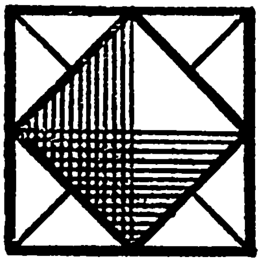
В.Д.Чистяков

СТАРИННЫЕ ЗАДАЧИ
по элементарной математике

В.Д.Чистяков СТАРИННЫЕ ЗАДАЧИ

В. Д. Чистяков

СТАРИННЫЕ ЗАДАЧИ по элементарной математике



Издание третье, исправленное

Минск
«Вышэйшая школа»
1978

51 (09)
Ч68
УДК 51 (023)

Ч $\frac{20202-035}{М\ 304(05)-78}$ 38—78

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Народная мудрость гласит, что, не зная прошлого, невозможно понять подлинный смысл настоящего и цель будущего. Это, конечно, относится и к математике.

В этой книге собраны старинные задачи различных народов и эпох. Не приходится доказывать, что опыт использования старинных задач на уроках и внеклассных занятиях вызывает интерес к математике, побуждает детей к самостоятельному творчеству, проявлению инициативы и смекалки, дает учителям естественный повод для небольших исторических экскурсов о составителях задач, которые, как правило, были крупнейшими математиками своего времени, и о состоянии математических дисциплин далекого прошлого.

По мнению автора, книга может быть занимательной и полезной не только для учащихся и учителей, но и для любого читателя, который интересуется математикой и ее историей.

Настоящее третье издание мало отличается от второго, исправленного и дополненного. В новом издании заново проверен весь материал книги и в нужных местах внесены необходимые уточнения и исправления. Как и в предыдущих изданиях, все исторические сведения и решения старинных задач даются в модернизированном виде с широким использованием общепринятой символики.

Автор сердечно благодарит многочисленных читателей, внимательно изучивших предыдущие издания и приславших свои критические замечания и пожелания.

Искреннюю признательность автор выражает профессору Ю. С. Богданову, который ценными советами еще при работе над вторым изданием помог улучшить содержание книги.

Автор

Часть I. ТЕКСТЫ ЗАДАЧ

ЗАДАЧИ ВАВИЛОНА

1. За длину окружности вавилоняне принимали периметр вписанного в эту окружность правильного шестиугольника. Найти приближение для π, которым пользовались вавилоняне.

2. Разделить прямой угол на три равные части.

3. Для определения площади четырехугольника вавилоняне брали произведение полусумм противоположных сторон. Выяснить, для каких четырехугольников эта формула точно определяет площадь.

Далее, для определения площади равнобедренного треугольника вавилоняне иногда брали произведение боковой стороны на половину основания. Выяснить, при каком предположении формула для вычисления площади равнобедренного треугольника является предельным (частным) случаем формулы для определения площади четырехугольника.

ЗАДАЧИ ЕГИПТА

ЗАДАЧИ ИЗ ПАПИРУСА РАЙНДА

4. Найти число, если известно, что от прибавления к нему $^2/_3$ его и вычитания от полученной суммы ее трети получается число 10.

5. У семи лиц по семи кошек; каждая кошка съедает по семи мышей, каждая мышь съедает по семи колосьев, из каждого колоса может вырасти по семь мер ячменя. Как велики числа этого ряда и их сумма?

6. Египтяне, заменяя площадь круга площадью равновеликого квадрата, брали за сторону последнего $^8/_9$ диаметра круга. Найти отсюда приближенное значение для π.

7. При вычислении площади равнобедренного треугольника египтяне брали половину произведения основания на боковую сторону. Вычислить в процентах, как велика ошибка, если основание равнобедренного треугольника равно 4, а боковая сторона — 10.

8. Для вычисления площади равнобокой трапеции египтяне брали произведение полусуммы оснований на боковую сторону. Вычислить в процентах погрешность, если нижнее основание равно 6, верхнее 4, боковая сторона 20.

ЗАДАЧИ ИЗ МОСКОВСКОГО ПАПИРУСА

9. Определить объем квадратной усеченной пирамиды, если ее высота равна 6, сторона нижнего основания 4, верхнего 2.

10. Определить длину сторон прямоугольника, если известно их отношение и площадь фигуры.

ЗАДАЧА ИЗ АКМИМСКОГО ПАПИРУСА

11. Некто взял из сокровищницы $^1/_{13}$. Из того, что осталось, другой взял $^1/_{17}$, оставил же он в сокровищнице 150. Сколько было в сокровищнице первоначально?

ЗАДАЧИ ГРЕЦИИ

ЗАДАЧИ ПИФАГОРА

12. Доказать, что квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равновелик сумме квадратов, построенных на катетах.

13. Найти все пифагоровы числа, т. е. все тройки целых положительных чисел x, y, z, которые были бы решениями уравнения $x^2+y^2=z^2$.

14. Сумма любого числа последовательных нечетных чисел, начиная с единицы, есть точный квадрат.

15. Всякое нечетное число, кроме единицы, есть разность двух квадратов.

В пифагорейской школе это утверждение доказывалось на частных примерах геометрически. Спрашивается: как? Убедитесь в правильности утверждения в самом общем виде, не прибегая к геометрическим иллюстрациям.

ЗАДАЧА ГИППОКРАТА ХИОССКОГО

16. Доказать, что сумма площадей серпов (луночек Гиппократа), лежащих между дугой полуокружности, построенной на гипотенузе, как на диаметре, и дугами кругов, построенных на катетах того же прямоугольного треугольника, как на диаметрах, равна площади рассматриваемого прямоугольного треугольника.

ЗАДАЧИ ЕВКЛИДА

(Из трактата «Начала»)

17. На данной конечной прямой AB построить равносторонний треугольник.

18. Разделить произвольный угол на две равные части.

19. Построить параллелограмм, стороны которого наклонены под данным углом, так, чтобы он был равновелик данному треугольнику.

20. В данный круг вписать треугольник, равноугольный данному треугольнику.

21. Данную прямую рассечь так, чтобы прямоугольник, заключенный между целой и одним из отрезков, был равен квадрату на оставшемся отрезке (задача о золотом сечении).

22. Доказать, что простых чисел существует бесконечное множество.

ЗАДАЧА АПОЛЛОНИЯ

23. Построить окружность, касающуюся трех данных окружностей.

ЗАДАЧИ АРХИМЕДА

24. Если круг описан около квадрата, а другой в него вписан, то описанный круг по площади вдвое больше вписанного.

25. Архимед доказал: 1) каждый круг равновелик прямоугольному треугольнику, если радиус равен одному из катетов, а выпрямленная окружность равна другому катету; 2) круг относится к квадрату своего диаметра, как 11 к 14.

Покажите, что оба положения Архимеда тождественны с современным правилом вычисления: площадь круга равна $^{22}/_{7}\ r^2$.

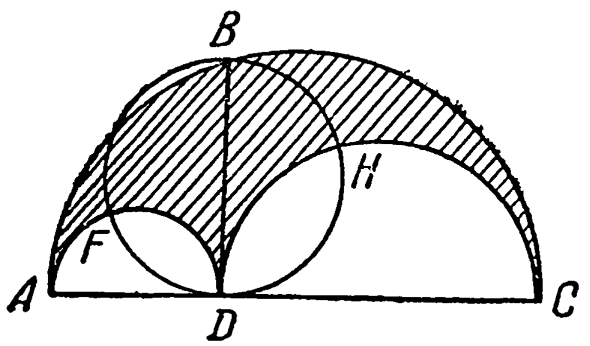


Рис. 1

26. Из точки B полукруга ABC на диаметр AC опущен перпендикуляр BD и на отрезках AD и DC, как на диаметрах, построены два полукруга AFD и DHC (рис. 1). Доказать, что площадь $AFDHCB$ полученной фигуры равна площади круга диаметра BD.

27. Поверхность шарового сегмента равна площади круга, имеющего радиусом прямую, которая проведена от вершины сегмента к окружности, служащей ему основанием.

28. Найти шар, имеющий объем данного конуса или цилиндра.

29. Цилиндр, в основании которого большой круг шара, а высота — диаметр этого шара, имеет объем, равный $^3/_2$ объема, и поверхность, равную $^3/_2$ поверхности шара.

30. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots$$

31. Найти сумму квадратов n первых чисел натурального ряда.

32. Назвать некоторые числа, не только превосходящие число песчинок в куче, равной земному шару, но даже число песчинок в куче, равной всей Вселенной, если под Вселенной понимать шар, центр которого находится в центре Земли, а радиус равен расстоянию между центрами Земли и Солнца.

33. Построить приближенно правильный семиугольник с помощью циркуля и линейки.

34. Задача о быках.

Сколько у Солнца быков, найди для меня, чужестранец.
(Ты их, подумав, считай, мудрости если не чужд.)
Как на полях Тринакрийской Сицилии острова тучных
Их в четырех стадах много когда-то паслось.
Цветом стада различались: блистало одно млечно-белым,
Темной морской волны стада другого был цвет,

Рыжим третие было, последнее пестрым.
И в каждом
Стаде была самцов множеством тяжкая мощь,
Все же храня соразмерность такую: представь,
чужестранец,
Белых число быков в точности было равно
Темных быков половине и трети и полностью
рыжим;
Темных число быков четверти было равно
Пестрых с прибавлением пятой и также
полностью рыжим;
Пестрой же шерсти быков так созерцай число:
Части шестой и седьмой от стада быков
серебристых
Также и рыжим всем ты их число поравняй.
В тех же стадах коров было столько:
число белошерстных
В точности было равно темного стада всего
Части четвертой и третьей, коль сложишь
ты обе их вместе;
Темных число же коров части четвертой опять
Пестрого стада равнялось, коль пятую
долю добавишь
И туда же быков в общее стадо причтешь.
Те же, чья пестрая шерсть, равночисленным
множеством были
Рыжего стада частям пятой и с нею шестой.
Рыжих коров же считалось количество
равным полтрети
Белого стада всего с частию взятой седьмой.
Сколько у Солнца быков, чужестранец,
коль точно ты скажешь,
Нам раздельно назвав тучных быков число,
Также раздельно коров, сколько каждого
цвета их было,
Не назовет хоть никто в числах невеждой тебя,

Все ж к мудрецам причислен не будешь.
Учти же, пожалуй
Свойства какие еще Солнца быков числа.
Если быков среброшерстных ты с темными
вместе смешаешь
Так, чтобы тесно они стали бы в ширь
и в длину
Мерою равной, тогда на обширных полях
Сицилийских
Плотным квадратом они площадь большую
займут.
Если же рыжих и пестрых в одно ты
смешаешь стадо,
Лесенкой станут они, счет с единицы начав,
Так что фигуру они треугольную нам образуют;
Цвета иного быков нам нет нужды
добавлять.
Если ты это найдешь, чужестранец,
умом пораскинув,
И сможешь точно назвать каждого
стада число,
То уходи, возгордившись победой,
и будет считаться,
Что в этой мудрости ты все до конца
превзошел.

ЗНАМЕНИТЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДРЕВНОСТИ

Задачи об удвоении куба

35. Требуется построить ребро куба, который по объему был бы в два раза больше данного куба. Выполнить построение при помощи «вставок» (см. указания).

Задача о трисекции угла

36. Требуется произвольный угол разделить на три равные части. Выполнить построение способом Архимеда при помощи циркуля и передвижной линейки с двумя отметками (см. указания).

Задача о квадратуре круга

37. Построить квадрат, площадь которого была бы равновелика площади данного круга. Решить задачу приближенно при помощи треугольника Бинга (см. указания).

ЗАДАЧА ГИПСИКЛА АЛЕКСАНДРИЙСКОГО

38. Доказать, что в арифметической прогрессии с четным числом членов сумма членов второй половины превышает сумму членов первой половины на число, кратное квадрату половины числа членов.

ЗАДАЧИ ГЕРОНА

39. Определить площадь треугольника, если даны три его стороны: $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$.

40. Найти треугольники с целочисленными площадями (треугольники Герона), длины сторон которых являются последовательными числами.

ЗАДАЧА НИКОМАХА

41. Показать, что если разбить ряд всех нечетных чисел на группы, в которых число членов будет возрастать как ряд натуральных чисел, то сумма членов каждой группы будет равна кубу числа членов.

ЗАДАЧА ПТОЛЕМЕЯ

42. Доказать, что в четырехугольнике, вписанном в окружность, сумма произведений противоположных сторон равняется произведению диагоналей.

ЗАДАЧИ ДИОФАНТА

(Из трактата «Арифметика»)

43. Найти три числа так, чтобы наибольшее превышало среднее на данную часть ($^1/_3$) наименьшего, чтобы среднее превышало меньшее на данную часть ($^1/_3$) наибольшего и чтобы наименьшее превышало число 10 на данную часть ($^1/_3$) среднего числа.

44. Решить систему

$$x + y = 10,$$
$$x^2 + y^2 = 68.$$

45. Катет прямоугольного треугольника есть точный куб, другой катет представляет разность между этим кубом и его стороной (т. е. первой степенью), а гипотенуза есть сумма куба и его стороны. Найти стороны.

46. Требуется число 100 разделить два раза так, чтобы большая его часть от первого деления была вдвое более меньшей части от второго деления и чтобы большая часть от второго деления была втрое более меньшей части от первого деления.

47. Найти два числа, сумма которых 20, а произведение 96.

48. Найти два числа, отношение которых 3, а отношение суммы квадратов этих чисел к их сумме равно 5.

49. Найти три числа, если дано, что произведение суммы первых двух на третье есть 35, суммы первого с третьим на второе — 27, а суммы второго с третьим на первое — 32.

50. Найти два числа, произведение которых, сложенное с каждым из данных чисел, составит куб некоторого числа.

51. Найти три числа так, чтобы суммы всех трех и каждых двух были квадратами.

ЗАДАЧИ ПАППА АЛЕКСАНДРИЙСКОГО

(Из трактата «Математическое собрание»)

52. Дана точка D на биссектрисе угла. Провести через эту точку прямую линию так, чтобы отрезок ее внутри угла имел данную длину.

53. Показать, что в кругах площади подобных сегментов относятся, как квадраты хорд, служащих им основаниями.

54. Доказать, что во всяком треугольнике параллелограмм, построенный на одной из его сторон внутри треугольника, так что две его вершины лежат вне треугольника, равновелик сумме параллелограммов, построенных на двух других сторонах треугольника так, что стороны их, параллельные сторонам треугольника, проходят через вершины первого параллелограмма.

ЗАДАЧИ ИЗ «ГРЕЧЕСКОЙ АНТОЛОГИИ»

55. — Скажи мне, знаменитый Пифагор, сколько учеников посещают твою школу и слушают твои беседы?

— Вот сколько, — ответил философ, — половина изучает математику, четверть — музыку, седьмая часть пребывает в молчании и, кроме того, есть еще три женщины.

56. Видя, что плачет Эрот, Киприда его вопрошает:
«Что так тебя огорчило, ответствуй немедля!»
«Яблок я нес с Геликона немало,—
Эрот отвечает,—
Музы, отколь ни возьмись, напали
на сладкую ношу.

Частью двенадцатой вмиг овладела Евтерпа,
а Клио
Пятую долю взяла. Талия — долю восьмую.
С частью двадцатой ушла Мельпомена.
Четверть взяла Терпсихора,
С частью седьмою Эрато от меня убежала.
Тридцать плодов утащила Полимния. Сотня
и двадцать
Взяты Уранией; триста плодов унесла
Каллиопа.
Я возвращаюсь домой почти что с пустыми
руками.
Только полсотни плодов мне оставили
музы на долю».

57. Три грации имели по одинаковому числу плодов и встретили девять муз. Каждая из граций отдала каждой из муз по одинаковому числу плодов. После этого у каждой из муз и каждой из граций стало по одинаковому числу плодов. Сколько было плодов у каждой из граций до встречи с музами?

58. Вот Полифема циклопа из меди статуя отлита.
Руку, уста и единое око ваятель сделал на диво,
Скрывши в них трубы: водой великан
истекает как будто.
Хитрое в трубах устройство: ведущая в руку
способна
Весь водоем до краев через три дня наполнить.
Оку — достаточно дня, а устам и всего лишь
две пятых,
Вместе все три водоем скоро ли могут
наполнить?

59. Ослица и мул шли бок о бок с тяжелой поклажей на спине. Ослица жаловалась на свою непомерно тяжелую ношу. «Чего ты жалуешься?— ответил ей мул.— Ведь если я возьму у тебя один мешок, ноша моя станет вдвое тяжелее твоей. А вот если бы ты сняла с моей спины один мешок,

твоя поклажа стала бы одинакова с моей». Сколько мешков несла ослица и сколько нес мул?

60. — Хроноса (бог времени) вестник, скажи, какая часть дня миновала?

— Дважды две трети того, что прошло, остается. (У древних греков день длился 12 часов.)

ЗАДАЧА МЕТРОДОРА

61. Здесь погребен Диофант, и камень могильный
При счете искусном расскажет нам,
Сколь долог был его век.
Велением бога он мальчиком был шестую часть своей жизни;
В двенадцатой части затем прошла его светлая юность.
Седьмую часть жизни прибавим — перед нами очаг Гименея.
Пять лет протекли, и прислал Гименей ему сына.
Но горе ребенку! Едва половину он прожил
Тех лет, что отец, как скончался несчастный.
Четыре года страдал Диофант от утраты такой тяжелой
И умер, прожив для науки. Скажи мне,
Скольких лет достигнув, смерть восприял Диофант?

ЗАДАЧИ КИТАЯ

ЗАДАЧИ ИЗ ТРАКТАТА «ДЕВЯТЬ ОТДЕЛОВ ИСКУССТВА СЧЕТА»

62. 5 волов и 2 барана стоят 11 таэлей, а 2 вола и 8 баранов стоят 8 таэлей. Сколько стоит отдельно вол и баран?

63. Из трех бочек риса одинаковой емкости похищено тремя ворами некоторое количество риса. Выяснилось, что в первой бочке остался 1 го риса, во второй — 1 шинг 4 го и в третьей — 1 го. Воры показали: 1-й, что он отсыпал рис из первой бочки при помощи лопаты, 2-й, что он пользовался деревянным башмаком, а 3-й — миской, причем они соответственно брали из второй и третьей бочек. Емкость лопаты — 1 шинг 9 го, башмака — 1 шинг 7 го, миски — 1 шинг 2 го.

Требуется узнать, сколько похитил каждый вор. Известно, что 10 го = 1 шингу, 10 шингов = 1 тау, 10 тау = = 1 ши.

ЗАДАЧА ИЗ ТРАКТАТА «НАЧАЛА ИСКУССТВА ВЫЧИСЛЕНИЯ»

64. Определить стороны прямоугольного треугольника, если известны его площадь и периметр.

ЗАДАЧА СУНЬ-ЦЗЫ

65. Найти число, которое при делении на 3 дает остаток 2, а при делении на 5 дает остаток 3, наконец, при делении на 7 — остаток 2.

ЗАДАЧИ ИЗ ТРАКТАТА «МАТЕМАТИКА В ДЕВЯТИ КНИГАХ»

66. Имеется амбар. Ширина 3 чжана, длина 4 чжана 5 чи; наполняющее его просо составляет 10 000 ху. Спрашивается, какова высота амбара.

67. Имеется бамбук из девяти колен. Объем трех нижних колен 4 шэна, четырех верхних колен 3 шэна. Спрашивается, каковы объемы двух средних колен, если объем каждого колена отличается от соседних на равную величину.

68. Имеется 9 слитков золота и 11 слитков серебра, их взвесили, вес как раз совпал. Переложили слиток золота и слиток серебра, золото стало легче на 13 ланов. Спрашивается, каков вес слитка золота и слитка серебра каждого в отдельности.

69. Рысак и кляча движутся от Чаньаня к княжеству Ци, которое удалено от Чаньаня на 3000 ли. В первый день рысак пробегает 193 ли, каждый следующий день пробегает на 13 ли больше. Кляча в первый день пробегает 97 ли, каждый последующий день пробегает на половину ли меньше. Рысак первым достиг княжества Ци, повернул обратно и в некотором месте встретил клячу. Спрашивается, через сколько дней они встретились и сколько ли пробежала каждая лошадь.

70. 5 буйволов и 2 барана стоят 10 ланов золота, 2 буйвола и 5 баранов стоят 8 ланов. Спрашивается, сколько стоят буйвол и баран.

71. Из 3 снопов хорошего урожая, 2 снопов среднего урожая и 1 снопа плохого урожая получили 39 доу зерна. Из 2 снопов хорошего урожая, 3 снопов среднего урожая и 1 снопа плохого урожая получили 34 доу зерна. Из 1 снопа хорошего урожая, 2 снопов среднего урожая и 3 снопов плохого урожая получили 26 доу зерна. Спрашивается, сколько зерна получили из каждого снопа хорошего, среднего и плохого урожая.

72. Двум снопам хорошего урожая, 3 снопам среднего урожая и 4 снопам плохого урожая не хватает до 1 доу соответственно по 1 снопу среднего, плохого и хорошего урожая. Спрашивается, сколько зерна получили из каждого снопа хорошего, среднего и плохого урожаев.

73. Два снопа урожая *А*, 3 снопа урожая *Б*, 4 снопа урожая *В* превышают по весу дань: вес 2 снопов урожая *А* превышает дань на вес 1 снопа урожая *Б*, вес 3 снопов урожая *Б* — на вес 1 снопа урожая *В*, вес 4 снопов урожая *В* — на вес 1 снопа урожая *А*. Спрашивается, каков вес каждого из снопов урожаев *А*, *Б*, *В*.

74. Продали 2 буйволов, 5 баранов, купили 13 свиней, осталось 1000 цяней. Продали 3 буйволов, 3 свиньи, купили 9 баранов, как раз хватило. Продали 6 баранов, 8 свиней, купили 5 буйволов, не хватило 600 цяней. Спрашивается, сколько стоят буйвол, баран и свинья.

75. У 5 семей имеется общий колодец. Чтобы достать до поверхности воды, 2 веревкам семьи *А* недостает 1 веревки семьи *В*, 3 веревкам семьи *Б* недостает 1 веревки семьи *В*, 4 веревкам семьи *В* недостает 1 веревки семьи *Г*, 5 веревкам семьи *Г* недостает 1 веревки семьи *Д*, 6 веревкам семьи *Д* недостает 1 веревки семьи *А*. Спрашивается, какова глубина колодца и какова длина каждого куска веревки.

76. Имеется водоем со стороной в 1 чжан. В центре его растет камыш, который выступает над водой на 1 чи. Если потянуть камыш к берегу, то он как раз коснется его. Спрашивается, какова глубина водоема и какова длина камыша (1 чжан = 10 чи).

77. Два человека находятся в одном месте. Норма ходьбы *А* есть 7, норма ходьбы *Б* есть 3. *Б* идет на восток. *А* идет 10 бу на юг, а затем идет по косому направлению на северо-восток до встречи с *Б*. Спрашивается, какой путь прошел каждый из них, *А* и *Б*.

78. Имеется дверь, высота которой больше ее ширины на 6 чи 8 цуней. Наибольшее расстояние между углами (диагональ) 1 чжан. Спрашивается, каковы ширина и высота двери.

79. Имеется город в виде квадрата со стороной неизвестного размера, в центре каждой стороны находятся ворота. На расстоянии 20 бу от северных ворот стоит столб. Если пройти от южных ворот 14 бу и повернуть на запад, пройти еще 1775 бу, то можно увидеть столб. Спрашивается, какова сторона города.

80. Диаметр колодца 5 чи, глубина неизвестна. У верхнего края колодца поставлен шест в 5 чи. Вершина шеста наблюдается на одном уровне с границей воды и стены, а на диаметре откладывается 4 цуня. Спрашивается, какова глубина колодца.

81. Имеется конус. Обвод основания 3 чжана 5 чи, высота 5 чжанов 1 чи. Спрашивается, каков объем.

82. Имеется круглое тин (усеченный конус). Нижний обвод 3 чжана, верхний обвод 2 чжана, высота 1 чжан. Спрашивается, каков объем.

83. Имеется горизонтальный катет в 5 бу, вертикальный катет в 12 бу. Спрашивается, какова сторона квадрата, вписанного в этот треугольник.

84. Столб отстоит от человека на неизвестном расстоянии. Поставлены 4 столбика, которые удалены друг от друга на 1 чжан. Пусть два столбика находятся слева от наблюдателя, сам же он находится у правого последнего столбика и наблюдает столб на расстоянии 3 цуня от правого переднего столбика. Спрашивается, на сколько удален от человека столб.

85. Гора расположена на запад от столба. Высота ее неизвестна. Она удалена от столба на 53 ли. Высота столба 9 чжанов 5 чи. В 3 ли к востоку от него стоит человек и наблюдает вершину столба на одном уровне с вершиной горы. Уровень зрения человека расположен на высоте 7 чи. Спрашивается, какова высота горы.

ЗАДАЧА ЛЮ ХУЭЯ

86. На холме растет сосна неизвестной высоты. Внизу на равнине поставлены два шеста, каждый высотой 20 футов (a), на одной прямой с деревом и на расстоянии друг от друга в 50 шагов (b). Верхушка дерева и конец первого шеста образуют прямую с точкой на земле, расположенной в 7 шагах и 4 футах позади шеста (c). Верхушка дерева образует опять-таки прямую линию с концом заднего шеста и точкой на земле в 8 шагах и 5 футах позади шеста (d). Требуется узнать высоту сосны (x) и расстояние от переднего шеста до холма (y).

ЗАДАЧИ ИНДИИ

ЗАДАЧИ ИЗ БАХШАЛИЙСКОЙ РУКОПИСИ

87. Из четырех жертвователей второй дал вдвое больше первого, третий — втрое больше второго, четвертый — вчетверо больше третьего, а все вместе дали 132. Сколько дал первый?

88. Найти число, которое от прибавления 5 или отнятия 11 обращается в полный квадрат.

ЗАДАЧА СРИДХАРЫ

89. Пятая часть пчелиного роя сидит на цветке кадамба, одна треть на цветках силиндха. Утроенная разность двух последних чисел направилась к цветам кутая. И осталась еще одна пчелка, летающая взад и вперед, привлеченная ароматом жасмина и пандануса. Спрашивается, сколько всего пчел.

ЗАДАЧИ АРИАБХАТЫ

90. Два светила находятся на данном расстоянии (d) друг от друга, движутся одно к другому с данными скоростями (v_1, v_2). Определить точку их встречи.

91. Определить число ядер треугольной кучи.

92. Два лица имеют равные капиталы, причем каждый состоит из известного числа вещей одинаковой ценности и известного числа монет. Но как число вещей, так и суммы денег у каждого различны. Какова ценность вещи?

93. Старинное индийское правило гласит, что надо разделить диаметр круга на 15 равных частей и взять 13 таких частей для стороны квадрата, равного (приблизительно) кругу. Определить приближение для π, получающееся в этом случае, и оценить в процентах ошибку с точностью до третьего десятичного знака.

ЗАДАЧИ БРАМАГУПТЫ

94. Найти высоту свечи, зная длины теней, бросаемых гномоном (вертикальным шестом) в двух различных положениях, при условии, что дано расстояние между гномонами.

95. Показать, что произведение двух сторон треугольника, деленное на длину перпендикуляра, опущенного на третью сторону из противоположной вершины, равно диаметру описанного круга.

96. Доказать, что квадрат хорды, перпендикулярной к диаметру, деленный на учетверенный любой отрезок диаметра и сложенный с тем же отрезком, равняется диаметру.

97. Показать, что меньший из отрезков диаметра, пересеченного перпендикулярной хордой, равен полуразности диаметра и корня квадратного из разности квадратов диаметра и хорды.

ЗАДАЧИ БХАСКАРЫ

98. Если некоторое число умножить на 5, от произведения отнять его треть, остаток разделить на 10 и прибавить к этому последовательно $^1/_3$, $^1/_2$ и $^1/_4$ первоначального числа, то получится 68. Как велико число?

99. Показать, что $\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}} = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

100. Найти прямоугольный треугольник, в котором гипотенуза выражалась бы тем же числом, что и площадь.

101. Зная длины m и n двух палок бамбука, вертикально воткнутых в землю на известном расстоянии, вычислить длину перпендикуляра к земле, опущенного из точки пересечения прямых, соединяющих верхний конец одной палки с основанием другой, и длины отрезков между основанием этого перпендикуляра и основаниями палок.

102. Некто сказал своему другу: «Дай мне 100 рупий, и я буду вдвое богаче тебя», на что последний ответил: «Если ты мне дашь только 10 рупий, я стану вшестеро богаче тебя». Спрашивается, сколько было у каждого.

103. Решить в общем виде квадратное уравнение

$$ax^2 + bx = c.$$

104. Корень квадратный из половины пчелиного роя полетел к кусту жасмина. Восемь девятых роя осталось дома. Одна пчелка полетела за трутнем, обеспокоенная его жужжанием в цветке лотоса, куда он попал вечером, привлеченный приятным ароматом, и не мог оттуда выбраться, так как цветок закрылся. Скажи мне число пчел роя.

105. Найти число, которое, будучи умножено на 12, по прибавлении к своему кубу равняется ушестеренному квадрату самого себя, увеличенному тридцатью пятью.

106. Решить уравнение $x^4 - 2x^2 - 400x = 9999$. (Решается элементарно.)

107. Найти высоту кругового сегмента, если известны диаметр круга и основание сегмента.

108. Решить в рациональных числах уравнение

$$ax + by + c = xy.$$

109. Назови мне число, которое, умноженное на 3, сложенное с $^3/_4$ произведения, разделенное на 7, уменьшенное на $^1/_3$ частного, умноженное само на себя, уменьшенное на 52, после извлечения квадратного корня, прибавления 8 и деления на 10 будет равняться 2.

110. На две партии разбившись,
Забавлялись обезьяны.
Часть восьмая их в квадрате
В роще весело резвилась.

Криком радостным двенадцать
Воздух свежий оглашали.
Вместе сколько, ты скажешь,
Обезьян там было в роще?

111. Сколько обезьян в стае, если квадрат пятой части, уменьшенной тремя, спрятался в пещере и только одна осталась на виду, взобравшись на дерево?

112. Посреди сражения яростный сын Притхи схватил некоторое число стрел, чтобы убить Карну; половину их он употребил на собственную защиту, а учетверенное количество квадратного корня — против лошадей; 6 стрел пронзили возницу Салью, 3 других прорвали зонтик Карны, разбили его лук и знамя и только одна последняя пронзила ему голову. Сколько было стрел у Арджуны (сына Притхи)?

113. Удесятеренный корень квадратный из стада лебедей полетел по направлению к озеру, заметив, что сгущаются тучи. Однако восьмая часть всех лебедей скрылась в ненюфарах (цветущие водяные растения) и только шесть лебедей безмятежно плескалось в волнах. Скажи мне, сколько всех лебедей?

114. Над озером тихим, с полфута размером,
Высится лотоса цвет.
Он рос одиноко. И ветер порывом
Отнес его в сторону. Нет
Больше цветка над водой.
Нашел же рыбак его ранней весной
В двух футах от места, где рос.
Итак, предложу я вопрос:
Как озера вода здесь глубока?

115. На берегу реки рос тополь одинокий.
Вдруг ветра порыв его ствол надломал.
Бедный тополь упал. И угол прямой
С теченьем реки его ствол составлял.
Запомни теперь, что в том месте река
В четыре лишь фута была широка.

Верхушка склонилась у края реки.
Осталось три фута всего от ствола,
Прошу тебя, скоро теперь мне скажи:
У тополя как велика высота?

ЗАДАЧИ ПАРАМАДИСВАРЫ

116. Найти число, которое, будучи умножено на 3, а затем разделено на 5, увеличено на 6, после чего из него извлечен корень квадратный, отнята единица и результат возведен в квадрат, дает 4.

117. Решить уравнение $y^2 = ax^2 + 1$, которое позднее в Европе стало называться уравнением Пелля.

118. Доказать, что в четырехугольнике, диагонали которого взаимно перпендикулярны, корень квадратный из суммы квадратов двух противоположных сторон равен диаметру круга, описанного около четырехугольника.

АРАБСКИЕ ЗАДАЧИ

ЗАДАЧИ АЛ-ХОРЕЗМИ

119. Решить квадратные уравнения:

1) $5x^2 = 40x$;

2) $\frac{25}{9}x^2 = 100$;

3) $10x = x^2 + 21$;

4) $x^2 = 12x + 288$;

5) $x^2 + 20\frac{1}{4} = 11\frac{1}{4}x$;

6) $\frac{1}{12}x^2 + \frac{7}{12}x = 19$.

120. В равнобедренный треугольник с боковой стороной 10 и основанием 12 вписать квадрат.

121. Найти такое число, что если отнять от него $1/3$ и $1/4$ его, то в остатке будет 8.

ЗАДАЧА АВИЦЕННЫ

122. Если число, будучи разделено на 9, дает в остатке 1 или 8, то квадрат этого числа, деленный на 9, дает в остатке 1.

ЗАДАЧИ АЛ-КАРХИ

123. Найти число, которое от умножения на $3 + \sqrt{5}$ дает 1.

124. Решить систему

$$x^2 + y^2 = z^2;$$
$$xz = y^2;$$
$$xy = 10.$$

125. Найти площадь прямоугольника, основание которого вдвое больше высоты, а площадь численно равна периметру.

ЗАДАЧА ОМАРА ХАЙЯМА

126. Решить уравнение $\frac{1}{x^2} + 2\frac{1}{x} = 1\frac{1}{4}$.

ЗАДАЧИ БЕГА-ЭДДИНА

127. Разделить число 10 на такие две части, разность которых есть 5.

128. Заиду обещана награда в виде большей из двух частей, дающих в сумме 20, произведение же этих частей 96. Как велика награда?

129. По данным высоте h и радиусам r и R верхнего и нижнего оснований усеченного конуса найти высоту соответствующего полного конуса.

130. Требуется найти число, которое, будучи умножено само на себя, сложено с двумя, затем удвоено, вновь сложено с тремя, разделено на 5, наконец, умножено на 10, в результате дает 50.

ЗАДАЧИ АЛ-КАШИ

131. Копье стояло в воде отвесно и высовывалось наружу на три локтя. Ветер отклонил его и погрузил в воду таким образом, что его вершина стала находиться на поверхности воды, а основание не изменило своего положения. Расстояние между первоначальным местом его появления и местом его исчезновения в воде — пять локтей. Мы хотим узнать длину копья.

132. Доказать, что для любого натурального значения n имеет место равенство $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{1}{30} \times$ $\times (6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n)$ (равенство ал-Каши).

ЗАДАЧИ АЛ-КАЛЬСАДИ

133. Найти число, которое, будучи взято семь раз и сложено с ушестеренным числом, дает 25.

134. Найти число, одна треть и одна четверть которого составляют 21.

РУССКИЕ ЗАДАЧИ

ЗАДАЧИ ИЗ РУКОПИСИ XVII в.

135. Четыре плотника у некоего гостя нанялись двора ставити. И говорит первый плотник так: «Только б де мне одному тот двор ставити, я бы де его поставил един годом». А другой молвил: «Только бы де мне одному тот двор ставити, и я бы де его поставил в два года». А третий молвил: «Только бы де мне одному тот двор ставити, и я бы де его поставил в три года». А четвертый так рек: «Только бы де мне одному тот двор ставити, и я бы де его поставил в четыре года». Ино все те четыре плотника учали тот двор ставити вместе. Ино сколь долго они ставили, сочти мне.

136. Лев съел овцу одним часом, а волк съел овцу в два часа, а пес съел овцу в три часа. Ино хощешь ведати, сколько бы они все три — лев и волк и пес — овцу съели вместе вдруг и сколько бы они скоро ту овцу съели, сочти ми.

137. Пришел христианин в торг и принес лукошко яиц. И торговцы его спрошали: «Много ли у тебя в том лукошке яиц?» И христианин молвил им так: «Яз, господине, всего не помню на перечень, сколько в том лукошке яиц. Только яз помню: перекладывал яз те яйца из лукошка по два яйца, ино одно яйцо лишнее осталось на земли; и яз клал в лукошко по 3 яйца, ино одно же яйцо осталось; и яз клал по 4 яйца, ино одно же яйцо осталось; и яз их клал по 6 яиц, ино одно же яйцо осталося; и яз клал по 7 яиц, ино все по сему пришло. Ино сколько в том лукошке яиц было, сочти ми».

ЗАДАЧИ ИЗ «АРИФМЕТИКИ» Л. Ф. МАГНИЦКОГО

138. Некий торговец купил 112 баранов старых и молодых, дал 49 рублев 20 алтын, за старого платил по 15 алтын и по 2 деньги, а за молодого по 10 алтын, и ведательно есть, колико старых и молодых баранов купил он.

139. Спросил некто учителя: «Скажи, сколько у тебя в классе учеников, так как хочу отдать к тебе в учение своего сына». Учитель ответил: «Если придет еще учеников столько же, сколько имею, и полстолько, и четвертая часть, и твой сын, тогда будет у меня учеников 100». Спрашивается, сколько было у учителя учеников.

140. Егда же кто можаше во едину вервь, которая долготы 5 аршин, связати 100 копий, и ведательно есть, колико таковых же копий возможно связати другой вервью, яже долготою есть $7^1/_2$ аршин (предполагается, что пучки копий имеют в сечении очертания круга).

141. Окрест некоего града бяше водный ров, имеющий внешнее окружение 440 аршин, широта же его 14 аршин, и ведательно есть, колико аршин имать по внутреннему окружению.

142. Случися некоему человеку к стене лествицу прибрати, стены же тоя высота есть 117 стоп. И обрете лествицу долготою 125 стоп. И ведати хощет, колико стоп сея лествицы нижний конец от стены отстояти имать.

143. В некоем кладязе поставлена лествица долготою 41 стопа, а кладязь широтою во все страны по 9 стоп. И ведательно есть, колику оный кладязь глубину мяше.

144. Некий превысокий господин восхоте некое яблоко, суще в диаметре 9 стоп (футов), позлатити сусальным золотом, его же всякий листок в долготе 4 цоль (дюймов), а в широте 2 цоль. И ведательно есть, колико золота таковых листов на позолоту пойдет.

145. Послан человек из Москвы на Вологду, и велено ему в хождении своем совершати на всякий день по 40 верст; потом другий человек в другий (на следующий) день послан в след его, и велено ему идти на день 45 верст, и ведательно есть, в коликий день постигнет (догонит) второй первого.

146. Некий человек продаде коня за 156 рублев; раскаявся же, купец нача отдавати продавцу, глаголя: «Яко несть мне лепо взяти сицевого коня, недостойного таковые высокие цены». Продавец же предложи ему иную куплю, глаголя: «А ще ти мнится велика цена сему коню быти, убо купи токмо гвоздие, их же сей конь имать в подковах своих ног, коня же возьми за тою куплею в дар себе. А гвоздей во всякой подкове по шести, и за один гвоздь даждь ми едину полушку, за другой же две полушки, а за третий копейку и тако все гвозди купи». Купец же, видя толь малу цену и коня хотя в дар себе взяти, обещася тако цену ему платити, чая не больше 10 рублев за гвоздие дати. И ведательно есть, коликим купец он проторговался.

147. В некоеей единой мельнице были трои жерновы, и едины жерновы в нощеденствие могут смолоти 60 четвертей, а другие в толикое же время могут смолоти 54 четверти, третьи же в толикое же время могут смолоти 48 четвертей, и некий человек даде жита 81 четверть, желая вскорости оное смолоти, и насыпа на все три жерновы, и ведательно есть, в колико часов оно жито может смолотися и колико на всякие жерновы достоит мельнику насыпати.

148. Некий великий господин приказал себе шатер сделать в его же окружении на земли 120 стоп, сверх же до земли (по образующей) 32 стопы, и когда к делу шатра того тонкого сукна взято, которое ценой по 2 рубли аршин, в ширину же $2^1/_2$ аршина, ведательно есть, колико аршин того сукна пошло и в коликую цену той шатер стал.

149. Найти число, которое при делении на 2 дает в остатке 1, при делении на 3 дает в остатке 2, при делении на 4 дает в остатке 3, при делении на 5 дает в остатке 4.

150. Задача-шутка. Считаем дни недели, начиная с воскресенья: первый, второй, третий и так далее до седьмого (субботы). Кто-нибудь задумал день. Угадать, какой день он задумал, если угадывающий предлагает ему про себя выполнить следующие несложные вычисления: 1) умножить задуманный номер дня недели на 2; 2) прибавить к произведению 5; 3) умножить сумму на 5; 4) умножить произведение на 10 и назвать полученный результат.

151. Один путник идет от града в дом, а ходу его будет 17 дней, а другой путешественник от дому во град, тот же путь творяше, может пройти в 20 дней, оба же сии человека пойдоша во един и тот же час от мест своих, и ведательно есть, в колико дней сойдутся.

152. Некто пришел в ряд, купил игрушек для малых ребят: за первую игрушку заплатил $^1/_5$ часть всех своих денег, за другую $^3/_7$ остатка от первой покупки, за третью игрушку заплатил $^3/_5$ остатка от второй покупки, а по приезде в дом нашел остальных в кошельке денег 1 руб. 92 коп. Спрашивается, сколько в кошельке денег было и сколько за которую игрушку денег заплачено.

153. Найти число, зная, что, сложив его квадрат с 108, получим число в 24 раза больше искомого.

154. Один человек выпьет кадь пития в 14 дней, а с женою выпьет ту же кадь в 10 дней. И ведательно есть, в колико дней жена его особенно выпьет ту же кадь.

155. Некий человек нанял работника на год, обещав ему дать 12 рублей и кафтан. Но тот по случаю, проработав 7 месяцев, восхотел уйти и просил достойную плату с кафтаном. Ему дали по достоинству 5 рублей и кафтан. Какой цены был оный кафтан?

ЗАДАЧИ ГОЛЬДБАХА

156. Доказать, что любое число вида $4n^4 + 1$ (n — натуральное число) может быть простым только при $n = 1$.

157. Найти сумму всех дробей вида

$$\frac{1}{(n+1)^{m+1}},$$

где m, n — натуральный ряд чисел 1, 2, 3, ...

158. Всякое нечетное число, большее пяти, может быть представлено в виде суммы трех простых чисел. Проверьте это на примере нескольких двузначных чисел.

159. Каждое четное число, начиная с четырех, можно разбить на сумму двух простых чисел. Проверьте это на примере нескольких двузначных чисел.

160. Можно ли поочередно обойти все семь мостов города Кенигсберга (ныне Калининград), соединяющих районы этого города с островом на реке Прегель, проходя по каждому только по одному разу (рис. 2)?

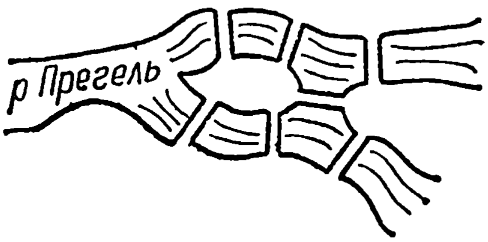


Рис. 2

161. Две крестьянки принесли на рынок 100 яиц, одна больше, нежели другая; обе выручили одинаковые суммы. Первая сказала второй: «Будь у меня твои яйца, я выручила бы 15 крейцеров». Вторая ответила: «А будь твои яйца у меня, я выручила бы за них $6^2/_3$ крейцера». Сколько яиц было у каждой?

162. Преобразовать $\dfrac{8-5\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$.

163. Доказать, что в любом треугольнике точка пересечения медиан, точка пересечения высот (ортоцентр) и центр описанной окружности лежат на одной прямой (прямой Эйлера).

164. Найти число, четвертая степень которого, деленная на половину самого числа и увеличенная на $14^1/_4$, равнялась бы 100.

165. Доказать, что произведение двух чисел, из коих каждое есть сумма четырех квадратов, также равно сумме четырех квадратов.

166. Доказать, что во всяком четырехугольнике сумма квадратов сторон равна сумме квадратов его диагоналей, сложенной с учетверенным квадратом отрезка, соединяющего середины диагоналей.

ЗАДАЧИ ИЗ «КУРСА ЧИСТОЙ МАТЕМАТИКИ» Е. Д. ВОЙТЯХОВСКОГО

167. Капитан на вопрос, сколько имеет в команде своей людей, ответствовал, что $^2/_5$ его команды в карауле, $^2/_7$ в работе, $^1/_4$ в лазарете да 27 налицо. Спрашивается число людей его команды.

168. Собака усмотрела в 150 саженях зайца, который перебегает в 2 минуты по 500 сажен, а собака в 5 минут — 1300 сажен. Спрашивается, в какое время собака догонит зайца.

169. Куплено сукна полторажды полтретья аршина, заплачено полчетвертажды полпята рубли. Спрашивается, сколько должно заплатить за полсемажды полдевята аршина того же сукна (см. указания).

170. Крестьянин менял зайцев на домашних кур, брал за всяких двух зайцев по три курицы; каждая курица снесла яиц третью часть числа всех куриц. Крестьянин, продавая яйца, брал за каждые девять яиц по стольку копеек, сколько каждая курица яиц снесла, за которые выручил он 24 алтына. Спрашивается число кур и зайцев.

171. Веселый француз пришел в трактир с неизвестною суммою своего богатства, занял у содержателя столько денег, сколько у себя имел; из сей суммы издержал 1 рубль. С остатком пришел в другой трактир, где опять, занявши столько, сколько имел, издержал в оном также 1 рубль; потом пришел в третий и четвертый трактир, учинил то же, наконец, по выходе из четвертого трактира не имел ничего. Спрашивается количество его денег.

172. Четыре путешественника: купец с дочерью да крестьянин с женою — нашли без полушки 9 алтын да лапти, из которых крестьянке дали грош без полушки да лапти, а остальные деньги разделили между собой так: купеческая дочь взяла вполтора больше крестьянина, а купец — вполтретья больше крестьянина. Спрашивается, сколько которому досталось.

173. У приезжего гасконца оценили богатство: модный жилет с поношенным фраком в три алтына без полушки, но фрак вполтретья дороже жилета. Спрашивается каждой вещи цена.

174. Нововыезжей в Россию французской мадаме вздумалось оценить свое богатство в чемодане: новой выдумки нарядное фуро и праздничный чепец а ля фигаро. Оценщик был русак, сказал мадаме так: «Богатство твоего первое фуро вполчетверте дороже фигаро; вообще же стоят не с половиною четыре алтына, но настоящая им цена только сего половина». Спрашивается каждой вещи цена, с чем француженка к россам привезена.

175. Служившему воину дано вознаграждение за первую рану 1 коп., за другую 2 коп., за третью 4 коп. и т. д. По истечению нашлось, что воин получил всего вознаграждения 655 руб. 35 коп. Спрашивается число его ран.

176. На вопрос: который час? — ответствовано: $^2/_5$ прошедших часов от полуночи до сего времени равны $^2/_3$ остальных до полудни. Спрашивается число часов того времени.

ЗАДАЧА-ШУТКА М. Ю. ЛЕРМОНТОВА

177. Один из современников М. Ю. Лермонтова, хорошо знавший поэта, писал: «В начале 1841 г. Тенгинский полк стоял в Анапе. Скучающие офицеры, в том числе и Лермонтов, собирались друг у друга. Раз речь зашла о каком-то ученом кардинале, который мог решить в уме самые сложные математические задачи.

— Что вы скажете на это, Лермонтов?— обратился к нему один из почетных батальонеров, старик с Георгием. — Говорят, что вы тоже хороший математик.

— Ничего тут удивительного нет, — отвечал поэт.— Я тоже могу представить вам, если хотите, весьма замечательный опыт математических вычислений.

— Сделайте одолжение.

— Задумайте какое угодно число, и я с помощью простых арифметических действий определю это число.

— Ну что же, попробуйте,— рассмеялся старик, очевидно, сомневавшийся.— Но как велико должно быть задуманное число?

— А это безразлично. Но на первый раз, для скорости вычислений, ограничьтесь числом из двух цифр.

— Хорошо, я задумал,— сказал батальонер, подмигнув стоявшим вокруг него офицерам, и сообщил задуманное число сидевшей рядом с ним даме.

— Благоволите прибавить к нему,— начал Лермонтов,— еще 25 и считайте мысленно или посредством записи.

Старик попросил карандаш и стал записывать на бумажке.

— Теперь не угодно ли прибавить еще 125,

Старик прибавил.

— Засим вычтите 37.

Старик вычел.

— Еще вычтите то число, которое вы задумали сначала.

Старик вычел.

— Теперь остаток умножьте на 5.

Старик умножил.

— Засим полученное число разделите на 2.

Старик разделил.

— Теперь посмотрим, что у вас должно получиться... Кажется, если не ошибаюсь, число $282^1/_2$?

Батальонер даже привскочил,— так поразила его точность вычисления.

— Да, совершенно верно: $282^1/_2$. Я задумал число 50.— И он снова проверил вычисление.— Действительно, получается $282^1/_2$. Фу, да вы не колдун ли?..

— Колдун не колдун, а математике учился, — улыбнулся Лермонтов.

— Но позвольте...— старик, видимо, сомневался: не подсмотрел ли Лермонтов его цифры, когда он производил вычисления.— Нельзя ли повторить?

Старик записал задуманное число, никому не показав, положил под подсвечник и стал считать в уме даваемые поэтом числа. И на этот раз остаток был угадан.

Все заинтересовались. Старик только развел руками. Хозяйка дома попросила повторить еще раз опыт, и еще раз опыт удался».

Спрашивается, на чем основан секрет отгадывания.

ЗАДАЧА В. Г. БЕНЕДИКТОВА

178. Одна баба, торговавшая яйцами, имея у себя в продаже девять десятков яиц, отправила на рынок трех дочерей своих и, вверив старшей и самой смышленой из них десяток, поручила другой три десятка, третьей полсотни. При этом она сказала им:

— Условьтесь наперед между собой насчет цены, по которой вы продавать будете, и от этого условия не отступайте; все вы крепко держитесь одной и той же цены; но я надеюсь, что старшая дочь моя, по своей смышлености, даже и при общем между вами условии по какой цене продавать, сумеет выручить столько за свой десяток, сколько вторая выручит за три десятка, да научит и вторую сестру выручить за ее три десятка столько же, сколько младшая за полсотни. Пусть выручки всех троих да цены будут одинаковы. Притом я желала бы, чтобы вы продали все яйца так, чтобы пришлось круглым счетом не меньше 10 коп. за десяток, а за все 9 десятков — не меньше 90 коп., или 30 алтын.

Спрашивается, как выполнили девушки данное им поручение.

ЗАДАЧИ Л. Н. ТОЛСТОГО

179. В рассказе Л. Н. Толстого «Много ли человеку земли нужно?» крестьянину отводилось столько земли, сколько он успевал обежать в течение одного дня. По какому контуру ему выгоднее бежать: по квадратному, шестиугольному (правильный шестиугольник) или по кругу? (Указание: при равенстве периметров этих фигур какая имеет большую площадь?)

180. Артели косцов надо было скосить два луга, один вдвое больше другого. Половину дня артель косила большой луг. После этого артель разделилась пополам: первая половина осталась на большом лугу и докосила его к вечеру до конца; вторая же половина косила малый луг, на котором к вечеру еще остался участок, скошенный на другой день одним косцом за один день работы. Сколько косцов было в артели?

181. На противоположных стенах комнаты определенной длины и ширины сидят муха и паук, муха — на полтора аршина от пола, паук — на полтора аршина от потолка. Какое между ними кратчайшее расстояние, которое мог бы проползти паук, чтобы достать муху?

ЗАДАЧИ ИЗ «АЗБУКИ» Л. Н. ТОЛСТОГО

182. Пять братьев разделили после отца наследство поровну. В наследстве было три дома. Три дома нельзя было делить, их взяли старшие три брата. А меньшим за то выделили деньги. Каждый из старших заплатил по 800 рублей меньшим. Меньшие разделили эти деньги между собою и тогда у всех 5 братьев стало поровну. Много ли стоили дома?

183. Мужик вышел пешком из Тулы в Москву в 5 часов утра. В 12 часов выехал барин из Тулы в Москву. Мужик идет 5 верст в каждый час, а барин едет 11 верст в каждый час. На какой версте барин догонит мужика?

184. Один мужик нанял 70 десятин земли, заплатил по 8 рублей за десятину помещику и посеял пшеницы все 70 десятин. За семена заплатил по 1 руб. 30 коп. за пуд, сеял на десятину по 9 пудов. За работу заплатил по 8 руб. за десятину. Родилось пшеницы по 13 копен на десятине. Из каждой копны вымолотил по 6 пудов пшеницы. За молотьбу заплатил по 7 коп. с пуда. За провоз в город заплатил по

11 коп. с пуда. Продал пшеницу по 1 руб. 40 коп. за пуд. Много ли мужик получил барыша или убытку?

185. Один человек выдумал игру в шашки, сделал хорошие шашки и шашечницу и подарил царю. Царю полюбилась игра, и он спросил, чем его наградить. Человек сказал: «На одну клетку вели положить зернушко пшеницы, а на другую два, а на третью 4, а на четвертую вдвое и так все клетки уложить пшеницей и мне отдать ту пшеницу. Царь посмеялся, что человек так мало просит; а как стали считать, так у царя пшеницы недостало. (Сколько же царь должен выдать зерна?)

186. Над бочкой приделали две трубы, из обеих труб вода течет в бочку. Из одной трубы вода наполняет бочку в 24 минуты, из другой в 15 минут. Еще есть в бочке дыра; из дыры вытечет вода из бочки в 2 часа (2 часа = 120 минут). Наполнится ли бочка и скоро ли, если пустить воду из обеих труб и вода будет течь в дыру?

ЗАДАЧА, ПРЕДЛОЖЕННАЯ ИВАНУ ПЕТРОВУ

187. Сосчитать в уме, сколькими способами можно уплатить 78 руб., имея билеты трех- и пятирублевого достоинства.

ЗАДАЧИ С. А. РАЧИНСКОГО

188. Путем устных вычислений найти быстро результат выражения

$$\frac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365}.$$

189. Сосчитать в уме, сколько будет квадрат 84.

ЗАДАЧИ ИЗ «КУРСА АЛГЕБРЫ» А. Н. СТРАННОЛЮБСКОГО

190. Купец, будучи должен 753 руб., попросил у того же заимодавца еще 303 руб. Последний согласился удовлетворить его просьбу на условии, чтобы весь долг был уплачен в течение 8 месяцев и притом так, чтобы должник, внеся к концу первого месяца некоторую сумму на покрытие части долга, ежемесячно увеличивал свой взнос на половину, т. е. уплатил бы во второй месяц полторы таких суммы, в третий месяц две таких же суммы, в четвертый две с половиной и т. д. Обсудив эти условия, купец согласился на них. Спрашивается, какую сумму должен он внести в первый месяц и сколько в каждый из следующих месяцев.

191. Два работника прожили у хозяина равное время; один из них получал по 15, а другой по 10 руб. в неделю. При окончательном расчете оказалось, что первый работник должен получить более второго именно на ту сумму, которую он забрал в течение работы, а забрал он сперва $4^1/_2$ руб., потом $3^1/_2$ руб. и наконец 7 руб. Сколько недель продолжалась работа?

192. Отец завещал $^1/_3$ своего имения сыну и $^2/_5$ дочери; из оставшегося затем капитала 2500 руб. должны были пойти на уплату долга, а 3000 руб. в пользу вдовы. Как велик был оставленный отцом капитал и по скольку должен получить сын и дочь?

193. Некто на вопрос о возрасте двух его сыновей отвечал: «Первый мой сын втрое старше второго, а обоим им вместе столько лет, сколько было мне 29 лет тому назад; мне теперь 45 лет». Найти лета обоих сыновей.

194. Виноторговец, купив вина двух сортов, заплатил за каждый 5-ведерный бочонок вина первого сорта по 150 руб. и за каждый 7-ведерный бочонок вина второго сорта по 140 руб. Он хочет получить 50 ведер такой смеси этих вин, которую можно было бы продавать по 30 руб. ведро с барышом по 3 руб. на каждое. Сколько должен он взять ведер вина каждого сорта, чтобы получить требуемую смесь?

195. У серебряника есть трехфунтовые и четырехфунтовые слитки серебра двух различных проб. Каждый трехфунтовый слиток стоит 288 руб., а четырехфунтовый—328 руб. Серебряник должен сделать сосуд в 20 фунтов весом из серебра такой пробы, чтобы при продаже сосуда выручить за каждый фунт 93 руб., считая тут и вознаграждение за работу по 3 руб. на фунт. Сколько фунтов серебра каждый из имеющихся у него проб должен употребить серебряник на выделку сосуда?

ЗАДАЧА ИЗ РАССКАЗА А. П. ЧЕХОВА «РЕПЕТИТОР»

196. Купец купил 138 аршин черного и синего сукна за 540 руб. Спрашивается, сколько аршин он купил того и другого, если синее сукно стоило 5 руб. за аршин, а черное — 3 руб.

ЗАДАЧА НАРОДНАЯ

197. Шли семь старцев.
У каждого старца по семи костылей,
На всяком костыле по семи сучков,
На каждом сучке по семи кошелей,
В каждом кошеле по семи пирогов,
А в каждом пироге по семи воробьев.
Сколько всего?

ЗАДАЧИ ЗАПАДНОЙ ЕВРОПЫ

ЗАДАЧИ ЛЕОНАРДО ПИЗАНСКОГО

198. Один говорит другому: «Дай мне 7 динариев, и я буду в 5 раз богаче тебя». А другой говорит: «Дай мне 5 динариев, и я буду в 7 раз богаче тебя». Сколько у каждого?

199. Некто купил 30 птиц за 30 монет, из числа этих птиц за каждых 3 воробьев заплачена 1 монета, за каждые 2 горлицы — также 1 монета и, наконец, за каждого голубя — по 2 монеты. Сколько было птиц каждой породы?

