqrt{R^2 - x^2}$ (рис. 115), т. е. $S(x) = \pi(R^2 - x^2)$. Следовательно, по формуле (4), объем шара

$$V = \int_{-R}^{+R} \pi (R^2 - x^2)\,dx = \pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{+R} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Аналогично получаются формулы для объемов частей шара.

Пример 2. Доказать, что *объем усеченной пирамиды* (конуса) *высотой h и с площадями оснований Q и q* (рис. 116) *равен*

$$\frac{h}{3}\left(Q + \sqrt{Qq} + q\right).$$

В частном случае, при $q = 0$, получается *формула для объема пирамиды* (*конуса*)

$$\frac{1}{3}hQ.$$

Проведем через вершину P усеченного конуса (пирамиды) плоскость, параллельную плоскости его основания. Ось Ox проведем перпендикулярно этой плоскости, начало отсчета O тоже в этой плоскости, положительное направление оси — от меньшего основания к большему (на рис. 117 ось Ox направлена вниз). Плоскости оснований пересекают ось Ox в точках a (верхнее основание площади q) и b (нижнее основание площади Q), $a < b$. Высота $h = b - a$. Проведем через точку x оси Ox плоскость, перпендикулярную оси Ox. Она пересекается с усеченным конусом (пирамидой) по фигуре, подобной фигурам оснований (на рис. 117 эта фигура заштрихована). Коэффициент подобия (с нижним основанием) равен $\frac{x}{b}$. Поэтому площадь сечения $S(x)$ и площадь нижнего основания Q связаны (см. теорему на с. 90) равенством $\frac{S(x)}{Q} = \left(\frac{x}{b}\right)^2$, откуда

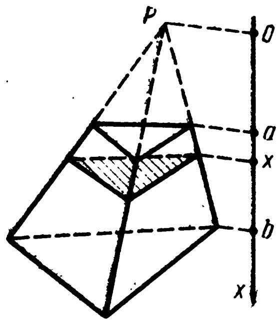


Рис. 117

$$S(x) = \frac{Q}{b^2}x^2. \tag{5}$$

Отсюда по формуле (4) получаем искомый объем

$$V = \int_a^b \frac{Q}{b^2}x^2\,dx = \frac{Q}{b^2}\,\frac{b^3 - a^3}{3} = \frac{Q}{b^2}\,\frac{b-a}{3}(b^2 + ab + a^2) =$$

$$= \frac{Qh}{3}\left(1 + \frac{a}{b} + \left(\frac{a}{b}\right)^2\right). \tag{6}$$

Остается определить неизвестное отношение $\frac{a}{b}$. Заметим, что площадь верхнего основания $q = S(a)$, и из формулы (5) получаем

$$\frac{q}{Q} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \quad \text{или} \quad \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{q}{Q}}.$$

Подставляя найденное значение дроби $\frac{a}{b}$ в формулу (6), получаем

$$V = \frac{Qh}{3}\left(1 + \sqrt{\frac{q}{Q}} + \frac{q}{Q}\right) = \frac{h}{3}(Q + \sqrt{Qq} + q).$$

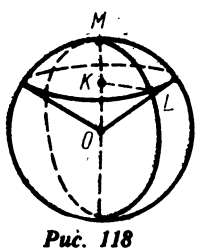


Рис. 118

Пример 3. Доказать, что объем шарового сектора

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H, \tag{7}$$

где R — радиус шара, а H — высота соответствующего сферического пояса.

Эту формулу достаточно доказать для случая, когда сферический пояс является сегментной поверхностью (рис. 118). Здесь O — центр шара, OM — радиус шара, перпендикулярный основанию сегментной поверхности, KL — радиус основания этой сегментной поверхности. Тогда $|OM| = R$, $|KM| = H$. Обозначим $q = R - H$, тогда $|KL|^2 = R^2 - q^2$. Выберем ось абсцисс, совпадающую с прямой OM, начало координат в центре шара O и положительное направление по лучу OM. По формуле (4) получаем искомый объем:

$$V = \int_q^R \pi (R^2 - x^2)\,dx + \frac{1}{3}\pi |KL|^2 \cdot |OK| = \pi \left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_q^R +$$

$$+\frac{1}{3}\pi (R^2 - q^2)\,q = \pi \frac{2}{3} R^3 - \pi \left(R^2q - \frac{q^3}{3}\right) + \frac{1}{3}\pi (R^2 - q^2)\,q =$$

$$= \frac{2}{3}\pi R^2 (R - q) = \frac{2}{3}\pi R^2 H,$$

что и требовалось доказать.

Отсюда получается общий случай. На рис. 119 изображено осевое сечение шара плоскостью, перпендикулярной основанию шарового сектора. Сечение этого шарового сектора заштриховано. Объем V этого шарового сектора может быть

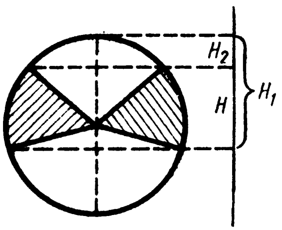


Рис. 119

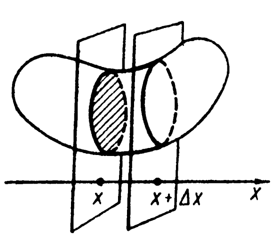


Рис. 120

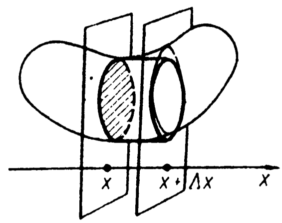


Рис. 121

получен как разность объемов двух шаровых секторов. Больший из них имеет объем V_1 и высоту H_1, а меньший — V_2 и H_2. Тогда высота рассматриваемого шарового сектора $H = H_1 - H_2$, а его объем

$$V = V_1 - V_2 = \frac{2}{3}\pi R^2 H_1 - \frac{2}{3}\pi R^2 H_2 = \frac{2}{3}\pi R^2 (H_1 - H_2) = \frac{2}{3}\pi R^2 H.$$

Таким образом, формула полностью доказана.

Перейдем к доказательству формулы (4). Рассмотрим объем части тела, расположенной левее точки x (см. рис. 113). Обозначим его $V(x)$. Этим на $[a; b]$ определена функция от x. Ясно, что $V(b) = V$, а $V(a) = 0$. Найдем производную этой функции. Приращение

$$\Delta V = V(x + \Delta x) - V(x)$$

есть объем части тела, заключенной между плоскостями, перпендикулярными оси Ox и проходящими через точки x и $x + \Delta x$ (рис. 120). Этот объем приблизительно равен объему цилиндра, указанного на рис. 121; его площадь основания равна $S(x)$, а высота равна расстоянию между плоскостями, т. е. Δx. Следовательно, объем цилиндра равен $S(x)\Delta x$ и

$$\Delta V \approx S(x)\,\Delta x \quad \text{или} \quad \frac{\Delta V}{\Delta x} \approx S(x),$$

точность этого равенства тем больше, чем меньше Δx. Но это означает, что

$$S(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = V'.$$

Следовательно, функция $V(x)$ есть первообразная для функции $S(x)$, и потому в силу формулы Ньютона — Лейбница

$$\int_a^b S(x)\,dx = V(b) - V(a) = V,$$

поскольку $V(b) = V$ и $V(a) = 0$. Формула (4) доказана.

Упражнения

481. Площадка, ограниченная линиями $y = 2^x$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$, вращается вокруг оси абсцисс. Найти объем полученного тела вращения.

482. Площадка, ограниченная линиями $y = \ln x$, $y = 2$, $y = 0$, $x = 0$, вращается вокруг оси ординат. Найти объем полученного тела вращения.