ЗАДАЧИ РЕГИОМОНТАНА

200. Решить уравнение

$$\frac{x}{10-x}+\frac{10-x}{x}=25.$$

201. Доказать, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

ЗАДАЧА ЛЕОНАРДО ДА ВИНЧИ

202. Если два равных круга пересекаются друг с другом, то прямая, проходящая через точки их пересечений, будет в любой части своей длины находиться на одинаковых расстояниях от того и другого центра.

ЗАДАЧА АДАМА РИЗЕ

203. Трое торгуют лошадь за 12 флоринов, но никто в отдельности не располагает такой суммой. Первый говорит двум другим: «Дайте мне каждый по половине своих денег, и я куплю лошадь». Второй говорит первому и третьему: «Дайте мне по одной трети ваших денег, и я приобрету лошадь». Наконец, третий говорит первым двум: «Дайте мне только по четверти ваших денег, и лошадь будет моя». Теперь спрашивается, сколько денег было у каждого.

ЗАДАЧА ТАРТАЛЬЯ

204. На данном отрезке AB при помощи данного раствора циркуля (не равного AB) и линейки построить равносторонний треугольник.

ЗАДАЧИ КАРДАНО

205. Найти построением положительный корень уравнения $x^2 + 6x = 91$.

206. Разложить 10 на два слагаемых с таким расчетом, чтобы их произведение равнялось 40.

207. Построить общую касательную к двум данным окружностям.

ЗАДАЧА ВИЕТА

208. Решить уравнение $x^2 + px + q = 0$ подстановкой $x = y + z$.

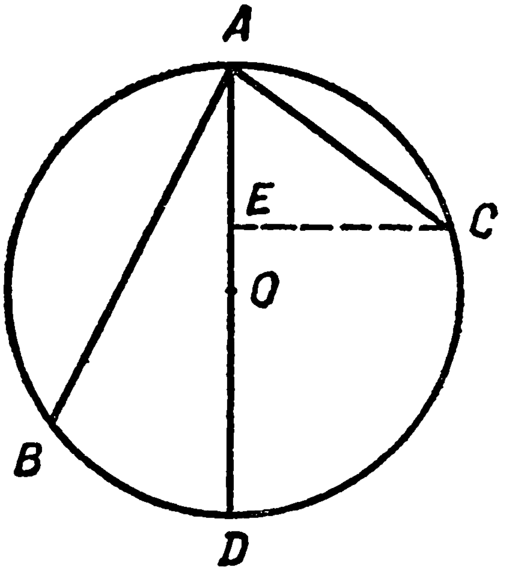


Рис. 3

ЗАДАЧА ГАЛИЛЕЯ

209. На отвесной стене начерчен круг (рис. 3). От верхней его точки A вдоль хорд AB и AC идут желобки. Из точки A одновременно пущены три дробинки: одна свободно падает вниз, две другие скользят без трения по гладким желобкам. Какая из трех дробинок раньше достигнет окружности?

ЗАДАЧА КЕПЛЕРА

210. Доказать, что если взять три параллельные прямые l, m, n и пересечь их пучком прямых SA, SB, SC, пересекающих первую прямую l в точках A, B, C, и через точки E, F, H пересечения со второй прямой m провести прямые, параллельные лучу SP, до пересечения с третьей прямой n в точках L, M, N, то прямые LA, MB, NC, EP пересекутся в одной точке.

ЗАДАЧИ ДЕЗАРГА

211. Доказать, что если в двух треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$, расположенных в разных плоскостях σ и σ_1, прямые, соединяющие соответственные вершины A и A_1, B и B_1, C и C_1, пересекаются в одной точке (точке Дезарга), то соответственные стороны AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1, при условии их непараллельности, пересекаются в трех точках, расположенных на одной прямой (прямой Дезарга). Обратно, если точки пересечения соответственных сторон лежат на одной прямой, то прямые, соединяющие соответственные вершины, при условии их непараллельности, пересекаются в одной точке.

212. Доказать, что если в двух треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$, расположенных в одной плоскости, прямые, соединяющие соответственные вершины A и A_1, B и B_1, C и C_1, пересекаются в одной точке (точке Дезарга), то соответственные стороны AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 при условии их непараллельности пересекаются в трех точках, расположенных на одной прямой (прямой Дезарга). Обратно, если точки пересечения соответственных сторон лежат на одной прямой, то прямые, соединяющие соответственные вершины, при условии их непараллельности, пересекаются в одной точке.

ЗАДАЧА ДЕКАРТА

213. Решить уравнение

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0.$$

ЗАДАЧИ ФЕРМА

214. Показать, что если S есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\div\!\!\div\, a_1, a_2, a_3, \ldots,$ то $\frac{S}{S - a_1} = \frac{a_1}{a_2}$.

215. На диаметре AB полукруга AMB построен прямоугольник, высота которого AC равна стороне вписанного в круг квадрата. Если соединить вершины C и D с произвольной точкой M полукруга прямыми CM и DM, пересекающими диаметр в точках E и F, то

$$AF^2 + BE^2 = AB^2$$

(доказать).

216. Доказать, что уравнение $x^4 + y^4 = z^4$ не имеет решений в целых числах.

ЗАДАЧА ФУЛЬГАБЕРА

217. Доказать, что если OA, OB, OC — три взаимно перпендикулярные прямые (чертеж выполнить самостоятельно), образующие трехгранный угол с вершиной в точке O, а A, B, C — произвольные точки этих прямых (ребер трехгранного угла), то

$$S^2_{\Delta ABC} = S^2_{\Delta OAB} + S^2_{\Delta OAC} + S^2_{\Delta OBC},$$

где $S_{\Delta ABC}$ — площадь треугольника ABC; $S_{\Delta OAB}$ — площадь треугольника OAB; $S_{\Delta OAC}$ — площадь треугольника OAC; $S_{\Delta OBC}$ — площадь треугольника OBC.

ЗАДАЧА ВАЛЛИСА

218. Показать алгебраически и геометрически, что из прямоугольников одинакового периметра квадрат имеет наибольшую площадь.

ЗАДАЧИ ПАСКАЛЯ

219. Доказать, что если шестиугольник вписан в окружность и противоположные его стороны не параллельны, то точки пересечения этих сторон лежат на одной прямой (прямой Паскаля).

220. Сформулировать предельные случаи рассмотренной выше задачи Паскаля, которые составляют весьма любопытные теоремы, относящиеся к вписанным в окружность пятиугольникам, четырехугольникам и треугольникам (см. указания).

221. Найти общий признак делимости на произвольное число.

ЗАДАЧА ОЗАНАМА

222. Трое хотят купить дом за 26 000 ливров. Они условились, что первый даст половину, второй — одну треть, а третий — одну четверть. Сколько даст каждый?

ЗАДАЧИ ИЗ «ВСЕОБЩЕЙ АРИФМЕТИКИ» НЬЮТОНА

223. Разделить $y^4 - 3\frac{1}{2}a^2y^2 + 3a^2y - \frac{1}{2}a^4$ на $y^2 - 2ay + a^2$.

224. Дана конечная прямая BC, в концах которой проведены под данными углами ABC и ACB две прямые BA и CA. Найти высоту их точки пересечения A над данной линией BC.

225. Двенадцать быков съедают $3^1/_3$ югера пастбища за 4 недели; 21 бык съедает 10 югеров такого же пастбища за 9 недель. Сколько быков съедят 24 югера пастбища за 18 недель?

226. Некий торговец каждый год увеличивает на одну треть свое состояние, уменьшенное на 100 фунтов, которые ежегодно затрачивает на свою семью. Через три года он обнаруживает, что его состояние удвоилось. Спрашивается, сколько у него было денег вначале.

ЗАДАЧА ЛЕЙБНИЦА

227. Показать, что

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}.$$

ЗАДАЧИ ЧЕВЫ

228. Доказать, что если L, M, N — три точки, лежащие соответственно на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC, то для того, чтобы прямые AL, BM, CN пересекались в одной точке или были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы имело место соотношение $\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=1.$

229. Пользуясь результатами задачи Чевы, доказать следующее: 1) медианы любого треугольника пересекаются в одной точке; 2) высоты любого треугольника пересекаются в одной точке; 3) биссектрисы любого треугольника пересекаются в одной точке.

ЗАДАЧА Я. БЕРНУЛЛИ

230. Если первые два члена арифметической прогрессии положительны, не равны между собой и совпадают с двумя первыми членами геометрической прогрессии, то все члены арифметической прогрессии, начиная с третьего, меньше соответствующих членов геометрической прогрессии.

ЗАДАЧИ БЕЗУ

231. Некто купил лошадь и спустя некоторое время продал ее за 24 пистоля. При этой продаже он теряет столько процентов, сколько стоила ему лошадь. Спрашивается, за какую сумму он ее купил.

232. Доказать, что многочлен n-й степени

$$f_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

при делении на $x - b$ дает в остатке результат подстановки в этот многочлен вместо x числа b, т. е. число $f_n(b) = a_0b^{n-1} + a_1b^{n-1} + \ldots + a_{n-1}b + a_n$ (теорема Безу).

ЗАДАЧА ЛЕЖАНДРА

233. Доказать, что в любом прямолинейном треугольнике сумма внутренних углов не может быть больше $2d$, причем при доказательстве не разрешается пользоваться аксиомой параллельных прямых и ее следствиями (эквивалентами).

ЗАДАЧА НАПОЛЕОНА

234. Данную окружность с данным положением центра разделить на четыре равные части при помощи одного циркуля, не прибегая к линейке.

ЗАДАЧА С. ЖЕРМЕН

235. Доказать, что каждое число вида $a^4 + 4$ есть составное ($a > 1$).

ЗАДАЧИ ГАУССА

236. Доказать, что произведение двух целых положительных чисел, из которых каждое меньше простого числа p, не делится на p.

237. Построить правильный семнадцатиугольник с помощью циркуля и линейки.

ЗАДАЧА ПУАССОНА

238. Некто имеет 12 пинт вина и хочет подарить из него половину, но у него нет сосуда в 6 пинт. У него два сосуда, один в 8, другой в 5 пинт. Спрашивается, каким образом налить 6 пинт в сосуд в 8 пинт.

ЗАДАЧА КОШИ

239. Доказать, что для любого натурального значения n выполняется неравенство

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n},$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — положительные числа, причем знак равенства достигается лишь в случае $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

ЗАДАЧИ БРИАНШОНА

240. Доказать, что во всяком шестиугольнике, описанном около окружности, прямые, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке (точке Брианшона).

241. Доказать, что: 1) в любом пятиугольнике, описанном около окружности, прямые, соединяющие две пары несмежных вершин, и прямая, соединяющая пятую вершину с точкой касания противоположной стороны, пересекаются в одной точке; 2) во всяком четырехугольнике, описанном около окружности, две его диагонали и две прямые, соединяющие точки касания противоположных сторон, пересекаются в одной точке; 3) во всяком треугольнике, описанном около окружности, прямые, соединяющие вершины с точками касания противоположных сторон, проходят через одну точку.

ЗАДАЧИ ШТЕЙНЕРА

242. Доказать, что если соединить точку пересечения диагоналей трапеции с точкой пересечения ее непараллельных сторон, то большее основание разделится этой линией пополам.

243. Требуется из точки M на прямую AB опустить перпендикуляр при условии, что точка M не лежит на данной прямой и отрезок AB является диаметром неподвижной окружности.

244. Доказать, что площадь любого неравнобедренного треугольника всегда меньше площади равнобедренного треугольника, имеющего с ним общее основание и равные суммы боковых сторон.

ЗАДАЧА ШТУРМА

245. Из A выезжает курьер и в первый день проезжает 10 лье, а в каждый следующий — на $^1/_4$ лье больше. Спустя три дня другой курьер выезжает из города B, расположенного за городом A в 40 лье, и едет в том же направлении, причем в первый день проезжает 7 лье, а в каждый следующий — на $^2/_3$ лье больше. Через сколько дней после выезда первого оба курьера встретятся?

ЗАДАЧА КАТАЛАНА

246. Из точки M, взятой вне окружности, провести секущую так, чтобы она разделялась окружностью пополам.

ЗАДАЧА, ПРЕДЛОЖЕННАЯ А. МОНДЕ

247. Вычислить в уме, какие два числа нужно взять, чтобы разность их квадратов равнялась 133.

ЗАДАЧА СТЮАРТА

248. Доказать, что если на одной стороне треугольника, принятой за основание, взять точку и соединить ее с противоположной вершиной (этот отрезок далее называется внутренним), то произведение квадрата одной из боковых сторон треугольника на не прилежащий к ней отрезок основания плюс произведение квадрата другой боковой стороны треугольника на не прилежащий к ней отрезок основания минус произведение квадрата внутреннего отрезка на основание равняется произведению основания на его отрезки, отсекаемые внутренним отрезком (теорема Стюарта).

Часть II. ИСТОРИЧЕСКИЕ ЭКСКУРСЫ, РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ

ВАВИЛОН

В древнем Вавилоне математика зародилась задолго до нашей эры. Вавилонские памятники в виде глиняных плиток с клинописными надписями хранятся в различных музеях мира, в том числе в ленинградском Эрмитаже и московском Музее изобразительных искусств. Найдены сорок четыре глиняные таблицы — своеобразная математическая энциклопедия древних вавилонян. В них даны достаточно удобные способы решения ряда практических задач, связанных с земледелием, строительством и торговлей.

Научные достижения древних вавилонян заключаются в следующем.

1. Вавилоняне были основоположниками астрономии. Полученные ими данные о продолжительности основных циклов и периодов в планетной системе обладают довольно большой точностью; так, например, вавилон-

ский лунный месяц отличается от принятого современной астрономией всего лишь на 0,4 с.

2. Вавилоняне создали шестидесятеричную систему счисления, в основе которой лежало не число 10, как у нас, а число 60. Они создали систему мер и весов, в которой каждая последующая мера больше предыдущей в 60 раз. Отсюда ведет начало наше деление мер времени — часа, минуты, секунды — на 60 частей, круга — на 360°.

3. Вавилоняне решали уравнения второй степени и некоторые виды уравнений третьей степени, причем последние — при помощи специальных таблиц.

Есть основания предполагать, что математика древних вавилонян оказала влияние на математическую культуру закавказских народов, в особенности на армянскую, содействовав ее исключительно раннему расцвету.

1. Сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность, равняется радиусу, следовательно,

$$2\pi R = 6R,$$

откуда

$$\pi = \frac{6R}{2R} = 3.$$

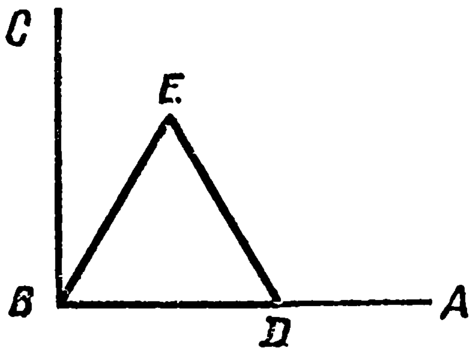


Рис. 4

2. Древние вавилоняне умели строить равносторонний треугольник, а с его помощью делить прямой угол на три равные части. Пусть дан прямой угол ABC (рис. 4). Требуется разделить этот угол на три равные части. Для этой цели на отрезке BD стороны BA построим равносторонний треугольник BED. Тогда угол CBE и будет составлять одну треть данного прямого угла. Остается только разделить пополам угол EBD и задача будет решена.

3. Согласно условию задачи, площадь четырехугольника

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2},$$

где a, b и c, d — две пары противоположных сторон. Эта формула будет точной для прямоугольника. Действительно, для прямоугольника

$$a = b; \; c = d; \; S = ac.$$

ЕГИПЕТ

Вторым после Вавилона культурным центром глубокой древности был Египет (занимал примерно ту же территорию, что и современный Египет). В этой «стране пирамид» за много тысяч лет до нашей эры возводились гигантские сооружения в виде храмов и пирамид. Некоторые из этих памятников сохранились до настоящего времени. Различные строительные работы, развитие земледелия, основанного на искусственном орошении, рано вызвали потребность в математических познаниях и особенно в геометрии.

Математические правила, нужные для земледелия, астрономии и строительных работ, древние египтяне записывали на стенах храмов или на папирусах — лентообразных свитках из особого писчего материала растительного происхождения.

В Британском музее хранится так называемый папирус Райнда, расшифрованный профессором А. Эйзенлором в 1877 г. Рукопись относится к периоду 2000—1700 лет до н. э. В ней содержится 84 задачи, причем большинство из них арифметического характера.

Московский папирус относится к 1850 г. до н. э. Он был приобретен русским коллекционером Голенищевым в 1893 г., а в 1912 г. — перешел в собственность московского Музея изобразительных искусств. Этот редкий, весьма ценный памятник глубокой древности был изучен советскими учеными — академиками В. А. Тураевым и В. В. Струве.

В этом папирусе решается задача на вычисление объема усеченной пирамиды с квадратными основаниями.

Оказывается, как показала расшифровка папирусов, египтяне еще четыре тысячи лет назад решали ряд практических задач по арифметике, алгебре, геометрии, причем в арифметике пользовались не только целыми числами, но и дробями.

4. Решение задачи сводится к решению уравнения

$$x+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\left(x+\frac{2}{3}x\right)=10,$$

откуда $x=9$.

5. Здесь имеется пять членов геометрической прогрессии со знаменателем 7: 7, 49, 343, 4201, 16807. Теперь подсчитаем сумму

$$S_5=\frac{a_5q-a_1}{q-1}=\frac{16\,807\cdot 7-7}{7-1}=\frac{7\,(16\,807-1)}{6}=$$

$$=\frac{7\cdot 16\,806}{6}=7\cdot 2801=19\,607.$$

6. По условию задачи

$$\left(\frac{8}{9}d\right)^2=\frac{\pi d^2}{4}.$$

Тогда

$$\pi=\frac{8^2\cdot d^2\cdot 4}{9^2\cdot d^2}=\frac{64\cdot 4}{81}=3{,}16.$$

7. По египетскому способу $S_1=\frac{ab}{2}$, где a — основание, b — боковая сторона равнобедренного треугольника. Обозначив высоту треугольника через h, найдем

$$h=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}=b\sqrt{1-\left(\frac{a}{2b}\right)^2}.$$

Точное значение площади выразится формулой

$$S_2=\frac{ab}{2}\sqrt{1-\left(\frac{a}{2b}\right)^2}=S_1\sqrt{1-\left(\frac{a}{2b}\right)^2},$$

откуда

$$\frac{S_2}{S_1}=\sqrt{1-\left(\frac{a}{2b}\right)^2}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{2\cdot 10}\right)^2}=0{,}98,$$

т. е. ошибка не больше 2%.

8. По египетскому способу

$$S_1 = \frac{a+b}{2}c,$$

где a и b — соответственно нижнее и верхнее основания трапеции, c — боковая сторона. Обозначив высоту трапеции через h, получим

$$h = c\sqrt{1 - \left(\frac{a-b}{2c}\right)^2}.$$

Точное значение площади выразится формулой

$$S_2 = S_1\sqrt{1 - \left(\frac{a-b}{2c}\right)^2},$$

откуда

$$\frac{S_2}{S_1} = \sqrt{1 - \left(\frac{a-b}{2c}\right)^2}.$$

Теперь остается подставить данные числовые значения и произвести элементарный подсчет.

9. Египтяне решали эту задачу по формуле

$$V_{\text{ус.пир}} = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2),$$

где h — высота пирамиды, a и b — соответственно нижнее и верхнее основания.

10. Обозначив через x и y искомые длины сторон, сводим задачу к системе уравнений

$$\frac{x}{y} = \frac{m}{n};\ xy = S.$$

Перемножив эти уравнения, получим

$$x^2 = \frac{m}{n}\cdot S; \qquad x = \sqrt{\frac{m}{n}\cdot S}.$$

Для второй стороны найдем

$$y=\frac{n}{m}\sqrt{\frac{m}{n}\cdot S}\ .$$

11. В рукописи дробная часть ответа $172\frac{21}{32}$ дается в виде суммы дробей, числители которых равны 1, а именно:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{48}+\frac{1}{96}.$$

ГРЕЦИЯ

Первыми учителями древних греков были египтяне. В VII в. до н. э. иностранным путешественникам был открыт свободный доступ в Египет. Этим широко пользовались ученые древней Греции, совершавшие путешествия в «страну пирамид». Примерно с IV в. до н. э. древние греки стали на путь самостоятельных изысканий по математике и достигли в этом направлении значительных успехов, особенно по геометрии. В III в. до н. э. древнегреческая геометрия достигла своего апогея в работах Евклида, написавшего тринадцать книг по геометрии, объединенных общим названием «Начала».

В трудах Евклида логическая сторона геометрии была доведена до очень высокого уровня, который был превзойден только на рубеже XIX и XX вв. в трудах немецкого математика Гильберта и его школы.

Древние греки интересовались не только вопросами элементарной геометрии (тогда этого термина не было), но и заложили прочные основы высшей геометрии (работы Аполлония, Архимеда и др.).

Значительных успехов в теории чисел достигли Пифагор и его ученики.

В области алгебры, в частности в решении неопределенных уравнений, много сделал Диофант, живший на рубеже II—III вв. н. э. в Александрии, почему его и называют иногда Диофантом Александрийским. Он улучшил алгебраические методы путем введения первых буквенных алгебраических обозначений и символического изображения уравнений.

Самое значительное сочинение Диофанта —это его «Арифметика», которая дошла до нас в шести книгах (полагают, что их было 13). По содержанию «Арифметики» Диофанта можно судить о состоянии алгебры у древних греков.

12. Эта задача известна под названием «теоремы Пифагора» и вошла во все курсы элементарной геометрии как одна из основных ее теорем. Почти во всех учебниках геометрии, предназначенных для школы, теорема Пифагора доказывается по Евклиду. Такое доказательство, например, дается и в учебнике А. П. Киселева «Геометрия» (у Н. Н. Никитина в учебнике «Геометрия» для 6—8 классов она доказывается исходя из наглядных соображений). Хотя доказательство Евклида и относится, по меткому выражению Шопенгауэра, к типу «доказательства-мышеловки», в котором совершенно отсутствует наглядность и в сложных рассуждениях надо слепо следовать Евклиду, однако, по мнению проф. В. Литцмана, доказательство Евклида, если его рассматривать в рамках геометрической системы, изложенной в «Началах», надо признать чрезвычайно простым. Дело в том, что у Евклида наглядность не является самоцелью и не стоит на первом плане. Простейшим доказательством для Евклида является то, в котором предыдущие теоремы приходится применять наименьшее число раз. С этой точки зрения доказательство теоремы Пифагора, данное Евклидом, действительно является простым. Евклид для доказательства из предыдущего материала использовал один раз теорему о первом признаке равенства треугольников и два раза — теорему о том, что если параллелограмм и треугольник имеют одинаковые основания и высоту, то площадь параллелограмма равна удвоенной площади треугольника.

Ниже воспроизводим доказательство теоремы Пифагора (предложение 47), данное Евклидом в его «Началах», причем, по свидетельству Прокла (410—485), это доказательство принадлежит самому Евклиду.

«Пусть ABC — прямоугольный треугольник, имеющий прямой угол BAC; я утверждаю, что квадрат на BC равен вместе взятым квадратам на BA и AC (рис. 5).

Действительно, надстроим на BC квадрат $BDEC$, а на BA, AC надстроим квадраты HB и GC (предложение 46) и через A проведем AL, параллельную как BD, так и CE

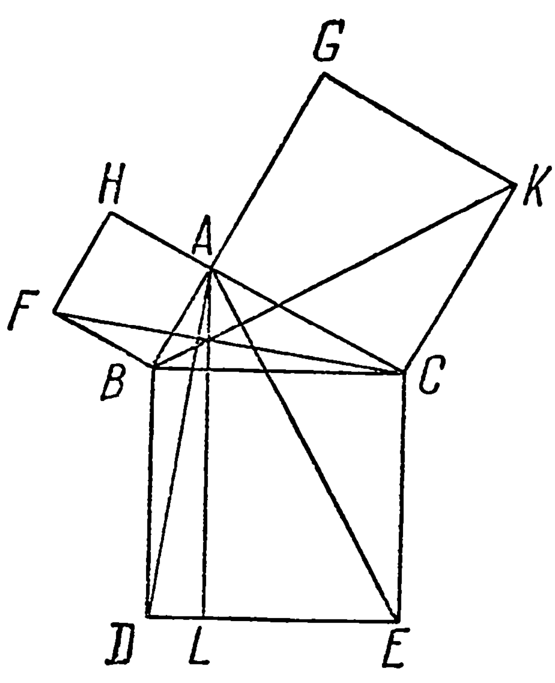


Рис. 5

(предложение 31); соединим AD, FC. И поскольку каждый из углов BAC, BAH прямой (определение 10), то вот на некоторой прямой BA при ее точке A две прямые AC, AH, расположенные не по одну сторону, образуют смежные углы, вместе равные двум прямым; значит, CA будет по одной прямой с AH (предложение 14). Вследствие того же вот и AB будет по одной прямой с AG. И поскольку угол DBC равен углу FBA (аксиома 1), ибо каждый из них прямой, то прибавим общий угол ABC; значит, весь угол DBA равен всему углу FBC (аксиома 2). И если к равным прибавляются равные, то и целые (суммы) будут равны. И поскольку DB равна BC, а FB равна BA (определение 22), то две стороны DB, BA равны двум сторонам BC, FB каждая каждой; и угол DBA равен углу FBC; значит, и основание AD равно основанию FC, и треугольник ABD равен треугольнику FBC (предложение 4). И удвоенный треугольник ABD есть параллелограмм BL (предложение 41), ибо они имеют то же основание BD и расположены между теми же параллельными BD, AL (предложение 41). Удвоенный же треугольник FBC (предложение 41) есть квадрат HB, ибо они имеют то же основание FB и расположены между теми же параллельными FB и HC (но удвоенные равных величин равны между собой (аксиома 5)); значит, и параллелограмм BL равен квадрату HB. Подобным же вот образом, соединяя AE, BK, будет доказано, что и параллелограмм CL равен квадрату GC; значит, весь квадрат $BDEC$ равен двум квадратам HB и GC вместе взятым. И $BDEC$ есть квадрат, надстроенный на BC, а HB, GC — на BA, AC; значит, квадрат на стороне BC равен вместе взятым квадратам на сторонах BA, AC.

Значит, в прямоугольных треугольниках квадрат на стороне, стягивающей прямой угол (гипотенузе), равен вместе взятым квадратам на сторонах, заключающих прямой угол (катетах), что и требовалось доказать».

Доказательство взято из «Начал» Евклида (книги I—IV. М.—Л., 1948, с. 58—59).

Доказательство интересно тем, что оно дано Евклидом более двух тысяч лет тому назад и мало отличается от современного.

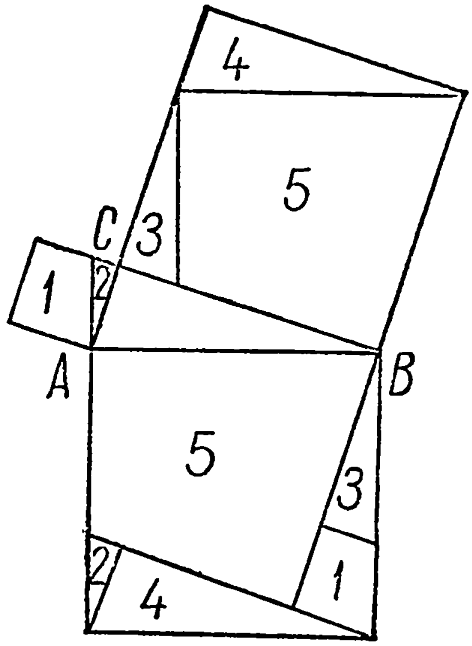


Рис. 6

Широкое распространение в учебной литературе получили доказательства, основанные на равновеликости равносоставленных фигур, которые в отличие от доказательства Евклида обладают исключительной наглядностью, но уступают ему, как правило, в простоте в том смысле, о котором говорилось выше. Например, в IX в. Анариций свое доказательство основал на таком чертеже (рис. 6).

Теорема Пифагора имеет богатую историю. Оказывается, она задолго до Пифагора была известна египтянам, вавилонянам, китайцам и индийцам.

За восемь веков до н. э. теорема Пифагора была хорошо известна индийцам под названием «правила веревки» и использовалась ими для построения алтарей, которые по священному предписанию должны иметь строгую геометрическую форму, ориентированную относительно четырех сторон горизонта.

Доказательство самого Пифагора до нас не дошло. В настоящее время имеется свыше ста различных доказательств теоремы Пифагора. Возможно, что одно из них принадлежит Пифагору или его ученику (по тогдашним обычаям все, открываемое учениками, приписывалось главе школы — учителю).

Пифагор (около 580—500 гг. до н. э.) — древнегреческий математик и философ. Родился на о. Самосе. В молодости для изучения наук жрецов путешествовал по Египту, жил также в Вавилоне, где имел возможность в течение 12 лет изучать астрологию и астрономию у халдейских жрецов. После Вавилона переселился в Южную Италию, а потом в Сицилию, где организовал пифагорейскую школу, которая внесла ценный вклад в развитие математики и астрономии. Пифагор и его ученики придали геометрии научный характер. Кроме знаменитой теоремы, носящей его имя, Пифагору приписывается доказательство теоремы о сумме внутренних углов треугольника; задача о покрытии, т. е. делении плоскости на правильные многоугольники; геометрические способы решения квадратных уравнений; правила решать задачу: по данным двум фигурам построить третью, которая была бы равновелика одной из данных и подобна другой.

В школе Пифагора процветала числовая мистика. Приняв количественное отношение за сущность всех вещей и оторвав их от материальной действительности, эта школа пришла к идеализму. Пифагор учил, что мерой всех материальных и нематериальных вещей являются числа и соотношения между ними. По мнению Пифагора, даже такие далеко не математические понятия, как «дружба», «справедливость», «радость» и т. д., находят объяснение в числовых зависимостях, для которых они являются только образами или копиями. Числам явно приписывались мистические свойства, одни числа несут добро, другие — зло, третьи — успех и удачу и т. д. Пифагор полагал, что душа тоже число, она бессмертна и переселяется от одного человека к другому.

Числовая мистика Пифагора и его последователей нанесла большой ущерб развитию математической науки.

13. Прежде всего заметим, что если x_1, y_1, z_1 — тройка пифагоровых чисел, то x_1k, y_1k, z_1k, где k — любое положительное число, тоже составляют тройку пифагоровых чисел. Действительно, из того, что $x_1^2+y_1^2=z_1^2$ (после умножения на k^2), вытекает

$$(x_1k)^2+(y_1k)^2=(z_1k)^2.$$

Таким образом, зная какую-нибудь одну тройку пифагоровых чисел, можно указанным путем получить бесконечное множество других троек пифагоровых чисел. Но это, конечно, еще не значит, что таким путем получатся все тройки пифагоровых чисел. Чтобы найти все эти тройки, надо провести дополнительные рассуждения.

Тройку пифагоровых чисел x, y, z будем называть простой, если x, y, z, взятые попарно, являются взаимно простыми числами. В обратном случае тройка пифагоровых чисел будет называться производной. Само собой понятно: чтобы знать все множество троек пифагоровых чисел, надо знать множество всех простых троек, из которых путем умножения на положительные числа 2, 3, ... получаются все остальные производные тройки. В дальнейшем будем иметь дело только с простыми тройками. Заметим далее, что если из трех пифагоровых чисел x, y, z, составляющих тройку, два будут взаимно простыми, то тройка будет обязательно простой, т. е. числа x, y, z, взятые попарно, будут взаимно простыми. Докажем это.

Пусть x и y будут взаимно простыми числами, докажем, что x, z и y, z будут тоже взаимно простыми числами. Будем доказывать методом от противного. Предположим, что x, z не являются взаимно простыми (все рассуждения, которые проводятся для пары x, z, можно отнести и к паре y, z). Тогда

$$x = x_1 d; \; z = z_1 d,$$

где d — наибольший общий делитель чисел x и z, причем $d \neq 1$. Но тройки пифагоровых чисел должны удовлетворять уравнению

$$x^2 + y^2 = z^2, \tag{1}$$

и, следовательно,

$$(x_1 d)^2 + y^2 = (z_1 d)^2; \; y^2 = z_1^2 d^2 - x_1^2 d^2; \quad y^2 = (z_1^2 - x_1^2) d^2.$$

Отсюда видно, что d является делителем y, а тогда x и y не были бы взаимно простыми числами, что противоречит условию. Следовательно, x и z действительно числа взаимно простые. Аналогично числа y и z тоже взаимно простые.

Поскольку x и y — взаимно простые числа, они одновременно не могут быть четными. Но одновременно они не могут быть и нечетными. Действительно, если бы они были одновременно нечетными, то $x = 2p + 1$, где p — целое положительное число, $y = 2q + 1$, где q — также целое положительное число. Подставив значения x и y в уравнение (1), получим

$$(2p + 1)^2 + (2q + 1)^2 = z^2;$$
$$z^2 = 4(p^2 + p + q^2 + q) + 2.$$

Отсюда z^2 — число четное. А это возможно только тогда, когда z — четное число. Следовательно, z^2 должно делиться на 4. С другой стороны, z^2 при делении на 4 имеет в остатке 2, так как $z^2 = 4(p^2 + p + q^2 + q) + 2$, и, следовательно, на 4 не делится. Получилось логическое противоречие.

Итак, x и y не могут быть одновременно оба четными или нечетными. Следовательно, одно из них четное, а другое нечетное. В дальнейшем x будем считать нечетным, а y четным. Ясно, что z будет числом нечетным. Представим теперь уравнение (1) в виде

$$x^2 = z^2 - y^2 = (z + y)(z - y).$$

Пусть

$$z + y = m; \ z - y = n;$$

тогда

$$z = \frac{m+n}{2}; \quad y = \frac{m-n}{2}; \quad x^2 = mn,$$

причем $m > n$.

Поскольку x — число нечетное и $x^2 = mn$, оба числа m и n нечетные. Докажем, что m и n — числа взаимно простые. Будем доказывать методом от противного. Предположим, что m и n — не взаимно простые. Обозначим их наибольший общий делитель через d, причем $d \neq 1$. Тогда

$$m = m_1 d; \ n = n_1 d,$$

откуда

$$z = \frac{m+n}{2} = \frac{m_1 + n_1}{2} d; \ y = \frac{m-n}{2} = \frac{m_1 - n_1}{2} d.$$

Получилось, что y и z — не взаимно простые числа, чего быть не может. Следовательно, m и n — числа взаимно простые.

Из того, что $x^2 = mn$ и m и n — числа взаимно простые, вытекает

$$m = u^2; \ n = v^2,$$

где u и v — числа взаимно простые, причем $u > v$.

После этого окончательно получаем

$$x = uv; \ y = \frac{u^2 - v^2}{2}; \quad z = \frac{u^2 + v^2}{2}.$$

Это и есть формулы для получения простых троек x, y, z пифагоровых чисел. (Проверьте при помощи подстановки и непосредственного вычисления, что полученные формулы удовлетворяют уравнению (1).)

Для иллюстрации с помощью последних трех формул вычислим несколько простых троек пифагоровых чисел.

u	v	x	y	z
3	1	3	4	5
5	1	5	12	13
5	3	15	8	17
7	1	7	24	25
7	3	21	20	29
7	5	35	12	37
9	1	9	40	41
9	5	45	28	53
9	7	63	16	65

Замечания. 1. Тройка пифагоровых чисел 3, 4, 5 была известна в Египте задолго до Пифагора и составляла длины сторон египетского прямоугольного треугольника.

2. С помощью пифагоровых чисел можно получить сколько угодно так называемых героновых треугольников, т. е. таких треугольников, у которых стороны и площадь выражаются целыми положительными числами. Действительно, каждой тройке пифагоровых чисел соответствует пифагоров треугольник, у которого катеты и гипотенуза выражены этими числами. Если взять два пифагоровых треугольника, имеющих одинаковые катеты и приставить эти равные катеты друг к другу так, чтобы другие два катета были продолжением один дру-

гого, то получим геронов треугольник. Так, например, из двух пифагоровых треугольников со сторонами 5, 12, 13 и 35, 12, 37 указанным путем получается геронов треугольник со сторонами 40, 13, 37 и высотой 12, площадь которого равняется $\frac{40 \cdot 12}{2} = 240$ (кв. ед.).

3. Наличие бесконечного множества троек пифагоровых чисел позволяет сформулировать ряд весьма интересных задач. Особенно привлекали математиков следующие три задачи.

Задача 1. Найти все тройки пифагоровых чисел, в которых два числа из трех являлись бы последовательными числами (например, тройка 20, 21, 29).

Задача 2. Найти все тройки пифагоровых чисел, чтобы одно из трех чисел, входящих в тройку, было полным квадратом (например, тройки 3, 4, 5; 7, 24, 25; 9, 40, 41 и т. д.).

Задача 3. (Задача Ферма.) Найти такие тройки (x, y, z) пифагоровых чисел, чтобы числа $x+y$ и z являлись полными квадратами.

Оказывается, таких троек существует бесконечное множество, но все они выражаются очень большими числами.

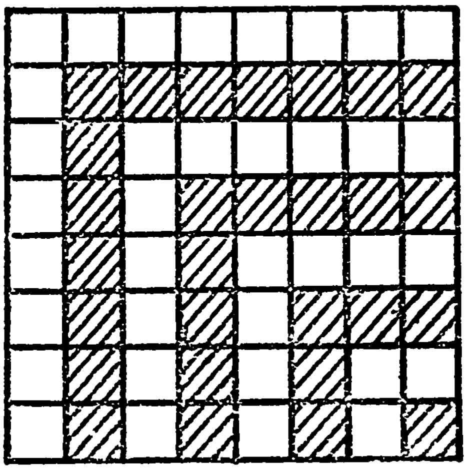


Рис. 7

14. По-видимому, в школе Пифагора эта задача решалась геометрически. Единица представлялась в виде квадрата, а последовательные числа — в виде гномонов, т. е. фигур г-образной формы (рис. 7), состоящих из нечетного числа квадратов (единиц):

$$1 + 3 = 4 = 2^2,$$
$$1 + 3 + 5 = 4 + 5 = 3^2,$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 9 + 7 = 16 = 4^2$$

и т. д.

Алгебраически эта задача решается очень просто. Последовательность нечетных чисел, начиная с единицы, представляет собой арифметическую прогрессию 1, 3, 5, 7, ..., $(2n + 1)$. Число членов этой прогрессии равняется $n + 1$. Сумма всех членов указанной прогрессии будет

$$S = \frac{(1 + 2n + 1)(n + 1)}{2} = (n + 1)^2.$$

15. В школе Пифагора эта задача решалась геометрически. Действительно, если от квадрата отнять гномон (рис. 7), представляющий нечетное число, в остатке получится квадрат, т. е.

$$2n + 1 = (n + 1)^2 - n^2.$$

16. Пусть дан прямоугольный треугольник ABC; a, b — катеты, c — гипотенуза. Построим полуокружности на катетах a, b и на гипотенузе c как на диаметрах (рис. 8). Прямоугольный треугольник ABC и полученные луночки L_1 и L_2 для наглядности заштрихуем. Надо доказать, что пл. L_1 + пл. $L_2 = S_\Delta$, где S_Δ — площадь прямоугольного треугольника ABC.

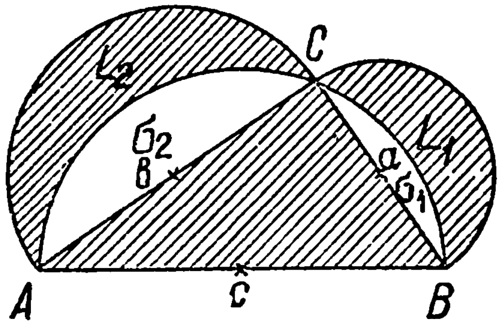


Рис. 8

По теореме Пифагора

$$a^2 + b^2 = c^2$$

или

$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2,$$

т. е. сумма площадей полуокружностей, построенных на катетах как на диаметрах, равняется площади полуокружности, построенной на гипотенузе как на диаметре.

Обозначаем далее площади сегментов, заключенных между большим кругом и катетами a и b, соответственно через σ_1 и σ_2 и вычитаем их суммы из последнего равенства. Тогда получаем

$$\text{пл. } L_1 + \text{пл. } L_2 = S_\Delta,$$

что и требовалось доказать.

Гиппократ Хиосский (V в. до н. э.) — древнегреческий математик, автор не дошедшего до нас трактата по геометрии, включавшего, как полагают историки, материал, содержащийся в первых четырех книгах «Начал» Евклида. Много занимался задачей об удвоении куба и задачей о квадратуре круга. Поиски решения второй задачи и привели ученого к рассмотрению квадратур луночек, носящих его имя.

17. Приняв A за центр, опишем окружность радиусом, равным данному отрезку (рис. 9). Далее, приняв B за центр, опишем другую окружность тем же радиусом. Обозначив одну из точек пересечения окружностей через C и соединив ее прямыми с A и B, получим треугольник ABC, который, как легко проверить, и есть искомый.

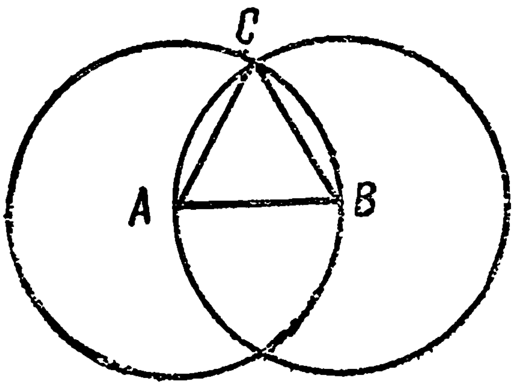


Рис. 9

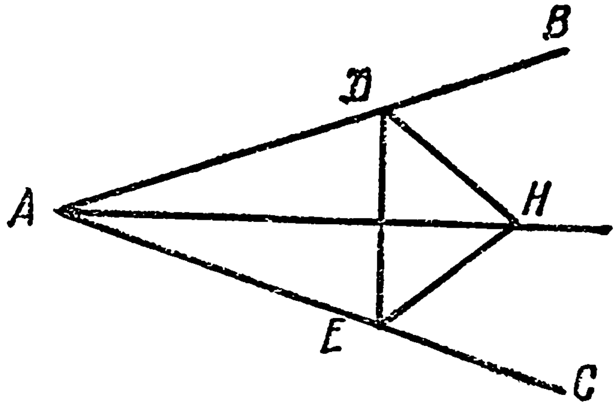


Рис. 10

18. Пусть BAC — данный произвольный угол. Возьмем на стороне AB произвольную точку D (рис. 10). Далее на стороне AC построим отрезок $AE = AD$. Точки D и E соединим прямой. Теперь на отрезке DE построим равнобедренный треугольник DEH. Соединим A и H прямой, которая и будет делить данный угол пополам, так как $\triangle ADH = \triangle AEH$.

19. Пусть ABC — данный треугольник, а α — данный угол. Для решения задачи делим BC в точке D пополам и строим при точке D угол, равный α (рис. 11). Далее через C проводим прямую, параллельную прямой DE, а через точку A — прямую AH, параллельную BC. Тогда полученный параллелограмм $DEHC$ и будет искомым (докажите).

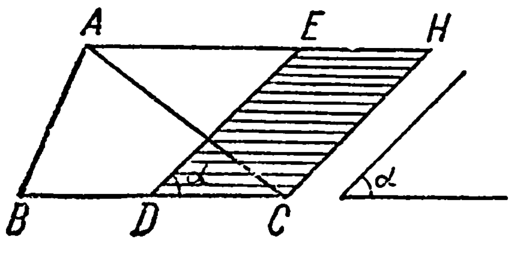


Рис. 11

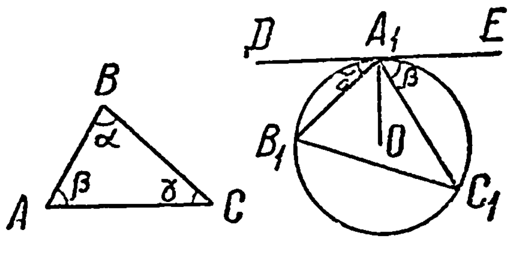


Рис. 12

20. На окружности данного круга берем произвольную точку A_1 и в ней проводим касательную DE (рис. 12). Далее строим угол EA_1C_1, равный углу β, и угол DA_1B_1, равный углу γ. После соединения точек B_1 и C_1 прямой получаем треугольник $A_1B_1C_1$, который и будет искомым (докажите).

21. Рассуждение Евклида. «Пусть данная прямая будет AB (рис. 13); вот требуется AB рассечь так, чтобы прямоугольник, заключенный между целой и одним из отрезков, был равен квадрату на оставшемся отрезке.

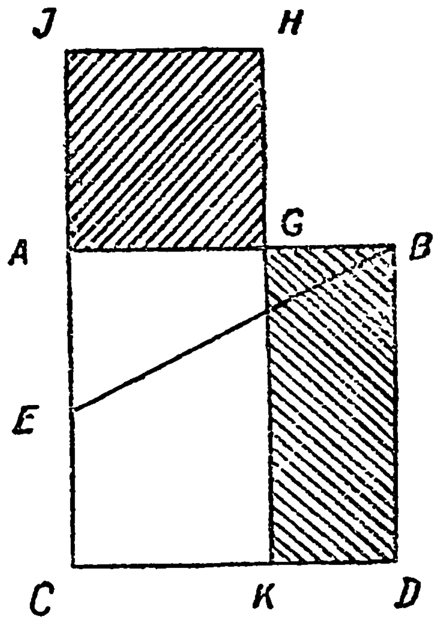


Рис. 13

Надстроим на AB квадрат $ABDC$ (предложение 46 книги I); рассечем AC пополам в точке E, соединим BE, продолжим CA до J, отложим EJ, равную BE, надстроим на AJ квадрат JG и продолжим HG до K; я утверждаю, что AB рассечена в G так, что прямоугольник, заключенный между AB, BG, она делает равным квадрату на AG».

Подробное изложение содержится в «Началах» Евклида (книги I—VI. М.—Л., с. 75—76).

Задача Евклида «о золотом сечении» или «делении в среднем и крайнем отношении» в современных учебниках формулируется так: разделить отрезок на две неравные части так, чтобы большая часть являлась средним пропорциональным между всем отрезком и меньшей частью.

Обозначим длину отрезка через a, большую часть отрезка через x и, следовательно, меньшую часть через $a - x$ (на рис. 13 $AB = a$, $AG = x$, $GB = a - x$). Тогда x должно быть решением уравнения

$$x^2 = a(a - x)$$

или

$$x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Решая это уравнение, получаем

$$x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a; \quad x_2 = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}a.$$

Условию задачи непосредственно удовлетворяет лишь первый корень. Следовательно,

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a,$$

где $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}61804\ldots$ (бесконечная непериодическая дробь).

Следовательно, $x \approx 0{,}62\ a$.

Сознательное применение золотого сечения находим во мнсгих архитектурных сооружениях и в скульптуре. В особенности его придерживались древние греки, создавая величайшие памятники мировой культуры.

22. Прежде всего докажем, что всякое целое положительное число либо равно единице, либо простое, либо может быть представлено в виде произведения простых чисел.

Действительно, для единицы утверждение справедливо. Предположим, что наше утверждение справедливо для всех целых положительных чисел, не превосходящих n; докажем, что это утверждение справедливо и для $n+1$.

Рассуждаем так: если $n+1$ — число простое, то утверждение для $n+1$ верно. Если же $n+1$ не является простым числом, то $n+1$ будет числом составным и, следовательно, $n+1 = n_1 n_2$, причем n_1 и n_2 — целые положительные числа, каждое из которых меньше $n+1$. Согласно сделанному предположению, n_1 и n_2, как числа, не превосходящие n, можно разложить на простые множители и, следовательно, $n+1$ также разложимо на простые множители.

Итак, всякое целое положительное число, отличное от единицы, является числом простым, а если оно не простое, то его можно разложить на простые множители.

Теперь переходим к решению задачи Евклида. Доказательство ведется методом от противного. Предположим, что простых чисел существует лишь конечное множество. Пусть их будет n: p_1, p_2, ..., p_n.

Составим из них произведение $p_1p_2 \ldots p_n$ и прибавим к нему единицу, тогда получим число

$$p_1p_2 \cdot \cdot \cdot p_n + 1.$$

Это число будет больше каждого из простых чисел p_1, p_2, ..., p_n и, следовательно, будет числом составным. Но, согласно предыдущему, всякое составное число разложимо на множители, т. е.

$$p_1p_2 \cdot \cdot \cdot p_n + 1 = q_1q_2 \cdot \cdot \cdot q_m,$$

где q_1, q_2, . . ., q_m — простые множители.

Далее, ни одно из простых чисел $q_1, q_2, \ldots, q_m$ не может совпадать ни с одним из простых чисел p_1, p_2, . . ., p_n. В самом деле, если бы какое-нибудь $q_i = p_k$, то левая часть равенства

$$p_1p_2 \cdot \cdot \cdot p \; - q_1q_2 \cdot \cdot \cdot q_m = 1$$

делилась бы на q_i и, следовательно, на q_i должна разделиться и правая часть, чего быть не может, так как единица на q_i $(q_i \neq 1)$ делиться не может. Выходит, что простые числа q_1, q_2, . . ., q_m не могут совпадать с простыми числами p_1, p_2, . . ., p_n . Следовательно, кроме простых чисел p_1, p_2, . . ., p_n , существуют еще простые числа $q_1, q_2, \ldots, q_m$. Полученное противоречие и доказывает справедливость утверждения Евклида, что простых чисел существует бесконечное множество, что и требовалось доказать.

Доказательство самого Евклида содержится в «Началах» (книги VII—X. М.—Л., 1949, с. 89—90).

Весьма оригинальное решение задачи Евклида дал Эйлер. Суть этого доказательства в следующем (рассуждение ведется также методом от противного).

Предположим, что простых чисел конечное множество. Пусть число их будет n. Обозначим все эти простые числа символами:

$$p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n\ .$$

Составим теперь геометрические прогрессии:

$$1+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_1^2}+\ldots+\frac{1}{p_1^m}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{p_1}};$$

$$1+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_2^2}+\ldots+\frac{1}{p_2^m}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{p_2}};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$1+\frac{1}{p_n}+\frac{1}{p_n^2}+\ldots+\frac{1}{p_n^m}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}.$$

Умножая полученные ряды почленно (а перемножать их можно как сходящиеся ряды положительных чисел, взятые в конечном числе), получим

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p_1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{p_2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{p_3}}\cdots\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}=$$

$$=\sum\frac{1}{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}},$$

где суммирование распространяется на все различные возможные комбинации показателей $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$. Известно, что всякое целое положительное число m разлагается на произведение степеней простых чисел $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\times\times\ldots p_n^{\alpha_n}$ и притом единственным способом (докажите). Отсюда

$$\sum\frac{1}{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}}=\sum\frac{1}{m},$$

т. е. сумма, стоящая в левой части, объединяет все дроби вида $\frac{1}{m}$ при любых целых положительных m. Сумму, стоящую в правой части, можно представить по возрастающим знаменателям:

$$\sum \frac{1}{m} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

Таким образом получаем, что

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \frac{p_1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2}{p_2 - 1} \ldots \frac{p_n}{p_n - 1}.$$

Произведение, стоящее в правой части полученного равенства, отлично от бесконечности, так как чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$— конечное множество. Следовательно, ряд, стоящий в правой части последнего равенства, сходится и имеет своей суммой произведение дробей

$$\frac{p_1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2}{p_2 - 1} \ldots \frac{p_n}{p_n - 1}.$$

Но ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

является гармоническим и, как известно, расходится. Получили логическое противоречие, которое и доказывает неверность предположения о конечности числа простых чисел. Действительно, простых чисел существует бесконечное множество.

23. Автором задачи является знаменитый греческий ученый III в. до н. э. Аполлоний Пергский. Его сочинения составляют значительную часть математической литературы древних. Особенно прославился Аполлоний своим трактатом о конических сечениях в 8 книгах (одна из них считается утерянной).

Решение задачи, выполненное Аполлонием, до нас не дошло, однако оно упоминается некоторыми древними авторами (Папп). По-видимому, Аполлоний, чтобы решить задачу в общем виде, рассматривал ее отдельные частные и предельные случаи:

1) построить окружность, проходящую через три данные точки;

2) построить окружность, касающуюся трех данных прямых;

3) построить окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных параллельных прямых;

4) построить окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных пересекающихся прямых;

5) построить окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой;

6) построить окружность, касающуюся данной окружности и проходящую через две данные точки;

7) построить окружность, касающуюся трех данных окружностей, проходящих через одну общую точку.

Исследование показывает, что если задача Аполлония имеет конечное число решений, то их не более 8.

24. $S_{\text{опис}} = \pi R^2$; $S_{\text{впис}} = \pi r^2$; $r = \frac{a}{2}$; $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, где a — сторона квадрата. Тогда

$$S_{\text{опис}} = \frac{\pi a^2}{2}; \quad S_{\text{впис}} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Следовательно, $S_{\text{опис}} = 2S_{\text{впис}}$, что и требовалось доказать.

Автором решенной задачи является величайший математик, физик всех времен Архимед Сиракузский (287—212 гг. до н. э.). Его жизнь овеяна легендой, согласно которой он в течение двух лет при помощи изобретенных им машин был душой обороны Сиракуз от римских полчищ, блокировавших город с суши и моря. Это он изобретатель знаменитого «архимедова винта» и «архимедовых рычагов». Это он открыл закон гидростатики, известный под названием закона Архимеда.

В ряде работ Архимед пользуется методами, которые весьма близки к современным методам высшей математики, основанным на теории пределов.

(Задача взята из трактата Архимеда «Леммы».)

25. 1) $\frac{1}{2}\cdot 2\pi r\cdot r = \pi r^2$;

2) $\frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{11}{14}$,

откуда

$$\frac{\pi}{4} = \frac{11}{14}; \quad \pi = \frac{44}{14}; \quad \pi = \frac{22}{7}.$$

Таким образом, площадь круга, по Архимеду, как и теперь, равняется $\frac{22}{7} r^2$.

(Задача взята из трактата Архимеда «Измерение круга».)

26. Руководствуясь рис. 1, найдем

$$\text{пл. } AFDHCB = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{AD}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{DC}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{\pi}{8}(AC^2 - AD^2 - DC^2) = \frac{\pi}{8}[(AD + DC)^2 - AD^2 - DC^2] =$$

$$= \frac{\pi}{8}\cdot 2AD\cdot DC = \frac{\pi}{4} BD^2 = \pi\left(\frac{BD}{2}\right)^2,$$

что и требовалось доказать.

27. Поверхность шарового сегмента вычисляется по формуле

$$S = 2\,\pi R h,$$

где R — радиус шара, h — высота сегмента.

Если l будет прямая, соединяющая вершину сегмента с окружностью основания, то $l^2 = 2Rh$; тогда

$$S = \pi\, l^2.$$

(Задача взята из трактата Архимеда «О шаре и цилиндре».)

28. $V_{\text{шар}} = \frac{4}{3}\pi R^3$; $V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$;

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h,$$

откуда

$$R=\sqrt[3]{\frac{r^2h}{4}}.$$

Следовательно,

$$V_{\text{ц}}=\pi r^2h;\quad \frac{4}{3}\pi R^3=\pi r^2h;\quad R=\sqrt[3]{\frac{3}{4}r^2h}.$$

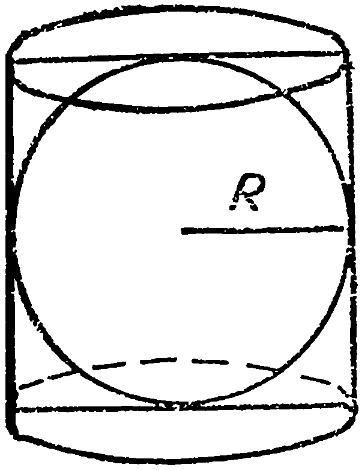


Рис. 14

(Задача взята из трактата Архимеда «О шаре и цилиндре».)

29. Имея в виду условия задачи, получим для объема цилиндра (рис. 14)

$$V_{\text{ц}}=\pi R^2\cdot 2R=2\pi R^3=$$
$$=\frac{3}{2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)=\frac{3}{2}V_{\text{шар}}.$$

Из тех же условий задачи полная поверхность цилиндра

$$S_{\text{ц}}=2\pi R\cdot 2R+2\pi R^2=6\pi R^2=\frac{3}{2}(4\pi R^2)=\frac{3}{2}S_{\text{шар}}.$$

(Задача взята из трактата Архимеда «О шаре и цилиндре». Эта задача пользовалась у самого Архимеда особым вниманием и любовью. Согласно легенде, он даже завещал начертить шар, вписанный в цилиндр, на камне своего могильного памятника, что и было выполнено его родственниками.)

30. Приводим в современной символике решение Архимеда, данное им в трактате «О квадратуре параболы».

Задача ставится так: найти сумму членов бесконечно убывающей прогрессии $a+b+c+d+\ldots$, знаменатель которой равен $\frac{1}{4}$. Из определения прогрессии со знаменателем $q=\frac{1}{4}$ имеем

$$b=\frac{a}{4};\quad c=\frac{b}{4};\quad d=\frac{c}{4}\ \text{и т. д.}$$

или

$$a = 4b;\ b = 4c;\ c = 4d \text{ и т. д.}$$

Далее,

$$b + c + d + \ldots + \frac{1}{3}(b + c + d + \ldots) = \left(b + \frac{b}{3}\right) + \left(c + \frac{c}{3}\right) + \left(d + \frac{d}{3}\right) + \ldots = \frac{4}{3}b + \frac{4}{3}c + \frac{4}{3}d + \ldots = \frac{1}{3}(4b + 4c + 4d + \ldots) = \frac{1}{3}(a + b + c + \ldots),$$

откуда

$$b + c + d + \ldots = \frac{1}{3}a.$$

Прибавляя к обеим частям полученного равенства первый член прогрессии a, получаем

$$a + b + c + d + \ldots = \frac{4}{3}a.$$

Следовательно,

$$1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \ldots = \frac{4}{3},$$

что и нужно было найти.

(Решите эту задачу обычным путем, применяя формулу бесконечно убывающей прогрессии.)

31. Результат, полученный Архимедом, записывается в современных обозначениях формулой

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Эта формула получается из очевидного тождества

$$n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1.$$

Действительно, давая для n значения 1, 2, 3, ..., n, получаем:

$$1^3 - 0^3 = 3\cdot 1^2 - 3\cdot 1 + 1;$$
$$2^3 - 1^3 = 3\cdot 2^2 - 3\cdot 2 + 1;$$
$$3^3 - 2^3 = 3\cdot 3^2 - 3\cdot 3 + 1;$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1.$$

После сложения находим

$$n^3 = 3\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) - 3\,(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n;$$
$$n^3 = 3\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) - \frac{3\,(n+1)\,n}{2} + n;$$
$$3\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) = n^3 - n + \frac{3\,(n+1)\,n}{2};$$
$$1^2 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^2 = \frac{n\,(2n^2 + 3n + 1)}{6};$$
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}.$$

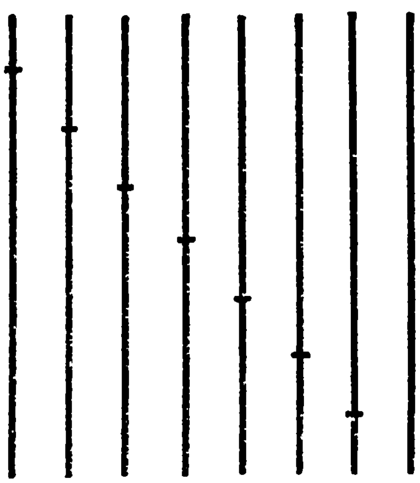


Рис. 15

Архимед пришел к своему результату, исходя из геометрических соображений, выраженных им в следующих словах (рис. 15): «Если взяты линии в каком угодно количестве и каждая превосходит следующую на избыток, равный меньшей из всех, и если взяты в том же числе, как первые, другие линии, из которых каждая равна большей из линий первого ряда, то сумма всех квадратов на линиях, равных большей, сложенная с квадратом на большей и сложенная с площадью, заключенной между меньшей из линий, и линией, составленной из всех неравных линий, равна утроенной сумме квадратов, построенных на неравных линиях».

В современных обозначениях сказанное можно записать так:

$$nn^2 + n^2 + (1 + 2 + 3 + \ldots + n) = 3\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2).$$

Отсюда после некоторых упрощений получим

$$n^2(n+1) + \frac{n\,(n+1)}{2} = 3\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)$$

или окончательно

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}.$$

(Задача взята из трактата Архимеда «О спиралях».)

32. Решение Архимеда. «Ты знаешь, конечно,— говорит Архимед, обращаясь к царю Гелону,— что под Вселенной большинство астрономов подразумевают шар, центр которого находится в центре Земли, а радиус образуется расстоянием между центрами Земли и Солнца. В своем сочинении против астрономов Аристарх Самосский пытается опровергнуть это и доказать, что Вселенная составляет кратное этой величины. Он приходит к выводу, что звезды и Солнце неподвижны, тогда как Земля вращается вокруг Солнца по кругу, в центре которого стоит Солнце. Согласимся, что диаметр сферы неподвижных звезд относится к диаметру Вселенной, понимаемой в том смысле, как это понимает большинство астрономов (т. е. солнечной системы), как этот последний — к диаметру Земли. Я утверждаю, что если бы существовала песочная куча даже величиной с Аристархову звездную сферу, то и в этом случае я могу привести число, даже превышающее число песчинок в такой воображаемой сфере.

Предлагаю следующее.

1) Окружность Земли менее 3 миллионов стадий (стадия равна 185 *м*).

Как тебе известно, были попытки доказать, что окружность Земли составляет около 300 000 стадий, но я превзойду предшественников и приму для нее в десять раз большее число.

2) Солнце больше Земли, а Земля больше Луны. В этом я согласуюсь с большинством астрономов.

3) Поперечник Солнца не более чем в 30 раз превышает поперечник Луны. (Здесь поперечник преуменьшен. На самом деле диаметр Солнца почти в 400 раз больше диаметра Луны.)

4) Диаметр Солнца больше, нежели сторона тысячеугольника, вписанного в наибольший круг небесной сферы.

Это я принимаю по Аристарху, который считает, что видимые размеры Солнца составляют $^1/_{720}$ размеров зодиакального круга. Я и сам измерял угол, под которым видно Солнце, но точное измерение этого угла не легко произвести, ибо ни глаз, ни рука, ни измерительные приборы недостаточно надежны. Но здесь не место об этом распространяться. Достаточно только знать, что этот угол меньше, чем $^1/_{164}$, и больше, чем $^1/_{300}$, прямого угла.

На основании допущений 2 и 3 диаметр Солнца меньше, чем 30 земных диаметров. Поэтому (по допущению 4) периметр тысячеугольника, вписанного в один из наибольших кругов небесной сферы, меньше чем 30 000 земных диаметров. Но если это так, то диаметр Вселенной (т. е. согласно Аристарху, солнечной системы) меньше 10 000 земных диаметров; ибо только для правильного шестиугольника диаметр равен $^1/_3$ периметра, а для всякого многоугольника диаметр меньше $^1/_3$ периметра.

По первому предположению, окружность Земли меньше 3 миллионов стадий; стало быть, диаметр меньше 1 миллиона стадий, так как диаметр окружности меньше $^1/_3$ длины ее. Стало быть, также и диаметр Вселенной меньше чем 10 000 миллионов стадий.

Допустим теперь, что песчинки до того малы, что 10 000 таких песчинок составляют лишь величину одного макового зерна. Я приму диаметр макового зерна в $^1/_{40}$ дюйма. В одном из моих опытов уже 25 маковых зерен, положенных рядом по прямой, заняли дюйм, но я желаю обеспечить все доказательство против всяких возражений.

У нас (греков) существуют названия чисел лишь до мириады ($10\,000 = 10^4$). Считаем мы, однако, и до 10 000 мириад ($10^4 \cdot 10^4 = 10^8$). Чтобы пойти еще далее, примем 10 000 мириад (10^8) за единицу второго порядка и возьмем ее снова 10 000 мириад раз, то получим $10^8 \cdot 10^8 = 10^{8 \cdot 2}$, или единицу третьего порядка. Точно так же можем взять 10 000 мириад раз полученную единицу третьего порядка и получим единицу четвертого порядка ($10^{8 \cdot 3}$) и т. д. $10^{56} = 10^{8 \cdot 7}$ будет представлять единицу восьмого порядка, 1 же есть единица первого порядка.

Теперь вычислим, сколько песчинок, мириада которых занимает объем макового зерна, поместится в шаре с диаметром, равным дюйму. По нашему предположению, диаметр макового зерна равняется $^1/_{40}$ дюйма, но по известному геометрическому положению объемы шаров относятся, как кубы их диаметров, стало быть, как $1^3 : 40^3 = 1 : 64\,000$. Итак, шар одного дюйма в диаметре содержит 64 000 маковых зерен, или 64 000 мириад, т. е. $64 \cdot 10^8$, что меньше чем $10 \cdot 10^8 = 10^9$ песчинок. Шар 100 дюймов в диаметре относится к шару 1 дюйма в диаметре (по объему), как $100^3 : 1^3$ или $10^6 : 1$. Итак, песочный шар 100 дюймов в диаметре, очевидно, содержит не более $10^6 \cdot 10 \cdot 10^8$ песчинок.

Шар 10 000 дюймов в диаметре содержит не более $10^{21} = 10 \cdot 10^4 \cdot 10^{16}$, т. е. десяти мириад единиц нашего третьего порядка.

Но так как стадия меньше 10 000 дюймов, то ясно, что песочный шар с диаметром в стадию содержит менее 10 мириад единиц третьего порядка.

Точно таким же образом найдем, что шар с диаметром в 10^2 стадий содержит меньше чем $1000 \cdot 10^{8 \cdot 3}$ песчинок:

в 10^4	»	»	»	» $10 \cdot 10^{8 \cdot 4}$	песчинок,
в 10^6	»	»	»	» $10^6 \cdot 10 \cdot 10^{8 \cdot 4}$	»
в 10^8	»	»	»	» $10 \cdot 10^4 \cdot 10^{8 \cdot 5}$	»
в 10^{10}	»	»	»	» $1000 \cdot 10^{8 \cdot 6}$	»

Но 10^{10} есть 10 000 миллионов стадий. А так как диаметр Вселенной меньше 10 000 миллионов стадий, стало быть, Вселенная содержит песчинок менее, нежели $1000 \cdot 10^{8 \cdot 6}$. Далее, диаметр Аристарховой сферы неподвижных звезд заключает в себе столько раз диаметр Вселенной (10 000 миллионов стадий), сколько в этом последнем содержится диаметр Земли (1 миллион стадий), то выходит, что сфера Аристарха (неподвижных звезд) относится к сфере Вселенной, как $10^{12} : 1$, а стало быть, содержит песчинок менее, чем 1000 мириад единиц восьмого порядка ($1000 \cdot 10^4 \cdot 10^{8 \cdot 7} = 10^{63}$).

Это, царь Гелон, может показаться невероятным толпе и всем, не сведущим в математике, но те, которые обладают математическими познаниями и умеют размышлять о расстоянии и величине Земли, Солнца, Луны и всего мироздания, признают это за доказанное. Поэтому я счел не неуместным предпринять это исследование».

(Задача взята из трактата Архимеда «Исчисление песчинок».)

33. Эта задача Архимеда о построении правильного семиугольника называется четвертой знаменитой задачей древности. Кроме нее, есть еще три знаменитые задачи древности: об удвоении куба (задача 35), о трисекции угла (задача 36), о квадратуре круга (задача 37).

Архимеду удалось построить правильный семиугольник с помощью циркуля и линейки, воспользовавшись леммой, выполнение которой приводит к решению кубического уравнения, неразрешимого в квадратных радикалах; следовательно, корни его нельзя построить при помощи циркуля и линейки.

Таким образом, еще Архимеду было известно, что задачу о построении правильного семиугольника нельзя полностью решить только при помощи циркуля и линейки, не прибегая к другим инструментам.

В том, что правильный семиугольник нельзя построить при помощи циркуля и линейки, можно убедиться на основании критерия Гаусса. Этот критерий гласит, что если n — число простое, то для того, чтобы правильный n-угольник можно было построить с помощью циркуля и линейки, необходимо и достаточно, чтобы число n имело вид $2^{2^k}+1$.

Число 7 нельзя представить в форме $2^{2^k}+1$, следовательно, с помощью циркуля и линейки построить правильный семиугольник нельзя.

Выходит, что правильный семиугольник можно построить или приближенно с известной степенью точности (с помощью циркуля и линейки) или совершенно точно, если, кроме циркуля и линейки, привлечь еще и другие чертежные инструменты (например, два прямых угла).

В качестве приближенного построения правильного семиугольника можно, например, взять такое: положить сторону правильного вписанного в окружность семиугольника равной половине стороны правильного вписанного в ту же окружность треугольника. Действительно, при

$$r = 1 a_7 = 2\sin\frac{360^\circ}{14} \approx 0{,}868, \text{ тогда как } \frac{a_3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx$$
$$\approx 0{,}867.$$

Погрешность такого приближения, как это видно, не превышает 0,3% (см. книгу Б. И. Аргунова и М. Б. Балка «Геометрические построения на плоскости». М., 1955, с. 229).

Весьма интересное, доступное учащимся старших классов, приближенное построение любого правильного n-угольника дает Б. А. Кордемский в статье «Деление окружности» («Математика в школе», 1953, № 1, с. 50—51.) При $n = 7$ получается способ построения правильного семиугольника, причем погрешность приближения составляет всего 0,17%.

Задача построения правильного семиугольника сводится к решению уравнения

$$x^7 - 1 = 0,$$

которое, как будет показано ниже, неразрешимо в квадратных радикалах.

Отличные от единицы корни седьмой степени из единицы удовлетворяют уравнению

$$\varepsilon^6 + \varepsilon^5 + \varepsilon^4 + \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon = -1, \tag{1}$$

где

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}.$$

Так как $\varepsilon^{7-k} = \varepsilon^{-k}$, то уравнение (1) примет вид

$$\varepsilon + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^3 + \varepsilon^{-3} = -1. \tag{2}$$

Положим

$$\varepsilon + \varepsilon^{-1} = y, \tag{3}$$

тогда

$$\varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} = y^2 - 2 \tag{4}$$

и

$$\varepsilon^3 + \varepsilon^{-3} = y^3 - 3y. \tag{5}$$

Уравнение (2) с помощью соотношений (3), (4) и (5) перепишется так:

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0. \tag{6}$$

Итак, задача свелась к решению такого кубического уравнения, которое, как известно, неразрешимо в квадратных радикалах. Следовательно, задача о построении правильного семиугольника невыполнима с помощью циркуля и линейки.

Однако с помощью двух прямых углов уравнение (6) разрешимо, а значит, и задача построения правильного семиугольника становится также разрешимой. Заметим, что

$$y = \varepsilon + \varepsilon^{-1} = \left(\cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}\right) + \left(\cos\frac{2\pi}{7} - i\sin\frac{2\pi}{7}\right) = 2\cos\frac{2\pi}{7}.$$

Следовательно, если соединить хордой две вершины правильного семиугольника через одну, то расстояние этой хорды от центра $\cos\frac{2\pi}{7} = \frac{y}{2}$.

Теперь решим графически уравнение (6). Для этого строим ломаную линию $ABCDE$ (рис. 16), у которой $AB \perp BC$, $BC \perp CD$ и $CD \perp DE$, причем $AB = 1$, $BC = 1$, $CD = 2$, $DE = 1$, где 1; 1; 2; 1 — абсолютные значения коэффициентов уравнения (6).

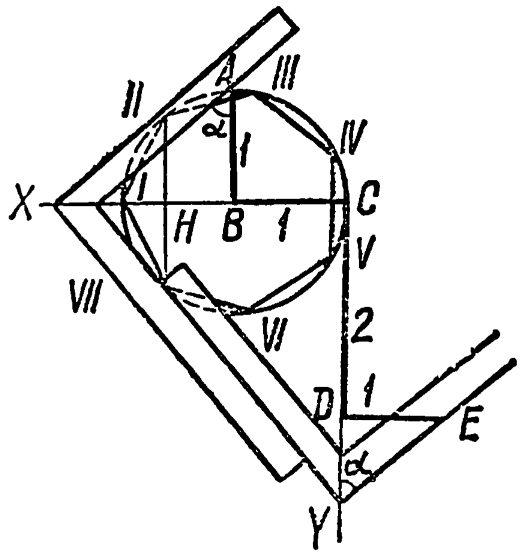


Рис. 16

Расположим теперь два прямых угла так, как это показано на чертеже (рис. 16), и построим так называемую разрешающую ломаную $AXYE$. Производим вычисления и убеждаемся, что отрезок $XB = y$ (искомое решение). Проверим это. Обозначим угол XAB через α, тогда

$$XB = \operatorname{tg}\alpha;$$

$$CY = XC\operatorname{tg}\alpha = (XB + 1)\operatorname{tg}\alpha =$$
$$= (\operatorname{tg}\alpha + 1)\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}\alpha;$$

$$CY = 2 + DY = 2 + \operatorname{ctg}\alpha = 2 + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha + 1}{\operatorname{tg}\alpha};$$

$$\frac{2\operatorname{tg}\alpha + 1}{\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}\alpha;$$

$$2\operatorname{tg}\alpha + 1 = \operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha;$$

$$\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha - 1 = 0,$$

откуда видно, что $\operatorname{tg}\alpha = XB$ удовлетворяет уравнению (6).

Следовательно, в качестве y можно взять отрезок XB. Учитывая, что $\frac{y}{2} = \frac{XB}{2}$ есть расстояние от центра B хорды, соединяющей две вершины правильного семиугольника через одну вершину, находим точку H — середину отрезка XB и восставляем в ней к этому отрезку перпендикуляр, пересекающий окружность в точках II и VII, которые и будут вершинами правильного семиугольника. Как найти другие вершины, уже понятно.

34. Обозначим через X, Y, Z, T соответственно количество белых, черных, рыжих и пестрых быков, а через x, y, z, t — количество коров той же масти. Тогда задача сводится к решению следующей системы уравнений:

$$X = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) Y + Z;$$

$$Y = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) T + Z;$$

$$T = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) X + Z;$$

$$x = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) (Y + y);$$

$$y = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) (T + t);$$

$$t = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) (Z + z);$$

$$z = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) (X + x).$$

К этим уравнениям нужно еще прибавить два условия:

$X + Y$ равно квадратному числу;

$T + Z$ равно треугольному числу.

Иначе:

$$X + Y = p^2;$$

$$T + Z = \frac{q(q+1)}{2}.$$

Архимед дал подробное решение этой задачи (см. А р х и м е д. Сочинения. М., 1962, с. 372—377).

Там для числа X белых быков дается следующий ответ:

$$X = 1598 \cdot 10^{206541}.$$

Общее же число быков $7766 \cdot 10^{206541}$.

В комментариях к этой задаче И. Н. Веселовский пишет, что для записи ответа «понадобился бы том в 660 страниц, если считать, что на каждой странице умещается 2500 цифр».

35. Происхождение задачи об удвоении куба связано, по-видимому, с желанием древних ученых обобщить легко решаемую задачу об удвоении квадрата, т. е. построении квадрата, который превосходил бы данный по площади в два раза.

Трудности, связанные с решением задачи об удвоении куба, дали повод к возникновению легенд о происхождении этой задачи. В качестве примера приводим одну легенду. Она принадлежит Эратосфену (276—194 гг. до н. э.), знаменитому греческому математику, астроному и философу. Вот что он рассказал о причинах, побудивших древних ученых рассматривать задачу об удвоении куба.

Однажды на о. Делосе, что находится в Эгейском море, вспыхнула эпидемия чумы. Жители этого острова обратились за помощью и советом к дельфийскому оракулу, который служил при храме Аполлона в Дельфах (Дельфы — общегреческий религиозный центр в Фокиде, у подножия горы Парнас).

Чтобы прекратить страдания людей, ответил оракул, надо снискать милость богов, а для этого надо удвоить золотой жертвенник Аполлону (богу Солнца), который имел форму куба.

Жители Делоса поспешили отлить из золота два таких жертвенника, какой был установлен в храме Аполлона, и поставили один на другой, думая, что проблема удвоения кубического жертвенника ими решена.

Однако чума не прекращалась. Тогда они опять обратились к оракулу с недоуменным вопросом: «Почему же не прекращается чума, ведь мы удвоили золотой жертвенник всесильному Аполлону?» На это им оракул якобы ответил: «Нет, вы не решили поставленной задачи! Надо было удвоить жертвенник, не изменяя его кубической формы».

Не в состоянии решить эту задачу так, как требовал оракул, делосцы обратились за помощью к математику и философу Платону. Но он уклончиво ответил им: «Боги, вероятно, недовольны вами за то, что вы мало занимаетесь геометрией». Однако сам Платон не сумел решить указанной задачи циркулем и линейкой. С того времени эта задача и стала именоваться «делосской» (иногда ее неправильно называют «делийской»).

Древние греки сравнительно легко решили задачу об удвоении квадрата. Для этого надо было уметь строить при помощи циркуля и линейки корень квадратный из двух. Действительно, если сторона данного квадрата равняется a, а сторона искомого квадрата x, то, согласно условию задачи, будем иметь

$$x^2 = 2a^2,$$

откуда

$$x = a\sqrt{2}.$$

Следовательно, в качестве x надо взять диагональ данного квадрата, которая по теореме Пифагора как раз и будет равняться $a\sqrt{2}$ (рис. 17).

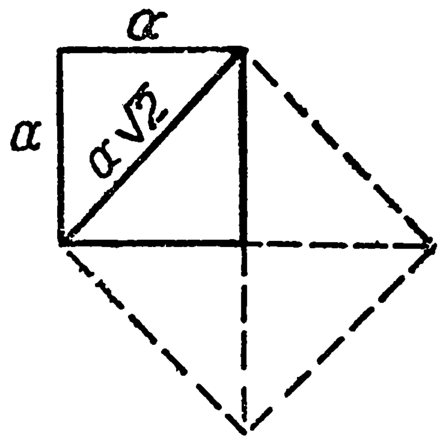


Рис. 17

Обобщая задачу об удвоении квадрата, древние греки перешли к рассмотрению задачи об удвоении куба и также стремились решить ее при помощи циркуля и линейки. Оказалось, что решение задачи об удвоении куба сводится к построению циркулем и линейкой корня кубического из двух. Действительно, если ребро данного куба положить равным a, а ребро искомого куба x, то, согласно условию задачи, будем иметь

$$x^3 = 2a^3,$$

откуда

$$x = a\sqrt[3]{2}.$$

Однако все старания построить $\sqrt[3]{2}$ циркулем и линейкой не увенчались успехом. И трудно сказать, как долго еще продолжались бы эти попытки, если бы, наконец, в первой половине XIX в. не было доказано, что при помощи только циркуля и линейки $\sqrt[3]{2}$ построить нельзя.

Чтобы иметь хотя бы некоторое представление о разрешимости и неразрешимости задач на построение, ограничимся следующим небольшим замечанием. Прежде всего напомним, что при помощи циркуля и линейки можно сравнительно легко построить выражения:

$$a+b; \quad a-b; \quad \frac{ab}{c}; \quad \sqrt{ab}; \quad \sqrt{a^2+b^2}; \quad \sqrt{a^2-b^2},$$

где a, b, c суть данные или найденные отрезки.

Если решение задачи сводится к последовательному выполнению конечного числа этих операций, то задача оказывается разрешимой при помощи циркуля и линейки. Если же решение задачи не ограничивается последовательным выполнением указанных выше операций в конечном числе, то такую задачу при помощи циркуля и линейки решить невозможно. Задача об удвоении куба и является примером такой задачи, которую нельзя решить, прибегая только к циркулю и линейке, т. е. путем проведения окружностей и прямых линий.

В современной математике доказано, что кубическое уравнение с рациональными коэффициентами, не имеющее рациональных корней, не может быть разрешимо в квадратных радикалах, т. е. ни один из корней этого уравнения не может быть построен при помощи циркуля и линейки.

(Доказательство этой теоремы можно прочитать, например, в книге Б. И. Аргунова и М. Б. Балка «Геометрические построения на плоскости». М., 1955, с. 214—217.)

Выше было показано, что задача об удвоении куба сводится к решению кубического уравнения

$$x^3 - 2a^3 = 0,$$

где a — ребро данного куба, x — искомое ребро удвоенного куба.

Приняв для простоты длину ребра данного куба за 1, получим уравнение $x^3 - 2 = 0$. Это уравнение с рациональными коэффициентами, как легко убедиться, не может иметь рациональных корней. Следовательно, по предыдущей теореме задача об удвоении куба не может быть решена при помощи циркуля и линейки.

Первым из ученых, открыто высказавшим мнение о невозможности построения посредством циркуля и линейки отрезка, равного $\sqrt[3]{2}$, был французский ученый Р. Декарт. В 1637 г. он высказал предположение, что корень кубический из некубического рационального числа есть вообще иррациональность, не приводящаяся к конечному числу действий извлечения квадратного корня.

Строгое доказательство неразрешимости задачи об удвоении куба при помощи циркуля и линейки было дано французским математиком П. Венцелем в 1837 г.

Одним из первых древнегреческих геометров, сделавших значительный шаг в решении задачи об удвоении куба путем привлечения к циркулю и линейке дополнительных средств, был Гиппократ Хиосский (V в. до н. э.).

Решение стереометрической задачи, какой является делосская задача об удвоении куба, Гиппократ Хиосский свел к рассмотрению планиметрической задачи, заключающейся в отыскании двух средних, пропорциональных между двумя данными отрезками, из которых второй в два раза больше первого, т. е. к нахождению таких двух отрезков x и y, которые, будучи «вставлены» между двумя данными a и $2a$, составили бы вместе с ними геометрическую прогрессию: $a, x, y, 2a$.

Поскольку $a, x, y, 2a$ — геометрическая прогрессия, то

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a},$$

откуда $x^2 = ay$ и $y^2 = 2ax$. Следовательно, $x^4 = a^2y^2 = 2a^3x$ или $x^3 = 2a^3$. Выходит, что x и есть ребро искомого куба, превосходящего по объему данный куб с ребром a в два раза.

Ясно, что при помощи циркуля и линейки «вставки» x и y найти нельзя, так как обратное приводило бы к построению циркулем и линейкой $x = \sqrt[3]{2}$, что, как указывалось выше, выполнить невозможно.

Оказывается, «вставки» x и y можно найти, если воспользоваться дополнительными средствами в виде специально изготовленных приборов (механизмов). Оригинальные и весьма простые приборы для механического нахождения «вставок» x и y по двум заданным отрезкам a и $2a$ предложили Платон и Эратосфен. Прибор Платона состоит из двух обыкновенных прямоугольных плотничьих наугольников,

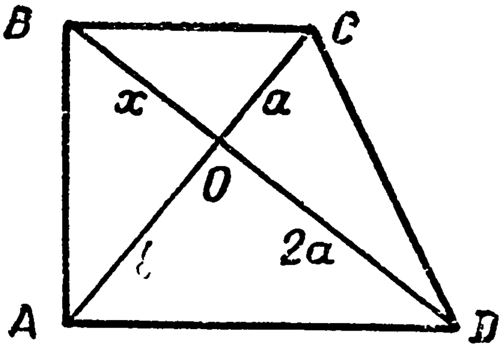


Рис. 18

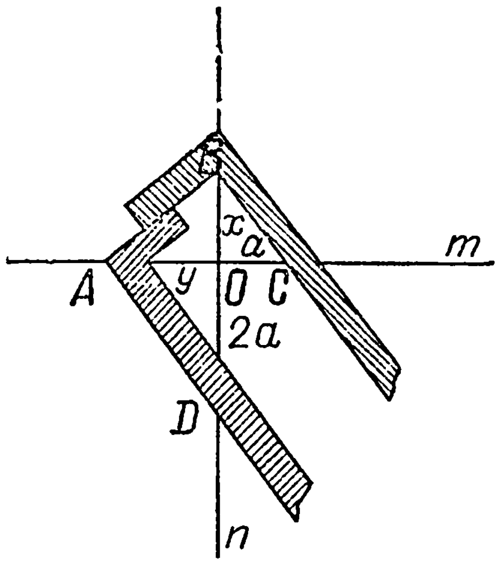


Рис. 19

а само построение основано на лемме: во всякой прямоугольной трапеции (рис. 18) с перпендикулярными диагоналями отрезки диагоналей образуют геометрическую прогрессию

$$\frac{OC}{OB} = \frac{OB}{OA} = \frac{OA}{OD}$$

(докажите).

Построение «вставок» x и y, нужных для решения задачи об удвоении куба, проводится следующим образом. Берутся две взаимно перпендикулярные прямые m и n, пересекающиеся в точке O (рис. 19). На прямой m вправо от точки O отложим отрезок $OC = a$ (a — сторона куба, подлежащего удвоению). На прямой n вниз от точки O отложим отрезок $OD = 2a$. Теперь возьмем два прямоугольных плотничьих наугольника (на чертеже заштрихованы) и расположим их так (см. рис. 19), чтобы сторона первого наугольника проходила через точку C, которая считается данной, а вершина его находилась на прямой n; чтобы сторона второго наугольника проходила через точку D, которая также считается данной, а вершина находилась бы на прямой m; остальные две стороны наугольников должны соприкасаться.

При таком расположении двух наугольников по данным точкам C и D найдем на прямых m и n точки A и B. Тогда $OB = x$, а $OA = y$. По лемме

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a},$$

откуда

$$x^3 = 2a^3.$$

Следовательно, $x = OB$ и есть построенное ребро удвоенного куба, что и нужно было сделать.

Прибор Эратосфена носит название «мезолябий», что в переводе означает «уловитель», т. е. уловитель двух средних величин («вставок»), из которых одна составляет искомую сторону удвоенного куба.

Мезолябий Эратосфена состоит из двух параллельно расположенных реек m и n, расстояние между которыми равняется удвоенной стороне куба, т. е. $2a$. К этим рейкам прикреплены три равных прямоугольных треугольника, из которых один, самый левый, смонтирован неподвижно, а другие два могут перемещаться вдоль пазов, устроенных в рейках, причем на верхнюю рейку опираются равные катеты, а на нижнюю — их противоположные вершины (рис. 20).

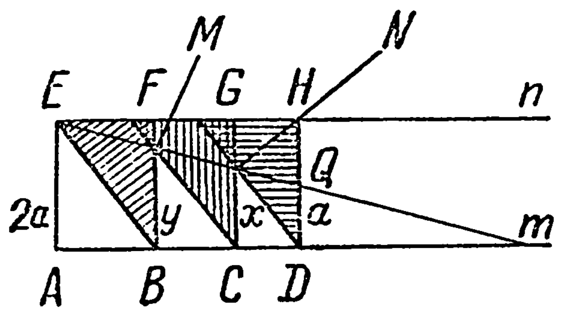


Рис. 20

На катете HD самого правого подвижного треугольника откладываем отрезок $DQ = a$. Теперь двигаем подвижные треугольники с таким расчетом, чтобы точки пересечения катета одного треугольника с гипотенузой следующего за ним (M и N) расположились бы на одной прямой с E и Q. Тогда из соответствующих подобных треугольников получаем

$$\frac{a}{NC} = \frac{NC}{MB} = \frac{MB}{2a}.$$

Обозначая NC через x и MB через y, находим

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}.$$

Следовательно, $x = NC$ и будет найденной величиной искомого ребра удвоенного куба. Делосская задача решена.

36. Древнегреческие ученые без особого труда делили произвольный угол на три равные части с помощью разного рода механизмов. Но перед ними всегда стоял вопрос: почему трисекция угла, легко выполнимая при помощи специально изготовленных механизмов, не поддается разрешению при помощи циркуля и линейки. И вообще разрешима ли эта задача в общем виде при помощи таких классических чертежных инструментов?

Чтобы ответить на поставленный вопрос, приведем некоторые рассуждения. Обозначим данный угол, который требуется разделить на три равные части, через $3\,\alpha$. Рассмотрим $\cos 3\,\alpha$. По известным формулам тригонометрии

$$\begin{aligned}\cos 3\,\alpha &= \cos(\alpha + 2\,\alpha) = \cos\alpha\,\cos 2\,\alpha - \sin\alpha\sin 2\,\alpha = \\ &= \cos\alpha\,(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - \sin\alpha\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha = \\ &= \cos^3\alpha - \cos\alpha\,\sin^2\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha = \\ &= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,(1 - \cos^2\alpha) = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha + 3\cos^3\alpha = \\ &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\end{aligned}$$

или

$$\cos 3\,\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

Умножая левую и правую части полученного равенства на 2, получаем

$$2\cos 3\,\alpha = 8\cos^3\alpha - 6\cos\alpha.$$

Пусть теперь $2\cos 3\alpha = a$ и $2\cos\alpha = x$, тогда

$$a = x^3 - 3x$$

или

$$x^3 - 3x - a = 0. \qquad (1)$$

Чтобы доказать, что задача о трисекции угла неразрешима в общем виде при помощи циркуля и линейки, достаточно указать хотя бы один угол, который нельзя разделить при помощи циркуля и линейки. Путем несложных рассуждений покажем, что таким свойством обладает, например, угол в 60°. Действительно, полагая $3\alpha = 60°$, получим $\cos 3\alpha = \frac{1}{2}$, и уравнение (1) примет вид

$$x^3 - 3x - 1 = 0. \qquad (2)$$

В алгебре доказывается, что рациональными корнями уравнения (2) могли бы быть $+1$ и -1, но ни то, ни другое указанному уравнению не удовлетворяет. Выходит, что уравнение (2) не имеет рациональных корней и, следовательно, по известной «теореме неразрешимости» угол в 60° нельзя разделить на три равные части при помощи циркуля и линейки. Заметим, из того, что угол в 60° не может быть разделен на три равные части при помощи циркуля и линейки, вытекает, что угол в 20°, а следовательно, и угол в 40° не могут быть построены с помощью указанных инструментов. Отсюда вытекает важное следствие: правильный девятиугольник, восемнадцатиугольник и т. д. не могут быть построены циркулем и линейкой.

Далее, для α уравнения (1) можно было бы указать еще бесчисленное множество значений, для которых уравнение (1) неразрешимо в квадратных радикалах, и, следовательно, существует бесчисленное множество углов, трисекция которых не может быть выполнена при помощи циркуля и линейки.

Итак, если пользоваться только циркулем и линейкой, задача о трисекции угла в общем виде неразрешима.

Древним ученым, как указывалось выше, была известна трисекция прямого угла при помощи циркуля и линейки. Возможность этой трисекции можно подтвердить и теоретически. Действительно, положив $3\alpha = 90°$, получим, что $a = 0$, и уравнение (1) примет вид

$$x^3 - 3x = 0. \tag{3}$$

Уравнение (3) имеет корни 0, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$. Таким образом, ненулевые корни выражены в квадратных радикалах. Следовательно, угол в 90° можно разделить циркулем и линейкой на три равные части.

Рассуждая аналогично, можно было бы показать, что теми же средствами и угол в 45° можно разделить на три равные части.

Необходимо добавить, что трисекция при помощи циркуля и линейки возможна для бесчисленного множества углов, например для углов вида $\frac{\pi}{2^n}$, где n — целое положительное число (рекомендуется доказать самостоятельно).

Оригинальное и вместе с тем чрезвычайно простое решение задачи о трисекции угла при помощи циркуля и подвижной линейки с двумя отметками дал Архимед. Как это делается, покажем на конкретном примере. Пусть требуется произвольно взятый острый угол ABC разделить на три равные части. Для этого из вершины данного угла B, как из центра, произвольным радиусом R опишем окружность (рис. 21). Точки пересечения сторон данного угла с окружностью обозначим через D и E. Теперь берем подвижную линейку с двумя точечными отметками F и G, причем длина отрезка $FG = R$, и прикладываем ее к точке E так, чтобы F и G оказались на одной прямой с точкой E и чтобы F находилась на окружности, а G — на продолжении

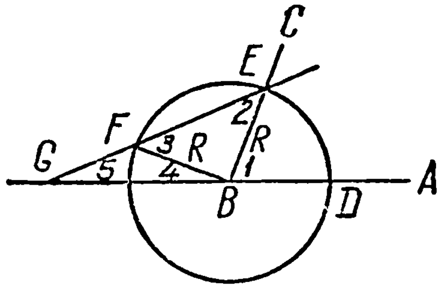


Рис. 21

стороны BA. Тогда угол EGD и будет составлять одну треть заданного угла ABC. Докажем это.

Обозначим для краткости углы на чертеже цифрами *1*, *2*, *3*, *4*, *5*. Надо доказать, что угол *5* составляет третью часть угла *1*, т. е.

$$\angle 5 = \frac{1}{3} \angle 1.$$

Действительно, $\angle 1 = \angle 5 + \angle 2$ (свойство внешнего угла треугольника), но $\angle 3 = \angle 5 + \angle 4$ (свойство внешнего угла треугольника). Далее, $\angle 5 = \angle 4$ (свойство равнобедренного треугольника). Тогда $\angle 3 = 2\angle 5$. Из равнобедренного треугольника BEF $\angle 3 = \angle 2$. Учитывая предыдущее равенство, будем иметь

$$\angle 1 = \angle 3 + \angle 5 = 2\angle 5 + \angle 5 = 3\angle 5.$$

Следовательно, $\angle 5 = \frac{1}{3} \angle 1$, что и требовалось доказать.

Изыскание все новых и новых способов решения задачи о трисекции угла показало, что эта задача тесно примыкает к задачам алгебры и тригонометрии. Так, еще в XV в. самаркандский ученый ал-Каши применил трисекцию угла к составлению весьма точных тригонометрических таблиц, нужных для вычислительной математики и астрономии. Применяя прием приближенного численного решения кубического уравнения, он по известному значению $\sin 3°$ производит вычисление $\sin 1°$. Далее, в XVI в. знаменитый французский математик Ф. Виет на основе трисекции угла находит тригонометрическое решение кубического уравнения в так называемом неприводимом случае.

Другие весьма оригинальные, но довольно сложные способы решения задачи о трисекции угла дали ученые Декарт, Ньютон, Клеро, Шаль и др. Все эти решения обычно основаны на отыскании точек пересечения конического сечения с окружностью. Попытки найти новые решения задачи о трисекции угла продолжаются и в настоящее время (например, при помощи номографии).

37. Попытки древнегреческих ученых решить задачу о квадратуре круга путем проведения прямых и окружностей так и не увенчались успехом. Дело в том, что задача о квадратуре круга, так же как и задачи об удвоении куба и трисекции угла, оказывается неразрешимой при помощи циркуля и линейки.

Еще в 1755 г. Парижская академия наук ввиду бесплодности усилий математиков, а еще более нематематиков, пытавшихся решить задачу о квадратуре круга, вынесла решение впредь не принимать на рассмотрение работы, касающиеся квадратуры круга, а также трисекции угла и удвоения куба. Это несколько охладило пыл «квадратурщиков».

Лишь во второй половине XIX в. немецкому математику Ф. Линдеману удалось, наконец, доказать, что задача о квадратуре круга неразрешима при помощи указанных средств. Доказательство Линдемана трудное и выходит далеко за пределы школьного курса математики. Оставляя в стороне рассуждения Линдемана, мы ограничимся следующими краткими замечаниями.

Пусть дан круг радиуса R. Требуется построить квадрат, равновеликий этому кругу. Обозначим сторону искомого квадрата через x, тогда

$$x^2 = \pi R^2,$$

откуда

$$x = R\sqrt{\pi}.$$

Таким образом, вопрос о построении квадрата, равновеликого данному кругу, сводится к построению произведения данного отрезка R на данное число $\sqrt{\pi}$, причем это построение надо провести при помощи циркуля и линейки, т. е. путем проведения конечного числа окружностей и прямых линий.

При помощи циркуля и линейки можно всегда построить произведение данного отрезка R на рациональное число (целое или дробное), но далеко не всегда можно указанными средствами построить произведение данного отрезка на число иррациональное. Это возможно в некоторых случаях, например, если иррациональное число равняется $\sqrt{2}$ или $\sqrt{2-\sqrt{3}}$; тогда $R\sqrt{2}$ находится как сторона квадрата, вписанного в круг радиуса R, а $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$ — как сторона правильного двенадцатиугольника, вписанного в круг радиуса R, причем, как известно, правильный двенадцатиугольник в круг можно вписать довольно легко, после того как в круг вписан правильный шестиугольник.

В теории геометрических построений установлено, что данный отрезок R можно умножить при помощи циркуля и линейки на вещественное число лишь только в том случае, если это вещественное число может быть корнем алгебраического уравнения с целыми коэффициентами, разрешимого в квадратных радикалах. Число, которое не может являться корнем никакого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами, принято называть трансцендентным числом. Следовательно, при помощи циркуля и линейки нельзя построить произведение данного отрезка R на число трансцендентное.

Таким образом, чтобы доказать неразрешимость задачи о квадратуре круга при помощи циркуля и линейки, необходимо установить невозможность указанными средствами построить произведение данного отрезка R на число $\sqrt{\pi}$, а для этого достаточно показать, что $\sqrt{\pi}$ или число π есть число трансцендентное.

Заслуга Ф. Линдемана как раз и заключается в том, что он впервые в мировой науке вполне строго доказал, что π есть число трансцендентное, и тем самым окончательно установил невозможность решения задачи о квадратуре круга с помощью циркуля и линейки. Вот почему Ф. Линдемана называют «победителем числа π».

Выше было показано, что задача о квадратуре круга неразрешима при помощи циркуля и линейки, однако она становится вполне разрешимой, если специально для нее расширить средства построения, если воспользоваться некоторыми специальными кривыми (например, квадратрисой). Средствами циркуля и линейки можно решить задачу о квадратуре круга только приближенно.

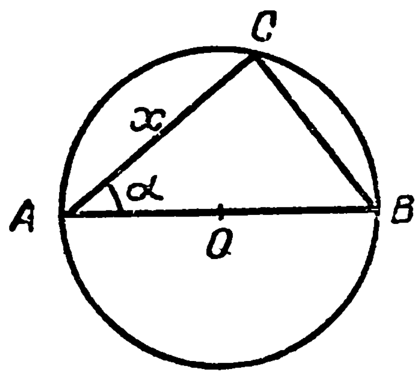


Рис. 22

Ниже приведем одно из приближенных решений задачи о квадратуре круга, основанное на использовании треугольника Бинга. Этот способ был предложен в 1836 г. русским инженером Бингом и очень удобен для практических целей. Рассмотрим треугольник ABC (рис. 22), вписанный в круг, квадратура которого находится с таким расчетом, чтобы наибольшая сторона треугольника была диаметром. Обозначим угол CAB через α, а хорду AC через x. Подберем угол α так, чтобы отрезок x был стороной квадрата, равновеликого данному кругу. Для этой цели воспользуемся соотношением

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{x}{2R},$$

где R — радиус круга.

Так как площадь квадрата со стороной x должна быть равновелика площади круга, то будем иметь $x^2 = \pi R^2$ или $4R^2\cos^2\alpha = \pi R^2$, откуда $\cos^2\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = 0{,}886$. По таблицам находим $\alpha = 27°36'$.

Итак, проводя в данном круге хорду под углом $27°36'$ к диаметру, мы сразу получим искомую сторону квадрата, равновеликого данному кругу. Легко догадаться, что рассмотренный треугольник ABC и есть треугольник Бинга.

38. Арифметическую прогрессию с четным числом членов можно записать так:

$$\div a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ a_{n+1},\ a_{n+2},\ \ldots,\ a_{2n}.$$

Найдем теперь сумму первой половины всех ее членов

$$S_1 = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Сумма второй половины

$$S_2 = \frac{a_{n+1} + a_{2n}}{2} \cdot n.$$

Составим теперь разность полученных сумм

$$S_2 - S_1 = \frac{a_{n+1} + a_{2n} - a_1 - a_n}{2} \cdot n.$$

Так как

$$a_n = a_1 + dn - d;\quad a_{n+1} = a_1 + dn;\quad a_{2n} = a_1 + 2dn - d$$

(где d — разность арифметической прогрессии), то

$$S_2 - S_1 = \frac{a_1 + dn + a_1 + 2dn - d - a_1 - a_1 - dn + d}{2} \cdot n = \frac{2dn}{2} \cdot n = dn^2.$$

Следовательно,

$$S_2 - S_1 = dn^2,$$

что и требовалось установить.

Эта задача принадлежит греческому ученому Гипсиклу Александрийскому, жившему во II в. до н. э. Ему принадлежит XIV книга «Начал» Евклида. Гипсикл является автором многих интересных задач.

39. Герон решает эту задачу по своей формуле

$$S_\Delta = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}};$$

$$S_\Delta = 84 \text{ (кв. ед.).}$$

Древнегреческий ученый Герон Александрийский жил около I в. О его жизни до нас дошли лишь отрывочные сведения. Известно, что он был выдающимся ученым-инженером, занимался вопросами геодезии. Герону принадлежит математический трактат «Метрика», где он дал правила численного решения квадратных уравнений и приближенного извлечения квадратных и кубических корней, а в геометрическом отделе — формулы приближенных расчетов разных геометрических фигур (площадей и объемов), где, между прочим, приводится и знаменитая формула для вычисления площади треугольника по его сторонам.

40. Обозначим стороны искомого треугольника через $x-1$, x, $x+1$. Тогда площадь S_Δ найдется по формуле Герона:

$$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,.$$

Для рассматриваемой задачи

$$p=\frac{3x}{2};\quad p-a=\frac{x}{2}+1;\quad p-b=\frac{x}{2};$$

$$p-c=\frac{x}{2}-1;$$

$$S_\Delta=\sqrt{\frac{3x}{2}\left(\frac{x}{2}+1\right)\frac{x}{2}\left(\frac{x}{2}-1\right)};$$

$$S_\Delta=\frac{x}{2}\sqrt{3\left(\frac{x^2}{4}-1\right)},$$

где $\frac{x}{2}=m$ — целое число.

Тогда

$$S_\Delta=m\sqrt{3(m^2-1)},$$

где $m^2-1=3n^2$ — целое число; $S_\Delta=3mn$ — целое число; $m^2-3n^2=1$;

$$(m+n\sqrt{3})(m-n\sqrt{3})=1. \qquad (1)$$

Последнее равенство выполняется при $m=2$ и $n=1$:

$$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1,$$

откуда

$$(2+\sqrt{3})^p(2-\sqrt{3})^p=1 \qquad (2)$$

при $p=1, 2, 3, \ldots$ Из равенств (1) и (2) вытекает

$$m_p+n_p\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^p;$$
$$m_p-n\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})^p,$$

откуда

$$x_p=2m_p=(2+\sqrt{3})^p+(2-\sqrt{3})^p.$$

Из полученной формулы будем иметь: при $p=1$ $x_1=4$, $S_\Delta=6$; при $p=2$ $x_2=14$, $S_\Delta=84$; при $p=3$ $x_3=52$, $S_\Delta=1170$; при $p=4$ $x_4=194$, $S_\Delta=16\,296$ и т. д.

41. Действительно, непосредственной проверкой устанавливаем, что если разбить ряд нечетных чисел на группы так, как требует условие задачи, т. е. $1+(3+5)+(7+9+11)+(13+15+17+19)+\ldots$, то

$$1=1^3;$$
$$3+5=8=2^3;$$
$$7+9+11=27=3^3;$$
$$13+15+17+19=64=4^3 \text{ и т. д.}$$

Теперь установленному факту дадим общее доказательство. Число членов в $n-1$ первых групп составляет

$$1+2+3+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Последнее число в $(n-1)$-й группе равно $n(n-1)-1$. Тогда первое число в n-й группе будет

$$n(n-1)-1+2=n(n-1)+1=n^2-n+1,$$

а последнее число этой же группы

$$n^2-n+1+2(n-1)=n^2+n-1.$$

Следовательно, сумма членов n-й группы равна

$$\frac{n^2-n+1+n^2+n-1}{2}\cdot n=n^3,$$

что и требовалось доказать.

Автором этой задачи является древнегреческий ученый I в. н. э. Никомах из Геразы. Ему принадлежит трактат «Введение в арифметику», который долгое время служил учебником по элементарной математике.

42. Надо доказать, что

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

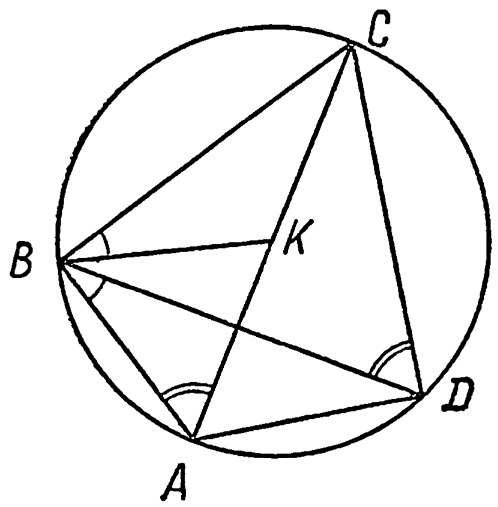


Рис. 23

Построим угол KBC, равный углу ABD (рис. 23), тогда $\triangle ABK \backsim \triangle BCD$, так как $\angle ABK = \angle DBC$ (равносоставленные) и $\angle BAC = \angle BDC$ (опираются на одну и ту же дугу). Отсюда

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AK}{CD}$$

или

$$AB \cdot CD = AK \cdot BD. \quad (1)$$

$\triangle ABD \backsim \triangle KBC$, так как $\angle ABD = \angle KBC$ (по построению и $\angle ADB = \angle BCK$ (опираются на одну и ту же дугу). Отсюда

$$\frac{AD}{KC} = \frac{BD}{BC}$$

или (2)

$$AD \cdot BC = KC \cdot BD.$$

Теперь, сложив (1) и (2), получим

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = (AK + KC)\,BD$$

или

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD,$$

что и требовалось доказать.

Клавдий Птолемей (умер около 168 г.) — древнегреческий ученый, исследования которого имели большое значение для развития различных областей науки (математики, физики, географии, особенно астрономии). В основном труде «Великое математическое построение астрономии в XIII книгах» (арабизированное название «Альмагест») Птолемей пытается математически обосновать свою геоцентрическую систему мира, согласно которой неподвижным центром является Земля, а вокруг движется Солнце вместе с планетами Система Птолемея господствовала на протяжении почти 14 веков, пока польский астроном Николай Коперник (1473—1543) не обосновал гелиоцентрическую систему, правильно отражающую действительный мир. По системе Коперника, Земля не только вращается вокруг своей оси, но и перемещается в пространстве (обращается вокруг Солнца).

В «Альмагесте» дается математический аппарат астрономии (линейная и сферическая тригонометрия, таблица синусов).

43. Исходя из условий задачи, составим систему

$$x - y = \frac{1}{3}z;$$

$$y - z = \frac{1}{3}x;$$

$$z - 10 = \frac{1}{3}y.$$

Решая эту систему, получаем

$$x = 45; \quad y = 37\frac{1}{2}; \quad z = 22\frac{1}{2}.$$

(Все задачи Диофанта рассматриваются в современной символике.)

44. Из уравнения $x + y = 10$ имеем

$$\frac{x+y}{2} = 5.$$

Положим теперь

$$\frac{x-y}{2} = z.$$

Сложив последние два уравнения, найдем

$$x = 5 + z.$$

Произведя вычитание этих же уравнений, будем иметь

$$y = 5 - z.$$

Тогда

$$x^2 + y^2 = (5 + z)^2 + (5 - z)^2$$

или

$$x^2 + y^2 = 50 + 2z^2.$$

Принимая во внимание второе уравнение данной системы, получаем

$$68 = 50 + 2z^2 \text{ или } 2z^2 = 18.$$

45. Положим, что гипотенуза есть $x^3 + x$, а катет $x^3 - x$. Тогда второй катет найдется по теореме Пифагора

$$\sqrt{(x^3 + x)^2 - (x^3 - x)^2} = x^3$$

или

$$2x^2 = x^3,$$

откуда $x = 2$. Следовательно, гипотенуза равна 10, первый катет — 6, второй — 8.

46: Обозначим меньшую часть от второго деления через x, тогда большая часть от первого деления будет $2x$. Найдем теперь меньшую часть от первого деления. Она будет равна $100 - 2x$. Следовательно, большая часть второго деления равняется $300 - 6x$. Ясно, что обе части от второго деления должны составить 100, т. е.

$$x + (300 - 6x) = 100,$$

откуда $x = 40$.

Следовательно, результат первого деления: меньшая часть равна 20, большая часть — 80. Результат второго деления: меньшая часть равна 40, большая часть — 60.

47. Обозначим разность двух искомых чисел через $2x$, тогда большее из них равняется $10 + x$, а меньшее $10 - x$. Следовательно, их произведение, согласно условию, должно равняться 96, т. е.

$$(10 + x)(10 - x) = 96$$

или

$$100 - x^2 = 96,$$

откуда

$$x^2 = 4.$$

Следовательно, $x = 2$. Тогда искомые числа будут 12 и 8.

48. Вопрос сводится к решению системы уравнений

$$\frac{x}{y} = 3;$$

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} = 5.$$

После возведения в квадрат первого равенства получим

$$\frac{x^2}{y^2} = 9$$

или, прибавив по единице к левой и правой частям равенства, найдем, что

$$\frac{x^2 + y^2}{y^2} = 10,$$

откуда

$$x^2 + y^2 = 10y^2.$$

Тогда второе равенство системы можно представить так:

$$\frac{10y^2}{x + y} = 5$$

или

$$10y^2 = 5(x + y).$$

Имея в виду, что $x = 3y$ (согласно первому равенству системы), получим

$$10y^2 = 5(3y + y); \quad 10y^2 = 20y,$$

откуда $y = 2$. Следовательно, $x = 6$.

49. Вопрос сводится к решению системы

$$(x + y)z = 35;$$

$$(y + z)y = 27;$$

$$(y + z)x = 32.$$

Вычитая второе уравнение из первого, находим

$$xz - xy = 8.$$

Складывая полученное уравнение с третьим, будем иметь

$$xz = 20.$$

Но тогда $xy = 12$ и $yz = 15$. Умножая $xz = 20$ на $yz = 15$, получаем

$$xyz^2 = 20 \cdot 15$$

или

$$12z^2 = 20 \cdot 15,$$

откуда $z = 5$. Следовательно, $x = 4$, $y = 3$.

50. Представим первое число в виде произведения x на куб некоторого числа, например на $2^3 = 8$, т. е. первое число будет $8x$. Положим второе число равным $x^2 - 1$. Ясно, что одно из условий задачи будет выполнено: произведение искомых чисел, сложенное с первым, равняется кубу некоторого числа. В самом деле, проверяя это, получаем

$$8x(x^2 - 1) + 8x = 8x^3.$$

Далее, по второму условию произведение искомых чисел, сложенное со вторым, должно равняться также кубу некоторого числа. Для этого требуется, чтобы

$$8x(x^2 - 1) + x^2 - 1$$

было кубом некоторого числа.

Полагая, что куб этого числа равняется $(2x - 1)^3$, получим уравнение, из которого можно найти x:

$$8x(x^2 - 1) + (x^2 - 1) = (2x - 1)^3,$$

откуда

$$x = \frac{14}{13}.$$

Следовательно, первое число будет $8 \cdot \frac{14}{13} = \frac{112}{13}$, а второе число $\left(\frac{14}{13}\right)^2 - 1 = \frac{27}{169}$.

Заметим, что данная задача принадлежит к числу неопределенных, однако во втором уравнении Диофант выбирает число так, чтобы в получаемом кубическом уравнении уничтожились члены с кубом неизвестного.

51. Положим, что сумма всех трех чисел $\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$. Положим далее, что $\mathrm{I} + \mathrm{II} = x^2$, тогда $\mathrm{III} = 2x + 1$. Пусть теперь $\mathrm{II} + \mathrm{III} = x^2 + 2x + 1 = (x-1)^2$. Тогда получим, что $\mathrm{I} = 4x$, а $\mathrm{II} = x^2 - 4x$. Далее, $\mathrm{I} + \mathrm{III} = 6x + 1$ должно быть квадратом некоторого числа, например $11^2 = 121$. Тогда для определения x получим уравнение

$$6x + 1 = 121,$$

откуда $x = 20$.

На основании этого находим:

$$\mathrm{I} = 80; \ \mathrm{II} = 320; \ \mathrm{III} = 41.$$

52. Согласно условию задачи, даны угол, биссектриса его и точка на ней. Требуется построить отрезок BC (рис. 24, *а*), чтобы он имел заданную длину.

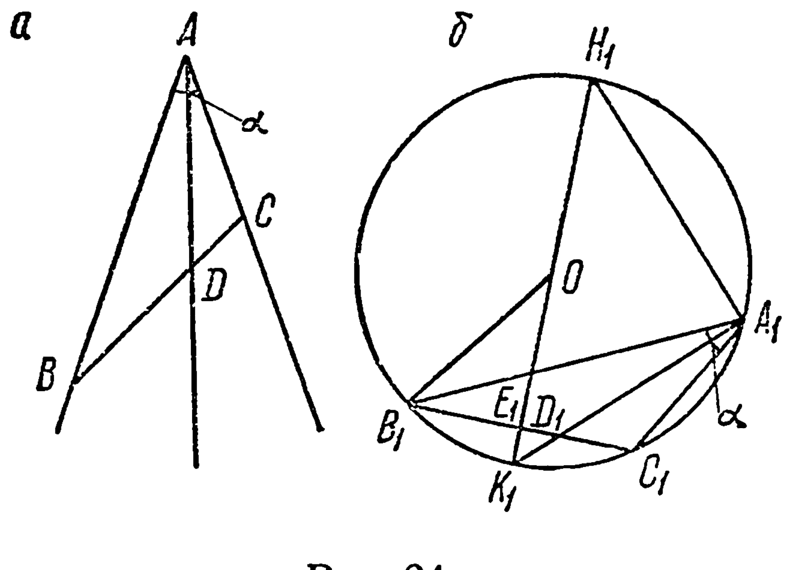


Рис. 24

Для этого сначала построим треугольник ABC (рис. 24, *б*) в произвольном положении. В этом случае придется строить треугольник по заданному основанию, противолежащему углу и биссектрисе. Пусть B_1C_1 — сторона произвольного расположения, равная отрезку BC. Опишем на этом отрезке дугу, вмещающую данный угол α. Далее, из середины E_1 хорды B_1C_1 восставим перпендикуляр K_1E_1. Таким образом, задача сводится к построению хорды K_1A_1 с таким расчетом, чтобы $D_1A_1 = DA$. Для этих целей рассмотрим треугольники $E_1K_1D_1$ и $A_1K_1H_1$. Они, как легко видеть, подобны и, следовательно,

$$\frac{K_1D_1}{H_1K_1} = \frac{E_1K_1}{K_1A_1}$$

или

$$K_1D_1 \cdot K_1A_1 = H_1K_1 \cdot K_1E_1.$$

Имея в виду, что $K_1A_1 = K_1D_1 + D_1A_1$, получим

$$(K_1D_1)^2 + K_1D_1 \cdot D_1A_1 = H_1K_1 \cdot E_1K_1.$$

Так как C_1K_1 является катетом прямоугольного треугольника $H_1C_1K_1$, не обозначенного на чертеже, то

$$H_1K_1 \cdot E_1K_1 = (C_1K_1)^2.$$

Следовательно, будем иметь

$$(K_1D_1)^2 + K_1D_1 \cdot D_1A_1 = (C_1K_1)^2.$$

Введем обозначения:

$$K_1D_1 = x;\ A_1D_1 = p;\ C_1K_1 = q.$$

Тогда

$$x^2 + px = q^2.$$

Построив x по данному уравнению, не представляет труда построить треугольник $A_1B_1C_1$ с его биссектрисой A_1D_1. Действительно, раствором циркуля $K_1D_1 = x$ найдем точку D_1. Соединив точки K_1 и D_1 и продолжив полученный отрезок до пересечения с окружностью, найдем точку A_1. Таким образом, нужный треугольник $A_1B_1C_1$ построен. Теперь остается на стороне данного угла отложить $AB = A_1B_1$ и провести BD.