483. Площадка, ограниченная линиями $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 4$, вращается вокруг прямой $x = 5$. Найти объем полученного тела вращения.

Продемонстрированный выше единый метод можно применить и для вычисления площади поверхности сферы и ее частей.

Докажем, что для сферы радиуса R площадь ее поверхности

$$S = 4\pi R^2. \qquad (8)$$

Для этого сначала вычислим площадь S_c сегментной поверхности. Покажем. что

$$S_c = 2\pi RH, \qquad (9)$$

где H — высота сегментной поверхности, а R — радиус сферы.

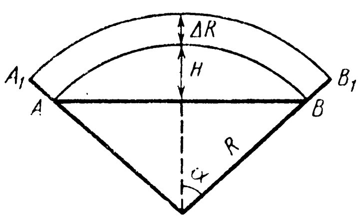


Рис. 122

На рис. 122 приведено осевое сечение сферы плоскостью, перпендикулярной основанию сегментной поверхности. Дуга AB есть пересечение плоскости с сегментной поверхностью. Рассмотрим шаровой сектор, опирающийся на эту сегментную поверхность. Так как высота сегментной поверхности $H = R(1 - \cos\alpha)$, то объем шарового сектора (см. формулу (7), с. 92) равен

$$V = \frac{2}{3}\pi R^3(1 - \cos\alpha).$$

Подобно увеличим шаровой сектор. Радиус шара станет $R + \Delta R$, а объем шарового сектора

$$V_1 = \frac{2}{3}\pi(R + \Delta R)^3(1 - \cos\alpha).$$

На рис. 122 увеличенный шаровой сектор в сечении опирается на дугу A_1B_1, Ясно, что

$$V_1 - V \approx S_c \cdot \Delta R$$

и точность этого приближенного равенства тем больше, чем меньше ΔR. Подставляя выражения для V и V_1, получаем

$$S_c \approx \frac{2}{3}\pi(1 - \cos\alpha)\frac{(R + \Delta R)^3 - R^3}{\Delta R},$$

точность этого приближенного равенства тем больше, чем меньше ΔR. Следовательно,

$$S_c = \lim_{\Delta R \to 0} \frac{2}{3} \pi (1 - \cos \alpha) \frac{(R + \Delta R)^3 - R^3}{\Delta R}.$$

Но полученный предел есть производная функции $\frac{2}{3}\pi(1-\cos\alpha)x^3$ в точке $x = R$, т. е. $\frac{2}{3}\pi(1-\cos\alpha)3R^2 = 2\pi RH$. Формула (9) доказана.

Формула (8) получается из формулы (9) при $H = 2R$.

Упражнение

484. Выведите формулу (8), пользуясь формулой для объема шара.

Применение интеграла в физике. Приведем пример применения интеграла при решении задач из физики.

Пример. Найти работу переменной силы. Пусть на отрезке $[a; b]$ в каждой его точке действует сила. Ее величина есть функция от точки x, обозначим ее

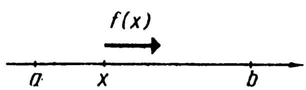


Рис. 123

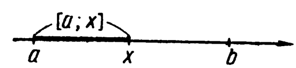


Рис. 124

$f(x)$. Предположим (для простоты), что сила параллельна отрезку $[a; b]$, так что достаточно рассматривать ее как скалярную величину, и что функция $f(x)$ непрерывна (рис. 123).

Покажем, что работа A этой переменной силы на отрезке $[a; b]$ может быть подсчитана по формуле

$$A = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{10}$$

Подсчитаем работу силы f не на всем отрезке, а на его части, т. е. отрезке $[a; x]$ (рис. 124). Эта работа есть функция от x, обозначим ее $A(x)$. Найдем производную этой функции. Приращение функции $A(x)$ равно $\Delta A = A(x + \Delta x) - A(x)$ и (рис. 125) есть работа силы f на отрезке $[x; x + \Delta x]$. Поскольку сила меняется непрерывно, то указанная работа

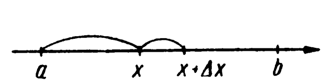


Рис. 125

$$\Delta A \approx f(x)\, \Delta x \tag{11}$$

откуда

$$\frac{\Delta A}{\Delta x} \approx f(x);$$

точность этого приближенного равенства тем выше, чем меньше Δx. А это означает, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} = f(x).$$

Поскольку левая часть этого равенства есть производная $A'(x)$, то мы нашли, что

$$A'(x) = f(x),$$

т. е. $A(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$ и потому

$$\int_a^b f(x)\,dx = A(b) - A(a)$$

по формуле Ньютона — Лейбница. Остается заметить, что $A(b) = A$ и $A(a) = 0$ по смыслу функции $A(x)$. Поэтому из последней формулы следует формула (11).

Упражнения

485. Найдите работу, затрачиваемую на растяжение пружины из спокойного положения до удлинения l.

Указание. Сила сопротивления пружины удлинению x равна kx.

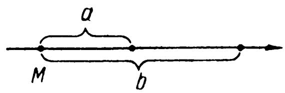


Рис. 126

486. Материальная точка массы M притягивает материальную точку массы m по закону всемирного тяготения Ньютона. Точка массы m удаляется по прямой от точки массы M от расстояния a до расстояния b (рис. 126). Найдите работу, затрачиваемую на преодоление силы притяжения.

487. Канал имеет в разрезе вид равнобочной трапеции высотой h и с основаниями a и b ($b > a$, b—верхнее основание). Найдите силу, с которой вода, заполняющая канал, давит на плотину.

488. Определите силу давления воды на стенки аквариума.

489. Вода, подаваемая снизу в цилиндрический бак, заполняет его полностью. Определите затраченную при этом работу.

490. На прямой лежат материальная точка массы m и однородный материальный стержень, масса которого M и длина l. Они притягиваются по закону всемирного тяготения Ньютона. Найдите силу этого притяжения, если расстояние от точки до стержня равно r.

491. Капля воды с начальной массой M падает под действием силы тяжести и равномерно испаряется, теряя ежесекундно массу m. Какова работа силы тяжести за время от начала падения капли до ее полного испарения?

492. Какую работу нужно произвести, чтобы насыпать кучу песка в форме конуса, высота которого H и радиус основания R? Удельный вес песка равен d, и его поднимают с плоскости основания конуса.

493. Однородный стержень длиной $l = 20$ см вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец. Угловая скорость вращения $\omega = 10\pi c^{-1}$. Поперечное сечение стержня $S = 4$ см^2, плотность материала, из которого изготовлен стержень, $\gamma = 7{,}8$ г/см^3. Найдите кинетическую энергию стержня.

494. Однородная прямоугольная пластинка со сторонами $a = 50$ см и $b = 40$ см вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 3\pi$ с$^{-1}$ вокруг стороны длиной a. Найдите кинетическую энергию пластинки, если ее толщина $d = 0{,}3$ см, а плотность материала, из которого сделана пластинка, $\gamma = 8$ г/см^3. (Толщиной пластинки пренебречь!)

495. Однородная пластинка в форме треугольника с основанием $a = 40$ см и высотой $h = 30$ см вращается вокруг основания с постоянной угловой скоростью $\omega = 5\pi c^{-1}$. Найдите кинетическую энергию пластинки, если ее толщина $d = 0{,}2$ см, а плотность материала, из которого изготовлена пластинка, $\gamma = 2{,}2$ г/см^3. (Толщиной пластинки при расчетах пренебречь!)