Папп Александрийский, геометр древней Эллады, жил во второй половине III в. н. э. Папп — автор замечательного сочинения «Математическое собрание» в 8 книгах. Однако до нас дошли только последние 6 книг и небольшой отрывок из второй книги.

В «Математическом собрании» дан оригинальный свод важных открытий древнегреческих математиков по геометрии и арифметике. Сочинение содержит много заметок о древнегреческих математических трактатах, которые до нас не дошли.

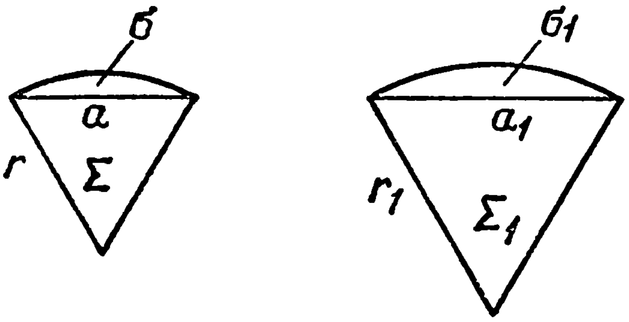


Рис. 25

53. Обозначим площади сегментов через σ и σ_1, площади сектора через S и S_1, а площади треугольников, дополняющих сегменты σ и σ_1 до секторов S и S_1, через Σ и Σ_1 (рис. 25). Пусть a и a_1 — основания сегментов, r и r_1 — радиусы сегментов. Тогда

$$\sigma = S - \Sigma, \quad \sigma_1 = S_1 - \Sigma_1.$$

Из подобия треугольников будем иметь

$$\frac{\Sigma}{\Sigma_1} = \frac{a^2}{a_1^2} = \frac{r^2}{r_1^2}.$$

Далее

$$\frac{S}{S_1} = \frac{r^2}{r_1^2},$$

откуда

$$\frac{\Sigma}{\Sigma_1} = \frac{S}{S_1}$$

или

$$\frac{\Sigma}{S} = \frac{\Sigma_1}{S_1}, \quad \frac{S}{\Sigma} = \frac{S_1}{\Sigma_1}.$$

Следовательно,

$$\frac{S - \Sigma}{\Sigma} = \frac{S_1 - \Sigma_1}{\Sigma_1},$$

или

$$\frac{\sigma}{\Sigma} = \frac{\sigma_1}{\Sigma_1},$$

или

$$\frac{\sigma}{\sigma_1} = \frac{\Sigma}{\Sigma_1}.$$

На основании предыдущего окончательно получим

$$\frac{\sigma}{\sigma_1} = \frac{a^2}{a_1^2}.$$

54. Пусть дан произвольный треугольник ABC и пусть на стороне AB этого треугольника внутри него построен параллелограмм $ABB'A'$ с таким расчетом, чтобы вершины A' и B' были вне треугольника (рис. 26). Затем на других сторонах треугольника построим еще два параллелограмма $ACED$ и $BFHC$ так, чтобы стороны их проходили через вершины параллелограмма $ABB'A'$. Теперь остается доказать, что площадь параллелограмма $ABB'A'$ равняется сумме площадей параллелограммов $ACED$ и $BFHC$. Для этой цели продолжим стороны DE и FH до пересечения в точке C' и соединим ее с точкой C. Прежде всего заметим,

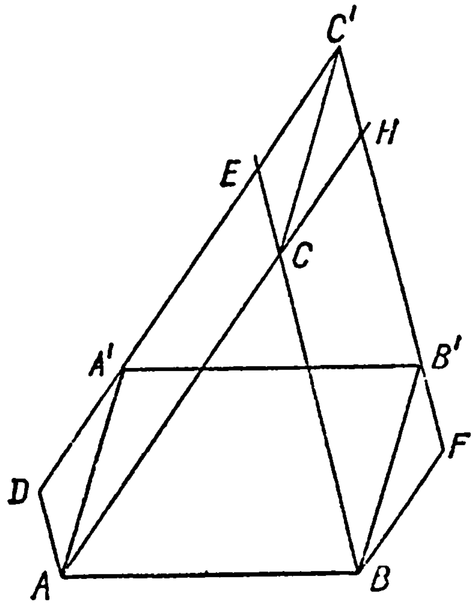


Рис. 26

что $\triangle A'B'C' = \triangle ABC$, так как они имеют равные стороны ($AB = A'B'$) и два равных угла, прилежащих к этой стороне ($\angle CAB = \angle C'A'B'$ и $\angle CBA = \angle C'B'A'$). Далее, площадь параллелограмма $ACC'A'$ равняется площади параллелограмма $ACED$ и площадь параллелограмма $BB'C'C$ равняется площади параллелограмма $BFHC$, так как они имеют равные основания и высоту.

Если теперь от фигуры $ABB'C'A'A$ отнять $\triangle A'B'C'$, то в результате останется параллелограмм $ABB'A'$. Если же теперь от той же фигуры $ABB'C'A'A$ отнять $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$, то в итоге останется сумма параллелограммов $ACC'A'$ и $BB'C'C$ или равновеликая ей сумма параллелограммов $ACED$ и $BFHC$, что и требовалось доказать.

(Рассмотренной задачи нет в «Началах» Евклида. Она впервые встречается в «Математическом собрании» Паппа Александрийского. Задача Паппа является обобщением теоремы Пифагора. Действительно, если в задаче Паппа за исходный треугольник взять прямоугольный, то в этом частном случае получим теорему Пифагора.)

55. Задача сводится к уравнению

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{7}x + 3 = x,$$

решая которое, получим $x = 28$. Следовательно, школу Пифагора посещают 28 человек, что и нужно было найти.

«Греческая антология» — сборник задач, составленных в стихотворной форме, главным образом гекзаметром, которым, как известно, написаны знаменитые поэмы Гомера «Илиада» и «Одиссея». Особенно в большом ходу эти задачи были в X—XIV вв.

59. Обозначив через x поклажу ослицы, а через y — поклажу мула, сводим задачу к системе уравнений с двумя неизвестными

$$y + 1 = 2(x - 1);$$
$$y - 1 = x + 1$$

или

$$2x - y = 3;$$
$$y - x = 2.$$

Решая эту систему, получаем

$$x = 5,\ y = 7.$$

60. Задача сводится к решению уравнения

$$\frac{4}{3}x + x = 12,$$

откуда

$$x = 5\frac{1}{7} \text{ дня.}$$

61. Условие задачи приводит к уравнению

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x,$$

решая которое, получим $x = 84$. Следовательно, Диофант умер 84 лет.

О жизни Метродора, составителя данной задачи, ничего не известно, даже нет сведений о времени его рождения и смерти. В историю математики он вошел как автор интересных задач, составленных в стихах. Задачи Метродора входили в рукописные сборники и имели в свое время большое распространение.

КИТАЙ

Китайская культура, включая и математику,— древнего происхождения. Многие важнейшие открытия в науке и технике, сделанные китайскими учеными, значительно опередили открытия в других странах.

Впервые в истории мировой техники китайскими учеными изобретен компас (III в. до н. э.), сейсмограф (II в.) и спидометр. Задолго до европейцев китайский народ научился изготовлять селитру для получения пороха (X в.). Еще в VII в. до н. э. китайские умельцы из народа владели секретом производства фарфора. Известно также, что Китай — родина шелка, замечательных красителей и лаков. В XI в. кузнец Би Шен изобрел книгопечатание подвижными буквами (литерами), которое по идее мало чем отличается от современного.

В Китае родилась описательная астрономия, т. е. наука о небесных телах и календаре. Уже в глубокой древности китайские ученые вели систематические наблюдения за небом, положением и движением небесных светил. Еще в IV в. до н. э. китайский астроном Ши Шэнь составил первый известный звездный каталог (перечень), в котором дано описание 800 звезд. В Европе аналогичный каталог был составлен около II в. н. э. (каталог Гиппарха).

Свои наблюдения китайские астрономы проводили в специально оборудованных помещениях, называемых обсерваториями. Древним памятником китайской астрономии в настоящее время является Пекинская обсерватория с ее старинным оборудованием, построенная на окраине Пекина в 1279 г.

(Все указания к задачам и решения задач, взятых из китайских трактатов, даются в современных обозначениях.)

62. Решение задачи сводится к рассмотрению следующей системы уравнений:

$$5x + 2y = 11;$$
$$2x + 8y = 8.$$

Решая эту систему, получаем

$$x = 2;\ y = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, один вол стоит 2 таэля, а один баран — $^1/_2$ таэля.

Китайский математический трактат «Девять отделов искусства счета» («Киу-Чанг») составлен в глубокой древности. Трактат состоит из математических правил и разного рода задач на приложение этих правил. Здесь имеются задачи прикладного характера, относящиеся к землеизмерению и вычислению объемов.

63. Эта задача на неопределенное уравнение, которое надо решать в целых числах. В современных обозначениях задача решается так. Пусть x — число, выражающее, сколько раз отсыпали рис лопатой; y — число, выражающее, сколько раз отсыпали рис башмаком; z — число, выражающее, сколько раз отсыпали рис миской. Тогда условия задачи приводят к системе уравнений

$$19x + 1 = 17y + 14 = 12z + 1,$$

откуда получается неопределенное уравнение

$$19x = 12z;\ x = \frac{12z}{19}.$$

Поскольку x, y, z — целые числа, можно положить

$$z = 19t.$$

Тогда получаем неопределенное уравнение

$$17y + 13 = 228t.$$

Взяв для t наименьшее целое значение, при котором y будет целым, т. е. $t = 14$, получим:

$$x = 168;\ y = 187;\ z = 266.$$

Следовательно, первый вор похитил 3 ши 1 тау 9 шингов 2 го, второй — 3 ши 1 тау 7 шингов 9 го и третий — 3 ши 1 тау 9 шингов 2 го.

64. Условия задачи приводят к решению системы трех уравнений с тремя неизвестными:

$$a + b + c = p;$$

$$a^2 + b^2 = c^2;$$

$$ab = 2S,$$

где a, b, c — стороны; p — периметр; S — площадь данного треугольника.

Из второго и третьего уравнений находим

$$(a + b)^2 = 4S + c^2,$$

откуда

$$(p - c)^2 = 4S + c^2.$$

Решая относительно c, получаем

$$c = \frac{p^2 - 4S}{2p}.$$

Учитывая первое уравнение, будем иметь

$$a + b = \frac{p^2 + 4S}{2p}.$$

Присоединяя к этому уравнению третье, значения a и b определяем как корни квадратного уравнения

$$x^2 - \frac{p^2 + 4S}{2p}x + 2S = 0.$$

Трактат «Начала искусства вычисления» опубликован в 1593 г. В нем важнейшие правила, вероятно, для лучшего запоминания даются в стихотворной форме. По-видимому, это сочинение в свое время было принято как учебное руководство в школах по элементарной математике. Содержание книги дает хорошую картину состояния китайской математики вплоть до конца XVI в.

65. Сунь-цзы решает свою задачу по такому правилу: «При делении на 3 остаток есть 2, поэтому возьмите 140. При делении на 5 остаток есть 3, поэтому возьмите 63. При делении на 7 остаток есть 2, поэтому возьмите 30. Сложив их вместе, получим 233.

Из этого легко вычтите 210, и мы получим ответ».

Задачу Сунь-цзы можно решить простыми приемами. Она сводится к системе

$$x = 3y + 2;$$
$$x = 5z + 3;$$
$$x = 7u + 2$$

или

$$3y + 2 = 5z + 3 = 7u + 2,$$

откуда

$$3y = 7u; \; y = \frac{7u}{3}.$$

Полагая $u = 3t$, где t — некоторое целое число, получаем

$$y = 7t.$$

Тогда

$$x = 21t + 2,$$

следовательно,

$$21t + 2 = 5z + 3 \text{ или } 21t - 5z = 1.$$

Путем подбора находим одну пару корней последнего неопределенного уравнения: $t = 1$, $z = 4$. Общие формулы корней этого уравнения будут

$$t = 1 + 5q; \; z = 4 + 21q,$$

где $q = 0, 1, 2, \ldots$

Так как $x = 21t + 2$, то $x = 23 + 105q$, где $q = 0, 1, 2, \ldots$ Наименьшее значение x будет при $q = 0$, т. е. $x = 23$; при $q = 1 x = 128$; при $q = 2 x = 233$; при $q = 3 x = 338$ и т. д.

66. Для решения задачи в трактате дается правило: «Установи, что количество чи в 10 000 ху проса, ссыпанного в амбар, есть делимое. Перемножь ширину и длину — это делитель. Делимое и делитель объедини, получишь высоту в чи».

При решении задачи надо иметь в виду, что 1 чжан = = 10 чи, 1 ху = 51,775 литра, 27 чжан^3 = 10 000 ху.

67. Для решения задачи составитель трактата выводит правило: «4 шэна, разделенных на 3 нижних колена, составляют нижний коэффициент; 3 шэна, разделенные на 4 верхних колена, составляют верхний коэффициент. Из большего нижнего коэффициента вычти верхний меньший, остаток есть делимое. Сумму половин 4 колен и 3 колен вычти из 9 колен, остаток является делителем. Объедини делимое и делитель, получишь искомое количество в шэнах, т. е. на столько отличается каждая ступень от соседней. Нижний коэффициент, т. е. 1 с малой половиной шэна, есть объем второго снизу колена».

Согласно этому правилу, можно провести несложные вычисления:

1) $\frac{4}{3}-\frac{3}{4}=\frac{7}{12}$ — разность между «верхним» и «нижним» коэффициентами, что составляет делимое;

2) $9-\frac{4}{2}-\frac{3}{2}=\frac{11}{2}$ составляет делитель;

3) $\frac{7}{12}:\frac{11}{2}=\frac{7}{66}=d$, т. е. то число, на какое отличается каждая ступень от соседней;

4) тогда второе снизу колено будет составлять $\frac{4}{3}=$ $=1\frac{1}{3}$ (шэна). Теперь без труда можно найти в шэнах и другие восемь колен.

68. Составитель трактата рекомендует данную задачу решать по правилу: «Предположим, что вес слитка золота 3 цзиня, тогда вес слитка серебра $2^5/_{11}$ цзиня, недостаток равен 49 в правой строке. Предположим, что вес слитка золота 2 цзиня, тогда вес слитка серебра $1^7/_{11}$ цзиня. Избыток

15 в левой строке. Каждый знаменатель умножь на количества, содержащиеся в этих строках. Избыток и недостаток умножь крест-накрест на предположенные нормы, сложи — это делимое. Сложи избыток и недостаток — это делитель. Объедини делимое и делитель, получишь вес слитка золота. Знаменатель умножь на делитель, раздели на него делимое, получишь вес слитка серебра. Сократи, получишь искомую дробь».

Самого решения в трактате не дается. Руководствуясь приведенным правилом, решение задачи можно выполнить при помощи таких рассуждений.

Прежде всего заметим, что 1 цзинь = 16 ланам, а 1 лан = = 24 чжу. Обозначим теперь вес слитка золота через x, а вес слитка серебра через z; задача сводится к решению системы

$$9x = 11z;$$
$$13 + 8x + z = 10z + x.$$

Будем решать эту систему по правилу двух ложных положений.

Первое ложное положение: $x_1 = 3$ цзиням. Тогда

$$z_1 = \frac{9x_1}{11} = \frac{9 \cdot 3}{11} = \frac{27}{11} = 2\frac{5}{11} \text{ (цзиням)}.$$

Находим теперь «недостаток в правой строке», обозначив его через y_1:

$$y_1 = \left(\frac{13}{16} + 8 \cdot 3 + 2\frac{5}{11}\right) - \left(10 \cdot 2\frac{5}{11} + 3\right) = 27 \cdot \frac{47}{11 \cdot 16} - 27 \cdot \frac{96}{11 \cdot 16} = -\frac{49}{11 \cdot 16}.$$

Второе ложное положение: $x_2 = 2$ цзиням. В этом случае $z_2 = 1\frac{7}{11}$ цзиня и «избыток в левой строке» будет

$$y_2=\left(\frac{13}{16}+1\frac{7}{11}+8\cdot 2\right)-\left(10\cdot 1\frac{7}{11}+2\right)=$$
$$=18\cdot\frac{79}{11\cdot 16}-18\cdot\frac{64}{11\cdot 16}=\frac{15}{11\cdot 16}.$$

Далее предполагается, что y_1 и y_2 вместе с x_1 и x_2 записаны по китайскому способу

$$\begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix},$$

где левая колонка составляет «левую строку», а правая колонка — «правую строку». Из этой таблицы, согласно правилу, получаем

$$x=\frac{2\cdot\frac{49}{11\cdot 16}+3\cdot\frac{15}{11\cdot 16}}{\frac{49}{11\cdot 16}+\frac{15}{11\cdot 16}}=\frac{2\cdot 49+3\cdot 15}{49+15}=$$
$$=\frac{143}{64}=2\frac{15}{64}\ \text{(цзиня)}.$$

Следовательно, $x=2$ цзиня 3 ланам 18 чжу.

Вес слитка серебра определяется очень просто. Для этого делимое 143 надо разделить на произведение делителя 64 и знаменателя $^{11}/_{9}$. Тогда получаем

$$z=\frac{x}{\frac{11}{9}}=\frac{143}{\frac{11}{9}\cdot 64}=\frac{13\cdot 9}{64}=\frac{117}{64}=1\frac{53}{64}\ \text{(цзиня)}.$$

Следовательно, окончательно $z=1$ цзиню 13 ланам 6 чжу.

69. Составитель трактата для решения этой задачи предлагает такое правило: «Предположим, что через 15 дней, тогда недостаток равен 337 с половиной ли. Предположим, что через 16, тогда избыток равен 140 ли. Избыток и недостаток умножь крест-накрест на предположенные количества, сложи — это делимое. Сложи избыток и недостаток —

это делитель. Объедини делимое и делитель, получишь искомое количество дней. Если разделится не до конца, то сократи на общий делитель и обозначь делитель».

За n целых дней рысак пробежит

$$193 + (193 + 13) + (193 + 2\cdot 13) + \ldots + [193+(n-1)\,13] = \\ = 193n + 13 + 2\cdot 13 + \ldots + (n-1)\,13 = 193n + 13\,[1 + \\ + 2 + \ldots + (n-1)] = 193n + 13\cdot\frac{n(n-1)}{2}\ \text{(ли)}.$$

За это же число дней кляча пробежит

$$97 + \left(97 - \frac{1}{2}\right) + \left(97 - 2\cdot\frac{1}{2}\right) + \ldots + \left[97 - (n-1)\frac{1}{2}\right] = \\ = 97n - \frac{1}{2}[1 + 2 + \ldots + (n-1)] = 97n - \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\ \text{(ли)}.$$

За указанное число дней рысак и кляча пробегут вместе.

$$193n + 13\cdot\frac{n(n-1)}{2} + 97n - \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{2} = \\ = 290n + \left(13 - \frac{1}{2}\right)\frac{n(n-1)}{2} = \\ = 290n + 6\frac{1}{4}(n^2 - n)\ \text{(ли)},$$

что должно составить 6000 ли.

Далее, придерживаясь указанного выше правила, задачу продолжаем решать методом двух ложных положений.

При $n = 15$ недостаток равен $6000 - 5662\frac{1}{2} = 337\frac{1}{2}$ (ли); при $n = 16$ избыток составляет $6140 - 6000 = 140$ (ли).

Обозначая время встречи через x и предполагая, что на протяжении дня скорости не менялись, получим

$$x = \frac{15 \cdot 140 + 16 \cdot 337 \frac{1}{2}}{140 + 337 \frac{1}{2}} = 15 \frac{135}{191} \text{ (дня).}$$

Теперь не составляет большого труда найти, столько ли пройдут рысак и кляча за $15^{135}/_{191}$ дня.

Из анализа решения рассматриваемой задачи видно, что составитель трактата должен владеть формулой суммирования арифметической прогрессии $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{(1 + n)\, n}{2}$, хотя в самом трактате она не упоминается.

70. Эта задача в трактате решается правилом «фан-чэн», с которым мы познакомимся дальше.

Очевидно, вопрос сводится к системе уравнений

$$5x + 2y = 10;$$
$$2x + 5y = 8.$$

71. Задача взята из восьмой книги трактата. Для ее решения (решение в трактате не приводится) составитель рекомендует применять правило «фан-чэн»: «Расположи 3 снопа хорошего урожая, 2 снопа среднего урожая, 1 сноп плохого урожая, составляющие их 39 доу зерна с правой стороны. Расположи посередине и слева количество снопов урожаев в таком же порядке, как и с правой стороны. Числа среднего столбца умножь на количество снопов хорошего урожая в правом столбце и образуй остатки. И еще раз так же образуй остатки до тех пор, пока не исчерпается все до количества снопов среднего урожая в среднем столбце. И снова образуй остатки до тех пор, пока не исчерпается все до количества снопов плохого урожая в левом столбце. Верхнее число есть делитель, нижнее число есть делимое, делимое для искомого количества снопов плохого урожая. Чтобы найти делимое для среднего урожая, нижнее составляющее среднего столбца умножь на делитель и вычти делимое для плохого урожая. Остаток объедини с количеством снопов среднего урожая, это и будет делимое для среднего урожая. Чтобы найти делимое для хорошего урожая, нижнее составляющее количество правого столбца также умножь на делитель, исключи делимые для плохого урожая и среднего урожая, объедини остаток с количеством снопов хорошего урожая, это и будет делимое для хорошего урожая. Все делимые объедини с делителем, получатся искомые количества в доу».

Задача сводится к решению системы

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39; \\ 2x + 3y + z &= 34; \\ x + 2y + 3z &= 26. \end{aligned}$$

В китайской записи это выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix}$$

Далее, согласно правилу, проводятся следующие преобразования этой таблицы:

1) числа среднего столбца умножь на количество снопов хорошего урожая в правом столбце и образуй остатки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 26 & 102 & 39 \end{pmatrix}$$

2) и еще раз также образуй остатки до тех пор, пока не исчерпается все до количества снопов среднего урожая в среднем столбце:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 26 & 63 & 39 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

3) и снова образуй остатки до тех пор, пока не исчерпается все до количества снопов плохого урожая в левом столбце:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \\ 78 & 24 & 39 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 20 & 5 & 2 \\ 40 & 1 & 1 \\ 195 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 15 & 5 & 2 \\ 39 & 1 & 1 \\ 171 & 24 & 39 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & 2 \\ 38 & 1 & 1 \\ 147 & 24 & 39 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 5 & 5 & 2 \\ 37 & 1 & 1 \\ 123 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

4) верхнее число (36) есть делитель, нижнее число (99) есть делимое для искомого количества снопов плохого урожая;

5) чтобы найти делимое для среднего урожая, нижнее составляющее среднего столбца умножь на делитель и вычти делимое для плохого урожая. Остаток объедини с количеством снопов среднего урожая, это и будет делимое для среднего урожая.

Таким образом, «делимое» для y будет

$$\frac{24 \cdot 36 - 99}{5} = A;$$

6) чтобы найти делимое для хорошего урожая, нижнее составляющее количество первого столбца также умножь на делитель, исключи делимое для плохого урожая и среднего урожая, объедини остаток с количеством снопов хорошего урожая, это и будет делимое для хорошего урожая.

В соответствии с этим «делимое» для x будет

$$\frac{39 \cdot 36 - 99 - 2A}{3} = B;$$

7) все делимые объедини с делителем, получатся искомые количества в доу. Следовательно, будем иметь:

$$z = \frac{99}{36} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4} \text{ (доу)};$$

$$y = \frac{A}{36} = 4\frac{1}{4} \text{ (доу)};$$

$$x = \frac{B}{36} = 9\frac{1}{4} \text{ (доу)}.$$

72. К этой задаче автор трактата дает два правила.

Первое правило: «Составь таблицу «фан-чэн», установи для каждого то, чего не хватает. По способу «чжэн-фу» вычисляй».

Сводим задачу к решению системы уравнений

$$\begin{aligned} 2x &= 1 - y; \\ 3y &= 1 - z; \\ 4z &= 1 - x \end{aligned}$$

или к канонической форме

$$\begin{aligned} 2x + y &= 1; \\ 3y + z &= 1; \\ 4z + x &= 1. \end{aligned}$$

Соответствующая таблица «фан-чэн» будет

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

В самом начале таблицы уже есть нули (пустые места).

Второе правило — «чжэн-фу», т. е. правило сложения и вычитания отрицательных чисел: «Если одинакового названия, то вычитается, если разного названия, то прибавляется; если положительное без пары, то становится отрицательным, если отрицательное без пары, то становится положительным».

Это правило для вычитания в современных символах может быть записано так:

$$(\pm a) - (\pm b) = \pm (a - b);$$
$$(\pm a) - (\mp b) = \pm (a + b);$$
$$0 - (+b) = -b;$$
$$0 - (-b) = +b.$$

Для сложения правило формулируется следующим образом: «Если разного названия, то вычитается, если одинакового названия, то прибавляется; если положительное без пары, то становится положительным, если отрицательное без пары, то становится отрицательным».

В современной алгебраической записи все это можно записать так:

$$(\pm a) + (\mp b) = \pm (a - b);$$
$$(\pm a) + (\pm b) = \pm (a + b);$$
$$0 + (+b) = +b;$$
$$0 + (-b) = -b.$$

Вот эти правила и составляют суть правила «чжэн-фу». «Чжэн» означает прибавляемый, «фу» — вычитаемый; такие числа обозначались разными цветами: чжэн — красным, фу — черным.

Применяя правило «фан-чэн» к поставленной выше задаче, надо от расширенной матрицы перейти к соответствующим матрицам с нулями. Здесь для данной задачи и появляются отрицательные числа (коэффициенты ступенчатой системы):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

73. В трактате дается такое правило: «Установи таблицу «фан-чэн». Установи, что вещи, веса которых превышают дань (веса данных снопов), отрицательны. Вычисляй по способу «чжэн-фу».

Задача сводится к решению системы

$$\begin{aligned} 2x &= 1 + y; \\ 3y &= 1 + z; \\ 4z &= 1 + x. \end{aligned}$$

Ее каноническая форма

$$\begin{aligned} 2x - y &= 1; \\ 3y - z &= 1; \\ 4z - x &= 1. \end{aligned}$$

Соответствующая таблица

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

74. В трактате к задаче дано такое правило: «Составь таблицу «фан-чэн». Установи, что 2 буйвола, 5 баранов положительны, 13 свиней отрицательны, остаток цяней положителен. Еще установи, что 3 буйвола положительны, 9 баранов отрицательны, 3 свиньи положительны. Еще установи, что 5 буйволов отрицательны, 6 баранов положительны, 8 свиней положительны, недостаток цяней отрицателен. Вычисляй по способу «чжэн-фу».

Обозначив через x, y, z соответственно стоимости буйвола, барана и свиньи, сведем задачу к решению системы

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 13z + 1000; \\ 3x + 3z &= 9y; \\ 6y + 8z &= 5x - 600, \end{aligned}$$

где 1000 — остаток цяней от продажи 2 буйволов, 5 баранов и покупки 13 свиней; 600 — недостаток цяней от продажи 6 баранов, 8 свиней, покупки 5 буйволов.

75. К задаче в трактате дается такое указание: «Составь таблицу «фан-чэн», вычисляй по способу «чжэн-фу». Других указаний к рассматриваемой задаче не имеется.

Данная задача, как легко видеть, сводится к системе из 5 линейных уравнений с шестью неизвестными. Эту систему можно записать так:

$$\begin{aligned}2x + y &= m;\\ 3y + z &= m;\\ 4z + u &= m;\\ 5u + v &= m;\\ 6v + x &= m.\end{aligned}$$

Здесь неизвестными являются x, y, z, u, v, m. Причем, согласно ответам, m берется с таким расчетом, чтобы целые положительные значения x, y, z, u, v были наименьшими.

Основная матрица полученной системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0\\ 6 & 1 & 0 & 0 & 0\\ m & m & m & m & m \end{pmatrix}$$

Преобразованная матрица с нулями:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0\\ 721 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 76m & m & m & m & m \end{pmatrix}$$

Следовательно,

$$v = \frac{76}{721} m; \quad u = \frac{1}{721} \cdot \frac{721m - 76m}{5} = \frac{129}{721} m;$$

$$z = \frac{148}{721} m; \quad y = \frac{191}{721} m; \quad x = \frac{265}{721} m,$$

причем m нужно положить равным 721.

76. Трудно указать время, когда китайцы впервые стали пользоваться «законом о катетах и гипотенузе», т. е. теоремой Пифагора, но достоверно известно, что знакомы они с нею очень давно. Как свидетельствуют летописи, для прямоугольного треугольника со сторонами 3, 4, 5 теорема Пифагора была известна в древнем Китае около 2200 лет до н. э.

В «Математике в девяти книгах» теорема Пифагора употребляется под видом правила «гоу-гу». Согласно этому правилу, можно по известной гипотенузе и одному известному катету находить другой неизвестный катет, а также гипотенузу, если известны оба катета.

Правило «гоу-гу» формулируется так: «Умножь сам на себя каждый из катетов, сложи, извлеки из этого квадратный корень, это и будет гипотенуза. Так же: умножь сам на себя вертикальный катет, вычти из умноженной самое на себя гипотенузы, извлеки из остатка квадратный корень, это и будет горизонтальный катет. Так же: умножь сам на себя горизонтальный катет, вычти из умноженной самое на себя гипотенузы, извлеки из остатка квадратный корень, это и будет вертикальный катет».

Термины «гоу» и «гу» обозначают катеты прямоугольного треугольника, причем «гоу» — горизонтальный, обычно меньший катет, а «гу» — вертикальный и обычно больший катет. В буквальном переводе «гоу» означает крюк, а «гу» — ребро, связка.

Правило «гоу-гу» применяется ко всем 24 задачам девятой книги трактата «Математика в девяти книгах», поэтому и сама девятая книга называется «Гоу-гу».

В трактате для решения предложенной задачи дается правило: «Половину стороны водоема умножь самое на себя, надводную часть в 1 чи умножь самое на себя, вычти это из первого, остаток раздели на удвоенную надводную часть камыша, получишь глубину воды. Прибавь количество надводной части (в чи), получишь длину камыша».

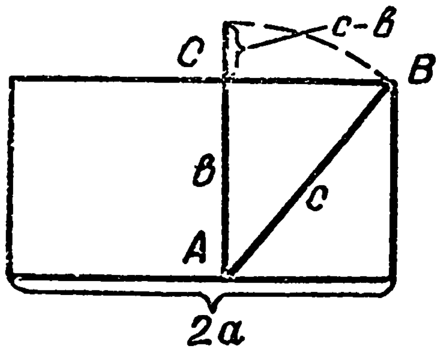


Рис. 27

Самого решения трактат не содержит. Это решение легко выполнить в общем виде при помощи таких рассуждений.

Обозначим длину водоема через $2a$, длину камыша через c (рис. 27). Задача заключается в нахождении b и c. Руководствуясь китайским правилом, находим формулы для определения искомых величин:

$$b = \frac{a^2 - (c - b)^2}{2(c - b)};$$

$$c = b + (c - b) = \frac{a^2 + (c - b)^2}{2(c - b)}.$$

Вывод правила в трактате не дан, поэтому трудно сказать, каким путем древнекитайские математики установили последние формулы.

Однако к этим формулам можно легко прийти обычными рассуждениями. Исходя из условий задачи и применяя правило «гоу-гу», т. е. теорему Пифагора, получаем систему

$$b = c - k;$$
$$b^2 = c^2 - a^2,$$

где для краткости через k обозначена известная нам надводная часть, равная $c - b$. Решая эту систему, будем иметь

$$b = \frac{a^2 - k^2}{2k}$$

и

$$c = \frac{a^2 + k^2}{2k},$$

где $k = c - b$.

В комментариях к «Математике в девяти книгах» Лю Хуэй довольно убедительно объясняет, каким путем древние китайцы получили правило, сводящееся к двум последним формулам. Он считает, что эти формулы, записанные в словесной форме, получены на основе геометрических соображений. По-видимому, древнекитайские ученые в данном случае пользовались таким чертежом (рис. 28).

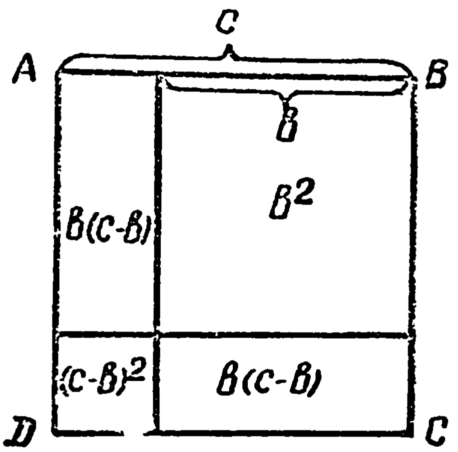


Рис. 28

Прежде всего по правилу «гоу-гу» имеем

$$a^2 = c^2 - b^2.$$

Далее, из чертежа получаем

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c - b)^2 + 2b\,(c - b)$$

или

$$a^2 = (c - b)^2 + 2b\,(c - b),$$

откуда

$$b = \frac{a^2 - (c - b)^2}{2\,(c - b)}.$$

77. Эту задачу древнекитайский математик в трактате рекомендует решать по такому правилу: «7 умножь само на себя, 3 тоже умножь само на себя, сложи и возьми половину. Возьми это в качестве нормы ходьбы *А* по косому направлению. Вычти из 7, умноженного само на себя, норму ходьбы по косому направлению, остаток является нормой ходьбы на юг. 3 умножь на 7, это норма ходьбы *Б* на восток. 10 бу ходьбы на юг умножь на норму ходьбы *А* по косому направлению, 10 бу умножь на норму ходьбы *Б* на восток, каждое есть делимое. Объедини делимое и норму ходьбы на юг, получишь для каждого количество пройденного».

Пользуясь этим правилом, задачу можно решить довольно просто:

1) находим сначала норму ходьбы *А* «по косому направлению»:

$$\frac{7^2 + 3^2}{2} = 29;$$

2) определяем норму ходьбы A на юг:

$$7^2 - \frac{7^2 + 3^2}{2} = 20;$$

3) норма ходьбы на восток будет

$$7 \cdot 3 = 21;$$

4) находим «делимое»:

$$10 \cdot 29 \text{ и } 10 \cdot 21;$$

5) A прошел «по косому направлению» путь

$$\frac{10 \cdot 29}{20} = \frac{29}{2} = 14\frac{1}{2} \text{ (бу)};$$

6) $Б$ прошел на восток путь

$$\frac{10 \cdot 21}{20} = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2} \text{ (бу)}.$$

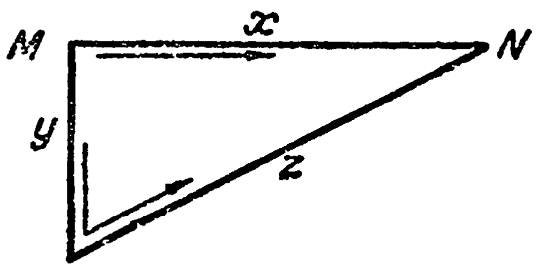


Рис. 29

Обычным путем задача решается так: обозначим через x путь, пройденный $Б$ на восток, через y — путь, пройденный A на юг (причем, по условию задачи, $y = 10$ бу), через z — путь, пройденный A «по косому направлению», т. е. по гипотенузе полученного прямоугольного треугольника (рис. 29). Тогда

$$x^2 + 10^2 = z^2;$$

$$\frac{x}{z + 10} = \frac{3}{7},$$

откуда

$$z = \frac{7}{3}x - 10.$$

Далее,

$$x^2 + 10^2 = \left(\frac{7}{3}x - 10\right)^2$$

или

$$x^2+100=\frac{49}{9}x^2-\frac{2\cdot7\cdot10}{3}x+100;$$

$$40x^2-3\cdot2\cdot7\cdot10x=0;\ 2x^2-21x=0;$$

$$x(2x-21)=0;\quad 2x-21=0;\quad x=10\frac{1}{2}\ (\text{бу}).$$

Теперь находим z:

$$z=\frac{7}{3}\cdot\frac{21}{2}-10=\frac{49}{2}-10=\frac{29}{2}=14\frac{1}{2}\ (\text{бу}).$$

78. К задаче, как всегда, дается готовое правило: «1 чжан умножь сам на себя, это «ши», половину избытка умножь самое на себя, удвой, вычти из «ши», возьми половину остатка, извлеки корень квадратный из него, из полученного вычти половину излишка, это и будет ширина двери. Прибавь половину излишка, это и будет высота двери».

Если обозначить ширину двери через x, а длину ее через y, далее положить, что $y-x=m$ («избыток»), а диагональ двери d, то задача сводится к рассмотрению системы

$$d^2=x^2+y^2;$$
$$m=y-x.$$

Для определения x получаем квадратное уравнение

$$2x^2+2mx+m^2-d^2=0.$$

Решая это уравнение обычным приемом, находим

$$x_{1,2}=-\frac{m}{2}\pm\sqrt{\frac{m^2}{4}-\frac{m^2-d^2}{2}}=$$

$$=-\frac{m}{2}\pm\sqrt{\frac{2d^2-m^2}{4}}=-\frac{m}{2}\pm\sqrt{\frac{d^2-2\left(\frac{m}{2}\right)^2}{2}}.$$

Так как древнекитайские ученые отрицательных корней не рассматривали, то ширина двери у них получалась

$$x = \sqrt{\frac{d^2 - 2\left(\frac{m}{2}\right)^2}{2}} - \frac{m}{2}.$$

А это и есть то, о чем говорит приведенное правило для определения x.

Интересно заметить, что после определения x величину y легко было бы найти из уравнения

$$y = x + m,$$

но, согласно древнекитайскому правилу, для определения y дается формула

$$y = \sqrt{\frac{d^2 - 2\left(\frac{m}{2}\right)^2}{2}} + \frac{m}{2},$$

что является положительным корнем уравнения

$$2y^2 - 2my + m^2 = 0.$$

79. Древнекитайское правило к этой задаче гласит: «Количество бу, пройденное от северных ворот, умножь на удвоенное количество бу, пройденное на запад, это делимое. Сложи с количеством бу, пройденным от южных ворот, это дополненный делитель. Извлеки квадратный корень, это и будет сторона города».

Эту задачу можно иллюстрировать чертежом (рис. 30). Пользуясь обозначениями чертежа, задачу можно свести к решению квадратного уравнения

$$x^2 + (k + l_1)\,x - 2kl_2 = 0.$$

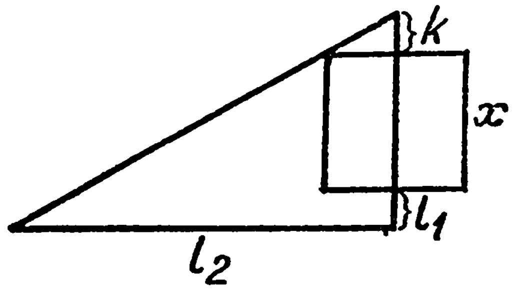


Рис. 30

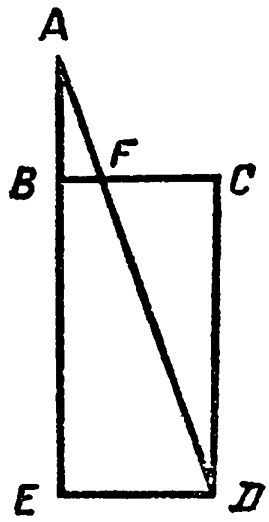


Рис. 31

80. Надо иметь в виду, что 1 чжан = 10 чи = 100 цуням. Для составления нужного правила решения древнекитайские математики, по всей вероятности, рассматривали два подобных прямоугольных треугольника (рис. 31) $\triangle ABF$ и $\triangle FCD$, откуда получали

$$\frac{AB}{BF} = \frac{x}{FC}; \quad x = FC \cdot \frac{AB}{BF}; \quad x = \frac{AB\,(BC - BF)}{BF}.$$

Последняя формула давала возможность вывести правило, которое и дается в трактате: «Из 5 чи, диаметра колодца, вычти 4 цуня, что откладывается на диаметре. Остаток умножь на 5 чи, высоту шеста, это делимое. Четыре цуня, что откладываются на диаметре, есть делитель. Объедини делимое и делитель, получишь искомое количество в цунях».

81. В трактате для решения этой задачи дано правило: «Обвод основания умножь сам на себя, умножь на высоту, разделив на 36, возьми 1 раз».

Таким образом, объем конуса древние китайцы вычисляли по формуле

$$V = \frac{h}{3} \cdot \frac{c^2}{4\pi},$$

полагая, что $\pi = 3$.

82. Древние китайцы решали эту задачу по такому правилу: «Перемножь верхний и нижний обводы, умножь каждый сам на себя, все это сложи, умножь на высоту, раздели на 36, возьми 1 раз».

Следовательно, объем усеченного конуса в древнем Китае находился по формуле

$$V = \frac{(Cc + C^2 + c^2)\,h}{36}$$

или, полагая $\pi = 3$, получим

$$V = \frac{h}{3} \cdot \frac{Cc + C^2 + c^2}{4\pi},$$

где C и c — длины окружностей нижнего и верхнего оснований, а h — высота.

83. Древнекитайское правило к этой задаче гласит: «Сложи горизонтальный и вертикальный катеты, это делитель, перемножь горизонтальный и вертикальный катеты, это делимое. Объедини делимое и делитель, получишь сторону квадрата в бу».

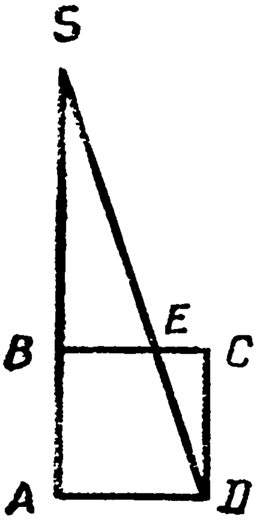


Рис. 32

84. Задачу можно иллюстрировать чертежом (рис. 32). Решая эту задачу, китайский ученый, по-видимому, рассматривал два подобных треугольника: $\triangle SAD$ и $\triangle ECD$, откуда делался вывод, что

$$\frac{AS}{CD}=\frac{AD}{EC}$$

или

$$x=AS=\frac{AD\cdot DC}{EC}.$$

Подставляя данные задачи, получаем словесную формулу

$$x=\frac{1\text{ чжан}\cdot 1\text{ чжан}}{3\text{ цуня}}.$$

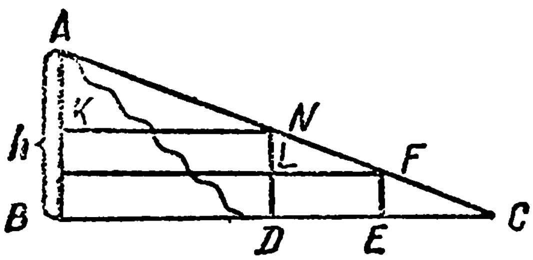


Рис. 33

На основании этого древние китайцы давали такое правило: «Умножь 1 чжан сам на себя, это делимое. Три цуня есть делитель. Объедини делимое и делитель».

85. К правилу для решения этой задачи древние китайцы, видимо, пришли из рассмотрения подобных прямоугольных треугольников (рис. 33): $\triangle AKN$ и $\triangle NLF$, откуда

$$\frac{AK}{KN}=\frac{NL}{LF}$$

или

$$\frac{x - ND}{BD} = \frac{ND - FE}{DE}.$$

Следовательно,

$$x = ND + \frac{(ND - FE)\,BD}{DE}.$$

Эта формула дала повод сформулировать древнекитайское правило, которое и дается в трактате «Математика в девяти книгах» в качестве пояснения к рассматриваемой задаче: «Из высоты столба вычти высоту уровня зрения 7 чи, остаток умножь на 53 ли, это делимое. Расстояние, на которое удален человек от столба в 3 ли, есть делитель. Объедини делимое и делитель. То, что получится, прибавь к высоте столба, это и будет высота горы».

86. Много сделал для развития прикладной геометрии крупнейший китайский математик III в. Лю Хуэй, автор многих сочинений по математике. Вопросам прикладной геометрии он посвятил целый трактат под названием «Математика морского острова», написанный сначала как десятая глава комментария к древнейшей книге «Математика в девяти книгах» и издававшийся позднее в виде отдельной книги. Несколько странное название книги объясняется тем, что в ней решаются различные задачи на определение расстояний до недоступных предметов, расположенных на острове, причем точка наблюдения находится вне его. Кроме того, имеется задача на вычисление недоступных высот, расположенных на острове, наблюдение над которыми ведется из точек, расположенных также на острове.

Лю Хуэй решает эту задачу согласно правилу, которое можно выразить следующими двумя формулами:

$$x = \frac{be}{d + c} + e; \quad y = \frac{bc}{d - c},$$

где x — высота сосны; y — расстояние переднего шеста до холма; a — высота каждого шеста; b — расстояние между шестами; c — расстояние точки, расположенной позади шеста и находящейся на одной прямой с концом переднего

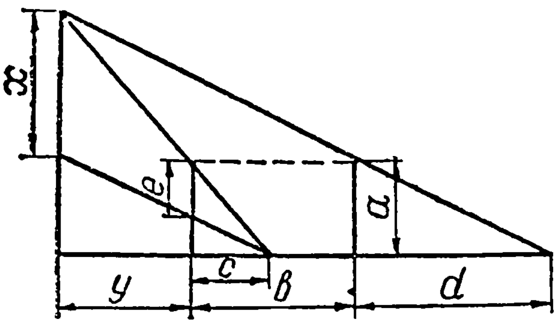


Рис. 34

шеста и верхушкой дерева, от основания шеста; d — расстояние точки, расположенной позади второго шеста (заднего) и находящейся на одной прямой с концом второго шеста и верхушкой дерева, от основания шеста; e — число, которое «отмеряет основание дерева» от верха переднего шеста (рис. 34).

Необходимо заметить, что многие задачи Лю Хуэя сложны. Решение своих задач он давал обычно в виде правил, основанных главным образом на рассмотрении подобных треугольников. Ввиду практической ценности эти задачи позднее получили широкое распространение не только в самом Китае, но и далеко за его пределами.

ИНДИЯ

Индия имеет большую и богатую самобытную культуру, истоки которой уходят в седую древность. Много тысяч лет тому назад, еще до нашей эры, в Индии строились оросительные каналы, городские водосточные системы, строились многоэтажные здания из хорошо обожженного кирпича. В далеком прошлом индийцы владели искусством керамического производства (производство изделий из обожженной глины), умело пользовались гончарным кругом, успешно развивали ювелирнсе дело (изготовление изделий из драгоценных камней и металлов).

Еще в глубокой древности в Индии были накоплены большие знания в области грамматики, астрономии и других наук.

Наибольших успехов индийские ученые достигли в области математики. Они явились основоположниками арифметики и алгебры, в разработке которых пошли дальше греков.

Величайшим достижением древнеиндийской математики является прежде всего открытие позиционной системы счисления, состоящей из десяти индийских цифр, включая и знак нуль, называемый по-индийски «сунья», что дословно означает «ничто». Интересно заметить, что в первоначальном начертании нуль изображался точкой и лишь спустя много веков — в виде маленького кружка. Кто первый из индийских ученых стал употреблять десятичную систему, неизвестно. Однако есть основание думать, что эта система была изобретена в начале I в. н. э. Что касается первого употребления знака нуля, то этот факт относится ко II в. н. э.

Наиболее известными индийскими математиками являются Ариабхата (конец I в.), Брамагупта (VII в.) и Бхаскара (XII в.).

Индийские математики далекого прошлого любили состязаться на публичных народных собраниях. По этому поводу один индийский автор VII в., заканчивая свою книгу, писал: «Подобно тому, как солнце затмевает своим блеском звезды, так мудрец затмевает славу других людей, предлагая и особенно решая на народных собраниях математические задачи».

Заметим, что все указания и решения к индийским задачам даются ниже в современной символике.

87. Эта задача взята из Бахшалийской рукописи, найденной в 1881 г. при раскопках в Бахшали в северо-западной Индии. Рукопись выполнена на березовой коре и относится к III или IV в. н. э. Ученые установили, что эта рукопись является неполной копией более древних рукописей.

Автор рукописи предлагает решать данную задачу «правилом предположения» в его частном виде, когда искомое предполагается равным единице (методом приведения к единице). Рассуждение ведется следующим образом. Пусть неизвестное равняется единице, тогда первый дал 1, второй — 2, третий — 6, четвертый — 24. Сумма пожертвований будет составлять 33. Теперь разделим 132 на 33. Это и будет искомый результат, т. е. то число, которое дал первый.

88. Согласно условию задачи, будем иметь

$$n + 5 = x^2\ ;$$
$$n - 11 = y^2.$$

Вычитая второе уравнение из первого, получаем

$$16 = x^2 - y^2$$

или

$$16 = (x + y)(x - y),$$

откуда

$$x + y = 8; \qquad x + y = 16,$$
$$x - y = 2; \qquad x - y = 1.$$

Решая первую систему, получаем

$$x = 5;\ y = 3.$$

Следовательно, искомое число $n = 20$.

Решая вторую систему, находим

$$x = \frac{17}{2}; \quad y = \frac{15}{2}.$$

Следовательно, $n = 67\frac{1}{4}$.

89. Задача приводит к уравнению

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{3}x + 3\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{5}x\right) + 1 = x.$$

Решая это уравнение, получаем $x = 15$. Следовательно, всего было 15 пчел.

Задача взята из трактата «Сущность вычисления» («Ганитасара») индийского математика Сридхары, жившего в промежутке VI—X вв. (время жизни точно не установлено). Сридхара является автором ряда задач, которые широко использовались индийскими математиками последующих времен.

90. Обозначим через x путь, пройденный до встречи одним светилом, тогда время, необходимое ему для прохождения этого пути, будет $\frac{x}{v_1}$.

За это время второе светило пройдет путь $d - x$ и затратит на него время $\frac{d-x}{v_2}$. Теперь составим уравнение

$$\frac{x}{v_1} = \frac{d-x}{v_2},$$

откуда

$$x = \frac{dv_1}{v_1 + v_2}.$$

Задача взята из трактата «Ариабхатиам» известного индийского математика конца V — начала VI в. Ариабхаты. Этот трактат посвящен астрономии и математике. В математической части своего сочинения Ариабхата дает ряд правил по арифметике, алгебре, геометрии и тригонометрии, нужных для астрономии и в первую очередь для составления астрономических таблиц. Ариабхата является автором многих интересных задач по элементарной математике, одна из которых и приводится.

91. Данная задача является задачей на суммирование так называемых треугольных чисел вида $\frac{n(n+1)}{2}$. Давая n значения 1, 2, 3, ..., получаем ряд «треугольных чисел»: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, ... Обратив внимание, что сумма двух рядом стоящих «треугольных чисел» всегда представляет точный квадрат, и обозначив любое «треугольное число» через T, будем иметь:

$$\begin{aligned} &T_n + T_{n-1} = n^2; \\ &T_{n-1} + T_{n-2} = (n-1)^2; \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &T_3 + T_2 = 3^2; \\ &T_2 + T_1 = 2^2. \end{aligned}$$

Сложив все эти равенства, получим

$$T_n + 2(T_{n-1} + T_{n-2} + \ldots + T_2) + T_1 = \\ = n^2 + (n-1)^2 + \ldots + 3^2 + 2^2;$$

$$T_n + 2(T_{n-1} + T_{n-2} + \ldots + T_2) + T_1 = \\ = n\frac{(n+1)(2n+1)}{6} - 1;$$

$$2(T_n + T_{n-1} + \ldots + T_2 + T_1) = T_1 + T_n + \\ + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1.$$

Имея в виду, что $T_1 = 1$, $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, находим

$$T_n + T_{n-1} + \ldots + T_2 + T_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \right. \\ \left. + \frac{n(n+1)}{2}\right];$$

$$T_1+T_2+\ldots+T_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)+3n(n+1)}{6};$$

$$T_1+T_2+\ldots+T_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+4)}{6};$$

$$T_1+T_2+\ldots+T_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Задача взята из трактата Ариабхаты «Ариабхатиам».

92. Пусть у первого лица будет a вещей и m монет, а у второго лица b вещей и p монет. Тогда, обозначив через x ценность вещи, получим уравнение

$$ax+m=bx+p.$$

Решая относительно x, находим

$$x=\frac{p-m}{a-b}.$$

93. Обозначив диаметр круга через d, будем иметь

$$\frac{\pi d^2}{4}=\left(\frac{13}{15}d\right)^2,$$

откуда

$$\pi=\frac{676}{225}$$

или $\pi=3{,}00(4)$. Погрешность около 4,3%.

Задача взята из древнего индийского сборника «Сулва-сутра» («Правила веревки»), который является самым старым памятником индийской геометрии, дошедшим до нашего времени. «Сулва-сутра» представляет своеобразную инструкцию о построении жертвенников, где и дается весьма ценный геометрический материал в его приложении, т. е. материал, связанный с описанием форм жертвенников, их размерами и необходимой ориентацией относительно стран света.

В настоящее время известны три таких сборника. Авторами этих сборников являются Бодгайана (VI или VII в. до н. э.), Катиайана и Апастамба (IV или V в. до н. э.).

Судя по этим сборникам, можно сделать вывод, что по меньшей мере в VIII в. до н. э. индийским ученым была уже известна теорема о квадрате гипотенузы (теорема Пифагора), т. е. задолго до Пифагора. В «Сулва-сутре» эта теорема формулировалась так: «Веревка, проведенная наискось в продольном квадрате (прямоугольнике), образует то же, что образует вместе каждая отдельная из мер: продольных и поперечных».

Если древнегреческие ученые пытались решить проблему о превращении данного круга в равновеликий квадрат (квадратура круга), то индийские математики решают часто обратную задачу (конечно, приближенно), о превращении данного квадрата в равновеликий круг.

В «Сулва-сутре» дается «правило Катиайаны»: «Надо разделить диаметр на 15 равных частей и взять 13 таких частей для стороны квадрата, равного (приблизительно) кругу». Это правило Катиайаны и составляет содержание рассмотренной выше задачи.

94. Пусть h — высота гномона, a и b — длина его тени в двух различных положениях, d — расстояние между основанием гномона в первом положении и основанием его во втором положении (рис. 35).

Обозначив через x искомую высоту свечи, из подобия треугольников, легко усматриваемого из чертежа, получим

$$\frac{x}{x-h}=\frac{a+b+d}{d},$$

откуда

$$x=\frac{h(a+b+d)}{a+b}=h\left(1+\frac{d}{a+b}\right).$$

Автор этой задачи — крупнейший индийский математик и астроном Брамагупта (род. в 598 г.). Сохранился только один его астрономический трактат, написанный в 628 г., включающий 20 книг, из которых математические — XII (арифметика) и XVIII (алгебра). В арифметической книге имеется ряд глав, посвященных вопросам геометрии, там же содержится и только что решенная задача.

95. Надо доказать, что $\frac{ac}{h}=BE$, где BE — диаметр описанной окружности (рис. 36).

Рассмотрим треугольники ADB и BCE, они подобны. Получим

$$c:h=BE:a,$$

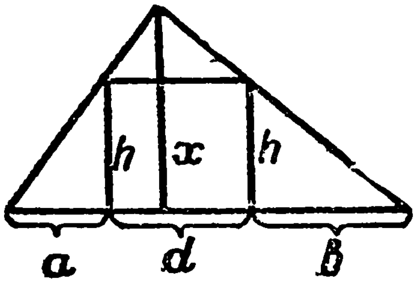


Рис. 35

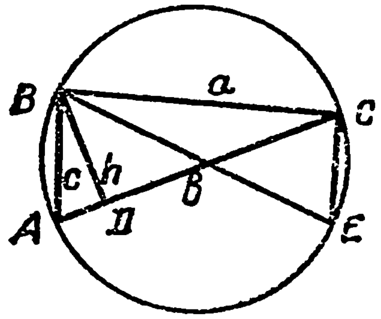


Рис. 36

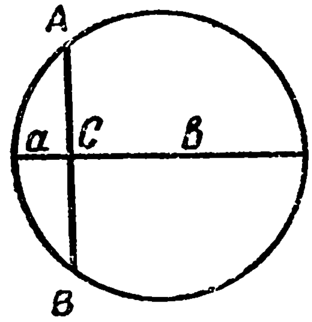


Рис. 37

откуда

$$\frac{ac}{h} = BE.$$

96. Надо доказать, что $\frac{AB^2}{4a} + a = D$, где D — диаметр круга (рис. 37). В самом деле,

$$AC^2 = ab; \qquad (1)$$

$$AC = \frac{AB}{2}; \qquad (2)$$

$$b = D - a. \qquad (3)$$

Тогда равенство (1) на основании (2) и (3) примет вид

$$\frac{AB^2}{4} = a(D - a)$$

или

$$\frac{AB^2}{4} + a^2 = Da. \qquad (4)$$

Разделив левую и правую части равенства (4) на a, получим окончательно

$$\frac{AB^2}{4a} + a = D.$$

97. Надо доказать, что

$$a = \frac{1}{2}(D - \sqrt{D^2 - AB^2}); \quad AB^2 = 4aD - 4a^2$$

(см. предыдущую задачу).

Далее, легко видеть, что

$$D^2 - 4aD + 4a^2 = D^2 - AB^2; \quad (D - 2a)^2 = D^2 - AB^2;$$

$$D - 2a = \sqrt{D^2 - AB^2}; \quad a = \frac{1}{2}(D - \sqrt{D^2 - AB^2}).$$

98. Задача взята из трактата «Венец астрономического учения» выдающегося индийского математика XII в. Бхаскары-акария (род. в 1114 г., год смерти неизвестен). Приставка «акария» означает мудрец, ученый. Вводная часть трактата состоит из арифметики — «Лилавати» (в буквальном переводе означает «прекрасная») и алгебры — «Виджа ганита» («вычисление корней»). Лилавати, как полагают многие историки математики,— дочь Бхаскары, которой он и посвящает арифметическую часть своего сочинения.

Бхаскара данную задачу решал методом предположения.

Предположим, что искомое число равняется 3, тогда, по условию задачи, $3 \cdot 5 = 15$, одна треть от 15 равна 5. Поскольку $15 - 5 = 10$, то при делении 10 на 10 получим единицу. Если теперь к единице прибавить $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$ от 3, тогда получим $1 + 1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{17}{4}$, что меньше 68 в 16 раз.

Следовательно, искомое число равняется $3 \cdot 16 = 48$.

99. $\sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}} =$

$$= \sqrt{2 + 3 + 5 + 2\sqrt{2 \cdot 3} + 2\sqrt{2 \cdot 5} + 2\sqrt{3 \cdot 5}} =$$

$$= \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})^2} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}.$$

Эта задача взята из трактата Бхаскары-акария «Сиддан-та-сиромани».

100. Напишем тождество

$$[(m^2 + n^2)x]^2 = [(m^2 - n^2)\,x]^2 + (2mnx)^2$$

и примем за гипотенузу $(m^2 + n^2)\,x$, а за катеты $(m^2 - n^2)\,x$ и $2mnx$.

Имея в виду условия задачи, получим

$$(m^2 + n^2)\,x = mnx^2\,(m^2 - n^2)$$

или

$$m^2 + n^2 = mn\,(m^2 - n^2)\,x,$$

откуда

$$x = \frac{m^2 + n^2}{mn\,(m^2 - n^2)}.$$

Теперь без труда вычислим катеты искомых треугольников, а следовательно, найдем и сами треугольники.

Эта задача взята из трактата Бхаскары-акария «Венец астрономического учения».

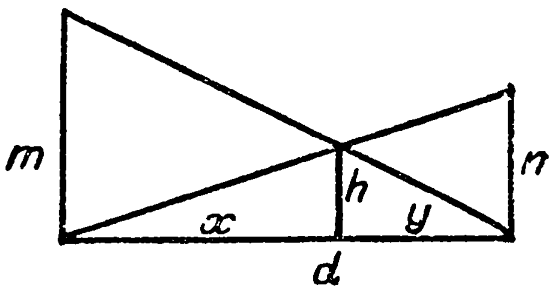


Рис. 38

101. Обозначая через h — длину перпендикуляра, через d — расстояние между основаниями палок, через x и y — отрезки на d (рис. 38), правило Бхаскары можно записать так:

$$h = \frac{mn}{m+n}; \quad x = \frac{dm}{m+n}; \quad y = \frac{dn}{m+n}.$$

Действительно,

$$\frac{m}{h} = \frac{d}{y}; \quad \frac{n}{h} = \frac{d}{x}, \quad x + y = d.$$

Решая эту систему относительно h, x, y, получим, что нужно.

102. Пусть у первого будет $2x - 100$ рупий, а у второго $x + 100$ рупий. Ясно, что первое условие будет выполнено. Имея в виду второе условие, находим

$$6\,(2x - 110) = x + 110.$$

Решая это уравнение, получаем $x = 70$.

Следовательно, у первого было $140 - 100 = 40$ рупий, у второго $70 + 100 = 170$ рупий.

103. Умножив обе части уравнения $ax^2 + bx = c$ на $4a$, получим

$$4a^2x^2 + 4abx = 4ac.$$

Далее прибавим к обеим частям равенства b^2:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 + 4ac.$$

Так как левая часть обращается в квадрат, то

$$2ax + b = \sqrt{b^2 + 4ac},$$

откуда

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}.$$

Что касается отрицательных значений корней, то Бхаскара замечает, что «люди не одобряют отвлеченных отрицательных чисел».

104. Полагая, что число пчел роя $2x^2$, получаем уравнение

$$2x^2 = x + \frac{16}{9}x^2 + 2$$

или

$$2x^2 - 9x = 18,$$

откуда

$$x = 6 \text{ и } 2x^2 = 72.$$

105. Решение задачи приводит к уравнению

$$x^3 + 12x = 6x^2 + 35$$

или

$$x^3 + 12x - 6x^2 = 35.$$

Вычитая из обеих частей равенства 8, будем иметь:

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 27; \quad (x-2)^3 = 27; \quad x - 2 = 3;$$
$$x = 5.$$

Значения других двух корней Бхаскара не дает (мнимые корни он не рассматривает).

Исходное кубическое уравнение можно было бы решить несколько иначе и также элементарно. Ниже дается это решение:

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 35 = 0; \quad x^3 - 5x^2 - x^2 + 5x + $$
$$+ 7x - 35 = 0; \; x^2(x - 5) - x(x - 5) + 7(x - 5) = 0;$$
$$(x - 5)(x^2 - x + 7) = 0.$$

Это уравнение распадается на два:

$$x - 5 = 0 \text{ и } x^2 - x + 7 = 0.$$

Решая первое, найдем $x = 5$; решая второе, найдем x_2 и x_3.

106. $x^4 - 2x^2 - 400x = 9999; \quad x^4 - 11x^3 + 11x^3 -$
$- 121x^2 + 119x^2 - 1309x + 909x - 9999 = 0;$
$$x^3(x - 11) + 11x^2(x-11) + 119x(x-11) + 909(x - 11) = 0;$$
$$(x - 11)(x^3 + 11x^2 + 119x + 909) = 0.$$

Получаем два уравнения:

$$x - 11 = 0; \; x^3 + 11x^2 + 119x + 909 = 0.$$

Решая первое уравнение, находим $x_1 = 11$ (вот этот корень и дает Бхаскара). Решая второе уравнение, получаем еще три корня, которых Бхаскара не рассматривал. Найдем эти корни:

$$x^3 + 11x^2 + 119x + 909 = 0; \quad x^3 + 9x^2 + 2x^2 + 18x +$$
$$+ 101x + 909 = 0; \; x^2(x + 9) + 2x(x + 9) + 101(x+9) = 0;$$
$$(x + 9)(x^2 + 2x + 101) = 0.$$

Получаем еще два уравнения:

$$x + 9 = 0; \; x^2 + 2x + 101 = 0.$$

Решая первое уравнение, находим $x_2 = -9$. Решая второе, получаем остальные два корня x_3 и x_4, которые будут мнимыми.

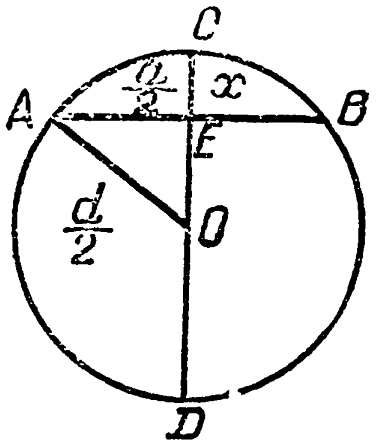


Рис. 39

107. Если обозначить длину диаметра CD через d, основание сегмента AB положить равным a, а искомую высоту CE считать равной x (рис. 39), то

$$\frac{a^2}{4} = x(d - x) = xd - x^2$$

или

$$x^2 - xd + \frac{a^2}{4} = 0;$$

$$x = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - a^2}}{2};$$

$$x_1 = \frac{d + \sqrt{d^2 - a^2}}{2}; \quad x_2 = \frac{d - \sqrt{d^2 - a^2}}{2}.$$

108. $ax + by + c = xy; \quad c = xy - ax - by; \quad ab + c = xy - ax - by + ab; \quad ab + c = y(x - b) - a(x - b) = (x - b)(y - a).$

Чтобы получить x и y в рациональных числах, надо положить $x = b + n$, тогда

$$y = a + \frac{ab + c}{n}.$$

109. Индийские математики пользовались еще одним арифметическим приемом, который они широко применяли. Это — «правило обращения», или «правило инверсии». Суть его заключается в следующем: если нужно найти число, которое после ряда операций приводит к некоторому известному числу, то для этого необходимо над этим последним числом произвести в обратном порядке все обратные операции.

Решение данной задачи заключается в том, что, начиная с числа 2, производят обратные действия в обратном порядке:

$$(2\cdot 10-8)^2+52=196;\ \sqrt{196}=14;$$
$$14\cdot\frac{3}{2}\cdot 7\cdot\frac{4}{7}=84;\ \ 84:3=28.$$

Число 28 и есть искомое.

110. Если обозначим число всех обезьян через x, то задача сведется к решению уравнения

$$\frac{x^2}{64}+0\cdot x+12=0\cdot x^2+x+0.$$

После приведения к одному знаменателю и упрощения получим

$$x^2-64x=-768.$$

Прибавляя к обеим частям квадрат 32, будем иметь

$$x^2-64x+32^2=-768+1024.$$

После извлечения квадратного корня найдем

$$x-32=16.$$

В данном случае, говорит Бхаскара, отрицательные единицы первой части таковы, что единицы второй части меньше их, а потому последние можно считать и положительными и отрицательными и получаем двойное значение неизвестного: 48 и 16.

111. Задача сводится к решению уравнения

$$\left(\frac{x}{5}-3\right)^2+1=x.$$

Его корнями будут $x_1=50$ и $x_2=5$. В заключение Бхаскара делает такое замечание: «Так как $\frac{1}{5}\cdot 5-3$ есть число отрицательное, то годится только первое решение».

Но комментатор Бхаскары Кришна Бхатта говорил, что если бы по условию вопроса было сказано: одна пятая часть стаи вычитается из 3, то второе решение, а не первое удовлетворяло бы условию.

112. Уравнение, удовлетворяющее условию задачи, следующее:

$$\frac{x}{2} + 4\sqrt{x} + 6 + 3 + 1 = x.$$

После упрощения получаем

$$x^2 - 104x + 400 = 0,$$

откуда

$$x = 52 \pm \sqrt{52^2 - 400}.$$

Следовательно,

$$x = 52 \pm 48.$$

Таким образом, имеется два корня: $x_1 = 100$ и $x_2 = 4$, причем непосредственной проверкой можно убедиться, что условию задачи удовлетворяет только первый корень.

113. Задача сводится к уравнению

$$x = 10\sqrt{x} + \frac{1}{8}x + 6,$$

откуда получается квадратное уравнение

$$u^2 = 10u + \frac{1}{8}u^2 + 6,$$

где $u = \sqrt{x}$.

После небольших упрощений получим уравнение вида

$$7u^2 - 80u - 48 = 0.$$

Пользуясь формулой Бхаскары, находим

$$u = \frac{80 + \sqrt{6400 + 1344}}{14}$$

или

$$u = \frac{80 + 88}{14} = \frac{168}{14} = 12.$$

Следовательно,

$$x_1 = u^2 = 144.$$

Второй корень Бхаскара не берет, так как он соответствует отрицательному значению u, кроме того, дает дробное значение для x, что не соответствует действительности (дробное число лебедей быть не может).

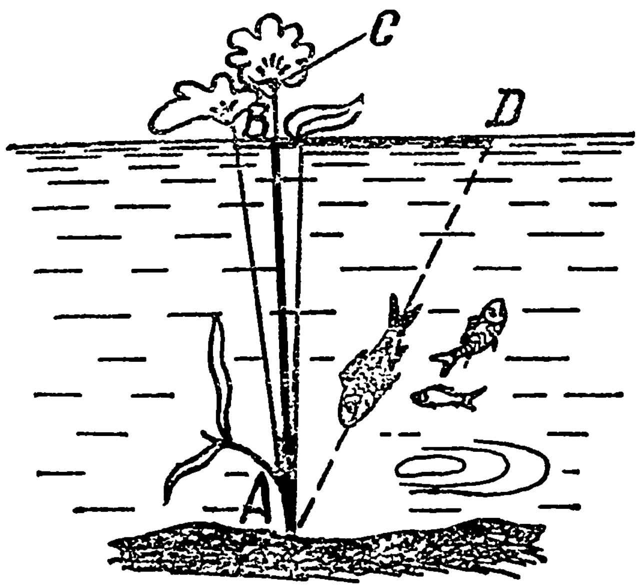


Рис. 40

114. Согласно рис 40, задачу можно сформулировать так: «Цветок лотоса, основание которого C при отвесном положении стебля возвышалось над водой на $^1/_2$ фута, порывом ветра отклонился на 2 фута от прежнего положения (считая по поверхности воды), при этом вершина цветка оказалась на уровне воды. Определить глубину озера в этом месте, т. е. длину отрезка AB».

Решаем задачу:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + 2^2$$

или

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = x^2 + 4,$$

откуда

$$x + \frac{1}{4} = 4.$$

Следовательно,

$$x = 3\frac{3}{4} \text{ (фута).}$$

115. Задача поясняется рис. 41, согласно которому тополь AB сломан в точке C на высоте 3 футов, и верхушка

D в новом положении отстоит от основания A на 4 фута. Требуется узнать высоту тополя.

Задача решается так:

$$AB = AC + CD = AC + \sqrt{AC^2 + AD^2} = 3 + \sqrt{9 + 16} = 3 + 5 = 8 \text{ (футов)}.$$

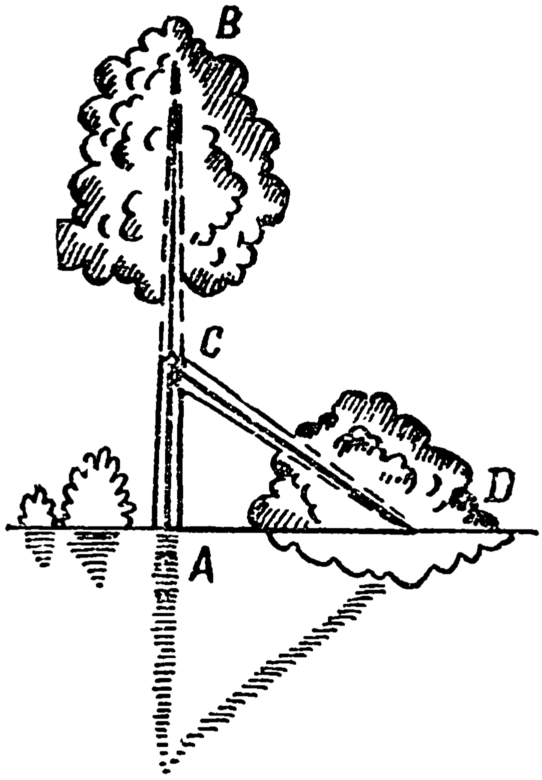


Рис. 41

116. Следуя «правилу обращения», получим:

$$\sqrt{4} = 2;\ 2 + 1 = 3;\ 3^2 = 9;$$
$$9 - 6 = 3;\ 3 \cdot 5 = 15;$$
$$15 : 3 = 5.$$

Число 5 и будет искомым.

«Правило обращения», которым пользовались индийские ученые, стало широко известно и за пределами Индии. Позднее им стали пользоваться сначала в странах Арабского халифата, а потом и в Европе.

117. Воспользуемся современной символикой и покажем, как индийские математики решали уравнение Пелля: сначала, пользуясь произвольными числами x_1, y_1, x_2, y_2, определяли b_1 и b_2 с таким расчетом, чтобы выполнялись равенства:

$$ax_1^2 + b_1 = y_1^2;$$
$$ax_2^2 + b_2 = y_2^2$$

или

$$y_1^2 - ax_1^2 = b_1;$$
$$y_2^2 - ax_2^2 = b_2.$$

Путем умножения последних двух уравнений получали

$$(ax_1x_2 + y_1y_2)^2 - a(x_1y_2 + x_2y_1)^2 = b_1b_2.$$

Положив $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$, а тогда и $b_2 = b_1$, последнее уравнение приводили к виду

$$a(2x_1y_1)^2 + b_1^2 = (ax_1^2 + y_1^2)^2.$$

Разделив на b_1^2, окончательно имели

$$a\left(\frac{2x_1y_1}{b_1}\right)^2 + 1 = \left(\frac{ax_1^2 + y_1^2}{b_1}\right)^2.$$

Следовательно,

$$x = \frac{2x_1y_1}{b_1}; \quad y = \frac{ax_1^2 + y_1^2}{b_1}.$$

Так индийские ученые получали решение в рациональных числах, удовлетворяющих данному уравнению. Давая x_1 и y_1 произвольные значения, они добивались иногда того, что решения были в целых числах.

118. Надо доказать, что

$$a^2 + b^2 = D^2 \text{ и } c^2 + d^2 = D^2,$$

где D — диаметр описанной окружности (рис. 42).

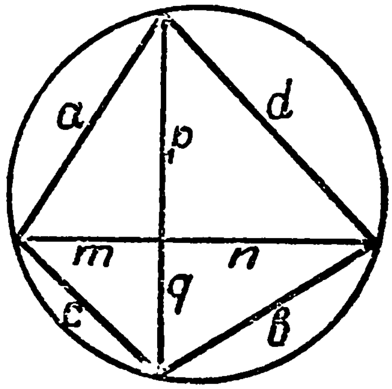


Рис. 42

Еще в древности Архимеду было известно, что

$$m^2 + n^2 + p^2 + q^2 = D^2 \text{ (докажите).}$$

Далее, по теореме Пифагора

$$m^2 + p^2 = a^2 \text{ и } n^2 + q^2 = b^2.$$

Следовательно,

$$a^2 + b^2 = D^2.$$

Аналогично

$$m^2 + q^2 = c^2 \text{ и } n^2 + p^2 = d^2.$$

Следовательно,

$$c^2 + d^2 = D^2.$$

АРАБЫ

Под «арабской» культурой надо понимать главным образом культуру народов, покоренных арабами. В этом свете видное место в развитии математики в странах Арабского халифата (государства, завоеванные арабами) на протяжении более 500 лет, с IX по XVI век, неизменно принадлежало ученым народов Средней Азии и Закавказья и прежде всего таджикам, узбекам, азербайджанцам.

В области арифметики среднеазиатским ученым принадлежит усовершенствование позиционной шестидесятеричной системы счисления, в которой за основание принято число 60; открытие десятеричных дробей, а также распространение десятеричной позиционной системы счисления.

К крупнейшим среднеазиатским математикам, прославившим своими открытиями себя и свой народ, принадлежат узбекский ученый ал-Хорезми (IX), таджикский ученый Абу-ль-Вафа (X), таджикский ученый-энциклопедист Авиценна (XI), узбекский математик ал-Бируни (XI), таджикский ученый, математик, поэт и философ Омар Хайям (XII), азербайджанский ученый Насирэддин Туси (XIII), узбекский астроном и математик Улугбек (XV).

(Во избежание недоразумений заметим, что все указания к задачам и решения задач арабских математиков даются в современной символике.)

119. Решая эти квадратные уравнения обычным путем, получаем:

1) $x_1 = 0, \quad x_2 = 8;$
2) $x_1 = 6, \quad x_2 = -6;$
3) $x_1 = 7, \quad x_2 = 3;$
4) $x_1 = 24, \quad x_2 = -12;$
5) $x_1 = 9, \quad x_2 = \frac{9}{4};$
6) $x_1 = 12, \quad x_2 = -19.$

Эта задача взята из трактата «Хасиб ал-джебр ва-мукабала» выдающегося алгебраиста первой трети IX в. ал-Хорезми (Мухамед бен-Муса ал-Хорезми). родом из Хорезма (ныне Хорезмская область Узбекской ССР, расположенная в низовьях Аму-Дарьи и занимающая основную часть Хорезмского оазиса).

Ал-Хорезми — автор многих математических трактатов, из которых наибольшую славу имеют два: один по алгебре, из которого взята предложенная задача, а другой — по арифметике.

Свой замечательный трактат по алгебре ал-Хорезми написал около 830 г. и предназначал его в качестве учебного руководства по алгебре для юношества.

Необходимо заметить, что термин «алгебра» как международное название науки произошел от слова «алджебр», т. е. от наименования математического трактата «Хасиб ал-джебр ва-мукабала».

Интересно отметить также, что слово «алгоритм», употребляемое ныне в смысле общего решения любой математической задачи, произошло от латинизированного имени ал-Хорезми.

120. Прежде всего найдем высоту данного треугольника ABC (рис. 43):

$$BK=\sqrt{100-36}=8.$$

Далее, из подобия треугольников ABC и DBE находим

$$\frac{x}{8-x}=\frac{12}{8},$$

где x — сторона искомого квадрата.

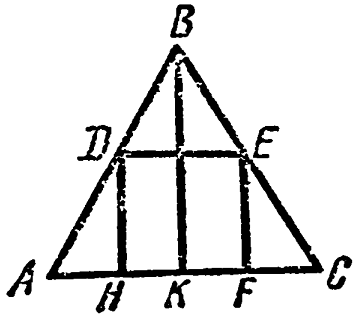


Рис. 43

Отсюда

$$x=4\frac{4}{5}.$$

121. Эту задачу ал-Хорезми решал по формуле «фальшивого правила», проводя следующие рассуждения. Пусть искомое число равняется 12, тогда остаток будет равен 5 вместо 8, т. е. на 3 меньше. Если же положить число равным 24, остаток будет равен 10 вместо 8, т. е. на 2 больше. Тогда

$$\frac{3\cdot 24+12\cdot 2}{3+2}=19\frac{1}{5}.$$

122. Задача решается следующим образом.

Пусть $M = 9n + 1$, $M^2 = 81n^2 + 18n + 1 =$ (число, кратное 9) $+ 1$. Аналогично

$N = 9n + 8$, $N^2 = 81n^2 + 144n + 64 =$ (число, кратное 9) $+ 1$.

Прежде чем решать эту задачу, учащимся сообщается тождество

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Автором данной задачи является таджикский ученый-энциклопедист Авиценна (Абу-Али Ибн-Сина), много сделавший для процветания науки. Родился Авиценна в бухарском селении Афшана около 980 г. (умер в 1037 г.). Уже в молодости стал видным ученым и овладел многими профессиями. Он был крупным астрономом, замечательным математиком, видным химиком и одаренным врачом-исследователем. Авиценна обобщил достижения своих современников и предшественников, а также поставил и разрешил новые математические проблемы (задачи). Большую роль для развития математической науки сыграли комментарии Авиценны к геометрическим сочинениям Евклида, известным под общим названием «Начала».

Авиценна во многих вопросах науки был новатором, за что подвергался гонениям. Его заключали в тюрьмы, книги его сжигались на кострах.

Историки рисуют Авиценну как человека, веровавшего в непобедимую силу разума, как борца против слепой веры в религиозные догмы и авторитет богословов. До нас дошло только одно математическое сочинение Авиценны, посвященное арифметике. Оно входит в состав его медицинского трактата «Книга исцеления», который хранится в Лейденской библиотеке в Англии.

123. Ал-Кархи рассуждал так: на основании условия задачи

$$x(3 + \sqrt{5}) = 1$$

или

$$3x + x\sqrt{5} = 1,$$

откуда

$$3x + \sqrt{5x^2} = 1.$$

Далее, последнее уравнение можно представить так:

$$\sqrt{5x^2} = 1 - 3x.$$

Возведя в квадрат, получим

$$5x^2 = (1 + 3x)^2 = 1 - 6x + 9x^2.$$

Отсюда

$$4x^2 - 6x + 1 = 0.$$

Решая полученное квадратное уравнение, будем иметь

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

За искомое число ал-Кархи берет корень

$$x = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}.$$

Обычным приемом задача ал-Кархи решается очень просто. Действительно, из искомого уравнения $x(3 + \sqrt{5}) = 1$ сразу получаем

$$x = \frac{1}{3 + \sqrt{5}} = \frac{3 - \sqrt{5}}{(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})} = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}.$$

Ал-Кархи (Абу Бекра Мухаммед Бен-Гассан ал-Кархи) — среднеазиатский математик XI в. Он является автором многих математических трактатов, из которых до нас дошли только два: первый под названием «Все известное в арифметике» («Кафил фил Хисаб»), второй — «Ал-факри», обширное сочинение по алгебре, являющееся продолжением первого. Второе сочинение озаглавлено в честь тогдашнего правителя, покровителя наук Факр ал-Мулька, умершего в 1017 г.

124. Приводим рассуждения ал-Кархи. Из последнего уравнения

$$y = \frac{10}{x}.$$

Тогда из второго уравнения с учетом полученного соотношения

$$z = \frac{100}{x^3}.$$

Следовательно, первое уравнение данной системы примет вид

$$x^2 + \frac{100}{x^2} = \frac{10\,000}{x^6}$$

или

$$x^3 + 100x^4 - 10\,000 = 0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно x^4, получаем

$$x^4 = -50 + \sqrt{12\,500}.$$

Следовательно,

$$x = \sqrt{\sqrt{\sqrt{12\,500} - 50}}.$$

125. Обозначим ширину прямоугольника через x, тогда длина его будет $2x$, площадь $2x^2$, периметр $6x$.

Согласно условию задачи,

$$2x^2 = 6x,$$

а следовательно, $x = 3$, и искомая площадь равняется 18 кв. ед.

126. Положим $\frac{1}{x} = z$, тогда данное уравнение примет вид

$$z^2 + 2z = \frac{5}{4}.$$

Прибавляя к левой и правой частям по единице, получаем

$$z^2 + 2z + 1 = \frac{9}{4}$$

или

$$(z+1)^2 = \frac{9}{4},$$

откуда

$$z+1 = \pm\frac{3}{2}$$

или

$$z_1 = \frac{1}{2}; \quad z_2 = -\frac{5}{2}.$$

Следовательно,

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -\frac{2}{5}.$$

Автором решенной задачи является таджикский ученый, математик, поэт и философ Омар Хайям (1040—1123), еще в молодости проявивший особую склонность к математическим наукам. В своем сочинении «О доказательствах задач алгебры и алмукабулы» он подробно рассматривал решение линейных и квадратных уравнений, а также геометрическое построение корней кубического уравнения. Омар Хайям впервые дал способы решения кубических уравнений и положил начало приложению алгебры к геометрии.

Омар Хайям известен также своими четверостишиями (рубаи), которые полны неподдельного лиризма, глубокого социального и философского смысла.

127. Задача решается довольно просто. Если меньшую часть обозначить через x, то большая часть будет $x+5$. Согласно условию задачи, $2x+5=10$. Отсюда $2x=5$. Следовательно, меньшая часть будет $2\frac{1}{2}$, а большая $7\frac{1}{2}$.

Автором этой задачи является иранский математик XVI в. Бега-Эддин, составитель трактата «Сущность искусства счисления» («Коласатал-Хисаб»), из которого и взята данная задача.

128. Бега-Эддин решал эту задачу при помощи таких рассуждений: обозначим одно число через $10 - x$, тогда другое число будет $10 + x$, а их произведение будет

$$100 - x^2 = 96,$$

откуда

$$x^2 = 4 \text{ и } x = 2.$$

Следовательно, большая часть составляет $10 + 2 = 12$, которую и должен получить Заид.

129. Рассматривая треугольники (рис. 44), находим

$$\frac{x}{r} = \frac{x+h}{R}; \; x(R-r) = rh; \; x = \frac{rh}{R-r}.$$

Следовательно,

$$x + h = \frac{Rh}{R-r}.$$

130. Решение дается «методом обращения»:

$$50:10 = 5; \; 5 \cdot 5 = 25; \; 25 - 3 = 22; \; 22:2 = 11;$$

$$11 - 2 = 9; \; \sqrt{9} = 3,$$

что и будет служить ответом.

131. Из прямоугольного треугольника BED (рис. 45) получаем:

$$(x-3)^2 + 5^2 = x^2;$$
$$x^2 - 6x + 9 + 25 = x^2;$$

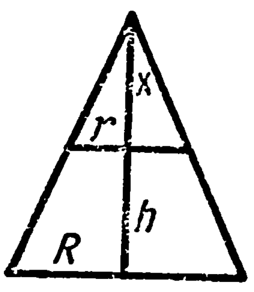


Рис. 44

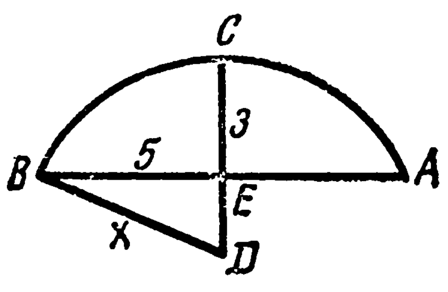


Рис. 45

$$6x = 34;\ 3x = 17;$$
$$x = \frac{17}{3} = 5\frac{2}{3} \text{ (локтей).}$$

Ал-Каши (Джамшид Гияс-эддин ал-Каши) — иранский математик, составитель двух знаменитых трактатов: «Ключа арифметики» и «Трактата об окружностях». Даты рождения и смерти ал-Каши точно неизвестны. Полагают, что он родился в третьей или начале последней четверти XIV в. Ал-Каши был не только математиком, но и видным врачом. По свидетельству историков, он руководил крупнейшей обсерваторией в Самарканде, построенной узбекским астрономом Улугбеком.

В «Трактате об окружностях» ал-Каши дает приближенное вычисление числа π с 17 верными десятичными знаками, поражая современных ученых методикой расчетов, проводимых с чрезвычайной экономностью и тщательностью.

132. Доказательство ведется методом полной математической индукции.

1) Докажем, что равенство ал-Каши выполняется для $n = 1$. Действительно,

$$1 = \frac{1}{30}(6 + 15 + 10 - 1);\ 1 = 1.$$

2) Предположим, что равенство ал-Каши имеет место при $n = k$, т. е.

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + k^4 = \frac{1}{30}(6k^5 + 15k^4 + 10k^3 - k).$$

3) Докажем, что при сделанном предположении равенство ал-Каши имеет место при $n = k + 1$:

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + k^4 + (k + 1)^4 =$$
$$= \frac{1}{30}[6(k + 1)^5 + 15(k + 1)^4 + 10(k + 1)^3 - (k + 1)]. \quad (1)$$

На основании предыдущего левую часть этого равенства можно переписать так:

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + k^4 + (k + 1)^4 =$$
$$= \frac{1}{30}(6k^5 + 15k^4 + 10k^3 - k) + (k + 1)^4. \quad (2)$$

Остается доказать, что правые части равенств (1) и (2) равны:

$$\frac{1}{30}(6k^5+15k^4+10k^3-k)+(k+1)^4=$$
$$=\frac{1}{30}[6(k+1)^5+15(k+1)^4+10(k+1)^3-(k+1)];$$

$$6k^5+15k^4+10k^3-k+30(k+1)^4=$$
$$=6(k+1)^5+15(k+1)^4+10(k+1)^3-(k+1);$$

$$6k^5+15k^4+10k^3+1=$$
$$=6(k+1)^5-15(k+1)^4+10(k+1)^3;$$
$$6k^5+15k^4+10k^3+1=6k^5+15k^4+10k^3+1.$$

Последнее равенство выполняется, следовательно, выполняются и все предшествующие, включая и равенство (1).

Таким образом, равенство ал-Каши при $n=k+1$ выполняется, а следовательно, оно выполняется для любого n. Это и требовалось доказать.

133. Решение дается по формуле «фальшивого правила».

Ученые Арабского халифата еще в XIII в. «фальшивому правилу» дали механическое истолкование под названием «метода чашек весов». Так, арабский математик Ибн-Албанна (1222) в своем трактате «Талкис» писал: «Метод чашек весов — геометрический и состоит в том, что ты берешь весы указанной формы и кладешь известную величину над точкой опоры. На одну из чашек кладешь произвольное число, прибавляешь к нему, что дано тебе прибавить (или вычесть). Полученный результат сравни с тем, что находится над точкой опоры. Если ты попал правильно, то чашка весов дает известную величину. Если же ты не попал, заметь погрешность над чашкой, если результат велик, и под чашкой, если результат мал. Затем положи на другую чашку другое, произвольно выбранное число, и поступай таким же образом, после этого умножь погрешность каждой из чашек на число, положенное на другую чашку. Если обе погрешности положительны или обе отрицательны, вычитай меньшую из большей, а также меньшее произведение из большего и раздели разность произведения на разность погрешностей. Если же одна погрешность положительна, а другая отрицательна, раздели сумму произведений на сумму погрешностей».

Само решение приводится в таком виде. Положим вместо x какое-нибудь произвольное число, хотя бы 6 (правая чашка). Тогда, согласно условию задачи, получим

$$7 \cdot 6 + 6 \cdot 6 = 78.$$

Сравнивая полученное число с данным (25), найдем погрешность

$$78 - 25 = 53.$$

Положим теперь вместо x какое-нибудь другое произвольное число, например 1 (левая чашка). Тогда

$$7 \cdot 1 + 6 \cdot 1 = 13,$$

а вторая погрешность будет

$$13 - 25 = -12.$$

Применяя к найденным числовым значениям правило, сформулированное Ибн-Албанной, получаем

$$x = \frac{53 \cdot 1 + 12 \cdot 6}{53 + 12} = 1\frac{12}{13},$$

что и составляет нужный ответ.

134. Эту задачу в своем арифметическом трактате «Раскрытие тайн науки Габар» ал-Кальсади решает «методом чашек весов».

Пусть $x = 12$ (правая чашка), тогда первая погрешность будет 14. Если же $x = 24$ (левая чашка), то вторая погрешность будет 7. Следовательно,

$$x = \frac{14 \cdot 24 - 7 \cdot 12}{14 - 7} = 36,$$

что и составляет окончательный результат.

РОССИЯ

135. Составитель рукописи решает задачу так: за 12 лет первый плотник построит 12 дворов, второй — 6, третий — 4 и четвертый — 3. Следовательно, за 12 лет вместе они построят 25 дворов. Таким образом, четыре плотника вместе один двор построят за $175^1/_5$ дня:

$$\frac{365 \cdot 12}{25} = 175\frac{1}{5} \text{ (дня).}$$

Первые сведения о развитии математики на Руси относятся к IX—XII вв. Сохранившиеся математические документы (рукописи) раннего периода относятся к XV—XVII вв.

Рассмотренная задача взята из старинной русской арифметической рукописи XVII в., состоящей из арифметических правил, подкрепленных многочисленными примерами и задачами. Рукопись состоит из следующих статей: 1) «Статья торговая» содержит большое количество примеров на вычисление цены товара, прибыли от продажи и т. д.; 2) «Статья о нечисти во всяких овощах и товарах» включает задачи на правила смешения; в ней рассматриваются задачи на вычисление цены смеси и на расчеты сплавов золота, серебра и меди; 3) «Статья меновая в торгу» посвящена задачам на определение количества товара известной стоимости, подлежащего обмену на известное количество другого товара, стоимость которого также известна; 4) «Статья складная торговая» заключает в себе задачи на так называемое правило товарищества.

В рукописи приводится много занимательных примеров и задач.

136. За один час лев, волк и пес вместе съели бы $1\frac{5}{6}$ овцы. Действительно, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1\frac{5}{6}$ (овцы). Тогда одна овца ими вместе будет съедена за $\frac{6}{11}$ часа.

Задача взята из математической рукописи XVII в.

Сам составитель решал эту задачу так: за 12 часов лев съедает 12 овец, волк — 6, а пес — 4. Всего же они съедят за 12 часов 22 овцы. Следовательно, в час они съедят $\frac{11}{6}$ овцы, а одну овцу все вместе — в $\frac{6}{11}$ часа.

137. Составитель рукописи приводит ответ: 721 яйцо. Видимо, он не был знаком с понятием наименьшего кратного и дал не наименьшее возможное решение. Наименьшее решение составляет 49 яиц.

Задача взята из математической рукописи XVII в.

138. Эта задача взята из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого, впервые напечатанной в 1703 г. При решении задачи надо иметь в виду, что алтын равен 3 копейкам, а деньга — $^1/_2$ копейки.

Приводим решение самого Л. Ф. Магницкого. «Придет: старых 100, а молодых 12, а изобрети сице.

46 копеек за старого,

$\frac{30}{16}$ за молодого.

$$\begin{array}{r} 112 \\ \times\ 30 \\ \hline 3360 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4960 \\ -\ 3360 \\ \hline 1600 \end{array}$$

Вся цена.

Бери через 16 : 100 только старых».

Леонтий Филиппович Магницкий (1669—1739) был преподавателем Московской школы математических и навигацких наук (мореходной), организованной Петром I в 1701 г. Настоящая фамилия Магницкого Телятин. Магницким он стал называться по приказанию Петра I, который был восхищен его знаниями, притягивавшими к себе всех любознательных подобно магниту. В 1703 г. Магницкий издал «Арифметику» — первый учебник математики на Руси. В учебнике рассматривается индийская система нумерации, известная в литературе под названием арабской, содержится много задач и примеров, причем ряд задач дается в занимательной форме Магницкий, стремясь придать арифметике увлекательный характер, пользуется стихами и символическими рисунками.

Хотя учебник и называется «Арифметикой», его можно рассматривать как энциклопедию по элементарной математике. В этом учебнике, кроме арифметики, разбираются вопросы из алгебры, геодезии и навигации.

Высокую оценку «Арифметике» Магницкого дал в свое время М. В. Ломоносов (1711—1765), который называл ее «вратами учености» и знал почти наизусть.

«Арифметика» Магницкого как учебник была в школьном употреблении почти до середины XVIII в.

139. Эту задачу Магницкий решает «фальшивым правилом», которому в своей «Арифметике» отводит особое место.

Предположим, во-первых, что учеников было 24 (первое предположение). Тогда, согласно условию задачи, сосчитаем, что составляет столько, да полстолько, да четверть столько, да еще один, и получится всего учеников

$$24 + 24 + 12 + 6 + 1 = 67.$$

По условию же задачи учеников должно быть 100, следовательно, их недостает $100 - 67 = 33$ (первая погрешность).

Предположим теперь, во-вторых, что учеников было 32 (второе предположение), тогда в итоге получим

$$32 + 32 + 16 + 8 + 1 = 89,$$

а до 100 недостает 11 (вторая погрешность).

Далее, по формуле получим

$$\frac{33 \cdot 32 - 24 \cdot 11}{33 - 11} = 36 \text{ (учеников)}.$$

146. Скупой купец действительно проторговался. Он за 24 подковных гвоздя должен был заплатить $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{23}$ полушек, что составит 41 787 руб. $3\frac{3}{4}$ коп.!

148. Заметим, что 1 стопа $= \frac{1}{2}$ аршина. В основании шатер имеет 60 аршин, образующая — 16 аршин.

Поскольку шатер конической формы, то его боковая поверхность будет

$$\frac{60 \cdot 16}{2} = 480 \text{ (кв. аршин)}.$$

Теперь узнаем, сколько потребуется аршин сукна:

$$480 : 2\frac{1}{2} = 480 : \frac{5}{2} = \frac{480 \cdot 2}{5} = 192 \text{ (аршина)}.$$

За это сукно уплачено $192 \cdot 2 = 384$ (рубля).

149. Обозначим искомое число через x, тогда по условию задачи

$$x = 2q_1 + 1; \qquad x = 4q_3 + 3;$$
$$x = 3q_2 + 2; \qquad x = 5q_4 + 4,$$

откуда

$$x + 1 = 2q_1 + 2 = 2(q_1 + 1);$$
$$x + 1 = 3q_2 + 3 = 3(q_2 + 1);$$
$$x + 1 = 4q_3 + 4 = 4(q_3 + 1);$$
$$x + 1 = 5q_4 + 5 = 5(q_4 + 1).$$

Из последних четырех соотношений видно, что $x+1$ делится без остатка на 2, на 3, на 4 и на 5. Следовательно, наименьшее значение $x + 1$ равняется наименьшему общему кратному чисел 2, 3, 4, 5, т. е. 60. Отсюда наименьшее искомое число x будет равняться 59.

Задача имеет бесчисленное множество решений.

150. Пусть задуманный день x, тогда угадывающий предлагает выполнить про себя следующие действия:

1) умножить номер задуманного дня на 2:

$$x \cdot 2 = 2x;$$

2) прибавить к произведению 5:

$$2x + 5;$$

3) умножить сумму на 5:

$$(2x + 5)\,5 = 10x + 25;$$

4) умножить произведение на 10 и назвать полученный результат:

$$100x + 250.$$

От этого числа угадывающий отнимает 250 и получает

$$100x.$$

Зная $100x$, уже легко найти само x.

Правило Л. Ф. Магницкого легко проверить на конкретном примере. Пусть задуман шестой день недели — пятница, т. е. $x = 6$:

$$\begin{aligned}
&1)\ 2x = 12;\\
&2)\ 2x + 5 = 17;\\
&3)\ (2x + 5)\,5 = 17 \cdot 5 = 85;\\
&4)\ 100x + 250 = 85 \cdot 10 = 850;\\
&5)\ 100x + 250 - 250 = 850 - 250 = 600;\\
&\qquad 100x = 600;\\
&\qquad x = 6 \text{ (пятница).}
\end{aligned}$$

154. Решение этой задачи очень простое. Человек выпивает в день $\frac{1}{14}$ кади, а вместе с женой — $\frac{1}{10}$ кади. Следовательно, жена выпивает в день $\frac{1}{10} - \frac{1}{14} = \frac{1}{35}$ кади. Таким образом, всю кадь жена выпьет за 35 дней.

155. За год работник должен был получить 12 рублей и кафтан, т. е. за каждый проработанный месяц ему должны начислять 1 рубль и $^1/_{12}$ стоимости кафтана. За проработанные 7 месяцев работник должен был бы получить 7 рублей и $^7/_{12}$ стоимости кафтана, а получил 5 рублей и кафтан. Следовательно, $^5/_{12}$ стоимости кафтана соответствуют 2 рублям. Таким образом, цена кафтана была

$$2 : \frac{5}{12} = \frac{2 \cdot 12}{5} = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5} \text{ (рубля).}$$

156. Эту задачу в качестве предположения Гольдбах высказал в 1742 г. в письме к Эйлеру. Для доказательства Эйлер воспользовался тождеством:

$$4n^4 + 1 = (2n^2 + 2n + 1)(2n^2 - 2n + 1),$$

откуда видно, что при $n = 1$ данное число равняется 5, а при других значениях n оно является составным.

Христиан Гольдбах (1690—1764) — математик, с 1725 г. член Петербургской академии наук, родом из Кенигсберга (ныне г. Калининград). Последние годы жил в Москве (работал в Коллегии иностранных дел), где и умер. Больше тридцати лет вел весьма содержательную и интересную переписку с Эйлером. Свои математические работы, относящиеся к дифференциальным уравнениям и теории рядов, поместил в первых томах «Комментариев Петербургской академии наук».

157. Составим сумму S дробей указанного вида, для чего m и n будем изменять от 1 до ∞. Тогда

$$S=\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\ldots\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\ldots\right)+\ldots;$$

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots=\frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{1\cdot 2};$$

$$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\ldots=\frac{\frac{1}{3^2}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2\cdot 3};$$

$$\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\ldots=\frac{\frac{1}{4^2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3\cdot 4};$$

. . . .

$$S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$$

Обозначив сумму n первых членов ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$$

через S_n, получим:

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)};$$

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right);$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1},$$

откуда

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = 1.$$

158—159. В первой половине XVIII в. академик Гольдбах в письме к своему другу академику Эйлеру высказал следующее предложение, носящее название «проблемы Гольдбаха»: доказать, что всякое нечетное число, большее чем 5, может быть представлено в виде суммы трех простых чисел.

Вот что писал по этому поводу сам Гольдбах: «Вот моя задача тоже. Возьмем наудачу какое-нибудь нечетное число. Ну, 77. Его можно разбить на три слагаемых: $77 = 53 + 17 + 7$, и все эти три слагаемых снова простые числа. Возьмем другое, опять совсем наудачу, 461 и тут $461 = 449 + 7 + 5$, и эти три слагаемых снова простые числа. А можно то же число разбить на три простых слагаемых и другим способом: $257 + 199 + 5$. И так далее. Теперь вполне для меня ясно: всякое нечетное число, большее 5, можно разбить на сумму 3 слагаемых, которые являются простыми числами. Но как доказать это? Любая проба дает такой результат, но ведь никакой человеческой жизни не хватит взять да перебрать подряд все нечетные числа. Нужно какое-то общее доказательство, а не такие пробы».

Эйлер ответил, что это предложение совершенно правильное, но строгого доказательства этому предложению он дать не мог. Со своей стороны Эйлер высказал новое предложение («проблема Эйлера»): каждое четное число, начиная с четырех, можно разбить на сумму двух простых чисел. Но это утверждение он тоже доказать не мог.

Заметим, что если бы удалось решить проблему Эйлера, то из нее, как очевидное следствие, вытекала бы справедливость проблемы Гольдбаха. Действительно, любое нечетное число, большее чем 5, можно представить в виде $2N + 1 = 3 + 2(N - 1)$, где $2(N - 1) \geqslant 4$. Если только проблема Эйлера верна, то четное число $2(N - 1)$ разобьется на сумму двух простых чисел. Но тогда нечетное число $2N + 1$ разобьется на сумму трех простых слагаемых, и проблема Гольдбаха будет выполняться для всякого нечетного числа, начиная с 7.

Но обратное утверждение, оказывается, не выполняется, т. е. из решения проблемы Гольдбаха нельзя сделать заключения о справедливости утверждения Эйлера. Таким образом, проблема Эйлера значительно труднее проблемы Гольдбаха, что позднее и подтвердилось.

Около двух столетий проблема Гольдбаха оставалась нерешенной.

Только в 1930 г. молодому советскому ученому Л. Г. Шнирельману (1905—1938) удалось указать верный путь к решению проблемы Гольдбаха. Он доказал теорему (теорема Шнирельмана): существует постоянная k такая, что каждое натуральное число, больше чем 1, может быть представлено в виде суммы не более k простых чисел, т. е. для любого натурального N ($N > 1$)

$$N = p_1 + p_2 + \dots + p^k,$$

где p — либо простые числа, либо нули.

Если удастся доказать, что $k = 3$, то проблема Гольдбаха будет решена. Усилиями многих математиков постоянная k была доведена до 67, а в настоящее время до 20. До нужной тройки остается еще далеко!

В 1937 г. в ученом мире произошло событие чрезвычайной важности, совершенно неожиданное для всех математиков мира. Наш советский ученый Герой Социалистического Труда академик И. М. Виноградов (род. 1891) доказал проблему Гольдбаха для достаточно больших нечетных чисел: любое нечетное число, начиная с некоторого достаточно большого, есть сумма трех простых чисел. Другими словами, среди натуральных чисел существует такое достаточно большое число, за которым всякое нечетное число является суммой трех простых чисел.

Проблему Гольдбаха в указанном выше смысле И. М. Виноградов доказал очень сложным путем, пользуясь тонким аппаратом современной математики.

Виноградов доказал теорему Гольдбаха для достаточно больших нечетных чисел, т. е. для нечетных чисел, больших некоторого большого числа N_0. Какое значение N_0? На этот вопрос ответил советский математик К. Г. Бороздкин, который доказал, что

$$N_0 \geqslant e_e^{16,038},$$

где e — основание натуральных логарифмов, причем $e = 2,7182...$

Чтобы доказать теорему Гольдбаха полностью, надо значительно снизить найденное К. Г. Бороздкиным число и тогда непосредственно проверить все меньшие числа. Непосредственную проверку проблемы Гольдбаха проводили Г. Кантор, Абри, Хауснер и др. Проверка показала, что для всех натуральных чисел до 9 000 000 проблема Гольдбаха для четных и нечетных чисел верна.

Метод Виноградова, с помощью которого он решил проблему Гольдбаха, оказался недостаточным для решения проблемы Эйлера о представлении четных чисел в виде суммы двух простых чисел.

Проблема Эйлера остается нерешенной до настоящего времени. Не решена до сих пор и проблема Гольдбаха для четных натуральных чисел (сам Гольдбах такую задачу не ставил), хотя из теоремы Виноградова следует, что всякое достаточно большое четное число есть сумма четырех простых чисел (установите самостоятельно).

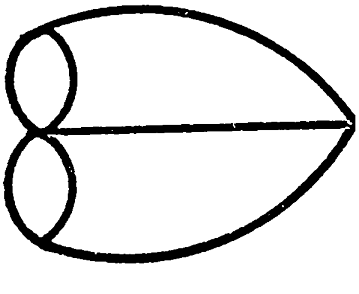


Рис. 46

160. Эту задачу сформулировал в 1750 г.

Л. Эйлер и тогда же решил ее, доказав, что пройти последовательно все семь кенигсбергских мостов по одному разу невозможно. Условия задачи Эйлера о кенигсбергских мостах равносильны требованию одним росчерком вычертить фигуру (рис. 46). Советуем убедиться в этом самим.

Л. Эйлер (1707—1783) — крупнейший математик, друг М. В. Ломоносова.

Родился Эйлер в небольшом швейцарском городке Базеле. Первоначальное образование получил у своего отца. Свои познания в области математики совершенствовал под руководством крупнейшего швейцарского математика Иоганна Бернулли.

В 19 лет Эйлер написал диссертацию об оснастке кораблей, за что был премирован Парижской академией наук. В 20 лет он был адъюнктом Петербургской академии наук, а в 23 года — профессором кафедры физики. Когда ему исполнилось 26 лет, он стал членом Петербургской академии наук.

Эйлер отличался исключительной работоспособностью. Всего Эйлером написано 865 оригинальных работ, что составляет несколько десятков томов. Научные интересы Эйлера весьма разнообразны. Он сделал замечательные открытия буквально по всем разделам элементарной и высшей математики, в области механики и астрономии. Эйлер — автор замечательного руководства по алгебре «Полное введение в алгебру» (1770), которое явилось образцом для составления современных учебников по этому предмету.

Эйлер прожил в России в общей сложности более 30 лет. Умер он в Петербурге 7 сентября 1783 г.

161. Наиболее остроумный способ решения этой задачи таков. Предположим, что вторая крестьянка имела в m раз больше яиц, чем первая. Поскольку обе крестьянки выручили одинаковые суммы, то первая крестьянка должна продавать яйца в m раз дороже, чем вторая. Если бы перед началом торговли они поменялись своим количеством яиц, то первая крестьянка, имея яиц в m раз больше и продавая их в m раз дороже, выручила бы в m^2 раз больше, чем вторая. Отсюда

$$m^2 = 15 : 6\frac{2}{3} = \frac{45}{20} = \frac{9}{4}.$$

Следовательно,

$$m = \frac{3}{2}.$$

Разделив 100 яиц в отношении 3 : 2, находим, что первая крестьянка имела 40, а вторая — 60 яиц.

Эту задачу можно решить и алгебраическим путем, для чего стоит только обозначить через x число яиц у первой крестьянки. Тогда у второй крестьянки число яиц будет $100 - x$, откуда первая крестьянка продала яйца по цене

$$\frac{15}{100 - x} \text{ (крейцеров)},$$

а вторая — по цене $6\frac{2}{3} : x = \frac{20}{3x}$ (крейцеров). Так как выручка одинакова, то

$$\frac{15x}{100 - x} = \frac{20(100 - x)}{3x}$$

или

$$x^2 + 160x - 8000 = 0.$$

Отсюда $x_1 = 40$, $x_2 = -200$. Следовательно, у первой крестьянки было 40 яиц, у второй — 60.

163. Пусть ABC — произвольно взятый треугольник (рис. 47). Построим треугольник PKR, составленный из

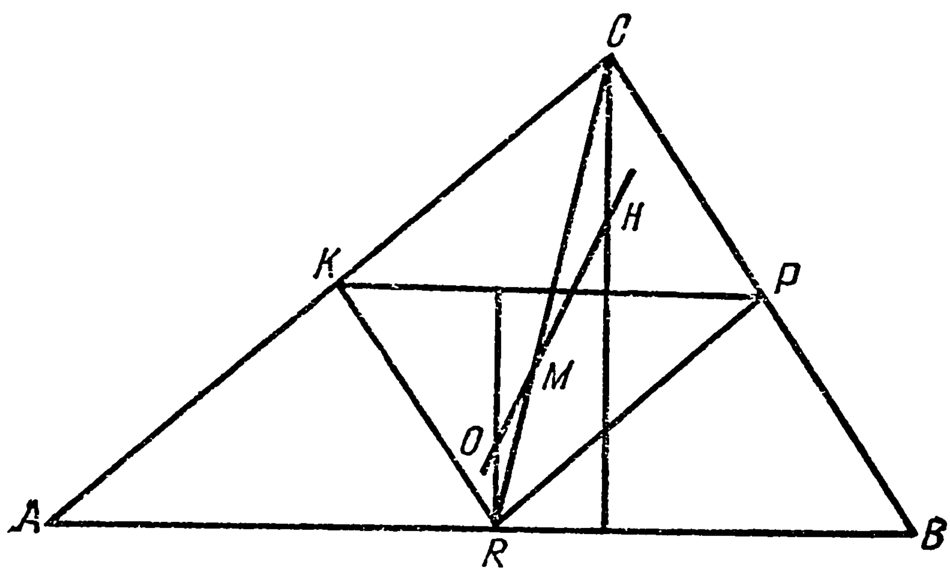


Рис. 47

средних линий треугольника ABC. Тогда $\triangle PKR \sim \triangle ABC$ и коэффициент подобия $k = {}^1/_2$. Исходя из этого, замечаем, что M — точка пересечения медиан треугольника ABC является также точкой пересечения медиан и треугольника PKR, так как медианы последнего треугольника являются частями медиан первого (исходного) треугольника. Далее заметим, что центр описанной около треугольника ABC окружности (точка O) является ортоцентром треугольника PKR.

Пусть H — ортоцентр $\triangle ABC$. Соединим точку M с точками O и H: $\triangle ROM \sim \triangle CHM$ и коэффициент подобия $k = {}^1/_2$ (так как рассматриваемые треугольники составлены из соответственных линий подобных треугольников PKR и ABC, имеющих коэффициент подобия $k = {}^1/_2$). Отсюда $\angle RMO = \angle CMH$. Учитывая это равенство и то, что CMR — прямая, делаем вывод, что углы RMO и CMH можно рассматривать как вертикальные и, следовательно, OMH — прямая линия, что и требовалось доказать.

Впервые задача была решена Эйлером в 1765 г. и послужила началом так называемой «геометрии треугольника».

164. $2x^3 + 14\frac{1}{4} = 100;\ x^3 = \frac{343}{8};\ x = \frac{7}{2}.$

169. Указание. Полторажды полтретья$=1{,}5 \cdot 2{,}5$; полчетвертажды полпята$=3{,}5 \cdot 4{,}5$; полсемажды полдевята$=6{,}5 \cdot 8{,}5$.

172. Алтын = 3 коп.; полушка = ${}^1/_4$ коп.; вполтретья означает в 2,5 раза. Грош — монета разных стран и времен. На Руси в XVII—XVIII вв. были медные гроши достоинством в 2 коп. С XIX в. грошом называли полкопейки.

174. «Вполчетверте дороже» означает дороже в 3,5 раза. «С половиною четыре алтына» значит 4 алтына и еще прибавить пол-алтына, т. е.

$$4 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 3 = 13{,}5 \text{ коп.}$$

177. Секрет не требует комментариев, он виден из формулы

$$[(x + 25 + 125 - 37 - x)\,5] : 2 = 282\frac{1}{2}.$$

«По крепости пошел разговор [писал современник Лермонтова]. Где бы поэт ни показался, к нему стали обращаться с просьбами угадать вычисленное число. Несколько раз он исполнял эти просьбы, но, наконец, ему надоело, и он через несколько дней, тоже на одном из вечеров, открыл секрет, заключавшийся в том, что задумавшего число, какое бы оно ни было, заставляют вычесть это число из суммы этого же числа и некоторых других подсказанных чисел, так что диктующему легко подсчитать результат, например:

$$[(x+100+206+310-500-x) : 2]3=174».$$

Задача-шутка М. Ю. Лермонтова взята из книги И. Я. Депмана «Рассказы о математике» (Л., 1954, с. 69—71).

178. Решение В. Г. Бенедиктова. «Задача была мудреная. Дочери, идучи на рынок, стали между собой совещаться, причем вторая и третья обращались к уму и совету старшей. Та, обдумав дело, сказала:

— Будем, сестры, продавать наши яйца не десятками, как это делалось у нас до сих пор, а семерками: семь яиц — семерик; на каждый семерик и цену положим одну, которой все и будем крепко держаться, как мать сказала. Чур, не спускать с положенной цены ни копейки. За первый семерик алтын [трехкопеечная монета], согласны?

— Дешевенько,— сказала вторая.

— Ну,— возразила старшая,— зато мы поднимем цену на те яйца, которые за продажею круглых семериков в корзинах у нас останутся. Я заранее проверила, что яичных торговок, кроме нас, на рынке никого не будет. Сбивать цену некому; на оставшееся добро, когда есть спрос, а товар на исходе, известное дело, цена возвышается. Вот мы на остальных-то яйцах и наверстаем.

— А почем будем продавать остальные?— спросила младшая.

— По 3 алтына за каждое яичко. Давай, да и только. Те, кому очень нужно, дадут.

— Дорогонько,— заметила опять средняя.

— Что же, — подхватила старшая, — зато первые-то яйца по се́меркам пойдут дешево. Одно на другое и наведет.

Согласились.

Пришли на рынок. Каждая из сестер села на своем месте отдельно и продает. Обрадовавшись дешевизне, покупщики и покупщицы бросились к младшей, у которой было полсотни яиц, и все их расхватали. Семерым она продала по семерику и выручила 7 алтын, а одно яйцо осталось у ней в корзине. Вторая, имевшая три десятка, продала 4 покупательницам по семерику и в корзине у ней осталось два яйца: выручила она 4 алтына. У старшей купили семерик, за который она получила один алтын, 3 яйца осталось.

Вдруг явилась кухарка, посланная барыней на рынок с тем, чтобы купить непременно десяток яиц во что бы то ни стало. На короткое время к барыне в гости приехали сыновья ее, которые страшно любят яичницу. Кухарка туда-сюда по рынку мечется: яйца распроданы; всего у трех торговок, пришедших на рынок, осталось только 6 яиц: у одной — одно яйцо, у другой — 2, у третьей — 3. Давай и те сюда!