496. Пластинка в форме треугольника с основанием a и высотой h погружена вертикально в воду так, что ее основание лежит на поверхности воды. Подсчитайте силу давления воды на пластинку. Во сколько раз увеличится сила давления, если повернуть пластинку в вертикальной плоскости на 180°, оставив всю ее под водой (вершина на поверхности)?

497. Какую работу надо совершить, чтобы в пять раз сжать воздух, находящийся в цилиндре с поршнем?

Интеграл как предел сумм. Интеграл вычисляется очень просто, если первообразную можно выписать при помощи формулы. Но часты случаи, когда этого сделать нельзя. Как тогда вычисляется интеграл? В таком случае интеграл вычисляется приближенно. Проще всего это сделать (если подынтегральная функция положительна) следующим образом: построить график подынтегральной

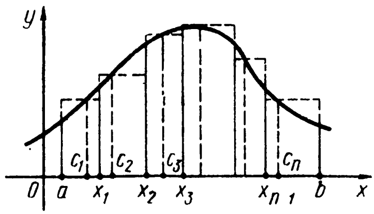


Рис. 127

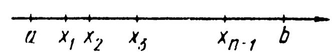


Рис. 128

функции и подсчитать приближенно площадь получившейся криволинейной трапеции. Последнее можно выполнить так: разобьем криволинейную трапецию на вертикальные полосы (рис. 127), подсчитаем площадь полосы приближенно, заменяя ее площадью прямоугольника, получим: для первой полосы эта площадь будет равна $f(c_1)(x_1 - a)$, для второй полосы $f(c_2)(x_2 - x_1)$ и т. д. для n-й полосы $f(c_n)(b - x_{n-1})$. Следовательно, вся площадь, т. е. интеграл, приближенно равна сумме этих площадей:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx f(c_1)(x_1 - a) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(c_n)(b - x_{n-1}). \tag{12}$$

Чем у́же полосы, на которые разбита фигура, тем точнее это равенство, и точность его может быть сделана как угодно большой. Означает это следующее: для любого числа $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое число $\delta > 0$, что при любом выборе точек x_k, c_k, $a < c_1 < x_1 < c_2 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < c_n < b$, удовлетворяющих условию $\lambda = \max(x_{k+1} - x_k) < \delta$, разность между правой и левой частью формулы (12) будет по модулю меньше ε. Сокращенно это записывается так:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} (f(c_1)\cdot(x_1 - a) + f(c_2)\cdot(x_2 - x_1) + \ldots + f(c_n)\cdot(b - x_{n-1})). \tag{13}$$

Суммы, стоящие под знаком предела, называются *интегральными суммами*, а равенство (13) коротко читают так: «интеграл равен пределу интегральных сумм».

Изучение интеграла можно начать, определив его формулой (13), а потом доказать формулу Ньютона — Лейбница. Оказывается, что тогда интеграл существует и для ряда разрывных функций, т. е. определение при помощи формулы (13) более общее. В приложениях иногда удобно пользоваться формулой (13), а иногда определением, данным в п. 15. Почти любую задачу на применение интеграла можно решать и тем и другим методом.

Дадим, например, вывод формулы (10) с использованием предела интегральных сумм. Разобьем весь отрезок $[a; b]$ на n отрезков точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ (рис. 128). Работа силы f на всем отрезке $[a; b]$ равна сумме работ этой силы на составляющих отрезках. Эти работы подсчитаем приближенно, (так же как и при получении приближенного равенства (11): работа на первом отрезке приближенно равна $f(a) \cdot (x_1 - a)$, и точность этого приближенного равенства тем выше, чем короче отрезок $[a; x_1]$; работа на втором отрезке $[x_1; x_2]$ приближенно равна $f(x_1) \cdot (x_2 - x_1)$, и точность этого приближенного равенства тем выше, чем короче отрезок $[x_1; x_2]$; и, наконец, работа силы на последнем отрезке $[x_{n-1}; b]$ приближенно равна $f(x_{n-1}) \cdot (b - x_{n-1})$, и точность этого равенства тем выше, чем короче отрезок $[x_{n-1}; b]$. Следовательно, работа $A \approx f(a)(x_1 - a) + f(x_1) \times$ $\times (x_2 - x_1) + \ldots + f(x_{n-1})(b - x_{n-1})$, и точность этого приближенного равенства тем больше, чем меньше длина наибольшего из отрезков, на которые разбит отрезок $[a; b]$ (его длина была обозначена через λ). Но это означает, что

$$A = \lim_{\lambda \to 0} (f(a)(x_1 - a) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_{n-1})(b - x_{n-1})).$$

Правая же часть этого равенства в силу формулы (13) равна интегралу от a до b функции $f(x)$, так что

$$A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

1. 3. **2.** 2. **3.** 3. **4.** 3. **5.** -2. **6.** -2. **7.** -3. **8.** 2. **26.** См. рис. 129.

27. $s = \begin{cases} \dfrac{t}{60} & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant 20, \\ \dfrac{t-8}{36} & \text{при } 20 < t \leqslant 70; \end{cases}$ см. рис. 130.

28. $m = \begin{cases} 7{,}8x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 10, \\ 8{,}9x - 11 & \text{при } 10 < x \leqslant 25; \end{cases}$ см. рис. 131.

29. $S(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2 - (2-x)^2 & \text{при } 1 < x \leqslant 2; \end{cases}$ см. рис. 132.

30. Рис. 19, возрастание

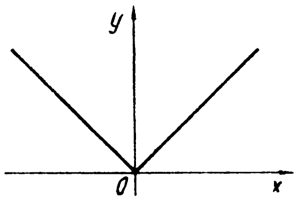


Рис. 129

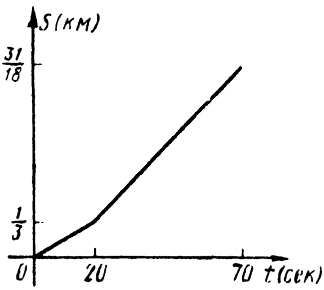


Рис. 130

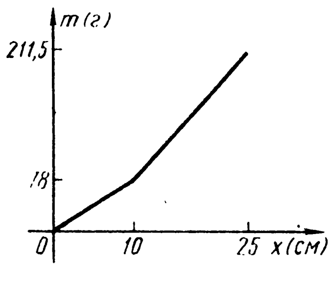


Рис. 131

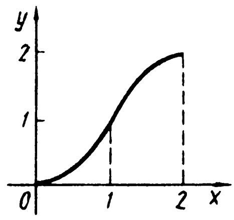


Рис. 132

на промежутках [—5; —3], [—1; 1], [3; 5]; убывание на промежутках [—3; —1], [1; 3]. Рис. 20, возрастание на промежутках [—3; —1], [1; 3] [5; 7]; убывание на промежутках [—5; —3], [1; 1], [3; 5]. Рис. 21, возрастание на промежутках [—6,5; —6], [—3; —2], [—1; 0], [3; 4], [5; 6], [9; 9,5]; убывание на промежутках [—6; —5], [—4; —3], [0; 1], [2; 3], [6; 7], [8; 9]. Рис. 22, возрастание на промежутках [—6; —5], [—4; —3], [0; 1], [2; 3], [6; 7], [8; 9]; убывание на промежутках [—6,5; —6], [—3; —2], [—1; 0], [3; 4], [5; 6], [9; 9,5]. Рис. 23, возрастание на промежутке [3,5; 6]; убывание на промежутках]—2; 3[, [3; 3,5], [6; 10]. **Рис. 24**, возрастание на промежутках [—6; —4], [—3; 3]; убывание на промежутках [—7; —6], [—4; —3]. **31.** Возрастание на промежутке [1; ∞ [; убывание на промежутке] — ∞ ; 1]; см. рис. 133. **32.** Возрастание на промежутке] — ∞ ; 1]; убывание на промежутке [1; ∞ [; см. рис. 134. **33.** Возрастание на промежутке [—1; ∞ [; убывание на промежутке] — ∞ ; —1]; см. рис. 135. **34.** Воз-

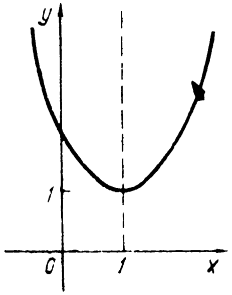


Рис. 133

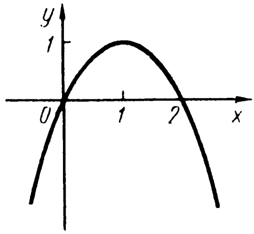


Рис. 134

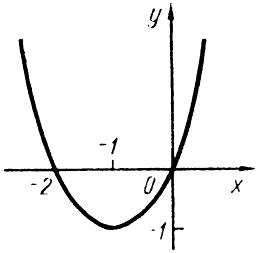


Рис. 135

растание на промежутке]—∞; —1]; убывание на промежутке [—1; ∞[; см. рис. 136. **35.** Возрастание на промежутке [—1; ∞[; убывание на промежутке]— ∞ ; —1]; см. рис. 137. **36.** Возрастание на промежутке [1; ∞ [; убывание на промежутке] — ∞ ; 1]; см. рис. 138. **37.** Возрастание на промежутке [0; ∞ [; убывание на

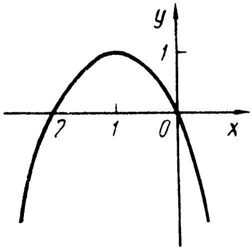


Рис. 136

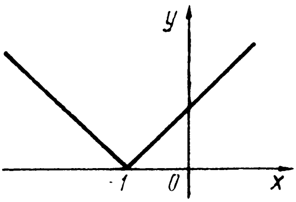


Рис. 137

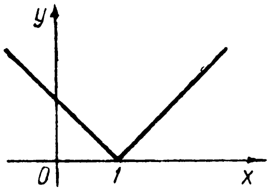


Рис. 138

промежутке] — ∞; 0]; см. рис. 139. **38.** Возрастание на промежутке]— ∞; 0]; убывание на промежутке [0; ∞ [; см. рис. 140. **39.** Возрастание на промежутке

$\left[-\frac{3}{2};\ \infty\right[$; убывание на промежутке $\left]-\infty;\ -\frac{3}{2}\right]$; см. рис. 141. **40.** Возра-

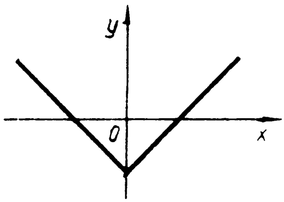


Рис. 139

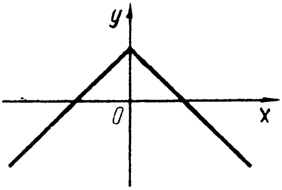


Рис. 140

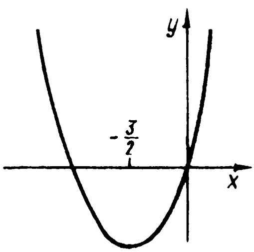


Рис. 141

стание на промежутке $\left]-\infty;\ \frac{3}{2}\right]$; убывание на промежутке $\left[\frac{3}{2};\ \infty\right[$; см. рис. 142. **41.** Возрастание на промежутке $\left[\frac{1}{2};\ \infty\right[$; убывание на промежутке $\left]-\infty;\ \frac{1}{2}\right]$; см. рис. 143. **42.** Возрастание на промежутке $\left]-\infty;\ -\frac{1}{2}\right]$; убывание на промежутке $\left[-\frac{1}{2};\ \infty\right[$; см. рис. 144. **43.** Рис. 25.

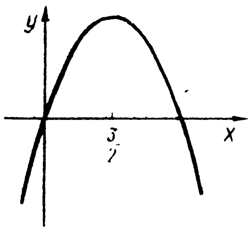


Рис. 142

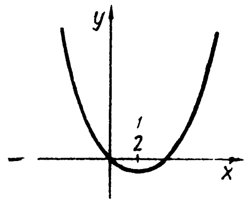


Рис. 143

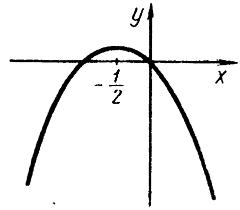


Рис. 144

Поезд, идущий в пункт A, остановок не имел; 1) поезд, вышедший из пункта А, останавливался на расстоянии 80 км и 140 км, первая остановка длилась 10 мин, вторая — 20 мин; 2) первый поезд встретился со вторым на расстоянии 80 км от A и через 95 мин после отправления; 3) наибольшая скорость у первого поезда равна 90 км/ч. Рис. 26. Поезд, шедший в пункт A, остановок не имел; 1) первый поезд (вышедший из пункта A) останавливался на расстоянии 90 км и 140 км, первая остановка длилась 12,5 мин, вторая — 20 мин; 2) встреча поезда произошла, когда первый поезд был в пути уже 150 мин; 3) наибольшая скорость у первого поезда была 80 км/ч на первом перегоне. **44.** 1) см. рис. 145; 2) 3,5 с; 3) через 2,47 с. **45.** № 30, рис. 19, максимумы в точках — 3 и 1; минимумы в точках — 1 и 3; рис. 20, максимумы в точках — 1 и 3; минимумы в точках — 3; 1 и 5; рис. 21, максимумы в точках — 6; 0; 6; минимумы в точках — 3; 3 и 9; рис. 22, максимумы в точках — 3; 3; 9; минимумы в точках — 6; 0; 6; рис. 23, минимум в точке 3,5; максимум в точках 3 и 6 (точка — 2 не является точкой экстремума); рис. 24, максимум в точке — 4; минимум в точках — 6 и —3. № 31. $x = 1$ — минимум; № 32. $x = 1$ — максимум; № 33. $x = -1$ — минимум; № 34. $x = -1$ — максимум; № 35. $x = -1$ — минимум; № 36. $x = 1$ — минимум; № 37. $x = 0$ — минимум; № 38. $x = 0$ — максимум; № 39. $x = -1,5$ — минимум; № 40. $x = 1,5$ — максимум; № 41. $x = 0,5$ — минимум; № 42. $x = -0,5$ — максимум. **46.** Рис. 29, максимум; рис. 30, максимум; рис. 31, нет экстремума; рис. 32, максимум; рис. 33, минимум; рис. 33, минимум; рис. 34, нет экстремума. **47.** а) 3,2; б) 5,03; в) 0,3; г) 0,06. **48.** а) $\Delta x = 0,3$ и $\Delta y = 1,29$; б) $h = 0,05$ и $\Delta f = 0,3775$. **49.** а) $\Delta y \approx -0,00198$; б) $\Delta y \approx -0,001107$; в) $\Delta y \approx 0,001861$; г) $\Delta y \approx 0,001115$. **50.** а) $\Delta y = -2\Delta x$; б) $\Delta y = \sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}$; в) $\Delta y = 2\Delta x\,(2x_0 + \Delta x)$; г) $\Delta y = \Delta x\,(3 - 2x_0 - \Delta x)$. **51.** $\Delta x \approx 0,2$ и $\Delta y \approx 0,2$. **52.** Рис. 40, $\Delta x = -0,3$ и $\Delta y = -0,1$; рис. 41, $\Delta x = 0,3$ и $\Delta y = -0,4$; рис. 42, $\Delta x = -0,2$ и $\Delta y = 0,3$. **53.** Рис. 10, разрывы в целых точках; рис. 16, 18, разрывные функции; рис. 13—15, 17, 19—22, 25—28, 35, 38—44, 47, непрерывные функции; рис. 23, разрывы