Разумеется, кухарка прежде всего кинулась к той, у которой осталось 3, а это была старшая дочь, продавшая за алтын свой единственный семерик. Кухарка спрашивает:

— Что хочешь за свои 3 яйца?

А та в ответ:

— По 3 алтына за яичко.

— Что ты? С ума сошла!— говорит кухарка.

А та:

— Как угодно,— говорит,— дешевле не отдам. Это последние.

Кухарка бросилась к той торговке, у которой 2 яйца в корзинке.

— Почем?

— По 3 алтына. Такая цена установлена. Все вышли.

— А твое яичишко сколько стоит? — спрашивает кухарка у младшей.

Та отвечает:

— 3 алтына.

Нечего делать. Пришлось купить по неслыханной цене.

— Давайте сюда все остальные яйца.

И кухарка дала старшей за ее 3 яйца 9 алтын, что составляло с имевшимся у нее алтыном 10; второй заплатила за ее пару яиц 6 алтын, с вырученными за 4 семерика 4 алтынами это составило также 10 алтын. Младшая получила от кухарки за свое остальное яичко 3 алтына и, приложив их к 7 алтынам, вырученным за проданные прежде 7 семериков, увидела у себя в выручке тоже 10 алтын.

После этого дочери возвратились домой и, отдав своей матери каждая по 10 алтын, рассказали, как они продавали и как, соблюдая относительно цены общие условия, достигли того, что выручки как за один десяток, так и за полсотни, оказались одинаковыми.

Мать была очень довольна точным выполнением данного ею дочерям поручения и находчивостью старшей дочери, по совету которой оно выполнялось; а еще больше осталась довольна тем, что и общая выручка дочерей — 30 алтын, или 90 копеек,— соответствовала ее желанию».

В. Г. Бенедиктов (1807—1873) — русский поэт. Его стихотворения, посвященные пейзажной и любовной лирике, имели в 30-х годах XIX в. кратковременный успех, а потом были забыты. Видимо, этому способствовал их вычурный и ложный пафос. В советское время стихотворения поэта переиздавались два раза (1937; 1939).

Бенедиктов был большим любителем математики. После смерти он оставил даже рукописное руководство по занимательной арифметике (1869), откуда и взята рассмотренная задача. Впервые задача Бенедиктова была опубликована Я. И. Перельманом.

180. Сам Л. Н. Толстой, по свидетельству проф. А. В. Цингера, решал задачу при помощи следующих рассуждений: «Если большой луг полдня косила вся артель и полдня пол-артели, то ясно, что в полдня пол-артели скашивает $\frac{1}{3}$ луга. Следовательно, на малом лугу остался нескошенным участок в $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$. Если один косец в день скашивает $\frac{1}{6}$ луга, а скошено было $\frac{6}{6}+$ $+\frac{2}{6}=\frac{8}{6}$, то косцов было 8».

«Толстой,— вспоминал А. В. Цингер, — всю жизнь любивший фокусные, не слишком хитрые задачи, эту задачу знал от моего отца еще с молодых лет. Когда об этой задаче пришлось беседовать мне с Толстым — уже стариком, его собственно восхитило то, что задача делается гораздо яснее и прозрачнее, если при решении пользоваться самым примитивным чертежом (рис. 48)».

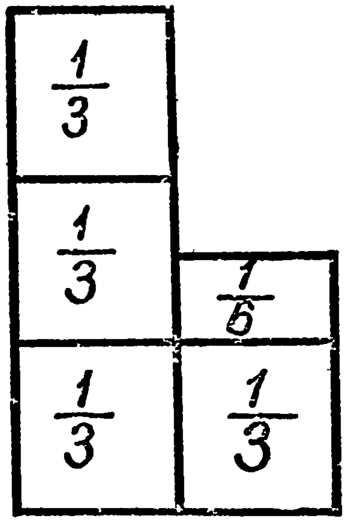


Рис. 48

Приводим алгебраическое решение задачи. Пусть x — число косцов артели, y — размер участка, скашиваемого одним косцом за 1 день. Заметим, что y — вспомогательное переменное — вводится исключительно для облегчения решения задачи, от него потом освобождаются. Далее, выразим через x и y площади большого и малого луга. Площадь большого луга равняется $\frac{xy}{2}+\frac{xy}{4}=\frac{3xy}{4}$, площадь малого луга $\frac{xy}{4}+y=\frac{xy+4y}{4}$. Большой луг по условию больше малого в два раза, поэтому

$$\frac{3xy}{4}:\frac{xy+4y}{4}=2$$

или

$$\frac{3xy}{xy+4y}=2.$$

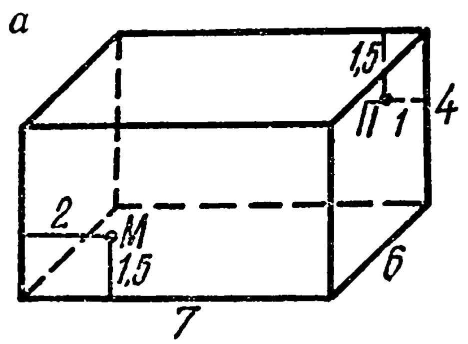
После сокращения на y получим

$$\frac{3x}{x+4} = 2,$$

откуда $x = 8$.

181. Об этой задаче упоминается в дневнике секретаря Л. Н. Толстого В. Булгакова «Л. Н. Толстой в последний год жизни» (М., 1957, с. 402): «Очень увлекается сегодня привезенной Татьяной Львовной из Кочетов задачей «О мухе и пауке», всем ее задает и спрашивает решение... Надо сказать, что задача эта решается не сразу и не просто».

Пусть длина комнаты 7 аршин, ширина — 6, высота —4. Предположим, что муха сидит на большой стене на расстоянии двух аршин от угла, а паук — на противоположной стене — на расстоянии одного аршина от ближайшего к нему угла (рис. 49, *а*). Эту задачу лучше всего решать графически. Сделаем развертку комнаты (рис. 49, *б*) и соединим



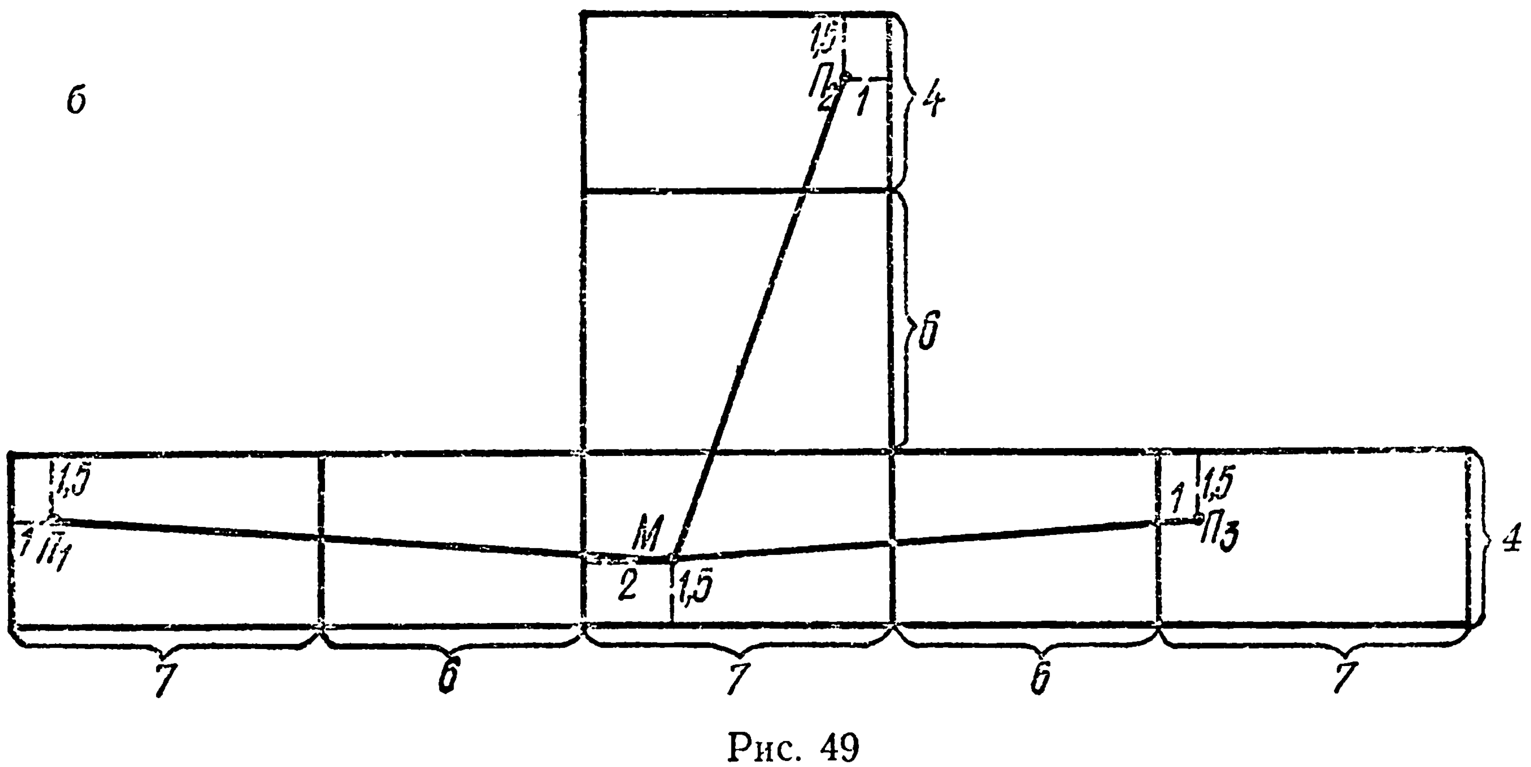


Рис. 49

отрезками прямой точку, где сидит паук, с точкой, где сидит муха. Ясно, что решений будет три по числу различных разверток. Действительно, паук может ползти или только по стенам, или только по стенам и потолку, или по стенам и полу. Поскольку расстояния от мухи до пола и от паука до потолка одинаковы, то пути через пол и потолок равноценны. Следовательно, для этих двух путей и берется общая развертка (рис. 49, *б*).

Пользуясь разверткой и применяя теорему Пифагора, получаем:

$$MП_1 = \sqrt{197} \approx 14{,}04;$$
$$MП_2 = \sqrt{116} \approx 10{,}77;$$
$$MП_3 = \sqrt{145} \approx 12{,}04.$$

Следовательно, из трех возможных решений наименьшее будет 10,77 аршина, что и является ответом задачи.

182. Решение Л. Н. Толстого. «Три старшие дали двум меньшим три раза по восьмисот: $3 \cdot 800 = 2400$. Меньшие разделили 2400 на 2 части: $2400 : 2 = 1200$, и у всех стало поровну, по 1200. Стало быть, дома стоили по 2000 рублей. А всего наследства было на 6000 в домах».

183. Указание Л. Н. Толстого. «До тих пор, пока барин выехал из Тулы, сколько мужик ушел? Когда барин выехал и мужик шел, сколько барин в час наверстывал на мужике? На сколько он приближался к мужику в каждый час? В сколько ж часов барин нагонит мужика? Когда узнаешь, в сколько часов нагонит, тогда сочти, сколько часов ехал барин по 11 верст в час». (Верста$\approx$1,0668 км.)

184. Решение Л. Н. Толстого. «Выдал мужик за землю $70 \cdot 8 = 560{,}00$. Семян посеял мужик по 9 пудов на десятину, на 70 десятин $70 \cdot 9 = 630$ пудов. Покупал за пуд по 1 р. 30 к. За 630 пудов по 1 р. 30 к.

$$\frac{630 \cdot 1{,}30 = 819{,}00}{\text{Итого } 1379{,}00}.$$

Получил мужик 13 коп. на десятине; на 70 десятинах $70 \cdot 13 = 910$. Из копны вышло по 6 пудов; из 910 копен $910 \cdot 6 = 5460$ пудов. Продал 5460 пудов по 1 р. 40 к. за пуд. Получил всех денег $5460 \cdot 1{,}40 = 7644{,}00$.

За молотьбу мужик заплатил по 7 коп. за пуд, за 5460 пудов $5460 \cdot 7 = 38\,220 = 382{,}20$.

За провоз в город по 11 коп. за пуд, за 5460 пудов

$5460 \cdot 11 = 600{,}60$

Итого еще расхода 982,80

Прежнего расхода 1379,00

2361,80

Всего прихода 7644,00

Всего расхода 2361,80

Барыша 5282,20».

(Десятина $= 1{,}0925$ *га*, пуд $\approx 16{,}38$ *кг*.)

185. Расчет Л. Н. Толстого. «Клеток в шашечнице : 8 с одной стороны и 8 с другой; 8 рядов по $8 = 64$:

на	1-ю	1	на	33	4 294 967 296
»	2	2	»	34	8 589 934 592
»	3	4	»	35	17 179 869 184
»	4	8	»	36	34 359 738 368
»	5	16	»	37	68 719 476 736
»	6	32	»	38	137 438 953 472
»	7	64	»	39	274 877 906 944
»	8	128	»	40	549 755 813 888
»	9	256	»	41	1 099 511 627 776
»	10	512	»	42	2 199 023 255 552
»	11	1024	»	43	4 398 046 511 104
»	12	2048	»	44	8 796 093 022 208
»	13	4096	»	45	17 592 186 044 416

»	14				8192	»	46			35	184	372	088	832
»	15			16	384	»	47			70	368	744	177	664
»	16			32	768	»	48			140	737	488	355	328
»	17			65	536	»	49			281	474	976	710	656
»	18			131	072	»	50			562	949	953	421	312
»	19			262	144	»	51		1	125	899	906	842	624
»	20			524	288	»	52		2	251	799	813	685	248
»	21		1	048	576	»	53		4	503	599	627	370	496
»	22		2	097	152	»	54		9	007	199	254	740	992
»	23		4	194	304	»	55		18	014	398	509	481	984
»	24		8	388	608	»	56		36	028	797	018	963	968
»	25		16	777	216	»	57		72	057	594	037	927	936
»	26		33	554	432	»	58		144	115	188	075	855	872
»	27		67	108	864	»	59		288	230	376	151	711	744
»	28		134	217	728	»	60		576	460	752	303	423	488
»	29		268	435	456	»	61	1	152	921	504	606	846	976
»	30		536	870	912	»	62	2	305	843	009	213	693	952
»	31	1	073	741	824	»	63	4	611	686	018	427	387	904
»	32	2	147	483	648	»	64	9	223	372	036	854	775	808

Если 40 000 зерен в одном пуде, то на одной последней клетке вышло 230 584 300 921 369 пудов».

186. Решение Л. Н. Толстого. «Что будет через минуту после того, как открыть обе трубы? Сколько будет воды в бочке?

Из одной трубы (той, которая в 15 минут наполняет бочку) будет в минуту $\frac{1}{15}$ бочки, а из другой трубы (той, которая наполнит в 24 минуты бочку) будет в минуту $\frac{1}{24}$ бочки. Вытекает же из бочки в минуту $\frac{1}{120}$ бочки. Стало быть, в минуту будет

$$\frac{1}{15}+\frac{1}{24}=\frac{8+5}{120}=\frac{13}{120};$$

$$\frac{13}{120}-\frac{1}{120}=\frac{12}{120}=\frac{1}{10}.$$

В минуту в бочке будет $\frac{1}{10}$. Во сколько времени будет полна вся бочка?

$$1 : \frac{1}{10} = 10.$$

Бочка будет полна в 10 минут».

187. Это одна из двенадцати задач, предложенных одиннадцатилетнему Ивану Петрову, не умевшему ни читать, ни писать, но любившему производить в уме всякого рода арифметические подсчеты. Иван Петров — сын крестьянина, родом из дер. Рогозино Кологривского уезда Костромской губернии. Испытание математической одаренности мальчика проводилось в Костромской гимназии в мае 1834 г. На все задачи Петров дал правильные ответы, затратив на решение не больше одного часа.

Мальчику были предложены следующие задачи.

1) Сложить 143, 27, 38, 29.

2) Сложить 427, 28, 7, 20, 652.

3) Через 15 лет мне будет столько же лет, сколько теперь брату моему. Который же ему год, если мне 14 лет?

4) Купец, продав некоторый товар за 4548 руб., имел от продажи убытка 452 руб. Сколько же стоит товар?

5) Из 1600 вычесть 1248.

6) Из 40 004 вычесть 30 055.

7) Найти число, к которому надлежит прибавить 3456, чтобы получить 10 000.

8) Сколько раз из 12 425 получится по 25?

9) Издержано 5 мешков с 875 пятачками в каждом на покупку холста по 35 коп. за аршин. Сколько куплено аршин холста?

10) Между двумя селениями поставлено по дороге 1658 деревьев на равных расстояниях. Как велико расстояние между селениями, если одно дерево от другого отстоит на 8 аршин?

11) В известный промежуток времени 12 человек истратили на свое содержание 136 руб. Сколько издержат в то же время 69 человек?

12) Задача, которую приводим в настоящем сборнике. Эту задачу Иван Петров решил всеми шестью способами (какими? постарайтесь эти способы установить самостоятельно).

Но этим история с юным вычислителем не заканчивается. В августе 1834 г. Иван Петров вновь подвергся испытаниям и вновь на все вопросы дал блестящие ответы. В частности, ему было дано задание: подсчитать, сколько в году секунд. Результаты превзошли все ожидания. Свой ответ мальчик получил в течение 3 минут. Он сообщил, что в году содержится 33 650 000 секунд. Но ему сказали, что ответ не верен. Тогда он попросил позволения считать по порядку и без остановки продиктовал правильные результаты, что год составляет 8760 часов, или 525 600 минут, или 31 536 000 секунд, если считать, что в году 365 суток и в сутках 24 часа, в часе 60 минут и в минуте 60 секунд.

Ответ: 1) $3 \cdot 26$; 2) $3 \cdot 21 + 5 \cdot 3$; 3) $3 \cdot 16 + 5 \cdot 6$; 4) $3 \cdot 11 + 5 \cdot 9$; 5) $3 \cdot 6 + 5 \cdot 12$; 6) $3 \cdot 1 + 5 \cdot 15$.

188. Приведенное выражение, составляющее «задачу Рачинского», запечатлено на классной доске в картине художника Н. П. Богданова-Бельского «Устный счет» На картине также изображен Рачинский с группой учеников, решающих приведенный устный пример.

Устное решение примера основано на свойстве:

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2.$$

Так как

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 100 + 121 + 144 = 365,$$

то

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365} = \frac{2 \cdot 365}{365} = 2.$$

Интересно заметить, что С. А. Рачинский (1836—1902) работал одно время в университете в качестве профессора естественных наук. Затем он покинул университетскую кафедру и сделался рядовым учителем сельской школы, где уделял большое внимание решению нестандартных задач и устному счету.

189. Эту задачу С. А. Рачинский предложил ученикам сельской школы в с. Татеве Бельского уезда Смоленской губернии. В своих «Заметках о сельских школах» (1881) Рачинский писал: «На мой вопрос, сколько будет $84 \cdot 84$, один мальчик мгновенно ответил: 7056.

— Как ты считал?— спросил я его.

— Да ведь это квадратная сажень (т. е. мальчик хотел сказать, что это есть число квадратных дюймов в одной квадратной сажени); я взял $50 \cdot 144$ и выкинул 144.

Действительно, $50 \cdot 144 - 144 = 7200 - 144 = 7056$.

Мальчик моментально сообразил, что $84 \cdot 84 = 7 \cdot 12 \times 7 \cdot 12 = 7 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 12 = 49 \cdot 144 = 50 \cdot 144 - 144$. Лучшего упрощения нельзя и придумать».

190. Пусть к концу первого месяца купец должен внести x руб. Тогда

$$\left(1 + 1\frac{1}{2} + 2 + 2\frac{1}{2} + 3 + 3\frac{1}{2} + 4 + 4\frac{1}{2}\right)x =$$

$$= 753 + 303;\ 22x = 1056;\ x = \frac{1056}{22} = 48 \text{ (рублей)}.$$

Остальные суммы подсчитайте самостоятельно.

А. Н. Страннолюбский (1839—1903) — известный русский математик-методист, автор оригинального «Курса алгебры, основанного на постепенном обобщении арифметических задач» (1868), преподаватель Морской академии и один из организаторов Бестужевских высших женских курсов в Петербурге. В своем «Курсе алгебры» указывал на необходимость в педагогических целях постепенного перехода от арифметики к алгебре и на целесообразность деления курса алгебры на пропедевтический и систематический. Одно время был домашним учителем Софьи Ковалевской.

191. Пусть x — число недель, в течение которых продолжалась работа, тогда

$$(15 - 10)x = 4\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} + 7;$$

$$x = \frac{4\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} + 7}{15 - 10} = \frac{15}{5} = 3 \text{ (недели)}.$$

192. Обозначим оставленный отцом капитал через x, тогда

$$\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{5}\right)x = 2500 + 3000;$$

$$x = \frac{2500 + 3000}{1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{5}} = \frac{5500}{\frac{4}{15}} = \frac{5500 \cdot 15}{4} = 20\,625 \text{ (руб.)}$$

193. Обозначим лета второго сына через x, тогда

$$x + 3x = 45 - 29;$$
$$(1 + 3)\,x = 45 - 29;$$
$$x = \frac{45 - 29}{1 + 3} = 4.$$

194. А. Н. Страннолюбский рекомендует задачу решать так:

$$\frac{150}{5}x + (50 - x)\frac{140}{7} = 50\,(30 - 3),$$

откуда x, означающее число ведер вина первого сорта, получится из решения

$$x = \frac{50\,(30 - 3) - \dfrac{50 \cdot 140}{7}}{\dfrac{150}{5} - \dfrac{140}{7}}.$$

195. Обозначив искомое число фунтов серебра через x, получим уравнение

$$\frac{288}{3}x + \frac{328}{4}(20 - x) = 20\,(93 - 3),$$

откуда

$$x = \frac{20\,(93 - 3) - \dfrac{328 \cdot 20}{4}}{\dfrac{288}{3} - \dfrac{328}{4}}.$$

196. Условия задачи приводят к системе

$$5x + 3y = 540;$$
$$x + y = 138,$$

откуда

$$x = 63 \text{ (аршин синего сукна)};$$
$$y = 75 \text{ (аршин черного сукна)}.$$

Решите эту задачу арифметическим путем, не прибегая к уравнениям.

ЗАПАДНАЯ ЕВРОПА

198. Условия задачи приводят к системе

$$x+7=5(y-7);$$
$$y+5=7(x-5).$$

Решая эту систему, получаем

$$x=7\frac{2}{17};\quad y=9\frac{14}{17}.$$

Следовательно, первый имел $7\frac{2}{17}$ динария, а второй — $9\frac{14}{17}$ динария.

Задача взята из «Liber abaci» — сочинения итальянского математика Леонардо Пизанского Фибоначчи, который родился около 1170 г. в г. Пизе (откуда и название Пизанский). Математическое образование получил в Алжире. Путешествуя по Востоку, ознакомился с арабской математикой, достижения которой отразил в своих трудах и тем самым сделал их достоянием Запада. «Liber abaci» — основное сочинение ученого.

В предисловии к своему сочинению он писал: «Отец мой родом из Пизы, служил синдиком в таможне в Бужи, в Африке, куда он меня взял с собою для изучения искусства считать. Удивительное искусство считать при помощи только девяти индусских знаков мне так понравилось, что я непременно хотел познакомиться с тем, что известно об этом искусстве в Египте, Греции, Сирии, Сицилии и Провансе. Объехав все эти страны, я убедился, что индусская система счисления самая совершенная и превосходит алгоритм и метод Пифагора. Изучив основательно эту систему и все к ней относящееся, прибавив свои собственные исследования и почерпнутое из «Начал» Евклида, я решил написать это сочинение».

«Liber abaci» представляет собой трактат по арифметике и алгебре, в котором дан свод арифметических и алгебраических знаний того времени, и состоит из 15 глав.

Решая задачу о капиталах нескольких лиц, предложенную придворным философом, Леонардо Пизанский впервые в Европе высказал идею отрицательного числа в виде долга.

Величайшая заслуга Леонардо Пизанского перед наукой заключается в том, что он первый познакомил европейских ученых с алгеброй и индийской системой счисления.

199. Пусть x — число воробьев; y — число горлиц; z — число голубей. Тогда получим систему

$$x + y + z = 30;$$
$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + 2z = 30.$$

Исключая z, находим

$$10x + 9y = 180$$

или

$$y = 20 - \frac{10}{9}x.$$

Полагая $x = 9$, получаем $y = 10$ и $z = 11$.

200. Эту задачу Региомонтан решал двумя способами.

Первый способ. Уравнение преобразуется к виду

$$10x = x^2 + \frac{100}{27},$$

откуда

$$x = 5 - \sqrt{21\frac{8}{27}}.$$

Второй способ. Положив $\frac{x}{10 - x} = y$, получим

$$y + \frac{1}{y} = 25,$$

откуда

$$y = \frac{25}{2} - \sqrt{\frac{621}{4}}.$$

Теперь без особого труда находится искомый корень x. Необходимо заметить, что в обоих случаях Региомонтан берет корни со знаком минус.

Региомонтан (1436—1476) — известный немецкий ученый (настоящие имя и фамилия его Иоганн Мюллер).

Региомонтан знаменит своими работами по тригонометрии и переводами классических трактатов древнегреческих ученых. Особенно большой известностью пользовался его трактат «О треугольниках всех видов», опубликованный после его смерти в 1533 г. В этом трактате Региомонтан впервые в Европе рассматривал тригонометрию как самостоятельную науку, обособленную от астрономии.

201. Пусть ABC — данный треугольник (рис. 50). Проведем через его вершины прямые, параллельные противоположным сторонам, получим треугольник MKP, у которого точки A, B, C будут серединами соответствующих сторон. Высоты данного треугольника будут перпендикулярны к сторонам полученного треугольника и восставлены в их серединах. А такие перпендикуляры пересекаются в одной точке (проверить, почему). Следовательно, высоты данного треугольника пересекаются в одной точке, что и требовалось доказать.

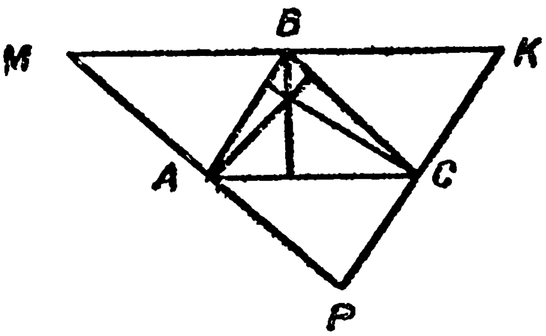


Рис. 50

202. Постарайтесь эту задачу решить самостоятельно.

Задача взята из трактата «О преобразовании» Леонардо да Винчи (1452—1519). В трактате рассмотрены вопросы преобразования одного тела в другое без убавления или возрастания материала.

По убеждению ученого, нет должной достоверности там, «где нельзя приложить ни одной из математических наук». Он был глубоко уверен, что любой спор должна решать математика, ибо только она способна «налагать молчание на языки спорщиков».

203. Пусть x — количество денег у первого, y — у второго, z — у третьего. Тогда вопросы сводятся к решению системы

$$x+\frac{1}{2}(y+z)=12;$$

$$y + \frac{1}{3}(x + z) = 12;$$

$$z + \frac{1}{4}(x + y) = 12,$$

откуда

$$x = 3\frac{9}{17}; \quad y = 7\frac{13}{17}; \quad z = 9\frac{3}{17}.$$

Адам Ризе (1492—1559) — немецкий математик, автор известного алгебраического трактата «Die Coss» (1524).

204. Из точки A данным радиусом на прямой AB делаем засечку D (рис. 51). Далее, из точки B тем же радиусом на той же прямой AB делаем другую засечку C. Затем на отрезке CB строим равносторонний треугольник CKB, а на отрезке AD — равносторонний треугольник ADH. Точка пересечения сторон BK и AH — точка M — дает третью вершину искомого треугольника AMB.

Эту задачу впервые предложил видный итальянский математик Никколо Тарталья (ок. 1499—1557). Математику Тарталья изучил самостоятельно. Также самоучкой он овладел в совершенстве греческим и латинским языками. В области математики он открыл способ решения кубического уравнения вида

$$x^3 + px = q,$$

где p и q — положительные числа.

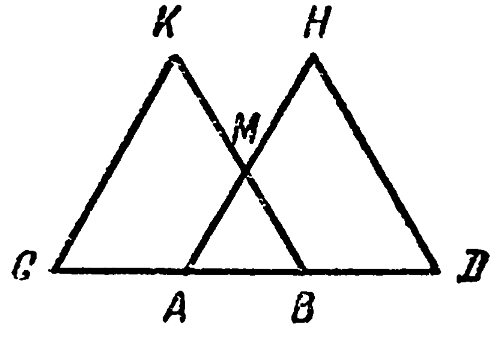


Рис. 51

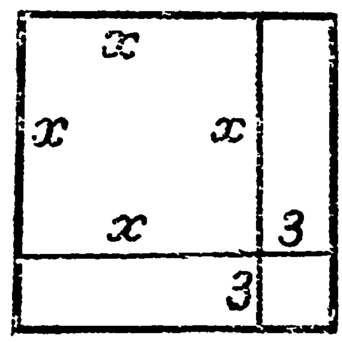


Рис. 52

205. Кардано решал эту задачу геометрическим способом. Даем решение в современной символике. Пользуясь чертежом (рис. 52), находим

$$x^2 + 2 \cdot 3x + 9 = x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2.$$

Согласно условию,

$$x^2 + 6x = 91.$$

Из этих двух уравнений вытекает

$$(x + 3)^2 = 91 + 9 = 100,$$

откуда $x + 3 = 10$, следовательно, $x = 7$.

(Рекомендуется решать эту задачу обычным приемом по формуле квадратного уравнения.)

Знаменитый итальянский математик Джероламо Кардано (1501—1576) — составитель научного трактата «Великое искусство, или об алгебраических правилах», изданного в 1545 г. В трактате впервые было опубликовано решение кубического уравнения, хотя саму формулу ученый заимствовал у Тартальи. В этом же сочинении Кардано излагает решение уравнений четвертой степени, которое впервые дал его ученик Л. Феррари (1522—1565).

Кроме математики, Кардано много занимался медициной, которую он даже преподавал, и философией. В своих философских произведениях Кардано призывал к знанию, основанному на опыте.

206. Если пользоваться современными обозначениями, задача сводится к уравнению

$$x^2 - 10x + 40 = 0,$$

откуда

$$x_1 = 5 + \sqrt{-15}; \quad x_2 = 5 - \sqrt{-15}.$$

Во времена Кардано задача о нахождении двух чисел, сумма которых равна 10, а произведение 40, не имела решений, так как тогда еще не было установлено понятие о мнимых числах и операциях над ними. Сам же Кардано, встретившийся в этой и других задачах с комплексными числами, не мог дать им надлежащего истолкования и считал их «несуществующими числами»; он был крайне удивлен, что сложение и умножение этих «несуществующих чисел» по обычным правилам приводит к результатам, удовлетворяющим условию задачи.

Одна из заслуг Кардано заключается в том, что он обратил внимание на комплексные числа и впервые ввел некоторые операции над ними. Однако строгое обоснование арифметика комплексных чисел получила впервые в 1799 г. в работе датского математика Весселя (1745—1818), опубликованной в трудах Датской академии наук. Современный вид эта теория приобрела в XIX в. и главным образом в результате исследований немецкого математика Гаусса. Усилиями математиков XIX в. на базе строгой теории комплексных чисел создана теория функций комплексного переменного, находящая широкое применение в современной науке и технике.

207. Решение имеется у А. П. Киселева в его учебнике геометрии (первая часть). Впервые полное решение этой задачи дал известный итальянский математик Джероламо Кардано.

208. Решение Виета заключалось в следующем. При помощи подстановки $x = y + z$ данное уравнение примет вид

$$y^2 + y\,(2z + \mathrm{p}) + z^2 + pz + q = 0.$$

Пользуясь произвольностью z, положим, что коэффициент при y первой степени равен нулю, т. е. $2z + p = 0$, откуда

$$z = -\frac{p}{2}.$$

Тогда

$$z^2 + pz + q = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2} + q = q - \frac{p^2}{4}.$$

Учитывая полученное, преобразуем уравнение

$$y^2 + q - \frac{p^2}{4} = 0$$

или

$$y^2 = \frac{p^2}{4} - q,$$

откуда

$$y = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Следовательно,

$$x = y + z = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Франсуа Виет (1540—1603) — французский математик, по профессии адвокат, видный государственный деятель. Виет проявил себя как талантливый специалист по расшифровке сложных шифров, которыми пользовалась инквизиторская Испания в войне против Франции. Благодаря своему сложному шифру Испания могла свободно сноситься с противниками французского короля даже внутри Франции, и эта переписка все время оставалась неразгаданной.

После бесплодных попыток найти ключ к этому шифру король Генрих IV обратился, наконец, к Виету с просьбой разгадать тайну. Виет после напряженной работы раскрыл тайну испанского шифра. За свой патриотический поступок он чуть было не поплатился жизнью. Испанская инквизиция объявила Виета богоотступником и заочно приговорила ученого к сожжению на костре, однако выполнить свой варварский план не смогла.

Велика заслуга Виета в развитии буквенной алгебры. Недаром его называют отцом этой науки. Он обозначал буквами не только искомые величины (это делали и до него), но и коэффициенты алгебраических уравнений и придал алгебре ее современный вид. В частности, ему принадлежит теорема о зависимости между корнями и коэффициентами уравнения (теорема Виета), единый метод решения уравнений 2-й, 3-й и 4-й степени и различные преобразования корней. Работа Виета не замыкалась рамками одной алгебры. Он много сделал в области геометрии и тригонометрии. Так, в тригонометрии дал полное решение задачи об определении всех элементов плоского и сферического треугольника по трем данным. Свои исследования по математике Виет опубликовал в 1579 г. в книге «Математический канон».

209. Обозначим через t время, за которое дробинка пройдет вертикальный путь AD — путь свободного падения, причем сопротивление воздуха в расчет не принимается (см. рис. 3). Тогда

$$AD = \frac{gt^2}{2},$$

где g — ускорение при свободном падении;

$$t = \sqrt{\frac{2AD}{g}}.$$

Обозначив через t_1 время движения дробинки по хорде AC (сопротивлением воздуха и трением пренебрегаем), получим

$$AC = \frac{at_1^2}{2},$$

где a — ускорение движения по наклонной линии AC.

Тогда

$$t_1 = \sqrt{\frac{2AC}{a}}.$$

Опустим из точки C на прямую AD перпендикуляр CE (обозначен пунктиром).

В механике устанавливается, что

$$\frac{a}{g} = \frac{AE}{AC}$$

или

$$a = \frac{AE \cdot g}{AC}.$$

Далее, находим (см. рис. 3)

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AC}{AD}$$

и, следовательно,

$$a = \frac{AC}{AD} \cdot g.$$

Окончательно будем иметь

$$t_1 = \sqrt{\frac{2AC}{a}} = \sqrt{\frac{2AC \cdot AD}{AC \cdot g}} = \sqrt{\frac{2AD}{g}} = t.$$

Обозначив через t_2 продолжительность движения дробинки по хорде AB, аналогично получаем

$$t_2 = t.$$

Итак, $t_2 = t_1 = t$, т. е. продолжительность движения по любой хорде равняется продолжительности движения по вертикальному диаметру.

Галилей задачу формулировал так: «Если из высшей точки круга, построенного над горизонтом, проведены различные наклонные плоскости, доведенные до окружности, то времена падения по ним одинаковы».

Эта задача была поставлена и решена им в трактате «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению», изданном в 1638 г. в Голландии. Заметим, что в упомянутом трактате Галилей подводит итог своих работ по физике и обоснованию законов механики.

Галилео Галилей (1564—1642) — итальянский математик, механик, физик и астроном. Галилей был изобретателем телескопа, дающего увеличение в 32 раза (до этого самые лучшие голландские зрительные трубы давали приблизительно трехкратное увеличение). С помощью своего телескопа открыл фазы Венеры, солнечные пятна и вращение Солнца, изучил движение спутников Юпитера, наблюдал Сатурн. Исходным пунктом познания природы считал наблюдение, чувственное восприятие, верно отражающее внешний мир. Вел энергичную борьбу против рутины и косности в науке, в особенности против аристотелевского догматизма.

Галилей жестоко преследовался католической церковью. Он дважды привлекался к суду «святой инквизиции». Первый раз — за опубликование телескопических открытий, которые подтвердили правильность воззрений Коперника о вращении Земли вокруг своей оси и обращении ее вокруг Солнца. Второй раз Галилей был привлечен к суду в 1633 г. в связи с выходом в свет его большого труда «Диалог о двух главнейших системах мира, птолемеевой и коперниковой», в котором гениальный ученый путем сравнения геоцентрической (птолемеевой) и гелиоцентрической (коперниковой) систем мира показал превосходство второй над первой. Путем подлога и вымогательства инквизиция все же добилась от Галилея формального отречения от своих взглядов и организовала постыдное «раскаяние». Чтобы избежать судьбы Д. Бруно (сожжен 17 февраля 1600 г. на костре в Риме), семидесятилетний Галилей вынужден был, стоя на коленях в рубашке кающегося грешника, держа перед собой «святое» евангелие, формально отречься от своей приверженности к системе Коперника и все свои исследования в ее пользу объявить ложными и несовместимыми со «святым» писанием и религиозными догмами.

Однако народ не верил в искренность отречения Галилея и создал легенду, что великий ученый будто бы на процессе после всей церемонии упрямо произнес: «А все-таки Земля вертится!»

В этом красивом вымысле народ как нельзя лучше выразил свою симпатию к ученому и свое негодование к его преследователям. Совершенно ясно, что Галилей пошел на мнимое отречение от своих научных взглядов и убеждений исключительно по принуждению. Однако и после отречения ученый не избежал преследований; он все время оставался под надзором инквизиции, являясь ее вечным узником. Скончался Галилей под арестом в своей вилле Арчетри близ Флоренции.

210. Предположим, что прямые PS и NC пересекаются в точке R, тогда (рис. 53)

$$DC : PN = DR : PR.$$

Принимая во внимание прямые SAE, SBF, SCH, SDK, получаем

$$DA : KE = DB : KF = DC : KH.$$

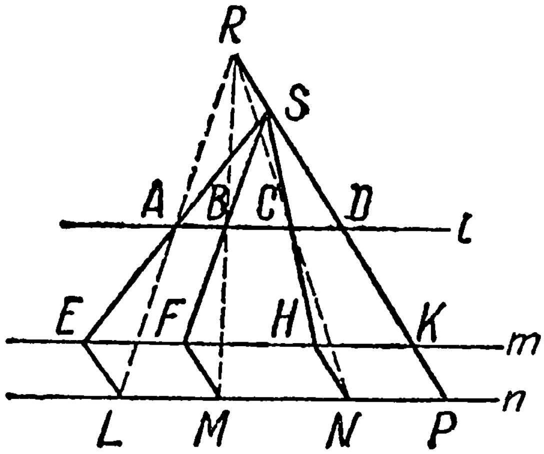


Рис. 53

Учитывая, что

$$EL \parallel FM \parallel HN \parallel KP,$$

будем иметь

$$KE = PL; \; KF = PM; \; KH = PN,$$

откуда

$$DA : PL = DB : PM = DC : PN = RD : RP.$$

Следовательно, прямые AL, BM, CN, SP проходят через одну точку R, что и требовалось доказать.

Иоганн Кеплер (1571—1630) — немецкий математик и астроном, автор знаменитого трактата «Новая стереометрия винных бочек» (1615), в котором заложены основы анализа бесконечно малых, нашедшие завершение в трудах Лейбница и Ньютона. Руководил работой Бюрги по составлению таблиц логарифмов и вместе с ним в 1624 г. издал «Таблицу тысячи логарифмов». Как астроном открыл законы движения планет и всю жизнь посвятил развитию гелиоцентрического учения Коперника. Учение Кеплера шло вразрез с догматами церкви, и вполне естественно церковь ополчилась на ученого и подвергала его постоянным преследованиям и гонениям.

211. Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, расположенные в различных плоскостях σ и σ_1 (рис. 54). Кроме того, дано, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке S. Докажем, что прямые AB и A_1B_1, BC и B_1C_1 ,AC и A_1C_1 пересекаются и точки их пересечения лежат на одной прямой. Рассмотрим соответственные стороны AB и A_1B_1. Они действительно пересекаются в некоторой точке L, так как, во-первых, они не параллельны (по условию), во-вторых, лежат в одной плоскости, а именно в плоскости треугольника SA_1B_1. Поскольку плоскости σ и σ_1 разные и не параллельные, то они пересекаются по некоторой прямой l. Ясно, что точка L принадлежит прямой l, так как AB и A_1B_1 лежат соответственно в плоскостях σ и σ_1 и могут пересекаться только на линии пересечения этих плоскостей.

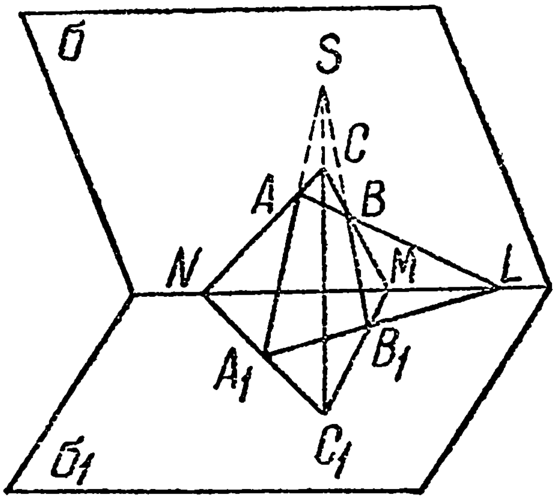


Рис. 54

Аналогично доказывается, что соответственные стороны BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 пересекаются в точках M, N, которые расположены на прямой l. Первая часть задачи решена.

Пусть теперь L, M, N — точки пересечения соответственных сторон AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC иA_1C_1 — принадлежат прямой l и прямые AA_1, BB_1, CC_1 не параллельны между собой. Докажем, что при этих условиях прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в некоторой точке S.

Для этой цели рассмотрим прямые AA_1 и BB_1, которые пересекаются в некоторой точке S_1, так как по условию они не параллельны и лежат в одной плоскости (в плоскости треугольника ALA_1). Аналогично доказывается, что прямые BB_1 и CC_1, AA_1 и CC_1 также пересекаются соответственно в точках S_2, и S_3. Теперь докажем, что точки S_1, S_2, S_3 совпадают (на рисунке эти три точки обозначены одной буквой S). Если бы они не совпадали, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ лежали бы в одной плоскости (плоскости треугольника $S_1S_2S_3$), а это противоречило бы условию. Задача решена полностью.

Жирар Дезарг (1593—1662, по другим данным 1591—1661) — французский математик и военный инженер, заложил основы проективной и начертательной геометрии.

Рассмотренная задача составляет частный случай более общей задачи, известной под названием теоремы Дезарга и являющейся одной из основных теорем проективной геометрии. В самом общем виде теорема Дезарга читается так: «Если в двух треугольниках точки пересечения соответственных сторон лежат на одной прямой, то прямые, соединяющие соответственные вершины, проходят через одну точку». Имеет место и обратное утверждение.

В этой формулировке точки S, L, M, N могут быть и несобственными (см. о несобственных элементах проективного пространства в книге Н. А. Глаголева «Проективная геометрия». М., 1963, с. 33—37).

Идеи Дезарга нашли дальнейшее развитие в начале XIX в. в трудах французских математиков Г. Монжа, Ж. Понселе, немецкого математика Я. Штейнера и др.

212. Пусть треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 55) лежат в одной плоскости σ и пусть S—точка пересечения прямых, соединяющих соответственные вершины A и A_1, B и B_1, C и C_1. Обозначим через L, M, N точки пересечения соответственных сторон AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 (по условию эти прямые лежат в одной плоскости и не параллельны). Докажем, что точки L, M, N лежат на одной прямой.

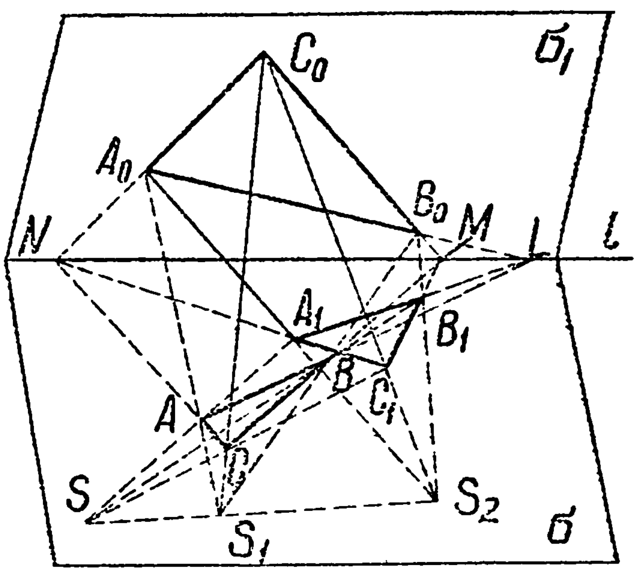


Рис. 55

Проведем через точку S произвольную прямую, не лежащую в плоскости σ, и возьмем на этой прямой две произвольные точки S_1 и S_2. Соединим прямыми точку S с точками A, B, C, а точку S_2 — с точками A_1, B_1, C_1. Прямые S_1A и S_2A_1 пересекаются, так как лежат в одной плоскости (в плоскости треугольника A_1SS_2) и не параллельны (случай параллелизма не рассматривается). Обозначим точку их пересечения через A_0. Точно так же убеждаемся, что прямые S_1B и S_2B_1; S_1C и S_2C_1 имеют точки пересечения B_0 и C_0. Получается треугольник $A_0B_0C_0$, который лежит в некоторой плоскости σ_1, пересекающей плоскость σ по некоторой прямой l.

Треугольник $A_0B_0C_0$ с каждым из данных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ удовлетворяет условиям теоремы Дезарга в пространстве, и, следовательно, точки пересечения L, M, N соответственных сторон треугольников лежат на одной прямой, а именно на прямой l. А раз так, то точками пересечения соответственных сторон данных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ будут те же точки L, M, N, которые, как указывалось выше, лежат на одной прямой — прямой l.

Теперь докажем обратное. Пусть соответственные стороны треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ пересекаются в точках L, M, N некоторой прямой l. Докажем, что непараллельные прямые, проходящие через соответственные вершины, пересекаясь попарно, пересекаются в одной точке S. Для доказательства через прямую l проведем произвольную плоскость σ_1, отличную от плоскости σ. Через точки L, M, N в плоскости σ_1 проведем три произвольные прямые, лишь бы они не проходили через одну точку и не были параллельными. Тогда в плоскости σ_1 получается треугольник $A_0B_0C_0$, где A_0 — точка пересечения прямых, проведенных через L и N, B_0 — точка пересечения прямых, проведенных через L и M, C_0 — точка пересечения прямых, проведенных через M и N.

Треугольник $A_0B_0C_0$ с каждым из данных двух треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ удовлетворяет условиям обратной задачи Дезарга в пространстве, и, следовательно, прямые A_0A,

B_0B, C_0C пересекаются в некоторой точке S_1, а прямые A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 — в некоторой точке S_2, отличной от S_1.

Рассмотрим прямую S_1S_2. Обозначим точку пересечения этой прямой с плоскостью σ через S. Рассмотрим теперь прямые AA_1 и S_1S_2. Они пересекаются, так как лежат в одной плоскости (плоскости треугольника $S_1A_0S_2$). Но пересекаться они могут только в точке S. Следовательно, прямая AA_1 проходит через точку S. Аналогично доказывается, что прямые BB_1 и CC_1 также проходят через точку S. Отсюда заключаем, что прямые, соединяющие соответственные вершины двух данных треугольников, проходят через одну точку, что и требовалось доказать.

Замечание. Более тщательный анализ задачи Дезарга приводит к следующему, более общему результату. Если прямые, соединяющие соответственные вершины двух данных треугольников, пересекаются в одной точке или параллельны между собой, то возможны три случая: 1) все три точки пересечения соответственных сторон лежат на одной прямой; 2) одна пара соответственных сторон состоит из параллельных прямых, параллельной прямой, проходящей через точки пересечения остальных двух пар соответственных сторон; 3) каждая пара соответственных сторон состоит из параллельных между собой прямых. К этому надо добавить, что имеет место и обратное утверждение.

Далее заметим, что задача Дезарга на плоскости была доказана при помощи стереометрического чертежа путем введения третьего треугольника $A_0B_0C_0$, плоскость которого σ_1 не совпадает с плоскостью σ, в которой находятся данные два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Было затрачено много усилий, чтобы решить эту задачу без выхода в трехмерное пространство. Однако все усилия оказались напрасными. Только немецкому математику Гильберту (1862—1943) удалось показать, что такое доказательство осуществить нельзя, если не пользоваться равенством отрезков.

213. Данное уравнение

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$$

можно представить так:

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 76x + 30x - 120 = 0$$

или

$$x^3(x-4)-19x(x-4)+30(x-4)=0,$$

откуда $x_1=4$.

Остальные корни находятся из уравнения x^3-19x+ $+30=0$. Чтобы найти эти корни, представим последнее уравнение в виде

$$x^3-3x^2+3x^2-9x-10x+30=0$$

или

$$x^2(x-3)+3x(x-3)-10(x-3)=0,$$

откуда $x_2=3$, а остальные два корня находятся из уравнения

$$x^2+3x-10=0.$$

Решая это уравнение обычным путем, находим

$$x_3=2,\ x_4=-5.$$

Рене Декарт (1596—1650) — французский математик и философ, составитель знаменитого трактата «Геометрия» (1637), где впервые в истории науки был изложен координатный метод.

Координатный метод позволил Декарту вместе с Ферма создать аналитическую геометрию, которая рассматривает вопросы геометрии с точки зрения алгебраических уравнений.

Декарт улучшил теорию уравнений путем введения удачной символики. Он первый стал обозначать неизвестные через x, y, z, отдавая предпочтение z; ему принадлежит метод неопределенных коэффициентов, который сейчас находит широкое применение. В философии и математике Декарт придерживался аналитического метода, согласно которому каждую задачу надо разлагать на ее составные части и затем от самого простого и легкого продвигаться к более сложному.

214. $S=\frac{a_1}{1-q}$, где q — знаменатель прогрессии. Так как $q=\frac{a_2}{a_1}$, то

$$S=\frac{a_1}{1-\frac{a_2}{a_1}}=\frac{a_1^2}{a_1-a_2}.$$

Отсюда

$$\frac{S}{S-a_1}=\frac{\dfrac{a_1^2}{a_1-a_2}}{\dfrac{a_1^2}{a_1-a_2}-a_1}=\frac{a_1^2}{a_1^2-a_1^2+a_1a_2}=\frac{a_1}{a_2},$$

что и требовалось доказать.

Пьер Ферма (1601—1665) — французский математик. В молодости получил юридическое образование и стал адвокатом. Математикой занимался исключительно из любви к ней. Эти занятия и привели его к крупнейшим открытиям почти во всех областях математических наук. Ферма вел обширную переписку с крупнейшими учеными своего времени, в которой давал глубокий анализ и критику существующих математических теорий и сообщал о своих исследованиях. Ферма много сделал по части обоснования и дальнейшего развития высшей математики (дифференциального исчисления и аналитической геометрии). Его именем названо несколько теорем арифметики (теории чисел).

215. Прежде всего заметим, что $\angle P=\angle DBQ$ и $\angle PAC=\angle Q$, как углы с соответственно перпендикулярными сторонами ($\angle PMQ=90°$) (рис. 56).

Из подобия треугольников ACP и BDQ

$$\frac{PC}{BD}=\frac{AC}{DQ},$$

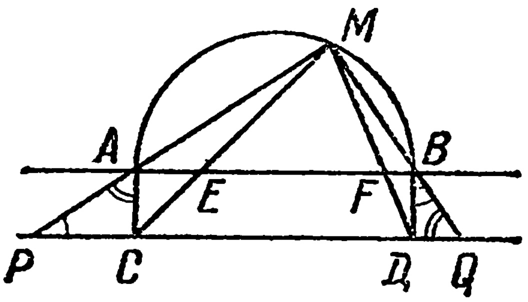


Рис. 56

но по условию

$$BD=AC,$$

поэтому

$$PC\cdot DQ=AC^2.$$

Поскольку AC — сторона вписанного в круг квадрата, а AB — диаметр этого круга, то

$$AB^2=2AC^2$$

и, следовательно,

$$2PC\cdot DQ=2AC^2=AB^2$$

или

$$2PC \cdot DQ = CD^2. \qquad (1)$$

Далее, легко видеть, что

$$\frac{PC}{AE} = \frac{CD}{EF} = \frac{DQ}{FB}. \qquad (2)$$

Равенство (1) на основании соотношений (2) запишется так:

$$2AE \cdot FB = EF^2. \qquad (3)$$

Так как

$$AF + EB = AB + EF,$$

то, возводя в квадрат, получаем

$$AF^2 + EB^2 + 2AF \cdot EB = AB^2 + EF^2 + 2AB \cdot EF,$$

откуда, учитывая (3), находим

$$AF^2 + EB^2 + 2AF \cdot EB = AB^2 + 2AE \cdot FB + 2AB \cdot EF$$

или

$$AF^2 + EB^2 + 2AF \cdot EB = AB^2 + 2(AE \cdot FB + AB \cdot EF). \qquad (4)$$

Рассмотрим тождество

$$(AE+EF)(EF+FB) = AE \cdot FB + (AE+EF+FB)\,EF$$

или

$$AF \cdot EB = AE \cdot FB + AB \cdot EF. \qquad (5)$$

Из (4) на основании (5) окончательно вытекает

$$AF^2 + EB^2 = AB^2,$$

что и требовалось доказать.

216. Предложенная задача является частным случаем так называемой великой теоремы Ферма: уравнение $x^n + y^n = z^n$, где n — целое положительное число, большее 2, не имеет решений в целых числах.

Читая книги, Ферма имел обыкновение делать на полях замечания. Так, читая «Арифметику» Диофанта, против того места, где рассматривается неопределенное уравнение $x^2 + y^2 = z^2$, на полях Ферма написал: «Между тем совершенно невозможно разложить полный куб на сумму двух кубов, четвертую степень — на сумму двух четвертых степеней, вообще какую-либо степень — на сумму двух степеней с тем же показателем. Я нашел удивительное доказательство этого предложения, но здесь слишком мало места, чтобы его поместить».

До сих пор остается загадкой, каким доказательством владел Ферма и владел ли? Дело в том, что, несмотря на все усилия крупнейших математиков, великая теорема Ферма в общем виде не доказана и не опровергнута, хотя для отдельных значений n она доказана совершенно строго. Так, для $n = 3$ и $n = 4$ теорема доказана петербургским академиком Эйлером (1707—1783), для $n = 5$ — геттингенским математиком Дирихле (1805—1859). Профессор Берлинского университета Куммер (1810—1893) в результате новых разработанных методов довел решение до $n = 100$. Наконец, в настоящее время американские математики, воспользовавшись результатом Куммера, при помощи электронно-вычислительных машин доказали, что утверждение Ферма справедливо для всех n от 3 до 4002 включительно.

Для $n = 4$, как указывалось выше, задача решена Эйлером. Весьма остроумно он доказал, что уравнение

$$x^4 + y^4 = z^4 \tag{1}$$

неразрешимо в целых числах. Для этой цели достаточно доказать неразрешимость в целых числах уравнения

$$x^4 + y^4 = z^2. \tag{2}$$

Пусть нам удалось доказать, что уравнение (2) неразрешимо в целых числах, тогда уравнение (1) также будет неразрешимо в целых числах.

Действительно, пусть x_1, y_1, z_1 — целочисленное решение уравнения (1). В этом случае должно выполняться условие

$$x_1^4 + y_1^4 = z_1^4,$$

и тогда тройка целых чисел x_1, y_1, z_1^2 будет решением уравнения (2). И если последнее не имеет целочисленных решений, то не будет их иметь и уравнение (1).

Итак, для решения задачи Ферма (великая теорема Ферма при $n = 4$) нужно доказать, что уравнение (2) не имеет целочисленных решений. Доказательство будем вести методом от противного.

Предположим, что уравнение имеет целочисленное решение

$$x_1,\ y_1,\ z_1,$$

причем эти числа, а также возможные другие тройки целочисленных решений уравнения (2) будем, не уменьшая общности, считать положительными (из существования решения x_1, y_1, z_1 уравнения (2) в целых числах x_1, y_1, $z \neq 0$ вытекает наличие решения $|x_1|$, $|y_1|$, $|z_1|$ этого уравнения в целых положительных числах):

$$x_1^4 + y_1^4 = z_1^2$$

или

$$(x_1^2)^2 + (y_1^2)^2 = z_1^2.$$

Отсюда видно, что x_1^2, y_1^2, z_1 являются пифагоровыми числами и, как известно, могут быть выражены через нечетные взаимно простые положительные числа u и v, причем $u > v$:

$$x_1^2 = uv; \tag{3}$$

$$y_1^2 = \frac{u^2 - v^2}{2}; \tag{4}$$

$$z_1 = \frac{u^2 + v^2}{2}. \tag{5}$$

Поскольку в равенстве (3) произведение взаимно простых чисел u и v — полный квадрат, т. е. x_1^2, то u и v должны быть полными квадратами (докажите это), т. е.

$$u = u_1^2; \tag{6}$$

$$v = v_1^2, \tag{7}$$

причем u_1 и v_1 должны быть опять нечетными взаимно простыми числами и $u_1 > v_1$.