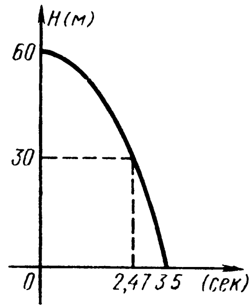


Рис. 145

в точках —2 и 3, $f(-2)=0$, $f(3)=3$; рис. 24, разрывы в точках —3 и 3, $f(3)=0$, $f(-3)=-1$; рис. 29—34, x_0—точка разрыва; рис. 45, разрыв в точке 0, рис. 46, разрыв в точке 0; рис. 48, разрывы в целых точках, значения функции равны 0. **54.** $y=10-x+10\times\left[\frac{x}{10}\right]$, где y — время ожидания поезда в минутах, x — время прихода пассажира в минутах; эта функция разрывная; см. рис. 146.

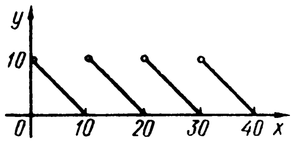


Рис. 146

55.

x	Δx	$x+\Delta x$	$f(x)$	$f(x+\Delta x)$	$\Delta f(x)$
—2	—0,3	—2,3	4	5,29	1,29
—2	—0,2	—2,2	4	4,84	0,84
—2	—0,1	—2,1	4	4,41	0,41
—2	. . . . . .	. . . . . .	. . .	. . . . . .	. . . . . .
—2	0,1	—1,9	4	3,61	—0,39
—2	0,2	—1,8	4	3,24	—0,76
—2	0,3	—1,7	4	2,89	—1,11

56.

x	Δx	$x+\Delta x$	$f(x)$	$f(x+\Delta x)$	$\Delta f(x)$
3	0,3	3,3	1/3	0,(30)	—0,(03)
3	0,2	3,2	1/3	0,3125	—0,0208(3)
3	0,1	3,1	1/3	0,322580	—0,010752
3	. . . . . .	. . . .	. . .	. . . . . .	. . . . . .
3	—0,1	2,9	1/3	0,3448275...	0,0114942...
3	—0,2	2,8	1/3	0,3(571428)	0,0(238095)
3	—0,3	2,7	1/3	0,(370)	0,(037)

57.

x	Δx	$x+\Delta x$	$f(x)$	$f(x+\Delta x)$	$\Delta f(x)$
—1,8	0,3	—1,5	—5,832	—3,375	2,457
—1,8	0,2	—1,6	—5,832	—4,096	1,736
—1,8	0,1	—1,7	—5,832	—4,913	0,919
...	...	...	...	...	...
—1,8	—0,1	—1,9	—5,832	—6,859	—1,027
—1,8	—0,2	—2,0	—5,832	—8,000	—2,168
—1,8	—0,3	—2,1	—5,832	—9,261	—3,429

58. а) пять, б) шесть, в) четыре, г) четыре. **69.** Это произведение двух непрерывных функций $(kx+b)^2=(kx+b)\cdot(kx+b)$. **70.** Это произведение трех непрерывных функций: $x^3=x\cdot x\cdot x$. **71.** Это произведение n непрерывных функций, каждая из них равна $kx+b$. **72.** Это сумма двух непрерывных функций: $bx+c$ и ax^2. **73.** Это частное двух непрерывных функций $2x+3$ и $5-7x$, причем знаменатель не обращается в нуль в области определения. **74.** Это частное двух непрерывных функций $2-3x$ и $5+x^2$, причем знаменатель всюду отличен от нуля. **75**. Область определения этой функции — множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих условию $x \neq \pm 3$. Здесь эта функция непрерывна как частное двух непрерывных функций, у которого знаменатель не обращается в нуль. **76**. Область определения этой функции — множество всех чисел x, удовлетворяющих неравенству $x \neq \pm 1$. Следовательно, здесь эта функция есть частное двух непрерывных функций, причем знаменатель не обращается в нуль. **77**. Область определения этой функции — все числа, удовлетворяющие неравенствам $x \geqslant 0$ и $x \neq 2$. Числитель этой функции непрерывен при $x > 0$. Знаменатель непрерывен всюду и не равен нулю при $x \neq 2$. Следовательно, внутри области определения эта функция непрерывна. **78**. Область определения этой функции — все числа, удовлетворяющие условию $x \neq 1$ и $x \neq 2$. Числитель этой функции есть непрерывная функция. Знаменатель этой функции — тоже непрерывная функция (см. упр. 72) и не обращается в нуль в области определения. Следовательно, заданная функция непрерывна в своей области определения. **79**. 8. **80**. -2. **81**. 1. **82**. $-0{,}2$. **83**. $-\frac{7}{6}$. **84**. -47. **85**. -3. **86**. 8. **87**. 3/2. **88**. $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}}$. **89**. 12. **90**. $3x_0^2$. **91**. $\frac{1}{3\sqrt[3]{25}}$. **92**. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}$. **93**. $-0{,}25$. **94**. 0,25. **95**. -3. **96**. 0. **97**. $-1/3$. **98**. 1. **99**. 0,6. **100**. Рис. 56, 0,5; рис. 57, 2,5. **103**. $3x^2$. **104**. $4x^3$. **105**. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. **106**. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. **107**. -2. **108**. $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. **109**. 1. **110**. 0. **111**. $\frac{-2}{x^3}$. **112**. k. **113**. $2ax+b$. **114**. $\frac{1}{2}$. **115**. $\frac{1}{4}$. **116**. 0,1. **117**. $\frac{2}{3}$. **118**. $\frac{1}{3}$. **119**. $\frac{2}{15}$. **120**. а) $\Delta f \approx \frac{\Delta x}{2}$; б) $\Delta f \approx \frac{\Delta x}{4}$; в) $\Delta f \approx 0{,}1\,\Delta x$. **121**. а) $\Delta f \approx -100\Delta x$; б) $\Delta f \approx -\Delta x$; в) $\Delta f \approx -\frac{1}{9}\Delta x$; г) $\Delta f \approx -0{,}01\Delta x$. **123**. $y = -2x$ и $y = 2x-4$. **124**. $y = x$ и $y = 1-x$. **125**. $y = -3x-3$, $y = 3x-6$ и $y = -2-x$. **126**. $y = 2-x$, $y = 3-3x$ и $y = 3x+6$. **127**. $g'(x_0) > f'(x_0)$. **128**. а) 2; б) 2. **129**. $3x^2-2x$. **130**. $4x^3+4x$. **131**. $3x^2-\frac{2}{x^2}$. **132**. $30x^5+\frac{21}{x^8}+10$. **133**. $\frac{x^2(15+x^2)}{(5+x^2)^2}$. **134**. $\frac{-41}{(5x+3)^2}$.

135. $\frac{x^2(5x^4-80x-21)}{(7+5x^4)^2}$. **136**. $\frac{30x^2+25-\frac{6}{x^3}}{(3-5x^3)^2}$. **137**. $\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}-3$. **138**. $\frac{21}{5}x^3\sqrt[5]{x}+\frac{5}{4x\sqrt[4]{x}}$. **139**. $y = x-4$. **140**. $y = 1-x$. **141**. $y = x$, $y = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$. **142**. $y = 2(1+x)$, $y = \frac{3(1+x)}{2}$, $y = -1$. **144**. Максимум в точке -2, минимум в точке 0, на промежутке $[-2;\ 0]$ функция убывает, на промежутках $]-\infty;\ -2]$ и $[0;\ \infty[$ функция возрастает. **145**. Минимум в точках 0 и 2, максимум в точке 1, на промежутках между точками экстремума функция или убывает, или возрастает. **146**. Минимум в точке 1, максимум в точке -1, разрыв в точке 0; возрастание на промежутках $]-\infty;\ -1]$ и $[1;\ \infty[$; убывание на промежутках $[-1;\ 0[$ и $]0;\ 1]$. **147**. Минимум в точке 2, разрыв в точке 0; возрастание на промежутках $]-\infty;\ 0[$ и $[2;\ \infty[$; убывание на промежутке $]0;\ 2]$. **148**. Минимумы в точках 1 и -1, разрыв в точке 0; возрастание на промежутках $[-1;\ 0[$ и $[1;\ \infty[$; убывание на промежутках $]-\infty;\ -1]$ и $]0;\ 1]$. **149**. Максимум в точке 1, минимум в точке -1; возрастание на промежутке

$[-1; 1]$; убывание на промежутках $[-\infty; -1]$ и $[1; \infty]$. **150**. Максимум в точке 3, минимум в точке -1; возрастание на промежутке $[-1; 3]$; убывание на промежутках $]-\infty; -1]$ и $[3; \infty[$. **151**. Максимум в точке 3, минимум в точке 5, в точке 0 нет экстремума, функция возрастет на промежутках $]-\infty; 3]$ и $[5; \infty[$, убывает на промежутке $[3; 5]$. **152**. Максимум в точке 5, минимум в точке -1; возрастание на промежутке $[-1; 5]$; убывание на промежутках $]-\infty; -1]$ и $[5; \infty[$. **153**. Максимум в точке -3, минимум в точке 1; убывание на промежутке $[-3; 1]$; возрастание на промежутках $]-\infty; -3]$ и $[1; \infty[$. **154**. Диаметр цилиндра равен его высоте. **155**. Образующая в $\sqrt{3}$ раз больше высоты конуса. **156**. Диаметр бревна в $\sqrt{3}$ раз больше основания балки. **157**. Диаметр полушара в $\sqrt{3}$ раз больше стороны основания. **158**. Диаметр шара в $\sqrt{3}$ раз больше высоты цилиндра. **159**. Высота конуса в четыре раза больше радиуса шара. **160**. Стоимость плавания со скоростью v равна $\frac{aS}{v} + kv^3 \cdot \frac{S}{v}$, где S — расстояние между портами, k — коэффициент, наиболее экономичная скорость $v = \sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$. **161**. Сторона основания равна $\sqrt[3]{2V}$. **162**. Отложить на стороне угла от его вершины отрезок, равный $a\left(\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}} + 1\right)$, где a и b — расстояния точки M от сторон угла. Откладывать отрезок на стороне, расстояние до которой равно b. Через M и конец отрезка провести прямую. **163**. Отрезок, отсекаемый от стороны угла, в два раза больше расстояния точки K от другой стороны угла. **164**. Сектор имеет центральный угол, равный $120° \cdot \sqrt{6}$. **165**. Искомая точка M такова, что $AB = 3\ AM$. **166**. Каждое слагаемое равно 4. **167**. $2 + 1/120$. **168**. $3 - 1/90$. **169**. $2 - 3/640$. **170**. $3 - 1/108$. **171**. 1,07. **172**. 0,84. **173**. $1/5 + 3/16000$. **174**. $1/21$. **175**. $-1/135$. **176**. $-0,1$. **177**. $-0,003$. **178**. $100(2x-3)^{49}$. **179**. $-200\ (7-5x)^{39}$. **180**. $34x\ (x^2+4)^{16}$. **181**. $-46x\ (9-x^2)^{22}$. **182**. $-16\ (5+6x)\ (7-5x-3x^2)^{15}$. **183**. $39\ (10x + 4x^3)\ (x^4 + 5x^2 + 8)^{38}$. **184**. $\frac{-3\,(4x^3+6x)}{(x^4+3x^2+5)^4}$. **185**. $\frac{3x^2+7}{5\sqrt[5]{(x^3+7x)^4}}$.

186. $\frac{-6}{7\sqrt[7]{(7-2x)^4}}$. **187**. $(2x+3)^4\,(7-x)^{\frac{1}{3}}\left(19\frac{1}{3} - 6x\right)$. **188**. $-(5-2x)^6 \times (3x+1)^{-\frac{1}{4}}\left(56\frac{1}{2} + \frac{11}{4}x\right)$. **189**. $\frac{3x-1}{(x+3)^2\sqrt{x^2+1}}$. **190**. $\frac{3-x^2}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^4}}$.

191. $y = 6\frac{1}{4} - \frac{3}{4}x$. **192**. $y = 1 + 3x$. **193**. Область определения $[-1; 1]$; максимум в точке $x = 0$. **194**. Область определения $]-\infty; 3]$; максимум в точке 2. **195**. Область определения $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$; максимум в точке 1; минимум в точке -1. **196**. $\frac{x^4}{4}$. **197**. $\frac{x^5}{5}$. **198**. $\frac{x^2}{2}$. **199**. $3\sqrt[3]{x}$. **200**. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$. **201**. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$.

202. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}$. **203**. $\frac{-1}{x}$. **204**. $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}$. **205**. $\frac{2}{5}\sqrt{x^5}$. **206**. $2\frac{1}{2}x$.

207. $\frac{x^4}{4}+C$ (№ 196); $\frac{x^3}{5}+C$ (№ 197); $\frac{x^2}{2}+C$ (№ 198); $3\sqrt[3]{x}+C$ (№ 199); $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$ (№ 200); $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+C$ (№ 201); $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+C$ (№ 202); $\frac{-1}{x}+$ $+C$ (№ 203); $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+C$ (№ 204); $\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+C$ (№ 205); $2\frac{1}{2}x+C$ (№ 206).

208. $\frac{x^3}{3}+3$. 209. $\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+2{,}6$. 210. $0{,}5-\frac{1}{x}$. 211. $2\sqrt{x}-7$.

212. а) $2\sqrt{x}+1$; б) $2\sqrt{x}-1$; их разность равна 2; график второй — ниже. 213. Обе первообразные равны $3\sqrt[3]{x}+2$. 214. а) $\frac{-1}{x}-4$; б) $20-\frac{1}{x}$; их разность равна 24; график второй — выше. 215. $\frac{x^4}{4}+\frac{5}{x}+C$. 216. $\frac{5}{6}x\sqrt[5]{x}+$ $+1{,}6\sqrt{x^5}+C$. 217. $\frac{x^2}{2}+\frac{3}{x}+C$. 218. $\frac{2}{5}\sqrt{x^5}-6\sqrt{x}+C$. 219. $\frac{x^7}{7}-$ $-\frac{3}{4}x^4+3x+\frac{1}{2x^2}+C$. 220. $\frac{3}{7}\sqrt[3]{x^7}-3\sqrt[3]{x^2}-\frac{1}{x}+C$. 221. $\frac{x^2}{2}-4x+C$.

222. $\frac{x^2}{2}+3x+C$. 223. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+2x+C$. 224. $\frac{x^3}{3}+x^2+4x+C$. 225. $\frac{x^2}{2}+3x+C$.

226. $\frac{(2x+5)^{75}}{150}+C$. 227. $-\frac{1}{250}(3-5x)^{50}+C$. 228. $\frac{-1}{100(4x+3)^{25}}+C$.