Равенства (3), (4), (5) на основании равенств (6) и (7) примут вид

$$x_1^2 = u_1^2 v_1^2; \tag{8}$$

$$y_1^2 = \frac{u_1^4 - v_1^4}{2}; \tag{9}$$

$$z_1 = \frac{u_1^4 + v_1^4}{2}. \tag{10}$$

Рассмотрим равенство (9). Из него следует

$$y_1^2 = \frac{u_1^4 - v_1^4}{2} = \frac{(u_1^2 + v_1^2)(u_1^2 - v_1^2)}{2}. \tag{11}$$

Поскольку разность и сумма двух нечетных чисел всегда есть число четное, то

$$u_1 + v_1 = 2u_2; \tag{12}$$

$$u_1 - v_1 = 2v_2, \tag{13}$$

откуда

$$u_1 = u_2 + v_2; \tag{14}$$

$$v_1 = u_2 - v_2. \tag{15}$$

И здесь u_2 и v_2 — взаимно простые числа, так как противное предположение на основании равенств (14) и (15) привело бы к тому, что u_1 и v_1 не взаимно простые, чего быть не может.

Заметим, что поскольку u_2 и v_2 взаимно простые, то сумма их квадратов будет взаимно простое число с каждым из них, т. е. $u_2^2+v_2^2$ не может иметь общего делителя, отличного от нуля, ни с u_2, ни с v_2 (проверьте самостоятельно).

Выразим теперь y_1^2 из формулы (11) через u_2 и v_2 по формулам (14) и (15). Для этого из формул (14) и (15) сначала найдем u_1^2 и v_1^2:

$$u_1^2=u_2^2+v_2^2+2u_2v_2;$$
$$v_1^2=u_2^2+v_2^2-2u_2v_2,$$

откуда

$$u_1^2+v_1^2=2(u_2^2+v_2^2); \qquad (16)$$
$$u_1^2-v_1^2=4u_2v_2. \qquad (17)$$

Теперь, пользуясь формулами (11), (16) и (17), найдем

$$y_1^2=4u_2v_2(u_2^2+v_2^2).$$

Разделив последнее равенство на 4, получим

$$\frac{y_1^2}{4}=u_2v_2(u_2^2+v_2^2). \qquad (18)$$

Заметим, что в пифагоровой тройке чисел x_1^2, y_1^2, z_1 первые два не могут быть одновременно нечетными, поэтому всегда можем считать x_1^2 нечетным, y_1^2 четным и, следовательно, z_1 нечетным. Итак, y_1^2 четное число. Но всякое четное число, будучи полным квадратом, делится на 4, следовательно, $\frac{y_1^2}{4}$ — целое число.

В правой части уравнения (18) имеем произведение трех взаимно простых чисел u_2, v_2 и $u_2^2+v_2^2$, и это произведение есть полный квадрат $\left(\text{равняется } \left(\frac{y_1}{2}\right)^2\right)$. Следовательно, по известной теореме все эти три сомножителя, взятые в отдельности, должны быть сами полными квадратами, т. е.

$$u_2 = x_2^2; \quad v_2 = y_2^2; \quad u_2^2 + v_2^2 = z_2^2.$$

Из последних уравнений вытекает, что

$$x_2^4 + y_2^4 = z_2^2.$$

Итак, если считать, что целочисленная тройка x_1, y_1, z_1 является решением уравнения $x^4 + y^4 = z^2$, то обязательно найдется еще одна целочисленная тройка x_2, y_2, z_2, которая также является решением этого уравнения, причем обязательно $z_1 > z_2$.

Неравенство $z_1 > z_2$ вытекает из следующих рассуждений:

$$z_2^2 = u_2^2 + v_2^2 = \frac{u_1^2 + v_1^2}{2} = \frac{u + v}{2},$$

но

$$z_1 = \frac{u^2 + v^2}{2},$$

откуда

$$z_1 > z_2^2,$$

следовательно,

$$z_1 > z_2.$$

Приняв за исходную только что полученную целочисленную тройку x_2, y_2, z_2, которая является решением уравнения (2), и повторив все предыдущие рассуждения, проведенные для тройки x_1, y_1, z_1, получим еще одну целочисленную тройку x_3, y_2, z_3, которая также будет решением уравнения (2). И таких троек можно получить сколько угодно. Все они образуют бесконечную последовательность решений

$$(x_1, y_1, z_1), \ (x_2, y_2, z_2), \ (x_3, y_3, z_3), \ \ldots,$$

где целые положительные числа

$$z_1, z_2, z_3, \ldots$$

образуют монотонно убывающую бесконечную последовательность

$$z_1 > z_2 > z_3 > \ldots,$$

что приводит к логическому противоречию.

Действительно, последняя последовательность не может иметь больше z_1 членов и, следовательно, никак не может быть бесконечной. Таким образом, предположение о том, что уравнение (2) имеет целочисленное решение, приводит к логическому противоречию. Следовательно, уравнение (2) не может иметь целочисленного решения, а вместе с ним не может иметь целочисленных решений и уравнение (1), что и требовалось доказать.

Замечание. Примененный здесь метод носит название метода безграничного спуска. Он основан на построении с помощью одного решения бесконечной последовательности решений с монотонно убывающими положительными целыми числами

$$z_1, z_2, z_3, \ldots$$

Этот метод, успешно использованный в частных случаях великой теоремы Ферма, в общем случае для уравнения

$$x^n + y^n = z^n$$

(где n — любое натуральное число) применить не удалось.

217. Пусть $OABC$ — трехгранный угол, о котором говорится в задаче, и пусть $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Тогда

$$S_{\Delta OAB} = \frac{ab}{2}; \; S_{\Delta OAC} = \frac{ac}{2}; \; S_{\Delta OBC} = \frac{bc}{2},$$

откуда

$$S^2_{\Delta OAB} + S^2_{\Delta OAC} + S^2_{\Delta OBC} = \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{4}. \qquad (1)$$

По теореме Пифагора находим

$$AC = \sqrt{a^2 + c^2}; \; BC = \sqrt{b^2 + c^2}; \; AB = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Применив формулу Герона, получим

$$S^2_{\Delta ABC} = \frac{AC + BC + AB}{2} \cdot \frac{AC + BC - AB}{2} \times$$

$$\times \frac{AC - BC + AB}{2} \cdot \frac{-AC + BC + AB}{2} = \frac{1}{16}(AC^2 +$$

$$+ 2AB \cdot BC + BC^2 - AB^2) \cdot (AB^2 + 2AC \cdot BC - AC^2 - BC^2) =$$

$$= \frac{1}{16}(4a^2b^2 + 4a^2c^2 + 4b^2c^2) = \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{4};$$

$$S^2_{\Delta ABC} = \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{4}. \qquad (2)$$

Сравнивая правые части равенств (1) и (2), видим, что они равны, следовательно, равны и левые части, т. е.

$$S^2_{\Delta ABC} = S^2_{\Delta OAB} + S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OAC},$$

что и требовалось доказать.

Решенная задача является стереометрическим аналогом теоремы Пифагора. Проф. В. Литцман полагает, что этот аналог впервые нашел в 1622 г. Иоганн Фульгабер из Ульма (см. использованную литературу).

218. Р е ш е н и е а л г е б р а и ч е с к о е. Обозначим через p полупериметр прямоугольника, а через x — одну из его сторон, тогда для площади S будем иметь формулу

$$S = x(p - x)$$

или

$$x^2 - px + S = 0.$$

Решая это уравнение, получаем

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - S}.$$

Ясно, что x будет действительным только при $S \leqslant \frac{p^2}{4}$, причем наибольшее значение для S будет $\frac{p^2}{4}$, т. е.

$$S_{\max} = \frac{p^2}{4}, \text{ когда } x = \frac{p}{2}.$$

Следовательно, из всех прямоугольников одинакового периметра квадрат имеет наибольшую площадь, что и требовалось установить.

Решение геометрическое. На полупериметре p рассматриваемых прямоугольников, как на диаметре, построим полуокружность (рис. 57). Далее диаметр разделим на два отрезка x и $p - x$ и в точке деления к диаметру восставим перпендикуляр. Тогда его длина численно будет равна $\sqrt{S}$, так как должно выполняться равенство

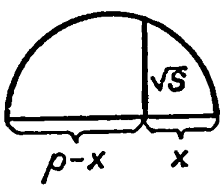


Рис. 57

$$(p - x)\,x = S.$$

Ясно, что S достигнет максимума, если длина указанного перпендикуляра будет равна радиусу, т. е. при

$$S = \frac{p^2}{4},$$

а это возможно тогда, когда

$$p - x = x \quad \text{или} \quad x = \frac{p}{2},$$

т. е. когда данный прямоугольник будет квадратом.

Автором рассмотренной задачи является виднейший английский математик Джон Валлис (1616—1703) — профессор Оксфордского университета, составитель многих трактатов по математике. Валлис занимался вопросами научного обоснования геометрии как дедуктивной науки, вытекающей из ранее предпосланных аксиом. В частности, ему принадлежит оригинальная попытка доказать аксиому параллельности и свести ее таким образом в разряд теорем. Это ему удалось сделать путем введения другой аксиомы, которая известна под названием «аксиомы Валлиса»: для всякой фигуры существует подобная ей фигура любых размеров.

219. Обозначим точки пересечения противоположных сторон AB и DE, BC и EF, CD и FA соответственно точками L, M, N. Требуется доказать, что точки L, M, N лежат на одной прямой (прямой Паскаля). Соединим A и C, A и E прямыми. На чертеже (рис. 58) они обозначены пунктирной линией. Опишем вокруг треугольников ACN, ECM, AEL окружности. Обозначим через P точку пересечения первых двух окружностей, отличную от точки C. Докажем, что третья окружность также проходит через точку P. Для этого достаточно доказать, что $\angle APE = \angle ALE$. Докажем это.

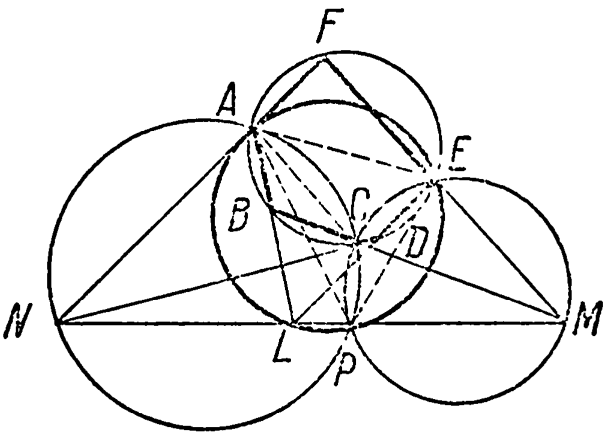


Рис. 58

$$\angle APE = \angle APC + \angle CPE = \frac{\smile DEF - \smile ABC}{2} + \frac{\smile FAB - \smile CDE}{2} = \frac{\smile EF - \smile CD + \smile FA - \smile BC}{2} = \frac{\smile EFA - \smile BCD}{2} = \angle ALE.$$

Докажем теперь, что точки M, N и P лежат на одной прямой. Для этого докажем, что $\angle CPM + \angle CPN = 180°$:

$$\angle CPM = 180° - \angle CEM = \angle CEF = \frac{\smile FABC}{2};$$

$$\angle CPN = 180° - \angle CAN = \angle CAF = \frac{\smile CEF}{2};$$

$$\angle CPM + \angle CPN = \frac{\smile FABC}{2} + \frac{\smile CEF}{2} = \frac{\smile FABCEF}{2} = 180°.$$

Аналогично докажем, что точки L, P и M лежат также на одной прямой. Для этого докажем, что $\angle EPM + \angle EPL = 180°$:

$$\angle EPM = \angle ECM = 180° - \angle BCE = 180° - \frac{\smile EFAB}{2};$$

$$\angle EPL = 180° - \angle BAE = 180° - \frac{\smile BCDE}{2};$$

$$\angle EPM + \angle EPL = 180° - \frac{\smile EFAB}{2} + 180° - \frac{\smile BCDE}{2} =$$

$$= 360° - \frac{\smile BCDEFAB}{2} = 360° - 180° = 180°.$$

Итак, точки M, P, N лежат на одной прямой, точки L, P, M лежат тоже на одной прямой. Следовательно, точки M, L, N лежат на одной прямой, что и требовалось доказать.

Блез Паскаль (1623—1662) — французский математик, физик и философ. Математический талант проявился уже в детские годы. В юности открыл для себя первые теоремы планиметрии. Среди придуманных им фигур были треугольники, параллелограммы, круги, пирамиды и т. д.

Задача Паскаля, решение которой рассмотрено выше, составляет частный случай более общей задачи — теоремы Паскаля, которую можно сформулировать так: «Во всяком шестиугольнике, вписанном в коническое сечение (окружность, эллипс, гипербола, парабола, пара прямых), точки пересечения противоположных сторон лежат на одной прямой». Паскаль эту теорему доказал в возрасте 16 лет, сначала для окружности (задача Паскаля), а затем сделал заключение о правильности ее для любого конического сечения, исходя из того, что такое сечение может быть получено из окружности путем проектирования и сечения. Свои открытия, сделанные до 1639 г., Паскаль опубликовал в 1640 г. в первом своем трактате «Опыт теории конических сечений», представляющем афишу размером 47×39 см.

Теорема Паскаля является одной из основных теорем современной проективной геометрии, изучающей самые общие свойства фигур, остающиеся неизменными при произвольных центральных проектированиях и сечениях. Биографы Паскаля утверждают, и это совершенно правильно, что уже одной этой теоремы было бы вполне достаточно, чтобы имя Паскаля стало известно всему миру как имя первоклассного ученого-математика.

Паскаль имеет в области математики и другие весьма важные открытия. Так, в трактате «О характере делимости чисел» сформулирован общий признак делимости целых чисел на другое целое число, основанный на подсчете суммы цифр делимого. В «Трактате об арифметическом треугольнике» приведен способ вычисления биномиальных коэффициентов и сформулирован ряд законов теории вероятностей, причем доказательства даны методом математической индукции, методом, который здесь впервые в науке был четко сформулирован и применен при доказательстве теорем и решении задач. В своих геометрических работах на вычисление площадей и объемов Паскаль подготовил почву для открытия дифференциального и интегрального исчисления.

220. Рассмотрим следующие предельные случаи задачи Паскаля.

I случай. Пусть две вершины шестиугольника, вписанного в окружность, совмещаются, тогда сторона, принадлежащая этим вершинам, превращается в касательную (рис. 59, *а*). В этом случае имеет место следующее утверждение: во всяком пятиугольнике, вписанном в окружность, точки пересечения двух пар несмежных сторон и точка пересечения пятой стороны с касательной в противоположной вершине лежат в одной прямой.

II случай. Аналогично четырехугольник, вписанный в окружность, будем рассматривать как шестиугольник, у которого две вершины совмещены. В этом случае выполняется предложение: во всяком четырехугольнике, вписанном в окружность, две пары противоположных сторон и одна пара касательных в противоположных вершинах пересекаются в трех точках, расположенных на одной прямой (рис. 59, *б*).

Проводя касательные во всех вершинах четырехугольника, легко доказать предложение: во всяком четырехугольнике, вписанном в окружность, две пары противоположных сторон и две пары касательных в противоположных вершинах пересекаются в четырех точках, расположенных на одной прямой (рис. 59, *в*).

III случай. Наконец, будем считать треугольник, вписанный в окружность, шестиугольником, у которого все

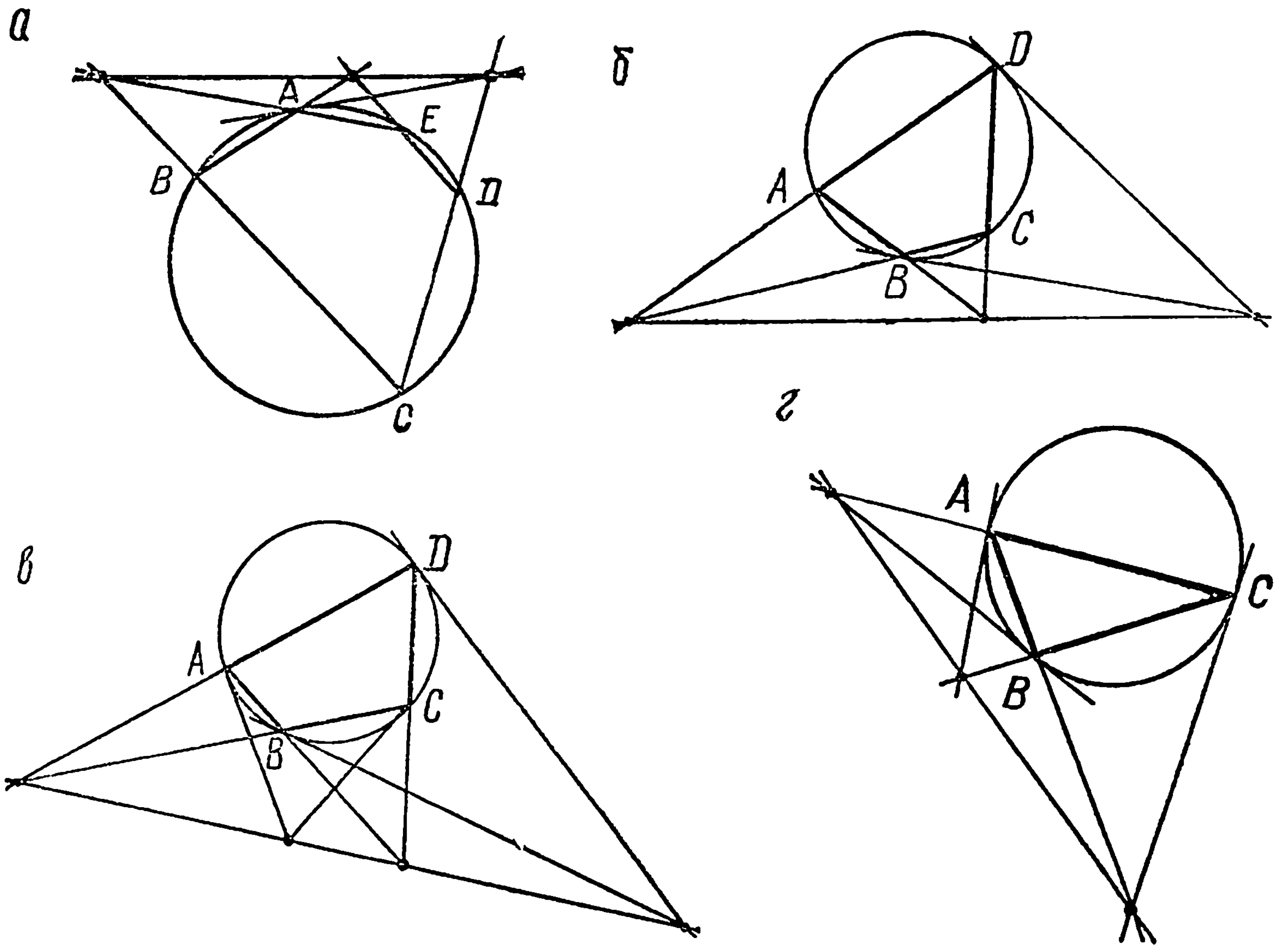


Рис. 59

вершины двойные (попарно совмещенные). Тогда выполняется предложение: во всяком треугольнике, вписанном в окружность, три точки пересечения его сторон с касательными в противоположных вершинах лежат на одной прямой (рис. 59, *г*).

221. Сформулированная выше задача взята из трактата Паскаля, носящего название «Особенности делимости чисел».

Паскаль решает эту задачу при помощи следующих рассуждений. Пусть, говорит он, при делении 10 на число A получается остаток r_1, при делении $10r_1$ на A — остаток r_2, при делении $10r_2$ на A — остаток r_3 и т. д. Если данное число, например четырехзначное, будет иметь вид $MCDU$, где M, C, D, U — цифры тысяч, сотен, десятков и единиц, то общий признак делимости этого числа на A следующий.

Если $U + Dr_1 + Cr_2 + Mr_3$ делится на A (кр. A), то на A делится и число $MCDU$.

В самом деле, пусть

$$10 = Aq_1 + r_1;$$
$$10r_1 = Aq_2 + r_2;$$
$$10r_2 = Aq_3 + r_3.$$

Тогда

$$U + Dr_1 + Cr_2 + Mr_3 = U + D\,(10 - Aq_1) + C\,(10r_1 - Aq_2) + M\,(10r_2 - Aq_3) = U + 10D + 10C\,(10 - Aq_1) + 10M\,(10r_1 - Aq_2) - \text{кр. } A = U + 10D + 100C + 100M\,(10 - Aq_1) - \text{кр. } A = U + 10D + 100C + 1\,000\,M - \text{кр. } A.$$

Что и нужно было установить!

222. Решается задача при помощи следующих рассуждений: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$ составляет 26 000. Отсюда $\frac{1}{12}$ составляет 2000. Следовательно, первый даст 12 000, второй — 8000 и третий — 6000 ливров.

Данная задача взята из сборника задач французского математика Жака Озанама (1640—1717) — составителя четырехтомного пособия «Курс математики».

223.

$$\begin{array}{r|l}
y^4 - 3\frac{1}{2}a^2y^2 + 3a^3y - \frac{1}{2}a^4 & y^2 - 2ay + a^2 \\ \cline{2-2}
-\;\underline{y^4 \pm 2ay^3 \mp a^2y^2} & y^2 + 2ay - \frac{a^2}{2} \\
-\;2ay^3 - 4\frac{1}{2}a^2y^2 + 3a^3y & \\
\underline{2ay^3 \pm 4a^2y^2 \mp 2a^3y} & \\
-\;-\frac{1}{2}a^2y^2 + a^3y - \frac{1}{2}a^4 & \\
\underline{\pm\frac{1}{2}a^2y^2 \mp a^3y \pm \frac{1}{2}a^4} & \\
0 &
\end{array}$$

Эта задача взята из «Всеобщей арифметики» И. Ньютона (1642—1727) — английского математика и физика.

Исаак Ньютон был сыном фермера, умершего еще до рождения ребенка. Уже в раннем детстве будущий ученый проявил склонность к самостоятельным занятиям и серьезной учебе.

Учился в Кембриджском университете, где поражал учителей своими математическими способностями. Со временем он стал профессором этого университета. С 1703 г. был президентом Лондонского королевского общества, которое объединяло крупнейших ученых того времени.

Исаак Ньютон является автором замечательного трактата «Математические начала натуральной философии» (1687), где изложены знаменитые законы Ньютона в области механики и ряд других открытий. В 1707 г. Ньютоном был написан трактат «Всеобщая арифметика», где алгебраический метод нашел современную символику и изложение.

На памятнике Ньютону, поставленном на его могиле в Лондоне, имеется надпись: «Здесь покоится сэр Исаак Ньютон, который почти божественной силой своей впервые объяснил с помощью своего математического метода движение и форму планет, приливы и отливы океана. Он первый исследовал разнообразие световых лучей и проистекающую отсюда особенность цветов, каких до того никто даже не подозревал... Пусть смертные радуются, что в их среде жило такое украшение человечества».

224. Ньютон эту задачу решал так. Положим $BC = a$, $AD = y$ (рис. 60). Так как угол ABD дан, то дано будет (по таблицам синусов или тангенсов) отношение между линиями AD и BD, которое положим равным d к l. Итак, $d : l = y : BD$, откуда

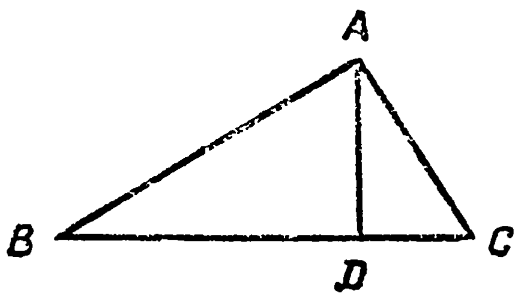


Рис. 60

$$BD = \frac{ly}{d}.$$

Точно так же, поскольку дан угол ACD, отношение $AD : CD$ положим равным $d : f$, так что

$$DC = \frac{fy}{d}.$$

Но $$BD + DC = BC,$$
т. е. $$\frac{ly}{d} + \frac{fy}{d} = a.$$

Преобразуя это уравнение посредством умножения обеих сторон на d и деления на $l + f$, вы получите

$$y = \frac{ad}{l+f}.$$

Эта задача взята из книги Исаака Ньютона «Всеобщая арифметика или книга об арифметических синтезе и анализе».

225. Решение Ньютона. «Если 12 быков за 4 недели поедают $3\frac{1}{3}$ югера, то в силу пропорциональности 36 быков за 4 недели, либо 16 быков за 9 недель, либо 8 быков за 18 недель поедят 10 югеров травы, предполагая, что трава перестает расти. Но так как трава растет, то 21 бык за 9 недель съест лишь 10 югеров травы; значит, трава, которая выросла на 10 югерах за последующие 5 недель, сможет прокормить в течение 9 недель избыток 21 быка над 16 быками, или 5 быков, либо, что то же самое, $\frac{5}{2}$ быка в течение 18 недель. Прирост травы за 14 недель (избыток 18 над первыми 4) может аналогичным образом прокормить 7 быков в течение 18 недель, ибо 5 недель : 14 неделям $= \frac{5}{2}$ быка : 7 быкам. Прибавьте поэтому этих 7 быков, которых сможет прокормить один лишь прирост травы, к 8, которых прокормила бы трава без прироста по истечении четырех первых недель; сумма будет 15 быков. Наконец, если 10 югеров могут прокормить 15 быков в течение 18 недель, то в силу пропорциональности 24 югера смогут прокормить за это же время 36 быков.

Остановимся на алгебраическом решении этой задачи. Обозначим через y вспомогательное неизвестное, означающее, какая доля первоначального запаса травы прирастает на 1 югере в течение недели. Тогда на первом лугу в течение недели прирастет травы $3\frac{1}{3}y$, а в течение 4 недель — $3\frac{1}{3}y \cdot 4 = \frac{40}{3}y$ того запаса, который первоначально на нем имелся. Следовательно, 12 быков в течение 4 недель съели столько травы, сколько занимает луг площадью в $3\frac{1}{3} + \frac{40}{3}y$ югеров. Далее легко подсчитать, что 1 бык в 1 неделю съедает столько травы, сколько занимает луг площадью

$$\left(3\frac{1}{3} + \frac{40}{3}y\right) : 48 = \frac{10 + 40y}{144} \text{ (югеров).}$$

Теперь находим площадь участка, содержащего запас травы для прокормления 21 быка в течение 9 недель. Она составляет $10 + 90y$ югеров, так как недельный прирост на 1 югер — y, 9-недельный прирост на 1 югер — $9y$ и 9-недельный прирост на 10 югеров — $90y$. Таким образом, площадь, достаточная для прокормления 1 быка в течение 1 недели, составляет

$$\frac{10 + 90y}{9 \cdot 21} = \frac{10 + 90y}{189} \text{ (югера).}$$

Так как нормы прокормления должны быть одинаковыми, то

$$\frac{10 + 40y}{144} = \frac{10 + 90y}{189}.$$

Отсюда находим

$$y = \frac{1}{12}.$$

После этого площадь луга, нужная для прокормления 1 быка в течение 1 недели, выразится числом

$$\frac{10 + 40y}{144} = \frac{10 + 40 \cdot \frac{1}{12}}{144} = \frac{5}{54} \text{ (югера).}$$

Обозначая через x искомое число быков, которых может прокормить третий луг в течение 18 недель, получим уравнение

$$\frac{24+24\cdot 18\cdot\frac{1}{12}}{18x}=\frac{5}{54},$$

решив которое, найдем $x = 36$.

Следовательно, третий луг в течение 18 недель может прокормить 36 быков».

226. Решение Ньютона. «Чтобы решить вопрос, заметьте, что в нем содержатся в скрытом виде некоторые предложения, которые все должны быть выявлены и выражены.

Словесно	Алгебраически
У торговца имеется состояние, из которого он в первый год затрачивает 100 фунтов	x $x-100$
Остаток он увеличивает на одну треть	$x-100+\frac{x-100}{3}$ или $\frac{4x-400}{3}$
Во второй год он опять тратит 100 фунтов и остаток увеличивает на одну треть	$\frac{4x-400}{3}-100$ или $\frac{4x-700}{3}$ $\frac{4x-700}{3}+\frac{4x-700}{9}$ или $\frac{16x-2800}{9}$
В третий год он опять тратит 100 фунтов и остаток также увеличивает на одну треть, причем оказывается вдвое богаче, чем был вначале	$\frac{16x-2800}{9}-100$ или $\frac{16x-3700}{9}$ $\frac{16x-3700}{9}+\frac{16x-3700}{27}$ или $\frac{64x-14800}{27}$ $\frac{64x-14800}{27}=2x$

Таким образом, вопрос выражается уравнением

$$\frac{64x - 14\,800}{27} = 2x,$$

приведя которое, мы найдем x.

Умножьте уравнение на 27, и вы получите

$$64x - 14\,800 = 54x,$$

вычтите из обеих сторон $54x$, и останется $10x - 14\,800 = 0$ или $10x = 14\,800$; разделив на 10, вы найдете, что $x = 1480$. Таким образом, состояние торговца вначале, а также его последующая прибыль, или доход, были равны 1480 ф.»

227. Преобразуем первое и второе слагаемые к виду $a + ib$. Для первого слагаемого

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}} = \sqrt{1+i\sqrt{3}} =$$
$$= \sqrt{\frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 2i\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$
$$= \sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + \left(i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 + 2i\sqrt{\frac{3}{4}}} =$$
$$= \sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Для второго слагаемого таким же путем найдем

$$\sqrt{1-\sqrt{-3}} = \sqrt{1-i\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}} - i\sqrt{\frac{1}{2}},$$

откуда искомая сумма

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}} = 2\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{6},$$

что и требовалось установить.

Автором этой задачи является немецкий математик и философ Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716) родом из Лейпцига, сын нотариуса и профессора морали. В родном городе поступил в университет, где изучал юридические науки. Математика привлекла его своей логикой. Еще в детстве, имея пристрастие к чтению научных трактатов, изучил труды Аристотеля и Декарта.

Научную работу Лейбниц сочетал с государственной деятельностью в качестве дипломатического посланника в Париже. В 1673 г. он был в Англии, где продемонстрировал Королевскому обществу арифмометр собственной конструкции, изобретенный им после ознакомления с арифмометром Паскаля. После возвращения в Париж он вскоре был избран членом Королевского общества.

Одновременно с Ньютоном и независимо от него Лейбниц дал современную разработку математического анализа — дифференциального и интегрального исчисления.

Ученый положил начало теории определителей, которая возникла при решении систем уравнений первой степени со многими неизвестными. Кроме того, Лейбниц много трудился по исследованию свойств кривых и по разложению функций в ряды, где достиг также замечательных результатов.

228. 1) Необходимость. Пусть прямые AL, BM, CN (рис. 61, *а*) пересекаются в одной точке O (случай, когда

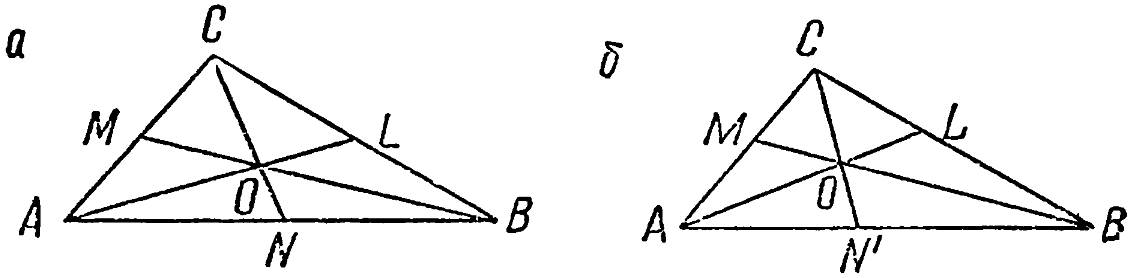


Рис. 61

прямые параллельны, рекомендуется рассмотреть самостоятельно). Докажем, что в этом случае выполняется соотношение

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1.$$

Исходя из чертежа, получим

$$\frac{AN}{NB} = \frac{S_{\Delta ACN}}{S_{\Delta NCB}} = \frac{S_{\Delta AON}}{S_{\Delta NOB}} = $$
$$= \frac{S_{\Delta ACN} - S_{\Delta AON}}{S_{\Delta NCB} - S_{\Delta NOB}} = \frac{S_{\Delta AOC}}{S_{\Delta BOC}},$$

Аналогично доказывается, что

$$\frac{BL}{LC}=\frac{S_{\Delta BOA}}{S_{\Delta COA}} \text{ и } \frac{CM}{MA}=\frac{S_{\Delta COB}}{S_{\Delta AOB}},$$

откуда после перемножения и сокращения найдем

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=\frac{S_{\Delta AOC}}{S_{\Delta BOC}}\cdot\frac{S_{\Delta BOA}}{S_{\Delta COA}}\cdot\frac{S_{\Delta COB}}{S_{\Delta AOB}}=1.$$

2) Достаточность. Пусть теперь выполняется соотношение

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=1.$$

Докажем, что в этом случае прямые AL, BM, CN пересекаются в одной точке.

Обозначим точку пересечения прямых AL и BM через O (рис. 61, *б*) и соединим ее с точкой C. Прямые AL, BM, CN' пересекаются в одной точке O по построению, следовательно, для них на основании первой части решения (необходимости условия) выполняется соотношение

$$\frac{AN'}{N'B}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=1. \tag{2}$$

Приравнивая левые части равенств (1) и (2) и производя сокращения, получаем

$$\frac{AN'}{N'B}=\frac{AN}{NB},$$

или

$$\frac{AN'+N'B}{N'B}=\frac{AN+NB}{NB},$$

или

$$\frac{AB}{N'B}=\frac{AB}{NB},$$

откуда

$$N'B=NB$$

или $\qquad N'$ совпадает с N.

Следовательно, прямая CN, совпадая с прямой CN', пройдет через точку O, т. е. все три прямые AL, BM, CN пересекаются в одной точке, а именно в точке O.

Джиованни Чева (1648—1734) — итальянский геометр, по профессии инженер-гидравлик. Задача Чевы взята из его трактата «О прямых линиях» (1678). Свою задачу Чева решил несколькими способами, чисто геометрически и опираясь на законы статики, т. е. исходя из механических соображений.

229. 1) Рассмотрим произвольный треугольник ABC и проведем его медианы AL, BM, CN (рис. 62, *а*);

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1,$$

так как для медиан

$$AN = NB;\ BL = LC;\ CM = MA.$$

Раз соотношение

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

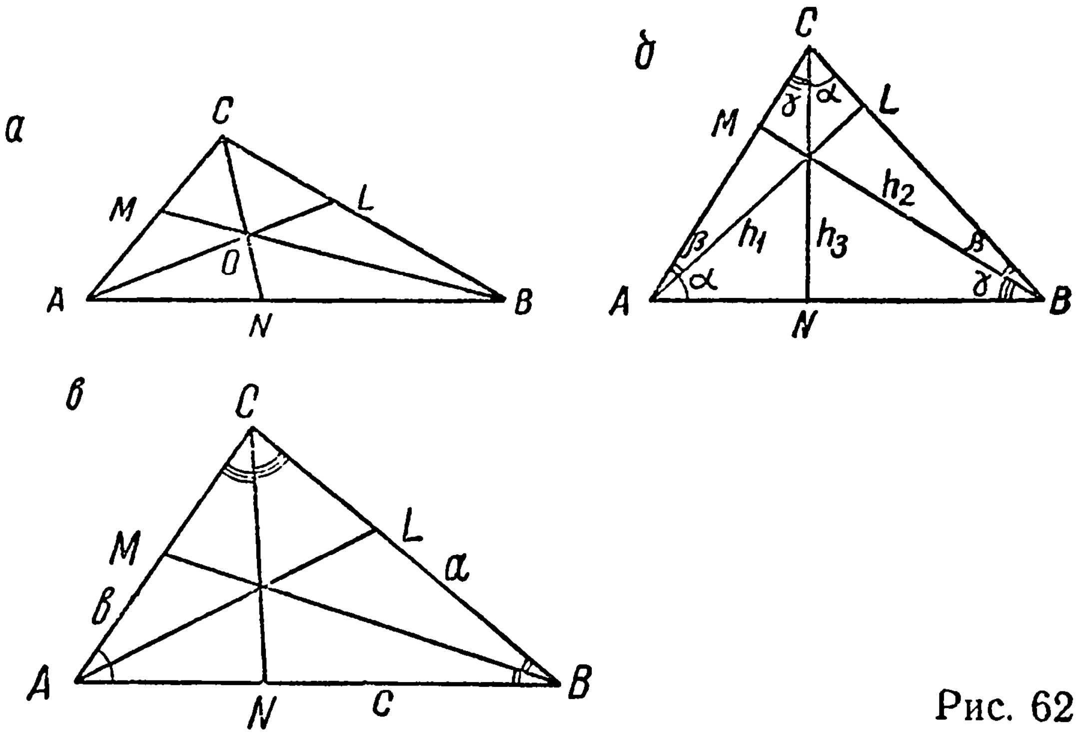


Рис. 62

выполняется, то медианы AL, BM, CN пересекаются в одной точке.

2) AL, BM, CN — высоты треугольника ABC (рис. 62, *б*).

Обозначим углы, образованные высотами со сторонами треугольника ABC, через α, β, γ. Тогда

$$\frac{AN}{NB}=\frac{h_3\operatorname{tg}\gamma}{h_3\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha}; \tag{1}$$

$$\frac{BL}{LC}=\frac{h_1\operatorname{tg}\alpha}{h_1\operatorname{tg}\beta}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}; \tag{2}$$

$$\frac{CM}{MA}=\frac{h_2\operatorname{tg}\beta}{h_2\operatorname{tg}\gamma}=\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\gamma}. \tag{3}$$

После умножения соотношений (1), (2), (3) получим

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha}\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\cdot\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\gamma}=1.$$

Последнее соотношение говорит о том, что высоты треугольника AL, BM, CN пересекаются в одной точке.

3) Пусть теперь AL, BM, CN — биссектрисы углов A, B, C треугольника ABC (рис. 62, *в*). Обозначим стороны данного треугольника для краткости через a, b, c. Тогда на основании известного свойства биссектрисы треугольника напишем соотношения:

$$\frac{AN}{NB}=\frac{b}{a};\quad \frac{BL}{LC}=\frac{c}{b};\quad \frac{CM}{MA}=\frac{a}{c}.$$

Перемножив эти равенства, получим

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=1.$$

Следовательно, биссектрисы AL, BM, CN пересекаются в одной точке.

230. Для членов геометрической прогрессии u_1, u_2, ..., u_n, u_{n+1} имеет место соотношение

$$u_1:u_2=u_n:u_{n+1},$$

где $n=2,\ 3,\ 4,\ \ldots$

Положим, что данная геометрическая прогрессия возрастающая, тогда u_1 будет наименьшим, а u_{n+1} — наибольшим ее членом. По известному неравенству Евклида

$$u_{n+1} + u_1 > u_2 + u_n;$$
$$u_{n+1} > u_n + (u_2 - u_1).$$

При $n = 2, 3, 4, \ldots$

$$u_3 > u_2 + (u_2 - u_1);$$
$$u_4 > u_3 + (u_2 - u_1);$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$u_{n+1} > u_n + (u_2 - u_1).$$

Сложив эти неравенства, получим

$$u_{n+1} > u_2 + (n - 1)(u_2 - u_1). \qquad (1)$$

Учитывая данные условия, находим

$$u_2 + (n - 1)(u_2 - u_1) = a_2 + (n - 1)(a_2 - a_1) = a_{n+1}. \qquad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) окончательно следует

$$u_{n+1} > a_{n+1},$$

где $n = 2, 3, 4, \ldots$, что и требовалось доказать.

Якоб Бернулли (1654—1705) — швейцарский ученый, профессор Базельского университета. Известен своими работами по дифференциальной геометрии, вариационному исчислению (является основоположником) и математической физике.

231. Предположим, что лошадь куплена за x пистолей, тогда при продаже некто потерял $\frac{x^2}{100}$ пистолей. Следовательно, согласно условию задачи,

$$x - \frac{x^2}{100} = 24.$$

Решая полученное квадратное уравнение, получаем два результата: $x_1 = 40$ и $x_2 = 60$.

Таким образом, некто купил лошадь за 40 или 60 пистолей.

Решенная задача составлена французским математиком Этьеном Безу (1730—1783). Его перу принадлежат исследования по общей теории алгебраических уравнений (1779), а также известная теорема о делимости алгебраического многочлена на разность $x - a$, где a — корень многочлена (теорема Безу). Безу является также автором многих учебников, бывших весьма популярными в свое время.

232. Доказательство ведется методом полной математической индукции.

1) Утверждение справедливо при $n = 1$. Действительно, тогда

$$f_1(x) = a_0 x + a_1;$$
$$f_1(x) = a_0 (x - b) + a_0 b + a_1;$$
$$f_1(x) = a_0 (x - b) + f_1(b).$$

Из последнего видно, что остатком от деления $f_1(x)$ на $x - b$ является $f_1(b)$.

2) Пусть теперь утверждение справедливо при $n = k$. Докажем, что оно будет справедливо и при $n = k + 1$.

Согласно предположению,

$$f_k(x) = (x - b)\,\varphi(x) + f_k(b).$$

Далее,

$$f_{k+1}(x) = a_0x^{k+1} + a_1x^k + \ldots + a_kx + a_{k+1} =$$
$$= x(a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k) + a_{k+1} = xf_k(x) + a_{k+1} =$$
$$= x[(x - b)\,\varphi(x) + f_k(b)] + a_{k+1} =$$
$$= x(x - b)\,\varphi(x) + xf_k(b) + a_{k+1}.$$

Остаток от деления $f_{k+1}(x)$ на $x - b$ равняется остатку от деления $xf_k(b) + a_{k+1}$ (многочлена первой степени) на $x - b$. Но на основании первого пункта для многочлена первой степени утверждение выполняется. Следовательно, остаток от деления $f_{k+1}(x)$ на $x - b$ будет

$$bf_k(b) + a_{k+1} = a_0 b^{k+1} + a_1 b^k + \ldots +$$
$$+ a_k b + a_{k+1} = f_{k+1}(b).$$

Таким образом, утверждение выполняется при $n = k + 1$, а значит, и для любого n, что и требовалось доказать.

233. Доказательство ведется методом от противного. Предположим, что сумма внутренних углов в каком-нибудь треугольнике ABC будет больше $2d$. Продолжим сторону AC (рис. 63) и от точки C вправо отложим $n - 1$ отрезков CC_1, C_1C_2, C_2C_3, ..., $C_{n-2}C_{n-1}$, равных стороне AC. Тогда будем иметь

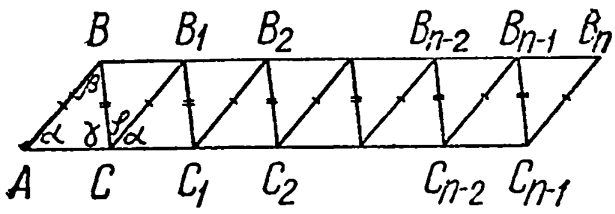


Рис. 63

$$CC_1 = C_1C_2 = \ldots = C_{n-2}C_{n-1} = AC.$$

Теперь на полученных отрезках как на основаниях построим треугольники: CB_1C_1, $C_1B_2C_2$, ..., $C_{n-2}B_{n-1}C_{n-1}$, равные заданному, т. е.

$$\triangle ABC = \triangle CB_1C_1 = \triangle C_1B_2C_2 =$$
$$= \ldots = \triangle C_{n-2}B_{n-1}C_{n-1}.$$

Далее, соединив точки B и B_1, B_1 и B_2, ..., B_{n-2} и B_{n-1} прямолинейными отрезками (считать, что эти точки располагаются на одной прямой, у нас нет основания), получим равные треугольники: BCB_1, $B_1C_1B_2$, $B_2C_2B_3$, ..., $B_{n-2}C_{n-2}B_{n-1}$.

На отрезке $B_{n-1}C_{n-1}$ построим еще один треугольник $B_{n-1}C_{n-1}B_n$, равный каждому из только что построенных треугольников.

Известно, что если две стороны одного треугольника равны двум сторонам другого, то против большего угла, заключенного между этими сторонами, лежит и большая сторона. Применяя сказанное к треугольникам ABC и BCB_1, заключаем, что $BB_1 < AC$, откуда $AC - BB_1 > 0$, т. е. $AC - BB_1$ есть некоторый отрезок.

Поскольку длина ломаной всегда больше длины замыкающего прямолинейного отрезка, то

$$AB + BB_1 + B_1B_2 + \ldots + B_{n-1}B_n +$$
$$+ B_nC_{n-1} > AC + CC_1 + C_1C_2 + \ldots + C_{n-2}C_{n-1},$$

откуда

$$AB + n \cdot BB_1 + B_nC_{n-1} > n \cdot AC.$$

Учитывая, что $B_nC_{n-1} = AB$, получаем

$$2AB + n \cdot BB_1 > n \cdot AC \text{ или } n(AC - BB_1) < 2AB$$

при любом натуральном n.

Последнее неравенство противоречит аксиоме Архимеда, согласно которой для любых двух отрезков меньший можно повторить слагаемым конечное число раз так, что результат превзойдет больший отрезок. По этой аксиоме для отрезков $AC - BB_1$ и $2AB$ можно подобрать достаточно большое натуральное число n такое, что будет выполняться неравенство

$$n(AC - BB_1) > 2AB.$$

Получается логическое противоречие. Выходит, что в геометрической системе, где выполняется аксиома Архимеда, сумма внутренних углов в треугольнике не может быть больше $2d$, что и требовалось доказать.

Андриен Мари Лежандр (1752—1833) — французский математик. Известен трудами по математическому анализу и вариационному исчислению. Первый из ученых открыл (1805) и применил в своих геодезических вычислениях способ наименьших квадратов. Автор «Начал геометрии», получивших широкое распространение во Франции и далеко за ее пределами. В частности, «Начала геометрии» были известны и в России; по ним, например, учился Н. И. Лобачевский (1792—1856).

Задача взята из мемуара Лежандра «Размышление о параллельных линиях» (1833). Эта же задача в виде теоремы приводилась еще раньше в его «Началах геометрии».

234. Эта задача приписывается Наполеону. Чтобы решить ее, надо при помощи циркуля от произвольной точки A данной окружности засечь на этой окружности три точки B, C и D при условии $AB = BC = CD = r$, где r — радиус данного круга (рис. 64).

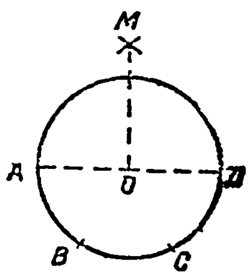


Рис. 64

Поскольку AC — сторона вписанного в круг треугольника, она равняется $r\sqrt{3}$. Из точек A и D, которые являются концами диаметра AD, радиусом, равным AC, засекаем дуги, пересекающиеся в точке M. Отрезок OM равен искомому раствору циркуля, который разделит окружность на четыре равные части.

Действительно, $OM = \sqrt{AM^2 - AO^2} = \sqrt{3r^2 - r^2} = r\sqrt{2}$ является стороной вписанного в круг квадрата, вершины которого делят данный круг на четыре равные части. Сами вершины вписанного в круг квадрата получить очень легко. Для этого стоит только раствором циркуля, равным OM, засечь на окружности последовательно четыре точки.

235. Доказательство состоит из следующих рассуждений:

$$a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 - 4a^2 =$$
$$= (a^2 + 2)^2 - (2a)^2 = (a^2 + 2 + 2a)(a^2 + 2 - 2a),$$

где $a^2 + 2 + 2a \neq 1$ и $a^2 + 2 - 2a = (a - 1)^2 + 1 \neq 1$.

Таким образом, $a^4 + 4$ имеет два различных делителя, отличных от него самого и единицы. Следовательно, это число составное, что и нужно было доказать.

Задача принадлежит Софии Жермен (1776—1831), женщине-математику, француженке по происхождению. За мемуар о колебании упругих пластинок она была удостоена премии Парижской академии наук.

236. Пусть $a < p$ и $b < p$, где p — простое число. Докажем, что ab не делится на р.

Предположим противное, т. е. что ab делится на p. Но тогда существует наименьшее положительное число $b_1 \leqslant b$, меньшее p, которое при умножении на a дает число, кратное p. Разделив b_1 на p, получим

$$b_1 = pm + n,$$

где $n < b_1 < p$. Отсюда

$$n = b_1 - pm.$$

Умножив левую и правую части последнего равенства на a, найдем

$$an = ab_1 - apm;$$

an делится на p, так как на p делится ab_1 (по предположению) и apm (p входит сомножителем).

Получается, что an делится на p, но $n < b_1$, следовательно, b_1 — не наименьшее положительное число, для которого ab_1 делится на p, что противоречит сделанному предположению. Значит, ab не делится на p, что и требовалось доказать.

Карл Фридрих Гаусс (1777—1855) — немецкий ученый, которого современники называли «королем математиков». Математическое дарование Гаусса обнаружилось еще в раннем детстве. Вспоминая детские годы, Гаусс в шутку говорил о себе: «Я научился считать раньше, чем говорить».

Родился Гаусс в Брауншвейге в семье водопроводчика и фонтанных дел мастера. Первоначальное образование получил в народной школе, куда поступил 7 лет. Там он поражал учителя и своих товарищей блестящими математическими способностями.

Высшее образование Гаусс получил в Геттингенском университете. Позднее (1807) он в течение почти 50 лет занимал в этом университете кафедру математики и астрономии. Еще на студенческой скамье в возрасте 19 лет Гаусс сделал замечательное открытие: он полностью выяснил, в каких случаях возможно построить правильный n-угольник циркулем и линейкой. В частности, решив уравнение $x^{17} - 1 = 0$, он дал построение правильного 17-угольника при помощи циркуля и линейки.

По признанию самого Гаусса, большая и сложная вычислительная работа, связанная с астрономическими расчетами, не только его не утомляла, а наоборот, вызывала бодрость, внутреннее удовлетворение.

Гаусс с помощью тщательных вычислений установил с большой точностью местонахождение планеты Цереры, которую тщетно искали другие астрономы.

Занимаясь вопросами математики, Гаусс далеко продвинул вперед теорию рядов и теорию дифференциальных уравнений. Ему принадлежит основная теорема высшей алгебры о том, что всякое алгебраическое уравнение n-й степени имеет хотя бы один корень, причем этот корень может быть и мнимым. В трактате «Арифметические исследования» он заложил основы современной теории чисел. Имеет фундаментальные работы по дифференциальной теории поверхностей. В области физики занимался теорией магнетизма и некоторыми вопросами оптики.

Еще в 1818 г. в переписке с некоторыми учеными Гаусс высказал мысль о возможности существования наряду с евклидовой геометрией геометрии неевклидовой (позднее стала называться геометрией Лобачевского). Однако, боясь быть непонятым, дальше этих писем Гаусс, к сожалению, не пошел и ни одной статьи по данному вопросу не опубликовал.

237. Решение данной задачи сводится к делению окружности единичного радиуса на 17 равных частей. Для этого надо построить точки (рис. 65, *а*)

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},$$

где $i = \sqrt{-1}$; $k = 0, 1, 2, \ldots, 16$; z_k являются корнями уравнения $z^n - 1 = 0$.

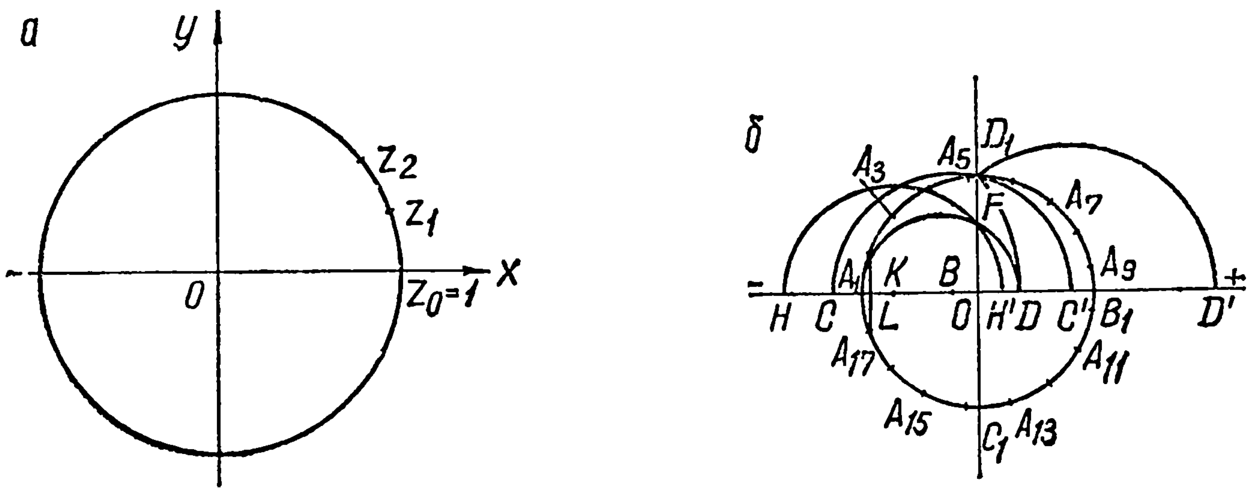


Рис. 65

Пусть

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{17} + i\sin\frac{2\pi}{17}.$$

Тогда по известной формуле Муавра

$$\varepsilon^k = \cos\frac{2k\pi}{17} + i\sin\frac{2k\pi}{17},$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, 16$. Корнями уравнения

$$z^{17} - 1 = 0$$

будут числа

$$1, \quad \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots, \varepsilon^{16}.$$

Все эти корни, как легко усмотреть из их выражений, различны и изображают вершины правильного 17-угольника, вписанного в окружность единичного радиуса.

Далее заметим, что

$$\varepsilon^{17-k} = \varepsilon^{17}\cdot\varepsilon^{-k},$$

но $\varepsilon^{17} = 1$, следовательно,

$$\varepsilon^{17-k} = \varepsilon^{-k}.$$

Поэтому корни семнадцатой степени из единицы могут быть записаны и так:

$$1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ \ldots, \varepsilon^8, \varepsilon^{-8},$$
$$\varepsilon^{-7}, \ \ldots, \varepsilon^{-2}, \varepsilon^{-1}.$$

Известно, что

$$z^{17} - 1 = (z-1)(z^{16} + z^{15} + \ldots + z^2 + z + 1),$$

следовательно, все корни 17-й степени из единицы, кроме единицы, должны удовлетворять уравнению

$$z^{16} + z^{15} + \ldots + z^2 + z + 1 = 0,$$

т. е.

$$\varepsilon^{16} + \varepsilon^{15} + \ldots + \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$$

или

$$\varepsilon^{16} + \varepsilon^{15} + \ldots + \varepsilon^2 + \varepsilon = -1$$

или, что то же,

$$\varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^8 + \varepsilon^{-8} + \varepsilon^{-7} + \ldots + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-1} = -1.$$

Пользуясь коммутативным и ассоциативным законами сложения комплексных чисел, находим

$$(\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \varepsilon^8 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-4} + \varepsilon^{-8}) +$$
$$+ (\varepsilon^3 + \varepsilon^6 + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^7 + \varepsilon^{-3} + \varepsilon^{-6} + \varepsilon^5 + \varepsilon^{-7}) = -1,$$

где в скобках собраны члены, каждый из которых получается в результате возведения предшествующего в квадрат. Обозначим суммы, заключенные в скобках, соответственно через η и η_1. Тогда

$$\eta + \eta_1 = -1.$$

Если теперь умножим η на η_1, то получим

$$\eta\eta_1 = -4,$$

так как в произведении каждая степень числа ε будет повторяться слагаемым четыре раза.

Из двух последних формул вытекает, что η и η_1 являются корнями уравнения

$$x^2 + x - 4 = 0, \tag{1}$$

откуда

$$\eta = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17};$$

$$\eta_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17},$$

причем $\eta > 0$ и $\eta_1 < 0$.

Теперь все мнимые корни семнадцатой степени из единицы разобьем на четыре группы с таким расчетом, чтобы каждый член группы был четвертой степенью предшествующего.

Обозначая суммы членов групп соответственно через z, z_1, z_2, z_3, получим систему равенств

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon + \varepsilon^4 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-4} &= z; \\ \varepsilon^2 + \varepsilon^8 + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-8} &= z_1; \\ \varepsilon^3 + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^{-3} + \varepsilon^5 &= z_2; \\ \varepsilon^6 + \varepsilon^7 + \varepsilon^{-6} + \varepsilon^{-7} &= z^3. \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Отсюда, как легко проверить, вытекают равенства

$$z + z_1 = \eta;$$
$$zz_1 = -1.$$

Таким образом, z и z_1 являются корнями уравнения

$$x^2 - \eta x - 1 = 0, \qquad (2)$$

откуда

$$z = \frac{\eta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 + 1};$$

$$z_1 = \frac{\eta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 + 1},$$

причем $z > 0$ и $z_1 < 0$.

Из той же системы равенств (*) получаем

$$z_2 + z_3 = \eta_1,$$
$$z_2 z_3 = -1.$$

И здесь z_2 и z_3 можно рассматривать как корни уравнения

$$x^2 - \eta_1 x - 1 = 0, \qquad (3)$$

откуда

$$z_2 = \frac{\eta_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\eta_1}{2}\right)^2 + 1};$$

$$z_3 = \frac{\eta_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{\eta_1}{2}\right)^2 + 1},$$

причем $z_2 > 0$ и $z_3 < 0$.

Положив

$$\varepsilon + \varepsilon^{-1} = y;$$

$$\varepsilon^4 + \varepsilon^{-4} = y_1,$$

получим

$$y + y_1 = z;$$

$$yy_1 = z_2,$$

где z — положительный корень уравнения (2), а z_2 — положительный корень уравнения (3).