229. $\frac{1}{30(7-3x)^{10}}+C$. 230. $\frac{2}{33}\sqrt{(7+11x)^3}+C$. 231. $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{5-2x}+C$.

232. $-\frac{2}{7}\sqrt{3-7x}+C$. 233. $\frac{-5}{18(4+9x)^2}+C$. 234. $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1-8x)^4}+C$.

235. $\frac{15}{4}$. 236. $\frac{2}{5}$. 237. 6. 238. 3. 239. 4,5. 240. $11\frac{1}{4}$. 241. 1. 242. 0.

243. 0. 244. —3. 245. 2. 246. —2, 247. 0. 248. $9\frac{1}{3}$. 249. $v=v_0+at$, $x=x_0+$ $+v_0t+\frac{a}{2}t^2$. 250. 1) $\frac{v_0^2}{2g}$; 2) $\frac{2v_0}{g}$; 3) 0. 251. 122,375; 9,77. 252. $8R+$ $+\frac{16}{3}k$; $R+\frac{k}{4}$. 253. $y'_t=(2x-2)v$; $y''=2v^2$. 254. $(3x^2-4x)v$, $(6x-4)v^2$.

255. $8\frac{2}{3}$. 256. $11\frac{2}{3}$. 257. $4\frac{2}{3}$. 258. 11,25. 259. 12,4. 260. 2. 261. $\frac{5}{12}$.

262. 0,55. 263. $\frac{4}{3}$. 264. $\frac{4}{3}$. 265. $\frac{1}{6}$. 266. 4,5. 267. 0,1. 268. 4,5. 279. 1,0986. 280. 5,4424. 281. —4,0746. 282. 1,7713. 283. 3,5820. 284. 0,5804. 285. —2,6802.

286. $-3{,}2198$. 287. $-1{,}3986$. 294. $\frac{1}{x}$. 295. $\frac{-5}{2-5x}$. 296. $\frac{2x}{(x^2+4)\ln 3}$.

297. $\frac{2x+1}{(x^2+x-3)\ln 5}$. 298. $\frac{3}{x^2+x-2}$. 299. $\frac{1}{a^2-x^2}$. 300. $\ln x$.

301. $\frac{1}{\sqrt{x^2+q}}$. 302. $\frac{\ln(2+\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2(2+\sqrt{x})}$. 303. $y=x-1$. 304. $y=\frac{x}{3\ln 3}+1-\frac{1}{\ln 3}$. 305. $0{,}02$. 306. $-0{,}04$. 307. $1+\frac{1}{10\ln 10}$. 308. $\ln x+C$. 309. $3\ln x+C$. 310. $\frac{1}{5}\ln x+C$. 311. $\ln(x+2)+C$. 312. $5\ln(x+3)+C$.

313. $\frac{1}{2}\ln(2x+6)+C$. 314. $\frac{5}{3}\ln(3x+2)+C$. 315. $\ln(-x)+C$. 316. $\ln\frac{7}{3}$.

317. $\ln 9$. 318. $4-2\ln 3$. 319. $4\ln 2$. 320. $3\ln 2$. 321. $5\ln 2$. 322. $10\ln 10-9$.

323. $\ln(2+\sqrt{5})$. 324. $a\ln a-a+1$. 326. $4{,}728$. 327. $8{,}825$. 328. $0{,}01697$.

329. $0{,}7396$. 333. $-3e^{-3x}$. 334. $2\cdot 3^{2x}\ln 3$. 335. $5^{\sqrt{x}}\cdot\frac{\ln 5}{2\sqrt{x}}$. 336. $-2xe^{-x^2}$.

337. $(0{,}3)^x(x^2\ln 0{,}3+2x)$. 338. $\frac{2x^2\ln x\cdot\ln 3-1}{x\ln^2 x}\cdot 3^{x^2}$

339. $x^{-\pi-1}-\pi x^{-\pi-1}\ln x$. 340. $e^{-x}\left(\frac{1}{3x\sqrt[3]{\ln^2 x}}-\sqrt[3]{\ln x}\right)$.

341. $\frac{3+(1-x\ln x\cdot\ln 2)\cdot 2^x}{x(2^x+3)^2}$. 342. $y=x+1$. 343. $y=\frac{\ln(3e)-x\ln 3}{3}$.

344. Функция определена при $x>0$; минимум при $x=\frac{1}{e}$. 345. Функция определена при $x>0$ и $x\neq 1$; минимум в точке e. 346. Максимум в точке 1. 347. Функция определена при $x\neq 0$; минимум в точке 1. 348. Функция определена при $x>0$; максимум в точке e; минимум в точке $\frac{1}{e}$. 349. $\frac{1}{2}e^{2x}+C$.

350. $\frac{-1}{3}e^{-3x}+C$. 351. $\frac{1}{5\ln 3}3^{5x}+C$. 352. $\frac{-1}{2\ln 7}7^{-2x}+C$. 353. $\frac{2}{5}\times\ln(5x+1)-\frac{1}{7\ln 3}3^{7x}+C$. 354. $\frac{1}{2\ln 2}2^{2x}+\frac{2}{\ln 2-\ln 0{,}3}2^x\cdot 0{,}3^{-x}-\frac{1}{2\ln 0{,}3}\cdot 2\cdot 0{,}3^{-2x}+C$. 355. e^2-1. 356. $\frac{1}{3}-\frac{1}{3e^3}$. 357. e^2-e^{-3}.

358. $\frac{5}{\ln 10}$. 359. $-\frac{4{,}48}{\ln 10}$. 360. $\frac{12}{\sqrt[3]{25}\ln 5}$. 361. $\frac{26}{9\ln 3}$. 362. $\{7\}$.

363. $\{1;\ 7;$ Земля; кот, Солнце; жук$\}$. 364. $\{$кот; Земля$\}$. 365. $\varnothing$. 366. $\{1;\ 7\}$. 367. $12{,}291$. 368. $31{,}626$. 369. $0{,}6315$. 370. $87{,}75$. 371. $43{,}942$.

372. 0,01073. **373.** 5,27. **374.** 0,00407. **375.** $D = 12$, $K = 144$. **376.** $D = 5$, $K = 120$. **377.** $D = 45$, $K = 675$. **378.** $D = 36$, $K = 432$. **379.** $D = 600$, $K = 9\,324\,000$. **380.** $D = 1800$, $K = 648\,000$. **381.** $\frac{2}{7} > \frac{4}{21}$. **382.** $\frac{3}{11} > \frac{2}{9}$. **383.** $0{,}04 < \frac{2}{45}$. **384.** $\frac{7}{12}$. **385.** $\frac{8}{75}$. **386.** 3,286. **387.** $\frac{11}{1500}$.

388. $\frac{500}{341}$. **389.** 0,(18). **390.** 0,41(6). **391.** $\frac{23}{99}$. **392.** $5\frac{184}{495}$. **393.** 9.

394. 32. **395.** 64. **396.** 1. **397.** x^{-2}. **398.** $x^{\frac{3}{2}}$. **399.** $a^{-\frac{1}{2}}$. **400.** $2^{\frac{5}{6}}$.

401. $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. **402.** $\sqrt{x}$. **403.** $\frac{1}{\sqrt[4]{a}}$. **404.** 2^{-3}. **405.** 2^2. **406.** $3^{\frac{2}{3}}$.