Выходит, что y и y_1 будут корнями уравнения

$$x^2 - zx + z_2 = 0, \tag{4}$$

откуда

$$y = \frac{z}{2} + \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - z_2};$$

$$y_1 = \frac{z}{2} - \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - z_2},$$

причем $y > y_1$, так как

$$y = \varepsilon + \varepsilon^{-1} = 2\cos\frac{2\pi}{17} \text{ и } y = \varepsilon^4 + \varepsilon^{-4} = 2\cos\frac{2\pi}{17}.$$

Теперь найдем, чему равняется ε из уравнения

$$\varepsilon + \varepsilon^{-1} = y$$

или

$$\varepsilon^2 - y\varepsilon + 1 = 0,$$

откуда

$$\varepsilon = \frac{y}{2} + \sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2 - 1},$$

где перед корнем берется знак плюс, так как $y = 2\cos\frac{2\pi}{17}$, и, следовательно,

$$\varepsilon = \frac{y}{2} + \sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2 - 1} = \frac{y}{2} + i\sqrt{1 - \left(\frac{y}{2}\right)^2} = \cos\frac{2\pi}{17} + i\sin\frac{2\pi}{17} = \varepsilon.$$

Формула

$$\varepsilon = \frac{y}{2} + \sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2 - 1}$$

показывает, что корни семнадцатой степени из единицы могут быть выражены с помощью квадратных радикалов, и, следовательно, могут быть построены с помощью циркуля и линейки. Таким образом, вопрос о построении правильного 17-угольника с помощью циркуля и линейки решен положительно. Теперь покажем, как проводится это построение. Для этой цели строятся следующие отрезки:

$$1)\ \eta = \frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{1}{2};$$

$$2)\ \eta_1 = -\frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{1}{2};$$

$$3)\ z = \frac{\eta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 + 1}\ ;$$

$$4)\ z_2 = \frac{\eta_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\eta_1}{2}\right)^2 + 1}\ ;$$

$$5)\ y = \frac{z}{2} + \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - z_2}\ .$$

Построив y, легко разделить окружность на 17 равных частей. Действительно, как указывалось выше, $y = 2\cos\frac{2\pi}{17}$, следовательно, $\frac{y}{2} = \cos\frac{2\pi}{17}$ есть расстояние от центра той хорды, которая соединяет через одну две вершины 17-угольника. Само построение выполняется следующим образом (рис. 65, *б*):

1) строим окружность единичного радиуса и проводим горизонтальный A_1B_1 и вертикальный D_1C_1 диаметры;

2) на оси, где расположен диаметр A_1B_1, за положительное направление принимаем направление вправо, т. е. от A_1 к B_1, а противоположное направление от B_1 к A_1 (на-

правление влево) считаем отрицательным, так что вправо от нуля будем откладывать положительные отрезки, а влево — отрицательные;

3) строим отрезок $OB = -\frac{1}{4}$;

4) тогда

$$BD_1 = \sqrt{OB^2 + OD_1^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{17}}{4};$$

5) из точки B как из центра описываем окружность радиусом BD_1 и точки пересечения ее с горизонтальной осью обозначаем через C и C', так что

$$BC' = \frac{\sqrt{17}}{4}; \quad BC = -\frac{\sqrt{17}}{4};$$

6) из точек C' и C соответственно радиусом $C'D_1$ и CD_1 проводим окружности, которые пересекают горизонтальную ось в точках D' и D;

7) тогда из чертежа (рис. 65, *б*) получим:

$$OC = OB + BC = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{17}\ \frac{\eta_1}{2};$$

$$OC' = OB + BC' = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{17} = \frac{\eta}{2};$$

$$OD' = OC' + C'D' = \frac{\eta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 + 1} = z;$$

$$OD = OC + CD = \frac{\eta_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\eta_1}{2}\right)^2 + 1} = z_2;$$

8) на отрезке A_1D как на диаметре строим полуокружность, которая пересекает радиус OD_1 в точке F;

9) из точки F как из центра радиусом $FK = \frac{1}{2}OD'$ делаем засечку K;

10) из точки K как из центра радиусом KF опишем полуокружность, которая на горизонтальной оси дает засечки H и H';

11) тогда

$$-OH + OH' = HH' = 2KH' = OD' = z,$$
$$-OH \cdot OH' = OF^2 = -OA_1 \cdot OD = OD = z_2,$$

так как $-OA_1 = 1$. Следовательно, отрезки $-OH$ и OH' будут корнями уравнения

$$x^2 - zx + z_2 = 0.$$

Но это уравнение совпадает с уравнением (4), корнями которого являются y и y_1. Следовательно, $y = -OH$ и $y_1 = OH'$, причем $y > y_1$;

12) берем больший корень y и строим отрезок

$$OL = \frac{y}{2} = \frac{-OH}{2};$$

13) восставим в точке L перпендикуляр, который пересечет окружность в точках A_2 и A_{17}, причем дуга $A_1A_2 = \frac{2\pi}{17}$, а ее хорда будет искомой стороной правильного 17-угольника;

14) для окончательного получения правильного 17-угольника остается только отложить дугу A_1A_2 по окружности и соединить последовательно полученные точки хордами.

Задачу о построении правильного 17-угольника с помощью циркуля и линейки, как уже указывалось выше, Гаусс решил в 19 лет. Общие рассуждения о возможности построения правильного n-угольника уже тогда приводят его к доказательству следующей замечательной теоремы: «Построение правильного n-угольника с помощью циркуля и линейки возможно в том и только в том случае, когда число n может быть представлено в виде

$$2^m p_1 p_2 \ldots p_s,$$

где p_1, p_2, ..., p_s — различные простые числа вида $2^{2^k}+1$».

В частности, когда n — число простое, то для построения правильного n-угольника необходимо и достаточно, чтобы n имело вид $2^{2^k}+1$.

Учитывая последнее условие, находим, что $17=2^{2^k}+1$ при $k=2$, следовательно, правильный 17-угольник можно построить с помощью циркуля и линейки. Точно так же проверяется возможность построения следующих правильных n-угольников: треугольника ($3=2^{2^k}+1$ при $k=0$), пятиугольника ($5=2^{2^k}+1$ при $k=1$) и т. д. По теореме Гаусса, например, нельзя с помощью циркуля и линейки построить правильный семиугольник, так как число 7 нельзя представить в форме $2^{2^k}+1$.

238. Задача имеет два решения.

Первое решение

12	8	5
12	0	0
4	8	0
4	3	5
9	3	0
9	0	3
1	8	3
1	6	5
6	6	0

Второе решение

12	8	5
12	0	0
7	0	5
0	7	5
0	8	4
8	0	4
8	4	0
3	4	5
3	8	1
11	0	1
11	1	0
6	1	5
6	6	0

Данной задачей еще в молодости занимался французский математик Симеон Дени Пуассон (1781—1840). Эта задача, по словам самого Пуассона, определила его судьбу: он решил, что непременно будет математиком.

Время показало, что ученый сдержал свое слово. Пуассон действительно стал математиком с мировым именем. Он был членом многих европейских академий, в частности почетным членом Петербургской академии наук.

239. Надо доказать, что среднее арифметическое n положительных чисел не меньше среднего геометрического этих чисел. Это предложение можно доказывать по-разному. Воспроизводим доказательство Коши.

Итак, требуется доказать, что

$$\frac{x_1+x_2+\ldots x_n}{n} \geqslant \sqrt{x_1x_2\ldots x_n}\,.$$

При $n=1$ справедливость неравенства очевидна. Докажем, что неравенство выполняется и при $n=2$, т. е.

$$\frac{x_1+x_2}{2} \geqslant \sqrt{x_1x_2}\,.$$

Действительно,

$$\frac{x_1+x_2}{2} - \sqrt{x_1x_2} = \frac{1}{2}(x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2}) =$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2 \geqslant 0.$$

Докажем теперь, что если неравенство справедливо при $n=m$, то оно справедливо и при $n=2m$.

В самом деле,

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{2m-1}+x_{2m}}{2m} =$$

$$= \frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}+\ldots+\frac{x_{2m-1}+x_{2m}}{2}}{m} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[m]{\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{x_3+x_4}{2}\cdots\frac{x_{2m-1}+x_{2m}}{2}} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[m]{\sqrt{x_1x_2}\cdot\sqrt{x_3x_4}\ldots\sqrt{x_{2m-1}x_{2m}}} =$$

$$= \sqrt[2m]{x_1x_2x_3\ldots x_{2m-1}x_{2m}}\,.$$

Выходит, что если неравенство справедливо для $n = m$, то оно справедливо и для $n = 2m$. Но мы знаем, что неравенство выполняется при $n = 2$, тогда по доказанному будет выполняться для $n = 4, 8, 16, \ldots$, т. е. для всех натуральных чисел, равных любой степени двух. Теперь остается доказать, что неравенство имеет место для любого натурального числа n. Пусть n — произвольное натуральное число. Если оно окажется степенью двух, то по доказанному неравенство будет выполняться. Если же n не является степенью двух, то к нему прибавим такое натуральное число q, чтобы $n + q$ стало степенью двух, т. е. $n + q = 2^m$.

Принимая во внимание предыдущее, получим неравенство

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+q}}{n+q} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[n+q]{x_1 x_2 x_3 \ldots x_n x_{n+1} \ldots x_{n+q}},$$

справедливое при всех положительных значениях

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ x_{n+1},\ \ldots,\ x_{n+q}.$$

В частности, это неравенство будет выполняться при значениях

$$x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_{n+q} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

В этом случае будем иметь

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} q}{n+q} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[n+q]{x_1 x_2 \ldots x_n \left(\frac{x_1 + x_2 \ldots + x_n}{n}\right)^q},$$

откуда

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n+q]{x_1 x_2 \ldots x_n \left(\frac{x_1 + x_2 \ldots + x_n}{n}\right)^q}$$

или

$$\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^{n+q} \geqslant x_1x_2\ldots x_n\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^q.$$

После известного упрощения получим

$$\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^n \geqslant x_1x_2x_3\ldots x_n.$$

Следовательно,

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1x_2x_3\ldots x_n},$$

что и требовалось доказать.

Знак равенства в полученном соотношении может быть только в том случае, если все $x_i (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ равны между собой, т. е. когда $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Действительно, положив в этом соотношении все x_i равными, непосредственной проверкой убеждаемся в равенстве левой части соотношения правой. Если же хотя бы два значения x_i не равны между собой, то рассматриваемое соотношение будет иметь знак неравенства, т. е. левая часть будет больше правой. Докажем это. Пусть, например, $x_1 \neq x_2$, а другие x_i — какие угодно положительные числа. Тогда

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n} =$$

$$= \frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_1+x_2}{2}+x_3+\ldots+x_n}{n} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[n]{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 x_3\ldots x_n},$$

но

$$\frac{x_1+x_2}{2} > \sqrt{x_1x_2},$$

откуда

$$\sqrt[n]{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 x_3\ldots x_n} > \sqrt[n]{x_1x_2x_3\ldots x_n}.$$

Окончательно получим:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} > \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} ,$$

что и требовалось доказать.

Огюстен Луи Коши (1789—1857) — французский математик, работавший главным образом в области математического анализа (дифференциальные уравнения, теория рядов) и теории функций комплексного переменного. Член Парижской академии наук.

240. Задача решается различными способами. Приводим один из них, основанный на использовании стереометрического чертежа (взят из книги Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова, И. М. Яглома «Избранные задачи и теоремы элементарной математики», ч. II. М., 1952, с. 312—313).

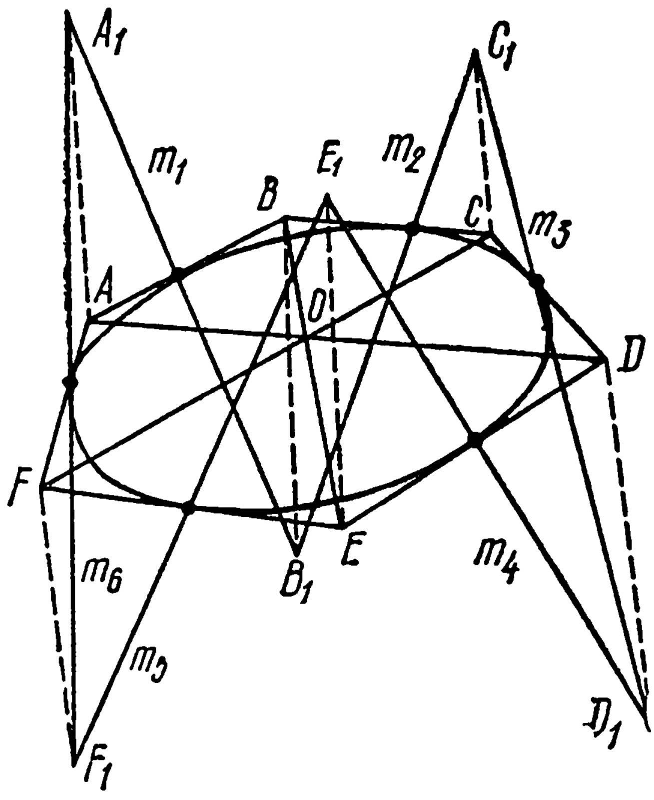


Рис. 66

Построим пространственный шестиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, проекцией которого являлся бы данный плоский шестиугольник $ABCDEF$ (рис. 66). Для этой цели повернем каждую из прямых m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, лежащих на сторонах данного шестиугольника, на 45° вокруг радиуса, проведенного в точку касания, причем прямые с нечетными номерами (m_1, m_3, m_5) — в одну сторону, а прямые с четными номерами (m_2, m_4, m_6) — в другую. Заметим, что каждая прямая с нечетным номером будет пересекаться, а следовательно, и лежать в одной плоскости с каждой прямой с четным номером, так как эти прямые симметричны относительно плоскости, перпендикулярной к плоскости чертежа, в которой лежит шестиугольник $ABCDEF$, и проходящей через биссектрису угла, образованного проекциями. Точки пересечения прямых m_1 и m_2, m_2 и m_3, m_3 и m_4, m_4 и m_5, m_5 и m_6, m_6 и m_1 обозначим через B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, A_1. Таким образом, получается пространственный шестиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, проекцией которого на плоскость чертежа и является шестиугольник $ABCDEF$.

Соединим теперь противоположные вершины шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ прямыми A_1D_1, B_1E_1, C_1F_1. Эти прямые попарно пересекаются между собой, так как лежат в одной плоскости. Рассмотрим, например, прямые A_1D_1 и B_1E_1. Они пересекаются, так как, будучи непараллельными, лежат в одной плоскости — плоскости пересекающихся прямых $m_1 = A_1B_1$ и $m_4 = E_1D_1$.

Прямые A_1D_1, B_1E_1, C_1F_1 одновременно не лежат в одной плоскости, следовательно, они, пересекаясь попарно, пересекутся в одной точке O_1 (на чертеже не указана). Проекция O_1 на плоскость (точка O) и будет точкой пересечения прямых AD, BE, CF, что и требовалось доказать.

Ш. Ж. Брианшон (1785—1864) — французский математик. Свою задачу об описанном около круга шестиугольнике он доказал при помощи теории полюсов и поляр, разработанной французским геометром Понселе.

При помощи центрального проектирования Брианшон свою задачу распространил на все конические сечения, получив таким образом теорему, которая, как и теорема Паскаля, играет основополагающую роль в современной проективной геометрии и ее приложениях. Теорема Брианшона читается так: во всяком шестиугольнике, описанном около конического сечения (окружность, эллипс, парабола, гипербола, пара прямых), прямые, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке (точке Брианшона).

Интересно заметить, что теоремы Паскаля и Брианшона в проективной геометрии стоят рядом и одна вытекает из другой на основании так называемого малого принципа двойственности путем формальной замены в формулировках термина «точка» термином «прямая» и наоборот. Однако исторически теорема Брианшона была сформулирована позднее теоремы Паскаля более чем на 150 лет.

241. Рассмотрим шестиугольник, описанный около окружности. В этом шестиугольнике, согласно рассмотренной задаче Брианшона, прямые, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке (точке Брианшона). Если же теперь точки касания двух соседних сторон шестиугольника будем сближать по окружности до совмещения, то шестиугольник превратится в пятиугольник (одна сторона будет двойная, а ее точка касания с окружностью станет вершиной) и, согласно задаче Брианшона, в этом предельном случае будет иметь место следующее утверждение: в любом пятиугольнике, описанном около окружности, прямые, соединяющие две пары несмежных вершин, и прямая, соединяющая пятую вершину с точкой касания противоположной стороны, пересекаются в одной точке (рис. 67, *а*).

Рассмотрим теперь четырехугольник, описанный около окружности, как шестиугольник, у которого две стороны двойные, а их точки касания с окружностью являются вершинами. Тогда будем иметь следующее утверждение: во всяком четырехугольнике, описанном около окружности,

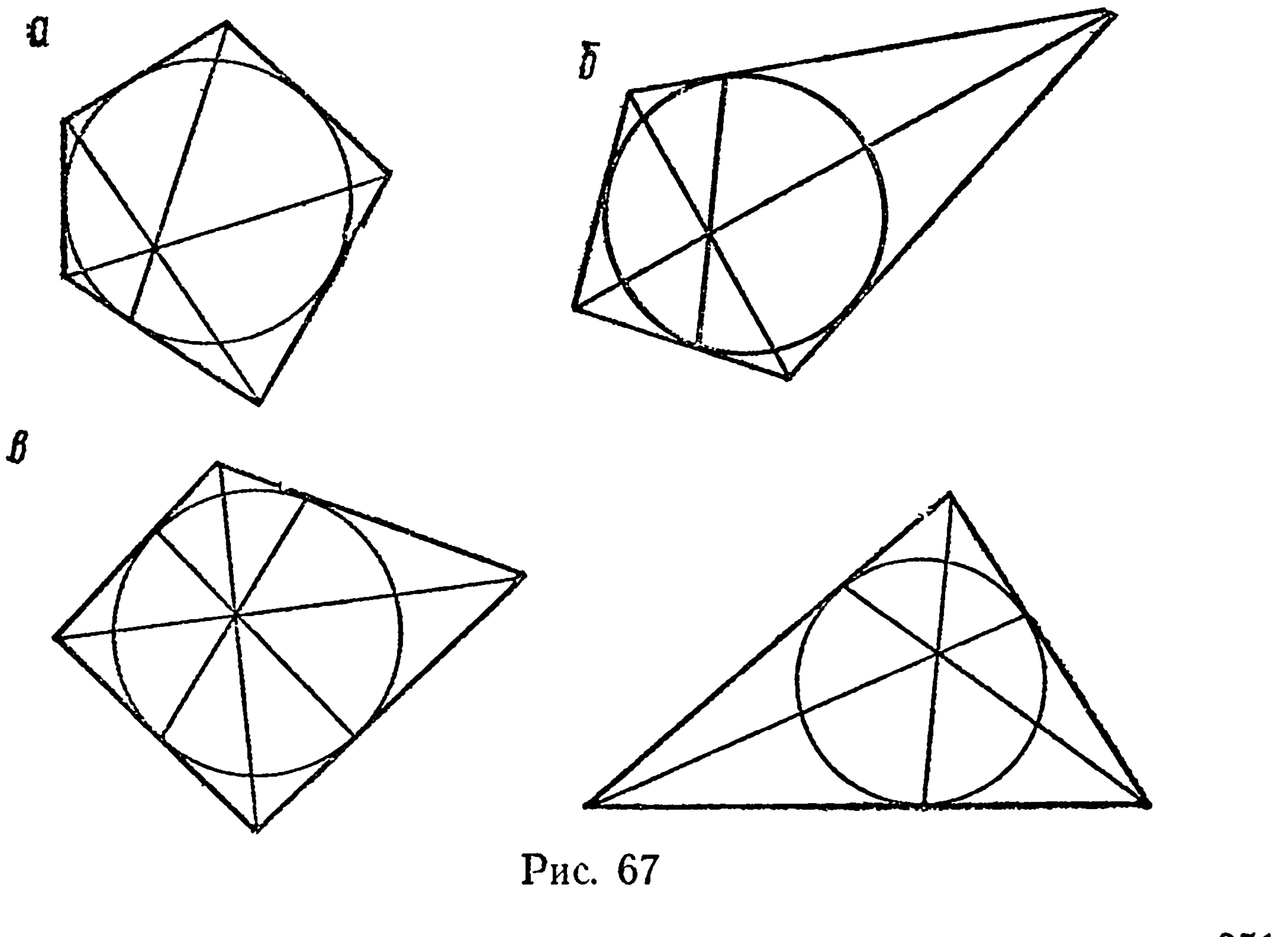


Рис. 67

две его диагонали и прямая, соединяющая точки касания двух его противоположных сторон, пересекаются в одной точке (рис. 67, *б*).

Не представляет трудности (подумайте, как это сделать), пользуясь последним результатом, получить следующее предложение: во всяком четырехугольнике, описанном около окружности, две его диагонали и две прямые, соединяющие точки касания противоположных сторон, пересекаются в одной точке (рис. 67, *в*).

Если рассматривать треугольник, описанный около окружности, как шестиугольник, у которого три стороны двойные, а вершинами являются три вершины треугольника и три точки касания его сторон (всего 6 вершин), тогда выполняется следующее предложение: во всяком треугольнике, описанном около окружности, прямые, соединяющие вершины с точками касания противоположных сторон, проходят через одну точку (рис. 67, *г*).

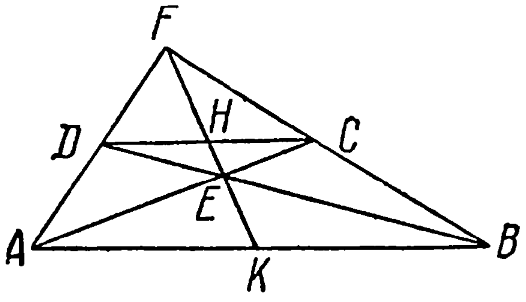


Рис. 68

242. На основании задачи (теоремы) Чевы (рис. 68) имеем

$$\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BC}{CF}\cdot\frac{FD}{DA}=1. \tag{1}$$

С другой стороны,

$$\frac{FD}{DA}=\frac{FC}{CB}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) вытекает

$$\frac{AK}{KB}=1$$

или

$$AK = KB,$$

что и требовалось доказать.

Можно дать решение этой задачи без ссылки на задачу Чевы (см., например, книгу С. М. Зетель «Геометрия линейки и геометрия циркуля». М., 1957, с. 34).

Якоб Штейнер (1796—1863) — швейцарский математик, один из создателей проективной геометрии, член Берлинской академии наук и с 1835 г. профессор Берлинского университета. Много внимания уделял задачам на геометрические построения при помощи линейки и фиксированной неподвижной окружности.

243. Соединим концы диаметра AB (рис. 69) с точкой M и обозначим точки пересечения прямых AM и BM с окружностью соответственно через C и D. Пусть E — точка пересечения прямых AC и BD. Тогда прямая ME, пересекающая прямую AB в точке K, и будет искомым перпендикуляром, опущенным из точки M на прямую AB (почему? проанализируйте сами).

244. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC и произвольный неравнобедренный треугольник ABD (рис. 70), имеющий с равнобедренным общее основание AB и равные суммы боковых сторон, т. е. $AD + DB = AC + CB$.

Треугольник ABE составляет общую часть треугольников ABC и ABD. Чтобы решить задачу, достаточно показать,

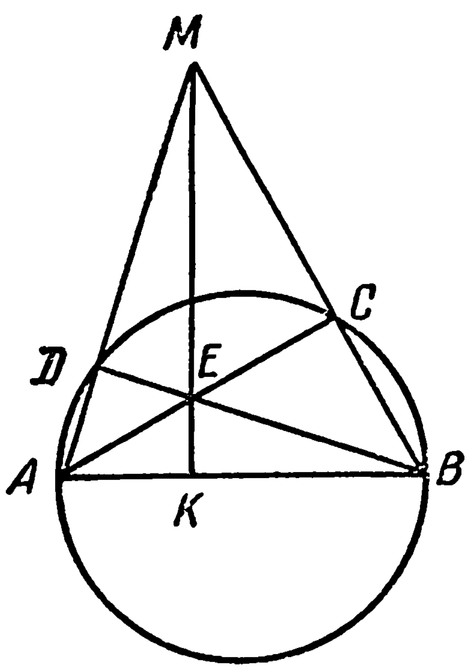


Рис 69

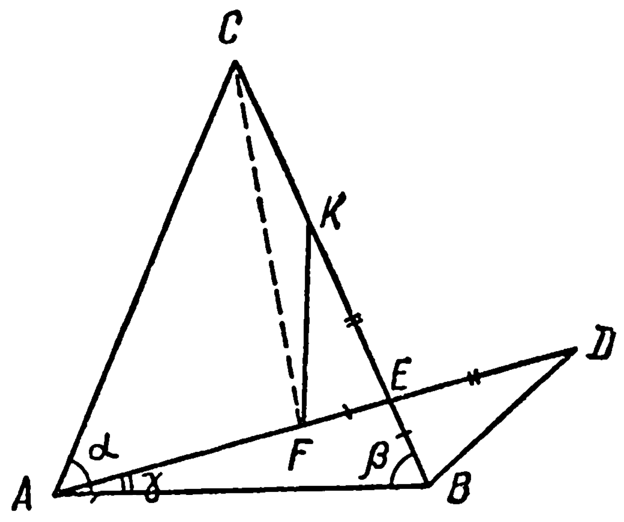


Рис. 70

что треугольник BDE составляет часть треугольника ACE. Для этого на прямых EA и EC возьмем соответственно точки F и K так, чтобы $EF = EB$ и $EK = ED$. Ясно, что треугольник FKE равен треугольнику BDE. Теперь остается доказать, что точка F лежит между точками A и E, а точка K — между точками C и E.

Рассмотрим треугольник AEB. В этом треугольнике $\gamma < \beta$, так как $\gamma < \alpha$, а $\alpha = \beta$ (по условию треугольник ABC равнобедренный). Отсюда $AE > BE$ и $AE > FE$, так как $BE = FE$. Следовательно, точка F лежит между точками A и E.

Предположим теперь, что точка K лежит между точками C и E. Тогда будет выполняться неравенство:

$$AF + FK + KE + EF < AF + FC + CE + EF;$$

$$EF = EB,\ KE = ED,\ FK = BD,$$

$$AF + DB + ED + EF < AF + FC + CE + EB,$$

$$AF + FE + ED + DB < AE + FC + CB,$$

$$AD + DB < AF + FC + CB.$$

Но по условию

$$AD + DB = AC + CB,$$

следовательно,

$$AC + CB < AF + FC + CB$$

или

$$AC < AF + FC.$$

Получили справедливое неравенство, следовательно, справедливо и исходное утверждение о том, что точка K лежит между точками C и E.

245. Решение Штурма. Пусть x — искомое число дней. Путь, пройденный первым курьером, есть сумма членов арифметической прогрессии, крайние члены которой 10 и $10 + \frac{x-1}{4}$, т. е. этот путь равен $\left(20 + \frac{x-1}{4}\right) \times$

$\times\frac{x}{2}$ или $\frac{(79+x)x}{8}$. Второй курьер находится в дороге до встречи с первым $x-3$ дня и проезжает

$$\left[14+\frac{(x-4)2}{3}\right]\frac{x-3}{2}$$

или

$$\left(\frac{(17+x)(x-3)}{3}\right) \text{ (лье.)}$$

По условию

$$\frac{(79+x)x}{8}-\frac{(17+x)(x-3)}{3}-40=0 \qquad (1)$$

или

$$5x^2-125x+552=0, \qquad (2)$$

откуда

$$x_1=5{,}72\ldots;\ x_2=19{,}27\ldots$$

Предполагалось, что x — число целое, следовательно, корни уравнения как бы не отвечают условию. Но можно показать, что целые части корней (5 и 19) означают, что были две встречи: одна по истечении 5, вторая — 19 дней.

Если a — путь первого курьера, а b — путь второго, увеличенный на 40 лье, то, полагая, что первый находится в пути целое число x, а второй — целое число $x-3$ дней, аналогично получаем

$$5x^2-125x+552=24(b-a). \qquad (3)$$

Это очевидно, так как уравнение (2) выведено из уравнения (1) переменой знаков у всех членов и умножением их на 24. Подставим теперь в левую часть уравнения (2) вместо x сначала 5, а потом 6, так как меньший корень 5,72... содержится между этими числами. Тогда результат первой подстановки больше 0, а второй меньше 0. Но в силу тождества (3) разность $b-a$ всегда имеет одинаковый знак с трехчленом $5x^2 - 125x + 552$; следовательно, в конце 5-го дня $a < b$, а в конце шестого $a > b$. Итак, первая встреча, как и было сказано, имела место между пятым и шестым днем. Подобно этому можно доказать, что вторая встреча состоялась через 19 дней. Возможность этой встречи легко понять, так как второй курьер, увеличивая свою скорость по сравнению с первым, встретит его уже после того, как первый его обгонит. Это подтверждается исследованием, через сколько дней оба курьера будут иметь одинаковую скорость. Найдем число дней (13), содержащееся между 5 и 19. (Решение Штурма взято из книги Г. Н. Попова «Исторические задачи по элементарной математике». М.—Л., 1938, с. 210—211.)

Жак Шарль Франсуа Штурм (1803—1855) — известный французский математик (родом из Швейцарии), член Парижской академии наук. С 1840 г.— профессор Политехнической школы в Париже. Автор теоремы для определения числа корней алгебраических уравнений, лежащих на заданном отрезке. Составитель двухтомного руководства по математическому анализу, автор многих мемуаров по дифференциальным уравнениям, оптике и механике.

246. Предположим, что задача решена. Пусть AM — искомая секущая (рис. 71, *а*), а точки A и B — точки пересечения секущей с данной окружностью. Согласно условию,

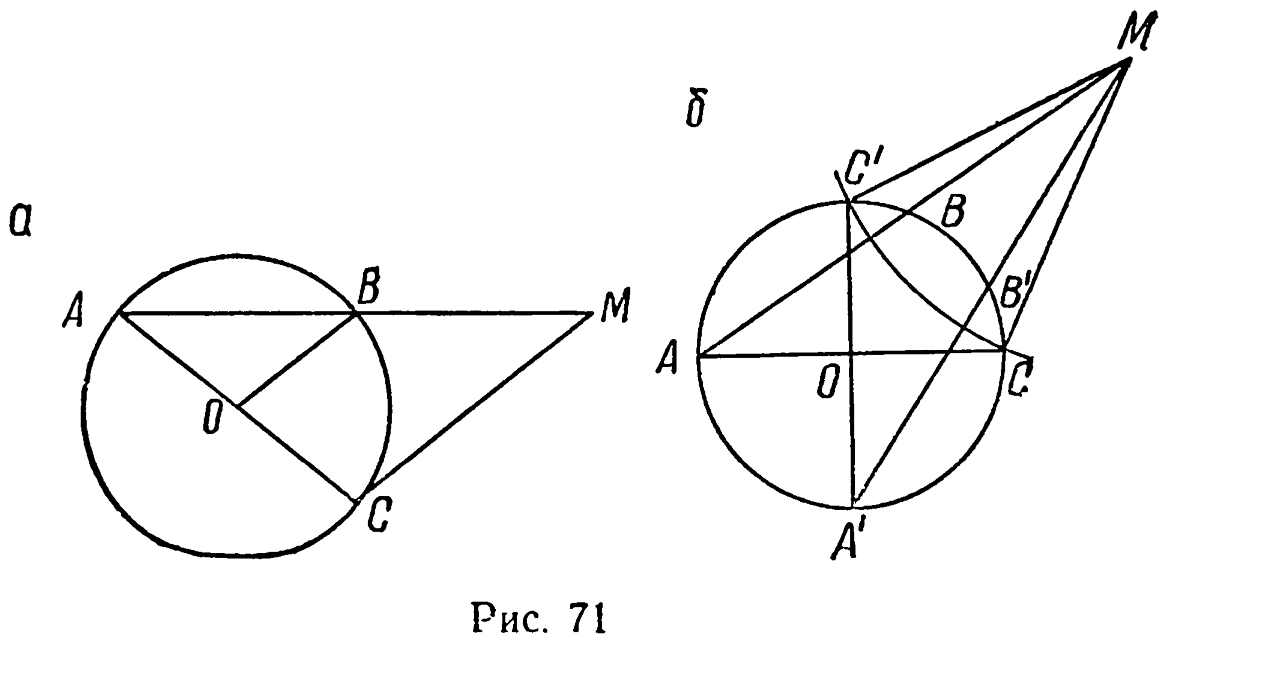


Рис. 71

$AB = BM$. Соединим точку A с центром O и продолжим отрезок AO до пересечения с окружностью в точке C. Точки B и M соединим прямыми соответственно с точками O и C.

Таким образом, получается треугольник ACM, у которого отрезок OB является средней линией. Но, как известно, средняя линия в треугольнике всегда параллельна основанию и равна половине длины основания. Отсюда $OB \parallel CM$ и $OB = \frac{CM}{2}$ или $CM = 2OB = 2R$, где R — радиус данной окружности.

Теперь, пользуясь проведенным анализом, легко построить искомую секущую. Для этой цели из точки M раствором циркуля, равным длине диаметра данной окружности, проводим окружность, которая пересечет данную в точках C и C' (рис. 71, *б*). Соединив эти точки с точкой O и продолжив полученные отрезки CO и $C'O$ до пересечения с окружностью соответственно в точках A и A', получим секущие AM и $A'M$, которые и будут искомыми. Из приведенных рассуждений вытекает, что задача имеет два решения.

Задача взята из книги «Теоремы и задачи элементарной геометрии» бельгийского математика Эжена Каталана (1814—1894), известного трудами по высшей и элементарной математике.

247. Анри Монде — феноменальный вычислитель, француз по происхождению. Родился в крестьянской семье в деревне близ г. Тур. Мальчик обладал удивительной способностью производить в уме весьма сложные вычисления. Впервые на него обратил внимание в 1840 г. содержатель пансиона города и представил его президенту Парижской академии наук ученому-геометру Понселе. На предварительной проверке в кругу академиков мальчику были заданы два вопроса: чему равен квадрат 756? сколько минут в 52 годах? Монде моментально дал правильные ответы.

Понселе предложил создать комиссию из числа академиков-математиков для основательного изучения математических способностей мальчика. В комиссию вошли Коши, Лиувилль, Штурм и Араго. 14 декабря 1840 г. состоялось испытание, на котором мальчик должен был ответить на весьма трудные вопросы, производя все вычисления в уме. Двенадцатым вопросом и была задача, которая приводится в настоящем сборнике.

Из отчета о проверке вытекает, что мальчик вполне справился с ролью феноменального вычислителя и на самые сложные вопросы отвечал уверенно, без погрешностей в вычислениях. Так, на вопрос: каковы два числа, разность квадратов которых равняется 133, мальчик быстро ответил, что такими числами будут 66 и 67. Когда ему сказали, что есть более простое решение, после секундного размышления он назвал и это решение, состоящее из чисел 13 и 6. Он, почти не задумываясь, моментально ответил, чему равняется квадрат числа 1204 и куб числа 1006. А. Монде весьма быстро справился и с такой замысловатой задачей: найти число, куб которого, увеличенный на 84, дает сумму, равную произведению того же числа на 37. В качестве ответа назвал два числа 3 и 4.

Легко проверить, что эти числа удовлетворяют условиям задачи. Действительно,

$$3^3 = 27;\ 27 + 84 = 111 = 3 \cdot 37;\ 4^3 = 64;\ 64 + 84 = 148 = 4 \cdot 37.$$

Обычный прием решения задачи таков:

$$x^2 - y^2 = 133;$$
$$(x + y)(x - y) = 1 \cdot 133 = 19 \cdot 7;$$
$$x + y = 19;$$
$$x - y = 7,$$
$$\text{откуда } x = 13,\ y = 6.$$

Далее,

$$x + y = 133;$$
$$x - y = 1,$$
$$\text{откуда } x = 67,\ y = 66.$$

248. Рассмотрим треугольник ABC. Возьмем на стороне BC между точками B и C точку D и соединим ее прямолинейным отрезком с вершиной A. Требуется доказать, что

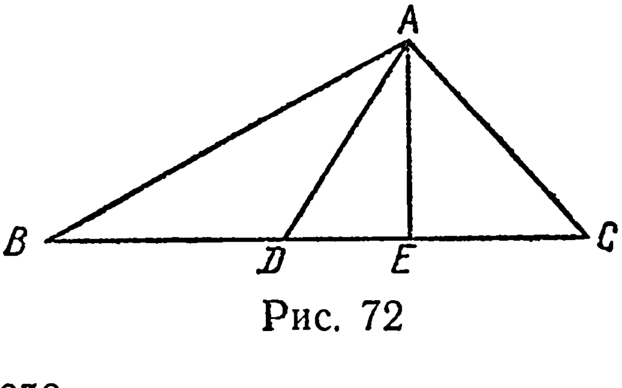


Рис. 72

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot DC \cdot BD.$$

Для доказательства из вершины A на BC опустим перпендикуляр AE. Для определенности будем считать, что точка E лежит между D и C (рис. 72). Тогда $\angle ADC$ будет острым, а $\angle ADB$ — тупым. Применяя дважды теорему о квадрате стороны треугольника, лежащей сначала против тупого, а потом против острого угла, получим

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 + 2BD \cdot DE; \qquad (1)$$

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2DC \cdot CE. \qquad (2)$$

Умножив равенство (1) на DC, а равенство (2) на BD, найдем

$$AB^2 \cdot DC = BD^2 \cdot DC + AD^2 \cdot DC + 2BD \cdot DE \cdot DC; \qquad (3)$$

$$AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot BD + DC^2 \cdot BD - 2DC \cdot DE \cdot BD. \qquad (4)$$

Сложив (3) и (4), будем иметь

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD = AD^2(BD + DC) + \\ + BD \cdot DC\,(BD + DC)$$

или окончательно

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot DC \cdot BD,$$

что и требовалось доказать.

В учебниках задача Стюарта называется теоремой Стюарта и применяется обычно к вычислению некоторых линий треугольника. Например, с помощью теоремы Стюарта можно решать задачи на вычисление длин биссектрис и медиан треугольника.

ОТВЕТЫ

1. 3. **4.** 9. **5.** 19 607. **6.** 3,16. **11.** $172\frac{21}{32}$. **30.** $\frac{4}{3}$. **39.** 84 кв. единиц. **43.** 45; $37\frac{1}{2}$; $22\frac{1}{2}$. **44.** $x=8$, $y=2$. **45.** 10; 6; 8. **55.** 28. **56.** 3360. **57.** Число, кратное 12. **58.** $\frac{6}{23}$ дня. **59.** Ослица несла 5 мешков, мул — 7. **61.** 84 лет. **62.** 2 таэля; $\frac{1}{2}$ таэля. **66.** 1 чжан 17 чи. **67.** $1\frac{29}{66}$; $1\frac{22}{66}$; $1\frac{8}{66}$; $1\frac{1}{66}$; $\frac{60}{66}$; $\frac{53}{66}$; $\frac{46}{66}$; $\frac{39}{66}$ шэна. **68.** Вес слитка золота 2 цзиня 3 лана 19 чжу; вес слитка серебра 1 цзинь 13 ланов 6 чжу. **69.** Через $15\frac{135}{191}$ дня; рысак пробежит $4534\frac{46}{191}$ ли, кляча — $1465\frac{145}{191}$ ли. **70.** Буйвол стоит $1\frac{13}{21}$ лана, баран — $\frac{20}{21}$ лана **71.** $9\frac{1}{4}$; $4\frac{1}{4}$; $2\frac{3}{4}$ доу. **72.** $\frac{9}{25}$; $\frac{7}{25}$; $\frac{4}{25}$ доу. **73.** $\frac{17}{23}$; $\frac{11}{23}$; $\frac{10}{23}$ даня. **74.** Буйвол стоит 1200, баран — 500, свинья — 300 цяней. **75.** Глубина колодца 7 чжан 2 чи 1 цунь; длина веревок — 2 чжана 6 чи 5 цуней, 1 чжан 9 чи 1 цунь, 1 чжан 4 чи 8 цуней, 1 чжан 2 чи 9 цуней, 7 чи 6 цуней. **76.** Глубина воды 1 чжан 2 чи; длина камыша 1 чжан 3 чи. **77.** *Б* прошел на восток $10\frac{1}{2}$ бу, *А* прошел по косому направлению $14\frac{1}{2}$ бу, когда догнал его **78.** Ширина 2 чи 8 цуней, высота 9 чи 6 цуней **79.** 250 бу. **81.** $1735\frac{5}{12}$ чи. **82.** $527\frac{7}{9}$ чи. **83.** $3\frac{9}{17}$ бу. **85.** 164 чжана 9 чи с большой частью цуня. **87.** 4. **88.** 20; $67\frac{1}{4}$. **89.** 15. **90.** $x=\frac{v_1 d}{v_1+v_2}$. **91.** $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$. **94.** $h\left(1+\frac{d}{a+b}\right)$. **98.** 48. **121.** $10\frac{1}{5}$. **123.** $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$. **125.** 18. **126.** 2. **127.** $2\frac{1}{2}$; **128.** 12. **129.** $\frac{Rh}{R-r}$.

131. $5\frac{2}{3}$ локтя. **135.** $175\frac{1}{5}$ дня. **138.** Старых 100, молодых 12. **139.** 36. **140.** 225 копий. **141.** 352 аршина. **142.** 44 стопы (фута). **143.** 40 стоп (футов) **144.** $458\frac{2}{7}$. **145.** 8 дней. **146.** За гвозди надо уплатить 41 787 руб. $3\frac{3}{4}$ коп. **147.** За 12 часов; 30, 27, 24 четверти. **148.** 192 аршина; 384 рубля. **151.** $9\frac{7}{37}$. **153.** 18; 6. **154.** 35 дней. **155.** $4\frac{4}{5}$ руб. **167.** 420 **168.** 15 минут. **169.** 232 руб. 5 коп **170.** 12 зайцев и 18 кур. **171.** $93\frac{3}{4}$ коп. **172.** Крестьянин получил 5 коп., дочь купца — $7\frac{1}{2}$ коп., купец — $12\frac{1}{2}$ коп **173.** $6\frac{1}{4}$; $2\frac{1}{2}$ коп. **174.** $1\frac{1}{2}$; $5\frac{1}{4}$ коп **175.** 16. **176.** 7 ч 30 мин. **179.** По кругу. **180.** 8. **181.** 10,77 аршина. **188.** 2. **197.** 237 256 предметов **198.** $7\frac{2}{17}$; $9\frac{14}{17}$ динария. **199.** 9 воробьев, 10 горлиц, 11 голубей **200.** $5 - \sqrt{21\frac{8}{27}}$. **203.** $3\frac{9}{17}$; $7\frac{13}{17}$; $9\frac{3}{17}$ флорина. **205.** 7. **208.** $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ **213.** 4; 3; 2; —5 **222.** 12 000; 8000. 6000 ливров **223.** $y^2 + 2ay - \frac{a^2}{2}$. **225.** 36 **226.** 1480 фунтов; **231.** 40 или 60 пистолей.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ТАБЛИЦЫ РУССКИХ, КИТАЙСКИХ И МЕТРИЧЕСКИХ МЕР

I. Меры веса

Русские	Китайские	Метрические
Берковец = 10 пудам	Дань (пикуль) = = 100 цзинь	Тонна = 1000 **кг**
Пуд = 40 фунтам	Цзинь (кетти) = = 16 лян	Центнер = 100 **кг**
Фунт = 32 лотам	Лян (таэль) = = 10 цянь	Килограмм = 1000 **г**
Лот = 3 золотникам	Цянь (мэйс) = = 10 фынь	Грамм = 10 **дц**
Фунт = 96 золотникам	Фынь (кандерин) = = 10 ли	Дециграмм = 10 **сг**
Золотник = 96 долям	Ли (кеш) = 10 хао	Грамм = 1000 **мг**

II. Меры объема сыпучих тел и жидкостей

Бочка = 40 ведрам	Ху = 5 доу	Гектолитр = 100 **л**
Ведро = 10 штофам или 20 бутылкам	Доу = 10 шэн	
Четверть = 8 четверикам	Шэн = 10 хэ	Литр = 1 дм³
	Хэ = 10 цзо	
Четверик = 8 гарнцам	Цзо = 0,001 доу	Куб. дециметр = = 1000 см³

III. Меры поверхностей (квадратные)

Кв. верста = 250 000 кв. саженям	Цин = 100 му	Кв. километр = **10 га**
Кв. сажень = 9 кв. аршинам	Му = 10 фынь	Гектар = 100 ар = = 10 000 м²
Кв. аршин = 256 кв. вершкам	Фынь = 10 кв. ли	Ар = 100 м²
		Кв. метр = 10 000 **см²**

Кв. сажень = 49 кв. футам	Кв. ли = 10 хао	
Кв. фут = 144 кв. дюймам	Хао = 6 кв. чи	
Кв. дюйм = 100 кв. линиям	Кв. бу = 25 кв. чи	
Десятина = 2400 кв. саженям		

СРАВНИТЕЛЬНЫЕ ТАБЛИЦЫ РУССКИХ, КИТАЙСКИХ И МЕТРИЧЕСКИХ МЕР

I. Перевод русских мер длины в китайские и метрические

Географическая миля	12,885 ли	7,422 км
Морская миля	3,216 ли	1,852 км
Верста	1,852 ли	1,067 км
Сажень	6,667 чи	2,134 м
Аршин	2,222 чи	0,711 м
Фут	0,952 чи	0,305 м
Вершок	1,391 цуня	4,445 см
Дюйм	7,933 фыня	3,540 см
Линия	7,933 ли	2,540 см

II. Перевод китайских мер длины в русские и метрические

Ли	0,540 версты	0,576 км
Чжан	1,5 сажени	3,2 м
Бу (Гун)	2,25 аршина	1,60 м
Чи	1,05 фута	32 см
Цунь	1,26 дюйма	32 мм

III. Перевод метрических мер длины в русские и китайские

Километр	0,937 версты или 467 сажен	1,736 ли
Метр	22,5 вершка	3,125 чи
Сантиметр	0,225 вершка	0,031 чи

IV. Перевод русских мер веса в китайские и метрические

Берковец (10 п.)	2,745 даня (пикуля)	163,805 кг
Пуд	27,447 цзиня (кетти)	16,380 кг
Фунт	10,979 ляна	409,512 г
Золотник	1,144 цяня	4,266 г
Доля	1,192 ли	0,044 г

V. Перевод китайских мер веса в русские и метрические

Дань (пикуль)	3 пуд. 25,74 фунта	59,682 кг
Цзинь (кетти)	1,457 фунта	0,597 кг
Лян (таэль)	8,744 золотника	37,301 г
Цянь (мэйс)	83,945 доли	3,730 г
Фынь (кандерин)	8,395 доли	0,373 г
Ли (кеш)	0,839 доли	0,037 г

VI. Перевод метрических мер веса в русские и китайские

Тонна	61,048 пуда	16,756 даня (пикуля)
Центнер	6,105 пуда	1,676 даня
Килограмм	2,442 фунта	1,676 цзиня
Грамм	0,234 золотника	2,681 фыня

VII. Перевод русских мер объема в китайские и метрические

Бочка	4,751 ши	4,92 гл
Ведро	1,188 доу	12,293 л
Штоф	1,188 шэна	1,23 л
Бутылка	0,594 шэна	0,615 л
Четверть	2,027 ши	209,91 л
Четверик	2,534 доу	26,239 л
Гарнц	39170 шэна	3,280 л

VIII. Перевод китайских мер объема в русские и метрические

Ши	8,4194 ведра или 3,9465 четверика	103,55 л
Доу	16,84 бутылки или 3,157 гарнца	10,355 л
Шэн	1,684 бутылки или 0,3157 гарнца	1,035 л

IX. Перевод метрических мер объема в русские и китайские

Гектолитр	8,1305 ведра или 0,476 четверти	9,657 доу
Литр	1,626 бутылки или 0,296 гарнца	9,657 хэ

X. Перевод русских мер поверхности в китайские и метрические

Кв. верста	3,429 кв. ли	113,806 га
Десятина	17,778 му	1,093 га
Кв. сажень	1,778 кв. бу	4,552 м²
Кв. аршин	4,742 фыня	0,506 м²
Кв. фут	0,906 кв. чи	0,093 м²
Кв. вершок	0,19 кв. чи	19,76 см²
Кв дюйм	0,006 кв. чи	6,45 см²

XI. Перевод китайских мер поверхности в русские и метрические

Кв. ли	30,375 десятины	33,178 га
Кв. цин	5,624 »	6,13 га
Кв му	135 кв. саженей	614 м²
Кв. фынь	13,497 кв сажени	61,44 м²
Кв. ли	1,35 »	6,14 м²
Кв. бу	27,549 кв. фута	4,56 м²

XII. Перевод метрических мер поверхности в русские и китайские

Кв. километр	0,879 кв. версты	3,014 кв. ли
Гектар	0,915 десятины	16,276 му
Кв. метр	1,977 кв. аршина	9,765 кв. чи

XIII. Перевод русских кубических мер в китайские и метрические

Куб. сажень = = 27 куб. аршин = =343 куб. фута	345,698 куб. чи	9,713 м³
Куб. аршин = = 4096 куб. вер.	12,794 куб. чи	0,360 м³
Куб. фут = 1728 куб. дюймов	1,007 куб. чи	0,028 м³

XIV. Перевод китайских кубических мер в русские и метрические

Куб. бу = 125 куб. чи	0,362 куб. сажени	3,513 м³
Куб. чи	0,993 куб. фута	0,028 м³

XV. Перевод метрических кубических мер в русские и китайские

Куб. метр	2,780 куб. аршина или 35,315 куб. фута	35,578 куб. чи

Замечание. Основными единицами китайских мер, утвержденных законом в 1908 г., считаются: чи — единица длины, лян (таэль) — веса, му — площади, доу — объема.

ЛИТЕРАТУРА

Адамар Ж. Элементарная геометрия, ч. I. Планиметрия. М., 1948.

Адлер А. Теория геометрических построений. Изд. 3-е. М.—Л., 1940.

Александров И. И. Сборник геометрических задач на построение. М., 1950.

Алексеев Н. П. Дальневосточные меры. М.— Л., 1927.

Ал-Каши. Ключ арифметики и трактат об окружности. М., 1956.

Андронов И. К. Деятельность Л. Н. Толстого в области математического образования и его особый интерес к предмету математики.— «Математика в школе», 1960, № 6; 1961, № 1.

Аргунов Б. И., Балк М. Б. Геометрические построения на плоскости. М., 1955.

Архимед. Сочинения. М., 1962.

Балк М. Б. Геометрические приложения понятия о центре тяжести. М., 1959.

Башмакова И. Г. Лекции по истории математики в древней Греции. «Историко-математические исследования», вып. XI, 1958.

Башмакова И. Г., Юшкевич А. П. Происхождение систем счисления. Энциклопедия элементарной математики, кн. 1. М.— Л., 1951.

Беллюстин В. Как постепенно люди дошли до настоящей арифметики. М.— Л., 1941.

Белый Ю. А., Швецов К. П. Об одной русской геометрической рукописи первой четверти XVII в. «Историко-математические исследования», вып. XII, 1959.

Березкина Э. И. О «Математике в девяти книгах». «Историко-математические исследования», вып. X, 1957.

Бурбаки Н. Очерки по истории математики. Пер. с франц. М., 1963.

Вайман А. А. Шумеро-вавилонская математика. М., 1961.

Ван дер Варден Б. Л. Пробуждающаяся наука. Математика древнего Египта, Вавилона и Греции. Пер. с гол. М., 1959.

Ващенко-Захарченко М. Е. История математики. Исторический очерк развития геометрии. Киев, 1883.

Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия. Пер. с нем. М., 1960.

Выгодский М. Я. Арифметика и алгебра в древнем мире Изд. 2-е. М., 1967.

Выгодский М. Я. Происхождение «правила двух ложных положений». «Историко-математические исследования», вып. XIII, 1960.
Гейберг И. Л Естествознание и математика в классической древности. М.—Л., 1936.
Глейзер Г. И. История математики в школе. М., 1964.
Гнеденко Б. В. Очерки по истории математики в России. М., 1946.
Декарт Р. Геометрия. М.— Л., 1938.
Делоне Б. Н. Математика и ее развитие в России. М., 1948.
Депман И. Я. Рассказы о математике. Л., 1954.
Депман И. Я. Рассказы о решении задач. Л., 1957.
Депман И. Я. История арифметики. М., 1959.
Депман И. Я. Задача Архимеда — четвертая знаменитая задача древности. В сб.: Вопросы элементарной математики и методики ее преподавания. Л., 1963.
Зетель С. И. Геометрия линейки и геометрия циркуля. М. 1957.
Из опыта проведения внеклассной работы по математике в средней школе. Сб. статей. М., 1955.
Колосов А. А. Книга для внеклассного чтения по математике в старших классах. М., 1963.
Кольман Э. История математики в древности. М., 1961.
Кордемский Б. А. Деление окружности.— «Математика в школе», 1953, № 1.
Кордемский Б. А. Очерки о математических задачах на смекалку. М , 1958.
Кэджори Ф. История элементарной математики с указаниями на методы преподавания. Одесса, 1917.
Лебедев В. И. Очерки по истории точных наук. Вып. 1, «Кто изобрел алгебру?» М., 1916; вып. 2, «Кто автор первых теорем геометрии?» М., 1916; вып. 3, «Как постепенно обобщалось понятие о числе». М., 1917; вып. 4, «Знаменитые геометрические задачи древности». М., 1917.
Литцман В. Теорема Пифагора. М., 1960.
Майстров Л. Е О математических знаках и терминах, встречаемых в археологических памятниках древней Руси. «Историко-математические исследования», вып. X, 1957.
Малыгин К. А. Элементы историзма в преподавании математики в средней школе. Пособие для учителей. М., 1958.
Молодший В. Н. Элементы истории математики в школе. М., 1953
Молодший В. Н. Основы учения о числе в XVIII и начале XIX века. Изд. 2-е. М., 1963.
«Начала» Евклида, книги I—VI. М.—Л., 1948.
Ньютон И. Всеобщая арифметика. М., 1948.

Попов Г. Н. Памятники математической старины в задачах. М.— Л., 1929.

Попов Г. Н. Сборник исторических задач по элементарной математике. М.—Л., 1938.

Потоцкий М. В. Аналитическая геометрия на плоскости. М., 1956.

Радемахер Г., Теплиц О. Числа и фигуры. М., 1962.

Раик А. Е. Две лекции о египетской и вавилонской математике. «Историко-математические исследования», вып. XII, 1959.

Раик А. Е. Новые реконструкции некоторых задач из древнеегипетских и вавилонских текстов. «Историко-математические исследования», вып. XI, 1958.

Рудио Ф. О квадратуре круга с приложением истории вопроса. Пер. с нем. М.—Л., 1936.

Рыбников К. А. История математики, ч. I. М., 1960; ч. II. М., 1963.

Тропфке И. История элементарной математики в систематическом изложении, т. I. Пер. с нем. М., 1914.

Фаццари Г. Краткая история математики с древнейших времен. Пер. с итал. М., 1923.

Хайям Омар. Математические трактаты. «Историко-математические исследования», вып. VI, 1953.

Хайям Омар. Трактаты. М., 1961.

Хинчин А. Я. Великая теорема Ферма. М.—Л., 1932.

Цейтен Г. Г. История математики в XVI и XVII веках. Пер. с нем. М.—Л., 1938.

Цейтен Г. Г. История математики в древности и средние века. Пер. с нем. М.— Л., 1938

Чистяков В. Д. Материалы по истории математики в Китае и Индии. М., 1960.

Чистяков В. Д Рассказы о математиках. Минск, 1963.

Чистяков В. Д Три знаменитые задачи древности. М, 1963.

Швецов К. И. О характерных чертах арифметических рукописей XVII столетия.— «Математика в школе», 1954, № 5.

Шереметевский В. П. Очерки по истории математики. М.— Л., 1940.

Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 2. Геометрия (планиметрия). М., 1952.

Шнирельман Л. Г. Простые числа. М.—Л., 1940.

Юшкевич А. П. О математике народов Средней Азии в IX—XV вв «Историко-математические исследования», вып. IV, 1951.

Юшкевич А. П. Достижения китайских ученых в области математики. «Историко-математические исследования», вып. VIII, 1955.

Юшкевич А. П. История математики в средние века. М., 1961.

СОДЕРЖАНИЕ

Василий Дмитриевич Чистяков

СТАРИННЫЕ ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Изд. 3-е, испр.

Редактор *С. С. Голод*
Мл. редактор *Л. С. Кравченко*
Оформление *Р. Д. Кондрада*
Худож. редактор *А. Г. Звонарев*
Техн. редактор *М. Н. Кислякова*
Корректоры *Л. А. Барковская, В. В. Неверко*

ИБ № 429
Подп. к печати 31/I 1978 г. Бумага $70\times108^1/_{32}$. Типогр. № 1. Печ. л. 8,5(4,9). Уч.-изд. л. 11,38. Изд. № 77—37. Заказ 477. Тираж 100 000 экз. Цена 55 коп.

Издательство «Вышэйшая школа» Государственного комитета Совета Министров БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Редакция литературы по математике, физике и энергетике. 220004. Минск, Парковая магистраль, 11, Дом книги.

Полиграфический комбинат им. Я. Коласа Государственного комитета Совета Министров БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Минск, ул. Красная, 23.

Чистяков В. Д.

Ч68 Старинные задачи по элементарной математике. Изд. 3-е, испр. Мн., «Вышэйш. школа», 1978.

272 с. с ил.

Сборник старинных задач, включающий задачи Вавилона, Египта, Греции, Китая, Индии, арабские и русские задачи, а также задачи Западной Европы. Состоит из двух частей: первая — тексты задач, вторая — исторические экскурсы, решения и указания.

Может быть полезен учащимся и учителям, а также всем, кто интересуется математикой и ее историей. — Список лит. на с. 267—269.

Ч $\frac{20202-035}{М\ 304(05)-78}$38—78 51(09)