407. $a^2\sqrt{a}$. **408.** $2a\sqrt{5a}$. **409.** $2x\sqrt[3]{x}$. **410.** 20. **411.** 4. **412.** 0. **413.** 100. **414.** 0,2. **415.** 1 при $a \neq 0$. **416.** $\frac{a}{a-1}$. **417.** $-2(a+b)$ при $a \neq b$. **418.** x^2 при $x^2 + y^2 \neq 0$. **419.** $ax(x+a)$. **420.** $3y(y-2)$. **421.** $(b+1)^2$. **422.** $(x-1)^2(x+1)$. **423.** $\{2\}$. **424.** $\{-1\}$. **425.** $]-2;\ \infty[$. **426.** $]-\infty;\ 5[$. **427.** $]-\infty;\ -2[$. **428.** $]-\infty;\ -1[$. **429.** $[-4;\ 2]$. **430.** $\{(1;\ 2)\}$. **431.** $\{(1;\ -1)\}$. **432.** $\varnothing$. **433.** $\{(2+3y;\ y)\}$, $y \in R$ — любое. **434.** $\{6;\ 2\}$. **435.** $\left\{-1;\ -\frac{1}{2}\right\}$. **436.** $(a-6)(a+4)$. **437.** $3(x-2) \times \left(x - \frac{1}{3}\right)$. **447.** См. рис. 147. **448.** См. рис. 148. **449.** См. рис. 149.

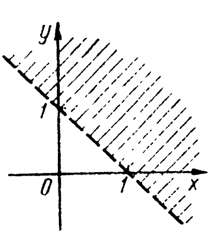


Рис. 147

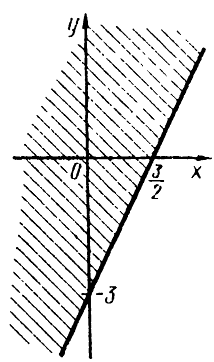


Рис. 148

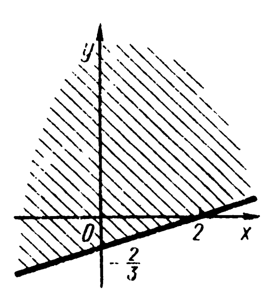


Рис. 149

450. См. рис. 150. **451.** См. рис. 151. **452.** См. рис. 152.

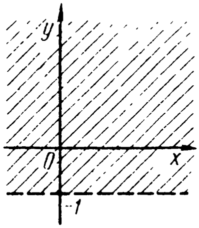


Рис. 150

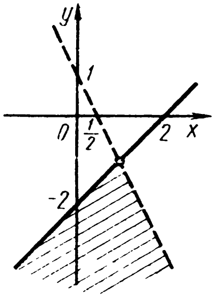


Рис. 151

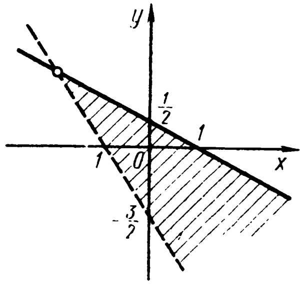


Рис. 152

453. См. рис. 153. **454**. $\varnothing$. **455**. См. рис. 154. **456**. См. рис. 155.

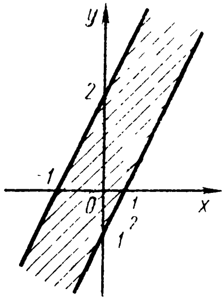


Рис. 153

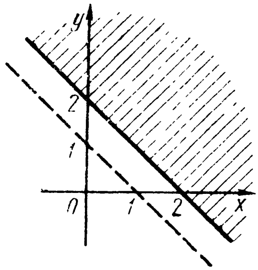


Рис. 154

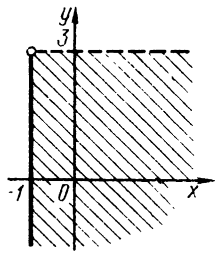


Рис. 155

460. См. рис. 156. **461**. См. рис. 157. **462**. См. рис. 158. **463**. $]-\infty;$

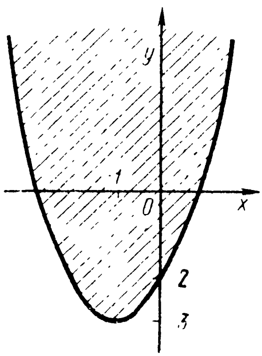


Рис. 156

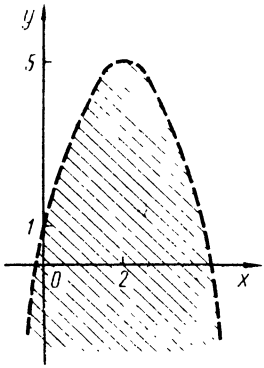


Рис. 157

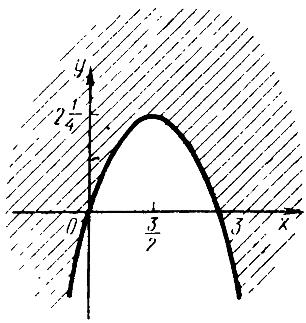


Рис. 158

$-1;] \cup [2; \infty[$. **464**. $]-3, 1[$. **465**. $]-2; 3[$. **466**. $\varnothing$. **467**. R. **468**. $\{3\}$.

469. $20x^3$. **470.** $90x^3$. **471.** $\frac{2}{x^3}$. **472.** $\frac{-1}{4\sqrt{x^3}}$. **473.** $\frac{-1}{4\sqrt{x^3}}$. **474.** Минимум при $x = 3$; максимум при $x = -1$. **475.** Минимум при $x = -1$; максимум при $x = 3$. **476.** Минимум при $x = -\frac{5}{3}$. **477.** Максимум при $x = \frac{7}{10}$.

478. Если $a > 0$, то минимум при $x = -\frac{b}{2a}$; если $a < 0$, то максимум при $x = -\frac{b}{2a}$. **481.** $\frac{\pi 63}{8 \ln 2}$. **482.** $\frac{\pi}{2}(e^4 - 1)$. **483.** $\pi(24 \ln 4 - 22{,}5)$.

485. $\frac{k}{2} l^2$. **486.** $kmM\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$. **487.** $\frac{2a+b}{6} h^2$. **488.** $(a + b) h^2$, где a, b и h — размеры аквариума, h — высота. **489.** $0{,}5SH^2$, где H — высота бака, S — площадь его поперечного сечения. **490.** $kmM : (r(r + l))$. **491.** $\frac{g^2M^3}{6m^2}$.

492. $\frac{\pi}{12} R^2H^3d$. **493.** $\frac{1}{6} S\gamma\omega^2l^3$. **494.** $\frac{a}{6} \gamma d\omega^2b^3$. **495.** $\frac{a\gamma d}{24} \omega^2h^3$.

496. $\frac{a}{6} h^2$ и $\frac{a}{3} h^2$; увеличится в два раза. **497.** $p_0V \ln 5$, где p_0 — начальное давление в цилиндре, V — его объем.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Семен Исаакович Шварцбурд,
Олег Сергеевич Ивашев-Мусатов

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

И.Б. №-986

Редактор М. М. Панурина
Художник М. В. Алисова
Художественный редактор В. П. Спирова
Технический редактор Н. А. Битюкова
Корректор Г. И. Кострикова

Сдано в набор 19/X 1976 г. Подп. к печати 10/I 1977 г Формат $60\times90^1/_{16}$. Бум. тип. № 3. Объем 7 печ. л. Усл. п. л. 7. Уч.-изд. л. 6,61. Изд. № СП-535. Тираж 100000 экз. Зак. № 808. Цена 18 коп.

План выпуска литературы издательства «Высшая школа» (профтехобразование) на 1977 г. Позиция № 4.
Издательство «Высшая школа»
Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14

Ярославский полиграфкомбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
150014, Ярославль, ул. Свободы, 97.

18 коп.